Рецензенти:

Др Татомир П. Анђелић
редовни професор Природно-математичког факултета у Београду

Др Илија Лукачевић
доцент Природно-математичког факултета у Београду

Решењем ректора Универзитета у Београду број 06-2832/1 од 23. II 1973. године, на предлог Универзитетске комисије за уџбенике, ова књига је примљена као стални помоћни универзитетски уџбеник

У Н И В Е Р З И Т Е Т У Б Е О Г Р А Д У

МАРКО Д. ЛЕКО
МИЛАН ПЛАВШИЋ

# РЕШЕНИ ПРОБЛЕМИ ИЗ ТЕНЗОРСКОГ РАЧУНА

## СА ПРИМЕНАМА У МЕХАНИЦИ

по уџбенику ТЕНЗОРСКИ РАЧУН проф. Татомира П. Анђелића

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ
ГРАЂЕВИНСКА КЊИГА
БЕОГРАД, 1973.

По решењу Републичког секретаријата за културу СРС бр. 413-359/73-02 од 5. V 1973. године ова књига је ослобођена пореза на промет производа

За предузеће одговара:

*Љубица Јурела*, главни уредник,
*Драгомир Лазин*, уредник,
*Емилија Божиновић*, технички уредник,
*Александар Бакша*, коректор

Штампа: Београдски издавачко-графички завод, Београд, Булевар војводе Мишића 17.

## ПРЕДГОВОР

*Тензорски рачун је новијег датума и развио се паралелно с теоријом релативности. Огромну корист није испољио само у теорији релативизма, која се без њега не би ни могла излагати, него и у примени у највећем броју области механике и у диференцијалној геометрији. Слободно се може рећи да је данас немогуће изучавати механику без познавања тензорског рачуна.*

*На студијској групи механике Природно-математичког факултета у Београду тензорски рачун се користи као једно од најважнијих математичких оруђа, па се и предаје као посебан предмет. За тај предмет постоји на нашем језику уџбеник Тензорски рачун од проф. др Татомира П. Анђелића, који је доживео два издања. Уџбеник садржи и богату збирку задатака, које је аутор делимично сам формулисао а делимично прикупио из најпознатије светске литературе.*

*Осећали су се, међутим, недостаци при изучавању тензорског рачуна. Пре свега, у збирци задатака из уџбеника проф. Анђелића нису наведени резултати тих задатака, што је, углавном, случај и код свих сличних уџбеника светске литературе. С друге стране, и за студенте механике Природно-математичког факултета у Београду, који похађају и вежбе из тензорског рачуна, а поготову за оне који тензорски рачун изучавају самостално, чест је случај да их неискуство у примени тензорског рачуна доводи у ситуацију да у већини задатака не умеју да се снађу у примени научене теорије. Стога се наметала потреба за једним уџбеником који би увео студента у примену тензорског рачуна.*

*У том циљу ми смо и написали ову књигу у којој смо дали цео ток решавања свих задатака из уџбеника Тензорски рачун проф. Татомира П. Анђелића.*

*Наши задаци су нумерисани редом од 1 на даље, али је уз сваки задатак, у загради, наведен број одељка и број задатка онако како су они наведени у другом издању поменутог уџбеника проф. Анђелића. Поред тога, у решавању задатака честа су позивања на резултате изложене у том уџбенику. То друго издање је издало издавачко предузеће „Научна књига“ из Београда 1967. године.*

*Читалац ће запазити да су у извесном броју задатака измењени текстови. Те измене су се, током решавања, показале као неопходне. Оне су последица тога што аутори тих задатака, при њиховом постављању, нису те задатке и решавали, па нису имали увид у ток њиховог решавања који је, у тим случајевима, захтевао другачију формулацију. Све такве измене су извршене уз сагласност или по сугестији проф. Анђелића.*

*Потребно је још напоменути да смо при решавању неких задатака били принуђени да излажемо и неке појединости теоријског карактера. То смо учинили у оним задацима који се, иначе, не би могли решити на основу оног што је изложено у поменутом уџбенику проф. Анђелића.*

*Користимо и ову прилику да захвалимо проф. др Татомиру П. Анђелићу за пружену помоћ и упућивање на изворну литературу појединих задатака. Такође, при решавању неких проблема велику помоћ нам је пружио пок. проф. др Растко Стојановић. Захваљујемо и нашем колеги Милошу Радосављевићу, дипл. механичару, који нам је много помогао при изради цртежа. Најзад, захваљујемо издавачком предузећу „Грађевинска књига", његовој техничкој редакцији, слагачима (математичког слога) Београдског издавачко-графичког завода и колеги Александру Бакши, коректору ове књиге, за велики труд да књига изађе што пре и у што бољем облику.*

*ПИСЦИ*

## САДРЖАЈ

# I. УВОДНА РАЗМАТРАЊА

## 1. Ознаке. Системи величина

**Задатак 1.** (Одељак 1., задатак 1.). Колики је број могућих типова за неки систем $k$-ог реда?

***Решење***: Уочимо неки систем $k$-ог реда, рецимо,

$$a^{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k}.$$

Да бисмо закључили колики је број могућих типова овог система, поступићемо на следећи начин.

Ако индекс $i_1$ пишемо као доњи, тј.

$$a_{i_1}^{i_2 i_3 \ldots i_k},$$

добијамо један нови могући тип система. Други нови тип добијамо ако као доње пишемо индексе $i_1$ и $i_2$, тј.

$$a_{i_1 i_2}^{i_3 \ldots i_k}.$$

Ако тако поступимо даље, пишући доле увек по један индекс више, добићемо $k$-ти могући тип

$$a_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k},$$

што заједно са првобитним, кад су сви индекси били горе, чини укупно $k+1$ могућих типова.

Према томе, закључујемо, систем $k$-ог реда има $k+1$ могућих типова.

**Задатак 2.** (Одељак 1., задатак 2.). Колики је број елемената у систему другог и трећег реда, кад индекси узимају вредности 1, 2, 3 и 4?

***Решење***: У систему $k$-ог реда, кад индекси узимају вредности од 1 до $N$, биће укупан број елемената $N^k$. Према томе, у систему другог реда, кад индекси узимају вредности 1, 2, 3 и 4, биће $4^2=16$ елемената. У систему трећег реда, кад индекси такође узимају вредности 1, 2, 3 и 4, биће $4^3=64$ елемената.

**Задатак 3.** (Одељак 1., задатак 3.). Како у нашим ознакама изгледа систем коефицијената једне хомогене квадратне форме и коју особину имају елементи тог система?

*Решење*: Квадратну форму,

$$\begin{aligned}&a_{11}x^1x^1+a_{12}x^1x^2+a_{13}x^1x^3+\cdots+a_{1N}x^1x^N+\\&+a_{21}x^2x^1+a_{22}x^2x^2+a_{23}x^2x^3+\cdots+a_{2N}x^2x^N+\\&+a_{31}x^3x^1+a_{32}x^3x^2+a_{33}x^3x^3+\cdots+a_{3N}x^3x^N+\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+a_{N1}x^Nx^1+a_{N2}x^Nx^2+a_{N3}x^Nx^3+\cdots+a_{NN}x^Nx^N,\end{aligned}$$

можемо написати у облику

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}x^ix^j,$$

при чему је, очигледно,

$$a_{12}=a_{21},\ a_{13}=a_{31},\ \ldots,\ a_{N-1\,N}=a_{N\,N-1}.$$

Систем коефицијената можемо написати у облику матрице

$$\{a_{ij}\}=\begin{Bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1N}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \ldots & a_{NN}\end{Bmatrix},$$

чији елементи задовољавају услов

$$a_{ij}=a_{ji}.$$

## 2. Ајнштајнова конвенција о сабирању

**Задатак 4.** (Одељак 2., задатак 1.). Написати у потпуности за $i, j=1, 2, 3$ систем линеарних једначина изражен сажето у облику

$$a_{ij}x^j=b_i.$$

*Решење*: С обзиром да је $i$ слободан, а $j$ неми индекс, горњој једначини одговарају следеће три скаларне једначине

$$\begin{aligned}a_{11}x^1+a_{12}x^2+a_{13}x^3&=b_1,\\a_{21}x^1+a_{22}x^2+a_{23}x^3&=b_2,\\a_{31}x^1+a_{32}x^2+a_{33}x^3&=b_3.\end{aligned}$$

**Задатак 5.** (Одељак 2., задатак 2.). Колико сабирака има у трилинеарној форми

$$a_{ijk}x^iy^jz^k,\qquad (i, j, k=1, 2, 3)?$$

*Решење*: Како су променљиве $x$, $y$ и $z$ различите и међусобно независне, то ће форма имати онолико сабирака колико систем $a_{ijk}$ има координата. С обзиром да је то систем трећег реда и индекси узимају вредности 1, 2, 3, он има $3^3=27$ координата, тј. дата трилинеарна форма има 27 сабирака.



**Задатак 6.** (Одељак 2., задатак 3.). Систем првог реда $a_i^{ij}$ написати у потпуности за $i, j=1, 2, 3$.

*Решење*: Као систем првог реда, с обзиром да индекси узимају вредности 1, 2 и 3, систем $a_i^{ij}$ има три координате. Те координате су, уређене у врсту

$$\{a_1^{11}+a_2^{21}+a_3^{31}\quad a_1^{12}+a_2^{22}+a_3^{32}\quad a_1^{13}+a_2^{23}+a_3^{33}\},$$

или колону

$$\begin{Bmatrix}a_1^{11}+a_2^{21}+a_3^{31}\\ a_1^{12}+a_2^{22}+a_3^{32}\\ a_1^{13}+a_2^{23}+a_3^{33}\end{Bmatrix}.$$

**Задатак 7.** (Одељак 2., задатак 4.). Написати у потпуности систем $a_{i\alpha}x^\alpha$ кад $i$ узима вредности 1, 2, 3, а $\alpha$ вредности 1 и 2.

*Решење*: Пошто слободан индекс $i$ узима вредности 1, 2, 3, и ово је систем првог реда који има три координате. Те координате су, уређене у врсту

$$\{a_{11}x^1+a_{12}x^2\qquad a_{21}x^1+a_{22}x^2\qquad a_{31}x^1+a_{32}x^2\},$$

или колону

$$\begin{Bmatrix}a_{11}x^1+a_{12}x^2\\ a_{21}x^1+a_{22}x^2\\ a_{31}x^1+a_{32}x^2\end{Bmatrix}.$$

## 3. Симетрични и антисиметрични системи

**Задатак 8.** (Одељак 3., задатак 1.). У антисиметричном систему $a^{ijk}$, кад је $i, j, k=1, 2, 3, 4$:

а) одредити укупан број елемената тог система;

б) одредити број елемената једнаких нули;

в) одредити укупан број елемената различитих од нуле;

г) написати све елементе независне међу собом.

*Решење*: а) С обзиром да је систем трећег реда и да индекси узимају вредности 1, 2, 3 и 4, он има $4^3=64$ елемената (координата).

б) Број елемената једнаких нули једнак је разлици укупног броја елемената и броја елемената различитих од нуле. Како је број елемената различитих од нуле једнак броју варијација треће класе од четири елемента, за број елемената једнаких нули добивамо

$$64-V_3(4)=64-\frac{4!}{(4-3)!}=64-24=40.$$

в) Број елемената различитих од нуле једнак је броју варијација треће класе од четири елемента, тј.

$$V_3(4)=\frac{4!}{(4-3)!}=24.$$

г) Број међусобно независних елемената једнак је броју комбинација треће класе од четири елемента, тј.

$$K_3(4)=\binom{4}{3}=4.$$

Ти елементи су $a^{123}$, $a^{124}$, $a^{134}$, $a^{234}$.

**Задатак 9.** (Одељак 3., задатак 2.). Ако је $a_{ij}$ антисиметрични систем, доказати да је тада

$$a_{ij}\,x^i\,x^j=0,$$

и обрнуто, ако је $a_{ij}\,x^i\,x^j=0$ за све вредности $x^i$, мора $a_{ij}$ бити антисиметрични систем.

***Решење***: Квадратну форму $a_{ij}$ можемо, заменом немих индекса $i$ и $j$, написати у облику $a_{ji}\,x^j\,x^i$, односно можемо писати

$$a_{ij}\,x^i\,x^j=a_{ji}\,x^i\,x^j.$$

Како је $a_{ij}$ антисиметрични систем, тј. $a_{ij}=-a_{ji}$, биће

$$a_{ij}\,x^i\,x^j=-a_{ij}\,x^i\,x^j.$$

Одавде следи

$$2\,a_{ij}\,x^i\,x^j=0$$

односно

$$a_{ij}\,x^i\,x^j=0.$$

Да бисмо доказали обрнуто пођимо од релације

$$2\,a_{ij}\,x^i\,x^j=0.$$

Ову релацију можемо написати у облику

$$a_{ij}\,x^i\,x^j+a_{ij}\,x^i\,x^j=0,$$

или, ако у другом члану заменимо неме индексе $i$ и $j$, у облику

$$a_{ij}\,x^i\,x^j+a_{ji}\,x^j\,x^i=0,$$

односно

$$(a_{ij}+a_{ji})\,x^i\,x^j=0.$$

Како ова релација мора да важи за свако $x^i$, мора бити

$$a_{ij}+a_{ji}=0$$

тј.

$$a_{ij}=-a_{ji},$$

што је и требало доказати.

**Задатак 10.** (Одељак 3., задатак 3.). У ком антисиметричном систему ће број међусобно независних координата бити једнак целом броју $N$ до кога се индекси тог система мењају?

***Решење***: Број међусобно независних елемената антисиметричног система $k$-ог реда, где индекси узимају вредности 1, 2, 3, . . . , $N$, једнак је броју комбинација $k$-те класе од $N$ елемената, тј.

$$K_k(N)=\binom{N}{k}.$$



Ако број независних елемената треба да буде једнак целом броју $N$ до кога се индекси мењају, онда је

$$\binom{N}{k}=N,$$

односно

$$\frac{N!}{k!\,(N-k)!}=N.$$

Одавде добивамо

$$(N-1)!=k!\,(N-k)!,$$

одакле следи

$$N-1=k,$$

што значи да ће број независних елемената антисиметричног система бити једнак целом броју $N$ до к га се индекси мењају, ако и само ако је ред система за један мањи од целог броја $N$.

На пример, ако у систему другог реда индекси узимају вредности 1, 2, 3, тј. ако је $k=2$, $N=3$, независни елементи су

$$a_{12},\quad a_{13},\quad a_{23}.$$

Ако је $k=3$, $N=4$, независни елементи су

$$a_{123},\quad a_{124},\quad a_{134},\quad a_{234},$$

итд.

**Задатак 11.** (Одељак 3., задатак 4.). Написати у потпуности координате система

$$a^{ij}=u^i\,v^j-u^j\,v^i$$

за $i, j=1, 2, 3$ и показати да је систем антисиметричан.

***Решење***: Координате система можемо представити у облиу матрице, тј.

$$\begin{Bmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13}\\ a^{21} & a^{22} & a^{23}\\ a^{31} & a^{32} & a^{33}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 & u^1 v^2-u^2 v^1 & u^1 v^3-u^3 v^1\\ u^2 v^1-u^1 v^2 & 0 & u^2 v^3-u^3 v^2\\ u^3 v^1-u^1 v^3 & u^3 v^2-u^2 v^3 & 0\end{Bmatrix}.$$

Из облика матрице видимо да је она антисиметрична, тј. да је систем $a^{ij}$ антисиметричан.

Међутим, независно од тога које вредности узимају индекси система, можемо показати да је он антисиметричан. Наиме, ако разменимо места индексима $i$ и $j$, имаћемо

$$a^{ji}=u^j\,v^i-u^i\,v^j=-(u^i\,v^j-u^j\,v^i)=-a^{ij},$$

што је и требало показати.

**Задатак 12.** (Одељак 3., задатак 5.). Какав је систем

$$b^{ij}=u^i\,v^j+u^j\,v^i?$$

*Решење*: Ако разменимо места индексима $i$ и $j$, добивамо

$$b^{ji} = u^j v^i + u^i v^j = b^{ij},$$

на основу чега закључујемо да је систем симетричан.

**Задатак 13.** (Одељак 3., задатак 6.). Нека буде дат двоструки систем $a_{mn}$ који задовољава једначину

$$b a_{mn} + c a_{nm} = 0.$$

Показати да је та једначина задовољена за $b = -c$, кад је $a_{mn}$ симетрични систем и за $b = c$, кад је $a_{mn}$ антисиметрични систем.

*Решење*: Ако је $a_{mn}$ симетричан систем, тј. $a_{mn} = a_{nm}$, тада је

$$b a_{mn} + c a_{nm} = b a_{mn} + c a_{mn} = (b + c)\, a_{mn} = 0.$$

Одавде следи, с обзиром да је $a_{mn}$ произвољни симетрични систем,

$$b + c = 0, \quad b = -c.$$

У случају кад је $a_{mn}$ антисиметрични систем, тј. $a_{mn} = -a_{nm}$, имамо

$$b a_{mn} + c a_{nm} = b a_{mn} - c a_{mn} = (b - c)\, a_{mn} = 0,$$

одакле следи, с обзиром да $a_{mn}$ може бити произвољни антисиметрични систем,

$$b - c = 0, \quad b = c,$$

што је и требало показати.

## 4. Операције са системима

**Задатак 14.** (Одељак 4., задатак 1.). На основу § 3, зад. 4 и 5 показати да се сваки систем другог реда може представити као збир једног симетричног и једног антисиметричног система.

*Решење*: Уочимо ма који систем другог реда $a_{ij}$. Очигледно је да га можемо изразити у облику

$$a_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij} + \frac{1}{2} a_{ji} + \frac{1}{2} a_{ij} - \frac{1}{2} a_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}).$$

Ако уведемо ознаке

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}),$$

$$c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}),$$

тада имамо

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}.$$

Лако је проверити, разменом места индексима $i$ и $j$, да је $b_{ij}$ симетричан систем, тј. $b_{ij} = b_{ji}$ и да је $c_{ij}$ антисиметричан систем, тј. $c_{ij} = -c_{ji}$.



Напомињемо да су уобичајене ознаке

$$\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = a_{(ij)}, \quad \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = a_{[ij]},$$

при чему је $a_{(ij)}$ симетричан део, а $a_{[ij]}$ антисиметричан део система $a_{ij}$. Са овим ознакама, растављен на свој симетричан и антисиметричан део, сваки систем можемо изразити у облику

$$a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}).$$

**Задатак 15.** (Одељак 4., задатак 2.). Ако је

$$\Phi = a_{rs}\, x^r x^s,$$

показати да је

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^r} = (a_{rs} + a_{sr})\, x^s, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^r\, \partial x^s} = a_{rs} + a_{sr}.$$

Упростити ове изразе у случају да је $a_{rs}$ симетрични систем.

*Решење*: Ако дату квадратну форму напишемо у развијеном облику, тј.

$$\begin{aligned}
\Phi = {} & a_{11} x^1 x^1 + a_{12} x^1 x^2 + \cdots + a_{1R} x^1 x^R + \cdots + a_{1N} x^1 x^N + \\
& + a_{21} x^2 x^1 + a_{22} x^2 x^2 + \cdots + a_{2R} x^2 x^R + \cdots + a_{2N} x^2 x^N + \\
& + \quad - - - - - - - - - - - - - \quad + \\
& + a_{R1} x^R x^1 + a_{R2} x^R x^2 + \cdots + a_{RR} x^R x^R + \cdots + a_{RN} x^R x^N + \\
& + \quad - - - - - - - - - - - - - \quad + \\
& + a_{N1} x^N x^1 + a_{N2} x^N x^2 + \cdots a_{NR} x^N x^R + \cdots + a_{NN} x^N x^N,
\end{aligned}$$

где је $R$ неки фиксирани број, тада за парцијални извод форме по $x^R$ добивамо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x^R} = {} & (a_{1R} + a_{R1})\, x^1 + (a_{R2} + a_{2R})\, x^2 + \cdots + (a_{RR} + a_{RR})\, x^R + \\
& + \cdots + (a_{NR} + a_{RN})\, x^N,
\end{aligned}$$

тј.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^R} = (a_{Rs} + a_{sR})\, x^s.$$

С обзиром да $R$ може бити ма који фиксирани број, можемо писати

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^r} = (a_{rs} + a_{sr})\, x^s.$$

Ако ово диференцирамо по $x^s$ добивамо

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^r\, \partial x^s} = (a_{rs} + a_{sr}).$$

У случају кад је систем $a_{rs}$ симетричан, тј. кад је $a_{rs}=a_{sr}$, биће

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^r}=2\,a_{rs}\,x^s, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^r\,\partial x^s}=2\,a_{rs}.$$

**Задатак 16.** (Одељак 4., задатак 3.). Извршити множење система $a^{ij}$ и система $b_k$, па онда контракцију а) стављањем $k=i$, б) стављањем $k=j$. У ком случају се ова два резултата композиције неће разликовати?

***Решење***: Множењем система $a^{ij}$ и система $b_k$ добивамо систем трећег реда $a^{ij}\,b_k$.

а) Ако извршимо контракцију стављањем $k=i$ добивамо систем првог реда $a^{ij}\,b_i$ или што је исто, $a^{ji}\,b_j$.

б) Ако извршимо контракцију стављањем $k=j$ добивамо систем првог реда $a^{ij}\,b_j$.

Да бисмо утврдили у ком случају се резултати композиције неће разликовати, изједначимо их. Тада добивамо

$$a^{ji}\,b_j=a^{ij}\,b_j,$$

односно

$$(a^{ji}-a^{ij})\,b_j=0.$$

Ова једначина је сигурно задовољена ако је $a^{ij}=a^{ji}$, тј. ако је систем $a^{ij}$ симетричан.

**Задатак 17.** (Одељак 4., задатак 4.) Дат је симетрични систем $a_{rs}$ и антисиметрични систем $b^{rs}$.

а) Помножити их и у потпуности написати за $r, s=1, 2$.

б) Показати да је $a_{rs}\,b^{rs}=0$.

***Решење***: а) Множењем система $a_{rs}$ и $b^{rs}$ добивамо систем четвртог реда

$$c_{ij}^{kl}=a_{ij}\,b^{kl}.$$

С обзиром на особине система $a_{ij}$ и $b^{kl}$, систем $c_{ij}^{kl}$ је симетричан у односу на доњи пар индекса и антисиметричан у односу на горњи пар индекса, тј.

$$c_{ij}^{kl}=c_{ji}^{kl} \quad \text{и} \quad c_{ij}^{kl}=-c_{ij}^{lk}.$$

Као систем четвртог реда, систем $c_{ij}^{kl}$ има $2^4=16$ координата, јер индекси узимају вредности 1 и 2. Те координате су:

$$\begin{array}{llll} c_{11}^{11}=a_{11}\,b^{11}=0, & c_{11}^{12}=a_{11}\,b^{12}, & c_{11}^{21}=a_{11}\,b^{21}, & c_{11}^{22}=a_{11}\,b^{22}=0,\\ c_{12}^{11}=a_{12}\,b^{11}=0, & c_{12}^{12}=a_{12}\,b^{12}, & c_{12}^{21}=a_{12}\,b^{21}, & c_{12}^{22}=a_{12}\,b^{22}=0,\\ c_{21}^{11}=a_{21}\,b^{11}=0, & c_{21}^{12}=a_{21}\,b^{12}, & c_{21}^{21}=a_{21}\,b^{21}, & c_{21}^{22}=a_{21}\,b^{22}=0,\\ c_{22}^{11}=a_{22}\,b^{11}=0, & c_{22}^{12}=a_{22}\,b^{12}, & c_{22}^{21}=a_{22}\,b^{21}, & c_{22}^{22}=a_{22}\,b^{22}=0. \end{array}$$

б) Ако извршимо композицију горња два система добивамо скалар

$$a_{rs}\,b^{rs},$$



који можемо написати у облику

$$a_{rs}\,b^{rs}=\frac{1}{2}\,a_{rs}\,b^{rs}+\frac{1}{2}\,a_{rs}\,b^{rs}.$$

Ако, даље, у последњем члану на десној страни уместо немог индекса $r$ пишемо $s$ и уместо немог индекса $s$ пишемо $r$, добивамо

$$a_{rs}\,b^{rs}=\frac{1}{2}\,a_{rs}\,b^{rs}+\frac{1}{2}\,a_{sr}\,b^{sr}.$$

Разменимо, сада, у истом члану места индексима $r$ и $s$ и узмимо у обзир особине система $a_{rs}$ и $b^{rs}$ ($a_{rs}=a_{sr}$ и $b^{rs}=-b^{sr}$); тада добивамо

$$a_{rs}\,b^{rs}=\frac{1}{2}\,a_{rs}\,b^{rs}-\frac{1}{2}\,a_{rs}\,b^{rs}=0,$$

што је и требало показати.

**Задатак 18.** (Одељак 4., задатак 5.). Написати за $i, j=1, 2, 3$ систем коефицијената квадратне форме $a_{ij}\,x^i\,x^j$ и показати како се овај систем коефицијената може учинити симетричним без промене саме форме иако је $a_{ij}\neq a_{ji}$ $(i\neq j)$.

***Решење***: Написана у развијеном облику квадратна форма је

$$\begin{aligned} a_{ij}\,x^i\,x^j=a_{11}\,x^1\,x^1+a_{12}\,x^1\,x^2+a_{13}\,x^1\,x^3+\\ +a_{21}\,x^2\,x^1+a_{22}\,x^2\,x^2+a_{23}\,x^2\,x^3+\\ +a_{31}\,x^3\,x^1+a_{32}\,x^3\,x^2+a_{33}\,x^3\,x^3, \end{aligned}$$

па је, према томе, систем коефицијената форме приказан у облику матрице

$$\{a_{ij}\}=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix}.$$

Да бисмо показали како се систем коефицијената може учинити симетричним, квадратну форму напишимо у облику

$$a_{ij}\,x^i\,x^j=\frac{1}{2}\,a_{ij}\,x^i\,x^j+\frac{1}{2}\,a_{ij}\,x^i\,x^j.$$

Ако у другом члану на десној страни уместо немог индекса $i$ пишемо $j$ и уместо немог индекса $j$ пишемо $i$, добивамо

$$a_{ij}\,x^i\,x^j=\frac{1}{2}\,a_{ij}\,x^i\,x^j+\frac{1}{2}\,a_{ji}\,x^j\,x^i,$$

односно

$$a_{ij}\,x^i\,x^j=\frac{1}{2}\,(a_{ij}+a_{ji})\,x^i\,x^j.$$

Уводећи ознаку

$$\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})=b_{ij},$$

добивамо

$$a_{ij}\,x^i x^j = b_{ij}\,x^i x^j,$$

при чему је очигледно

$$b_{ij}=b_{ji},$$

тј. систем коефицијената $b_{ij}$ је симетричан, што је и требало показати.

## 5. Кронекерови делта симболи. *е*-симболи

**Задатак 19.** (Одељак 5., задатак 1.). Показати да је

$$\delta^\alpha_\beta \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j}=\delta^i_j.$$

***Решење***: Ако се ма који систем помножи Кронекеровим симболом па изврши контракција по једном индексу Кронекеровог симбола и једном индексу супротног типа у датом систему, ефект те операције биће само, да се неми индекс система замени слободним индексом уз Кронекеров симбол. Према томе је

$$\delta^\alpha_\beta \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha}=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\beta}.$$

На основу овога добивамо

$$\delta^\alpha_\beta \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j}=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\beta}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j}=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j,$$

што је и требало показати.

**Задатак 20.** (Одељак 5., задатак 2.). Одредити вредност за

$$\delta^m_n\,\delta^n_m \quad \text{и} \quad \delta^m_n\,\delta^n_r\,\delta^r_m,$$

кад је $m, n, r=1, 2, 3, \ldots, N$.

***Решење***: Ефект контракције Кронекеровог симбола са Кронекеровим симболом исти је као и Кронекеровог симбола са ма којим другим системом. На основу тога је

$$\delta^m_n\,\delta^n_m=\delta^m_m=N.$$

На исти начин је

$$\delta^m_n\,\delta^n_r\,\delta^r_m=\delta^m_r\,\delta^r_m=\delta^m_m=N,$$

што је и требало одредити.

**Задатак 21.** (Одељак 5., задатак 3.). Написати *е*-систем трећег ступња ($e^{ijk}$ или $e_{ijk}$) помоћу три посебне таблице.

***Решење***: Елементи система трећег реда не могу се написати помоћу једне таблице (матрице), већ помоћу једне просторне схеме која има врсте, ко-



лоне и слојеве. Ако усвојимо да у систему $e^{ijk}$ први индекс означава редни број слоја (с обзиром да индекси узимају вредности 1, 2, 3, постоје три слоја), онда су елементи првог слоја

$$\begin{aligned} &e^{111}=0, \quad e^{112}=0, \quad e^{113}=0,\\ &e^{121}=0, \quad e^{122}=0, \quad e^{123}=1,\\ &e^{131}=0, \quad e^{132}=-1, \quad e^{133}=0, \end{aligned} \qquad \{e^{1jk}\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix},$$

елементи другог слоја

$$\begin{aligned} &e^{211}=0, \quad e^{212}=0, \quad e^{213}=-1,\\ &e^{221}=0, \quad e^{222}=0, \quad e^{223}=0,\\ &e^{231}=1, \quad e^{232}=0, \quad e^{233}=0, \end{aligned} \qquad \{e^{2jk}\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

и елементи трећег слоја

$$\begin{aligned} &e^{311}=0, \quad e^{312}=1, \quad e^{313}=0,\\ &e^{321}=-1, \quad e^{322}=0, \quad e^{323}=0,\\ &e^{331}=0, \quad e^{332}=0, \quad e^{333}=0, \end{aligned} \qquad \{e^{3jk}\}=\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

**Задатак 22.** (Одељак 5., задатак 4.). Написати *е*-систем трећег реда, нпр. $e_{ijk}$ помоћу Кронекерових симбола $\delta^i_j$ у облику једне детерминанте трећег реда.

***Решење***: С обзиром на особине композиције система са Кронекеровим симболом очигледно је

$$e_{ijk}=e_{rst}\,\delta^r_i\,\delta^s_j\,\delta^t_k.$$

Ако ову релацију напишемо у развијеном облику, добивамо

$$\begin{aligned} e_{ijk}=&\,e_{123}\,\delta^1_i\,\delta^2_j\,\delta^3_k+e_{231}\,\delta^2_i\,\delta^3_j\,\delta^1_k+e_{312}\,\delta^3_i\,\delta^1_j\,\delta^2_k+\\ &+e_{213}\,\delta^2_i\,\delta^1_j\,\delta^3_k+e_{132}\,\delta^1_i\,\delta^3_j\,\delta^2_k+e_{321}\,\delta^3_i\,\delta^2_j\,\delta^1_k, \end{aligned}$$

где су изостављени чланови који су једнаки нули. Ако, даље, заменимо од нуле различите координате *е*-система њиховим вредностима, добивамо

$$\begin{aligned} e_{ijk}=&\,\delta^1_i\,\delta^2_j\,\delta^3_k+\delta^2_i\,\delta^3_j\,\delta^1_k+\delta^3_i\,\delta^1_j\,\delta^2_k-\\ &-\delta^2_i\,\delta^1_j\,\delta^3_k-\delta^1_i\,\delta^3_j\,\delta^2_k-\delta^3_i\,\delta^2_j\,\delta^1_k, \end{aligned}$$

односно

$$e_{ijk}=\begin{vmatrix} \delta^1_i & \delta^1_j & \delta^1_k\\ \delta^2_i & \delta^2_j & \delta^2_k\\ \delta^3_i & \delta^3_j & \delta^3_k \end{vmatrix}.$$

**Задатак 23.** (Одељак 5., задатак 5.). Доказати да је за $i, j, k=1, 2, 3$

$$\delta^{ijk}_{ijk}=3!.$$

*Решење*: Ако у генералисаном Кронекеровом симболу шестог реда извршимо контракцију добивамо Кронекеров симбол четвртог реда,

$$\delta^{ikr}_{jlr} = \delta^{ik}_{jl}.$$

На основу овога можемо писати

$$\delta^{ijk}_{ijk} = \delta^{ij}_{ij}.$$

Ако, даље, извршимо контракцију у Кронекеровом симболу четвртог реда и резултат преполовимо добивамо обични Кронекеров симбол, тј.

$$\frac{1}{2}\,\delta^{ik}_{jk} = \delta^{i}_{j}.$$

Према томе, можемо писати

$$\delta^{ijk}_{ijk} = \delta^{ij}_{ij} = 2\,\delta^{i}_{i} = 2 \cdot 3 = 3!,$$

што је и требало доказати.

**Задатак 24.** (Одељак 5., задатак 6.). Доказати да је

$$\delta^{rst}_{tmn} = \delta^{rst}_{ntm} = \delta^{rs}_{mn}.$$

*Решење*: На основу дефиниције генералисаног Кронекеровог симбола шестог реда,

$$\delta^{ijk}_{rst} = e^{ijk}\,e_{rst},$$

следи

$$\delta^{rst}_{tmn} = e^{rst}\,e_{tmn} = -e^{rst}\,e_{tnm} = e^{rst}\,e_{ntm} = \delta^{rst}_{ntm}.$$

Исто тако је

$$\delta^{rst}_{ntm} = e^{rst}\,e_{ntm} = -e^{rst}\,e_{nmt} = e^{rst}\,e_{mnt} = \delta^{rst}_{mnt} = \delta^{rs}_{mn},$$

па можемо писати

$$\delta^{rst}_{tmn} = \delta^{rst}_{ntm} = \delta^{rs}_{mn},$$

што је и требало доказати.

**Задатак 25.** (Одељак 5., задатак 7.). Доказати да је

$$\delta^{rs}_{mn}\,a^{mn} = a^{rs} - a^{sr}.$$

*Решење*: Ако индексима $r$ и $s$ дамо неке фиксиране вредности, рецимо $R$ и $S$, добивамо

$$\delta^{RS}_{mn}\,a^{mn} = \delta^{RS}_{RS}\,a^{RS} + \delta^{RS}_{SR}\,a^{SR}, \qquad (R \neq S),$$

где су изостављени чланови који су једнаки нули. Ако, даље, заменимо координате Кронекеровог симбола четвртог реда њиховим вредностима, добивамо

$$\delta^{RS}_{mn}\,a^{mn} = a^{RS} - a^{SR}.$$

С обзиром да ова релација мора да важи за све вредности $R$ и $S$ можемо писати

$$\delta^{rs}_{mn}\,a^{mn} = a^{rs} - a^{sr},$$

што је и требало доказати.



**Задатак 26.** (Одељак 5., задатак 8.). Доказати да је

$$\delta^{ij}_{mn}\,a^m_r\,a^n_s = a^i_r\,a^j_s - a^j_r\,a^i_s.$$

*Решење*: Ако индексима $i$ и $j$ дамо фиксиране вредности, рецимо $I$ и $J$, $(I \neq J)$, добивамо

$$\delta^{IJ}_{mn}\,a^m_r\,a^n_s = \delta^{IJ}_{IJ}\,a^I_r\,a^J_s + \delta^{IJ}_{JI}\,a^J_r\,a^I_s,$$

где су изостављени чланови који су једнаки нули. Ако, даље, заменимо координате Кронекеровог симбола четвртог реда њиховим вредностима, добивамо

$$\delta^{IJ}_{mn}\,a^m_r\,a^n_s = a^I_r\,a^J_s - a^J_r\,a^I_s.$$

С обзиром да ова релација мора да важи за све вредности $I$ и $J$, можемо писати

$$\delta^{ij}_{mn}\,a^m_r\,a^n_s = a^i_r\,a^j_s - a^j_r\,a^i_s,$$

што је и требало доказати.

*Напомена.* С обзиром да горња релација важи за ма који систем $a^i_j$, то она мора да важи и за Кронекеров симбол $\delta^i_j$. На основу тога имамо

$$\delta^{ij}_{mn}\,\delta^m_r\,\delta^n_s = \delta^{ij}_{rs} = \delta^i_r\,\delta^j_s - \delta^i_s\,\delta^j_r.$$

## 6. Матрице

**Задатак 27.** (Одељак 6., задатак 1.). Написати квадратне матрице другог, трећег и четвртог реда.

*Решење*: Квадратна матрица другог реда је облика

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\};$$

трећег реда је облика

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\};$$

четвртог реда је облика

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}\right\}.$$

**Задатак 28.** (Одељак 6., задатак 2.). Написати: а) симетричну матрицу трећег реда; б) антисиметричну матрицу четвртог реда.

***Решење***: Симетрична матрица трећег реда је облика

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Bmatrix}.$$

б) Антисиметрична матрица четвртог реда је облика

$$\begin{Bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{Bmatrix}.$$

**Задатак 29.** (Одељак 6., задатак 3.). Написати неку матрицу типа (5,2).

***Решење***: Матрица типа (5,2) је облика

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{Bmatrix}.$$

**Задатак 30.** (Одељак 6., задатак 4.). Матричну једначину

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix}$$

изразити помоћу обичних једначина.

***Решење***: Ако су две матрице једнаке онда су им сви одговарајући елементи међусобно једнаки. На основу тога из матричне једначине

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix}$$

следе следеће четири скаларне једначине:

$$a_{11} = b_{11}$$
$$a_{12} = b_{12}$$
$$a_{21} = b_{21}$$
$$a_{22} = b_{22}.$$

**Задатак 31.** (Одељак 6., задатак 5.). Израчунати

$$3\begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{Bmatrix} + 5\begin{Bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -4 \end{Bmatrix}.$$



***Решење***: Матрица се множи бројем на тај начин што јој се сви елементи помноже тим бројем. Матрице се сабирају, односно одузимају, на тај начин што им се одговарајући елементи саберу, односно одузму. На основу тога имамо

$$3\begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{Bmatrix} + 5\begin{Bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 9 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 6 & 0 \\ -10 & 8 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} 35 & 15 \\ -15 & -20 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 32 & 12 \\ 1 & -19 \end{Bmatrix}.$$

**Задатак 32.** (Одељак 6., задатак 6.). Израчунати производ

$$\begin{Bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{Bmatrix},$$

па променити место чиниоцима и израчунати нови производ, Шта се може закључити?

***Решење***: Множењем двеју квадратних матрица добива се квадратна матрица истог реда. Сваки елемент производа, који се налази у $i$-тој врсти и $j$-тој колони, добива се као збир производа елеменана $i$-те врсте прве (леве) матрице и односних елемената у $j$-тој колони друге (десне) матрице. На основу тога је

$$\begin{Bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\cdot 1+4\cdot 2 & 3\cdot 2+4\cdot 5 \\ 2\cdot 1-1\cdot 2 & 2\cdot 2-1\cdot 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11 & 26 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix}.$$

Ако променимо места чиниоцима добивамо

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 2 & 1\cdot 4+2\cdot(-1) \\ 2\cdot 3+5\cdot 2 & 2\cdot 4+5\cdot(-1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 & 2 \\ 16 & 3 \end{Bmatrix}.$$

Према томе, разменом места чиниоцима не добива се исти производ, тј., закључујемо, не важи комутативни закон.

**Задатак 33.** (Одељак 6., задатак 7.). Одредити производ матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

***Решење***: На основу дефиниције множења матрица, дате у претходном задатку, биће

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & 29 \\ 1 & -5 & -11 \\ 6 & -10 & -18 \end{pmatrix}.$$

**Задатак 34.** (Одељак 6., задатак 8.). Одредити ранг матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & -2 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

***Решење***: Од врста и колона сваке матрице, и квадратне реда $n$ и правоугаоне типа $(m, n)$, може се прецртавањем образовати низ детерминаната. Ако су за неку матрицу све детерминанте које су реда већег од $k$ једнаке нули, а међу онима реда $k$ има бар једна различита од нуле, каже се да је ранг те матрице $k$. Правоугаоној матрици

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & -2 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

која је типа (3, 4), одговарају три детерминанте трећег реда. Вредности тих детерминаната су

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

па смемо тврдити да ранг матрице није једнак 3.

Од свих детерминаната другог реда које одговарају горњој матрици је, нпр.,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

што је довољно да се закључи да је ранг матрице једнак 2.

## 7. Неке примене уведених појмова

**Задатак 35.** (Одељак 7., задатак 1.). Показати да је

$$\overline{A}^i_j = a^{n-2}\, a^i_j,$$

где је $\overline{A}^i_j$ кофактор који одговара елементу $A^j_i$ детерминанте $|A^i_j|$ адјунговане детерминанти $|a^i_j|$ реда $n$.

***Решење***: Збир производа елемената $i$-те врсте (или колоне) детерминанте са односним кофакторима $j$-те врсте (или колоне) једнак је вредности детерминанте, ако је $i=j$, а једнак нули, ако је $i \neq j$. Према томе је

$$A^i_k\, \overline{A}^k_j = |A^i_k|\, \delta^i_j.$$



Ако леву и десну страну ове једначине помножимо са $a^r_s$ и извршимо контракцију, добивамо

$$a^r_i\, A^i_k\, \overline{A}^k_j = |A^i_k|\, \delta^i_j\, a^r_i$$

односно, с обзиром да је $a^r_i A^i_k = a\,\delta^r_k$, $(a = |a^r_i|)$,

$$a\,\delta^r_k\, \overline{A}^k_j = a^{n-1}\, a^r_j,$$

јер је вредност адјунговане детерминанте детерминанти $|a^i_j|$, која је $n$-ог реда, једнака $a^{n-1}$.

Горња једнакост је еквивалентна са

$$a\,\overline{A}^r_j = a^{n-1}\, a^r_j,$$

одакле следи за $a \neq 0$,

$$\overline{A}^r_j = a^{n-2}\, a^r_j,$$

што је и требало показати.

**Задатак 36.** (Одељак 7., задатак 2.). Показати да се кофактор $A^i_r$ елемента $a^r_i$ у детерминанти $|a^i_r|$, $(i, r = 1, 2, 3)$, може изразити у облику

$$A^i_r = \frac{1}{2!}\, \delta^{ijk}_{rst}\, a^s_j\, a^t_k.$$

***Решење***: Кофактор елемента $a^1_i$ у детерминанти $|a^i_j|$, који се налази у првој врсти и $i$-тој колони детерминанте $|a^i_j|$, може се изразити у облику

$$A^i_1 = e^{ijk}\, a^2_j\, a^3_k.$$

Овај израз можемо трансформисати на следећи начин:

$$A^i_1 = e^{ijk}\, a^2_j\, a^3_k = \frac{1}{2}\left(e^{ijk}\, e_{123}\, a^2_j\, a^3_k - e^{ijk}\, e_{132}\, a^2_j\, a^3_k\right).$$

Ако у другом члачу у загради уместо немог индекса $j$ пишемо $k$, а уместо немог индекса $k$ пишемо $j$, добивамо

$$A^i_1 = \frac{1}{2}\left(e^{ijk}\, e_{123}\, a^2_j\, a^3_k - e^{ikj}\, e_{132}\, a^3_j\, a^2_k\right).$$

Ако, даље, у истом члану код система $e^{ijk}$ разменимо места индексима $k$ и $j$, добивамо

$$A^i_1 = \frac{1}{2}\left(e^{ijk}\, e_{123}\, a^2_j\, a^3_k + e^{ijk}\, e_{132}\, a^3_j\, a^2_k\right),$$

односно

$$A^i_1 = \frac{1}{2}\left(\delta^{ijk}_{123}\, a^2_j\, a^3_k + \delta^{ijk}_{132}\, a^3_j\, a^2_k\right),$$

што сажето можемо написати у облику

$$A^i_1 = \frac{1}{2!}\, \delta^{ijk}_{1st}\, a^s_j\, a^t_k.$$

На сличан начин бисмо добили

$$A_2^i = \frac{1}{2!}\,\delta_{2st}^{ijk}\,a_j^s\,a_k^t,$$

$$A_3^i = \frac{1}{2!}\,\delta_{3st}^{ijk}\,a_j^s\,a_k^t,$$

па можемо писати

$$A_r^i = \frac{1}{2!}\,\delta_{rst}^{ijk}\,a_j^s\,a_k^t,$$

што је и требало показати.

**Задатак 37.** (Одељак 7., задатак 3.). Показати да је за $i, j, k = 1, 2, 3$

$$a = \frac{1}{3!}\,\delta_{rst}^{ijk}\,a_i^r\,a_j^s a_k^t.$$

***Решење***: Ако у релацији

$$a_j^i A_k^j = a\,\delta_k^i,$$

где је $A_k^j$ кофактор елемента $a_j^k$ у детерминанти $a = |a_j^i|$, извршимо контракцију по индексима $i$ и $k$, добивамо

$$a_j^i A_i^j = a\,\delta_i^i,$$

односно

$$a_j^i A_i^j = 3\,a, \quad (\delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 3).$$

Одавде следи да је

$$a = \frac{1}{3}\,a_j^i A_i^j.$$

Ако, сада, $A_i^j$ изразимо у облику који је показан у претходном задатку, тј. ставимо

$$A_i^j = \frac{1}{2!}\,\delta_{imn}^{jkl}\,a_k^m\,a_l^n,$$

добивамо

$$a = \frac{1}{3}\,a_j^i \frac{1}{2!}\,\delta_{imn}^{jkl}\,a_k^m\,a_l^n,$$

односно

$$a = \frac{1}{3!}\,\delta_{imn}^{jkl}\,a_j^i\,a_k^m\,a_l^n,$$

што је и требало показати.

**Задатак 38.** (Одељак 7., задатак 4.). Ако су сви кофактори $A_k^i$ неке детерминанте $|a_k^i|$ трећег реда једнаки нули, показати да је тада

$$a_k^i\,a_l^j = a_k^j\,a_l^i$$

и да су једначине (§ 7, 18) у том случају противречне, ако није испуњен услов $b^j a_k^i = b^i a_k^j$ и ако је детерминанта $|a_k^i|$ детерминанта коефицијената тог система.



***Решење***: Из, на пример, релације

$$A_1^2 = e^{2jk}\,a_j^2\,a_k^3 = 0,$$

следи, кад се напише у развијеном облику,

$$e^{231}\,a_3^2\,a_1^3 + e^{213}\,a_1^2\,a_3^3 = 0,$$

или, кад координате $e$-система заменимо њиховим вредностима,

$$a_3^2\,a_1^3 - a_1^2\,a_3^3 = 0,$$

тј.

$$a_3^2\,a_1^3 = a_1^2\,a_3^3.$$

Сличне релације добивамо ако са нулом изједначимо кофактор било којег другог елемента детерминанте $|a_k^i|$; тако да можемо писати

$$a_k^i\,a_l^j = a_k^j\,a_l^i.$$

Ако су једначине (§ 7, 18),

$$a_j^i\,x^j = b^i,$$

сагласне, тада је

$$a_k^j\,b^i = a_k^j\,a_r^i\,x^r = a_k^i\,a_r^j\,x^r = a_k^i\,b^j,$$

тј. испуњен је услов

$$a_k^j\,b^i = a_k^i\,b^j.$$

Ако, међутим, овај услов није испуњен, горње једначине су противречне.

**Задатак 39.** (Одељак 7., задатак 5.). Доказати, да ако је $a_{ij}\,x^i\,y^j = 0$ за произвољне вредности $x^i$ и $y^i$ мора бити $a_{ij} = 0$.

***Решење***: С обзиром да $x^i$ и $y^i$ могу имати произвољне вредности, узмимо, на пример, да је

$$x^M \neq 0, \quad x^i = 0 \quad \text{за} \quad i \neq M,$$

и да је

$$y^N \neq 0, \quad y^i = 0 \quad \text{за} \quad i \neq N.$$

Тада из релације

$$a_{ij}\,x^i\,y^j = 0,$$

следи

$$a_{MN}\,x^M\,y^N = 0,$$

тј.

$$a_{MN} = 0.$$

Како ово мора да важи за свако $M$ и $N$, можемо писати

$$a_{ij} = 0.$$

**Задатак 40.** (Одељак 7., задатак 6.). Ако је $\alpha^{ij}$ таква величина да буде $a_{jk}\,\alpha^{ij} = \delta_k^i$, доказати да је тада $\alpha^{ij}$ кофактор елемента $a_{ji}$ у детерминанти $|a_{ij}|$, подељен вредношћу $a$ те детерминанте.

***Решење***: Ако релацију

$$a_{jk}\,\alpha^{ij} = \delta_k^i$$

помножимо кофактором елемента $a_{rk}$, тј. извршимо композицију са кофактором $A^{kr}$, добивамо

$$a_{jk}\, A^{kr}\, \alpha^{ij} = A^{kr}\, \delta^{i}_{k},$$

тј.

$$a\, \delta^{r}_{j}\, \alpha^{ij} = A^{ir},$$

одакле следи

$$\alpha^{ir} = \frac{A^{ir}}{a},$$

што је и требало доказати.

**Задатак 41.** (Одељак 7., задатак 7.). Доказати да је

$$\frac{\partial(\log a)}{\partial a_{rs}} = \alpha^{sr} \quad \text{и} \quad \frac{\partial(\log a)}{\partial \alpha^{rs}} = -a_{sr},$$

ако су ознаке као у § 7, а.

***Решење***: Водећи рачуна о томе да је извод детерминанте по елементу једнак кофактору тог елемента као и о резултату из предходног задатка, непосредно следи

$$\frac{\partial(\log a)}{\partial a_{rs}} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial a}{\partial a_{rs}} = \frac{1}{a}\, A^{sr} = \alpha^{sr}.$$

Из релације

$$\alpha^{sr} = \frac{1}{a}\, A^{sr}$$

следи

$$|\alpha^{sr}| = \left|\frac{1}{a}\, A^{sr}\right| = \frac{1}{a^{N}}\, a^{N-1} = \frac{1}{a} = b,$$

тако да је $\log a = -\log b$. На основу тога је

$$\frac{\partial(\log a)}{\partial \alpha^{rs}} = -\frac{\partial(\log b)}{\partial \alpha^{rs}} = -\frac{1}{b}\,\frac{\partial b}{\partial \alpha^{rs}} = -a\, B_{sr},$$

где је $B_{sr}$ кофактор елемента $\alpha^{rs}$ у детерминанти $|\alpha^{rs}| = b = \frac{1}{a}$. Ако, даље, у релацији

$$\alpha^{rs}\, B_{st} = \frac{1}{a}\, \delta^{r}_{t}$$

извршимо композицију са $a_{pr}$, добивамо

$$a\, \delta^{s}_{p}\, B_{st} = a_{pt},$$

тј.

$$B_{pt} = \frac{1}{a}\, a_{pt}.$$

На основу тога, сада, добивамо

$$\frac{\partial(\log a)}{\partial \alpha^{rs}} = -a\,\frac{1}{a}\, a_{sr} = -a_{sr},$$

што је и требало доказати.



**Задатак 42.** (Одељак 7., задатак 8.). Ако неки двоструки систем $a^{r}_{s}$ задовољава једначину $a^{r}_{i}\, a^{i}_{s} = \delta^{r}_{s}$, показати да важи једно од ова два:

$$|a^{r}_{s} - \delta^{r}_{s}| = 0 \quad \text{и} \quad a = \pm 1$$

или

$$|a^{r}_{s} + \delta^{r}_{s}| = 0 \quad \text{и} \quad a = -1.$$

***Решење***: Из једначине $a^{r}_{i}\, a^{i}_{s} = \delta^{r}_{s}$ добивамо

$$|a^{r}_{i}\, a^{i}_{s}| = |\delta^{r}_{s}| = 1$$

или, пошто је детерминанта производа два система једнака производу њихових детерминаната,

$$|a^{r}_{i}|\, |a^{i}_{s}| = 1.$$

Ово је еквивалентно са

$$a^{2} = 1,$$

одакле следи

$$a = \pm 1.$$

Детерминанту $|a^{r}_{s} - \delta^{r}_{s}|$ можемо трансформисати на следећи начин:

$$|a^{r}_{s} - \delta^{r}_{s}| = |a^{r}_{s} - a^{r}_{i}\, a^{i}_{s}| = |a^{r}_{i}\, \delta^{i}_{s} - a^{r}_{i}\, a^{i}_{s}| = |a^{r}_{i}\,(\delta^{i}_{s} - a^{i}_{s})| = |a^{r}_{i}|\, |\delta^{i}_{s} - a^{i}_{s}|,$$

тј.

$$|a^{r}_{s} - \delta^{r}_{s}| = \mp |a^{r}_{i}|\, |a^{r}_{s} - \delta^{r}_{s}|$$

при чему знак зависи од тога да ли је детерминанта $|a^{r}_{s} - \delta^{r}_{s}|$ парног или непарног реда. Ову једначину можемо написати у облику

$$(1 \pm a)\, |a^{r}_{s} - \delta^{r}_{s}| = 0$$

одакле следи, за $a = \pm 1$

$$|a^{r}_{s} - \delta^{r}_{s}| = 0.$$

На сличан начин добивамо

$$|a^{r}_{s} + \delta^{r}_{s}| = a\, |\delta^{i}_{s} + a^{i}_{s}|,$$

тј

$$(1 - a)\, |a^{r}_{s} + \delta^{r}_{s}| = 0,$$

одакле следи, за $a = -1$,

$$|a^{r}_{s} + \delta^{r}_{s}| = 0,$$

што је и требало показати.

**Задатак 43.** (Одељак 7., задатак 9.). Ако је $a_{ij}$ антисиметрични систем а $b_{ij}\, x^{i}\, x^{j}$ позитивно дефинитна квадратна форма, доказати да су онда корени $\lambda$-релације (§ 7,21) или једнаки нули или чисто имагинарни.

***Решење***: Антисиметричном систему $a_{ij}$ одговарајућа $\lambda$-релација је облика (види одељак 7., једначину 21.)

$$|a_{ij}-\lambda b_{ij}|=0.$$

Да бисмо доказали да су корени ове $\lambda$-релације или једнаки нули или чисто имагинарни, претпоставимо да постоји неко комплексно решење $\lambda=\alpha+i\beta$, тј. да је

$$|a_{ij}-(\alpha+i\beta)\,b_{ij}|=0.$$

У том случају постоје такве величине $z^n=\mu^n+i\nu^n$, различите од нуле, да буде

$$[a_{ij}-(\alpha+i\beta)\,b_{ij}]\,(\mu^j+i\nu^j)=0,$$

што изражава чињеницу да систем хомогених линеарних једначина по $z^j$ има решења различита од нуле (не тривијална), ако је детерминанта коефицијената система једнака нули. Горњи комплексни израз може бити једнак нули само ако су му и реални и имагинарни део једнаки нули, тј. ако је

$$(1)\qquad \begin{aligned} &a_{ij}\,\mu^j-\alpha\,b_{ij}\,\mu^j+\beta\,b_{ij}\,\nu^j=0,\\ &a_{ij}\,\nu^j-\alpha\,b_{ij}\,\nu^j-\beta\,b_{ij}\,\mu^j=0.\end{aligned}$$

Помножимо прву од ових једначина са $\mu^i$, а другу са $\nu^i$, па их саберимо. Тада добивамо

$$a_{ij}\,\mu^i\,\mu^j+a_{ij}\,\nu^i\,\nu^j-\alpha\,(b_{ij}\,\mu^i\,\mu^j+b_{ij}\,\nu^i\,\nu^j)=0.$$

Како је, због антисиметрије система $a_{ij}$, $a_{ij}\,\mu^i\,\mu^j=0$ и како је

$$b_{ij}\,\mu^i\,\mu^j+b_{ij}\,\nu^i\,\nu^j>0,$$

то је $\alpha=0$.

На сличан начин множењем прве од једначина (1) са $\nu^i$, а друге са $\mu^i$ и одузимањем друге од прве, добивамо

$$\beta=\frac{2\,a_{ij}\,\mu^i\,\nu^j}{b_{ij}\,\mu^i\,\mu^j+b_{ij}\,\nu^i\,\nu^j}\gtreqless 0.$$

Према томе, с обзиром да је $\alpha$ једнако нули а $\beta$ једнако или различито од нуле, корени $\lambda$-релације могу бити или једнаки нули или чисто имагинарни, што је и требало доказати.

**Задатак 44.** (Одељак 7., задатак 10.). Доказати тачност наредних образаца узев у обзир ознаке из § 7, а:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial a_{rs}}=\delta_i^r\,\delta_j^s,\qquad \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial \alpha^{rs}}=\delta_r^i\,\delta_s^j,$$

$$\frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial a_{rs}}=-\alpha^{ir}\,\alpha^{sj},\qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial \alpha^{rs}}=-a_{ir}\,a_{sj}.$$

***Решење***: С обзиром на особине композиције система са Кронекеровим симболима, очигледно је

$$a_{ij}=a_{rs}\,\delta_i^r\,\delta_j^s,\qquad \alpha^{ij}=\alpha^{rs}\,\delta_r^i\,\delta_s^j,$$



одакле непосредно следи

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial a_{rs}}=\delta_i^r\,\delta_j^s,\qquad \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial \alpha^{rs}}=\delta_r^i\,\delta_s^j.$$

Из релације

$$(1)\qquad a_{mn}\,\alpha^{nl}=\delta_m^l,$$

диференцирањем по $a_{rs}$ добивамо

$$\frac{\partial a_{mn}}{\partial a_{rs}}\,\alpha^{nl}+a_{mn}\,\frac{\partial \alpha^{nl}}{\partial a_{rs}}=0,$$

односно

$$\delta_m^r\,\delta_n^s\,\alpha^{nl}+a_{mn}\,\frac{\partial \alpha^{nl}}{\partial a_{rs}}=0.$$

Ако у овој једначини извршимо композицију са $\alpha^{im}$, добивамо

$$\alpha^{ir}\,\alpha^{sl}+\delta_n^i\,\frac{\partial \alpha^{nl}}{\partial a_{rs}}=0,$$

односно

$$\frac{\partial \alpha^{il}}{\partial a_{rs}}=-\alpha^{ir}\,\alpha^{sl}.$$

На сличан начин, диференцирањем релације (1) по $\alpha^{rs}$, добивамо

$$\frac{\partial a_{mn}}{\partial \alpha^{rs}}\,\alpha^{nl}+a_{mn}\,\delta_r^n\,\delta_s^l.$$

Ако извршимо композицију са $a_{lj}$, добивамо

$$\frac{\partial a_{mn}}{\partial \alpha^{rs}}\,\delta_j^n+a_{mr}\,a_{sj}=0,$$

тј.

$$\frac{\partial a_{mj}}{\partial \alpha^{rs}}=-a_{mr}\,a_{sj}.$$

***Напомена.*** Користећи последњи образац може се решити други део задатка 41. Наиме, биће

$$\frac{\partial(\log a)}{\partial \alpha^{rs}}=\frac{\partial(\log a)}{\partial a_{ij}}\,\frac{\partial a_{ij}}{\partial \alpha^{rs}}=-\alpha^{ji}\,a_{ir}\,a_{sj}=-\delta_r^j\,a_{sj}=-a_{sr}.$$

**Задатак 45.** (Одељак 7., задатак 11.). Извести да је антисиметрична детерминанта непарног реда увек једнака нули.

***Решење***: Уочимо неку антисиметричну детерминанту реда $2N-1$. Лако је проверити да се она помоћу $e$-система реда $2N-1$ може изразити на следећи начин

$$a=e^{i_1 i_2\ldots i_{2N-1}}\,a_{1i_1}\,a_{2i_2}\cdots a_{2N-1\,i_{2N-1}}.$$

Једна од особина детерминаната је да се вредност детерминанте не мења ако се она транспонује, тј. ако јој се промене врсте и колоне. Према томе је

$$a = e^{i_1 i_2 \dots i_{2N-1}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_{2N-1} 2N-1}.$$

С друге стране, међутим, пошто је детерминанта антисиметрична, тј.

$$a_{i_1 1} = -a_{1 i_1}, \quad a_{i_2 2} = -a_{2 i_2}, \dots, \quad a_{i_{2N-1} 2N-1} = -a_{2N-1\, i_{2N-1}},$$

добивамо

$$e^{i_1 i_2 \dots i_{2N-1}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_{2N-1} 2N-1} =$$

$$= (-1)^{2N-1} e^{i_1 i_2 \dots i_{2N-1}} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{2N-1\, i_{2N-1}},$$

односно

$$a = -a,$$

одакле следи

$$a = 0,$$

што је и требало показати.

# II. ТРАНСФОРМАЦИЈА ПРОМЕНЉИВИХ. ТЕНЗОРСКА АЛГЕБРА

## 8. Афини и метрички простор

**Задатак 46.** (Одељак 8., задатак 1.). Наћи неколико примера једначина са две непознате чији су дијаграми у афином равном простору.

*Решење*: а) Закон пута једноликог кретања:

$$s = at + b,$$

где је $s$ пут, $t$ време, $a$ и $b$ константе.

б) Јачина електричног поља тачкастог наелектрисања:

$$E = \frac{e}{r^2},$$

где је $E$ јачина поља, $e$ наелектрисање, $r$ растојање.

в) Површина квадрата:

$$P = a^2,$$

где је $P$ површина, $a$ дужина странице квадрата.

г) Омов закон за јачину струје:

$$J = \frac{E}{R},$$

где је $J$ јачина електричне струје, $E$ електрични напон, $R$ отпор проводника, при чему је једна од величина константна.

**Задатак 47.** (Оделљак 8., задатак 2).. Навести пример неког афиног простора у коме елементи нису тачке (пунктуални простор) већ неке друге величине.

*Решење*: На пример, векторски простор. Елементи векторских простора су вектори. Сваки елемент (вектор) простора може се добити као линеарна комбинација основних (базних) вектора.

**Задатак 48.** (Одељак 8., задатак 3.). Како се у аналогији са простором од три димензије може написати услов за паралелизам две хипер-равни?

*Решење*: Једначина хипер-равни у простору од $N$ димензија је облика

$$A_i x^i + B = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где је $A_i$ систем константних коефицијената, $x^i$ променљиве координате и $B$ константа.

Као и у простору од три димензије, вектор чије су координате коефицијенти $A_i$, тј.

$$\vec{a} = \{A_i\} = \{A_1 A_2 \cdots A_N\},$$

је управан на хипер-равни.

Ако су дате две хипер-равни својим једначинама

$$A_i x^i + B = 0 \quad \text{и} \quad C_i x^i + D = 0,$$

онда се услов њихове паралелности своди на услов колинеарности вектора $\vec{a} = \{A_i\}$ и $\vec{b} = \{C_i\}$, односно на пропорционалност односних коефицијената уз непознате, тј. на услов

$$A_i = k C_i.$$

Овај услов паралелности двеју хипер-равни можемо написати у облику

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{A_2}{C_2} = \cdots = \frac{A_N}{C_N} = k,$$

где је $k$ коефицијент пропорционалности.

**Задатак 49.** (Одељак 8., задатак 4.). У афином четвородимензионом простору дат је неки вектор $\vec{e} = \{1 \quad 0 \ -1 \quad 2\}$. Одредити његове координате у правцу вектора $\vec{a} = \{0\ 1\ 0\ 0\}$, $\vec{b} = \{-1\ 0\ 0\ 0\}$ и $\vec{c} = \{2 \quad 0 - 1 \quad 2\}$.

*Решење*: Ако компонете вектора $\vec{e}$ треба да буду у правцима вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, онда можемо писати

$$\vec{e} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$$

где су $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ координате вектора $\vec{e}$ у правцу вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, које треба одредити. Горњој векторској једначини одговарају следеће четири скаларне једначине

$$1 = -\mu + 2\nu,$$
$$0 = \lambda,$$
$$-1 = -\nu,$$
$$2 = 2\nu.$$

Из овог система једначина добивамо

$$\lambda = 0, \quad \mu = 1, \quad \nu = 1,$$



што значи да вектор $\vec{e}$ можемо изразити као

$$\vec{e} = \vec{b} + \vec{c},$$

тј. компонента вектора $\vec{e}$ у правцу вектора $\vec{a}$ једнака је нули, у правцу вектора $\vec{b}$ једнака је $\vec{b}$ и у правцу вектора $\vec{c}$ једнака је вектору $\vec{c}$.

**Задатак 50.** (Одељак 8., задатак 5.). Нека $E_2'$ и $E_2''$ буду два дводимензиона потпростора неког еуклидског простора $E_N$ од $N$ димензија. Показати да се у случају $N = 3$ они у општем случају секу по некој кривој; ако је $N = 4$ они ће се у општем случају сећи у коначном броју тачака; а ако је $N > 4$ они се у општем случају неће сећи.

*Решење*: а) Потпростори $E_2'$ и $E_2''$ неког еуклидског простора $E_N$ од $N$ димензија представљају дводимензионе површи у том простору. Једначине тих површи у тродимензионом еуклидском простору можемо изразити у облику

$$x^i = x_1^i(t_1, \ t_2),$$

$$x^i = x_2^i(t_3, \ i_4), \quad (i = 1, \ 2, \ 3),$$

где су $x^i$ три променљиве координате, а $t_1$, $t_2$, $t_3$ и $t_4$ неки променљиви параметри.

У горњем систему од шест једначина фигуришу седам променљивих, $x^i$, $t_1$, $t_2$, $t_3$ и $t_4$. Шест променљивих, рецимо $x^i$, $t_2$, $t_3$, $t_4$, можемо изразити преко променљиве $t_1$, па је, према томе,

$$x^i = x^i(t_1),$$

што представља једначину криве по којој се секу дате површи.

б) У четвородимензионом еуклидском простору, једначине површи могу се написати у облику

$$x^i = x_1^i(t_1, \ t_2),$$

$$x^i = x_2^i(t_3, \ t_4), \quad (i = 1, \ 2, \ 3, \ 4).$$

Из овог система од осам једначина могу се, у општем случају, одредити осам променљивих $x^i$, $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$, што значи да се површи могу сећи само у коначном броју тачака.

в) У еуклидском простору са бројем димензија већим од четири, $N > 4$, једначине површи се могу изразити у облику

$$x^i = x_1^i(t_1, \ t_2),$$

$$x^i = x_2^i(t_3, \ t_4), \quad (i = 1, \ 2, \ \ldots, \ N > 4).$$

Из овог система од $2N > 8$ једначина не могу се, у општем случају, наћи решења по $N + 4 < 2N$ променљивих, $x^i$, $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$, што значи да се, у општем случају, површи неће сећи.

**Задатак 51.** (Одељак 8., задатак 6.). Колико димензија има простор параметара који одређују положај слободног крутог тела у кретању. Одредити његове координате и размаке у којима се мењају. Је ли тако одређен афини или метрички простор?

***Решење***: Положај слободног крутог тела одређен је координатама ма којих трију неколинеарних његових тачака. С обзиром да је свака тачка одређена са три координате, положај крутог тела је одређен са девет координата. Како, међутим, између тих девет координата постоје три везе (које су последица инваријантности растојања између тачака), положај крутог тела одређен је са шест параметара. Према томе, простор параметара, који одређују положај крутог тела у кретању, има шест димензија.

За шест параметара који одређују положај крутог тела можемо узети, рецимо, три Декартове координате једне фиксиране тачке тела и три Ојлерова угла: $X_A$, $Y_A$, $Z_A$, угао сопствене ротације $\varphi$, угао прецесије $\psi$ и угао нутације $\vartheta$. Ови параметри се мењају у размацима

$$-\infty < X_A < \infty, \quad -\infty < Y_A < \infty, \quad -\infty < Z_A < \infty,$$

$$-\infty < \varphi < \infty, \quad -\infty < \psi < \infty, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi.$$

На основу познавања само параметара, тј. координата параметарског простора, који одређују положај крутог тела, не можемо утврдити да ли је простор афини или метрички. Наиме, уколико нема потребе за увођењем метрике у овај простор можемо га сматрати афиним. Уколико се појави потреба за увођењем метрике у овај простор (што је могуће), онда га можемо сматрати метричким. Напоменимо да за одређивање параметара, који одређују овај простор, нема никаквог значаја је ли он афини или метрички.

**Задатак 52.** (Одељак 8,. задатак 7.). Ако су параметарске једначине неке хипер-површи у простору од пет димензија

$$x^1 = a \cos u^1, \quad x^2 = a \sin u^1 \cos u^2,$$

$$x^3 = a \sin u^1 \sin u^2 \cos u^3, \quad x^4 = a \sin u^1 \sin u^2 \sin u^3 \cos u^4,$$

$$x^5 = a \sin u^1 \sin u^2 \sin u^3 \sin u^4,$$

где је $a$ нека константа, $u^i (i = 1, 2, 3, 4)$ параметри, написати једначину те хипер-површи у облику само једне једначине.

***Решење***: Изједначивши збир квадрата левих страна горњих једначина са збиром квадрата десних страна, добивамо

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 + (x^5)^2 = a^2.$$

На овај начин смо из пет параметарских једначина елиминисали четири парметра, $u^i (i = 1, 2, 3, 4)$, и добили једначину исте хипер-површи у непараметарском (имплицитном) облику. То је једначина сфере у простору од пет димензија, са центром у координатном почетку и полупречником $a$.



## 9. Трансформација промењивих

**Задатак. 53.** (Одељак 9., задатак 1.) Дата је (ортогонална) афина трансформација одређена једначинама

$$\bar{x}^i = k a^i_j x^j,$$

где су $a^i_j$ и $k$ константе и где је

$$|a^i_j| = +1.$$

Протумачити геометријски ову трансформацију.

***Решење***: За $k = 1$, с обзиром да је $|a^i_j| = a = 1$, горња ортогонална афина трансформација би одговарала ротацијама.

Квадрат растојања $d$ ма које тачке, са координатама $x^i$, од координатног почетка износи

$$d^2 = \sum_i (x^i)^2.$$

Ако извршимо дату афину трансформацију, квадрат растојања ће бити

$$\bar{d}^2 = \sum_i (\bar{x}^i)^2 = k^2 \sum_i a^i_j a^i_r x^j x^r = k^2 \sum_j (x^j)^2 = k^2 d^2.$$

Према томе, можемо закључити, да дата афина трансформација одговара ротацијама и издужењу у размери $k$ у односу на координатни почетак.

**Задатак 54.** (Одељак 9., задатак 2.). Показати да је у детерминанти ортогоналних трансформација која одговара ротацијама сваки елемент детерминанте једнак свом кофактору и обрнуто: ако је тај услов за неку детерминанту испуњен она мора бити ортогонална.

***Решење***: Систем коефицијената ортогоналне трансформације која одговара ротацији задовољава релацију

$$\sum_i a^i_j a^i_k = \delta_{jk}, \quad (a = 1).$$

Ако у овој релацији извршимо композицију са кофактором $A^j_r$ елемента $a^r_j$, добивамо

$$\sum_i a^i_j A^j_r a^i_k = \delta_{jk} A^j_r$$

односно

$$\sum_i \delta^i_r a^i_k = A^k_r.$$

Одавде следи

$$a^r_k = A^k_r,$$

што је и требало показати.

Да бисмо показали обрнуто, пођимо од релације

$$a^r_k = A^k_r,$$

и извршимо композицију са $a^r_i$. Тада добивамо

$$\sum_r a^r_k a^r_i = a^r_i A^k_r,$$

односно

$$\sum_r a^r_k a^r_i = a\,\delta_{ki}. \tag{1}$$

Одавде следи

$$\left|\sum_r a^r_k a^r_i\right| = a^N,$$

односно

$$a^2 = a^N,$$

а одавде добивамо, за $N \neq 2$,

$$a = 1.$$

Ако ово заменимо у (1) добивамо

$$\sum_r a^r_k a^r_i = \delta_{ki},$$

што значи да је трансформација, чији су коефицијенти једнаки својим кофакторима, ортогонална и да одговара ротацији, са изузетком трансформација чији су коефицијенти дати матрицом другог реда.

**Задатак 55.** (Одељак 9., задатак 3.). Које од ниже наведених детерминаната одређују ортогоналне трансформације а које не?

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

***Решење***: Израчунавањем вредности горњих детерминаната добивамо

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq \pm 1, \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \neq \pm 1,$$

на основу чега закључујемо да само друга детерминанта може одређивати ортогоналну трансформацију, јер је испуњен услов да је вредност њене детерминанте једнака плус или минус један. Међутим, то није довољан услов. Да би она одређивала ортогоналну трансформацију њени елементи морају задовољавати услове

$$\sum a^i_r a^i_s = \delta_{rs}.$$



Ових шест независних услова можемо протумачити на следећи начин: Ако елементе који се налазе у било којој врсти (или колони) сматрамо за координате једног вектора, онда тако формирани вектори морају бити ортогонални и јединични. Лако је проверити да друга од горњих детерминаната задовољава овај услов, па закључујемо да она одређује ортогоналну трансформацију.

**Задатак 56.** (Одељак 9., задатак 4.). Дата је ортогонална трансформација

$$\bar{y}^i = a^i_j y^j,$$

па уочимо две тачке $P_1$ и $P_2$ чије су координате: у односу на систем променљивих $y^i: y^i_1$ и $y^i_2$, а у односу на систем $\bar{y}^i$ оне су $\bar{y}^i_1$ и $\bar{y}^i_2$. Доказати да онда мора бити

$$\sum_i (\bar{y}^i_2 - \bar{y}^i_1)^2 = \sum_i (y^i_2 - y^i_1)^2.$$

***Решење***: Ако извршимо смену променљивих на основу дате ортогоналне трансформације, непосредно добивамо

$$\sum_i (\bar{y}^i_1 - \bar{y}^i_2)^2 = \sum_i a^i_j a^i_k (y^j_2 - y^j_1)(y^k_2 - y^k_1) = \delta_{jk}(y^j_2 - y^j_1)(y^k_2 - y^k_1) = \sum_i (y^i_2 - y^i_1)^2,$$

што је и требало доказати.

**Задатак 57.** (Одељак 9., задатак 5.). Израчунати јакобијане за наредне трансформације

$$\bar{x}^i = a^i_r x^r, \quad x^r = \bar{a}^r_i \bar{x}^i,$$

и изразити $\bar{a}^i_j$ помоћу $a^i_j$.

***Решење***: Јакобијан прве трансформације одређен је детерминантом

$$\left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right| = |a^i_k|,$$

а друге

$$\left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right| = |\bar{a}^i_k|.$$

У изразу за прву трансформацију,

$$\bar{x}^i = a^i_r x^r,$$

$x^r$ изразимо помоћу друге трансформације. Тада добивамо

$$\bar{x}^i = a^i_r \bar{a}^r_j \bar{x}^j, \quad \text{тј.} \quad a^i_r \bar{a}^r_j = \delta^i_j.$$

Ако, даље, извршимо композицију са кофактором $A^k_i$ елемента $a^i_k$ у детерминанти $|a^i_j|$, добивамо

$$a\,\delta^k_r \bar{a}^r_j = A^k_j,$$

односно

$$\bar{a}^k_j = \frac{A^k_j}{a} = \alpha^k_j,$$

што значи да су $a^i_r$ и $\bar{a}^i_r$ елементи међусобно инверзних детерминаната.

**Задатак 58.** (Одељак 9., задатак 6.). Дата је Лоренцова трансформација

$$\bar{x}^1 = \frac{x^1 - vx^4}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3, \quad \bar{x}^4 = \left(x^4 - \frac{vx^1}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$x^1 = \frac{\bar{x}^1 + v\bar{x}^4}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \quad x^2 = \bar{x}^2, \quad x^3 = \bar{x}^3, \quad x^4 = \left(\bar{x}^4 + \frac{v\bar{x}^1}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Дискутовати питање њене несингуларности и реверзибилности израчунавањем јакобијана.

*Решење*: Лоренцова трансформиција је линеарна хомогена трансформација облика

$$\bar{x}^i = a^i_j x^j, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

чија је матрица коефицијената

$$\{a^i_j\} = \left\{\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right\} = \begin{Vmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 & \gamma \end{Vmatrix},$$

и где је уведена ознака $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Исто тако је

$$x^i = \bar{a}^i_j \bar{x}^j, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

где је

$$\{\bar{a}^i_j\} = \left\{\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right\} = \begin{Vmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 & \gamma \end{Vmatrix}.$$

Пошто су детерминанте горњих матрица (јакобијани трансформација) различите од нуле, тј

$$|a^i_s| = \left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}\right| = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \quad \text{и} \quad |\bar{a}^i_j| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right| = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1,$$

закључујемо да су Лоренцове трансформације несингуларне и реверзибилне.



**Задатак 59.** (Одељак 9., задатак 7.). У еуклидском простору од три димензије написати једначине трансформације Декартових правоуглих координата у: а) цилиндарске поларне координате; б) сферне поларне координате и в) елиптичке координате.

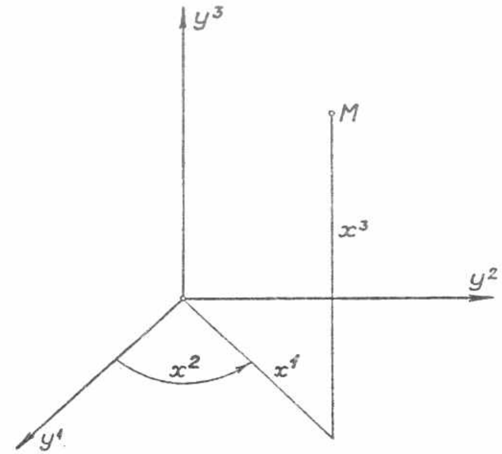
Израчунати јакобијане ових трансформација и утврдити у којим тачкама они могу бити једнаки нули или бесконачности.

*Решење*: а) Означимо Декартове правоугле координате са $y^i\,(i = 1, 2, 3)$, а цилиндарске поларне са $x^i\,(i = 1, 2, 3)$. Тада је

$$y^1 = x^1 \cos x^2,$$

$$y^2 = x^1 \sin x^2,$$

$$y^3 = x^3$$




Одавде, за инверзне трансформације, добивамо

$$x^1 = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2},$$

$$x^2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y^2}{y^1}\right),$$

$$x^3 = y^3.$$

Јакобијани ових трансформација износе

$$\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^s}\right| = \begin{vmatrix} \cos x^2 & -x^1 \sin x^2 & 0 \\ \sin x^2 & x^1 \cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^1$$

и

$$\left|\frac{\partial x^i}{\partial y^s}\right| = \frac{1}{(x^1)} = \frac{1}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}},$$

одакле видимо да су јакобијани једнаки нули или бесконачности у тачкама $x^1 = 0$, односно $y^1 = y^2 = 0$.

б) У овом случају је

$$y^1 = x^1 \cos x^2 \cos x^3,$$

$$y^2 = x^1 \sin x^2 \cos x^3,$$

$$y^3 = x^1 \sin x^3.$$

Одавде, за инверзне трансформације, добивамо

$$x^1 = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2},$$

$$x^2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y^2}{y^1}\right),$$

$$x^3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y^3}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}}\right).$$

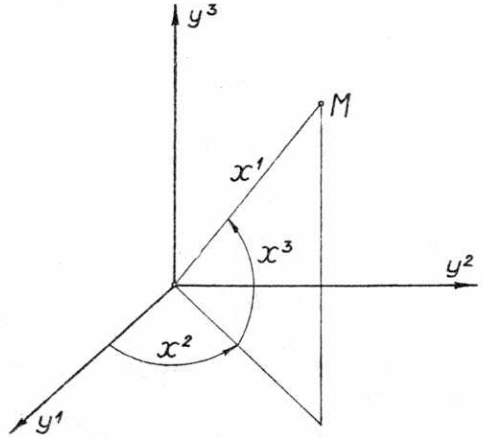
Јакобијани ових трансформација износе

$$\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^s}\right| = \begin{vmatrix} \cos x^2 \cos x^3 & -x^1 \sin x^2 \cos x^3 & -x^1 \cos x^2 \sin x^3 \\ \sin x^2 \cos x^3 & x^1 \cos x^2 \cos x^3 & -x^1 \sin x^2 \sin x^3 \\ \sin x^3 & 0 & x^1 \cos x^3 \end{vmatrix} = (x^1)^2 \cos x^3,$$

и

$$\left|\frac{\partial x^i}{\partial y^s}\right| = \frac{1}{(x^1)^2 \cos x^3} = \frac{1}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} \cdot \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}},$$

одакле видимо да су јакобијани једнаки нули или бесконачности у тачкама $x^1 = 0$, $x^3 = \frac{\pi}{2}$, односно $y^1 = y^2 = 0$.




в) Једначина

$$\frac{(y^1)^2}{(t)^2} + \frac{(y^2)^2}{(t)^2 - (b)^2} + \frac{(y^3)^2}{(t)^2 - (c)^2} = 1,$$

одређује, у односу на правоугли систем Декартових координата, површ другог реда. Узмимо да је у тој једначини $c > b$. Ако се $t$ мења од $\infty$ до $c$,



једначина представља фамилију конфокалних елипсоида. Аналогно, за $c > t > b$ фамилију једнограних хиперболоида и за $b > t > 0$ фамилију двограних хиперболоида. Те три фамилије површи су међусобно ортогоналне.

Ако изаберемо три различите вредности параметра $t$, које задовољавају услове

$$t_3 > c > t_2 > b > t_1 > 0,$$

и ставимо

$$\frac{t_1}{c} = \mu, \quad \frac{t_2}{c} = \nu, \quad \frac{t_3}{c} = \lambda, \quad k = \frac{b}{c} < 1,$$

тако да је $\lambda > 1 > \nu > k > \mu > 0$, за Декартове правоугле координате $y^i$ тачке пресека тих трију површи, одређених вредностима $\mu$, $\nu$, $\lambda$, добивамо следеће изразе:

$$y^1 = \pm \frac{c}{k} \mu\nu\lambda,$$

$$y^2 = \pm \frac{c}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - (k)^2}} \sqrt{[(k)^2 - (\mu)^2]\,[(\nu)^2 - (k)^2]\,[(\lambda)^2 - (k)^2]},$$

(1)

$$y^3 = \pm c \frac{1}{\sqrt{1 - (k)^2}} \sqrt{[1 - (\mu)^2]\,[1 - (\nu)^2]\,[(\lambda)^2 - 1]},$$

тј. вредности $\mu$, $\nu$, $\lambda$, одређују $y^1$, $y^2$, $y^3$, са тачношћу до знака (види Э. Маделунг: Математический аппарат физики, физматгиз, 1960, превод са немачког). Бројеви $\mu$, $\nu$, $\lambda$ су елиптичке координате са параметрима $k$ и $c$.

На основу једначина (1), за јакобијан добивамо

$$\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| = c^3 \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\nu^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{\sqrt{(1 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)(1 - \nu^2)(\nu^2 - k^2)(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - k^2)}},$$

где смо ради једноставности у писању ставили

$$\{x^j\} = \{\mu, \nu, \lambda\}$$

и $\lambda^2 = (\lambda)^2$, $\mu^2 = (\mu)^2$, итд.

Из горњег израза за јакобијан, с обзиром на наведене неједнакости које задовољавају елиптичке координате, видимо да ће он бити увек различит од нуле и бесконачности у тачкама у којима су те координате дефинисане

**Задатак 60.** (Одељак 9., задатак 8.). Доказати да је $\frac{df(x)}{dt} = \frac{d\bar{f}(\bar{x})}{dt}$, кад је $f(x) = f(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ и $f(x) = \bar{f}(\bar{x})$ на два начина: 1) поставити количник диференција за обе стране идентичности по $t$, која гласи $\bar{f}[\bar{x}(t)] = f[x(t)]$ и образовати лимес за $\Delta t \to 0$; 2) трансформисати $\frac{\partial f}{\partial x^r} x'^r$, $\left(x'^r = \frac{dx^r}{dt}\right)$, према обрасцима за трансформацију који гласе

$$\frac{\partial f}{\partial x^r} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \quad \text{и} \quad x'^r = \bar{x}'^j \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}.$$

***Решење***: 1) Из релације

$$\bar{f}[\bar{x}(t)] = f[x(t)]$$

следи

$$\bar{f}[\bar{x}(t+\Delta t)] = f[x(t+\Delta t)],$$

па је гранична вредност количника диференција

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{f}[\bar{x}(t+\Delta t)] - \bar{f}[\bar{x}(t)]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f[x(t+\Delta t)] - f[x(t)]}{\Delta t},$$

тј.

$$\frac{d\bar{f}[\bar{x}(t)]}{dt} = \frac{df[x(t)]}{dt},$$

што је и требало доказати.

2) На основу датих образаца за трансформацију, непосредно следи

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \frac{\partial \bar{f}}{d\bar{x}^i} \frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \delta_k^j \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt},$$

тј.

$$\frac{d\bar{f}(\bar{x})}{dt} = \frac{df(x)}{dt},$$

што је и требало доказати.

## 10. Инваријанте. Контраваријантни и коваријантни вектори

**Задатак 61.** (Одељак 10., задатак 1.). Показати да између закона контраваријантне и коваријантне трансформације система првог реда нема у односу на ортогоналне трансформације у еуклидском простору никакве разлике.

***Решење***: Закони трансформације контраваријантног, односно коваријантног вектора (система првог реда) су

$$\bar{u}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} u^j, \quad \bar{u}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} u_j.$$

Ако је трансформација ортогонална онда је

(1) $$\bar{x}^i = a_j^i x^j,$$

при чему је

$$\sum_i a_j^i a_k^i = \delta_{jk}$$

и

$$a = |a_j^i| = \pm 1.$$

Из (1) следи

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = a_j^i,$$



тако да закон трансформације контраваријантног вектора можемо написати у облику

(2) $$\bar{u}^i = a_j^i u^j.$$

Ако у релацији (1) извршимо композицију са $a_k^i$ добивамо

$$\sum_i a_k^i \bar{x}^i = \sum_i a_j^i a_k^i x^j = \delta_{jk} x^j$$

тј.

$$\sum_i a_j^i \bar{x}^i = x^j,$$

одакле следи

$$\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = a_j^i,$$

тако да закон трансформације коваријантног вектора можемо написати у облику

(3) $$\bar{u}_i = \sum_j a_j^i u_j.$$

Упоређујући (2) и (3) видимо да између тих закона трансформације нема разлике, што је и требало доказати.

**Задатак 62.** (Одељак 10., задатак 2.). Ако су $U^i$ $(i = 1, 2, 3)$ координате неког контраваријантног вектора у односу на Декартов правоугли систем у тродимензином еуклидском простору, наћи његове координате у: а) цилиндарским поларним координатама, и б) сферним поларним координатама.

***Решење***: а) Везе између поларно цилиндарских и Декартових правоуглих координата су

$$x^1 = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2},$$

$$x^2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y^2}{y^1}\right),$$

$$x^3 = y^3.$$

На основу закона трансформације

$$u^i = U^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j},$$

за контраваријантне координате датог вектора у поларно цилиндарском систему координата добивамо

$$u^1 = U^1 \frac{\partial x^1}{\partial y^1} + U^2 \frac{\partial x^1}{\partial y^2} + U^3 \frac{\partial x^1}{\partial y^3},$$

$$u^2 = U^1 \frac{\partial x^2}{\partial y^1} + U^2 \frac{\partial x^2}{\partial y^2} + U^3 \frac{\partial x^2}{\partial y^3},$$

$$u^3 = U^1 \frac{\partial x^3}{\partial y^1} + U^2 \frac{\partial x^3}{\partial y^2} + U^3 \frac{\partial x^3}{\partial y^3}.$$

Парцијални изводи поларно цилиндарских по Декартовим координтама су

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^1}=\frac{y^1}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2}}, \quad \frac{\partial x^1}{\partial y^2}=\frac{y^2}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2}}, \quad \frac{\partial x^1}{\partial y^3}=0,$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial y^1}=-\frac{y^2}{(y^1)^2+(y^2)^2}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial y^2}=\frac{y^1}{(y^1)^2+(y^2)^2}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial y^3}=0,$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial y^1}=0, \quad \frac{\partial x^3}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial x^3}{\partial y^3}=1,$$

тако да за контраваријантне координате вектора добивамо

$$u^1=\frac{1}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2}}\cdot(y^1U^1+y^2U^2),$$

$$u^2=\frac{1}{(y^1)^2+(y^2)^2}\cdot(y^1U^1-y^2U^2),$$

$$u^3=U^3,$$

или, ако Декартове координате изразимо преко поларно цилиндарских,

$$u^1=\frac{1}{x^1}(x^1\cos x^2\,U^1+x^1\sin x^2\,U^2)=U^1\cos x^2+U^2\sin x^2,$$

$$u^2=\frac{1}{(x^1)^2}(x^1\cos x^2\,U^1-x^1\sin x^2\,U^2)=\frac{1}{x^1}(U^1\cos x^2-U^2\sin x^2),$$

$$u^3=U^3.$$

б) Везе између сферних поларних координата и правоуглих Декартових су

$$x^1=\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2},$$

$$x^2=\operatorname{arctg}\left(\frac{y^2}{y^1}\right),$$

$$x^3=\operatorname{arctg}\left(\frac{y^3}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2}}\right).$$

У овом случају, парцијални изводи су

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^1}=\frac{y^1}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2}}, \quad \frac{\partial x^1}{\partial y^2}=\frac{y^2}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2}},$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^3}=\frac{y^3}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2}},$$



$$\frac{\partial x^2}{\partial y^1}=-\frac{y^2}{(y^1)^2+(y^2)^2}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial y^2}=\frac{y^1}{(y^1)^2+(y^2)^2}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial y^3}=0,$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial y^1}=\frac{-y^1y^3}{[(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2]\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2}},$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial y^2}=\frac{-y^2y^3}{[(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2]\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2}},$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial y^3}=\frac{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2}}{(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2},$$

тако да, на основу закона трансформације

$$u^i=U^j\frac{\partial x^i}{\partial y^j},$$

за контраваријантне координате вектора у сферним поларним координатама, изразивши Декартове координате преко сферних, добивамо

$$u^1=U^1\cos x^2\cos x^3+U^2\sin x^2\cos x^3+U^3\sin x^3,$$

$$u^2=-\frac{1}{x^1\cos x^3}(U^1\sin x^2+U^2\cos x^2),$$

$$u^3=-\frac{1}{x^1}(U^1\cos x^2\sin x^3+U^2\sin x^2\sin x^3-U^3\cos x^3).$$

**Задатак 63.** (Одељак 10., задатак 3.). Ако су $y^i$ $(i=1, 2, 3)$ Декартове правоугле координате које зависе од времена $t$, тј. ако је $y^i=y^i(t)$, испитати:

а) јесу ли $\dfrac{dx^i}{dt}$ координате вектора и каквог по природи?

б) јесу ли $\dfrac{d^2x^i}{dt^2}$ координате вектора?

***Решење:*** а) Произвољне генералисане координате $x^i$ добивамо из правоуглих Декартових трансформацијом

$$x^i(t)=x^i[y^1(t),\ y^2(t),\ y^3(t)].$$

На основу овога је

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{dy^j}{dt}, \tag{1}$$

што представља закон трансформације контраваријантног вектора, па су, према томе, $\dfrac{dx^i}{dt}$ координате контраваријантног вектора.

б) Ако (1) још једанпут диференцирамо по времену, добивамо

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{d^2 y^j}{dt^2} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k} \frac{dy^j}{dt} \frac{dy^k}{dt},$$

на основу чега закључујемо да $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$ нису координате вектора.

***Напомена.*** У специјалном случају, када је

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k} = 0,$$

тј. када су трансформације линеарне,

$$x^i = a^i_j y^j + b^i,$$

где су $a^i_j$ и $b^i$ константе, $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$ јесу координате контраваријантног вектора. Према томе, можемо закључити, $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$ јесу координате контраваријантног вектора само у односу на Декартов систем координата, јер се линеарним трансформацијама из Декартовог система координата добива опет Декартов систем координата.

**Задатак 64.** (Одељак 10., задатак 4.). Нека у Декартовим правоуглим координатама $y^i$ $(i = 1, 2, 3)$ функција $\varphi(y^i) = y^1 y^3 - (y^2)^2$ буде скаларна инваријанта.

а) Извршити њену трансформацију у сферне поларне координате $x^i$.

б) Одредити њене парцијалне изводе по $y^i$ и $x^i$ и показати да се оба система парцијалних извода понашају у односу на произвољну даљу трансформацију као коваријантни вектори.

в) Упоредити координате $\frac{\partial \varphi}{\partial y^i}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$.

***Решење:*** а) Вредност скаларне инваријанте у правоуглом Декартовом систему координата је

$$(1) \qquad \varphi(y^i) = y^1 y^3 - (y^2)^2.$$

С обзиром на закон трансформације скаларне инваријанте, који је облика

$$\bar{\varphi} = \varphi,$$

и на везе између Декартових и сферних координата,

$$y^1 = x^1 \cos x^3 \cos x^2,$$

$$y^2 = x^1 \sin x^2 \cos x^3,$$

$$y^3 = x^1 \sin x^3,$$

непосредно добивамо

$$(2) \qquad \bar{\varphi}(x^i) = (x^1)^2 \cos x^3 (\cos x^2 \sin x^3 - \sin^2 x^2 \cos x^3).$$



б) Диференцирањем из (1) добивамо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y^1} = y^3, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y^2} = -2 y^2, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y^3} = y^1,$$

а из (2)

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^1} = 2 x^1 \cos x^3 (\cos x^2 \sin x^3 - \sin^2 x^2 \cos x^3),$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^2} = -(x^1)^2 \cos x^3 \sin x^2 (\sin x^3 + 2 \cos x^2 \cos x^3),$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^3} = (x^1)^2 (\cos x^2 \cos 2 x^3 + 2 \sin x^3 \sin^2 x^2 \cos x^3).$$

Ако, сада, из сферног поларног система координата, чије смо координате обележили са $x^i$, пређемо у неки други генералисани систем координата $\bar{x}^i$, трансформацијом

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i (x^1, x^2, x^3),$$

и узмемо у обзир закон трансформације дате скаларне инваријанте,

$$\bar{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi},$$

добивамо

$$\frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^i},$$

односно

$$\frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i},$$

што представља закон трансформације коваријантног вектора.

в) Парцијални изводи $\frac{\partial \varphi}{\partial y^i}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ повезани су преко релације

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i},$$

што значи да су то координате једног те истог вектора (градијента скаларне функције $\varphi$) у Декартовом и сферном поларном систему координата. Тако је, на пример,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^1} = 2 x^1 \cos x^3 (\cos x^2 \sin x^3 - \sin^2 x^2 \cos x^3), \quad \text{итд.}$$

**Задатак 65.** (Одељак 10., задатак 5.). Показати да је квадратна диференцијална форма

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - c^2 (dx^4)^2,$$

где је $c$ позитивна константа, апсолутна инваријанта у односу на групу Лоренцових трансформација

$$x^1 = \frac{\bar{x}^1 - v\bar{x}^4}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad x^2 = \bar{x}^2, \quad x^3 = \bar{x}^3, \quad x^4 = \frac{\bar{x}^4 - \frac{v}{c^2}\bar{x}^1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

*Решење*: Ако дате Лоренцове трансформације напишемо у диференцијалном облику, тј.

$$dx^1 = \frac{d\bar{x}^1 - v\,d\bar{x}^4}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad dx^2 = d\bar{x}^2, \quad dx^3 = d\bar{x}^3, \quad dx^4 = \frac{d\bar{x}^4 - \frac{v}{c^2}\,d\bar{x}^1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

и то заменимо у дату диференцијалну квадратну форму, добивамо

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - c^2\,(dx^4)^2 =$$

$$= \gamma^2\,(d\bar{x}^1 - v\,d\bar{x}^4)^2 + (d\bar{x}^2)^2 + (d\bar{x}^3)^2 - c^2\,\gamma^2\left(d\bar{x}^4 - \frac{v}{c^2}\,d\bar{x}^1\right)^2,$$

где смо увели ознаку $\gamma^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$. Погодним груписањем чланова, даље добивамо

$$ds^2 = \left(\gamma^2 - \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right)(d\bar{x}^1)^2 + (d\bar{x}^2)^2 + (d\bar{x}^3)^2 + \gamma^2\,(v^2 - c^2)\,(d\bar{x}^4)^2$$

или

$$ds^2 = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(d\bar{x}^1)^2 + (d\bar{x}^2)^2 + (d\bar{x}^3)^2 - c^2\,\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(d\bar{x}^4)^2,$$

што се своди на

$$ds^2 = (d\bar{x}^1)^2 + (d\bar{x}^2)^2 + (d\bar{x}^3)^2 - c^2\,(d\bar{x}^4)^2 = d\bar{s}^2.$$

На основу горње једнакости закључујемо да је дата диференцијална квадратна форма, у односу на Лоренцове трансформације, апсолутна скаларна инваријанта, што је и требало показати.

**Задатак 66.** (Одељак 10., задатак 6.). У односу на Декартове правоугле координате $y^i$ Хамилтонов оператор $\nabla$ дефинисан је системом оператора $\frac{\partial}{\partial y^i}$. Одредити према начину трансформисања при смени промењљивих формалну природу овог система.

*Решење*: Ако из Декартовог система координата пређемо у генералисани, сменом

$$x^i = x^i\,(y^j),$$

онда се систем оператора $\frac{\partial}{\partial y^i}$ трансформише по закону

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial y^i}\,\frac{\partial y^i}{\partial x^k},$$

на основу чега закључујемо да Хамилтонов оператор има формалну природу коваријантног вектора.



**Задатак 67.** (Одељак 10., задатак 7.). У аналогији са основним системом контраваријантних вектора у афином простору, дефинисати у простору који му је дуалан основни систем коваријантних вектора.

*Решење*: У афином простору се контраваријантни вектор дефинише као уређен пар тачака. Основни координатни вектори $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ се дефинишу тако да је сваком од њих прва тачка *координатни почетак* (0, 0, . . . . , 0), па је довољно навести само координате друге (крајње) тачке. Према томе, *основни систем контраваријантних вектора* у афином простору од $N$ димензија чине

$$\vec{e}_1 = \{1,\ 0, \ldots,\ 0\},$$

$$\vec{e}_2 = \{0,\ 1, \ldots,\ 0\},$$

— — — — — —

$$\vec{e}_N = \{0,\ 0, \ldots,\ 1\},$$

где смо свуда узели исту дужинску јединицу као представника одговарајуће величине, што је увек могуће (види: Т. Анђелић, Тензорски рачун, ст. 23.).

С друге стране, у афином простору коваријантни вектор се дефинише као уређен пар паралелних хиперравни, ако је простор вишедимензиони $(N > 3)$, иначе само уређеним паром равни (види: Т. Анђелић, Тензорски рачун, стр. 44—45.). У том случају ћемо као *основни систем коваријантних вектора* дефинисати оне векторе $\vec{e}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, који су одређени дуалним елементима (хиперравнима) тако да ће почетне и крајње хиперравни (које, према једначини 33. на стр. 45. књиге Тензорски рачун од Т. Анђелића, одређују основне коваријантне векторе) бити

$$\text{за } \vec{e}^1 : x^1 = 0,\ x^1 = 1,$$

$$\text{за } \vec{e}^2 : x^2 = 0,\ x^2 = 1,$$

— — — — — —

$$\text{за } \vec{e}^N : x^N = 0,\ x^N = 1.$$

Међутим, довољно је узети само крајње хиперравни, па, као систем основних коваријантних вектора, имамо

$$\vec{e}^1 = \{1,\ 0, \ldots,\ 0\},$$

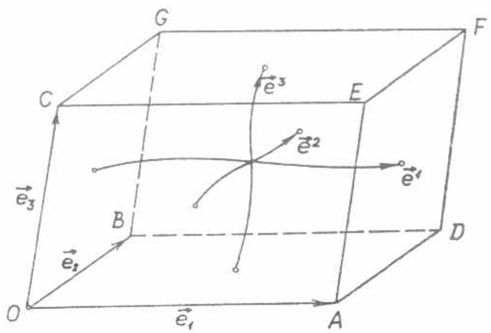
$$\vec{e}^2 = \{0,\ 1, \ldots,\ 0\},$$

— — — — — —

$$\vec{e}^N = \{0,\ 0, \ldots,\ 1\},$$

сад само у односу на тангентне координатне хиперравни а не тачке.

Треба само уочити да је дуални елемент (хиперраван) који одговара координатном почетку неодређен; док је хиперраван, на пример, која одговара тачки $\{1, 0, \ldots, 0\}$, тј. крају контраваријантног основног вектора $\vec{e}_1$, одређена, али, то не причињава никакве тешкоће.




Ово се може према Широкову (Широков, Тензорное исчисление, ст. 87.) у тродимензионом простору илустровати датом сликом.

На слици је јасно шта су основни контраваријантни вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Основни коваријантни вектори биће одређени: $\vec{e}^1$ паралелним равнима ($OBGC$, $ADFE$); $\vec{e}^2$ паралелним равнима ($OAEC$, $BDFG$) и, најзад, $\vec{e}^3$ паралелним равнима ($OADB$, $CEFG$). Само у афином простору, где углови нису одређени, не може се сматрати да је $\vec{e}_i = \vec{e}^i$; то важи само у метричком простору, па смо основне коваријантне векторе представили луцима кривих линија.

**Задатак 68.** (Одељак 10., задатак 8.). Дата је линеарна диференцијална форма

$$X_i dx^i,$$

где је

$$X_i = X_i(x^1, x^2, \ldots, x^N)$$

а $x^i$ произвољне променљиве.

а) Показати да систем $X_i$ одређује коваријантни вектор, ако је

$$X_i dx^i = d\varphi,$$

где је $\varphi = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ скаларна инваријантна.

б) Показати да систем $X_i$ одређује коваријантни вектор и у случају кад линеарна диференцијална форма није тотални диференцијал али има скаларни интеграциони фактор $\lambda(x^1, x^2, \ldots, x^N)$, тј. кад је

$$\lambda X_i dx^i = d\varphi.$$

*Решење*: а) Ако извршимо смену променљивих

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^s),$$

тада је

$$\overline{d\varphi} = d\varphi,$$



односно

$$\bar{X}_i d\bar{x}^i = X_i dx^i, \tag{1}$$

јер је $d\varphi$ скаларна инваријанта, и

$$d\bar{x}^s = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i} dx^i.$$

Ако ово заменимо у (1), добивамо

$$\left(\bar{X}_s - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s} X_k\right) d\bar{x}^s = 0.$$

Пошто ова једначина мора да важи за произвољно $d\bar{x}^s$ следи да мора бити

$$\bar{X}_s - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s} X_k = 0,$$

тј.

$$\bar{X}_i = X_s \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i},$$

што значи да систем $X_i$ одређује коваријантни вектор.

б) Скаларне инваријанте $d\varphi$ и $\lambda$ трансформишу се по закону

$$d\bar{\varphi} = d\varphi,$$

$$\bar{\lambda} = \lambda,$$

тако да, с обзиром да је $d\varphi = \lambda X_i dx^i$, добивамо

$$\bar{\lambda} \bar{X}_i d\bar{x}^i = \lambda X_i dx^i,$$

односно, после скраћивања са $\lambda$ (јер је $\bar{\lambda} = \lambda$),

$$\bar{X}_i d\bar{x}^i = X_i dx^i,$$

одакле, као и раније, следи

$$\bar{X}_i = X_s \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i},$$

што значи да и у овом случају систем $X_i$ одређује коваријантни вектор.

**Задатак 69.** (Одељак 10., задатак 9.). Показати да се у еуклидском простору од три димензије увек може изабрати такав Декартов правоугли систем координата да две координате датог коваријантног вектора буду у односу на њега једнаке нули.

*Решење*: Ако су координате коваријантног вектора задате у односу на неки генералисани систем координата у тродимензионом еуклидском простору, онда је увек могуће одредити координате тог вектора у односу на неки правоугли систем Декартових координата (у еуклидским просторима увек је могуће изабрати правоугли систем Декартових координата). Нека су координате датог вектора, у односу на неки систем правоуглих Декартових координата, $v_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$. Тада су координате тог истог вектора у односу на неки други систем правоуглих Декартових координата

$$\bar{v}_i = v_j \frac{\partial y^j}{\partial \bar{y}^i}, \tag{1}$$

при чему је, с обзиром да су координатне трансформације из једног у други Декартов правоугли систем линеарне (ортогоналне),

$$\bar{y}^i = a^i_j y^j. \tag{2}$$

(Овде нисмо узели у обзир транслацију једног система у односу на други јер то за решење овог задатка нема никаквог значаја).

Из (2) следи

$$y^i = \alpha^i_j \bar{y}^j, \tag{3}$$

где је

$$\alpha^i_j = \frac{A^i_j}{a}, \quad a = |a^i| = \pm 1.$$

Из (3), даље, следи

$$\frac{\partial y^j}{\partial \bar{y}^i} = \alpha^j,$$

тако да трансформацију (1) можемо написати у облику

$$\bar{v}_i = \alpha^j_i v_j. \tag{4}$$

Ми треба да одредимо такву трансформацију при којој ће, рецимо, бити $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$ и $\bar{v}_3 \neq 0$, тј.

$$\alpha^1_1 v_1 + \alpha^2_1 v_2 + \alpha^3_1 v_3 = 0,$$

$$\alpha^1_2 v_1 + \alpha^2_2 v_2 + \alpha^3_2 v_3 = 0,$$

$$\alpha^1_3 v_1 + \alpha^2_3 v_2 + \alpha^3_3 v_3 = \bar{v}_3.$$

Овде имамо три једначине за одређивање девет коефицијената $\alpha^i_j$. Још шест једначина добијамо из услова ортогоналности

$$\sum_i \alpha^i_j \alpha^i_k = \delta_{jk},$$

што чини укупно девет једначина са девет непознатих. При томе координату $\bar{v}_3$ одређујемо као интензитет вектора $v_i$, тј. $\bar{v}_3 = (v^i v_i)^{\frac{1}{2}}$.

На основу овога закључујемо да је увек могуће наћи линеарну ортогоналну хомогену трансформацију, чији су коефицијенти $\alpha^i_j$, па да две координате датог вектора буду једнаке нули.



## 11. Дефиниција тензора другог и вишег реда

**Задатак 70.** (Одељак 11., задатак 1.). Пошто у случају ортогоналних трансформација нема разлике између закона трансформације контраваријантних и коваријантних вектора, испитати да ли се у односу на ортогоналне трансформације тако понашају и координате произвољног тензора.

***Решење***: Раније је показано (види задатак 61.) да су закони трансформације контраваријантних и коваријантних вектора исти у односу на ортогоналне трансформације,

$$\bar{u}^i = a^i_j u^j, \quad \bar{u}_i = \sum a^i_j u_j,$$

тј. да је

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = a^i_j \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = a^i_j. \tag{2}$$

Закони трансформације контраваријантног и коваријантног тензора другог реда су облика

$$\bar{u}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} u^{kl}, \quad \bar{u}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} u_{kl}.$$

Ако искористимо (1) и (2), ове законе можемо написати у облику

$$\bar{u}^{ij} = a^i_k a^j_l u^{kl}, \quad \bar{u}_{ij} = \sum_{k,\,l} a^i_k a^j_l u_{kl}$$

па видимо да између њих нема разлике.

На сличан начин показали бисмо да између закона трансформације контраваријантног и коваријантног тензора произвољног реда нема никакве разлике.

**Задатак 71.** (Одељак 11., задатак 2.). Написати обрасце за трансформацију тензора свих типова четвртог реда.

***Решење***: Тензор четвртог реда има пет могућих типова. Њихови закони трансформације су облика;

$$\bar{u}^{ijkl} = u^{pqrs} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s},$$

$$\bar{u}^{ijk\cdot}{}_{l} = u^{pqr\cdot}{}_{s} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l},$$

$$\bar{u}^{ij\cdot\cdot}{}_{kl} = u^{pq\cdot\cdot}{}_{rs} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l},$$

$$\bar{u}^{i\cdot\cdot\cdot}{}_{jkl} = u^{p\cdot\cdot\cdot}{}_{qrs} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l},$$

$$\bar{u}_{ijkl} = u_{pqrs} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l}.$$

**Задатак 72.** (Одељак 11., задатак 3.). Написати обрасце за трансформацију контраваријантног тензора трећег реда па изразити координате без црте помоћу координата са цртом.

***Решење***: Закон трансформације контраваријантног тензора трећег реда је облика

$$\bar{u}^{ijk} = u^{pqr} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}. \tag{1}$$

Ако у (1) извршимо композицију са системом $\dfrac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \dfrac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \dfrac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k}$, добивамо

$$u^{pqr} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} = \bar{u}^{ijk} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k}.$$

Како је, међутим,

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^a}{\partial x^p} = \delta^a_p, \qquad \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} = \delta^b_q, \qquad \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} = \delta^c_r,$$

биће

$$u^{pqr} \delta^a_p \delta^b_q \delta^c_r = \bar{u}^{ijk} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k},$$

тј.

$$u^{abc} = \bar{u}^{ijk} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k}.$$

**Задатак 73.** (Одељак 11., задатак 4.). Показати на основу обрасца за трансформацију да је $u^r_{\cdot st} v^p_{\cdot r}$ тензор трећег реда, ака су $u^r_{\cdot st}$ и $v^p_{\cdot r}$ тензори.

***Решење***: На основу обрасца за трансформацију тензора $u^r_{\cdot st}$ и $v^p_{\cdot r}$ биће

$$\begin{aligned} \bar{u}^r_{\cdot st} \bar{v}^p_{\cdot r} &= u^i_{\cdot jk} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^t} v^l_{\cdot m} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} = \\ &= u^i_{\cdot jk} v^l_{\cdot m} \left( \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} \right) \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^t} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l} = \\ &= u^i_{\cdot jk} v^l_{\cdot m} \delta^m_i \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^t} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l}, \end{aligned}$$

тј.

$$\bar{u}^r_{\cdot st} \bar{v}^p_{\cdot r} = u^i_{\cdot jk} v^l_{\cdot i} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^t},$$

што значи да је $u^r_{\cdot st} v^p_{\cdot r}$ тензор трећег реда, што је и требало показати.

**Задатак 74.** (Одељак 11., задатак 5.). Ако је $w^i_{\cdot jk}$ тензор трећег реда једном контраваријантан и двапут коваријантан, показати да је $w^i_{\cdot ji}$ коваријантни вектор.



***Решење***: Ако у изразу за трансформацију датог тензора трећег реда,

$$\bar{w}^i_{\cdot jk} = w^p_{\cdot qr} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k},$$

извршимо контракцију по индексима $i$ и $k$, добивамо

$$\bar{w}^i_{\cdot ji} = w^p_{\cdot qr} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}.$$

Међутим, како је

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} = \delta^r_p,$$

биће

$$\bar{w}^i_{\cdot ji} = w^p_{\cdot qr} \delta^r_p \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j},$$

односно

$$\bar{w}^i_{\cdot ji} = w^r_{\cdot qr} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j},$$

што значи да је $w^i_{\cdot ji}$ коваријантни вектор, што је и требало показати.

