Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЈА ПОЉА

Научна књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1952

Наслов оригинала:

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Под общей редакцией
акад. Л. Д. Ландау

Том четвёртый

Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Издание 2-е переработанное

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1948 Ленинград

Превео
Драгиша Ивановић

Тираж 3000 примерака

Штампа „Вук Караџић“, погон „Слободан Јовић“, Београд, Стојана Протића 52

САДРЖАЈ

Страна

Глава I. ПРИНЦИП РЕЛАТИВИТЕТА — — — — — — — — — — 1
- § 1. Брзина простирања узајамног дјејства — — — — — — 1
- § 2. Интервал — — — — — — — — — — — — — — 4
- § 3. Сопствено вријеме — — — — — — — — — — — — 8
- § 4. Lorentz-ова трансформација — — — — — — — — — 10
- § 5. Трансформација брзине — — — — — — — — — 13
- § 6. Четвородимензионални вектори — — — — — — — — 15
- § 7. Четвородимензионална брзина и убрзање — — — — — — 20

Глава II. РЕЛАТИВИСТИЧКА МЕХАНИКА — — — — — — — — 22
- § 8. Елементарне честице у теорији релативитета — — — — — 22
- § 9. Принцип најмањег дјејства — — — — — — — — — 23
- § 10. Енергија и импулс — — — — — — — — — — — — 25
- § 11. Дефект масе — — — — — — — — — — — — — 30
- § 12. Судари — — — — — — — — — — — — — — — 31
- § 13. Момент импулса — — — — — — — — — — — — 35

Глава III. ОПТЕРЕЋЕЊЕ (НАЕЛЕКТРИСАНА ЧЕСТИЦА) У ПОЉУ — 38
- § 14. Четвородимензионални потенцијал поља — — — — — — 38
- § 15. Једначине кретања оптерећења у пољу — — — — — — 41
- § 16. Изотропија времена — — — — — — — — — — — — 44
- § 17. Градијентна инваријантност — — — — — — — — — 44
- § 18. Стално електромагнетно поље — — — — — — — — 45
- § 19. Кретање у сталном хомогеном електричном пољу — — — — 47
- § 20. Кретање у сталном хомогеном магнетном пољу — — — — 48
- § 21. Кретање оптерећења у сталном хомогеном електричном и магнетном пољу — — — — — — — — — — — — — 51
- § 22. Тензор електромагнетног поља — — — — — — — — — 53
- § 23. Lorentz-ове трансформације за поље — — — — — — — 57
- § 24. Инваријанте поља — — — — — — — — — — — — 59

Глава IV. ЈЕДНАЧИНЕ ПОЉА — — — — — — — — — — — 62
- § 25. Први пар Maxwell-ових једначина — — — — — — — 62
- § 26. Дјејство за електромагнетно поље — — — — — — — 63
- § 27. Четвородимензионални вектор струје — — — — — — — 66
- § 28. Једначина континуитета — — — — — — — — — — 68
- § 29. Други пар Maxwell-ових једначина — — — — — — — 71
- § 30. Густина енергије и Poynting-ов вектор — — — — — — 74
- § 31. Тензор енергије - импулса — — — — — — — — — — 75
- § 32. Тензор енергије - импулса електромагнетног пола — — — — 79
- § 33. Теорема вириала — — — — — — — — — — — — 83
- § 34. Тензор енергије - импулса макроскопских тијела — — — — 85

Глава V. СТАЛНО ПОЉЕ — — — — — — — — — — — — 88
- § 35. Coulomb-ов закон — — — — — — — — — — — — 88
- § 36. Електростатичка енергија оптерећења — — — — — — — 89
- § 37. Поље наелектрисане честице, која се равномјерно креће — — 91
- § 38. Кретање у Coulomb-овом пољу — — — — — — — — — 93
- § 39. Диполни момент — — — — — — — — — — — — 96
- § 40. Мултиполни моменти — — — — — — — — — — — 98
- § 41. Систем оптерећења у спољашњем пољу — — — — — — 99
- § 42. Стално магнетно поље — — — — — — — — — — — 101
- § 43. Магнетни момент — — — — — — — — — — — — 102

Страна

Глава VI. ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИ ТАЛАСИ 107
§ 44. D'Alambert-ова једначина 107
§ 45. Равни таласи 108
§ 46. Монохроматични равни талас 111
§ 47. Doppler-ов ефект 114
§ 48. Поларизација 115
§ 49. Спектрално разлагање 116
§ 50. Парцијално поларизована свјетлост 119
§ 51. Разлагање електростатичког поља 122
§ 52. Сопствене осцилације поља 123

Глава VII. ПРОСТИРАЊЕ СВЈЕТЛОСТИ 128
§ 53. Геометриска оптика 128
§ 54. Интензитет 132
§ 55. Угаони ајконал 133
§ 56. Танки снопови зрака 136
§ 57. Пресликавање широким сноповима зрака 141
§ 58. Границе геометриске оптике 143
§ 59. Дифракција 145
§ 60. Fresnel-ова дифракција 151
§ 61. Fraunhofer-ова дифракција 155

Глава VIII. ПОЉЕ ОПТЕРЕЋЕЊА У КРЕТАЊУ 161
§ 62. Ретардовани потенцијали 161
§ 63. Liénard — Wiechert-ови потенцијали 164
§ 64. Спектрално разлагање ретардованих потенцијала 167
§ 65. Lagrange-ова функција с тачношћу до члана другога реда 170

Глава IX. ЗРАЧЕЊЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА 175
§ 66. Поље система оптерећења на далеким растојањима 175
§ 67. Диполно зрачење 179
§ 68. Зрачење при сударима 182
§ 69. Зрачење код Coulomb-овог узајамног дјејства 185
§ 70. Квадриполно и магнетно диполно зрачење 192
§ 71. Поље зрачења на малим растојањима 195
§ 72. Зрачење оптерећења, које се брзо креће 198
§ 73. Зрачење оптерећења, које се креће равномјерно по кругу 201
§ 74. Кочење зрачењем 205
§ 75. Спектрално разлагање зрачења у ултрарелативистичком случају 214
§ 76. Расипање слободним оптерећењима 217
§ 77. Расипање таласа са малим фреквенцијама 222
§ 78. Расипање таласа са великим фреквенцијама 224

Глава X. ЧЕСТИЦА У ГРАВИТАЦИОНОМ ПОЉУ 228
§ 79. Гравитационо поље у нерелативистичкој механици 228
§ 80. Гравитационо поље у релативистичкој механици 229
§ 81. Криволиниске координате 232
§ 82. Растојања и интервали времена 238
§ 83. Коваријантно диференцирање 242
§ 84. Веза међу Christoffel-овим симболима и метричким тензором 246
§ 85. Кретање честица у гравитационом пољу 250
§ 86. Гранични прелаз 252
§ 87. Једначине електродинамике у присуству гравитационог поља 253
§ 88. Константно гравитационо поље 255
§ 89. Ротација 261

Глава XI. ЈЕДНАЧИНЕ ГРАВИТАЦИОНОГ ПОЉА 264
§ 90. Тензор кривине 264
§ 91. Особине тензора кривине 267
§ 92. Дјејство за гравитационо поље 270
§ 93. Тензор енергије - импулса 273

Страна

§ 94. Једначина гравитационог поља — — — — — — — — — 276
§ 95. Newton-ов закон — — — — — — — — — — — — 281
§ 96. Централно - симетрично гравитационо поље — — — — — 284
§ 97. Кретање у централно - симетричном гравитационом пољу — — 291
§ 98. Псеудотензор енергије - импулса — — — — — — — — 294
§ 99. Гравитациони таласи — — — — — — — — — — — 301
§ 100. Слабо гравитационо поље — — — — — — — — — — 304
§ 101. Зрачење гравитационих таласа — — — — — — — — — 306
§ 102. Изотропни простор — — — — — — — — — — — 309
§ 103. Просторно - временска метрика затвореног изотропног модела 313
§ 104. Просторно - временска метрика отвореног изотропног модела 317
§ 105. Простирање свјетлости — — — — — — — — — — — 320

ГЛАВА I

ПРИНЦИП РЕЛАТИВИТЕТА

§ 1. Брзина простирања узајамног дјејства

За описивање процеса, који се у природи дешавају, неопходно је потребно имати систем референције. Под системом референције подразумијева се координатни систем, који служи за одређивање положаја честица у простору, гдје је за систем везан сат, који служи за показивање времена.

Постоје системи референције у којима се слободно кретање тијела, тј. кретање тијела, на која не дјејствују спољашње силе, врши константном брзином. Такви системи називају се инерцијални.

Ако се два система референције крећу равномјерно транслаторно један у односу на други и ако је један од њих инерцијалан, онда је, очигледно, и други систем инерцијалан (свако слободно кретање и у том систему биће праволиниско и равномјерно). На тај начин постоји произвољан број система референције, који се један у односу на други крећу равномјерно транслаторно.

Искуство показује, да важи такозвани принцип релативитета. Према томе принципу сви природни закони једнаки су у свим инерцијалним системима референције. Другим ријечима, једначине које изражавају природне законе инваријантне су у односу на трансформацију координата и времена једног инерцијалног система у други. То значи, да једначина, која описује неки природни закон, будући да је изражена координатама и временом у различитим инерцијалним системима референције, има један те исти облик.

Узајамно дјејство материјалних честица у обичној механици описује се помоћу потенцијалне енергије узајамног дјејства, која је функција од координата честица које дјејствују једна на другу. Лако је видјети, да такав начин описивања узајамног дјејства укључује у себи претпоставку о тренутности распростирања узајамног дјејства, односно бесконачну брзину простирања тог дјејства. И заиста, силе којима на сваку честицу дјејствују остале честице у сваком моменту зависе, при таквом описивању, само од положаја честица у том моменту. Промјена положаја ма које од честица које узајамно дјејствују одражава се истог момента на остале честице.

Међутим, искуство показује, да узајамна тренутна дјејства у природи не постоје. Према томе и механика, која се заснива на схватању о бесконачној брзини простирања узајамног дјејства, садржи у себи извјесну нетачност. И заиста, ако код једног од тијела која узајамно дјејствују наступи нека промјена, онда ће се на другом тијелу то одразити тек по истеку неког временског интервала. Тек послије тог временског интервала на другом се тијелу почињу одигравати процеси, које је изазвала дата промјена. Ако се растојање међу тим тијелима подијели тим временском интервалом, добива се „брзина простирања узајамног дејства“.

Напоменимо, да се та брзина може назвати и максимална брзина простирања узајамног дејства. Она одређује само онај временски интервал послије кога се промјена настала на једном тијелу, почне дешавати на другом тијелу. Очигледно је, да постојање максималне брзине узајамног дејства показује у исто вријеме, да је у природи уопште немогућно кретање тијела са брзином већом од те брзине. И заиста, кад би могло постојати такво кретање, онда би се помоћу њега могло остварити узајамно дејство са брзином која превазилази највећу могућну брзину простирања узајамног дејства.

О узајамном дејству које се простире од једне до друге честице, често се говори као о „сигналу“ који се упућује од прве честице и „који саопштава“ другој честици промјену, која се десила на првој честици. Тада се о брзини простирања узајамног дејства говори као о „брзини сигнала“.

Из принципа релативитета излази, специјално, да је брзина простирања узајамног дејства једнака у свим инерцијалним системима референције. На тај начин је брзина простирања узајамног дејства универзална константа.

Та константна брзина истодобно је, као што ће се показати касније, брзина простирања свјетлости у вакууму. Због тога се и она назива брзина свјетлости. Обично се означава словом c, а њена нумеричка вриједност према посљедњим мјерењима износи:

$$c = 2{,}99776 \cdot 10^{10}\ cm/sec \qquad (1{,}1)$$

Чињеница, да се у пракси у већини случајева класична механика показује довољно тачна, објашњава се великом вриједношћу ове брзине. Већина брзина са којима имамо посла толико је мала у односу на брзину свјетлости, да претпоставка о бесконачности посљедње практично не утиче на тачност резултата.

Повезивање принципа релативитета с коначношћу брзине простирања узајамног дејства назива се *Einstein*-овим принципом релативитета, за разлику од *Galilei*-овог принципа релативитета, који полази од бесконачне брзине простирања узајамног дејства. (Формулисао га је *Einstein* 1905 године).

Механика основана на *Einstein*-овом принципу релативитета (обично ћемо га називати просто принцип релативитета) назива се релативистичка механика. У граничном случају, када су брзине тијела која се крећу мале у односу на брзину свјетлости, може се занемарити утицај брзине простирања узајамног дејства на кретање. Тада релативистичка механика прелази у обичну механику, основану на претпоставци о тренутном простирању узајамног дејства. Та механика назива се *Newton*-ова или класична механика. Гранични прелаз са релативистичке на класичну механику може се формално извести као прелаз ка граници $c \to \infty$ у формулама релативистичке механике.

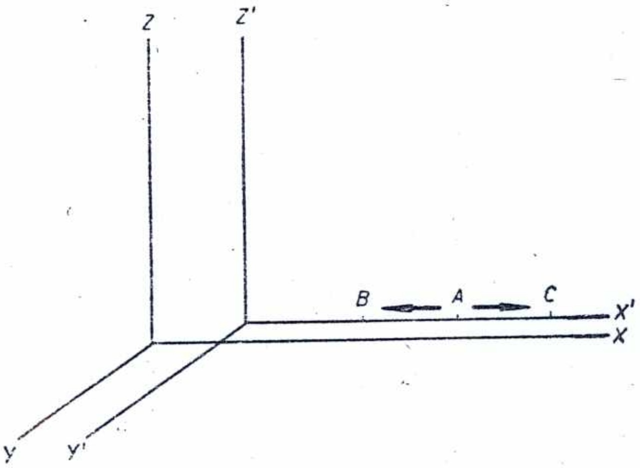
Већ у класичној механици су својства простора релативна, тј. зависе од тога у каквом се систему описују. Констатација, да се два разновремена догађаја одигравају на једном те истом мјесту простора или уопште на одређеном међусобном растојању, има смисао само онда, када је показано на који се систем референције односи та констатација.

Напротив, вријеме је у класичној механици апсолутно. Другим ријечима, својства времена сматрају се независна од система референције — вријеме је једно за све системе референције. То значи, да ако се ма какве двије појаве дешавају истовремено за неког посматрача, онда су оне истовремене и за сваког другог. Уопште, временски интервал између два дата догађаја мора бити једнак у свим системима референције.

Међутим, лако се је увјерити, да је појам апсолутног времена дубоко противрјечан *Einstein*-овом принципу релативитета. За то је довољно потсјетити, да у класичној механици, основаној на појму о апсолутном времену, важи опште познати закон слагања брзина, према којему је брзина сложеног кретања једноставно једнака збиру (векторском) брзина, које приказују то кретање. Будући да је овај закон универзалан, морао би бити примјенљив и на простирање узајамног дјејства. Одавде би слиједило, да брзина тог простирања мора бити различита и разним инерцијалним системима референције, у противрјечности са принципом релативитета. Међутим, искуство у том погледу потпуно потврђује принцип релативитета. И баш су мјерења која је први пут извео *Michelson* 1881 год. показала, да је брзина свјетлости потпуно независна од правца простирања. Међутим, према класичној механици брзина свјетлости морала би бити мања у смјеру кретања земље него у противном смјеру.

На тај начин принцип релативитета доводи до резултата, да вријеме није апсолутно. Вријеме тече различито у разним системима референције. Отуда слиједи да тврдња, да је међу два дата догађаја прошао одређени временски интервал, има смисла само онда, када се покаже, на који се систем референције та тврдња односи. Специјално догађаји, који су истовремени у неком систему референције, неће бити истовремени и у другом систему.

За објашњење тога корисно је посматрати слиједећи једноставан примјер. Посматрајмо два инерцијална система референције K и K' са координатним осама респективно XYZ и $X'Y'Z'$, који се крећу један према другоме удесно дуж оса X и X' (слика 1).