**Задатак 75.** (Одељак 11., задатак 6.). Ако је $u^i_{\cdot j}$ неки мешовити тензор, показати да је $|u^i_{\cdot j}|$ инваријанта.

***Решење***: Из обрасца за трансформацију датог мешовитог тензора,

$$\bar{u}^i_{\cdot j} = u^p_{\cdot q} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j},$$

следи

$$|\bar{u}^i_{\cdot j}| = |\overline{u^i_{\cdot j}}| = \left| u^p_{\cdot q} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \right| = |u^p_{\cdot q}| \left| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \right| \left| \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \right|.$$

Међутим, како је

$$\left| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \right| = \left| \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \right|^{-1},$$

добивамо

$$|\overline{u^i_{\cdot j}}| = |u^i_{\cdot j}|$$

што значи да је $|u^i_{\cdot j}|$ инваријанта, што је и требало показати.

**Задатак 76.** (Одељак 11., задатак 7.). Ако је $u^i_{\cdot j}$ мешовити тензор, показати да кофактори $U^j_{\cdot i}$ детерминанте $|u^i_{\cdot j}|$ одређују мешовити тензор другог ступња.

***Решење***: С обзиром да је $U^j_{\cdot i}$ кофактор елемента $u^i_{\cdot j}$ у детерминанти $|u^i_{\cdot j}|$, биће

$$u^i_{\cdot j} U^j_{\cdot k} = |u^i_{\cdot j}| \, \delta^i_k. \tag{1}$$

Исто тако, у координатном систему означеном са цртом, биће

$$\bar{u}^{i}_{.j}\bar{U}^{j}_{.k} = |\overline{u^{i}_{.j}}|\,\delta^{i}_{k}. \tag{2}$$

С обзиром да је $|\overline{u^{i}_{.j}}| = |u^{i}_{.j}|$ (види задатак 75.), из (1) и (2) следи

$$\bar{u}^{i}_{.j}\bar{U}^{j}_{.k} = u^{i}_{.j}U^{j}_{.k},$$

или, ако извршимо контракцију по индексима $i$ и $k$,

$$\bar{u}^{i}_{.j}\bar{U}^{j}_{.i} = u^{p}_{.q}U^{q}_{.p}.$$

Ако, даље, на основу закона за трансформацију, координате $\bar{u}^{i}_{.j}$ изразимо помоћу координата без црте, добивамо

$$u^{p}_{.q}\frac{\partial\bar{x}^{i}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial\bar{x}^{j}}\bar{U}^{j}_{.i} = u^{p}_{.q}U^{q}_{.p},$$

односно

$$\left(\bar{U}^{j}_{.i}\frac{\partial\bar{x}^{i}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial\bar{x}^{j}} - U^{q}_{.p}\right)u^{p}_{.q} = 0.$$

Како ова релација мора да важи за свако $u^{p}_{.q}$, мора бити

$$U^{q}_{.p} = \bar{U}^{j}_{.i}\frac{\partial x^{q}}{\partial\bar{x}^{j}}\frac{\partial\bar{x}^{i}}{\partial x^{p}},$$

односно

$$\bar{U}^{j}_{.i} = U^{q}_{.p}\frac{\partial\bar{x}^{j}}{\partial x^{q}}\frac{\partial x^{p}}{\partial\bar{x}^{i}},$$

што значи да је $U^{i}_{.j}$ мешовити тензор, што је и требало показати.

**Задатак 77.** (Одељак 11., задатак 8.). Показати да је $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}$ афини тензор, ако је $\varphi$ скаларна инваријанта.

***Решење***: Из закона трансформације скаларне инваријанте,

$$\bar{\varphi} = \varphi,$$

добивамо

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}^{i}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{k}}{\partial\bar{x}^{i}}.$$

Одавде, даље, следи

$$\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}^{i}\partial\bar{x}^{j}} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{k}\partial x^{l}}\frac{\partial x^{k}}{\partial\bar{x}^{i}}\frac{\partial x^{l}}{\partial\bar{x}^{j}} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^{k}}\frac{\partial^2 x^{k}}{\partial\bar{x}^{i}\partial\bar{x}^{j}}.$$

Пошто је за афине трансформације

$$\frac{\partial^2 x^{k}}{\partial\bar{x}^{i}\partial\bar{x}^{j}} = 0, \qquad (x^{k} = a^{k}_{j}\bar{x}^{j} + b^{k}),$$



то је

$$\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}^{i}\partial\bar{x}^{j}} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{k}\partial x^{l}}\frac{\partial x^{k}}{\partial\bar{x}^{i}}\frac{\partial x^{l}}{\partial\bar{x}^{j}}$$

афини тензор, двапут коваријантни, што је и требало показати.

**Задатак 78.** (Одељак 11., задатак 9.). Ако је дата тензорска једначина, на пример

$$u^{r}_{.s} = v^{r}_{.s},$$

показати да иста таква једначина важи између координата у сваком другом систему координата.

***Решење***: Ако у једначини

$$u^{r}_{.s} = v^{r}_{.s}$$

извршимо трансформације

$$u^{r}_{.s} = \bar{u}^{p}_{.q}\frac{\partial x^{r}}{\partial\bar{x}^{p}}\frac{\partial\bar{x}^{q}}{\partial x^{s}},$$

$$v^{r}_{.s} = \bar{v}^{p}_{.q}\frac{\partial x^{r}}{\partial\bar{x}^{p}}\frac{\partial\bar{x}^{q}}{\partial x^{s}},$$

добивамо

$$\bar{u}^{p}_{.q}\frac{\partial x^{r}}{\partial\bar{x}^{p}}\frac{\partial\bar{x}^{q}}{\partial x^{s}} = \bar{v}^{p}_{.q}\frac{\partial x^{r}}{\partial\bar{x}^{p}}\frac{\partial\bar{x}^{q}}{\partial x^{s}}.$$

Ако, даље, у овој једначини извршимо композицију са $\dfrac{\partial\bar{x}^{l}}{\partial x^{r}}\dfrac{\partial x^{s}}{\partial\bar{x}^{n}}$ добивамо

$$\bar{u}^{p}_{.q}\delta^{l}_{p}\delta^{q}_{n} = \bar{v}^{p}_{.q}\delta^{l}_{p}\delta^{q}_{n},$$

тј.

$$\bar{u}^{l}_{.n} = \bar{v}^{l}_{.n},$$

па видимо да остаје у важности у сваком допустивом систему координата, што је и требало показати.

**Задатак 79.** (Одељак 11., задатак 10.). Нека у четвородимензионом простору тензор $u_{rst}$ буде антисиметричан само по последња два индекса. Показати да се у том случају само 24 координате од њих укупно 64 могу изабрати произвољно.

***Решење***: У простору од $N$ димензија број $n$ независних координата система $k$-ог реда, антисиметричног по $r$ индекса, је

$$n = V^{p}_{k-r}(N)\cdot C^{r}_{N} = N^{k-r}\cdot\binom{N}{r},$$

где је $V^{p}_{k-r}(N)$ број варијација са понављањем $(k-r)$-те класе од $N$ елемената, а $C^{r}_{N}$ број комбинација $r$-те класе од $N$ елемената.

У овом случају је $N=4$, $k=3$, $r=2$, па је број независних координата тензора $u_{rst}$

$$n=4\cdot\binom{4}{2}=4\cdot\frac{4\cdot 3}{2}=4\cdot 6=24,$$

тј. од њих укупно 64 (укупни број координата тензора $u_{rst}$ је $4^3=64$), можемо само 24 бирати произвољно.

**Задатак 80.** (Одељак 11., задатак 11.). Нека у дводимензионом простору у односу на координатни систем $x^i$ буду дате координате тензора $t^{mn}$, тј.

$$t^{11}=1, \quad t^{12}=0,$$

$$t^{21}=0, \quad t^{22}=1.$$

Одредити координате тог тензора у односу на систем координата $\bar{x}^i$ које су одређене једначинама

$$\bar{x}^1=(x^1)^2, \quad \bar{x}^2=(x^2)^2.$$

Написати вредности нових координата за посебне вредности координата

$$x^1=1, \quad x^2=0.$$

*Решење*: У односу на систем координата $\bar{x}^i$, координате датог тензора су

$$\bar{t}^{ij}=t^{mn}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}, \tag{1}$$

где је

$$\{t^{mn}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Bmatrix}.$$

Из једначина

$$\bar{x}^1=(x^1)^2, \quad \bar{x}^2=(x^2)^2,$$

добивамо

$$\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}=2x^1, \quad \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}=0, \quad \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}=2x^2,$$

тако да, на основу (1), имамо

$$\bar{t}^{11}=t^{11}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}+t^{12}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}+t^{21}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}+t^{22}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}=4(x^1)^2,$$

$$\bar{t}^{12}=t^{11}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}+t^{12}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}+t^{21}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}+t^{22}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}=0,$$

$$\bar{t}^{21}=t^{11}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}+t^{12}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}+t^{21}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}+t^{22}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}=0,$$

$$\bar{t}^{22}=t^{11}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}+t^{12}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}+t^{21}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}+t^{22}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}=4(x^2)^2.$$



За вредности $x^1=1$ и $x^2=0$ биће

$$\bar{t}^{11}=4, \quad \bar{t}^{12}=0, \quad \bar{t}^{21}=0, \quad \bar{t}^{22}=0,$$

или, у облику матрице,

$$\{\bar{t}^{ij}\}=\begin{Bmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}.$$

**Задатак 81.** (Одељак 11., задатак 12.). Доказати да ако је $v_i$ коваријантни вектор, тада је

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^j}-\frac{\partial v_j}{\partial x^i}$$

антисиметрични коваријантни тензор другог реда.

*Решење*: Уведимо ознаку

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^j}-\frac{\partial v_j}{\partial x^i}=u_{ij}.$$

Лако је показати, разменом места индексима $i$ и $j$, да је

$$u_{ij}=-u_{ji},$$

тј. да је систем $u_{ij}$ антисиметричан.

Ако извршимо трансформацију координата,

$$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^j),$$

тада је

$$\bar{u}_{ij}=\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}^j}-\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\left(v_p\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\right)-\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\left(v_q\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\right)=$$

$$=\frac{\partial v_p}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}+v_p\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\partial \bar{x}^j}-\frac{\partial v_q}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}-v_q\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^i\partial \bar{x}^j}=$$

$$=\frac{\partial v_l}{\partial x^q}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}-\frac{\partial v_q}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}=\left(\frac{\partial v_l}{\partial x^q}-\frac{\partial v_q}{\partial x^l}\right)\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}=u_{lq}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j},$$

тј. систем $u_{ij}$ је антисиметрични коваријантни тензор другог реда, што је и требало доказати.

**Задатак 82.** (Одељак 11., задатак 13.). Познато је да се једначина елипсе може у односу на неки Декартов систем координата (правоуглих или косоуглих) написати у облику

$$a(x^1)^2+2bx^1x^2+c(x^2)^2=1.$$

Одредити природу коефицијената $a$, $b$, $c$ у односу на произвољне трансформације Декартових координата у равни.

*Решење*: Леву страну једначине елипсе,

(1) $$a(x^1)^2+2\,bx^1x^2+c(x^2)^2=1,$$

можемо написати у облику

$$a\,x^1x^1+2\,b\,x^1x^2+c\,x^2x^2,$$

па видимо да она представља квадратну форму

$$a_{ij}x^ix^j,\quad (i,\ j=1,2),$$

са коефицијентима

$$\{a_{ij}\}=\begin{Bmatrix}a & b\\ b & c\end{Bmatrix}.$$

Према томе, једначину (1) можемо написати у облику

(2) $$a_{ij}x^ix^j=1,\quad (i,\ j=1,2).$$

Произвољне хомогене трансформације Декартових координата у равни јесу линеарне трансформације облика

(3) $$\bar{x}^i=b^i_jx^j,\quad (i,\ j=1,2).$$

Ако у (3) извршимо композицију са системом $B^k_i$, где је $B^k_i$ кофактор елемента $b^i_k$ у детерминанти $|b^i_j|$, добивамо

$$b^i_jB^k_ix^j=B^k_i\bar{x}^i,$$

тј.

$$|b^i_j|\,\delta^k_{\cdot}\,x^j=B^k_i\bar{x}^i,$$

одакле следи

(4) $$x^k=\beta^k_i\bar{x}^i,\quad \left(\beta^k_i=\frac{B^k_i}{|b^i_j|}\right).$$

Ако, сада, (4) унесемо у (2), добивамо

(5) $$a_{ij}\beta^i_l\beta^j_m\bar{x}^l\bar{x}^m=1.$$

С обзиром да је лева страна једначине (2) скаларна инваријанта, то се она трансформише по закону

$$\bar{a}_{ij}\bar{x}^i\bar{x}^j=a_{ij}x^ix^j=1.$$

Ако ово искористимо, једначину (5) можемо написати у облику

$$a_{ij}\beta^i_l\beta^j_m\bar{x}^l\bar{x}^m=\bar{a}_{lm}\bar{x}^l\bar{x}^m,$$

тј.

$$(a_{ij}\beta^i_l\beta^j_m-\bar{a}_{lm})\,\bar{x}^l\bar{x}^m=0.$$

Како ова једначина мора да важи за произвољне трансформације (3), то мора бити

$$a_{ij}\beta^i_l\beta^j_m-\bar{a}_{lm}=0,$$



односно

$$\bar{a}_{lm}=a_{ij}\beta^i_l\beta^j_m=a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^m},$$

одакле закључујемо да у односу на трансформације (3) систем $a_{ij}$ има природу двапут коваријантног тензора, тј. коефицијенти једначине елипсе (1) имају, у односу на произвољне хомогене трансформације Декартових координата у равни, природу двапут коваријантног тензора.

**Задатак 83.** (Одељак 11., задатак 14.). Нека буде дат тензор $S_{ijk}$ који ће бити антисиметричан у односу на два прва индекса. Одредити тензор $T_{ijk}$ који ће бити антисиметричан у односу на два последња индекса и задовољавати једначину

$$-T_{ijk}+T_{jik}=S_{ijk}.$$

***Решење***: Цикличким пермутацијама индекса $i,\ j,\ k,$ из горње једначине добивамо још две, тако да имамо

$$-T_{ijk}-T_{jki}=S_{ijk},$$

$$-T_{kij}-T_{ijk}=S_{kij},$$

$$T_{jki}+T_{kij}=-S_{jki}.$$

Сабирањем ових једначина добивамо

$$-2\,T_{ijk}=-S_{jik}-S_{ikj}-S_{jki},$$

односно, с обзиром на особину антисиметрије тензора $S_{ijk}$ у односу на прва два индекса,

$$T_{ijk}=\frac{1}{2}\,(S_{jik}+S_{jki}+S_{ikj}).$$

Лако је проверити, разменом места индексима $j$ и $k$, да је тензор $T_{ijk}$ антисиметричан у односу на последња два индекса, тј. да је

$$T_{ikj}=\frac{1}{2}\,(S_{kij}+S_{ijk}+S_{kji})=\frac{1}{2}\,(-S_{ikj}-S_{jik}-S_{jki})=-T_{ijk}.$$

**Задатак 84.** (Одељак 11., задатак 15.). У односу на Декартов правоугли систем оса $y^i$ у равни дате су у тачки $(1,\ \sqrt{3})$ координате $u^i_{\cdot j}$ неког мешовитог тензора другог реда наредним вредностима

$$u^1_{\cdot 1}=2,\quad u^1_{\cdot 2}=-\sqrt{3},\quad u^2_{\cdot 1}=\sqrt{3},\quad u^2_{\cdot 2}=6.$$

Одредити односне поларне координате $(\bar{x}^1=\rho,\ \bar{x}^2=\varphi)$ те тачке и нове координате $\overline{u}^i_{\cdot j}$ датог тензора.

***Решење***: На основу веза између поларних и Декартових правоуглих координата,

$$(1) \qquad \bar{x}^1 = \rho = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}, \qquad \bar{x}^2 = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y^2}{y^1},$$

односне поларне координате дате тачке су

$$(2) \qquad \bar{x}^1 = \sqrt{1+3} = 2, \qquad \bar{x}^2 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Координате мешовитог тензора $u^i_{.j}$ у поларном систему координата добивамо но обрасцу

$$(3) \qquad \bar{u}^i_{.j} = u^m_{.n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial y^m} \frac{\partial y^n}{\partial \bar{x}^j},$$

при чему је, у датој тачки,

$$\{u^m_{.n}\} = \begin{Bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 6 \end{Bmatrix}.$$

Из (1) добивамо

$$\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^1} = \frac{y^1}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}}, \qquad \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^2} = \frac{y^2}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}},$$

$$\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^1} = -\frac{y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2}, \qquad \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^2} = \frac{y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2},$$

или, ако Декартове координате изразимо помоћу поларних,

$$(4) \qquad \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^1} = \cos \bar{x}^2, \quad \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^2} = \sin \bar{x}^2, \quad \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^1} = -\frac{1}{\bar{x}^1} \sin \bar{x}^2, \quad \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\bar{x}^1} \cos \bar{x}^2.$$

На исти начин, из релација

$$y^1 = \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2, \qquad y^2 = \bar{x}^1 \sin \bar{x}^2,$$

добивамо

$$(5) \qquad \frac{\partial y^1}{\partial \bar{x}^1} = \cos \bar{x}^2, \quad \frac{\partial y^1}{\partial \bar{x}^2} = -\bar{x}^1 \sin \bar{x}^2, \qquad \frac{\partial y^2}{\partial \bar{x}^1} = \sin \bar{x}^2, \quad \frac{\partial y^2}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2.$$



Сада, на основу (3), (4) и (5), координате мешовитог тензора $\bar{u}^i_{.j}$ у поларном систему координата, су

$$\bar{u}^1_{.1} = u^1_{.1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^1} \frac{\partial y^1}{\partial \bar{x}^1} + u^1_{.2} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^1} \frac{\partial y^2}{\partial \bar{x}^1} + u^2_{.1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^2} \frac{\partial y^1}{\partial \bar{x}^1} + u^2_{.2} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^2} \frac{\partial y^2}{\partial \bar{x}^1} =$$

$$= 2\cos^2 \bar{x}^2 - \sqrt{3} \cos \bar{x}^2 \sin \bar{x}^2 + \sqrt{3} \cos \bar{x}^2 \sin \bar{x}^2 + 6 \sin^2 \bar{x}^2 =$$

$$= 2\cos^2 \bar{x}^2 + 6 \sin^2 \bar{x}^2,$$

$$\bar{u}^1_{.2} = u^1_{.1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^1} \frac{\partial y^1}{\partial \bar{x}^2} + u^1_{.2} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^1} \frac{\partial y^2}{\partial \bar{x}^2} + u^2_{.1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^2} \frac{\partial y^1}{\partial \bar{x}^2} + u^2_{.2} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial y^2} \frac{\partial y^2}{\partial \bar{x}^2} =$$

$$= -2\bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 - \sqrt{3}\, \bar{x}^1 + 6 \bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 =$$

$$= 4 \bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 - \sqrt{3}\, \bar{x}^1,$$

$$\bar{u}^2_{.1} = u^1_{.1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^1} \frac{\partial y^1}{\partial \bar{x}^1} + u^1_{.2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^1} \frac{\partial y^2}{\partial \bar{x}^1} + u^2_{.1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^2} \frac{\partial y^1}{\partial \bar{x}^1} + u^2_{.2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^2} \frac{\partial y^2}{\partial \bar{x}^1} =$$

$$= -\frac{2}{\bar{x}^1} \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 + \frac{\sqrt{3}}{\bar{x}^1} + \frac{6}{\bar{x}^1} \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{4}{\bar{x}^1} \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 + \frac{\sqrt{3}}{\bar{x}^1},$$

$$\bar{u}^2_{.2} = u^1_{.1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^1} \frac{\partial y^1}{\partial \bar{x}^2} + u^1_{.2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^1} \frac{\partial y^2}{\partial \bar{x}^2} + u^2_{.1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^2} \frac{\partial y^1}{\partial \bar{x}^2} + u^2_{.2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial y^2} \frac{\partial y^2}{\partial \bar{x}^2} =$$

$$= 2\sin^2 \bar{x}^2 + \sqrt{3} \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 - \sqrt{3} \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 + 6 \cos^2 \bar{x}^2 =$$

$$= 2 \sin^2 \bar{x}^2 + 6 \cos^2 \bar{x}^2.$$

Вредности ових координата у датој тачки $\left(\text{са координатама } \bar{x}^1 = 2, \ \bar{x}^2 = \frac{\pi}{3}\right)$ су

$$\bar{u}^1_{.1} = 2\cos^2 \frac{\pi}{3} + 6 \sin^2 \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{20}{4} = 5,$$

$$\bar{u}^1_{.2} = 4 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3} = 4 \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0,$$

$$\bar{u}^2_{.1} = \frac{4}{2} \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{4}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\bar{u}^2_{.2} = 2\sin^2 \frac{\pi}{3} + 6 \cos^2 \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

или, приказане у облику матрице,

$$\{\bar{u}^l{}_{.j}\}=\begin{Bmatrix} 5 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 \end{Bmatrix}.$$

**Задатак 85:** (Одељак 11., задатак 16.). Показати да симетрични тензор $q^{ij}=q^{ji}$ мора бити нула-тензор, ако за потпуно произвољни вектор $v_i$ важи релација

$$q^{ij}v_i v_j=0.$$

***Решење***: С обзиром да је $v_i$ потпуно произвољни вектор, ми га можемо изабрати тако да му све координате буду једнаке нули изузев за $i=K$, $j=L$, тј.

$$v_K\neq 0, \quad v_L\neq 0.$$

Према томе, из једначине

$$q^{ij}v_i v_j=0,$$

следи

$$q^{KL}v_K v_L=0,$$

односно

$$q^{KL}=0, \quad (v_K\neq 0, \quad v_L\neq 0),$$

Како бројеви $K$ и $L$ могу бити ма који из скупа бројева $1, 2, \ldots, N$, следи да мора бити

$$q^{ij}=0,$$

што је и требало показати.

## 12. Скаларни производ вектора. Критеријум за одређивање тензорског карактера система

**Задатак 86.** (Одељак 12., задатак 1.). Ако је $u^{ij}$ контраваријанти тензор другог реда, $v_k$ коваријантни вектор а $w(i, j, k)$ неки систем трећег реда, показати извођењем трансформације да је у случају

$$\sum_{i,j} w(i, j, k)\,u^{ij}=v_k,$$

увек

$$w(i, j, k)=w_{ijk}.$$

***Решење***: Ако извршимо трансформацију

$$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^j),$$

биће

(1) $$\sum_{i,j}\bar{w}(i, j, k)\,\bar{u}^{ij}=\bar{v}_k.$$

С обзиром да је $u^{ij}$ двапут контраваријантни тензор, онда се његове координате трансформишу по обрасцу

(2) $$\bar{u}^{ij}=u^{ml}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}.$$



Ако то заменимо у једначину (1), добивамо

$$\sum_{i,j}\bar{w}(i, j, k)\,u^{ml}\frac{\partial\bar{x}^i}{a x^m}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}=v_l\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^k},$$

односно

(3) $$\sum_{i,j}\bar{w}(i, j, k)\,u^{ml}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}=\sum_{m,l}w(m, l, s)\,u^{ml}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^k}.$$

Извршимо ли у овој једначини композицију са $\dfrac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}$, добивамо

$$\sum_{i,j,k}\bar{w}(i, j, k)\,u^{ml}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}=\sum_{m,l}w(m, l, n)\,u^{ml},$$

односно

(4) $$\sum_{m,l}u^{ml}\left(\sum_{i,j,k}\bar{w}(i, j, k)\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}-w(m, l, n)\right)=0,$$

одакле, с обзиром да је $u^{ml}$ произвољни тензор, следи

$$\sum_{i,j,k}\bar{w}(i, j, k)\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}-w(m, l, n)=0,$$

тј.

$$\sum_{i,j,k}\bar{w}(i, j, k)\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}=w(m, l, n).$$

Ако, сада, у овој једначини извршимо композицију са $\dfrac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^a}\dfrac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^b}\dfrac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^c}$, добивамо

$$\sum_{i,j,k}\bar{w}(i, j, k)\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^b}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^c}=\sum_{m,l,n}w(m, l, n)\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^b}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^c},$$

тј.

$$\sum_{i,j,k}\bar{w}(i, j, k)\,\delta^i_a\delta^j_b\delta^k_c=\sum_{m,l,n}w(m, l, n)\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^b}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^c},$$

или, коначно,

$$\bar{w}(a, b, c)=\sum_{m,l,n}w(m, l, n)\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^b}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^c},$$

што значи да је $w(i, j, k)$ коваријантни тензор трећег реда, па, на основу конвенције о означавању коваријантних тензора, можемо писати

$$w(i, j, k)=w_{ijk}.$$

**Задатак 87.** (Одељак 12., задатак 2.). Нека буде дата билинеарна тернарна форма

$$a_{ij}u^i v^j, \quad (i, j=1, 2, 3).$$

Написати јој односну квадратну форму и одговорити на питање: кад добивеној квадратној форми одговара само једна билинеарна форма као полазна?

*Решење*: Ако у датој билинеарној форми ставимо $u^i = v^i$, добивамо квадратну форму

$$a_{ij}\, u^i\, u^j.$$

Уколико су коефицијенти ове квадратне форме симетрични, тј

$$a_{ij} = a_{ji},$$

онда таквој квадратној форми одговара само једна билинеарна форма као полазна, која се у том случају назива поларна билинеарна форма.

**Задатак 88.** (Одељак 12., задатак 3.). Написати трилинеарну форму по координатама $u^i$, $v^i$ и $w^i$ три контраваријантна вектора чији су коефицијенти координате антисиметричног коваријантног тензора трећег реда $a_{ijk}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$. На шта се своди односна кубна форма?

*Решење*: Трилинеарна форма је облика

$$a_{ijk}\, u^i\, v^j\, w^k.$$

Одговарајућу кубну форму добивамо стављајући $u^i = v^i = w^i$. Према томе, она је облика

$$a_{ijk}\, u^i\, u^j\, u^k.$$

Међутим, с обзиром на антисиметрију тензора $a_{ijk}$ и симетрију тензора $u^i\, u^j\, u^k$, следи

$$a_{ijk}\, u^i\, u^j\, u^k = a_{jik}\, u^j\, u^i\, u^k = -\, a_{ijk}\, u^i\, u^j\, u^k = 0,$$

тј. кубна форма која одговара датој трилинеарној форми је једнака нули.

## 13. Релативни тензори

**Задатак 89.** (Одељак 13., задатак 1.). Показати потпуним израчунавањем да је Кронекеров симбол $\delta^{ij}_{kl}$ апсолутни тензор четвртог реда, двапут контраваријантан и двапут коваријантан.

*Решење*: Кронекеров симбол четвртог реда можемо, помоћу $e$-система, изразити на следећи начин

$$\delta^{ij}_{kl} = \delta^{ijs}_{kls} = e^{ijs}\, e_{kls}.$$

Према томе, у новом систему коордиата ће бити

$$\bar{\delta}^{ij}_{kl} = \bar{e}^{ijs}\, \bar{e}_{kls}.$$

С обзиром да је систем $e^{ijs}$ релативни тензор тежине $+1$ (тензорска густина) и да је $e_{kls}$ релативни тензор тежине $-1$ (тензорски капацитет), тј. да се трансформишу по законима

$$\bar{e}^{ijs} = \Delta\, e^{abc} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^c},$$

$$\bar{e}_{kls} = \Delta^{-1}\, e_{pqt} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^s},$$



добивамо

$$\bar{\delta}^{ij}_{kl} = \Delta\, e^{abc} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^c} \cdot \Delta^{-1}\, e_{pqt} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^s} =$$

$$= \Delta\Delta^{-1}\, e^{abc}\, e_{pqt} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^c} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l} =$$

$$= e^{abc}\, e_{pqt}\, \delta^t_c \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l},$$

тј.

$$\bar{\delta}^{ij}_{kl} = \delta^{ab}_{pq} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l},$$

што значи да је $\delta^{ij}_{kl}$ апсолутни тензор четвртог реда, двапут контраваријантан и двапут коваријантан, што је и требало показати.

**Задатак 90.** (Одељак 13., задатак 2.). Показати да је

$$e^{i_1 i_2 \dots i_N}\, e_{i_1 i_2 \dots i_N}$$

скалар и одредити му вредност.

*Решење*: С обзиром на трансформационе обрасце контраваријантног и коваријантног $e$-система, биће

$$\bar{e}^{i_1 i_2 \dots i_N}\, \bar{e}_{i_1 i_2 \dots i_N} = \Delta\, e^{j_1 j_2 \dots j_N} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_N}}{\partial x^{j_N}} \cdot \Delta^{-1} e_{k_1 k_2 \dots k_N} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_N}}{\partial \bar{x}^{i_N}} =$$

$$= e^{j_1 j_2 \dots j_N}\, e_{k_1 k_2 \dots k_N}\, \delta^{k_1}_{j_1}\, \delta^{k_2}_{j_2} \cdots \delta^{k_N}_{j_N},$$

тј.

$$\bar{e}^{i_1 i_2 \dots i_N}\, \bar{e}_{i_1 i_2 \dots i_N} = e^{i_1 i_2 \dots i_N}\, e_{i_1 i_2 \dots i_N},$$

одакле закључујемо да је $e^{i_1 i_2 \dots i_N}\, e_{i_1 i_2 \dots i_N}$ скаларна инваријанта. Вредност овог скалара једнака је броју пермутација од $N$ елемената, тј.

$$e^{i_1 i_2 \dots i_N}\, e_{i_1 i_2 \dots i_N} = P(N) = N!.$$

**Задатак 91.** (Одељак 13., задатак 3.). Ако је $t_{rs}$ неки апсолутни антисиметрични тензор у простору од четири димензије, показати да је тада

$$t_{14}\, t_{23} + t_{24}\, t_{31} + t_{34}\, t_{12}$$

скаларна густина.

*Решење*: С обзиром да је $t_{rs}$ апсолутни коваријантни тензор, онда му је трансформациони образац облика

(1) $$\bar{t}_{rs} = t_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^s},$$

при чему је

(2) $$t_{pq} = -\, t_{qp},$$

и

(3) $$t_{LL} = 0.$$

На основу трансформационог обрасца (1) следи да је

$$\bar t_{14}\,\bar t_{23}+\bar t_{24}\,\bar t_{31}+\bar t_{34}\,\bar t_{12}=t_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \bar x^1}\frac{\partial x^q}{\partial \bar x^4}\,t_{lm}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^2}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^3}+$$

$$+t_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \bar x^2}\frac{\partial x^q}{\partial \bar x^4}\,t_{lm}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^3}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^1}+t_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \bar x^3}\frac{\partial x^q}{\partial \bar x^4}\,t_{lm}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^1}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^2},$$

или, ако погодно заменимо неме индексе,

(4) $$\bar t_{14}\,\bar t_{23}+\bar t_{24}\,\bar t_{31}+\bar t_{34}\,\bar t_{12}=(t_{pm}\,t_{ql}+t_{qm}\,t_{lp}+t_{lm}\,t_{pq})\frac{\partial x^p}{\partial \bar x^1}\frac{\partial x^q}{\partial \bar x^2}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^3}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^4}.$$

С обзиром на (2) и (3), систем

$$u_{pqlm}=t_{pm}\,t_{ql}+t_{qm}\,t_{lp}+t_{lm}\,t_{pq}$$

је потпуно антисиметричан, те га можемо написати у облику

(5) $$u_{pqlm}=u_{1234}\,e_{pqlm}.$$

Ако, даље, (5) унесемо у (4), добивамо

$$\bar t_{14}\,\bar t_{23}+\bar t_{24}\,\bar t_{31}+\bar t_{34}\,\bar t_{12}=u_{1234}\,e_{pqlm}\frac{\partial x^p}{\partial \bar x^1}\frac{\partial x^q}{\partial \bar x^2}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^3}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^4},$$

односно

(6) $$\bar t_{14}\,\bar t_{23}+\bar t_{24}\,\bar t_{31}+\bar t_{34}\,\bar t_{12}=(t_{14}\,t_{23}+t_{24}\,t_{31}+t_{34}\,t_{12})\,e_{pqlm}\frac{\partial x^p}{\partial \bar x^1}\frac{\partial x^q}{\partial \bar x^2}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^3}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^4}.$$

Међутим, како је

$$e_{pqlm}\frac{\partial x^p}{\partial \bar x^1}\frac{\partial x^q}{\partial \bar x^2}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^3}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^4}=\left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\right|=\Delta,$$

добивамо

$$\bar t_{14}\,\bar t_{23}+\bar t_{24}\,\bar t_{31}+\bar t_{34}\,\bar t_{12}=\Delta\,(t_{14}\,t_{23}+t_{24}\,t_{31}+t_{34}\,t_{12}),$$

одакле закључујемо да је $t_{14}\,t_{23}+t_{24}\,t_{31}+t_{34}\,t_{12}$ скаларна густина, што је и требало показати.

**Задатак 92.** (Одељак 13., задатак 4.). Ако је $a_{ij}$ апсолутни коваријантни тензор, показати да је $|a_{ij}|$ релативна инваријанта тежине 2. Одредити природу детерминаната $|a^{ij}|$ и $|a^i_j|$, ако је $a^{ij}$ апсолутни контраваријантни тензор другог реда и $a^i_j$ мешовити тензор другог реда.

*Решење*: Из трансформационог обрасца апсолутног коваријантног тензора другог реда,

$$\bar a_{ij}=a_{st}\frac{\partial x^s}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar x^j},$$

непосредно добивамо

$$\overline{|a_{ij}|}=|\bar a_{ij}|=|a_{st}|\left|\frac{\partial x^s}{\partial \bar x^i}\right|\left|\frac{\partial x^t}{\partial \bar x^j}\right|=\Delta^2\,|a_{ij}|,$$

одакле закључујемо да је $|a_{ij}|$ релативна скаларна инваријанта тежине 2.



На исти начин, из трансформационог обрасца

$$\bar a^{ij}=a^{st}\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^s}\frac{\partial \bar x^j}{\partial x^t},$$

добивамо

$$\overline{|a^{ij}|}=|a^{st}|\left|\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^s}\right|\left|\frac{\partial \bar x^j}{\partial x^t}\right|=\Delta^{-2}\,|a^{ij}|,$$

одакле закључујемо да је $|a^{ij}|$ релативна скаларна инваријанта тежине $-2$.

За детерминанту мешовитог тензора $a^i_j$, добивамо (види задатак 75.)

$$\overline{|a^i_j|}=|a^i_j|.$$

**Задатак 93.** (Одељак 13., задатак 5.). Ако је $a_{mn}$ апсолутни коваријантни тензор, показати да су кофактори елемената $a_{mn}$ у детерминанти $|a_{mn}|$ координате релативног контраваријантног тензора тежине 2.

*Решење*: Ако је $A^{nm}$ кофактор елемента $a_{mn}$ у детерминати $|a_{mn}|$, онда је

$$a_{mn}\,A^{nt}=|a_{mn}|\,\delta^t_m,$$

или, ако извршимо контракцију по индексима $t$ и $m$,

$$a_{mn}\,A^{nm}=N\,|a_{mn}|.$$

После координатне трансформације,

$$\bar x^i=\bar x^i(x^j),$$

биће

$$\bar a_{mn}\,\bar A^{nm}=N\,\overline{|a_{mn}|}.$$

Међутим, с обзиром да је (види претходни задатак) детерминанта коваријантног тензора другог реда скаларна инваријанта тежине 2, тј.

$$\overline{|a_{mn}|}=\Delta^2\,|a_{mn}|,$$

биће

$$\bar a_{mn}\,\bar A^{nm}=\Delta^2\,a_{mn}\,A^{nm}.$$

Ако, даље, координате тензора $\bar a_{mn}$, у новом систему координата, изразимо преко његових координата у старом систему координата, добивамо

$$a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^m}\frac{\partial x^j}{\partial \bar x^n}\bar A^{nm}-\Delta^2\,a_{ij}\,A^{ji}=0,$$

односно

$$a_{ij}\left(\bar A^{nm}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^m}\frac{\partial x^j}{\partial \bar x^n}-\Delta^2 A^{ji}\right)=0.$$

С обзиром да ова релација мора да важи за произвољно $a_{ij}$, мора бити

$$\bar A^{nm}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^m}\frac{\partial x^j}{\partial \bar x^n}=\Delta^2\,A^{ji}.$$

Ако, сада, у овој једначини извршимо композицију са $\frac{\partial \bar x^p}{\partial x^i}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^j}$, добивамо

$$\bar A^{nm}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^m}\frac{\partial \bar x^p}{\partial x^i}\frac{\partial a^j}{\partial \bar x^n}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^j}=\Delta^2 A^{ji}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^j}\frac{\partial \bar x^p}{\partial x^i},$$

односно

$$\bar A^{nm}\,\delta^p_m\,\delta^q_n=\Delta^2 A^{ji}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^j}\frac{\partial \bar x^p}{\partial x^i},$$

или, коначно,

$$\bar A^{qp}=\Delta^2 A^{ji}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^j}\frac{\partial \bar x^p}{\partial x^i},$$

одакле закључујемо да су кофактори $A^{nm}$, елемената $a_{mn}$ у детерминанти $|a_{mn}|$ коваријантног тензора другог реда, координате контраваријантног релативног тензора другог реда, тежине 2, што је и требало показати.

**Задатак 94.** (Одељак 13., задатак 6.). Одредити тензорски карактер кофактора у детерминанти образованој од кофактора детерминанте:

а) мешовитог тензора другог реда,

б) релативног контраваријантног тензора тежине $+1$.

***Решење***: а) Нека је $A^j_{.i}$ кофактор елемента $a^i_{.j}$ у детерминанти $|a^i_{.j}|$, а $B^i_{.j}$ кофактор елемента $A^j_{.i}$ у детерминанти $|A^i_{.j}|$. Тада је

$$A^i_{.j}\,B^j_{.}=|A^i_{.j}|\,\delta^i_k,$$

или, ако извршимо контракцију по индексима $i$ и $k$,

(1) $$A^i_{.j}\,B^j_{.}=N|A^i_{.j}|.$$

Међутим, како је $A^i_{.j}$ мешовити тензор (види задатак 76.), његова детерминанта ће се трансформасати по закону (види задатак 75.)

$$\overline{|A^i_{.j}|}=|A^i_{.j}|,$$

што заменом у (1) даје

(2) $$\bar A^i_{.j}\,\bar B^j_{.i}=A^i_{.j}\,B^j_{.i}.$$

Ако, сада, координате тензора $\bar A^i_{.j}$ изразимо преко његових координата у старом координатном систему, добивамо

$$A^l_{.m}\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}\bar B^j_{.i}=A^l_{.m}B^m_{.l},$$

односно

$$A^l_{.m}\left(\bar B^j_{.i}\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}-B^m_{.l}\right)=0.$$

С обзиром да ова једначина мора да важи за произвољно $A^l_{.m}$, мора бити

(3) $$\bar B^j_{.i}\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}=B^m_{.l}.$$



Ако у овој једначини, даље, извршимо композицију са $\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^p}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^m}$, добивамо

$$\bar B^j_{.i}\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^p}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^m}=B^m_{.l}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^p}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^m},$$

тј.

$$\bar B^j_{.i}\,\delta^i_p\,\delta^q_j=B^m_{.l}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^p}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^m},$$

или, коначно,

$$\bar B^q_{.p}=B^m_{.l}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^m}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^p},$$

што значи да је $B^i_{.j}$ апсолутни мешовити тензор другог реда.

б) Нека је $a^{ij}$ релативни контраваријантни тензор тежине $+1$. Одредимо, прво, природу детерминанте $|a^{ij}|$. Из трансформационог обрасца

$$\bar a^{ij}=\Delta\, a^{lm}\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^l}\frac{\partial \bar x^j}{\partial x^m}$$

следи

$$|\bar a^{ij}|=\left|\Delta\, a^{lm}\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^l}\frac{\partial \bar x^j}{\partial x^m}\right|=\Delta^N|a^{lm}|\,\Delta^{-1}\Delta^{-1},$$

тј.

(4) $$|\bar a^{ij}|=\Delta^{N-2}|a^{ij}|,$$

што значи да је $|a^{ij}|$ релативна скаларна инваријантна тежине $N-2$.

Обележимо са $A_{ji}$ кофактор елемента $a^{ij}$ у детерминанти $|a^{ij}|$. Тада је

(5) $$a^{ij}A_{ji}=N|a^{ij}|.$$

У новом систему координата $\bar x^i$, биће

(6) $$\bar a^{ij}\bar A_{ji}=N|\bar a^{ij}|.$$

Узимајући у обзир (4) и (5), из (6) следи

(7) $$\bar a^{ij}\bar A_{ji}=\Delta^{N-2}a^{ij}A_{ji}.$$

Ако, даље, координате тензора $\bar a^{ij}$ изразимо преко његових координата у старом координатном систему, добивамо

$$\Delta\, a^{lm}\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^l}\frac{\partial \bar x^j}{\partial x^m}\bar A_{ji}-\Delta^{N-2}a^{lm}A_{ml}=0,$$

односно, с обзиром да је $a^{lm}$ произвољно,

(8) $$\bar A_{ji}\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^l}\frac{\partial \bar x^j}{\partial x^m}=\Delta^{N-3}A_{ml}.$$

Извршимо ли, сада, композицију са $\dfrac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p}\dfrac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q}$, добивамо

$$\bar{A}_{ji}\,\delta^i_p\,\delta^j_q=\Delta^{N-3}A_{ml}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p},$$

односно

(9) $$\bar{A}_{qp}=\Delta^{N-3}A_{ml}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p},$$

што значи да је $A_{ij}$ релативни коваријантни тензор тежине $N-3$.

Одредимо, сада, природу детерминанте $|A_{ij}|$. Из (9) следи

$$\overline{|A_{pq}|}=\left|\Delta^{N-3}A_{ml}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p}\right|=\Delta^{N(N-3)}\,|A_{ml}|\,\Delta\Delta,$$

тј.

(10) $$\overline{|A_{pq}|}=\Delta^{N^2-3N+2}\,|A_{pq}|,$$

што значи да је $|A_{ij}|$ релативна скаларна инваријанта тежине $N^2-3N+2$.

Обележимо, најзад, са $B^{ji}$ кофактор елемента $A_{ij}$ у детерминанти $|A_{ij}|$. Тада је

(11) $$A_{ij}B^{ji}=N\,|A_{ij}|.$$

У новом систему координата $\bar{x}^i$, биће

(12) $$\bar{A}_{ij}\bar{B}^{ji}=N\,\overline{|A_{ij}|}$$

одакле, узимајући у обзир (10) и (11), следи

(13) $$\bar{A}_{ij}\bar{B}^{ji}=\Delta^{N^2-3N+2}A_{ml}B^{lm}.$$

Ако сада координате $\bar{A}_{ij}$ изразимо преко координата $A_{ml}$, помоћу обрасца (9), добивамо

$$\Delta^{N-3}A_{ml}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\bar{B}^{ji}=\Delta^{N^2-3N+2}A_{ml}B^{lm},$$

односно

$$A_{ml}\left(\bar{B}^{ji}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}-\Delta^{N^2-4N+5}B^{lm}\right)=0.$$

С обзиром да у овој једначини $A_{ml}$ може бити произвољно, следи да мора бити

(14) $$\bar{B}^{ji}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}=\Delta^{N^2-4N+5}B^{lm}.$$

После композиције са $\dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^m}\dfrac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l}$ из ове једначине добивамо

$$\bar{B}^{ji}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^m}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l}=\Delta^{N^2-4N+5}B^{lm}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^m},$$



односно

$$\bar{B}^{ji}\,\delta^p_i\,\delta^q_j=\Delta^{N^2-4N+5}B^{lm}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^m},$$

или, коначно

$$\bar{B}^{qp}=\Delta^{N^2-4N+5}B^{lm}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^m},$$

што значи да је $B^{ij}$ релативни контраваријантни тензор тежине $N^2-4N+5$.

**Задатак 95.** (Одељак 13., задатак 7.). Ако је $r_{ij}$ апсолутни тензор у простору од четири димензије, показати да је $L$ дефинисано једначином

$$L=|r_{ij}|^{\frac{1}{2}}$$

скаларна густина. Проучити тензорски карактер система $f^{ij}$ и $g^{ij}$ дефинисаних једначинама

$$f^{ij}=\frac{\partial L}{\partial r_{ij}},\quad g^{ij}=f^{ij}\,|f^{rs}|^{-\frac{1}{2}},$$

а исто тако и природу система $g_{ij}$ дефинисаног са

$$g_{ij}\,g^{kj}=\delta^k_i.$$

Доказати да је

$$|g|=|f^{ij}|.$$

***Решење***: У координатном систему $x^i$ је

$$L=|r_{ij}|^{\frac{1}{2}}.$$

У новом систему координата, $\bar{x}^i$, је

$$\bar{L}=\overline{|r_{ij}|}^{\frac{1}{2}}=|\bar{r}_{ij}|^{\frac{1}{2}}.$$

Међутим, с обзиром да је $r_{ij}$ апсолутни коваријантни тензор, то је

$$\bar{r}_{ij}=r_{lm}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j},$$

па је

$$\bar{L}=\left|r_{lm}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\right|^{\frac{1}{2}}=|r_{lm}|^{\frac{1}{2}}\cdot\Delta^{\frac{1}{2}}\cdot\Delta^{\frac{1}{2}},$$

односно

(1) $$\bar{L}=\Delta L,$$

што значи да је $L$ релативна скаларна инваријанта тежине $+1$, тј. скаларна густина.

Систем $f^{ij}$ можемо изразити у облику

$$f^{ij}=\frac{\partial L}{\partial r_{ij}}=\frac{\partial}{\partial r_{ij}}|r_{ij}|^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2|r_{ij}|^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial r_{ij}}|r_{ij}|.$$

Међутим, како је извод детерминанте по елементу једнак кофактору тога елемента, биће

$$f^{ij}=\frac{1}{2L}R^{ji},$$

где је $R^{ji}$ кофактор елемента $r_{ij}$ у детерминанти $|r_{ij}|$.

У новом систему координата биће

(2) $$\bar f^{ij}=\frac{1}{2\bar L}\bar R^{ji}.$$

Користећи образац (1) као и трансформациони образац кофактора $R^{ji}$ (види задатак 93.), једначину (2) можемо написати у облику

$$\bar f^{ij}=\frac{1}{2\Delta L}\Delta^2 R^{lm}\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^l}\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^m},$$

односно

$$\bar f^{ij}=\Delta\frac{1}{2L}R^{lm}\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^l}\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^m},$$

или, коначно,

(3) $$\bar f^{ij}=\Delta f^{ml}\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^l},$$

на основу чега закључујемо да је $f^{ij}$ релативни контраваријантни тензор тежине $+1$, тј. тензорска густина.

На основу дефиниције система $g^{ij}$, тј.

$$g^{ij}=f^{ij}|f^{rs}|^{-\frac{1}{2}},$$

у новом систему координата је

$$\bar g^{ij}=\bar f^{ij}|\bar f^{rs}|^{-\frac{1}{2}},$$

или, користећи (3),

$$\bar g^{ij}=\bar f^{ij}\left|\Delta f^{ml}\frac{\partial\bar x^r}{\partial x^m}\frac{\partial\bar x^s}{\partial x^l}\right|^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\Delta f^{ml}\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^l}\cdot\Delta^{-\frac{N}{2}}|f^{rs}|^{-\frac{1}{2}}\cdot\Delta^{\frac{1}{2}}\cdot\Delta^{\frac{1}{2}}.$$

Даље је

$$\bar g^{ij}=\Delta^{-\frac{N}{2}+2}f^{lm}|f^{rs}|^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^l},$$



тј.

$$\bar g^{ij}=\Delta^{-\frac{N}{2}+2}g^{ml}\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^l},$$

односно, с обзиром да је $N=4$ (простор од четири димензије),

(4) $$\bar g^{ij}=g^{ml}\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^l},$$

на основу чега закључујемо да је $g^{ij}$ апсолутни контраваријантни тензор другог реда.

На основу дефиниције система $g_{ij}$, тј.

$$g_{ij}g^{kj}=\delta_i^k,$$

у новом систему координата је

$$\bar g_{ij}\bar g^{kj}=\delta_i^k=g_{ij}g^{kj}.$$

Ако искористимо образац (4), добивамо

$$\bar g_{ij}g^{ml}\frac{\partial\bar x^k}{\partial x^m}\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^l}=g_{il}g^{kl},$$

односно

$$g^{ml}\left(\bar g_{ij}\frac{\partial\bar x^k}{\partial x^m}\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^l}-g_{il}\delta_m^k\right)=0,$$

одакле следи, с обзиром да $g^{ml}$ може бити произвољно,

$$\bar g_{ij}\frac{\partial\bar x^k}{\partial x^m}\frac{\partial\bar x^j}{\partial x^l}=g_{il}\delta_m^k.$$

Ако, даље, извршимо композицију са $\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^p}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^q}$, добивамо

$$\bar g_{ij}\delta_p^k\delta_q^j=g_{il}\delta_m^k\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^p}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^q},$$

односно

$$\bar g_{iq}\delta_p^k=g_{il}\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^p}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^q}.$$

Извршимо, сада, контракцију по индексима $i$ и $k$, тј. ставимо $i=k$. Тада добивамо

$$\bar g_{iq}\delta_p^i=g_{il}\frac{\partial x^i}{\partial\bar x^p}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^q},$$

односно

$$\bar g_{pq}=g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^p}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^q},$$

на основу чега закључујемо да је $g_{ij}$ апсолутни коваријантни тензор другог реда.

Из једначине

$$g_{ij} g^{kj} = \delta_i^k,$$

следи да је

$$|g_{ij}| = \frac{|\delta_i^k|}{|g^{kj}|} = \frac{1}{\left| f^{kj} |f^{rs}|^{-\frac{1}{2}} \right|},$$

односно

$$|g_{ij}| = \frac{1}{|f^{rs}|^{-\frac{N}{2}} |f^{kj}|} = |f^{ij}|^{\frac{N}{2}-1},$$

тј., пошто је $N=4$,

$$|g_{ij}| = |f^{ij}|,$$

што је и требало показати.

**Задатак. 96.** (Одељак 13., задатак 8.). Ако су све координате неког релативног тензора у односу на неки координатни систем једнаке нули, биће оне једнаке нули у односу на све координатне системе.

***Решење***: Уочимо неки релативни тензор тежине $M$, $p$-пута контраваријантан и $q$-пута коваријантан, чије су координате у односу на неки дати координатни систем све једаке нули, тј.

$$t^{k_1 k_2 \dots k_p}_{l_1 l_2 \dots l_q} = 0.$$

Тада, из обрасца за трансформацију координата тога тензора у ма који други координатни систем,

$$\bar t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = \Delta^M t^{k_1 k_2 \dots k_p}_{l_1 l_2 \dots l_q} \frac{\partial \bar x^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial \bar x^{i_p}}{\partial x^{k_p}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_q}}{\partial \bar x^{j_q}},$$

следи

$$\bar t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = 0,$$

тј. његове координате и у односу на тај нови координатни систем су све једнаке нули, што је и требало показати.

**Задатак 97.** (Одељак 13., задатак 9.). Показати да ако два релативна тензора истог реда, типа и тежине имају једнаке координате у односу на један координатни систем, биће њихове координате једнаке у односу на сваки координатни систем.

***Решење***: Уочимо два релативна тензора тежине $M$, $p$-пута контраваријантна и $q$-пута коваријантна. Из услова да су њихове координате, у односу на неки координатни систем $x^i$, једнаке, тј.

$$u^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = v^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q},$$

следи

$$\Delta^{-M} \bar u^{k_1 k_2 \dots k_p}_{l_1 l_2 \dots l_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar x^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial \bar x^{k_p}} \cdot \frac{\partial \bar x^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \bar x^{l_q}}{\partial x^{j_q}} =$$

$$= \Delta^{-M} \bar v^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar x^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial \bar x^{k_p}} \frac{\partial \bar x^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \bar x^{l_q}}{\partial x^{j_q}},$$



где су $\bar u^{k_1 k_2 \dots k_p}_{l_1 l_2 \dots l_q}$ и $\bar v^{k_1 k_2 \dots k_p}_{l_1 l_2 \dots l_q}$ координате тих тензора у неком другом координатном систему $\bar x^i$.

Композицијом обеју страна горње једначине са

$$\frac{\partial \bar x^{r_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \bar x^{r_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial \bar x^{r_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar x^{t_1}} \cdot \frac{\partial x^{j_2}}{\partial \bar x^{t_2}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial \bar x^{t_q}},$$

добивамо

$$\bar u^{k_1 k_2 \dots k_p}_{l_1 l_2 \dots l_q} \delta^{r_1}_{k_1} \delta^{r_2}_{k_2} \cdots \delta^{r_p}_{k_p} \delta^{l_1}_{t_1} \cdots \delta^{l_q}_{t_q} = \bar v^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} \delta^{r_1}_{k_1} \cdots \delta^{r_p}_{k_p} \delta^{l_1}_{t_1} \cdots \delta^{l_q}_{t_q},$$

односно

$$\bar u^{r_1 r_2 \dots r_p}_{t_1 t_2 \dots t_q} = \bar v^{r_1 r_2 \dots r_p}_{t_1 t_2 \dots t_q},$$

што је и требало показати.

**Задатак 98.** (Одељак 13., задатак 10.). Ако је $a_{ij}$ такав апсолутни двоструки коваријантни тензор да буде $|a_{ij}| = a > 0$, показати да су тада

$$\sqrt{a}\, e_{ijk} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{a}} e^{ijk}$$

апсолутни тензори.

***Решење***: После трансформације променљивих $x^i$ у променљиве $\bar x^i$, добивамо

$$\sqrt{\bar a}\, \bar e_{ijk} = |\bar a_{ij}|^{\frac{1}{2}} \bar e_{ijk} = |\bar a_{ij}|^{\frac{1}{2}} \Delta^{-1} e_{rst} \frac{\partial x^r}{\partial \bar x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar x^j} \frac{\partial x^t}{\partial \bar x^k},$$

или, ако искористимо образац за трансформацију координата апсолутног коваријантног тензора $a_{ij}$, тј.

$$\bar a_{ij} = a_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial \bar x^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j},$$

добивамо

$$\sqrt{\bar a}\, \bar e_{ijk} = \left| a_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial \bar x^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j} \right|^{\frac{1}{2}} \Delta^{-1} e_{rst} \frac{\partial x^r}{\partial \bar x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar x^j} \frac{\partial x^t}{\partial \bar x^k} =$$

$$= \Delta^{-1} \Delta^{\frac{1}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}} \sqrt{a}\, e_{rst} \frac{\partial x^r}{\partial \bar x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar x^j} \frac{\partial x^t}{\partial \bar x^k},$$

односно

$$\overline{(\sqrt{a}\, e_{ijk})} = (\sqrt{a}\, e_{rst}) \frac{\partial x^r}{\partial \bar x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar x^j} \frac{\partial x^t}{\partial \bar x^k},$$

на основу чега закључујемо да је $\sqrt{a}\, e_{ijk}$ апсолутни коваријантни тензор трећег реда.

На исти начин је

$$\frac{1}{\sqrt{\bar a}} \bar e^{ijk} = |\bar a|^{-\frac{1}{2}} \bar e^{ijk} = \Delta \Delta^{-\frac{1}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} e^{rst} \frac{\partial \bar x^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar x^j}{\partial x^s} \frac{\partial \bar x^k}{\partial x^t},$$

односно

$$\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}e^{ijk}\right)}=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}e^{rst}\right)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t},$$

па видимо да је $\frac{1}{\sqrt{a}}e^{ijk}$ апсолутни контраваријантни тензор трећег реда.

## 14. Векторски, мешовити и спољашњи производ вектора

**Задатак 99.** (Одељак 14., задатак 1.). Одредити у четвородимензионом простору координате бивектора $b^{ij}$ који је одређен контраваријантним векторима

$$\{u^i\}=\{1,\ 0,\ 1,\ 2\},\quad \{v^i\}=\{0,\ 1,\ -1,\ 1\}.$$

***Решење***: Бивектор $b^{ij}$, који је одређен векторима $u^i$ и $v^i$, дефинисан је као спољашњи (векторски) производ вектора $u^i$ и $v^i$. Према томе је

$$b^{ij}=[u^i v^j]=\begin{vmatrix} u^i & u^j \\ v^i & v^j \end{vmatrix}=u^i v^j-u^j v^i, \tag{1}$$

одакле за координате бивектора добивамо

$$b^{11}=\begin{vmatrix} u^1 & u^1 \\ v^1 & v^1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$b^{12}=-b^{21}=\begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$b^{22}=b^{33}=b^{44}=0,$$

$$b^{13}=-b^{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1,\qquad b^{14}=-b^{41}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$b^{23}=-b^{32}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1,\qquad b^{24}=-b^{42}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2,$$

$$b^{34}=-b^{43}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3,$$

или, приказане у облику квадратне матрице четвртог реда,

$$\{b^{ij}\}=\begin{Bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{Bmatrix}.$$



**Задатак 100.** (Одељак 14., задатак 2.). У четвородимензионом простору дата су четири коваријантна вектора

$$\{t_i\}=\{1,\ 0,\ -1,\ 0\},\quad \{u_i\}=\{0,\ 1,\ 0,\ 0\},$$

$$\{v_i\}=\{2,\ 1,\ 0,\ -1\},\quad \{w_i\}=\{1,\ 0,\ 0,\ -1\}.$$

Одредити њихов спољашњи производ.

***Решење***: Спољашњи производ четири дата коваријантна вектора даје коваријантни антисиметрични тензор четвртог реда

$$a_{ijkl}=[t_i u_j v_k w_l].$$

Координате тога тензора одређене су детерминантом

$$a_{ijkl}=\begin{vmatrix} t_i & t_j & t_k & t_l \\ u_i & u_j & u_k & u_l \\ v_i & v_j & v_k & v_l \\ w_i & w_j & w_k & w_l \end{vmatrix}.$$

С обзиром да је овај тензор потпуно антисиметричан, можемо га писати у облику

$$a_{ijkl}=a_{1234}\,e_{ijkl} \tag{1}$$

при чему је

$$a_{1234}=\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1,$$

једина његова независна координата.

На основу (1) можемо израчунати било коју координату тензора $a_{ijkl}$. Тако је, на пример,

$$a_{4123}=a_{1234}\cdot e_{4123}=(-1)\cdot(-1)=1,$$

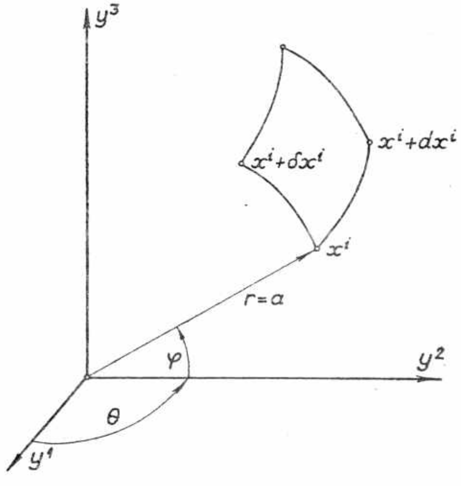
$$a_{4133}=a_{1234}\cdot e_{4133}=(-1)\cdot 0=0,$$

итд.

## 15. Појам екстензије. Запремински елемент. Оријентација векторских простора

**Задатак 101.** (Одељак 15., задатак 1.). Нека $y^i$ буду Декартове правоугле координате у тродимензионом простору. Увести сферне поларне координате $r,\ \theta,\ \varphi$ и посматрати сферну површ $r=a$. На овој сфери образовати инфинитезималну дводимензиону ћелију са теменима $(\theta,\ \varphi)$, $(\theta+d\theta,\ \varphi)$, $(\theta,\ \varphi+d\varphi)$, $(\theta+d\theta,\ \varphi+d\varphi)$. Одредити екстензију ове ћелије и геометријски интерпретирати њене правоугле Декартове координате.

*Решење*: Обележимо сферне поларне координате са $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$. Екстензија дате дводимензионе ћелије (према слици) одређена је релативним контраваријантним вектором




$$(1) \qquad S_i = e_{ijk}\, dx^j\, \delta x^k,$$

одакле за његове координате добивамо

$$S_1 = e_{1jk}\, dx^j\, \delta x^k = d\theta\, d\varphi,$$

$$S_2 = S_3 = 0.$$

Нека су $\overline{S}_i$ координате екстензије у Декартовом правоуглом координатном систему $y^i$. Тада је

$$\overline{S}_i = \left|\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|^{-1} S_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}.$$

Како је (види задатак 62.)

$$\left|\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|^{-1} = \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| = (x^1)^2 \cos x^3 = r^2 \cos\varphi,$$

то је

$$\overline{S}_i = r^2 \cos\varphi \cdot S_1 \frac{\partial r}{\partial y^i}.$$

Из релације

$$r = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2},$$

добивамо, користећи везе између Декартових и сферних координата,

$$\frac{\partial r}{\partial y^1} = \cos\varphi \cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial y^2} = \cos\varphi \sin\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial y^3} = \sin\varphi,$$

па је

$$\overline{S}_1 = a^2 \cos\varphi \cos\varphi \cos\theta\, d\varphi\, d\theta = a^2 \cos\theta \cos^2\varphi\, d\theta\, d\varphi,$$

$$\overline{S}_2 = a^2 \sin\theta \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi,$$

$$\overline{S}_3 = a^2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi.$$

Према томе, Декартове правоугле координате вектора $S_i$ су пројекције елементарне ћелије на $y^2 y^3$, $y^3 y^1$ и $y^1 y^2$ координатне равни, респективно.

**Задатак 102.** (Одељак 15., задатак 2.). У датом векторском простору од четири димензије одредити оријентацију четворке вектора $t^i$, $u^i$, $v^i$, $w^i$, у написаном поретку, кад су им координате у односу на променљиве $x^i$ дате са

$$\{t^i\} = \{1,\ 2,\ 1,\ 0\}, \qquad \{v^i\} = \{2,\ 2,\ 1,\ -1\},$$

$$\{u^i\} = \{-1,\ 0,\ 2,\ 3\}, \qquad \{w^i\} = \{3,\ 0,\ 0,\ 5\}.$$



Извршити затим смену променљивих $x^i$ у нове променљиве $\bar{x}^i$ једначинама

$$\bar{x}^1 = x^1 + 2x^2 + 3x^3 - x^4 \qquad \bar{x}^3 = 5x^1 - 3x^2 + 2x^3 + x^4,$$

$$\bar{x}^2 = 3x^1 - x^2 - 4x^3 + 2x^4, \qquad \bar{x}^4 = -x^1 + x^2 + x^3 - 2x^4,$$

па одредити оријентацију ове четворке после трансформације у нове променљиве. Шта се при том може догодити?

*Решење*: Израчунавањем мешовитог производа датих вектора у систему променљивих $x^i$, добивамо

$$V = e_{ijkl}\, t^i u^j v^k w^l = \frac{1}{4!} e_{ijkl} [t^i u^j v^k w^l],$$

односно

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 32 > 0,$$

на основу чега закључујемо да је њихова оријентација позитивна.

Ако извршимо дату трансформацију променљивих, на основу образаца за трансформацију координата контраваријантних вектора, на пример,

$$\overline{t^i} = t^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j},$$

добивамо,

$$\{\overline{t^i}\} = \{8,\ -3,\ 1,\ 2\}, \qquad \{\overline{v^i}\} = \{10,\ -2,\ 5,\ 3\},$$

$$\{\overline{u^i}\} = \{2,\ -5,\ 2,\ -3\}, \qquad \{\overline{w^i}\} = \{-2,\ 19,\ 20,\ -13\}.$$

Ако сада израчунамо мешовити производ, добивамо

$$\overline{V} = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \\ 10 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & 19 & 20 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -14 & 1 & 2 & -7 \\ -30 & 13 & 5 & -7 \\ -162 & 79 & 20 & -53 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 14 & 1 & 7 \\ 30 & 13 & 7 \\ 162 & 79 & 53 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 13 & -84 \\ 28 & 79 & -500 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 84 \\ 28 & 500 \end{vmatrix} =$$

$$= 32 \begin{vmatrix} 2 & 21 \\ 7 & 125 \end{vmatrix} = 32\,(250 - 147) > 0,$$

на основу чега закључујемо да је оријентација и ове четворке вектора позитивна.

С обзиром да је оријентација вектора остала непромењена (позитивна) после датих трансформација промењивих, закључујемо да дате трансформације представљају или чисту ротацију, или ротацију са променом смера двема осама, или, пак, ротацију са променом смера свих четири оса.

## 16. Основни метрички тензор

**Задатак 103.** (Одељак 16., задатак 1.). Одредити координате метричког тензора $g_{ij}$ и вредност детерминанте $g=|g_{ij}|$ за еуклидски тродимензиони простор у цилиндарским поларним координатама

$$x^1=\rho,\quad x^2=\varphi,\quad x^3=z.$$

*Решење*: Координате коваријантног метричког тензора добивамо помоћу обрасца

$$g_{ij}=\sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\,\frac{\partial y^k}{\partial x^j}. \tag{1}$$

На основу веза између Декартових правоуглих и цилиндарских поларних координата,

$$y^1=x^1\cos x^2,\qquad y^2=x^1\sin x^2,\qquad y^3=x^3,$$

добивамо

$$\left\{\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right\}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^1}\\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^3}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\cos x^2 & \sin x^2 & 0\\ -x^1\sin x^2 & x^1\cos x^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix}.$$

На основу (1), за координате метричког тензора $g_{ij}$ сада добивамо

$$g_{11}=\cos^2 x^2+\sin^2 x^2=1,\quad g_{12}=g_{21}=g_{13}=g_{31}=g_{23}=g_{32}=0,$$

$$g_{22}=(x^1)^2(\sin^2 x^2+\cos^2 x^2)=(x^1)^2,$$

$$g_{33}=1,$$

тј. координате коваријантног метричког тензора $g_{ij}$ у цилиндарским поларним координатама, приказане у облику матрице, су

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&(x^1)^2&0\\0&0&1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{Bmatrix}$$

Одавде непосредно добивамо

$$g=|g_{ii}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&(x^1)^2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(x^1)^2=\rho^2.$$



**Задатак 104.** (Одељак 16., задатак 2.). То исто само у сферним поларним координатама

$$x^1=\rho,\quad x^2=\theta,\quad x^3=\varphi.$$

*Решење*: На основу веза између Декартових правоуглих и сферних поларних координата,

$$y^1=x^1\cos x^2\cos x^3,\quad y^2=x^1\sin x^2\cos x^3,\quad y^3=x^1\sin x^3,$$

добивамо

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1}=\cos x^2\cos x^3,\quad \frac{\partial y^2}{\partial x^1}=\sin x^2\cos x^3,\quad \frac{\partial y^3}{\partial x^1}=\sin x^3,$$

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^2}=-x^1\sin x^2\cos x^3,\quad \frac{\partial y^2}{\partial x^2}=x^1\cos x^2\cos x^3,\quad \frac{\partial y^3}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^3}=-x^1\cos x^2\sin x^3,\quad \frac{\partial y^2}{\partial x^3}=-x^1\sin x^2\sin x^3,\quad \frac{\partial y^3}{\partial x_3}=x^1\cos x^3,$$

тако да, на основу обрасца

$$g_{ij}=\sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\,\frac{\partial y^k}{\partial x^j},$$

добивамо

$$g_{11}=1,\quad g_{12}=g_{21}=g_{13}=g_{31}=g_{23}=g_{32}=0,$$

$$g_{22}=(x^1)^2\cos^2 x^3=\rho^2\cos^2\varphi,$$

$$g_{33}=(x^1)^2=\rho^2.$$

Приказане у облику матрице, координате метричког коваријантног тензора $g_{ij}$, у сферном поларном систему координата, су

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&(x^1)^2\cos^2 x^3&0\\0&0&(x^1)^2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&\rho^2\cos^2\varphi&0\\0&0&\rho^2\end{Bmatrix},$$

одакле следи

$$g=|g_{ij}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&(x^1)^2\cos^2 x^3&0\\0&0&(x^1)^2\end{vmatrix}=(x^1)^4\cos^2 x^3=\rho^4\cos^2\varphi.$$

**Задатак 105.** (Одељак 16., задатак 3.). Дат је косоугли праволинијски систем координата $x^i$ у еуклидском простору од $N$ димензија, где су јединични вектори координатних оса $\vec{e}_i$ $(i=1,\,2,\,\dots,\,N)$.

Одредити метричку форму $ds^2$ и детерминанте $|g_{ij}|$ и $|g^{ij}|$.

*Решење*: Везе између правоуглих Декартових и датих косоуглих праволинијских координата су облика

$$x^i=a^i_j\,y^j, \tag{1}$$

односно

$$y^i=\alpha^i_j\,x^j, \tag{2}$$

где су $a_j^i$ и $\alpha_j^i$ међусобно реципрочни (инверзни) системи константних коефицијената, одређени координатама јединичних вектора.

Из (2) добивамо

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \alpha_j^i,$$

тако да су, на основу релације

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j},$$

координате метричког тензора у односу на дати систем косоуглих праволинијских координата

(3) $$g_{ij} = \sum_k \alpha_i^k \alpha_j^k,$$

па је метричка форма облика

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \sum_k \alpha_i^k \alpha_j^k\, dx^i\, dx^j.$$

На основу (3) добивамо

$$|g_{ij}| = \left|\sum_k \alpha_i^k \alpha_j^k\right| = |\alpha_i^k|\,|\alpha_j^k| = |\alpha_j^i|^2 = \frac{1}{|a_j^i|^2},$$

а из релације

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k,$$

односно

$$|g_{ij}\, g^{jk}| = |g_{ij}|\,|g^{jk}| = |\delta_i^k| = 1,$$

следи

$$|g^{ij}| = \frac{1}{|g_{ij}|} = \frac{1}{|\alpha_j^i|^2} = |a_j^i|^2.$$

**Задатак 106.** (Одељак 16., задатак 4.). Показати да ако је $g_{ij} = 0$ за $i \neq j$, тада ће бити

$$g^{MM} = \frac{1}{g_{MM}}, \quad \text{а} \quad g^{MN} = 0 \quad \text{за} \quad M \neq N.$$

***Решење***: Из једначине

$$g_{ni}\, g^{im} = \delta_n^m$$

следи, ако индексима $m$ и $n$ дамо фиксиране вредности,

$$g_{Ni}\, g^{iM} = \delta_N^M.$$

Међутим, како је $g_{Ni} = 0$ за $i \neq N$, биће

$$g_{NN}\, g^{NM} = \delta_N^M.$$

Из ове једначине следи

$$g^{NM} = \frac{\delta_N^M}{g_{NN}}$$

односно, кад је $N = M$,

$$g^{MM} = \frac{1}{g_{MM}},$$



и

$$g^{MN} = 0,$$

кад је $N \neq M$, што је и требало показати.

**Задатак 107.** (Одељак 16., задатак 5.). Доказати да је у $E_N$ увек

$$g_{ij}\, g^{ij} = N.$$

***Решење***: Из једначине

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k$$

следи, ако извршимо контракцију по индексима $k$ и $i$,

$$g_{ij}\, g^{ij} = \delta_i^i = N,$$

што је и требало доказати.

**Задатак 108.** (Одељак 16., задатак 6.). Извести наредне обрасце

а) $\dfrac{\partial g}{\partial g_{ij}} = g g^{ij}$;  б) $\dfrac{\partial}{\partial g_{ij}} (\log g) = g^{ij}$;  в) $\dfrac{\partial}{\partial x^k} (\log g) = g^{ij} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$.

***Решење***: а) Извод детерминанте по елементу једнак је кофактору тога елемента. Према томе, биће

(1) $$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = G^{ij} = g g^{ij},$$

јер је по дефиницији

$$g^{ij} = \frac{G^{ij}}{g}.$$

б) Ако искористимо образац (1), добивамо

(2) $$\frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\log g) = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{g} g g^{ij} = g^{ij}.$$

в) На исти начин је

(3) $$\frac{\partial}{\partial x^k} (\log g) = \frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\log g) \cdot \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

**Задатак 109.** (Одељак 16., задатак 7.). Ако са $G_{ij}$ обележимо кофактор детерминанте $|g^{ij}|$ који одговара елементу $g^{ij}$, показати:

а) да ће бити $g^{jk} G_{ik} = g^{kj} G_{ki} = \dfrac{1}{g} \delta_i^j$, где је $g = |g_{ij}|$ и

б) да је $G_{ij}$ релативни двапут коваријантни тензор тежине $-2$.

***Решење***: а) Пошто је $G_{ij}$ кофактор елемента $g^{ij}$ у детерминанти $|g^{ij}|$ то је

$$g^{jk}\, G_{ik} = |g^{ij}|\, \delta_i^j.$$

Међутим, из једначине

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k,$$

следи

$$|g^{jk}|=\frac{1}{|g_{ij}|}=\frac{1}{g},$$

па добивамо

$$g^{jk}G_{ik}=\frac{1}{g}\delta^j_i,$$

што је и требало показати.

б) Из једначине

$$g^{jk}G_{ik}=|g^{mn}|\delta^j_i,$$

после трансформације промењљивих $x^i$ у промењљиве $\bar{x}^i$, следи

$$\bar{g}^{jk}\bar{G}_{ik}=\overline{|g^{mn}|}\,\delta^j_i.$$

На основу обрасца за трансформацију тензора $g^{ij}$,

$$\bar{g}^{ij}=g^{mn}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^n},\tag{1}$$

добивамо

$$\overline{|g^{ij}|}=|\bar{g}^{ij}|=\left|g^{mn}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^n}\right|=\Delta^{-2}|g^{ij}|,$$

па је

$$\bar{g}^{jk}\bar{G}_{ik}=\Delta^{-2}|g^{ij}|\delta^j_i=\Delta^{-2}g^{jk}G_{ik},$$

тј.

$$\bar{g}^{jk}\bar{G}_{ik}-\Delta^{-2}g^{jk}G_{ik}=0.$$

Ако искористимо образац (1), ову једначину можемо написати у облику

$$\bar{G}_{ik}g^{mn}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}-\Delta^{-2}g^{jn}G_{in}=0,$$

односно, ако извршимо контракцију по индексима $j$ и $i$,

$$\bar{G}_{ik}g^{mn}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}-\Delta^{-2}g^{mn}G_{mn}=0.$$

С обзиром да $g^{mn}$ у овој једначини може бити произвољно, мора бити

$$\bar{G}_{ik}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}=\Delta^{-2}G_{mn}.$$

Извршимо, сада, композицију ове једначине са $\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^s}$. Тада добивамо

$$\bar{G}_{ik}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^s}=\Delta^{-2}G_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^s},$$

односно

$$\bar{G}_{ik}\delta^i_r\,\delta^k_s=\Delta^{-2}G_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^s},$$



или, коначно,

$$\bar{G}_{rs}=\Delta^{-2}G_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^s},$$

на основу чега закључујемо да је $G_{ij}$ релативни двапут коваријантни тензор тежине $-2$, што је и требало показати.

## 17. Римански простори

**Задатак 110.** (Одељак 17., задатак 1.). Показати спровођењем рачуна до краја да се метричка форма (6) јединичне сфере не може у реалној области изразити у облику

$$ds^2=C_1\,du^2+C_2\,dv^2,$$

где би $C_1$ и $C_2$ биле позитивне реалне константе.

*Решење*: Метричка форма (6) јединичне сфере има облик (види одељак 17., једначину 6.)

$$ds^2=\cos^2\varphi\,d\theta^2+d\varphi^2.\tag{1}$$

Претпоставимо да на јединичној сфери постоји такав систем координата $u$ и $v$ у односу на који се метричка форма (1) може написати у облику

$$ds^2=C_1\,du^2+C_2\,dv^2.\tag{2}$$

С обзиром да је $ds^2$ скаларна инваријанта, изједначивши (2) и (1), добивамо

$$C_1\,du^2+C_2\,dv^2=\cos^2\varphi\,d\theta^2+d\varphi^2,$$

што можемо написати у облику

$$(\sqrt{C_1}\,du+i\sqrt{C_2}\,dv)(\sqrt{C_1}\,du-i\sqrt{C_2}\,dv)=(\cos\varphi\,d\theta+id\varphi)(\cos\varphi\,d\theta-id\varphi).\tag{3}$$

На основу (3) можемо писати

$$\begin{aligned}\sqrt{C_1}\,du+i\sqrt{C_2}\,dv&=e^w(\cos\varphi\,d\theta+id\varphi),\\ \sqrt{C_1}\,du-i\sqrt{C_2}\,dv&=e^{-w}(\cos\varphi\,d\theta-id\varphi),\end{aligned}\tag{4}$$

где је $w$ функција коју треба одредити.

Из једначина (4), даље следи

$$\begin{aligned}\sqrt{C_1}\,du&=\cosh w\cos\varphi\,d\theta+i\sinh w\,d\varphi,\\ i\sqrt{C_2}\,dv&=\sinh w\cosh\varphi\,d\theta+i\cosh w\,d\varphi.\end{aligned}\tag{5}$$

Како су $u$ и $v$ функције од $\varphi$ и $\theta$, тада је

$$\begin{aligned}du&=\frac{\partial u}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial u}{\partial\theta}d\theta,\\ dv&=\frac{\partial v}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial v}{\partial\theta}d\theta.\end{aligned}\tag{6}$$

Уношењем (6) у (5) и изједначавањем коефицијената уз $d\varphi$ и $d\theta$, добивамо

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\cosh w\cos\varphi,\qquad \frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{i}{\sqrt{C_1}}\sinh w, \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{1}{i\sqrt{C_2}}\sinh w\cos\varphi,\qquad \frac{\partial v}{\partial\varphi}=\frac{1}{\sqrt{C_2}}\cosh w. \tag{8}$$

Из једначина (7) следи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\varphi}=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\sinh w\cos\varphi\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{1}{\sqrt{C_1}}\cosh w\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\theta}=\frac{i}{\sqrt{C_1}}\cosh w\frac{\partial w}{\partial\theta}.$$

Ако изједначимо десне стране ових једначина (с обзиром да су им леве стране једнаке), добивамо

$$i\cosh w\frac{\partial w}{\partial\theta}=\sinh w\cos\varphi\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\cosh w\sin\varphi. \tag{9}$$

На исти начин из (8) следи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\,\partial\varphi}=\frac{i}{i\sqrt{C_2}}\cosh w\cos\varphi\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{1}{i\sqrt{C_2}}\sinh w\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi\,\partial\theta}=\frac{1}{\sqrt{C_2}}\sinh w\frac{\partial w}{\partial\theta},$$

тј.

$$i\sinh w\frac{\partial w}{\partial\theta}=\cosh w\cos\varphi\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\sinh w\sin\varphi. \tag{10}$$

Из једначина (9) и (10), за парцијалне изводе $\dfrac{\partial w}{\partial\varphi}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial\theta}$, добивамо

$$\frac{\partial w}{\partial\varphi}=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial w}{\partial\theta}=i\sin\varphi. \tag{12}$$

Ако, сада, (11) диференцирамо по $\theta$, а (12) по $\varphi$, добивамо

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\,\partial\theta}=0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\,\partial\varphi}=i\cos\varphi. \tag{14}$$

Једначине (13) и (14) су противречне. То значи да су услови интеграбилности једначина (9) и (10), односно једначина (7) и (8), инкомпатибилни (не поклапају се), на основу чега закључујемо да не постоји таква функција $w$ да би једначина (2) била задовољена. Другим речима, на јединичној сфери не постоје такве координате $u$ и $v$ у односу на које би се метричка форма јединичне сфере могла написани у облику (2).



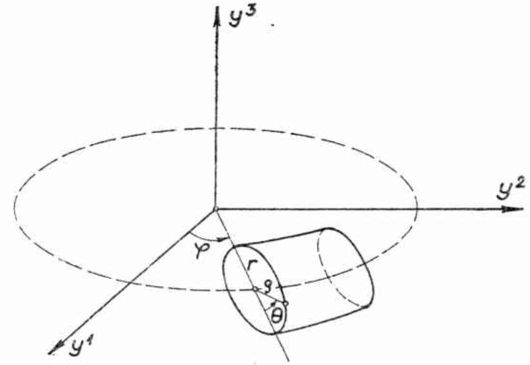
Према томе, јединична сфера (па, према томе, и свака друга сфера), иако је потпростор тродимензионог еуклидског простора, нема еуклидску унутрашњу метрику, тј. није еуклидски простор.

**Задатак 111.** (Одељак 17., задатак 2.). Одредити метричку форму површи торуса и показати да она има еуклидску метрику.

*Задатак треба да гласи:* Одредити метричку форму површи торуса и показати да она нема еуклидску метрику.

***Решење:*** Везе између Декартових правоуглих координата $y^1$, $y^2$, $y^3$, и координата на површи торуса $\varphi$ и $\theta$ (према слици) су

$$\begin{aligned} y^1&=(r+\rho\cos\theta)\cos\varphi,\\ y^2&=(r+\rho\cos\theta)\sin\varphi,\\ y^3&=\rho\sin\theta. \end{aligned} \tag{1}$$




Једначине торуса су

$$\begin{aligned} r&=a=\text{const.},\\ \rho&=b=\text{const.} \end{aligned} \tag{2}$$

Ако уведемо ознаке

$$\varphi=x^1,\qquad \theta=x^2, \tag{3}$$

онда су везе између Декартових правоуглих координата $y^1$, $y^2$, $y^3$ и координата $x^1$, $x^2$, на површи торуса, дате једначинама

$$\begin{aligned} y^1&=(a+b\cos x^2)\cos x^1,\\ y^2&=(a+b\cos x^2)\sin x^1,\\ y^3&=b\sin x^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Метричка форма површи торуса је

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \qquad (i, j = 1, 2), \tag{5}$$

где су координате метричког тензора $g_{ij}$ одређене једначином

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}. \tag{6}$$

Из једначине (4) добивамо

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y^1}{\partial x^1} = -(a + b\cos x^2)\sin x^1, \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = (a + b\cos x^2)\cos x^1, \quad \frac{\partial y^3}{\partial x^1} = 0, \\ &\frac{\partial y^1}{\partial x^2} = -b\sin x^2 \cos x^1, \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -b\sin x^2 \sin x^1, \quad \frac{\partial y^3}{\partial x^2} = b\cos x^2, \end{aligned} \tag{7}$$

па је, на основу једначина (6),

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^3}{\partial x^1}\right)^2 = (a + b\cos x^2)^2 \sin^2 x^1 + (a + \\ &\quad + b\cos x^2)^2 \cos^2 x^1 = (a + b\cos x^2)^2, \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^3}{\partial x^2}\right)^2 = b^2, \\ g_{12} &= g_{21} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

тј. координате метричког тензора површи торуса, приказане у облику матрице, су

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} (a + b\cos x^2)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{Bmatrix}. \tag{9}$$

За метричку форму (5), сада, добивамо

$$ds^2 = (a + b\cos x^2)^2 (dx^1)^2 + b^2 (dx^2)^2, \tag{10}$$

тј.

$$ds^2 = (a + b\cos\theta)^2\, d\varphi^2 + b^2\, d\theta^2. \tag{11}$$

Ако бисмо показали да се на површи торуса не могу наћи такве координате, рецимо $u$ и $v$, у односу на које би се метричка форма (11) могла написати у облику

$$ds^2 = C_1\, du^2 + C_2\, dv^2, \tag{12}$$

где су $C_1$ и $C_2$ позитивне реалне константе, онда би то значило да површина торуса нема еуклидску метрику, тј. да није еуклидски простор. Пођимо од претпоставке да такве координате, $u$ и $v$, постоје. Тада је

$$C_1\, du^2 + C_2\, dv^2 = (a + b\cos\theta)^2\, d\varphi^2 + b^2\, d\theta^2, \tag{13}$$

односно

$$\begin{aligned} &(\sqrt{C_1}\, du + i\sqrt{C_2}\, dv)(\sqrt{C_1}\, du - i\sqrt{C_2}\, dv) = \\ &= [(a + b\cos\theta)\, d\varphi + ibd\theta]\,[(a + b\cos\theta)\, d\varphi - ibd\theta]. \end{aligned} \tag{14}$$



На основу (14), можемо ставити

$$\begin{aligned} \sqrt{C_1}\, du + i\sqrt{C_2}\, dv &= e^w [(a + b\cos\theta)\, d\varphi + ibd\theta], \\ \sqrt{C_1}\, du - i\sqrt{C_2}\, dv &= e^{-w} [(a + b\cos\theta)\, d\varphi - ibd\theta], \end{aligned} \tag{15}$$

где је $w$ функција коју треба одредити.

Из једначина (15) добивамо

$$\begin{aligned} \sqrt{C_1}\, du &= (a + b\cos\theta)\cosh w\, d\varphi + ib\sinh w d\theta, \\ \sqrt{C_2}\, dv &= (a + b\cos\theta)\sinh w d\varphi + ib\cosh w d\theta. \end{aligned} \tag{16}$$

Пошто су $u$ и $v$ функције од $\varphi$ и $\theta$, то је

$$du = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial u}{\partial \theta}\, d\theta,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial v}{\partial \theta}\, d\theta,$$

што, замењивањем у (16) и изједначавањем коефицијената уз $d\varphi$ и $d\theta$, даје систем парцијалних диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} &\sqrt{C_1}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = (a + b\cos\theta)\cosh w, \quad \sqrt{c_1}\frac{\partial u}{\partial \theta} = ib\sinh w, \\ &\sqrt{C_2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = (a + b\cos\theta)\sinh w, \quad \sqrt{c_2}\frac{\partial v}{\partial \theta} = ib\cosh w, \end{aligned} \tag{17}$$

из којих одређујемо $u$ и $v$. Да би овај систем парцијалних диференцијалних једначина имао решење морају бити задовољени услови интеграбилности,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\varphi}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial\varphi\,\partial\theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial\theta\,\partial\varphi},$$

тј.

$$\begin{aligned} ib\cosh w\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= (a + b\cos\theta)\sinh w\frac{\partial w}{\partial \theta} - b\sin\theta\cosh w, \\ ib\sinh w\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= (a + b\cos\theta)\cosh w\frac{\partial w}{\partial \theta} - b\sin\theta\sinh w. \end{aligned} \tag{18}$$

Из једначина (18), које представљају систем алгебарских једначина по парцијалним изводима $\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$, добивамо

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= i\sin\theta, \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} &= 0, \end{aligned} \tag{19}$$

што су парцијалне једначине из којих треба да одредимо непознату функцију $w$. Да би једначине (19) имале решење морају бити задовољени услови интеграбилности, тј мора бити

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\,\partial\theta}=\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\,\partial\varphi}.$$

Међутим, диференцирањем из (19) добивамо

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\,\partial\theta}=i\cos\theta,$$

(20)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\,\partial\varphi}=0,$$

па видимо да услови интеграбилности једначина (19) нису задовољени, што значи да из једначина (19) не можемо одредити функцију $w$.

Према томе, с обзиром да не можемо одредити функцију $w$, то не можемо решити систем парцијалних диференцијалних једначина (17), што значи да на површи торуса не можемо наћи такве координате $u$ и $v$ у односу на које би се метричка форма (11) могла написати у облику (12). Другим речима, то значи да површ торуса нема еуклидску метрику, тј. није еуклидски простор, што је и требало показати.

**Задатак 112.** (Одељак 17., задатак 3.). Изразити запремински елемент метричког простора помоћу детерминанте $g$ и применити то на одређивање запреминског елемента еуклидског тродимензионог простора у сферним поларним и елиптичким координатама.

***Решење*:** Ако у дати метрички простор уведемо еуклидску метрику и уочимо елементарну ћелију између координатних равни у односу на неки Декартов систем правоуглих координата, имаћемо елементарни правоугли $N$-паралелепипед са ивицама $dy^1, dy^2, \dots, dy^N$ чија је запремина

(1) $$dV=dy^1\,dy^2\dots dy^N,$$

што представља запремински елемент у простору од $N$ димензија, изражен у Декартовим правоуглим координатама.

Ако извршимо трансформацију променљивих $y^i$ у променљиве $x^i$, онда је запремински елемент (види одељак 15., једначине 27., 28. и 29.)

(2) $$dV=\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right|dx^1\,dx^2\dots dx^N,$$

где је $\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right|=\Delta$ јакобијева детерминанта.

Из обрасца за трансформацију метричког тензора,

$$g_{ij}=\delta_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j},$$



добивамо

$$g=|g_{ij}|=|\delta_{kl}|\left|\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right|\left|\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\right|=\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|^2,$$

тј.

$$\left|\frac{\partial y^l}{\partial x^k}\right|=\sqrt{g},$$

па запремински елемент (2) можемо изразити у облику

(3) $$dV=\sqrt{g}\,dx^1\,dx^2\dots dx^N.$$

У сферним поларним координатама је (види задатак 59. б)

$$\sqrt{g}=\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|=(x^1)^2\cos x^3,$$

па је запремински елемент

$$dV=(x^1)\cos x^3\,dx^1\,dx^2\,dx^3,$$

односно

$$dV=\rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

У елиптичким координатама је (види задатак 59. в)

$$\sqrt{g}=\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right|=c^3\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\nu^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{\sqrt{(1-\mu^2)(k^2-\mu^2)(1-\nu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-1)(\lambda^2-k^2)}},$$

па је запремински елемент

$$dV==c^3\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\nu^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{\sqrt{(1-\mu^2)(k^2-\mu^2)(1-\nu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-1)(\lambda^2-k^2)}}\,d\mu\,d\nu\,d\lambda.$$

## 18. Лук криве. Интензитет вектора. Угао који образују два вектора

**Задатак 113.** (Одељак 18 , задатак 1.). Нека $\lambda^i_{(1)}, \lambda^i_{(2)}, \lambda^i_{(3)}$, буду јединични тангентни вектори координатних линија криволинијског система координата $x^i$ $(i=1, 2, 3)$ у некој тачки $P$. Показати да ће њихове координате бити

$$\lambda^i_{(1)}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta^i_1,\qquad \lambda^i_{(2)}=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta^i_2,\qquad \lambda^i_{(3)}=\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta^i_3.$$

***Решење*:** Ако су параметарске једначине криве линије

(1) $$x^i=x^i(s),\qquad (i=1, 2, 3),$$

где је параметар $s$ лук криве, онда је јединични вектор тангенте на ту криву одређен координатама

(2) $$\lambda^i=\frac{dx^i}{ds}.$$

Ако координатну линију $x^2=\text{const.}$, $x^3=\text{const.}$, обележимо са $x^1$, координатну линију $x^3=\text{const.}$, $x^1=\text{const.}$, обележимо са $x^2$ и координатну линију $x^1=\text{const.}$, $x^2=\text{const.}$, обележимо са $x^3$, онда је координатна линија $x^L$ одређена једначинама

(3) $$x^i=\text{const.}, \qquad (i\neq L).$$

Јединични вектор тангенте на координатну линију $x^L$, на основу (2), има координате

(4) $$\lambda^i_{(L)}=\frac{dx^i}{ds_{(L)}},$$

где је $ds_{(L)}$ елемент лука координатне линије $x^L$, тј.

(5) $$\lambda^i_{(L)}=\frac{dx^i}{\sqrt{g_{ij}\,dx^i\,dx^j}}=\frac{dx^i}{\sqrt{g_{LL}\,(dx^L)^2}},$$

јер је $dx^i=0$ за $i\neq L$.

Координате (5) можемо, даље, изразити у облику

(6) $$\lambda^i_{(L)}=\frac{1}{\sqrt{g_{LL}}}\,\frac{dx^i}{dx^L}=\frac{1}{\sqrt{g_{LL}}}\,\delta^i_L,$$

тј. координате јединичних вектора координатних линија $x^1$, $x^2$, $x^3$, су

$$\lambda^i_{(1)}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\,\delta^i_1,\qquad \lambda^i_{(2)}=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\,\delta^i_2,\qquad \lambda^i_{(3)}=\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\,\delta^i_3,$$

респективно, што је и требало показати.

**Задатак 114.** (Одељак 18., задатак 2.). Ако су $\theta_{(1)}$, $\theta_{(2)}$, $\theta_{(3)}$ углови између координатних кривих у тачки $P$ неког криволинијског система $x^i$, показати да је тада

$$\cos\theta_{(1)}=\frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}\,g_{33}}},\qquad \cos\theta_{(2)}=\frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}\,g_{11}}},\qquad \cos\theta_{(3)}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}.$$

На основу овог резултата извести да је потребан и довољан услов да систем криволинијских координата буде ортогоналан да буде

$$g_{23}=g_{31}=g_{12}=0$$

у свакој тачки простора.

*Решење*: Ако координатне криве имају заједничку тачку $P$, онда је косинус угла између било које две криве одређен скаларним производом јединичних тангентних вектора тих кривих у тачки $P$.

Према томе, ако са $\theta_{(1)}$ обележимо угао између координатних линија $x^2$ и $x^3$, са $\theta_{(2)}$ угао између координатних линија $x^3$ и $x^1$, а са $\theta_{(3)}$ угао између координатних линија $x^1$ и $x^2$, биће

$$\cos\theta_{(1)}=g_{ij}\,\lambda^i_{(2)}\,\lambda^j_{(3)}=g_{ij}\,\frac{1}{\sqrt{g_{22}\,g_{33}}}\,\delta^i_2\,\delta^j_3,$$

односно

(1) $$\cos\theta_{(1)}=\frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}\,g_{33}}}.$$



На исти начин бисмо добили

(2) $$\cos\theta_{(2)}=\frac{g_{31}}{\sqrt{g_{11}\,g_{33}}},$$

и

(3) $$\cos\theta_{(3)}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}.$$

На основу (1), (2) и (3) можемо да закључимо да ће систем криволинијских координата бити ортогоналан (косинус угла између њих једнак нули) ако је идентички испуњен услов

$$g_{23}=g_{31}=g_{12}=0,$$

што је и требало извести.

**Задатак 115.** (Одељак 18., задатак 3.). Показати да су поларне цилиндарске, сферне и елиптичке координате ортогоналне координате.

*Решење*: У претходном задатку је показано да је потребан и довољан услов да систем криволинијских координата буде ортогоналан да буде $g_{ij}=0$ за $i\neq j$.

У поларно цилиндарском систему координата метрички тензор је (види задатак 103.)

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (x^1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix},$$

па видимо да је горњи услов испуњен, што значи да је систем поларно цилиндарских координата систем ортогоналних координата.

У сферном поларном систему координата метрички тензор је (види задатак 104.)

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (x^1)^2\cos^2 x^3 & 0\\ 0 & 0 & (x^1)^2\end{Bmatrix},$$

па видимо да је и овде $g_{ij}=0$ за $i\neq j$, што значи да је и овај систем координата систем ортогоналних координата.

На основу једначина (1) у задатку 59. в, за метрички тензор у елиптичким координатама добивамо

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}c^2\,\dfrac{(\lambda^2-\mu^2)(\nu^2-\mu^2)}{(1-\mu^2)(k^2-\mu^2)} & 0 & 0\\[2ex] 0 & c^2\,\dfrac{(\lambda^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)}{(1-\nu^2)(\nu^2-k^2)} & 0\\[2ex] 0 & 0 & c^2\,\dfrac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{(\lambda^2-1)(\lambda^2-k^2)}\end{Bmatrix},$$

на основу чега закључујемо да је и овај систем координата систем ортогоналних координата.

**Задатак 116.** (Одељак 18., задатак 4.). Показати да су лучни елементи појединих координатних линија криволинијског система $x^i$, $(i=1,\ 2,\ 3)$, одређени обрасцима

$$ds_{(1)}=\sqrt{g_{11}}\,dx^1, \qquad ds_{(2)}=\sqrt{g_{22}}\,dx^2, \qquad ds_{(3)}=\sqrt{g_{33}}\,dx^3.$$

***Решење***: Елемент лука криве, чије су параметарске једначине

$$x^i=x^i(s), \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

где је параметар $s$ лук криве, је

(1) $$ds=\sqrt{g_{ij}\,dx^i\,dx^j}.$$

За координатну линију $x^1$, с обзиром да је дуж те линије $x^2=\text{const.}$, $x^3=\text{const.}$, елемент лука је

(2) $$ds_{(1)}=\sqrt{g_{11}\,dx^1\,dx^1}=\sqrt{g_{11}}\,dx^1$$

На исти начин, за координатну линију $x^2$ елемент лука је

(3) $$ds_{(2)}=\sqrt{g_{22}}\,dx^2$$

и за координатну линију $x^3$ је

(4) $$ds_{(3)}=\sqrt{g_{33}}\,dx^3.$$

**Задатак 117.** (Одељак 18., задатак 5.). Изразити косинус угла $\varphi_{(3)}$ између координатних површи $x^1=\text{const.}$ и $x^2=\text{const.}$ помоћу контраваријантног основног тензора.

***Решење***: Нека је $N^i_{(1)}$ јединични вектор нормале на координатну раван $x^1=\text{const.}$, а $N^i_{(2)}$ то исто за координатну раван $x^2=\text{const.}$. С обзиром да у координатној равни $x^1=\text{const.}$ леже координатне линије $x^2$ и $x^3$ и да у координатној равни $x^2=\text{const.}$ леже координатне линије $x^3$ и $x^1$, биће јединични вектори координатних линија управни на јединични вектор нормале на раван у којој се те линије налазе. Према томе, можемо писати

(1) $$g_{ij}\,N^i_{(1)}\,\lambda^j_{(2)}=0, \qquad g_{ij}\,N^i_{(1)}\,\lambda^j_{(3)}=0,$$

(2) $$g_{ij}\,N^i_{(1)}\,N^j_{(1)}=1,$$

(3) $$g_{ij}\,N^i_{(2)}\,\lambda^j_{(3)}=0, \qquad g_{ij}\,N^i_{(2)}\,\lambda^j_{(1)}=0,$$

(4) $$g_{ij}\,N^i_{(2)}\,N^j_{(2)}=1,$$

где су $\lambda^i_{(L)}$ координате јединичног вектора координатне линије $x^L$.

Како је (види задатак 113.)

$$\lambda^i_{(L)}=\frac{1}{\sqrt{g_{LL}}}\,\delta^i_L,$$



једначине (1) и (3) се своде на

$$g_{ij}\,N^i_{(1)}\,\delta^j_2=0,$$

$$g_{ij}\,N^i_{(1)}\,\delta^j_3=0,$$

$$g_{ij}\,N^i_{(2)}\,\delta^j_3=0,$$

$$g_{ij}\,N^i_{(2)}\,\delta^j_1=0,$$

односно

(5) $$g_{i2}\,N^i_{(1)}=0,$$

(6) $$g_{i3}\,N^i_{(1)}=0,$$

(7) $$g_{i3}\,N^i_{(2)}=0,$$

(8) $$g_{i1}\,N^i_{(2)}=0.$$

Једначину (2) можемо написати у облику

$$g_{i1}\,N^i_{(1)}\,N^1_{(1)}+g_{i2}\,N^i_{(1)}\,N^2_{(1)}+g_{i3}\,N^i_{(1)}\,N^3_{(1)}=1,$$

што, на основу једначина (5) и (6), даје

(9) $$g_{i1}\,N^i_{(1)}=\frac{1}{N^1_{(1)}}.$$

Слично, из (4) добивамо

(10) $$g_{i2}\,N^i_{(2)}=\frac{1}{N^2_{(2)}}.$$

Множећи једначину (5) са $g^{j2}$, (6) са $g^{j3}$, а (9) са $g^{j1}$ и сабирајући одговарајуће стране насталих једначина, добивамо

$$(g^{j1}\,g_{i1}+g^{j2}\,g_{i2}+g^{j3}\,g_{i3})\,N^i_{(1)}=\frac{1}{N^1_{(1)}}\,g^{j1},$$

тј.

$$g^{jk}\,g_{ik}\,N^i_{(1)}=\frac{1}{N^1_{(1)}}\,g^{j1},$$

односно

$$\delta^j_i\,N^i_{(1)}=\frac{1}{N^1_{(1)}}\,g^{j1},$$

или

$$N^i_{(1)}=\frac{g^{i1}}{N^1_{(1)}}.$$

Отуда, стављајући $i=1$, добивамо

$$N^1_{(1)}=\sqrt{g^{11}},$$

па је

$$N^i_{(1)}=\frac{g^{i1}}{\sqrt{g^{11}}}.$$

Сличним поступком добивамо

$$N^i_{(2)} = \frac{g^{i2}}{\sqrt{g^{22}}}.$$

Према томе, тражени косинус је

$$\cos \varphi_{(3)} = g_{ij} N^i_{(1)} N^j_{(2)} = g_{ij} \frac{g^{i1}}{\sqrt{g^{11}}} \frac{g^{j2}}{\sqrt{g^{22}}},$$

тј.

$$\cos \varphi_{(3)} = \delta^1_j g^{j2} \frac{1}{\sqrt{g^{11} g^{22}}},$$

или, коначно,

$$\cos \varphi_{(3)} = \frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11} g^{22}}}.$$

**Задатак 118.** (Одељак 18., задатак 6.). Нека крива у $E_3$ дата је једначинама

$$y^1 = a \cos u, \quad y^2 = a \sin u, \quad y^3 = bu,$$

где су $y^1$, $y^2$, $y^3$ као обично Декартове правоугле координате, $u$ параметар, а $a$ и $b$ позитивне константе. Наћи дужину лука ове криве између тачака $u=0$ и $u=2\pi$.

Шта ће бити дужина криве са истим једначинама у истим границама, ако се налази у тродимензионом простору чија је метричка форма индефинитна и дата изразом

$$(dy^1)^2 + (dy^2)^2 - (dy^3)^2.$$

Дискутовати случајеве кад је $a$ веће, једнако или мање од $b$.

***Решење***: Квадрат елемента лука дате криве је

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2,$$

одакле је

$$ds = \sqrt{(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2},$$

тј.

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dy^1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy^2}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy^3}{du}\right)^2}\, du.$$

Дужина лука криве у датом интервалу је

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u + b^2}\, du = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, du,$$

тј.

$$s = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ако је метричка форма простора индефинитна, тј. ако је

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 - (dy^3)^2,$$

онда је

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dy^1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy^2}{du}\right)^2 - \left(\frac{dy^3}{du}\right)^2}\, du,$$



па за дужину лука криве у датом интервалу добивамо

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u - b^2}\, du = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - b^2}\, du,$$

тј.

$$s = 2\pi \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Из овог израза за дужину лука, видимо да ће бити:

а) за $|a| > |b|$, $s$ реално,

б) за $a = b$, $s = 0$,

в) за $|a| < |b|$, $s$ имагинарно.

**Задатак 119.** (Одељак 18., задатак 7.). Ако су $\lambda^i$ и $\mu^i$ јединични вектори у простору са позитивно дефинитном метричком формом, показати да је тада

$$|g_{ij} \lambda^i \mu^j| \leqslant 1.$$

***Решење***: На основу Шварцове неједначине, према којој је, у простору са позитивно дефинитном метричком формом, апсолутна вредност скаларног производа два вектора мања или једнака производу интензитета тих вектора (види одељак 18., једначину 32.), следи

$$|g_{ij} \lambda^i \mu^j| \leqslant 1, \quad (|\lambda^i| = |\mu^i| = 1),$$

што је и требало показати.

**Задатак 120.** (Одељак 18., задатак 8.). Показати да кад је угао $\theta$ између јединичних вектора $\lambda^i$ и $\lambda^i + d\lambda^i$ (при томе су $d\lambda^i$ инфинитезимални прираштаји) мали, он ће бити одређен приближно једначином

$$\theta^2 = g_{ij}\, d\lambda^i\, d\lambda^j.$$

***Решење***: С обзиром да су $\lambda^i$ и $\lambda^i + d\lambda^i$ јединични вектори, то је косинус угла између њих једнак њиховом скаларном производу, тј.

$$\cos\theta = g_{ij} \lambda^i (\lambda^j + d\lambda^j) = g_{ij} \lambda^i \lambda^j + g_{ij} \lambda^i\, d\lambda^j,$$

односно

(1) $$\cos\theta = 1 + g_{ij} \lambda^i\, d\lambda^j.$$

С друге стране, међутим, можемо писати

$$\cos\theta = g_{ij} \lambda^i (\lambda^j + d\lambda^j) = g_{ij} (\lambda^i + d\lambda^i - d\lambda^i)(\lambda^j + d\lambda^j) =$$

$$= g_{ij} (\lambda^i + d\lambda^i)(\lambda^j + d\lambda^j) - g_{ij}\, d\lambda^i\, d\lambda^j - g_{ij}\, d\lambda^i \lambda^j,$$

тј.

(2) $$\cos\theta = 1 - g_{ij}\, d\lambda^i\, d\lambda^j - g_{ij}\, d\lambda^i \lambda^j.$$

Сабирањем једначина (1) и (2) добивамо

$$2\cos\theta = 2 - g_{ij}\, d\lambda^i\, d\lambda^j,$$

односно

$$g_{ij}\,d\lambda^i\,d\lambda^j = 4\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Кад је угао $\theta$ мали, можемо ставити да је приближно $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$ па добивамо

$$\theta^2 = g_{ij}\,d\lambda^i\,d\lambda^j,$$

што је и требало показати.

**Задатак 121.** (Одељак 18., задатак 9.). Ако су $\lambda^i$ и $\mu^i$ два јединична вектора показати да угао $\theta$, који они одређују задовољава једначину

$$\sin^2\theta = (g_{ij}\,g_{rs} - g_{ir}\,g_{js})\,\lambda^i\lambda^j\mu^r\mu^s.$$

*Решење*: Из релације

$$\cos\theta = g_{ij}\,\lambda^i\mu^j,$$

добивамо

$$\cos^2\theta = g_{ij}\,\lambda^i\mu^j g_{rs}\lambda^r\mu^s,$$

па је

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - g_{ij}\,\lambda^i\mu^j g_{rs}\lambda^r\mu^s.$$

С обзиром да су $\lambda^i$ и $\mu^i$ јединични вектори, тј. да је

$$g_{ij}\,\lambda^i\lambda^j = 1$$

и

$$g_{rs}\,\mu^r\mu^s = 1,$$

то је и

$$g_{ij}\,\lambda^i\lambda^j g_{rs}\,\mu^r\mu^s = 1,$$

па добивамо

$$\sin^2\theta = g_{ij}\,\lambda^i\lambda^j g_{rs}\,\mu^r\mu^s - g_{ij}\,\lambda^i\mu^j g_{rs}\,\lambda^r\mu^s.$$

Одавде, погодном изменом немих индекса, добивамо

$$\sin^2\theta = g_{ij}\,\lambda^i\lambda^j g_{rs}\,\mu^r\mu^s - g_{ir}\,\lambda^i\mu^r g_{js}\,\lambda^j\mu^s,$$

односно

$$\sin^2\theta = (g_{ij}\,g_{rs} - g_{ir}\,g_{js})\,\lambda^i\lambda^j\mu^r\mu^s,$$

што је и требало показати.

**Задатак 122.** (Одељак 18., задатак 10.). Ако су $u_{ij}$ и $v_{ij}$ коваријантни тензори, показати да је детерминантна једначина

$$|x u_{ij} - v_{ij}| = 0$$

инваријантна.

*Решење*: С обзиром да су $u_{ij}$ и $v_{ij}$ апсолутни коваријантни тензори и да из разлике

$$x\,u_{ij} - v_{ij},$$



следи да $x$ мора бити скаларна инваријанта (јер се могу сабирати, односно одузимати, само тензори истог реда и типа), то ће, ако извршимо трансформацију променљивих $x^i$ у променљиве $\bar{x}^i$, бити

$$|\overline{x\,u_{ij} - v_{ij}}| = |x\,\bar{u}_{ij} - \bar{v}_{ij}| = \left|(x\,u_{lm} - v_{lm})\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\right| = |x\,u_{lm} - v_{lm}|\,\Delta^2.$$

Међутим, како је у односу на променљиве $x^i$ задовољена детерминантна једначина

$$|x\,u_{lm} - v_{lm}| = 0,$$

следи да мора бити и

$$|\overline{x\,u_{ij} - v_{ij}}| = 0,$$

што значи да је дата детерминантна једначина инваријантна у односу на координатне трансформације, што је и требало показати.

**Задатак 123.** (Одељак 18., задатак 11.). Ако су дата два вектора коваријантним координатама $u_i$ и $v_i$, показати да се њихов векторски производ може изразити у облику

$$\varepsilon^{ijk}\,u_j\,v_k = u v \sin\theta\,\nu^i,$$

где су $u$ и $v$ њихови интензитети, $\theta$ угао између тих вектора а $\nu^i$ јединични вектор управан на оба та вектора.

*Решење*: Векторски производ два вектора је вектор чије су контраваријантне координате одређене једначином

(1) $$w^i = \varepsilon^{ijk}\,u_j\,v_k.$$

Интензитет вектора $w^i$ је одређен својим квадратом,

$$(w)^2 = w_i\,w^i = g_{ij}\,w^i w^j = g_{ij}\,\varepsilon^{ilm}\,u_l\,v_m\,\varepsilon^{jpq}\,u_p\,v_q =$$
$$= g^{rl}\,g^{sm}\,\varepsilon_{jrs}\,\varepsilon^{jpq}\,u_l\,v_m\,u_p\,v_q = \varepsilon_{rsj}\,\varepsilon^{pqj}\,u^r v^s u_p\,v_q,$$

односно

$$(w)^2 = \delta^{pq}_{rs}\,u^r v^s u_p\,v_q.$$

Како је, међутим, (види задатак 26.)

$$\delta^{pq}_{rs} = \delta^p_r\,\delta^q_s - \delta^p_s\,\delta^q_r = \delta^p_r\,\delta^q_s - \delta^q_r\,\delta^p_s,$$

за квадрат интензитета вектора $w^i$ добивамо

$$(w)^2 = (u^p v^q - u^q v^p)\,g_{ip}\,g_{jq}\,u^i v^j =$$
$$= g_{ip}\,g_{jq}\,u^i u^p v^j v^q - g_{iq}\,g_{jp}\,u^i u^p v^j v^q =$$
$$= (g_{ip}\,g_{jq} - g_{iq}\,g_{jp})\,u^i u^p v^j v^q,$$

што је, на основу резултата сличног резултату из задатка 121.,

$$(w)^2 = (uv)^2 \sin^2\theta.$$

Одавде за интензитет вектора $w^i$ добивамо

$$w = u v \sin\theta.$$

Покажимо, сада, да је вектор $w^i$ управан на векторима $u_i$ и $v_i$. У том циљу, израчунајмо скаларни производ вектора $w^i$ и $u_i$. Тада добивамо

$$u_i w^i = g_{ij} u^i w^j = g_{ij} u^i \varepsilon^{jlm} u_l v_m = \varepsilon^{jlm} u_j u_l v_m =$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon^{jlm} u_j u_l v_m - \varepsilon^{ljm} u_j u_l v_m) =$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon^{jlm} u_j u_l v_m - \varepsilon^{jlm} u_l u_j v_m) = \frac{1}{2}(\varepsilon^{jlm} - \varepsilon^{jlm}) u_j u_l v_m = 0.$$

На исти начин добивамо да је и скаларни производ вектора $w^i$ и $v_i$ једнак нули, тј.

$$v_i w^i = g_{ij} v^i w^j = g_{ij} v^i \varepsilon^{jlm} u_l v_m = \varepsilon^{jlm} u_l v_j v_m = 0,$$

што значи да је вектор $w^i$ управан на векторима $u_i$ и $v_i$.

Како је, даље,

$$w^i = w\,\nu^i,$$

где је $\nu^i$ јединични вектор вектора $w^i$, то, на крају, имамо

$$w^i = \varepsilon^{ijk} u_j v_k = u v \sin\theta\, \nu^i,$$

где су $u$ и $v$ интензитети вектора $u_i$ и $v_i$, $\theta$ угао између њих, а $\nu^i$ јединични вектор који је на њих управан, што је и требало показати.

**Задатак 124.** (Одељак 18, задатак 12.). Ако је

$$g_{ij} u^i u^j = 0,$$

показати да је $u^i = 0$.

***Решење***: Скаларни производ вектора са самим собом једнак је квадрату његовог интензитета, тј.

$$g_{ij} u^i u^j = (u)^2.$$

С обзиром да квадрат интензитета вектора не може бити негативан, тј.

$$(u)^2 \geqslant 0,$$

то је

$$g_{ij} u^i u^j \geqslant 0,$$

тј. квадратна форма

$$g_{ij} u^i u^j$$

је позитивно дефинитна форма, а она може бити једнака нули само за

$$u^i = 0,$$

што је и требало показати.

**Задатак 125.** (Одељак 18., задатак 13.). Показати да је у тродимензионом простору

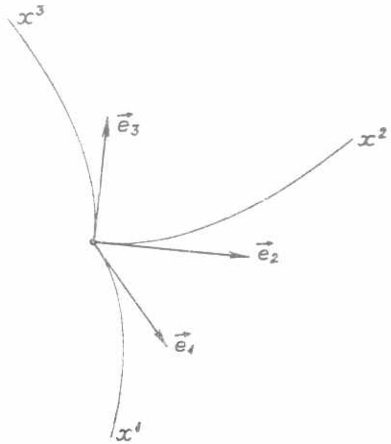
$$1 - \cos^2\theta_{23} - \cos^2\theta_{31} - \cos^2\theta_{12} + 2\cos\theta_{12}\cos\theta_{23}\cos\theta_{31} = \frac{g}{g_{11} g_{22} g_{33}},$$

где су $\theta_{ij}$ углови између вектора триједра $\vec{e}_i$.



***Решење***: Раније смо показали (види задатак 114.) да је косинус угла који одређују две координатне криве, рецимо $x^M$ и $x^N$, одређен изразом

$$(1) \qquad \cos\theta_{MN} = \frac{g_{MN}}{\sqrt{g_{MM} g_{NN}}}.$$




Основни вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, су тангентни вектори на координатне линије $x_1$, $x_2$, $x_3$, респективно (види слику). На основу тога као и на основу обрасца (1), угао између вектора $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_j$ одређен је изразом

$$(2) \qquad \cos\theta_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}},$$

при чему је, због

$$\cos\theta_{ij} = \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}{|\vec{e}_i|\,|\vec{e}_j|} = \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}{\sqrt{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i)(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_j)}},$$

веза између координата метричког тензора и основних (базних) вектора облика

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j.$$

Према томе, на основу (2), добивамо

$$1 - \cos^2\theta_{23} - \cos^2\theta_{31} - \cos^2\theta_{12} + 2\cos\theta_{12}\cos\theta_{23}\cos\theta_{31} =$$

$$= 1 - \frac{(g_{23})^2}{g_{22} g_{33}} - \frac{(g_{31})^2}{g_{33} g_{11}} - \frac{(g_{12})^2}{g_{11} g_{22}} + 2\frac{g_{12} g_{23} g_{31}}{g_{11} g_{22} g_{33}} =$$

$$= \frac{1}{g_{11} g_{22} g_{33}}[g_{11} g_{22} g_{33} - g_{11}(g_{23})^2 - g_{22}(g_{31})^2 - g_{33}(g_{12})^2 + 2 g_{23} g_{31} g_{12}],$$

односно, због $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = g_{ji}$,

$$1 - \cos^2\theta_{23} - \cos^2\theta_{31} - \cos^2\theta_{12} + 2\cos\theta_{12}\cos_{23}\cos\theta_{31} =$$

$$= \frac{1}{g_{11} g_{22} g_{33}}[g_{11} g_{22} g_{33} + g_{12} g_{23} g_{31} + g_{13} g_{21} g_{32} - g_{13} g_{22} g_{31} - g_{12} g_{21} g_{33} - g_{11} g_{23} g_{32}]$$

Како је, међутим,

$$g_{11}g_{22}g_{33} + g_{12}g_{23}g_{31} + g_{13}g_{21}g_{32} - g_{13}g_{22}g_{31} - g_{12}g_{21}g_{33} - g_{11}g_{23}g_{32} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g,$$

добивамо

$$1-\cos^2\theta_{23}-\cos^2\theta_{31}-\cos^2\theta_{12}+2\cos\theta_{12}\cos\theta_{23}\cos_{31}=\frac{g}{g_{11}g_{22}g_{33}},$$

што је и требало показати.

**Задатак 126.** (Одељак 18., задатак 14.). Ако је $u^{ij}$ неки антисиметрични контраваријантни тензор, биће

$$\sqrt{g}\,u^{23},\quad \sqrt{g}\,u^{31},\quad \sqrt{g}\,u^{12},$$

координате коваријантног вектора.

***Решење***: С обзиром да је $u^{ij}$ контраваријантни тензор онда је његов трансформациони образац

$$\bar{u}^{ij}=u^{rs}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s},$$

при чему је $\bar{u}^{ij}=-\bar{u}^{ji}$, због $u^{rs}=-u^{sr}$.

Ако уведемо ознаке

$$\sqrt{g}\,u^{23}=v_1,\quad \sqrt{g}\,u^{31}=v_2,\quad \sqrt{g}\,u^{12}=v_3,$$

онда је, рецимо,

(1)
$$\bar{v}_1=\sqrt{\bar{g}}\,\bar{u}^{23}=\sqrt{\bar{g}}\,u^{rs}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^s}.$$

Међутим, како је

$$\bar{g}=|\bar{g}_{ij}|=\left|g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\right|=|g_{kl}|\left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right|\left|\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\right|,$$

тј.

$$\bar{g}=g\,\Delta^2,$$

следи да је

$$\sqrt{\bar{g}}=\Delta\sqrt{g},$$

тј. $\sqrt{g}$ релативни скалар тежине $+1$. Према томе, из (1) добивамо

$$\bar{v}_1=\Delta\sqrt{g}\,u^{rs}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^s}.$$

Ако израз на десној страни ове једначине напишемо у развијеном облику, водећи рачуна да је $u^{MM}=0$, добивамо

$$\bar{v}_1=\Delta\sqrt{g}\left[u^{23}\left(\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}-\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2}\right)+u^{31}\left(\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1}-\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}\right)+\right.$$
$$\left.+u^{12}\left(\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2}-\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1}\right)\right]$$

што, очигледно, можемо написати у облику

(2)
$$v_1=\Delta\left(v_1\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3}\\[2mm] \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}\end{vmatrix}\quad v_2\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3}\\[2mm] \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}\end{vmatrix}+v_3\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}\\[2mm] \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2}\end{vmatrix}\right).$$



Да бисмо погодно изразили детерминанте у горњој једначини, уочимо ма коју детерминанту $|a_{ij}|$. Ако кофакторе елемената $a_{ij}$ обележимо са $A^{ji}$, онда је

$$a_{ij}A^{jk}=|a_{ij}|\,\delta_i^k.$$

Ако, даље, у овој једначини извршимо композицију са $\alpha^{li}$, где су $\alpha^{li}$ елементи реципрочне (инверзне) детерминанте детерминанти $|a_{ij}|$, добивамо

$$\delta_j^l A^{jk}=|a_{ij}|\,\delta_i^k\,\alpha^{li},\quad (\alpha^{li}a_{ij}=\delta_j^l),$$

односно

$$A^{lk}=|a_{ij}|\alpha^{lk}$$

што значи да се кофактори полазне детерминанте могу изразити помоћу њене вредности и елемената њене реципрочне детерминанте.

Имајући ово у виду као и чињеницу да су детерминанте у једначини (2) кофактори односних елемената у детерминанти $\Delta^{-1}=\left|\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right|$, можемо писати

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3}\\[2mm] \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}\end{vmatrix}=\Delta^{-1}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1},\quad -\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3}\\[2mm] \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}\end{vmatrix}=\Delta^{-1}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1},\quad \begin{vmatrix}\dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}\\[2mm] \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2}\end{vmatrix}=\Delta^{-1}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1},$$

што заменом у једначину (2) даје

$$\bar{v}_1=v_1\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1}+v_2\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1}+v_3\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}=v_j\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^1}.$$

На сличан начин бисмо добили

$$\bar{v}_2=v_j\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^2},$$

$$\bar{v}_3=v_j\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^3},$$

тако да можемо писати

$$\bar{v}_i=v_j\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i},$$

на основу чега закључујемо да су $v_1$, $v_2$, $v_3$, односно $\sqrt{g}\,u^{23}$, $\sqrt{g}\,u^{31}$, $\sqrt{g}\,u^{12}$, координате коваријантног вектора, што је и требало показати.

**Задатак 127.** (Одељак 18., задатак 15.). Ако је $v_{ij}$ антисиметрични коваријантни тензор, биће

$$\frac{v_{23}}{\sqrt{g}},\quad \frac{v_{31}}{\sqrt{g}},\quad \frac{v_{12}}{\sqrt{g}}$$

координате коваријантног вектора.

*Решење*: С обзиром да је $v_{ij}$ коваријантни тензор онда је његов трансформациони образац

$$\bar{v}_{ij} = v_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j},$$

при чему је $\bar{v}_{ij} = -\bar{v}_{ji}$, због $v_{rs} = -v_{sr}$.

Ако уведемо ознаке

$$\frac{v_{23}}{\sqrt{g}} = u^1,\quad \frac{v_{31}}{\sqrt{g}} = u^2,\quad \frac{v_{12}}{\sqrt{g}} = u^3,$$

онда је, на пример,

$$\bar{u}^1 = \frac{\bar{v}_{23}}{\sqrt{\bar{g}}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\, v_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^3},$$

или, с обзиром да је $\sqrt{g}$ релативна скаларна инваријанта тежине $+1$ (види претходни задатак),

$$\bar{u}^1 = \frac{\Delta^{-1}}{\sqrt{g}}\, v_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^3}.$$

Ако десну страну ове једначине напишемо у развијеном облику, добивамо

$$\bar{u}^1 = \frac{\Delta^{-1}}{\sqrt{g}}\left[v_{23}\left(\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} - \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3}\right) + v_{31}\left(\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} - \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}\right) + \right.$$
$$\left. + v_{12}\left(\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} - \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3}\right)\right].$$

Међутим, како је (слично као у претходном задатку)

$$\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} - \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} = \Delta\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1},$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} - \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} = \Delta\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} - \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} = \Delta\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3},$$

добивамо

$$\bar{u}^1 = u^1\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} + u^2\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} + u^3\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3},$$

односно

$$\bar{u}^1 = u^j\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^j}.$$

На сличан начин бисмо добили

$$\bar{u}^2 = u^j\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^j},$$

$$\bar{u}^3 = u^j\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^j},$$



тако да можемо писати

$$\bar{u}^i = u^j\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j},$$

на основу чега закључујемо да су $u^1$, $u^2$, $u^3$, односно $\frac{v_{23}}{\sqrt{g}}$, $\frac{v_{31}}{\sqrt{g}}$, $\frac{v_{12}}{\sqrt{g}}$, координате контраваријантног вектора, што је и требало показати.

## 19. Премештање индекса. Здружени тензори. Физичке координате тензора

**Задатак 128.** (Одељак 19., задатак 1.). Показати да су $\varepsilon_{ijk}$ и $\varepsilon^{ijk}$ здружени тензори.

*Решење*: Сви они тензори који се добивају из једног полазног тензора композицијом са основним метричким тензорима (коваријантним или контраваријантним) зову се здружени тензори. Да бисмо показали да су $\varepsilon_{ijk}$ и $\varepsilon^{ijk}$ здружени тензори, треба да покажемо да се, рецимо, тензор $\varepsilon^{ijk}$ може добити из тензора $\varepsilon_{ijk}$ композицијом са основним метричким тензором.

На основу дефиниције здружених тензора следи да је тензору $\varepsilon_{lmn}$ здружен и тензор

$$g^{il}\,g^{jm}\,g^{kn}\,\varepsilon_{lmn}.$$

Међутим, како је

$$\varepsilon_{lmn} = \sqrt{g}\,e_{lmn},$$

добивамо

$$g^{il}\,g^{jm}\,g^{kn}\,\varepsilon_{lmn} = \sqrt{g}\,g^{il}\,g^{jm}\,g^{kn}\,e_{lmn}.$$

Лако је проверити, због потпуне антисиметрије система $e_{lmn}$, да је тензор $g^{il}\,g^{jm}\,g^{kn}\,e_{lmn}$ потпуно антисиметричан, па можемо писати

$$g^{il}\,g^{jm}\,g^{kn}\,e_{lmn} = e^{ijk}\,g^{1l}\,g^{2m}\,g^{3n}\,e_{lmn}.$$

Према томе, добивамо

$$g^{il}\,g^{jm}\,g^{kn}\,\varepsilon_{lmn} = \sqrt{g}\,e^{ijk}\,g^{1l}\,g^{2m}\,g^{3n}\,e_{lmn}.$$

Како је, даље,

$$e_{lmn}\,g^{1l}\,g^{2m}\,g^{3n} = |g^{ij}| = \frac{1}{|g_{ij}|} = \frac{1}{g},$$

то, коначно, добивамо

$$g^{il}\,g^{jm}\,g^{kn}\,\varepsilon_{lmn} = \sqrt{g}\cdot\frac{1}{g}\,e^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,e^{ijk} = \varepsilon^{ijk},$$

на основу чега закључујемо да су $\varepsilon_{ijk}$ и $\varepsilon^{ijk}$ здружени тензори, што је и требало показити.

**Задатак 129.** (Одељак 19., задатак 2.). Показати извођењем рачуна да се, у односу на Декартов правоугли систем, координате здружених вектора не разликују једне од других.

*Решење*: У односу на правоугли Декартов систем координата, координате метричког тензора одређене су матрицом

$$\{\delta_{ij}\}=\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ — & — & — & — & — & — & — \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{Bmatrix}.$$

На основу дефиниције здружених вектора, вектор који је здружен векору $u^i$ је

$$u_i=\delta_{ij}\,u^j.$$

Овој тензорској једначини одговарају следећих $N$ скаларних једначина

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta_{11}\,u^1+\delta_{12}\,u^2+\cdot\cdot\cdot+\delta_{1N}\,u^N=u^1,\\ u_2 &= \delta_{21}\,u^1+\delta_{22}\,u^2+\cdot\cdot\cdot+\delta_{2N}\,u^N=u^2,\\ &— — — — — — — — — — —\\ u_N &= \delta_{N1}\,u^1+\delta_{N2}\,u^2+\cdot\cdot\cdot+\delta_{NN}\,u^N=u^N, \end{aligned}$$

на основу којих закључујемо да се контраваријантне и коваријантне координате вектора у Декартовом правоуглом систему координата не разликују. Другим речима, између здружених вектора у правоуглом Декартовом систему координата нема разлике, што је и требало показати.

**Задатак 130.** (Одељак 19., задатак 3.). Ако је $\theta_{(23)}$ угао између координатних вектора $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ у еуклидском простору од три димензије, показати да ће бити

$$\sin^2\theta_{(23)}=\frac{g\,g^{11}}{g_{22}\,g_{33}}.$$

*Решење*: Ако је координатни триједар одређен векторима $\vec{e}_i$, онда је

$$\vec{e}_2=e^i_{(2)}\,\vec{e}_i$$

па се види да су контраваријантне координате вектора $\vec{e}_2$

$$\{e^i_{(2)}\}=\{0\;\;1\;\;0\}.$$

Слично је

$$\{e^i_{(3)}\}=\{0\;\;0\;\;1\}.$$

Квадрат интензитета вектора $\vec{e}_2$ је

$$\left|\vec{e}_2\right|^2=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=g_{ij}\,e^i_{(2)}\,e^j_{(2)}=g_{22},$$

па је

$$\left|\vec{e}_2\right|=\sqrt{g_{22}}.$$



На исти начин је и

$$\left|\vec{e}_3\right|=\sqrt{g_{33}}.$$

Јединични вектори вектора $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ су

$$\lambda^i_{(2)}=\frac{e^i_{(2)}}{\left|\vec{e}_2\right|}=\frac{e^i_{(2)}}{\sqrt{g_{22}}}=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\,\delta^i_2.$$

и

$$\lambda^i_{(3)}=\frac{e^i_{(3)}}{\left|\vec{e}_3\right|}=\frac{e^i_{(3)}}{\sqrt{g_{33}}}=\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\,\delta^i_3.$$

На основу резултата у задатку 121., сада, можемо писати

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_{(23)} &= (g_{ij}\,g_{rs}-g_{ir}\,g_{js})\,\lambda^i_{(2)}\,\lambda^j_{(2)}\,\lambda^r_{(3)}\,\lambda^s_{(3)}=\\ &= \frac{1}{g_{22}\,g_{33}}\,(g_{ij}\,g_{rs}-g_{ir}\,g_{js})\,\delta^i_2\,\delta^j_2\,\delta^r_3\,\delta^s_3=\\ &= \frac{1}{g_{22}\,g_{33}}\,(g_{22}\,g_{33}-g_{23}\,g_{23})=\frac{1}{g_{22}\,g_{33}}\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23}\\ g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}. \end{aligned}$$

С обзиром да је горња детерминанта једнака кофактору елемента $g_{11}$ у детерминанти $g=|g_{ij}|$, то је

$$G^{11}=\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23}\\ g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}=g\,g^{11},$$

па добивамо

$$\sin^2\theta_{(23)}=\frac{g\,g^{11}}{g_{22}\,g_{33}}.$$

**Задатак 131.** (Одељак 19., задатак 4.). Одредити физичке координате вектора брзине у тродимензионом простору у односу на системе поларно цилиндарских координата и елиптичких координата.

*Решење*: Контраваријантне координате вектора брзине одређене су изводом координата по времену, тј.

$$v^i=\frac{dx^i}{dt}.$$

Физичке координате вектора брзине јесу његове пројекције на координатне линије, тј.

$$v_{(k)}=g_{ij}\,v^i\,\lambda^j_{(k)}.$$

С обзиром да су јединични вектори координатних линија одређени својим координатама (види задатак 113.)

$$\lambda^j_{(k)}=\frac{1}{\sqrt{g_{kk}}}\,\delta^j_k\qquad \text{(не сумирати)}$$

добивамо

$$v_{(1)} = g_{ij}\, v^i \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\, \delta^j_1 = g_{i1}\, v^i \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} = g_{11}\, v^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} = \sqrt{g_{11}}\, v^1,$$

$$v_{(2)} = g_{ij}\, v^i \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\, \delta^j_2 = g_{i2}\, v^i \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} = g_{22}\, v^2 \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} = \sqrt{g_{22}}\, v^2,$$

$$v_{(3)} = g_{ij}\, v^i \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\, \delta^j_3 = g_{i3}\, v^i \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} = g_{33}\, v^3 \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} = \sqrt{g_{33}}\, v^3.$$

а) Координате метричког тензора у поларно цилиндарским координатама су (види задатак 103.)

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

па су физичке координате вектора брзине у том систему координата

$$v_{(1)} = v^1 = \frac{dx^1}{dt} = \frac{dr}{dt} = \dot{r},$$

$$v_{(2)} = x^1\, v^2 = x^1 \frac{dx^2}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\, \dot{\varphi},$$

$$v_{(3)} = v^3 = \frac{dx^3}{dt} = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

б) С обзиром да је у елиптичким координатама $\mu$, $\nu$, $\lambda$, (види задатак 115.)

$$\sqrt{g_{11}} = c\left[\frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\nu^2 - \mu^2)}{(1 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{g_{22}} = c\left[\frac{(\lambda^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)}{(1 - \nu^2)(\nu^2 - k^2)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{g_{33}} = c\left[\frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - k^2)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

физичке координате вектора брзине ће бити

$$v_{(1)} = c\left[\frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\nu^2 - \mu^2)}{(1 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{d\mu}{dt},$$

$$v_{(2)} = c\left[\frac{(\lambda^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)}{(1 - \nu^2)(\nu^2 - k^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{d\nu}{dt},$$

$$v_{(3)} = c\left[\frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - k^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{d\lambda}{dt}.$$



**Задатак 132.** (Одељак 19., задатак 5.). Доказати тачност наредне једначине за *оивичену детерминанту*

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \end{vmatrix} = u_i\, v_j\, A^{ij},$$

где су $u_i$ и $v_i$ вектори а $A^{ij}$ кофактори детерминанте тензора $a_{ji}$.

***Решење***: Ако дату детерминанту развијемо по елементима четврте колоне, добивамо

$$D = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Ако, даље, преостале детерминанте трећег реда развијемо по елементима прве врсте, добивамо

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = v_1\, A^{11} + v_2\, A^{12} + v_3\, A^{13} = v_j\, A^{1j},$$

$$-\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = v_1\, A^{21} + v_2\, A^{22} + v_3\, A^{23} = v_j\, A^{2j},$$

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = v_1\, A^{31} + v_2\, A^{32} + v_3\, A^{33} = v_j\, A^{3j},$$

тако да је

$$D = u_1\, v_j\, A^{1j} + u_2\, v_j\, A^{2j} + u_3\, v_j\, A^{3j},$$

односно

$$D = u_i\, v_j\, A^{ij},$$

где су $A^{ij}$ кофактори елемената $a_{ji}$ у детерминанти трећег реда $|a_{ji}|$, што је и требало показати.

**Задатак 133.** (Одељак 19., задатак 6.). Ако су $u_i$, $v_j$, $a_{ij}$, апсолутни тензори, показати да ће оивичена детерминанта из претходног задатка представљати релативни скалар тежине 2.

***Решење***: Ако уведемо ознаку као у претходном задатку, тј.

$$D = u_i\, v_j\, A^{ij}, \tag{1}$$

где је $A^{ij}$ кофактор елемента $a_{ji}$ у детерминанти $|a_{ij}|$, онда треба да одредимо трансформациони образац скалара $D$. Вектори $u_i$ и $v_i$, с обзиром да су апсолутни тензори (првог реда), имају трансформационе обрасце

$$\bar{u}_i = u_l \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}, \qquad \bar{v}_j = v_m \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}. \tag{2}$$

Кофактор $A^{ij}$ трансформише се као релативни контраваријантни тензор тежине 2 (види задатак 93.), тј.

$$\bar{A}^{ij} = \Delta^2 A^{lm} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m}, \quad \left(\Delta = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right|\right). \tag{3}$$

Према томе, на основу (1), у новом систему координата $\bar{x}^i$, биће

$$\bar{D} = \bar{u}_i \bar{v}_j \bar{A}^{ij}, \tag{4}$$

или, ако искористимо (2) и (3),

$$\bar{D} = \Delta^2 u_l v_m A^{pq} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}.$$

Даље је

$$\bar{D} = \Delta^2 u_l v_m A^{pq} \delta^l_p \delta^m_q = \Delta^2 u_l v_m A^{lm},$$

односно

$$\bar{D} = \Delta^2 D,$$

на основу чега закључујемо да је дата оивичена детерминанта релативни скалар тежине 2, што је и требало показати.

**Задатак 134.** (Одељак 19., задатак 7.). У односу на неки Декартов систем правоуглих координата у равни уочене су тачке $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$. Све остале тачке равни одређујемо њиховим растојањима $x^1$ и $x^2$ од ових двеју тачака (биполарне координате у равни). Одредити линијски елемент равни у овим координатама, координате метричког тензора $g_{ij}$ и њему здруженог $g^{ij}$.

*Решење*: Везе између Декартових правоуглих координата $y^1$, $y^2$, и биполарних координата $x^1$, $x^2$, су (види слику)

$$(x^1)^2 = (y^1+1)^2 + (y^2)^2, \tag{1}$$

$$(x^2)^2 = (y^1-1)^2 + (y^2)^2. \tag{2}$$

Отуда су трансформациони обрасци

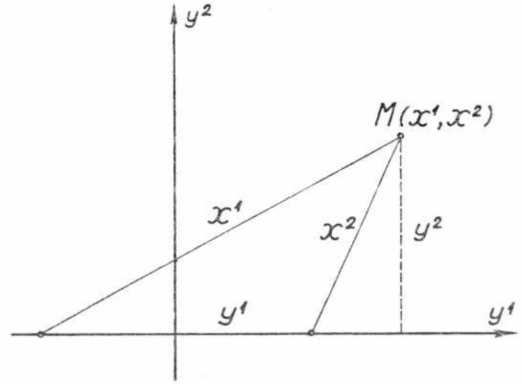
$$y^1 = \frac{(x^1)^2 - (x^2)^2}{4}, \tag{3}$$

$$y^2 = \pm \frac{1}{4} \sqrt{[(x^1+x^2)^2 - 4]\,[4 - (x^1 - x^2)^2]}. \tag{4}$$



Координате метричког тензора добивамо из обрасца

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}, \tag{5}$$




Диференцирањем једначине (2) парцијално по $x^1$, добивамо

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^1} = -\frac{y^1 - 1}{y^2} \frac{\partial y^1}{\partial x^1},$$

па је, на основу (5),

$$g_{11} = \left[1 + \frac{(y^1-1)^2}{(y^2)^2}\right] \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\right)^2 = \frac{(x^1 x^2)^2}{4\,(y^2)^2},$$

односно

$$g_{11} = \frac{4\,(x^1 x^2)^2}{[(x^1+x^2)^2 - 4]\,[4 - (x^1 - x^2)^2]}.$$

Слично из (1) следи

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -\frac{y^1 + 1}{y^2} \frac{\partial y^1}{\partial x^2},$$

па је, на основу (5),

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \frac{\partial y^1}{\partial x^2} + \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -\frac{[(x)^2 + (x^2)^2 - 10]\,x^1 x^2}{8\,(y^2)^2},$$

односно

$$g_{12} = g_{21} = -\frac{2\,x^1 x^2\,[(x^1)^2 + (x^2)^2 - 10]}{[(x^1+x^2)^2 - 4]\,[4 - (x^1 - x^2)^2]}.$$

Даље је

$$g_{22} = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{y^1+1}{y^2}\right)^2\right] \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^2}\right)^2,$$

односно

$$g_{22} = \frac{(x^1 x^2)^2}{4\,(y^2)^2} = \frac{4\,(x^1 x^2)^2}{[(x^1+x^2)^2 - 4]\,[4 - (x^1 - x^2)^2]},$$

па су координате метричког тензора $g_{ij}$, приказане у облику матрице,

$$\{g_{ij}\} = \frac{2\, x^1 x^2}{[(x^1 + x^2)^2 - 4]\,[4 - (x^1 x^2)^2]} \begin{Bmatrix} 2\, x^1 x^2 & (x^1)^2 + (x^2)^2 - 10 \\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - 10 & 2\, x^1 x^2 \end{Bmatrix}.$$

Квадрат елемента лука (линијски елемент),

$$ds^2 = g_{ji}\, dx^i\, dx^j = g_{11}\,(dx^1)^2 + 2\, g_{12}\, dx^1\, dx^2 + g_{22}\,(dx^2)^2,$$

у овом случају износи

$$ds^2 = \frac{4\, x^1 x^2}{[(x^1 + x^2) - 4]\,[4 - (x^1 - x^2)^2]} \{x^1 x^2 (dx^1)^2 +$$
$$+ [(x^1)^2 + (x^2)^2 - 10]\, dx^1\, dx^2 + x^1 x^2 (dx^2)^2\}.$$

Координате контраваријантног основног тензора $g^{ij}$ (здруженог тензору $g_{ij}$) добивамо по обрасцу

$$g^{ij} = \frac{G^{ij}}{g}$$

где је $G^{ij}$ кофактор елемента $g_{ij}$ у детерминанти $g = |g_{ij}|$. Према томе, с обзиром да је

$$g = |g_{ij}| = \frac{4\,(x^1 x^2)^2}{[(x^1 + x^2)^2 - 4]^2\,[4 - (x^1 - x^2)^2]^2} \{20\,[(x^1)^2 +$$
$$+ (x^2)^2] - [(x^1)^2 - (x^2)^2]^2 - 100\},$$

биће

$$\{g^{ij}\} = \frac{[(x^1 + x^2)^2 - 4]\,[4 - (x^1 - x^2)^2]}{2\, x^1 x^2 \{20\,[(x^1)^2 + (x^2)^2] - [(x^1)^2 - (x^2)^2]^2 - 100\}} \times$$
$$\times \begin{Bmatrix} 2\, x^1 x^2 & 10 - (x^1)^2 - (x^2)^2 \\ 10 - (x^1)^2 - (x^2)^2 & 2\, x^1 x^2 \end{Bmatrix}.$$

**Задатак 135.** (Одељак 19., задатак 8.) Нека $\Phi = a_{ij}\, dx^i\, dx^j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ буде позитивна дефинитна метричка форма у којој је $a_{11} = a_{22} = 0$,, али $a_{12} \neq 0$. Показати да се она може написати у облику

$$\Phi = \varepsilon\, \psi_1^2 - \varepsilon \psi_2^2 + \Phi_1$$

где је $\Phi_1$ хомогена квадратна форма од $dx^3$ и $dx^4$, $\varepsilon = \pm 1$ тако да буде $\varepsilon\, a_{12} > 0$ и где је

$$\psi_1 = (2\,\varepsilon\, a_{12})^{-\frac{1}{2}} (a_{12}\,(dx^1 + dx^2) + (a_{13} + a_{23})\, dx^3 + (a_{14} + a_{24})\, dx^4],$$

$$\psi_2 = (2\,\varepsilon\, a_{12})^{-\frac{1}{2}} [a_{12}\,(-dx^1 + dx^2) + (a_{13} - a_{23})\, dx^3 + (a_{14} - a_{24})\, dx^4].$$

*Решење*: Дата квадратна форма, с обзиром да је $a_{11} = a_{22} = 0$, у развијеном облику изгледа

$$\Phi = 2\, a_{12}\, dx^1\, dx^2 + 2\, a_{13}\, dx^1\, dx^3 + 2\, a_{14}\, dx^1\, dx^4 + 2\, a_{23}\, dx^2\, dx^3 +$$
$$+ 2\, a_{24}\, dx^2\, dx^4 + a_{33}\,(dx^3)^2 + 2\, a_{34}\, dx^3\, dx^4 + a_{44}\,(dx^4)^2. \tag{1}$$



Ако овој форми додамо и одузмемо форму

$$2\, \frac{a_{13}\, a_{23}}{a_{12}}\, (dx^3)^2 + 2\, \frac{a_{13}\, a_{24} + a_{23}\, a_{14}}{a_{12}}\, dx^3\, dx^4 + 2\, \frac{a_{14}\, a_{24}}{a_{12}}\, (dx^4)^2, \tag{2}$$

онда она постаје

$$\Phi = 2\, a_{12}\, dx^1\, dx^2 + 2\, a_{13}\, dx^1\, dx^3 + 2\, a_{14}\, dx^1\, dx^4 + 2\, a_{23}\, dx^2\, dx^3 +$$
$$+ 2\, a_{24}\, dx^2\, dx^4 + 2\, \frac{a_{13}\, a_{23}}{a_{12}}\, (dx^3)^2 + 2\, \frac{a_{13}\, a_{24} + a_{23}\, a_{14}}{a_{12}}\, dx^3\, dx^4 + \tag{3}$$
$$+ 2\, \frac{a_{14}\, a_{24}}{a_{12}}\, (dx^4)^2 + \Phi_1,$$

где је $\Phi_1$ хомогена квадратна форма по $dx^3$ и $dx^4$, тј.

$$\Phi_1 = \frac{a_{12}\, a_{33} - 2\, a_{13}\, a_{23}}{a_{12}}\, (dx^3)^2 + 2\, \frac{a_{12}\, a_{34} - a_{13}\, a_{24} - a_{23}\, a_{14}}{a_{12}}\, dx^3\, dx^4 +$$
$$+ \frac{a_{12}\, a_{44} - 2\, a_{14}\, a_{24}}{a_{12}}\, (dx^4)^2. \tag{4}$$

Члан $2\, a_{12}\, dx^1\, dx^2$ у форми (3) можемо написати у облику

$$2\, a_{12}\, dx^1\, dx^2 = \frac{a_{12}}{2}\, [(dx^1 + dx^2)^2 - (-dx^1 + dx^2)^2],$$

или, ако десну страну помножимо и поделимо са $a_{12}$,

$$2\, a_{12}\, dx^1\, dx^2 = (2\, a_{12})^{-1}\, [(a_{12})^2\, (dx^1 + dx^2)^2 - (a_{12})^2\, (-dx^1 + dx^2)^2]. \tag{5}$$

Исто тако је

$$2\, a_{13}\, dx^1\, dx^3 = (2\, a_{13})^{-1}\, [(a_{13})^2\, (dx^1 + dx^3)^2 - (a_{13})^2\, (-dx^1 + dx^3)^2],$$

или, ако десну страну помножимо и поделимо са $a_{12}$,

$$2\, a_{13}\, dx^1\, dx^3 = (2\, a_{12})^{-1}\, [a_{12}\, a_{13}\, (dx^1 + dx^3)^2 - a_{12}\, a_{13}\, (-dx^1 + dx^3)^2]. \tag{6}$$

На сличан начин добивамо

$$2\, a_{14}\, dx^1\, dx^4 = (2\, a_{12})^{-1} [a_{12}\, a_{14}\, (dx^1 + dx^4)^2 - a_{12}\, a_{14}\, (-dx^1 + dx^4)^2], \tag{7}$$

$$2\, a_{23}\, dx^2\, dx^3 = (2\, a_{12})^{-1}\, [a_{12}\, a_{23}\, (dx^2 + dx^3)^2 - a_{12}\, a_{23}\, (-dx^2 + dx^3)^2], \tag{8}$$

$$2\, a_{24}\, dx^2\, dx^4 = (2\, a_{12})^{-1}\, [a_{12}\, a_{24}\, (dx^2 + dx^4)^2 - a_{12}\, a_{24}\, (-dx^2 + dx^4)^2]. \tag{9}$$

Ако изразе (5), (6), (7), (8) и (9) заменимо у (3), после погодних идентичких трансформација, добивамо

$$\Phi = (2\, a_{12})^{-1}\, [a_{12}\, (dx^1 + dx^2) + (a_{13} + a_{23})\, dx^3 + (a_{14} + a_{24})\, dx^4]^2 -$$
$$- (2\, a_{12})^{-1}\, [a_{12}\, (-dx^1 + dx^2) + (a_{13} - a_{23})\, dx^3 + (a_{14} - a_{24})\, dx^4] + \Phi_1. \tag{10}$$

Уведимо, сада, ознаке

$$\psi_1^2 = \varepsilon^{-1}(2\,a_{12})^{-1}[a_{12}(dx^1+dx^2)+(a_{13}+a_{23})\,dx^3+(a_{14}+a_{24})\,dx^4]^2,$$

$$\psi_2^2 = \varepsilon^{-1}(2\,a_{12})^{-1}[a_{12}(-dx^1+dx^2)+(a_{13}-a_{23})\,dx^3+(a_{14}-a_{24})\,dx^4]^2,$$

где је $\varepsilon = \pm 1$, тако да је $\varepsilon a_{12} > 0$, односно

$$\varepsilon\psi_1^2 = (2\,a_{12})^{-1}[a_{12}(dx^1+dx^2)+(a_{13}+a_{23})\,dx^3+(a_{14}+a_{24})\,dx^4]^2,$$

$$\varepsilon\psi_2^2 = (2\,a_{12})^{-1}[a_{12}(-dx^1+dx^2)+(a_{13}-a_{23})\,dx^3+(a_{14}-a_{24})\,dx^4]^2.$$

Тада квадратну форму (10) можемо написати у облику

$$\Phi = \varepsilon\psi_1^2 - \varepsilon\psi_2^2 + \Phi_1,$$

где је

$$\psi_1 = (2\,\varepsilon\,a_{12})^{-\frac{1}{2}}[a_{12}(dx^1+dx^2)+(a_{13}+a_{23})\,dx^3+(a_{14}+a_{24})\,dx^4],$$

$$\psi_2 = (2\,\varepsilon\,a_{12})^{-\frac{1}{2}}[a_{12}(-dx^1+dx^2)+(a_{13}-a_{23})\,dx^3+(a_{14}-a_{24})dx^4],$$

и где је $\Phi_1$ хомогена квадратна форма по $dx^3$ и $dx^4$, дата са (4), што је и требало показати.

**Задатак 136.** (Одељак 19., задатак 9.). Ако је $\lambda^i$ јединични вектор, показати да су косинуси углова, које његов правац гради са координатним линијама неког криволинијског координатног система у тродимензионом простору, дати обрасцима

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \frac{\lambda_2}{\sqrt{g_{22}}}, \quad \frac{\lambda_3}{\sqrt{g_{33}}}.$$

***Решење***: С обзиром да је $\lambda^i$ јединични вектор, тј. $|\lambda^i| = 1$, то ће косинус угла који он гради са координатном линијом $x^L$ бити једнак скаларном производу тога вектора и јединичног вектора те координатне линије, тј.

$$\cos\alpha_{(L)} = g_{ij}\,\lambda^i\,\lambda^j_{(L)}.$$

Како је међутим, јединични вектор координатне линије одређен координатама (види задатак 113.)

$$\lambda^j_{(L)} = \frac{1}{\sqrt{g_{LL}}}\,\delta^j_L,$$

биће

$$\cos\alpha_{(L)} = g_{ij}\,\lambda^i\frac{\delta^j_L}{\sqrt{g_{LL}}} = \lambda_j\frac{\delta^j_L}{\sqrt{g_{LL}}} = \frac{\lambda_L}{\sqrt{g_{LL}}}$$

односно косинуси углова између датог јединичног вектора и координатних линија $x^1$, $x^2$, $x^3$, су респективно

$$\cos\alpha_{(1)} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \cos\alpha_{(2)} = \frac{\lambda_2}{\sqrt{g_{22}}}, \quad \cos\alpha_{(3)} = \frac{\lambda_3}{\sqrt{g_{33}}},$$

што је и требало показати.



**Задатак 137.** (Одељак 19., задатак 10.). У еуклидском тродимензионом простору у односу на неки косоугли праволинијски систем координата изразити физичке координате $u_{(i)}$ вектора $\vec{u}$ помоћу његових контраваријантних координата $u^i$ и упоредити једне са другима и са коваријантним координатама $u_i$.

***Решење.*** Нека су косоугле координате $x^i$ дате помоћу Декартових правоуглих $y^i$ једначинама

$$x^i = a^i_j\,y^j,$$

односно

$$y^i = \alpha^i_j x^j, \qquad (a^i_k\,\alpha^k_j = \delta^i_j).$$

Тада је

$$g_{ij} = \sum_k \alpha^k_i\,\alpha^k_j,$$

па су јединични вектори $\lambda^i_{(L)}$ косоуглог координатног система (види задатак 113.)

$$\lambda^i_{(L)} = \frac{1}{\sqrt{\sum_k \alpha^k_L\,\alpha^k_L}}\,\delta^i_L.$$

Физичке координате вектора $\vec{u}$ јесу пројекције тога вектора на осе косоуглог система, па су, према томе, једнаке скаларном производу вектора $\vec{u}$ и јединичних вектора одговарајућих оса, тј.

$$u_{(k)} = g_{ij}\,u^i\,\lambda^j_{(k)} = g_{ij}\,u^i\frac{\delta^j_k}{\sqrt{\sum_m(\alpha^m_k)^2}} = \frac{g_{ik}\,u^i}{\sqrt{\sum_m(\alpha^m_k)^2}} = \frac{u_k}{\sqrt{\sum_m(\alpha^m_k)^2}}.$$

Из горње релације видимо каква је веза између физичких и контраваријантних, односно физичких и коваријантних координата вектора $\vec{u}$. Очигледно је да се на основу горње релације могу изразити контраваријантне, односно коваријантне координате вектора $\vec{u}$ преко његових физичких или коваријантних, односно физичких или контраваријантних координата.

# III. МЕТРИЧКЕ РЕЛАЦИЈЕ. ТЕНЗОРСКА АНАЛИЗА

## 21. Кристофелови симболи

**Задатак 138.** (Одељак 21., задатак 1.). Израчунати Кристофелове симболе у цилиндарским поларним и сферним поларним координатама.

***Решење***: С обзиром на велику примену тензорског рачуна и диференцијалне геометрије, често је потребно, при решавању конкретних проблема, израчунавати координате Кристофелових симбола прве и друге врсте у неком изабраном систему координата.

У случају ортогоналних координатних система Кристофелови симболи поседују извесне особине које нам дају везу међу њиховим координатама, тако да се број независних координата умањује. У овом задатку систематски ћемо изложити те особине, што ће нам омогућити да лако уочимо независне координате. На крају ћемо то применити на случај цилиндарских поларних и сферних поларних координата, што се и тражи у овом задатку.

1. *Кристофелов симбол I врсте*. У односу на неки ортогонални координатни систем у еуклидском и риманском простору, кад постоји у читавом уоченом риманском простору или бар локално, координате метричког тензора су

$$(1.1) \qquad \{g_{ij}\}=\left\{\begin{array}{cccccc} g_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{NN} \end{array}\right\}.$$

Кристофелов симбол прве врсте дефинисан је изразом

$$(1.2) \qquad [ij,\, k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

где индекси $i, j, k$, узимају вредности $1, 2, \ldots, N$, при чему је очигледно симетричан у односу на прва два индекса, тј.

$$(1.3) \qquad [ij,\, k]=[ji,\, k].$$



Ако у односу на неки ортогонални координатни систем рачунамо координате Кристофеловог симбола прве врсте, очигледно је, с обзиром на (1.1) и (1.2), да ће бити

$$(1.4) \qquad [IJ,\, K]=0,$$

где су $I$, $J$, $K$, ма која три међусобно различита броја из скупа бројева $1, 2, \ldots, N$. Према томе, од нуле могу бити различите само оне координате код којих су најмање два (ма која) индекса једнака.

Посматрајмо, прво, случај кад је $I=J\neq K$. Из (1.2) следи

$$(1.5) \qquad [II,\, K]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{II}}{\partial x^K},$$

јер су прва два члана једнака нули.

Ако је, пак, $I=K\neq J$, биће

$$[IJ,\, I]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{II}}{\partial x^J}$$

или, ако уместо $J$ ставимо $K$,

$$(1.6) \qquad [IK,\, I]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{II}}{\partial x^K}.$$

Ако ово упоредим оса (1.5) видимо да се те две координате разликују само у знаку, тј.

$$(1.7) \qquad [II,\, K]=-[IK,\, I],$$

што значи да постоји особина антисиметрије у односу на друга два индекса. Овде је важно напоменути да особина антисиметрије постоји само у случају кад су два индекса међусобно једнака и различита од трећег, при чему се тај различити не налази на првом месту. Ако се различити индекс налази на првом месту ми га можемо, с обзиром на особину симетрије у односу на прва два индекса, довести на друго место, тако да важи горње тврђење.

На крају, посматрајмо случај кад је $I=J=K$. Тада ће бити

$$(1.8) \qquad [II,\, I]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{II}}{\partial x^I}.$$

На основу претходног можемо закључити да укупан број независних и од нуле различитих координата Кристофеловог симбола прве врсте износи $N^2$. Те координате су

$$(1.9) \qquad [ii,\, j], \qquad (i, j=1, 2, \ldots, N).$$

Специјално за тродимензиони римански простор, у односу на неки ортогонални координатни систем, имамо девет наредних независних координата Кристофеловог симбола прве врсте:

$$(1.10) \qquad \begin{array}{lll} [11,\, 1], & [22,\, 1], & [33,\, 1], \\ [11,\, 2], & [22,\, 2], & [33,\, 2], \\ [11,\, 3], & [22,\, 3], & [33,\, 3]. \end{array}$$

Све остале се изводе из ових на основу наведених особина симетрије у односу на прва два индекса и антисиметрије у односу на друга два индекса.

Ако је координатни систем такав да координате метричког тензора задовољавају услове

$$
\begin{aligned}
&g_{11} = g_{11}(x^2, x^3, \ldots, x^N),\\
&g_{22} = g_{22}(x^1, x^3, \ldots, x^N),\\
&\text{— — — — — — — —},\\
&g_{NN} = g_{NN}(x^1, x^2, \ldots, x^{N-1}),
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

што је, на пример, случај у цилиндарским и сферним поларним координатама у еуклидском простору од три димензије, па и у криволинијским ортогоналним координатама на површини сфере (која није еуклидски простор), биће једнаке нули и координате Кристофеловог симбола прве врсте за сва три међусобно једнака индекса, тј.

$$[II, I] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{II}}{\partial x^I} = 0. \tag{1.12}$$

Према томе, у таквим координатним системима биће различите од нуле само оне координате Кристофеловог симбола прве врсте које имају два међусобно једнака (и од трећег различита) индекса, тако да можемо писати

$$[ii, j] = -[ij, i], \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, N), \tag{1.13}$$

јер за $i = j$ добивамо

$$[ii, i] = -[ii, i] = 0.$$

И овде треба нагласити да је особина антисиметрије задовољена за друга два индекса само ако су они различити јер иначе не важи. Ако су друга два индекса једнака, онда можемо, с обзиром на особину симетрије у односу на прва два индекса, на друго место довести онај индекс који је различит од трећег, тако да онда важи особина антисиметрије у односу на друга два индекса.

Имајући горњу напомену у виду, можемо тврдити да су Кристофелови симболи прве врсте, рачунати у односу на координатне системе чији метрички тензор задовољава услове (1.11), антисиметрични у односу на друга два индекса, тј. можемо писати

$$[ij, k] = \begin{cases} -[ik, j] & \text{за} \quad k \neq j \\ -[jk, i] & \text{за} \quad k = j. \end{cases} \tag{1.14}$$

На основу овога можемо закључити да у овом случају укупан број независних и од нуле различитих координата Кристофеловог симбола прве врсте износи $N(N-1)$.

2. *Кристофелов симбол II врсте.* Овај симбол је дефинисан следећим изразом

$$\left\{ {k \atop i\,j} \right\} = g^{kl}[ij, l], \tag{2.1}$$



при чему је очигледно $\left\{ {k \atop i\,j} \right\} = \left\{ {k \atop j\,i} \right\}$ због симетрије Кристофелових симбола прве врсте у односу на прва два индекса.

У ортогоналним координатним системима биће

$$\left\{ {K \atop I\,J} \right\} = g^{KK}[IJ, K]. \tag{2.2}$$

Међутим, како је $[IJ, K] = 0$ за свако $I$, $J$, $K$, који су међусобно различити, то је и

$$\left\{ {K \atop I\,J} \right\} = 0. \tag{2.3}$$

Ако је $I = J \neq K$, имамо $[II, K] = -[IK, I]$. Помножимо ли ово са $g^{II} g^{KK}$ добивамо

$$g^{II} g^{KK}[II, K] = -g^{II} g^{KK}[IK, I],$$

па је, на основу (2.2),

$$g^{II}\left\{ {K \atop I\,I} \right\} = -g^{KK}\left\{ {I \atop I\,K} \right\},$$

односно

$$\left\{ {I \atop I\,K} \right\} = -\frac{g^{II}}{g^{KK}}\left\{ {K \atop I\,I} \right\}, \qquad \left( {I, K = 1, 2, \ldots, N \atop I \neq K} \right). \tag{2.4}$$

Ако су сва три индекса једнака, тј. $I = J = K$, биће

$$\left\{ {I \atop I\,I} \right\} = g^{II}[II, I]. \tag{2.5}$$

Према томе и у овом случају је потребно израчунати само $N^2$ независних координата Кристофеловог симбола друге врсте, тј.

$$\left\{ {k \atop i\,i} \right\}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.6}$$

док се остале лако добивају на основу релације (2.4).

Ако координате метричког тензора задовољавају услове (1.11), биће

$$\left\{ {I \atop I\,I} \right\} = 0. \tag{2.7}$$

Према томе, особина (2.4) и овде је испуњена, тј.

$$\left\{ {I \atop I\,I} \right\} = -\frac{g^{II}}{g^{II}}\left\{ {I \atop I\,I} \right\} = 0, \tag{2.8}$$

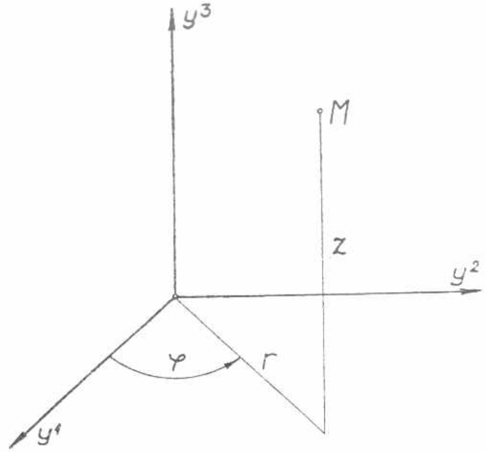
па у таквим координатним системима важи релација

$$\left\{ {i \atop i\,k} \right\} = -\frac{g^{ii}}{g^{kk}}\left\{ {k \atop i\,i} \right\}, \qquad \text{(не сумирати)} \tag{2.9}$$

где се подразумева симетрија у односу на доњи пар индекса.

И у овом случају број независних и од нуле различитих координата Кристофеловог симбола друге врсте износи $N(N-1)$.

3. *Цилиндарске поларне координате.* У овом систему координата ($x^1=r$, $x^2=\varphi$, $x^3=z$) метрички тензор има облик




$$(3.1)\qquad \{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&\dfrac{1}{r^2}&0\\0&0&1\end{Bmatrix}.$$

С обзиром да су овде испуњени услови (1.11), то има шест независних координата Кристофеловог симбола прве врсте. Те координате су

$$[11,2]\quad [22,1],\quad [33,1],\quad [11,3]\quad [22,3],\quad [33,2].$$

Међутим, како су у овом случају $g_{11}$ и $g_{33}$ константе (јединице) и како је $g_{22}$ функција само од $x^1$, биће

$$[11,2]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=0,\quad [22,3]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}=0,\quad [33,2]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=0,$$

$$[11,3]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}=0,\quad [33,1]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}=0,$$

па остаје само једна независна координата која је различита од нуле. Та кордината је

$$(3.2)\qquad [22,1]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-r.$$

На основу раније наведених особина, из ове лако добивамо остале две од нуле различите координате, тако да укупан број од нуле различитих координата износи три. Те координате су

$$(3.3)\qquad [12,2]=r,\quad [21,2]=r,\quad [22,1]=-r.$$



На сличан начин добивамо и координате Кристофеловог симбола друге врсте. Једина независна координата која је различита од нуле је

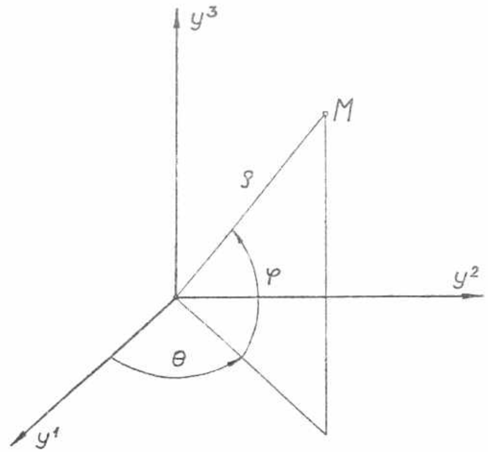
$$(3.4)\qquad \begin{Bmatrix}1\\2\;2\end{Bmatrix}=g^{11}[22,1]=[22,1]=-r,$$

док остале две добивамо на основу релације (2.4), тако да су

$$(3.5)\qquad \begin{Bmatrix}1\\2\;2\end{Bmatrix}=-r,\quad \begin{Bmatrix}2\\1\;2\end{Bmatrix}=\frac{1}{r},\quad \begin{Bmatrix}2\\2\;1\end{Bmatrix}=\frac{1}{r},$$

једине три координате Кристофеловог симбола друге врсте које су различите од нуле.

4. *Сферне поларне координате.* У овом систему координата ($x^1=\rho$, $x^2=\varphi$, $x^3=\theta$) метрички тензор је




$$(4.1)\qquad \{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&\rho^2\cos^2\varphi\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&\dfrac{1}{\rho^2}&0\\0&0&\dfrac{1}{\rho^2\cos^2\varphi}\end{Bmatrix}.$$

С обсиром да су и овде испуњени услови (1.11) и да је $g_{11}$ константа (јединица) као и да $g_{22}$ не зависи од $x^3$, биће

$$[11,1]=[22,2]=[33,3]=0,\quad [22,3]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}=0,$$

$$[11,2]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=0,\quad [11,3]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}=0,$$

тако да имамо само три независне координате Кристофеловог симбола прве врсте и то

$$[22,1]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-\rho,\quad [33,1]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}=-\rho\cos^2\varphi,$$

$$[33,2]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=\rho^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

па су, према томе, од нуле различите следећих девет координата

$$(4.2)\qquad \begin{aligned}&[12,2]=\rho,\quad [13,3]=\rho\cos^2\varphi,\quad [23,3]=-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi,\\ &[21,2]=\rho,\quad [31,3]=\rho\cos^2\varphi,\quad [32,3]=-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi,\\ &[22,1]=-\rho,\quad [33,1]=-\rho\cos^2\varphi,\quad [33,2]=\rho^2\sin\varphi\cos\varphi.\end{aligned}$$

Једине три независне координате Кристофеловог симбола друге врсте су

$$\left\{ {1 \atop 2\,2} \right\} = g^{11}[22,1] = -\rho,$$

$$\left\{ {1 \atop 3\,3} \right\} = g^{11}[33,1] = -\rho\cos^2\varphi,$$

$$\left\{ {2 \atop 3\,3} \right\} = g^{22}[33,2] = \frac{1}{\rho^2}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi,$$

па су, према томе, од нуле различите следећих девет координата Кристофеловог симбола друге врсте

$$\begin{aligned} &\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\} = \frac{1}{\rho}, \quad \left\{ {3 \atop 1\,3} \right\} = \frac{1}{\rho}, \quad \left\{ {3 \atop 2\,3} \right\} = -\operatorname{tg}\varphi, \\ &\left\{ {2 \atop 2\,1} \right\} = \frac{1}{\rho}, \quad \left\{ {3 \atop 3\,1} \right\} = \frac{1}{\rho}, \quad \left\{ {3 \atop 3\,2} \right\} = -\operatorname{tg}\varphi, \qquad (4.3) \\ &\left\{ {1 \atop 2\,2} \right\} = -\rho, \quad \left\{ {1 \atop 3\,3} \right\} = -\rho\cos^2\varphi, \quad \left\{ {2 \atop 3\,3} \right\} = \sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned}$$

**Задатак 139.** (Одељак 21., задатак 2.). Показати да у сферним поларним координатама са метричком формом

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1\,dx^2)^2 + (x^1\cos x^2\,dx^3)^2,$$

важи

$$\log\sqrt{g} = 2\log x^1 + \log\cos x^2$$

и да је

$$\left\{ {i \atop 1\,i} \right\} = \frac{2}{x^1}, \quad \left\{ {i \atop 2\,i} \right\} = -\operatorname{tg} x^2, \quad \left\{ {i \atop 3\,i} \right\} = 0.$$

***Решење***: Из израза за метричку форму,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1\cos x^2)^2(dx^3)^2,$$

видимо да су координате метричког тензора

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1\cos x^2)^2 \end{Bmatrix}.$$

Одавде следи

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1\cos x^2)^2 \end{vmatrix} = (x^1)^4\cos^2 x^2,$$

$$\log\sqrt{g} = \log[(x^1)^2\cos x^2] = 2\log x^1 + \log\cos x^2.$$

Даље, на основу обрасца (види одељак 21., једначину 10.)

$$\left\{ {i \atop k\,i} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^k}(\log\sqrt{g}),$$



добивамо

$$\left\{ {i \atop 1\,i} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^1}(\log\sqrt{g}) = \frac{\partial}{\partial x^1}(2\log x^1 + \log\cos x^2) = \frac{2}{x^1},$$

$$\left\{ {i \atop 2\,i} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^2}(\log\sqrt{g}) = \frac{\partial}{\partial x^2}(2\log x^1 + \log\cos x^2) = -\operatorname{tg} x^2,$$

$$\left\{ {i \atop 3\,i} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^3}(\log\sqrt{g}) = \frac{\partial}{\partial x^3}(2\log x^1 + \log\cos x^2) = 0,$$

што је и требало показати.

**Задатак 140.** (Одељак 21., задатак 3.). Ако су $\theta$ и $\varphi$ поларно растојање и географска ширина на некој сфери па се узме

$$x^1 = \theta\cos\varphi, \qquad x^2 = \theta\sin\varphi,$$

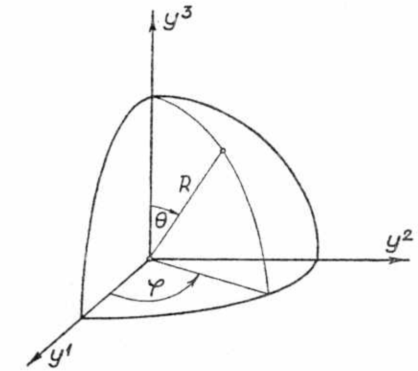
израчунати све Кристофелове симболе за тај координатни систем $x^1$ и $x^2$ и показати да су они једнаки нули за $\theta = 0$.

***Решење***: Везе између Декартових правоуглих координата $y^i$ и координата на површи сфере $\theta$ и $\varphi$ су облика (види слику)

$$y^1 = R\sin\theta\cos\varphi,$$

$$y^2 = R\sin\theta\sin\varphi,$$

$$y^3 = R\cos\theta.$$




На основу ових релација, парцијалним диференцирањем добивамо

$$\frac{\partial y^1}{\partial\theta} = R\cos\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial y^2}{\partial\theta} = R\cos\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y^3}{\partial\theta} = -R\sin\theta,$$

$$\frac{\partial y^1}{\partial\varphi} = -R\sin\theta\sin\varphi, \qquad \frac{\partial y^2}{\partial\varphi} = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad \frac{\partial y^3}{\partial\varphi} = 0,$$

па, на основу обрасца,

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}, \qquad (\{x^i\} = \{\theta, \varphi\}),$$

за координате метричког тензора на површи сфере добивамо

$$g_{11}=\left(\frac{\partial y^1}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y^2}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{\partial y^3}{\partial\theta}\right)^2=R^2,$$

$$g_{12}=g_{21}=\frac{\partial y^1}{\partial\theta}\frac{\partial y^1}{\partial\varphi}+\frac{\partial y^2}{\partial\theta}\frac{\theta y^2}{\partial\varphi}+\frac{\partial y^3}{\partial\theta}\frac{\partial y^3}{\partial\varphi}=0,$$

$$g_{22}=\left(\frac{\partial y^1}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y^2}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y^3}{\partial\varphi}\right)^2=R^2\sin^2\theta.$$

Приказане у облику матрице, координате метричког тензора су

$$(1)\qquad \{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{Bmatrix}.$$

На основу координата метричког тензора можемо лако израчунати да су једине од нуле различите координате Кристофеловог симбола прве врсте (види задатак 138.)

$$(2)\qquad \begin{aligned}[][21,2]&=R^2\sin\theta\cos\theta,\\ [12,2]&=R^2\sin\theta\cos\theta,\\ [22,1]&=-R^2\sin\theta\cos\theta,\end{aligned}$$

и Кристофеловог симбола друге врсте

$$(3)\qquad \begin{aligned}\begin{Bmatrix}2\\2\ 1\end{Bmatrix}&=\operatorname{cotg}\theta,\\ \begin{Bmatrix}2\\1\ 2\end{Bmatrix}&=\operatorname{cotg}\theta,\\ \begin{Bmatrix}1\\2\ 2\end{Bmatrix}&=-\sin\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

Ако, сада, извршимо трансформацију променљивих $\theta$ и $\varphi$ у променљиве $x^1$ и $x^2$, помоћу образаца

$$(4)\qquad \begin{aligned}x^1&=\theta\cos\varphi,\\ x^2&=\theta\sin\varphi,\end{aligned}$$

онда су координате Кристофеловог симбола прве врсте у новом систему координата $x^1$ и $x^2$ (види одељак 21., једначину 15.)

$$(5)\qquad \overline{[ij,\,k]}=[\alpha\beta,\,\gamma]\frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\bar{x}^k}+g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\bar{x}^i\,\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^\beta}{\partial\bar{x}^k},\quad (i,j,k,\alpha,\beta,\gamma=1,\,2),$$

при чему је $\{x^\alpha\}=\{\theta,\,\varphi\}$ и $\{\bar{x}^i\}=\{x^1,\,x^2\}$.



Из трансформационих образаца (4) парцијалним диференцирањем добивамо

$$(6)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial x^1}{\partial\theta}&=\cos\varphi, & \frac{\partial x^1}{\partial\varphi}&=-\theta\sin\varphi,\\ \frac{\partial x^2}{\partial\theta}&=\sin\varphi, & \frac{\partial x^2}{\partial\varphi}&=\theta\cos\varphi,\end{aligned}$$

и исто тако

$$(7)\qquad \begin{aligned}&\frac{\partial\theta}{\partial x^1}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x^2}=\sin\varphi;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}=-\frac{\sin\varphi}{\theta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}=\frac{\cos\varphi}{\theta};\\ &\frac{\partial^2\theta}{(\partial x^1)^2}=\frac{\sin^2\varphi}{\theta},\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial x^1\,\partial x^2}=-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\theta},\quad \frac{\partial^2\theta}{(\partial x^2)^2}=\frac{\cos^2\varphi}{\theta};\\ &\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2}=\frac{\sin 2\varphi}{\theta^2},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\,\partial x^2}=-\frac{\cos 2\varphi}{\theta^2},\quad \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2}=-\frac{\sin 2\varphi}{\theta^2},\end{aligned}$$

па, на основу (5), координате Кристофеловог симбола прве врсте, у систему координата $x^1$ и $x^2$, износе

$$\begin{aligned}\overline{[11,1]}&=[21,2]\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}+[12,2]\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}+[22,1]\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\theta}{\partial x^1}+\\ &\quad+g_{11}\frac{\partial^2\theta}{(\partial x^1)^2}\frac{\partial\theta}{\partial x^1}+g_{22}\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}=\\ &=R^2\sin^2\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{\theta}+\cos\theta\frac{\sin\theta}{\theta^2}-2\frac{\sin^2\theta}{\theta^3}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{[11,2]}&=[21,2]\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}+[12,2]\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}+[22,1]\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\theta}{\partial x^2}+\\ &\quad+g_{11}\frac{\partial^2\theta}{(\partial x^1)^2}\frac{\partial\theta}{\partial x^2}+g_{22}\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}=\\ &=R^2\sin\varphi\left[\sin^2\varphi\cdot\frac{1}{\theta}-\cos\theta\,(1+\cos^2\varphi)\frac{\sin\theta}{\theta^2}+2\cos^2\varphi\frac{\sin^2\theta}{\theta^3}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{[12,1]}=\overline{[21,1]}&=[21,2]\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}+[12,2]\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}+\\ &\quad+[22,1]\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\theta}{\partial x^1}+g_{11}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^1\,\partial x^2}\frac{\partial\theta}{\partial x^1}+g_{22}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\,\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}=\\ &=R^2\sin\varphi\left(-\cos^2\varphi\cdot\frac{1}{\theta}+\cos\theta\sin^2\varphi\frac{\sin\theta}{\theta^2}+\cos 2\varphi\frac{\sin^2\theta}{\theta^3}\right),\end{aligned}$$

$$\overline{[12,2]}=\overline{[21,2]}=[21,2]\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}+[12,2]\,\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}+$$

$$+[22,1]\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}+g_{11}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^1\,\partial x^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}+g_{22}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\,\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}=$$

$$=R^2\cos\varphi\left(-\sin^2\varphi\cdot\frac{1}{\theta}+\cos\theta\cos^2\varphi\,\frac{\sin\theta}{\theta^2}-\cos 2\varphi\,\frac{\sin^2\theta}{\theta^3}\right),$$

$$\overline{[22,1]}=[21,2]\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}+[12,2]\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}+[22,1]\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^1}+$$

$$+g_{11}\,\frac{\partial^2\theta}{(\partial x^2)^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^1}+g_{22}\,\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}=$$

$$=R^2\cos\varphi\left[\cos^2\varphi\cdot\frac{1}{\theta}-\cos\theta\,(1+\sin^2\varphi)\,\frac{\sin\theta}{\theta^2}+2\sin^2\varphi\,\frac{\sin^2\theta}{\theta^3}\right],$$

$$\overline{[22,2]}=[21,2]\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}+[12,2]\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}+[22,1]\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}+$$

$$+g_{11}\,\frac{\partial^2\theta}{(\partial x^2)^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}+g_{22}\,\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}=$$

$$=R^2\sin\varphi\left(\cos^2\varphi\cdot\frac{1}{\theta}+\cos\theta\cos^2\varphi\,\frac{\sin\theta}{\theta^2}-2\cos^2\varphi\,\frac{\sin^2\theta}{\theta^3}\right).$$

Трансформациони образац Кристофеловог симбола друге врсте је облика (види одељак 21., једначину 19.)

$$\overline{\begin{Bmatrix} k \\ i\ j\end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} m \\ r\ s\end{Bmatrix}\,\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^i}\,\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^j}\,\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^m}+\frac{\partial^2 x^t}{\partial\bar{x}^i\,\partial\bar{x}^j}\,\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^t},$$

па на основу тога, (3), (6) и (7), добивамо

$$\overline{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\ 1\end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}+\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\,\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}+\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial x^1}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{\partial^2\theta}{(\partial x^1)^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}=$$

$$=\sin^2\varphi\cos\varphi\left(-\frac{1}{\theta}-\cos\theta\,\frac{\sin\theta}{\theta^2}+2\operatorname{cotg}\theta\right),$$



$$\overline{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\ 2\end{Bmatrix}}=\overline{\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 1\end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\,\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}+\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}+$$

$$+\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^1\,\partial x^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\,\partial x^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}=$$

$$=\sin\varphi\left(-\sin^2\varphi\cdot\frac{1}{\theta}+\cos\theta\cos^2\varphi\,\frac{\sin\theta}{\theta^2}-\cos 2\varphi\operatorname{cotg}\theta\right),$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 2\end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}+\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}+\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{\partial^2\theta}{(\partial x^2)^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2}\,\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}=$$

$$=\cos\varphi\left[(1+\sin^2\varphi)\,\frac{1}{\theta}-\cos\theta\cos^2\varphi\,\frac{\sin\theta}{\theta^2}-2\sin^2\varphi\operatorname{cotg}\theta\right],$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 1\end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}+\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\,\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}+\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial x^2}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{\partial^2\theta}{(\partial x^1)^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}=$$

$$=\sin\varphi\left[(1+\cos^2\varphi)\,\frac{1}{\theta}-\cos\theta\sin^2\varphi\,\frac{\sin\theta}{\theta^2}-2\cos^2\varphi\operatorname{cotg}\theta\right],$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2\end{Bmatrix}}=\overline{\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1\end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}+\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}+$$

$$+\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^1\,\partial x^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\,\partial x^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}=$$

$$=\cos\varphi\left(-\cos^2\varphi\cdot\frac{1}{\theta}+\cos\theta\sin^2\varphi\,\frac{\sin\theta}{\theta^2}+\cos 2\varphi\operatorname{cotg}\theta\right),$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 2\end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}+\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}+\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 2\end{Bmatrix}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{\partial^2\theta}{(\partial x^2)^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2}\,\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}=$$

$$=\sin\varphi\cos^2\varphi\left(-\frac{1}{\theta}-\cos\theta\,\frac{\sin\theta}{\theta^2}+2\operatorname{cotg}\theta\right).$$

На основу добијених израза за координате Кристофелових симбола прве и друге врсте, рачунатих у односу на координатни систем $x^1$ и $x^2$, лако је видети да се за њих добијају неодређени изрази ако се стави $\theta=0$. Међутим, узастопном применом Лопиталовог правила лако се показује да све координате теже нули кад $\theta$ тежи нули.

**Задатак 141.** (Одељак 21., задатак 4.). Нека $y^i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ буду Декартове правоугле координате у $E_3$ и нека $y^1=u^1$ и $y^2=u^2$ буду узете као координате на површи $y^3=f(u^1,\ u^2)$.

а) Написати метричку форму те површи.

б) Показати да се Кристофелови симболи друге врсте ове површи могу написати у облику

$$\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix}=\frac{f_\alpha f_{\beta\gamma}}{1+f_1^2+f_2^2},$$

где индекси $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ узимају вредности 1 и 2 и где је

$$f_\alpha=\frac{\partial f}{\partial u^\alpha},\quad f_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}.$$

*Решење*: У Декартовом правоуглом систему координата, једначина површи је облика

$$y^3=f(y^1,\ y^2), \tag{1}$$

а везе између Декартових правоуглих координата $y^1$, $y^2$, $y^3$ и координата $u^1$ и $u^2$ на површи (Гаусови параметри) су

$$y^1=u^1,\quad y^2=u^2,\quad y^3=f(u^1,\ u^2). \tag{2}$$

а) Да бисмо написали метричку форму површи, тј.

$$ds^2=g_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta, \tag{3}$$

морамо претходно одредити координате метричког тензора $g_{\alpha\beta}$ у односу на координате $u^1$ и $u^2$ на датој површи. Координате метричког тензора одређујемо по обрасцу

$$g_{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial y^k}{\partial u^\alpha}\,\frac{\partial y^k}{\partial u^\beta}. \tag{4}$$

За парцијалне изводе Декартових правоуглих координата по координатама $u^1$ и $u^2$, на основу (2), добивамо

$$\begin{gathered}\frac{\partial y^1}{\partial u^1}=1,\quad \frac{\partial y^1}{\partial u^2}=0;\quad \frac{\partial y^2}{\partial u^1}=0,\quad \frac{\partial y^2}{\partial u^2}=1;\\ \frac{\partial y^3}{\partial u^1}=\frac{\partial f}{\partial u^1},\quad \frac{\partial y^3}{\partial u^2}=\frac{\partial f}{\partial u^2},\end{gathered} \tag{5}$$



тако да ће, на основу (4), координате метричког тензора бити

$$g_{11}=\left(\frac{\partial y^1}{\partial u^1}\right)^2+\left(\frac{\partial y^2}{\partial u^1}\right)^2+\left(\frac{\partial y^3}{\partial u^1}\right)^2=1+\left(\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)^2,$$

$$g_{12}=g_{21}=\frac{\partial y^1}{\partial u^1}\,\frac{\partial y^1}{\partial u^2}+\frac{\partial y^2}{\partial u^1}\,\frac{\partial y^2}{\partial u^2}+\frac{\partial y^3}{\partial u^1}\,\frac{\partial y^3}{\partial u^2}=\frac{\partial f}{\partial u^1}\,\frac{\partial f}{\partial u^2},$$

$$g_{22}=\left(\frac{\partial y^1}{\partial u^2}\right)^2+\left(\frac{\partial y^2}{\partial u^2}\right)^2+\left(\frac{\partial y^3}{\partial u^2}\right)^2=1+\left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2,$$

или, приказане у облику матрице,

$$\{g_{\alpha\beta}\}=\begin{Bmatrix}1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial u^1}\right)^2 & \dfrac{\partial f}{\partial u^1}\,\dfrac{\partial f}{\partial u^2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial u^1}\,\dfrac{\partial f}{\partial u^2} & 1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2\end{Bmatrix}. \tag{6}$$

Према томе, метричка форма површи, на основу (3), је облика

$$ds^2=\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)^2\right](du^1)^2+2\frac{\partial f}{\partial u^1}\,\frac{\partial f}{\partial u^2}\,du^1\,du^2+\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2\right](du^2)^2.$$

б) Координате метричког тензора (6) површи очигледно, можемо изразити у облику

$$g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}+\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\,\frac{\partial f}{\partial u^\beta},$$

тако да за координате Кристофеловог симбола прве врсте добивамо

$$[\alpha\beta,\ \gamma]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\right)=\frac{\partial f}{\partial u^\gamma}\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta},$$

или, ако уведемо ознаке

$$\frac{\partial f}{\partial u^\gamma}=f_\gamma,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}=f_{\alpha\beta},$$

можемо их написати у облику

$$[\alpha\beta,\ \gamma]=f_\gamma f_{\alpha\beta}.$$

Координате Кристофеловог симбола друге врсте одређујемо на основу релације

$$\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{Bmatrix}=g^{\alpha\nu}\,[\beta\gamma,\ \nu], \tag{7}$$

па видимо да је за њихово одређивање потребно да знамо контраваријантни основни тензор $g^{\alpha\nu}$. Координате тог тензора су

$$g^{\alpha\nu}\overset{\text{def}}{=}\frac{G^{\alpha\nu}}{g}$$

где је $G^{\alpha\nu}$ кофактор елемента $g_{\alpha\nu}$ у детерминанти $g=|g_{\alpha\nu}|$. Из матрице (6) добивамо

$$g=|g_{\alpha\beta}|=\begin{vmatrix} 1+f_1^2 & f_1 f_2 \\ f_1 f_2 & 1+f_2^2 \end{vmatrix}=1+f_1^2+f_2^2,$$

где су искоришћене напред уведене ознаке, тј.

$$f_1^2=\left(\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)^2, \qquad f_2^2=\left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2,$$

па су координате контраваријантног основног тензора, дате у облику матрице,

$$\{g^{\alpha\nu}\}=\begin{Bmatrix} \dfrac{1+f_2^2}{1+f_1^2+f_2^2} & -\dfrac{f_1 f_2}{1+f_1^2+f_2^2} \\ -\dfrac{f_1 f_2}{1+f_1^2+f_2^2} & \dfrac{1+f_1^2}{1+f_1^2+f_2^2} \end{Bmatrix}=\frac{1}{1+f_1^2+f_2^2}\begin{Bmatrix} 1+f_2^2 & -f_1 f_2 \\ -f_1 f_2 & 1+f_1^2 \end{Bmatrix}.$$

На основу овога и релације (7), за координате Кристофеловог симбола друге врсте, сада, добивамо

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\ 1 \end{Bmatrix}=g^{11}[11,1]+g^{12}[11,2]=\frac{1+f_2^2}{1+f_1^2+f_2^2}f_1 f_{11}-\frac{f_1 f_2}{1+f_1^2+f_2^2}f_2 f_{11}=\frac{f_1 f_{11}}{1+f_1^2+f_2^2},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 1 \end{Bmatrix}=g^{11}[12,1]+g^{12}[12,2]=\frac{f_1 f_{12}}{1+f_1^2+f_2^2},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{Bmatrix}=\frac{f_1 f_{22}}{1+f_1^2+f_2^2}, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{Bmatrix}=\frac{f_2 f_{11}}{1+f_1^2+f_2^2}, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{Bmatrix}=\frac{f_2 f_{21}}{1+f_1^2+f_2^2},$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 2 \end{Bmatrix}=\frac{f_2 f_{22}}{1+f_1^2+f_2^2},$$

што се, очигледно, може написати у облику

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{Bmatrix}=\frac{f_\alpha f_{\beta\gamma}}{1+f_1^2+f_2^2},$$

што је и требало показати.

**Задатак 142.** (Одељак 21., задатак 5.). Дата је површ кружног цилиндра

$$y^1=a\cos u^1, \quad y^2=a\sin u^1, \quad y^3=u^2.$$

а) Одредити јој метричку форму.

б) Написати Кристофелове симболе прве и друге врсте за ту површ.

*Решење*: Да бисмо одредили метричку форму површи датог кружног цилиндра потребно је да, прво, одредимо координате метричког тензора. Те координате одређујемо по обрасцу

$$g_{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial y^k}{\partial u^\alpha}\,\frac{\partial y^k}{\partial u^\beta}. \tag{1}$$



Из параметарских једначина кружног цилиндра,

$$y^1=a\cos u^1, \quad y^2=a\sin u^1, \quad y^3=u^2,$$

добивамо

$$\frac{\partial y^1}{\partial u^1}=-a\sin u^1, \quad \frac{\partial y^2}{\partial u^1}=a\cos u^1, \quad \frac{\partial y^3}{\partial u^1}=0,$$

$$\frac{\partial y^1}{\partial u^2}=0, \quad \frac{\partial y^2}{\partial u^2}=0, \quad \frac{\partial y^3}{\partial u^2}=1,$$

тако да су, на основу (1), координате метричког тензора

$$g_{11}=\left(\frac{\partial y^1}{\partial u^1}\right)^2+\left(\frac{\partial y^2}{\partial u^1}\right)^2+\left(\frac{\partial y^3}{\partial u^1}\right)^2=a^2,$$

$$g_{12}=g_{21}=\frac{\partial y^1}{\partial u^1}\,\frac{\partial y^1}{\partial u^2}+\frac{\partial y^2}{\partial u^1}\,\frac{\partial y^2}{\partial u^2}+\frac{\partial y^3}{\partial u^1}\,\frac{\partial y^3}{\partial u^2}=0,$$

$$g_{22}=\left(\frac{\partial y^1}{\partial u^2}\right)^2+\left(\frac{\partial y^2}{\partial u^2}\right)^2+\left(\frac{\partial y^3}{\partial u^2}\right)^2=1,$$

или, приказане у облику матрице,

$$\{g_{\alpha\beta}\}=\begin{Bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Метричка форма је, према томе, облика

$$ds^2=a^2(du^1)^2+(du^2)^2.$$

б) С обзиром да су координате метричког тензора константе биће координате Кристофеловог симбола прве врсте, па, према томе, и друге врсте, све једнаке нули.

**Задатак 143.** (Одељак 21., задатак 6.). Нека систем координатних линија на некој површи буде ортогоналан.

Написати метричку форму површи у том случају и изразити њене Кристофелове симболе у односу на неки ортогонални криволинијски систем координата у тродимензионом еуклидском простору.

*Решење*: С обзиром да је површ дводимензиони простор и да је систем координатних линија на површи ортогоналан, то је метрички тензор облика

$$\{g_{\alpha\beta}\}=\begin{Bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{Bmatrix}, \qquad (\alpha, \beta=1, 2),$$

па је, према томе, метричка форма облика

$$ds^2=g_{11}(dx^1)^2+g_{22}(dx^2)^2.$$

Ако уочимо неки ортогонални координатни систем криволинијских координата у тродимензионом еуклидском простору, онда је веза између тих координата и координата на датој површи облика

$$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^\alpha), \qquad (i=1, 2, 3;\ \alpha=1, 2),$$

односно

$$x^\alpha = x^\alpha(\bar{x}^i).$$

Координате Кристофеловог симбола прве врсте у односу на ортогонални систем криволинијских координата у тродимензионом еуклидском простору рачунамо на основу обрасца (види одељак 21., једначину 15.)

$$\overline{[ij, k]} = [\alpha\, \beta,\, \gamma]\, \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}\, \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} + g_{\alpha\beta}\, \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^j}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k},$$

где су $[\alpha\, \beta,\, \gamma]$ координате Кристофеловог симбола прве врсте рачунате у односу на координате на датој позрши. Координате $\overline{[ij, k]}$ имају све особине координата Кристофеловог симбола прве врсте за ортогонални систем координата, које су изложене у задатку 138.

Координате Кристофеловог симбола друге врсте рачунамо по обрасцу (види одељак 21., једначину 19.)

$$\overline{\begin{Bmatrix} i \\ j\, k \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\, \gamma \end{Bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}\, \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^j\, \partial \bar{x}^k}\, \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}.$$

## 22. Коваријантни извод вектора и тензора

**Задатак 144.** (Одељак 22., задатак 1.). Одредити коваријантни извод скалара $g = |g_{ij}|$.

***Решење:*** Коваријантни извод скалара (тензора нултог реда) једнак је његовом парцијалном изводу. Према томе, биће

$$g,_i = \frac{\partial g}{\partial x^i}.$$

Међутим, како је (види одељак 21., једначину 9.)

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = 2\, g \begin{Bmatrix} j \\ j\, i \end{Bmatrix},$$

то је и

$$g,_i = 2\, g \begin{Bmatrix} j \\ j\, i \end{Bmatrix},$$

што је и требало одредити.

**Задатак 145.** (Одељак 22., задатак 2.). Показати:

1) да је увек $u_{i,\, j} - u_{j,\, i} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial u_j}{\partial x^i}$,

2) да је $u_{i,\, j} = u_{j,\, i}$ само ако је $u_i$ градијент.

***Решење:*** 1) На основу дефиниције коваријантног извода коваријантног вектора, тј.

$$u_{i,\, j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_k \begin{Bmatrix} k \\ i\, j \end{Bmatrix}$$



и

$$u_{j,\, i} = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - u_k \begin{Bmatrix} k \\ j\, i \end{Bmatrix},$$

добивамо

$$u_{i,\, j} - u_{j,\, i} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - u_k \begin{Bmatrix} k \\ i\, j \end{Bmatrix} + u_k \begin{Bmatrix} k \\ j\, i \end{Bmatrix}.$$

С обзиром да су Кристофелови симболи друге врсте симетрични у односу на доњи пар индекса, тј.

$$\begin{Bmatrix} k \\ i\, j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ j\, i \end{Bmatrix},$$

биће

$$u_{i,\, j} - u_{j,\, i} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i},$$

што је и требало показати.

2) Једначину

$$u_{i,\, j} = u_{j,\, i}$$

можемо написати у облику

$$\frac{\partial u_i}{\partial u^j} - u_k \begin{Bmatrix} k \\ i\, j \end{Bmatrix} = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - u_k \begin{Bmatrix} k \\ j\, i \end{Bmatrix}.$$

Међутим, с обзиром да је

$$\begin{Bmatrix} k \\ i\, j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ j\, i \end{Bmatrix},$$

добивамо

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^j} = \frac{\partial u_j}{\partial x^i}.$$

Ова једначина представља услов да линеарна диференцијална форма $u_i\, dx^i$ буде тотални диференцијал неке скаларне функције, тј. да је

$$u_i\, dx^i = d\varphi,$$

одакле следи

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i},$$

што значи да је полазна једначина задовољена само ако је $u_i$ градијент неке скаларне функције, што је и требало показати.

**Задатак 146.** (Одељак 22., задатак 3.). Израчунати коваријантне изводе $u^i_{,\, j}$ и $u^{i,\, j}$ вектора чије су контраваријантне координате $u^i$ дате у односу на систем сферних поларних координата.

***Решење:*** Коваријантни извод контраваријантног вектора дефинисан је на следећи начин (види одељак 22., једначину 13.)

$$u^i_{,\, j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + u^k \begin{Bmatrix} i \\ j\, k \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

Да бисмо израчунали координате овог коваријантног извода (који је мешовити тензор другог реда) у неком специјалном систему координата, потребно је да знамо координате Кристофеловог симбола друге врсте у том систему координата. С обзиром да треба да израчунамо координате коваријантног извода (1) у сферном поларном систему координата, то ћемо користити већ израчунате координате Кристофеловог симбола друге врсте у том систему координата (види задатак 138.).

Ако са $u^1$, $u^2$, $u^3$ обележимо контраваријантне координате вектора $u^i$ у систему сферних поларних координата, тада ће, на основу (1), бити

$$u^1_{,1}=\frac{\partial u^1}{\partial x^1}+u^k\left\{\begin{matrix}1\\1\ k\end{matrix}\right\}=\frac{\partial u^1}{\partial x^1}+u^1\left\{\begin{matrix}1\\1\ 1\end{matrix}\right\}+u^2\left\{\begin{matrix}1\\1\ 2\end{matrix}\right\}+u^3\left\{\begin{matrix}1\\1\ 3\end{matrix}\right\},$$

$$u^1_{,2}=\frac{\partial u^1}{\partial x^2}+u^k\left\{\begin{matrix}1\\2\ k\end{matrix}\right\}=\frac{\partial u^1}{\partial x^2}+u^1\left\{\begin{matrix}1\\2\ 1\end{matrix}\right\}+u^2\left\{\begin{matrix}1\\2\ 2\end{matrix}\right\}+u^3\left\{\begin{matrix}1\\2\ 3\end{matrix}\right\},$$

$$u^1_{,3}=\frac{\partial u^1}{\partial x^3}+u^k\left\{\begin{matrix}1\\3\ k\end{matrix}\right\}=\frac{\partial u^1}{\partial x^3}+u^1\left\{\begin{matrix}1\\3\ 1\end{matrix}\right\}+u^2\left\{\begin{matrix}1\\3\ 2\end{matrix}\right\}+u^3\left\{\begin{matrix}1\\3\ 3\end{matrix}\right\},$$

$$u^2_{,1}=\frac{\partial u^2}{\partial x^1}+u^k\left\{\begin{matrix}2\\1\ k\end{matrix}\right\}=\frac{\partial u^2}{\partial x^1}+u^1\left\{\begin{matrix}2\\1\ 1\end{matrix}\right\}+u^2\left\{\begin{matrix}2\\1\ 2\end{matrix}\right\}+u^3\left\{\begin{matrix}2\\1\ 3\end{matrix}\right\},$$

$$u^2_{,2}=\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+u^k\left\{\begin{matrix}2\\2\ k\end{matrix}\right\}=\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+u^1\left\{\begin{matrix}2\\2\ 1\end{matrix}\right\}+u^2\left\{\begin{matrix}2\\2\ 2\end{matrix}\right\}+u^3\left\{\begin{matrix}2\\2\ 3\end{matrix}\right\},$$

$$u^2_{,3}=\frac{\partial u^2}{\partial x^3}+u^k\left\{\begin{matrix}2\\3\ k\end{matrix}\right\}=\frac{\partial u^2}{\partial x^3}+u^1\left\{\begin{matrix}2\\3\ 1\end{matrix}\right\}+u^2\left\{\begin{matrix}2\\3\ 2\end{matrix}\right\}+u^3\left\{\begin{matrix}2\\3\ 3\end{matrix}\right\},$$

$$u^3_{,1}=\frac{\partial u^3}{\partial x^1}+u^k\left\{\begin{matrix}3\\1\ k\end{matrix}\right\}=\frac{\partial u^3}{\partial x^1}+u^1\left\{\begin{matrix}3\\1\ 1\end{matrix}\right\}+u^2\left\{\begin{matrix}3\\1\ 2\end{matrix}\right\}+u^3\left\{\begin{matrix}3\\1\ 3\end{matrix}\right\},$$

$$u^3_{,2}=\frac{\partial u^3}{\partial x^2}+u^k\left\{\begin{matrix}3\\2\ k\end{matrix}\right\}=\frac{\partial u^3}{\partial x^2}+u^1\left\{\begin{matrix}3\\2\ 1\end{matrix}\right\}+u^2\left\{\begin{matrix}3\\2\ 2\end{matrix}\right\}+u^3\left\{\begin{matrix}3\\2\ 3\end{matrix}\right\},$$

$$u^3_{,3}=\frac{\partial u^3}{\partial x^3}+u^k\left\{\begin{matrix}3\\3\ k\end{matrix}\right\}=\frac{\partial u^3}{\partial x^3}+u^1\left\{\begin{matrix}3\\3\ 1\end{matrix}\right\}+u^2\left\{\begin{matrix}3\\3\ 2\end{matrix}\right\}+u^3\left\{\begin{matrix}3\\3\ 3\end{matrix}\right\},$$

или, с обзиром да је

$$x^1=\rho,\quad x^2=\varphi,\quad x^2=\theta,$$

$$u^1=u^\rho,\quad u^2=u^\varphi,\quad u^3=u^\theta,$$

и узимајући у обзир вредности Кристофелових симбола друге врсте за сферни поларни систем координата дате у задатку 138., биће

$$u^\rho_{,\rho}=\frac{\partial u^\rho}{\partial\rho},\quad u^\rho_{,\varphi}=\frac{\partial u^3}{\partial\varphi}-\rho\,u^\varphi,\quad u^\rho_{,\theta}=\frac{\partial u^\rho}{\partial\theta}-u^\theta\rho\cos^2\varphi,$$

$$u^\varphi_{,\rho}=\frac{\partial u^\varphi}{\partial\rho}+\frac{u^\varphi}{\rho},\quad u^\varphi_{,\varphi}=\frac{\partial u^\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u^\rho}{\rho},\quad u^\varphi_{,\theta}=\frac{\partial u^\varphi}{\partial\theta}+u^\theta\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$u^\theta_{,\rho}=\frac{\partial u^\theta}{\partial\rho}+\frac{u^\theta}{\rho},\quad u^\theta_{,\varphi}=\frac{\partial u^\theta}{\partial\varphi}-u^\theta\operatorname{tg}\varphi,\quad u^\theta_{,\theta}=\frac{\partial u^\theta}{\partial\theta}+\frac{u^\rho}{\rho}-u^\varphi\operatorname{tg}\varphi.$$



Коваријантни извод $u^{i,j}$ дефинисан је на следећи начин (види одељак 22., једначину 15.)

$$u^{i,j}=g^{jl}u^i_{,l}.$$

С обзиром да је

$$\{g^{jl}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\rho^2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\rho^2\cos^2\varphi}\end{Bmatrix},$$

добивамо

$$u^{\rho,\rho}=\frac{\partial u^\rho}{\partial\rho},\quad u^{\rho,\varphi}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u^\rho}{\partial\varphi}-\frac{u^\varphi}{\rho},\quad u^{\rho,\theta}=\frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi}\frac{\partial u^\rho}{\partial\theta}-\frac{u^\theta}{\rho},$$

$$u^{\varphi,\rho}=\frac{\partial u^\varphi}{\partial\rho}+\frac{u^\varphi}{\rho},\quad u^{\varphi,\varphi}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u^\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u^\rho}{\rho^3},\quad u^{\varphi,\theta}=\frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi}\frac{\partial u^\varphi}{\partial\theta}+\frac{u^\theta}{\rho^2}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$u^{\theta,\rho}=\frac{\partial u^\theta}{\partial\rho}+\frac{u^\theta}{\rho},\quad u^{\theta,\varphi}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u^\theta}{\partial\varphi}-\frac{u^\theta}{\rho^2}\operatorname{tg}\varphi,\quad u^{\theta,\theta}=\frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi}\frac{\partial u^\theta}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{u^\rho}{\rho^3\cos^2\varphi}-\frac{u^\theta\sin\varphi}{\rho^2\cos^3\varphi}.$$

**Задатак 147.** (Одељак 22., задатак 4.). Ако је $u$ интензитет вектора $u^i$ показати да је

$$\frac{\partial u}{\partial x^j}=u_{,j}=\frac{u_i u^i_{,j}}{u}=\frac{u_{i,j}u^i}{u}.$$

***Решење***: Квадрат интензитета вектора $u^i$ добићемо ако га скаларно помножимо самим собом, тј.

$$(u)^2=g_{ik}u^i u^k.$$

Одавде следи, с обзиром да је коваријантни извод метричког тензора једнак нули,

$$(u)^2_{,j}=2\,uu_{,j}=(g_{ki}u^i u^k)_{,j}=g_{ik}u^i_{,j}u^k+g_{ik}u^i u^k_{,j},$$

односно

$$2\,u\frac{\partial u}{\partial x^j}=u_{k,j}u^k+u_k u^k_{,j}.$$

Међутим, како је

$$u_{k,j}u^k=u_k u^k_{,j}$$

добијамо

$$2\,u\frac{\partial u}{\partial x^j}=2\,u_k u^k_{,j}=2\,u_{k,j}u^k,$$

односно

$$\frac{\partial u}{\partial x^j} = \frac{u_i u^i_{,j}}{u} = \frac{u_{i,j} u^i}{u}$$

што је и требало показати.

**Задатак 148.** (Одељак 22., задатак 5.). Показати да су у дводимензионом простору коваријантни изводи Ричијевог антисиметричног тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ једнаки нули, тј. да је

$$\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma} = 0, \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2)$$

и одатле извести да је

$$\frac{\partial (\log \sqrt{a})}{\partial u^\gamma} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta\ \gamma \end{matrix} \right\},$$

где је $a$ детерминанта метричког тензора $a_{\alpha\beta}$ тог простора.

*Задатак треба да гласи*: Написати експлицитно једначине

$$\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma} = 0$$

за $\alpha$, $\beta = 1$, 2 и одатле извести да је

$$\frac{\partial (\log \sqrt{a})}{\partial u^\gamma} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta\ \gamma \end{matrix} \right\}.$$

***Решење***: С обзиром на релације

$$\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \varepsilon_{\sigma\beta} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha\ \gamma \end{matrix} \right\} - \varepsilon_{\alpha\sigma} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \beta\ \gamma \end{matrix} \right\}$$

и

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a}\, e_{\alpha\beta},$$

једначину

$$\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma} = 0,$$

можемо написати у облику

$$e_{\alpha\beta} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial u^\gamma} - \sqrt{a}\, e_{\nu\beta} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\ \gamma \end{matrix} \right\} - \sqrt{a}\, e_{\alpha\nu} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \beta\ \gamma \end{matrix} \right\} = 0.$$

Стављајући у овој једначини $\alpha = 1$, $\beta = 2$, добијамо

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial u^\gamma} = e_{\nu 2} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ 1\ \gamma \end{matrix} \right\} + e_{1\nu} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ 2\ \gamma \end{matrix} \right\},$$

тј.

$$\frac{\partial (\log \sqrt{a})}{\partial u^\gamma} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ \gamma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2\ \gamma \end{matrix} \right\},$$

односно

$$\frac{\partial (\log \sqrt{a})}{\partial u^\gamma} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta\ \gamma \end{matrix} \right\},$$

што је и требало показати.



## 23. Апсолутни (Бјанкијев) извод вектора и тензора

**Задатак 149.** (Одељак 23., задатак 1.). Одредити апсолутни извод тензора $t_{ijk}$ спровођењем свих операција.

***Решење***: Апсолутни извод тензора, $m$ пута контраваријантног и $n$ пута коваријантног, је облика (видети одељак 23., једначину 17.)

$$\frac{\delta u^{j_1 j_2 \cdots j_m}_{i_1 i_2 \cdots i_n}}{\delta t} = u^{j_1 j_2 \cdots j_m}_{i_1 i_2 \cdots i_n, k} \frac{dx^k}{dt}.$$

Према томе, апсолутни извод тензора $t_{ijk}$ (три пута коваријантног) је

$$\frac{\delta t_{ijk}}{\delta t} = t_{ijk,l} \frac{dx^l}{dt}.$$

Међутим, како је коваријантни извод тензора $t_{ijk}$,

$$t_{ijk,l} = \frac{\partial t_{ijk}}{\partial x^l} - t_{rjk} \left\{ \begin{matrix} r \\ l\ i \end{matrix} \right\} - t_{irk} \left\{ \begin{matrix} r \\ l\ j \end{matrix} \right\} - t_{ijr} \left\{ \begin{matrix} r \\ l\ k \end{matrix} \right\},$$

за апсолутни извод добивамо

$$\frac{\delta t_{ijk}}{\delta t} = \left( \frac{\partial t_{ijk}}{\partial x^l} - t_{rjk} \left\{ \begin{matrix} r \\ l\ i \end{matrix} \right\} - t_{irk} \left\{ \begin{matrix} r \\ l\ j \end{matrix} \right\} - t_{ijr} \left\{ \begin{matrix} r \\ l\ k \end{matrix} \right\} \right) \frac{dx^l}{dt},$$

што, још, можемо написати у облику

$$\frac{\delta t_{ijk}}{\delta t} = \frac{d t_{ijk}}{dt} - t_{rjk} \left\{ \begin{matrix} r \\ l\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx^l}{dt} - t_{irk} \left\{ \begin{matrix} r \\ l\ j \end{matrix} \right\} \frac{dx^l}{dt} - t_{ijr} \left\{ \begin{matrix} r \\ l\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx^l}{dt}.$$

**Задатак 150.** (Одељак 23., задатак 2.). Израчунати апсолутне изводе метричких тензора $g_{ij}$, $g^{ij}$ и $\delta^i_j$.

***Решење***: С обзиром да су коваријантни изводи метричких тензора једнаки нули, тј.

$$g_{ij,k} = 0, \quad g^{ij}_{,k} = 0, \quad \delta^i_{j,k} = 0,$$

непосредно следи да су и њихови апсолутни изводи једнаки нули, тј.

$$\frac{\delta g_{ij}}{dt} = g_{ij,k} \frac{dx^k}{dt} = 0,$$

$$\frac{\delta g^{ij}}{\delta t} = g^{ij}_{,k} \frac{dx^k}{dt} = 0,$$

$$\frac{\delta}{\delta t} (\delta^i_j) = \delta^i_{j,k} \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

**Задатак 151.** (Одељак 23., задатак 3.). Јесу ли операције контракције и апсолутног диференцирања комутативне?

***Решење***: Апсолутни извод, на пример, вектора $t^{i}_{.ik}$ је

$$\frac{\delta t^{i}_{.ik}}{\delta t}=\frac{\delta}{\delta t}(\delta^{i}_{j}\; t^{j}_{.ik}),$$

односно

$$\frac{\delta t^{i}_{.ik}}{\delta t}=\frac{\delta}{\delta t}(\delta^{i}_{j})\cdot t^{j}_{.ik}+\delta^{i}_{j}\frac{\delta t^{j}_{ik}}{\delta t}.$$

Међутим, како је апсолутни извод тензора $\delta^{i}_{j}$ једнак нули, тј.

$$\frac{\delta}{\delta t}(\delta^{i}_{j})=0,$$

добивамо

$$\frac{\delta t^{i}_{.ik}}{\delta t}=\delta^{i}_{j}\frac{\delta t^{j}_{.ik}}{\delta t},$$

на основу чега закључујемо да су операције контракције и апсолутног диференцирања комутативне.

**Задатак 152.** (Одељак 23., задатак 4.). Показати да је увек

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\,u^{i}\,v^{j})=g_{ij}\frac{\delta u^{i}}{\delta t}v^{j}+g_{ij}u^{i}\frac{\delta v^{j}}{\delta t}.$$

***Решење.*** Апсолутни извод скаларне инваријанте једнак је њеном обичном изводу, тј.

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t}=\varphi_{,k}\frac{dx^{k}}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^{k}}\frac{dx^{k}}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}.$$

На основу тога је

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\,u^{i}\,v^{j})=\frac{\delta}{\delta t}(g_{ij}\,u^{i}\,v^{j}).$$

Међутим, како је апсолутни извод метричког тензора једнак нули (види задатак 150.), добивамо

$$\frac{\delta}{\delta t}(g_{ij}\,u^{i}v^{j})=g_{ij}\frac{\delta u^{i}}{\delta t}v^{j}+g_{ij}\,u^{i}\frac{\delta v^{j}}{\delta t},$$

односно

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\,u^{i}v^{j})=g_{ij}\frac{\delta u^{i}}{\delta t}v^{j}+g_{ij}\,u^{i}\frac{\delta v^{j}}{\delta t},$$

што је и требало показати.

**Задатак 153.** (Одељак 23., задатак 5.). Показати да је увек

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\,u^{i}\,u^{j})=2\,g_{ij}\,u^{i}\frac{\delta u^{j}}{\delta t}.$$



***Решење.*** У претходном задатку смо показали да је

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\,u^{i}\,v^{j})=g_{ij}\frac{\delta u^{i}}{\delta t}v^{j}+g_{ij}\,u^{i}\frac{\delta v^{j}}{\delta t}.$$

Ако, сада, у овој релацији ставимо $u^{j}$ уместо $v^{j}$, добивамо

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\,u^{i}\,u^{j})=g_{ij}\frac{\delta u^{j}}{\delta t}u^{j}+g_{ij}\,u^{i}\frac{\delta u^{j}}{\delta t},$$

односно

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\,u^{i}\,u^{j})=2\,g_{ij}\,u^{i}\frac{\delta u^{j}}{\delta t},$$

што је и требало показати.

## 24. Диференцијални оператори.

**Задатак 154.** (Одељак 24., задатак 1.). Написати израз за дивергенцију вектора $\vec{v}$ у поларно цилиндарским, сферним и елиптичким координатама.

***Решење.*** Дивергенција вектора $\vec{v}$ је скаларна инваријанта која се добива контракцијом коваријантног извода контраваријантних координата тога вектора, тј.

$$\operatorname{div}\vec{v}=v^{i}_{,i}=\frac{\partial v^{i}}{\partial x^{i}}+v^{k}\left\{\begin{matrix} i \\ k\;\, i\end{matrix}\right\}.$$

Како, је међутим, (види одељак 21., једначину 10.)

$$\left\{\begin{matrix} i \\ k\;\, i\end{matrix}\right\}=\frac{\partial}{\partial x^{k}}(\log\sqrt{g}),$$

за дивергенцију добивамо

$$v^{i}_{,i}=\frac{\partial v^{i}}{\partial x^{i}}+v^{k}\frac{\partial}{\partial x^{k}}(\log\sqrt{g}),$$

односно

(1) $$v^{i}_{,i}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}(v^{i}\sqrt{g}).$$

Важно је уочити да у овом изразу за дивергенцију фигуришу контраваријантне координате вектора $\vec{v}$. Могуће је дивергенцију вектора изразити и преко коваријантних или физичких координата.

*а) Поларно цилиндарске координате.* Нека су $x^{1}=r,\; x^{2}=\theta,\; x^{3}=z$, поларно цилиндарске координате. У односу на овај систем координата нека су $v^{r},\, v^{\theta},\, v^{z}$, контраваријантне координате вектора $\vec{v}$. С обзиром да су координате метричког тензора

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix},$$

то је

$$g = |g_{ij}| = r^2,$$

односно

$$\sqrt{g} = r,$$

па за дивергенцију вектора $\vec{v}$, на основу (1), добивамо

$$v^i_{,i} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v^r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r v^\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(r v^z)\right],$$

односно

(2)
$$v^i_{,i} = \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v^z}{\partial z} + \frac{v^r}{r}.$$

Израз (2) представља дивергенцију вектора $\vec{v}$ изражену преко његових контраваријантних координата. Ако контраваријантне координате изразимо помоћу коваријантних, тј.

$$v^r = g^{rr} v_r = v_r, \quad v^\theta = g^{\theta\theta} v_\theta = \frac{1}{r^2} v_\theta, \quad v^z = g^{zz} v_z = v_z,$$

и то заменимо у израз (2), добићемо израз за дивергенцију вектора изражену преко његових коваријантних координата, тј.

(3)
$$v^i_{,i} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r}.$$

Ако, на исти начин, контраваријантне координате изразимо помоћу физичких, тј.

$$v^r = \frac{v_{(r)}}{\sqrt{g_{rr}}} = v_{(r)}, \quad v^\theta = \frac{v_{(\theta)}}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} = \frac{v_{(\theta)}}{r}, \quad v^z = \frac{v_{(z)}}{\sqrt{g_{zz}}} = v_{(z)},$$

и то заменимо у (2), добићемо израз за дивергенцију вектора $\vec{v}$ изражену преко његових физичких координата, тј.

(4)
$$\operatorname{div} \vec{v} = v^i_{,i} = \frac{\partial v_{(r)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{(z)}}{\partial z} + \frac{v_{(r)}}{r}.$$

*б) Сферне поларне координате.* Нека су $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, сферне поларне координате. У односу на овај систем координата нека су $v^\rho$, $v^\theta$, $v^\varphi$, контраваријантне координате вектора $\vec{v}$. С обзиром да су координате метричког тензора

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2\cos^2\theta \end{Bmatrix},$$

то је

$$\sqrt{g} = \rho^2 \cos\theta,$$



па, на основу (1), за дивергенцију вектора $\vec{v}$, изражену преко његових контраваријантних координата, добивамо

$$v^i_{,i} = \frac{1}{\rho^2\cos\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2\cos\theta\, v^\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho^2\cos\theta\, v^\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho^2\cos\theta\, v^\varphi)\right],$$

односно

(5)
$$v^i_{,i} = \frac{\partial v^\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{\rho} v^\rho - \operatorname{tg}\theta\, v^\theta.$$

Ако контраваријантне координате изразимо помоћу коваријантних, тј.

$$v^\rho = g^{\rho\rho} v_\rho = v_\rho, \quad v^\theta = g^{\theta\theta} v_\theta = \frac{1}{\rho^2} v_\theta, \quad v^\varphi = g^{\varphi\varphi} v_\varphi = \frac{1}{\rho^2\cos^2\theta} v_\varphi,$$

и то заменимо у (5), добићемо израз за дивергенцију вектора $\vec{v}$ изражену преко његових коваријантних координата, тј.

(6)
$$v^i_{,i} = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2\cos^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{\rho} v_\rho - \frac{\operatorname{tg}\theta}{\rho^2} v_\theta.$$

Ако, пак, контраваријантне координате изразимо помоћу физичких,

$$v^\rho = \frac{v_{(\rho)}}{\sqrt{g_{\rho\rho}}} = v_{(\rho)}, \quad v^\theta = \frac{v_{(\theta)}}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} = \frac{1}{\rho} v_{(\theta)}, \quad v^\varphi = \frac{v_{(\varphi)}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} = \frac{1}{\rho\cos\theta} v_{(\varphi)},$$

и то заменимо у (5), добићемо израз за дивергенцију вектора $\vec{v}$ изражену преко његових физичких координата, тј.

(7)
$$\operatorname{div}\vec{v} = v^i_{,i} = \frac{\partial v_{(\rho)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho\cos\theta}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial \varphi} + \frac{2}{\rho} v_{(\rho)} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{\rho} v_{(\theta)}.$$

*ц) Елиптичке координате.* Нека су $v^\mu$, $v^\nu$, $v^\lambda$, контраваријантне координате вектора $\vec{v}$ у систему елиптичких координата $x^1 = \mu$, $x^2 = \nu$, $x^3 = \lambda$.. Координате метричког тензора су (види задатак 115.)

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} c^2\dfrac{(\lambda^2-\mu^2)(\nu^2-\mu^2)}{(1-\mu^2)(k^2-\mu^2)} & 0 & 0 \\ 0 & c^2\dfrac{(\lambda^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)}{(1-\nu^2)(\nu^2-k^2)} & 0 \\ 0 & 0 & c^2\dfrac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{(\lambda^2-1)(\lambda^2-k^2)} \end{Bmatrix},$$

па је

$$\sqrt{g} = c^3\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)}{\sqrt{(1-\mu^2)(k^2-\mu^2)(1-\nu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-1)(\lambda^2-k^2)}},$$

тако да за дивергенцију вектора $\vec{v}$ изражену преко његових контраваријантних координата добивамо

$$v^i_{,i}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}(\sqrt{g}\,v^\mu)+\frac{\partial}{\partial\nu}(\sqrt{g}\,v^\nu)+\frac{\partial}{\partial\lambda}(\sqrt{g}\,v^\lambda)\right],$$

односно

$$v^i_{,i}=\frac{\partial v^\mu}{\partial\mu}+\frac{\partial v^\nu}{\partial\nu}+\frac{\partial v^\lambda}{\partial\lambda}+\frac{v^\mu}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\mu}+\frac{v^\nu}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\nu}+\frac{v^\lambda}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\lambda}.$$

На сличан начин као у претходним случајевима и овде бисмо могли дивергенцију вектора изразити преко његових коваријантних или физичких координата.

**Задатак 155.** (Одељак 24., задатак 2.). Написати израз за лапласијан неког скалара $\varphi$ у поларно цилиндарским, поларно сферним и елиптичким координатама.

***Решење***: Ако у изразу $\operatorname{div}\vec{v}$ ставимо $\vec{v}=\operatorname{grad}\varphi$ добивамо лапласијан тј.