Сл. 1

Нека се из неке тачке A на оси X' упућују сигнали у два међусобно супротна смјера. Како је брзина простирања сигнала у систему K', као и у сваком инерцијалном систему једнака (у оба смјера) c, то ће у тачке B и C, које су подједнако удаљене од A, сигнали стићи једновремено (у систему K'). Међутим, лако је видјети, да та два догађаја (наилазак сигнала у B и C) неће бити истовремена за посматрача у систему K. Стварно, брзина сигнала у односу на систем K је, према принципу релативитета, једнака c, те како се тачка B креће (у односу на систем K) према сигналу, који јој је упућен, а тачка C у смјеру од сигнала (упућеном из A у C), онда ће у систему K сигнал стићи у тачку B раније, него у тачку C.

На тај начин *Einstein*-ов принцип релативитета уноси веома дубоке и фундаменталне промјене у основне физичке појмове. Претставе о простору и времену, које узимамо из свакидашњег искуства показују се само као приближне, у вези са тим, што у свакидашњем животу имамо посла само са брзинама, које су врло мале у односу на брзину свјетлости.

§ 2. Интервал

Убудуће често ћемо се служити појмом догађаја. Догађај се одређује мјестом, гдје се десио и временом када се десио. На тај начин догађај, који се дешава код неке материјалне честице, одређује се трима координатама те честице и временом када се догађај дешава.

Често је, због прегледности, корисно употребити фиктивни четородимензионални простор са трима просторним координатама и једном временском. У том простору догађај се претставља тачком. Те тачке називају се „свјетске тачке". Свакој честици одговара нека линија у том фиктивном четвородимензионалном простору (свјетска линија). Тачке те линије одређују координате честице у сваком моменту. Лако је схватити, да материјалној честици која се креће равномјерно и праволиниски одговара права свјетска линија.

Сада ћемо математички изразити принцип инваријантности брзине свјетлости. Посматрајмо два система референције K и K', који се један у односу на други крећу константном брзином. Притом узмимо координантне осе тако, да се осе X и X' поклапају, а осе Y и Z да буду паралелне осама Y' и Z'. Вријеме у системима K и K' означимо са t и t'.

Нека се први догађај састоји у томе, да се из тачке са координатама x_1, y_1, z_1 у систему K у моменту t_1, одашиље сигнал, који се простире брзином свјетлости. Простирање тога сигнала посматраћемо из система K. Нека се други догађај састоји у томе, да сигнал стиже у тачку x_2, y_2, z_2 у моменту t_2. Сигнал се простире брзином c. Према томе прешао је растојање $c(t_2-t_1)$. С друге стране, то растојање једнако је $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$.

На тај начин можемо написати слиједећу релацију међу координатама оба догађаја у систему K:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0. \qquad (2,1)$$

Та два догађаја, тј. простирање сигнала, могу се посматрати и из система K'.

Нека су у систему K' координате првог догађаја x_1', y_1', z_1', t_1' а другог: x_2', y_2', z_2', t_2'. Према принципу инваријантности брзине свјетлости та брзина је у системима K и K' једнака, и зато, аналогно са (2,1), имамо:

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-c^2(t_2'-t_1')^2=0. \qquad (2,2)$$

Ако су x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 координате ма каква два догађаја, онда се величина

$$s_{12}=[c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2]^{1/2} \qquad (2,3)$$

назива интервал међу та два догађаја.

На тај начин из принципа инваријантности брзине свјетлости слиједи да, ако је интервал међу два догађаја једнак нули у једном систему референције, онда је он једнак нули и у сваком другом систему.

Ако су два догађаја бесконачно близу један другоме, онда је интервал међу њима

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2,4}$$

Због математичке удобности и то баш зато, да би се формулама дао симетричнији облик, убудуће ћемо често мјесто времена t употребљавати другу промјенљиву τ, која је са t везана релацијом:

$$\tau = i\,c\,t. \tag{2,5}$$

Тада је:

$$s_{12}^2 = -\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (\tau_2 - \tau_1)^2\right], \tag{2,6}$$

$$ds^2 = -\left(dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2\right). \tag{2,7}$$

Сообразно томе ми ћемо сада и по координантним осама у нашем фиктивном, четвородимензионалном простору наносити x, y, z, τ, а не x, y, z, t. Као што је лако видјети, $-s_{12}^2$ може се тада протумачити као квадрат растојања међу тачкама x_1, y_1, z_1, τ_1, и x_2, y_2, z_2, τ_2 у том простору, а $-ds^2-$ као квадрат елемента дужине.[1]

Као што је горе показано, ако је $ds = 0$ у неком инерцијалном систему референције, онда је $ds' = 0$ и у другом систему. С друге стране, ds и ds' бесконачно су мале величине истог реда. На основу тих двају околности слиједи, да ds и ds' морају бити међусобно пропорционални:

$$ds = a\,ds',$$

гдје коефицијенат a може зависити само од апсолутне вриједности релативне брзине оба инерцијална система. Он не може зависити од координата и времена, јер би онда разне тачке простора и временски моменти имале различите вриједности, што противријечи хомогености простора и времена. Он, такођер, не може зависити од правца релативне брзине, јер би то противријечило изотропности простора. Према томе, са истим правом као што пишемо $ds = a\,ds'$, можемо писати:

$$ds' = a\,ds,$$

јер су, наравно, брзине кретања првог система у односу на други, и обрнуто, међусобно једнаке. Ако ставимо $ds = a\,ds'$ и $ds' = a\,ds$ налазимо да је $a^2 = 1$ тј. $a = \pm 1$. Да бисмо изабрали једну од тих вриједности, треба напоменути, да a може бити само једнако или стално $+1$ или стално -1. И стварно, кад би $a(v)$ за једне брзине било једнако $+1$, а за друге -1, онда би за неке морало имати вриједности у интервалу међу $+1$ и -1, што је немогуће. Но ако је тако, онда a увијек мора бити једнако $+1$, јер јер је специјални случај трансформације $ds' = a\,ds$ идентитет $ds' \equiv ds$, гдје је $a = +1$. Из $ds' = ds$ непосредно излази, да је и за коначне интервале $s' = s$.

На тај начин долазимо до врло важног резултата: интервал међу два догађаја једнак је у свим инерцијалним системима референције, тј. интервал

---

[1] Четвородимензионалну геометрију, која се одређује квадратном формом (2,4) или (2,7) увео је *Minkowski* у вези са теоријом релативитета.

је инваријанта у односу на трансформацију из једног инерцијалног система референције у ма који други. Та инваријантност је математички израз константности брзине свјетлости.

Нека су опет x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 координате два догађаја у неком систему референције K. Пита се, да ли постоји такав систем референције K', у коме би се оба та догађаја десили на једном истом мјесту простора?

Уведимо ознаке:

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Тада је интервал међу догађајима у систему K:

$$s^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2;$$

а у систему K':

$$s'^2_{12} = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12},$$

па је због инваријантности интервала

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}.$$

Ми хоћемо да се у систему K' оба догађаја десе у једној тачци, тј. да буде $l'_{12} = 0$.

Тада је:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} > 0.$$

Одавде слиједи, да систем референције са траженим својством постоји, ако је $s_{12}^2 > 0$ тј. ако је интервал међу оба догађаја реалан. Реални интервали називају се „временски“.

На тај начин ако је међу два догађаја интервал временски, онда постоји такав систем, у коме се оба догађаја дешавају на једном истом мјесту. Вријеме које у том систему прође између тих догађаја, износи:

$$t'_{12} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \qquad (2,8)$$

Ако се ма каква два догађаја десе са једним те истим тијелом, онда је интервал међу њима увијек временски. И заиста, пут који тијело пређе између оба догађаја, не може бити већи од $c\,t_{12}$, јер брзина тијела не може бити већа од c. Према томе увијек је

$$l_{12} < c\,t_{12}.$$

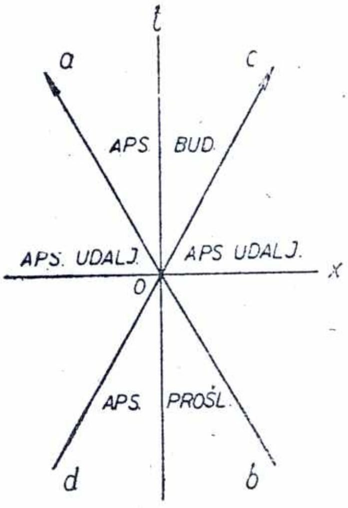
Одговорићемо сада на питање: може ли се наћи такав систем референције у коме би се два догађаја десила истовремено? Према ранијем, ми имамо у системима K и K' $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}$. Ми хоћемо да буде $t'_{12} = 0$. Одавде је:

$$s_{12}^2 = - l'^2_{12} < 0.$$

Одавде слиједи, да се тражени систем референције може наћи само у случају када је интервал s_{12} између два догађаја имагинаран. Ови имагинарни интервали називају се „просторни“.

На тај начин, ако је између два догађаја интервал просторни, тада постоји такав систем референције у коме се оба догађаја истовремено дешавају. Растојање између мјеста у којима су се десили ти догађаји у том систему референције износи:

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = i\, s_{12}. \qquad (2{,}9)$$



Сл. 2

Дијељење интервала на временске и просторне је апсолутни појам, а што излази из њихове инваријантности. То значи, да својство интервала да буде временски или просторни не зависи од система референције.

Узмимо ма какав догађај — назвавши га догађајем O — као почетак рачунања времена и просторних координата. Другим ријечима, у четвородимензионалном координатном систему по чијим се осама наносе x, y, z, t, свјетска тачка догађаја O биће координатни почетак. Погледајмо сада у каквом се односу према датом догађају O налазе сви остали догађаји. Због прегледности посматраћемо само једну просторну координату и вријеме, и наносићемо их на двије осе (сл. 2). Праволиниско равномјерно кретање честице која пролази кроз $x = 0$ за $t = 0$, претставља се правом линијом, која пролази кроз O, а нагнута је према оси t под углом чији је тангенс једнак брзини честице. Како је највећа могућа брзина једнака c, то постоји највећи угао који та права може заклапати са осом t. На сл. 2 приказане су двије праве, које претстављају простирање два сигнала (брзином свјетлости) у супротним смјеровима, а пролазе кроз догађај O (тј. пролазе кроз $x = 0$ за $t = 0$). Све праве које претстављају кретања честица, могу се налазити само у подручју aOc и dOb. На правим линијама ab и cd очигледно је $x = \pm ct$. Посматрајмо најприје догађаје, чије се свјетске тачке налазе у области aOc. Лако је видјети, да је у свим тачкама те области $c^2 t^2 - x^2 > 0$. Другим ријечима, међу ма којим догађајем тог подручја и догађајем O интервали су временски. У том подручју је $t > 0$, тј. сви догађаји у том подручју дешавају се „послије“ догађа O. Али два догађаја, који су раздвојени временским интервалом не могу се ни у каквом систему референције дешавати истовремено. Одатле слиједи, да се не може узети никакав систем референције у коме би се ма који од догађаја из подручја aOc десио „прије“ догађаја O, тј. гдје би било $t < 0$. На тај начин сви догађаји у подручју aOc десиће се касније у односу на O и то у свим системима референције. Према томе то се подручје може назвати „апсолутна будућност“ у односу на догађај O.

Потпуно аналогно, сви догађаји подручја bOd су „апсолутно прошли“ у односу на O, тј. догађаји из тог подручја у свим системима референције, дешавају се прије догађаја O.

На крају посматрајмо још подручја dOa и cOb. Међу било којим догађајем тога подручја и догађајем O интервал је просторни. У било ком систему референције ти догађаји се дешавају на разним мјестима простора. Према томе та подручја могу се назвати „апсолутно удаљена“ у односу на O. Међутим, појмови „истовремено“. „раније“ и „касније“ за те догађаје су релативни. За сваки догађај тог подручја постоје такви системи референције, гдје се догађај дешава касније од догађаја O, системи гдје се дешава раније од догађаја O и, најзад, један систем референције гдје се дешава истовремено са O.

Напомињемо, да ако се посматрају све три просторне координате мјесто једне, онда мјесто двије праве које се сијеку (сл. 2) имамо „конус“ $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ у четвородимензионалном систему x, y, z, t, чија се оса поклапа са осом t (тај конус се назива „свјетски конус“). Подручја „апсолутне будућности“ и „апсолутне прошлости“ претстављају се, тада, респективно помоћу два отвора тога конуса.

Два догађаја могу бити међусобно каузално повезани само у случају, када је интервал међу њима временски, што непосредно слиједи из чињенице, да се никакво узајамно дјејство не може простирати брзином, која би била већа од брзине свјетлости. Као што смо управо видјели, само за такове догађаје имају апсолутног смисла појмови „раније“ и „касније“, што је опет неопходан услов за то, да би имали смисла појмови узрока и посљедица.

§ 3. Сопствено вријеме

Претпоставимо да из неког инерцијалног система референције посматрамо сат који се у односу на нас креће на произвољан начин. У сваком појединачном моменту то се кретање може посматрати као равномјерно. Према томе, у сваком моменту може се увести координатни систем чврсто везан за сат који се креће, а који ће (заједно са сатом) такође бити инерцијални систем референције.

У току бесконачно малог временског интервала dt (према непокретном сату, тј. према ономе који је везан са нама) покретни сат прелази растојање $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Пита се, колики ће временски интервал притом показати сат који се креће. У кординатном систему, који је везан са покретним сатом, тај сат се не креће, тј. $dx'=dy'=dz'=0$. Према инваријантности интервала је

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=c^2dt'^2,$$

одакле је

$$dt'=\frac{ds}{c}=\frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2},$$

или друкчије:

$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2dt^2}}.$$

Како је

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=v^2,$$

гдје је v брзина сата који се креће, биће:

$$dt'=\frac{ds}{c}=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,1}$$

Интегрирањем овог израза може се наћи временски интервал који показује сат који се креће, док је на сату који се не креће протекло вријеме $t_2 - t_1$:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,2}$$

Вријеме показано на сату, који се креће са датим предметом, назива се сопствено вријеме тога предмета. Формуле (3,1) и (3,2) изражавају сопствено вријеме помоћу времена система референције, у односу на који се посматра кретање.

Као што се види из (3,1) или (3,2), сопствено вријеме предмета који се креће, увијек је мање од одговарајућег временског интервала у непокретном систему. Другим ријечима, сат који се креће иде спорије од сата који се не креће.

Нека се у односу на инерцијални систем референције K креће други сат праволиниски и једнолико. Систем референције везан са тим сатом такође је инерцијалан. Тада сат у систему K' са тачке гледишта посматрача у систему K заостаје у односу на његов сат. И обрнуто, с тачке гледишта система K', заостаје сат у систему K. Да у том нема никакве противурјечности можемо се увјерити, ако се обрати пажња на слиједећу околност. Да би се установило да сат у систему K' заостаје за сатом у систему K треба поступити на слиједећи начин. Нека у неком моменту сат K' прође мимо сата у K, и нека у том моменту показивања оба сата буду иста. За упоређивање хода сата у K и K' треба поново показивања сата K', који се креће, упоредити са сатом K. Али сада ми већ упоређујемо тај сат с другим сатом у K, са сатом поред кога сат K пролази у том другом моменту. Притом налазимо, да ће сат K' заостајати у односу на сатове у K, са којим се упоређује. Видимо, да је за упоређивање хода сатова у два система неопходно имати неколико њих у једном систему, а један сат у другом систему. Према томе, тај процес није симетричан у односу на оба система. Увијек заостаје онај сат који се упоређује са разним сатовима у другом систему референције.

Ако се има два сата, од којих један описује затворену трајекторију, враћајући се у полазно мјесто (код сата који се не креће), онда ће сат који се креће заостати у односу на сат који се креће. Обрнуто расуђивање по коме би се сат који се креће посматрао као да мирује (и обрнуто) сада је немогућно, јер се сат који описује затворену трајекторију не креће једнолико и праволиниски те према томе систем референције, који је везан са тим сатом, није инерцијалан. Како су природни закони једнаки само у инерцијалним системима референције, то системи референције везани за непокретан сат (инерцијални систем) имају различита својства, па је неправилно расуђивање које доводи до резултата, да сат који се не креће мора заостајати.