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=(g^{ij}\varphi,_j),_i=g^{ij}\varphi,_{ij}=\Delta\varphi.$$

У претходном задатку смо видели да се дивергенција вектора може изразити у облику

$$\operatorname{div}\vec{v}=v,^i_i=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\,v^i).$$

Ако у овом изразу уместо координата вектора пишемо контраваријантне координате градијента, тј.

$$v^i=g^{ij}\varphi,_j=g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j},$$

добивамо

$$\Delta\varphi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right). \tag{1}$$

а) *Поларно цилиндарске координате*. У овом систему координата, с обзиром да је

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{r^2}&0\\0&0&1\end{Bmatrix},\qquad (x^1=r,\ x^2=\theta,\ x^3=z),$$

за лапласијан скаларне функције $\varphi$, на оснву (1), добивамо

$$\Delta\varphi=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rg^{rr}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(rg^{\theta\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(rg^{zz}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right],$$

односно

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$



б) *Поларно сферне координате*. У овом случају, с обзиром да је

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1&1&0\\0&\rho^2&0\\0&0&\rho^2\cos^2\theta\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ii}\}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\rho^2}&0\\0&0&\frac{1}{\rho^2\cos^2\theta}\end{Bmatrix},\ (x^1=\rho,\ x^2=\theta,\ x^3=\psi),$$

за лапласијан добијамо

$$\Delta\varphi=\frac{1}{\rho^2\cos\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\right],$$

односно

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}-\frac{\operatorname{tg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}.$$

в) *Елиптичке координате*. С обзиром на релацију (1) и координате метричког тензора (видети задатак 115.), у овом систему координата добијамо

$$\Delta\varphi=g^{\mu\mu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}+g^{\nu\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\nu^2}+g^{\lambda\lambda}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}(\sqrt{g}\,g^{\mu\mu})+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}(\sqrt{g}\,g^{\nu\nu})+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\sqrt{g}\,g^{\lambda\lambda}),$$

где је

$$\sqrt{g}=c^3\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)}{\sqrt{(1-\mu^2)(k^2-\mu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-1)(\lambda^2-k^2)(1-\nu^2)}}.$$

**Задатак 156.** (Одељак 24., задатак 3.). Израчунати

$$\varepsilon_{rst,\,k}=0$$

за $r,\ s,\ t=1,\ 2,\ 3$, па отуда извести да је

$$\frac{\partial(\log\sqrt{g})}{\partial x^k}=\begin{Bmatrix}m\\m\ k\end{Bmatrix}.$$

*Задатак треба да гласи*: Написати у потпуности једначине

$$\varepsilon_{rst,\,k}=0$$

за $r,\ s,\ t=1,\ 2,\ 3$, па отуда извести да је

$$\frac{\partial(\log\sqrt{g})}{\partial x^k}=\begin{Bmatrix}m\\m\ k\end{Bmatrix}.$$

***Решење:*** С обзиром да је

$$\varepsilon_{rst,\,k}=\frac{\partial\varepsilon_{rst}}{\partial x^k}-\varepsilon_{mst}\begin{Bmatrix}m\\r\ k\end{Bmatrix}-\varepsilon_{rmt}\begin{Bmatrix}m\\s\ k\end{Bmatrix}-\varepsilon_{rsm}\begin{Bmatrix}m\\t\ k\end{Bmatrix}$$

и

$$\varepsilon_{rst}=\sqrt{g}\, e_{rst},$$

једначину

$$\varepsilon_{rst,\,k}=0$$

можемо написати у облику

$$e_{rst}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}-e_{mst}\sqrt{g}\left\{ {m \atop r\ k} \right\}-e_{rmt}\sqrt{g}\left\{ {m \atop s\ k} \right\}-e_{rsm}\sqrt{g}\left\{ {m \atop t\ k} \right\}=0.$$

Ако у овој једначини уместо индекса $r$, $s$, $t$, пишемо 1, 2, 3, добијамо

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}-\sqrt{g}\, e_{m23}\left\{ {m \atop 1\ k} \right\}-\sqrt{g}\, e_{1m3}\left\{ {m \atop 2\ k} \right\}-\sqrt{g}\, e_{12m}\left\{ {m \atop 3\ k} \right\}=0,$$

односно

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}-\sqrt{g}\left\{ {1 \atop 1\ k} \right\}-\sqrt{g}\left\{ {2 \atop 2\ k} \right\}-\sqrt{g}\left\{ {3 \atop 3\ k} \right\}=0.$$

Ову једначину можемо написати у скраћеном облику

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}-\sqrt{g}\left\{ {m \atop k\ m} \right\}=0,$$

одакле следи

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}=\left\{ {m \atop m\ k} \right\},$$

односно

$$\frac{\partial\left(\log\sqrt{g}\right)}{\partial x^k}=\left\{ {m \atop m\ k} \right\}.$$

**Задатак 157.** (Одељак 24., задатак 4.). Показати да се дивергенција вектора $\vec{v}$, чије су коваријантне координате $v_j$, може написати у облику

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{v_j}{\sqrt{g}}G^{ij}\right),$$

где су $G^{ij}$ кофактори у детерминанти $g=|g_{ij}|$; или у облику

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{(-1)^{N+1}}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x^i} & 0\\ g_{ij} & \dfrac{1}{\sqrt{g}}v_j\end{vmatrix},$$

где је детерминанта $(N+1)$-ог реда.

*Решење:* У задатку 154. (види једначину 1. у том задатку) је показано да се дивергенција вектора може изразити у облику

$$\operatorname{dir}\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,v^i\right).$$



Ако у овом изразу контраваријантне координате вектора $\vec{v}$ изразимо преко његових коваријантних координата, тј.

$$v^i=g^{ij}v_j=\frac{G^{ij}}{g}v_j,$$

добивамо

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{g}}{g}G^{ij}v_j\right),$$

односно

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{v_j}{\sqrt{g}}G^{ij}\right), \tag{1}$$

што је и требало показати.

Ако, сада, израз (1) напишемо у развијеном облику, добивамо

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{g}}\Bigg[&\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{v_1}{\sqrt{g}}G^{11}+\frac{v_2}{\sqrt{g}}G^{12}+\frac{v_3}{\sqrt{g}}G^{13}+\cdots+\frac{v_N}{\sqrt{g}}G^{1N}\right)+\\ &+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{v_1}{\sqrt{g}}G^{21}+\frac{v_2}{\sqrt{g}}G^{22}+\frac{v_3}{\sqrt{g}}G^{23}+\cdots+\frac{v_N}{\sqrt{g}}G^{2N}\right)+\\ &+\ —\ —\ —\ —\ —\ —\ —\ —\ —\ —\ —\ —\ +\\ &+\frac{\partial}{\partial x^N}\left(\frac{v_1}{\sqrt{g}}G^{N1}+\frac{v_2}{\sqrt{g}}G^{N2}+\frac{v_3}{\sqrt{g}}G^{N3}+\cdots+\frac{v_N}{\sqrt{g}}G^{NN}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{2}$$

Кофакторе $G^{11}$, $G^{12}$, $G^{13}$, ..., елемената $g_{11}$, $g_{12}$, $g_{13}$, ..., у детерминанти $g$, можемо изразити у облику детерминаната, тј.

$$G^{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}g_{22}\,g_{23}\cdots g_{2N}\\ g_{32}\,g_{33}\cdots g_{3N}\\ —\ —\ —\ —\\ g_{N2}\,g_{N3}\cdots g_{NN}\end{vmatrix},\quad G^{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}g_{21}\,g_{23}\cdots g_{2N}\\ g_{31}\,g_{33}\cdots g_{3N}\\ —\ —\ —\ —\\ g_{N1}\,g_{N2}\cdots g_{NN}\end{vmatrix},\ \ldots,$$

$$G^{1N}=(-1)^{N+1}\begin{vmatrix}g_{11}\,g_{12}\cdots g_{1\,N-1}\\ g_{21}\,g_{22}\cdots g_{2\,N-1}\\ —\ —\ —\ —\ —\\ g_{N1}\,g_{N2}\cdots g_{N\,N-1}\end{vmatrix},\ \ldots$$

тако да можемо писати

$$\frac{v_1}{\sqrt{g}}G^{11}+\frac{v_2}{\sqrt{g}}G^{12}+\cdots+\frac{v_N}{\sqrt{g}}G^{1N}=(-1)^{N+1}\begin{vmatrix}g_{12}\,g_{13}\ \cdots g_{1N} & \dfrac{v_1}{\sqrt{g}}\\ g_{22}\,g_{23}\ \cdots g_{2N} & \dfrac{v_2}{\sqrt{g}}\\ —\ —\ —\ —\ — & —\\ g_{N2}\,g_{N3}\cdots g_{NN} & \dfrac{v_N}{\sqrt{g}}\end{vmatrix}=(-1)^{N+1}\Delta_1,$$

$$\frac{v_1}{\sqrt{g}}G^{21}+\frac{v_2}{\sqrt{g}}G^{22}+\cdots+\frac{v_N}{\sqrt{g}}G^{2N}=(-1)^{N+2}\begin{vmatrix} g_{11}\,g_{13}\cdots g_{1N} & \dfrac{v_1}{\sqrt{g}}\\ g_{21}\,g_{23}\cdots g_{1N} & \dfrac{v_2}{\sqrt{g}}\\ -\,-\,-\,-\,- & -\\ g_{N1}\,g_{N3}\cdots g_{NN} & \dfrac{v_N}{\sqrt{g}}\end{vmatrix}=(-1)^{N+2}\Delta_2,$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — ,

$$\frac{v_1}{\sqrt{g}}G^{N1}+\frac{v_2}{\sqrt{g}}G^{N2}+\cdots+\frac{v_N}{\sqrt{g}}G^{NN}=(-1)^{2N}\begin{vmatrix} g_{11}\,g_{12}\cdots g_{1\,N-1} & \dfrac{v_1}{\sqrt{g}}\\ g_{21}\,g_{22}\cdots g_{2\,N-1} & \dfrac{v_2}{\sqrt{g}}\\ -\,-\,-\,-\,- & -\\ g_{N1}\,g_{N2}\cdots g_{NN-1} & \dfrac{v_N}{\sqrt{g}}\end{vmatrix}=(-1)^{2N}\Delta_N.$$

На основу (2), сада, можемо написати

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}[(-1)^{N+1}\Delta_1]+\frac{\partial}{\partial x^2}[(-1)^{N+2}\Delta_2]+\cdots+\frac{\partial}{\partial x^N}[(-1)^{2N}\Delta_N]\right\},$$

што можемо написати у облику

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}[(-1)^{N+1}\Delta_1]+\frac{\partial}{\partial x^2}[(-1)^{N+2}\Delta_2]+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x^N}[(-1)^{2N}\Delta_N]+(-1)^{2N+1}\cdot 0\cdot g\right\},$$

или у облику

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{(-1)^{N+1}}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\Delta_1+(-1)^1\frac{\partial}{\partial x^2}\Delta_2+\cdots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{N-1}\frac{\partial}{\partial x^N}\Delta_N+(-1)^N\cdot 0\cdot g\right].$$

Последњи израз можемо написати у облику детерминанте,

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{(-1)^{N+1}}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x^N} & 0\\ g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} & \dfrac{v_1}{\sqrt{g}}\\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} & \dfrac{v_2}{\sqrt{g}}\\ - & - & - & - & -\\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} & \dfrac{v_N}{\sqrt{g}}\end{vmatrix},$$



односно

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{(-1)^{N+1}}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^i} & 0\\ g_{ij} & \dfrac{v_j}{\sqrt{g}}\end{vmatrix},$$

што је и требало показати.

**Задатак 158.** (Одељак 24., задатак 5.). Показати да се лапласијан скалара $\varphi$ може написати у облику

$$\Delta\varphi=\frac{(-1)^{N+1}}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^i} & 0\\ g_{ij} & \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}\end{vmatrix}.$$

*Решење:* У претходном задатку смо показали да дивергенцију вектора можемо изразити у облику

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{(-1)^{N+1}}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^i} & 0\\ g_{ij} & \dfrac{1}{\sqrt{g}}v_j\end{vmatrix},$$

где су $v_j$ коваријантне координате вектора $\vec{v}$. Ако у томе изразу координате вектора заменимо координатама градијента, с обзиром да је

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=g^{ij}\varphi_{,ij}=\Delta\varphi,$$

непосредно добивамо

$$\Delta\varphi=\frac{(-1)^{N+1}}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^i} & 0\\ g_{ij} & \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}\end{vmatrix},$$

што је и требало показати.

**Задатак 159.** (Одељак 24., задатак 6.). Показати да је

$$T^{ij}_{,j}=\operatorname{div}T^{ij}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}\,T^{ij}),$$

ако је $T^{ij}$ апсолутни бивектор.

*Решење:* Сваком вектору можемо помоћу Ричијевог антисиметричног тензора, у простору од три димензије, координирати антисиметрични тензор другог реда (бивектор), тј.

$$T^{ij}=\varepsilon^{ijk}v_k,$$

или

$$v_k=\frac{1}{2!}\varepsilon_{ijk}T^{ij}.$$

Коваријантни извод бивектора $T^{ij}$ је

$$T^{ij}_{,k}=\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k}+T^{lj}\begin{Bmatrix} i \\ l\,k \end{Bmatrix}+T^{il}\begin{Bmatrix} j \\ l\,k \end{Bmatrix}.$$

Ако извршимо контракцију по индексима $j$ и $k$, добивамо

$$T^{ij}_{,j}=\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}+T^{lj}\begin{Bmatrix} i \\ l\,j \end{Bmatrix}+T^{il}\begin{Bmatrix} j \\ l\,j \end{Bmatrix}.$$

Међутим, како је

$$T^{lj}\begin{Bmatrix} i \\ l\,j \end{Bmatrix}=-T^{lj}\begin{Bmatrix} i \\ l\,j \end{Bmatrix}=0,$$

због антисиметрије тензора $T^{ij}$ и симетрије Кристофеловог симбола друге врсте по доњим индексима, то је

$$T^{ij}_{,j}=\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}+T^{il}\begin{Bmatrix} j \\ l\,j \end{Bmatrix},$$

односно

$$T^{ij}_{,j}=\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}+T^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}(\log\sqrt{g})=\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^j}T^{ij},$$

или

$$T^{ij}_{,j}=\operatorname{div}T^{ij}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}\,T^{ij}),$$

што је и требало показати.

**Задатак 160.** (Одељак 24., задатак 7.). Написати у тензорском облику наредне познате векторске релације и проверити их:

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{v})=\varphi\operatorname{div}\vec{v}+\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{v})=\varphi\operatorname{rot}\vec{v}-\vec{v}\times\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{v}\operatorname{rot}\vec{u}-\vec{u}\operatorname{rot}\vec{v},$$

$$\operatorname{rot}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{v}(\nabla\vec{u})-\vec{u}(\nabla\vec{v})+\vec{u}\operatorname{div}\vec{v}-\vec{v}\operatorname{div}\vec{u},$$

$$\operatorname{grad}(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}(\nabla\vec{v})+\vec{v}(\nabla\vec{u})+\vec{u}\times\operatorname{rot}\vec{v}+\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{u},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v}=0,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}-\Delta\vec{v},$$

$$\operatorname{div}\vec{r}=3,$$

$$\operatorname{rot}\vec{r}=0,$$

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{r}=\vec{v},$$



где је $\vec{r}$ вектор положаја у тродимензионом простору и где су ознаке као у књизи Т. Анђелића „Теорија вектора“.

*Решење:* 1) Векторска релација

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{v})=\varphi\operatorname{div}\vec{v}+\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\varphi.$$

у тензорском облику изгледа

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{v})=(\varphi v^i)_{,i}=\varphi v^i_{,i}+v^i\varphi_{,i}.$$

2) Ротор вектора $\vec{v}$ можемо изразити у облику

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\{\varepsilon^{ijk}v_{k,j}\}.$$

Према томе је

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{v})=\{\varepsilon^{ijk}(\varphi v_k)_{,j}\}=\{\varphi\varepsilon^{ijk}v_{k,j}+\varepsilon^{ijk}v_k\varphi_{,j}\}.$$

Међутим, како је

$$\{\varepsilon^{ijk}v_k\varphi_{,j}\}=-\{\varepsilon^{ijk}v_j\varphi_{,k}\}=-\vec{v}\times\operatorname{grad}\varphi,$$

добивамо

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{v})=\{\varphi\varepsilon^{ijk}v_{k,j}-\varepsilon^{ijk}v_j\varphi_{,k}\}=\varphi\operatorname{rot}\vec{v}-\vec{v}\times\operatorname{grad}\varphi.$$

3) Векторски производ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ можемо написати у облику

$$\vec{u}\times\vec{v}=\{\varepsilon^{ijk}u_j v_k\},$$

тако да је

$$\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v})=(\varepsilon^{ijk}u_j v_k)_{,i}=\varepsilon^{ijk}u_{j,i}v_k+\varepsilon^{ijk}u_j v_{k,i},$$

односно

$$\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v})=v_k\varepsilon^{kij}u_{j,i}-u_j\varepsilon^{jik}v_{k,i}=\vec{v}\operatorname{rot}\vec{u}-\vec{u}\operatorname{rot}\vec{v}.$$

4) Векторски производ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ можемо изразити у облику

$$\vec{u}\times\vec{v}=\{\varepsilon_{ijk}u^j v^k\}$$

тако да је

$$\operatorname{rot}(\vec{u}\times\vec{v})=\{\varepsilon^{pqi}(\varepsilon_{ijk}u^j v^k)_{,q}\}=\{\varepsilon^{pqi}\varepsilon_{ijk}u^j_{,q}v^k+\varepsilon^{pqi}\varepsilon_{ijk}u^j v^k_{,q}\}=$$

$$=\{\varepsilon^{ipq}\varepsilon_{ijk}u^j_{,q}v^k+\varepsilon^{ipq}\varepsilon_{ijk}u^j v^k_{,q}\}.$$

Како је, међутим,

$$\varepsilon^{ipq}\varepsilon_{ijk}=\delta^{ipq}_{ijk}=\delta^{pq}_{jk},$$

добивамо

$$\operatorname{rot}(\vec{u}\times\vec{v})=\{\delta^{pq}_{jk}u^j_{,q}v^k+\delta^{pq}_{jk}u^j v^k_{,q}\}.$$

С обзиром да је (види задатак 26.)

$$\delta^{pq}_{jk} = \delta^p_j \delta^q_k - \delta^p_k \delta^q_j,$$

добивмо

$$\operatorname{rot}\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = \{\delta^p_j \delta^q_k u^j_{,q} v^k - \delta^p_k \delta^q_j u^j_{,q} v^k + \delta^p_j \delta^q_k u^j v^k_{,q} - \delta^p_k \delta^q_j u^j v^k_{,q}\},$$

односно

$$\operatorname{rot}\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = \{v^q u^p_{,q} - u^q v^p_{,q} + u^p v^q_{,q} - v^p u^q_{,q}\} = \left(\vec{v}\,\nabla\right)\vec{u} - \left(\vec{u}\,\nabla\right)\vec{v} + \vec{u}\operatorname{div}\vec{v} - \vec{v}\operatorname{div}\vec{u}.$$

5) Скаларни производ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ можемо изразити у облику

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_i v^i = u^i v_i,$$

тако да је

$$\operatorname{grad}\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = \{(u^i v_i)_{,j}\} = \{u^i v_{i,j} + v^i u_{i,j}\}.$$

Ову релацију, очигледно, можемо написати у облику

$$\operatorname{grad}\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = \{u^i v_{i,j} + v^i u_{i,j} + u^i v_{j,i} - u^i v_{j,i} + v^i u_{j,i} - v^i u_{j,i}\},$$

односно

$$\operatorname{grad}\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = \{u^i v_{j,i} + v^i u_{j,i} + u^i (v_{i,j} - v_{j,i}) + v^i (u_{i,j} - u_{j,i})\}.$$

Како је, даље,

$$v_{i,j} - v_{j,i} = \delta^{pq}_{ij} v_{p,q},$$

и

$$u_{i,j} - u_{j,i} = \delta^{pq}_{ij} u_{p,q},$$

добивамо

$$\operatorname{grad}\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = \{u^i v_{j,i} + v^i u_{j,i} + u^i \delta^{pq}_{ij} v_{p,q} + v^i \delta^{pq}_{ij} u_{p,q}\},$$

односно

$$\operatorname{grad}\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = \{u^i v_{j,i} + v^i u_{j,i} + u^i \delta^{mpq}_{mij} v_{p,q} + v^i \delta^{mpq}_{mij} u_{p,q}\},$$

или, коначно,

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) &= \{u^i v_{j,i} + v^i u_{j,i} + u^i \varepsilon^{mpq} \varepsilon_{mij} v_{p,q} + v^i \varepsilon^{mpq} \varepsilon_{mij} u_{p,q}\} = \\ &= \{u^i v_{j,i} + v^i u_{j,i} + \varepsilon_{jim} u^i \varepsilon^{mqp} v_{p,q} + \varepsilon_{jim} v^i \varepsilon^{mqp} u_{p,q}\} = \\ &= \vec{u}\cdot\left(\nabla\vec{v}\right) + \vec{v}\cdot\left(\nabla\vec{u}\right) + \vec{u}\times\operatorname{rot}\vec{v} + \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{u}.\end{aligned}$$

6. Ротор градијента скалара $\varphi$ можемо изразити у облику

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \{\varepsilon^{ijk}(\varphi_{,k})_{,j}\} = \{\varepsilon^{ijk}\varphi_{,kj}\}.$$

Међутим, како је

$$\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{ikj}$$

и

$$\varphi_{,kj} = \varphi_{,jk},$$

добивамо

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \{\varepsilon^{ijk}\varphi_{,kj}\} = -\{\varepsilon^{ijk}\varphi_{,kj}\} = 0.$$



7) Дивергенцију ротора вектора $\vec{v}$ можемо изразити у облику

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = (\varepsilon^{ijk} v_{k,j})_{,i} = \varepsilon^{ijk} v_{k,ji}.$$

Међутим, како је

$$\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik}$$

и

$$v_{k,ji} = v_{k,ij},$$

добивамо

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = \varepsilon^{ijk} v_{k,ji} = -\varepsilon^{ijk} v_{k,ji} = 0.$$

8) Ротор ротора вектора $\vec{v}$ можемо изразити у облику

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \{\varepsilon_{pqi} g^{lq} \varepsilon^{ijk} v_{k,jl}\} = \{\delta^{ijk}_{ipq} g^{lq} v_{k,jl}\},$$

односнно

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} &= \{\delta^{jk}_{pq} g^{lq} v_{k,jl}\} = \{\delta^j_p \delta^k_q g^{lq} v_{k,jl} - \delta^j_q \delta^k_p g^{lq} v_{k,jl}\} \\ &= \{g^{lk} v_{k,pl} - g^{lq} v_{k,ql}\},\end{aligned}$$

или

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \{(g^{kl} v_{k,l})_{,p} - g^{lq} v_{k,lq}\} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \Delta\vec{v}.$$

9) Координате тачке јесу координате вектора (вектора положаја) само у Декартовом правоуглом систему координата, тј.

$$\vec{r} = \{y^i\} = \{y^1, y^2, y^3\}.$$

Коваријантни извод вектора положаја је

$$y^i_{,j} = \frac{\partial y^i}{\partial y^j} = \delta^i_j.$$

Ако извршимо контракцију, с обзиром да је простор од три димензије, добивамо

$$\operatorname{div}\vec{r} = y^i_{,i} = \delta^i_i = 3.$$

10) Ротор вектора положаја можемо изразити у облику

$$\operatorname{rot}\vec{r} = \{e^{ijk} y_{k,j}\}.$$

Међутим, како је

$$y_{k,j} = \delta_{kj}$$

добивамо

$$\operatorname{rot}\vec{r} = \{e^{ijk}\delta_{kj}\}.$$

С обзиром да је $e$-систем потпуно антисиметричан, а Кронекеров симбол симетричан, добивамо

$$\operatorname{rot}\vec{r} = \{e^{ijk}\delta_{kj}\} = -\{e^{ijk}\delta_{kj}\} = 0.$$

11) С обзиром да је

$$(\vec{v}\cdot\nabla) = v^j\frac{\partial}{\partial y^j}, \qquad \frac{\partial y^j}{\partial y^i} = \delta^j_i,$$

добивамо

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{r}=\{v^j\,y^i_{,j}\}=\{v^j\,\delta^i_j\}=\{v^i\}=\vec{v}.$$

**Задатак 161.** (Одељак 24., задатак 8.) Ако је $a_{ij}$ ротор коваријантног вектора, показати да је

$$a_{ij,k}+a_{jk,i}+a_{ki,j}=0$$

и да је то еквивалентно са

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}=0.$$

***Решење:*** С обзиром да је $a_{ij}$ ротор коваријантног воктора, тј.

$$a_{ij}=\varepsilon_{pij}\,\varepsilon^{pst}\,v_{t,s}=\delta^{st}_{ij}\,v_{t,s}=v_{j,i}-v_{i,j}$$

онда је

$$a_{ij,k}=v_{j,ik}-v_{i,jk},$$
$$a_{jk,i}=v_{k,ji}-v_{j,ki},$$
$$a_{ki,j}=v_{i,kj}-v_{k,ij},$$

тако да добивамо

$$a_{ij,k}+a_{jk,i}+a_{ki,j}=v_{j,ik}-v_{i,jk}+v_{k,ji}-v_{j,ki}+v_{i,kj}-v_{k,ij}$$

или, с обзиром да је $v_{i,jk}=v_{i,kj}$,

$$a_{ij,k}+a_{jk,i}+a_{ki,j}=0.$$

С друге стране је

$$a_{ij,k}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}-a_{lj}\begin{Bmatrix} l \\ i\ k\end{Bmatrix}-a_{il}\begin{Bmatrix} l \\ j\ k\end{Bmatrix},$$

$$a_{jk,i}=\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}-a_{lk}\begin{Bmatrix} l \\ i\ j\end{Bmatrix}-a_{jl}\begin{Bmatrix} l \\ k\ i\end{Bmatrix},$$

$$a_{ki,j}=\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}-a_{li}\begin{Bmatrix} l \\ k\ j\end{Bmatrix}-a_{kl}\begin{Bmatrix} l \\ i\ j\end{Bmatrix},$$

па је

$$a_{ij,k}+a_{jk,i}+a_{ki,j}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}-a_{lj}\begin{Bmatrix} l \\ i\ k\end{Bmatrix}-a_{il}\begin{Bmatrix} l \\ j\ k\end{Bmatrix}-a_{lk}\begin{Bmatrix} l \\ j\ i\end{Bmatrix}-$$
$$-a_{jl}\begin{Bmatrix} l \\ k\ i\end{Bmatrix}-a_{li}\begin{Bmatrix} l \\ k\ j\end{Bmatrix}-a_{kl}\begin{Bmatrix} l \\ i\ j\end{Bmatrix}=0.$$

Како је тензор $a_{ij}$ антисиметричан, тј.

$$a_{ij}=v_{j,i}-v_{i,j}=-(v_{i,j}-v_{j,i})=-a_{ji},$$

биће

$$a_{ij,k}+a_{jk,i}+a_{ki,j}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}+a_{jl}\begin{Bmatrix} l \\ i\ k\end{Bmatrix}+a_{li}\begin{Bmatrix} l \\ j\ k\end{Bmatrix}+$$
$$+a_{kl}\begin{Bmatrix} l \\ i\ j\end{Bmatrix}-a_{jl}\begin{Bmatrix} l \\ k\ i\end{Bmatrix}-a_{li}\begin{Bmatrix} l \\ k\ j\end{Bmatrix}-a_{kl}\begin{Bmatrix} l \\ i\ j\end{Bmatrix}=0,$$



или, пошто су Кристофелови симболи друге врсте симетрични у односу на доњи пар индекса,

$$a_{ij,k}+a_{jk,i}+a_{ki,j}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}+a_{jl}\begin{Bmatrix} l \\ i\ k\end{Bmatrix}+a_{li}\begin{Bmatrix} l \\ j\ k\end{Bmatrix}+$$
$$+a_{kl}\begin{Bmatrix} l \\ i\ j\end{Bmatrix}-a_{jl}\begin{Bmatrix} l \\ i\ k\end{Bmatrix}-a_{li}\begin{Bmatrix} l \\ j\ k\end{Bmatrix}-a_{kl}\begin{Bmatrix} l \\ j\ i\end{Bmatrix}=0,$$

односно

$$a_{ij,k}+a_{jk,i}+a_{ki,j}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}=0,$$

што је и требало показати.

**Задатак 162.** (Одељак 24., задатак 9.). Показати да је

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\nabla\varphi)^2=\frac{\partial}{\partial x^k}(\Delta_1\varphi)=2\,g^{ij}\,\varphi_{,i}\,\varphi_{,jk}.$$

***Решење:*** Диференцијални параметар првог реда дефинисан је на следећи начин (види одељак 24., једначину 11.)

$$(\nabla\varphi)^2\equiv\Delta_1\varphi\equiv g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}=g^{ij}\,\varphi_{,i}\,\varphi_{,j}.$$

С обзиром да је то скаларна инваријанта, њен парцијални извод једнак је њеном коваријантном изводу (види задатак 144.), тј.

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\nabla\varphi)^2=\frac{\partial}{\partial x^k}(\Delta_1\varphi)=(\Delta_1\varphi)_{,k},$$

биће

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\nabla\varphi)^2=(g^{ij}\,\varphi_{,i}\,\varphi_{,j})_{,k}=g^{ij}\,\varphi_{,ik}\,\varphi_{,j}+g^{ij}\,\varphi_{,i}\,\varphi_{,jk},$$

тј.

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\nabla\varphi^2)=\frac{\partial}{\partial x^k}(\Delta_1\varphi)=g^{ji}\,\varphi_{,jk}\,\varphi_{,i}+g^{ij}\,\varphi_{,i}\,\varphi_{,jk}=2\,g^{ij}\,\varphi_{,i}\,\varphi_{,jk}$$

што је и требало показати.

**Задатак 163.** (Одељак 24., задатак 10.). Показати да је

$$\Delta x^\alpha=-g^{\beta\gamma}\begin{Bmatrix}\alpha \\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix},\quad(\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,2).$$

***Решење:*** Обележимо са $x^\alpha$ координате тачке у односу на неки систем криволинијских координата $x^1$, $x^2$. Тада је

$$\Delta x^\alpha=g^{\beta\gamma}\,x^\alpha_{,\beta\gamma}.$$

Међутим, с обзиром да, у општем случају, $x^\alpha$ нису координате вектора већ скуп скалара, ми ћемо, да бисмо то назначили, индекс који означава редни број скалара (координате тачке) ставити у заграду, тј. $x^{(\alpha)}$, тако да коваријантни извод

$$x^{(\alpha)}_{,\beta}=\frac{\partial x^{(\alpha)}}{\partial x^{\beta}}=\delta^{(\alpha)}_{\beta}=\begin{cases}1 & \text{за } \alpha=\beta\\ 0 & \text{за } \alpha\neq\beta,\end{cases}$$

означава скуп од два коваријантна вектора.

Сада је

$$\Delta x^{\alpha}=\Delta x^{(\alpha)}=g^{\beta\gamma}x^{(\alpha)}_{,\beta\gamma}=g^{\beta\gamma}\delta^{(\alpha)}_{\beta,\gamma},$$

односно

$$\Delta x^{\alpha}=g^{\beta\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(\delta^{(\alpha)}_{\beta})-\delta^{(\alpha)}_{\lambda}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix}\right].$$

Међутим, како је

$$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(\delta^{(\alpha)}_{\beta})=0,$$

добивамо

$$\Delta x^{\alpha}=-g^{\beta\gamma}\delta^{(\alpha)}_{\lambda}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix}=-g^{\beta\gamma}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix},$$

што је и требало показати.

**Задатак 164.** (Одељак 24., задатак 11.). Одредити

$$\frac{\partial}{\partial x^{k}}\Delta_1(\varphi,\psi).$$

***Решење:*** Како је (види одељак 24., једначину 12.)

$$\Delta_1(\varphi,\psi)=g^{ij}\varphi_{,i}\,\psi_{,j},$$

то је

$$\frac{\partial}{\partial x^{k}}\Delta_1(\varphi,\psi)=(g^{ij}\varphi_{,i}\,\psi_{,j})_{,k},$$

јер је парцијални извод скалара једнак његовом коваријантном изводу. Према томе је

$$\frac{\partial}{\partial x^{k}}\Delta_1(\varphi,\psi)=g^{ij}\varphi_{,ik}\,\psi_{,j}+g^{ij}\varphi_{,i}\,\psi_{,jk}=g^{ij}(\varphi_{,jk}\,\psi_{,i}+\varphi_{,i}\,\psi_{,jk}),$$

што је и требало одредити.

**Задатак 165.** (Одељак 24., задатак 12.). Одредити

а) $(\Delta x^{i})^2$; б) $\Delta x^{i}\cdot\Delta x^{j}$.

***Решење:*** а) На сличан начин као у задатку 163. може се показати да је

$$\Delta x^{i}=-g^{jk}\begin{Bmatrix}i\\ j\ k\end{Bmatrix},\qquad (i,j,k=1,2,3).$$



Према томе је

$$(\Delta x^{i})^2=\Delta x^{i}\cdot\Delta x^{i}=\left(-g^{jk}\begin{Bmatrix}i\\ j\ k\end{Bmatrix}\right)\cdot\left(-g^{mn}\begin{Bmatrix}i\\ m\ n\end{Bmatrix}\right),$$

односно

$$(\Delta x^{i})^2=g^{jk}g^{mn}\begin{Bmatrix}i\\ j\ k\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}i\\ m\ n\end{Bmatrix}.$$

б) С обзиром да је

$$\Delta x^{i}=-g^{lk}\begin{Bmatrix}i\\ l\ k\end{Bmatrix}$$

и

$$\Delta x^{j}=-g^{mn}\begin{Bmatrix}j\\ m\ n\end{Bmatrix},$$

добивамо

$$\Delta x^{i}\cdot\Delta x^{j}=\left(-g^{lk}\begin{Bmatrix}i\\ l\ k\end{Bmatrix}\right)\cdot\left(-g^{mn}\begin{Bmatrix}j\\ m\ n\end{Bmatrix}\right),$$

односно

$$\Delta x^{i}\cdot\Delta x^{j}=g^{lk}g^{mn}\begin{Bmatrix}i\\ l\ k\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}j\\ m\ n\end{Bmatrix},$$

што је и требало одредити.

## 26. Пфафова форма. Пфафове једначине

**Задатак 166.** (Одељак 26., задатак 1.). Показати да су системи Пфафових једначина придружени Пфафовој форми

$$\Phi\equiv X_i\,dx^{i}$$

и Пфафовој форми $k\Phi$, где је $k$ константа, еквивалентни један другом.

***Решење:*** Пфафовој форми

$$\Phi=X_i\,dx^{i},$$

одговара систем Пфафових једначина (види одељак 26., једначину 28.)

(1) $$a_{ij}\,dx^{j}=0,$$

где су коефицијенти антисиметричног тензора $a_{ij}$ (ротора од $X_i$) дати са

$$a_{ij}=\frac{\partial X_j}{\partial x^{i}}-\frac{\partial X_i}{\partial x^{j}}.$$

На исти начин, Пфафовој форми

$$k\Phi\equiv k\,X_i\,dx^{i},$$

одговара систем Пфафових једначина

(2) $$b_{ij}\,dx^{j}=0,$$

где је

$$b_{ij}=\frac{\partial (kX_j)}{\partial x^i}-\frac{\partial (kX_i)}{\partial x^j}.$$

Како је, међутим,

$$b_{ij}=k\left(\frac{\partial X_j}{\partial x^i}-\frac{\partial X_i}{\partial x^j}\right)=ka_{ij},$$

систем једначина (2) постаје

$$k\,a_{ij}\,dx^j=0,$$

тј.

$$a_{ij}\,dx^j=0,$$

па видимо да је он еквивалентан систему једначина (1), што је и требало показати.

**Задатак 167.** (Одељак 26., задатак 2.). Показати да су системи Пфафових једначина који одговарају Пфафовим формама

$$F_1\equiv X_i\,dx^i \quad \text{и} \quad F_2\equiv X_i\,dx^i+d\varphi,$$

где је $d\varphi$ тотални диференцијал функције $\varphi=\varphi(x^1, x^2, \dots, x^N)$, еквивалентни.

***Решење:*** Пфафовој форми $F_1$ одговара систем Пфафових једначина

(1) $$a_{ij}\,dx^j=0,$$

где је

$$a_{ij}=\frac{\partial X_j}{\partial x^i}-\frac{\partial X_i}{\partial x^j}.$$

Пфафову форму $F_2$, с обзиром да је $d\varphi$ тотални диференцијал, тј.

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,dx^i,$$

можемо написати у облику

$$F_2\equiv\left(X_i+\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)dx^i.$$

Овој форми одговара систем Пфафових једначина

(2) $$b_{ij}\,dx^j=0,$$

где је

$$b_{ij}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(X_j+\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(X_i+\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right).$$

Међутим, како је

$$b_{ij}=\frac{\partial X_j}{\partial x^i}-\frac{\partial X_i}{\partial x^j}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^j}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^j\,\partial x^i}=\frac{\partial X_j}{\partial x^i}-\frac{\partial X_i}{\partial x^j}=a_{ij},$$

систем једначина (2) постаје

$$a_{ij}\,dx^j=0,$$

па видимо да је еквивалентан са системом (1), што је и требало показати.



**Задатак 168.** (Одељак 26., задатак 3.). Показати директним израчунавањем да су системи Пфафових једначина придружени Пфафовој форми $X_i\,dx^i$ и њеном трансформату $\overline{X}_i\,d\bar{x}^i$ трансформати један другог.

*Решење:* Пфафовој форми

$$X_i\,dx^i$$

одговара систем Пфафових једначина

(1) $$a_{ij}\,dx^j=0,$$

где је

$$a_{ij}=\frac{\partial X_j}{\partial x^i}-\frac{\partial X_i}{\partial x^j}=X_{j,i}-X_{i,j}$$

антисиметрични коваријантни тензор другог реда.

Ако извршимо трансформацију променљивих $x^i$ у променљиве $\bar{x}$, Пфафовој форми $X_i\,dx^i$ одговара трансформат $\overline{X}_i\,d\bar{x}^i$. Овом трансформату одговара, сада, систем Пфафових једначина

(2) $$\bar{a}_{ij}\,d\bar{x}^j=0.$$

Да бисмо показали да је систем (2) трансформат система (1), поступићемо на следећи начин. С обзиром да је $a_{ij}$ два пута коваријантни тензор биће

$$\bar{a}_{kl}=a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^k}\,\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^l}.$$

Како је и $dx^i$ контраваријантни вектор, тј.

$$d\bar{x}^l=dx^r\frac{\partial\bar{x}^l}{\partial x^r},$$

биће

$$\bar{a}_{kl}\,d\bar{x}^l=a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^k}\,\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^l}\,dx^r\,\frac{\partial\bar{x}^l}{\partial x^r},$$

односно

$$\bar{a}_{kl}\,d\bar{x}^l=a_{ij}\,dx^j\,\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^k}.$$

Пошто је, на основу (1),

$$a_{ij}\,dx^j=0,$$

добивамо

$$\bar{a}_{kl}\,d\bar{x}^l=0,$$

што значи да је систем (2) Пфафових једначина који одговара Пфафовој форми $\overline{X}_i\,d\bar{x}^i$ трансформат система (1) Пфафових једначина који одговара Пфафовој форми $X_i\,dx^i$, што је и требало показати.

*Напомена.* Ако су координате неког вектора једнаке нули у једном систему координата биће оне једнаке нули у ма ком другом допустивом систему координата. Наиме, из једначине

$$\bar{v}_i=v_j\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}$$

следи $\bar{v}_i=0$ кад је $v_j=0$,

Према томе, ако систем Пфафових једначина (1) напишемо у облику

$$A_i = 0, \qquad (A_i = a_{ij}\, dx^j),$$

где је $A_i$ коваријантни вектор (јер је $a_{ij}$ два пута коваријантни тензор и $dx^j$ контраваријантни вектор), непосредно следи да је

$$\bar{A}_i = 0,$$

тј,

$$\bar{a}_{ij}\, d\bar{x}^j = 0.$$

**Задатак 169.** (Одељак 26., задатак 4.). Написати Пфафове једначине које одговарају Пфафовој форми

$$\Phi \equiv x^1\, dx^2 + x^2\, dx^3 + x^3\, dx^4.$$

***Решење***: С обзиром да Пфафовој форми

$$\Phi \equiv X_i\, dx^i$$

одговара систем Пфафових једначина

$$a_{ij}\, dx^j = 0,$$

где су коефицијенти система одређени са

$$a_{ij} = \delta_{ij}^{kl}\, X_{l,k} = X_{j,i} - X_{i,j} = \frac{\partial X_j}{\partial x^i} - \frac{\partial X_i}{\partial x^j},$$

то из Пфафове форме облика

(1) $$\Phi \equiv x^1\, dx^2 + x^2\, dx^3 + x^3\, dx^4,$$

добивамо

$$\{X_i\} = \{0,\ x^1,\ x^2,\ x^3\},$$

па су, према томе, коефицијенти система Пфафових једначина који одговара Пфафовој форми (1)

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0,$$

$$a_{12} = -a_{21} = X_{2,1} - X_{1,2} = 1,$$

$$a_{13} = -a_{31} = X_{3,1} - X_{1,3} = 0,$$

$$a_{14} = -a_{41} = X_{4,1} - X_{1,4} = 0,$$

$$a_{23} = -a_{32} = X_{3,2} - X_{2,3} = 1,$$

$$a_{24} = -a_{42} = X_{4,2} - X_{2,4} = 0,$$

$$a_{34} = -a_{43} = X_{4,3} - X_{3,4} = 1,$$

или у облику матрице

$$a_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix}.$$



Систем Пфафових једначина који одговара Пфафовој форми (1) у матричном облику је

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ dx^4 \end{Bmatrix} = 0.$$

Овој матричној једначини одговара систем од четири следеће скаларне једначине

$$dx^2 = 0,$$

$$dx^1 - dx^3 = 0,$$

$$dx^2 - dx^4 = 0,$$

$$dx^3 = 0.$$

## 27. Геодезијске линије

**Задатак 170.** (Одељак 27., задатак 1.). Одредити све параметре $u$ за које се диференцијална једначина геодезијских линија (14) своди као у случају кад је $t = s$ на прост облик (16).

***Решење:*** Да би се диференцијална једначина геодезијских линија (14),

$$\frac{d^2 x^l}{du^2} + \begin{Bmatrix} l \\ j\ k \end{Bmatrix} \frac{dx^j}{du} \frac{dx^k}{du} - \frac{dx^l}{du} \frac{s''}{s'} = 0,$$

свела на прост облик (16),

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \begin{Bmatrix} l \\ j\ k \end{Bmatrix} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0,$$

очигледно је да мора бити

$$s'' = \frac{d^2 s}{du^2} = 0.$$

Интеграцијом ове једначине добивамо

$$s = cu + d, \qquad (c,\ d = \text{const.}),$$

односно

$$u = as + b, \qquad (a,\ b = \text{const.}).$$

Заиста је тада

$$\frac{dx^i}{du} = \frac{dx^i}{ds} \frac{ds}{du} = c \frac{dx^i}{ds},$$

тј.

$$\frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du} = (c)^2 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}$$

и

$$\frac{d^2x^i}{du^2}=\frac{d^2x^i}{ds^2}\left(\frac{ds}{du}\right)^2+\frac{dx^i}{ds}\frac{d^2s}{du^2}=(c)^2\frac{d^2x^i}{ds^2},$$

па једначина (14) прелази у (16). Дакле, сви параметри који се у задатку траже су

$$u=as+b, \qquad (a,\ b=\text{const.}).$$

**Задатак 171.** (Одељак 27., задатак 2.)· Геодезијска нула линија се зове она за коју диференцијална једначина (16) има први интеграл

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=0.$$

Оне могу бити реалне само у риманском простору индефинитне метрике.

Показати, на пример, да су у тродимензионом простору чија је метричка форма

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2-(dx^3)^2,$$

геодезијске нула линије одређене једначинама

$$x^i=a^i s+b^i,$$

где је $s$ параметар, а $a^i$ и $b^i$ константе, при чему константе $a^i$ задовољавају услов

$$(a^1)^2+(a^2)^2-(a^3)^2=0.$$

*Решење:* Да би линије, чије су једначине

(1) $$x^i=a^i s+b^i,$$

биле геодезијске нула линије у тродимензионом простору са метричком формом

(2) $$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2-(dx^3)^2,$$

њихове координате морају задовољавати услов (први интеграл)

(3) $$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=0.$$

Из (2) за координате метричког тензора добивамо

(4) $$\{g_{ij}\}=\left\{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{matrix}\right\},$$

а из (1) следи

(5) $$\frac{dx^i}{ds}=a^i.$$



Ако (4) и (5) заменимо у (3), добивамо

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=g_{ij}\,a^i a^j=(a^1)^2+(a^2)^2-(a^3)^2.$$

Међутим, како је

$$(a^1)^2+(a^2)^2-(a^3)^2=0,$$

биће

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=0,$$

на основу чега закључујемо да једначине (1) задовољавају услов (3), тј. једначине (1) су једначине геодезијских нула линија у тродимензионом простору са метричком формом (2), што је и требало показати.

**Задатак 172.** (Одељак 27., задатак 3.). Написати експлицитно једначине геодезијских линија (16) у обичном тродимензионом простору у сферним поларним координатама.

*Решење:* Једначина геодезијских линија (16) је облика

(1) $$\frac{d^2x^l}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}l\\j\ k\end{matrix}\right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0.$$

С обзиром да је тензорска, ова једначина важи у ма ком допустивом систему координата. У тродимензионом простору једначини (1) одговарају следеће три скаларне једначине

(2) $$\begin{aligned}&\frac{d^2x^1}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}1\\j\ k\end{matrix}\right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0,\\&\frac{d^2x^2}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}2\\j\ k\end{matrix}\right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0,\\&\frac{d^2x^3}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}3\\j\ k\end{matrix}\right\}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0.\end{aligned}$$

У систему сферних поларних координата је

$$x^1=\rho,\ x^2=\theta,\ x^3=\varphi,$$

$$\left\{\begin{matrix}1\\2\ 2\end{matrix}\right\}=-\rho,\ \left\{\begin{matrix}1\\3\ 3\end{matrix}\right\}=-\rho\cos^2\theta,\ \left\{\begin{matrix}2\\1\ 2\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}2\\2\ 1\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\rho},$$

$$\left\{\begin{matrix}2\\3\ 3\end{matrix}\right\}=\sin\theta\cos\theta,\ \left\{\begin{matrix}3\\1\ 3\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}3\\3\ 1\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\rho},\ \left\{\begin{matrix}3\\2\ 3\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}3\\3\ 2\end{matrix}\right\}=-\operatorname{tg}\theta,$$

па једначине (2) добивају облик

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\rho}{ds^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2-\rho\cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0,\\&\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0,\\&\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\frac{d\varphi}{ds}-2\operatorname{tg}\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0.\end{aligned}$$

**Задатак 173.** (Одељак 27., задатак .4). Породица геодезијских нула линија одређених ма за коју тачку задовољава једначину конуса са теменом у тој тачки. Тај конус се зове *нула конус*.

У тродимензионом римановском простору индефинитне метрике

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2,$$

одредити геодезијске нула линије за координатни почетак и њихово геометријско место (*нула конус*).

***Решење:*** С обзиром на резултате задатка 171., једначине геодезијских нула линија су

(1) $$x^i = a^i s,$$

јер је услов да пролазе кроз координатни почетак.

Из једначине (1) следи

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = [(a^1)^2 + (a^2)^2 - (a^3)^2]\, s^2,$$

односно

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0, \quad ((a^1)^2 + (a^2)^2 - (a^3)^2 = 0),$$

тако да је

$$(x^1)^2 + (x^2)^1 = (x^3)^2$$

једначина геометријског места геодезијских нула линија, тј. једначина нула конуса.

## 28. Паралелно померање

**Задатак 174.** (Одељак 28., задатак 1.). Доказати да свака скаларна инваријанта остаје при паралелном преносу непромењена.

***Решење:*** Ако скаларну инваријанту преносимо из тачке простора са координатама $x^i$ у тачку са координатама $x^i + dx^i$, онда се услов да то преношење буде паралелно изражава у облику

$$\varphi,_k\, dx^k = 0,$$

или, с обзиром да $dx^k$ може бити произвољно, у облику

$$\varphi,_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = 0.$$

Интеграцијом овог система парцијалних једначина добивамо

$$\varphi = \varphi_0 = \text{const.},$$

на основу чега закључујемо да скаларна инваријанта при паралелном преносу остаје непромењена, што је и требало доказати.

*Напомена*: Можемо показати и обрнуто: ако при преношењу скаларне инваријанте из једне тачке простора у другу њена вредност остаје непромењена, онда се то преношење врши паралелно.



Наиме, ако је вредност скаларне инваријанте у тачки простора са координатама $x^i$ једнака $\varphi$, онда, да би она остала непромењена при преносу у тачку са координатама $x^i + dx^i$, мора бити

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\, dx^k = 0,$$

а то је услов за паралелно преношење скаларне инваријанте.

**Задатак 175.** (Одељак 28., задатак 2.). Нека $\{U_i\} = \{1,\ 2\}$ буду Декартове правоугле координате неког вектора у равни у тачки (1, 0) и нека се тај вектор помера паралелно по кругу у тој равни чији је центар у координатном почетку а полупречник му је јединица. Одредити координате овог вектора у поларном систему и израчунати њихове промене при овом померању.

***Решење:*** Коваријантне координате датог вектора у поларном систему координата одређујемо на основу трансформационог обрасца

(1) $$u_i = U_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i},$$

где су $U_j$ његове координате у Декартовом правоуглом систему координата.

На основу веза између Декартових правоуглих и поларних координата у равни,

(2) $$y^1 = x^1 \cos x^2, \qquad y^2 = x^1 \sin x^2,$$

односно

(3) $$x^1 = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}, \qquad x^2 = \operatorname{arctg} \frac{y^2}{y^1},$$

добивамо

(4) $$\frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \cos x^2; \quad \frac{\partial y^1}{\partial x^2} = -\, x^1 \sin x^2; \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = \sin x^2; \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = x^1 \cos x^2,$$

и

(5) $$\frac{\partial x^1}{\partial y^1} = \cos x^2; \quad \frac{\partial x^1}{\partial y^2} = \sin x^2; \quad \frac{\partial x^2}{\partial y^1} = -\frac{1}{x^1} \sin x^2; \quad \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \frac{1}{x^1} \cos x^2.$$

На основу (1) и (4), сада, добивамо

$$u_1 = U_1 \frac{\partial y^1}{\partial x^1} + U_2 \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} + 2\, \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = \cos x^2 + 2 \sin x^2,$$

$$u_2 = U_1 \frac{\partial y^1}{\partial x^2} + U_2 \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial y^1}{\partial x^2} + 2\, \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -\, x^1 \sin x^2 + 2\, x^1 \cos x^2,$$

тј. коваријантне координате датог вектора у поларном систему координата су

(6) $$\{u_i\} = \{\cos x^2 + 2 \sin x^2, \quad -\, x^1 \sin x^2 + 2\, x^1 \cos x^2\}.$$

Контраваријантне координате датог вектора у поларном систему координата одређујемо на основу трансформационог обрасца

(7) $$u^i = U^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = U^1 \frac{\partial x^i}{\partial y^1} + U^2 \frac{\partial x^i}{\partial y^2}.$$

Користећи (5) и (7) добивамо

$$u^1 = \cos x^2 + 2 \sin x^2,$$

$$u^2 = -\frac{1}{x^1} \sin x^2 + \frac{2}{x^1} \cos x^2,$$

тј. контраваријантне координате датог вектора у поларном систему координата су

(8) $$\{u^i\} = \left\{\cos x^2 + 2 \sin x^2, \quad -\frac{1}{x^1} \sin x^2 + \frac{2}{x^1} \cos x^2\right\}.$$

У датој тачки $y^1 = 1$, $y^2 = 0$, тј. $x^1 = 1$, $x^2 = 0$, је

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 2; \qquad u^1 = 1, \quad u^2 = 2,$$

тј.

$$\{u_i\} = \{1, \ 2\}$$

и

$$\{u^i\} = \{1, \ 2\}.$$

Промене коваријантних координата $u_i$ при паралелном померању су

$$du_i = \left\{ {j \atop i\,k} \right\} u_j \, dx^k.$$

На основу овога добивамо

$$du_1 = \left\{ {j \atop 1\,k} \right\} u_j \, dx^k,$$

$$du_2 = \left\{ {j \atop 2\,k} \right\} u_j \, dx^k.$$

С обзиром да су координате метричког тензора за поларни систем координата

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{Bmatrix}, \qquad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(x^1)^2} \end{Bmatrix},$$

за једине од нуле различите координате Кристофеловог симбола друге врсте добивамо

$$\left\{ {1 \atop 2\,2} \right\} = g^{11} [22,1] = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} (2\,x^1) = -x^1,$$

$$\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\} = \left\{ {2 \atop 2\,1} \right\} = g^{22} [21,2] = -g^{22} [22,1] = -\frac{1}{(x^1)^2} (-x^1) = \frac{1}{x^1},$$

тако да је

$$du_1 = \left\{ {2 \atop 1\,2} \right\} u_2 \, dx^2 = (2 \cos x^2 - \sin x^2) \, dx^2,$$

(9) $$du_2 = \left\{ {1 \atop 2\,2} \right\} u_1 \, dx^2 + \left\{ {2 \atop 2\,1} \right\} u_2 \, dx^1 =$$

$$= -x^1 (\cos x^2 + 2 \sin x^2) \, dx^2 + (2 \cos x^2 - \sin x^2) \, dx^1.$$



Промене контраваријантних координата $u^i$ при паралелном померању су

$$du^i = -\left\{ {i \atop j\,k} \right\} u^j \, dx^k.$$

На основу овога добивамо

$$du^1 = -\left\{ {1 \atop j\,k} \right\} u^j \, dx^k = -\left\{ {1 \atop 2\,2} \right\} u^2 \, dx^2,$$

$$du^2 = -\left\{ {2 \atop j\,k} \right\} u^j \, dx^k = -\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\} u^1 \, dx^2 - \left\{ {2 \atop 2\,1} \right\} u^2 \, dx^1,$$

односно

$$du^1 = (2 \cos x^2 - \sin x^2) \, dx^2,$$

(10) $$du^2 = \frac{1}{(x^1)^2} (\sin x^2 - 2 \cos x^2) \, dx^1 - \frac{1}{x^1} (\cos x^2 + 2 \sin x^2) \, dx^2.$$

При паралелном померању по кругу

$$x^1 = 1,$$

је $dx^1 = 0$, па су промене коваријантних и контраваријантних координата, (9) и (10), дате са

$$du_1 = (2 \cos x^2 - \sin x^2) \, dx^2, \qquad du_2 = -(\cos x^2 + 2 \sin x^2) \, dx^2,$$

$$du^1 = (2 \cos x^2 - \sin x^2) \, dx^2, \qquad du^2 = -(\cos x^2 + 2 \sin x^2) \, dx^2.$$

**Задатак 176.** (Одељак 28., задатак 3.). Ако су $u_i$ и $u^i$ коваријантне и контраваријантне координате неког вектора, показати да ако коваријантне координате задовољавају услов за паралелно померање то исто чине и контраваријантне координате, и обрнуто.

*Решење:* Ако коваријантне координате $u_i$ неког вектора задовољавају услов за паралелно померање, тј. ако задовољавају једначину

$$\frac{dx^k}{ds} \, u_{j,k} = 0,$$

онда то исто чине и контраваријантне координате тог вектора. Да бисмо то показали, извршимо композицију у горњој једначини са метричким тензором $g^{jl}$. Тада добивамо

(1) $$\frac{dx^k}{ds} \, g^{jl} u_{j,k} = 0.$$

Међутим, како је коваријантни извод метричког тензора једнак нули, једначину (1) можемо написати у облику

$$\frac{dx^k}{ds} (g^{jl} u_j)_{,k} = 0,$$

односно у облику

(2) $$\frac{dx^k}{ds} \, u^l_{,k} = 0,$$

на основу чега закључујемо да и контраваријантне координате датог вектора задовољавају услов за паралелно померање.

Да бисмо показали да важи и обрнуто, претпоставимо да важи једначина (2), тј. да контраваријантне координате $u^i$ задовољавају услов за паралелно померање. Тада, композицијом једначине (2) са метричким тензором $g_{lj}$, добивамо

$$\frac{dx^k}{ds} g_{lj} u^l_{,k} = 0,$$

или, пошто је коваријантни извод метричког тензора једнак нули,

$$\frac{dx^k}{ds} (g_{lj} u^l)_{,k} = 0,$$

односно

$$\frac{dx^k}{ds} u_{j,k} = 0,$$

на основу чега закључујемо да и коваријантне координате задовољавају услов за паралелно померање.

**Задатак 177.** (Одељак 28., задатак 4.). Нека вектор $v^i$ одређује паралелно векторско поље дуж неке криве дефинисане параметром $t$ и нека вектор $u_i$ такође зависи од истог параметра $t$. Извести правило за апсолутни извод вектора $u_i$ полазећи од $\dfrac{d}{dt}(u_i v^i)$.

***Решење:*** Апсолутни извод скаларне инваријанте по параметру $t$ једнак је њеном обичном изводу. Према томе је

$$\frac{\delta}{\delta t}(u_i v^i) = \frac{d}{dt}(u_i v^i) = (u_i v^i)_{,k} \frac{dx^k}{dt} = v^i u_{i,k} \frac{dx^k}{dt} + u_i v^i_{,k} \frac{dx^k}{dt}.$$

С друге стране, међутим, је

$$\frac{\delta}{\delta t}(u_i v^i) = v^i \frac{\delta u_i}{\delta t} + u_i \frac{\delta v^i}{\delta t},$$

па можемо писати

$$v^i \frac{\delta u_i}{\delta t} + u_i \frac{\delta v^i}{\delta t} = v^i u_{i,k} \frac{dx^k}{dt} + u_i v^i_{,k} \frac{dx^k}{dt}.$$

С обзиром да вектор $v^i$, дуж криве $x^i = x^i(t)$, одређује паралелно векторско поље, биће (види одељак 23., једначину 9. и одељак 28., једначину 7.)

$$\frac{\delta v^i}{\delta t} = v^i_{,k} \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

На основу тога добивамо

$$v^i \frac{\delta u_i}{\delta t} = v^i u_{i,k} \frac{dx^k}{dt},$$



односно

$$\left(\frac{\delta u_i}{\delta t} - u_{i,k} \frac{dx^k}{dt}\right) v^i = 0.$$

Како $v^i$ може бити ма који коваријантно константан вектор дуж криве $x^i = x^i(t)$, следи да дуж те криве мора бити

$$\frac{\delta u_i}{\delta t} = u_{i,k} \frac{dx^k}{dt},$$

односно

$$\frac{\delta u_i}{\delta t} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} - u_l \begin{Bmatrix} l \\ i\,k \end{Bmatrix}\right) \frac{dx^k}{dt},$$

или

$$\frac{\delta u_i}{\delta t} = \frac{du_i}{dt} - u_l \begin{Bmatrix} l \\ i\,k \end{Bmatrix} \frac{dx^k}{dt},$$

што је и требало извести.

**Задатак 178.** (Одељак 28., задатак 5.). Ако $\lambda^i$ и $\mu^i$ одређују дуж неке криве дефинисане параметром $t$ паралелна векторска поља, извести правило за апсолутни извод тензора $u_{ij}$ полазећи од $\dfrac{d}{dt}(u_{ij} \lambda^i \mu^j)$.

***Решење:*** Како је

$$\frac{\delta}{\delta t}(u_{ij} \lambda^i \mu^j) = \frac{d}{dt}(u_{ij} \lambda^i \mu^j) = (u_{ij} \lambda^i \mu^j)_{,k} \frac{dx^k}{dt}$$

и

$$\frac{\delta}{\delta t}(u_{ij} \lambda^i \mu^j) = \frac{\delta u_{ij}}{\delta t} \lambda^i \mu^j + u_{ij} \frac{\delta \lambda^i}{\delta t} \mu^j + u_{ij} \lambda^i \frac{\delta \mu^j}{\delta t},$$

можемо писати

$$\frac{\delta u_{ij}}{\delta t} \lambda^i \mu^j + u_{ij} \frac{\delta \lambda^i}{\delta t} \mu^j + u_{ij} \lambda^i \frac{\delta \mu^j}{\delta t} = u_{ij,k} \frac{dx^k}{dt} \lambda^i \mu^j + u_{ij} (\lambda^i_{,k} \mu^j + \lambda^i \mu^j_{,k}) \frac{dx^k}{dt}.$$

С обзиром да су $\lambda^i$ и $\mu^i$ коваријантно константни вектори дуж криве $x^i = x^i(t)$, можемо писати

$$\frac{\delta u_{ij}}{\delta t} \lambda^i \mu^j = u_{ij,k} \frac{dx^k}{dt} \lambda^i \mu^j,$$

односно

$$\left(\frac{\delta u_{ij}}{\delta t} - u_{ij,k} \frac{dx^k}{dt}\right) \lambda^i \mu^j = 0.$$

Како вектори $\lambda^i$ и $\mu^i$ могу бити произвољни коваријантно константни вектори дуж криве $x^i = x^i(t)$, следи да дуж те криве мора бити

$$\frac{\delta u_{ij}}{\delta t} = u_{ij,k} \frac{dx^k}{dt},$$

односно

$$\frac{\delta u_{ij}}{\delta t}=\left(\frac{\partial u_{ij}}{\partial x^k}-u_{lj}\begin{Bmatrix} l \\ i\,k \end{Bmatrix}-u_{il}\begin{Bmatrix} l \\ j\,k \end{Bmatrix}\right)\frac{dx^k}{dt},$$

или

$$\frac{\delta u_{ij}}{\delta t}=\frac{du_{ij}}{dt}-u_{lj}\begin{Bmatrix} l \\ i\,k \end{Bmatrix}\frac{dx^k}{dt}-u_{il}\begin{Bmatrix} l \\ j\,k \end{Bmatrix}\frac{dx^k}{dt}$$

што је и требало извести.

## 29. Паралелно померање вектора по површи

**Задатак 179.** (Одељак 29., задатак 1.). Потребан и довољан услов да јединични вектори тангената кривих $u^\alpha=\text{const.}$ за $\alpha=1$ или 2 буду паралелни у односу на криву $C$ на површи биће да ова последња буде интеграл једначине

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\,\gamma \end{Bmatrix} du^\beta=0, \qquad (\beta\neq\alpha).$$

***Решење***: Јединични вектори тангената кривих $u^\alpha=\text{const.}$ су одређени координатама

(1) $$\lambda^{\alpha}_{(\nu)}=\frac{1}{\sqrt{g_{\nu\nu}}}\delta^{\alpha}_{\nu}, \qquad (\text{не сумирати по } \nu).$$

Услов паралелности вектора $\lambda^{\alpha}_{(\nu)}$ у односу на криву $C$ је

$$\lambda^{\alpha}_{(\nu),\,\beta}\,du^\beta=0,$$

тј.

$$\left(\frac{\partial\lambda^{\alpha}_{(\nu)}}{\partial u^\beta}+\lambda^{\gamma}_{(\nu)}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \gamma\,\beta \end{Bmatrix}\right)du^\beta=0.$$

Ако у овој једначини координате вектора $\lambda^{\alpha}_{(\nu)}$ изразимо преко релације (1), добивамо

$$\left[\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{\nu\nu}}}\delta^{\alpha}_{\nu}\right)+\frac{1}{\sqrt{g_{\nu\nu}}}\delta^{\gamma}_{\nu}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \gamma\,\beta \end{Bmatrix}\right]du^\beta=0,$$

или, ако извршимо назначено диференцирање,

$$\left(-\frac{1}{2\,(g_{\nu\nu})^{3/2}}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial u^\beta}\delta^{\alpha}_{\nu}+\frac{1}{(g_{\nu\nu})^{1/2}}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\,\beta \end{Bmatrix}\right)du^\beta=0,$$

односно

(2) $$\left(-\frac{1}{2g_{\nu\nu}}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial u^\beta}\delta^{\alpha}_{\nu}+\begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\,\beta \end{Bmatrix}\right)du^\beta=0.$$

Ако је у једначини (2) $\alpha\neq\nu$, добивамо

(3) $$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\,\beta \end{Bmatrix}du^\beta=0,$$

тј. координате $u^\beta$ криве $C$ задовољавају систем диференцијалних једначина (3).



Ако је у једначини (2) $\alpha=\nu=\Lambda$, добивамо

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\Lambda\Lambda}}{\partial u^\beta}+g_{\Lambda\Lambda}\begin{Bmatrix} \Lambda \\ \Lambda\,\beta \end{Bmatrix}\right)du^\beta=0.$$

Како је

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\Lambda\Lambda}}{\partial u^\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\Lambda\Lambda}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\Lambda\beta}}{\partial u^\Lambda}-\frac{\partial g_{\beta\Lambda}}{\partial u^\Lambda}\right)=[\beta\Lambda,\,\Lambda]=g_{\mu\Lambda}\begin{Bmatrix} \mu \\ \beta\,\Lambda \end{Bmatrix},$$

горња једначина постаје

$$\left(-g_{\mu\Lambda}\begin{Bmatrix} \mu \\ \beta\,\Lambda \end{Bmatrix}+g_{\Lambda\Lambda}\begin{Bmatrix} \Lambda \\ \beta\,\Lambda \end{Bmatrix}\right)du^\beta=0.$$

С обзиром да $\mu$ узима вредности 1 и 2, тј. $\Lambda$ и $M$ $(\Lambda\neq M)$, то је

$$\left(-g_{\Lambda\Lambda}\begin{Bmatrix} \Lambda \\ \Lambda\,\beta \end{Bmatrix}-g_{M\Lambda}\begin{Bmatrix} M \\ \beta\,\Lambda \end{Bmatrix}+g_{\Lambda\Lambda}\begin{Bmatrix} \Lambda \\ \Lambda\,\beta \end{Bmatrix}\right)du^\beta=0,$$

тј.

$$g_{M\Lambda}\begin{Bmatrix} M \\ \Lambda\,\beta \end{Bmatrix}du^\beta=0,$$

или

$$\begin{Bmatrix} M \\ \Lambda\,\beta \end{Bmatrix}du^\beta=0,$$

што не представља никакав нов услов јер је већ садржан у (3). **Дакле, (3)** су потребни и довољни услови.

**Задатак 180.** (Одељак 29., задатак 2.). Доказати да потребан и довољан услов да крива $u^2=\varphi(u^1)$ на површи $x^i=x^i(u^1,\,u^2)$ буде геодезијска линија гласи

$$\varphi''-\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}\varphi'^3+\left(\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,2 \end{Bmatrix}\right)\varphi'^2+\left(2\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,2 \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}\right)\varphi'+\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}=0,$$

где црте назначују диференцирање по $u^1$.

***Решење***: Ако је на површи $x^i=x^i(u^1,\,u^2)$ крива дата једначином

$$u^2=\varphi(u^1),$$

онда, да би она била геодезијска линија, њене координате морају задовољавати једначину геодезијских линија, тј.

$$\frac{d^2u^i}{dt^2}+\begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}-\frac{du^i}{dt}\frac{s''}{s'}=0, \qquad \left(s'=\frac{ds}{dt},\quad s''=\frac{d^2s}{dt^2}\right).$$

Ако у овој једначини уместо параметра $t$ пишемо $u^1$, добивамо

$$\frac{d^2u^l}{(du^1)^2}+\left\{\begin{matrix} l \\ j\ k\end{matrix}\right\}\frac{du^j}{du^1}\frac{du^k}{du^1}-\frac{du^l}{du^1}\frac{s''}{s'}=0.$$

Овој тензорској једначини одговарају следеће две скаларне једначине: за $l=1$,

$$\left\{\begin{matrix} 1 \\ j\ k\end{matrix}\right\}\frac{du^j}{du^1}\frac{du^k}{du^1}-\frac{s''}{s'}=0,$$

односно

(1) $$\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1\end{matrix}\right\}+2\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 2\end{matrix}\right\}\varphi'+\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\ 2\end{matrix}\right\}\varphi'^2-\frac{s''}{s'}=0,$$

и за $l=2$,

$$\varphi''+\left\{\begin{matrix} 2 \\ j\ k\end{matrix}\right\}\frac{du^j}{du^1}\frac{du^k}{du^1}-\varphi'\frac{s''}{s'}=0,$$

односно

(2) $$\varphi''+\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 1\end{matrix}\right\}+2\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 2\end{matrix}\right\}\varphi'+\left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 2\end{matrix}\right\}\varphi'^2-\varphi'\frac{s''}{s'}=0.$$

Елиминацијом $\frac{s''}{s'}$ из једначина (1) и (2) добивамо

$$\varphi''-\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\ 2\end{matrix}\right\}\varphi'^3+\left(\left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 2\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 2\end{matrix}\right\}\right)\varphi'^2+\left(2\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 2\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1\end{matrix}\right\}\right)\varphi'+\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 1\end{matrix}\right\}=0,$$

што представља потребан и довољан услов да дата крива буде геодезијска линија.

**Задатак 181.** (Одељак 29., задатак 3.) Написати диференцијалне једначине геодезијских линија на сфери, кад се за координате на њеној површи узму географска дужина $\varphi$ и ширина $\theta$. Интегралити те једначине и показати да се једначина геодезијских линија на сфери може написати у коначном облику

$$A\cos\theta\cos\varphi+B\cos\theta\sin\varphi+C\sin\theta=0,$$

где су $A$, $B$, $C$ произвољне константе.

***Решење:*** Узмимо $\varphi=u^1$, $\theta=u^2$ и у једначини геодезијске линије,

$$\frac{d^2u^l}{(dt)^2}+\left\{\begin{matrix} l \\ jk\end{matrix}\right\}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}-\frac{du^l}{dt}\frac{s''}{s'}=0,$$

нека је $t=u^1$. Тада је $u^2=\theta=\theta(u^1)$, па једначина геодезијских линија (види претходни задатак) гласи

(1) $$\theta''-\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\ 2\end{matrix}\right\}\theta'^3+\left(\left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 2\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 2\end{matrix}\right\}\right)\theta'^2+\left(2\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 2\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1\end{matrix}\right\}\right)\theta'+\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 1\end{matrix}\right\}=0.$$



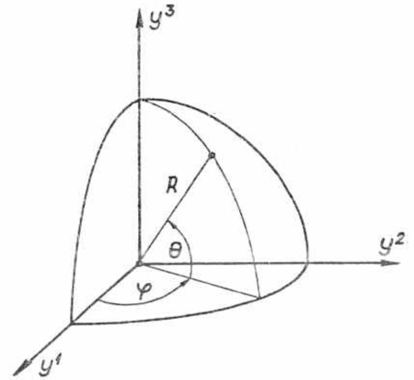
На основу веза између Декартових правоуглих координата и координата $u^1$ и $u^2$ на површи сфере (види слику)

$$\varphi=u^1,\quad \theta=u^2,$$

$$y^1=R\cos u^2\cos u^1$$

$$y^2=R\cos u^2\sin u^1$$

$$y^3=R\sin u^2,$$




и на основу обрасца

$$g_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial y^k}{\partial u^i}\frac{\partial y^k}{\partial u^j},$$

за координате метричког тензора добивамо

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix} R^2\cos^2u^2 & 0 \\ 0 & R^2\end{Bmatrix},\quad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix} \frac{1}{R^2\cos^2u^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2}\end{Bmatrix},$$

тако да су координате Кристофеловог симбола друге врсте (које су различите од нуле)

$$\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 2\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\ 1\end{matrix}\right\}=-\operatorname{tg}u^2,\qquad \left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 1\end{matrix}\right\}=\sin u^2\cos u^2.$$

На основу овога, једначина (1) постаје

$$\theta''-2\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 2\end{matrix}\right\}\theta'^2+\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 1\end{matrix}\right\}=0,$$

односно

(2) $$\theta''+2\operatorname{tg}\theta\cdot\theta'^2+\sin\theta\cos\theta=0.$$

Сменом $\operatorname{tg}\theta=w$ једначина (2) прелази у

$$w''+w=0.$$

Отуда је

$$w=\operatorname{tg}\theta=-A_1\cos\varphi-A_2\sin\varphi,$$

односно

$$A_1\cos\theta\cos\varphi+A_2\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta=0,$$

или, ако уведемо ознаке $A_1=\frac{A}{C}$, $A_2=\frac{B}{C}$, $(C\neq 0)$,

(3) $$A\cos\theta\cos\varphi+B\cos\theta\sin\varphi+C\sin\theta=0.$$

За $u^1 = \text{const.}$ полазна диференцијална једначина даје решење које је, за $C=0$, $B \neq 0$, садржано у једначини (3), тј.

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{A}{B},$$

односно

$$\varphi = \text{const.},$$

што су кругови у меридијанским равнима, тј. геодезијске линије.

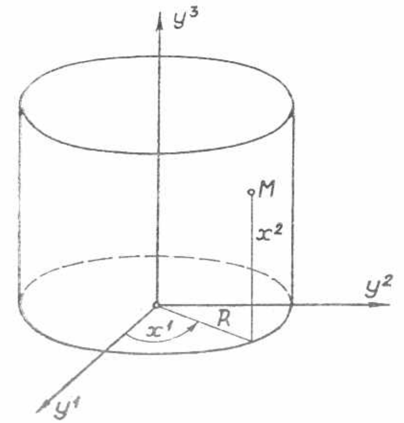
## 30. Риман-Кристофелов тензор. Ламеове релације

**Задатак 182.** (Одељак 30., задатак 1.). Израчунати Риман-Кристофелов тензор за површ цилиндра, конуса и полусфере.

*Решење:* Површи цилиндра, конуса и полусфере су дводимензиони простори. Једина независна координата Риман-Кристофеловог тензора у простору од две димензије је

$$R_{1212} = \frac{\partial}{\partial x^1}[22,1] - \frac{\partial}{\partial x^2}[21,1] + \begin{Bmatrix} m \\ 2\ 1 \end{Bmatrix}[21, m] - \begin{Bmatrix} m \\ 2\ 2 \end{Bmatrix}[11, m].$$

а) Везе између Декартових правоуглих координата и координата на површи цилиндра (види слику) су




$$y^1 = R\cos x^1,$$

$$y^2 = R\sin x^1,$$

$$y^3 = x^2.$$

На основу обрасца

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^j},$$

за координате метричког тензора на површи цилиндра добивамо

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$



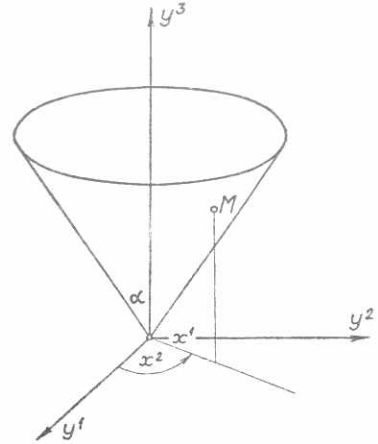
С обзиром да су координате метричког тензора константе, координате Кристофелових симбола (прве и друге врсте) једнаке су нули, тј.

$$[ij, k] = 0, \quad \begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix} = 0,$$

па је и Риман-Кристофелов тензор идентички једнак нули, тј.

$$R_{lijk} = 0.$$

б) Везе између Декартових правоуглих координата и координата на површи конуса (види слику) су




$$y^1 = x^1\cos x^2,$$

$$y^2 = x^1\sin x^2,$$

$$y^3 = x^1\operatorname{cotg}\alpha,$$

па за координате метричког тензора добивамо

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sin^2\alpha} & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{Bmatrix}, \quad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x^1)^2} \end{Bmatrix}.$$

На основу овога, координате Кристофелових симбола прве и друге врсте (које су различите од нуле) су

$$[12,2] = [21,2] = x^1, \quad [22,1] = -[12,2] = -x^1,$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{Bmatrix} = -x^1\sin^2\alpha, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x^1},$$

па је

$$R_{1212} = \frac{\partial}{\partial x^1}[22,1] - \frac{\partial}{\partial x^2}[21,1] + \begin{Bmatrix} m \\ 2\ 1 \end{Bmatrix}[21, m] - \begin{Bmatrix} m \\ 2\ 2 \end{Bmatrix}[11, m],$$

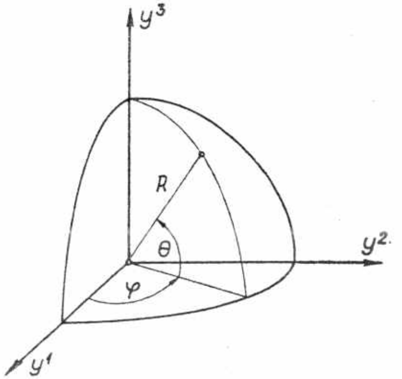
односно

$$R_{1212} = \frac{\partial}{\partial x^1}(-x^1) + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1 \end{Bmatrix}[21,2] = -1 + \frac{1}{x^1}\cdot x^1 = -1 + 1 = 0,$$

на основу чега закључујемо, с обзиром да је $R_{1212}$ једина независна координата, да су све координате Риман-Кристофеловог тензора једнаке нули, тј.

$$R_{lijk} = 0.$$

в) Везе између Декартових правоуглих координата и координата на површи полусфере (види слику) су




$$\varphi = x^1,$$

$$\theta = x^2,$$

$$y^1 = R\cos x^1 \cos x^2,$$

$$y^2 = R\sin x^1 \cos x^2,$$

$$y^3 = R\sin x^2,$$

па за координате метричког тензора добивамо

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} R^2\cos^2 x^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{Bmatrix}, \quad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{R^2\cos^2 x^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R^2} \end{Bmatrix}.$$

На основу овога, од нуле различите координате Кристофелових симбола прве и друге врсте су

$$[11,2] = R^2 \sin x^2 \cos x^2, \quad [12,1] = [21,1] = -R^2 \sin x^2 \cos x^2,$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 1 \end{Bmatrix} = -\operatorname{tg} x^2, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{Bmatrix} = \sin x^2 \cos x^2,$$

па за једину независну координату Риман-Кристофеловог тензора добивамо

$$R_{1212} = -\frac{\partial}{\partial x^2}(-R^2 \sin x^2 \cos x^2) + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 1 \end{Bmatrix}[21,1] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^2}(R^2 \sin x^2 \cos x^2) + \operatorname{tg} x^2\, R^2 \sin x^2 \cos x^2,$$

односно

$$R_{1212} = R^2 \cos^2 x^2.$$

На основу познатих алгебарских особина Риман-Кристофеловог тензора, из ове координате можемо одредити све остале.

*Напомена.* Уколико су у неком простору све координате Риман-Кристофеловог тензора једнаке нули — простор је еуклидски. У противном (тј. уколико постоји бар једна координата различита од нуле) — простор је римански. Према томе, на основу резултата у овом задатку, површи цилиндра и конуса су еуклидски простори (дводимензиони), док је површ полусфере (па, према томе, и сфере) римански простор. Да површ сфере није еуклидски простор, тј. да нема еуклидску метрику, било је показано (на други начин) у задатку 110.



**Задатак 183.** (Одељак 30., задатак 2.). Ако је метрика неког риманског простора од три димензије одређена формом

$$ds^2 = (h_1\, dx^1)^2 + (h_2\, dx^2)^2 + (h_3\, dx^3)^2,$$

где су $h_1$, $h_2$, $h_3$, функције од три координате, израчунати Риман-Кристофелов тензор помоћу функција $h_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и њихових извода. Показати да ће овај тензор бити једнак нули, ако је $h_1$ функција само од $x^1$, $h_2$ само од $x^2$ и $h_3$ само од $x^3$.

***Решење:*** На основу метричке форме

$$ds^2 = (h_1\, dx^1)^2 + (h_2\, dx^2)^2 + (h_3\, dx^3)^2,$$

координате метричког тензора су

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{Bmatrix}, \quad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{k_3} \end{Bmatrix}, \quad (k_i = (h_i)^2),$$

при чему је

$$k_i = k_i(x^1, x^2, x^3), \quad (i = 1, 2, 3).$$

На основу координата метричког тензора, закључујемо да се ради о ортогоналном координатном систему у риманском простору од три димензије. С обзиром на особине Кристофелових симбола у односу на ортогоналне системе координата (види задатак 138.), у овом случају добивамо

$$[12,3] = [21,3] = [13,2] = [31,2] = [32,1] = [23,1] = 0,$$

$$[11,1] = \frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^1},$$

$$[22,2] = \frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^2},$$

$$[33,3] = \frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^3},$$

$$[22,1] = -[21,2] = -[12,2] = -\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^1},$$

$$[33,1] = -[31,3] = -[13,3] = -\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^1},$$

$$[22,3] = -[23,2] = -[32,2] = -\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^3},$$

$$[33,2] = -[32,3] = -[23,3] = -\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^2},$$

$$[11,2] = -[12,1] = -[21,1] = -\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^2},$$

$$[11,3] = -[13,1] = -[31,1] = -\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^3},$$

$$\begin{Bmatrix} I \\ J\,K \end{Bmatrix} = g^{II}[JK,\ I], \quad (I,\ J,\ K = 1,\ 2,\ 3).$$

Координате коваријантног Риман-Кристофеловог тензора одређене су изразом

$$R_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}[ik,\ l] - \frac{\partial}{\partial x^k}[ij,\ l] + \begin{Bmatrix} m \\ i\,j \end{Bmatrix}[kl,\ m] - \begin{Bmatrix} m \\ i\,k \end{Bmatrix}[jl,\ m],$$

и има их, с обзиром да је простор од три димензије, само шест међусобно независних. Тих шест независних координата су

$$R_{1212},\ R_{1213},\ R_{1223},\ R_{1313},\ R_{1323},\ R_{2323}.$$

Појединачно, за сваку од ових координата добивамо

1) $$R_{1212} = \frac{\partial}{\partial x^1}[22,1] - \frac{\partial}{\partial x^2}[21,1] + \begin{Bmatrix} m \\ 2\,1 \end{Bmatrix}[21,\ m] - \begin{Bmatrix} m \\ 2\,2 \end{Bmatrix}[11,\ m] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^1}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^1}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^2}\right) + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,1 \end{Bmatrix}[21,1] + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,1 \end{Bmatrix}[21,2] +$$

$$+ \begin{Bmatrix} 3 \\ 2\,1 \end{Bmatrix}[21,3] - \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}[11,1] - \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}[11,2] - \begin{Bmatrix} 3 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}[11,3] = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_2}{(\partial x^1)^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_1}{(\partial x^2)^2} + g^{11}[21,1][21,1] + g^{22}[21,2][21,2] + g^{33}[21,3][21,3] -$$

$$-g^{11}[21,1][11,1] - g^{22}[22,2][11,2] - g^{33}[22,3][11,3] =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_2}{(\partial x^1)^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_1}{(\partial x^2)^2} + \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^1}\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^1}\right) - \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{k_3}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^3}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_2}{(\partial x^1)^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_1}{(\partial x^2)^2} +$$

$$+\frac{1}{4k_1}\left(\frac{\partial k_1}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{4k_2}\left(\frac{\partial k_2}{\partial x^1}\right)^2 + \frac{1}{4k_1}\frac{\partial k_2}{\partial x^1}\frac{\partial k_1}{\partial x^1} + \frac{1}{4k_2}\frac{\partial k_2}{\partial x^2}\frac{\partial k_1}{\partial x^2} -$$

$$-\frac{1}{4k_3}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\frac{\partial k_1}{\partial x^3},$$

2) $$R_{1213} = \frac{\partial}{\partial x^1}[23,1] - \frac{\partial}{\partial x^3}[21,1] + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,1 \end{Bmatrix}[31,1] + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,1 \end{Bmatrix}[31,2] + \begin{Bmatrix} 3 \\ 2\,1 \end{Bmatrix}[31,3] -$$

$$-\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,3 \end{Bmatrix}[11,1] - \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,3 \end{Bmatrix}[11,2] - \begin{Bmatrix} 3 \\ 2\,3 \end{Bmatrix}[11,3] =$$



$$= -\frac{\partial}{\partial x^3}[21,1] + g^{11}[21,1][31,1] - g^{22}[23,2][11,2] - g^{33}[23,3][11,3] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^3}\right) -$$

$$-\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_1}{\partial x^3 \partial x^2} + \frac{1}{4k_1}\frac{\partial k_1}{\partial x^2}\frac{\partial k_1}{\partial x^3} + \frac{1}{4k_2}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\frac{\partial k_1}{\partial x^2} + \frac{1}{4k_3}\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\frac{\partial k_1}{\partial x^3},$$

3) $$R_{1223} = \frac{\partial}{\partial x^2}[23,1] - \frac{\partial}{\partial x^3}[22,1] + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}[31,1] + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}[31,2] +$$

$$+\begin{Bmatrix} 3 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}[31,3] - \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,3 \end{Bmatrix}[21,1] - \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,3 \end{Bmatrix}[21,2] - \begin{Bmatrix} 3 \\ 2\,3 \end{Bmatrix}[21,3] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^3}[22,1] + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}[31,1] + \begin{Bmatrix} 3 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}[31,3] - \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,3 \end{Bmatrix}[21,2] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^3}[22,1] + g^{11}[22,1][31,1] + g^{33}[22,3][31,3] - g^{22}[23,2][21,2] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^3}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^1}\right) + \frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^1}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^3}\right) +$$

$$+\frac{1}{k_3}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\right) - \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_2}{\partial x^3 \partial x^1} -$$

$$-\frac{1}{4k_1}\frac{\partial k_2}{\partial x^1}\frac{\partial k_1}{\partial x^3} - \frac{1}{4k_2}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\frac{\partial k_2}{\partial x^1} - \frac{1}{4k_3}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\frac{\partial k_3}{\partial x^1},$$

4) $$R_{1313} = \frac{\partial}{\partial x^1}[33,1] - \frac{\partial}{\partial x^3}[31,1] + \begin{Bmatrix} 1 \\ 3\,1 \end{Bmatrix}[31,1] + \begin{Bmatrix} 2 \\ 3\,1 \end{Bmatrix}[31,2] +$$

$$+\begin{Bmatrix} 3 \\ 3\,1 \end{Bmatrix}[31,3] - \begin{Bmatrix} 1 \\ 3\,3 \end{Bmatrix}[11,1] - \begin{Bmatrix} 2 \\ 3\,3 \end{Bmatrix}[11,2] - \begin{Bmatrix} 3 \\ 3\,3 \end{Bmatrix}[11,3] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^1}[33,1] - \frac{\partial}{\partial x^3}[31,1] + g^{11}[31,1][31,1] + g^{33}[31,3][31,3] -$$
$$-g^{11}[33,1][11,1] - g^{22}[33,2][11,2] - g^{33}[33,3][11,3] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^1}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^3}\right) + \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^3}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^3}\right) +$$

$$+\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\right) - \frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^1}\right) -$$

$$-\frac{1}{k_2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^3}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_3}{(\partial x^1)^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_1}{(\partial x^3)^2} + \frac{1}{4k_1}\left[\left(\frac{\partial k_1}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{\partial k_1}{\partial x^1}\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\right] -$$

$$-\frac{1}{4k_2}\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\frac{\partial k_1}{\partial x^2} + \frac{1}{4k_3}\left[\left(\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\right)^2 + \frac{\partial k_3}{\partial x^1}\frac{\partial k_1}{\partial x^1}\right],$$

5) $$R_{1323} = \frac{\partial}{\partial x^2}[33,1] - \frac{\partial}{\partial x^3}[32,1] + \begin{Bmatrix}1\\3\ 2\end{Bmatrix}[31,1] + \begin{Bmatrix}2\\3\ 2\end{Bmatrix}[31,2] +$$

$$+\begin{Bmatrix}3\\3\ 2\end{Bmatrix}[31,3] - \begin{Bmatrix}1\\3\ 3\end{Bmatrix}[21,1] - \begin{Bmatrix}2\\3\ 3\end{Bmatrix}[21,2] - \begin{Bmatrix}3\\3\ 3\end{Bmatrix}[21,3] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^2}[33,1] + g^{33}[32,3][31,3] - g^{11}[33,1][21,1] -$$

$$-g^{22}[33,2][21,2] - g^{33}[33,3][21,3] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\right) - \frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_1}{\partial x^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{k_2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^1}\right) + \frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_3}{\partial x^2 \partial x^1} + \frac{1}{4k_1}\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\frac{\partial k_1}{\partial x^2} + \frac{1}{4k_2}\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\frac{\partial k_2}{\partial x^1} + \frac{1}{4k_3}\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\frac{\partial k_3}{\partial x^1},$$

6) $$R_{2323} = \frac{\partial}{\partial x^2}[33,2] - \frac{\partial}{\partial x^3}[32,2] + \begin{Bmatrix}1\\3\ 2\end{Bmatrix}[32,1] + \begin{Bmatrix}2\\3\ 2\end{Bmatrix}[32,2] +$$

$$+\begin{Bmatrix}3\\3\ 2\end{Bmatrix}[32,3] - \begin{Bmatrix}1\\3\ 3\end{Bmatrix}[22,1] - \begin{Bmatrix}2\\3\ 3\end{Bmatrix}[22,2] - \begin{Bmatrix}3\\3\ 3\end{Bmatrix}[22,3] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^2}[33,2] - \frac{\partial}{\partial x^3}[32,2] + g^{22}[32,2][32,2] + g^{33}[32,3][32,3] -$$

$$-g^{11}[33,1][22,1] - g^{22}[33,2][22,2] - g^{33}[33,3][22,3] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\right) + \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{1}{k_1}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^1}\right) -$$

$$-\frac{1}{k_2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial k_3}{\partial x^3}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_3}{(\partial x^2)^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_2}{(\partial x^3)^2} - \frac{1}{4k_1}\frac{\partial k_3}{\partial x^1}\frac{\partial k_2}{\partial x^1} + \frac{1}{4k_2}\left[\left(\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\frac{\partial k_2}{\partial x^2}\right] + \frac{1}{4k_3}\left[\left(\frac{\partial k_3}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial k_3}{\partial x^3}\frac{\partial k_2}{\partial x^3}\right].$$



Ако су функције $h_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ такве да је

$$h_1 = h_1(x^1), \qquad h_2 = h_2(x^2), \qquad h_3 = h_3(x^3),$$

тј. ако је метрички тензор облика

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} k_1(x^1) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(x^2) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(x^3) \end{Bmatrix},$$

онда је, очигледно,

$$R_{1212} = R_{1213} = R_{1223} = R_{1313} = R_{1323} = R_{2323} = 0,$$

тј.

$$R_{lijk} = 0,$$

па је у том случају простор еуклидски.

**Задатак 184.** (Одељак 30., задатак 3.). Ако се метрички тензор $a_{ij}$ неког простора промени у $a_{ij}+b_{ij}$, где су $b_{ij}$ мале величине, одредити промене координата Риман-Кристофеловог тензора у првој апроксимацији.

***Решење***: У односу на метрички тензор $a_{ij}$, координате Риман-Кристофеловог тензора су

$$R_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}[ik,\ l] - \frac{\partial}{\partial x^k}[ij,\ l] + \begin{Bmatrix}m\\i\ j\end{Bmatrix}[kl,\ m] - \begin{Bmatrix}m\\i\ k\end{Bmatrix}[jl,\ m],$$

где је

$$[ij,\ k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

и

$$\begin{Bmatrix}m\\i\ j\end{Bmatrix} = a^{mk}[ij,\ k].$$

Ако се координате метричког тензора $a_{ij}$ промене у $a_{ij}+b_{ij}=g_{ij}$, где су $b_{ij}$ мале величине, онда ће координате Риман-Кристофеловог тензора бити

(1) $$R^*_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}[ik,\ l]^* - \frac{\partial}{\partial x^k}[ij,\ l]^* + \begin{Bmatrix}m\\i\ j\end{Bmatrix}^*[kl,\ m]^* - \begin{Bmatrix}m\\i\ k\end{Bmatrix}^*[jl,\ m]^*,$$

где је

(2) $$[ij,\ k]^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial b_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k}\right) = [ij,\ k] + B_{ijk},$$

са ознаком

$$B_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial b_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

и где је

$$\begin{Bmatrix}m\\i\ j\end{Bmatrix}^* = g^{mk}[ij,\ k]^* = g^{mk}[ij,\ k] + g^{mk}B_{ijk}.$$

Одредимо, сада, контраваријантни тензор $g^{ij}$ у првој апроксимацији. Можемо га изразити у облику

$$g^{ij} = a^{ij} + c^{ij},$$

где су $c^{ij}$ мале величине које треба одредити. На основу релације

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k,$$

добивамо

$$(a_{ij} + b_{ij})\,(a^{jk} + c^{jk}) = \delta_i^k,$$

односно

$$a_{ij}\, a^{jk} + a_{ij}\, c^{jk} + b_{ij}\, a^{jk} + b_{ij}\, c^{jk} = \delta_i^k.$$

Одавде следи

$$a_{ij}\, c^{jk} = -b_{ij}\, a^{jk} - b_{ij}\, c^{jk},$$

или, ако занемаримо мале величине вишег реда,

$$a_{ij}\, c^{jk} = -b_{ij}\, a^{jk}.$$

Одавде, композицијом са $a^{ri}$, добивамо

$$\delta_j^r\, c^{jk} = -b_{ij}\, a^{jk}\, a^{ri},$$

односно

$$c^{rk} = -b^{rk},$$

где је, у првој апроксимацији, $b^{rk} = g^{ri}\, g^{kj}\, b_{ij} \approx b_{ij}\, a^{ir}\, a^{jk}$, тако да можемо писати

$$g^{ij} \approx a^{ij} - b^{ij}.$$

На основу овога, координате Кристофеловог симбола друге врсте су

$$\begin{Bmatrix} m \\ i\,j \end{Bmatrix}^* = (a^{mk} - b^{mk})\,[ij,\, k] + (a^{mk} - b^{mk})\, B_{ijk},$$

или, ако занемаримо мале величине, у првој апроксимацији,

(3) $$\begin{Bmatrix} m \\ i\,j \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} m \\ i\,j \end{Bmatrix} + a^{mk}\, B_{ijk},$$

при чему $B_{ijk}$ не морају бити мале величине, јер парцијални изводи малих величина не морају бити мале величине. Претпоставили смо да нису. Ако, сада, (2) и (3) заменимо у (1), добивамо

$$R^*_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}([ik,\, l] + B_{ikl}) - \frac{\partial}{\partial x^k}([ij,\, l] + B_{ijl}) + \left(\begin{Bmatrix} m \\ i\,j \end{Bmatrix} + a^{ms}\, B_{ijs}\right) \cdot$$

$$\cdot([kl,\, m] + B_{klm}) - \left(\begin{Bmatrix} m \\ i\,k \end{Bmatrix} + a^{ms}\, B_{iks}\right) \cdot ([jl,\, m] + B_{jlm}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}[ik,\, l] - \frac{\partial}{\partial x^k}[ij,\, l] + \begin{Bmatrix} m \\ i\,j \end{Bmatrix}[kl,\, m] - \begin{Bmatrix} m \\ i\,k \end{Bmatrix}[jl,\, m] + \frac{\partial}{\partial x^j} B_{ikl} - \frac{\partial}{\partial x^k} B_{ijl} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} m \\ i\,j \end{Bmatrix} B_{klm} - \begin{Bmatrix} m \\ i\,k \end{Bmatrix} B_{jlm} + a^{ms}\, B_{ijs}\,[kl,\, m] - a^{ms}\, B_{iks}\,[jl,\, m] +$$

$$+ a^{ms}\, B_{ijs}\, B_{klm} - a^{ms}\, B_{iks}\, B_{jlm} =$$



$$= R_{lijk} + \frac{\partial}{\partial x^j} B_{ikl} - \frac{\partial}{\partial x^k} B_{ijl} + \begin{Bmatrix} m \\ i\,j \end{Bmatrix} B_{klm} - \begin{Bmatrix} m \\ i\,k \end{Bmatrix} B_{jlm} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} s \\ k\,l \end{Bmatrix} B_{ijs} - \begin{Bmatrix} s \\ j\,l \end{Bmatrix} B_{iks} + a^{ms}\,(B_{ijs}\, B_{klm} - B_{iks}\, B_{jlm}),$$

тако да су промене координата Риман—Кристофеловог тензора, у првој апроксимацији,

$$\Delta R_{lijk} = R^*_{lijk} - R_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x^j} B_{ikl} - \frac{\partial}{\partial x^k} B_{ijl} + \begin{Bmatrix} m \\ ij \end{Bmatrix} B_{klm} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} m \\ k\,l \end{Bmatrix} B_{ijm} - \begin{Bmatrix} m \\ i\,k \end{Bmatrix} B_{jlm} - \begin{Bmatrix} m \\ j\,l \end{Bmatrix} B_{ikm} - a^{ms}\,(B_{ijs}\, B_{klm} - B_{iks}\, B_{jlm}),$$

што је и требало одредити.

*Напомена.* Ако су $B_{ijk}$ мале величине, тада се овај задатак своди на тип задатка 248.

**Задатак 185.** (Одељак 30., задатак 4.). Израчунати $R_{1212}$ за површ чија је метричка форма

$$ds^2 = (a)^2 \cos^2 \omega\,(du^1)^2 + (a)^2 \sin^2 \omega\,(du^2)^2,$$

где је $a$ константа, а $\omega$ функција од $u^1$ и $u^2$.

***Решење:*** Из израза за метричку форму,

$$ds^2 = (a)^2 \cos^2 \omega\,(du^1)^2 + (a)^2 \sin^2 \omega\,(du^2)^2,$$

видимо да су координате метричког тензора

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} (a)^2 \cos^2 \omega & 0 \\ 0 & (a)^2 \sin^2 \omega \end{Bmatrix}, \qquad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{(a)^2 \cos^2 \omega} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(a)^2 \sin^2 \omega} \end{Bmatrix},$$

тј. систем координата $u^1$, $u^2$ је систем ортогоналних координата на површи. За координате Кристофелових симбола прве и друге врсте, сада, добивамо

$$[11,1] = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} = -\frac{(a)^2}{2} \cdot 2 \cos \omega \sin \omega\, \frac{\partial \omega}{\partial u^1} = -(a)^2 \sin \omega \cos \omega\, \frac{\partial \omega}{\partial u^1},$$

$$[11,2] = -[12,1] = -[21,1] = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = (a)^2 \sin \omega \cos \omega\, \frac{\partial \omega}{\partial u^2},$$

$$[22,1] = -[21,2] = -[12,2] = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = -(a)^2 \sin \omega \cos \omega\, \frac{\partial \omega}{\partial u^1},$$

$$[22,2] = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} = (a)^2 \sin \omega \cos \omega\, \frac{\partial \omega}{\partial u^2},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\;1 \end{Bmatrix} = g^{11}\,[11,1] = -\operatorname{tg} \omega\, \frac{\partial \omega}{\partial u^1},$$

$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\} = g^{22}[11,2] = \operatorname{cotg}\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^2},$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 2 \end{matrix}\right\} = g^{11}[21,1] = -\operatorname{tg}\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^2},$$

$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\} = g^{22}[12,2] = \operatorname{cotg}\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^1},$$

$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 2 \end{matrix}\right\} = g^{22}[22,2] = \operatorname{cotg}\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^2},$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix}\right\} = g^{11}[22,1] = -\operatorname{tg}\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^1},$$

па је

$$R_{1212} = \frac{\partial}{\partial u^1}[22,1] - \frac{\partial}{\partial u^2}[21,1] + \left\{\begin{matrix} m \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\}[21,m] - \left\{\begin{matrix} m \\ 2\ 2 \end{matrix}\right\}[11,m] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^1}[22,1] - \frac{\partial}{\partial u^2}[21,1] + \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\}[21,1] + \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\}[21,2] - \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix}\right\}[11,1] -$$

$$- \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 2 \end{matrix}\right\}[11,2] = \frac{\partial}{\partial u^1}\left[-(a)^2 \sin\omega\cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^1}\right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial u^2}\left[-(a)^2 \sin\omega\cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^2}\right] + \left(-\operatorname{tg}\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^2}\right)\cdot\left[-(a)^2 \sin\omega\cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^2}\right] +$$

$$+ \left(\operatorname{cotg}\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^1}\right)\cdot\left[(a)^2 \sin\omega\cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^1}\right] -$$

$$- \left(-\operatorname{tg}\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^1}\right)\cdot\left[-(a)^2 \sin\omega\cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^2}\right] -$$

$$- \left(\operatorname{cotg}\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^2}\right)\cdot\left[(a)^2 \sin\omega\cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial u^2}\right] =$$

$$= (a)^2(\sin^2\omega - \cos^2\omega)\left(\frac{\partial\omega}{\partial u^1}\right)^2 - (a)^2 \sin\omega\cos\omega \frac{\partial^2\omega}{(\partial u^1)^2} +$$

$$+ (a)^2(\cos^2\omega - \sin^2\omega)\left(\frac{\partial\omega}{\partial u^2}\right)^2 + (a)^2 \sin\omega\cos\omega \frac{\partial^2\omega}{(\partial u^2)^2} +$$

$$+ (a)^2\sin^2\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial u^2}\right)^2 + (a)^2\cos^2\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial u^1}\right)^2 - (a)^2\sin^2\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial u^1}\right)^2 -$$

$$- (a)^2\cos^2\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial u^2}\right)^2,$$



односно

$$R_{1212} = (a)^2 \sin\omega\cos\omega\left[\frac{\partial^2\omega}{(\partial u^2)^2} - \frac{\partial^2\omega}{(\partial u^1)^2}\right],$$

што је и требало израчунати.

*Напомена.* Из израза за $R_{1212}$ видимо да ће Риман-Кристофелов тензор бити једнак нули ако функција $\omega$ задовољава парцијалну диференцијалну једначину

$$\frac{\partial^2\omega}{(\partial u^1)^2} = \frac{\partial^2\omega}{(\partial u^2)^2},$$

тј. ако је облика

$$\omega(u^1, u^2) = A[(u^1)^2 + (u^2)^2] + Bu^1 + Cu^2 + D,$$

где су $A$, $B$, $C$ и $D$ произвољне константе. У том случају простор са задатом метриком је еуклидски.

**Задатак 186.** (Одељак 30., задатак 5.). У односу на неки ортогонални систем координата у дводимензионом римановском простору чија је метричка форма

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2,$$

биће

$$\frac{1}{g}R_{1212} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\right].$$

Доказати то.

***Решење:*** Координата $R_{1212}$ Риман-Кристофеловог тензора дата је изразом

$$R_{1212} = \frac{\partial}{\partial x^1}[22,1] - \frac{\partial}{\partial x^2}[21,1] + \left\{\begin{matrix} m \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\}[21,m] - \left\{\begin{matrix} m \\ 2\ 2 \end{matrix}\right\}[11,m],$$

односно

$$R_{1212} = \frac{\partial}{\partial x^1}[22,1] - \frac{\partial}{\partial x^2}[21,1] + \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\}[21,1] +$$

$$+ \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\}[21,2] - \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix}\right\}[11,1] - \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 2 \end{matrix}\right\}[11,2].$$

На основу израза за метричку форму, координате метричког тензора су

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{Bmatrix}, \qquad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{g_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_{22}} \end{Bmatrix},$$

па су координате Кристофелових симбола прве и друге врсте

$$[22,1] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}, \quad [21,1] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}, \quad [21,2] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1},$$

$$[11,1] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}, \quad [11,2] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2},$$

$$\begin{Bmatrix}1\\2\;1\end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{11}}[21,1]=\frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2},\qquad \begin{Bmatrix}2\\2\;1\end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{22}}[21,2]=\frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1},$$

$$\begin{Bmatrix}1\\2\;2\end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{11}}[22,1]=-\frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1},\qquad \begin{Bmatrix}2\\2\;2\end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{22}}[22,2]=\frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2},$$

тако да је

$$R_{1212}=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)-\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)+\frac{1}{g_{11}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{g_{22}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)-\frac{1}{g_{11}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)-$$
$$-\frac{1}{g_{22}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right),$$

односно

$$R_{1212}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}-\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}-\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right].$$

Ако леву и десну страну поделимо са $g=g_{11}g_{22}$, добивамо

$$\frac{1}{g}R_{1212}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)+\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{2g}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2g}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}-\frac{1}{2g}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}-\frac{1}{2g}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right],$$

односно

$$\frac{1}{g}R_{1212}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right].$$

Ако, даље, у овој једначини извршимо замену

$$\frac{1}{g_{11}}=\frac{g_{22}}{g},\qquad \frac{1}{g_{22}}=\frac{g_{11}}{g},$$

добивамо

$$\frac{1}{g}R_{1212}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{2g\sqrt{g}}g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2g\sqrt{g}}g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}-\frac{1}{2g\sqrt{g}}g_{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}-\frac{1}{2g\sqrt{g}}g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right],$$



или

$$\frac{1}{g}R_{1212}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2g\sqrt{g}}\left(g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}+g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}-\frac{1}{2g\sqrt{g}}\left(g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right].$$

С обзиром да је

$$g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}+g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x^2}(g_{11}g_{22})=\frac{\partial g}{\partial x^2},$$

$$g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}=\frac{\partial}{\partial x^1}(g_{11}g_{22})=\frac{\partial g}{\partial x^1},$$

добивамо

$$\frac{1}{g}R_{1212}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right].$$

Како је, даље,

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right),$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right),$$

то, коначно, добивамо

$$\frac{1}{g}R_{1212}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\right],$$

што је и требало показати.

**Задатак 187.** (Одељак 30., задатак 6.). Извести у потпуности доказ да је

$$S^{ij}=S^{ji}.$$

*Решење*: Контраваријантни тензор другог реда $S^{ij}$ дефинисан је на следећи начин (види одељак 30., једначину 18.)

$$S^{ij}=\frac{1}{4}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}R_{klmn}.$$

Одавде следи, разменом места индексима $i$ и $j$,

$$S^{ji}=\frac{1}{4}\varepsilon^{jkl}\varepsilon^{imn}R_{klmn}.$$

Како је, међутим, (види одељак 30., једначину 13.)

$$R_{klmn}=R_{mnkl},$$

можемо писати

$$S^{ji}=\frac{1}{4}\,\varepsilon^{jkl}\,\varepsilon^{imn}\,R_{mnkl}.$$

Ако, сада, уместо немог индекса $k$ пишемо $m$, уместо немог индекса $l$ пишемо $n$ и обрнуто, добивамо

$$S^{ji}=\frac{1}{4}\,\varepsilon^{jmn}\,\varepsilon^{ikl}\,R_{klmn},$$

односно

$$S^{ji}=\frac{1}{4}\,\varepsilon^{ikl}\,\varepsilon^{jmn}\,R_{klmn}=S^{ij},$$

што је и требало доказати.

## 31. Нарочити координатни системи у риманском простору

**Задатак 188.** (Одељак 31., задатак 1.). Показати да у односу на неки систем локалних Декартових координата $y^i$ Кристофелови симболи имају тензорски карактер.

***Решење:*** Закони трансформације Кристофелових симбола прве и друге врсте су облика

$$\overline{[ij,\,k]}=[mn\,,l]\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}+g_{mn}\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k},\tag{1}$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} k\\ i\ j\end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} m\\ r\ s\end{Bmatrix}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}+\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}.\tag{2}$$

Ако у некој тачки $P$ риманског простора уочимо систем локалних Декартових координата $y^1,\ y^2,\ldots,\ y^N$ и Кристофелове симболе у односу на тај систем координата обележимо са $[ij,\,k]$, односно $\begin{Bmatrix} k\\ i\ j\end{Bmatrix}$, онда ће у односу на неки нови систем локалних Декартових координата $\bar{y}^1,\ \bar{y}^2,\ldots,\ \bar{y}^N$, у истој тачки $P$, Кристофелови симболи бити $\overline{[ij\ k]}$, односно $\overline{\begin{Bmatrix} k\\ i\ j\end{Bmatrix}}$. Како су, међутим, трансформације координата $y^i$ у координате $\bar{y}^i$ облика

$$y^i=a^i_j\,\bar{y}^j,$$

односно

$$\bar{y}^i=\alpha^i_j\,y^j,$$

где су $a^i_j$ и $\alpha^i_j$ системи константних коефицијената, добивамо

$$\frac{\partial y^i}{\partial \bar{y}^j}=a^i_j,\quad \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^j}=\alpha^i_j$$



и

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial \bar{y}^j\,\partial \bar{y}^k}=0,\quad \frac{\partial^2 \bar{y}^i}{\partial y^j\,\partial y^k}=0,$$

па су на основу (1) и (2), закони трансформације Кристофелових симбола

$$\overline{[ij,\,k]}=[mn,\,l]\frac{\partial y^m}{\partial \bar{y}^i}\,\frac{\partial y^n}{\partial \bar{y}^j}\,\frac{\partial y^l}{\partial \bar{y}^k},\tag{3}$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} k\\ i\ j\end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} m\\ r\ s\end{Bmatrix}\frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^i}\,\frac{\partial y^s}{\partial \bar{y}^j}\,\frac{\partial \bar{y}^k}{\partial y^m},\tag{4}$$

на основу чега закључујемо да они у односу на систем локалних Декартових координата имају тензорски карактер, што је и требало показати.

*Напомена.* У односу на систем локалних Декартових координата $y^i$, у некој тачки $P$ риманског простора, координате метричког тензора су константе, па је

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=0,$$

тако да су и координате Кристофелових симбола прве и друге врсте једнаке нули (види одељак 31.), тј.

$$[ij,\,k]=0,\quad \begin{Bmatrix} k\\ i\ j\end{Bmatrix}=0,$$

На основу овога као и тензорског закона трансформације Кристофелових симбола прве и друге врсте (3) и (4), у односу на системе локалних Декартових координата, следи да је

$$\overline{[ij,\,k]}=0,\quad \overline{\begin{Bmatrix} k\\ i\ j\end{Bmatrix}}=0.$$

на основу чега закључујемо да су координате Кристофелових симбола прве и друге врсте једнаке нули у односу на *ма који* систем локалних Декартових координата у некој тачки риманског простора.

**Задатак 189.** (Одељак 31., задатак 2.). Ако у неком координатном систему метрика простора $V_N$ има облик

$$ds^2=e\,(dx^1)^2+g_{ij}\,(x^\alpha)\,dx^i\,dx^j,$$

где је $e=\pm 1$; $i,\ j,=2,3,\ldots N$; $\alpha=1,\ 2,\ldots,\ N$, онда су координатне линије $x^1$ геодезијске линије, које секу ортогонално хиперповрши $x^1=C$.

***Решење:*** Једначине координатних линија $x^1$ су

$$x^i=\text{const.},\quad (i=2,\ 3,\ldots,\ N),\tag{1}$$

а елемент лука тих линија је (види задатак 116,)

$$ds_{(1)}=\sqrt{g_{11}}\,dx^1=\sqrt{e}\,dx^1.\tag{2}$$

На основу једначине геодезијских линија (види одељак 27., једначину 16.),

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2}+\begin{Bmatrix} i\\ j\ k\end{Bmatrix}\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds}=0,\tag{3}$$

лако је проверити да су координатне линије $x^1$ геодезијске. Из (3), наиме, добивамо

$$\frac{d^2 x^1}{ds_{(1)}^2}+\left\{\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right\}\frac{dx^1}{ds_{(1)}}\frac{dx^1}{ds_{(1)}}=0.$$

Међутим, како је $\left\{\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right\}=0$, јер је $g_{11}=e=\pm 1$, и

$$\frac{d^2 x^1}{ds_{(1)}^2}=0,$$

јер је

$$\frac{dx^1}{ds_{(1)}}=\frac{1}{\sqrt{e}}=\text{const.},$$

закључујемо да координатне линије $x^1$ идентички задовољавају једначину геодезијских линија, тј. оне су геодезијске линије.

Ако уочимо хиперповрш $x^1=C$, онда све остале координатне линије $x^M$, $(M=2, 3, \ldots, N)$, леже у тој хиперповрши. Јединични вектори тангената на координатне линије $x^M$ су (види задатак 113.)

$$(4)\qquad \lambda^{\ i}_{(M)}=\frac{1}{\sqrt{g_{MM}}}\delta^{\ i}_{M},$$

док је јединични вектор тангенте на координатну линију $x^1$

$$(5)\qquad \lambda^{\ i}_{(1)}=\frac{1}{\sqrt{e}}\delta^{\ i}_{1}.$$

Скаларни производ јединичног вектора тангенте координатне линије $x^1$ и јединичног вектора тангенте координатне линије $x^M$ је

$$g_{ij}\lambda^{\ i}_{(1)}\lambda^{\ j}_{(M)},$$

односно

$$(6)\qquad g_{ij}\frac{1}{\sqrt{e}}\delta^{\ i}_{1}\frac{1}{\sqrt{g_{MM}}}\delta^{\ j}_{M}=\frac{1}{\sqrt{e}\sqrt{g_{MM}}}\delta^{\ 1}_{M}=0,\quad (M\neq 1).$$

С обзиром да су јединични вектори тангената на координатне линије $x^M$ истовремено и тангентни јединични вектори хиперповрши $x^1=C$, на основу једначине (6) закључујемо да су геодезијске координатне линије $x^1$ ортогоналне на хиперповршима $x^1=C$, што је и требало показати.

**Задатак 190.** (Одељак 31., задатак 3.). Посматрајмо неки римански простор $V_N$ са индефинитном метричком формом. За све тачке које леже на конусу геодезијских нула линија (види одељак 27., задатак 4.) конструисаном за координатни почетак, дефиниција (27) Риманових координата нас изневерава. Како треба изменити дефиницију Риманових координата да она обухвати и те тачке.

*Решење:* Дефинишимо, пре свега, *канонски параметар*. Пођимо од чињенице да је, у римaнском простору дефинитне метрике, услов да крива, дата у параметарском облику

$$(1)\qquad x^\alpha=x^\alpha(t),$$



буде геодезијска крива да извод јединичног вектора тангенте те криве у правцу те криве буде једнак нули. У риманском простору индефинитне метрике може се десити да вектор тангенте криве има интензитет једнак нули (да буде изотропни вектор) па да се и не може дефинисати јединични вектор. И тада се геодезијска крива може дефинисати захтевом који се заснива на паралелном преносу.

Вектор

$$(2)\qquad u^\alpha=\frac{dx^\alpha}{dt}$$

је вектор тангенте криве (1). Та је крива геодезијска ако вектор (2), при паралелном преносу дуж те криве, остаје њен тангентни вектор, или, што је исто, ако је промена вектора дуж криве колинеарна самом вектору, тј.

$$(3)\qquad \frac{\delta u^\alpha}{\delta t}=\lambda(t)\,u^\alpha.$$

Та једначина је диференцијална једначина геодезијске линије која се, с обзиром на (2), може написати у облику

$$(4)\qquad \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\\beta\ \gamma\end{matrix}\right\}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt}-\lambda(t)\frac{dx^\alpha}{dt}=0.$$

У простору позитивно дефинитне метрике (или, мање строго, за криву (1) чији лук није једнак нули, тј. за неизотропну криву) функција $\lambda(t)$ се може изразити помоћу лука $s$ криве (1). Нека је

$$(5)\qquad s=s(t).$$

Једначина (3), тј.

$$(6)\qquad \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)=\lambda(t)\frac{dx^\alpha}{dt},$$

се може, тада, написати у обику

$$(7)\qquad \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}s'\right)=\lambda(t)\frac{dx^\alpha}{ds}s',\quad \left(s'=\frac{ds}{dt}\right)$$

односно

$$(8)\qquad \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)s'+\frac{dx^\alpha}{ds}s''=\lambda(t)\frac{dx^\alpha}{ds}s'.$$

Како је (види одељак 27., једначину 17. и одељак 23., једначину 17.)

$$(9)\qquad \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)=0,$$

то из (8) имамо

$$(10)\qquad [s''-\lambda(t)s']\frac{dx^\alpha}{ds}=0,$$

односно

(11) $$\lambda(t)=\frac{s''}{s'},$$

па (4) гласи

(12) $$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}+\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt}-\frac{s''}{s'}\frac{dx^\alpha}{dt}=0.$$

(Упореди са: одељак 23., једначина 14). Узевши да лук $s$ представља параметар $t$, тј. да је

(13) $$t=s,$$

једначина (12) постаје

(14) $$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}+\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}=0.$$

Допустивши, сада, да је метрика простора индефинитна и да је геодезијска крива (1) нула линија (изотропна крива), показаћемо да постоји параметар $\tau$ за који последњи члан на левој страни диференцијалне једначине (4) геодезијске криве постаје једнак нули.

Нека је $\tau$ такав параметар. Тада је

(15) $$\tau=\tau(t).$$

Једначина (3), тј. једначина (6), се тада може написати у облику

(16) $$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)=\lambda(t)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d\tau}{dt},$$

односно

(17) $$\frac{\delta}{\delta\tau}\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2+\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2}=\lambda(t)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d\tau}{dt},$$

или, најзад,

(18) $$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}-\frac{\lambda(t)\dfrac{d\tau}{dt}-\dfrac{d^2\tau}{dt^2}}{\left(\dfrac{d\tau}{dt}\right)^2}=0,$$

с обзиром да је, на основу (15), по претпоставци $\frac{d\tau}{dt}\neq 0$. Да би се лева страна ове једначине свела само на два прва члана, параметар $\tau$ треба да задовољава диференцијалну једначину

(19) $$\frac{d^2\tau}{dt^2}-\lambda(t)\frac{d\tau}{dt}=0,$$

одакле је

(20) $$\tau=C_1\int e^{\int\lambda(t)\,dt}\,dt+C_2.$$



Параметар $\tau$ који задовољава (20) зове се *канонски параметар*. За канонски параметар диференцијална једначина (18) геодезијке линије постаје

(21) $$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0.$$

Из (20) се види да канонски параметар није једнозначно одређен и да, ако су $\tau$ и $\tau_1$ два канонска параметра, веза међу њима гласи

(22) $$\tau_1=a\tau+b$$

где су $a$ и $b$ константе. Специјално, за неизотропну криву, на основу (14), лук $s$ представља канонски параметар.

Дефинишимо, сада, Риманове координате на следећи начин. Уочимо, у односу на произвољни координатни систем $x^\alpha$, неку тачку $P_0$ са координатама $\overset{\alpha}{x_0}$. Канонски параметар $\tau$ изаберимо тако да на свакој геодезијској линији кроз $P_0$ тачки $P_0$ одговара вредност $\tau=0$. То је, с обзиром на (22), увек могуће. Било која геодезијска линија кроз $P_0$ је одређена њеним тангентним вектором

(23) $$p^\alpha=\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)_{P_0}$$

у тачки $P_0$. Свакој тачки $P$ одговара одређен вектор $p^\alpha$ (тангентни вектор у $P_0$ оне геодезијске линије која пролази кроз $P$) и одређена вредност параметра $\tau$. Величине

(24) $$z^\alpha=p^\alpha\tau$$

зову се *Риманове координате* тачке $P$.

Да су тако дефинисане координате $z^\alpha$ уопштење Риманових координата дефинисаних у одељку 31., покажимо да за њих важе једначине аналогне једначинама (30) и (31) поменутог одељка.

Уочимо једну геодезијску линију кроз $P_0$ одређену вектором

(25) $$p^\alpha=\text{const.}$$

Њене параметарске једначине у односу на координатни систем $z^\alpha$ су (24), а њене диференцијалне једначине у односу на исти систем за канонски параметар $\tau$ су

(26) $$\frac{d^2z^\alpha}{d\tau^2}+\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix}\frac{dz^\beta}{d\tau}\frac{dz^\gamma}{d\tau}=0.$$

С обзиром да је из (24), а због (25),

(27) $$\frac{dz^\alpha}{d\tau}=p^\alpha,\quad \frac{d^2z}{d\tau^2}=0,$$

то (26) постаје

(28) $$\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix}p^\beta p^\gamma=0,$$

што је аналогон једначини (30) у одељку 31., а за $\tau=s$, када је то могуће (неизотропна крива), је баш та једначина.

С обзиром да (28) важи у свим тачкама уочене геодезијске криве, важи и у тачки $P_0$, тј.

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{matrix} \right\}_{P_0} p^\beta p^\gamma = 0, \tag{29}$$

без обзира на геодезијску линију, односно за било који од вектора $p^\alpha$. С обзиром на произвољност вектора $p^\alpha$ и симетричност Кристофеловог симбола друге врсте у односу на доње индексе, из (29) следи

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{matrix} \right\}_{P_0} = 0, \tag{30}$$

што је аналогон једначини (31) у одељку 31., а за $\tau = s$, када је то могуће (неизотропна крива), је баш та једначина.

**Задатак 191.** (Одељак 31., задатак 4.). Показати, користећи се локалним Декартовим координатама, да ако је метричка форма $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ неког риманског простора $V_N$ позитивно дефинитна, детерминанта $g = |g_{ij}|$ мора бити позитивна.

***Решење:*** Ако је метричка форма риманског простора позитивно дефинитна, тј. ако је

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j > 0, \tag{1}$$

онда ће у некој тачки тог простора, у односу на неки допустиви систем локалних Декартових координата $y^i$, бити

$$ds^2 = \delta_{ij}\,dy^i\,dy^j > 0, \tag{2}$$

где је

$$\{\delta_{ij}\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{matrix} \right\}$$

и

$$|\delta_{ij}| = 1.$$

Како је, међутим, детерминанта $g = |g_{ij}|$ релативна скаларна инваријанта тежине 2 (види одељак 16., једначину 10.), тј.

$$\bar{g} = g \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right|^2 = g\,\Delta^2,$$

у овом случају непосредно добивамо

$$g = |g_{ij}| = |\delta_{ij}|\Delta^2 = \Delta^2 > 0, \quad \left( \Delta = \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right| \right),$$

што је требало показати.



**Задатак 192.** (Одељак 31., задатак 5.). Показати да је у четвородимензионом простору трансформација

$$\bar{z}_1 = z_1 \cosh\varphi + i z_4 \sinh\varphi,$$
$$\bar{z}_2 = z_2, \quad \bar{z}_3 = z_3,$$
$$\bar{z}_4 = -i z_1 \sinh\varphi + z_4 \cosh\varphi,$$

ортогонална (псеудоортогонална) кад је $\varphi$ ма која константа. Ова трансформација се сменом

$$z_1 = x, \quad z_2 = y, \quad z_3 = z, \quad z_4 = ict, \quad \operatorname{tgh}\varphi = \frac{v}{c},$$

претвара у Лоренцову трансформацију промењљивих $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$, у промењљиве $x$, $y$, $z$, $t$.

***Решење:*** Трансформацију

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= z_1 \cosh\varphi + i z_4 \sinh\varphi, \\ \bar{z}_2 &= z_2, \quad \bar{z}_3 = z_3, \\ \bar{z}_4 &= -i z_1 \sinh\varphi + z_4 \cosh\varphi \end{aligned} \tag{1}$$

можемо написати у облику

$$\bar{z}_j = a^i_j z_i,$$

где је матрица коефицијената трансформације облика

$$\{a^i_j\} = \left\{ \begin{matrix} \cosh\varphi & 0 & 0 & i\sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\sinh\varphi & 0 & 0 & \cosh\varphi \end{matrix} \right\}.$$

Да би трансформација била ортогонална потребно је и довољно да буде испуњен услов

$$a^i_{.j}\, a^{.j}_{.k} = \delta^i_k,$$

где су $a^{.j}_{.k}$ елементи матрице која се добива транспоновањем матрице $\{a^i_j\}$. Лако је проверити да је тај услов задовољен, тј.

$$\left\{ \begin{matrix} \cosh\varphi & 0 & 0 & i\sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\sinh\varphi & 0 & 0 & \cosh\varphi \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cosh\varphi & 0 & 0 & -i\sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\sinh\varphi & 0 & 0 & \cosh\varphi \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\},$$

па закључујемо да је трансформација ортогонална.

Сменом

$$z_1 = x, \quad z_2 = y, \quad z_3 = z, \quad z_4 = ict, \qquad \operatorname{tgh} \varphi = \frac{v}{c},$$

односно

$$\sinh \varphi = \frac{\operatorname{tgh} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 \varphi}} = \frac{\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad \cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

трансформација (1) постаје

$$\bar{x} = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

$$\bar{y} = y,$$

$$\bar{z} = z,$$

$$\bar{t} = \frac{t - x\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

што је Лоренцова трансформација променљивих $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$, у променљиве $x$, $y$, $z$, $t$, што је и требало показати.

## 32. Френеови обрасци

**Задатак 193.** (Одељак 32., задатак 1.) За риманске просторе $V_2$, $V_3$ и $V_4$, са позитивно дефинитном метриком, написати Френеове обрасце у потпуности.

***Решење***: За римански простор од $N$ димензија Френеови обрасци су облика

$$\frac{\delta t^i_{(r-1)}}{\delta s} = -\varkappa_{r-1}\, t^i_{(r-2)} + \varkappa_r\, t^i_{(r)},$$

при чему је $\varkappa_r$ $r$-та кривина, а

$$g_{ij}\, t^i_{(r)}\, t^j_{(s)} = \delta_{rs}$$

за $r, s = 0, 1, \ldots, N-1$ и $\varkappa_0 = 0$, $t^i_{(0)} = t^i$, $\varkappa_N = 0$.

а) За римански простор од две димензије Френеови обрасци гласе

$$\frac{\delta t^i}{\delta s} = \varkappa_1\, t^i_{(1)},$$

$$\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = -\varkappa_1\, t^i,$$



при чему је

$$g_{ij}\, t^i\, t^j_{(1)} = 0, \qquad (i, j = 1, 2),$$

тј. јединични вектори $t^i$ и $t^i_{(1)}$ су међусобно ортогонални.

б) За римански простор од три димензије Френеови обрасци гласе

$$\frac{\delta t^i}{\delta s} = \varkappa_1\, t^i_{(1)},$$

$$\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = -\varkappa_1\, t^i + \varkappa_2\, t^i_{(2)},$$

$$\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = -\varkappa_2\, t^i_{(1)},$$

где јединични вектори $t^i_{(r)}$ и $t^i_{(s)}$ задовољавају услове

$$g_{ij}\, t^i_{(r)}\, t^j_{(s)} = \delta_{rs}; \qquad (i, j = 1, 2, 3; \quad r, s = 0, 1, 2).$$

в) За римански простор од четири димензије Френеови обрасци гласе

$$\frac{\delta t^i}{\delta s} = \varkappa_1\, t^i_{(1)},$$

$$\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = -\varkappa_1\, t^i + \varkappa_2\, t^i_{(2)},$$

$$\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = -\varkappa_2\, t^i_{(1)} + \varkappa_3\, t^i_{(3)},$$

$$\frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s} = -\varkappa_3\, t^i_{(2)},$$

при чему је $g_{ij}\, t^i_{(r)}\, t^j_{(s)} = \delta_{rs}$ за $i, j = 1, 2, 3, 4$ и $r, s = 0, 1, 2, 3$.

**Задатак 194.** (Одељак 32., задатак 2.). Извести Френеове обрасце за риманскі простор $V_N$ са индефинитном метриком у коме је

$$g_{ij}\, t^i\, t^j = \varepsilon$$

где је $\varepsilon$ једнако $+1$ или $-1$ и зове се индикатор правца тангенте, а $t^i$ јединични вектор тангенте уочене криве.

***Решење***: Из релације

$$(1) \qquad g_{ij}\, t^i\, t^j = \varepsilon$$

апсолутним диференцирањем по луку $s$ криве, добивамо

$$t_i \frac{\delta t^i}{\delta s} = 0,$$

одакле закључујемо да је вектор $\frac{\delta t^i}{\delta s}$ управан на јединичном вектору $t^i$ тангенте на криву. Ако интензитет вектора $\frac{\delta t^i}{\delta s}$ обележимо са $\varkappa_1$, а јединични вектор његовог правца са $t^i_{(1)}$, можемо писати

$$\frac{\delta t^i}{\delta s} = \varkappa_1 t^i_{(1)}, \tag{2}$$

где је $\varkappa_1$ прва кривина (или само кривина) уочене криве, а $t^i_{(1)}$ јединични вектор прве нормале који задовољава услов

$$g_{ij} t^i_{(1)} t^j_{(1)} = \varepsilon_{(1)}, \tag{3}$$

где је $\varepsilon_{(1)}$ индикатор правца прве нормале.

Апсолутним диференцирањем по луку $s$, из (3) следи

$$t_{(1)i} \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = 0,$$

на основу чега закључујемо да је вектор $\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s}$ управан на јединични вектор $t^i_{(1)}$ прве нормале. Како је $t^i_{(1)}$ управан и на $t^i$ можемо разложити вектор $\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s}$ у две компоненте — једну у правцу јединичног вектора $t^i$ тангенте и другу у правцу нормалном на векторе $t^i$ и $t^i_{(1)}$. Ако при томе јединични вектор нормале на векторима $t^i$ и $t^i_{(1)}$ обележимо са $t^i_{(2)}$, а интензитет компоненте вектора $\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s}$ у правцу овог јединичног вектора са $\varkappa_2$, можемо писати

$$\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = \varkappa_2 t^i_{(2)} + \alpha t^i \tag{4}$$

где је $\alpha$ скалар који треба одредити. Јединични вектор $t^i_{(2)}$, поред тога што је управан на јениничним векторима $t^i$ и $t^j_{(1)}$, тј.

$$t^i t_{(2)i} = 0, \quad t_{(1)} t_{(2)i} = 0, \tag{5}$$

задовољава услов

$$g_{ij} t^i_{(2)} t^j_{(2)} = \varepsilon_{(2)} \tag{6}$$

где је $\varepsilon_{(2)}$ индикатор правца друге нормале.

Да бисмо одредили скалар $\alpha$, помножимо скаларно једначину (4) јединичним вектором $t^i$ тангенте на криву. Тада с обзиром на (1) добивамо

$$t_i \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = \varepsilon \alpha. \tag{7}$$

Међутим, из једначине

$$t_i t^i_{(1)} = 0,$$



добивамо

$$t_i \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} + t^i_{(1)} \frac{\delta t_i}{\delta s} = 0,$$

односно, с обзиром на једначину (2),

$$t_i \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = -t^i_{(1)} \frac{\delta t_i}{\delta s} = -t_{(1)i} \frac{\delta t^i}{\delta s} = -\varkappa_1 t_{(1)i} t^i_{(1)},$$

или, на основу једначине (3),

$$t_i \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = -\varepsilon_{(1)} \varkappa_1.$$

Сада, једначину (7) можемо написати у облику

$$\varepsilon\alpha = -\varepsilon_{(1)} \varkappa_1,$$

одакле следи

$$\alpha = -\varepsilon \varepsilon_{(1)} \varkappa_1, \tag{8}$$

јер је

$$\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Помоћу једнчине (8), једначину (4) можемо написати у облику

$$\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = \varkappa_2 t^i_{(2)} - \varepsilon \varepsilon_{(1)} \varkappa_1 t^i, \tag{9}$$

где је $\varkappa_2$ друга кривина (торзија) уочене криве.

Из једначине (6), апсолутним диференцирањем по луку $s$ криве, даље добивамо

$$t_{(2)i} \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = 0,$$

на основу чега закључујемо да је вектор $\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s}$ управан на јединични вектор $t^i_{(2)}$ друге нормале. Из једначине

$$t_i t^i_{(2)} = 0,$$

апсолутним диференцирањем добивамо

$$t_i \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} + t^i_{(2)} \frac{\delta t_i}{\delta s} = 0,$$

односно, с обзиром на (2),

$$t_i \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = -t^i_{(2)} \frac{\delta t_i}{\delta s} = -t_{(2)i} \frac{\delta t^i}{\delta s} = -\varkappa_1 t^i_{(1)} t_{(2)i} = 0,$$

па видимо да је вектор $\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s}$ управан и на јединичном вектору $t^i$ тангенте. То значи да вектор $\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s}$ можемо разложити у две компоненте — једну у правцу прве нормале $t^i_{(1)}$ и другу у правцу нормале на тродимензиони простор одређен векторима $t^i$, $t^i_{(1)}$ и $t^i_{(2)}$. Ако при томе јединични вектор нормале на векторима $t^i$, $t^i_{(1)}$, $t^i_{(2)}$ обележимо са $t^i_{(3)}$, а интензититет компоненте вектора $\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s}$ у правцу овог јединичног вектора са $\varkappa_3$, можемо писати

$$\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = \varkappa_3\, t^i_{(3)} + \beta\, t^i_{(1)}, \tag{10}$$

где је $\beta$ скалар који треба одредити.

Јединични вектор $t^i_{(3)}$, поред тога што је управан на векторима $t^i$, $t^i_{(1)}$ и $t^i_{(2)}$, тј.

$$t_i\, t^i_{(3)} = 0, \quad t_{(1)i}\, t^i_{(3)} = 0, \quad t_{(2)i}\, t^i_{(3)} = 0,$$

задовољава услов

$$g_{ij}\, t^i_{(3)}\, t^j_{(3)} = \varepsilon_{(3)} \tag{11}$$

где је $\varepsilon_{(3)}$ индикатор правца треће нормале.

Да бисмо одредили скалар $\beta$, помножимо једначину (10) скаларно јединичним вектором $t^i_{(1)}$ прве нормале. Тада, с обзиром на (3), добијамо

$$t_{(1)i} \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = \varepsilon_{(1)}\, \beta. \tag{12}$$

Међутим, из друге од једначина (5) добивамо

$$t_{(1)i} \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} + t^i_{(2)} \frac{\delta t_{(1)i}}{\delta s} = 0,$$

односно, с обзиром на једначину (9),

$$t_{(1)i} \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = - t^i_{(2)} \frac{\delta t_{(1)i}}{\delta s} = - t_{(2)i} \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = - \varkappa_2\, t_{(2)i}\, t^i_{(2)} = - \varepsilon_{(2)}\, \varkappa_2,$$

јер је

$$t_{(2)i}\, t^i_{(2)} = \varepsilon_{(2)}.$$

На основу овога једначину (12) можемо написати у облику

$$\varepsilon_{(1)}\, \beta = - \varepsilon_{(2)}\, \varkappa_2,$$

одакле следи

$$\beta = - \varepsilon_{(1)}\, \varepsilon_{(2)}\, \varkappa_2, \quad \left( \frac{1}{\varepsilon_{(1)}} = \varepsilon_{(1)} = \pm 1 \right),$$



па једначина (10) добива облик

$$\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = \varkappa_3\, t^i_{(3)} - \varepsilon_{(1)}\, \varepsilon_{(2)}\, \varkappa_2\, t^i_{(1)}, \tag{13}$$

где је $\varkappa_3$ трећа кривина, а $t^i_{(3)}$ јединични вектор треће нормале на уочену криву.

Настављајући овај поступак, у простору од $N$ димензија, дошли бисмо до општег израза

$$\frac{\delta t^i_{(r-1)}}{\delta s} = \varkappa_r\, t^i_{(r)} - \varepsilon_{(r-2)}\, \varepsilon_{(r-1)}\, \varkappa_{(r-1)}\, t^i_{(r-2)}, \tag{14}$$

при чему је

$$t_{(r)i}\, t^i_{(s)} = \begin{cases} \varepsilon_{(r)} & \text{за } r = s \\ 0 & \text{за } r \neq s, \quad (r, s = 1, 2, \ldots, N), \end{cases}$$

где је $\varepsilon_{(r)}$ индикатор правца $r$-те нормале уочене криве, и при чему је

$$t^i_{(0)} = t^i, \quad \varkappa_0 = 0, \quad \varkappa_N = 0.$$

У изразу (14) садржани су сви тражени Френеови обрасци у $N$-димензионом римановском простору са индефинитном метриком.

**Задатак 195.** (Одељак 32., задатак 3.). Написати Френеове обрасце за криву

$$y^1 = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y^2 = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y^3 = \frac{b\, s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ако су $y^i$ Декартове правоугле координате а $s$ лук уочене криве.

***Решење***: С обзиром да је крива дата у простору од три димензије, Френеови су обрасци облика

$$\frac{\delta t^i}{\delta s} = \varkappa_1\, t^i_{(1)},$$

$$\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = - \varkappa_1\, t^i + \varkappa_2\, t^i_{(2)},$$

$$\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = - \varkappa_2\, t^i_{(1)},$$

где је $\varkappa_1$ прва кривина или *кривина* криве, а $\varkappa_2$ друга кривина или *торзија* криве.

Ако јединични вектор тангенте на криву обележимо са $t^i$, јединични вектор главне нормале са $n^i$ и јединични вектор бинормале са $m^i$, и узмемо у обзир да је крива дата у односу на правоугли систем Декартових координата, Френеове обрасце можемо написати у облику

$$
(1)\qquad \frac{d t^i}{d s}=\varkappa_1 n^i,\qquad \frac{d n^i}{d s}=-\varkappa_1 t^i+\varkappa_2 m^i,\qquad \frac{d m^i}{d s}=-\varkappa_2 n^i.
$$

На основу обрасца

$$
t^i=\frac{d y^i}{d s},
$$

из једначина криве

$$
y^1=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad y^2=a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad y^3=\frac{b s}{\sqrt{a^2+b^2}},
$$

за координате јединичног вектора тангенте на криву добивамо

$$
(2)\qquad \{t^i\}=\left\{-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+a^2}},\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\},
$$

тако да је

$$
\left\{\frac{dt^i}{ds}\right\}=\left\{-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad 0\right\}.
$$

На основу овога за кривину добивамо

$$
\varkappa_1=\left|\frac{dt^i}{ds}\right|=\frac{a}{a^2+b^2},
$$

па је *први* Френеов образац за дату криву

$$
(3)\qquad \frac{dt^i}{ds}=\frac{a}{a^2+b^2}n^i,
$$

где је

$$
\{n^i\}=\frac{1}{\varkappa_1}\left\{\frac{dt^i}{ds}\right\},
$$

односно

$$
(4)\qquad \{n^i\}=\left\{-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad 0\right\}.
$$

Из (4), даље, добивамо

$$
(5)\qquad \left\{\frac{dn^i}{ds}\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad 0\right\}.
$$



Како је, међутим, други Френеов образац облика

$$
\frac{dn^i}{ds}=-\varkappa_1 t^i+\varkappa_2 m^i,
$$

добивамо

$$
\varkappa_2 m^i=\frac{dn^i}{ds}+\varkappa_1 t^i,
$$

односно, користећи (2) и (5),

$$
\{\varkappa_2 m^i\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad 0\right\}+
$$

$$
+\frac{a}{a^2+b^2}\left\{-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\},
$$

или коначно

$$
\{\varkappa_2 m^i\}=\left\{\frac{b^2}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\right.
$$

$$
\left.-\frac{b^2}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{ab}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.
$$

Одавде следи

$$
(6)\qquad \varkappa_2=|\varkappa_2 m^i|=\frac{b}{a^2+b^2},
$$

тако да је *други* Френеов образац за дату криву

$$
(7)\qquad \frac{dn^i}{ds}=-\frac{a}{a^2+b^2}t^i+\frac{b}{a^2+b^2}m^i,
$$

где је

$$
(8)\qquad \{m^i\}=\frac{1}{\varkappa_2}\{\varkappa_2 m^i\}=\left\{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.
$$

Из (8), даље, добивамо

$$
\left\{\frac{dm^i}{ds}\right\}=\left\{\frac{b}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{b}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad 0\right\},
$$

односно

$$
\left\{\frac{dm^i}{ds}\right\}=\frac{b}{a^2+b^2}\left\{\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad 0\right\},
$$

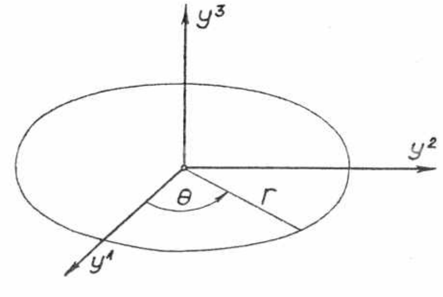
или

$$
\frac{dm^i}{ds}=-\varkappa_2 n^i,
$$

што је трећи Френеов образац за дату криву.

**Задатак 196.** (Одељак 32., задатак 4.). Написати једначину круга у простору у цилиндарским поларним координатама и показати да је његова кривина у свакој тачки $1/a$, ако му је полупречник $a$.

*Решење*: Погодним избором цилиндарског поларног система координата, једначину круга у простору можемо написати у облику (види слику)




$$x^1 = r = a,$$

$$x^2 = \theta = \frac{s}{a},$$

$$x^3 = y^3 = 0,$$

где је $s$ дужина лука круга.

Координате јединичног вектора тангенте на круг су

$$\{t^i\} = \left\{\frac{dx^i}{ds}\right\} = \left\{0,\ \frac{1}{a},\ 0\right\}.$$

На основу првог Френеовог обрасца

$$\frac{\delta t^i}{\delta s} = \varkappa_1 n^i,$$

за кривину добивамо

$$\varkappa_1 = \left|\frac{\delta t^i}{\delta s}\right|.$$

Како је, међутим,

$$\frac{\delta t^i}{\delta s} = \frac{dt^i}{ds} + \left\{ {i \atop j\ k} \right\}_{x^1=a} t^k \frac{dx^j}{ds} = \left\{ {i \atop j\ k} \right\}_{x^1=a} t^k t^j$$

и

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \qquad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

добивамо

$$\frac{\delta t^1}{ds} = \left\{ {1 \atop j\ k} \right\}_{x^1=a} t^k t^j = \left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\}_{x^1=a} t^2 t^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)_{x^1=a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = -a\,\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{a},$$

$$\frac{\delta t^2}{ds} = \left\{ {2 \atop j\ k} \right\}_{x^1=a} t^j t^k = 0,$$

$$\frac{\delta t^3}{\delta s} = \left\{ {3 \atop j\ k} \right\}_{x^1=a} t^j t^k = 0,$$

односно

$$\left\{\frac{\delta t^i}{\delta s}\right\} = \left\{-\frac{1}{a},\ 0,\ 0\right\} = -\frac{1}{a}\{1,\ 0,\ 0\}.$$



Интензитет овог вектора, тј. кривина круга, је

$$\varkappa_1 = \left|\frac{\delta t^i}{\delta s}\right| = \frac{1}{a},$$

што је и требало показати.

## 33. Ричијев коефицијент ротације. Генерализација појма Дарбуовог вектора и Ланкреовог става за римански простор

**Задатак 197.** (Одељак 33., задатак 1.). Показати да се апсолутни извод вектора може изразити и помоћу Ричијевих коефицијената ротације.

*Решење:* Апсолутни извод вектора, рецимо контраваријантног, је

$$\frac{\delta u^i}{\delta t} = u^i_{,k}\frac{dx^k}{dt} = u^i_{,k}\frac{dx^k}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}u^i_{,k}t^k_{(1)}, \tag{1}$$

где је $t^k_{(1)}$ јединични вектор тангенте на криву $x^i = x^i(s)$.

Ако вектор $u^i$ изразимо као линеарну комбинацију јединичних вектора природног триједра, $t^i_{(r)}$, $(r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ тј.

$$u^i = \sum_r a_{(r)} t^i_{(r)}, \tag{2}$$

онда је

$$u^i_{,k} = \sum_r \left(a_{(r),k}\, t^i_{(r)} + a_{(r)} t^i_{(r),k}\right), \tag{3}$$

односно, користећи (1),

$$\frac{\delta u^i}{\delta t} = \frac{ds}{dt}\sum_r \left(a_{(r),k}\, t^i_{(r)} t^k_{(1)} + a_{(r)} t^i_{(r),k}\, t^k_{(1)}\right). \tag{4}$$

Из израза за Ричијеве коефицијенте ротације (види одељак 33., једначину 11.),

$$\gamma_{(hkl)} = t^m_{(h),j}\, t_{(k)m}\, t^j_{(l)}, \tag{5}$$

следи

$$t^i_{(r),k}\, t^k_{(1)} = \sum_s \gamma_{(rs1)}\, t^i_{(s)}. \tag{6}$$

На основу овога, из (4), даље, имамо

$$\frac{\delta u^i}{\delta t} = \frac{ds}{dt}\sum_r \left[a_{(r),k}\, t^i_{(r)} t^k_{(1)} + a_{(r)} \sum_m \gamma_{(rm1)}\, t^i_{(m)}\right],$$

што је и требало показати.

**Задатак 198.** (Одељак 33., задатак 2.). Одредити Дарбуов тензор за простор са метриком теорије релативности, тј. чији је метрички тензор одређен формом

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 - (dy^4)^2.$$

*Решење:* На основу дате метричке форме закључујемо да је простор теорије релативности раван четвородимензиони простор са индефинитном метриком (псеудо-еуклидски). Ако у том простору уочимо неку криву $y^i = y^i(s)$, онда је

$$\frac{dy^i}{ds} = t^i_{(1)}$$

где је $t^i_{(1)}$ јединични вектор тангенте на уочену криву који задовољава услов

$$t^i_{(1)}\, t_{(1)\,i} = \varepsilon_{(1)},$$

где је $\varepsilon_{(1)}$ индикатор правца тангенте и може бити $+1$ или $-1$.

Френеови обрасци за уочену криву у овом простору су (види задатак 194., једначину 14.)

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} \frac{dt^i_{(1)}}{ds} &= \varkappa_1\, t^i_{(1)}, \\ \frac{dt^i_{(2)}}{ds} &= \varkappa_2\, t^i_{(3)} - \varepsilon_{(1)}\,\varepsilon_{(2)}\,\varkappa_1\, t^i_{(1)}, \\ \frac{dt^i_{(3)}}{ds} &= \varkappa_3\, t^i_{(4)} - \varepsilon_{(2)}\,\varepsilon_{(3)}\,\varkappa_2\, t^i_{(2)}, \\ \frac{dt^i_{(4)}}{ds} &= -\,\varepsilon_{(3)}\,\varepsilon_{(4)}\,\varkappa_3\, t^i_{(3)}, \end{aligned}$$

где је $t^i_{(2)}$ јединични вектор прве нормале на криву, $t^i_{(3)}$ јединични вектор друге нормале, $t^i_{(4)}$ јединични вектор треће нормале, а $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, прва, друга и трећа кривина, респективно. Јединични вектори $t^i_{(2)}$, $t^i_{(3)}$, $t^i_{(4)}$, су ортогонални и задовољавају услове

$$t^i_{(2)}\, t_{(2)\,i} = \varepsilon_{(2)}, \quad t^i_{(3)}\, t_{(3)\,i} = \varepsilon_{(3)}, \quad t^i_{(4)}\, t_{(4)\,i} = \varepsilon_{(4)},$$

где су $\varepsilon_{(2)}$, $\varepsilon_{(3)}$ и $\varepsilon_{(4)}$ индикатори правца прве, друге и треће нормале, респективно.

Координате Дарбуовог тензора одређене су са (види одељак 33., једначине 19. и 21.)

$$\text{(2)}\qquad \omega_{hk} = \frac{dt^i_{(h)}}{ds}\, t_{(k)\,i}.$$

На основу једначина (2) и (1), за координате Дарбуовог тензора добивамо

$$\omega_{11} = \frac{dt^i_{(1)}}{ds}\, t_{(1)\,i} = \varkappa_1\, t^i_{(2)}\, t_{(1)\,i} = 0;$$

исто тако је

$$\omega_{22} = \omega_{33} = \omega_{44} = 0;$$



даље је

$$\omega_{12} = \frac{dt^i_{(1)}}{ds}\, t_{(2)\,i} = \varkappa_1\, t^i_{(2)}\, t_{(2)\,i} = \varepsilon_{(2)}\,\varkappa_1,$$

$$\omega_{21} = \frac{dt^i_{(2)}}{ds}\, t_{(1)\,i} = \left[\varkappa_2\, t^i_{(3)} - \varepsilon_{(1)}\,\varepsilon_{(2)}\,\varkappa_1\, t^i_{(1)}\right] t_{(1)\,i} = -\,\varepsilon^2_{(1)}\,\varepsilon_{(2)}\,\varkappa_1 = -\,\varepsilon_{(2)}\,\varkappa_1,$$

$$\omega_{23} = \frac{dt^i_{(2)}}{ds}\, t_{(3)\,i} = \left[\varkappa_2\, t^i_{(3)} - \varepsilon_{(1)}\,\varepsilon_{(2)}\,\varkappa_1\, t^i_{(1)}\right] t_{(3)\,i} = \varepsilon_{(3)}\,\varkappa_2,$$

$$\omega_{32} = \frac{dt^i_{(3)}}{ds}\, t_{(2)\,i} = \left[\varkappa_3\, t^i_{(4)} - \varepsilon_{(2)}\,\varepsilon_{(3)}\,\varkappa_2\, t^i_{(2)}\right] t_{(2)\,i} = -\,\varepsilon^2_{(2)}\,\varepsilon_{(3)}\,\varkappa_2 = -\,\varepsilon_{(3)}\,\varkappa_2,$$

$$\omega_{34} = \frac{dt^i_{(3)}}{ds}\, t_{(4)\,i} = \left[\varkappa_3\, t^i_{(4)} - \varepsilon_{(2)}\,\varepsilon_{(3)}\,\varkappa_2\, t^i_{(2)}\right] t_{(4)\,i} = \varepsilon_{(4)}\,\varkappa_3,$$

$$\omega_{43} = \frac{dt^i_{(4)}}{ds}\, t_{(3)\,i} = \left[-\,\varepsilon_{(3)}\,\varepsilon_{(4)}\,\varkappa_3\, t^i_{(3)}\right] t_{(3)i} = -\,\varepsilon^2_{(3)}\,\varepsilon_{(4)}\,\varkappa_3 = -\,\varepsilon_{(4)}\,\varkappa_3.$$

Написане у облику матрице, координате Дарбуовог тензора су

$$\{\omega_{hk}\} = \left\{\begin{array}{cccc} 0 & \varepsilon_{(2)}\varkappa_1 & 0 & 0 \\ -\,\varepsilon_{(2)}\varkappa_1 & 0 & \varepsilon_{(3)}\varkappa_2 & 0 \\ 0 & -\,\varepsilon_{(3)}\varkappa_2 & 0 & \varepsilon_{(4)}\varkappa_3 \\ 0 & 0 & -\,\varepsilon_{(4)}\varkappa_3 & 0 \end{array}\right\},$$

што је и требало одредити.

## 34. Бјанкијева идентичност. Ричијев и Ајнштајнов тензор

**Задатак 199.** (Одељак 34., задатак 1.). У поларним координатама на сфери изразити Ричијев тензор и инваријанту кривине.

*Решење.* Везе између Декартових правоуглих координата и поларних координата на површи сфере су (види задатак 182. под *b*)

$$y^1 = R\cos x^1 \cos x^2, \quad y^2 = R\sin x^1 \cos x^2, \quad y^3 = R\sin x^2,$$

координате метричког тензора су

$$\{g_{ij}\} = \left\{\begin{array}{cc} R^2\cos^2 x^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{array}\right\}, \quad g = |g_{ij}| = R^4\cos^2 x^2,$$

а једина независна координата Риман-Кристофеловог тензора је

$$R_{1212} = R^2\sin^2 x^2.$$

Како су, међутим, у дводимензионом простору координате Ричијевог симетричног тензора пропорционалне односним координатама метричког тензора (види одељак 34., једначину 13.), тј.

$$\frac{R_{11}}{g_{11}}=\frac{R_{12}}{g_{12}}=\frac{R_{22}}{g_{22}}=-\frac{R_{1212}}{g},$$

лако добивамо

$$R_{11}=-\frac{g_{11}R_{1212}}{g}=-\sin^2 x^2,$$

$$R_{12}=R_{21}=0,$$

$$R_{22}=-\frac{g_{22}R_{1212}}{g}=-\mathrm{tg}^2 x^2,$$

тј.

$$\{R_{ij}\}=\begin{Bmatrix} -\sin^2 x^2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{tg}^2 x^2 \end{Bmatrix}.$$

За инваријанту кривине, која је дефинисана на следећи начин (види одељак 34., једначину 15.)

$$R=g^{ij}R_{ij},$$

добивамо

$$R=g^{11}R_{11}+g^{22}R_{22}=-\frac{1}{R^2}\mathrm{tg}^2 x^2-\frac{1}{R^2}\mathrm{tg}^2 x^2,$$

односно

$$R=-\frac{2}{R^2}\mathrm{tg}^2 x^2,$$

што је и требало одредити.

**Задатак 200.** (Одељак 34., задатак 2.). Нека буду дата два риманска простора $V_N$ и $V'_N$ чији су метрички тензори $g_{ij}$ и $g'_{ij}$ пропорционални, тј. $g'_{ij}=kg_{ij}$, где је $k$ константа. Написати везе које постоје између њихових Риман-Кристофелових тензора, Ричијевих тензора и инваријаната кривине.

***Решење***: Координате метричких тензора $g_{ij}$ и $g'_{ij}$, у просторима $V_N$ и $V'_N$ дате су у односу на исти систем координата $x^i$. Према томе, координате Кристофеловог симбола прве врсте у простору $V'_N$ су

$$[jk,l]'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g'_{kl}}{\partial x^j}+\frac{\partial g'_{lj}}{\partial x^k}-\frac{\partial g'_{jk}}{\partial x^l}\right)=\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right),$$

односно

$$[jk,l]'=k\,[jk,l],$$

где су $[jk,l]$ координате Кристофеловог симбола прве врсте у простору $V_N$.

Координате контраваријантног основног тензора, у простору $V'_N$, су

$$g'^{ij}=\frac{G'^{ij}}{g'}=\frac{k^{N-1}G^{ij}}{k^N g}=k^{-1}g^{ij},$$

па су координате Кристофеловог симбола друге врсте у том простору

$$\begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix}'=g'^{il}[jk,l]'=k^{-1}g^{il}k\,[jk,l]=g^{il}[jk,l]=\begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix},$$



тј. не разликују се међусобно. На основу овога и израза за мешовите координате Риман-Кристофеловог тензора,

$$R'^{l}_{\cdot ijk}=\frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} l \\ i\,k \end{Bmatrix}'-\frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} l \\ i\,j \end{Bmatrix}'+\begin{Bmatrix} l \\ j\,r \end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix} r \\ i\,k \end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix} l \\ r\,k \end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix} r \\ i\,j \end{Bmatrix}',$$

непосредно добивамо

$$R'^{l}_{\cdot ijk}=R^{l}_{\cdot ijk},$$

а одавде, контракцијом по индексима $l$ и $k$,

$$R'_{ij}=R_{ij}.$$

Значи, мешовите координате Риман-Кристофеловог тензора и коваријантне координате Ричијевог тензора исте су у оба простора.

За инваријанту кривине у простору $V'_N$ добивамо

$$R'=g'^{ij}R'_{ij}=k^{-1}g^{ij}R_{ij}=k^{-1}R,$$

где је $R$ инваријанта кривине у простору $V_N$.

**Задатак 201.** (Одељак 34., задатак 3.). У теорији релативности сусрећемо се са метричком формом

$$ds^2=e^{\alpha}(dx^1)^2+e^{x^1}[(dx^2)^2+\sin^2 x^2(dx^3)^2]-e^{\gamma}(dx^4)^2,$$

где су $\alpha$ и $\gamma$ функције само од $x^1$ и $x^4$.

Показати да координате Ајнштајновог тензора за овај простор које су различите од нуле имају наредне вредности

$$G^1_1=e^{-\alpha}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\gamma_1\right)+e^{-x^1},$$

$$G^2_2=e^{-\alpha}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\gamma_{11}-\frac{1}{4}{\gamma_1}^2-\frac{1}{4}\gamma_1+\frac{1}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_1\gamma_1\right)+$$

$$+e^{-\gamma}\left(\frac{1}{2}\alpha_{44}+\frac{1}{4}{\alpha_4}^2-\frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4\right),$$

$$G^3_3=G^2_2,\qquad G^4_4=e^{-\alpha}\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\alpha_1\right)+e^{-x^1},$$

$$e^{\alpha}G^1_4=-e^{\gamma}G^4_1=-\frac{1}{2}\alpha_4,$$

где индекси уз $\alpha$ и $\gamma$ означавају парцијалне изводе по $x^1$ и $x^4$.

***Решење***: Мешовити тензор другог реда (види одељак 34., једначину 17.)

$$G^i_j=R^i_j-\frac{1}{2}R\,\delta^i_j, \tag{1}$$

назива се Ајнштајнов тензор. Тензор $R^i_j$ је мешовити Ричијев тензор, а $R$ инваријанта кривине. Према томе, да бисмо одредили координате Ајнштајновог тензора потребно је одредити координате Ричијевог тензора и инваријанту кривине. Координате Ричијевог тензора одређујемо на основу релације

$$R_{ij}=R^{k}_{\cdot ijk}=\frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} k \\ i\,k \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} k \\ i\,j \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} r \\ i\,k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ r\,j \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} r \\ i\,j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ r\,k \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

а инваријанту кривине на основу релације

$$R=g^{ij}R_{ij}=R^i_i. \tag{3}$$

Из израза за метричку форму,

$$ds^2=e^{\alpha}(dx^1)^2+e^{x1}[(dx^2)^2+\sin^2 x^2\,(dx^3)^2]-e^{\gamma}(dx^4)^2, \tag{4}$$

закључујемо да су координате метричког тензора

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{x1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x1}\sin^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{\gamma} \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

па су координате Кристофеловог симбола прве врсте које су различите од нуле

$$[11,1]=\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}=\frac{1}{2}\,\alpha_1 e^{\alpha},$$

$$[44,4]=\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}=-\frac{1}{2}\,\gamma_4 e^{\gamma},$$

$$[22,1]=-[21,2]=-[12,2]=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2}\,e^{x^1},$$

$$[33,1]=-[31,3]=-[13,3]=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2}\,e^{x^1}\sin^2 x^2, \tag{6}$$

$$[33,2]=-[32,3]=-[23,3]=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}\,e^{x^1}\sin 2x^2,$$

$$[11,4]=-[14,1]=-[41,1]=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}=-\frac{1}{2}\,\alpha_4 e^{\alpha},$$

$$[44,1]=-[41,4]=-[14,4]=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}=\frac{1}{2}\,\gamma_1 e^{\gamma},$$



и друге врсте

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{11}}[11,1]=e^{-\alpha}\left(\frac{1}{2}\,\alpha_1 e^{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\,\alpha_1,$$

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4\,4 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{44}}[44,4]=-e^{-\gamma}\left(-\frac{1}{2}\,\gamma_4 e^{\gamma}\right)=\frac{1}{2}\,\gamma_4,$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{11}}[22,1]=e^{-\alpha}\left(-\frac{1}{2}\,e^{x^1}\right)=-\frac{1}{2}\,e^{x^1-\alpha},$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,1 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{22}}[12,2]=e^{-x^1}\left(\frac{1}{2}\,e^{x^1}\right)=\frac{1}{2}, \tag{7}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 3\,3 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{11}}[33,1]=e^{-\alpha}\left(-\frac{1}{2}\,e^{x^1}\sin^2 x^2\right)=-\frac{1}{2}\,\sin^2 x^2\,e^{x^1-\alpha},$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1\,3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3 \\ 3\,1 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{33}}[13,3]=\frac{e^{-x^1}}{\sin^2 x^2}\left(\frac{1}{2}\,e^{x^1}\sin^2 x^2\right)=\frac{1}{2},$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 3\,3 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{22}}[33,2]=e^{-x^1}\left(-\frac{1}{2}\,e^{x^1}\sin 2\,x^2\right)=-\sin x^2\cos x^2,$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2\,3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3 \\ 3\,2 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{33}}[32,3]=e^{-x^1}\sin^{-2} x^2\left(\frac{1}{2}\,e^{x^1}\sin 2\,x^2\right)=\operatorname{cotg} x^2,$$

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{44}}[11,4]=-e^{-\gamma}\left(-\frac{1}{2}\,\alpha_4 e^{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\,\alpha_4 e^{\alpha-\gamma},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 4\,1 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{11}}[14,1]=e^{-\alpha}\left(\frac{1}{2}\,\alpha_4 e^{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\,\alpha_4,$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 4\,4 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{11}}[44,1]=e^{-\alpha}\left(\frac{1}{2}\,\gamma_1 e^{\gamma}\right)=\frac{1}{2}\,\gamma_1 e^{\gamma-\alpha},$$

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4\,1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 4 \\ 1\,4 \end{Bmatrix}=\frac{1}{g_{44}}[41,4]=-e^{-\gamma}\left(-\frac{1}{2}\,\gamma_1 e^{\gamma}\right)=\frac{1}{2}\,\gamma_1.$$

На основу (2), сада, имамо

$$R_{11}=\frac{\partial}{\partial x^1}\begin{Bmatrix} k \\ 1\,k \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^1}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^2}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^3}\begin{Bmatrix} 3 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^4}\begin{Bmatrix} 4 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}+$$

$$+\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ 1\,1 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ 2\,1 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 3 \\ 1\,k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ 3\,1 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 4 \\ 1\,k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ 4\,1 \end{Bmatrix}-$$

$$-\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ 1\,k \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ 2\,k \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} 3 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ 3\,k \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} 4 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ 4\,k \end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,2 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 3 \\ 1\,3 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 4 \\ 1\,4 \end{Bmatrix}\right)-\frac{\partial}{\partial x^1}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^2}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}-$$

$$
-\frac{\partial}{\partial x^3}\left\{ {3 \atop 1\,1} \right\}-\frac{\partial}{\partial x^4}\left\{ {4 \atop 1\,1} \right\}+\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}+\left\{ {1 \atop 1\,2} \right\}\left\{ {2 \atop 1\,1} \right\}+\left\{ {1 \atop 1\,3} \right\}\left\{ {3 \atop 1\,1} \right\}+
$$

$$
+\left\{ {1 \atop 1\,4} \right\}\left\{ {4 \atop 1\,1} \right\}+\left\{ {2 \atop 1\,1} \right\}\left\{ {1 \atop 2\,1} \right\}+\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\}\left\{ {2 \atop 2\,1} \right\}+\left\{ {2 \atop 1\,3} \right\}\left\{ {3 \atop 2\,1} \right\}+\left\{ {2 \atop 1\,4} \right\}\left\{ {4 \atop 2\,1} \right\}+
$$

$$
+\left\{ {3 \atop 1\,1} \right\}\left\{ {1 \atop 3\,1} \right\}+\left\{ {3 \atop 1\,2} \right\}\left\{ {2 \atop 3\,1} \right\}+\left\{ {3 \atop 1\,3} \right\}\left\{ {3 \atop 3\,1} \right\}+\left\{ {3 \atop 1\,4} \right\}\left\{ {4 \atop 3\,1} \right\}+\left\{ {4 \atop 1\,2} \right\}\left\{ {2 \atop 4\,1} \right\}+
$$

$$
+\left\{ {4 \atop 1\,1} \right\}\left\{ {1 \atop 4\,1} \right\}+\left\{ {4 \atop 1\,3} \right\}\left\{ {3 \atop 4\,1} \right\}+\left\{ {4 \atop 1\,4} \right\}\left\{ {4 \atop 4\,1} \right\}-\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}\left(\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}+\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\}+
$$

$$
+\left\{ {3 \atop 1\,3} \right\}+\left\{ {4 \atop 1\,4} \right\}\right)-\left\{ {2 \atop 1\,1} \right\}\left(\left\{ {1 \atop 2\,1} \right\}+\left\{ {2 \atop 2\,2} \right\}+\left\{ {3 \atop 2\,3} \right\}+\left\{ {4 \atop 2\,4} \right\}\right)-\left\{ {3 \atop 1\,1} \right\}\left(\left\{ {1 \atop 3\,1} \right\}+
$$

$$
+\left\{ {2 \atop 3\,2} \right\}+\left\{ {3 \atop 3\,3} \right\}+\left\{ {4 \atop 3\,4} \right\}\right)-\left\{ {4 \atop 1\,1} \right\}\left(\left\{ {1 \atop 4\,1} \right\}+\left\{ {2 \atop 4\,2} \right\}+\left\{ {3 \atop 4\,3} \right\}+\left\{ {4 \atop 4\,4} \right\}\right),
$$

или, ако изоставимо чланове који су једнаки нули,

$$
R_{11}=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}+\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\}+\left\{ {3 \atop 1\,3} \right\}+\left\{ {4 \atop 1\,4} \right\}\right)-\frac{\partial}{\partial x^1}\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}-\frac{\partial}{\partial x^4}\left\{ {4 \atop 1\,1} \right\}+
$$

$$
+\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}+\left\{ {1 \atop 1\,4} \right\}\left\{ {4 \atop 1\,1} \right\}+\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\}\left\{ {2 \atop 2\,1} \right\}+\left\{ {3 \atop 1\,3} \right\}\left\{ {3 \atop 3\,1} \right\}+\left\{ {4 \atop 1\,1} \right\}\left\{ {1 \atop 4\,1} \right\}+
$$

$$
+\left\{ {4 \atop 1\,4} \right\}\left\{ {4 \atop 4\,1} \right\}-\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}\left(\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}+\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\}+\left\{ {3 \atop 1\,3} \right\}+\left\{ {4 \atop 1\,4} \right\}\right)-
$$

$$
-\left\{ {4 \atop 1\,1} \right\}\left(\left\{ {1 \atop 4\,1} \right\}+\left\{ {4 \atop 4\,4} \right\}\right)=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\}+\left\{ {3 \atop 1\,3} \right\}+\left\{ {4 \atop 1\,4} \right\}\right)-\frac{\partial}{\partial x^4}\left\{ {4 \atop 1\,1} \right\}+
$$

$$
+\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\}\left\{ {2 \atop 2\,1} \right\}+\left\{ {3 \atop 1\,3} \right\}\left\{ {3 \atop 3\,1} \right\}+\left\{ {4 \atop 1\,1} \right\}\left\{ {1 \atop 4\,1} \right\}+\left\{ {4 \atop 1\,4} \right\}\left\{ {4 \atop 4\,1} \right\}-
$$

$$
-\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\}-\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}\left\{ {3 \atop 1\,3} \right\}-\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\}\left\{ {4 \atop 1\,4} \right\}-\left\{ {4 \atop 1\,1} \right\}\left\{ {4 \atop 4\,4} \right\}.
$$

Ако у последњем изразу за $R_{11}$ заменимо вредности Кристофелових симбола датих са (7), добивамо

$$
R_{11}=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma_1\right)-\frac{\partial}{\partial x^4}\left(\frac{1}{2}\alpha_4 e^{\alpha-\gamma}\right)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\alpha_4 e^{\alpha-\gamma}\right)\frac{1}{2}\alpha_4+
$$

$$
+\left(\frac{1}{2}\gamma_1\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha_1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha_1\right)-\frac{1}{2}\gamma_1\left(\frac{1}{2}\alpha_1\right)-\frac{1}{2}\gamma_4\left(\frac{1}{2}\alpha_4 e^{\alpha-\gamma}\right),
$$

или, после извршеног диференцирања и погодних срећивања,

$$
(8)\quad R_{11}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\gamma_{11}+\frac{1}{4}(\gamma_1)^2-\frac{1}{4}\alpha_1\gamma_1+e^{\alpha-\gamma}\left[\frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4-\frac{1}{4}(\alpha_4)^2-\frac{1}{2}\alpha_{44}\right].
$$



На сличан начин, за остале од нуле различите координате Ричијевог коваријантног тензора добивамо

$$
R_{22}=-1+e^{x^1-\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\gamma_1\right),
$$

$$
(9)\quad R_{33}=-\sin^2 x^2+\sin^2 x^2\, e^{x^1-\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\gamma_1\right),
$$

$$
R_{44}=-e^{-\gamma}\left[\frac{1}{2}\alpha_{44}-\frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4+\frac{1}{4}(\alpha_4)^2\right],
$$

$$
R_{14}=R_{41}=-\frac{1}{2}\alpha_4,
$$

на основу чега за координате мешовитог Ричијевог тензора,

$$
R^i_j=g^{ik}R_{kj},
$$

добивамо

$$
R^1_1=e^{-\alpha}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\gamma_{11}+\frac{1}{4}(\gamma_1)^2-\frac{1}{4}\alpha_1\gamma_1\right]+
$$

$$
+e^{-\gamma}\left[\frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4-\frac{1}{4}(\alpha_4)^2-\frac{1}{2}\alpha_{44}\right],
$$

$$
R^2_2=R^3_3=-e^{-x^1}+e^{-\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\gamma_1\right),
$$

$$
(10)\quad R^4_4=e^{-\alpha}\left[\frac{1}{2}\gamma_{11}+\frac{1}{4}(\gamma_1)^2+\frac{1}{2}\gamma_1-\frac{1}{4}\alpha_1\gamma_1\right]+e^{-\gamma}\left[\frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4-\frac{1}{2}\alpha_{44}-\frac{1}{4}(\alpha_4)^2\right],
$$

$$
R^1_4=-\frac{1}{2}\alpha_4 e^{-\alpha},
$$

$$
R^4_1=\frac{1}{2}\alpha_4 e^{-\gamma}.
$$

Инваријанта кривине дефинисана је са

$$
R=g^{ij}R_{ij}=R^i_i,
$$

па је у нашем случају

$$
R=R^1_1+R^2_2+R^3_3+R^4_4,
$$

односно, ако искористимо изразе (10),

$$
(11)\quad R=e^{-\alpha}\left[\frac{3}{2}-\alpha_1+\gamma_{11}+\frac{1}{2}(\gamma_1)^2-\frac{1}{2}\alpha_1\gamma_1+\gamma_1\right]+
$$

$$
+e^{-\gamma}\left[\frac{1}{2}\alpha_4\gamma_4-\frac{1}{2}(\alpha_4)^2-\alpha_{44}\right]-2e^{-x^1}.
$$

На основу (1), (10) и (11), сада, лако добивамо

$$G_1^1 = R_1^1 - \frac{1}{2} R = e^{-\alpha}\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\gamma_1\right) + e^{-x^1},$$

$$G_2^2 = R_2^2 - \frac{1}{2} R = e^{-\alpha}\left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\gamma_{11} - \frac{1}{4}(\gamma_1)^2 - \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_1\gamma_1\right] +$$

$$+ e^{-\gamma}\left[\frac{1}{2}\alpha_{44} + \frac{1}{4}(\alpha_4)^2 - \frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4\right] = G_3^3,$$

$$G_4^4 = R_4^4 - \frac{1}{2} R = e^{-\alpha}\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\alpha_1\right) + e^{-x^1},$$

$$G_4^1 = R_4^1 = -\frac{1}{2}\alpha_4 e^{-\alpha}, \qquad G_1^4 = R_1^4 = \frac{1}{2}\alpha_4 e^{-\gamma},$$

што је и требало показати.

**Задатак 202.** (Одељак 34., задатак 4.). Посматрајмо систем једначина

$$(R_{ij} - \lambda g_{ij})\, u^j = 0,$$

где је $R_{ij}$ Ричијев тензор у неком риманском простору $V_N$ ($N > 2$), $g_{ij}$ његов метрички тензор, $\lambda$ неки скалар а $u^i$ неки контраваријантни вектор.

Показати да ће овај систем једначина бити сагласан само ако скаларна инваријанта $\lambda$ задовољава детерминантну једначину

$$|R_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0,$$

и да су односни вектори $u^i$ управни један на другом. Ови вектори одређују тзв. Ричијеве главне правце у датом простору у датој тачки.

*Решење*: Систем

$$(R_{ij} - \lambda g_{ij})\, u^j = 0,$$

представља систем од $N$ скаларних хомогених линеарних једначина по $N$ непознатих $u^j$. Овај систем ће имати нетривијална решења само ако је детерминанта система једнака нули, тј. ако је

$$|R_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0,$$

Ово је, очигледно, алгебарска једначина $N$-ог степена по $\lambda$. Уобичајено је да се назива *карактеристична једначина*, а њена решења $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, *карактеристични бројеви* тензора $R_{ij}$.

С обзиром да постоји $N$ карактеристичних бројева (од којих неки могу бити међусобно једнаки), постоји и $N$ карактеристичних вектора $u^i_{(\alpha)}$ чији правац остаје очуван трансформацијом помоћу тензора $R_{ij}$, тј.

$$R_{ij}\, u^j_{(\alpha)} = \lambda_{(\alpha)}\, u_{(\alpha)i}\,.$$

Правци који су одређени векторима $u^i_{(\alpha)}$ називају се Ричијеви главни правци. Ми треба да покажемо да су Ричијеви главни правци међусобно управни, или, што је исто, да су карактеристични вектори међусобно управни.



Уочимо два карактеристична вектора, $u^i_{(\alpha)}$ и $u^i_{(\beta)}$, који одговарају различитим карактеристичним бројевима $\lambda_{(\alpha)}$ и $\lambda_{(\beta)}$, $(\alpha \neq \beta)$. Тада је

$$R_{ij}\, u^j_{(\alpha)} = \lambda_{(\alpha)}\, g_{ij}\, u^j_{(\alpha)},$$

$$R_{ij}\, u^j_{(\beta)} = \lambda_{(\beta)}\, g_{ij}\, u^j_{(\beta)}.$$

Ако прву од ових једначина скаларно помножимо вектором $u^i_{(\beta)}$, а другу вектором $u^i_{(\alpha)}$, па их саберемо, добивамо

$$(R_{ij} - R_{ji})\, u^j_{(\alpha)}\, u^i_{(\beta)} = [\lambda_{(\alpha)} - \lambda_{(\beta)}]\, g_{ij}\, u^i_{(\alpha)}\, u^j_{(\beta)}.$$

Међутим, како је $R_{ij} = R_{ji}$, следи

$$[\lambda_{(\alpha)} - \lambda_{(\beta)}]\, g_{ij}\, u^i_{(\alpha)}\, u^j_{(\beta)} = 0,$$

или, с обзиром да је $\lambda_{(\alpha)} \neq \lambda_{(\beta)}$,

$$g_{ij}\, u^i_{(\alpha)}\, u^j_{(\beta)} = 0,$$

на основу чега закључујемо да су карактеристични вектори $u^i_{(\alpha)}$ и $u^i_{(\beta)}$ међусобно управни, што је и требало показати.

**Задатак 203.** (Одељак 34., задатак 5.). Шта ће бити са Ричијевим главним правцима у случају $N = 2$.

***Решење***: У случају дводимензионих простора ($N = 2$) карактеристична једначина из претходног задатка своди се на квадратну једначину. Према томе, постоје два карактеристична броја којима одговарају два међусобно ортогонална карактеристична вектора. На основу тога закључујемо да у случају дводимензионих простора у општем случају могу постојати два међусобно ортогонална правца (Ричијеви главни правци) који остају инваријантни у односу на трансформације помоћу Ричијевог тензора $R_{ij}$.

**Задатак 204.** (Одељак 34., задатак 6.). У неком риманском простору $V_N$ нека буду уведене Риманове координате.

Изразити координате Ричијевог тензора и инваријанту кривине за неку хиперповрш тог простора.

*Задатак треба да гласи:* Ако користимо нормалне координате у риманском простору $V_N$, изразити тензор кривине, Ричијев тензор и инваријанту кривине помоћу одговарућих величина за хиперповрш тог простора и неких додатних чланова.

*Решење*: Дефинисаћемо, прво, нормалне координате у риманском простору.

У сваком риманском простору $V_N$ можемо уочити фамилију хиперповрши као просторе од $N-1$ димензије. Једначина те фамилије може бити изражена у облику

(1) $$F(x^1, x^2, \ldots, x^N) = C,$$

при чему вредност константе $C$ одређује појединачне хиперповрши.

Ако са $dx^n$ означимо инфинитезимално померање по хиперповршима, тада је

$$\frac{\partial F}{\partial x^n}\, dx^n = 0, \tag{2}$$

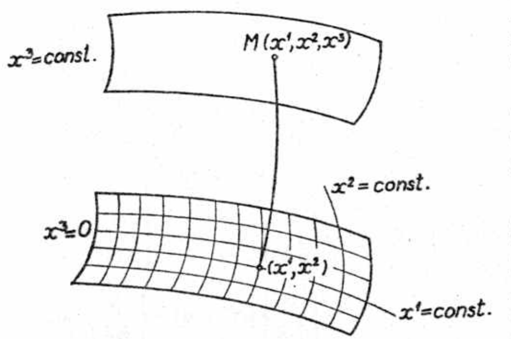
одакле закључујемо да је вектор $X^n = \dfrac{\partial F}{\partial x^n}$ (као градијент функције $F$) нормалан на хиперповршима.

Сада можемо потражити фамилију кривих линија које су нормалне на уочене хиперповрши. Те линије су *ортогоналне трајекторије* уочене фамилије хиперповрши. Добијамо их као решење система обичних диференцијалних једначина (векторске линије поља вектора $X^n$)

$$\frac{dx^r}{dx^N} = \frac{X^r}{X^N}. \tag{3}$$

Ове једначине ће имати решења са довољним бројем интеграционих констаната које дају једну криву кроз сваку тачку простора. На основу тога закључујемо *да ће свака неограничена фамилија хиперповрши у риманском простору имати ортогоналне трајекторије.* При томе су разматрања вршена у односу на систем произвољних генералисаних координата $x^k$ $(k = 1, 2, \dots, N)$.

Нормалне координате, а са $x^k$ ћемо од сада њих обележавати, дефинисаћемо на следећи начин. Полазећи од уочене фамилије хиперповрши, дефинисаћемо $x^N$ да буде параметар који је константан на свакој хиперповрши. На хиперповршима увешћемо координатни систем $x^\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, N-1$. Увешћемо конвенцију да грчки индекси узимају вредности од 1 до $N-1$, а латински од 1 до $N$.




Према томе, било која тачка $M$ у риманском простору $V_N$ одређена је нормалним координатама $x^k$, $k = 1, 2, \dots, N$, при чему координата $x^N$ има вредност која припада хиперповрши која пролази кроз тачку $M$, а координате $x^\alpha$ одређују ортогоналну трајекторију која пролази кроз $M$.

На слици је илустрован пример нормалних координата у случају риманског простора од три димензије.

Јасно је да дуж сваке ортогоналне трајекторије, тј. координатне линије $x^N$, координате $x^\alpha$ имају константне вредности.

Уочимо сада у некој тачки риманског простора $V_N$ два вектора. Нека је $X^k$ вектор тангентан на ортогоналну трајекторију у тој тачки, а $Y^k$ вектор тангентан на хиперповрши у истој тачки. Пошто су координате $x^\alpha$ константне дуж сваке ортогоналне трајекторије, биће

$$X^\alpha = 0. \tag{4}$$



На исти начин, пошто је $x^N$ константно на свакој хиперповрши, биће

$$Y^N = 0. \tag{5}$$

Међутим, на основу основне особине ортогоналних трајекторија, закључујемо да су ова два вектора ортогонална, тј, да је

$$a_{ij} X^i Y^j = 0. \tag{6}$$

Али, на основу (4) и (5), следи

$$a_{N\alpha} X^N Y^\alpha = 0. \tag{7}$$

Пошто $X^N$ није једнако нули и пошто је $Y^\alpha$ произвољно, закључујемо да је

$$a_{N\alpha} = 0, \tag{8}$$

што је карактеристична особина нормалних координатних система. Метричка форма у простору $V_N$ је, према томе, облика

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + a_{NN}\, (dx^N)^2. \tag{9}$$

Ако пођемо од релације

$$a^{ij} = a^{ik} a^{jl} a_{kl}, \tag{10}$$

тада је

$$a^{N\alpha} = a^{N\gamma} a^{\alpha\delta} a_{\gamma\delta} + a^{NN} a^{\alpha N} a_{NN} + a^{NN} a^{\alpha\beta} a_{N\beta}. \tag{11}$$

Међутим, како је, с обзиром на (8), последњи члан на десној страни једнак нули, биће

$$a^{N\alpha} = a^{N\gamma} a^{\alpha\delta} a_{\gamma\delta} + a^{NN} a^{\alpha N} a_{NN}. \tag{12}$$

Из релације

$$a_{mr} a^{ms} = \delta_r^s,$$

ако узмемо да индекси узимамају вредности од 1 до $N-1$, добијамо

$$a_{m\alpha} a^{m\beta} = \delta_\alpha^\beta,$$

одакле, с обзиром на (8), следи

$$a_{\alpha\beta} a^{\alpha\gamma} = \delta_\beta^\gamma. \tag{13}$$

Ако ово искористимо, тада (12) можемо написати у облику

$$a^{N\alpha} = a^{N\alpha} + a^{NN} a_{NN} a^{N\alpha},$$

одакле је

$$a^{NN} a_{NN} a^{N\alpha} = 0,$$

односно

$$a^{N\alpha} = 0. \tag{14}$$

Такође из релације (10) добијамо

$$a^{NN}=a^{N\alpha}a^{N\beta}a_{\alpha\beta}+a^{N\alpha}a^{NN}a_{\alpha N}+a^{NN}a^{N\beta}a_{N\beta}+a^{NN}a^{NN}a_{NN}.$$

Међутим, на основу (8) и (14), биће

$$a^{NN}=a^{NN}a^{NN}a_{NN}$$

одакле закључујемо да је

(15) $$a^{NN}=\frac{1}{a_{NN}}.$$

На хиперповрши, тј. у простору од $N-1$ димензије, метричка форма је облика

(16) $$ds'^2=a'_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta$$

где су коефицијенти форме функције од $x^\alpha$, а садрже и $x^N$ као параметар. Ако са цртом означимо све величине које се односе на простор од $N-1$ димензије, тада, на основу (9) и (16), закључујемо да се координате метричког тензора простора $V_N$ поклапају са координатама $a'_{\alpha\beta}$ метричког тензора простора $V_{N-1}$ кад индекси узимају вредности од 1 до $N-1$, тј. да је

(17) $$a_{\alpha\beta}=a'_{\alpha\beta}.$$

На основу овога и релације (13) следи

$$a_{\alpha\beta}\,a'^{\alpha\gamma}=\delta^{\gamma}_{\beta},$$

одакле закључујемо да је

(18) $$a^{\alpha\beta}=a'^{\alpha\beta}.$$

Дакле, и контраваријантне координате метричког тензора простора $V_N$ и $V_{N-1}$ се поклапају кад индекси узимају вредности од 1 до $N-1$.

На основу претходног лако закључујемо да ће бити

(19) $$[\alpha\beta,\ \gamma]=[\alpha\beta,\ \gamma]',\quad \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}',$$

док за остале Кристофелове симболе простора $V_N$ добијамо

$$[\alpha N,\ \beta]=[\beta N,\ \alpha]=-[\alpha\beta,\ N]=\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^N},$$

$$[\alpha N,\ N]=-[NN,\ \alpha]=\frac{1}{2}\frac{\partial a_{NN}}{\partial x^\alpha},\quad [NN,\ N]=\frac{1}{2}\frac{\partial a_{NN}}{\partial x^N},$$

(20) $$\left\{\begin{matrix}\alpha\\ N\gamma\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}a^{\alpha\gamma}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial x^N},\quad \left\{\begin{matrix}N\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2a_{NN}}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^N},$$

$$\left\{\begin{matrix}N\\ N\alpha\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2a_{NN}}\frac{\partial a_{NN}}{\partial x^\alpha},\quad \left\{\begin{matrix}\alpha\\ NN\end{matrix}\right\}=-\frac{a^{\alpha\beta}}{2a_{NN}}\frac{\partial a_{NN}}{\partial x^\beta},\quad \left\{\begin{matrix}N\\ NN\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2a_{NN}}\frac{\partial a_{NN}}{\partial x^N},$$

и не изражавају се преко Кристофелових симбола простора $V_{N-1}$.



Тензор кривине простора $V_N$ има следећих $N^2(N^2+1)/12$ независних координата

(21) $$R_{lijk}=\frac{\partial}{\partial x^j}[ik,\ l]-\frac{\partial}{\partial x^k}[ij,\ l]+\left\{\begin{matrix}m\\ i\,j\end{matrix}\right\}[kl,\ m]-\left\{\begin{matrix}m\\ i\,k\end{matrix}\right\}[jl,\ m].$$

Ако индекси $l$, $i$, $j$, $k$ узимају вредности од 1 до $N-1$, добијамо следећих $N(N^3-4N^2+5N-2)/12$ независних координата тензора кривине у $V_N$,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{\partial}{\partial x^\gamma}[\beta\delta,\ \alpha]-\frac{\partial}{\partial x^\delta}[\beta\gamma,\ \alpha]+\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}[\alpha\delta,\ \sigma]-\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \beta\delta\end{matrix}\right\}[\alpha\gamma,\ \sigma]+$$
$$+\left\{\begin{matrix}N\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}[\alpha\delta,\ N]-\left\{\begin{matrix}N\\ \beta\delta\end{matrix}\right\}[\alpha\gamma,\ N].$$

Прва четири члана на десној страни, с обзиром на (19), представљају координате тензора кривине простора $V_{N-1}$, тако да можемо писати

(22) $$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R'_{\alpha\beta\gamma\delta}+\left\{\begin{matrix}N\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}[\alpha\delta,\ N]-\left\{\begin{matrix}N\\ \beta\delta\end{matrix}\right\}[\alpha\gamma,\ N],$$

или користећи (20),

(23) $$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R'_{\alpha\beta\gamma\delta}+\frac{1}{4a_{NN}}\left(\frac{\partial a_{\alpha\delta}}{\partial x^N}\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^N}-\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial x^N}\frac{\partial a_{\beta\delta}}{\partial x^N}\right).$$

Преосталих $N(2N^2-3N+1)/6$ независних координата тензора кривине простора $V_N$ су

$$R_{N\beta\gamma\delta}=-R_{\beta N\gamma\delta}=R_{\beta N\delta\gamma}=R_{\gamma\delta N\beta}=-R_{\delta\gamma N\beta}=R_{\delta\gamma\beta N}=$$

(24) $$=\frac{\partial}{\partial x^\gamma}[\beta\delta,\ N]-\frac{\partial}{\partial x^\delta}[\beta\gamma,\ N]+\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}[\delta N,\ \sigma]+\left\{\begin{matrix}N\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}[\delta N,\ N]-$$
$$-\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \beta\delta\end{matrix}\right\}[\gamma N,\ \sigma]-\left\{\begin{matrix}N\\ \beta\delta\end{matrix}\right\}[\gamma N,\ N],$$

$$R_{N\beta N\delta}=-R_{\beta NN\delta}=R_{\beta N\delta N}=R_{\delta N\beta N}=-R_{N\delta\beta N}=R_{N\delta N\delta}=$$

(25) $$=\frac{\partial}{\partial x^N}[\beta\delta,\ N]-\frac{\partial}{\partial x^\delta}[\beta N,\ N]+\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \beta N\end{matrix}\right\}[\delta N,\ \sigma]+\left\{\begin{matrix}N\\ \beta N\end{matrix}\right\}[\delta N,\ N]-$$
$$-\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \beta\delta\end{matrix}\right\}[NN,\ \sigma]-\left\{\begin{matrix}N\\ \beta\delta\end{matrix}\right\}[NN,\ N],$$

и не изражавају се преко координата тензора кривине простора $V_{N-1}$.

Ричијев тензор у простору $V_N$ има $N(N+1)/2$ независних координата

(26) $$R_{ij}=a^{lk}R_{lijk}.$$

Ако индекси $i$ и $j$ узимају вредности од 1 до $N-1$, добијамо следећих $N(N-1)/2$ независних координата

$$R_{\alpha\beta}=a^{\gamma\delta}R_{\gamma\alpha\beta\delta}+a^{NN}R_{N\alpha\beta N}.$$

Ако овде $R_{\gamma\alpha\beta\delta}$ изразимо помоћу (22), добијамо

$$R_{\alpha\beta}=a^{\gamma\delta}R'_{\gamma\alpha\beta\delta}+a^{\gamma\delta}\left(\left\{ {N \atop \beta\gamma} \right\}[\alpha\delta,\ N]-\left\{ {N \atop \beta\delta} \right\}[\alpha\gamma,\ N]\right)+a^{NN}R_{N\alpha\beta N}.$$

Међутим, с обзиром на (18), први члан на десној страни представља координате Ричијевог тензора простора $V_{N-1}$, тако да је

$$(27)\qquad R_{\alpha\beta}=R'_{\alpha\beta}+a^{\gamma\delta}\left(\left\{ {N \atop \beta\gamma} \right\}[\alpha\delta,\ N]-\left\{ {N \atop \beta\delta} \right\}[\alpha\gamma,\ N]\right)+a^{NN}R_{N\alpha\beta N}.$$

Преосталих $N$ независних координата Ричијевог тензора у $V_N$ су

$$(28)\qquad R_{N\alpha}=R_{\alpha N}=a^{\gamma\delta}R_{\gamma N\alpha\delta},$$

$$(29)\qquad R_{NN}=a^{\alpha\beta}R_{N\alpha\beta N},$$

и не изражавају се преко координата Ричијевог тензора простора $V_{N-1}$.

Инваријанта кривине простора $V_N$ је

$$R=a^{ij}R_{ij}=a^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}+a^{NN}R_{NN}.$$

Ако овде $R_{\alpha\beta}$ изразимо помоћу (27), добијамо

$$R=a^{\alpha\beta}R'_{\alpha\beta}+a^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta}\left(\left\{ {N \atop \beta\gamma} \right\}[\alpha\delta,\ N]-\left\{ {N \atop \beta\delta} \right\}[\alpha\gamma,\ N]\right)+a^{NN}a^{\alpha\beta}R_{N\alpha\beta N}+a^{NN}R_{NN}.$$

Међутим, први члан на десној страни, с обзиром на (18), представља инваријанту кривине простора $V_{N-1}$, па је, користећи још (29),

$$(30)\qquad R=R'+a^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta}\left(\left\{ {N \atop \beta\gamma} \right\}[\alpha\delta,\ N]-\left\{ {N \atop \beta\delta} \right\}[\alpha\gamma,\ N]\right)+2\,a^{NN}R_{NN}.$$

**Задатак 205.** (Одељак 34., задатак 7.). У неком риманском простору $V_3$ постоји шест различитих координата тензора $R_{lijk}$ и шест веза

$$R_{ij}=g^{lk}R_{lijk}.$$

Показати да су решења ових једначина по $R_{lijk}$ одређена једначинама

$$R_{lijk}=g_{lk}R_{ij}+g_{ij}R_{lk}-g_{lj}R_{ik}-g_{ik}R_{lj}+\frac{R}{2}(g_{lj}g_{ik}-g_{lk}g_{ij}),$$

где је $R$ инваријанта кривине.

***Решење***: С обзиром да у риманском простору од три димензије Риман-Кристофелов тензор има шест међусобно независних координата, у том простору увек му се може координирати неки симетрични тензор другог реда (види одељак 30., једначину 18.)

$$(1)\qquad S^{ij}=\frac{1}{4}\,\varepsilon^{ikl}\,\varepsilon^{jmn}R_{klmn}.$$

С обзиром да је Ричијев тензор

$$(2)\qquad R_{ij}=g^{lk}R_{lijk},$$



на основу (1) имамо

$$(3)\qquad R_{ij}=g^{lk}\varepsilon_{pli}\varepsilon_{qjk}S^{pq}=g^{lk}\varepsilon_{lpi}\varepsilon_{kjq}S^{pq}.$$

Израз $\varepsilon_{lpi}\varepsilon_{kjq}$ можемо написати у облику

$$\varepsilon_{lpi}\varepsilon_{kjq}=\varepsilon_{lpi}\varepsilon^{rst}g_{rk}g_{sj}g_{tq},$$

односно

$$(4)\qquad \varepsilon_{lpi}\varepsilon_{kjq}=\delta^{rst}_{lpi}g_{rk}g_{sj}g_{tq}.$$

Ако индексима $l$, $p$, $i$ дамо неке фиксиране вредности, рецимо $L$, $P$, $I$, добивамо

$$\varepsilon_{LPI}\varepsilon_{kjq}=\delta^{rst}_{LPI}g_{rk}g_{sj}g_{tq},$$

односно, у развијеном облику,

$$\varepsilon_{LPI}\varepsilon_{kjq}=\delta^{LPI}_{LPI}g_{Lk}g_{Pj}g_{Iq}+\delta^{LIP}_{LPI}g_{Lk}g_{Ij}g_{Pq}+\delta^{ILP}_{LPI}g_{Ik}g_{Lj}g_{Pq}+$$
$$+\delta^{IPL}_{LPI}g_{Ik}g_{Pj}g_{Lq}+\delta^{PIL}_{LPI}g_{Pk}g_{Ij}g_{Lq}+\delta^{PLI}_{LPI}g_{Pk}g_{Lj}g_{Iq}=$$
$$=g_{Lk}g_{Pj}g_{Iq}+g_{Ik}g_{Lj}g_{Pq}+g_{Pk}g_{Ij}g_{Lq}-$$
$$-g_{Lk}g_{Ij}g_{Pq}-g_{Ik}g_{Pj}g_{Lq}-g_{Pk}g_{Lj}g_{Iq},$$

или, што је исто,

$$\varepsilon_{LPI}\varepsilon_{kjq}=\begin{vmatrix} g_{Lk} & g_{Lj} & g_{Lq} \\ g_{Pk} & g_{Pj} & g_{Pq} \\ g_{Ik} & g_{Ij} & g_{Iq} \end{vmatrix}.$$

С обзиром да бројеви $L$, $P$, $I$ могу бити ма који од бројева 1, 2, 3, можемо писати

$$\varepsilon_{lpi}\varepsilon_{kjq}=\begin{vmatrix} g_{lk} & g_{lj} & g_{lq} \\ g_{pk} & g_{pj} & g_{pq} \\ g_{ik} & g_{ij} & g_{iq} \end{vmatrix},$$

па је

$$(5)\qquad \varepsilon_{lpi}\varepsilon_{kjq}g^{lk}=\begin{vmatrix} g_{lk} & g_{lj} & g_{lq} \\ g_{pk} & g_{pj} & g_{pq} \\ g_{ik} & g_{ij} & g_{iq} \end{vmatrix}g^{lk}=g_{iq}g_{pj}-g_{ij}g_{pq}.$$

Сада је, на основу (3),

$$R_{ij}=(g_{iq}g_{pj}-g_{ij}g_{pq})S^{pq},$$

тј.

$$(6)\qquad R_{ij}=S_{ij}-g_{ij}S^{p}_{p}.$$

Из (1) следи

$$S^i_i=\frac{1}{4}g_{ij}\,\varepsilon^{ikl}\,\varepsilon^{jmn}R_{klmn}=\frac{1}{4}\varepsilon_{jkl}\,\varepsilon^{jmn}R^{kl}_{\cdot\cdot mn}=\frac{1}{4}\delta^{jmn}_{jkl}R^{kl}_{\cdot\cdot mn}=\frac{1}{4}\delta^{mn}_{kl}R^{kl}_{\cdot\cdot mn},$$

односно

$$S^i_i=\frac{1}{4}(\delta^m_k\delta^n_l-\delta^m_l\delta^n_k)R^{kl}_{\cdot\cdot mn}=\frac{1}{4}(R^{mn}_{\cdot\cdot mn}-R^{nm}_{\cdot\cdot mn}).$$

или, коначно,

$$S^i_i=\frac{1}{4}(-R^{nm}_{\cdot\cdot mn}-R^{nm}_{\cdot\cdot mn})=-\frac{1}{2}R^{nm}_{\cdot\cdot mn}=-\frac{1}{2}R \tag{7}$$

Ако ово унесемо у (6), добивамо

$$R_{ij}=S_{ij}+\frac{1}{2}Rg_{ij},$$

одакле следи

$$S^{kl}=R^{kl}-\frac{1}{2}Rg^{kl}. \tag{8}$$

Из (1) такође следи

$$R_{lijk}=\varepsilon_{pli}\,\varepsilon_{qjk}S^{pq}.$$

Ако у овом изразу $S^{pq}$ заменимо помоћу (8), добивамо

$$R_{\cdot ijk}=\varepsilon_{pli}\,\varepsilon_{qjk}\left(R^{pq}-\frac{1}{2}Rg^{pq}\right)=\begin{vmatrix} g_{pq} & g_{pj} & g_{pk}\\ g_{lq} & g_{lj} & g_{lk}\\ g_{iq} & g_{ij} & g_{ik}\end{vmatrix}\left(R^{pq}-\frac{1}{2}Rg^{pq}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} g_{pq} & g_{pj} & g_{pk}\\ g_{lq} & g_{lj} & g_{lk}\\ g_{iq} & g_{ij} & g_{ik}\end{vmatrix}R^{pq}-\frac{R}{2}(g_{ik}g_{lj}-g_{ij}g_{lk}),$$

односно

$$R_{lijk}=R(g_{lj}g_{ik}-g_{lk}g_{ij})-g_{pj}R^{pq}(g_{lq}g_{ik}-g_{iq}g_{lk})+$$

$$+g_{pk}R^{pq}(g_{lq}g_{ij}-g_{iq}g_{lj})-\frac{R}{2}(g_{ik}g_{lj}-g_{ij}g_{lk}),$$

или, што је исто,

$$R_{lijk}=g_{lk}R_{ij}+g_{ij}R_{lk}-g_{lj}R_{ik}-g_{ik}R_{lj}+\frac{R}{2}(g_{lj}g_{ik}-g_{lk}g_{ij}),$$

што је и требало показати.



## 35. Кривина површи. Гаусова једначина. Кодацијеве једначине

**Задатак 206.** (Одељак 35., задатак 1.). За обртну површ чије су параметарске једначине

$$y^1=u^1\cos u^2,\quad y^2=u^1\sin u^2,\quad y^3=\varphi(u^1),$$

одредити Гаусову кривину и показати да ће бити

$$K=\frac{R_{12\,12}}{g_{11}\,g_{22}}=\frac{\varphi'\,\varphi''}{u^1(1+\varphi'^2)^2}.$$

*Решење*: Из параметарских једначина површи,

$$y^1=u^1\cos u^2,\quad y^2=u^1\sin u^2,\quad y^3=\varphi(u^1),$$

на основу обрасца

$$g_{ij}=\sum_k\frac{\partial y^k}{\partial u^i}\,\frac{\partial y^k}{\partial u^j},$$

за координате метричког тензора добивамо

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1+\varphi'^2 & 0\\ 0 & (u^1)^2\end{Bmatrix},\quad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{1+\varphi'^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{(u^1)^2}\end{Bmatrix},$$

где је $\varphi'=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^1}$.

Од нуле различите координате Кристофеловог симбола прве врсте су

$$[11,1]=\varphi'\,\varphi'',\qquad [22,1]=-u^1,\qquad [12,2]=[21,2]=u^1,$$

и друге врсте

$$\begin{Bmatrix}1\\1\;1\end{Bmatrix}=\frac{\varphi'\,\varphi''}{1+\varphi'^2},\qquad \begin{Bmatrix}1\\2\;2\end{Bmatrix}=-\frac{u^1}{1+\varphi'^2},\qquad \begin{Bmatrix}2\\1\;2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\2\;1\end{Bmatrix}=\frac{1}{u^1}.$$

На основу израза за коваријантни Риман-Кристофелов тензор, сада добивамо

$$R_{1212}=\frac{\partial}{\partial u^1}[22,1]-\frac{\partial}{\partial u^2}[21,1]+\begin{Bmatrix}m\\2\;1\end{Bmatrix}[21,\,m]-\begin{Bmatrix}m\\2\;2\end{Bmatrix}[11,\,m]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial u^1}(-u^1)+\begin{Bmatrix}2\\1\;2\end{Bmatrix}[12,2]-\begin{Bmatrix}1\\2\;2\end{Bmatrix}[11,1]=$$

$$=-1+\frac{1}{u^1}u^1+\frac{u^1}{1+\varphi'^2}\varphi'\,\varphi''=\frac{\varphi'\,\varphi''}{1+\varphi'^2}u^1.$$

Како је

$$g=|g_{ij}|=g_{11}\,g_{22}=(u^1)^2(1+\varphi'^2),$$

на основу обрасца за Гаусову кривину (види одељак 35., једначину 49.), добивамо

$$K=\frac{R_{1212}}{g}=\frac{R_{1212}}{g_{11}\,g_{22}}=\frac{\varphi'\,\varphi''}{u^1(1+\varphi'^2)^2},$$

што је и требало показати.

**Задатак 207.** (Одељак 35., задатак 2.). Показати да је у односу на ортогонални криволинијски систем координата Гаусова кривина површи одређена обрасцем

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}\right)+\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2}\right)\right].$$

*Решење*: Гаусова кривина површи одређена је обрасцем (види одељак 35., једначину 49.)

$$(1)\qquad K=\frac{R_{1212}}{a},$$

где је $a$ детерминанта метричког тензора $a_{\alpha\beta}$ површи.

У задатку 186. показано је да се у односу на ортогонални криволинијски систем координата у дводимензионом простору може успоставити релација

$$\frac{1}{g}R_{1212}=-\frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\right].$$

На основу тога и (1), непосредно добивамо

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}\right)+\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2}\right)\right],$$

што је и требало показати.

**Задатак 208.** (Одељак 35., задатак 3.). Ако се квадрат линијског елемента неке површи може написати у облику

$$ds^2=(du^1)^2+a_{22}(du^2)^2,$$

показати да је онда Гаусова кривина те површи одређена обрасцем

$$K=-\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial^2\sqrt{a_{22}}}{(\partial u^1)^2}.$$

*Решење*: Ако у израз за кривину (види претходни задатак),

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}\right)+\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2}\right)\right],$$

ставимо $a_{11}=1$, $a=a_{22}$, непосредно добивамо

$$K=-\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial^2\sqrt{a_{22}}}{(\partial u^1)^2},$$

што је и требало показати.

**Задатак 209.** (Одељак 35., задатак 4.). Написати Кодацијеве једначине у односу на линије кривине уочене површи као координатне линије.

*Решење*: Ако са $\varkappa$ обележимо кривину произвољног нормалног пресека површи $S$ у некој тачки $P$, тада је (види Одељак 35., једначину 57.)

$$(1)\qquad \varkappa=\frac{b_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta}{a_{\gamma\delta}\,dx^\gamma\,dx^\delta}.$$



Нормална кривина $\varkappa$, дакле, зависи не само од првог и другог основног тензора површи, већ и од правца $dx^\alpha$ у тачки $P$ површи. Другим речима, у свакој тачки $P$ површи можемо поставити неограничено много нормалних пресека и за сваки од њих кривина ће у општем случају имати другачију вредност. Одредимо, сада, оне нормалне пресеке (тј. правце $dx^\alpha$) за које ће кривина $\varkappa$ имати максималну или минималну вредност. Њих ћемо одредити из услова да за те правце $\varkappa$ има стационарну вредност, тј.

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial(dx^\alpha)}=0,$$

што се, с обзиром на (1), своди на

$$(2)\qquad b_{\alpha\beta}\,dx^\beta\,a_{\gamma\delta}\,dx^\gamma\,dx^\delta-b_{\gamma\delta}\,dx^\gamma\,dx^\delta\,a_{\alpha\beta}\,dx^\beta=0,$$

јер је $(a_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta)^2=ds^4>0$.

Ако у другом члану једначине (2) уместо $b_{\gamma\delta}\,dx^\gamma\,dx^\delta$ ставимо $\varkappa\,a_{\gamma\delta}\,dx^\gamma\,dx^\delta$, што следи из једначине (1), добијамо

$$(3)\qquad b_{\alpha\beta}\,dx^\beta\,a_{\gamma\delta}\,dx^\gamma\,dx^\delta-\varkappa\,a_{\gamma\delta}\,dx^\gamma\,dx^\delta\,a_{\alpha\beta}\,dx^\beta=0.$$

Како је $a_{\gamma\delta}\,dx^\gamma\,dx^\delta=ds^2>0$, скраћивањем добијамо

$$b_{\alpha\beta}\,dx^\beta-\varkappa\,a_{\alpha\beta}\,dx^\beta=0,$$

односно

$$(4)\qquad (b_{\alpha\beta}-\varkappa\,a_{\alpha\beta})\,dx^\beta=0.$$

Према томе, за одређивање праваца $dx^\alpha$ стационарне нормалне кривине имамо систем од две хомогене једначине. Да би систем имао нетривијална решења мора бити детерминанта система једнака нули, тј.

$$(5)\qquad |\,b_{\alpha\beta}-\varkappa\,a_{\alpha\beta}\,|=0,$$

одакле добијамо две стационарне вредности нормалне кривине $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Оне су, дакле, карактеристични бројеви тензора $b_{\beta\alpha}$. Сваком од њих одговара по један правац $dx^\alpha$, тј. по један карактеристични вектор тензора $b_{\alpha\beta}$. Како је тензор $b_{\alpha\beta}$ симетричан, његови карактеристични бројеви су реални, а карактеристични вектори ортогонални. Према томе, у свакој тачки површи $S$ постоје два ортогонална правца за које нормална кривина има највећу, односно најмању вредност. Ти правци се називају *главни правци нормалне кривине*, а нормални пресеци који им одговарају одређују у свакој тачки површи две ортогоналне криве линије које се називају *линије кривине*. Линије кривине, дакле, чине на површи мрежу ортогоналних кривих линија за које у свакој тачки површи нормална кривина има највећу, односно најмању вредност. Те нормалне кривине, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, називају се *главне кривине*, а њихове реципрочне вредности

$$R_1=\frac{1}{\varkappa_1},\qquad R_2=\frac{1}{\varkappa_2},$$

*главни полупречници кривине* површи у уоченој тачки.

У развијеном облику детерминантна једначина (5) је

$$a\varkappa^2-(b_{11}\,a_{22}+a_{11}\,b_{22}-2\,a_{12}\,b_{12})\,\varkappa+b=0,$$

где је $a = |a_{\alpha\beta}| = a_{11}\, a_{22} - (a_{12})^2$ и $b = |b_{\alpha\beta}| = b_{11}\, b_{22} - (b_{12})^2$. Како је

$$\frac{a_{22}}{a} = a^{11}, \quad \frac{a_{11}}{a} = a^{22}, \quad \frac{a_{12}}{a} = -a^{12},$$

можемо је написати у облику

$$\varkappa^2 - (a^{11}\, b_{11} + 2\, a^{12}\, b_{12} + a^{22}\, b_{22})\, \varkappa + \frac{b}{a} = 0,$$

односно

(6) $$\varkappa^2 - a^{\alpha\beta}\, b_{\alpha\beta}\, \varkappa + \frac{b}{a} = 0.$$

Корени ове једначине су $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, па, по Вијетовом правилу, можемо писати

$$\varkappa_1 \cdot \varkappa_2 = \frac{b}{a}, \qquad \varkappa_1 + \varkappa_2 = a^{\alpha\beta}\, b_{\alpha\beta},$$

односно

(7) $$K = \frac{b}{a} = \varkappa_1 \cdot \varkappa_2 = \frac{1}{R_1 \cdot R_2},$$
$$K_m = a^{\alpha\beta}\, b_{\alpha\beta} = \varkappa_1 + \varkappa_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

где је $K$ кривина површи или Гаусова кривина у некој тачки, а $K_m$ се назива *средња кривина* у тачки површи.

Главни правци нормалне кривине одређују се из једначине (4), тј.

$$b_{1\beta}\, dx^\beta - \varkappa\, a_{1\beta}\, dx^\beta = 0,$$
$$b_{2\beta}\, dx^\beta - \varkappa\, a_{2\beta}\, dx^\beta = 0.$$

Ако из ових једначина елиминишемо $\varkappa$, добијамо једначину

$$b_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta - a_{1\alpha}\, b_{2\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0,$$

коју можемо написати у облику

(8) $$\begin{vmatrix} b_{1\alpha}\, dx^\alpha & b_{2\alpha}\, dx^\alpha \\ a_{1\alpha}\, dx^\alpha & a_{2\alpha}\, dx^\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

или у развијеном облику

(9) $$(b_{11}\, a_{12} - b_{12}\, a_{11})\,(dx^1)^2 + (b_{11}\, a_{22} - b_{22}\, a_{11})\, dx^1\, dx^2 + (b_{12}\, a_{22} - b_{22}\, a_{12})\,(dx^2)^2 = 0.$$

Интегралне криве ове диференцијалне једначине јесу линије кривине површи. Очигледно је, наиме, да линије кривине морају задовољавати ову диференцијалну једначину. Међутим, из једначине (8) видимо да ће она бити задовољена независно од праваца $dx^\alpha$ у два специјална случаја: 1) кад је $b_{\alpha\beta} = 0$, у ком случају је површ раван, па било које две ортогоналне праве у тачки равни можемо сматрати за линије кривине и 2) кад су односне координате првог и другог основног тензора пропорционалне, у ком случају је површ сфера, па било које две ортогоналне криве линије у тачки сфере можемо сматрати за линије кривине. У свим осталим случајевима



линије кривине се одређују интеграцијом диференцијалне једначине (8), односно (9) и једнозначно су одређене.

У специјалном случају, ако за координатне линије узмемо линије кривине, тада су њихове једначине: прве $x^2 = \text{const.}$ и друге $x^1 = \text{const.}$ Према томе, дуж прве координатне линије је $dx^2 = 0$ и дуж друге $dx^1 = 0$, што су диференцијалне једначине линија кривине. Да би, значи, координатне криве биле линије кривине потребно је и довољно да буде

$$b_{11}\, a_{12} - b_{12}\, a_{11} = 0, \qquad b_{12}\, a_{22} - b_{22}\, a_{12} = 0,$$

што следи из једначине (9). Ова два услова су идентична са условима $b_{12} = a_{12} = 0$, при чему смо изузели случајеве кад је површ раван или сфера. Према томе, можемо рећи: потребан и довољан услов да линије кривине буду координатне криве на некој површи која није раван ни сфера јесте да буде

(10) $$b_{12} = a_{12} = 0.$$

Свака ортогонална мрежа на равни или сфери задовољава ове услове.

Кад су линије кривине координатне линије једначина (6) се своди на

$$\varkappa^2 - \left(\frac{b_{11}}{a_{11}} + \frac{b_{22}}{a_{22}}\right)\varkappa + \frac{b_{11}\, b_{22}}{a_{11}\, a_{22}} = 0,$$

јер је $a^{11} = \dfrac{1}{a_{11}}$ и $a^{22} = \dfrac{1}{a_{22}}$, па је

(11) $$\varkappa_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{b_{11}}{a_{11}}, \qquad \varkappa_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{b_{22}}{a_{22}}.$$

Кодацијеве једначине су облика (види Одељак 35., једначину 52.)

$$\frac{\partial b_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} - b_{\alpha\delta}\begin{Bmatrix} \delta \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix} + b_{\delta\beta}\begin{Bmatrix} \delta \\ \alpha\ \alpha \end{Bmatrix} = 0.$$

Кад су координатне линије линије кривине, с обзиром на (10), добијамо

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial x^2} - b_{11}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{Bmatrix} + b_{22}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{Bmatrix} = 0,$$
$$\frac{\partial b_{22}}{\partial x^1} - b_{22}\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1 \end{Bmatrix} + b_{11}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Пошто су координатне линије ортогоналне, Кристофелови симболи су

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{Bmatrix} = a^{11}\,[12,1] = -a^{11}\,[11,2] = -\frac{1}{a_{11}}\,[11,2] = \frac{1}{2}\,\frac{1}{a_{11}}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2},$$
$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{Bmatrix} = a^{22}\,[11,2] = \frac{1}{a_{22}}\,[11,2] = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{a_{22}}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2},$$
$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1 \end{Bmatrix} = a^{22}\,[21,2] = -a^{22}\,[22,1] = -\frac{1}{a_{22}}\,[22,1] = \frac{1}{2}\,\frac{1}{a_{22}}\,\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1},$$
$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{Bmatrix} = a^{11}\,[22,1] = \frac{1}{a_{11}}\,[22,1] = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{a_{11}}\,\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1},$$

па се Кодацијеве једначине после погодних сређивања могу написати у облику

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial x_2}-\frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}}{a_{11}}+\frac{b_{22}}{a_{22}}\right)\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial b_{22}}{\partial x^1}-\frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}}{a_{11}}+\frac{b_{22}}{a_{22}}\right)\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1}=0,$$

или, с обзиром на (11), у облику

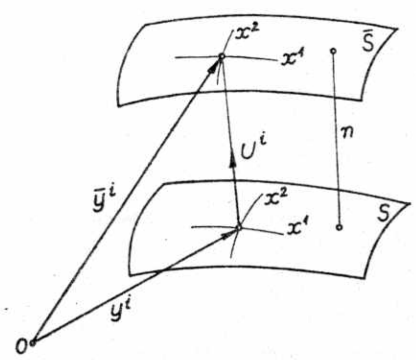
$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial \log a_{11}}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{\partial \log a_{22}}{\partial x^1}=0.$$

*Напомена*: У задатку смо рекли да је површ раван кад је $b_{\alpha\beta}=0$ и да је површ сфера кад су односне координате првог и другог основног тензора пропорционалне. За доказ ових тврђења видети: Л. П. Ајзенхарт: Увод у диференцијалну геометрију, превод: Т. П. Анђелић, Одељак 38., задатак 1. и 2., Научна књига, Београд, 1951.

**Задатак 210.** (Одељак 35., задатак 5.). Успоставити везу која постоји између Гаусових кривина у односним тачкама код две паралелне површи.

***Решење***: Ако се одсечци константне дужине поставе дуж нормала на некој површи од тачака на површи, биће геометријско место њихових других крајњих тачака површ са истим нормалама као дата површ. Две површи у таквом односу су *паралелне*.




Сл. 1

Уочимо две паралелне површи $S$ и $\bar S$ чије ћемо нормално растојање обележити са $n$. У односу на неки Декартов правоугли систем координата, са почетком у неком полу $O$ (сл. 1), једначина површи $\bar S$ је

$$\bar y^i=y^i+nU^i, \tag{1}$$

где су $y^i$ координате тачака на површи $S$, $n$ константа која одређује нормално растојање између тачака површи $S$ и $\bar S$ и $U^i$ Декартове правоугле координате јединичног вектора нормале на површима. Увођењем криволинијских координата $x^\alpha$ на површима (Гаусових параметара), координате метричког тензора површи $\bar S$ су

$$\bar a_{\alpha\beta}=\sum_i \frac{\partial \bar y^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar y^i}{\partial x^\beta}, \tag{2}$$

где је

$$\frac{\partial \bar y^i}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}+n\frac{\partial U^i}{\partial x^\alpha}. \tag{3}$$



Како је (види одељак 35., једначину 38.)

$$\frac{\partial U^i}{\partial x^\alpha}=-b_{\alpha\gamma}\,a^{\beta\gamma}\frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}, \tag{4}$$

где су $a^{\alpha\beta}$ контраваријантне координате првог основног тензора површи $S$ и $b_{\alpha\beta}$ коваријантне координате њеног другог основног тензора, добијамо

$$\frac{\partial \bar y^i}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}-nb_{\alpha\gamma}\,a^{\gamma\beta}\frac{\partial y^i}{\partial x^\beta},$$

па ће координате првог основног тензора (2) површи $\bar S$ бити

$$\bar a_{\alpha\beta}=\sum_i\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}-nb_{\alpha\delta}\,a^{\delta\gamma}\frac{\partial y^i}{\partial x^\gamma}\right)\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\gamma}-nb_{\beta\varepsilon}\,a^{\varepsilon\sigma}\frac{\partial y^i}{\partial x^\sigma}\right),$$

односно

$$\bar a_{\alpha\beta}=\sum_i\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}-2\,na^{\gamma\delta}\,b_{\alpha\delta}\sum_i\frac{\partial y^i}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}+$$

$$+n^2\,a^{\gamma\delta}\,a^{\sigma\varepsilon}\,b_{\alpha\delta}\,b_{\beta\varepsilon}\sum_i\frac{\partial y^i}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^i}{\partial x^\sigma},$$

што се своди на

$$\bar a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}-2\,nb_{\alpha\beta}+n^2\,b_{\alpha\delta}\,b_{\beta\sigma}\,a^{\delta\sigma}. \tag{5}$$

Из једначине (4), коришћењем једначине (2), за координате другог основног тензора површи $S$ добијамо

$$b_{\alpha\beta}=-\sum_i\frac{\partial U^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}. \tag{6}$$

За површ $\bar S$ координате тог тензора су

$$\bar b_{\alpha\beta}=-\sum_i\frac{\partial U^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar y^i}{\partial x^\beta}, \tag{7}$$

јер је $U^i=\bar U^i$. Ако овде искористимо релацију (3), добијамо

$$\bar b_{\alpha\beta}=-\sum_i\frac{\partial U^i}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}+n\frac{\partial U^i}{\partial x^\beta}\right),$$

односно

$$\bar b_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}-n\sum_i\frac{\partial U^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U^i}{\partial x^\beta}. \tag{8}$$

Други члан на десној страни, с обзиром на (4), можемо изразити у облику

$$\sum_i\frac{\partial U^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U^i}{\partial x^\beta}=\sum_i b_{\alpha\gamma}\,a^{\beta\gamma}\frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}\,b_{\beta\delta}\,a^{\sigma\delta}\frac{\partial y^i}{\partial x^\sigma},$$

односно

$$\sum_i\frac{\partial U^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U^i}{\partial x^\beta}=b_{\alpha\gamma}\,b_{\beta\delta}\,a^{\beta\gamma}\,a^{\sigma\delta}\sum_i\frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^i}{\partial x^\sigma}.$$

Како је

$$\sum_i \frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^i}{\partial x^\sigma} = a_{\beta\sigma},$$

биће

$$\sum_i \frac{\partial U^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U^i}{\partial x^\beta} = b_{\sigma\gamma}\, b_{\beta\delta}\, a^{\beta\gamma}\, a^{\sigma\delta}\, a_{\beta\sigma},$$

односно

$$\sum_i \frac{\partial U^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U^i}{\partial x^\beta} = b_{\alpha\gamma}\, b_{\beta\delta}\, a^{\gamma\delta}.$$

Ако ово заменимо у (8), добијамо

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - n b_{\alpha\delta}\, b_{\beta\sigma}\, a^{\delta\sigma}. \tag{9}$$

Да бисмо последњи члан у овој релацији, као и релацији (5), изразили на погоднији начин, поћи ћемо од релације (видети одељак 35., једначине 17. и 47.)

$$K\, \varepsilon_{\alpha\beta}\, \varepsilon_{\gamma\sigma} = b_{\alpha\gamma}\, b_{\beta\sigma} - b_{\alpha\sigma}\, b_{\beta\gamma}. \tag{10}$$

Ако овде извршимо композицију са $a^{\beta\sigma}$, добијамо

$$K\, \varepsilon_{\alpha\beta}\, \varepsilon_{\gamma\sigma}\, a^{\beta\sigma} = b_{\alpha\gamma}\, b_{\beta\sigma}\, a^{\beta\sigma} - b_{\alpha\sigma}\, b_{\beta\gamma}\, a^{\beta\sigma}.$$

Како је

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\, \varepsilon_{\gamma\sigma}\, a^{\beta\sigma} = a_{\alpha\gamma}$$

и

$$b_{\beta\sigma}\, a^{\beta\sigma} = K_m,$$

где је $K_m$ средња кривина површи (видети претходни задатак), добијамо

$$K a_{\alpha\gamma} = b_{\alpha\gamma}\, K_m - b_{\alpha\sigma}\, b_{\beta\gamma}\, a^{\beta\sigma},$$

одакле је

$$b_{\alpha\delta}\, b_{\beta\sigma}\, a^{\delta\sigma} = b_{\alpha\beta}\, K_m - a_{\alpha\beta}\, K. \tag{11}$$

Ако ово заменимо у (5) и (9), после извесних сређивања добијамо

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = (1 - n^2 K)\, a_{\alpha\beta} - n\,(2 - nK_m)\, b_{\alpha\beta}, \tag{12}$$

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = (1 - nK_m)\, b_{\alpha\beta} + nKa_{\alpha\beta}. \tag{13}$$

Детерминанте тензора $\bar{a}_{\alpha\beta}$ и $\bar{b}_{\alpha\beta}$ су

$$\bar{a} = |\,\bar{a}_{\alpha\beta}\,| = \frac{1}{2}\, e^{\alpha\gamma}\, e^{\beta\delta}\, \bar{a}_{\alpha\beta}\, \bar{a}_{\gamma\delta}, \tag{14}$$

$$\bar{b} = |\,\bar{b}_{\alpha\beta}\,| = \frac{1}{2}\, e^{\alpha\gamma}\, e^{\beta\delta}\, \bar{b}_{\alpha\beta}\, \bar{b}_{\gamma\delta}. \tag{15}$$

Ако у овим релацијама $\bar{a}_{\alpha\beta}$ и $\bar{b}_{\alpha\beta}$ изразимо преко (12) и (13) и при томе уведемо ознаке

$$\begin{aligned} &1 - n^2 K = p, \quad n\,(2 - nK_m) = q \\ &1 - nK_m = r, \quad nK = s, \end{aligned} \tag{16}$$



добијамо

$$\bar{a} = p^2\, a - pq\, e^{\alpha\gamma}\, e^{\beta\delta}\, a_{\alpha\beta}\, b_{\gamma\delta} + q^2\, b, \tag{17}$$

$$\bar{b} = r^2\, b + rs\, e^{\alpha\gamma}\, e^{\beta\delta}\, a_{\alpha\beta}\, b_{\gamma\delta} + s^2\, a. \tag{18}$$

Ако, сада, искористимо релације

$$e^{\alpha\gamma}\, e^{\beta\delta}\, a_{\alpha\beta} = aa^{\gamma\delta}$$

и

$$K = \frac{b}{a}, \quad b = aK,$$

једначине (17) и (18) добијају облик

$$\bar{a} = (p^2 - pqK_m + q^2 K)\, a,$$

$$\bar{b} = (r^2 K + rsK_m + s^2)\, a,$$

или, ако $p$, $q$ $r$ и $s$ заменимо на основу (16),

$$\bar{a} = [(1 - n^2 K)^2 - (1 - n^2 K)\, nK_m\, (2 - nK_m) + n^2 K\, (2 - nK_m)^2]\, a \tag{19}$$

$$\bar{b} = [(1 - nK)^2 K + K_m\, (1 - nK_m)\, nK + n^2 K^2]\, a, \tag{20}$$

односно, после сређивања,

$$\bar{a} = (1 - nK_m + n^2 K)^2\, a, \tag{21}$$

$$\bar{b} = (1 - nK_m + n^2 K)\, Ka. \tag{22}$$

Деобом, одавде лако налазимо

$$\bar{K} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{K}{1 - nK_m + n^2 K},$$

што је релација која успоставља везу између Гаусових кривина паралелних површи $\bar{S}$ и $S$. У тој релацији, као што видимо, фигурише и средња кривина $K_m$ површи $S$.