Временски интервал који сат показује једнак је интегралу $\frac{1}{c}\int_a^b ds$ узетом дуж свјетске линије тога сата. Ако се сат не креће онда је његова свјетска линија, очевидно права, паралелна временској оси. Ако, пак, сат врши неравномјерно кретање по затвореном путу и опет дође на полазно мјесто, онда ће његова свјетска линија бити крива, која пролази кроз двије тачке на правој свјетској линији сата који се не креће, а одговарају почетку и крају кретања. С друге стране, видјели смо да сат који се не креће увијек показује већи временски интервал, него сат који се креће. На тај начин долазимо до закључка, да интеграл $\int_a^b ds$ узет међу двјема датим свјетским тачкама, има максималну вриједност, ако се узме по правој свјетској линији, која спаја те тачке[1]) (свјетске тачке a и b морају, наравно, бити такве, да интервал међу њима буде временски; у противном случају интеграл је комплексан).

§ 4. Lorentz-ова трансформација

Наш ће задатак сада бити, да нађемо формуле за трансформацију једног система референције у други, тј. формуле, по којима се, ако се знају координате x, y, z, t догађаја у неком систему референције K, могу наћи координате $x,'$ y', z', t' истог догађаја у другом инерцијалном систему K'.

У класичној механици то се питање рјешава врло једноставно. Како је вријеме тамо апсолутно, биће $t=t'$. Даље, ако су координатне осе изабране онако, како то обично радимо (тј. осе X и X' се поклапају; осе Y,Z су паралелне са осама Y', Z'; кретање дуж оса X и X') очито ће координате y и z бити једнаке координатама y' и z', а координате x и x' разликоваће се за растојање које је један систем прешао у односу на други. Ако се почетак рачунања времена узме у моменту, када се оба система поклапају, а брзина система K' у односу на K је V, онда је то растојање Vt. На тај начин је:

$$x'=x+Vt \quad y'=y, \quad z'=z, \quad t'=t. \tag{4,1}$$

Ове формуле називају се *Galilei*-ева трансформација. Лако је провјерити, да ова трансформација, као што је и требало очекивати, не задовољава услове теорије релативитета; у њој интервали међу догађајима нијесу инваријантни.

Релативистичке трансформационе формуле тражићемо баш на основу услова да при њима интервали буду инваријантни.

Ако употребимо величину $\tau=ict$, која је згодна за даље излагање, онда се, као што смо видјели у § 2, интервал између два догађаја може посматрати као растојање међу одговарајућим двјема свјетским тачкама у четвородимензионалном координатном систему. Према томе можемо рећи да код тражене трансформације морају остати непромијењене све дужине у четвородимензионалном простору x, y, z, τ. Такве трансформације су само

---

[1]) То својство интеграла $\int_a^b ds$ у вези је са тим, да је једна од координата имагинарна ($\tau=ict$); када би све четири координате биле реалне онда би, наравно, $\int_a^b ds$ био минималан дуж праве линије.

транслације и ротације координатног система. Од тих, транслације координатног система паралелно свом првобитном положају нијесу интересантне, јер се своде једноставно на транслацију почетка просторних координата и на промјену момента почетка рачунања времена. На тај начин се тражена трансформација математички мора изразити као ротација четвородимензионалног координатног система x, y, z, τ.

Свака ротација у четвородимензионалном простору може се раставити на шест ротација и то у равнима xy, zy, xz, τx, τy, τz (аналогно чињеници, да се свака ротација у обичном простору може раставити на три ротације у равнима xy, zy, xz). Прве три ротације трансформирају само просторне координате; оне одговарају обичним просторним ротацијама.

Посматрајмо ротацију у равни τx. Координате y и z се при том не мијењају. Ако је ψ угао ротације, онда се веза међу старим и новим координатама одређује формулама:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\psi - \tau' \sin\psi, \\ \tau &= x' \sin\psi + \tau' \cos\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (4,2)$$

Тражимо формуле за трансформацију са система референције K на систем K', који се у односу на K креће брзином V дуж осе X. При томе се, очевидно, трансформацији подвргавају само координате x и вријеме τ. Према томе та трансформација мора имати облик (4,2). Сад остаје, да се одреди угао ψ, који може зависити само од релативне брзине V[1]).

Посматрајмо у систему K кретање почетка координатног система референције K'. Тада је $x' = 0$ и формуле (4,2) добивају облик:

$$x = -\tau' \sin\psi, \quad \tau = \tau' \cos\psi,$$

или дијелењем прве другом:

$$\frac{x}{\tau} = -\operatorname{tg}\psi.$$

Но како је $\tau = ict$, а $\dfrac{x}{t}$ брзина V система K' у односу на K, добива се:

$$\operatorname{tg}\psi = i\frac{V}{c} \, .$$

Одавде је:

$$\sin\psi = \frac{i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \, .$$

Замјеном у (4,2) налазимо:

$$x = \frac{x' - i\dfrac{V}{c}\tau'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad \tau = \frac{\tau' + i\dfrac{V}{c}x'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \, .$$

---

[1]) Да би се избјегла збрка, напомињемо да ћемо са V стално означавати константну релативну брзину двају инерцијалних система референције, а са v — брзину честице која се креће, која уопште не мора бити константна.

Стављајући још $\tau = i c t$, $\tau' = i c t'$ имамо дефинитивно:

$$x = \frac{x' + V t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \tag{4,3}$$

Ово су тражене трансформационе формуле. Оне се називају *Lorentz*-ове трансформационе формуле и имају фундаментални значај за даља расматрања.

Обрнуте формуле, које изражавају x', y', z', t' помоћу x, y, z, t најједноставније се добивају замјеном V са $-V$ (јер се систем K у односу на K' креће брзином $-V$). Ове се формуле могу добити непосредно рјешавањем једначина (4,3) по x', y', z', t'.

Из (4,3) је лако видјети, да за гранични прелаз $c \to \infty$ на класичну механику, *Lorentz*-ове трансформационе формуле прелазе у *Galilei*-еву трансформацију.

За $V > c$ у формулама (4,3) координате x, t постају имагинарне. То одговара чињеници, да су немогућа кретања брзином већом од брзине свјетлости. Чак је немогућа и употреба система референције са брзином једнаком брзини свјетлости — тада би имениоци у формулама (4,3) били једнаки нули.

За брзине V, мале у упоређењу са брзином свјетлости, мјесто (4,3) могу се употријебити приближне формуле:

$$x = x' + V t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' + \frac{V}{c^2} x'. \tag{4,4}$$

Нека у систему K мирује штап паралелан оси X. Нека његова дужина измјерена у том систему буде $\Delta x = x_2 - x_1$ (x_2 и x_1 — кооридинате оба краја штапа у систему K). Нађимо сада дужину тог штапа, измјерену у систему K'. За то је потребно наћи координате оба краја штапа (x_2' и x_1') у том систему у једном те истом моменту t'. Из (4,3) налазимо:

$$x_1 = \frac{x_1' + V t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x_2' + V t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} .$$

Дужина штапа у систему K' је $\Delta x' = x_2' - x_1'$. Одузимањем x_2 од x_1 налазимо:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} .$$

„Сопствена дужина“ штапа назива се његова дужина у оном систему референције, у коме тај штап мирује. Означимо ту дужину са $l_0 = \Delta x'$, а са l дужину тога штапа у ма ком систему референције K. Тада је:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} . \tag{4,5}$$

На тај начин штап има највећу дужину у оном систему референције у коме он мирује. У систему у коме се креће брзином V, његова дужина је

$\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ пута мања. Овај резултат теорије релативитета зове се *Lorentz*-ово скраћење.

Како се попречне димензије тијела при његовом кретању не мијењају, запремина тијела Ω, смањује се по аналогној формули

$$\Omega = \Omega_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{4,6}$$

гдје је Ω_0 „сопствена запремина" тијела.

Из *Lorentz*-ових трансформација могу се наћи већ познати резултати за сопствено вријеме (§ 3). Нека у систему K' мирује један сат. Узмимо да су се два догађаја десила на једном истом мјесту x', y', z' простора у систему K'. Вријеме у систему K' између тих догађаја је $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Нађимо сада вријеме Δt, које је прошло између тих догађаја у систему референције K. Из (4,3) имамо:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

или, послије одузимања:

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

што се потпуно слаже са (3,1).

§ 5. Трансформација брзине

У претходном поглављу нашли смо формуле помоћу којих се, када су познате координате догађаја у једном систему референције, могу наћи координате истог догађаја у другом систему. Сада ћемо наћи формуле, које показују везу између брзине материјалне честице, која се креће у једном систему референције, са брзином те исте честице у другом систему.

Нека се опет систем K' креће у односу на систем K брзином V дуж осе X. Нека је $v_x = \frac{dx}{dt}$ компонента брзине честице у систему K, а $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ брзина те исте честице у систему K'. Из (4,3) имамо:

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Дијељењем првих трију једначина са четвртом налазимо:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+Vdt'}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'}, \quad \frac{dz}{dt}=\frac{dz'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'},$$

или, послије дијељења са dt' бројилаца и именилаца десних страна тих једначина:

$$v_x=\frac{v'_x+V}{1+\frac{v'_xV}{c^2}}, \quad v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_xV}{c^2}}, \quad v_z=\frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_xV}{c^2}}. \qquad (5,\ 1)$$

Ове формуле дефинишу трансформацију брзина. Оне претстављају закон слагања брзина у теорији релативитета. У граничном случају $c\rightarrow\infty$ ове формуле прелазе у формуле класичне механике:

$$v_x=v'_x+V, \quad v_y=v'_y, \quad v_z=v'_z.$$

У специјалном случају, када се честица креће паралелно оси X, биће

$$v_x=v, \ v_y=v_z=0,$$

Тада је

$$v'_y=v'_z=0, \quad \text{а} \quad v'_x=v',$$

па је

$$v=\frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}}. \qquad (5,\ 2)$$

Лако се је увјерити да је збир двају брзина, које су мање или једнаке брзини свјетлости, према тој формули опет брзина која није већа од брзине свјетлости.

За брзине V, које су знатно мање од брзине свјетлости (брзина v може бити произвољна) добива се приближно, с тачношћу до чланова реда $\frac{V}{c}$:

$$v_x=v'_x+V\left(1-\frac{v'^2_x}{c^2}\right), \quad v_y=v'_y-v'_xv'_y\frac{V}{c^2}, \quad v_z=v'_z-v'_xv'_z\frac{V}{c_z}.$$

Изаберимо координатне ссе тако, да се брзина честице у датом моменту налази у равни XY. Тада брзина честице у систему K има компоненте $v_x=v\cos\theta$, $v_y=v\sin\theta$, а у систему K' $v'_x=v'\cos\theta'$, $v'_y=v'\sin\theta'$ (v, v' и θ, θ' су апсолутне вриједности и углови, које брзина чини са осама X и X', респективно у системима K и K').

Помоћу формула (5,1) тада налазимо:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{v'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\cos\theta'\cdot v'+V}\sin\theta'. \qquad (5,3)$$

Ова формула одређује промјену правца брзине при прелазу са једног система референције на други.

Посматрајмо детаљније важни специјални случај те формуле, а то је скретање свјетлости при прелазу на други систем референције, појаву која се зове аберација свјетлости. У том случају је $v = v' = c$ и претходна формула прелази у

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c}+\cos\theta}\sin\theta'. \tag{5,4}$$

Из истих трансформационих формула (5,1) лако се добива аналогна формула за $\sin\theta$ и $\cos\theta$:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}\sin\theta', \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta'+\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}. \tag{5,5}$$

У случају $V \ll c$ из ове се формуле налази, с тачношћу до чланова реда $\frac{V}{c}$:

$$\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'.$$

Уводећи угао $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (угао аберације), са том истом тачношћу налазимо:

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta', \tag{5,6}$$

тј. познату елементарну формулу за аберацију свјетлости.

§ 6. Четвородимензионални вектори

Ако за координате догађаја узмемо величине x, y, z, τ, онда те величине можемо сматрати као компоненте вектора у четвородимензионалном простору. Збир квадрата тих компонената, тј. квадрат „дужине" вектора $x^2+y^2+z^2+\tau^2$ не мијења се обртањима четвородимензионалног координатног система, гдје су *Lorentz*-ове трансформације специјални случај тих обртања.

Вектор са компонентама x, y, z, τ назива се „четвородимензионални вектор положаја". Компоненте тог вектора означаваћемо са x_i, гдје је $i = 1, 2, 3, 4$, а осим тога:

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = \tau = ict.$$

Трансформацијом једног инерцијалног система референције у други, тј. *Lorentz*-овом трансформацијом, компоненте четвородимензионалног радиус-вектора трансформирају се саобразно (4,3) према формулама:

$$x_1 = \frac{x'_1 - i\frac{V}{c}x'_4}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = \frac{x'_4 + i\frac{V}{c}x'_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{6,1}$$

Четвородимензионални вектор A_i (или четворовектор) назива се укупност четири величине. A_1, A_2, A_3, A_4, које се трансформацијом четвородимензионалног координатног система трансформирају као компоненте x_i. *Lorentz*-овом трансформацијом добива се:

$$A_1 = \frac{A'_1 - i\frac{V}{c}A'_4}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3, \quad A_4 = \frac{A'_4 + i\frac{V}{c}A'_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{6,2}$$

Својства четвородимензионалних вектора у многоме су аналогна својствима обичних вектора. Тако, лако је показати, да је слично обичном скаларном производу вектора, збир производа компонената двају четворовектора $A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4$ скалар. Убудуће такав скаларни производ вектора означаваћемо са $A_i B_i$, и уопште сматраћемо, ако се неки латински индекс појављује двапут, да се под тим подразумијева сумирање по вриједностима 1, 2, 3, 4, тог индекса. Тако, квадрат „апсолутне вриједности“ четворовектора, пише се у облику $A_i A_i$ или A_i^2. Такав начин означавања сумирања (гдје се изоставља знак суме) врло је згодан и знатно упрошћује формуле.

Компоненте тродимензионалних вектора означаваћемо грчким индексима. Кад се грчки индекс појављује двапут, онда ће се под тим подразумијевати сумирање од 1 до 3 (на примјер $\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$).

Прве три компоненте четворовектора називају се просторне, а четврта временска, по аналогији са четворорадиус-вектором (четворовектором положаја). Временска компонента свих четворовектора, са којима ћемо имати посла, имагинарна је. Напомињемо, да квадрат A_i^2 може бити како позитиван, тако и негативан (или једнак нули), јер се међу компонентама налази и имагинарна компонента.

Четвородимензионални тензор (четворотензор) другог реда назива се укупност шеснаест величина $A_{ik} (i, k = 1, 2, 3, 4)$, које се трансформацијом координата

$$x_i = \alpha_{ik} x'_k \tag{6,3}$$

трансформирају као производи координата, тј. према формулама

$$A_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kl} A'_{ml}. \tag{6,4}$$

Код *Lorentz*-ове трансформације је:

$$(\alpha_{ik}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \dfrac{-i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \qquad (6,5)$$

Јединични 4-тензор δ_{ik} назива се тензор, који испуњава услов, да за сваки вектор A_i важи

$$\delta_{ik} A_k = A_i \,. \qquad (6,6)$$

Лако је видјети, да су компоненте тога тензора

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{ако је } i \neq k, \\ 1, & \text{ако је } i = k. \end{cases} \qquad (6,7)$$

Од сваког тензора A_{ik} може се формирати скалар $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + + A_{33} + A_{44}$, који се зове „траг“ (спур) тензора. Очевидно је

$$\delta_{ii} = 4. \qquad (6,8)$$

Тензор се назива симетрични, ако је $A_{ki} = A_{ik}$, а антисиметрични, ако је $A_{ik} = - A_{ki}$. Код антисиметричног тензора све дијагоналне компоненте, тј. компоненте $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$, једнаке су нули, јер, напр., мора бити $A_{11} = - A_{11}$.

Аналогно 4-тензору 2. реда могу се дефинисати тензори вишег реда.

Антисиметрични јединични 4-тензор 4. реда назива се такав тензор e_{iklm}, чије компоненте мијењају знак пермутацијом ма која два индекса, гдје су компоненте, које су различите од нуле, једнаке ± 1. Из антисиметричности слиједи, да су све компоненте тог тензора код којих су макар два индекса једнаки, једнаке нули, тако да нијесу једнаке нули само оне компоненте, код којих су различита сва четири индекса. Нека је $e_{1234} = 1$. Тада су, очигледно, све компоненте e_{iklm}, које нијесу једнаке нули, једнаке $+1$ или -1, што зависи од тога, да ли се парним или непарниа бројем пермутација (транспозиција) могу бројеви i, k, l, m довести до редослиједа 1, 2, 3, 4. Напомињемо, да је $e^2_{iklm} = 4$, што је лако провјерити.

У односу на ротацију координатног система величине e_{iklm} понашају се као компоненте тензора. Међутим, ако се промијени знак једне или трију координата, онда се компоненте e_{iklm} не мијењају, јер су дефинисане једнако за све координатне системе, док би компоненте тензора морале измијенити знак. Према томе, e_{iklm}, строго узевши, није тензор, него, како обично каже, псеудотензор. Псеудотензори ма којега реда, специјално псеудоскалари, понашају се као тензори при свим трансформацијама координата, изузев оних, које се не могу свести на ротације, тј. изузевши пресликавања — промјене знака координата, које се не могу свести на ротације.

Ако је A_{ik} антисиметричан тензор, онда се каже да су A_{ik} и псеудотензор $\frac{1}{2} e_{iklm} A_{lm}$ дуални један другом. Аналогно је $e_{iklm} A_m$ антисиметрични псеудотензор 3. реда, дуалан вектору A_i. Производ $\frac{1}{2} e_{iklm} A_{ik} A_{lm}$ тензора 2. реда са њему дуалним, очигледно је псеудоскалар.

У вези са реченим износимо нека аналогна својства тродимензионалних вектора и тензора. Потпуно антисиметрични јединични псеудотензор 3. реда назива се укупност величина $e_{\alpha\beta\gamma}$, које мијењају знак при пермутацији ма која два индекса. Као и код e_{iklm}, све компоненте $e_{\alpha\beta\gamma}$ једнаке су нули, осим оних код којих је $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Што се тиче тих компонената, то је $e_{123} = 1$. Остале су, пак, очигледно једнаке $+1$ или -1 према томе, да ли се парним или непарним бројем транспозиција може довести ред бројева α, β, γ у редослијед 1, 2, 3.

Пресликавањем координатног система, тј. промјеном свих трију координата, компоненте обичног вектора такође мијењају знак. Такви вектори називају се поларни. Компоненте вектора, који је једнак производу двају поларних вектора, при пресликавању не мијењају знак. Такви вектори називају се аксијални. Скаларни производ поларног и аксијалног вектора није прави скалар, него псеудоскалар. Пресликавањем координатног система он мијења знак. Аксијални вектор је псеудовектор, а дуалан је са неким антисиметричним тензором. Тако, ако је $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, биће $C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}$

гдје је:

$$C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta.$$

У тродимензионалном простору интегрирање може се вршити по запремини, по површини и по кривој линији. У четвородимензионалном простору, респективно, могуће су четири врсте интегрирања.

1. — Интеграл по кривој линији у 4-простору. Елемент интегрирања је елемент лука, тј. 4-вектор dx_i.

2. — Интеграл по површини (дводимензионалној) у 4-простору. Као што је познато, у тродимензионалном простору пројекције површине паралелограма, конструисаног на векторима $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на координатне равни $x_\alpha x_\beta$ једнаке су респективно $A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha$. Аналогно, у 4-простору пројекције површине паралелограма, конструисаног на два 4-вектора A_i и B_k на 6 координатних равни $x_i x_k$, одређују се антисиметричним тензором $A_i B_k - A_k B_i$. Специјално, бесконачно мали елемент површине одређује се антисиметричним тензором 2. реда df_{ik} чије су компоненте једнаке пројекцијама површине елемента плохе на кординатне равни. У тродимензионалном простору, као што је познато, умјесто тензора $df_{\alpha\beta}$ као елемент површине употребљава се вектор df_α, који је дуалан са тензором $df_{\alpha\beta}$ тј. df_α, $= \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Геометриски то је вектор, нормалан на елементу површине

а по апсолутној вриједности једнак површини тог елемента. У четвородимензионалном простору такав је вектор немогуће конструисати, али може се конструисати тензор $d\overset{*}{f}_{ik}$, који је дуалан тензору df_{ik}, тј.

$$d\overset{*}{f}_{ik} = \frac{1}{2}\, e_{iklm}\, df_{lm}\,. \tag{6,9}$$

Геометриски он претставља елемент површине једнак елементу df_{ik} и „нормалан“ на њему; — све праве линије које се налазе на њему нормалне су на свим правим линијама на елементу df_{ik}.

3. — Интеграл по хиперповршини, тј. по тродимензионалној разноликости (тродимензионалној запремини). У тродимензионалном простору запремина „паралелопипеда“ конструисаног на трима векторима **A**, **B**, **C**, као што је познато, једнака је детерминанти 3. реда, састављеној од компонената тих вектора. У 4-простору пројекција запремине „паралелопипеда“ (тј. „површине“ хиперповршине), конструисаног на 4-векторима A_i, B_i, C_i, дефинише се детерминантама:

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_k & B_k & C_k \\ A_l & B_l & C_l \end{vmatrix},$$

које сачињавају тензор трећег реда, који је антисиметричан по свим трима индексима. Специјално, бесконачно мали елемент хиперповршине дефинише се антисиметричним тензором dS_{ikl}. Као елеменат интегрирања по хиперповршини згодније је употребити 4-вектор dS_i који је дуалан тензору dS_{ikl}:

$$dS_i = \frac{1}{6}\, e_{iklm}\, dS_{klm}, \quad dS_{ikl} = e_{klmi}\, dS_m \tag{6,10}$$

(лако се увјерити да су компоненте $dS_i : dS_1 = dS_{234}$, $dS_2 = dS_{143}$ итд). Геометриски је тај 4-вектор по апсолутној вриједности једнак „површини“ елемента хиперповршине, а по правцу нормалан на том елементу (тј. нормалан на свим правцима, повученим по елементу хиперповршине). Очигледно је $dS_4 = dx\,dy\,dz$ једнак елементу тродимензионалне запремине dV, — пројекцији хиперповршине на хиперраван $x_4 = const$.

4. — Интеграл по четвородимензионалној запремини. Елемент интегрирања је елемент 4-запремине $d\Omega = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$.

Аналогно *Gauss*-овој и *Stokes*-овој теореми за тродимензионалне интеграле постоје теореме на основу којих се четвородимензионални интеграли међусобно трансформирају. Од тих теорема нама ће у даљњем излагању бити потребне слиједеће двије. Интеграл по затвореној хиперповршини може се трансформирати у интеграл по 4-запремини коју она обухвата, помоћу замјене елемента интегрирања dS_i оператором:

$$dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{6,11}$$

Напр., за интеграл вектора A_i имамо:

$$\oint A_i\, dS_i = \int \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\, d\Omega.$$

Ова теорема је, очевидно, генералисање *Gauss*-ове теореме.

Интеграл по обичној површини трансформира се у интеграл по хиперповршини која ту површину „обавија" помоћу замјене елемента интегрирања $\overset{*}{df_{ik}}$ оператором:

$$df_{ik}^{*} \rightarrow \frac{1}{2}\left(dS_i \frac{\partial}{\partial x_k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot \tag{6,12}$$

Напр., за интеграл од антисиметричног тензора A_{ik} имамо:

$$\int A_{ik}\, df_{ik}^{*} = \frac{1}{2} \int \left(dS_i \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} - dS_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i}\right) = \int aS_i \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} \cdot$$

Ради потпуности наводимо још правило трансформације интеграла по четвородимензионалној затвореној линији у интеграл по оскулационој површини. Добива се замјеном:

$$dx_i \rightarrow df_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \tag{6,13}$$

Напр., за интеграл вектора:

$$\oint A_i\, dx_i = \int df_{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \int df_{ik} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right), \tag{6,14}$$

а то је генералисање *Stokes*-ове теореме.

§ 7. Четвородимензионална брзина и убрзање

Из обичног тродимензионалног вектора брзине може се формирати и четвородимензионални вектор. Таква четвородимензионална брзина (4-брзина) честице је вектор

$$u_i = \frac{dx_i}{ds} \cdot \tag{7,1}$$

За налажење компонената тог вектора напомињемо, да је, у вези са (3,1),

$$ds = c\, dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

гдје је v — обична тродимензионална брзина честице. На тај начин је:

$$u_1 = \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx}{c\, dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot$$

Аналогно налазимо u_2, u_3, u_4 и у резултату имамо:

$$u_\alpha = \frac{v_\alpha}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \tag{7,2}$$

Напомињемо, да је 4-брзина величина без димензије.

Компоненте 4-брзине нису независне. Како је $dx_i^2 = -ds^2$, имамо:

$$u_i^2 = -1. \tag{7,3}$$

4-убрзање честице назива се вектор

$$w_i = \frac{du_i}{ds}. \tag{7,4}$$

Помоћу (7,2) и (7,3) налазимо компоненте тог вектора:

$$w_\alpha = \frac{1}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad w_4 = \frac{i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7,5}$$

Диференцирањем (7,3) добива се:

$$u_i\frac{du_i}{ds} = 0$$

или

$$u_i w_i = 0. \tag{7,6}$$

Задатак

Честица се креће брзином $\mathbf{v}(t)$. Одредити њено убрзање $\mathbf{w}$ у оном систему референције, у којем она у датом моменту мирује, у случају ако се брзина $\mathbf{v}$ мијења: а) само по правцу, б) само по величини.

Рјешење: У даном систему референције су просторне компоненте w_i једнаке $\frac{1}{c^2}\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| = \frac{w_0}{c^2}$, а временска компонента је једнака нули. Према томе је $\frac{1}{c^4}w_0^2 = w_i^2$; будући да је w_i^2 скалар, то је он и у другом систему референције једнак $\frac{1}{c^4}w_0^2$. Послуживши се тим и израчунавши w_i налазимо у случају а):

$$w_0 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|,$$

а у случају б):

$$w_0 = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|.$$

ГЛАВА II

РЕЛАТИВИСТИЧКА МЕХАНИКА

§ 8. Елементарне честице у теорији релативитета

У класичној механици може се увести појам апсолутно крутог тијела, тј. тијела, које се ни под каквим условима не може деформисати. У теорији релативитета према томе би се под апсолутним крутим тијелима морала подразумијевати таква тијела, чије све димензије остају непромијењене у оном систему рефререренције, у коме та тијела мирују. Међутим, лако је видјети, да је према теорији релативитета, уопште, немогуће постојање апсолутно крутих тијела.

Посматрајмо, напр. кружни диск, који ротира око своје осе и претпоставимо да је апсолутно крут. Систем референције везан са тим диском, очевидно, није инерцијалан. Ипак се за сваки мали елемент диска може увести инерцијални систем референције, у коме би у датом моменту тај елемент мировао. За разне елементе диска, који имају различите брзине, ти системи ће такође бити различити. Посматрајмо низ елемената дужине, који су распоређени дуж ма којег радиуса диска. Услед апсолутне крутости диска, дужине сваког од тих отсјечака у одговарајућем инерцијалном систему конреференције остају исте, као када се диск не би окретао. Те дужине констатоваће и посматрач који мирује, мјерећи их када поред њега у датом моменту пролази посматрани радиус диска, јер је сваки отсјечак нормалан на својој брзини, а у том случају не дешавају се *Lorentz*-ова скраћења. Према томе ће и читав радиус, измјерен од стране непокретног посматрача, као сума његових саставних одрезака, бити исти као и код диска који се не окреће. С друге стране, дужина сваког елемента периферије диска, који у датом моменту пролази поред посматрача који мирује, подвргнута је *Lorentz*-овом скраћивању, тако да се и дужина цјелокупне периферије (коју мјери непокретни посматрач као суму дужина појединих њених одрезака) показује мања него дужина периферије диска који мирује. На тај начин долазимо до резултата, да би се при ротацији диска однос дужине његове периферије према радиусу (коју мјери непокретни посматрач) морао измијенити, умјесто да остане једнак 2π. Апсурдност тога резултата и показује, да диск уствари не може бити апсолутно крут и да се при ротацији неизбјежно подвргава некој сложеној деформацији, која зависи од еластичних особина материјала од кога је диск направљен.

У немогућност постојања апсолутно крутих тијела могуће је увјерити се и на други начин. Нека се ма које круто тијело спољашњим дјејством на ма коју његову тачку стави у покрет. Када би тијело било апсолутно круто, тада би се све тачке тога тијела морале почети кретати истовремено са том тачком, која је подвргнута дјејству; у противном случају тијело би се деформисало. Теорија релативитета, међутим, побија такво схватање као немогућно, јер се дјејство од дате тачке преноси на остале коначном брзином, па према томе све тачке тијела не могу истовремено почети да се крећу.

Из реченог произлазе неки закључци, који се односе на такозване елементарне честице. Под елементарним честицама подразумијевају се честице, које код свих физичких појава учествују само као цјелина, тј. нема смисла говорити о дијелу честице.

Другим ријечима, стање елементарне честице потпуно је дефинисано, када је дат положај и брзина честице као цјелине. Очигледно, да, када би елементарна честица имала коначне димензије, она се не би морала деформисати, јер је појам деформације везан са могућношћу независног кретања појединих дјелова тијела. Али, као што смо малочас видјели, теорија релативитета доказује немогућност постојања апсолутно крутих тијела. На тај начин долазимо до веома значајног резултата, да елементарне честице не могу имати коначних димензија, него се морају сматрати као геометриске тачке.

§ 9. Принцип најмањег дјејства

При проучавању кретања материјалних честица полазићемо од принципа најмањег дјејства. Принцип најмањег дјејства, као што је познато, састоји се у томе, да за сваки механички систем постоји такав интеграл S, назван дјејство, који при стварном кретању има минимум и чија је варијанција δS према томе једнака нули¹).

Одредимо интеграл дјејства за слободну материјалну честицу, тј. за честицу, која се не налази под дјејством ма каквих спољашњих сила. Напомињемо, да тај интеграл не смије зависити од избора овог или оног инерцијалног система референције, тј. он мора бити инваријантан у односу на *Lorentz*-ове трансформације. Одавде слиједи, да он мора бити узет по скалару. Јасно је, да се под интегралом морају налазити диференцијали у првом степену. Међутим, једини такав скалар, који се може саставити за слободну материјалну честицу је интервал ds или αds, гдје је α- нека константа. Дакле, дјејство за слободну честицу мора имати облик:

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

гдје $\int_a^b$ означава интеграл дуж свјетске линије међу два задата догађаја — положајима честице у почетном и крајњем мјесту у одређеним моментима t_1 и t_2, тј. међу задатим свјетским тачкама. α је нека константа која карак-

---

¹) Строго узевши, принцип најмањег дјејства тврди, да интеграл S мора бити минималан само дуж малих дјелова линије интегрирања. За линије произвољне дужине може се тврдити само да S има екстремум који није обавезно минимум.

терише дату честицу. Лако је видјети, да за све честице α мора бити позитивна величина. И стварно, видјели смо у § 3, да $\int\limits_a^b ds$ има максималну вриједност дуж праве свјетске линије. Интегрирањем дуж криве свјетске линије, интеграл се може учинити колико се год хоће малим. На тај начин, ако се интеграл $\int\limits_a^b ds$ узме с позитивним знаком, онда он не може имати минимум, а ако се, пак, узме са негативним знаком тада очевидно има минимум и то дуж праве свјетске линије.

Овај интеграл дјејства може се трансформирати у интеграл по времену $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\, dt$. Коефицијент L код dt назива се, као што је познато, *Lagrange*-ова функција датог механичног система. Помоћу (3,1) налазимо:

$$S = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha \cdot c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt,$$

гдје је v брзина материјалне честице, Према томе, *Lagrange*-ова функција за честицу је:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Као што је напоменуто, величина α карактерише дату честицу. У класичној механици свака честица је окарактерисана својом масом m. Одредимо везу величина α и m. Она се одређује из услова, да ког граничног прелаза $c \to \infty$ наш израз за L мора прећи у класични израз $L = \frac{mv^2}{2}$, гдје је m класична маса честице. За остварење тог прелаза развијмо $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ у ред по степенима $\frac{v}{c}$. Занемарујући чланове вишег реда добивамо:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Као што је познато, у *Lagrange*-овој функцији, нису важни чланови, који су тотални изводи по времену, па се могу изоставити из функције[1]). Свака константа је тотални извод исте те константе помножене са временом, па се према томе у L може изоставити. Изостављајући константу αc, добијамо $L = \frac{\alpha v^2}{2c}$, а у класичној пак механици је $L = \frac{mv^2}{2}$. Према томе, мора бити $\alpha = mc$.