Напоменимо, на крају, да се може успоставити веза и између средњих кривина паралелних површи $\bar{S}$ и $S$. Међутим, то се није тражило у овом задатку и ми ту везу нећемо успостављати.

## 36. Кривина простора. Риманова кривина. Простори константне кривине

**Задатак 211.** (Одељак 36., задатак 1.). У равном простору је увек могуће написати метричку форму у облику (1), тј.

$$ds^2 = e_i\, (dy^i)^2,$$

где $e_i$ имају вредности $+1$ и $-1$. Ако уведемо нове координате релацијама

$$z^L = \sqrt{e_L}\, y^L,$$

што значи да су оне имагинарне, кад је односно $e_i$ негативно, може се наша форма написати у облику

$$ds^2 = \sum_i (dz^i)^2.$$

Сваки систем координата који задовољава овај услов у равном простору зваћемо *нормалне координате*.

Показати да трансформација једног система нормалних координата у други такав систем мора бити линеарна.

***Решење***: Метричку форму

$$ds^2 = \sum_i (dz^i)^2,$$

коришћењем Ајнштајнове конвенције о сабирању, можемо написати у облику

$$ds^2 = \delta_{ij}\, dz^i\, dz^j.$$

Ако извршимо трансформацију нормалних координата релацијама

$$\bar{z}^i = \bar{z}^i (z^j),$$

онда ће метричка форма у односу на нови систем нормалних координата бити

$$\overline{ds}^2 = \delta_{kl}\, d\bar{z}^k\, d\bar{z}^l.$$

Међутим, из закона трансформације скаларне инваријанте,

$$\overline{ds}^2 = ds^2,$$

добивамо

$$\delta_{kl}\, d\bar{z}^k\, d\bar{z}^l = \delta_{ij}\, dz^i\, dz^j.$$

Како је

$$d\bar{z}^k = \frac{\partial \bar{z}^k}{\partial z^i}\, dz^i,$$

биће

$$\delta_{kl} \frac{\partial \bar{z}^k}{\partial z^i} \frac{\partial \bar{z}^l}{\partial z^j}\, dz^i\, dz^j = \delta_{ij}\, dz^i\, dz^j,$$

одакле следи

(1) $$\delta_{kl} \frac{\partial \bar{z}^k}{\partial z^i} \frac{\partial \bar{z}^l}{\partial z^j} = \delta_{ij}.$$

Ако, даље, ову једначину диференцирамо по $z^r$, добивамо

$$\delta_{kl}\left(\frac{\partial^2 z^k}{\partial z^i\, \partial z^r} \frac{\partial \bar{z}^l}{\partial z^j} + \frac{\partial \bar{z}^k}{\partial z^i} \frac{\partial^2 \bar{z}^l}{\partial z^j\, \partial z^r}\right) = 0,$$

одакле следи (увиђа се за једнаке вредности индекса $i$ и $j$), с обзиром да је $\dfrac{\partial \bar{z}^i}{\partial z^j} \neq 0$, да, за све вредности индекса, мора бити

(2) $$\frac{\partial^2 \bar{z}^i}{\partial z^j\, \partial z^k} = 0.$$



Интеграцијом ове једначине добивамо

(3) $$\frac{\partial \bar{z}^i}{\partial z^j} = a^i_j,$$

где је $a^i_j$ систем константних бројева (реалних или имагинарних).

Још једном интеграцијом, из једначине (3) добивамо

(4) $$\bar{z}^i = a^i_j\, z^j + b^i,$$

где је и $b^i$ систем константних бројева.

Према томе, закључујемо, из једног система нормалних координата можемо прећи у други систем нормалних координата само линеарним координатним трансформацијама (4). Штавише, из једначина (1) и (3) следи

$$\delta_{kl}\, a^k_i\, a^l_j = \delta_{ij},$$

па закључујемо да су линеарне координатне трансформације (4) и ортогоналне.

**Задатак 212.** (Одељак 36., задатак 2.). Показати да и хиперраван

$$a_i\, y^i + b = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где су $y^i$ Декартове правоугле координате а $a_i$ и $b$ константе, има познату особину еуклидске дводимензионе равни, да свака права која спаја две тачке те равни лежи цела у њој.

***Решење***: У једначини хиперравни

(1) $$a_i\, y^i + b = 0,$$

коефицијенти $a_i$ су координате вектора (варијантност није битна због Декартовог правоуглог система координата) који је управан на датој хиперравни.

Ако у хиперравни, са једначином (1), уочимо две тачке, $A(y^i_A)$ и $B(y^i_B)$, онда ће њихове координате задовољавати једначину хиперравни, тј. биће

(2) $$a_i\, y^i_A + b = 0,$$
$$a_i\, y^i_B + b = 0.$$

С друге стране, међутим, права која спаја тачке $A$ и $B$ имаће једначину

(3) $$y^i = y^i_A + \lambda (y^i_B - y^i_A),$$

где је $\lambda$ скаларни множилац (променљиви параметар).

Вектор

$$u^i = y^i_B - y^i_A$$

одређује правац праве (3). Из једначина (2), одузимањем прве од друге, добивамо

(4) $$a_i (y^i_B - y^i_A) = a_i\, u^i = 0$$

што значи да је вектор $u^i$ управан на вектору $a_i$, тј. паралелан датој хиперравни. С обзиром да му крајње тачке леже у хиперравни, закључујемо да цео мора лежати у хиперравни, тј. цела права лежи у датој хиперравни.

Овај закључак можемо извести и на други начин. Наиме, да би права (3) лежала у хиперравни (1), њене тачке морају задовољавати једначину хиперравни. Да је тај услов заиста испуњен види се заменом из (3) у (1), тј.

$$a_i[y^i_A+\lambda(y^i_B-y^i_A)]+b=0,$$

јер је, на основу једначина (2) и (4),

$$a_i y^i_A+b=0, \qquad \lambda\, a_i(y^i_B-y^i_A)=0.$$

**Задатак 213.** (Одељак 36., задатак 3.). Показати да једнодимензиони раван континуум мора бити права линија.

***Решење***: За неки простор $V_N$, од $N$ димензија, каже се да је раван, ако је Риман-Кристофелов тензор $R_{lijk}$ једнак нули. У таквим просторима постоје такве координате $y^i$ (и то у читавом простору $V_N$ а не само у појединим његовим тачкама) да се метричка форма простора може написати у облику

$$ds^2=e\sum_{i=1}^{N}e^{(i)}(dy^i)^2 \tag{1}$$

где су $e^{(i)}$ индикатори појединих координата и имају вредности $+1$ или $-1$, а $e$ опет индикатор чија је вредност $+1$ или $-1$, али увек тако да $ds^2$ буде позитивно или нула.

У таквом случају увек се могу увести нове тзв. *хомогене* (нормалне) *координате* (види задатак 211.)

$$z^i=\sqrt{e^{(i)}}\,y^i, \tag{2}$$

па се, онда, (1) може написати у облику

$$ds^2=e\sum_{i=1}^{N}(dz^i)^2=e\,\delta_{ij}\,dz^i\,dz^j. \tag{3}$$

У оваквом псеудоеуклидском простору, у коме су поједине координате $z^i$ имагинарне, биће једначина геодезијске линије (пошто су Кристофелови симболи једнаки нули)

$$\frac{d^2z^i}{ds^2}=0, \tag{4}$$

одакле се добива

$$\frac{dz^i}{ds}=\alpha^i, \quad z^i=\alpha^i s+\beta^i \tag{5}$$

где су $\alpha^i$ и $\beta^i$ константе, али константе $\alpha^i$ нису међусобно независне већ, према (3), задовољавају услов

$$e\sum(\alpha^i)^2=1, \quad \text{одн.} \quad \sum(\alpha^i)^2=e. \tag{6}$$



У еуклидским па и у псеудоеуклидским просторима права линија се дефинише линеарним параметарским једначинама. У нашем случају биће

$$z^i=a^i t+b^i, \qquad (i=1,\,3,\,\ldots,\,N), \tag{7}$$

где су $a^i$ и $b^i$ константе, а $t$ параметар, параметарске једначине праве линије (односно онога што одговара појму праве линије у обичном простору).

Из (7) добивамо

$$dz^i=a^i\,dt, \tag{8}$$

што заменом у (3) даје

$$ds^2=e\,dt^2\sum_{i=1}^{N}(a^i)^2, \tag{9}$$

односно

$$ds=\sqrt{e\sum(a^i)^2}\,dt. \tag{10}$$

Из (8) и (10) се, даље, деобом добива

$$\frac{dz^i}{ds}=\frac{a^i}{\sqrt{e\sum(a^i)^2}}=\text{const.}, \tag{11}$$

а кад се ово упореди са (5) види се да су у псеудоеуклидском простору овако дефинисане праве линије — геодезијске линије.

У оваквом простору од $N$ димензија једна линеарна једначина,

$$a_i z^i+b=0, \tag{12}$$

одређује хиперраван од $N$—1 димензије; две линеарне једначине,

$$\begin{aligned} a^{(1)}_i z^i+b^{(1)}&=0,\\ a^{(2)}_i z^i+b^{(2)}&=0, \end{aligned} \tag{13}$$

одређују потпростор од $N$—2 димензије и систем линеарних једначина,

$$a^{(\lambda)}_i z^i+b^{(\lambda)}=0, \quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,N;\ \lambda=1,\,2,\,\ldots,\,M;\ M<N), \tag{14}$$

одређује потпростор од $N$—$M$ димензија. Важно је да су сви ови потпростори (дефинисани линеарним једначинама) и сами псеудоеуклидски у општем случају, тј. равни.

Ако се уочи једнодимензиони потпростор (једнодимензиони континуум), али у горњем смислу раван, тј. дефинисан са $N$—1 линеарних једначина, онда треба показати да је то у смислу (7) права линија. И заиста, ако се у систему (14) линеарних једначина, где има $N$ непознатих $z^i$ а $N$—1 једначина (наравно независних), стави, на пример,

$$z^N=\alpha\,t+\beta, \tag{15}$$

где су $\alpha$ и $\beta$ константе, тада се из (14) могу израчунати остале хомогене координате $z^\lambda$, $\lambda=1,\,2,\,\ldots,\,N$—1,

$$z^\lambda=\alpha^\lambda t+\beta^\lambda, \tag{16}$$

па се простим упоређивањем види да (15) и (16) образују систем у коме су све координате $z^i$, $i=1, 2, \ldots, N$, одређене линеарним једначинама по параметру $t$, а према дефиницији (7) то је у таквом простору права линија (и геодезијска наравно). И у општим еуклидским просторима то не мора бити обична права; у Декартовим је увек обична права.

**Задатак 214.** (Одељак 36., задатак 4.). Показати да је у равном простору позитивно дефинитне метрике сфера полупречника нула једна једина тачка, док се у равном простору са индефинитном метриком сфера полупречника нула протеже до бесконачности.

***Решење***: У равном простору увек је могуће увести координате $y^i$ у односу на које метричка форма гласи

$$d\,s^2=\sum_{i=1}^{N} e_i\,(dy^i)^2,$$

где $e_i$ узима вредности $+1$ или $-1$. У таквом простору сфера, по дефиницији, има једначину

$$\sum_{i=1}^{N} e_i\,(x^i-a^i)^2=r^2,$$

где су $a^i$ координате центра сфере, а $r$ њен полупречник. Једначина сфере полупречника нула са центром у тачки $a^i$ је

$$\sum_{i=1}^{N} e_i\,(x^i-a^i)^2=0.$$

У равном простору позитивно дефинитне метрике, с обзиром да су тада сви $e_i$ једнаки $+1$, та једначина гласи

$$\sum_{i=1}^{N} (x^i-a^i)^2=0,$$

па видимо да може бити задовољена само ако је

$$x^i-a^i=0,$$

односно

$$x^i=a^i,$$

на основу чега закључујемо да се таква сфера своди на једну једину тачку. Исти закључак важи и за негативно дефинитну метрику, у ком случају су сви $e_i$ једнаки $-1$.

У случају индефинитне метрике $e_i$ узима вредности $+1$ и $-1$. Ако узмемо да вредност $+1$ узима $M-1$ пута, а вредност $-1$ узима $N-M+1$ пута, при чему је $1<M<N$, тада, подесном пермутацијом координата, једначину сфере полупречника нула можемо написати у облику

$$\sum_{i=1}^{M-1} (x^i-a^i)^2-\sum_{i=M}^{N} (x^i-a^i)^2=0.$$

Пресек те сфере и потпростора

$$x^i=a^i, \qquad i\neq 1,\ M,$$



је права чија је једначина

$$x^1-x^M-(a^1-a^M)=0.$$

С обзиром да права представља скуп тачака који се протеже у бесконачност и да, у овом случају, лежи на површини сфере, јер је добивена као пресек сфере и потпростора $x^i=a^i$, $i\neq 1, M$, закључујемо да се сфера полупречника нула у равном простору са индефинитном метриком протеже до бесконачности, што је и требало показати.

**Задатак 215.** (Одељак 36., задатак 5.). Показати да је у равном простору увек и хипер-раван неки раван простор.

***Решење***: У равном простору је увек могуће увести Декартове правоугле координате $y^i$. Хиперраван таквог простора је скуп тачака које задовољавају једначину

$$a_i\,y^i=b,$$

где су $a_i$, $b$ произвољни бројеви такви да нису сви $a_i$ једнаки нули. Уведимо, сада, нове Декартове правоугле координате $\bar{y}^i$, тако да хиперраван са горњом једначином буде једна координатна раван, на пример $\bar{y}^N=0$. Тада је, очигледно, метричка форма те хиперравни облика

$$ds^2=\sum_{i=1}^{N-1} (d\bar{y}^i)^2,$$

односно

$$ds^2=\delta_{ij}\,d\bar{y}^i\,d\bar{y}^j,$$

где индекси узимају вредности $i, j=1, 2, \ldots, N-1$.

На основу овога закључујемо да су координате метричког тензора хиперравни константе (јединице или нуле), одакле следи да су координате Кристофелових симбола, па, према томе, и Риман-Кристофеловог тензора, једнаке нули, тј. хиперраван датог равног простора је такође раван простор.

**Задатак 216.** (Одељак 36., задатак 6.). Показати да се у сферним поларним координатама $(r,\ \theta,\ \varphi)$ метричка форма тродимензионог простора позитивно дефинитне метрике, чија је кривина једнака $\dfrac{1}{R^2}$, увек може написати у облику

$$ds^2=dr^2+R^2\sin^2\left(\frac{r}{R}\right)(d\,\theta^2+\sin^2\theta\;d\varphi^2).$$

Испитати граничну вредност ове форме кад $R$ тежи бесконачности и протумачити резултат.

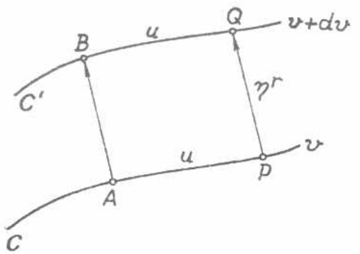
***Решење***: У циљу решења овог задатка потребно је да уведемо појам *геодезијског одстојања.*

У неком риманском простору $V_N$ од $N$ димензија уочимо неку површ, дводимензиони римански простор $V_2$. Параметарске једначине те површи нека су

$$x^i=x^i\,(u,\ v),\quad (i=1,\ 2, \ldots,\ N).$$

Посматрајмо у $V_N$ фамилију геодезијских линија која је образована на површи $V_2$ изабраној да то омогућује. Нека $u$ буде параметар који се мења дуж сваке геодезијске линије, а $v$ параметар који је константан дуж сваке геодезијске линије.

Нека $C$ и $C'$ буду две суседне (блиске) геодезијске линије на површи $V_2$ (види слику) са параметрима $v$ и $v+dv$. Повуцимо криву $AB$ у $V_2$ која пресеца ортогонално геодезијске линије $C$ и $C'$. Параметар $u$ нека буде дужина лука мерена дуж сваке геодезијске линије од тачака $A$ и $B$. Тада, с обзиром да су криве $v=\text{const}$, геодезијске у $V_N$, биће свуда у $V_2$




$$\frac{\delta p^r}{\delta u}=0, \tag{1}$$

где су $p^r$ јединични вектори тангената на геодезијске линије,

$$p^r=\frac{\partial x^r}{\partial u},$$

који задовољавају услов

$$a_{mn}\,p^m\,p^n=\varepsilon \tag{1'}$$

где је $\varepsilon=\pm 1$ и зове се индикатор правца тангенте на геодезијску линију.

За тачке $P$ (на кривој $C$) и Q (на кривој $C'$) кажемо да су одговарајуће тачке ако имају исту вредност параметра $u$ (мереног од тачке $A$, односно $B$). Нека $\eta^r$ буде инфинитезимални вектор $\overrightarrow{PQ}$ такав да је

$$\eta^r=\frac{\partial x^r}{\partial v}\,dv,$$

и

$$a_{mn}\,p^m\,\eta^n=0, \tag{2}$$

тј. $\eta^r$ су координате вектора управног на криву $C$. Једначина (2) задовољена је свуда у $V_2$, пошто $P$ може бити ма која тачка на површи $V_2$.

Промена координата $\eta^r$ дуж криве $C$ је

$$\frac{\delta \eta r}{\delta u}=\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial x^r}{\partial v}\right)dv \tag{3}$$

јер је $dv$ константно за пар геодезијских линија $C$, $C'$.

Међутим, како је

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial x^r}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 x^r}{\partial u\,\partial v}+\left\{\begin{matrix} r \\ m\ n\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^m}{\partial v}\,\frac{\partial x^n}{\partial u}=\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\partial x^r}{\partial u}\right)=\frac{\delta p^r}{\delta v},$$

једначину (3) можемо написати у облику

$$\frac{\delta \eta^r}{\delta u}=\frac{\delta p^r}{\delta v}\,dv.$$



Ако ову једначину апсолутно диференцирамо по $u$, добивамо

$$\frac{\delta^2 \eta^r}{\delta u^2}=\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta p^r}{\delta v}\right)dv. \tag{4}$$

С обзиром да је

$$\frac{\delta^2 p^r}{\delta u\,\delta v}-\frac{\delta^2 p^r}{\delta v\,\delta u}=R^r_{\cdot smn}\,p^s\,\frac{\partial x^m}{\partial u}\,\frac{\partial x^n}{\partial v},$$

биће

$$\frac{\delta^2 p^r}{\delta u\,\delta v}=\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta p^r}{\delta u}\right)+R^r_{\cdot smn}\,p^s\,p^m\,\frac{\partial x^n}{\partial v},$$

па једначину (4) можемо написати у облику

$$\frac{\delta^2 \eta^r}{\delta u^2}=\left[\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta p^r}{\delta u}\right)+R^r_{\cdot smn}\,p^s\,p^m\,\frac{\partial x^n}{\partial v}\right]dv. \tag{5}$$

Први члан на десној страни ове једначине, с обзиром на (1), једнак је нули, па, замењујући $u$ са $s$, добивамо

$$\frac{\delta^2 \eta^r}{\delta s^2}-R^r_{\cdot smn}\,p^s\,p^m\,\eta^n=0. \tag{6}$$

С обзиром да вектор са координатама $\eta^r$ карактерише геодезијско одступање, једначина (6) се назива *једначина геодезијског одступања.*

Уколико је простор са константном кривином, тада је он изотропан, па је (види одељак 36., једначину 36.)

$$R_{rsmn}=K\,(a_{mr}\,a_{sn}-a_{nr}\,a_{sm}),$$

односно

$$R^r_{\cdot smn}=K\left(\delta^r_m\,a_{sn}-\delta^r_n\,a_{sm}\right).$$

Замењујући ово у једначину геодезијског одступања (6), с обзиром на једначине (1′) и (2), добивамо

$$\frac{\delta^2 \eta^r}{\delta s^2}+\varepsilon\,K\,\eta^r=0. \tag{7}$$

Уочимо, сада, поље паралелних јединичних вектора $X_r$ у $V_2$ дуж геодезијске линије $C$ који су на њу управни. Како је тада дуж те геодезијске линије

$$\frac{\delta X_r}{\delta s}=0,$$

то, скаларним множењем једначине (7) са $X_r$, добивамо

$$\frac{d^2 \eta}{ds^2}+\varepsilon\,K\,\eta=0, \tag{8}$$

где је

$$\eta=\eta^r\,X_r$$

интензитет вектора $\eta^r$ и зове се *геодезијско одступање.*

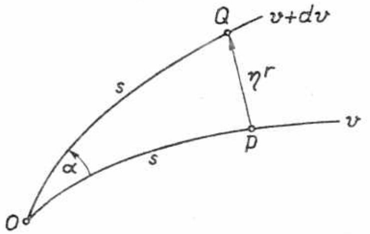
Интеграцијом једначине (8), добивамо

$$\eta = A\sin\left(s\sqrt{\varepsilon K}\right) + B\cos\left(s\sqrt{\varepsilon K}\right), \quad \text{за } \varepsilon K>0,$$

$$\eta = As + B, \quad \text{за } K=0,$$

$$\eta = A\sinh\left(s\sqrt{-\varepsilon K}\right) + B\cosh\left(s\sqrt{-\varepsilon K}\right), \quad \text{за } \varepsilon K<0.$$

У случају када обе геодезијске линије имају заједничку тачку, од које ћемо мерити дужину лука $s$ (види слику), тада за $s=0$ мора бити $\eta=0$, па, на основу горњих једначина, за апсолутну вредност геодезијског одступања добивамо




$$(9)\qquad \eta = A\left|\sin\left(s\sqrt{\varepsilon K}\right)\right|, \quad \text{за } \varepsilon K>0, \qquad \eta = As, \quad \text{за } K=0, \qquad \eta = A\left|\sinh\left(s\sqrt{-\varepsilon K}\right)\right|, \quad \text{за } \varepsilon K<0.$$

За просторе са позитивно дефинитном метриком биће, с обзиром да је $\varepsilon=+1$,

$$(10)\qquad \eta = A\left|\sin\left(s\sqrt{K}\right)\right|, \quad \text{за } K>0,$$

$$(11)\qquad \eta = As, \quad \text{за } K=0,$$

$$(12)\qquad \eta = A\left|\sinh\left(s\sqrt{-K}\right)\right|, \quad \text{за } K<0,$$

где је $A$ интеграциона константа.

Ако са $\alpha$ обележимо угао између геодезијских линија, биће

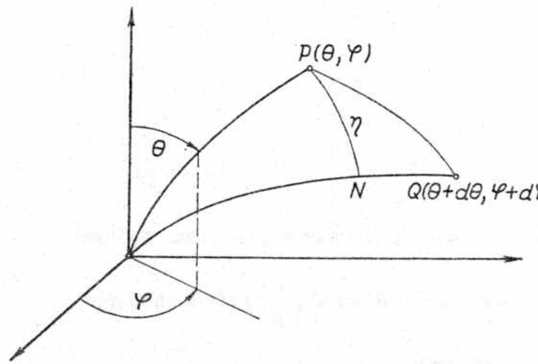
$$(13)\qquad \alpha = \left(\frac{d\eta}{ds}\right)_{S=0} = \left[A\sqrt{K}\cos\left(s\sqrt{K}\right)\right]_{S=0} = A\sqrt{K},$$

за $K>0$, и

$$(14)\qquad \alpha = \left(\frac{d\eta}{ds}\right)_{S=0} = \left[A\sqrt{-K}\cosh\left(s\sqrt{-K}\right)\right]_{S=0} = A\sqrt{-K},$$

за $K<0$.

Ми треба да одредимо метричку форму у поларним координатама $(r, \theta, \varphi)$ тродимензионог риманског простора са позитивно дефинитном мет-






риком и константном кривином $K=\frac{1}{R^2}$. Сваки римански простор је инфинитезимално еуклидски. То значи да у свакој тачки тог простора можемо поставити локални Декартов правоугли триједар и у односу на њега вршити локална разматрања користећи сва правила еуклидске геометрије. Имајући то у виду, можемо повући геодезијску линију $OP$ (из тачке 0 локалног Декартовог триједра) чији је правац, у односу на тај триједар, одређен поларним угловима $\theta$ и $\varphi$. Тада ће угао између две суседне геодезијске линије, одређене правцима $(\theta, \varphi)$ и $(\theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$ бити (види слику)

$$(15)\qquad \alpha = \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ово проистиче из чињенице да тај израз представља растојање између двеју суседних тачака на јединичној сфери у тродимензионом еуклидском простору.

Придружимо тачки $P$ координате $r$, $\theta$, $\varphi$, где је $r$ геодзијско растојање $\overline{OP}$, и тачки $Q$ координате $r+dr$, $\theta+d\theta$, $\varphi+d\varphi$. Тада је

$$(16)\qquad \overline{ON} = \overline{OP} = r, \quad \overline{NQ} = dr, \quad \overline{NP} = \eta,$$

где је $\eta$ геодезијско одступање које, на основу (10), износи

$$(17)\qquad \eta = A\sin\left(\frac{r}{R}\right),$$

јер је $s=r$ и $\sqrt{K}=\frac{1}{R}$.

На основу (13) је

$$A = \frac{\alpha}{\sqrt{K}} = R\,\alpha,$$

па искористивши једначину (15), за геодезијско одступање (17) добивамо

$$\eta = R\sin\left(\frac{r}{R}\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из инфинитезималног правоуглог троугла $PNQ$ следи

$$\overline{PQ}^2 = \overline{NQ}^2 + \overline{NP}^2,$$

тј., ако са $ds$ означимо инфинитезимално растојање $\overline{PQ}$,

$$(18)\qquad ds^2 = dr^2 + R^2\sin^2\left(\frac{r}{R}\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right).$$

Ово је израз за метричку форму у поларним координатама тродимензионог риманског простора са позитивно дефинитном метриком и позитивном константном кривином $\frac{1}{R^2}$, што је и требало показати.

Ако израз (18) напишемо у облику

$$ds^2 = dr^2 + \frac{\sin^2\left(\dfrac{r}{R}\right)}{\dfrac{1}{R^2}} (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

тада за граничну вредност ове форме кад $R$ тежи бесконачности,

$$ds^2 = dr^2 + \lim_{R\to\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{r}{R}\right)}{\dfrac{1}{R^2}} (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

добивамо

(19) $$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

што представља израз за метричку форму у тродимензионом еуклидском простору у сферним поларним координатама. То само потврђује чињеницу да дати римански простор у граничном процесу, кад $R$ тежи бесконачности, односно кад му кривина тежи нули, постаје раван, тј., с обзиром да је позитивно дефинитне метрике, постаје тродимензиони еуклидски простор.

**Задатак 217**. (Одељак 36., задатак 7.). Извести да је у риманском простору $V_N$ константне кривине $K$ увек

$$R_{ij} = -(N-1)\, K g_{ij},$$

$$R = -N(N-1)\, K.$$

***Решење***: Простор у коме је Риманова кривина $K$ константна је истовремено у свакој тачки и изотропан, па је (види одељак 36., једначину 36.)

$$R_{lijk} = K(g_{jl}\, g_{ik} - g_{lk}\, g_{ij}).$$

Отуда је

$$R^{l}_{\cdot ijk} = g^{lm} R_{mijk} = K(g^{lm} g_{jm} g_{ik} - g^{lm} g_{mk} g_{ij}),$$

тј.

$$R^{l}_{\cdot ijk} = K(\delta^l_j g_{ik} - \delta^l_k \delta_{ij}).$$

Одавде следи

$$R_{ij} = R^{l}_{\cdot ijl} = K(\delta^l_j g_{il} - \delta^l_l g_{ij}),$$

односно

$$R_{ij} = K(g_{ij} - N g_{ij}),$$

што можемо написати у облику

$$R_{ij} = -(N-1)\, K g_{ij}.$$

Одавде, даље, следи

$$R = g^{ij} R_{ij} = -(N-1)\, K g^{ij} g_{ij} = -N(N-1)\, K,$$

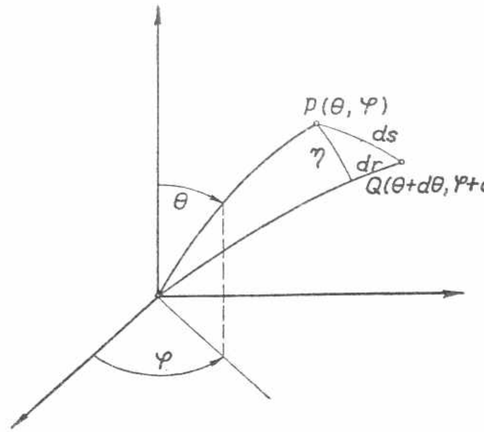
што је и требало показати.



**Задатак 218**. (Одељак 36., задатак 8.). Показати да се у тродимензионом простору константне негативне кривине $-\dfrac{1}{R^2}$ са позитивно дефинитном метриком метричка форма може у сферним поларним координатама написати у облику

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right)(d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

***Решење***: Као у задатку 216. и у овом случају уочимо две суседне (блиске) геодезијске линије које полазе из тачке 0, почетка локалног правоуглог Декартовог триједра. Уводећи ознаке као на слици, биће




(1) $$ds^2 = dr^2 + \eta^2$$

где је геодезијско одступање одређено са (види задатак 216., једначину 12.)

$$\eta = A \sinh(s\sqrt{-K}),$$

односно, с обзиром да је геодезијско растојање $\overline{OP} = s = r$ и да је $\sqrt{-K} = \dfrac{1}{R}$,

$$\eta = A \sinh\left(\frac{r}{R}\right).$$

На основу једначине 14. у задатку 216., следи

$$A = \frac{\alpha}{\sqrt{-K}} = R\,\alpha.$$

Међутим, како је (види задатак 216., једначину 15.)

$$\alpha = (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)^{\frac{1}{2}},$$

из (2) добивамо

$$\eta = R \sinh\left(\frac{r}{R}\right)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

Према томе, на основу једначине (1), сада, добивамо

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

што је и требало показати.

**Задатак 219.** (Одељак 36., задатак 9.). Показати да, ако неки римански простор $V_N$ има позитивно дефинитну метрику и константну позитивну кривину $K$, у њему постоје координате $z^i$ у којима се метричка форма тог простора може изразити у облику

$$ds^2 = \frac{\sum_i (dz^i)^2}{\left(1+\frac{1}{4}K\sum_i (z^i)^2\right)^2}.$$

***Решење***: У односу на неки ортогонални систем координата, у римансном простору, координате метричког тензора задовољавају услове

$$(1) \qquad g_{ij}=0, \quad \text{за} \quad i \neq j.$$

У односу на такве координатне системе, координате Кристофеловог симбола прве врсте су (види задатак 138.)

$$(2) \qquad \begin{aligned} &[IJ, K]=0\\ &[IJ, I]=-[II, J]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{II}}{\partial x^J},\\ &[II, I]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{II}}{\partial x^I}, \qquad (I\neq J\neq K), \end{aligned}$$

и друге врсте

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\begin{Bmatrix} K \\ I\,J \end{Bmatrix}=0, \qquad \begin{Bmatrix} J \\ I\,I \end{Bmatrix}=-\frac{1}{2g_{JJ}}\frac{\partial g_{II}}{\partial x^J},\\ &\begin{Bmatrix} I \\ I\,J \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial \log g_{II}}{\partial x^J}, \qquad \begin{Bmatrix} I \\ I\,I \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial \log g_{II}}{\partial x^I}, \qquad (I\neq J\neq K). \end{aligned}$$

На основу израза за коваријантне координате Риман-Кристофеловог тензора (види одељак 30., једначину 10),

$$R_{lijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^i\,\partial x^j}+\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l\,\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i\,\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l\,\partial x^j}\right)+$$
$$+g^{mn}([ij, n][lk, m]-[ik, n][lj, m]),$$

према (2) и (3), добивамо

$$(4) \qquad R_{LIJK}=0, \qquad (L\neq I\neq J\neq K),$$

$$(5) \qquad R_{LIIK}=\sqrt{g_{II}}\left(\frac{\partial^2\sqrt{g_{II}}}{\partial x^L\,\partial x^K}-\frac{\partial\sqrt{g_{II}}}{\partial x^L}\frac{\partial\log\sqrt{g_{LL}}}{\partial x^K}-\frac{\partial\sqrt{g_{II}}}{\partial x^K}\frac{\partial\log\sqrt{g_{KK}}}{\partial x^L}\right), \quad (L\neq I\neq K),$$

$$(6) \qquad R_{LIIL}=\sqrt{g_{II}}\sqrt{g_{LL}}\left[\frac{\partial}{\partial x^L}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{LL}}}\frac{\partial\sqrt{g_{II}}}{\partial x^L}\right)+\frac{\partial}{\partial x^I}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{II}}}\frac{\partial\sqrt{g_{LL}}}{\partial x^I}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_m{}'\frac{1}{g_{mm}}\frac{\partial\sqrt{g_{II}}}{\partial x^m}\frac{\sqrt{g_{LL}}}{\partial x^m}\right], \qquad (L\neq I),$$

где $\sum'$ означава збир у коме су изостављени чланови за $m=L$ и $m=I$.



У римансном простору, са позитивно дефинитном метриком и позитивном кривином $K$, важи релација (види одељак 36., једначину 36.).

$$(7) \qquad R_{lijk}=K(g_{lj}\,g_{ik}-g_{lk}\,g_{ij}).$$

Поставимо, сада, задатак да одредимо скаларну функцију $U=U(z^i)$ тако да метричка форма

$$(8) \qquad ds^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{(dz^i)^2}{U^2},$$

буде форма тог простора. У односу на такве координате $z^i$, координате метричног тензора су

$$(9) \qquad g_{ij}=\frac{1}{U^2}\delta_{ij},$$

па, на основу (7), добивамо

$$(10) \qquad R_{LIIK}=\frac{K}{U^4}(\delta_{LI}\,\delta_{IK}-\delta_{LK}\,\delta_{II})=0.$$

На основу овога, изједначивши десну страну једначине (5) са нулом, добивамо

$$\frac{1}{U}\left(\frac{\partial^2\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^L\,\partial z^K}-\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^L}\frac{\partial\log\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^K}-\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^K}\frac{\partial\log\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^L}\right)=0,$$

односно

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^L\,\partial z^K}-\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^L}\frac{\partial\log\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^K}-\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^K}\frac{\partial\log\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^L}=0.$$

После извршеног диференцирања, одавде добивамо

$$\frac{2}{U^3}\frac{\partial U}{\partial z^K}\frac{\partial U}{\partial z^L}-\frac{1}{U^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^L\,\partial z^K}-\frac{1}{U^3}\frac{\partial U}{\partial z^L}\frac{\partial U}{\partial z^K}-\frac{1}{U^3}\frac{\partial U}{\partial z^K}\frac{\partial U}{\partial z^L}=0,$$

односно

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z^L\,\partial z^K}=0, \qquad (L\neq K).$$

Такође, користећи (9), из (7) добивамо

$$R_{LIIL}=\frac{1}{U^2}K\left(\frac{1}{U^2}\delta_{LI}\,\delta_{IL}-\frac{1}{U^2}\delta_{LL}\,\delta_{II}\right)=-\frac{1}{U^4}K,$$

па, изједначивши ово са десном страном једначине (6), добивамо

$$\frac{1}{U^2}\left[\frac{\partial}{\partial z^L}\left(U\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^L}\right)+\frac{\partial}{\partial z^I}\left(U\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^I}\right)+\sum_m{}' U^2\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^m}\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^m}\right]=-\frac{1}{U^4}K,$$

односно

$$\frac{\partial}{\partial z^L}\left(U\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^L}\right)+\frac{\partial}{\partial z^I}\left(U\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^I}\right)+\sum_m{}' U^2\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^m}\frac{\partial\left(\frac{1}{U}\right)}{\partial z^m}=-\frac{1}{U^2}K.$$

После извршеног диференцирања, одавде добивамо

$$-\frac{1}{U^2}\frac{\partial U}{\partial z^L}\frac{\partial U}{\partial z^L}-\frac{1}{U^2}\frac{\partial U}{\partial z^I}\frac{\partial U}{\partial z^I}+\frac{2}{U^2}\frac{\partial U}{\partial z^L}\frac{\partial U}{\partial z^L}-\frac{1}{U}\frac{\partial^2 U}{\partial z^L\partial z^L}+$$

$$+\frac{2}{U^2}\frac{\partial U}{\partial z^I}\frac{\partial U}{\partial z^I}-\frac{1}{U}\frac{\partial^2 U}{\partial z^I\partial z^I}+\sum_m{}'\frac{1}{U^2}\frac{\partial U}{\partial z^m}\frac{\partial U}{\partial z^m}=-\frac{K}{U^2},$$

односно

$$-\frac{1}{U}\frac{\partial^2 U}{\partial z^L\partial z^L}-\frac{1}{U}\frac{\partial^2 U}{\partial z^I\partial z^I}+\sum_m\frac{1}{U^2}\frac{\partial U}{\partial z^m}\frac{\partial U}{\partial z^m}=-\frac{K}{U^2},$$

где, сада, $\sum_m$ представља суму за $m=1, 2, \ldots, N$, тј. у њој су садржани и чланови за $m=L$ и $m=I$. Ову једначину можемо написати у облику

$$U\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^L\partial z^L}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^I\partial z^I}\right)=K+\sum_m\frac{\partial U}{\partial z^m}\frac{\partial U}{\partial z^m}. \tag{12}$$

Једначине (11) и (12) представљају парцијалне диференцијалне једначине за одређивање скаларне функције $U$. Из тих једначина, наиме, одређујемо какав мора бити облик те функције да би метричка форма (8), у односу на координате $z^i$, могла бити метричка форма датог риманског простора.

Из једначине (11) закључујемо да скаларна функција $U$ мора бити облика

$$U=X_{(1)}+X_{(2)}+\cdots+X_{(N)}, \tag{13}$$

при чему је

$$X_{(1)}=X_{(1)}(z^1),\quad X_{(2)}=X_{(2)}(z^2),\quad\ldots,\quad X_{(N)}=X_{(N)}(z^N) \tag{14}$$

Из једначине (12), узимајући уместо индекса $L$, рецимо, индекс $K$, добивамо

$$U\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^K\partial z^K}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^I\partial z^I}\right)=K+\sum_m\frac{\partial U}{\partial z^m}\frac{\partial U}{\partial z^m},$$

а одавде, одузимајући одговарајуће стране ове једначине и једначине (12), следи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^L\partial z^L}-\frac{\partial^2 U}{\partial z^K\partial z^K}=0,$$

односно, с обзиром на (13),

$$\frac{\partial^2 X_{(L)}}{\partial z^L\partial z^L}=\frac{\partial^2 X_{(K)}}{\partial z^K\partial z^K}. \tag{15}$$



Како лева страна ове једначине може бити функција само од $z^L$, а десна само од $z^K$, следи да мора бити

$$\frac{\partial^2 X_{(L)}}{\partial z^L\partial z^L}=\frac{\partial^2 X_{(K)}}{\partial z^K\partial z^K}=2a, \tag{16}$$

где је $a$ произвољна константа.

Према томе, интеграцијом једначине

$$\frac{\partial^2 X_{(L)}}{\partial z^L\partial z^L}=2a,$$

добивамо

$$\frac{\partial X_{(L)}}{\partial z^L}=2az^L+2b_{(L)},$$

где је $b_{(L)}$ произвољна (интеграциона) константа. Још једном интеграцијом, одавде добивамо

$$X_{(L)}=a(z^L)^2+2b_{(L)}z^L+c_{(L)} \tag{17}$$

где је и $c_{(L)}$ произвољна (интеграциона) константа.

На основу (17) и (13), скаларну функцију $U$ можемо изразити у облику

$$U=\sum_i X_{(i)}=\sum_i[a(z^i)^2+2b_{(i)}z^i+c_{(i)}], \tag{18}$$

а одавде следи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^L\partial z^L}=2a,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^I\partial z^I}=2a,$$

$$\sum_m\frac{\partial U}{\partial z^m}\frac{\partial U}{\partial z^m}=\sum_m[2az^m+2b_{(m)}]^2=$$

$$=\sum_i[4a^2(z^i)^2+8ab_{(i)}z^i+4b_{(i)}^2].$$

Замењивањем ових израза у једначину (12), добивамо

$$4aU=K+\sum_i[4a^2(z^i)^2+8ab_{(i)}z^i+4b_{(i)}^2],$$

односно, с обзиром на (18),

$$\sum_i[4a^2(z^i)^2+8ab_{(i)}z^i+4ac_{(i)}]=K+\sum_i[4a^2(z^i)^2+8ab_{(i)}z^i+4b_{(i)}^2],$$

одакле следи

$$K=4\sum_i[ac_{(i)}-b_{(i)}^2]. \tag{19}$$

Ова релација показује какву везу морају задовољавати интеграционе константе $b_{(i)}$ и $c_{(i)}$. Дакле, оне не могу бити потпуно произвољне, већ морају задовољавати горњу релацију. Ако, посебно, изаберемо да је

$$b_{(i)}=0,\quad \sum_i c_{(i)}=1,$$

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial y^L}{\partial x^\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_L}}\sqrt{C}\sin x^\alpha \sin x^{N-L+1}\prod_{\alpha\neq\beta=1}^{N-L}\cos x^\beta, \quad \begin{cases} L=2,\ldots, N-2\\ \alpha=1,\ldots, N-L,\end{cases}\\
&\frac{\partial y^L}{\partial x^{N-L+1}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_L}}\sqrt{C}\cos x^{N-L+1}\prod_{\beta=1}^{N-L}\cos x^\beta, \quad L=2,\ldots, N-1,\\
&\frac{\partial y^L}{\partial x^\alpha}=0, \quad \begin{cases} L=2,\ldots, N-1\\ \alpha=N-L+2,\ldots, N-1,\end{cases}\\
&\frac{\partial y^{N-1}}{\partial x^1}=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{N-1}}}\sqrt{C}\sin x^2\sin x^1,\\
&\frac{\partial y^N}{\partial x^1}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_N}}\sqrt{C}\cos x^1,\\
&\frac{\partial y^N}{\partial x^\alpha}=0, \quad \alpha=2,\ldots, N-1.
\end{aligned}
$$

Сада су

$$
\begin{aligned}
g_{11}&=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^1}\right)^2=C\Bigg[\sin^2 x^1\left(\prod_{\alpha=2}^{N-1}\cos x^\alpha\right)^2+\sin^2 x^1\sum_{L=2}^{N-2}\left(\sin^2 x^{N-L+1}\prod_{\alpha=2}^{N-L}\cos x^\alpha\right)^2+\\
&\quad+\sin^2 x^1\sin^2 x^2+\cos^2 x^1\Bigg]=\\
&=C\Bigg\{\sin^2 x^1\Bigg[\cos^2 x^{N-1}\left(\prod_{\alpha=2}^{N-2}\cos x^\alpha\right)^2+\sin^2 x^{N-1}\left(\prod_{\alpha=2}^{N-2}\cos x^\alpha\right)^2+\\
&\quad+\sum_{L=3}^{N-2}\left(\sin^2 x^{N-L+1}\prod_{\alpha=2}^{N-L}\cos x^\alpha\right)^2+\sin^2 x^2\Bigg]+\cos^2 x^1\Bigg\}=\\
&=C\Bigg\{\sin^2 x^1\Bigg[\left(\prod_{\alpha=2}^{N-2}\cos x^\alpha\right)^2+\sum_{L=3}^{N-2}\left(\sin^2 x^{N-L+1}\prod_{\alpha=2}^{N-L}\cos x^\alpha\right)^2+\sin^2 x^2\Bigg]+\cos^2 x^1\Bigg\}=\\
&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\\
&=C\Bigg\{\sin^2 x^1\Bigg[\left(\prod_{\alpha=2}^{3}\cos x^\alpha\right)^2+\sum_{L=N-2}^{N-2}\left(\sin^2 x^{N-L+1}\prod_{\alpha=2}^{N-L}\cos x^\alpha\right)^2+\sin^2 x^2\Bigg]+\cos^2 x^1\Bigg\}=\\
&=C\{\sin^2 x^1[\cos^2 x^3\cos^2 x^2+\sin^2 x^3\cos^2 x^2+\sin^2 x^2]+\cos^2 x^1\}=C,\\
g_{12}&=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\frac{\partial y^i}{\partial x^1}\,\frac{\partial y^i}{\partial x^2}=C\Bigg[\sin x^1\prod_{\alpha=2}^{N-1}\cos x^\alpha\cdot\sin x^2\prod_{\beta=3}^{N-1}\cos x^1\cos x^\beta+\\
&\quad+\sum_{L=2}^{N-3}\left(\sin x^1\sin x^2\sin^2 x^{N-L+1}\prod_{\alpha=2}^{N-L}\cos x^\alpha\cdot\prod_{\beta=3}^{N-L}\cos x^1\cos x^\beta\right)+
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
&+\sin x^1\sin x^3\cos x^2\cdot\sin x^2\sin x^3\cos x^1-\sin x^2\sin x^1\cos x^2\cos x^1\Bigg]=\\
&=C\sin x^1\sin x^2\cos x^1\cos x^2\Bigg[\left(\prod_{\alpha=3}^{N-1}\cos x^\alpha\right)^2+\sum_{L=2}^{N-3}\left(\sin x^{N-L+1}\prod_{\alpha=3}^{N-L}\cos x^\alpha\right)^2+\\
&+\sin^2 x^3-1\Bigg]=C\sin x^1\cos x^1\sin x^2\cos x^2\Bigg[\cos^2 x^{N-1}\left(\prod_{\alpha=3}^{N-2}\cos x^\alpha\right)^2+\\
&+\sin^2 x^{N-1}\left(\prod_{\alpha=3}^{N-2}\cos x^\alpha\right)^2+\sum_{L=3}^{N-3}\left(\sin x^{N-L+1}\prod_{\alpha=3}^{N-L}\cos x^\alpha\right)^2+\sin^2 x^3-1\Bigg]=\\
&=C\sin x^1\cos x^1\sin x^2\cos x^2\Bigg[\left(\prod_{\alpha=3}^{N-2}\cos x^\alpha\right)^2+\\
&+\sum_{L=3}^{N-3}\left(\sin x^{N-L+1}\sum_{\alpha=3}^{N-L}\cos x^\alpha\right)^2+\sin^2 x^3-1\Bigg]=\\
&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\\
&=C\sin x^1\cos x^1\sin x^2\cos x^2\Bigg[\left(\prod_{\alpha=3}^{4}\cos x^\alpha\right)^2+\sum_{L=N-3}^{N-3}\left(\sin x^{N-L+1}\prod_{\alpha=3}^{N-L}\cos x^\alpha\right)^2+\\
&+\sin^2 x^3-1\Bigg]=C\sin x^1\cos x^1\sin x^2\cos x^2[\cos^2 x^3\cos^2 x^4+\\
&+\sin^2 x^4\cos^2 x^3+\sin^2 x^3-1]=0.
\end{aligned}
$$

Може се, уопште, показати да је

$$
(10)\qquad g_{\alpha\beta}=0, \quad \text{за} \quad \alpha\neq\beta
$$

и

$$
(11)\qquad g_{AA}=C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2.
$$

Према томе, $x^\alpha$ су ортогоналне координате. Матрица метричког тензора је

$$
(12)\qquad \{g_{\alpha\beta}\}=\begin{Bmatrix} C & 0\\ 0 & C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\end{Bmatrix},
$$

а његове контраваријантне координате су

$$
(13)\qquad \{g^{\alpha\beta}\}=\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{C} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2}\end{Bmatrix}.
$$

Из (12) добијамо

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^\alpha}=0,$$

$$\frac{\partial g_{AA}}{\partial x^\alpha}=-2C\sin x^\alpha\cos x^\alpha\Big(\prod_{\beta\neq\beta=1}^{A-1}\cos x^\beta\Big)^2,\qquad \begin{cases}A=3,\ldots,N-1\\ \alpha=1,2,\ldots,A-1,\end{cases}$$

$$(14)\qquad \frac{\partial g_{AA}}{\partial x^\alpha}=0,\qquad \begin{cases}A=2,\ldots,N-1\\ \alpha=A,\ldots,N-1,\end{cases}$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-2C\sin x^1\cos x^1.$$

Отуда су $\dfrac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}$ различити од нуле, тј.

$$\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial (x^1)^2}=-2C(\cos^2 x^1-\sin^2 x^1),$$

$$\frac{\partial^2 g_{AA}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}=2C\sin x^\alpha\cos x^\alpha\sin x^\beta\cos x^\beta\Big(\prod_{\substack{\gamma=1\\ \gamma\neq\alpha,\beta}}^{A-1}\cos x^\gamma\Big)^2,\qquad \begin{cases}A=4,\ldots,N-1\\ \alpha,\beta=1,\ldots,A-1,\\ \alpha\neq\beta\end{cases}$$

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 g_{AA}}{\partial (x^\alpha)^2}=-2C(\cos^2 x^\alpha-\sin^2 x^\alpha)\Big(\prod_{\alpha\neq\beta=1}^{A-1}\cos x^\beta\Big)^2,\qquad \begin{cases}A=3,\ldots,N-1\\ \alpha=1,2,\ldots,A-1,\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^1\partial x^2}=4C\sin x^1\cos x^1\sin x^2\cos x^2.$$

Кристофелови симболи прве врсте

$$(16)\qquad [\alpha\beta,\gamma]=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\Big)$$

различити од нуле, на основу (14), су

$$[22,1]=-[12,2]=C\sin x^1\cos x^1,$$

$$(17)\qquad [AA,\alpha]=-[\alpha A,A]=C\sin x^\alpha\cos x^\alpha\Big(\prod_{\alpha\neq\beta=1}^{A-1}\cos x^\beta\Big)^2,\qquad \begin{cases}A=3,\ldots,N-1\\ \alpha=1,\ldots,A-1.\end{cases}$$

Риман-Кристофелов тензор је

$$R_{\lambda\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{\gamma\lambda}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}+\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma\partial x^\lambda}-\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta\partial x^\lambda}-\frac{\partial^2 g_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha\partial x^\gamma}\Big)+$$

$$(18)\qquad +g^{\rho\sigma}([\alpha\beta,\rho][\gamma\lambda,\sigma]-[\alpha\gamma,\rho][\beta\lambda,\sigma]),$$



и његове независне и од нуле различите компоненте су

$$R_{A1A1}=C\Big(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\Big)^2,\qquad A=2,\ldots,N-1,$$

$$(19)\qquad R_{A2A2}=C\Big(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\Big)^2\cos^2 x^1,\qquad A=3,\ldots,N-1$$

$$R_{ABAB}=C\Big(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\Big)^2\Big(\prod_{\beta=1}^{B-1}\cos x^\beta\Big)^2,\qquad \begin{cases}A=4,\ldots,N-1\\ B=3,\ldots,A-1.\end{cases}$$

Прве две једначине се, из (18), (17) и (15), лако непосредно добијају, док се трећа од једначина (19) добија на следећи начин. Из (18) је

$$(20)\qquad R_{ABAB}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{AA}}{\partial (x^B)^2}+g^{\rho\sigma}([BA,\rho][BA,\sigma]-[BB,\rho][AA,\sigma]).$$

Користећи (15) и (17), добијамо

$$R_{ABAB}=C(\cos^2 x^B-\sin^2 x^B)\Big(\prod_{B\neq\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\Big)^2+g^{AA}[BA,A]^2-$$

$$-\sum_{\Gamma=1}^{B-1}g^{\Gamma\Gamma}[BB,\Gamma][AA,\Gamma]=$$

$$=C(\cos^2 x^B-\sin^2 x^B)\Big(\prod_{B\neq\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\Big)^2+\frac{1}{C\Big(\prod\limits_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\Big)^2}\cdot$$

$$\cdot C^2\sin^2 x^B\cos^2 x^B\Big(\prod_{B\neq\beta=1}^{A-1}\cos x^\beta\Big)^4-\sum_{\Gamma=1}^{B-1}g^{\Gamma\Gamma}[BB,\Gamma][AA,\Gamma]=$$

$$=C(\cos^2 x^B-\sin^2 x^B)\Big(\prod_{B\neq\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\Big)^2+C\sin^2 x^B\Big(\prod_{B\neq\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\Big)^2-$$

$$-\sum_{\Gamma=1}^{B-1}g^{\Gamma\Gamma}[BB,\Gamma][AA,\Gamma]=C\Big(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\Big)^2-\sum_{\Gamma=1}^{B-1}g^{\Gamma\Gamma}[BB,\Gamma][AA,\Gamma]=$$

$$=C\Big(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\Big)^2-\frac{1}{C}C\sin x^1\cos x^1\Big(\prod_{\alpha=2}^{B-1}\cos x^2\Big)^2C\sin x^1\cos x^1\Big(\prod_{\beta=2}^{A-1}\cos x^\beta\Big)^2-$$

$$-\sum_{\Gamma=2}^{B-1}g^{\Gamma\Gamma}[BB,\Gamma][AA,\Gamma]=$$

$$=C\Big(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\Big)^2-C\sin^2 x^1\Big(\prod_{\alpha=2}^{B-1}\cos x^\alpha\Big)^2\Big(\prod_{\beta=1}^{A-1}\cos x^\beta\Big)^2-$$

$$-\sum_{\Gamma=2}^{B-1}g^{\Gamma\Gamma}[BB,\Gamma][AA,\Gamma]=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left[1-\sin^2 x^1\left(\prod_{\alpha=2}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]-\sum_{\Gamma=2}^{B-1} g^{\Gamma\Gamma}\,[BB,\Gamma]\,[AA,\Gamma]=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left[1-\sin^2 x^1\left(\prod_{\alpha=2}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]-$$

$$-\frac{1}{C\cos^2 x^1}\,C\sin x^2\cos x^2\left(\prod_{2\neq\alpha=1}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\cdot$$

$$\cdot\, C\sin x^2\cos x^2\left(\prod_{2\neq\beta=1}^{A-1}\cos x^\beta\right)^2-\sum_{\Gamma=3}^{B-1} g^{\Gamma\Gamma}\,[BB,\Gamma]\,[AA,\Gamma]=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left[1-\sin^2 x^1\left(\prod_{\alpha=2}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]-$$

$$-\,C\sin^2 x^2\left(\prod_{\beta=3}^{B-1}\cos x^\beta\right)^2\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2-\sum_{\Gamma=3}^{B-1} g^{\Gamma\Gamma}\,[BB,\Gamma]\,[AA,\Gamma]=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left[1-\sin^2 x^1\left(\prod_{\alpha=2}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2-\sin^2 x^2\left(\prod_{\alpha=3}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]-$$

$$-\sum_{\Gamma=3}^{B-1} g^{\Gamma\Gamma}\,[BB,\Gamma]\,[AA,\Gamma]=$$

$$= \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left\{1-\sum_{\Gamma=1}^{B-2}\left[\sin^2 x^\Gamma\left(\prod_{\alpha=\Gamma+1}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]\right\}-$$

$$-\,g^{B-1\,B-1}\,[BB,B-1]\,[AA,B-1]=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left\{1-\sum_{\Gamma=1}^{B-2}\left[\sin^2 x^\Gamma\left(\prod_{\alpha=\Gamma+1}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{C\left(\prod\limits_{\alpha=1}^{B-2}\cos x^\alpha\right)^2}\,C^2\sin^2 x^{B-1}\cos^2 x^{B-1}\left(\prod_{\alpha=1}^{B-2}\cos x^\alpha\right)^2\left(\prod_{B-1\neq\beta=1}^{A-1}\cos x^\beta\right)^2=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left\{1-\sum_{\Gamma=1}^{B-2}\left[\sin^2 x^\Gamma\left(\prod_{\alpha=\Gamma+1}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]\right\}-$$

$$-\,C\sin^2 x^{B-1}\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left\{1-\sum_{\Gamma=1}^{B-2}\left[\sin^2 x^\Gamma\left(\prod_{\alpha=\Gamma+1}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]-\sin^2 x^{B-1}\right\}=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left\{\cos^2 x^{B-1}-\sin^2 x^{B-2}\cos^2 x^{B-1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{\Gamma=1}^{B-3}\left[\sin^2 x^\Gamma\left(\prod_{\alpha=\Gamma+1}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]\right\}=$$



$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left\{\cos^2 x^{B-1}\cos^2 x^{B-2}-\sin^2 x^{B-3}\cos^2 x^{B-2}\cos^2 x^{B-1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{\Gamma=1}^{B-4}\left[\sin^2 x^\Gamma\left(\prod_{\alpha=\Gamma+1}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]\right\}=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left\{\cos^2 x^{B-1}\cos^2 x^{B-2}\cos^2 x^{B-3}-\right.$$

$$\left.-\sum_{\Gamma=1}^{B-4}\left[\sin^2 x^\Gamma\left(\prod_{\alpha=\Gamma+1}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]\right\}=$$

$$= \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left\{\left(\prod_{\alpha=2}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2-\sum_{\Gamma=1}^{1}\left[\sin^2 x^\Gamma\left(\prod_{\alpha=\Gamma+1}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right]\right\}=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left\{\left(\prod_{\alpha=2}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2-\sin^2 x^1\left(\prod_{\alpha=2}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2\right\}=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left(\prod_{\alpha=2}^{B-1}\cos x^\alpha\right)^2(1-\sin^2 x^1)=$$

$$= C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left(\prod_{\beta=1}^{B-1}\cos x^\beta\right)^2,$$

чиме је доказана трећа од једначина (19). Једначине (19) се могу написати у облику

$$R_{A1\,A1}=C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2,\qquad A=2,\;\ldots,\;N-1,$$

(21)

$$R_{ABAB}=C\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left(\prod_{\beta=1}^{B-1}\cos x^\beta\right)^2,\qquad \begin{cases}A=3,\;\ldots,\;N-1\\ B=2,\;\ldots,\;A-1,\end{cases}$$

Да би сфера (3), одн. (6), била простор константне кривине потребно је и довољно да важи

(22) $$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=K(g_{\beta\delta}\,g_{\alpha\gamma}-g_{\delta\gamma}\,g_{\alpha\beta}),$$

где је $K$ нека константа. Увођењем тензора $D_{\delta\alpha\beta\gamma}=g_{\beta\delta}\,g_{\alpha\gamma}-g_{\delta\gamma}\,g_{\alpha\beta}$, (22) постаје

(23) $$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=K\,D_{\delta\alpha\beta\gamma}.$$

Тензор $D_{\delta\alpha\beta\gamma}$ има исте особине као и $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$. Његове незавасне и од нуле различите компоненте, на основу (13), су

$$D_{A1\,A1}=C^2\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2,\qquad A=2,\;\ldots,\;N-1,$$

(24)

$$D_{ABAB}=C^2\left(\prod_{\alpha=1}^{A-1}\cos x^\alpha\right)^2\left(\prod_{\beta=1}^{B-1}\cos x^\beta\right)^2,\qquad \begin{cases}A=3,\;\ldots,\;N-1\\ B=1,\;\ldots,\;A-1.\end{cases}$$

Из (24) и (22) следи

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{C}D_{\delta\alpha\beta\gamma}, \tag{25}$$

чиме је доказано да је сфера (3), одн. (6), простор константне кривине

$$K=\frac{1}{C}. \tag{26}$$

Нула конус је у случају индефинитне метрике специјални случај сфере, оне за коју је $C=0$. Разматрајући нула конус као гранични случај сфере када $C\to 0$, можемо рећи да је нула конус простор константне бесконачне кривине. У том смислу нула конус је аналогон тачке простора дефинитне метрике.

# IV. ПРИМЕНЕ У МЕХАНИЦИ

## 37. Брзина и убрзање тачке

**Задатак 221.** (Одељак 37., задатак 1.). Одредити контраваријантне, коваријантне и физичке координате вектора брзине и убрзања у: а) цилиндарским, б) сферним и *b*) елиптичким координатама.

***Решење***: Контраваријантне координате вектора брзине добивамо диференцирањем координата по времену, тј.

$$v^i=\frac{dx^i}{dt}=\dot{x}^i. \tag{1}$$

Коваријантне координате вектора брзине добивамо из контраваријантних композицијом са метричким тензором, тј.

$$v_i=g_{ij}v^j. \tag{2}$$

У односу на ортогонални систем криволинијских координата, физичке координате вектора брзине можемо добити из контраваријантних,

$$v_{(i)}=\sqrt{g_{ii}}\,v^i, \qquad \text{(не сумирати)}, \tag{3}$$

или коваријантних,

$$v_{(i)}=\frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}}=\frac{g_{ij}v^j}{\sqrt{g_{ii}}}, \qquad \text{(не сумирати по } i\text{)}. \tag{4}$$

Коваријантне координате вектора убрзања добивамо апсолутним диференцирањем по времену коваријантних координата вектора брзине, тј. (види одељак 37., једначину 9.)

$$w_i=\frac{\delta v_i}{\delta t}=\frac{dv_i}{dt}-\left\{ {j \atop i\,k} \right\} v_j v^k=g_{ij}\ddot{x}^j-[ij,\ k]\,v^j v^k. \tag{5}$$

Композицијом са метричким тензором, из коваријантних координата добивамо контраваријантне координате вектора убрзања, тј.

$$w^i=g^{ij}w_j. \tag{6}$$

У односу на ортогонални систем криволинијских координата, физичке координате вектора убрзања можемо добити из коваријантних,

(7) $$w_{(i)}=\frac{w_i}{\sqrt{g_{ii}}},\qquad \text{(не сумирати)},$$

или контраваријантних

(8) $$w_{(i)}=\sqrt{g_{ii}}\,w^i,\qquad \text{(не сумирати)}.$$

Да бисмо избегли израчунавање координата Кристофелових симбола при израчунавању коваријантних координата вектора убрзања, изразићемо их на другачији начин.

Ако уведемо ознаку

$$\tau=\frac{1}{2}\,(v)^2=\frac{1}{2}\,g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j,$$

тада је

$$\frac{\partial\tau}{\partial\dot{x}^i}=g_{ij}\,\dot{x}^j,$$

односно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\dot{x}^i}\right)=g_{ij}\ddot{x}^j+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k.$$

Како је, међутим, (види одељак 21., једначину 6.)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=[ki,\ j]+[jk,\ i],$$

добивамо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\dot{x}^i}\right)=g_{ij}\,\ddot{x}^j+([ij,\ k]+[jk,\ i])\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k.$$

Исто тако је

$$\frac{\partial\tau}{\partial x^i}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k=\frac{1}{2}\,([ij,\ k]+[ki,\ j])\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k=[ij,\ k]\,\dot{x}^j\,\dot{x}^k,$$

па, на основу (5), добивамо

(9) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\dot{x}^i}\right)-\frac{\partial\tau}{\partial x^i}=g_{ij}\,\ddot{x}^j-[ij,\ k]\,v^j\,v^k=w_i.$$

У ортогоналном систему координата је

$$\tau=\frac{1}{2}\,[g_{11}\,(\dot{x}^1)^2+g_{22}\,(\dot{x}^2)^2+g_{33}\,(\dot{x}^3)^2],$$

па добивамо

$$\frac{\partial\tau}{\partial\dot{x}^1}=g_{11}\,\dot{x}^1,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\dot{x}^1}\right)=\frac{\partial g_{11}}{\partial x^l}\,\dot{x}^l\,\dot{x}^1+g_{11}\,\ddot{x}^1,$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial\dot{x}^2}=g_{22}\,\dot{x}^2,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\dot{x}^2}\right)=\frac{\partial g_{22}}{\partial x^l}\,\dot{x}^l\,\dot{x}^2+g_{22}\,\ddot{x}^2,$$



$$\frac{\partial\tau}{\partial\dot{x}^3}=g_{33}\,\dot{x}^3,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\dot{x}^3}\right)=\frac{\partial g_{33}}{\partial x^l}\,\dot{x}^l\,\dot{x}^3+g_{33}\,\ddot{x}^3,$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x^1}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\,(\dot{x}^1)^2+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\,(\dot{x}^2)^2+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\,(\dot{x}^3)^2\right],$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\,(\dot{x}^1)^2+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\,(\dot{x}^2)^2+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\,(\dot{x}^3)^2\right],$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x^3}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\,(\dot{x}^1)^2+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}\,(\dot{x}^2)^2+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\,(\dot{x}^3)^2\right].$$

На основу овога и једначина (9), за коваријантне координате вектора убрзања добивамо

(10) $$\begin{aligned}
w_1&=g_{11}\,\ddot{x}^1+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^l}\,\dot{x}^l\,\dot{x}^1-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\,(\dot{x}^1)^2+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\,(\dot{x}^2)^2+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\,(\dot{x}^3)^2\right],\\
w_2&=g_{22}\,\ddot{x}^2+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^l}\,\dot{x}^l\,\dot{x}^2-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\,(\dot{x}^1)^2+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\,(\dot{x}^2)^2+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\,(\dot{x}^3)^2\right],\\
w_3&=g_{33}\,\ddot{x}^3+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^l}\,\dot{x}^l\,\dot{x}^3-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\,(\dot{x}^1)^2+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}\,(\dot{x}^2)^2+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\,(\dot{x}^3)^2\right],
\end{aligned}$$

а одавде, на основу (6) и (7), можемо добити контраваријантне и физичке координате вектора убрзања.

а) *Цилиндарске координате*. У систему цилиндарских координата $r$, $\theta$, $z$, координате метричког тензора су (види задатак 115.)

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix},\quad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix}.$$

Контраваријантне координате брзине, на основу (1), су

$$\{v^i\}=\{v^r,\ v^\theta,\ v^z\}=\{\dot{r},\ \dot{\theta},\ \dot{z}\}.$$

Коваријантне координате брзине, на основу (2), су

$$\{v_i\}=\{v_r,\ v_\theta,\ v_z\}=\{\dot{r},\ r^2\,\dot{\theta},\ \dot{z}\}.$$

Физичке координате брзине, на основу (3), су

$$\{v_{(i)}\}=\{v_{(r)},\ v_{(\theta)},\ v_{(z)}\}=\{\dot{r},\ r\,\dot{\theta},\ \dot{z}\}.$$

На основу израза (10), за коваријантне координате вектора убрзања добивамо

(11) $$\begin{aligned}
w_r&=\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2,\\
w_\theta&=r^2\,\ddot{\theta}+2\,r\dot{r}\dot{\theta},\\
w_z&=\ddot{z}.
\end{aligned}$$

Контраваријантне координате вектора убрзања, на основу (6), су

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
w^r &= \ddot r - r\dot\theta^2,\\
w^\theta &= \ddot\theta + \frac{2}{r}\dot r\,\dot\theta,\\
w^z &= \ddot z.
\end{aligned}
$$

Физичке координате вектора убрзања, на основу (7), су

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
w_{(r)} &= \ddot r - r\dot\theta^2,\\
w_{(\theta)} &= r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta,\\
w_{(z)} &= \ddot z.
\end{aligned}
$$

б) *Сферне координате.* У систему сферних поларних координата $r$, $\theta$, $\varphi$, координате метричког тензора су (види задатак 115.)

$$
\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\cos^2\theta \end{Bmatrix},\qquad
\{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\cos^2\theta} \end{Bmatrix}.
$$

Контраваријантне координате вектора брзине су

$$
\{v^i\} = \{v^r,\ v^\theta,\ v^\varphi\} = \{\dot r,\ \dot\theta,\ \dot\varphi\}.
$$

Коваријантне координате вектора брзине, на основу (2), су

$$
\{v_i\} = \{v_r,\ v_\theta,\ v_\varphi\} = \{\dot r,\ r^2\dot\theta,\ r^2\cos^2\theta\,\dot\varphi\}.
$$

Физичке координате вектора брзине, на основу (3), су

$$
\{v_{(i)}\} = \{v_{(r)},\ v_{(\theta)},\ v_{(\varphi)}\} = \{\dot r,\ r\dot\theta,\ r\cos\theta\,\dot\varphi\}.
$$

На основу релација (10), за коваријантне координате вектора убрзања добивамо

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
w_r &= \ddot r - r\dot\theta^2 - r\cos^2\theta\,\dot\varphi^2,\\
w_\theta &= r^2\ddot\theta + 2r\dot r\dot\theta + r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2,\\
w_\varphi &= r^2\cos^2\theta\,\ddot\varphi + 2r\cos^2\theta\,\dot r\dot\varphi - 2r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi.
\end{aligned}
$$

Контраваријантне координате вектора убрзања, на основу (6), су

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
w^r &= \ddot r - r\dot\theta^2 - r\cos^2\theta\,\dot\varphi^2,\\
w^\theta &= \ddot\theta + \frac{2}{r}\dot r\dot\theta + \sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2,\\
w^\varphi &= \ddot\varphi + \frac{2}{r}\dot r\dot\varphi - 2\operatorname{tg}\theta\,\dot\theta\dot\varphi.
\end{aligned}
$$



Физичке координате вектора убрзања, на основу (7), су

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
w_{(r)} &= \ddot r - r\dot\theta^2 - r\cos^2\theta\,\dot\varphi^2,\\
w_{(\theta)} &= r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta + r\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2,\\
w_{(\varphi)} &= r\cos\theta\,\ddot\varphi + 2\cos\theta\,\dot r\dot\varphi - 2r\sin\theta\,\dot\theta\dot\varphi.
\end{aligned}
$$

в) *Елиптичке координате.* У систему елиптичких координата $\mu$, $\nu$, $\lambda$, координате метричког тензора су (види задатак 115.)

$$
\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix}
c^2\dfrac{(\lambda^2-\mu^2)(\nu^2-\mu^2)}{(1-\mu^2)(k^2-\mu^2)} & 0 & 0\\
0 & c^2\dfrac{(\lambda^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)}{(1-\nu^2)(\nu^2-k^2)} & 0\\
0 & 0 & c^2\dfrac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{(\lambda^2-1)(\lambda^2-k^2)}
\end{Bmatrix}.
$$

Контраваријантне координате вектора брзине, на основу (1), су

$$
\{v^i\} = \{v^\mu,\ v^\nu,\ v^\lambda\} = \{\dot\mu,\ \dot\nu,\ \dot\lambda\}.
$$

Коваријантне координате вектора брзине, на основу (2), су

$$
\{v_i\} = \{v_\mu,\ v_\nu,\ v_\lambda\} = \{g_{11}\dot\mu,\ g_{22}\dot\nu,\ g_{33}\dot\lambda\}.
$$

Физичке координате вектора брзине, на основу (3), су

$$
\{v_{(i)}\} = \{v_{(\mu)},\ v_{(\nu)},\ v_{(\lambda)}\} = \{\sqrt{g_{11}}\,\dot\mu,\ \sqrt{g_{22}}\,\dot\nu,\ \sqrt{g_{33}}\,\dot\lambda\}.
$$

На основу релација (10), за коваријантне координате вектора убрзања добивамо

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
w_\mu &= g_{11}\ddot\mu + \dot\mu\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\mu}\dot\mu + \frac{\partial g_{11}}{\partial\nu}\dot\nu + \frac{\partial g_{11}}{\partial\lambda}\dot\lambda\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\mu}\dot\mu^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial\mu}\dot\nu^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial\mu}\dot\lambda^2\right),\\
w_\nu &= g_{22}\ddot\nu + \dot\nu\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\mu}\dot\mu + \frac{\partial g_{22}}{\partial\nu}\dot\nu + \frac{\partial g_{22}}{\partial\lambda}\dot\lambda\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\nu}\dot\mu^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial\nu}\dot\nu^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial\nu}\dot\lambda^2\right),\\
w_\lambda &= g_{33}\ddot\lambda + \dot\lambda\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial\mu}\dot\mu + \frac{\partial g_{33}}{\partial\nu}\dot\nu + \frac{\partial g_{33}}{\partial\lambda}\dot\lambda\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\lambda}\dot\mu^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial\lambda}\dot\nu^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial\lambda}\dot\lambda^2\right).
\end{aligned}
$$

Контраваријантне координате, на основу (6), су

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
w^\mu &= \ddot\mu + \frac{\dot\mu}{g_{11}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\mu}\dot\mu + \frac{\partial g_{11}}{\partial\nu}\dot\nu + \frac{\partial g_{11}}{\partial\lambda}\dot\lambda\right) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{g_{11}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\mu}\dot\mu^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial\mu}\dot\nu^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial\mu}\dot\lambda^2\right),\\
w^\nu &= \ddot\nu + \frac{\dot\nu}{g_{22}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\mu}\dot\mu + \frac{\partial g_{22}}{\partial\nu}\dot\nu + \frac{\partial g_{22}}{\partial\lambda}\dot\lambda\right) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{g_{22}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\nu}\dot\mu^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial\nu}\dot\nu^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial\nu}\dot\lambda^2\right),\\
w^\lambda &= \ddot\lambda + \frac{\dot\lambda}{g_{33}}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial\mu}\dot\mu + \frac{\partial g_{33}}{\partial\nu}\dot\nu + \frac{\partial g_{33}}{\partial\lambda}\dot\lambda\right) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{g_{33}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\lambda}\dot\mu^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial\lambda}\dot\nu^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial\lambda}\dot\lambda^2\right),
\end{aligned}
$$

а физичке, на основу (7),

$$
(19)\quad
\begin{aligned}
w_{(\mu)} &= \sqrt{g_{11}}\,\ddot{\mu} + \frac{\dot{\mu}}{\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \mu}\dot{\mu} + \frac{\partial g_{11}}{\partial \nu}\dot{\nu} + \frac{\partial g_{11}}{\partial \lambda}\dot{\lambda}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \mu}\dot{\mu}^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial \mu}\dot{\nu}^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial \mu}\dot{\lambda}^2\right),\\
w_{(\nu)} &= \sqrt{g_{22}}\,\ddot{\nu} + \frac{\dot{\nu}}{\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \mu}\dot{\mu} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \nu}\dot{\nu} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \lambda}\dot{\lambda}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \nu}\dot{\mu}^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial \nu}\dot{\nu}^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial \nu}\dot{\lambda}^2\right),\\
w_{(\lambda)} &= \sqrt{g_{33}}\,\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{g_{33}}}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \mu}\dot{\mu} + \frac{\partial g_{33}}{\partial \nu}\dot{\nu} + \frac{\partial g_{33}}{\partial \lambda}\dot{\lambda}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \lambda}\dot{\mu}^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial \lambda}\dot{\nu}^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial \lambda}\dot{\lambda}^2\right).
\end{aligned}
$$

**Задатак 222.** (Одељак 37., задатак 2.). Одредити интензитет вектора брзине и убрзања у: а) цилиндарским, б) сферним, в) елиптичким координатама.

***Решење***: Квадрат интензитета вектора брзине одређен је изразом (види одељак 37., једначину 7.)

$$(1)\qquad (v)^2 = g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j,$$

а квадрат интензитета вектора убрзања је

$$(2)\qquad (w)^2 = g^{ij}\,w_i\,w_j,$$

где су $w_i$ коваријантне координате вектора убрзања.

У односу на ортогонални систем криволинијских координата у тродимензионом еуклидском простору, координате метричког тензора су

$$(3)\qquad \{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} g_{11} & 0 & 0\\ 0 & g_{22} & 0\\ 0 & 0 & g_{33}\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} g^{11} & 0 & 0\\ 0 & g^{22} & 0\\ 0 & 0 & g^{33}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{g_{11}} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{g_{22}} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{g_{33}}\end{Bmatrix},$$

па квадрат интензитета вектора брзине можемо изразити у облику

$$(4)\qquad (v)^2 = g_{11}(\dot{x}^1)^2 + g_{22}(\dot{x}^2)^2 + g_{33}(\dot{x}^3)^2,$$

а вектора убрзања у облику

$$(5)\qquad (w)^2 = \frac{1}{g_{11}}(w_1)^2 + \frac{1}{g_{22}}(w_2)^2 + \frac{1}{g_{33}}(w_3)^2.$$



а) *Цилиндарске координате.* У систему цилиндарских координата $r,\ \theta,\ z$, координате метричког тензора су

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix},$$

па, на основу (4), квадрат интензитета вектора брзине износи

$$(v)^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2,$$

одакле за интензитет вектора брзине добивамо

$$v = (\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Коваријантне координате вектора убрзања (види претходни задатак) су

$$w_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2,$$
$$w_\theta = r^2\,\ddot{\theta} + 2\,r\dot{r}\,\dot{\theta},$$
$$w_z = \ddot{z},$$

па је, на основу (5), квадрат интензитета вектора убрзања

$$(w)^2 = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)^2 + \frac{1}{r^2}(r^2\,\ddot{\theta} + 2\,r\dot{r}\,\dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2,$$

односно

$$(w)^2 = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)^2 + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2,$$

одакле за интензитет вектора убрзања добивамо

$$w = [(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)^2 + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2]^{\frac{1}{2}}.$$

б) *Сферне координате.* У систему сферних поларних координата $r,\ \theta,\ \varphi$, координате метричког тензора су

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\cos^2\theta\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\cos^2\theta}\end{Bmatrix},$$

па, на основу (4), квадрат интензитета вектора брзине износи

$$(v)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2,$$

одакле, за интензитет вектора брзине, добивамо

$$v = (\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Коваријантне координате вектора убрзања (види претходни задатак) су

$$w_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2,$$

$$w_\theta = r^2\,\ddot{\theta} + 2\,r\dot{r}\,\dot{\theta} + r^2\sin 2\,\theta\dot{\varphi}^2,$$

$$w_\varphi = r^2\cos^2\theta\ddot{\varphi} + 2\,r\cos^2\theta\;\dot{r}\;\dot{\varphi} - r^2\sin 2\,\theta\,\dot{\theta}\;\dot{\varphi},$$

па je, на основу (5), квадрат интензитета вектора убрзања

$$(w)^2 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\cos^2\theta\dot{\varphi}^2)^2 + \frac{1}{r^2}(r^2\ddot{\theta} + 2\,r\dot{r}\,\dot{\theta} + r^2\sin 2\,\theta\dot{\varphi}^2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{r^2\cos^2\theta}(r^2\cos^2\theta\ddot{\varphi} + 2\,r\cos^2\theta\,\dot{r}\,\dot{\varphi} - r^2\sin 2\,\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})^2,$$

односно

$$(w^2) = (\ddot{r} - \dot{r}\,\theta^2 - r\cos^2\theta\dot{\varphi}^2)^2 + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\sin 2\,\theta\dot{\varphi}^2)^2 +$$

$$+ (r\cos\theta\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{r}\dot{\varphi} - 2\,r\sin\theta\dot{\theta}\,\dot{\varphi})^2.$$

За интензитет вектора убрзања, одавде добивамо

$$w = [(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\cos^2\theta\dot{\varphi}^2)^2 + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\ddot{r}\theta + r\sin 2\,\theta\dot{\varphi}^2)^2 +$$

$$+ (r\cos\theta\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{r}\dot{\varphi} - 2\,r\sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})^2]^{\frac{1}{2}}.$$

в) *Елиптичке координате.* У систему елиптичких координата $\mu$, $\nu$, $\lambda$, координате метричког тензора су

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} c^2\dfrac{(\lambda^2-\mu^2)(\nu^2-\mu^2)}{(1-\mu^2)(k^2-\mu^2)} & 0 & 0 \\ 0 & c^2\dfrac{(\lambda-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)}{(1-\nu^2)(\nu^2-k^2)} & 0 \\ 0 & 0 & c^2\dfrac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{(\lambda^2-1)(\lambda^2-k^2)} \end{Bmatrix},$$

па, на основу (4), квадрат интензитета вектора брзине износи

$$(v)^2 = g_{11}\,\dot{\mu}^2 + g_{22}\,\dot{\nu}^2 + g_{33}\,\dot{\lambda}^2,$$

одакле, за интензитет вектора брзине, добивамо

$$v = (g_{11}\,\dot{\mu}^2 + g_{22}\,\dot{\nu}^2 + g_{33}\,\dot{\lambda}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Коваријантне координате вектора убрзања (види претходни задатак) су

$$w_\mu = g_{11}\,\ddot{\mu} + \dot{\mu}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\mu}\,\dot{\mu} + \frac{\partial g_{11}}{\partial\nu}\,\dot{\nu} + \frac{\partial g_{11}}{\partial\lambda}\,\dot{\lambda}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\mu}\,\dot{\mu}^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial\mu}\,\dot{\nu}^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial\mu}\,\dot{\lambda}^2\right),$$

$$w_\nu = g_{22}\,\ddot{\nu} + \dot{\nu}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\mu}\,\dot{\mu} + \frac{\partial g_{22}}{\partial\nu}\dot{\nu} + \frac{\partial g_{22}}{\partial\lambda}\,\dot{\lambda}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\nu}\,\dot{\mu}^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial\nu}\dot{\nu}^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial\nu}\,\dot{\lambda}^2\right),$$

$$w_\lambda = g_{33}\,\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial\mu}\,\dot{\mu} + \frac{\partial g_{33}}{\partial\nu}\,\dot{\nu} + \frac{\partial g_{33}}{\partial\lambda}\,\dot{\lambda}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\lambda}\dot{\mu}^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial\lambda}\dot{\nu}^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial\lambda}\,\dot{\lambda}^2\right),$$



па je на, основу (5), квадрат интензитета вектора убрзања

$$(w)^2 = \frac{1}{g_{11}}(w_\mu)^2 + \frac{1}{g_{22}}(w_\nu)^2 + \frac{1}{g_{33}}(w_\lambda)^2,$$

одакле, за интензитет вектора убрзања, добивамо

$$w = \left[\frac{1}{g_{11}}(w_\mu)^2 + \frac{1}{g_{22}}(w_\nu)^2 + \frac{1}{g_{33}}(w_\lambda)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Задатак 223.** (Одељак 37., задатак 3.). Ако je $v$ интензитет вектора брзине покретне тачке, показати да je увек

$$\frac{dv}{dt} = w\cos\theta,$$

где je $w$ интензитет вектора убрзања те тачке, а $\theta$ угао између вектора брзине и убрзања.

***Решење:*** Ако јединични вектор тангенте путање покретне тачке обележимо са $t^j$, интензитет вектора брзине покретне тачке можемо изразити у облику

$$v = g_{ij}\,v^i\,t^j, \tag{1}$$

одакле следи

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}(g_{ij}\,v^i\,t^j) = g_{ij}\frac{\delta}{\delta t}(v^i\,t^j),$$

односно

$$\frac{dv}{dt} = g_{ij}\frac{\delta v^i}{\delta t}\,t^j + g_{ij}\,v^i\frac{\delta t^j}{\delta t}. \tag{2}$$

Међутим, како je

$$g_{ij}\,v^i\frac{\delta t^j}{\delta t} = g_{ij}\,v^i\frac{\delta t^j}{\delta s}\,\frac{ds}{dt} = 0,$$

jep су вектори $v^i$ и $\dfrac{\delta t^i}{\delta s}$ ортогонални, из (2) добивамо

$$\frac{dv}{dt} = g_{ij}\frac{\delta v^i}{\delta t}\,t^j = g_{ij}\,w^i\,t^j = w\cos\theta,$$

где je $\theta$ угао између вектора убрзања и јединичног вектора тангенте путање покретне тачке, тј. угао између вектора убрзања и вектора брзине, што je и требало показати.

## 38. Једначине кретања материјалне тачке

**Задатак 224.** (Одељак 38., задатак 1.). Ако су дате координате силе у односу на неки Декартов систем координата, написати их у односу на цилиндарске, сферне и елиптичке координате.

*Решење*: Нека су, у односу на Декартов правоугли систем координата, координате силе

$$\{X_i\} = \{X_1,\ X_2,\ X_3\}.$$

У односу на ма који други систем координата, координате силе (рецимо коваријантне) одређене су обрасцима

$$\overline{X}_i = X_k \frac{\partial y^k}{\partial x}. \tag{1}$$

а) *Цилиндарске координате*. Везе између Декартових правоуглих и цилиндарских координата су

$$y^1 = x^1 \cos x^2,$$

$$y^2 = x^1 \sin x^2,$$

$$y^3 = x^3,$$

па je

$$\left\{\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right\} = \begin{Bmatrix} \cos x^2 & -x^1 \sin x^2 & 0 \\ \sin x^2 & x^1 \cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

На основу тога и (1) добивамо

$$\overline{X}_1 = X_1 \cos x^2 - X_2 x^1 \sin x^2,$$

$$\overline{X}_2 = X_1 \sin x^2 + X_2 x^1 \cos x^2,$$

$$\overline{X}_3 = X_3.$$

Ако Декартове правоугле координате обележимо са $x$, $y$, $z$, а цилиндарске са $r$, $\theta$, $z$, биће

$$X_r = X_x \cos\theta - X_y r \sin\theta,$$

$$X_\theta = X_x \sin\theta + X_y r \cos\theta,$$

$$X_z = X_z.$$

б) *Сферне координате*. Везе између Декартових правоуглих и сферних координата су

$$y^1 = x^1 \cos x^2 \cos x^3,$$

$$y^2 = x^1 \cos x^2 \sin x^3,$$

$$y^3 = x^1 \sin x^2,$$

па je

$$\left\{\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right\} = \begin{Bmatrix} \cos x^2 \cos x^3 & -x^1 \sin x^2 \cos x^3 & -x^1 \cos x^2 \sin x^3 \\ \cos x^2 \sin x^3 & -x^1 \sin x^2 \sin x^3 & x^1 \cos x^2 \cos x^3 \\ \sin x^2 & x^1 \cos x^2 & 0 \end{Bmatrix}.$$



На основу тога и (1) добивамо

$$\overline{X}_1 = X_1 \cos x^2 \cos x^3 - X_2 x^1 \sin x^2 \cos x^3 - X_3 x^1 \cos x^2 \sin x^3,$$

$$\overline{X}_2 = X_1 \cos x^2 \sin x^3 - X_2 x^1 \sin x^2 \sin x^3 + X_3 x^1 \cos x^2 \cos x^3,$$

$$\overline{X}_3 = X_1 \sin x^2 + X_2 x^1 \cos x^2.$$

Ако Декартове правоугле координате облежимо са $x$, $y$, $z$, а сферне са $r$, $\theta$, $\varphi$, биће

$$X_r = X_x \cos\theta \cos\varphi - X_y r \sin\theta \cos\varphi - X_z r \cos\theta \sin\varphi,$$

$$X_\theta = X_x \cos\theta \sin\varphi - X_y r \sin\theta \sin\varphi + X_z r \cos\theta \cos\varphi,$$

$$X_\varphi = X_x \sin\theta + X_y r \cos\theta.$$

в) *Елиптичке координате*. Везе између Декартових правоуглих $y^1 = x$, $y^2 = y$, $y^3 = z$ и елиптичких координата $x^1 = \mu$, $x^2 = \nu$, $x^3 = \lambda$, су (види задатак 61., *b*)

$$x = \pm \frac{c}{k} \mu \lambda,$$

$$y = \pm \frac{c}{k} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{(k^2-\mu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-k^2)}$$

$$z = \pm \frac{c}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)(\lambda^2-1)},$$

па je

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \pm \frac{c}{k} \nu\lambda, \quad \frac{\partial y^1}{\partial x^2} = \pm \frac{c}{k} \mu\lambda, \quad \frac{\partial y^1}{\partial x^3} = \pm \frac{c}{k} \mu\nu,$$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^1} = \mp \frac{c}{k} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\mu(\nu^2-k^2)(\lambda^2-k^2)}{\sqrt{(k^2-\mu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-k^2)}},$$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \pm \frac{c}{k} \frac{c}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\nu(k^2-\mu^2)(\lambda^2-k^2)}{\sqrt{(k^2-\mu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-k^2)}},$$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^3} = \pm \frac{c}{k} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\lambda(k^2-\mu^2)(\nu^2-k^2)}{\sqrt{(k^2-\mu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-k^2)}},$$

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^1} = \mp \frac{c}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\mu(1-\nu^2)(\lambda^2-1)}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)(\lambda^2-1)}},$$

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^2} = \mp \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\nu(1-\mu^2)(\lambda^2-1)}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)(\lambda^2-1)}},$$

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^3} = \pm \frac{c}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\lambda(1-\mu^2)(1-\nu^2)}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)(\lambda^2-1)}}.$$

На основу тога и (1) добивамо

$$X_\mu = \pm X_x \frac{c}{k} \nu\lambda \pm X_y \frac{c}{k} \mu\lambda \pm X_z \frac{c}{k} \mu\nu,$$

$$X_\nu = \mp X_x \frac{c}{k} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\mu(\nu^2-k^2)(\lambda^2-k^2)}{\sqrt{(k^2-\mu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-k^2)}} \pm$$

$$\pm X_y \frac{c}{k} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\nu(k^2-\mu^2)(\lambda^2-k^2)}{\sqrt{(k^2-\mu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-k^2)}} \pm$$

$$\pm X_z \frac{c}{k} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\lambda(k^2-\mu^2)(\nu^2-k^2)}{\sqrt{(k^2-\mu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-k^2)}},$$

$$X_\lambda = \mp X_x \frac{c}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\mu(1-\nu^2)(\lambda^2-1)}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)(\lambda^2-1)}} \mp$$

$$\mp X_y \frac{c}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\nu(1-\mu^2)(\lambda^2-1)}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)(\lambda^2-1)}} \pm$$

$$\pm X_z \frac{c}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\lambda(1-\mu^2)(1-\nu^2)}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)(\lambda^2-1)}}.$$

*Напомена.* У односу на Декартов правоугли систем координата између контраваријантних, коваријантних и физичких координата нема разлике. У овом задатку ми смо коваријантне координате силе у цилиндарском, сферном и елиптичком систему координата изразили преко њених Декартових правоуглих координата. Јасно је да, знајући коваријантне координате силе у тим системима координата, можемо, по потреби, помоћу координата одговарајућих метричких тензора, одредити њене контраваријантне или физичке координате.

**Задатак 225.** (Одељак 38., задатак 2.). Нека буде дата кинетичка енергија $T$ материјалне тачке масе $m$ у односу на произвољне генералисане координате $x^i$. Показати да је њена брзина $v^i$ у односу на тај систем координата одређена обрасцима

$$v^i = \frac{1}{m} g^{ij} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}.$$

***Решење***: Кинетичка енергија материјалне тачке масе $m$ одређена је изразом

$$T = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j. \tag{1}$$

Одавде следи (види задатак 15.)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j} = m g_{ij} \dot{x}^i. \tag{2}$$

Ако у (2) извршимо композицију помоћу метричког тензора $g^{jk}$, добивамо

$$g^{jk} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j} = m \delta_i^k \dot{x}^i,$$



односно

$$g^{jk} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j} = m v^k,$$

одакле следи

$$v^i = \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j} g^{ij},$$

што је и требало показати.

**Задатак 226.** (Одељак 38., задатак 3.). Нека $T$ буде жива сила материјалне тачке масе $m$ која зависи од генералисаних координата $q^i$ и генералисаних брзина $\dot{q}^i$. Показати директним рачуном да је *генералисани импулс*

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = p_i$$

коваријантни вектор.

***Решење***: Нека је, у односу на систем генералисаних координата $q^i$, жива сила $T$ функција генералисаних координата и генералисаних брзина, тј.

$$T = T(q^i, \dot{q}^i). \tag{1}$$

Ако уместо генералисаних координата $q^i$ уведемо нове генералисане координате $\overline{q}^i$, координатном трансформацијом

$$\overline{q}^i = \overline{q}^i(q^k), \tag{2}$$

односно

$$q^i = q^i(\overline{q}^k), \tag{3}$$

тада ће, у односу на новоуведени систем генералисаних координата $\overline{q}^i$, бити

$$\overline{T} = \overline{T}(\overline{q}^i, \dot{\overline{q}}^i).$$

Како је, међутим, жива сила $T$ скаларна инваријанта, тј. трансформише се по закону

$$\overline{T} = T, \tag{4}$$

биће, у односу на систем генералисаних координата $\overline{q}^i$,

$$T = \overline{T}(\overline{q}^i, \dot{\overline{q}}^i). \tag{5}$$

Генералисани импулс, у односу на систем генералисаних координата $\overline{q}^i$, ће према томе, бити

$$\overline{p}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{\overline{q}}^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{\overline{q}}^i}. \tag{6}$$

Генералисане брзине $\dot{q}^i$ су координате контраваријантног вектора, тј. трансформишу се по закону

$$\dot{\overline{q}}^i = \dot{q}^k \frac{\partial \overline{q}^i}{\partial q^k}, \tag{7}$$

односно

$$(8) \qquad \dot q^k = \dot{\bar q}^i \frac{\partial q^k}{\partial \bar q^i},$$

одакле добијамо

$$(9) \qquad \frac{\partial \dot q^k}{\partial \dot{\bar q}^i} = \frac{\partial q^k}{\partial \bar q^i}.$$

Ако ово заменимо у (6), добијамо

$$(10) \qquad \bar p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot q^k} \frac{\partial q^k}{\partial \bar q^i},$$

односно

$$(11) \qquad \bar p_i = p_k \frac{\partial q^k}{\partial \bar q^i},$$

на основу чега закључујемо да је генералисани импулс коваријантни вектор, што је и требало показати.

**Задатак 227**. (Одељак 38.. задатак 4.). Показати да услов за конзервативност силе, одређене генералисаним координатама $Q_i$, гласи

$$Q_{i,j} - Q_{j,i} = 0.$$

*Решење*: Услов

$$(1) \qquad Q_{i,j} - Q_{j,i} = 0$$

ће бити задовољен ако је

$$Q_i = U_{,i},$$

ер је онда, очигледно,

$$U_{,ij} - U_{,ji} = \frac{\partial U^2}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^j \partial x^i} = 0.$$

На основу тога можемо закључити: услов (1) ће бити задовољен ако је генералисана сила градијент неке скаларне функције, тј. ако је сила конзервативна, па можемо рећи да он представља услов за конзервативност силе.

## 39. Кретање материјалне тачке по површи и по кривој линији

**Задатак 228**. (Одељак 39., задатак 1.). Тешка материјална тачка креће се по глаткој непокретној сфери полупречника $R$. Одредити коваријантне и контраваријантне координате силе користећи се географским координатама на сфери и написати једначине кретања.

*Решење*: У односу на правоугли Декартов систем координата (види слику) координате силе су

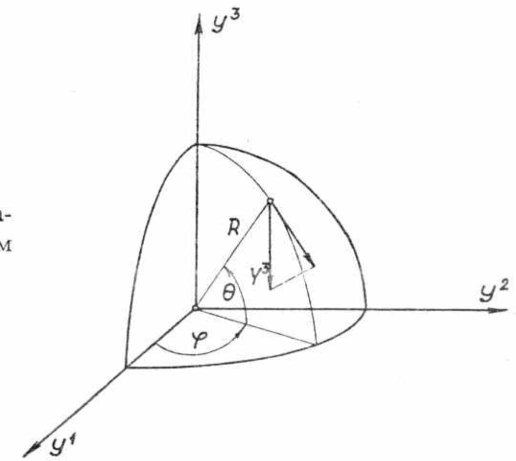
$$(1) \qquad \{Y_i\} = \{0,\ 0,\ -mg\}$$

где је $m$ маса материјалне тачке.



Везе између Декартових правоуглих и географских координата на сфери су

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_1 &= R\cos\theta\cos\varphi, \\ y^2 &= R\cos\theta\sin\varphi, \\ y^3 &= R\sin\theta, \end{aligned}$$




па су коваријантне координате силе у односу на систем географских координата

$$X_\alpha = Y_j \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha}, \qquad (x^1 = \theta, \quad x^2 = \varphi),$$

односно

$$X_1 = X_\theta = Y_1 \frac{\partial y^1}{\partial \theta} + Y_2 \frac{\partial y^2}{\partial \theta} + Y_3 \frac{\partial y^3}{\partial \theta} = Y_3 \frac{\partial y^3}{\partial \theta},$$

$$X_2 = X_\varphi = Y_1 \frac{\partial y^1}{\partial \varphi} + Y_2 \frac{\partial y^2}{\partial \varphi} + Y_3 \frac{\partial y^3}{\partial \varphi} = Y_3 \frac{\partial y^3}{\partial \varphi}.$$

Како је

$$\frac{\partial y^3}{\partial \theta} = R\cos\theta, \qquad \frac{\partial y^3}{\partial \varphi} = 0,$$

добивамо

$$(3) \qquad \begin{aligned} X_\theta &= -mg\,R\cos\theta, \\ X_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

(Нормална компонента, у правцу потега $R$, поништава се са реакцијом везе. Уосталом, задатком се она и не тражи).

На основу веза (2), за метрички тензор површи сфере добивамо

$$(4) \qquad \{g_{\alpha\beta}\} = \begin{Bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{Bmatrix}, \qquad \{g^{\alpha\beta}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R^2\cos^2\theta} \end{Bmatrix},$$

па, на основу (3), контраваријантне координате силе износе

$$(5) \qquad \begin{aligned} X^\theta &= g^{\theta\theta} X_\theta = \frac{1}{R^2}(-mg\,R\cos\theta) = -\frac{mg}{R}\cos\theta, \\ X^\varphi &= g^{\varphi\varphi} X_\varphi = 0. \end{aligned}$$

Диференцијалне једначине кретања (Лагранжеве једначине) су облика

(6) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} = X_\alpha,$$

где је

(7) $$T = \frac{1}{2} m g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

кинетичка енергија материјалне тачке.

У овом случају, на основу (7) и (4), за кинетичку енергију добивамо

$$T = \frac{1}{2} mR^2 (\dot{\theta}^2 + \cos^2\theta \dot{\varphi}^2),$$

одакле следи

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = mR^2 \ddot{\theta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -mR^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \cos^2\theta \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = mR^2 \cos^2\theta \ddot{\varphi} - 2\, mR^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\theta} \dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Ако ове изразе, као и изразе (3) за коваријантне координате силе, заменимо у једначине (6), после извесних сређивања добивамо

$$\ddot{\theta} + \sin\theta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \cos\theta = 0,$$

$$\ddot{\varphi} - 2\, \mathrm{tg}\,\theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0,$$

што су тражене диференцијалне једначине кретања тешке материјалне тачке по глаткој непокретној сфери.

**Задатак 229.** (Одељак 39., задатак 2.). Ако се материјална тачка креће по линији силе која има потенцијал, показати да је њена нормална реакција увек у правцу главне нормале и да је једнака $2(E-V)\varkappa$, где је $E$ константа енергије а $\varkappa$ кривина уочене линије силе. (Линије силе имају у свакој тачки простора правац силе).



*Решење*: Диференцијалне једначине кретања материјалне тачке по глаткој непокретној кривој могу се написати у облику (види одељак 39., једначину 52.)

(1) $$m\left(\frac{dv}{dt} T^i + v^2 \varkappa N^i\right) = X^i + R^i,$$

где је $T^i$ јединични вектор тангенте на криву, $N^i$ јединични вектор главне нормале криве, $R^i$ реакција везе која присиљава тачку да се креће по кривој и која, по претпоставци, лежи у нормалној равни криве, тј. нема пројекције у правцу тангенте на криву.

Ако се материјална тачка креће по линији силе, тада је активна сила колинеарна са јединичним вектором тангенте на криву, тј.

(2) $$X^i = XT^i,$$

где је $X$ алгебарска вредност активне силе. Према томе, једначину (1) можемо написати у облику

(3) $$m\left(\frac{dv}{dt} T^i + v^2 \varkappa N^i\right) = XT^i + R^i.$$

Скаларним множењем ове једначине јединичним вектором тангенте $T^i$, добивамо

(4) $$m\frac{dv}{dt} = X,$$

што представља алгебарску вредност активне силе.

Скаларним множењем једначине (3) јединичним вектором нормале $N^i$, добивамо

(5) $$m v^2 \varkappa = R^i N_i = R_N,$$

где је $R_N$ пројекција силе реакције на правац главне нормале криве.

Скаларним множењем једначине (3) јединичним вектором бинормале $B^i$, добивамо

(6) $$R^i B_i = R_B = 0,$$

где је $R_B$ пројекција силе реакције на правац бинормале. Како је та пројекција једнака нули, закључујемо да је сила реакције увек у правцу главне нормале и да је, на основу (5),

(7) $$R = R_N = m v^2 \varkappa = 2\, T\varkappa.$$

С обзиром да активна сила има потенцијал, постоји интеграл енергије,

$$E = T + V = \mathrm{const.},$$

одакле следи

$$T = E - V,$$

па интензитет силе реакције, на основу (7), можемо изразити у облику

$$R = 2(E - V)\varkappa,$$

што је и требало показати.

**Задатак 230.** (Одељак 39., задатак 3.). Ако се материјална тачка креће по глаткој непокретној кривој, показати да се интензитет активне силе може изразити у облику

$$\left\{\left(\frac{dT}{ds}\right)^2+4\,T^2\varkappa^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

*Напомена.* Задатак треба да гласи: Ако се материјална тачка креће по глаткој непокретној кривој, показати да се интензитет силе може изразити у облику

$$\left\{\left(\frac{dT}{ds}\right)^2+4\,T^2\varkappa^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

***Решење***: Диференцијалне једначине кретања материјалне тачке по глаткој непокретној кривој могу се написати у облику (види одељак 39., једначину 52.)

$$(1)\qquad m\left(\frac{dv}{dt}\,T^i+v^2\varkappa\,N^i\right)=X^i+R^i,$$

где је $T^i$ јединични вектор тангенте на криву, $N^i$ јединични вектор главне нормале криве и $R^i$ сила реакције која присиљава тачку да се креће по кривој.

Међутим, како је

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}\,v=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\,v^2\right),$$

једначину (1) можемо написати у облику

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right)T^i+mv^2\varkappa\,N^i=X^i+R^i,$$

односно

$$\frac{dT}{ds}\,T^i+2\,T\varkappa\,N^i=X^i+R^i.$$

С обзиром да су на левој страни ове једначине компоненте силе у правцима тангенте и главне нормале криве, који су међусобно управни, непосредно добијамо

$$|\,X^i+R^i\,|^2=\left(\frac{dT}{ds}\right)^2+4\,T^2\varkappa^2,$$

односно

$$|\,X^i+R^i\,|=\left[\left(\frac{dT}{ds}\right)^2+4\,T^2\varkappa^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

што је и требало показати.

**Задатак 231.** (Одељак 39., задатак 4.). Показати да се активна сила која дејствује на материјалну тачку која се креће по глаткој непокретној површи може изразити у облику

$$X^\alpha=\frac{dT}{ds}\,t^\alpha+2\,\varkappa_g\,Tg^\alpha.$$



***Решење***: Природне једначине кретања материјалне тачке по површи су (видети одељак 39., једначину 29.)

$$(1)\qquad m\left(v\,\frac{dv}{ds}\,t^\alpha+v^2\varkappa_g\,g^\alpha\right)=X^\alpha.$$

Међутим, како је

$$mv\,\frac{dv}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right)=\frac{dT}{ds},$$

и

$$mv^2\varkappa_g\,g^\alpha=2\,T\varkappa_g\,g^\alpha,$$

једначину (1) можемо написати у облику

$$X^\alpha=\frac{dT}{ds}\,t^\alpha+2\,\varkappa_g\,Tg^\alpha,$$

што је и требало показати.

**Задатак 232.** (Одељак 39., задатак 5.). Ако се материјална тачка креће по глаткој непокретној линији под дејством конзервативне силе са потенцијалом $V$, може се њена кривина изразити у облику

$$\varkappa=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\log\sqrt{E-V}\right)N^i,$$

а торзија $\tau$ је одређена обрасцем

$$2\,T\varkappa\tau=X_{i,j}\,B^i\,T^j.$$

*Задатак треба да гласи:* Ако се материјална тачка креће под дејством конзервативне силе са потенцијалом $V$, може се кривина њене трајекторије изразити у облику

$$\varkappa=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\log\sqrt{E-V}\right)N^i,$$

а торзија $\tau$ је одређена обрасцем

$$2\,T\tau\varkappa=X_{i,j}\,B^i\,T^j.$$

***Решење***: Диференцијалне једначине кретања слободне материјалне тачке можемо изразити у облику

$$(1)\qquad m\left(\frac{dv}{dt}\,T^i+v^2\varkappa\,N^i\right)=X^i.$$

С обзиром да активна сила има потенцијал, биће

$$X_i=-\frac{\partial V}{\partial x^i},$$

односно, пошто постоји интеграл енергије,

$$E=T+V=\text{const.},$$

биће

$$X_i = \frac{\partial (E-V)}{\partial x^i}.$$

На основу овога, једначину (1) можемо написати у облику

$$m\frac{dv}{dt}T_i + 2\,T\varkappa\,N_i = \frac{\partial (E-V)}{\partial x^i},$$

или, после скаларног множења јединичним вектором главне нормале,

$$2\,T\varkappa = \frac{\partial}{\partial x^i}(E-V)\,N^i,$$

односно

$$\varkappa = \frac{1}{2(E-V)}\frac{\partial}{\partial x^i}(E-V)\,N^i, \qquad (T=E-V),$$

што можемо написати и у облику

$$\varkappa = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\log\sqrt{E-V}\right)N^i.$$

Ако диференцијалну једначину кретања (1) диференцирамо по времену, добијамо

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(m\frac{dv}{dt}\right)T^i + m\frac{dv}{dt}\frac{\delta T^i}{\delta s}\frac{ds}{dt} + \frac{\delta}{\delta s}(mv^2\varkappa)\,N^i + mv^2\varkappa\frac{\delta N^i}{\delta s}\frac{ds}{dt} = X^i{}_{,j}\frac{dx^j}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Међутим, како је

$$\frac{\delta T^i}{\delta s} = \varkappa\,N^i, \qquad \frac{\delta N^i}{\delta s} = -\varkappa\,T^i + \tau\,B^i,$$

где је $B^i$ јединични вектор бинормале, биће

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(m\frac{dv}{dt}\right)T^i + m\varkappa\frac{dv}{dt}vN^i + \frac{\delta}{\delta t}(mv^2\varkappa)\,N^i - mv^3\varkappa^2\,T^i + mv^3\varkappa\tau\,B^i = X^i{}_{,j}\,T^j v.$$

Ако ову једначину помножимо скаларно јединичним вектором бинормале, добијамо

$$mv^3\varkappa\tau = X^i{}_{,j}\,T^j B_i\,v,$$

односно

$$2\,T\varkappa\tau = X_{i,j}\,T^j B^i,$$

што је и требало показати.

**Задатак 233.** (Одељак 39., задатак 6.). Кад се материјална тачка масе $m$ креће по апсолутно глаткој непокретној површи, показати да алгебарска вредност нормалне координате вектора силе мора бити једнака

$$mb_{\alpha\beta}\,v^\alpha v^\beta.$$



*Решење*: Диференцијалне једначине кретања материјалне тачке по глаткој непокретној површи су облика (видети одељак 39., једначину 38.)

$$(1) \qquad mw^i = X^i + R^i,$$

где је $R^i$ реакција везе која присиљава тачку да се креће по површи. С обзиром да је по претпоставци читава реакција у правцу нормале $U^i$ на површи, тј. да је

$$R^i = RU^i,$$

скаларним множењем једначине (1) јединичним вектором $U^i$ нормале на површи, добићемо

$$m\,w^i\,U_i = X^i\,U_i + R,$$

односно

$$(2) \qquad m\,w^i\,U_i = F_N + R,$$

где је $F_N$ пројекција активне силе на правац нормале на површи.

Убрзање $w^i$ тачке можемо изразити у облику (видети одељак 39., једначину 42.)

$$w^i = \frac{dv}{dt}T^i + v^2\varkappa_g\,G^i + v^2\varkappa_N\,U^i,$$

где је $T^i$ јединични вектор тангенте, $G^i$ јединични вектор геодезијске нормале, $\varkappa_g$ геодезијска кривина криве и $\varkappa_N$ нормална кривина криве.

С обзиром да јединични вектори $T^i$ и $G^i$ леже у тангентној равни површи, то је

$$T^i\,U_i = 0, \qquad G^i\,U_i = 0,$$

па је

$$w^i\,U_i = v^2\varkappa_N,$$

тако да, на основу (2), добијамо

$$(3) \qquad F_N + R = m\,v^2\varkappa_N.$$

Како, даље, нормалну кривину криве можемо изразити у облику (видети одељак 39., једначину 21.)

$$\varkappa_N = b_{\alpha\beta}\,t^\alpha\,t^\beta,$$

где је $b_{\alpha\beta}$ други метрички тензор површи, алгебарску вредност нормалне компоненте силе $(F_N + R)$, на основу једначине (3), можемо изразити у облику

$$F_N + R = m\,b_{\alpha\beta}\,v^2\,t^\alpha\,t^\beta,$$

односно, с обзиром да је

$$v\,t^\alpha = v^\alpha, \qquad v\,t^\beta = v^\beta,$$

у облику

$$F_N + R = m\,b_{\alpha\beta}\,v^\alpha\,v^\beta,$$

што је и требало показати.

**Задатак 234.** (Одељак 39., задатак 7.). Посматрајмо кретање по инерцији материјалне тачке по глатком непокретном торусу. Његова метричка форма може се написати у облику

$$ds^2 = (a - b\cos\theta)^2\,d\varphi^2 + b^2\,d\theta^2,$$

где је $\varphi$ азимутни угао а $\theta$ угаоно одступање од екваторске равни, $a$ и $b$ константе. Показати да ће диференцијалне једначине кретања бити

$$(a - b\cos\theta)^2 \frac{d\varphi}{ds} = hb^2, \qquad \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 = (a - b\cos)^4 \cdot \frac{1}{h^2} - (a - b\cos\theta)^2,$$

где је $h$ константа.

*Напомена*: Због штампарске грешке као и на основу сугестије Проф. др Татомира П. Анђелића, последња реченица овог задатка треба да гласи: Показати да ће први интеграли диференцијалних једначина кретања бити

$$(a - b\cos)^2 \frac{d\varphi}{ds} = h, \qquad b^2\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 = \frac{(a - b\cos\theta)^4}{h^2} - (a - b\cos\theta)^2,$$

где је $h$ константа.