---

[1]) При интегрирању у интегралу дјејства, тотални извод по времену даје величину која не зависи од пута интегрирања и ишчезава при варијацији дјејства.

На тај начин дјејство за слободну материјалну тачку једнако је:

$$S = -mc\int_a^b ds, \tag{9,1}$$

а *Lagrange*-ова функција:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{9,2}$$

§ 10. Енергија и импулс

Као што је познато, импулс честице се назива вектор $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ $\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right.$ је симболичка ознака вектора, чије су компоненте једнаке изводима од L по одговарајућим компонентама вектора $\mathbf{v}$). У вези са (9,2) налазимо:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{10,1}$$

Кад су брзине мале ($v \ll c$) или на граници, за $c \to \infty$, овај израз прелази у класични $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. За $v = c$ импулс p тежи бесконачности.

Извод импулса по времену $\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ претставља силу, која дјејствује на честицу. Нека се брзина честице мијења само по правцу, тј. нека је сила нормална на брзини; тада је:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{10,2}$$

Ако се, пак, брзина мијења само по величини, тј. ако је сила у правцу, онда је:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{10,3}$$

У та два случаја пропорционалност силе различита је према убрзању. У првом случају је: $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, а у другом: $\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$.

Енергија честице $\mathcal{E}$, као што је познато, назива се величина

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\,\mathbf{v} - L.$$

Уврштавањем израза за L и $\mathbf{p}$ из (9,2) и (10,1) налазимо

$$\mathcal{E}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (10,4)$$

Из овог израза види се да у релативитистичкој механици енергија честице није једнака нули чак ни онда, када је њена брзина једнака нули. Та „енергија мировања", тј. енергија за $v=0$, једнака је $\mathcal{E}=mc^2$.

Када су брзине мале $\left(\frac{v}{c}\ll 1\right)$, развијајући (10,4) у ред по степенима $\frac{v}{c}$ имамо:

$$\mathcal{E}\approx mc^2+\frac{mv^2}{2},$$

тј. поред енергије мировања добива се и класични израз за кинетичку енергију честице.

Из (10,1) и (10,4) излази слиједећа релација међу енергијом и импулсом слободне материјалне честице:

$$\mathbf{p}=\frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}. \qquad (10,5)$$

За $v=c$ импулс и енергија честица теже бесконачности. То значи да се честица са масом m, која није једнака нули, не може кретати брзином свјетлости. Међутим, у релативистичкој механици могу постајати честице с масом која је једнака нули, а крећу се брзином свјетлости. За такве честице из (10,5) имамо

$$p=\frac{\mathcal{E}}{c}. \qquad (10,6)$$

Касније ће се видјети, да се свјетлост може третирати као такве честице с масом која је једнака нули.

Изведимо сада све добивене релације у четвородимензионалном облику. Према принципу најмањег дјејства је:

$$\delta S=-mc\,\delta\int_a^b ds=0.$$

Развићемо израз за δS. У вези са тим напоменимо, да је $ds=\sqrt{-dx_i^2}$ и према томе:

$$\delta S=-mc\,\delta\int_a^b\sqrt{-dx_i^2}=-mc\int_a^b\delta\sqrt{-dx_i^2}=$$

$$=-mc\int_a^b\frac{-dx_i\,\delta\,dx_i}{\sqrt{-dx_i^2}}=mc\int_a^b u_i\,d\,\delta\,x_i,$$

јер је $\frac{dx_i}{ds}$ компонента 4-брзине. Парцијалним интегрирањем налазимо:

$$\delta S = mc \int_a^b u_i d\,\delta x_i = mc u_i \delta x_i \Big|_a^b - mc \int_a^b \delta x_i \, du_i =$$

$$= mc u_i \delta x_i \Big|_a^b - mc \int_a^b \delta x_i w_i ds, \qquad (10,7)$$

гдје је $w_i = \frac{du_i}{ds}$ 4-убрзање.

Да би се нашле једначине кретања, као што је познато упоређују се разне трајекторије, које пролазе кроз два задата положаја, тј. на границама $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$. Права трајекторија се тада одређује из услова $\delta S = 0$. Из (10,7) добили бисмо тада једначине $w_i = 0$, тј. константност брзине слободне честице у четвородимензионалном облику.

Да би пронашли варијацију дејства као функцију координата, као што је познато, треба сматрати, да је тачка a задата, тако да је $(\delta x_i)_a = 0$. Другу пак треба сматрати промјенљивом, али при том треба разматрати само праве трајекторије, тј. трајекторије које задовољавају једначине кретања. Према томе, интеграл у изразу (10,7) за δS једнак је нули. Умјесто $(\delta x_i)_b$ писаћемо једноставно δx_i, и на тај начин налазимо:

$$\delta S = mc u_i \delta x_i. \qquad (10,8)$$

4-вектор са компонентама $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ назива се 4-вектор импулса. Означаваћемо га са p_i. Из (10,8) види се да су компоненте 4-импулса слободне материјалне честице једнаке:

$$p_i = mc u_i. \qquad (10,9)$$

Изводи $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, $\frac{\partial S}{\partial z}$, као што је познато из механике, три су компоненте импулса честице, а извод $-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial \tau} ic$ је енергија честице. Користећи се изразом (7,2) за компоненте 4-брзине, лако се убиједити, да се просторне компоненте p_i стварно поклапају са имлулсом $\mathbf{p}$, а временска је једнака $i\mathcal{E}/c$:

$$p_\alpha = p_\alpha, \quad p_4 = i \frac{\mathcal{E}}{c} \, . \qquad (10,10)$$

На тај начин, у релативистичкој механици импулс и енергија компоненте су једног те истог 4-вектора. Из тога непосредно излазе трансформационе формуле импулса и енергије при прелазу са једног инерцијалног система референције на други. Заиста, ако изразе (10,10) за компоненте

4-импулса уврстимо у опште формуле (6,2) за трансформацију 4-вектора, налазимо:

$$p_x = \frac{p_x' + \frac{V}{c^2}\mathcal{E}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p_y', \quad p_z = p_z', \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + V p_x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10,11}$$

Имајући у виду, да је квадрат 4-брзине $u_i^2 = -1$ (7,3), имамо:

$$p_i^2 = -m^2 c^2. \tag{10,12}$$

Замијенивши израз (10,10) за компоненте p_i, налазимо:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2. \tag{10,13}$$

Енергија изражена помоћу импулса, као што је познато, назива се *Hamilton*-ова функција $\mathcal{H}$. Из (10,13) слиједи:

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \tag{10,14}$$

При малим (у односу на c) брзинама импулс је $p \ll mc$. Тада из (10,14) добивамо приближно:

$$\mathcal{H} = m c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \approx m c^2 + \frac{p^2}{2m},$$

тј., изостављајући енергију мировања, то је познати класични израз за *Hamilton*-ову функцију.

Уврштавајући у (10,12) $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ умјесто p_i налазимо

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 = -m^2 c^2, \tag{10,15}$$

или, ако суму напишемо у развијеном облику:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2 c^2 = 0. \tag{10,16}$$

Ово је *Hamilton — Jacobi*-ева једначина у релативистичкој механици.

Прелаз на гранични случај класичне механике у једначини (10,16) обавља се на слиједећи начин. Прије свега треба узети у обзир, као и при одговарајућем прелазу у (10,14), да у релативистичкој механици енергија честице садржи члан $m c^2$, којега нема у класичној механици. Како је дјејство S везано са енергијом помоћу релације $\mathcal{E} = -\frac{\partial S}{\partial t}$, то је при прелазу на класичну механику потребно мјесто S ставити ново дјејство S' према релацији:

$$S = S' - m c^2 t.$$

Учврстимо ли то у (10,16), налазимо:

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2+2m\frac{\partial S'}{\partial t}=0.$$

На граници за $c\to\infty$ та једначина прелази у класичну *Hamilton — Jacobi*-еву једначину:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial S'}{\partial t}=0.$$

При неким израчунавањима прибјегава се интегрирању по „импулсном простору". У вези са тим корисно је објаснити својства запреминског елемента у импулсном простору, $dp_x\, dp_y\, dp_z$ у односу на *Lorentz*-ове трансформације. Ако се уведе четвородимензионални координатни систем, по чијим се осама замишљају четири компоненте 4-вектора импулса честице, онда се $dp_x\, dp_y\, dp_z$ може сматрати као четврта компонента елемента хиперповршине, приказане једначином (10,12). Елемент хиперповршине је четворовектор, који је оријентисан по нормали на тој хиперповршини. У датом случају оријентација нормале је, очигледно, иста као и оријентације 4-вектора p_i. Одавде излази, да однос:

$$\frac{dp_x\, dp_y\, dp_z}{\mathcal{E}}, \tag{10,17}$$

као однос једнаких компонената два паралелна 4-вектора, претставља инваријантну величину.

Ако се у импулсном простору узму „сферне координате", онда се запремински елемент $dp_x\, dp_y\, dp_z$ претставља изразом $p^2\, dp\, do$, гдје је do елемент просторног угла за правце вектора $\mathbf{p}$. Напомињући, да је $p\, dp=\frac{1}{c^2}\mathcal{E}\, d\mathcal{E}$ [према (10,13)], имамо:

$$\frac{p^2\, dp\, do}{\mathcal{E}}=\frac{p d\mathcal{E}\, do}{c^2}.$$

На тај начин налазимо да је и израз

$$p d\mathcal{E}\, do \tag{10,18}$$

такођер инваријантан.

На крају увешћемо 4-вектор силе, дефинишући га као извод

$$f_i=\frac{dp_i}{ds}=mc\frac{du_i}{ds}. \tag{10,19}$$

Узимајући у обзир да је $u_i\frac{du_i}{ds}=0$, идентитети

$$f_i u_i=0 \tag{10,20}$$

задовољавају и компоненте 4-силе. Просторне компоненте тога 4-вектора

f_i образују вектор $\frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, гдје је $\mathbf{f}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ обична сила. Временска компонента, пак, износи:

$$f_4=\frac{i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{f}\,\mathbf{v}\,,$$

[као што непосредно излази из (10,20)], тј. у вези је са радом силе $\mathbf{f}$, извршеним у јединици времена.

§ 11. Дефект масе

Формуле изведене у претходном поглављу, такође се могу примијенити и на кретање сложеног тијела, састављеног из много честица, као цјелине. У том случају под масом увијек треба подразумијевати укупну масу тијела, а под брзином — брзину његовог кретања као цјелине.

Посматрајмо тијело у миру (као цјелину). Тада је његова енергија, коју можемо назвати унутрашњом, напросто једнака Mc^2, гдје је M — маса тијела. Како је маса позитивна, очигледно је, да је та величина увијек позитивна. Такође је позитивна и тотална енергија $\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ тијела које се креће (v је брзина кретања тијела као цјелине). На тај начин долазимо до закључка, да је у релативистичкој механици енергија затвореног система увијек позитивна, насупрот схватању које постоји у класичној механици, гдје она може бити како позитивна, тако и негативна.

Унутрашња енергија тијела Mc^2 садржи у себи, осим енергије мировања честица које улазе у састав тијела, још и кинетичку енергију тих честица и енергију њиховог међусобног дјејства. Другим ријечима, Mc^2 није једнако суми $\sum\limits_A m_A c^2$, гдје су m_A — масе честица које улазе у састав тијела, а према томе ни M није једнако $\sum m_A$. С обзиром на то у релативитистичкој механици не важи закон одржања масе; маса сложеног тијела није једнака збиру маса појединих дјелова тога тијела. Мјесто тога, важи само закон одржања енергије у коју се укључује такође и енергија мировања честица.

Разлика $\Delta M=M-\sum\limits_A m_A$ масе сложеног тијела и суме маса његових саставних дјелова назива се дефект масе. Величина $\Delta M c^2$ назива се енергија везе тијела.

Посматрајмо тијело које се састоји из два дијела (са масама M_1 и M_2) у систему референције, у коме тијело мирује, и претпоставимо да се тијело спонтано распада на два дијела, чије су брзине v_1 и v_2. Тада закон одржања енергије даје:

$$Mc^2=\frac{M_1c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}+\frac{M_2c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}\,.$$

Ова једначина може бити задовољена само ако је $M > M_1 + M_2$, тј. ако је дефект масе $\Delta M = M - M_1 - M_2$ позитиван. Према томе, тијело се може спонтано распасти само у случају, када је његов дефект масе (у односу на дјелове на које се распада) позитиван. Напротив, ако је дефект масе негативан, онда је тијело стабилно и не распада се спонтано. Лако је разумјети, да је за остварење распада у том случају потребно тијелу довести енергију извана, која је једнака барем енергији његове везе $|\Delta M| c^2$.

Задаци

1. Честица са масом m_1 и брзином v судара се са честицом m_2, која се налази на миру, при чему се обе честице сједињују у једну честицу. Наћи масу M и брзину V те састављене честице.

Рјешење: Тражена маса $M = \frac{1}{c^2}\sqrt{\mathcal{E}^2 - p^2 c^2}$, гдје су $\mathcal{E}$ и p енергија и импулс састављене честице једнаке суми енергија и импулса честица, које се сударају. Брзина, пак, је $V = \frac{p c^2}{\mathcal{E}}$. У резултату добивамо:

$$M^2 = m_1{}^2 + m_2{}^2 + \frac{2 m_1 m_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_2}}}, \qquad V = \frac{m_1 v}{\left(m_1 + m_2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_2}}\right)}.$$

2. Тијело са масом M, које се налази на миру, распада се на два дијела са масама M_1 и M_2; наћи енергије $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ тих дјелова.

Рјешење: Закон о одржању енергије и импулса даје $M c^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ и $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$, или $p_1{}^2 = p_2{}^2$, тј. $\mathcal{E}_1{}^2 - \mathcal{E}_2{}^2 = M_1{}^2 c^4 - M_2{}^2 c^4$. Из тих двију једначина налазимо:

$$\mathcal{E}_1 = c^2 \frac{M^2 + M_1{}^2 - M_2{}^2}{2M}, \qquad \mathcal{E}_2 = c^2 \frac{M^2 - M_1{}^2 + M_2{}^2}{2M}.$$

§ 12. Судари

Посматрајмо еластични судар двију честица, тј. такав судар при коме се не мијења унутрашње стање честица. Нека енергије и импулси честица прије судара буду у неком систему референције K респективно $\mathbf{p}_{10}$, $\mathcal{E}_{10}$, и $\mathbf{p}_{20}$, $\mathcal{E}_{20}$. При том је оса X система K узета дуж вектора њиховог тоталног импулса $\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20}$.

За проучавање судара згодно је прећи на други систем референције K', у коме је збир импулса обију честица једнак нули. Према (10,5) брзина $\mathbf{V}$ система K' у односу на K једнака је:¹)

---

¹) Овдје систем двију честица које се сударају посматрамо као једно тијело. Формула (12,1) може се такође, добити непосредно из трансформационих формула (10,11). Према тим формулама, и узимајући у обзир да је у K' општи импулс једнак нули, имамо израз:

$$\mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02} = \frac{\mathcal{E}'_{01} + \mathcal{E}'_{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad p_{01x} + p_{02x} = \frac{\frac{V}{c^2}(\mathcal{E}'_{01} + \mathcal{E}'_{02})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{V}{c^2}(\mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02}),$$

тј. ако се напише у векторском облику, то претставља формулу (12,1) (апострофиране величине односе се на систем K').

$$\mathbf{V} = \frac{(\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20})\, c^2}{\mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20}} \,. \tag{12,1}$$

Енергије и импулсе за обије честице у систему K' лако је израчунати према општим трансформационим формулама (10,11) и формуле (12,1). Означићемо их са $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}'_2$, $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2$.

По судару честица не мијења се збир њихових импулса и збир енергија. У систему K' је $\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 = 0$, тј. импулси су по величини једнаки, а по смјеру супротни. При судару импулси $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$ само се закрену, остајући једнаки и међусобно супротни по смјеру; а према закону одржања енергије апсолутне величине импулса такође остају непромјењене.

Посматрајмо детаљније сударе, при којима се једна од честица (друга) до судара налазила у миру (у систему K). У систему K' та честица има до судара брзину $-V$ дуж осе x' и импулс респективно $-\dfrac{m_2 V}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$.

Означимо са χ угао, за који се при судару обрну импулси $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$ у систему K' (угао расипања у систему K'). Како се апсолутна величина p'_1 при судару не мијења, онда ће x' — компонента импулса честице m_2 послије судара бити:

$$-\frac{m_2 V}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \cos\chi .$$

Енергија те честице у систему K' биће:

$$\mathcal{E}'_2 = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \,.$$

Према посљедњој од трансформационих формула (10,11) налазимо одавде, послије судара у полазном систему K, енергију $\mathcal{E}_2$ честице, која је претходно мировала:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{m_2 c^2 \left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\cos\chi\right)}{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} \,.$$

Претстављајући помоћну величину V формулом (12,1), добићемо дефинитивну формулу за $\mathcal{E}_2$ у облику:

$$V = \frac{p_{10}\, c^2}{\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2} = \frac{c\sqrt{\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4}}{\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2} \tag{12,2}$$

(прије судара је $p_{20} = 0$, $\mathcal{E}_{20} = m_2 c^2$). Елементарно израчунавање даје:

$$\mathcal{E}_2 = m_2 c^2 + \frac{m_2 (\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2\, m_2 \mathcal{E}_{10}} (1 - \cos\chi) \,. \tag{12,3}$$

Други члан претставља енергију, коју је при судару друга честица предала првој. Имајући у виду, да се збир енергија обије честице одржава при судару, можемо, очигледно, за енергију послије судара друге честице (која налијеће) написати израз:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{10} - \frac{m_2(\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 m_2 \mathcal{E}_{10}}(1 - \cos\chi). \qquad (12,4)$$

Максимална могућа предана енергија при судару добива се за $\chi = \pi$. Одговарајућа вриједност за $\mathcal{E}_2$ је:

$$\mathcal{E}_{2\,max} = m_2 c^2 + \frac{2 m_2 (\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 m_2 \mathcal{E}_{10}}\,. \qquad (12,5)$$

Честица m_1 имаће, пак, притом минималну енергију:

$$\mathcal{E}_{1\,min} = m_1 c^2 + \frac{(\mathcal{E}_{10} - m_1 c^2)(m_2 - m_1)^2 c^2}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 m_2 \mathcal{E}_{10}}\,. \qquad (12,6)$$

Навешћемо неколико посљедица добивених формула. Ако се формула (12,6) напише у облику:

$$\frac{\mathcal{E}_{1min} - m_1 c^2}{\mathcal{E}_{10} - m_1 c^2} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2}{c^2} m_2 \mathcal{E}_{10}}\,,$$

види се, да се у граничном случају при малим брзинама $\left(\text{када је } \mathcal{E} \cong mc^2 + \frac{mv^2}{2}\right)$ добива резултат познат из нерелативистичке механике — однос минималне кинетичке енергије и првобитне кинетичке енергије честице која налијеће тежи ка сталној граници, која износи: $\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$. А у супротном граничном случају, када је брзина честице m_1 близу брзине c, (тј. при великим $\mathcal{E}_{10}$) написани однос тежи нули, а сама величина $\mathcal{E}_{1min}$ тежи сталној граници. Та граница је:

$$\mathcal{E}_{1min} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2 m_2} c^2\,.$$

Претпоставимо, да је $m_2 \gg m_1$, тј. да је маса честице која налијеће мала у односу на честнцу која мирује. Према класичној механици лака честица би притом могла предати тешкој честици само незнатан дио своје енергије. Међутим, такво схватање је депласирано у релативистичкој теорији, Из формуле (12,6) се види, да при довољно великим енергијама $\mathcal{E}_{10}$, количина предате енергије може достићи и величину реда јединице. Ипак, за то није довољно да брзина честице m_1 буде близу брзине c, него је, као што је лако видјети, потребно да енергије буду реда

$$\mathcal{E}_{10} \sim m_2 c^2,$$

тј. лака честица мора имати енергију реда мировања тешке честице. Аналогно важи и за $m_2 \ll m_1$, тј. када тешка честица налијеће на лаку.

Према класичној механици и овдје би се предавала незнатна количина енергије. Количина предате енергије постаје знатна тек почев од енергије реда

$$\mathcal{E}_{10} \sim \frac{m_1^2}{m_2} c^2 .$$

Напомињемо, да се и овдје не ради једноставно о брзинама реда брзине свјетлости, него о енергијама које су велике у односу на $m_1 c^2$.

Извешћемо на крају релације међу угловима расипања честица у систему K (угловима скретања с правца првобитног кретања честице m_1) и промјенама њихове енергије при судару. У вези са тим можемо примијетити, да за сваку од тих честица важи релација

$$(p_{i0} - p_i)\, U_i = 0, \tag{12,7}$$

гдје су p_{io} и p_i — 4-импулси честице прије и послије судара, а U_i 4-вектор брзине, чије се просторне компоненте (у систему K) поклапају са брзином $\mathbf{V}$. И заиста, на лијевој страни ове једначине налази се скаларна величина, па је зато довољно провјерити ту релацију у ма коме систему референције. У систему K' имамо $U_\alpha = 0$, па је $(p_{i0} - p_i)\, U_i = \frac{i}{c}\, (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E})\, i$; у систему K' енергија честице се не мијења при судару, тј. $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ чиме се и доказује релација (12,7).

Примијенимо најприје релацију (12,7) на честицу m_2, која је претходно мировала. Нека је θ_2 угао расипања те честице у систему K. Тада, замјењујући вриједност компонената вектора $p_{io}^{(2)}$, $p_i^{(2)}$, U_i у систему K, налазимо

$$\mathcal{E}_2 - m_2 c^2 = V p_2 \cos \theta_2$$

или, замјењујући израз (12,3) за V:

$$\cos \theta_2 = \frac{(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)(\mathcal{E}_2 - m_2 c^2)}{p_{10}\, p_2\, c^2} . \tag{12,8}$$

Примјеном релације (12,7) за честицу која налијеће добива се аналогно:

$$\mathcal{E}_{10} - \mathcal{E}_1 = V\, (p_{10} - p \cos \theta_1),$$

одакле се замјеном израза за V налази:

$$\cos \theta_1 = \frac{\mathcal{E}_1 (\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2) - \mathcal{E}_{10}\, m_2 c^2 - m_1^2 c^4}{p_{10}\, p_1\, c^2} . \tag{12,9}$$

Формуле (12,8) и (12,9) рјешавају постављено питање. Напомињемо, да у случају $m_1 > m_2$ (тј. честица која налијеће тежа је од честице која мирује), угао расипања θ_1 не може прећи неку максималну вриједност. Елементарним израчунавањем лако је наћи, да се та вриједност одређује једначином:

$$\sin \theta_{1max} = \frac{m_2}{m_1} ,$$

што се тачно поклапа са класичним резултатом[1]).

---

[1]) В. напр. „Механика", § 11.

Формуле (12,8) и (12,9) упрошћавају се за случај, када се узме да честица која налијеће има масу једнаку нули и према томе брзину c. Стављајући $m_1 = 0$, $p_{10} = \frac{\mathcal{E}_{10}}{c}$, $p_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{c}$ налазимо:

$$\cos\theta_1 = \frac{\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2) - \mathcal{E}_{10} m_2 c^2}{\mathcal{E}_{10}\mathcal{E}_1}, \tag{12,10}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)(\mathcal{E}_2 - m_2 c^2)}{\mathcal{E}_{10} p_2 c}. \tag{12,11}$$

§ 13. Момент импулса

Као што је познато, класична механика доводи до резултата, да се у затвореном систему осим енергије и импулса одржава још и момент импулса, тј. вектор

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

(**r** и **p** су радиус-вектор и импулс честице; сумирање се врши по свим честицама, које улазе у састав система). Одржање момента јавља се као посљедица тога, што се *Lagrange*-ова функција за затворени систем, због изотропије простора, не мијења при обртању система као цјелине.

Обавимо ли сад аналогна извођења у четвородимензионалном облику добићемо релативистички израз за момент. Нека су x_i координате једне од честица система. Извршимо бесконачно малу ротацију у четвородимензионалном простору. Тада координате x_i сваке честице послије линеарне трансформације пређу у x_i',

$$x_i' = x_i + x_k \,\delta\Omega_{ik}, \tag{13,1}$$

гдје је $\delta\Omega_{ik}$ бесконачно мали 4-тензор, који одређује ротацију. При ротацији дужина x_i^2 радиус-вектора мора остати непромијењена, тј. $x_i^2 = x_i'^2$. Замјеном из (13,1) и одбацивањем чланова који су другог степена по $\delta\Omega_{ik}$, као бесконачно мале величине вишег реда, налазимо:

$$x_i x_k \,\delta\Omega_{ik} = 0.$$

Ова једначина мора бити задовољена за произвољне вриједности x_i. Због тога што је $x_i x_k$ симетрични тензор, $\delta\Omega_{ik}$ мора бити антисиметрични тензор (производ симетричног и антисиметричног тензора, очигледно, увијек мора бити раван нули). На тај начин налазимо да је:

$$\delta\Omega_{ki} = -\delta\Omega_{ik}. \tag{13,2}$$

Промјена δS дејства S при бесконачно малој промјени координата има облик [в.(10,7)]:

$$\delta S = \sum p_i \,\delta x_i$$

(сумирање се изводи по свим честицама система). У случају посматране ротације биће $\delta x_i = \delta\Omega_{ik} x_k$, а према томе

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \sum p_i x_k.$$

Ако се тензор $\sum p_i x_k$ раздвоји на симетричан и антисиметричан дио, онда ће први од њих помножен са антисиметричним тензором идентично бити једнак нули. Према томе, ако се из $\sum p_i x_k$ одвоји антисиметрични дио, онда се претходна једначина може написати у облику:

$$\delta S = \delta \Omega_{ik} \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i). \tag{13.3}$$

За затворени систем, због изотропије простора и времена при ротацији у 4-простору, *Lagrange*-ова функција не мијења се, тј. параметри $\delta \Omega_{ik}$ те ротације су цикличне координате. Према томе, одговарајући генерализани импулси се одржавају. Ти импулси су величине $\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}}$, Из (13,3) имамо:

$$\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}} = \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i).$$

Видимо, дакле, да се код затвореног система одржава тензор:

$$M_{ik} = \sum (x_i p_k - x_k p_i). \tag{13,4}$$

Овај антисиметрични тензор назива се 4-тензор момента.

Лако се увјерити, да су просторне компоненте тога тензора ($i, k = 1, 2, 3$) компоненте тродимензионалног вектора момента импулса:

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{13,5}$$

$$M_{zx} = - M_{xz} = M_y, \quad M_{xy} = - M_{yx} = M_z, \quad M_{yz} = - M_{zy} = M_x.$$

Што се тиче компонента M_{4a} ($\alpha = 1, 2, 3$), оне су, као што се можемо лако увјерити,

$$M_{4\alpha} = i c \sum \left(t p_\alpha - \frac{\mathcal{E} x_\alpha}{c^2} \right). \tag{13,6}$$

Дакле, ове три компоненте сачињавају вектор:

$$i c \sum \left(t \mathbf{p} - \frac{\mathcal{E} \mathbf{r}}{c^2} \right).$$

Због одржања M_{ik} за затворени систем напосе имамо:

$$\sum \left(t \mathbf{p} - \frac{\mathcal{E} \mathbf{r}}{c^2} \right) = \mathbf{const.}$$

Како се с друге стране тотална енергија $\sum \mathcal{E}$ такође одржава, та једначина може се написати у облику:

$$\frac{\sum \mathcal{E} \mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} - \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}} t = \mathbf{const.} \tag{13,7}$$

Одавде видимо, да се тачка са радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{\sum \mathcal{E} \mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} \tag{13,8}$$

равномјерно креће брзином

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}}, \tag{13,9}$$

која није ништа друго, него брзина кретања система као цјелине. Таква тачка, као што је познато, назива се центар инерције. Формула (13,9) одређује координате центра инерције у релативистичкој механици. Међутим, треба напоменути, да се координате центра инерције при прелазу на други систем референције не трансформирају према *Lorentz*-овим трансформационим формулама, јер компоненте $\mathbf{R}$ у (13,9) нису компоненте ма каквог 4-вектора. Ако су брзине свих честица много мање од c, онда се може приближно ставити $\mathcal{E} = mc^2$ и (13,8) прелази у познати израз за центар инерције.

Задатак

У систему референције K брзина кретања система честица као цјелине је V (и оријентисана дуж осе X), а њен момент импулса (у односу на координатни почетак, који је узет у центру инерције система) — $\mathbf{M}$. Одредити момент импулса $\mathbf{M}_0$ у систему референције K_0, у коме систем честица мирује као цјелина.

Рјешење: Компоненте тензора трансформишу се као производи одговарајућих компонената вектора. Како се при *Lorentz*-овој трансформацији (6,2) y : z-компоненте 4-вектора не мијењају, онда се компоненте тензора момента M_{xy}, M_{xz} трансформишу као x-компонента 4-вектора, а компонента M_{yz} се сасвим не мијења. При вршењу трансформације од система K у систем K_0, треба имати у виду, да је у систему K: $M_{4y} = M_{4z} = 0$ (и заиста биће $\sum \mathcal{E} y = \sum \mathcal{E} z = 0$, јер је координатни почетак узет у центру инерције, а $\sum p_y = \sum p_z = 0$, јер је брзина $\mathbf{V}$ оријентисана дуж осе X).

Као резултат трансформације добивамо:

$$M_{0x} = M_x, \quad M_{0y} = \frac{M_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M_{0z} = \frac{M_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Апсолутна величина момента износи:

$$M_0^2 = M_x^2 + \frac{M_y^2 + M_z^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

ГЛАВА III

ОПТЕРЕЋЕЊЕ (НАЕЛЕКТРИСАНА ЧЕСТИЦА) У ПОЉУ

§ 14. Четвородимензионални потенцијал поља

Узајамно дјејство честица може се описивати помоћу појма поља сила. И умјесто да се говори, да једна честица дјејствује на другу, може се казати, да честица ствара поље око себе. На сваку другу честицу, која се налази у том пољу, дјејствује нека сила. У класичној механици поље је само неки начин описивање физичке појаве — узајамног дјејства честица. У теорији релативитета, пак, благодарећи коначности брзине простирања узајамног дјејства, стање ствари се у суштини мијења. Силе, које у датом моменту дјејствују на честицу, не одређују се њиховим распоредом у том моменту. Промјена стања једне честице одражава се на друге честице тек послије извјесног интервала времена. То значи, да је поље само по себи физичка реалност. Ми не можемо говорити о непосредном узајамном дјејству честица, које се налазе на растојању једна од друге. Узајамно дјејство може произлазити у сваком моменту само међу сусједним тачкама простора (дјејство на близину). Према томе морамо говорити о узајамном дјејству једне честице са пољем, а затим о узајамном дјејсту поља и друге честице.

Разматраћемо два облика поља: гравитациона поља и електромагнетна поља. Проучавању гравитационих поља намјењују се главе IX — X. У осталим главама разматраћемо само електромагнетна поља.

Узајамно дјејство датог електромагнетног поља и неке честице дефинише се једном величином, која карактерише ту честицу. Та величина назива се електрично оптерећење честице. Узајамно дјејство поља и честице пропорционално је оптерећењу честице. Оптерећење може бити позитивно или негативно. Специјално, оптерећење може бити једнако нули. У том случају каже се да честица није оптерећена, за разлику о оптерећених честица. Напомињемо, да све до тада, док не постоји никаквих формула, које повезују оптерећење са већ познатим величинама, можемо произвољно изабрати јединицу за мјерење оптерећења.

Као што смо видјели у § 9, дјејство за слободну материјалну честицу је $S = -mc\int\limits_a^b ds$. Ако се оптерећена честица (убудуће говорићемо о њој просто као о оптерећењу) налази у пољу, то интегралу треба додати допунски члан, који описије узајамно дјејство поља и честице. Тај члан мора садржавати како величине које карактеришу честицу (специјално њено оптерећење e), тако и величине које карактеришу поље. Испоставља се, да он има облик:

$$\frac{e}{c}\int_a^b A_i\,dx_i.$$

Брзину свјетлости овдје смо увели због удобности. Пред интегралом не морамо писати никаквих других константи, доклегод није установљена јединица за мјерење оптерећења. Четвородимензионални вектор A_i карактерише електромагнетно поље. Његове компоненте су, уопште говорећи, функције координата и времена. Вектор A_i носи назив 4-потенцијал поља. На тај начин за оптерећење у електромагнетном пољу дјејство има облик:

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds+\frac{e}{c}A_k\,dx_k\right). \qquad (14,1)$$

Напомињемо, да су јединице за мјерење A_i такође произвољне доклегод је произвољан избор јединица за e.