***Решење***: Из метричке форме површи торуса (видети задатак 111.)

$$ds^2 = (a - b\cos\theta)^2\, d\varphi^2 + b^2\, d\theta^2,$$

за квадрат брзине добивамо

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = (a - b\cos\theta)^2\, \dot{\varphi}^2 + b^2\, \dot{\theta}^2.$$

Кинетичка енергија материјалне тачке масе $m$ је, према томе,

$$(1) \qquad T = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, (a - b\cos\theta)^2\, \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, m b^2\, \dot{\theta}^2.$$

Лагранжеве једначине кретања материјалне тачке по површи су (видети одељак 39, једначину 9.)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = X_i.$$

У овом случају, с обзиром да је кретање по инерцији и да су координате $\varphi$ и $\theta$, Лагранжеве диференцијалне једначине кретања су

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0. \end{aligned}$$

Из једначине (1) добивамо

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\,(a - b\cos\theta)^2\, \dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

па се прва од једначина (2) може написати у облику

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\left[m\,(a - b\cos\theta)^2\, \dot{\varphi}\right] = 0,$$



што показује да је генералисана координата $\varphi$ циклична. Из (3) добивамо

$$(4) \qquad m\,(a - b\cos\theta)^2\, \dot{\varphi} = C,$$

где је $C$ интеграциона константа која се одређује из почетних услова.

Једначину (4), међутим, можемо написати у облику

$$m\,(a - b\cos\theta)^2\, \frac{d\varphi}{ds}\, v = C,$$

односно

$$(5) \qquad (a - b\cos\theta)^2\, \frac{d\varphi}{ds} = \frac{C}{mv} = h = \text{const.},$$

пошто је у овом случају алгебарска вредност $v$ брзине константна, јер је испуњен услов да постоји интеграл енергије (видети Т. Анђелић и Р. Стојановић: Рационална механика, стр. 220.).

С обзиром да је кретање по инерцији, интеграл енергије биће

$$T = H,$$

где је $H$ константа енергије. Према томе, једначина (5) је први циклички интеграл проблема.

Израз за квадрат брзине, очигледно, можемо написати у облику

$$v^2 = (a - b\cos\theta)^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 v^2 + b^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 v^2,$$

одакле следи

$$(6) \qquad (a - b\cos\theta)^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + b^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1.$$

Деобом ове једначине са $(a - b\cos\theta)^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$, што је могуће јер је $(a - b\cos\theta)^2 = g_{11} \neq 0$, добијамо

$$\frac{b^2 \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2}{(a - b\cos\theta)^2} = \frac{1}{(a - b\cos\theta)^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} - 1,$$

односно

$$b^2 \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right) = \frac{1}{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} - (a - b\cos\theta)^2.$$

Ако овде заменимо $\frac{d\varphi}{ds}$ из једначине (5), добијамо

$$(7) \qquad b^2 \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right) = \frac{(a - b\cos\theta)^4}{h^2} - (a - b\cos\theta)^2,$$

што представља другу тражену једначину.

Дакле, док је (5) циклички интеграл, једначина (7) је интеграл енергије; па су обе једначине први интеграли диференцијалних једначина кретања. Из тог разлога је и дата сугестија за измену текста задатка.

## 40. Кретање крутог тела

**Задатак 235.** (Одељак 40., задатак 1.). Кад се узму у обзир изрази за одређивање транслаторне брзине (4) и ротационе брзине (10), написати израз за брзину произвољне тачке крутог тела у случају сложеног кретања.

***Решење***: Израз (4), који је облика (видети одељак 40., једначину 4.)

$$dy^i = a^i\,dt,$$

одређује елементарно транслаторно померање тачака крутог тела. Константни вектор

$$a^i = \frac{dy^i}{dt},$$

представља транслаторну брзину тачака крутог тела и она је иста за све тачке тела.

Израз (10), који је облика (видети одељак 40., једначину 10.)

$$v_i = -\omega_{ij}\,y^j,$$

одређује брзину сваке тачке крутог тела у случају ротације око непокретног координатног почетка. У тој једначини је $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ тензор тренутне угаоне брзине.

Ова два случаја кретања крутог тела (транслација, односно ротација око непокретне тачке — координатног почетка) јесу специјални случајеви кретања крутог тела.

Ако се круто тело обрће око непокретне тачке $A$ која се не поклапа са координатним почетком, тј. има координате $y_A^i$, онда је брзина произвољне тачке крутог тела (видети одељак 40., једначину 15.)

$$v_i = -\omega_{ij}\left(y^j - y_A^j\right).$$

У случају сложеног кретања крутог тела, састављеног од више компонентних кретања, резултујућа брзина $v_i$ произвољне тачке тела добија се као векторски збир компонентних брзина које има та тачка у истом тренутку времена.

У случају оваквог кретања крутог тела брзина произвољне тачке тела одређена је брзином једне његове тачке, рецимо покретног пола $A$ и ротационом брзином те тачке око пола $A$. На основу тога, за брзину произвољне тачке $M$ крутог тела, са координатама $y_M^i$, можемо писати

$$v_M^i = v_A^i - \omega^i_{.j}\left(y_M^j - y_A^j\right),$$

где први члан на десној страни представља транслаторну компоненту брзине $v_M^i$, а други њену ротациону компоненту.

**Задатак 236.** (Одељак 40., задатак 2.). Написати израз за кинетичку енергију крутог тела које се обрће око утврђене тачке помоћу главних момената инерције и Ојлерових углова.

***Решење***: Узмимо непокретну тачку $O$ (која је утврђена тачка око које се обрће круто тело) за заједнички почетак два Декартова триједра — непокретног $y^i$ и покретног $z^i$ круто везаног са крутим телом, чије се осе у почетном тренутку поклапају.



Брзина произвољне тачке крутог тела у односу на непокретни триједар $y^i$ је (видети одељак 40., једначину 10.)

$$v_{(\nu)i} = -\omega_{ij}\,y^j_{(\nu)}, \tag{1}$$

где индекс у загради означава редни број тачке и где је $\omega_{ij}$ тензор тренутне угаоне брзине.

Везе између координата произвољне тачке тела у непокретном и покретном триједру су (видети одељак 40., једначину 40.)

$$y^i = a^i_{.j}\,z^j, \tag{2}$$

што су, у ствари, хомогене линеарне ортогоналне трансформације у којима су коефицијенти $a^i_{.j}$ функције времена.

Координате брзине у односу на покретни триједар су

$$\overline{v}_{(\nu)i} = -\overline{\omega}_{ij}\,z^j_{(\nu)}, \tag{3}$$

где је

$$\overline{v}_{(\nu)i} = v_{(\nu)k}\frac{\partial y^k}{\partial z^i},$$

$$\overline{\omega}_{ij} = \omega_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial z^i}\frac{\partial y^l}{\partial z^j},$$

односно, с обзиром на (2),

$$\overline{v}_{(\nu)i} = v_{(\nu)k}\,a^k_{.i},$$

$$\overline{\omega}_{ij} = \omega_{kl}\,a^k_{.i}\,a^l_{.j}.$$

С обзиром да је $\overline{\omega}_{ij}$ антисиметрични тензор, може му се у простору од три димензије координирати вектор тренутне угаоне брзине, тј.

$$2\,\overline{\omega}^i = e^{ijk}\,\overline{\omega}_{jk},$$

односно

$$\overline{\omega}_{ij} = e_{ijk}\,\overline{\omega}^k. \tag{4}$$

Помоћу ове релације, координате брзине (3) можемо написати у облику

$$\overline{v}_{(\nu)i} = e_{kji}\,\overline{\omega}^k\,z^j_{(\nu)}. \tag{5}$$

Кинетичка енергија крутог тела је

$$T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\,\delta^{il}\,\overline{v}_{(\nu)i}\,\overline{v}_{(\nu)l},$$

односно, ако искористимо једначину (5),

$$T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\,\delta^{il}\,e_{kji}\,e_{stl}\,\overline{\omega}^k\,\overline{\omega}^s\,z^j_{(\nu)}\,z^t_{(\nu)}. \tag{6}$$

Међутим, како је (видети одељак 40., једначину 48.)

$$\sum_{\nu} m_\nu \delta^{il} e_{kji} e_{stl} z^j_{(\nu)} z^t_{(\nu)} = I_{ks},$$

где су $I_{ks}$ моменти инерције крутог тела у односу на осе покретног триједра (круто везаног за тело), једначину (6) можемо написати у облику

$$T = \frac{1}{2} I_{ks} \bar{\omega}^k \bar{\omega}^s. \tag{7}$$

Кад је непокретна тачка крутог тела његов центар маса (Ојлеров случај обртања крутог тела око непокретне тачке), и ако за осе покретног триједра узмемо његове главне централне осе инерције, биће сви производи инерције једнаки нули, па је

$$\{I_{ks}\} = \begin{Bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{Bmatrix}.$$

Ако уведемо ознаке

$$I_{11} = A, \quad I_{22} = B, \quad I_{33} = C; \quad \bar{\omega}^1 = p, \quad \bar{\omega}^2 = q, \quad \bar{\omega}^3 = r,$$

где су $p$, $q$ и $r$ пројекције тренутне угаоне брзине на осе покретног триједра, једначину (7) можемо написати у облику

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \tag{8}$$

Како су, даље, пројекције тренутне угаоне брзине на осе покретног триједра функције Ојлерових углова $\psi$, $\varphi$ и $\vartheta$, и њихових извода по времену, тј. (видети Т. Анђелић и Р. Стојановић: Рационална механиха, Београд 1966., стр. 86.)

$$p = \dot\psi \sin\varphi \sin\vartheta + \dot\vartheta \cos\varphi,$$

$$q = \dot\psi \cos\varphi \sin\vartheta - \dot\vartheta \sin\varphi,$$

$$r = \dot\psi \cos\vartheta + \dot\varphi,$$

једначину (8) можемо, коначно, написати у облику

$$T = \frac{A}{2} (\sin^2\varphi \sin^2\vartheta \dot\psi^2 + 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\vartheta \dot\psi \dot\vartheta + \cos^2\varphi \dot\vartheta^2) +$$

$$+ \frac{B}{2} (\cos^2\varphi \sin^2\vartheta \dot\psi^2 - 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\vartheta \dot\vartheta \dot\psi + \sin^2\varphi \dot\vartheta^2) +$$

$$+ \frac{C}{2} (\cos^2\vartheta \dot\psi^2 + 2 \cos\vartheta \dot\varphi \dot\psi + \dot\varphi^2),$$

што представља тражени израз за кинетичку енергију крутог тела.

*Напомена.* С обзиром да смо у овом задатку користили правоугле Декартове системе координата, то у односу на њих, како знамо, нема разлике између контраваријантних, коваријантних и физичких координата. Из тог разлога смо координате тренутне угаоне брзине назвали пројекцијама.



## 41. Динамика система

**Задатак 237.** (Одељак 41., задатак 1.). Показти да ако је нека линија силе геодезијска линија за кинематичку метричку форму система, она ће то бити и за акциону метричку форму.

***Решење*:** Кинематичка и акциона метричка форма су облика (видети одељак 41., једначине 11. и 43.)

$$ds^2 = 2\, T dt^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

и

$$d\sigma^2 = (E - V)\, ds^2 = (E - V)\, a_{ij}\, dx^i\, dx^j = b_{ij}\, dx^i\, dx^j. \tag{2}$$

Ако уведемо ознаку

$$E - V = \varphi,$$

акциону метричку форму можемо написати у облику

$$d\sigma^2 = \varphi\, ds^2. \tag{3}$$

Једначина геодезијских линија је облика (видети одељак 27., једначину 16.)

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \left\{ {l \atop j\ k} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \tag{4}$$

где је као променљиви параметар узет лук $s$ криве. Ову једначину можемо изразити у облику (видети одељак 27., једначину 17.)

$$\frac{\delta}{\delta s} \left( \frac{dx^l}{ds} \right) = 0, \tag{5}$$

односно у облику

$$\frac{\delta}{\delta s} (T^l) = 0, \tag{6}$$

где је $T^l$ јединични вектор тангенте на геодезијску линију.

Линија силе је по дефиницији она линија у чијој је свакој тачки вектор силе колинеаран са јединичним вектором њене тангенте. Према томе, за линију силе је у свакој њеној тачки испуњен услов

$$X^i = \mu\, T^i = \mu \frac{dx^i}{ds}, \tag{7}$$

односно

$$T^i = \lambda X^i, \tag{8}$$

где је $\lambda$ неки променљиви скалар.

Ако је линија силе геодезијска линија за кинематичку метричку форму система, онда, на основу (6) и (7), мора бити

$$\frac{\delta}{\delta s} (\lambda X^i) = 0,$$

односно контраваријантне координате вектора силе морају задовољавати систем диференцијалних једначина

$$\frac{dX^i}{ds}+\lambda\left\{\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right\}X^j X^k=-\lambda_{,m}X^m X^i. \tag{9}$$

Ми треба да покажемо да контраваријантне координате вектора силе задовољавају такође и одговарајући систем диференцијалних једначина у односу на акциону метричку форму система, тј.

$$\frac{dX^i}{d\sigma}+\bar{\lambda}\,\overline{\left\{\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right\}}X^j X^k=-\bar{\lambda}_{,m}X^m X^i, \tag{10}$$

где је $\bar{\lambda}$ дефинисано условом да је вектор силе колинеаран са тангентом геодезијских линија за акциону метричу форму, тј.

$$\bar{T}^i=\bar{\lambda}X^i,$$

и где су $\overline{\left\{\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right\}}$ координате Кристофеловог симбола друге врсте рачунате за метрички тензор који одговара акционој метричкој форми.

Из услова

$$d\sigma=\sqrt{\varphi}\,ds,$$

следи

$$\bar{\lambda}X^i=\bar{T}^i=\frac{dx^i}{d\sigma}=\frac{dx^i}{ds}\frac{ds}{d\sigma}=\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\frac{dx^i}{ds}=\frac{1}{\sqrt{\varphi}}T^i=\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\lambda X^i,$$

одакле добијамо

$$\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\lambda. \tag{11}$$

Метрички тензор који одговара кинематичкој метричкој форми је $a_{ij}$, односно, њему здружени, $a^{ij}$. Метрички тензор који одговара акционој метричкој форми, на основу (3), је

$$b_{ij}=\varphi\,a_{ij}, \tag{12}$$

односно, њему здружени,

$$b^{ij}=\frac{1}{\varphi}a^{ij}. \tag{13}$$

Координате Кристофеловог симбола прве врсте, рачунате преко метричког тензора који одговара акционој метричкој форми, на основу релације (12), су

$$\overline{[jk,\,l]}=\frac{1}{2}(\varphi_{,j}a_{kl}+\varphi_{,k}a_{lj}-\varphi_{,l}a_{jk})+\varphi[jk,\,l], \tag{14}$$

где су $[jk,\,l]$ координате Кристофеловог симбола прве врсте рачунате у односу на кинематичку метрику. На основу (13) и (14), за координате Кристофеловог симбола друге врсте, добијамо

$$\overline{\left\{\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right\}}=b^{il}\,\overline{[jk,\,l]}=\frac{1}{\varphi}a^{il}\,\overline{[jk,\,l]},$$



односно

$$\overline{\left\{\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right\}}=\frac{1}{2\varphi}(\delta^i_k\varphi_{,j}+\delta^i_j\varphi_{,k}-a^{il}\varphi_{,l}a_{jk})+\left\{\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right\}. \tag{15}$$

Ако ово заменимо у једначину (10), узимајући у обзир да је, на основу релације (3), $\frac{dX^i}{d\sigma}=\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\frac{dX^i}{ds}$, добијамо

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\frac{dX^i}{ds}+\frac{\lambda}{\sqrt{\varphi}}\Big(\frac{1}{2\varphi}\varphi_{,m}X^m X^i+\frac{1}{2\varphi}\varphi_{,m}X^m X^i-\frac{1}{2\varphi}a^{il}\varphi_{,l}a_{jk}X^j X^k+$$

$$+\left\{\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right\}X^j X^k\Big)=\frac{1}{2}\varphi^{-\frac{3}{2}}\varphi_{,m}\lambda X^m X^i-\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\lambda_{,m}X^m X^i,$$

односно, узимајући у обзир да је $a_{jk}X^j X^k=(X)^2$, где је $X$ интензитет силе,

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\left(\frac{dX^i}{ds}+\lambda\left\{\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right\}X^j X^k\right)=-\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\lambda_{,m}X^m X^i-\frac{\lambda}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\varphi_{,m}X^m X^i+$$

$$+\frac{\lambda}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\varphi_{,l}a^{il}(X)^2.$$

Међутим, како је

$$(X)^2=a_{jk}X^j X^k=a_{jk}\frac{T^j}{\lambda}\frac{T^k}{\lambda}=\frac{1}{\lambda^2},$$

биће

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\left(\frac{dX^i}{ds}+\lambda\left\{\begin{matrix} i \\ j\;k \end{matrix}\right\}X^j X^k\right)=-\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\lambda_{,m}X^m X^i-\frac{\lambda}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\varphi_{,m}X^m X^i+ \tag{16}$$

$$+\frac{1}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\frac{1}{\lambda}\varphi_{,l}a^{il}.$$

Ако су линије силе геодезијске линије за кинематичку метричку форму, тј. ако контраваријантне координате силе $X^i$ задовољавају једначину (9), из (16) добијамо

$$-\frac{\lambda}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\varphi_{,m}X^m X^i+\frac{1}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\frac{1}{\lambda}\varphi_{,l}a^{il}=0,$$

односно

$$\varphi_{,m}X^m X^i-\frac{1}{\lambda^2}\varphi_{,l}a^{il}=0. \tag{17}$$

Међутим, како је, даље, за конзервативне системе

$$\varphi_{,m}=\frac{\partial}{\partial x^m}(E-V)=-\frac{\partial V}{\partial x^m}=X_m,$$

то заменом у (17), добијамо

$$X_m X^m X^i-\frac{1}{\lambda^2}X_l a^{il}=0,$$

односно

$$(X)^2 X^i - (X)^2 X^i \equiv 0, \qquad \left(\frac{1}{\lambda^2} = (X)^2\right). \tag{18}$$

Дакле, једначина (10) је идентички задовољена. Према томе, можемо закључити: ако је линија силе геодезијска линија за кинематичку метричку форму система, тј. ако контраваријантне координате вектора силе задовољавају систем диференцијалних једначина (9), онда је она геодезијска линија и за акциону метричку форму система, тј. контраваријантне координате силе задовољавају систем диференцијалних једначина (10), што је и требало показати.

**Задатак 238.** (Одељак 41., задатак 2.). Ако је почетна брзина колинеарна са линијом силе која се поклапа са неком геодезијском линијом, показати да ће се трајекторија система поклапати са овом линијом силе.

***Решење***: За неку криву $x^i = x^i(s)$ у $V_N$, *геодезијска кривина* је вектор са координатама

$$k^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop j\,k} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}, \tag{1}$$

а геодезијске линије су оне линије у $V_N$ за које је геодезијска кривина једнака нули.

Нека је $x^i = x^i(s)$ трајекторија тачке у $V_N$ на коју дејствује сила $X^i$. Диференцијална једначина кретања те тачке је

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left\{ {i \atop j\,k} \right\} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = X^i \tag{2}$$

односно, ако ставимо $\dfrac{dx^i}{dt} = \dfrac{dx^i}{ds}\dfrac{ds}{dt}$, $\quad \dfrac{d^2 x^i}{dt^2} = \dfrac{d^2 x^i}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 + \dfrac{dx^i}{ds}\dfrac{d^2 s}{dt^2}$,

$$\dot{s}^2 \left(\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop j\,k} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right) + \ddot{s}\,\frac{dx^i}{ds} = X^i, \tag{3}$$

где је $\dot{s} = \dfrac{ds}{dt}$, $\ddot{s} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$. Ставимо још $\dot{s}^2 = \dfrac{1}{\mu}$, па је геодезијска кривина

$$k^i = \mu\left(X^i - \ddot{s}\,\frac{dx^i}{ds}\right). \tag{4}$$

Да би трајекторија била геодезијска линија потребно је да буде $k^i = 0$, тј.

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{\ddot{s}} X^i \equiv \lambda X^i, \qquad \left(\lambda \equiv \frac{1}{\ddot{s}}\right), \tag{5}$$

а одавде закључујемо да је потребан услов да трајекторија тачке у $V_N$ буде геодезијска линија да тангента трајекторије стално буде колинеарна са силом, а то значи да је и почетна брзина колинеарна са силом у почетном тренутку. Овај је услов потребан, али није и довољан. Да бисмо испитали када ће овај услов бити испуњен, заменимо израз (5) у диференцијалне



једначине кретања. С обзиром да је из (5)

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \lambda_{,m}\frac{dx^m}{ds} X^i + \lambda\frac{dX^i}{ds} = \lambda\lambda_{,m} X^m X^i + \lambda\frac{dX^i}{ds},$$

заменом у (3), добијамо

$$\dot{s}^2\left(\lambda\frac{dX^i}{ds} + \lambda\lambda_{,m} X^m X^i + \lambda^2 \left\{ {i \atop j\,k} \right\} X^j X^k\right) + \frac{1}{\lambda}\lambda X^i = X^i,$$

а одавде следи да услов (5) може бити испуњен само ако сила задовољава услов

$$\frac{dX^i}{ds} + \lambda \left\{ {i \atop j\,k} \right\} X^j X^k = -\lambda_{,m} X^m X^i,$$

а то је услов да је линија силе геодезијска линија (видети претходни задатак).

Дакле, ако је линија силе геодезијска линија и ако је почетна брзина тачке колинеарна са силом, тачка ће се кретати по тој геодезијској линији, што је и требало показати.

**Задатак 239.** (Одељак 41., задатак 3.). Показати да стварна трајекторија динамичког система са кинетичком енергијом $T$ и потенцијалном енергијом $V$ задовољава варијациону једначину

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\, dt = 0,$$

при чему породица уочених могућих трајекторија има заједничке крајње тачке (*Хамилтонов принцип*).

***Решење***: Посматрајмо динамички систем који је подвргнут следећим ограничењима:

1. Систем је холономан и на њега дејствују конзервативне силе.
2. Одступања свих могућих (заобилазних) трајекторија од стварне трајекторије су инфинитезимална.
3. Кретање је синхроно: систем полази из почетне конфигурације у тренутку $t_1$ и стиже у крајњу конфигурацију по стварној или заобилазној трајекторији у исто време $t_2$.

Под овим условима постоји Лагранжева функција, која је дефинисана са

$$L = T - V,$$

тако да је

$$dW = L\, dt$$

елемент дејства, а

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{1}$$

је величина одређена укупним кретањем система у временском размаку $(t_1, t_2)$ и назива се *дејство у Хамилтоновом смислу*.

Ми треба да покажемо да дејство у Хамилтоновом смислу има стационарну вредност на стварној трајекторији у поређењу са вредностима на заобилазним трајекторијама.

Према варијационом рачуну, из (1) добијамо

$$\delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt .$$

Међутим, како је

$$L = L(q^i, \dot q^i),$$

биће

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta \dot q^i,$$

тако да варијацију дејства у Хамилтоновом смислу можемо изразити у облику

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta \dot q^i\right) dt . \tag{2}$$

С обзиром да је (видети Т. Анђелић и Р. Стојановић: Рационална механика, Београд, 1966., стр. 426. једначина 9.)

$$\frac{d}{dt}\delta q^i = \delta \dot q^i,$$

можемо ставити

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta \dot q^i\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i} d(\delta q^i),$$

одакле парцијалном интеграцијом добијамо

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta \dot q^i\, dt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta q^i\right)_{t_2} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta q^i\right)_{t_1} - \int_{t_1}^{t_2}\delta q^i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right) dt .$$

Међутим, на основу претпоставке о синхроности кретања, у тренуцима $t_1$ и $t_2$ конфигурације система се поклапају, па је

$$(\delta q^i)_{t_2} = (\delta q^i)_{t_1} = 0.$$

На основу тога, претходна релација се своди на

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta \dot q^i\, dt = -\int_{t_1}^{t_2}\delta q^i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right) dt .$$

Уношењем овога у једначину (2), добијамо

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)\delta q^i\, dt . \tag{3}$$



При кретању система по стварној трајекторији важе Лагранжеве једначине друге врсте (видети одељак 41., једначину 27.)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0,$$

тако да се (3) своди на

$$\delta W = 0,$$

и тиме је доказано да при стварном кретању Хамилтоново дејство има стационарну вредност.

**Задатак 240.** (Одељак 41., задатак 4.). Динамички систем се састоји од танке праве глатке цеви која се обрће у хоризонталној равни око једног свог краја $A$. У тој цеви се налази тешка лоптица $B$ спојена опругом са $A$. Овај систем има два степена слободе и положај лоптице је у сваком тренутку одређен координатама: $r = \overline{AB}$ и углом ротације $\theta$ цеви око $A$ у односу на неки одређен почетни положај. Потенцијална енергија ће зависити само од $r$.

Показати да су у конфигурационом простору све линије силе геодезијске линије у односу на кинематичку метричку форму.

***Решење*:** Кинетичка енергија материјалне тачке (лоптице $B$), с обзиром да су независне координате $r$ и $\theta$, биће

$$2T = m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2),$$

па је кинематичка метричка форма конфигурационог простора (видети одељак 41., једначину 11.)

$$ds^2 = 2T dt = m(dr^2 + r^2 d\theta^2),$$

тј. координате метричког тензора конфигурационог простора су

$$\{a_{\alpha\beta}\} = \begin{Bmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{Bmatrix}.$$

Показаћемо сада да је овај конфигурациони простор еуклидски. У односу на ортогонални систем координата у риманском простору од две димензије једина независна коoордината Риман-Кристефеловог тензора је (видети задатак 186.)

$$R_{1212} = -\frac{\sqrt{a}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2}\right)\right].$$

У овом случају добијамо

$$R_{1212} = -\frac{mr}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{mr}2mr\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{mr}\cdot 0\right)\right],$$

тј.

$$R_{1212} = 0,$$

па закључујемо да је дати конфигурациони простор еуклидски (метрика је позитивно дефинитна).

С обзиром да је у конфигурационом простору потенцијална енергија функција само од $r$, тј. $V = V(r)$, тада и функција силе зависи само од $r$, тј.

$$U = -V = U(r),$$

па су координате активне силе

$$X_r = \frac{\partial U}{\partial r} = X_r(r),$$

$$X_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0.$$

Диференцијална једначина линија силе је

$$\frac{dr}{X_r} = \frac{d\theta}{X_\theta},$$

тј.

$$d\theta = 0.$$

Интеграцијом одавде добијамо коначне једначине линија силе,

$$\theta = \text{const}.$$

Дакле, линије силе су праве линије које пролазе кроз тачку $A$ која је пол ротације.

У одељку 27. је показано да су у еуклидском простору праве линије геодезијске линије, па закључујемо да су линије силе у датом конфигурационом простору геодезијске линије у односу на кинематичку метричку форму, што је и требало показати.

**Задатак 241.** (Одељак 41., задатак 5.). Показати да је у конфигурационом простору увек

$$\frac{dT}{ds} = Q \cos \varphi,$$

где је $s$ лук трајекторије система, $Q$ интензитет вектора силе, а $\varphi$ угао који вектор силе образује са трајекторијом.

***Решење***: У конфигурационом простору, са метричким тензором $a_{ij}$, кинетичка енергија система је (видети одељак 41., једначину 7.)

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

где је (видети одељак 41., једначину 6.)

$$a_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial q^i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial q^j}, \qquad (i, j = 1, \ldots, N;\ \alpha = 1, 2, \ldots, 3N).$$

Ако генералисане контраваријантне координате брзине обележимо са $v^i$, кинетичка енергија система је

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} v^i v^j.$$



Одавде следи

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{1}{2} a_{ij} v^i v^j\right) = a_{ij} v^i \frac{\delta v^j}{\delta t}.$$

Међутим, како је у конфигурационом простору апсолутни извод по времену генералисане брзине једнак генералисаном убрзању (видети одељак 41., једначину 14.), односно генералисаној сили (видети одељак 41., једначину 34), тј.

$$\frac{\delta v^i}{\delta t} = w^i = Q^i,$$

добијамо

$$\frac{dT}{dt} = a_{ij} v^i w^j = a_{ij} v^i Q^j.$$

Како је, даље,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dT}{ds} v$$

где је $v = (a_{ij} v^i v^j)^{\frac{1}{2}}$ интензитет вектора генералисане брзине, добијамо

$$\frac{dT}{ds} = a_{ij} \frac{v^i}{v} Q_j,$$

односно

$$\frac{dT}{ds} = a_{ij} t^i Q^j,$$

што представља скаларни производ јединичног вектора тангенте $t^i$ трајекторије и вектора генералисане силе у конфигурационом простору. С обзиром да је скаларни производ два вектора једнак производу њихових интензитета и косинуса угла између њих, можемо писати

$$\frac{dT}{ds} = Q \cos \varphi,$$

где је $Q$ интензитет силе а $\varphi$ угао који вектор силе образује са трајекторијом, што је и требало показати.

**Задатак 242.** (Одељак 41., задатак 6.). Показати да се репрезентативна тачка у конфигурационом простору креће по инерцији увек по геодезијској линији тог простора.

***Решење***: Диференцијалне једначине кретања по инерцији репрезентативне материјалне тачке у конфигурационом простору су

$$(1) \qquad \frac{d^2 q^i}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} = 0.$$

Из закона о одржању енергије за материјални систем (видети одељак 41., једначину 38.),

$$T + V = \text{const.},$$

с обзиром да је у случају кретања по инерцији $V = \text{const.}$, добијамо

$$T = \text{const.}$$

Како је линијски елемент у конфигурационом простору (видети одељак 41., једначину 40.)

$$ds = \sqrt{2\,T}\,dt,$$

у случају кретања по инерцији ће бити

(2) $$ds = k\,dt,$$

где је $k$ константа.

На основу релације (2) добијамо

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{dq^i}{ds}k, \qquad \frac{d^2 q^i}{dt^2} = \frac{d^2 q^i}{ds^2}k^2.$$

па једначину (1) можемо написати у облику

$$\frac{d^2 q^i}{ds^2}k^2 + \begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix} \frac{dq^j}{ds}\frac{dq^k}{ds}k^2 = 0,$$

односно

$$\frac{d^2 q^i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix} \frac{dq^j}{ds}\frac{dq^k}{ds} = 0.$$

Према томе, закључујемо, трајекторија репрезентативне материјалне тачке која се креће по инерцији у конфигурационом простору јесте геодезијска линија тог простора, што је и требало показати.

**Задатак 243.** (Одељак 41., задатак 7.). Показати да у конфигурационом простоту $V_N$ од свих трајекторија, које су одређене двема конфигурацијама $A$ и $B$ које поред тога задовољавају једначину енергије $T+V=E$, она која чини интеграл

$$t = \int_A^B \left\{\frac{a_{ij}\,q^{i\prime}\,q^{j\prime}}{2\,(E-V)}\right\}^{\frac{1}{2}} d\mu, \qquad q^{i\prime} = \frac{dq^i}{d\mu}, \quad (\mu \text{ је параметар})$$

стационарним, задовољава диференцијалну једначину

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{1}{E-V}\frac{dV}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} = 0.$$

(Овакве трајекторије зову се *брахистохроне* уоченог динамичког система).

***Решење:*** За конзервативне система важи закон енергије

$$T = E - V,$$

а у конфигурационом простору са кинематичким линијским елементом је

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\,a_{ij}\,\dot q^i\,\dot q^j.$$



Одавде је

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2\,T}} = \sqrt{\frac{a_{ij}\,dq^i\,dq^j}{2\,T}}.$$

Ако се искористи интеграл енергије и посматра кретање дуж неке путање са параметарским једначинама $x^i = x^i(\mu)$, биће

$$dt = \left\{\frac{a_{ij}\,q^{i\prime}\,q^{j\prime}}{2\,(E-V)}\right\}^{\frac{1}{2}} d\mu, \qquad \left(q^{i\prime} = \frac{dq^i}{d\mu}\right).$$

Време потребно да систем пређе из конфигурације $A$ у конфигурацију $B$ је

$$t = \int_A^B \left\{\frac{a_{ij}\,q^{i\prime}\,q^{j\prime}}{2\,(E-V)}\right\}^{\frac{1}{2}} d\mu.$$

*Брахистохрона* је крива дуж које систем прелази из једне конфигурације у другу за најмање време. Отуда услов за брахистохрону:

$$\delta\,t = \delta \int_A^B \left\{\frac{a_{ij}\,q^{i\prime}\,q^{j\prime}}{2\,(E-V)}\right\}^{\frac{1}{2}} d\mu = 0.$$

Ако за параметар узмемо време, $\mu = t$, и ставимо

$$f = \left\{\frac{a_{ij}\,\dot q^i\,\dot q^j}{2\,(E-V)}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{T}{E-V}\right)^{\frac{1}{2}},$$

Ојлер-Лагранжеве једначине овог варијационог проблема биће

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} = 0.$$

Када се изврши назначено диференцирање, добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial \dot q^i} = \frac{1}{2}\,[T(E-V)]^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\partial T}{\partial \dot q^i},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot q^i} = \frac{1}{2\sqrt{T(E-V)}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} + \frac{1}{T}\frac{dV}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial q^i} = \frac{1}{2\sqrt{T(E-V)}}\frac{\partial T}{\partial q^i} + \frac{\sqrt{T}}{2\,(E-V)\sqrt{E-V}}\frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

Уношењем овога у Ојлер-Лангранжеве једначине и користећи интеграл енергије, $T = E - V$, добијамо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{1}{E-V}\frac{dV}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} = 0,$$

што је и требало показати.

## 42. Примена Пфафове методе у динамици система

**Задатак 244.** (Одељак 42., задатак 1.). Изразити елемент акције у Хамилтоновом смислу који одговара сферном клатну у облику подесне Пфафове форме и одатле тензорским путем написати канонске једначине тог проблема.

*Решење:* У сферним поларним координатама, за $r=a=\text{const.}$, кинетичка енергија сферног клатна је

$$T=\frac{m}{2}a^2(\cos^2\theta\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2),$$

а функција силе ($z$-оса је оријентисана вертикално навише)

$$U=mgz=mga\sin\theta.$$

Генералисани импулси биће

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^1}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=ma^2\cos^2\theta\dot{\varphi},$$

$$p_2=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^2}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=ma^2\dot{\theta},$$

а одатле је

$$\dot{\varphi}=\frac{1}{ma^2\cos^2\theta}p_1,\quad \dot{\theta}=\frac{1}{ma^2}p_2.$$

Ставимо $\varphi=q^1$, $\theta=q^2$. Кинетичку енергију сада можемо изразити у облику

$$T=\frac{1}{2ma^2}\left(\frac{1}{\cos^2 q^2}p_1^2+p_2^2\right),$$

па је Хамилтонова функција

$$H=T-U=\frac{1}{2ma^2}\left(\frac{p_1^2}{\cos^2 q^2}+p_2^2\right)-mqa\sin q^2.$$

Одговарајућа Пфафова форма ($\Phi\equiv X_i\,dx^i$) гласи

$$\Phi\equiv p_i\,dq^i+0\cdot dp_i-Hdt,$$

односно

$$\Phi\equiv p_1\,dq^1+p_2\,dq^2+0\cdot dp_1+0\cdot dp_2-$$
$$-\left[\frac{1}{2ma^2}\left(\frac{p_1^2}{\cos^2 q^2}+p_2^2\right)-mga\sin q^2\right]dt.$$

Пфафове једначине су облика

$$dX_i-\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}=0.$$

Ако овде ставимо $x^1=q^1$, $x^2=q^2$, биће прве две једначине

$$dp_1=0,$$

$$dp_2=\left(\frac{1}{ma^2}\frac{\sin q^2}{\cos^3 q^2}p_1^2+mga\cos q^2\right)dt.$$



За $x^3=p_1$, $x^4=p_2$, добијамо друге две једначине

$$0-\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}=0,\quad 0-\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}=0,$$

односно

$$dq^1=\frac{p_1}{ma^2\cos^2 q^2}dt,\quad dq^2=\frac{p_2}{ma^2}dt.$$

**Задатак 245.** (Одељак 42., задатак 2.). Материјалном систему од два степена слободе одговара дводимензиони конфигурациони простор са метричком формом

$$ds^2=\frac{1}{a+b(q^2)^2}(dq^1)^2+(dq^2)^2,$$

а кретање се изводи под дејством силе која има потенцијал

$$V=a_1+b_1(q^2)^2,$$

где су $a$, $b$, $a_1$, $b_1$ позитивне константе.

Написати односни елемент акције у облику Пфафове форме у канонским променљивима и одатле извести Хамилтонове једначине кретања овог система.

*Решење:* Кинетичка енергија посматраног система је

$$2T=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{1}{a+b(q^2)^2}(\dot{q}^1)^2+(\dot{q}^2)^2$$

а потенцијална је задана,

$$V=a_1+b_1(q^2)^2.$$

Генералисани импулси су

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^1}=\frac{1}{a+b(q^2)^2}\dot{q}^1,$$

$$p_2=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^2}=\dot{q}^2,$$

па су генералисане брзине

$$\dot{q}^1=[a+b(q^2)^2]p_1,\quad \dot{q}^2=p_2.$$

Ако ово заменимо у израз за кинетичку енергију, добијамо

$$T=\frac{1}{2}[a+b(q^2)^2](p_1)^2+\frac{1}{2}(p_2)^2,$$

тако да за Хамилтонову функцију можемо писати

$$H=T+V=\frac{1}{2}[a+b(q^2)^2](p_1)^2+\frac{1}{2}(p_2)^2+a_1+b_1(q^2)^2.$$

Пфафова форма (елемент акције) је

$$\Phi = p_1\, dq^1 + p_2\, dq^2 - H dt,$$

а одговарајуће Пфафове (канонске) једначине су

$$dp_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial q^1} = 0, \qquad dp_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial q^2} = 0,$$

$$0 - \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = 0, \qquad 0 - \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0.$$

Како је

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q^1} = -\frac{\partial H}{\partial q^1}\, dt = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q^2} = -\frac{\partial H}{\partial q^2}\, dt = -[bq^2 (p_1)^2 + 2\, b_1\, q^2]\, dt,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = dq^1 - \frac{\partial H}{\partial p_1}\, dt = dq^1 - [a + b\, (q^2)^2]\, p_1\, dt,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = dq^2 - \frac{\partial H}{\partial p_2}\, dt = dq^2 - p_2\, dt,$$

канонске једначине су, коначно,

$$dp_1 = 0$$

$$dp_2 = -[bq^2 (p_1)^2 + 2\, b_1\, q^2]\, dt,$$

$$dq^1 = [a + b\, (q^2)^2]\, p_1\, dt,$$

$$dq^2 = p_2\, dt,$$

што је и требало написати.

## 43. Тензор деформације. Линеарна дилатација. Површи деформације. Кубна дилатација

**Задатак 246.** (Одељак 43., задатак 1.). Показати да се тело креће као круто само кад је тензор деформације $\sigma_{ij}$ нула тензор.

*Решење*: Коваријантне координате тензора деформације су (видети одељак 43., једначину 12.)

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,\,j} + u_{j,\,i}).$$

Ради једноставности у извођењу доказа користићемо се правоуглим Декартовим координатама, имајући у виду да тако изведен доказ не губи ништа од своје општости.

Из једначине

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y^j} + \frac{\partial u_j}{\partial y^i}\right) = 0,$$



следи

(1) $$\frac{\partial u_i}{\partial y^j} = -\frac{\partial u_j}{\partial y^i}.$$

Диференцирањем ове једначине по $y^k$ добијамо

(2) $$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^j\, \partial y^k} = -\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^i\, \partial y^k}.$$

Међутим, како је, с обзиром на (1),

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^i\, \partial y^k} = \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial y^k}\right) = -\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y^k}\right) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^j\, \partial y^k},$$

једначину (2) можемо написати у облику

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^j\, \partial y^k} = -\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^j\, \partial y^k},$$

одакле следи

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^j\, \partial y^k} = 0.$$

Интеграцијом ове једначине добијамо

(3) $$\frac{\partial u_i}{\partial y^j} = \Omega_{ij},$$

где је $\Omega_{ij}$ константни тензор. На основу (1) следи да је $\Omega_{ij}$ антисиметрични тензор, тј.

$$\Omega_{ji} = \frac{\partial u_j}{\partial y^i} = -\frac{\partial u_i}{\partial y^j} = -\Omega_{ij}.$$

Ако једначину (3) интегралимо, добијамо

(4) $$u_i = \Omega_{ij}\, y^j + a_i$$

где је $a_i$ константни вектор.

Вектор $u_i$ у једначини (4) јесте вектор елементарног померања. Ако у тој једначини ставимо $\Omega_{ij} = 0$, добијамо

$$u_i = a_i$$

тј. вектор $a_i$ (с обзиром да је константа) одређује транслаторно померање тачака тела.

Ако, пак, у једначини (4) ставимо $a_i = 0$, добијамо

$$u_i = \Omega_{ij}\, y^j,$$

при чему коефицијенти $\Omega_{ij}$ (с обзиром да су константе) одређују елементарну ротацију крутог тела око утврђене тачке — координатног почетка (видети одељак 40., једначине 11. и 12.).

Према томе, можемо закључити, вектор елементарног померања (4) јесте вектор елементарног померања крутог тела. То значи да ће се тело кретати као круто само онда кад је тензор деформације нула тензор, што је и требало показати.

**Задатак 247.** (Одељак 43., задатак 2.). Показати да се детерминантна једначина

$$| \sigma_{ij} - \lambda g_{ij} | = 0,$$

где је $\sigma_{ij}$ тензор деформације а $g_{ij}$ метрички тензор, може после развијања написати у облику

$$\lambda^3 - \sigma\lambda^2 + s\lambda - \frac{\Delta}{g} = 0,$$

где је $\Delta = |\sigma_{ij}|$ детерминанта матрице тензора деформације, $\sigma$ кубна дилатација, $g = |g_{ij}|$, а $s$ збир главних минора у детерминанти $|g^{ik}\sigma_{kj}| = |\sigma_j^i|$.

*Напомена*: Горња једначина

$$\lambda^3 - \sigma\lambda^2 + s\lambda - \frac{\Delta}{g} = 0,$$

треба да гласи

$$\lambda^3 - \sigma\lambda^2 + \frac{s}{g}\lambda - \frac{\Delta}{g} = 0.$$

***Решење***: Детерминантну једначину

$$| \sigma_{ij} - \lambda g_{ij} | = 0,$$

можемо написати у облику (видети одељак 7., једначину 10.)

$$e^{ijk}(\sigma_{1i} - \lambda g_{1i})(\sigma_{2j} - \lambda g_{2j})(\sigma_{3k} - \lambda g_{3k}) = 0,$$

или у облику

$$e^{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{2j}\sigma_{3k} - e^{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{2j}\lambda g_{3k} - e^{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{3k}\lambda g_{2j} -$$
$$- e^{ijk}\sigma_{2j}\sigma_{3k}\lambda g_{1i} + \lambda^2 e^{ijk}\sigma_{1i}g_{2j}g_{3k} + \lambda^2 e^{ijk}\sigma_{2j}g_{1i}g_{3k} +$$
$$+ \lambda^2 e^{ijk}\sigma_{3k}g_{1i}g_{2j} - \lambda^3 e^{ijk}g_{1i}g_{2j}g_{3k} = 0.$$

Међутим, како је

$$e^{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{2j}\sigma_{3k} = |\sigma_{ij}| = \Delta, \qquad e^{ijk}g_{1i}g_{2j}g_{3k} = |g_{ij}| = g,$$

$$e^{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{2j}g_{3k} = s^{k3}g_{3k} = s_3^3,$$

$$e^{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{3k}g_{2j} = s^{j2}g_{2j} = s_2^2,$$

$$e^{ijk}\sigma_{2j}\sigma_{3k}g_{1i} = s^{i1}g_{1i} = s_1^1,$$

$$e^{ijk}\sigma_{2j}g_{1i}g_{3k} = G^{j2}\sigma_{2j} = g\,g^{j2}\sigma_{2j} = g\,\sigma_2^2,$$

$$e^{ijk}\sigma_{1i}g_{2j}g_{3k} = G^{i1}\sigma_{1i} = g\,g^{i1}\sigma_{1i} = g\,\sigma_1^1,$$

$$e^{ijk}\sigma_{3k}g_{1i}g_{2j} = G^{k3}\sigma_{3k} = g\,g^{k3}\sigma_{3k} = g\,\sigma_3^3,$$



где је $s^{ij}$ кофактор елемента $\sigma_{ji}$ у детерминанти $|\sigma_{ij}|$, $G^{ij}$ кофактор елемента $g_{ji}$ у детерминанти $g = |g_{ij}|$, тј. $G^{ij} = g\,g^{ij}$.

Према томе, детерминантну једначину сада можемо написати у облику

$$\Delta - \lambda^3 g + \lambda^2 g(\sigma_1^1 + \sigma_2^2 + \sigma_3^3) - \lambda(s_1^1 + s_2^2 + s_3^3) = 0,$$

где је $s_K^K$ кофактор елемента $\sigma_K^K$ у детерминанти $|\sigma_j^i|$, односно главни минор у детерминанти $|\sigma_j^i| = |g^{ik}\sigma_{kj}|$.

Како је, даље,

$$\sigma_1^1 + \sigma_2^2 + \sigma_3^3 = \sigma_i^i = g^{ij}\sigma_{ij} = \sigma,$$

где је $\sigma$ кубна дилатација, и

$$s_1^1 + s_2^2 + s_3^3 = s_i^i = g^{ij}s_{ij} = g_{ij}s^{ij} = s,$$

где је $s$ збир главних минора у детерминанти $|\sigma_j^i| = |g^{ik}\sigma_{kj}|$, добијамо

$$\lambda^3 - \sigma\lambda^2 + \frac{s}{g}\lambda - \frac{\Delta}{g} = 0.$$

## 44. Услови компатибилности

**Задатак 248.** (Одељак 44., задатак 1.). Извести геометријским путем услове компатибилности у генералисаним координатама.

***Решење***: Инфинитезимална деформација тела је одређена тзв. тензором релативне инфинитезималне деформације

(1) $$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

где су $u_{i,j}$ (градијенти вектора померања), па, према томе, и $\sigma_{ij}$ инфинитезималне величине.

Ако је у недеформисаној конфигурацији тела метрички тензор $g_{ij}$, тада је, у односу на исте променљиве, у деформисаној конфигурацији облика (видети одељак 44., једначину 11.)

(2) $$g'_{ij} = g_{ij} + 2\,\sigma_{ij}.$$

Кристофелови симболи прве врсте у односу на нови метрички тензор $g'_{ij}$ су

(3) $$[ij, k]' = [ij, k] + B_{ijk},$$

где смо увели ознаку

(4) $$B_{ijk} = \frac{\partial\sigma_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x^k}.$$

Кристофелови симболи друге врсте у односу на деформисану метрику су

(5) $$\left\{ {m \atop i\,j} \right\}' = g'^{mk}[ij, k]' = g'^{mk}[ij, k] + g'^{mk}B_{ikj},$$

где је $g'^{mk}$ контраваријантни основни тензор деформисане метрике.

Претпоставимо да је

$$g'^{mk} = g^{mk} + a^{mk}, \tag{6}$$

где су $a^{mk}$ инфинитезималне величине које треба одредити. Да бисмо их одредили, поћи ћемо од релације

$$g'^{mk} g'_{kl} = \delta_l^m,$$

односно

$$(g^{mk} + a^{mk})(g_{kl} + 2\,\sigma_{kl}) = \delta_l^m.$$

После множења, одавде добијамо

$$\delta_l^m + 2\,g^{mk}\sigma_{kl} + g_{kl}\,a^{mk} + 2\,a^{mk}\sigma_{kl} = \delta_l^m,$$

односно, ако изоставимо последњи члан на левој страни као малу величину вишег реда,

$$2\,g^{mk}\sigma_{kl} + g_{kl}\,a^{mk} = 0.$$

Одавде следи

$$a^{mk} = -2\,\sigma^{mk},$$

тако да (6) добија облик

$$g'^{mk} = g^{mk} - 2\,\sigma^{mk}. \tag{7}$$

Користећи (7), једначину (5) пишемо у облику

$$\begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix}' = (g^{mk} - 2\,\sigma^{mk})[ij, k] + (g^{mk} - 2\,\sigma^{mk})\,B_{ijk},$$

односно

$$\begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix} - 2\,\sigma^{mk}[ij, k] + g^{mk} B_{ijk}, \tag{8}$$

где смо члан $2\,\sigma^{mk} B_{ijk}$ изоставили као малу величину вишег реда, јер, у линеарној теорији механике континуума, кад су деформације инфинитезималне, претпостављамо да су и изводи тензора деформације инфинитезимале истог реда као и тензор деформације.

У механици континуума се претпоставља да се процес деформације одвија у тродимензионом еуклидском простору. Према томе, недеформисана конфигурација тела је еуклидска, тј. Риман-Кристофелов тензор $R_{lijk}$, рачунат у односу на метрички тензор $g_{ij}$, је идентички једнак нули,

$$R_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}[ik, l] - \frac{\partial}{\partial x^k}[ij, l] + \begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix}[kl, m] - \begin{Bmatrix} m \\ k\ i \end{Bmatrix}[jl, m] = 0. \tag{9}$$

На исти начин, с обзиром да тело процесом деформације не може „напустити“ еуклидски простор, мора бити и Риман-Кристофелов тензор $R'_{lijk}$, рачунат у односу на метрички тензор $g'_{ij}$ деформисане метрике, такође једнак нули, тј.

$$R'_{lijk} = 0. \tag{10}$$



Дакле, тензор деформације не може бити ма какав тензор, већ само такав који ће деформисану метрику (2) чинити метриком еуклидског простора. Према томе, шест услова компатибилности деформације добићемо ако са нулом изједначимо шест независних координата Риман-Кристофеловог тензора $R'_{lijk}$, рачунатог у односу на деформисану метрику $g'_{ij}$.

Да бисмо одредили координате тензора $R'_{lijk}$, поћи ћемо од релације

$$R'_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}[ik, l]' - \frac{\partial}{\partial x^k}[ij, l]' + \begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix}'[kl, m]' - \begin{Bmatrix} m \\ i\ k \end{Bmatrix}'[jl, m]'. \tag{11}$$

Ако у овој релацији искористимо (3) и (8), добијамо

$$\begin{aligned} R'_{lijk} = {} & \frac{\partial}{\partial x^j}([ik, l] + B_{ikl}) - \frac{\partial}{\partial x^k}([ij, l] + B_{ijl}) + \\ & + \left(\begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix} + g^{mr} B_{ijr} - 2\,\sigma^{mr}[ij, r]\right)([kl, m] + B_{klm}) - \\ & - \left(\begin{Bmatrix} m \\ i\ k \end{Bmatrix} + g^{mr} B_{ikr} - 2\,\sigma^{mr}[ik, r]\right)([jl, m] + B_{jlm}), \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} R'_{lijk} = {} & R_{lijk} + \frac{\partial}{\partial x^j} B_{ikl} - \frac{\partial}{\partial x^k} B_{ijl} + \begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix} B_{klm} - \begin{Bmatrix} m \\ i\ k \end{Bmatrix} B_{jlm} + \\ & + \begin{Bmatrix} m \\ k\ l \end{Bmatrix} B_{ijm} - \begin{Bmatrix} m \\ j\ l \end{Bmatrix} B_{ikm} - 2\,\sigma_{mr}\begin{Bmatrix} m \\ k\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ i\ j \end{Bmatrix} + 2\,\sigma_{mr}\begin{Bmatrix} m \\ j\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ i\ k \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

Ако сада, пођемо од релације

$$\sigma_{jk,\,i} = \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x^i} - \sigma_{rk}\begin{Bmatrix} r \\ j\ i \end{Bmatrix} - \sigma_{jr}\begin{Bmatrix} r \\ k\ i \end{Bmatrix},$$

тада је, одавде,

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x^i} = \sigma_{jk,\,i} + \sigma_{rk}\begin{Bmatrix} r \\ j\ i \end{Bmatrix} + \sigma_{jr}\begin{Bmatrix} r \\ k\ i \end{Bmatrix}, \tag{13}$$

па је, цикличким пермутацијама,

$$\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x^j} = \sigma_{ki,\,j} + \sigma_{ri}\begin{Bmatrix} r \\ k\ j \end{Bmatrix} + \sigma_{kr}\begin{Bmatrix} r \\ i\ j \end{Bmatrix}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^k} = \sigma_{ij,\,k} + \sigma_{rj}\begin{Bmatrix} r \\ i\ k \end{Bmatrix} + \sigma_{ir}\begin{Bmatrix} r \\ j\ k \end{Bmatrix}. \tag{15}$$

Ако (13) и (14) саберемо и од тога одузмемо (15), тада, на основу (4), добијамо

$$B_{ijk} = \sigma_{jk,\,i} + \sigma_{ki,\,j} - \sigma_{ij,\,k} + 2\,\sigma_{rk}\begin{Bmatrix} r \\ i\ j \end{Bmatrix}, \tag{16}$$

одакле је

$$\sigma_{jk,\,i}+\sigma_{ki,\,j}-\sigma_{ij,\,k}=B_{ijk}-2\,\sigma_{rk}{r \brace i\,j}. \tag{17}$$

На основу (16) је

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{ikl}}{\partial x^j}&=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sigma_{kl,\,i}+\sigma_{li,\,k}-\sigma_{ik,\,l}+2\,\sigma_{rl}{r \brace i\,k}\right)=\\&=\frac{\partial \sigma_{kl,\,i}}{\partial x^j}+\frac{\partial \sigma_{li,\,k}}{\partial x^j}-\frac{\partial \sigma_{ik,\,l}}{\partial x^j}+2\frac{\partial \sigma_{rl}}{\partial x^j}{r \brace i\,k}+2\,\sigma_{rl}\frac{\partial}{\partial x^j}{r \brace i\,k}.\end{aligned} \tag{18}$$

Из релације

$$\sigma_{kl,\,ij}=\frac{\partial \sigma_{kl,\,i}}{\partial x^j}-\sigma_{rl,\,i}{r \brace k\,j}-\sigma_{kr,\,i}{r \brace l\,j}-\sigma_{kl,\,r}{r \brace i\,j},$$

добијамо

$$\frac{\partial \sigma_{kl,\,i}}{\partial x^j}=\sigma_{kl,\,ij}+\sigma_{rl,\,i}{r \brace k\,j}+\sigma_{kr,\,i}{r \brace l\,j}+\sigma_{kl,\,r}{r \brace i\,j}. \tag{19}$$

На исти начин је, цикличким пермутацијама индекса $k$, $l$ и $i$,

$$\frac{\partial \sigma_{li,\,k}}{\partial x^j}=\sigma_{li,\,kj}+\sigma_{ri,\,k}{r \brace l\,j}+\sigma_{ir,\,k}{r \brace i\,j}+\sigma_{li,\,r}{r \brace k\,j}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik,\,l}}{\partial x^j}=\sigma_{ik,\,lj}+\sigma_{rk,\,l}{r \brace i\,j}+\sigma_{ir,\,l}{r \brace k\,j}+\sigma_{ik,\,r}{r \brace l\,j}. \tag{21}$$

Уношењем (19), (20) и (21) у (18), добијамо

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{ikl}}{\partial x^j}&=\sigma_{kl,\,ij}+\sigma_{li,\,kj}-\sigma_{ik,\,lj}+{m \brace i\,j}(\sigma_{kl,\,m}+\sigma_{lm,\,k}-\sigma_{mk,\,l})+\\&+{m \brace k\,j}(\sigma_{ml,\,i}+\sigma_{li,\,m}-\sigma_{im,\,l})+{m \brace l\,j}(\sigma_{km,\,i}+\sigma_{mi,\,k}-\sigma_{ik,\,m})+\\&+2\frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x^j}{m \brace k\,i}+2\,\sigma_{ml}\frac{\partial}{\partial x^j}{m \brace k\,i}.\end{aligned} \tag{22}$$

Разменом места индексима $k$ и $j$, одавде лако добијамо

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{ijl}}{\partial x^k}&=\sigma_{jl,\,ik}+\sigma_{li,\,kj}-\sigma_{ij,\,lk}+{m \brace i\,k}(\sigma_{jl,\,m}+\sigma_{lm,\,j}-\sigma_{mj,\,l})+\\&+{m \brace k\,j}(\sigma_{ml,\,i}+\sigma_{li,\,m}-\sigma_{im,\,l})+{m \brace l\,k}(\sigma_{jm,\,i}+\sigma_{mi,\,j}-\sigma_{ij,\,m})+\\&+2\frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x^k}{m \brace j\,i}+2\,\sigma_{ml}\frac{\partial}{\partial x^k}{m \brace j\,i}.\end{aligned} \tag{23}$$



Користећи релацију (17), (22) и (23) можемо написати у облику

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{ikl}}{\partial x^j}&=\sigma_{kl,\,ij}+\sigma_{li,\,kj}-\sigma_{ik,\,lj}+{m \brace i\,j}B_{mkl}-2\,\sigma_{rl}{m \brace i\,j}{r \brace m\,k}+\\&+{m \brace k\,j}B_{iml}-2\,\sigma_{rl}{m \brace k\,j}{r \brace m\,i}+{m \brace l\,j}B_{ikm}-2\,\sigma_{rm}{r \brace k\,i}{m \brace l\,j}+\\&+2\frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x^j}{m \brace k\,i}+2\,\sigma_{ml}\frac{\partial}{\partial x^j}{m \brace k\,i},\end{aligned} \tag{24}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{ijl}}{\partial x^k}&=\sigma_{jl,\,ik}+\sigma_{li,\,kj}-\sigma_{ij,\,lk}+{m \brace i\,k}B_{mjl}-2\,\sigma_{rl}{m \brace i\,k}{r \brace m\,j}+\\&+{m \brace k\,j}B_{iml}-2\,\sigma_{rl}{m \brace k\,j}{r \brace m\,i}+{m \brace l\,k}B_{ijm}-2\,\sigma_{rm}{r \brace j\,i}{m \brace l\,k}+\\&+2\frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x^k}{m \brace j\,i}+2\,\sigma_{ml}\frac{\partial}{\partial x^k}{m \brace j\,i}.\end{aligned} \tag{25}$$

Уношењем (24) и (25) у (12), добивамо

$$\begin{aligned}R'_{lijk}&=\sigma_{kl,\,ij}+\sigma_{li,\,kj}-\sigma_{ik,\,lj}+{m \brace i\,j}B_{mkl}-2\,\sigma_{rl}{m \brace i\,j}{r \brace m\,k}+\\&+{m \brace k\,j}B_{iml}-2\,\sigma_{rl}{m \brace k\,j}{r \brace m\,i}+{m \brace l\,j}B_{ikm}-2\,\sigma_{rm}{r \brace k\,i}{m \brace l\,j}+\\&+2\frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x^j}{m \brace k\,i}+2\,\sigma_{ml}\frac{\partial}{\partial x^j}{m \brace k\,i}-\\&-\sigma_{jl,\,ik}-\sigma_{li,\,kj}+\sigma_{ij,\,lk}-{m \brace i\,k}B_{mjl}+2\,\sigma_{rl}{m \brace i\,k}{r \brace m\,j}-\\&-{m \brace k\,j}B_{iml}+2\,\sigma_{rl}{m \brace k\,j}{r \brace m\,i}-{m \brace l\,k}B_{ijm}+2\,\sigma_{rm}{m \brace l\,k}{r \brace i\,j}-\\&-2\frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x^k}{m \brace i\,j}-2\,\sigma_{ml}\frac{\partial}{\partial x^k}{m \brace j\,i}+\\&+{m \brace k\,l}B_{ijm}-{m \brace j\,l}B_{ikm}+{m \brace i\,j}B_{klm}-{m \brace i\,k}B_{jlm}-\\&-2\,\sigma_{mr}{m \brace k\,l}{r \brace i\,j}+2\,\sigma_{mr}{m \brace j\,l}{r \brace i\,k}+R_{lijk},\end{aligned}$$

односно, после потирања одговарајућих чланова

$$
\begin{aligned}
R'_{lijk} &= R_{lijk} + \sigma_{kl,\,ij} + \sigma_{ij,\,kl} - \sigma_{ik,\,lj} - \sigma_{jl,\,ik} + \\
&+ \left(B_{mkl} - 2\frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x^k}\right)\begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix} - \left(B_{mjl} - 2\frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x^j}\right)\begin{Bmatrix} m \\ k\ i \end{Bmatrix} - 2\,\sigma_{rl}\begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ k\ m \end{Bmatrix} + \\
&+ 2\,\sigma_{ml}\frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} m \\ k\ i \end{Bmatrix} + 2\,\sigma_{rl}\begin{Bmatrix} m \\ i\ k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ j\ m \end{Bmatrix} - 2\,\sigma_{ml}\frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix} + \\
&+ \begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix} B_{klm} - \begin{Bmatrix} m \\ i\ k \end{Bmatrix} B_{jlm}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Како je, међутим,

$$B_{mkl} - 2\frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x^k} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x^l} - 2\frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x^k} = -B_{klm},$$

и такође

$$B_{mjl} - 2\frac{\partial \sigma_{ml}}{\partial x^j} = -B_{jlm},$$

биће, после даљег потирања,

$$
\begin{aligned}
R'_{lijk} &= R_{lijk} + \sigma_{kl,\,ij} + \sigma_{ij,\,kl} - \sigma_{ik,jl} - \sigma_{jl,\,ik} + \\
&+ 2\,\sigma_{rl}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} r \\ k\ i \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} r \\ j\ i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m \\ i\ k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ m\ j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} m \\ i\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ k\ m \end{Bmatrix}\right),
\end{aligned}
$$

односно

$$R'_{lijk} = R_{lijk} + 2\,\sigma_{rl}\,R^{r}_{\cdot ijk} + \sigma_{kl,\,ij} + \sigma_{ij,\,kl} - \sigma_{ik,\,jl} - \sigma_{jl,\,ik}.$$

Према томе, с обзиром на (9) и (10), услови компатибилности су

$$\sigma_{kl,\,ij} + \sigma_{ij,\,kl} - \sigma_{ik,\,jl} - \sigma_{jl,\,ik} = 0, \tag{27}$$

које можемо изразити и у облику

$$\varepsilon^{irp}\,\varepsilon^{jsq}\,\sigma_{ij,\,rs} = 0.$$

**Задатак 249**. (Одељак 44., задатак 2.). Изразити услове компатибилности у сферним поларним координатама.

***Решење***: Услови компатибилности у генералисаним координатама су (видети претходни задатак)

$$\varepsilon^{irp}\,\varepsilon^{jsq}\,\sigma_{ij,\,rs} = 0,$$

односно

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{ir1}\,\varepsilon^{js1}\,\sigma_{ij,\,rs} = 0, \\
&\varepsilon^{ir1}\,\varepsilon^{js2}\,\sigma_{ij,\,rs} = 0, \\
&\varepsilon^{ir1}\,\varepsilon^{js3}\,\sigma_{ij,\,rs} = 0, \\
&\varepsilon^{ir2}\,\varepsilon^{js2}\,\sigma_{ij,\,rs} = 0, \\
&\varepsilon^{ir2}\,\varepsilon^{js3}\,\sigma_{ij,\,rs} = 0, \\
&\varepsilon^{ir3}\,\varepsilon^{js3}\,\sigma_{ij,\,rs} = 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$



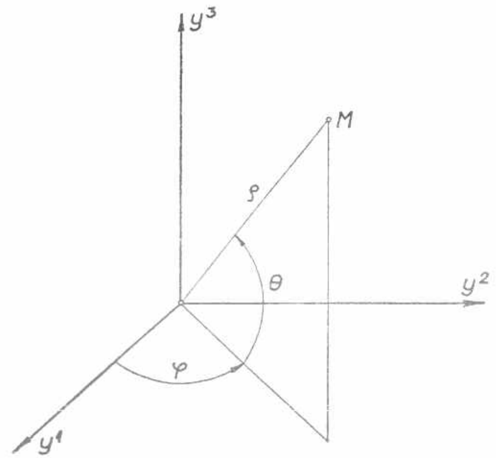
У овим једначинама, с обзиром да je $\varepsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,e^{ijk}$, можемо Ричијев антисиметрични тензор $\varepsilon^{ijk}$ заменити е-системом $e^{ijk}$, тако да у развијеном облику изгледају

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{22,33} - 2\,\sigma_{23,23} + \sigma_{33,22} = 0, \\
&\sigma_{12,33} - \sigma_{23,13} - \sigma_{13,23} + \sigma_{33,12} = 0, \\
&\sigma_{12,23} - \sigma_{22,13} - \sigma_{13,22} + \sigma_{23,12} = 0, \\
&\sigma_{11,33} - 2\,\sigma_{13,13} + \sigma_{33,11} = 0, \\
&\sigma_{11,23} - \sigma_{12,13} - \sigma_{13,12} + \sigma_{23,11} = 0, \\
&\sigma_{11,22} - 2\,\sigma_{12,12} + \sigma_{22,11} = 0,
\end{aligned} \tag{2}
$$

где су други коваријантни изводи тензора деформације

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij,\,kl} &= \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^l} - \frac{\partial \sigma_{rj}}{\partial x^l}\begin{Bmatrix} r \\ i\ k \end{Bmatrix} - \frac{\partial \sigma_{ir}}{\partial x^l}\begin{Bmatrix} r \\ j\ k \end{Bmatrix} - \frac{\partial \sigma_{rj}}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} r \\ i\ l \end{Bmatrix} - \frac{\partial \sigma_{ir}}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} r \\ j\ l \end{Bmatrix} - \\
&- \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} r \\ k\ l \end{Bmatrix} - \sigma_{rj}\frac{\partial}{\partial x^l}\begin{Bmatrix} r \\ i\ k \end{Bmatrix} - \sigma_{ir}\frac{\partial}{\partial x^l}\begin{Bmatrix} r \\ j\ k \end{Bmatrix} + \sigma_{rj}\left(\begin{Bmatrix} r \\ s\ k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ i\ l \end{Bmatrix} + \right. \\
&\left. + \begin{Bmatrix} r \\ i\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ k\ l \end{Bmatrix}\right) + \sigma_{ir}\left(\begin{Bmatrix} r \\ s\ k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ j\ l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r \\ j\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ k\ l \end{Bmatrix}\right) + \\
&+ \sigma_{rs}\left(\begin{Bmatrix} r \\ j\ k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ i\ l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r \\ i\ k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ j\ l \end{Bmatrix}\right).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Узмимо да су сферне поларне координате $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \theta$, тако да je




$$
\begin{aligned}
y^1 &= x^1 \cos x^2 \cos x^3, \\
y^2 &= x^1 \sin x^2 \cos x^3, \\
y^3 &= x^1 \sin x^3.
\end{aligned}
$$

На основу овога добијамо

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1}=\cos x^2\cos x^3,\qquad \frac{\partial y^1}{\partial x^2}=-x^1\sin x^2\cos x^3,\qquad \frac{\partial y^1}{\partial x^3}=-x^1\cos x^2\sin x^3,$$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^1}=\sin x^2\cos x^3,\qquad \frac{\partial y^2}{\partial x^2}=x^1\cos x^2\cos x^3,\qquad \frac{\partial y^2}{\partial x^3}=-x^1\sin x^2\sin x^3,$$

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^1}=\sin x^3,\qquad \frac{\partial y^3}{\partial x^2}=0,\qquad \frac{\partial y^3}{\partial x^3}=x^1\cos x^3.$$

По трансформационом обрасцу

$$g_{ij}=\sum_k\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^j},$$

за координате метричког тензора добијамо

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (x^1)^2\cos x^3 & 0\\ 0 & 0 & (x^1)^2\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{(x^1)^2\cos^2 x^3} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{(x^1)^2}\end{Bmatrix}.$$

За координате Кристофеловог симбола прве врсте, по обрасцу

$$[ij,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

добијамо

$$[12,2]=[21,2]=x^1\cos^2 x^3,\qquad [22,1]=-x^1\cos^2 x^3,$$

$$[32,2]=[23,2]=-(x^1)^2\sin x^3\cos x^3,\qquad [22,3]=(x^1)^2\sin x^3\cos x^3,$$

$$[13,3]=[31,3]=x^1,\qquad [33,1]=-x^1,$$

док су све остале координате једнаке нули.

За координате Кристофеловог симбола друге врсте, по обрасцу

$$\begin{Bmatrix}i\\ j\;k\end{Bmatrix}=g^{il}[jk,l],$$

добијамо

$$\begin{Bmatrix}1\\ 2\;2\end{Bmatrix}=-x^1\cos^2 x^3,\qquad \begin{Bmatrix}1\\ 3\;3\end{Bmatrix}=-x^1,$$

$$\begin{Bmatrix}2\\ 1\;2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\ 2\;1\end{Bmatrix}=\frac{1}{x^1},$$

$$\begin{Bmatrix}2\\ 3\;2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\ 2\;3\end{Bmatrix}=-\operatorname{tg} x^3,$$

$$\begin{Bmatrix}3\\ 2\;2\end{Bmatrix}=\sin x^3\cos x^3,$$

$$\begin{Bmatrix}3\\ 1\;3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\ 3\;1\end{Bmatrix}=\frac{1}{x^1},$$

док су све остале координате једнаке нули.



Користећи ове изразе за координате Кристофеловог симбола друге врсте, за друге коваријантне изводе координата тензора деформације, на основу (3), добијамо

$$\sigma_{22,33}=\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial(x^3)^2}+x^1\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x^1}+4\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x^3}+6\operatorname{tg}^2 x^3\cdot\sigma_{22},$$

$$\sigma_{23,23}=\frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial x^2\,\partial x^3}+x^1\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^2}+x^1\cos^2 x^3\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x^3}+\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x^3}+$$

$$+2\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^2}-\sin x^3\cos x^3\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x^3}+(x^1)^2\cos^2 x^3\,\sigma_{11}-$$

$$-x^1\sin x^3\cos x^3\,\sigma_{13}+3\operatorname{tg}^2 x^3\,\sigma_{22}-\sigma_{33},$$

$$\sigma_{33,22}=\frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial(x^2)^2}+4\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x^2}+x^1\cos^2 x^3\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x^1}-$$

$$-\sin x^3\cos x^3\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x^3}+2\operatorname{tg}^2 x^3\,\sigma_{22}-2\,\sigma_{33},$$

$$\sigma_{12,33}=\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial(x^3)^2}-\frac{2}{x^1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^3}+2\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^3}-x^1\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^1}+$$

$$+(2\operatorname{tg}^2 x^3-1)\,\sigma_{12}-\frac{2}{x^1}\operatorname{tg} x^3\,\sigma_{23},$$

$$\sigma_{23,13}=\frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial x^1\,\partial x^3}+x^1\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^1}+\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^1}-\frac{3}{x^1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^3}-2\,\sigma_{12}-\frac{3}{x^1}\operatorname{tg} x^3\,\sigma_{23},$$

$$\sigma_{13,23}=\frac{\partial^2\sigma_{13}}{\partial x^2\,\partial x^3}+x^1\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x^2}+\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^3}+\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x^2}-\frac{1}{x^1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^3}-$$

$$-\frac{1}{x^1}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x^2}+(\operatorname{tg}^2 x^3-1)\,\sigma_{12}-\frac{3}{x^1}\operatorname{tg} x^3\,\sigma_{23},$$

$$\sigma_{33,12}=\frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x^1\,\partial x^2}+2\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^1}-\frac{3}{x^1}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x^2}-\frac{6}{x^1}\operatorname{tg} x^3\,\sigma_{23},$$

$$\sigma_{12,23}=\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2\,\partial x^3}+x^1\cos^2 x^3\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x^3}+2\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^2}-\sin x^3\cos x^3\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x^3}-$$

$$-\frac{1}{x^1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x^3}-\frac{1}{x^1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^2}-(1+\cos^2 x^3)\,\sigma_{13}-\frac{2}{x^1}\operatorname{tg} x^3\,\sigma_{22}+\frac{1}{x^1}\sin x^3\cos x^3\,\sigma_{33},$$

$$\sigma_{22,13}=\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x^1\,\partial x^3}+2\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x^1}-\frac{3}{x^1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x^3}-\frac{6}{x^1}\operatorname{tg} x^3\,\sigma_{22},$$

$$\sigma_{13,22}=\frac{\partial^2\sigma_{13}}{\partial(x^2)^2}+2\operatorname{tg} x^3\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^2}-\frac{2}{x^1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^2}+x^1\cos^2 x^3\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x^1}-$$

$$-\sin x^3\cos x^3\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x^3}-\frac{2}{x^1}\operatorname{tg} x^3\,\sigma_{22}-\sigma_{13},$$

$$\sigma_{23,12}=\frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial x^1\,\partial x^2}+x^1\cos^2 x^3\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x^1}+\operatorname{tg}x^3\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x^1}-\frac{3}{x^1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^2}-$$

$$-\sin x^3\cos x^3\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x^1}-2\cos^2 x^3\,\sigma_{13}-\frac{2}{x^1}\operatorname{tg}x^3\,\sigma_{22}+\frac{3}{x^1}\sin x^3\cos x^3\,\sigma_{33},$$

$$\sigma_{11,33}=\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial(x^3)^2}+x^1\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x^1}-\frac{4}{x^1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x^3}-2\sigma_{11}+\frac{2}{(x^1)^2}\sigma_{33},$$

$$\sigma_{13,13}=\frac{\partial^2\sigma_{13}}{\partial x^1\,\partial x^3}+x^1\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x^1}-\frac{2}{x^1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x^3}-\frac{1}{x^1}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x^1}-\sigma_{11}+\frac{3}{(x^1)^2}\sigma_{33},$$

$$\sigma_{33,11}=\frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial(x^1)^2}-\frac{4}{x^1}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x^1}+\frac{6}{(x^1)^2}\sigma_{33},$$

$$\sigma_{11,23}=\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2\,\partial x^3}+\operatorname{tg}x^3\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x^2}-\frac{2}{x^1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^3}-\frac{2}{x^1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x^2}-$$

$$-\frac{2}{x^1}\operatorname{tg}x^3\,\sigma_{12}+\frac{2}{(x^1)^2}\sigma_{23},$$

$$\sigma_{12,13}=\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^1\,\partial x^3}+\operatorname{tg}x^3\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^1}-\frac{2}{x^1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^3}-\frac{1}{x^1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^1}-\frac{1}{x^1}\operatorname{tg}x^3\,\sigma_{12}+\frac{3}{(x^1)^2}\sigma_{23},$$

$$\sigma_{13,12}=\frac{\partial^2\sigma_{13}}{\partial x^1\,\partial x^2}+\operatorname{tg}x^3\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^1}-\frac{2}{x^1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x^2}-\frac{1}{x^1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^1}-\frac{2}{x^1}\operatorname{tg}x^3\,\sigma_{12}+\frac{2}{(x^1)^2}\sigma_{23},$$

$$\sigma_{23,11}=\frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial(x^1)^2}-\frac{4}{x^1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x^1}+\frac{6}{(x^1)^2}\sigma_{23},$$

$$\sigma_{11,22}=\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial(x^2)^2}+x^1\cos^2 x^3\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x^1}-\sin x^3\cos x^3\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x^3}-\frac{4}{x^1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^2}-$$

$$-2\cos^2 x^3\,\sigma_{11}+\frac{4}{x^1}\sin x^3\cos x^3\,\sigma_{13}+\frac{2}{(x^1)^2}\sigma_{22},$$

$$\sigma_{12,12}=\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^1\,\partial x^2}+x^1\cos^2 x^3\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x^1}-\frac{1}{x^1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^2}-\sin x^3\cos x^3\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x^1}-$$

$$-\frac{1}{x^1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x^1}+x^1\cos^2 x^3\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^1}-\sin x^3\cos x^3\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x^3}-\cos^2 x^3\,\sigma_{11}+$$

$$+\frac{2}{x^1}\sin x^3\cos x^3\,\sigma_{13}+\frac{2}{(x^1)^2}\sigma_{22}+\frac{1}{x^1}\sin x^3\cos x^3\,\sigma_{23},$$

$$\sigma_{22,11}=\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial(x^1)^2}-\frac{4}{x^1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x^1}+\frac{6}{(x^1)^2}\sigma_{22}.$$



Ако, сада, ове изразе унесемо у једначине (2), и при томе пишемо $x^1=\rho$, $x^2=\varphi$ и $x^3=\theta$, добијамо следећих шест услова компатибилности:

1)
$$\frac{\partial^2\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\theta^2}-2\frac{\partial^2\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\varphi\,\partial\theta}+\frac{\partial^2\sigma_{\theta\theta}}{\partial\varphi^2}-2\rho\frac{\partial\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}-2\rho\cos^2\theta\frac{\partial\sigma_{\rho\theta}}{\partial\theta}+\rho\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\rho}+$$

$$+4\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+2\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}-4\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+\rho\cos^2\theta\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\rho}+$$

$$+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}-2\rho^2\cos^2\theta\,\sigma_{\rho\rho}+2\rho\sin\theta\cos\theta\,\sigma_{\rho\theta}+2\operatorname{tg}^2\theta\,\sigma_{\varphi\varphi}=0,$$

2)
$$\frac{\partial^2\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\rho\,\partial\theta}-\frac{\partial^2\sigma_{\rho\theta}}{\partial\varphi\,\partial\theta}+\frac{\partial^2\sigma_{\theta\theta}}{\partial\rho\,\partial\varphi}-\rho\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\varphi}-2\rho\frac{\partial\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\rho}+$$

$$+\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\theta}-\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\sigma_{\rho\theta}}{\partial\varphi}+\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\theta}-\frac{2}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\varphi}=0,$$

3)
$$\frac{\partial^2\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\varphi\,\partial\theta}-\frac{\partial^2\sigma_{\rho\theta}}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\rho\,\partial\theta}+\frac{\partial^2\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\rho\,\partial\varphi}+\rho\cos^2\theta\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\theta}-\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}-$$

$$-\frac{2}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\rho}-3\cos^2\theta\cdot\sigma_{\rho\theta}+\frac{4}{\rho}\operatorname{tg}\theta\,\sigma_{\varphi\varphi}+$$

$$+\frac{4}{\rho}\sin\theta\cos\theta\cdot\sigma_{\theta\theta}=0,$$

4)
$$\frac{\partial^2\sigma_{\rho\rho}}{\partial\theta^2}-2\frac{\partial^2\sigma_{\rho\theta}}{\partial\rho\,\partial\theta}-\frac{\partial^2\sigma_{\theta\theta}}{\partial\rho^2}-\rho\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho^2}\sigma_{\theta\theta}=0,$$

5)
$$\frac{\partial^2\sigma_{\rho\rho}}{\partial\varphi\,\partial\theta}-\frac{\partial^2\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\rho\,\partial\theta}-\frac{\partial^2\sigma_{\rho\theta}}{\partial\rho\,\partial\varphi}+\frac{\partial^2\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\rho^2}+\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\varphi}-2\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\rho}+$$

$$+\frac{1}{\rho}\operatorname{tg}\theta\,\sigma_{\rho\varphi}+\frac{3}{\rho^2}\sigma_{\varphi\theta}=0,$$

6)
$$\frac{\partial^2\sigma_{\rho\rho}}{\partial\varphi^2}-2\frac{\partial^2\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\rho\,\partial\varphi}+\frac{\partial^2\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\rho^2}-\rho\cos^2\theta\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho}-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\theta}-$$

$$-2\rho\cos^2\theta\frac{\partial\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\theta}+$$

$$+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\sigma_{\rho\theta}}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\rho}+\frac{4}{\rho^2}\sigma_{\varphi\varphi}-\frac{2}{\rho}\sin\theta\cos\theta\,\sigma_{\varphi\theta}=0.$$

*Напомена.* У овом задатку смо изразили услове компатибилности у сферним поларним координатама, при чему у њима фигуришу коваријантне координате тензора деформације. Међутим, ми можемо, по потреби, коваријантне координате тензора деформације изразити преко контраваријантних или физичких.

## 45. Тензор напона. Навијеове једначине. Површи напона

**Задатак 250**. (Одељак 45., задатак 1.). У правоуглим Декартовим координатама $y^i$ напонско стање је одређено са $\theta_{11}=\text{const.}$, а све остале координате тензора напона једнаке су нули. Одредити свих шест координата тензора напона у сферним поларним координатама $r$, $\theta$, $\varphi$.

***Решење***: У правоуглом Декартовом систему координата, координате тензора напона су

$$\{\theta_{ij}\}=\begin{Bmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Bmatrix},\qquad a=\text{const.}$$

У систему сферних поларних координата, координате тензора напона ће бити

$$\overline{\theta}_{ij}=\theta_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}. \tag{1}$$

С обзиром на везе између Декартових правоуглих и сферних координата, имамо (видети задатак 224.)

$$\left\{\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right\}=\begin{Bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\end{Bmatrix},$$

па је, на основу (1),

$$\overline{\theta}_{11}=\theta_{11}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}=a\cos^2\theta\cos^2\varphi,$$

$$\overline{\theta}_{12}=\overline{\theta}_{21}=\theta_{11}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^2}=-ar\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi,$$

$$\overline{\theta}_{13}=\overline{\theta}_{31}=\theta_{11}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^3}=-ar\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\overline{\theta}_{22}=\theta_{11}\frac{\partial y^1}{\partial x^2}\frac{\partial y^1}{\partial x^2}=ar^2\sin^2\theta\cos^2\varphi,$$

$$\overline{\theta}_{23}=\overline{\theta}_{32}=\theta_{11}\frac{\partial y^1}{\partial x^2}\frac{\partial y^1}{\partial x^3}=ar^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\overline{\theta}_{33}=\theta_{11}\frac{\partial y^1}{\partial x^3}\frac{\partial y^1}{\partial x^3}=ar^2\cos^2\theta\sin^2\varphi.$$

**Задатак 251**. (Одаљак 45., задатак 2.). Нека у Декартовим правоуглим координатама напонско стање у неком телу буде одређено са $\theta_{\alpha 3}=0$ $(\alpha=1,\ 2)$, $\theta_{33}=0$. Показати да ће Навијеове једначине равнотеже бити задовољене у случају одсуства спољашњих запреминских сила, ако се стави

$$\theta_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\rho}\varepsilon_{\beta\sigma}\psi_{,\rho\sigma},\qquad(\alpha,\beta=1,\ 2),$$

где је $\psi$ произвољна функција. Показати да то даје

$$\theta_{11}=\psi_{,22};\qquad \theta_{12}=-\psi_{,12};\qquad \theta_{22}=\psi_{11}.$$



***Решење***: У случају одсуства спољашњих запреминских сила Навијеове једначине равнотеже имају облик

$$\theta_{ij,j}=0, \tag{1}$$

где се врши сумирање по поновљеним индексима (Декартов систем координата).

С обзиром да је

$$\theta_{\alpha 3}=0,\qquad(\alpha=1,\ 2),\qquad \theta_{33}=0,$$

једначину (1) можемо написати у облику

$$\theta_{\alpha\beta,\beta}=0,\qquad(\alpha,\ \beta=1,\ 2). \tag{2}$$

Ако узмемо да је

$$\theta_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\rho}\varepsilon_{\beta\sigma}\psi_{,\rho\sigma},\qquad(\alpha,\ \beta=1,\ 2), \tag{3}$$

где је $\psi$ произвољна скаларна функција, и то заменимо у једначину (2), добијамо

$$\varepsilon_{\alpha\rho}\varepsilon_{\beta\sigma}\psi_{,\rho\sigma\beta}=0. \tag{4}$$

Међутим, како је $\varepsilon_{\beta\sigma}=-\varepsilon_{\sigma\beta}$ и $\psi_{,\rho\sigma\beta}=\psi_{,\rho\beta\sigma}$, једначина (4) је идентички задовољена, тј.

$$\varepsilon_{\alpha\rho}\varepsilon_{\beta\sigma}\psi_{,\rho\sigma\beta}\equiv 0, \tag{5}$$

што значи да су Навијеове једначине равнотеже задовољене ако тензор напона има облик (3).

Из једначине (3) непосредно следи

$$\theta_{11}=\varepsilon_{1\rho}\varepsilon_{1\sigma}\psi_{,\rho\sigma}=\varepsilon_{12}\varepsilon_{12}\psi_{,22}=\psi_{,22},$$

$$\theta_{12}=\varepsilon_{1\rho}\varepsilon_{2\sigma}\psi_{,\rho\sigma}=\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}\psi_{,12}=-\psi_{,12},$$

$$\theta_{22}=\varepsilon_{2\rho}\varepsilon_{2\sigma}\psi_{,\rho\sigma}=\varepsilon_{21}\varepsilon_{21}\psi_{,11}=\psi_{,11},$$

јер је $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=0$ и $\varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}=1$.

## 46. Хуков закон. Изотропни тензор еластичности

**Задатак 252**. (Одељак 46., задатак 1.). Ако вредности $\sum_{ij}$ из једначина (34) унесемо у услове компатибилности (§ 44, 16) у Декартовом облику, добићемо да у хомогеном изотропном телу које је у равнотежи под дејством спољашњих сила $Y_i$, инваријанта $\theta$ задовољава наредну парцијалну диференцијалну једначину

$$(1-\varkappa)\,\Delta\theta=(1+\varkappa)\,\rho\,Y^i{}_{,i}.$$

***Решење:*** Једначина (34), која изражава везу између тензора деформације и тензора напона (Хуков закон), има облик (видети одељак 46., једначину 34.)

$$\sum_{ij}=\frac{1}{E}\,[(1+\varkappa)\,\theta_{ij}-\varkappa\delta_{ij}\,\theta]. \tag{1}$$

Услови компатибилности у Декартовим координатама су (видети одељак 44., једначину 16.)

$$(2)\qquad \Sigma_{ij,lk}-\Sigma_{lj,ki}-\Sigma_{ki,jl}+\Sigma_{lk,ij}=0.$$

Диференцирањем и одговарајућом изменом индекса из (1) добијамо

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{ij,kl}=\frac{1}{E}\,[(1+\varkappa)\,\theta_{ij,kl}-\varkappa\delta_{ij}\,\theta_{,kl}],\\
&\Sigma_{lj,ki}=\frac{1}{E}\,[(1+\varkappa)\,\theta_{lj,ki}-\varkappa\delta_{lj}\,\theta_{,ki}],\\
(3)\qquad &\Sigma_{ki,jl}=\frac{1}{E}\,[(1+\varkappa)\,\theta_{ki,jl}-\varkappa\delta_{ki}\,\theta_{,jl}],\\
&\Sigma_{lk,ij}=\frac{1}{E}\,[(1+\varkappa)\,\theta_{lk,ij}-\varkappa\delta_{lk}\,\theta_{,ij}].
\end{aligned}$$

Заменом једначина (3) у (2) добијамо

$$(1+\varkappa)\,\theta_{ij,lk}-\varkappa\delta_{ij}\,\theta_{,kl}-(1+\varkappa)\,\theta_{lj,ki}+\varkappa\delta_{lj}\,\theta_{,ki}-(1+\varkappa)\,\theta_{ki,jl}+$$
$$+\varkappa\delta_{ki}\,\theta_{,jl}+(1+\varkappa)\,\theta_{lk,ij}-\varkappa\delta_{lk}\,\theta_{,ij}=0.$$

Ако, сада, у овој једначини извршимо контракцију по индексима $j$ и $l$, она постаје

$$(1+\varkappa)\,\theta_{ij,jk}-\varkappa\delta_{ij}\,\theta_{,jk}-(1+\varkappa)\,\theta_{jj,ki}+\varkappa\delta_{jj}\,\theta_{,ki}-(1+\varkappa)\,\theta_{ki,jj}+$$
$$+\varkappa\delta_{ki}\,\theta_{,jj}+(1+\varkappa)\,\theta_{jk,ij}-\varkappa\delta_{jk}\,\theta_{,ij}=0,$$

односно

$$(1+\varkappa)\,\theta_{ij,jk}-\varkappa\theta_{,ik}-(1+\varkappa)\,\theta_{,ik}+3\,\varkappa\theta_{,ik}-(1+\varkappa)\,\theta_{ik,jj}+$$
$$+\varkappa\delta_{ik}\,\Delta\theta+(1+\varkappa)\,\theta_{jk,ij}-\varkappa\theta_{,ij}=0,$$

што се своди на

$$(1+\varkappa)\,\theta_{ij,jk}+\varkappa\theta_{,ik}-(1+\varkappa)\,\theta_{,ik}-(1+\varkappa)\,\theta_{ik,jj}+\varkappa\delta_{ik}\,\Delta\theta+(1+\varkappa)\,\theta_{jk,ij}=0.$$

Ако, даље, извршимо контракцију по индексима $i$ и $k$, добијамо

$$(1+\varkappa)\,\theta_{ij,ij}+\varkappa\Delta\theta-(1+\varkappa)\,\Delta\theta-(1+\varkappa)\,\Delta\theta+3\,\varkappa\Delta\theta+(1+\varkappa)\,\theta_{ij,ij}=0,$$

односно

$$(4)\qquad (1+\varkappa)\,\theta_{ij,ij}-(1+\varkappa)\,\Delta\theta+2\,\varkappa\Delta\theta=0.$$

Међутим, из једначине равнотеже

$$\theta_{ij,j}=\rho Y_i,$$

следи

$$\theta_{ij,ij}=\rho Y_{i,i},$$



па за (4) добијамо

$$(1+\varkappa)\,\rho\,Y_{i,i}-(1+\varkappa)\,\Delta\theta+2\,\varkappa\Delta\theta=0,$$

или

$$(1+\varkappa)\,\rho\,Y_{i,i}-\Delta\theta+\varkappa\Delta\theta=0.$$

Ову једначину можемо писати и у облику

$$(1+\varkappa)\,\rho\,Y_{i,i}-(1-\varkappa)\,\Delta\theta=0,$$

односно

$$(1-\varkappa)\,\Delta\theta=(1+\varkappa)\,\rho Y^i{}_{,i}.$$

**Задатак 253.** (Одељак 46., задатак 2.). Написати Навијеове једначине у сферним поларним координатама $r$, $\theta$, $\varphi$.

*Решење:* У произвољним генералисаним координатама Навијеове једначине (једначине равнотеже) су облика (видети одељак 45., једначину 16.)

$$(1)\qquad \rho\,X^i+\vartheta^{ij}{}_{,j}=0$$

где су $X^i$ контраваријантне координате спољашње запреминске силе (рачунате по јединици масе) и $\vartheta^{ij}$ контраваријантне координате тензора напона.

У сферним поларним координатама $r$, $\theta$, $\varphi$,

$$\{X^i\}=\{X^r\,X^\theta X^\varphi\},\quad \{\vartheta^{ij}\}=\begin{Bmatrix}\vartheta^{rr} & \vartheta^{r\theta} & \vartheta^{r\varphi}\\ \vartheta^{\theta r} & \vartheta^{\theta\theta} & \vartheta^{\theta\varphi}\\ \vartheta^{\varphi r} & \vartheta^{\varphi\theta} & \vartheta^{\varphi\varphi}\end{Bmatrix},$$

па тензорској једначини (1) одговарају следеће три скаларне

$$\begin{aligned}
&\rho\,X^r+\vartheta^{rr}{}_{,r}+\vartheta^{r\theta}{}_{,\theta}+\vartheta^{r\varphi}{}_{,\varphi}=0,\\
(2)\qquad &\rho\,X^\theta+\vartheta^{\theta r}{}_{,r}+\vartheta^{\theta\theta}{}_{,\theta}+\vartheta^{\theta\varphi}{}_{,\varphi}=0,\\
&\rho\,X^\varphi+\vartheta^{\varphi r}{}_{,r}+\vartheta^{\varphi\theta}{}_{,\theta}+\vartheta^{\varphi\varphi}{}_{,\varphi}=0.
\end{aligned}$$

Из израза за коваријантни извод контраваријантних координата тензора напона,

$$\vartheta^{ij}{}_{,k}=\frac{\partial\,\vartheta^{ij}}{\partial\,x^k}+\vartheta^{is}\begin{Bmatrix} j\\ s\,k\end{Bmatrix}+\vartheta^{sj}\begin{Bmatrix} i\\ s\,k\end{Bmatrix},$$

за дивергенцију тензора напона добијамо

$$\vartheta^{ij}{}_{,j}=\frac{\partial\,\vartheta^{ij}}{\partial\,x^j}+\vartheta^{is}\begin{Bmatrix} j\\ s\,j\end{Bmatrix}+\vartheta^{sj}\begin{Bmatrix} i\\ s\,j\end{Bmatrix}.$$

С обзиром да је (видети одељак 21., једначину 10.)

$$\begin{Bmatrix} j\\ s\,j\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial\,x^s}\,(\log\sqrt{g}),$$

дивергенцију тензора напона можемо изразити у облику

$$(3)\qquad \vartheta^{ij}{}_{,j}=\frac{\partial\,\vartheta^{ij}}{\partial\,x^j}+\vartheta^{is}\,\frac{\partial}{\partial\,x^s}\,(\log\sqrt{g})+\vartheta^{sj}\begin{Bmatrix} i\\ s\,j\end{Bmatrix}.$$

У сферном поларном систему координата је (видети задатак 138.)

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\cos^2\theta\end{Bmatrix},\qquad \sqrt{g}=r^2\cos\theta,$$

$$\begin{Bmatrix}\theta\\ r\ \theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta\ r\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varphi\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\ r\end{Bmatrix}=\frac{1}{r},\qquad \begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta\ \varphi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\ \theta\end{Bmatrix}=-\operatorname{tg}\theta,$$

$$\begin{Bmatrix}r\\ \theta\ \theta\end{Bmatrix}=-r,\qquad \begin{Bmatrix}r\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}=-r\cos^2\theta,\qquad \begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}=\sin\theta\cos\theta,$$

па, на основу (3), добијамо

$$\vartheta^{rr}{}_{,r}+\vartheta^{r\theta}{}_{,\theta}+\vartheta^{r\varphi}{}_{,\varphi}=\frac{\partial\vartheta^{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\vartheta^{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\vartheta^{r\varphi}}{\partial\varphi}+\vartheta^{rr}\frac{\partial}{\partial r}[\log(r^2\cos\theta)]+$$

$$+\vartheta^{r\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[\log(r^2\cos\theta)]+\vartheta^{r\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}[\log(r^2\cos\theta)]+\vartheta^{rr}\begin{Bmatrix}r\\ r\ r\end{Bmatrix}+2\vartheta^{r\theta}\begin{Bmatrix}r\\ r\ \theta\end{Bmatrix}+$$

$$+2\vartheta^{r\varphi}\begin{Bmatrix}r\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}+\vartheta^{\theta\theta}\begin{Bmatrix}r\\ \theta\ \theta\end{Bmatrix}+2\vartheta^{\theta\varphi}\begin{Bmatrix}r\\ \theta\ \varphi\end{Bmatrix}+\vartheta^{\varphi\varphi}\begin{Bmatrix}r\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix},$$

или, ако заменимо координате Кристофелових симбола друге врсте њиховим вредностима,

$$\vartheta^{rr}{}_{,r}+\vartheta^{r\theta}{}_{,\theta}+\vartheta^{r\varphi}{}_{,\varphi}=\frac{\partial\vartheta^{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\vartheta^{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\vartheta^{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{2}{r}\vartheta^{rr}-$$

(4)

$$-\operatorname{tg}\theta\,\vartheta^{r\theta}-r\,\vartheta^{\theta\theta}-r\cos^2\theta\,\vartheta^{\varphi\varphi}.$$

На сличан начин добијамо

$$\vartheta^{\theta r}{}_{,r}+\vartheta^{\theta\theta}{}_{,\theta}+\vartheta^{\theta\varphi}{}_{,\varphi}=\frac{\partial\vartheta^{\theta r}}{\partial r}+\frac{\partial\vartheta^{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\vartheta^{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{4}{r}\vartheta^{\theta r}-$$

(5)

$$-\operatorname{tg}\theta\,\vartheta^{\theta\theta}+\sin\theta\cos\theta\,\vartheta^{\varphi\varphi},$$

(6)
$$\vartheta^{\varphi r}{}_{,r}+\vartheta^{\varphi\theta}{}_{,\theta}+\vartheta^{\varphi\varphi}{}_{,\varphi}=\frac{\partial\vartheta^{\varphi r}}{\partial r}+\frac{\partial\vartheta^{\varphi\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\vartheta^{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{4}{r}\vartheta^{\varphi r}-3\operatorname{tg}\theta\,\vartheta^{\varphi\theta}.$$

Ако, сада, изразе (4), (5) и (6) заменимо у једначине (2), добијамо

$$\rho X^r+\frac{\partial\vartheta^{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\vartheta^{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\vartheta^{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{2}{r}\vartheta^{rr}-\operatorname{tg}\theta\,\vartheta^{r\theta}-r(\vartheta^{\theta\theta}+\cos^2\theta\,\vartheta^{\varphi\varphi})=0,$$

(7)
$$\rho X^\theta+\frac{\partial\vartheta^{\theta r}}{\partial r}+\frac{\partial\vartheta^{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\vartheta^{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{4}{r}\vartheta^{\theta r}-\operatorname{tg}\theta\,\vartheta^{\theta\theta}+\sin\theta\cos\theta\,\vartheta^{\varphi\varphi}=0,$$

$$\rho X^\varphi+\frac{\partial\vartheta^{\varphi r}}{\partial r}+\frac{\partial\vartheta^{\varphi\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\vartheta^{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{4}{r}\vartheta^{\varphi r}-3\operatorname{tg}\theta\,\vartheta^{\varphi\theta}=0.$$



Ово су Навијеове једначине у сферном поларном систему координата изражене преко контраваријантних координата спољашње запреминске силе и тензора напона.

Ако у једначинама (7) контраваријантне координате изразимо преко физичких, тј. ставимо

$$X^r=X_{(r)},\qquad X^\theta=\frac{1}{r}X_{(\theta)},\qquad X^\varphi=\frac{1}{r\cos\theta}X_{(\varphi)},$$

$$\vartheta^{rr}=\vartheta_{(rr)},\qquad \vartheta^{r\theta}=\frac{1}{r}\vartheta_{(r\theta)},\qquad \vartheta^{r\varphi}=\frac{1}{r\cos\theta}\vartheta_{(r\varphi)},$$

$$\vartheta^{\theta\theta}=\frac{1}{r^2}\vartheta_{(\theta\theta)},\qquad \vartheta^{\theta\varphi}=\frac{1}{r^2\cos\theta}\vartheta_{(\theta\varphi)},\qquad \vartheta^{\varphi\varphi}=\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\vartheta_{(\varphi\varphi)},$$

добијамо

$$\rho X_{(r)}+\frac{\partial\vartheta_{(rr)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_{(r\theta)}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial\vartheta_{(r\varphi)}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{r}[2\vartheta_{(rr)}-\operatorname{tg}\theta\,\vartheta_{(r\theta)}-\vartheta_{(\theta\theta)}-\vartheta_{(\varphi\varphi)}]=0,$$

$$\rho X_{(\theta)}+\frac{\partial\vartheta_{(\theta r)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_{(\theta\theta)}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial\vartheta_{(\theta\varphi)}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{r}[3\vartheta_{(r\theta)}-\operatorname{tg}\theta\,\vartheta_{(\theta\theta)}-\operatorname{tg}\theta\,\vartheta_{(\varphi\varphi)}]=0,$$

$$\rho X_{(\varphi)}+\frac{\partial\vartheta_{(\varphi r)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_{(\varphi\theta)}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial\vartheta_{(\varphi\varphi)}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{r}[3\vartheta_{(\varphi r)}-2\operatorname{tg}\theta\,\vartheta_{(\varphi\theta)}]=0.$$

Ово су тражене Навијеове једначине у сферном поларном систему координата изражене преко физичких координата.

**Задатак 254.** (Одељак 46., задатак 3.). Написати израз за потенцијал еластичности у тензорској форми.

***Решење***: Ако једначину кретања (видети одељак 45., једначину 33.)

$$\vartheta^{ij}{}_{,j}+\rho X^i=\rho\dot{v}^i$$

помножимо скаларно брзином $v_i$, добијамо

$$\vartheta^{ij}{}_{,j}v_i+\rho X^i v_i=\rho\dot{v}^i v_i,$$

што, интеграцијом по некој коначној запремини континуума, даје

$$\int_V\rho\dot{v}^i v_i\,dV=\int_V\vartheta^{ij}{}_{,j}v_i\,dV-\int_V\rho X^i v_i\,dV,$$

односно

$$\int_V \rho \dot{v}^i v_i \, dV = \int_V (\vartheta^{ij} v_i)_{,j} \, dV - \int_V \vartheta^{ij} v_{i,j} \, dV - \int_V \rho X^i v_i \, dV.$$

Ако први запремински интеграл на десној страни трансформишемо у површински, имаћемо

$$\int_V \rho \dot{v}^i v_i \, dV = \int_S \vartheta^{ij} v_i \, ds_j - \int_V \vartheta^{ij} v_{i,j} \, dV - \int_V \rho X^i v_i \, dV.$$

Раставимо, сада, градијент брзине, у првом запреминском интегралу на десној страни, на симетрични и антисиметрични део, тј. ставимо

$$v_{i,j} = v_{(i,j)} + v_{[i,j]} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) + \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) = \overline{\sigma_{ij}} + \omega_{ij},$$

где је $\overline{\sigma_{ij}}$ тензор брзине деформације, а $\omega_{ij}$ тензор вртложности, и узмимо у обзир да је $\vartheta^{ij}\omega_{ij} = 0$ јер је $\vartheta^{ij} = \vartheta^{ji}$. Тада добијамо

$$(1) \qquad \int_V \rho \dot{v}^i v_i \, dV = -\int_V \vartheta^{ij} \overline{\sigma_{ij}} \, dV + \int_S \vartheta^{ij} v_i \, ds_j - \int_V \rho X^i v_i \, dV.$$

Израз на левој страни ове једначине представља брзину промене кинетичке енергије, а последња два члана на десној страни суму ефеката радова површинских и запреминских сила. Према томе, можемо једначину (1) писати у облику

$$(2) \qquad \dot{E} = -\int_V \vartheta^{ij} \overline{\sigma_{ij}} \, dV + \dot{A}.$$

Упоређујући једначину (2) са општом једначином баланса енергије,

$$\dot{E} + \dot{U} = \dot{A},$$

видимо да израз

$$(3) \qquad \dot{U} = \int_V \vartheta^{ij} \overline{\sigma_{ij}} \, dV$$

представља брзину промене унутрашње енергије. Уводећи густину унутрашње енергије $u$, укупну унутрашњу енергију можемо изразити у облику

$$U = \int_V \rho u \, dV,$$

а брзину њене промене у облику

$$\dot{U} = \int_V \rho \dot{u} \, dV, \qquad \left(\dot{\overline{\rho \, dV}} = 0\right).$$

На основу овога једначину (3) можемо писати у облику

$$\int_V (\rho \dot{u} - \vartheta^{ij} \overline{\sigma_{ij}}) \, dV = 0,$$

одакле, због произвољности запреминског елемента, добијамо

$$(4) \qquad \rho \dot{u} = \vartheta^{ij} \overline{\sigma_{ij}}.$$



Како је, међутим, у линеарној теорији механике континуума

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \qquad \overline{\sigma_{ij}} = \dot{\sigma}_{ij} = \frac{d}{dt}\sigma_{ij},$$

из (4) добијамо

$$u = \frac{1}{\rho} \vartheta^{ij} \sigma_{ij},$$

где је $u$ специфична унутрашња енергија која се још назива енергија деформације или *еластични потенцијал*.

*Напомена*: Назив еластични потенцијал потиче отуда што се у линеарној теорији еластичности тензор напона изражава као

$$\vartheta^{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial \sigma_{ij}},$$

па видимо да $u$ игра улогу потенцијала за одређивање тензора напона.

## 47. Једначине равнотеже и кретања еластичних тела. Белтрами-Мичелове једначине

**Задатак 255.** (Одељак 47., задатак 1.). Из контраваријантног облика основне диференцијалне једначине равнотеже (6 а) идеално еластичних тела извести да кад равнотежа постоји а не дејствују спољашње запреминске силе $X^i$, кубна дилатација $\sigma$ је хармонијска функција, тј. задовољава парцијалну диференцијалну једначину $\Delta\sigma = 0$.

***Решење:*** Једначина равнотеже (6 а) идеално еластичних тела има контраваријантни облик (видети одељак 47., једначину (6 а))

$$\rho X^i + (\lambda + \mu) g^{ij} \sigma_{,j} + \mu \Delta u^i = 0.$$

У случају кад не дејствују спољашње запреминске силе, она је облика

$$(\lambda + \mu) g^{ij} \sigma_{,j} + \mu \Delta u^i = 0,$$

или

$$(1) \qquad (\lambda + \mu) g^{ij} \sigma_{,j} + \mu g^{ij} g^{kl} u_{j,kl} = 0.$$

Коваријантним диференцирањем једначине (1) добијамо

$$(2) \qquad (\lambda + \mu) g^{ij} \sigma_{,js} + \mu g^{ij} g^{kl} u_{j,skl} = 0.$$

Ако у овој једначини градијент вектора померања $u_{j,s}$ раставимо на симетричан и антисиметричан део, тј. ставимо

$$u_{j,s} = \sigma_{js} + \Omega_{js},$$

она постаје

$$(3) \qquad (\lambda + \mu) g^{ij} \sigma_{,js} + \mu g^{ij} g^{kl} \sigma_{js,kl} + \mu g^{ij} g^{kl} \Omega_{js,kl} = 0.$$

Извршимо ли сада контракцију по индексима $i$ и $s$, добијамо

$$(4) \qquad (\lambda + \mu) g^{ij} \sigma_{,ij} + \mu g^{ij} g^{kl} \sigma_{ij,kl} = 0,$$

јер је

$$g^{ij} \Omega_{ij} = 0.$$

Једначину (4) можемо, даље, написати у облику

$$(\lambda+\mu)\, g^{ij}\, \sigma_{,\,ij} + \mu\, g^{kl}\, \sigma_{,\,kl} = 0,$$

односно

$$(\lambda+\mu)\, \Delta\sigma + \mu \Delta\sigma = 0,$$

или у облику

$$(\lambda + 2\,\mu)\, \Delta\sigma = 0,$$

одакле следи

$$\Delta\sigma = 0, \quad (\lambda + 2\,\mu \neq 0),$$

што је и требало показати.

**Задатак 256.** (Одељак 47., задатак 2.). Написати основне једначине равнотеже (6) у сферним поларним координатама.

***Решење:*** Основне једначине равнотеже (6) идеално еластичних тела су облика (видети одељак 47., једначину 6 б)

$$\rho\, X_i + (\lambda+\mu)\, \sigma_{,\,i} + \mu \Delta u_i = 0. \tag{1}$$

У односу на систем сферних поларних координата нека су коваријантне координате силе

$$\{X_i\} = \{X_1\, X_2\, X_3\}$$

и коваријантне координате вектора померања

$$\{u_i\} = \{u_1\, u_2\, u_3\}.$$

Лапласијан вектора $u_i$ је (видети одељак 24., једначину 48.)

$$\Delta\, u_i = g^{jk}\, u_{i,\,jk}, \tag{2}$$

где је

$$\begin{aligned} u_{i,\,jk} = {} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^j\, \partial x^k} - \begin{Bmatrix} r \\ i\,j \end{Bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} r \\ i\,k \end{Bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} r \\ j\,k \end{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x^r} - \\ & - u_s \left[ \frac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} s \\ i\,j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} s \\ r\,j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ i\,k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} s \\ i\,r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ j\,k \end{Bmatrix} \right]. \end{aligned} \tag{3}$$

У систему сферних поларних координата је (видети задатак 138.)