Три просторне компоненте вектора A_ι сачињавају тродимензионални вектор $\mathbf{A}$, који се назива векторски потенцијал поља. Временска компонента вектора A_ι имагинарна је, тј. има облик $A_4=i\varphi$. Реална величина φ назива се скаларни потенцијал поља. На тај начин је:

$$A_{1,2,3}=A_{x,y,z,};\ A_4=i\varphi. \qquad (14,2)$$

Према томе, интеграл дјејства може се написати у облику:

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds+\frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r}-e\,\varphi\,dt\right).$$

Даље је $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}$, гдје је $\mathbf{v}$ — вектор брзине честице. Према томе, дјејство добива облик:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi\right)dt. \qquad (14,3)$$

Израз под интегралом није ништа друго него *Lagrange*-ова функција за оптерећење у електромагнетном пољу:

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi. \qquad (14,4)$$

Ова функција се разликује од *Lagrange*-ове функције (9,2) за слободну честицу члановима $\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi$, који показују узајамно дјејство оптерећења и поља.

Извод $\frac{\partial L}{d\mathbf{v}}$ је генералисани импулс честице. Означимо га са $\mathbf{P}$. Диференцирањем налазимо:

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{14,5}$$

Овдје смо са $\mathbf{p}$ означили обични импулс честице, који једноставно називамо импулсом.

Из *Lagrange*-ове функције може се наћи *Hamilton*-ова функција честице у пољу по познатој општој формули

$$\mathcal{H} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L.$$

Уврштавањем (14,4) налазимо:

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{14,6}$$

Међутим, *Hamilton*-ову функцију треба изразити помоћу генералисаног импулса, а не помоћу брзине. Дижући на квадрат $\mathcal{H} - e\varphi$ и упоређујући са изразом за $\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2$ из (14,5) добивамо релацију

$$\left(\frac{\mathcal{H} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2, \tag{14,7}$$

или другачије:

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi. \tag{14,8}$$

За мале брзине, тј. у класичној механици, *Lagrange*-ова функција (14,4) прелази у

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi. \tag{14,9}$$

У тој апроксимацији је $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, па отуда налазимо слиједећи израз за *Hamilton*-ову функцију:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \tag{14,10}$$

На крају, написаћемо *Hamilton-Jacobi*-еву једначину за честицу у електромагнетном пољу. Она се добива замјеном у *Hamilton*-овој функцији генералисаног импулса $\mathbf{P}$ са $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$, а самог $\mathcal{H}$ са $-\frac{\partial S}{dt}$. На тај начин добивамо из (14,7):

$$\left(\operatorname{grad} S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{14,11}$$

§ 15. Једначине кретања оптерећења у пољу

Оптерећење, које се налази у пољу, не само што се подвргава утицају поља, него и само са своје стране утиче на поље и мијења га. Према томе, оптерећење, које се налази у спољашњем пољу, строго узевши, подвргава се дејству поља, које је то само оптерећење измијенило. Ипак, ако оптерећење e није сувише велико, онда се дејство оптерећења на поље, тј. промјена поља услијед дејства оптерећења, може занемарити. У том случају, ако се посматра кретање оптерећења у задатом пољу, може се узети, да само поље не зависи ни од координата ни од брзине оптерећења. Прецизни услови, које оптерећење мора испуњавати да би се у реченом смислу могло сматрати малим, изнијеће се касније (в. § 74). Ми ћемо за сада сматрати, да је тај услов испуњен.

Значи, треба да нађемо једначине кретања оптерећења у задатом електромагнетном пољу. Те једначине добивају се варирањем интеграла дејства. Једначине кретања ће према томе бити обичне *Lagrange*-ове једначине:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \tag{15,1}$$

гдје се L одређује формулом (14,4).

Извод $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ је генералисани импулс честице (14,5).

Даље можемо писати:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}\equiv\nabla L=\frac{e}{c}\operatorname{grad}\mathbf{A}\,\mathbf{v}-e\operatorname{grad}\varphi.$$

Но према познатој формули векторске анализе је

$$\operatorname{grad}\mathbf{a}\,\mathbf{b}=(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b}+(\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

гдје су $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ма која два вектора. Ако ту формулу примијенимо на $\mathbf{A}\,\mathbf{v}$, и ако узмемо у обзир, да се диференцирање по $\mathbf{r}$ врши при константном $\mathbf{v}$, налазимо:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}=\frac{e}{c}\Big(\mathbf{v}\nabla\Big)\mathbf{A}+\frac{e}{c}\Big(\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}\Big)-e\operatorname{grad}\varphi.$$

Према томе, *Lagrange*-ове једначине имају облик:

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\Big)=\frac{e}{c}\Big(\mathbf{v}\nabla\Big)\mathbf{A}+\frac{e}{c}\Big(\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}\Big)-e\operatorname{grad}\varphi.$$

Но тотални диференцијал $\frac{d\mathbf{A}}{dt}dt$ састоји се из два дијела: из промјене $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}dt$ векторског потенцијала по времену у датој тачци простора и из промјене при прелазу од једне тачке простора на другу за растојање $d\mathbf{r}$.

Као што је познато из векторске анализе, тај други дио је $(d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{A}$. На тај начин, извод $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ има облик:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}.$$

Увршташањем у претходну једначину, добивамо:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-e\,\mathrm{grad}\,\varphi+\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A}). \tag{15,2}$$

Ово је једначина кретања честице у електромагнетном пољу. На лијевој страни је извод импулса честице по времену. Према томе, израз на десној страни (15,2) је сила, која дјејствује на оптерећење у електромагнетном пољу. Видимо, да се та сила састоји из два дијела. Први дио [први и други члан на десној страни (15,2)], не зависи од брзине честице. Други дио (трећи члан) зависи од те брзине и то тако да је пропорционалан брзини и нормалан на њој.

Сила прве врсте, која се односи на јединично оптерећење, назива се јачина електричног поља. Означимо је са $\mathbf{E}$. Дакле, према дефиницији је

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\,\varphi. \tag{15,3}$$

Фактор уз брзину, тачније уз $\frac{\mathbf{v}}{c}$, у изразу за силу друге врсте, која дјејствује на јединично оптерећење, назива се јачина магнетног поља. Означимо га са $\mathbf{H}$. Дакле, према дефиницији је:

$$\mathbf{H}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{15,4}$$

Ако је у електромагнетном пољу $\mathbf{E}\neq 0$, а $\mathbf{H}=0$, онда је ријеч о електричном пољу; а ако је пак $\mathbf{E}=0$, а $\mathbf{H}\neq 0$, онда се поље назива магнетно. У општем случају, електромагнетно поље је суперпозиција електричног и магнетног поља.

Једначине кретања оптерећења у електромагнетном пољу могу се сада написати у облику:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}). \tag{15,5}$$

Израз на десној страни назива се *Lorentz*-ова сила. Први њен дио — сила, којом електрично поље дјејствује на оптерећење, — не зависи од брзине оптерећења и управљена је дуж вектора јачине поља $\mathbf{E}$. Други дио — сила, којом магнетно поље дјејствује на оптерећење, — пропорционална је брзини оптерећења и усмјерена нормално на ту брзину и на правац магнетног поља $\mathbf{H}$,

За брзине које су мале у поређењу са брзином свјетлости; импулс $\mathbf{p}$ приближно је једнак своjем класичном изразу $m\mathbf{v}$ и једначина кретања (15,5) прелази у

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}). \tag{15,6}$$

На тај начин, ми можемо посматрати у пољу и кретања честица, које се потчињавају класичној механици (тј. чија је кинетичка енергија $\frac{m v^2}{2}$, а импулс $m\mathbf{v}$).

Изведимо још једначину, која одређује промјену кинетичке енергије по времену, тј. извод

$$\frac{d \mathcal{E}_{kin}}{d t} = \frac{d}{d t} \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Лако је видјети, да је:

$$d \mathcal{E}_{kin} = \mathbf{v}\, d\, \mathbf{p},$$

одакле је

$$\frac{d \mathcal{E}_{kin}}{d t} = \mathbf{v} \frac{d \mathbf{p}}{d t};$$

а замјеном $\frac{d \mathbf{p}}{d t}$ из (15,6) имамо

$$\frac{d \mathcal{E}_{kin}}{d t} = e \mathbf{E} \mathbf{v} \tag{15,7}$$

[уз напомену, да је $(\mathbf{v} \times \mathbf{H})\, \mathbf{v} = (\mathbf{v} \times \mathbf{v})\, \mathbf{H} = 0$].

Промјена кинетичке енергије по времену је рад, који врши поље на честицу (у јединици времена). Из (15,7) види се, да је тај рад једнак производу брзине оптерећења и силе, којом електрично поље дјејствује на њега. Рад поља за вријеме dt, тј. при помјерају оптерећења за $d\mathbf{r}$, једнак је, очевидно, $e\,\mathbf{E}\, d\mathbf{r}$.

Истакнимо и ту околност, да рад на оптерећење врши само електрично поље; магнетно поље не врши рад на оптерећење које се у њему креће. Последње је у вези са чињеницом, да је сила, којом магнетно поље дјејствује на оптерећење, увијек нормална на брзину оптерећења.

Задатак

Изразити убрзање честице помоћу њене брзине и јачине електричног и магнетног поља.

Рјешење: Уврстимо у једначину кретања (15,5) $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}\, \mathcal{E}kin}{c^2}$, а затим $\frac{d\, \mathcal{E}kin}{d t}$ изразимо према (15,7). У резултату добивамо:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{c^2}\, \mathbf{v}\, (\mathbf{v} \mathbf{E}) \right].$$

§ 16. Изотропија времена

Једначине механике инваријантне су у односу на промјену знака времена, тј. у односу и замјени будућности прошлошћу. Другим ријечима, у механици су оба смјера времена међусобно еквивалентна, тј. вријеме је изотропно. То значи да, ако је према једначинама механике могућно ма какво кретање, то је могућно и обратно кретање, при коме систем пролази кроз иста стања у обратном редослиједу.

Лако је видјети, да то исто важи и за електромагнетно поље у теорији релативитета. Међутим, при том треба истовремено уз замјену t са $-t$ измијенити и знак магнетног поља. Стварно, није тешко видјети, да се једначине кретања (15,5) не мијењају, ако се изврши замјена:

$$t \to -t, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{H}. \qquad (16,1)$$

Скаларни потенцијал се према (15,3) не мијења, а векторски према (15,4) мијења знак:

$$\varphi \to \varphi, \quad \mathbf{A} \to -\mathbf{A}. \qquad (16,2)$$

На тај начин, ако је у електромагнетном пољу могућно неко кретање, онда је могућно и обратно кретање у пољу са супротним смјером вектора $\mathbf{H}$.

§ 17. Градијентна инваријантност

Размотримо питање, до које мјере су једнозначно одређени потенцијали поља. Прије свега обратимо пажњу на околност, да се поље карактерише дјејством, које оно врши на кретање оптерећења која се у њему налазе. Но у једначини кретања (15,5) не улазе потенцијали, него јачине поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Према томе, два поља су физички идентична, ако их карактеришу једни те исти вектори $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Ако су задати потенцијали $\mathbf{A}$ и φ онда су према (15,3) и (15,4) потпуно једнозначно одређени $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а према томе и поље. Међутим, једном пољу могу одговарати разни потенцијали. Да бисмо се у то увјерили, додаћемо компонентама потенцијала A_k величине $-\frac{\partial f}{\partial x_k}$, гдје је f-произвољна функција од координата и времена. Тада потенцијал A_k прелази у

$$A'_k = A_k + \frac{\partial f}{\partial x_k}. \qquad (17,1)$$

Код такве замјене у интегралу дјејства (14,1) појављује се допунски члан

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x_k} d\,x_k = \frac{e}{c} df.$$

Додавање тоталног диференцијала у подинтегралном изразу за дјејство, као што је познато[1]), не утиче на једначине кретања.

---

[1]) Код интегрирања тоталног диференцијала неке функције добива се константна разлика вриједности те функције на границама интеграла. Варијацијом интеграла та константа ишчезава.

Ако се умјесто четвородимензионалног потенцијала уведе векторски и скаларни, а умјесто координата x_i — координате x, y, z, t, онда се четири едначине (17,1) могу написати у облику

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \qquad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{17,2}$$

Лако се увјерити да се електрично и магнетно поље, која су дефинисана једначинама (15,3) и (15,4), стварно не мијењају, ако се мјесто **A** и φ ставе потенцијали **A**′ и φ′ који су дефинисани са (17,2). На тај се начин трансформацијом потенцијала (17,1) поље не мијења, Према томе, потенцијали нису једнозначно одређени — векторски потенцијал је дефинисан са тачношћу до градијента произвољне функције, а скаларни потенцијал с тачношћу до извода те исте функције по времену.

Специјално је очигледно, да се векторском потенцијалу може додати ма који константни вектор, а скаларном потенцијалу — ма која константа. То се и непосредно види по томе, што у дефиницију за **E** и **H** улазе само изводи од **A** и φ и зато додавање константи тим величинама не утиче на јачине поља.

Физички смисао имају само оне величине, које су инваријантне у односу на трансформацију (17,2) потенцијала. Специјално, све једначине морају бити инваријантне у односу на ту трансформацију. Ту инваријантност називамо градијента инваријантност[1]) (њемачки Eichinvarianz, енглески — gauge invariance).

Описана неједнозначност потенцијала увијек даје могућност. да се они изаберу тако, да задовољавају неки допунски услов који изаберемо (неку релацију међу њима). Треба истаћи, да је то једини услов, јер можемо произвољно изабрати само једну функцију f у (17,2). Специјално, увијек је могућно изабрати потенцијал поља тако, да скаларни потенцијал φ буде једнак нули. Изједначити, пак, векторски потенцијал са нулом, ако он није једнак нули, уопште говорећи, немогуће је, јер услов $\mathbf{A} = 0$ сам по себи претставља још три допунска услова (за три компоненте вектора **A**).

§ 18. Стално електромагнетно поље

Стално електромагнетно поље називамо поље, које не зависи од времена. Очевидно је, да се потенцијали сталног поља могу изабрати тако, да буду функције само од координата, а не и од времена. Отуда је стално магнетно поље према (15,5) $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Стално електрично поље је према (15,3)

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{18,1}$$

На тај начин стално електрично поље дефинише се само скаларним потенцијалом, а магнетно — векторским потенцијалом.

У претходном параграфу смо видјели, да потенцијали поља нису једнозначно одређени. Лако се, међутим, убиједити да, ако се хоће описивати стално електромагнетно поље помоћу потенцијала који не зависе од времена,

---

[1]) Тај назив је предложио *V. A. Fok.*

онда се скаларном потенцијалу може додати, а да се поље не мијења само произвољна константа (која не зависи ни од координата, ни од времена). Обично се за φ узима и допунски услов, а то је, да има одређену вриједност у одређеној тачци простора. Најчешће се φ узима тако да у бескоңачности буде једнако нули. Тада је одређена и поменута константа, а скаларни потенцијал сталног поља је на тај начин потпуно једнозначан.

Напротив, векторски потенцијал, према ранијем, није једнозначан чак ни за стално електромагнетно поље; може му се додати градијент ма које функције од координата.

Одредимо, чему је једнака енергија оптерећења у сталном електромагнетном пољу. Ако је поље стално, онда *Lagrange*-ова функција за оптерећење не зависи експлицитно од времена. Као што је познато, у том случају се енергија одржава и поклапа се са *Hamilton*-овом функцијом.

Према (14,6) имамо:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c}}} + e\varphi. \tag{18,2}$$

На тај начин, због постојања поља енергији честице додаје се члан $e\varphi$ — потенцијална енергија оптерећења у пољу. Подвлачимо ту битну околност, да енергија зависи само од скаларног, а не и од векторског потенцијала. У вези са формулом $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ и са (18,!) то значи, да магнетно поље не утиче на енергију оптерећења. Енергију честице може измијенити само електрично поље. То је у вези са чињеницом да, као што је напоменуто на крају § 15, магнетно поље, насупрот електричном, не врши никакав рад над оптерећењем.