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1)^2 \cos^2 x^2 \end{Bmatrix}, \quad \{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(x^1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{(x^1)^2 \cos^2 x^2} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x^1}, \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 1\,3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3\,1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x^1}, \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 2\,3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3\,2 \end{Bmatrix} = -\operatorname{tg} x^2,$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix} = -x^1, \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 3\,3 \end{Bmatrix} = -x^1 \cos^2 x^2, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 3\,3 \end{Bmatrix} = \sin x^2 \cos x^2,$$



па је на основу (3),

$$u_{1,11} = \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^1)^2},$$

$$u_{1,22} = \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^2)^2} - \frac{2}{x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - u_1,$$

$$\begin{aligned} u_{1,33} = {} & \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^3)^2} - \frac{2}{x^1} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + x^1 \cos^2 x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \sin x^2 \cos x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - u_1 \cos^2 x^2 + \\ & + u_2 \frac{2}{x^1} \sin x^2 \cos x^2, \end{aligned}$$

$$u_{2,11} = \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^1)^2} - \frac{2}{x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{2}{(x^1)^2} u_2,$$

$$u_{2,22} = \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^2)^2} + 2\, x^1 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - 2\, u_2,$$

$$u_{2,33} = \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^3)^2} + 2 \operatorname{tg} x^2 \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + x^1 \cos^2 x^2 \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \sin x^2 \cos x^2 \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - u_2,$$

$$u_{3,11} = \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^1)^2} - \frac{2}{x^1} \frac{\partial u_3}{\partial x^1} + \frac{2}{(x^1)^2} u_3,$$

$$u_{3,22} = \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^2)^2} + 2 \operatorname{tg} x^2 \frac{\partial u_3}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial u_3}{\partial x^1} + 2\, u_3 \operatorname{tg}^2 x^2,$$

$$\begin{aligned} u_{3,33} = {} & \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^3)^2} + 2\, x^1 \cos^2 x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x^3} - 2 \sin x^2 \cos x^2 \frac{\partial u_2}{\partial x^3} + x^1 \cos^2 x^2 \frac{\partial u_3}{\partial x^1} - \\ & - \sin x^2 \cos x^2 \frac{\partial u_3}{\partial x^2} - 2\, u_3. \end{aligned}$$

На основу (2), сада добијамо

$$\begin{aligned} \Delta\, u_1 = {} & g^{11}\, u_{1,11} + g^{22}\, u_{1,22} + g^{33}\, u_{1,33} = \\ = {} & \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2 \cos^2 x^2} \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^3)^2} + \frac{2}{x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \frac{1}{(x^1)^2} \operatorname{tg} x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \\ & - \frac{2}{(x^1)^3 \cos^2 x^2} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{2}{(x^1)^3} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{2\, u_1}{(x^1)^2} + \frac{2\, u_2}{(x^1)^3} \operatorname{tg} x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\, u_2 = {} & g^{11}\, u_{2,11} + g^{22}\, u_{2,22} + g^{33}\, u_{2,33} = \\ = {} & \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2 \cos^2 x^2} \frac{\partial^2 u_2}{(\partial x^3)^2} + \frac{2}{x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{(x^1)^2} \operatorname{tg} x^2 \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \\ & + \frac{2}{(x^1)^2 \cos^3 x^2} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{u_2}{(x^1)^2 \cos^2 x^2}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Delta u_3 = g^{11} u_{3,11} + g^{22} u_{3,22} + g^{33} u_{3,33} =$$

$$= \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2 \cos^2 x^2} \frac{\partial^2 u_3}{(\partial x^3)^2} + \frac{2}{x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^3} -$$

$$- \frac{2}{(x^1)^2} \operatorname{tg} x^2 \frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{1}{(x^1)^2} \operatorname{tg} x^2 \frac{\partial u_3}{\partial x^2}.$$

Ако сферне поларне координате $x^1$, $x^2$, $x^3$, обележимо са $r$, $\theta$ и $\varphi$, тада су коваријантне координате запреминске силе, градијента кубне дилатације и вектора померања

$$\{X_i\} = \{X_r \;\; X_\theta \;\; X_\varphi\},$$

$$\{\sigma_{,i}\} = \left\{\frac{\partial \sigma}{\partial r} \;\; \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \;\; \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right\},$$

$$\{^{\prime}\{u = \{u_r \;\; u_\theta \;\; u_\varphi\},$$

а једначине равнотеже, на основу (1),

$$\rho X_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \mu \Delta u_r = 0,$$

(5) $$\rho X_\theta + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \mu \Delta u_\theta = 0,$$

$$\rho X_\varphi + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \mu \Delta u_\varphi = 0.$$

Користећи, још, изразе (4), добијамо једначине равнотеже у облику

$$\rho X_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{r^3 \cos^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} u_r + \frac{2}{r^3} \operatorname{tg} \theta \, u_0 \right) = 0,$$

$$\rho X_0 + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial 0} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r^2 \cos^3 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} u_\theta \right) = 0,$$

$$\rho X_\varphi + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \operatorname{tg} \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \theta \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right) = 0.$$



У овим једначинама, као што видимо, фигуришу коваријантне координате силе и вектора померања. Ако их, међутим, изразимо преко физичких, тј. ставимо

$$X_r = X_{(r)}, \qquad X_\theta = r X_{(\theta)}, \qquad Y_\varphi = r \cos \theta \, X_{(\varphi)},$$

$$u_r = u_{(r)}, \qquad u_\theta = r \, u_{(\theta)}, \qquad u_\varphi = r \cos \theta \, u_{(\varphi)},$$

добијамо једначине равнотеже у облику

$$\rho X_{(r)} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_{(r)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{(r)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 u_{(r)}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_{(r)}}{\partial r} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \theta \frac{\partial u_{(r)}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial u_{(\varphi)}}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_{(\theta)}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} u_{(r)} + \frac{2}{r^2} \operatorname{tg} \theta \, u_{(\theta)} \right) = 0,$$

$$\rho X_{(\theta)} + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_{(\theta)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{(\theta)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 u_{(\theta)}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_{(\theta)}}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_{(r)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \theta \frac{\partial u_{(\theta)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial u_{(\varphi)}}{\partial \varphi} - \frac{u_{(\theta)}}{r^2 \cos^2 \theta} \right) = 0,$$

$$\rho X_{(\varphi)} + (\lambda + \mu) \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_{(\varphi)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{(\varphi)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 u_{(\varphi)}}{\partial \varphi^2} + \right.$$

$$+ \frac{2}{r} \frac{\partial u_{(\varphi)}}{\partial r} + \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial u_{(r)}}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \cos \theta} \operatorname{tg} \theta \frac{\partial u_{(\theta)}}{\partial \varphi} -$$

$$\left. - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \theta \frac{\partial u_{(\varphi)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} u_{(\varphi)} \right) = 0.$$

**Задатак 257**. (Одељак 47., задатак 3.). Написати Белтрамијеве једначине у цилиндарским и сферним координатама.

***Решење***: У коваријантном облику Белтрамијеве једначине су (видети одељак 47., једначину 17.)

(1) $$\rho (X_{i,k} + X_{k,i}) + \frac{1}{1 + \varkappa} \theta_{,ik} + \Delta \vartheta_{ik} + \frac{\rho \varkappa}{1 - \varkappa} g_{ik} X^j_{,j} = 0,$$

где су $X_i$ коваријантне координате спољашње запреминске силе, $\theta$ прва инваријанта тензора напона $\vartheta^{ij}$, $\rho$ густина и $\varkappa$ Поасонова константа еластичности.

Коваријантни изводи коваријантних координата вектора запреминске силе су

(2) $$X_{i,j} = \frac{\partial X_i}{\partial x^j} - X_k \begin{Bmatrix} k \\ i \;\; j \end{Bmatrix}.$$

С обзиром да је

$$\theta_{,i} = \frac{\partial \theta}{\partial x^i},$$

коваријантни вектор, добијамо

$$\theta_{,ik}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^i}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} j\\ i\ k\end{Bmatrix},$$

односно

$$(3)\qquad \theta_{,ik}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^i\,\partial x^k}-\frac{\partial\theta}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} j\\ i\ k\end{Bmatrix}.$$

Лапласијан тензора напона је

$$\Delta\vartheta_{ik}=g^{st}\,\vartheta_{ik,st}.$$

Међутим, како је

$$\vartheta_{ik,s}=\frac{\partial\vartheta_{ik}}{\partial x^s}-\vartheta_{rk}\begin{Bmatrix} r\\ i\ s\end{Bmatrix}-\vartheta_{ir}\begin{Bmatrix} r\\ k\ s\end{Bmatrix},$$

биће

$$\vartheta_{ik,st}=\frac{\partial\vartheta_{ik,s}}{\partial x^t}-\vartheta_{nk,s}\begin{Bmatrix} n\\ i\ t\end{Bmatrix}-\vartheta_{in,s}\begin{Bmatrix} n\\ k\ t\end{Bmatrix}-\vartheta_{ik,n}\begin{Bmatrix} n\\ s\ t\end{Bmatrix},$$

односно

$$\begin{aligned}\vartheta_{ik,st}=&\frac{\partial^2\vartheta_{ik}}{\partial x^s\,\partial x^t}-\begin{Bmatrix} r\\ i\ s\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta_{rk}}{\partial x^t}-\begin{Bmatrix} r\\ k\ s\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta_{ir}}{\partial x^t}-\begin{Bmatrix} r\\ i\ t\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta_{rk}}{\partial x^s}-\begin{Bmatrix} r\\ k\ t\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta_{ir}}{\partial x^s}-\\ &-\begin{Bmatrix} r\\ s\ t\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta_{ik}}{\partial x^r}-\vartheta_{rk}\frac{\partial}{\partial x^t}\begin{Bmatrix} r\\ i\ s\end{Bmatrix}-\vartheta_{ir}\frac{\partial}{\partial x^t}\begin{Bmatrix} r\\ k\ s\end{Bmatrix}+\vartheta_{ir}\left(\begin{Bmatrix} r\\ n\ s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\\ k\ t\end{Bmatrix}+\right.\\ &\left.+\begin{Bmatrix} r\\ k\ n\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\\ s\ t\end{Bmatrix}\right)+\vartheta_{rk}\left(\begin{Bmatrix} r\\ n\ s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\\ i\ t\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} r\\ i\ n\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\\ s\ t\end{Bmatrix}\right)+\\ &+\vartheta_{nr}\left(\begin{Bmatrix} r\\ k\ s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\\ i\ t\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} r\\ i\ s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\\ k\ t\end{Bmatrix}\right).\end{aligned}$$

На основу овога добијамо

$$(4)\qquad\begin{aligned}\Delta\vartheta_{ik}=g^{st}&\left[\frac{\partial^2\vartheta_{ik}}{\partial x^s\,\partial x^t}-2\begin{Bmatrix} r\\ i\ s\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta_{rk}}{\partial x^t}-2\begin{Bmatrix} r\\ k\ s\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta_{ir}}{\partial x^t}-\begin{Bmatrix} r\\ s\ t\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta_{ik}}{\partial x^r}-\right.\\ &-\vartheta_{rk}\frac{\partial}{\partial x^t}\begin{Bmatrix} r\\ i\ s\end{Bmatrix}-\vartheta_{ir}\frac{\partial}{\partial x^t}\begin{Bmatrix} r\\ k\ s\end{Bmatrix}+\vartheta_{ir}\left(\begin{Bmatrix} r\\ n\ s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\\ k\ t\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} r\\ k\ n\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\\ s\ t\end{Bmatrix}\right)+\\ &\left.+2\,\vartheta_{nr}\begin{Bmatrix} r\\ k\ s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\\ i\ t\end{Bmatrix}+\vartheta_{rk}\left(\begin{Bmatrix} r\\ n\ s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\\ i\ t\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} r\\ i\ n\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\\ s\ t\end{Bmatrix}\right)\right].\end{aligned}$$

Дивергенција вектора спољашње запреминске силе је

$$X^j_{,j}=\frac{\partial X^j}{\partial x^j}+X^l\begin{Bmatrix} j\\ l\ j\end{Bmatrix},$$

односно

$$(5)\qquad X^j_{,j}=\frac{\partial X^j}{\partial x^j}+X^j\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\log\sqrt{g}\right).$$



а) *Цилиндарске координате.* У цилиндарском систему координата $r,\ \varphi,\ z$, биће

$$\{X_i\}=\{X_r\ X_\varphi\ X_z\},$$

$$\{\Delta\vartheta_{ij}\}=\begin{Bmatrix}\Delta\vartheta_{rr} & \Delta\vartheta_{r\varphi} & \Delta\vartheta_{rz}\\ \Delta\vartheta_{\varphi r} & \Delta\vartheta_{\varphi\varphi} & \Delta\vartheta_{\varphi z}\\ \Delta\vartheta_{zr} & \Delta\vartheta_{z\varphi} & \Delta\vartheta_{zz}\end{Bmatrix},\qquad \{\theta_{,ik}\}=\begin{Bmatrix}\theta_{,rr} & \theta_{,r\varphi} & \theta_{,rz}\\ \theta_{,r\varphi} & \theta_{,\varphi\varphi} & \theta_{,\varphi z}\\ \theta_{,zr} & \theta_{,z\varphi} & \theta_{,zz}\end{Bmatrix},$$

тако да тензорској једначини (1) одговарају следећих шест скаларних:

$$(6)\qquad\begin{aligned}&2\rho X_{r,r}+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,rr}+\Delta\vartheta_{rr}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{rr}\left(X^r_{,r}+X^\varphi_{,\varphi}+X^z_{,z}\right)=0,\\ &\rho\left(X_{r,\varphi}+X_{\varphi,r}\right)+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,r\varphi}+\Delta\vartheta_{r\varphi}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{r\varphi}\left(X^r_{,r}+X^\varphi_{,\varphi}+X^z_{,z}\right)=0,\\ &\rho\left(X_{r,z}+X_{z,r}\right)+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,rz}+\Delta\vartheta_{rz}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{rz}\left(X^r_{,r}+X^\varphi_{,\varphi}+X^z_{,z}\right)=0,\\ &2\rho X_{\varphi,\varphi}+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,\varphi\varphi}+\Delta\vartheta_{\varphi\varphi}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{\varphi\varphi}\left(X^r_{,r}+X^\varphi_{,\varphi}+X^z_{,z}\right)=0,\\ &\rho\left(X_{\varphi,z}+X_{z,\varphi}\right)+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,\varphi z}+\Delta\vartheta_{\varphi z}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{\varphi z}\left(X^r_{,r}+X^\varphi_{,\varphi}+X^z_{,z}\right)=0,\\ &2\rho X_{z,z}+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,zz}+\Delta\vartheta_{zz}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{zz}\left(X^r_{,r}+X^\varphi_{,\varphi}+X^z_{,z}\right)=0.\end{aligned}$$

Координате метричког тензора и од нуле различите координате Кристофеловог симбола друге врсте су (видети задатак 138.)

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} r\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}=-r,\qquad \begin{Bmatrix} \varphi\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \varphi\\ \varphi\ r\end{Bmatrix}=\frac{1}{r},$$

па, на основу (2), добијамо

$$(7)\qquad\begin{aligned}X_{r,r}&=\frac{\partial X_r}{\partial r}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ r\ r\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ r\ r\end{Bmatrix}-X_z\begin{Bmatrix} z\\ r\ r\end{Bmatrix}=\frac{\partial X_r}{\partial r},\\ X_{r,\varphi}&=\frac{\partial X_r}{\partial\varphi}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}-X_z\begin{Bmatrix} z\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}=\frac{\partial X_r}{\partial\varphi}-\frac{X_\varphi}{r},\\ X_{r,z}&=\frac{\partial X_r}{\partial z}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ r\ z\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ r\ z\end{Bmatrix}-X_z\begin{Bmatrix} z\\ r\ z\end{Bmatrix}=\frac{\partial X_r}{\partial z},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X_{\varphi,r} &= \frac{\partial X_\varphi}{\partial r} - X_r \begin{Bmatrix} r \\ \varphi\, r \end{Bmatrix} - X_\varphi \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\, r \end{Bmatrix} - X_z \begin{Bmatrix} z \\ \varphi\, r \end{Bmatrix} = \frac{\partial X_\varphi}{\partial r} - \frac{X_\varphi}{r}, \\
X_{\varphi,\varphi} &= \frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} - X_r \begin{Bmatrix} r \\ \varphi\, \varphi \end{Bmatrix} - X_\varphi \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\, \varphi \end{Bmatrix} - X_z \begin{Bmatrix} z \\ \varphi\, \varphi \end{Bmatrix} = \frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} + r X_r, \\
X_{\varphi,z} &= \frac{\partial X_\varphi}{\partial z} - X_r \begin{Bmatrix} r \\ \varphi\, z \end{Bmatrix} - X_\varphi \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\, z \end{Bmatrix} - X_z \begin{Bmatrix} z \\ \varphi\, z \end{Bmatrix} = \frac{\partial X_\varphi}{\partial z}, \\
X_{z,r} &= \frac{\partial X_z}{\partial r} - X_r \begin{Bmatrix} r \\ z\, r \end{Bmatrix} - X_\varphi \begin{Bmatrix} \varphi \\ z\, r \end{Bmatrix} - X_z \begin{Bmatrix} z \\ z\, r \end{Bmatrix} = \frac{\partial X_z}{\partial r}, \\
X_{z,\varphi} &= \frac{\partial X_z}{\partial \varphi} - X_r \begin{Bmatrix} r \\ z\, \varphi \end{Bmatrix} - X_\varphi \begin{Bmatrix} \varphi \\ z\, \varphi \end{Bmatrix} - X_z \begin{Bmatrix} z \\ z\, \varphi \end{Bmatrix} = \frac{\partial X_z}{\partial \varphi}, \\
X_{z,z} &= \frac{\partial X_z}{\partial z} - X_r \begin{Bmatrix} r \\ z\, z \end{Bmatrix} - X_\varphi \begin{Bmatrix} \varphi \\ z\, z \end{Bmatrix} - X_z \begin{Bmatrix} z \\ z\, z \end{Bmatrix} = \frac{\partial X_z}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

На основу релације (3) је

$$
\begin{aligned}
\theta_{,rr} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \begin{Bmatrix} r \\ r\, r \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \begin{Bmatrix} \varphi \\ r\, r \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \begin{Bmatrix} z \\ r\, r \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2}, \\
\theta_{,r\varphi} = \theta_{,\varphi r} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \begin{Bmatrix} r \\ r\, \varphi \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \begin{Bmatrix} \varphi \\ r\, \varphi \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \begin{Bmatrix} z \\ r\, \varphi \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \\
\theta_{,rz} = \theta_{,zr} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \begin{Bmatrix} r \\ r\, z \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \begin{Bmatrix} \varphi \\ r\, z \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \begin{Bmatrix} z \\ r\, z \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial z}, \\
\theta_{,\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \begin{Bmatrix} r \\ \varphi\, \varphi \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\, \varphi \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \begin{Bmatrix} z \\ \varphi\, \varphi \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\
\theta_{,\varphi z} = \theta_{,z\varphi} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \begin{Bmatrix} r \\ \varphi\, z \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\, z \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \begin{Bmatrix} z \\ \varphi\, z \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial z}, \\
\theta_{,zz} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \begin{Bmatrix} r \\ z\, z \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \begin{Bmatrix} \varphi \\ z\, z \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \begin{Bmatrix} z \\ z\, z \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

За координате лапласијана тензора напона, на основу једначине (4), добијамо

$$
\Delta \vartheta_{rr} = \frac{\partial^2 \vartheta_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_{rr}}{\partial z^2} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \vartheta_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \vartheta_{rr} + \frac{2}{r^4} \vartheta_{\varphi\varphi},
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \vartheta_{r\varphi} = \Delta \vartheta_{\varphi r} &= \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \\
&\quad + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{r\varphi}}{\partial r} - \frac{5}{r^2} \vartheta_{r\varphi},
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\Delta \vartheta_{rz} = \Delta \vartheta_{zr} &= \frac{\partial^2 \vartheta_{rz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{rz}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_{rz}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \vartheta_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{rz}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \vartheta_{rz}, \\
\Delta \vartheta_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial z^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \vartheta_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{3}{r} \frac{\partial \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \vartheta_{\varphi\varphi} + 2 \vartheta_{rr}, \\
\Delta \vartheta_{\varphi z} = \Delta \vartheta_{z\varphi} &= \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi z}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi z}}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{\varphi z}}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{rz}}{\partial \varphi}, \\
\Delta \vartheta_{zz} &= \frac{\partial^2 \vartheta_{zz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{zz}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_{zz}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{zz}}{\partial r}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

За дивергенцију вектора спољашње запреминске силе, на основу једначине (5), добијамо

$$
X^j{}_{,j} = (X^r{}_{,r} + X^\varphi{}_{,\varphi} + X^z{}_{,z}) = \frac{\partial X^r}{\partial r} + \frac{\partial X^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial X^z}{\partial z} + \frac{X^r}{r},
$$

или, ако контраваријантне координате изразимо преко коваријантних,

$$
X^j{}_{,j} = \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{X_r}{r}. \tag{10}
$$

Замењујући изразе (7), (8), (9) и (10) у једначине (6), добијамо

$$
\begin{aligned}
& 2\rho \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{1+\varkappa} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_{rr}}{\partial z^2} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \vartheta_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \vartheta_{rr} + \\
& \quad + \frac{2}{r^4} \vartheta_{\varphi\varphi} + \frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa} \left( \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{X_r}{r} \right) = 0, \\
& \rho \left( \frac{\partial X_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial X_\varphi}{\partial r} - \frac{2}{r} X_\varphi \right) + \frac{1}{1+\varkappa} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial \varphi^2} + \\
& \quad + \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{r\varphi}}{\partial r} - \frac{5}{r^2} \vartheta_{r\varphi} = 0, \\
& \rho \left( \frac{\partial X_r}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{1+\varkappa} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \vartheta_{rz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{rz}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_{rz}}{\partial z^2} - \\
& \quad - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \vartheta_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{rz}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \vartheta_{rz} = 0, \\
& 2\rho \left( \frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} + r X_r \right) + \frac{1}{1+\varkappa} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} + \\
& \quad + \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial z^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \vartheta_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{3}{r} \frac{\partial \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \vartheta_{\varphi\varphi} + 2 \vartheta_{rr} + \\
& \quad + \frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa} \left( r^2 \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} + r^2 \frac{\partial X_z}{\partial z} + r X_r \right) = 0,
\end{aligned}
$$

$$\rho\left(\frac{\partial X_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial X_\varphi}{\partial z}\right)+\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\,\partial z}+\frac{\partial^2\vartheta_{\varphi z}}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\vartheta_{\varphi z}}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{\partial^2\vartheta_{\varphi z}}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial\vartheta_{\varphi z}}{\partial r}+\frac{2}{r}\,\frac{\partial\vartheta_{rz}}{\partial\varphi}=0,$$

$$2\rho\frac{\partial X_z}{\partial z}+\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\vartheta_{zz}}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\vartheta_{zz}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\vartheta_{zz}}{\partial z^2}+$$

$$+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\vartheta_{zz}}{\partial r}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}\left(\frac{\partial X_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\frac{X_r}{r}\right)=0,$$

што су тражене Белтрамијеве једначине у цилиндарском систему координата.

б) *Сферне поларне координате.* У систему сферних поларних координата $r$, $\varphi$, $\psi$, је

$$\{X_i\}=\{X_r\,X_\varphi\,X_\psi\},$$

$$\{\theta_{,ik}\}=\begin{Bmatrix}\theta_{,rr} & \theta_{,r\varphi} & \theta_{,r\psi}\\ \theta_{,\varphi r} & \theta_{,\varphi\varphi} & \theta_{,\varphi\psi}\\ \theta_{,\psi r} & \theta_{,\psi\varphi} & \theta_{,\psi\psi}\end{Bmatrix},\qquad \{\Delta\vartheta_{ik}\}=\begin{Bmatrix}\Delta\vartheta_{rr} & \Delta\vartheta_{r\varphi} & \Delta\vartheta_{r\psi}\\ \Delta\vartheta_{\varphi r} & \Delta\vartheta_{\varphi\varphi} & \Delta\vartheta_{\varphi\psi}\\ \Delta\vartheta_{\psi r} & \Delta\vartheta_{\psi\varphi} & \Delta\vartheta_{\psi\psi}\end{Bmatrix},$$

па тензорској једначини (1) одговарају следећих шест скаларних:

(11)

$$2\rho X_{r,r}+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,rr}+\Delta\vartheta_{rr}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{rr}(X^r{}_{,r}+X^\varphi{}_{,\varphi}+X^\psi{}_{,\psi})=0,$$

$$\rho(X_{r,\varphi}+X_{\varphi,r})+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,r\varphi}+\Delta\vartheta_{r\varphi}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{r\varphi}(X^r{}_{,r}+X^\varphi{}_{,\varphi}+X^\psi{}_{,\psi})=0,$$

$$\rho(X_{r,\psi}+X_{\psi,r})+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,r\psi}+\Delta\vartheta_{r\psi}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{r\psi}(X^r{}_{,r}+X^\varphi{}_{,\varphi}+X^\psi{}_{,\psi})=0,$$

$$2\rho X_{\varphi,\varphi}+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,\varphi\varphi}+\Delta\vartheta_{\varphi\varphi}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{\varphi\varphi}(X^r{}_{,r}+X^\varphi{}_{,\varphi}+X^\psi{}_{,\psi})=0,$$

$$\rho(X_{\varphi,\psi}+X_{\psi,\varphi})+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,\varphi\psi}+\Delta\vartheta_{\varphi\psi}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{\varphi\psi}(X^r{}_{,r}+X^\varphi{}_{,\varphi}+X^\psi{}_{,\psi})=0,$$

$$2\rho X_{\psi,\psi}+\frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,\psi\psi}+\Delta\vartheta_{\psi\psi}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{\psi\psi}(X^r{}_{,r}+X^\varphi{}_{,\varphi}+X^\psi{}_{,\psi})=0.$$

Координате метричког тензора и од нуле различите координате Кристофеловог симбола друге врсте су (видети задатак 138.)

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\cos^2\varphi\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\cos\varphi}\end{Bmatrix},$$



$$\begin{Bmatrix} r\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}=-r,\quad \begin{Bmatrix} \varphi\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \varphi\\ \varphi\ r\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \psi\\ r\ \psi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \psi\\ \psi\ r\end{Bmatrix}=\frac{1}{r},\quad \begin{Bmatrix} r\\ \psi\ \psi\end{Bmatrix}=-r\cos^2\varphi,$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi\\ \psi\ \psi\end{Bmatrix}=\sin\varphi\cos\varphi,\quad \begin{Bmatrix} \psi\\ \varphi\ \psi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \psi\\ \psi\ \varphi\end{Bmatrix}=-\operatorname{tg}\varphi,$$

па, на основу једначине (2), добијамо

(12)

$$X_{r,r}=\frac{\partial X_r}{\partial r}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ r\ r\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ r\ r\end{Bmatrix}-X_\psi\begin{Bmatrix} \psi\\ r\ r\end{Bmatrix}=\frac{\partial X_r}{\partial r},$$

$$X_{r,\varphi}=\frac{\partial X_r}{\partial\varphi}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}-X_\psi\begin{Bmatrix} \psi\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}=\frac{\partial X_r}{\partial\varphi}-\frac{X_\varphi}{r},$$

$$X_{r,\psi}=\frac{\partial X_r}{\partial\psi}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ r\ \psi\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ r\ \psi\end{Bmatrix}-X_\psi\begin{Bmatrix} \psi\\ r\ \psi\end{Bmatrix}=\frac{\partial X_r}{\partial\psi}-\frac{X_\psi}{r},$$

$$X_{\varphi,r}=\frac{\partial X_\varphi}{\partial r}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ \varphi\ r\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ \varphi\ r\end{Bmatrix}-X_\psi\begin{Bmatrix} \psi\\ \varphi\ r\end{Bmatrix}=\frac{\partial X_\varphi}{\partial r}-\frac{X_\varphi}{r},$$

$$X_{\varphi,\varphi}=\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}-X_\psi\begin{Bmatrix} \psi\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}=\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}+rX_r,$$

$$X_{\varphi,\psi}=\frac{\partial X_\varphi}{\partial\psi}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ \varphi\ \psi\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ \varphi\ \psi\end{Bmatrix}-X_\psi\begin{Bmatrix} \psi\\ \varphi\ \psi\end{Bmatrix}=\frac{\partial X_\varphi}{\partial\psi}+\operatorname{tg}\varphi\,X_\psi,$$

$$X_{\psi,r}=\frac{\partial X_\psi}{\partial r}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ \psi\ r\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ \psi\ r\end{Bmatrix}-X_\psi\begin{Bmatrix} \psi\\ \psi\ r\end{Bmatrix}=\frac{\partial X_\psi}{\partial r}-\frac{X_\psi}{r},$$

$$X_{\psi,\varphi}=\frac{\partial X_\psi}{\partial\varphi}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ \psi\ \varphi\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ \psi\ \varphi\end{Bmatrix}-X_\psi\begin{Bmatrix} \psi\\ \psi\ \varphi\end{Bmatrix}=\frac{\partial X_\psi}{\partial\varphi}+\operatorname{tg}\varphi\,X_\psi,$$

$$X_{\psi,\psi}=\frac{\partial X_\psi}{\partial\psi}-X_r\begin{Bmatrix} r\\ \psi\ \psi\end{Bmatrix}-X_\varphi\begin{Bmatrix} \varphi\\ \psi\ \psi\end{Bmatrix}-X_\psi\begin{Bmatrix} \psi\\ \psi\ \psi\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{\partial X_\psi}{\partial\psi}+r\cos^2\varphi\,X_r-\sin\varphi\cos\varphi\,X_\varphi,$$

и, на основу (3),

$$\theta_{,rr}=\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}-\frac{\partial\theta}{\partial r}\begin{Bmatrix} r\\ r\ r\end{Bmatrix}-\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\begin{Bmatrix} \varphi\\ r\ r\end{Bmatrix}-\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\begin{Bmatrix} \psi\\ r\ r\end{Bmatrix}=\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2},$$

$$\theta_{,r\varphi}=\theta_{,\varphi r}=\frac{\partial^2\theta}{\partial r\,\partial\varphi}-\frac{\partial\theta}{\partial r}\begin{Bmatrix} r\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}-\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\begin{Bmatrix} \varphi\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}-\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\begin{Bmatrix} \psi\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}=\frac{\partial^2\theta}{\partial r\,\partial\varphi}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial\theta}{\partial\varphi},$$

$$\theta_{,r\psi}=\theta_{,\psi r}=\frac{\partial^2\theta}{\partial r\,\partial\psi}-\frac{\partial\theta}{\partial r}\begin{Bmatrix} r\\ r\ \psi\end{Bmatrix}-\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\begin{Bmatrix} \varphi\\ r\ \psi\end{Bmatrix}-\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\begin{Bmatrix} \psi\\ r\ \psi\end{Bmatrix}=\frac{\partial^2\theta}{\partial r\,\partial\psi}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial\theta}{\partial\psi},$$

$$
\begin{aligned}
\theta_{,\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \begin{Bmatrix} r \\ \varphi\ \varphi \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\ \varphi \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi\ \varphi \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\
\theta_{,\varphi\psi} = \theta_{,\psi\varphi} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi\, \partial \psi} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \begin{Bmatrix} r \\ \varphi\ \psi \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\ \psi \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi\ \psi \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi\, \partial \psi} + \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \psi}, \\
\theta_{,\psi\psi} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \begin{Bmatrix} r \\ \psi\ \psi \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \begin{Bmatrix} \varphi \\ \psi\ \psi \end{Bmatrix} - \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \begin{Bmatrix} \psi \\ \psi\ \psi \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} + r \cos^2 \varphi \frac{\partial \theta}{\partial r} - \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

За координате лапласијана тензора напона, на основу (4), добијамо

$$
\begin{aligned}
\Delta \vartheta_{rr} &= \frac{\partial^2 \vartheta_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \vartheta_{rr}}{\partial \psi^2} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial \varphi} - \frac{4}{r^3 \cos^2 \varphi} \frac{\partial \vartheta_{r\psi}}{\partial \psi} + \\
&+ \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial \varphi} - \frac{4}{r^2} \vartheta_{rr} + \frac{4}{r^3} \operatorname{tg} \varphi \vartheta_{r\varphi} + \frac{2}{r^4} \vartheta_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r^4 \cos^2 \varphi} \vartheta_{\psi\psi}, \\
\Delta \vartheta_{r\varphi} &= \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial \psi^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^3 \cos^2 \varphi} \frac{\partial \vartheta_{\varphi\psi}}{\partial \psi} + \\
&+ \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \cos^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{r\psi}}{\partial \psi} - \frac{5}{r^2} \vartheta_{r\varphi} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^3} \operatorname{tg} \varphi \vartheta_{\varphi\varphi} - \\
&- \frac{2}{r^3 \cos^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi \vartheta_{\psi\psi} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \vartheta_{r\varphi}, \\
\Delta \vartheta_{r\psi} &= \frac{\partial^2 \vartheta_{r\psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{r\psi}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \vartheta_{r\psi}}{\partial \psi^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \vartheta_{\varphi\psi}}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^3 \cos^2 \varphi} \frac{\partial \vartheta_{\psi\psi}}{\partial \psi} + \\
&+ \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{r\psi}}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{r\varphi}}{\partial \psi} - \frac{5}{r^2} \vartheta_{r\psi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \vartheta_{r\psi} + \\
&+ \frac{2}{r^3} \operatorname{tg} \varphi \vartheta_{\varphi\psi} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \vartheta_{r\psi} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial \psi}, \\
\Delta \vartheta_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial \psi^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \frac{4}{r} \frac{\partial \vartheta_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \\
&+ \frac{4}{r^2 \cos^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{\varphi\psi}}{\partial \psi} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \vartheta_{\varphi\varphi} + \\
&+ \frac{2}{r^2 \cos^2 \varphi} \operatorname{tg}^2 \varphi \vartheta_{\psi\psi} + 2 \vartheta_{rr}, \\
\Delta \vartheta_{\varphi\psi} &= \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\psi}}{\partial^2 \varphi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \vartheta_{\varphi\psi}}{\partial \psi^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{\varphi\psi}}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{r\psi}}{\partial \varphi} + \\
&+ \frac{2}{r^2 \cos^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{\psi\psi}}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{\varphi\psi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{r\varphi}}{\partial \psi} - \frac{2}{r^2} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial \psi} + \\
&+ \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \vartheta_{\varphi\psi} + \frac{3}{r} \operatorname{tg} \varphi \vartheta_{r\psi} - \frac{3}{r^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \vartheta_{\varphi\psi}, \\
\Delta \vartheta_{\psi\psi} &= \frac{\partial^2 \vartheta_{\psi\psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{\psi\psi}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \vartheta_{\psi\psi}}{\partial \psi^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{\psi\psi}}{\partial r} + \frac{3}{r^2} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \psi_{\psi\psi}}{\partial \varphi} + \\
&+ \frac{4}{r^2} \frac{\partial \vartheta_{r\psi}}{\partial \psi} - \frac{4}{r^2} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{\varphi\psi}}{\partial \psi} + \frac{2}{r^2 \cos^2 \varphi} \vartheta_{\psi\psi} + 2 \cos^2 \varphi \vartheta_{rr} + \\
&+ \frac{2}{r^2} \sin^2 \varphi \vartheta_{\varphi\varphi} - \frac{4}{r} \sin \varphi \cos \varphi \vartheta_{r\varphi}.
\end{aligned} \tag{14}
$$



За дивергенцију вектора спољашње запреминске силе, на основу једначине (5), добијамо

$$
X^j_{,j} = X^r_{,r} + X^\varphi_{,\varphi} + X^\psi_{,\psi} = \frac{\partial X^r}{\partial r} + \frac{\partial X^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial X^\psi}{\partial \psi} + 2 \frac{X^r}{r} - \operatorname{tg} \varphi X^\varphi,
$$

или, ако контраваријантне координате изразимо преко коваријантних,

$$
X^j_{,j} = \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial X_\psi}{\partial \psi} + 2 \frac{X_r}{r} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \varphi X_\varphi. \tag{15}
$$

Замењујући изразе (12), (13), (14) и (15) у једначине (11), добијамо

$$
\begin{aligned}
& 2\rho \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{1+\varkappa} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \vartheta_{rr}}{\partial \psi^2} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \vartheta_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \\
&\quad - \frac{4}{r^3 \cos^2 \varphi} \frac{\partial \vartheta_{r\psi}}{\partial \psi} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial \varphi} - \frac{4}{r^2} \vartheta_{rr} + \frac{4}{r^3} \operatorname{tg} \varphi \vartheta_{r\varphi} + \\
&\quad + \frac{2}{r^4} \vartheta_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r^4 \cos^2 \varphi} \vartheta_{\psi\psi} + \frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa} \left( \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial X_\psi}{\partial \varphi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r} X_r - \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \varphi X_\varphi \right) = 0, \\
& \rho \left( \frac{\partial X_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial X_\varphi}{\partial r} - \frac{2}{r} X_\varphi \right) + \frac{1}{1+\varkappa} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r\, \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial \varphi^2} + \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \vartheta_{r\varphi}}{\partial \psi^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^3 \cos^2 \varphi} \frac{\partial \vartheta_{\varphi\psi}}{\partial \psi} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_{rr}}{\partial \varphi} +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{2}{r^2\cos^2\varphi}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\vartheta_{r\psi}}{\partial\psi}-\frac{5}{r^2}\vartheta_{r\varphi}-\frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\vartheta_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{2}{r^3}\operatorname{tg}\varphi\vartheta_{\varphi\varphi}-$$

$$-\frac{2}{r^3\cos^2\varphi}\operatorname{tg}\varphi\vartheta_{\psi\psi}-\frac{1}{r^2}\operatorname{tg}^2\varphi\vartheta_{r\varphi}=0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial X_r}{\partial\psi}+\frac{\partial X_\psi}{\partial r}-\frac{2}{r}X_\psi\right)+\frac{1}{1+\varkappa}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r\,\partial\psi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)+\frac{\partial^2\vartheta_{r\psi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_{r\psi}}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\vartheta_{r\psi}}{\partial\psi^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial\vartheta_{\varphi\psi}}{\partial\varphi}-\frac{2}{r^3\cos^2\varphi}\frac{\partial\vartheta_{\psi\psi}}{\partial\psi}+\frac{2}{r}\frac{\partial\vartheta_{rr}}{\partial\psi}+$$

$$+\frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\vartheta_{r\psi}}{\partial\varphi}-\frac{2}{r^2}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\vartheta_{r\varphi}}{\partial\psi}-\frac{5}{r^2}\vartheta_{r\psi}+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\vartheta_{r\psi}+$$

$$+\frac{2}{r^3}\operatorname{tg}\varphi\vartheta_{\varphi\psi}-\frac{1}{r^2}\operatorname{tg}^2\varphi\vartheta_{r\psi}=0,$$

$$2\rho\left(\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}+rX_r\right)+\frac{1}{1+\varkappa}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial\psi^2}-$$

$$-\frac{2}{r}\frac{\partial\vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial r}+\frac{4}{r}\frac{\partial\vartheta_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{4}{r^2\cos^2\varphi}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\vartheta_{\varphi\psi}}{\partial\psi}-\frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}-$$

$$-\frac{2}{r^2}\operatorname{tg}^2\varphi\vartheta_{\varphi\varphi}+\frac{2}{r^2\cos^2\varphi}\operatorname{tg}^2\varphi\vartheta_{\psi\psi}+2\vartheta_{rr}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}\left(r^2\frac{\partial X_r}{\partial r}+\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial X_\psi}{\partial\psi}+2rX_r-\operatorname{tg}\varphi X_\varphi\right)=0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial X_\varphi}{\partial\psi}+\frac{\partial X_\psi}{\partial\varphi}+2\operatorname{tg}\varphi X_\psi\right)+\frac{1}{1+\varkappa}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\,\partial\psi}+\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)+\frac{\partial^2\vartheta_{\varphi\psi}}{\partial r^2}+$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_{\varphi\psi}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\vartheta_{\varphi\psi}}{\partial\psi^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial\vartheta_{\varphi\psi}}{\partial r}+\frac{2}{r}\frac{\partial\vartheta_{r\psi}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{2}{r^2\cos^2\varphi}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\vartheta_{\psi\psi}}{\partial\psi}+\frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\vartheta_{\varphi\psi}}{\partial\varphi}+\frac{2}{r}\frac{\partial\vartheta_{r\varphi}}{\partial\psi}-\frac{2}{r^2}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\vartheta_{\varphi\varphi}}{\partial\psi}+$$

$$+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\vartheta_{\varphi\psi}+\frac{3}{r}\operatorname{tg}\varphi\vartheta_{r\psi}-\frac{3}{r^2}\operatorname{tg}^2\varphi\vartheta_{\varphi\psi}=0,$$

$$2\rho\left(\frac{\partial X_\psi}{\partial\psi}+r\cos^2\varphi X_r-\sin\varphi\cos\varphi X_\varphi\right)+\frac{1}{1+\varkappa}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\psi^2}+r\cos^2\varphi\frac{\partial\theta}{\partial r}-\right.$$

$$\left.-\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial^2\vartheta_{\psi\psi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_{\psi\psi}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\vartheta_{\psi\psi}}{\partial\psi^2}-$$



$$-\frac{2}{r}\frac{\partial\vartheta_{\psi\psi}}{\partial r}+\frac{3}{r^2}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\vartheta_{\psi\psi}}{\partial\varphi}+\frac{4}{r^2}\frac{\partial\vartheta_{r\psi}}{\partial\psi}-\frac{4}{r^2}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\vartheta_{\varphi\psi}}{\partial\psi}+$$

$$+\frac{2}{r^2\cos^2\varphi}\vartheta_{\psi\psi}+2\cos^2\varphi\vartheta_{rr}+\frac{2}{r^2}\sin^2\varphi\vartheta_{\varphi\varphi}-\frac{4}{r}\sin\varphi\cos\varphi\vartheta_{r\varphi}+$$

$$+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}\left(r^2\cos^2\varphi\frac{\partial X_r}{\partial r}+\cos^2\varphi\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial X_\psi}{\partial\psi}+2r\cos^2\varphi X_r-\sin\varphi\cos\varphi X_\varphi\right)=0,$$

што су тражене Белтрамијеве једначине у сферном поларном систему координата.

*Напомена.* Написане Белтрамијеве једначине у цилиндарском и сферном систему координата изражене су преко коваријантних координата тензора напона и спољашње запреминске силе. Јасно је да, по потреби, коваријантне координате које фигуришу у тим једначинама можемо изразити преко контраваријантних, мешовитих или физичких.

**Задатак 258.** (Одељак 47., задатак 4.). Извести Белтрами-Мичелове једначине полазећи од услова компатибилности.

***Решење:*** Услови компатибилности, које задовољавају координате $\sigma_{ij}$ тензора деформације, у тензорском облику гласе (видети одељак 44., једначину 6.)

$$\varepsilon^{irp}\,\varepsilon^{jsq}\,\sigma_{ij,\,rs}=0. \tag{1}$$

С обзиром да је (видети задатак 205.)

$$\varepsilon^{irp}\,\varepsilon^{jsq}=\begin{vmatrix} g^{ij} & g^{is} & g^{iq}\\ g^{rj} & g^{rs} & g^{rq}\\ g^{pj} & g^{ps} & g^{pq}\end{vmatrix}=g^{ij}g^{rs}g^{pq}+g^{is}g^{rq}g^{pj}+g^{iq}g^{rj}g^{ps}-$$

$$-g^{iq}g^{rs}g^{pj}-g^{rq}g^{ps}g^{ij}-g^{pq}g^{is}g^{rj},$$

у развијеном облику услови компатибилности (1) су

$$\varepsilon^{irp}\,\varepsilon^{jsq}\,\sigma_{ij,\,rs}=g^{ij}g^{rs}g^{pq}\sigma_{ij,\,rs}+g^{is}g^{rq}g^{pj}\sigma_{ij,\,rs}+g^{iq}g^{rj}g^{ps}\sigma_{ij,\,rs}-$$

$$-g^{iq}g^{rs}g^{pj}\sigma_{ij,\,rs}-g^{rq}g^{ps}g^{ij}\sigma_{ij,\,rs}-g^{pq}g^{is}g^{rj}\sigma_{ij,\,rs}=0,$$

односно

$$g^{pq}\Delta\sigma+g^{rq}\sigma^{ps}{}_{,\,sr}+g^{ps}\sigma^{rq}{}_{,\,rs}-g^{rs}\sigma^{qp}{}_{,\,rs}-g^{rq}g^{ps}\sigma_{,\,rs}-g^{pq}\sigma^{sr}{}_{,\,sr}=0. \tag{2}$$

На основу везе између тензора деформације и тензора напона (Хуков закон, видети одељак 46., једначину 37.)

$$\sigma^{ij}=\frac{1}{E}\left[(1+\varkappa)\,\vartheta^{ij}-\varkappa\,g^{ij}\theta\right], \tag{3}$$

добијамо

$$\Delta\sigma=g_{ij}g^{kl}\sigma^{ij}{}_{,\,kl}=g_{ij}g^{kl}\frac{1}{E}\left[(1+\varkappa)\,\vartheta^{ij}{}_{,\,kl}-\varkappa\,g^{ij}\theta_{,\,kl}\right]=$$

$$= \frac{1}{E}[(1+\varkappa) g_{ij} g^{kl}\vartheta^{ij}{}_{,kl} - 3\varkappa g^{kl}\theta_{,kl}] =$$

$$= \frac{1}{E}[(1+\varkappa)\Delta\vartheta^{ij} g_{ij} - 3\varkappa\Delta\theta] = \frac{1}{E}(1-2\varkappa)\Delta\theta,$$

тј.

$$g^{pq}\Delta\sigma = \frac{1}{E}(1-2\varkappa) g^{pq}\Delta\theta.$$

Исто тако је

$$g^{rq}\sigma^{ps}{}_{,sr} = \frac{1}{E}[(1+\varkappa) g^{rq}\vartheta^{ps}{}_{,sr} - \varkappa g^{rq} g^{ps}\theta_{,sr}].$$

Међутим, из једначине равнотеже (видети одељак 47., једначину 1.)

$$\rho X^i + \vartheta^{ij}{}_{,j} = 0,$$

добијамо

$$\vartheta^{ps}{}_{,sr} = -\rho X^p{}_{,r},$$

па је

$$g^{rq}\sigma^{ps}{}_{,sr} = -\frac{1}{E}[(1+\varkappa)\rho g^{rq} X^p{}_{,r} + \varkappa g^{rq} g^{ps}\theta_{,sr}].$$

Из једначине (3), даље добијамо

$$g^{ps}\sigma^{rq}{}_{,rs} = -\frac{1}{E}[(1+\varkappa)\rho g^{ps}X^q{}_{,s} + \varkappa g^{ps}g^{rq}\theta_{,sr}],$$

$$g^{rs}\sigma^{qp}{}_{,rs} = \frac{1}{E}[(1+\varkappa)\Delta\vartheta^{qp} - \varkappa g^{pq}\Delta\theta],$$

$$g^{rq}g^{ps}\sigma_{,rs} = \frac{1}{E}[(1+\varkappa)g^{rq}g^{ps}\theta_{,rs} - 3\varkappa g^{rq}g^{ps}\theta_{,rs}] =$$

$$= \frac{1}{E}(1-2\varkappa)g^{rq}g^{ps}\theta_{,rs},$$

$$g^{pq}\sigma^{rs}{}_{,rs} = \frac{1}{E}[(1+\varkappa)g^{pq}\vartheta^{rs}{}_{,rs} - g^{pq}\varkappa\Delta\theta] =$$

$$= -\frac{1}{E}[(1+\varkappa)\rho g^{pq}X^r{}_{,r} + \varkappa g^{pq}\Delta\theta].$$

Ако искористимо претходне релације, једначину (2) можемо написати у облику

$$\frac{1}{E}(1-2\varkappa)g^{pq}\Delta\theta - \frac{1}{E}[(1+\varkappa)\rho g^{rq}X^p{}_{,r} + \varkappa g^{rq}g^{ps}\theta_{,sr}] -$$

$$-\frac{1}{E}[(1+\varkappa)\rho g^{ps}X^q{}_{,s}+\varkappa g^{ps}g^{rq}\theta_{,sr}] - \frac{1}{E}[(1+\varkappa)\Delta\vartheta^{qp} - \varkappa g^{qp}\Delta\theta] -$$

$$-\frac{1}{E}(1-2\varkappa)g^{rq}g^{ps}\theta_{,rs} + \frac{1}{E}[(1+\varkappa)\rho g^{pq}X^r{}_{,r} + \varkappa g^{pq}\Delta\theta] = 0,$$



или у облику

$$g^{pq}\Delta\theta - 2\varkappa g^{pq}\Delta\theta - (1+\varkappa)\rho g^{rq}X^p{}_{,r} - \varkappa g^{rq}g^{ps}\theta_{,sr} - (1+\varkappa)\rho g^{ps}X^q{}_{,s} -$$

$$-\varkappa g^{ps}g^{rq}\theta_{,sr} - (1+\varkappa)\Delta\vartheta^{pq} + \varkappa g^{qp}\Delta\theta - g^{rq}g^{ps}\theta_{,rs} - 2\varkappa g^{rq}g^{ps}\theta_{,sr} +$$

$$+ (1+\varkappa)\rho g^{pq}X^r{}_{,r} + \varkappa g^{pq}\Delta\theta = 0,$$

што се своди на

$$g^{pq}\Delta\theta - g^{rq}g^{ps}\theta_{,rs} - (1+\varkappa)\Delta\vartheta^{pq} - (1+\varkappa)\rho g^{ps}X^q{}_{,s} -$$

$$-(1+\varkappa)\rho g^{rq}X^p{}_{,r} + (1+\varkappa)\rho g^{pq}X^r{}_{,r} = 0.$$

У коваријантном облику ова једначина је

$$g_i\Delta\theta - \theta_{,ij} - (1+\varkappa)\Delta\vartheta_{ij} - (1+\varkappa)(X_{i,j}+X_{j,i}) + (1+\varkappa)\rho g_{ij}X^k{}_{,k} = 0.$$

Ако у овој једначини извршимо замену (видети одељак 47., једначину 16., или задатак 252.)

$$\Delta\theta = -\rho\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}X^k{}_{,k},$$

добијамо, после извесних срећивања,

$$\rho(X_{i,j}+X_{j,i}) + \frac{1}{1+\varkappa}\theta_{,ij} + \Delta\vartheta_{ij} + \frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}g_{ij}X^k{}_{,k} = 0,$$

што су тражене Белтрами-Мичелове једначине.

## 48. Кретање течности. Једначина континуитета

**Задатак 259.** (Одељак 48., задатак 1.). Показати да оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ не мења тензорски карактер величине на коју се примењује.

*Решење:* Уочимо неку тензорску величину, рецимо контраваријантни вектор $u^i$, чије су координате функције и времена $t$. Ставимо

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = v^i.$$

Треба показати да је $v^i$ контраваријантни вектор.

Ако уведемо смену променљивих

$$\bar x^i = \bar x^i(x^j),$$

тада је

$$\bar u^i = u^k\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^k},$$

па добијамо

$$\bar v^i = \frac{\partial\bar u^i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(u^k\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial u^k}{\partial t}\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^k},$$

јер парцијални изводи $\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$ не зависе експлицитно од времена, односно

$$\bar{v}^i = v^k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i},$$

на основу чега закључујемо да оператор $\dfrac{\partial}{\partial t}$ не мења тензорски карактер величине на коју се примењује, што је и требало показати.

**Задатак 260**. (Одељак 48., задатак 2.). Написати дивергенцију вектора брзине $v^i$ струјања течности и једначину континуитета у сферним поларним координатама.

***Решење***: Једначина континуитета (једначина конзервације масе), у односу на произвољни систем криволинијских координата, је облика (видети одељак 48., једначину 21.)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v^i{}_{,i} = 0$$

где је $\rho$ густина (специфична маса — маса јединице запремине) и $v^i$ контраваријантне координате брзине.

С обзиром да је (видети одељак 48., једначину 6.)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{,k} v^k,$$

једначину континуитета можемо написати у облику

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{,k} v^k + \rho v^k{}_{,k} = 0. \tag{1}$$

Из коваријантног извода

$$v^i{}_{,j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^l \begin{Bmatrix} i \\ l\, j \end{Bmatrix},$$

за дивергенцију брзине добијамо

$$v^k{}_{,k} = \frac{\partial v^k}{\partial x^k} + v^k \begin{Bmatrix} i \\ k\, i \end{Bmatrix}.$$

С обзиром да је (видети одељак 21., једначину 10.)

$$\begin{Bmatrix} i \\ k\, i \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^k} (\log \sqrt{g}),$$



дивергенцију брзине можемо изразити у облику

$$v^i{}_{,i} = \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + v^k \frac{\partial}{\partial x^k} (\log \sqrt{g}). \tag{2}$$

У систему сферних поларних координата $r$, $\theta$, $\varphi$, је

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos^2\theta \end{Bmatrix}, \qquad g = |g_{ij}| = r^4 \cos^2\theta,$$

$$\{v^i\} = \{v^r\, v^\theta\, v^\varphi\}, \quad v^r = \frac{dr}{dt}, \quad v^\theta = \frac{d\theta}{dt}, \quad v^\varphi = \frac{d\varphi}{dt},$$

па за дивергенцију брзине, на основу (2), добијамо

$$v^i{}_{,i} = \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\varphi}{\partial \varphi} + v^r \frac{\partial}{\partial r} [\log (r^2 \cos\theta)] +$$

$$+ v^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} [\log (r^2 \cos\theta)] + v^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} [\log (r^2 \cos\theta)],$$

или, ако извршимо назначена диференцирања,

$$v^i{}_{,i} = \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} v^r - \operatorname{tg}\theta\, v^\theta. \tag{3}$$

У овом изразу за дивергенцију фигуришу контраваријантне координате брзине. Ако контраваријантне координате изразимо преко физичких, тј. ставимо

$$v^r = v_{(r)}, \quad v^\theta = \frac{1}{r} v_{(\theta)}, \quad v^\varphi = \frac{1}{r \cos\theta} v_{(\varphi)},$$

за дивергенцију брзине добијамо

$$v^i{}_{,i} = \frac{\partial v_{(r)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\cos\theta} \frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} v_{(r)} - \frac{1}{r} \operatorname{tg}\theta\, v_{(\theta)}. \tag{4}$$

С обзиром да је у сферном поларном систему координата

$$\rho = \rho(r, \theta, \varphi, t), \quad \{\rho_{,k}\} = \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial r}\, \frac{\partial \rho}{\partial \theta}\, \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right\},$$

једначина континуитета (1), користећи (3), добија облик

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^r \frac{\partial \rho}{\partial r} + v^\theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^\varphi \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \rho \left( \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r} v^r - \operatorname{tg}\theta\, v^\theta \right) = 0,$$

или, користећи (4), изражена преко физичких координата брзине,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_{(r)}\frac{\partial \rho}{\partial r}+v_{(\theta)}\frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \theta}+\frac{v_{(\varphi)}}{r\cos\theta}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}+\rho\left(\frac{\partial v_{(r)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial \varphi}-\frac{2}{r}v_{(r)}-\frac{1}{r}\operatorname{tg}\theta\, v_{(\theta)}\right)=0.$$

**Задатак 261**. (Одељак 48., задатак 3.). Изразити координате тензора вртложности у цилиндарским и сферним поларним координатама.

*Решење*: У односу на произвољни систем криволинијских координата, коваријантне координате тензора вртложности су (видети одељак 48., једначину 10.)

$$(1) \qquad \omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right).$$

а) *Цилиндарске координате*. У цилиндарском систему координата $r$, $\theta$, $z$, коваријантне координате брзине су $v_r$, $v_\theta$, $v_z$, па су, на основу израза (1), коваријантне координате тензора вртложности

$$\omega_{rr}=\omega_{\theta\theta}=\omega_{zz}=0,$$

$$\omega_{r\theta}=-\omega_{\theta r}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right),$$

$$\omega_{rz}=-\omega_{zr}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial z}\right),$$

$$\omega_{\theta z}=-\omega_{z\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right),$$

тј., дате у облику матрице,

$$\{\omega_{ij}\}=\begin{Bmatrix}\omega_{rr} & \omega_{r\theta} & \omega_{rz}\\ \omega_{\theta r} & \omega_{\theta\theta} & \omega_{\theta z}\\ \omega_{zr} & \omega_{z\theta} & \omega_{zz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0 & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}-\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial r}-\dfrac{\partial v_r}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v_r}{\partial \theta}-\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 & \dfrac{\partial v_z}{\partial \theta}-\dfrac{\partial v_\theta}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v_r}{\partial z}-\dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z}-\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & 0\end{Bmatrix}.$$

Овом матрицом дате су коваријантне координате тензора вртложности изражене преко коваријантних координата вектора брзине. Ми можемо, међутим, коваријантне координате тензора вртложности изразити преко физичких координата брзине. Стављајући, наиме,

$$v_r=v_{(r)},\quad v_\theta=r\,v_{(\theta)},\quad v_z=v_{(z)},$$



добијамо

$$\{\omega_{ij}\}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0 & r\dfrac{\partial v_{(\theta)}}{\partial r}-\dfrac{\partial v_{(r)}}{\partial \theta}+v_{(\theta)} & \dfrac{\partial v_{(z)}}{\partial r}-\dfrac{\partial v_{(r)}}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v_{(r)}}{\partial \theta}-r\dfrac{\partial v_{(\theta)}}{\partial r}-v_{(\theta)} & 0 & \\ \dfrac{\partial v_{(r)}}{\partial z}-\dfrac{\partial v_{(z)}}{\partial r} & r\dfrac{\partial v_{(\theta)}}{\partial z}-\dfrac{\partial v_{(z)}}{\partial \theta} & 0\end{Bmatrix}.$$

Овом матрицом дате су коваријантне координате тензора вртложности изражене преко физичких координата брзине.

Из коваријантних координата тензора вртложности можемо одредити његове физичке координате. Стављајући, наиме,

$$\omega_{r\theta}=r\,\omega_{(r\theta)},\quad \omega_{rz}=\omega_{(rz)},\quad \omega_{\theta z}=r\,\omega_{(\theta z)},$$

добијамо

$$\{\omega_{(ij)}\}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0 & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}-\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) & \dfrac{\partial v_z}{\partial r}-\dfrac{\partial v_r}{\partial z}\\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta}-\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) & 0 & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta}-\dfrac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\\ \dfrac{\partial v_r}{\partial z}-\dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial z}-\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) & 0\end{Bmatrix}$$

и

$$\{\omega_{(ij)}\}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0 & \dfrac{\partial v_{(\theta)}}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_{(r)}}{\partial \theta}+\dfrac{v_{(\theta)}}{r} & \dfrac{\partial v_{(z)}}{\partial r}-\dfrac{\partial v_{(r)}}{\partial z}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_{(r)}}{\partial \theta}-\dfrac{\partial v_{(\theta)}}{\partial r}-\dfrac{v_{(\theta)}}{r} & 0 & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_{(z)}}{\partial \theta}-\dfrac{\partial v_{(\theta)}}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v_{(r)}}{\partial z}-\dfrac{\partial v_{(z)}}{\partial r} & \dfrac{\partial v_{(\theta)}}{\partial z}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_{(z)}}{\partial \theta} & 0\end{Bmatrix}.$$

Првом од ових матрица дате су физичке координате тензора вртложности изражене преко коваријантних координата брзине, а другом те исте координате изражене преко физичких координата брзине.

б) *Сферне поларне координате*. У систему сферних поларних координата $r$, $\theta$, $\varphi$, коваријантне координате брзине су $v_r$, $v_\theta$, $v_\varphi$, па су, на основу (1), коваријантне координате тензора вртложности

$$\omega_{r\theta}=-\omega_{\theta r}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right),$$

$$\omega_{r\varphi}=-\omega_{\varphi r}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right),\qquad \omega_{rr}=\omega_{\theta\theta}=\omega_{\varphi\varphi}=0,$$

$$\omega_{\theta\varphi}=-\omega_{\varphi\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}\right),$$

тј., приказане у облику матрице,

$$\{\omega_{ij}\} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}-\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta} & \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\dfrac{\partial v_r}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}-\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 & \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}-\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} & 0\end{Bmatrix}.$$

Стављајући

$$v_r = v_{(r)}, \qquad v_\theta = r v_{(\theta)}, \qquad v_\varphi = r\cos\theta\, v_{(\varphi)},$$

за коваријантне координате тензора вртложности, изражене преко физичких координата брзине, добијамо

$$\omega_{rr} = 0,$$

$$\omega_{r\theta} = -\omega_{21} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial r} - \frac{\partial v_{(r)}}{\partial\theta} + v_{(\theta)}\right),$$

$$\omega_{r\varphi} = \omega_{31} = \frac{1}{2}\left(\cos\theta\, v_{(\varphi)} + r\cos\theta\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial r} - \frac{\partial v_{(r)}}{\partial\varphi}\right),$$

$$\omega_{\theta\theta} = 0,$$

$$\omega_{\theta\varphi} = -\omega_{32} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial\varphi} - r\sin\theta\, v_{(\varphi)} - r\cos\theta\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial\theta}\right),$$

$$\omega_{\varphi\varphi} = 0.$$

Ако коваријантне координате тензора вртложности изразимо преко његових физичких координата, стављајући

$$\omega_{r\theta} = r\,\omega_{(r\theta)}, \qquad \omega_{r\varphi} = r\cos\theta\,\omega_{(r\varphi)}, \qquad \omega_{\theta\varphi} = r^2\cos\theta\,\omega_{(\theta\varphi)},$$

добијамо

$$\{\omega_{(ij)}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} - \dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}\right) & \dfrac{1}{2r\cos\theta}\left(\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} - \dfrac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right) \\ \dfrac{1}{2r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta} - \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) & 0 & \dfrac{1}{2r^2\cos\theta}\left(\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} - \dfrac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right) \\ \dfrac{1}{2r\cos\theta}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{2r^2\cos\theta}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}\right) & 0 \end{Bmatrix}$$



и

$$\omega_{(rr)} = 0,$$

$$\omega_{(r\theta)} = -\omega_{(\theta r)} = \frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial\theta} + \frac{v_{(\theta)}}{r},$$

$$\omega_{(r\varphi)} = -\omega_{(\varphi r)} = \frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial r} - \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial\varphi} + \frac{v_{(\varphi)}}{r},$$

$$\omega_{(\theta\theta)} = 0.$$

$$\omega_{(\theta\varphi)} = -\omega_{(\varphi\theta)} = \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial\theta} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{r}v_{(\varphi)},$$

$$\omega_{(\varphi\varphi)} = 0.$$

У првом случају дате су физичке координате тензора вртложности изражене преко коваријантних координата брзине а у другом те исте координате изражене преко физичких координата брзине.

*Напомена*. Тензор вртложности (као и сваки тензор другог реда) има четири врсте координата: контраваријантне, коваријантне, мешовите и физичке, при чему и међу мешовитим координатама треба разликовати две врсте, $\omega^i_{\cdot j}$ и $\omega_i^{\cdot j}$, нпр. $\omega^r_{\cdot\theta}$ и $\omega_r^{\cdot\theta}$. Важно је напоменути да сваку од ових врста координата тензора вртложности можемо изразити преко контраваријантних, коваријантних или физичких координата брзине. У овом задатку ми смо коваријантне и физичке координате тензора вртложности, у цилиндарском и сферном поларном систему координата, изразили преко коваријантних и физичких координата брзине.

## 49. Идеална течност. Ојлерове основне једначине хидродинамике. Карактеристична једначина

**Задатак 262.** (Одељак 49., задатак 1.). Написати Ојлерове једначине струјања идеалне течносте у цилиндарским и сферним поларним координатама.

***Решење***: Ојлерове једначине (диференцијалне једначине кретања) идеалне течности, у односу на произвољни систем криволинијских координата $x^i$, су облика (видети одељак 49., једначину 5.)

$$\frac{\delta v^i}{\delta t} = X^i - \frac{1}{\rho}g^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^j}. \tag{1}$$

а) *Цилиндарски систем координата*. У систему цилиндарских координата $r$, $\theta$, $z$, контраваријанте координате спољашње запреминске силе и брзине су

$$\{X^i\} = \{X^r\, X^\theta\, X^z\}, \qquad \{v^i\} = \{v^r\, v^\theta\, v^z\} = \left\{\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{dz}{dt}\right\}$$

па једначини (1) одговарају следеће три скаларне једначине

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta v^r}{\delta t}=X^r-\frac{1}{\rho}g^{rr}\frac{\partial p}{\partial r}=X^r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
(2)\qquad &\frac{\delta v^\theta}{\delta t}=X^\theta-\frac{1}{\rho}g^{\theta\theta}\frac{\partial p}{\partial \theta}=X^\theta-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r^2}\frac{\partial p}{\partial \theta},\\
&\frac{\delta v^z}{\delta t}=X^z-\frac{1}{\rho}g^{zz}\frac{\partial p}{\partial z}=X^z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},
\end{aligned}
$$

јер су координате метричког тензора (видети задатак 138.)

$$
\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix}.
$$

Међутим, како је

$$\frac{\delta v^i}{\delta t}=\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^i{}_{,k}\,v^k,$$

добијамо

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta v^r}{\delta t}=\frac{\partial v^r}{\partial t}+v^r v^r{}_{,r}+v^\theta v^r{}_{,\theta}+v^z v^r{}_{,z},\\
(3)\qquad &\frac{\delta v^\theta}{\delta t}=\frac{\partial v^\theta}{\partial t}+v^r v^\theta{}_{,r}+v^\theta v^\theta{}_{,\theta}+v^z v^\theta{}_{,z},\\
&\frac{\delta v^z}{\delta t}=\frac{\partial v^z}{\partial t}+v^r v^z{}_{,r}+v^\theta v^z{}_{,\theta}+v^z v^z{}_{,z}.
\end{aligned}
$$

Из коваријантног извода

$$v^i{}_{,j}=\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+v^k\left\{\begin{matrix} i\\ k\ j\end{matrix}\right\},$$

с обзиром да су једине од нуле различите координате Кристофеловог симбола друге врсте (видети задатак 138.)

$$\left\{\begin{matrix} \theta\\ \theta\ r\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} \theta\\ r\ \theta\end{matrix}\right\}=\frac{1}{r},\qquad \left\{\begin{matrix} r\\ \theta\ \theta\end{matrix}\right\}=-r,$$

добијамо

$$
\begin{aligned}
v^r{}_{,r}&=\frac{\partial v^r}{\partial r}+v^r\left\{\begin{matrix} r\\ r\ r\end{matrix}\right\}+v^\theta\left\{\begin{matrix} r\\ r\ \theta\end{matrix}\right\}+v^z\left\{\begin{matrix} r\\ z\ r\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v^r}{\partial r},\\
v^r{}_{,\theta}&=\frac{\partial v^r}{\partial \theta}+v^r\left\{\begin{matrix} r\\ r\ \theta\end{matrix}\right\}+v^\theta\left\{\begin{matrix} r\\ \theta\ \theta\end{matrix}\right\}+v^z\left\{\begin{matrix} r\\ z\ \theta\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v^r}{\partial r}-r v^\theta,\\
v^r{}_{,z}&=\frac{\partial v^r}{\partial z}+v^r\left\{\begin{matrix} r\\ r\ z\end{matrix}\right\}+v^\theta\left\{\begin{matrix} r\\ \theta\ z\end{matrix}\right\}+v^z\left\{\begin{matrix} r\\ z\ z\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v^r}{\partial z},
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
v^\theta{}_{,r}&=\frac{\partial v^\theta}{\partial r}+v^r\left\{\begin{matrix} \theta\\ r\ r\end{matrix}\right\}+v^\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ \theta\ r\end{matrix}\right\}+v^z\left\{\begin{matrix} \theta\\ z\ r\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v^\theta}{\partial r}+\frac{v^\theta}{r},\\
v^\theta{}_{,\theta}&=\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta}+v^r\left\{\begin{matrix} \theta\\ r\ \theta\end{matrix}\right\}+v^\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ \theta\ \theta\end{matrix}\right\}+v^z\left\{\begin{matrix} \theta\\ z\ \theta\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta}+\frac{v^r}{r},\\
v^\theta{}_{,z}&=\frac{\partial v^\theta}{\partial z}+v^r\left\{\begin{matrix} \theta\\ r\ z\end{matrix}\right\}+v^\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ \theta\ z\end{matrix}\right\}+v^z\left\{\begin{matrix} \theta\\ z\ z\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v^\theta}{\partial z},\\
v^z{}_{,r}&=\frac{\partial v^z}{\partial r}+v^r\left\{\begin{matrix} z\\ r\ r\end{matrix}\right\}+v^\theta\left\{\begin{matrix} z\\ \theta\ r\end{matrix}\right\}+v^z\left\{\begin{matrix} z\\ z\ r\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v^z}{\partial r},\\
v^z{}_{,\theta}&=\frac{\partial v^z}{\partial \theta}+v^r\left\{\begin{matrix} z\\ r\ \theta\end{matrix}\right\}+v^\theta\left\{\begin{matrix} z\\ \theta\ \theta\end{matrix}\right\}+v^z\left\{\begin{matrix} z\\ z\ \theta\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v^z}{\partial \theta},\\
v^z{}_{,z}&=\frac{\partial v^z}{\partial z}+v^r\left\{\begin{matrix} z\\ r\ z\end{matrix}\right\}+v^\theta\left\{\begin{matrix} z\\ \theta\ z\end{matrix}\right\}+v^z\left\{\begin{matrix} z\\ z\ z\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v^z}{\partial z},
\end{aligned}
$$

па једначине (3) можемо написати у облику

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta v^r}{\delta t}&=\frac{\partial v^r}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^r}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^r}{\partial \theta}+v^z\frac{\partial v^r}{\partial z}-r(v^\theta)^2,\\
\frac{\delta v^\theta}{\delta t}&=\frac{\partial v^\theta}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^\theta}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta}+v^z\frac{\partial v^\theta}{\partial z}+\frac{2}{r}v^r v^\theta,\\
\frac{\delta v^z}{\delta t}&=\frac{\partial v^z}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^z}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^z}{\partial \theta}+v^z\frac{\partial v^z}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Ако ове једначине искористимо у једначинама (2), добијамо Ојлерове једначине у цилиндарском систему координата,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v^r}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^r}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^r}{\partial \theta}+v^z\frac{\partial v^r}{\partial z}-r(v^\theta)^2=X^r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
&\frac{\partial v^\theta}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^\theta}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta}+v^z\frac{\partial v^\theta}{\partial z}+\frac{2}{r}v^r v^\theta=X^\theta-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r^2}\frac{\partial p}{\partial \theta},\\
&\frac{\partial v^z}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^z}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^z}{\partial \theta}+v^z\frac{\partial v^z}{\partial z}=X^z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

У овим једначинама фигуришу контраваријантне координате силе и брзине. Ако у њима контраваријантне координате изразимо преко физичких, тј. ставимо

$$v^r=v_{(r)}=\frac{dr}{dt},\qquad v^\theta=\frac{1}{r}v_{(\theta)}=\frac{d\theta}{dt},\qquad v^z=v_{(z)}=\frac{dz}{dt},$$

$$X^r=X_{(r)},\qquad X^\theta=\frac{1}{r}X_{(\theta)},\qquad X^z=X_{(z)},$$

добијамо Ојлерове једначине у цилиндарском систему координата, изражене преко физичких координата,

$$\frac{\partial v_{(r)}}{\partial t}+v_{(r)}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial r}+\frac{1}{r}v_{(\theta)}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial \theta}+v_{(z)}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial z}-\frac{1}{r}v_{(\theta)}^{2}=X_{(r)}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial t}+v_{(r)}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial r}+\frac{1}{r}v_{(\theta)}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \theta}+v_{(z)}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial z}+$$

$$+\frac{2}{r}v_{(r)}v_{(\theta)}=X_{(\theta)}-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial v_{(z)}}{\partial t}+v_{(r)}\frac{\partial v_{(z)}}{\partial r}+\frac{1}{r}v_{(\theta)}\frac{\partial v_{(z)}}{\partial \theta}+v_{(z)}\frac{\partial v_{(z)}}{\partial z}=X_{(z)}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

б) *Сферне поларне координате.* У систему сферних поларних координата $r$, $\theta$, $\varphi$, контраваријантне координате спољашње запреминске силе и брзине су

$$\{X^i\}=\{X^r\,X^\theta\,X^\varphi\},\qquad \{v^i\}=\{v^r\,v^\theta\,v^\varphi\}=\left\{\frac{dr}{dt}\;\frac{d\theta}{dt}\;\frac{d\varphi}{dt}\right\}.$$

Систем парцијалних извода хидростатског притиска по просторним координатама (коваријантни вектор) је

$$\left\{\frac{\partial p}{\partial x^i}\right\}=\left\{\frac{\partial p}{\partial r}\;\frac{\partial p}{\partial \theta}\;\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right\}.$$

Координате метричког тензора и једине од нуле различите координате Кристофеловог симбола друге врсте су (видети задатак 138.)

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\cos^2\theta\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix}\theta\\ r\ \theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta\ r\end{Bmatrix}=\frac{1}{r},\quad \begin{Bmatrix}r\\ \theta\ \theta\end{Bmatrix}=-r,\quad \begin{Bmatrix}\varphi\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\ r\end{Bmatrix}=\frac{1}{r},\quad \begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\ \theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta\ \varphi\end{Bmatrix}=-\operatorname{tg}\theta,$$

$$\begin{Bmatrix}r\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}=r\cos^2\theta,\qquad \begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}=\sin\theta\cos\theta.$$

На основу овога и једначине (1), Ојлерове једначине су

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned}\frac{\delta v^r}{\delta t}&=X^r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\ \frac{\delta v^\theta}{\delta t}&=X^\theta-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r^2}\frac{\partial p}{\partial \theta},\\ \frac{\delta v^\varphi}{\delta t}&=X^\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$



У овом случају је

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned}\frac{\delta v^r}{\delta t}&=\frac{\partial v^r}{\partial t}+v^r v^r{}_{,r}+v^\theta v^r{}_{,\theta}+v^\varphi v^r{}_{,\varphi},\\ \frac{\delta v^\theta}{\delta t}&=\frac{\partial v^\theta}{\partial t}+v^r v^\theta{}_{,r}+v^\theta v^\theta{}_{,\theta}+v^\varphi v^\theta{}_{,\varphi},\\ \frac{\delta v^\varphi}{\delta t}&=\frac{\partial v^\varphi}{\partial t}+v^r v^\varphi{}_{,r}+v^\theta v^\varphi{}_{,\theta}+v^\varphi v^\varphi{}_{,\varphi}.\end{aligned}$$

С обзиром да је

$$v^r{}_{,r}=\frac{\partial v^r}{\partial r}+v^r\begin{Bmatrix}r\\ r\ r\end{Bmatrix}+v^\theta\begin{Bmatrix}r\\ \theta\ r\end{Bmatrix}+v^\varphi\begin{Bmatrix}r\\ \varphi\ r\end{Bmatrix}=\frac{\partial v^r}{\partial r},$$

$$v^r{}_{,\theta}=\frac{\partial v^r}{\partial \theta}+v^r\begin{Bmatrix}r\\ r\ \theta\end{Bmatrix}+v^\theta\begin{Bmatrix}r\\ \theta\ \theta\end{Bmatrix}+v^\varphi\begin{Bmatrix}r\\ \varphi\ \theta\end{Bmatrix}=\frac{\partial v^r}{\partial \theta}-r\,v^\theta,$$

$$v^r{}_{,\varphi}=\frac{\partial v^r}{\partial \varphi}+v^r\begin{Bmatrix}r\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}+v^\theta\begin{Bmatrix}r\\ \theta\ \varphi\end{Bmatrix}+v^\varphi\begin{Bmatrix}r\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}=\frac{\partial v^r}{v\,\varphi}-r\cos^2\theta\,v^\varphi,$$

$$v^\theta{}_{,r}=\frac{\partial v^\theta}{\partial r}+v^r\begin{Bmatrix}\theta\\ r\ r\end{Bmatrix}+v^\theta\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta\ r\end{Bmatrix}+v^\varphi\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\ r\end{Bmatrix}=\frac{\partial v^\theta}{\partial r}+\frac{v^\theta}{r},$$

$$v^\theta{}_{,\theta}=\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta}+v^r\begin{Bmatrix}\theta\\ r\ \theta\end{Bmatrix}+v^\theta\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta\ \theta\end{Bmatrix}+v^\varphi\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\ \theta\end{Bmatrix}=\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta}+\frac{v^r}{r},$$

$$v^\theta{}_{,\varphi}=\frac{\partial v^\theta}{\partial \varphi}+v^r\begin{Bmatrix}\theta\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}+v^\theta\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta\ \varphi\end{Bmatrix}+v^\varphi\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}=\frac{\partial v^\theta}{\partial \varphi}+\sin\theta\cos\theta\,v^\varphi,$$

$$v^\varphi{}_{,r}=\frac{\partial v^\varphi}{\partial r}+v^r\begin{Bmatrix}\varphi\\ r\ r\end{Bmatrix}+v^\theta\begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta\ r\end{Bmatrix}+v^\varphi\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\ r\end{Bmatrix}=\frac{\partial v^\varphi}{\partial r}+\frac{v^\varphi}{r},$$

$$v^\varphi{}_{,\theta}=\frac{\partial v^\varphi}{\partial \theta}+v^r\begin{Bmatrix}\varphi\\ r\ \theta\end{Bmatrix}+v^\theta\begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta\ \theta\end{Bmatrix}+v^\varphi\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\ \theta\end{Bmatrix}=\frac{\partial v^\varphi}{\partial \theta}-\operatorname{tg}\theta\,v^\varphi,$$

$$v^\varphi{}_{,\varphi}=\frac{\partial v^\varphi}{\partial \varphi}+v^r\begin{Bmatrix}\varphi\\ r\ \varphi\end{Bmatrix}+v^\theta\begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta\ \varphi\end{Bmatrix}+v^\varphi\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\ \varphi\end{Bmatrix}=\frac{\partial v^\varphi}{\partial \varphi}+\frac{v^r}{r}-\operatorname{tg}\theta\,v^\theta,$$

једначине (5) постају

$$\frac{\delta v^r}{\delta t}=\frac{\partial v^r}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^r}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^r}{\partial \theta}+v^\varphi\frac{\partial v^r}{\partial \varphi}-r\,(v^\theta)^2-r\cos^2\theta\,(v^\varphi)^2,$$

$$\frac{\delta v^\theta}{\delta t}=\frac{\partial v^\theta}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^\theta}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta}+v^\varphi\frac{\partial v^\theta}{\partial \varphi}+\frac{2}{r}v^r v^\theta+\sin\theta\cos\theta\,(v^\varphi)^2,$$

$$\frac{\delta v^\varphi}{\delta t}=\frac{\partial v^\varphi}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^\varphi}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^\varphi}{\partial \theta}+v^\varphi\frac{\partial v^\varphi}{\partial \varphi}+\frac{2}{r}v^r v^\varphi-2\operatorname{tg}\theta\,v^\theta v^\varphi.$$

па су, на основу тога, Ојлерове једначине (4) облика

$$\frac{\partial v^r}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^r}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^r}{\partial \theta}+v^\varphi\frac{\partial v^r}{\partial \varphi}-r\,(v^\theta)^2-r\cos^2\theta\,(v^\varphi)^2=X^r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial v^\theta}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^\theta}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta}+v^\varphi\frac{\partial v^\theta}{\partial \varphi}+\frac{2}{r}v^r v^\theta+\sin\theta\cos\theta\,(v^\varphi)^2=X^\theta-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r^2}\frac{\partial p}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial v^\varphi}{\partial t}+v^r\frac{\partial v^\varphi}{\partial r}+v^\theta\frac{\partial v^\varphi}{\partial \theta}+v^\varphi\frac{\partial v^\varphi}{\partial \varphi}+\frac{2}{r}v^r v^\varphi-2\,\mathrm{tg}\,\theta\, v^\theta v^\varphi=X^\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}.$$

У овим једначинама фигуришу контраваријантне координате силе и брзине. Ако у њима контраваријантне координате изразимо преко физичких,

$$v^r=v_{(r)},\qquad v^\theta=\frac{1}{r}v_{(\theta)},\qquad v^\varphi=\frac{1}{r\cos\theta}v_{(\varphi)},$$

$$X^r=X_{(r)},\qquad X^\theta=\frac{1}{r}X_{(\theta)},\qquad X^\varphi=\frac{1}{r\cos\theta}X_{(\varphi)},$$

добијамо Ојлерове једначине у сферном поларном систему координата, изражене преко физичких координата,

$$\frac{\partial v_{(r)}}{\partial t}+v_{(r)}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial r}+\frac{v_{(\theta)}}{r}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial \theta}+\frac{v_{(\varphi)}}{r\cos\theta}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial \varphi}-$$

$$-\frac{1}{r}\left[v_{(\theta)}^2+v_{(\varphi)}^2\right]=X_{(r)}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial t}+v_{(r)}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial r}+\frac{v_{(\theta)}}{r}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \theta}+\frac{v_{(\varphi)}}{r\cos\theta}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \varphi}+$$

$$+\frac{1}{r}\left[v_{(r)}v_{(\theta)}+\mathrm{tg}\,\theta\, v_{(\varphi)}^2\right]=X_{(\theta)}-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial r}+v_{(r)}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial r}+\frac{v_{(\varphi)}}{r}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial \theta}+\frac{v_{(\varphi)}}{r\cos\theta}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial \varphi}+$$

$$+\frac{1}{r}\left[v_{(r)}v_{(\varphi)}-\mathrm{tg}\,\theta\, v_{(\theta)}v_{(\varphi)}\right]=X_{(\varphi)}-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}.$$

**Задатак 363.** (Одељак 49., задатак 2.). Кад идеална баротропна течност струји стационарно

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial \delta}{\partial t}=0\right)$$

под дејством конзервативне силе, извести Бернулијев интеграл основне једначине динамике идеалне течности у генералисаним координатама.



*Решење*: Основна једначина динамике идеалне течности (Ојлерова једначина) у генералисаним координатама је облика (видети одељак 49., једначину 8.)

$$\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^i{}_{,k}\,v^k=X^i-\frac{1}{\rho}g^{ik}p_{,k}. \tag{1}$$

Из једнакости

$$\delta^{ij}_{kl}\,v^l v_{i,j}=v^j v_{k,j}-v^i v_{i,k},$$

добијамо

$$v^j v_{k,j}=v^i v_{i,k}+\delta^{ij}_{kl}\,v^l v_{i,j}$$

односно

$$v^i{}_{,k}\,v^k=g^{is}\,v^k v_{k,s}+g^{is}\,\delta^{kj}_{sl}\,v^l v_{k,j}. \tag{2}$$

Такође, из једнакости

$$(v^k v_k)_{,s}=2\,v^k v_{k,s},$$

следи

$$v^k v_{k,s}=\frac{1}{2}(v^k v_k)_{,s},$$

што заменом у (2) даје

$$v^i{}_{,k}\,v^k=\frac{1}{2}g^{is}(v^k v_k)_{,s}+g^{is}\,\delta^{kj}_{sl}\,v^l v_{k,j}. \tag{3}$$

Користећи (3), једначину (1) можемо написати у облику

$$\frac{\partial v^i}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{is}(v^k v_k)_{,s}+g^{is}\delta^{kj}_{sl}\,v^l v_{k,j}=X^i-\frac{1}{\rho}g^{ik}p_{,k}. \tag{4}$$

Ово је трансформисани облик Ојлерове једначине.

Ако баротропни флуид (густина је функција само притиска или је константна) струји стационарно под дејством конзервативне силе, можемо ставити

$$\frac{\partial v^i}{\partial t}=0,\qquad X^i=g^{ij}U_{,j},\qquad \frac{1}{\rho}p_{,k}=\left(\int\frac{dp}{\rho}\right)_{,k},$$

па трансформисана Ојлерова једначина (4) добија облик

$$\frac{1}{2}g^{is}(v^k v_k)_{,s}+g^{is}\delta^{kj}_{sl}\,v^l v_{k,j}=g^{is}U_{,s}-g^{is}\left(\int\frac{dp}{\rho}\right)_{,s},$$

односно

$$g^{is}\left(\frac{v^2}{2}-U+\int\frac{dp}{\rho}\right)_{,s}=g^{is}\delta^{kj}_{sl}\,v^l v_{j,k},$$

или у коваријантном облику

$$\left(\frac{v^2}{2}-U+\int\frac{dp}{\rho}\right)_{,s}=\delta^{kj}_{sl}\,v^l v_{j,k}. \tag{5}$$

Ако је једначина струјнице (линије чији је јединични вектор тангенте у свакој њеној тачки колинеаран са брзином у тој тачки)

$$x^i = x^i(t),$$

онда је брзина у тачкама струјне линије одређена контраваријантним координатама

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

Помножимо, сада, једначину (5) скаларно брзином $v^i$ у тачки струјне линије. Тада добијамо

$$\left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho}\right)_{,s} \frac{dx^s}{dt} = \delta^{kj}_{sl} v^l v^s v_{j,k},$$

односно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho}\right) = \delta^{kj}_{sl} v^s v^l v_{j,k}.$$

Међутим, како је (видети задатак 26.)

$$\delta^{kj}_{sl} v^s v^l = v^k v^j - v^j v^k = 0,$$

горња се једначина своди на

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho}\right) = 0,$$

одакле следи да дуж сваке струјне линије мора бити

(6) $$\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = C,$$

где је $C$ интеграциона константа која има различите вредности од једне до друге струјнице, али исту вредност дуж једне струјнице.

Једначина (6) представља Бернулијев интеграл Ојлерове једначине и обично се назива Бернулијева једначина.

Ако је флуид нестишљив ($\rho = \text{const.}$) и струји у пољу Земљине теже ($U = -gz$) Бернулијева једначина је облика

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.}$$

**Задатак 264.** (Одељак 49., задатак 3.). Извести Лагранжев интеграл основне једначине динамике идеалне течности у случају потенцијалног струјања течности.

***Решење*:** У случају потенцијалног струјања идеалног баротропног флуида у пољу конзервативних сила, можемо ставити

$$X^i = g^{is} U_{,s}, \quad v^i = g^{is}\varphi_{,s}, \quad \frac{1}{\rho} p_{,k} = \left(\int \frac{dp}{\rho}\right)_{,k},$$



где су $U$ и $\varphi$ скаларне функције (потенцијали силе и брзине).

Трансформисана Ојлерова једначина (видети задатак 263., једначину 4.)

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{is}(v^k v_k)_{,s} + g^{is}\delta^{kj}_{sl} v^l v_{k,j} = X^i - \frac{1}{\rho} g^{ik} p_{,k},$$

у овом случају се своди на облик

(1) $$\frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{is}(v^k v_k)_{,s} = g^{is} U_{,s} - g^{is}\left(\int \frac{dp}{\rho}\right)_{,s}$$

јер је, у еуклидском простору,

$$g^{is}\delta^{kj}_{sl} v^l \varphi_{,kj} = 0.$$

Први члан једначине (1), после смене, можемо написати у облику

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(g^{is}\varphi_{,s}) = g^{is}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_{,s}) = g^{is}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{,s},$$

па једначина (1) постаје

$$g^{is}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{,s} + g^{is}\left(\frac{v^2}{2}\right)_{,s} = g^{is} U_{,s} - g^{is}\left(\int \frac{dp}{\rho}\right)_{,s},$$

односно

$$g^{is}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{d\varphi}{\rho}\right)_{,s} = 0,$$

или, у коваријантном облику,

(2) $$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho}\right)_{,s} = 0.$$

Израз у загради ове једначине је нека скаларна функција која може зависити од просторних координата и времена. С обзиром да су јој парцијални изводи по просторним кооринатама једнака нули, закључујемо да не зависи од просторних координата, али може зависити од времена. Према томе, биће

(3) $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = C(t),$$

где је $C(t)$ функција само времена $t$.

Једначина (3) представља Лагранжев интеграл Ојлерове једначине (у литератури се назива и Коши-Лагранжев интеграл Ојлерове једначине). Важно је подвући да једначина (3) није добијена интеграцијом дуж струјне линије, него се интегралило по целом флуидном простору. Зато се функција $C(t)$ не мења од једне до друге струјнице, већ важи за цело струјно поље.

*Напомена.* Када је потенцијално струјање стационарно, тада се Лагранжев интеграл своди на

$$\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = C$$

где је $C$ константа. Видимо, дакле, да је по облику исти као Бернулијев интеграл. Разлика је у томе што у овом случају интеграциона константа има исту вредност у целом струјном пољу, док у случају кад стационарно струјање није потенцијално, она је константа дуж сваке струјне линије, односно путање флуидних делића (код стационарних струјања путање флуидних делића се поклапају са струјним линијама).

**Задатак 265.** (Одељак 49., задатак 4.). За идеалну и баротропну течност која струји под дејством конзервативне силе извести Хелмхолцове једначине у тензорском облику.

***Решење***: Трансформисану Ојлерову једначину (видети задатак 263., једначину 4.)

$$\frac{\partial v^i}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{is}(v^k v_k)_{,s}+g^{is}\delta^{kj}_{sl}v^l v_{k,j}=X^i-\frac{1}{\rho}g^{ik}p_{,k},$$

можемо написати у коваријантном облику

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\left(\frac{v^2}{2}\right)_{,i}+\delta^{kj}_{il}v^l v_{k,j}=X_i-\frac{1}{\rho}p_{,i},$$

односно у облику

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\left(\frac{v^2}{2}\right)_{,i}+v^l(v_{i,l}-v_{l,i})=X_i-\frac{1}{\rho}p_{,i}. \tag{1}$$

За идеални баротропни флуид који струји у пољу конзервативних сила можемо ставити

$$X_i=U_{,i},\quad \frac{1}{\rho}p_{,i}=\left(\int\frac{dp}{\rho}\right)_{,i},$$

па се једначина (1) своди на облик

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\left(\frac{v^2}{2}\right)_{,i}+v^l(v_{i,l}-v_{l,i})=U_{,i}-\left(\int\frac{dp}{\rho}\right)_{,i},$$

или, с обзиром да је

$$v_{i,l}-v_{l,i}=2\,\omega_{li},$$

на облик

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+2\,v^l\omega_{li}=\left(U-\frac{v^2}{2}-\int\frac{dp}{\rho}\right)_{,i}.$$

Ако ову једначину коваријантно диференцирамо, биће

$$\frac{\partial v_{i,j}}{\partial t}+2\,v^l\omega_{li,j}+2\,v^l_{,j}\omega_{li}=\left(U-\frac{v^2}{2}-\int\frac{dp}{\rho}\right)_{,ij}.$$

Извршимо ли, даље, композицију са Ричијевим антисиметричним тензором, добијамо

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^{kji}v_{i,j})+2\,\varepsilon^{kji}\omega_{li,j}v^l+2\,\varepsilon^{kji}\omega_{li}v^l_{,j}=0.$$

С обзиром да је

$$\omega_{li}=\varepsilon_{lis}\omega^s,\qquad \varepsilon^{kji}v_{i,j}=\varepsilon^{kji}\omega_{ji},$$



горњу једначину можемо написати у облику

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^{kji}\omega_{ji})+2\,\varepsilon^{kji}\varepsilon_{lis}\omega^s_{,j}v^l+2\,\varepsilon^{kji}\varepsilon_{lis}\omega^s v^l_{,j}=0,$$

или у облику

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^{kji}\omega_{ji})+2\,\delta^{kji}_{lis}\omega^s_{,j}v^l+2\,\delta^{kji}_{lis}\omega^s v^l_{,j}=0.$$

Како је, даље,

$$\varepsilon^{kji}\omega_{ji}=2\,\omega^k$$

и

$$\delta^{kji}_{lis}=-\,\delta^{kj}_{ls},$$

можемо писати

$$\frac{\partial\omega^k}{\partial t}-\delta^{kj}_{ls}\omega^s_{,j}v^l-\delta^{kj}_{ls}\omega^s v^l_{,j}=0,$$

односно

$$\frac{\partial\omega^k}{\partial t}-\omega^j_{,j}v^k+\omega^k_{,j}v^j-\omega^j v^k_{,j}+\omega^k v^j_{,j}=0.$$

С обзиром да је, даље,

$$\omega^j_{,j}=\frac{1}{2}\varepsilon^{jkl}\omega_{kl,j}=\frac{1}{4}\varepsilon^{jkl}(v_{l,kj}-v_{k,lj})=0,$$

и да из једначине континуитета

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho v^j_{,j}=0,$$

следи

$$v^j_{,j}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

добијамо

$$\frac{\partial\omega^k}{\partial t}+\omega^k_{,j}v^j-\omega^j v^k_{,j}-\frac{\omega^k}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=0.$$

Пошто је

$$\frac{\partial\omega^k}{\partial t}+\omega^k_{,j}v^j=\frac{\delta\omega^k}{\delta t},\qquad \frac{\delta\omega^k}{\delta t}-\frac{\omega^k}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\rho\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\omega^k}{\rho}\right),$$

добијамо

$$\rho\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\omega^k}{\rho}\right)=v^k_{,j}\omega^j.$$

Ову једначину можемо написати у облику

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\omega^k}{\rho}\right)=\frac{\omega^j}{\rho}v^k_{,j}.$$

Ово је Хелмхолцова једначина. Она је добијена, за идеални баротропни флуид у пољу конзервативних сила, из Ојлерове једначине елиминацијом хидростатичког притиска. Према томе, у једначини фигурише једна непозната мање, али је зато повишен ред једначине.

## 50. Вискозна течност. Тензор вискозности. Навије-Стоксове једначине

**Задатак 266**. (Одељак 50., задатак 1.). Написати Навије-Стоксове једначине у сферним поларним координатама.

***Решење***: Навије-Стоксове диференцијалне једначине кретања вискозног флуида у коваријантном облику су (видети одељак 50., једначину 23.)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_{i,\,k}\,v^k=X_i-\frac{1}{\rho}\,p_{,\,i}+\nu\,\Delta\,v_i, \tag{1}$$

где је

$$v_{i,\,k}=\frac{\partial v_i}{\partial x^k}-v_r\left\{\begin{matrix} r\\ i\;k\end{matrix}\right\} \tag{2}$$

коваријантни извод коваријантних координата брзине, $p$ хидростатички притисак, $X_i$ координате спољашње запреминске силе (рачунате по јединици масе) и $\nu$ кинематички коефицијент вискозности.

У сферним поларним координатама $r,\ \theta,\ \varphi$, је

$$\{v^i\}=\{v^r\,v^\theta\,v^\varphi\},$$

$$\{X_i\}=\{X_r\,X_\theta\,X_\varphi\},$$

$$\{\varphi_{,\,i}\}=\left\{\frac{\partial p}{\partial r}\;\frac{\partial p}{\partial\theta}\;\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right\},$$

$$\{\Delta\,v_i\}=\{\Delta\,v_r\,\Delta\,v_\theta\,\Delta\,v_\varphi\},$$

па једначини (1) одговарају следеће три једначине

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_{r,\,r}\,v^r+v_{r,\,\theta}\,v^\theta+v_{r,\,\varphi}\,v^\varphi=X_r-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\Delta\,v_r,\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_{\theta,\,r}\,v^r+v_{\theta,\,\theta}\,v^\theta+v_{\theta,\,\varphi}\,v^\varphi=X_\theta-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\Delta\,v_\theta,\\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_{\varphi,\,r}\,v^r+v_{\varphi,\,\theta}\,v^\theta+v_{\varphi,\,\varphi}\,v^\varphi=X_\varphi-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\nu\Delta\,v_\varphi.
\end{aligned} \tag{3}$$

У систему сферних поларних координата, координате метричког тензора су (видети задатак 138.)

$$\{g_{ij}\}=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\cos^2\theta\end{Bmatrix},\qquad \{g^{ij}\}=\begin{Bmatrix}0&0&0\\0&\dfrac{1}{r^2}&0\\0&0&\dfrac{1}{r^2\cos^2\theta}\end{Bmatrix},$$



па, ако контраваријантне координате вектора брзине у једначинама (3) изразимо преко коваријантних, једначине (3) постају

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\,v_{r,\,r}+\frac{v_\theta}{r^2}\,v_{r,\,\theta}+\frac{v_\varphi}{r^2\cos^2\theta}\,v_{r,\,\varphi}=X_r-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\,\Delta v_r,\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\,v_{\theta,\,r}+\frac{v_\theta}{r^2}\,v_{\theta,\,\theta}+\frac{v_\varphi}{r^2\cos^2\theta}\,v_{\theta,\,\varphi}=X_\theta-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\Delta\,v_\theta,\\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\,v_{\varphi,\,r}+\frac{v_\theta}{r^2}\,v_{\varphi,\,\theta}+\frac{v_\varphi}{r^2\cos^2\theta}\,v_{\varphi,\,\varphi}=X_\varphi-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\nu\Delta\,v_\varphi.
\end{aligned} \tag{4}$$

У сферном поларном систему координата од нуле различите координате Кристофеловог симбола друге врсте су (видети задатак 138.)

$$\left\{\begin{matrix} r\\ \theta\;\theta\end{matrix}\right\}=-r,\quad \left\{\begin{matrix} \theta\\ r\;\theta\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} \theta\\ \theta\;r\end{matrix}\right\}=\frac{1}{r},\quad \left\{\begin{matrix} r\\ \varphi\;\varphi\end{matrix}\right\}=-r\cos^2\theta,$$

$$\left\{\begin{matrix} \varphi\\ r\;\varphi\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} \varphi\\ \varphi\;r\end{matrix}\right\}=\frac{1}{r},\quad \left\{\begin{matrix} \theta\\ \varphi\;\varphi\end{matrix}\right\}=\sin\theta\cos\theta,\quad \left\{\begin{matrix} \varphi\\ \theta\;\varphi\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} \varphi\\ \varphi\;\theta\end{matrix}\right\}=-\operatorname{tg}\theta,$$

па, из једначине (2), добијамо

$$\begin{aligned}
v_{r,\,r}&=\frac{\partial v_r}{\partial r}-v_r\left\{\begin{matrix} r\\ r\;r\end{matrix}\right\}-v_\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ r\;r\end{matrix}\right\}-v_\varphi\left\{\begin{matrix} \varphi\\ r\;r\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v_r}{\partial r},\\
v_{r,\,\theta}&=\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-v_r\left\{\begin{matrix} r\\ r\;\theta\end{matrix}\right\}-v_\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ r\;\theta\end{matrix}\right\}-v_\varphi\left\{\begin{matrix} \varphi\\ r\;\theta\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r},\\
v_{r\,\varphi}&=\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-v_r\left\{\begin{matrix} r\\ r\;\varphi\end{matrix}\right\}-v_\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ r\;\varphi\end{matrix}\right\}-v_\varphi\left\{\begin{matrix} \varphi\\ r\;\varphi\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{r},\\
v_{\theta,\,r}&=\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-v_r\left\{\begin{matrix} r\\ \theta\;r\end{matrix}\right\}-v_\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ \theta\;r\end{matrix}\right\}-v_\varphi\left\{\begin{matrix} \varphi\\ \theta\;r\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r},\\
v_{\theta,\,\theta}&=\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-v_r\left\{\begin{matrix} r\\ \theta\;\theta\end{matrix}\right\}-v_\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ \theta\;\theta\end{matrix}\right\}-v_\varphi\left\{\begin{matrix} \varphi\\ \theta\;\theta\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+r\,v_r,\\
v_{\theta,\,\varphi}&=\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}-v_r\left\{\begin{matrix} r\\ \theta\;\varphi\end{matrix}\right\}-v_\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ \theta\;\varphi\end{matrix}\right\}-v_\varphi\left\{\begin{matrix} \varphi\\ \theta\;\varphi\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}+\operatorname{tg}\theta\,v_\varphi,\\
v_{\varphi,\,r}&=\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-v_r\left\{\begin{matrix} r\\ \varphi\;r\end{matrix}\right\}-v_\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ \varphi\;r\end{matrix}\right\}-v_\varphi\left\{\begin{matrix} \varphi\\ \varphi\;r\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r},\\
v_{\varphi,\,\theta}&=\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}-v_r\left\{\begin{matrix} r\\ \varphi\;\theta\end{matrix}\right\}-v_\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ \varphi\;\theta\end{matrix}\right\}-v_\varphi\left\{\begin{matrix} \varphi\\ \varphi\;\theta\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}+\operatorname{tg}\theta\,v_\varphi,\\
v_{\varphi,\,\varphi}&=\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-v_r\left\{\begin{matrix} r\\ \varphi\;\varphi\end{matrix}\right\}-v_\theta\left\{\begin{matrix} \theta\\ \varphi\;\varphi\end{matrix}\right\}-v_\varphi\left\{\begin{matrix} \varphi\\ \varphi\;\varphi\end{matrix}\right\}=\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+r\cos^2\theta\,v_r-\sin\theta\cos\theta\,v_\theta.
\end{aligned} \tag{5}$$

Да бисмо изразили лапласијан координата вектора брзине, искористићемо једначине 6. у задатку 256. На основу њих, можемо писати

$$\Delta v_r = \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\theta\frac{\partial v_r}{\partial \theta} -$$

$$- \frac{2}{r^3\cos^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}v_r + \frac{2}{r^3}\operatorname{tg}\theta\, v_\theta,$$

(6)

$$\Delta v_\theta = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{2}{r^2\cos^3\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta}{r^2\cos^2\theta},$$

$$\Delta v_\varphi = \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} -$$

$$- \frac{2}{r^2}\operatorname{tg}\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\operatorname{tg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}.$$

Замењујући (5) и (6) у једначине (4), добијамо Навије-Стоксове једначине у сферним поларним координатама

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta}{r^3} - \frac{v_\varphi}{r^3\cos^2\theta} =$$

$$= X_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^3\cos^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta_\theta} - \frac{2}{r^2}v_r + \frac{2}{r^3}\operatorname{tg}\theta\, v_\theta\right),$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\operatorname{tg}\theta}{r^2\cos^2\theta}(v_\varphi)^2 =$$

$$= X_\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2\cos^3\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta}{r^2\cos^2\theta}\right),$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = X_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2}\operatorname{tg}\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\operatorname{tg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}\right).$$



Ако у овим једначинама коваријантне координате изразимо преко физичких, тј. ставимо

$$v_r = v_{(r)}, \quad v_\theta = r\, v_{(\theta)}, \quad v_\varphi = r\cos\theta\, v_{(\varphi)},$$

$$X_r = X_{(r)}, \quad X_\theta = r\, X_{(\theta)}, \quad X_\varphi = r\cos\theta\, X_{(\varphi)},$$

тада изражене преко физичких координата, Навије-Стоксове једначине у сферном поларном систему координата гласе

$$\frac{\partial v_{(r)}}{\partial t} + v_{(r)}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial r} + \frac{v_{(\theta)}}{r}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial \theta} + \frac{v_{(\varphi)}}{r\cos\theta}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\left(v_{(\theta)}^2 + v_{(\varphi)}^2\right) =$$

$$= X_{(r)} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_{(t)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{(r)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 v_{(r)}}{\partial \varphi^2} + \right.$$

$$+ \frac{2}{r}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2\cos\theta}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \theta} -$$

$$\left. - \frac{2}{r^2}v_{(r)} + \frac{2}{r^2}\operatorname{tg}\theta\, v_{(\theta)}\right),$$

$$\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial t} + v_{(r)}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial r} + \frac{v_{(\theta)}}{r}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \theta} + \frac{v_{(\varphi)}}{r\cos\theta}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\left(v_{(r)}v_{(\theta)} + \operatorname{tg}\theta\, v_{(\varphi)}^2\right) =$$

$$= X_{(\theta)} - \frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_{(\theta)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{(\theta)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 v_{(\theta)}}{\partial \varphi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial \varphi} - \frac{v_{(\theta)}}{r^2\cos^2\theta}\right),$$

$$\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial t} + v_{(r)}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial r} + \frac{v_{(\theta)}}{r}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial \theta} + \frac{v_{(\varphi)}}{r\cos\theta}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\left(v_{(r)}v_{(\varphi)} - \operatorname{tg}\theta\, v_{(\theta)}v_{(\varphi)}\right) =$$

$$= X_{(\varphi)} - \frac{1}{\rho}\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_{(\varphi)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \partial_{(\varphi)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 v_{(\varphi)}}{\partial \varphi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial r} + \frac{2}{r^2\cos\theta}\frac{\partial v_{(r)}}{\partial \varphi} - \frac{2\operatorname{tg}\theta}{r^2\cos\theta}\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_{(\varphi)}}{\partial \theta} - \frac{v_{(\varphi)}}{r^2\cos^2\theta}\right).$$

**Задатак 267.** (Одељак 50., задатак 2.). Координате тензора вискозности написати у цилиндарским координатама.

*Решење:* Коваријантне координате тензора вискозности, у односу на произвољни систем генералисаних координата, су (видети одељак 50., једначину 14.)

(1)
$$\beta_{ij} = \mu\,(v_{i,\,j} + v_{j,\,i}),$$

где је

(2)
$$v_{i,\,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - v_k\left\{ \begin{matrix} k \\ i\ j \end{matrix} \right\}$$

коваријантни извод коваријантних координата вектора брзине, а $\mu$ коефицијент динамичке вискозности.

С обзиром да је симетричан, тензор вискозности има шест међусобно независних координата. Те координате су

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= 2\,\mu\, v_{1,1}, \\
\beta_{12} &= \beta_{21} = \mu\,(v_{1,2}+v_{2,1}), \\
\beta_{13} &= \beta_{31} = \mu\,(v_{1,3}+v_{3,1}), \\
\beta_{22} &= 2\,\mu\, v_{2,2}, \\
\beta_{23} &= \beta_{32} = \mu\,(v_{2,3}+v_{3,2}), \\
\beta_{33} &= 2\,\mu\, v_{3,3}.
\end{aligned}$$

У систему цилиндарских координата $r$, $\theta$, $z$, координате метричког тензора и од нуле различите координате Кристофеловог симбола друге врсте су (видети задатак 138.)

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ \ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \\ \theta\ \ \theta \end{Bmatrix} = -r, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ \ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ \ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta \\ r\ \ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\ \ r \end{Bmatrix} = \frac{1}{r},$$

па, на основу (2), добијамо

$$\begin{aligned}
v_{r,r} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} - v_r \begin{Bmatrix} r \\ r\ \ r \end{Bmatrix} - v_\theta \begin{Bmatrix} \theta \\ r\ \ r \end{Bmatrix} - v_z \begin{Bmatrix} z \\ r\ \ r \end{Bmatrix} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\
v_{r,\theta} &= \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_r \begin{Bmatrix} r \\ r\ \ \theta \end{Bmatrix} - v_\theta \begin{Bmatrix} \theta \\ r\ \ \theta \end{Bmatrix} - v_z \begin{Bmatrix} z \\ r\ \ \theta \end{Bmatrix} = \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}, \\
v_{r,z} &= \frac{\partial v_r}{\partial z} - v_r \begin{Bmatrix} r \\ r\ \ z \end{Bmatrix} - v_\theta \begin{Bmatrix} \theta \\ r\ \ z \end{Bmatrix} - v_z \begin{Bmatrix} z \\ r\ \ z \end{Bmatrix} = \frac{\partial v_r}{\partial z}, \\
v_{\theta,r} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - v_r \begin{Bmatrix} r \\ \theta\ \ r \end{Bmatrix} - v_\theta \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\ \ r \end{Bmatrix} - v_z \begin{Bmatrix} z \\ \theta\ \ r \end{Bmatrix} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}, \\
v_{\theta,\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - v_r \begin{Bmatrix} r \\ \theta\ \ \theta \end{Bmatrix} - v_\theta \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\ \ \theta \end{Bmatrix} - v_z \begin{Bmatrix} z \\ \theta\ \ \theta \end{Bmatrix} = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + r v_r, \\
v_{\theta,z} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - v_r \begin{Bmatrix} r \\ \theta\ \ z \end{Bmatrix} - v_\theta \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\ \ z \end{Bmatrix} - v_z \begin{Bmatrix} z \\ \theta\ \ z \end{Bmatrix} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \\
v_{z,r} &= \frac{\partial v_z}{\partial r} - v_r \begin{Bmatrix} r \\ z\ \ r \end{Bmatrix} - v_\theta \begin{Bmatrix} \theta \\ z\ \ r \end{Bmatrix} - v_z \begin{Bmatrix} z \\ z\ \ r \end{Bmatrix} = \frac{\partial v_z}{\partial r}, \\
v_{z,\theta} &= \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - v_r \begin{Bmatrix} r \\ z\ \ \theta \end{Bmatrix} - v_\theta \begin{Bmatrix} \theta \\ z\ \ \theta \end{Bmatrix} - v_z \begin{Bmatrix} z \\ z\ \ \theta \end{Bmatrix} = \frac{\partial v_z}{\partial \theta}, \\
v_{z,z} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} - v_r \begin{Bmatrix} r \\ z\ \ z \end{Bmatrix} - v_\theta \begin{Bmatrix} \theta \\ z\ \ z \end{Bmatrix} - v_z \begin{Bmatrix} z \\ z\ \ z \end{Bmatrix} = \frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$



На основу овога и једначине (1), за коваријантне координате тензора вискозности, у цилиндарском систему координата, добијамо

$$\begin{aligned}
\beta_{rr} &= 2\,\mu\, v_{r,r} = 2\,\mu\,\frac{\partial v_r}{\partial r}, \\
\beta_{r\theta} &= \beta_{\theta r} = \mu\,(v_{r,\theta}+v_{\theta,r}) = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{2}{r}\,v_\theta\right), \\
\beta_{rz} &= \beta_{zr} = \mu\,(v_{r,z}+v_{z,r}) = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \\
\beta_{\theta\theta} &= 2\,\mu\, v_{\theta,\theta} = 2\,\mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + r\,v_r\right), \\
\beta_{\theta z} &= \beta_{z\theta} = \mu\,(v_{\theta,z}+v_{z,\theta}) = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right), \\
\beta_{zz} &= 2\,\mu\, v_{z,z} = 2\,\mu\,\frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Ако коваријантне координате тензора вискозности изразимо преко његових физичких координата, тј. ставимо

$$\beta_{rr} = \beta_{(rr)}, \quad \beta_{r\theta} = r\,\beta_{(r\theta)}, \quad \beta_{rz} = \beta_{(rz)},$$
$$\beta_{\theta\theta} = r^2\,\beta_{(\theta\theta)}, \quad \beta_{\theta z} = r\,\beta_{(\theta z)}, \quad \beta_{zz} = \beta_{(zz)},$$

и коваријантне координате вектора брзине изразимо преко његових физичких координата, тј. ставимо

$$v_r = v_{(r)}, \quad v_\theta = r\,v_{(\theta)}, \quad v_z = v_{(z)},$$

добијамо физичке координате тензора вискозности изражене преко физичких координата вектора брзине,

$$\begin{aligned}
\beta_{(rr)} &= 2\,\mu\,\frac{\partial v_{(r)}}{\partial r}, \\
\beta_{(r\theta)} &= \beta_{(\theta r)} = \mu\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_{(r)}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial r} - \frac{v_{(\theta)}}{r}\right), \\
\beta_{(rz)} &= \beta_{(zr)} = \mu\left(\frac{\partial v_{(r)}}{\partial z} + \frac{\partial v_{(z)}}{\partial r}\right), \\
\beta_{(\theta\theta)} &= 2\,\mu\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial \theta} + \frac{v_{(r)}}{r}\right),
\end{aligned}$$

$$\beta_{(\theta z)} = \beta_{(z \theta)} = \mu \left( \frac{\partial v_{(\theta)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{(z)}}{\partial \theta} \right),$$

$$\beta_{(zz)} = 2 \mu \frac{\partial v_{(z)}}{\partial z}.$$

*Напомена.* Тензор вискозности, као и сваки тензор другог реда, има четири врсте координата: контраваријантне, коваријантне, мешовите и физичке. Сваку од ових врста координата тензора вискозности можемо изразити преко контраваријантних, коваријантних или физичких координата вектора брзине. У овом задатку ми смо, прво, коваријантне координате тензора вискозности изразили преко коваријантних координата вектора брзине, па, затим, физичке координате тензора вискозности преко физичких координата вектора брзине.