Ако је јачина поља у свим тачкама простора једнака, онда се поље назива хомогено. Изразимо скаларни потенцијал хомогеног електричног поља помоћу јачине поља $\mathbf{E}$. Лако се увјерити, да је за хомогено поље

$$\varphi = -\mathbf{E}\,\mathbf{r}, \tag{18,3}$$

јер, ако је $\mathbf{E} = \mathbf{const.}$, — биће $-\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}(\mathbf{E}\,\mathbf{r}) = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{r} + \mathbf{E} \times \operatorname{rot}\mathbf{r} = \mathbf{E}$ (напомињемо да је $\operatorname{rot}\mathbf{r} = 0$).

Изразимо сада векторски потенцијал хомогеног магнетног поља помоћу јачине тога поља $\mathbf{H}$. Лако је провјерити, да се потенцијал $\mathbf{A}$ може написати у облику:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \times \mathbf{r}). \tag{18,4}$$

И заиста, узевши у обзир да је $\mathbf{H} = \mathbf{const.}$, налазимо помоћу познатих формула векторске анализе:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H} \times \mathbf{r}) = \mathbf{H} \operatorname{div}\mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(напомињемо да је $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$).

Векторски потенцијал хомогеног магнетног поља може се узети и друкчије, на пр. у облику

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0 \tag{18,5}$$

(оса Z је узета дуж вектора $\mathbf{H}$). Видљиво је, да и за тај начин узимања вектора $\mathbf{A}$ важи $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Задатак

1. Написати варијациони принцип за трајекторију честице (*Maupertius*-ов принцип) у сталном електромагнетном пољу и релативистичкој механици.

Рјешење: Као што је из механике познато, *Maupertius*-ов се принцип састоји у томе да, ако се тотална енергија честице одржава (кретање у сталном пољу), онда се њена трајекторија може одредити из варијационе једначине:

$$\delta\int \mathbf{P}\,d\mathbf{r}=0,$$

гдје је $\mathbf{P}$ генералисани импулс честице, изражен помоћу енергије и диференцијала координата, а интеграл се узима дуж трајекторије честице. Замјеном $\mathbf{P}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}$ и уз напомену, да се $\mathbf{p}$ и $d\mathbf{r}$ поклапају, добива се:

$$\delta\int\left(p\,dl+\frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r}\right)=0,$$

гдје је $dl=\sqrt{d\mathbf{r}^2}$ елемент лука. Налажењем p из $p^2+m^2c^2=\left(\frac{\mathcal{E}-e\varphi}{c}\right)^2$, дефинитивно се добива:

$$\delta\int\left\{\sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}-e\varphi}{c}\right)^2-m^2c^2}\,dl+\frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r}\right\}=0\,.$$

§ 19. Кретање у сталном хомогеном електричном пољу

Посматрајмо кретање оптерећења e у хомогеном сталном електричном пољу $\mathbf{E}$. Узмимо осу X дуж правца поља. Ако је почетна брзина (брзина у моменту $t=0$) $\mathbf{v}_0$, онда ће се оптерећење очевидно за читаво вријеме кретати у равни која пролази кроз векторе $\mathbf{E}$ и $\mathbf{v}_0$. Узмимо ту раван за XY-раван. Тада једначине кретања (15,5), тј.

$$\dot{\mathbf{p}}=e\mathbf{E}$$

(тачка над $\mathbf{p}$ означава диференцирање по времену) добивају облик

$$\frac{dp_x}{dt}=eE,\qquad\frac{dp_y}{dt}=0,$$

одакле

$$p_x=eE\,t,\quad p_y=p_0. \tag{19,1}$$

Почетак рачунања времена (тј. момент $t=0$) узели смо у моменту када је $p_x=0$; p_0 је импулс честице у том моменту.

Кинетичка енергија $\mathcal{E}$ честице (енергија без потенцијалне енергије у пољу) једнака је, према (10,3), $\mathcal{E}=c\sqrt{m^2c^2+p^2}$. Стављајући овдје (19,1) налазимо за наш случај

$$\mathcal{E}=\sqrt{m^2c^4+c^2p_0^2+(c\,eE\,t)^2}.$$

Према (10,5) брзина честице је $\mathbf{v}=\frac{\mathbf{p}\,c^2}{\mathcal{E}}$. За брзине $v_x=x$ имамо, дакле, за наш случај

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c^2 eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(ceEt)^2}},$$

гдје је $\mathcal{E}_0=c\sqrt{m^2c^2+p_0^2}$ енергија за $t=0$. Интегрирањем налазимо:

$$x=\frac{1}{eE}\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(ceEt)^2}\cdot \qquad (19,2)$$

Узимамо да је константа интегрирања једнака нули.

За одређивање y имамо

$$\frac{dy}{dt}=\frac{p_y c^2}{\mathcal{E}}=\frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(ceEt)^2}},$$

одакле је

$$y=\frac{p_0 c}{eE}\operatorname{argsh}\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}\cdot \qquad (19,3)$$

Једначину трајекторије налазимо, ако из (19,3) изразимо t помоћу y и уврстимо у (19,2). То даје:

$$x=\frac{\mathcal{E}_0}{eE}\operatorname{ch}\frac{eEy}{p_0 c}\cdot \qquad (19,4)$$

На тај начин у хомогеном електричном пољу оптерећење се креће по ланчаници,

Ако је брзина честице $v\ll c$, онда се може ставити $p_0=mv_0$, $\mathcal{E}_0=mc^2$, а $\operatorname{ch}\frac{eEy}{p_0c}$ може се развити у ред по степенима $\frac{1}{c}$. Тада добивамо, с тачношћу до чланова вишег реда:

$$x=\frac{eE}{2mv_0^2}y^2, \qquad (19,5)$$

тј. оптерећење се креће по параболи, а то је резултат који је добро познат из класичне механике.

§ 20. Кретање у сталном хомогеном магнетном пољу

Посматрајмо кретање оптерећења e у хомогеном магнетном пољу $\mathbf{H}$. Узмимо осу Z дуж правца поља. Једначину кретања

$$\dot{\mathbf{p}}=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})$$

препишимо у другом облику, стављајући мјесто импулса, према (10,6),

$$\mathbf{p}=\frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2},$$

гдје је $\mathcal{E}$ — енергија честице, која је, као што знамо из § 18, у магнетном пољу константна. Тада једначине кретања добивају облик

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}), \tag{20,1}$$

или, у компонентама

$$\dot{v}_x=\omega\, v_y, \qquad \dot{v}_y=-\omega\, v_x, \qquad \dot{v}_z=0, \tag{20,2}$$

гдје смо увели ознаку

$$\omega=\frac{ecH}{\mathcal{E}}. \tag{20,3}$$

Помножимо са i другу од једначина (20,2) и саберимо са првом. Налазимо:

$$\frac{d}{dt}(v_x+i\, v_y)=-i\omega\,(v_x+iv_y),$$

одакле је

$$v_x+i\, v_y=a\, e^{-i\omega t},$$

гдје је a — комплексна константа. Можемо је написати у облику $a=v_{ot}e^{-i\alpha}$, гдје су v_{ot} и α реални. Тада је:

$$v_x+i\, v_y=v_{ot}\, e^{-i\,(\omega t+\alpha)},$$

па, одвајањем реалног од имагираног дијела, налазимо:

$$v_x=v_{ot}\cos(\omega\, t+\alpha), \qquad v_y=-v_{ot}\sin(\omega\, t+\alpha). \tag{20,4}$$

Константе v_{ot} и α одређују се из почетних услова; α је почетна фаза, а што се тиче v_{ot} — то се из (20,4) види, да је

$$v_{ot}=\sqrt{v_x^2+v_y^2},$$

тј. v_{ot} је брзина честице у равни XY, која при кретању остаје константна.

Интегрирајући још једанпут, налазимо из (20,4)

$$x=x_0+r\sin(\omega\, t+\alpha), \qquad y=y_0+r\cos(\omega\, t+\alpha), \tag{20,5}$$

гдје је

$$r=\frac{v_{ot}}{\omega}=\frac{v_{ot}\,\mathcal{E}}{ecH}=\frac{cp_t}{eH} \tag{20,6}$$

(p_t је пројекција импулса на раван XY). Из треће једначине (20,2) налазимо $v_z=v_{0z}$ и

$$z=z_0+v_{0z}\, t\,; \tag{20,7}$$

x_0, y_0, z_0 су почетне координате честице.

Из (20,5) и (20,7) види се, да се у хомогеном магнетном пољу оптерећење креће по завојници, чија је оса дуж магнетног поља, а радиус r се одређује из (20,6). Брзина честице је притом константна. У специјалном случају, када је $v_{0z}=0$, тј. када оптерећење нема брзине дуж поља, онда се оно креће по периферији круга у равни нормалној на пољу.

Величина ω је, као што се види из формула, циклична фреквенција обртања честице у равни нормалној на пољу.

Ако је брзина честице мала, може се приближно ставити $\mathcal{E}=mc^2$. Тада фреквенција ω постаје

$$\omega=\frac{eH}{mc}. \tag{20,8}$$

Задаци:

1. Одредити фреквенције осцилација оптерећеног просторног осцилатора, који се налази у сталном хомогеном магнетном пољу; сопствена фреквенција осцилација осцилатора (у отсуству поља) износи ω_0.

Рјешење: Једначине принудних осцилација осцилатора у магнетном пољу (оријентисаном дуж осе z) гласе:

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{eH}{mc}\dot{y},\quad \ddot{y}+\omega_0^2 y=-\frac{eH}{mc}\dot{x},\quad \ddot{z}+\omega_0^2 z=0.$$

Множењем друге једначине са i и сабирањем са првом, налазимо

$$\ddot{\xi}+\omega_0^2\xi=-i\frac{eH}{mc}\dot{\xi},$$

гдје је $\xi=x+iy$. Одавде налазимо, да фреквенције осцилација осцилатора у равни, која је нормална на поље, износе:

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2}\pm\frac{eH}{2mc}.$$

Ако је поље H слабо, онда ова формула прелази у

$$\omega_0\pm\frac{eH}{2mc}.$$

Осцилације дуж правца поља остају непромијењене.

2. Наћи промјену кретања наелектрисане честице, која се налази у магнетном пољу, када се то поље споро мијења.

Рјешење: При спором мијењању услова кретања. као што је познато, остају константне такозване адиабатске инваријанте. Како је у равни, која је нормална на магнетно поље, кретање периодично, то је адиабатска инваријанта интеграл $I=\oint \mathbf{P}_t\,d\mathbf{r}$, узет за цио период кретања, у датом случају по кругу ($\mathbf{P}_t$ је пројекција генералисаног импулса на наведену раван). Стављајући $\mathbf{P}_t=\mathbf{p}_t+\frac{e}{c}\mathbf{A}$, имамо

$$I=\oint \mathbf{P}_t\,d\mathbf{r}=\oint \mathbf{p}_t\,d\mathbf{r}+\frac{e}{c}\oint \mathbf{A}\,d\mathbf{r}.$$

Напомињемо, да је у првом члану $\mathbf{p}_t$ константно по апсолутној величини и оријентисано дуж $d\mathbf{r}$; на други члан примјенићемо *Stokes*-ову теорему:

$$I=2\pi r p_t+\frac{e}{c}H\pi r^2,$$

гдје је r-радиус орбите. Стављајући $r = \frac{c\,p_t}{e\,H}$ [в. (20,6)], налазимо:

$$I = \frac{3\pi c\, p_t^2}{e\,H}.$$

Одавде се види, да се при промјени H тангенцијални импулс p_t мијења пропорционално величини $\sqrt{H}$. Што се тиче импулса p_z дуж вектора **H**, он се, очигледно, не мијења, ако се при промјени поља не појављује електрично поље, које би било паралелно са **H** (на примјер, при промјени магнетног поља у соленоиду).

§ 21. Кретање оптерећења у сталном хомогеном електричном и магнетном пољу

Најзад, посматрајмо кретање оптерећења у случају када постоје једновремено и електрично и магнетно поље и то оба хомогена и стална. Овдје се ограничавамо на случај, када је брзина оптерећења $v \ll c$, па је зато његов импулс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Као што ћемо видјети доцније, за то је неопходно потребно да електрично поље буде мало у поређењу са магнетним.

Осу Z узмимо дуж вектора **H**, а као раван YZ узмимо раван, која пролази кроз векторе **H** и **E**. Тада се једначине кретања

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})$$

могу написати у облику

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c}\dot{y}H, \\ m\ddot{y} &= eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}H, \\ m\ddot{z} &= eE_z. \end{aligned}\right\} \tag{21,1}$$

Из треће од ових једначина види се, да се оптерећење дуж осе Z креће равномјерно убрзано, тј.

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t. \tag{21,2}$$

Множећи другу од једначина (21,1) са i и сабирајући је са првом, наћићемо да је

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}+i\dot{y}) + i\omega(\dot{x}+i\dot{y}) = i\frac{e}{m}E_y$$

$\left(\omega = \frac{eH}{mc}\right)$. Интеграл ове једначине гдје се $\dot{x}+i\dot{y}$ сматра као непозната, једнак је збиру интеграла исте једначине без десне стране и парцијалног интеграла једначине са десном страном. Први од њих је $ae^{-i\omega t}$, а други $\frac{eE_y}{m\omega}=\frac{cE_y}{H}$. На тај начин је

$$\dot{x}+i\dot{y}=ae^{-i\omega t}+\frac{cE_y}{H}.$$

Константа a је, уопште узевши, комплексна. Ако је напишемо у облику $a=be^{i\alpha}$ са реалним b и α, видимо, како је a помножемо са $e^{-i\omega t}$, да се фази α може дати ма која вриједност, при чему се на одговарајући начин одабере почетак рачунања времена. Узмимо је тако, да a буде реално. Тада, раздвајањем имагинарног од реалног дијела у $\dot{x}+i\dot{y}$, добивамо

$$\dot{x}=a\cos\,\omega t+c\frac{E_y}{H}, \qquad \dot{y}=-a\sin\omega t. \tag{21,3}$$

У моменту $t=0$ брзина је управљена дуж осе X.

Видимо, да је брзина честице периодична функција времена. Средњу вриједност брзине лако је наћи, узевши у обзир да је средња вриједност $\overline{\cos\omega t}=\overline{\sin\omega t}=0$:

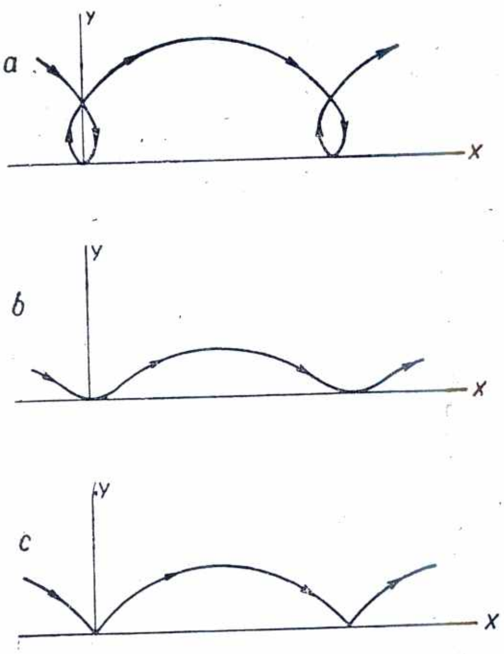
$$\overline{\dot{x}}=\frac{cE_y}{H}, \quad \overline{\dot{y}}=0. \tag{21,4}$$

На тај начин, средња брзина дуж осе Y једнака је нули, а средња брзина дуж осе X, тј. нормално на магнетном и електричном пољу, различита од нуле.

Све формуле овог параграфа важе за случај, када је брзина честице мала у поређењу са брзином свјетлости. Из (21,3) или (21,4) видимо, да је зато специјално потребно, да електрично и магнетно поље испуњавају услов

$$\frac{E_y}{H}\ll 1, \tag{21,5}$$

а апсолутне величине E_y и H могу бити произвољне.



Сл. 3

Интегрирамо ли још једанпут једначине (21,3) и константе интегрирања узмемо тако, да за $t=0$ буде $x=y=0$, добивамо:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{a}{\omega}\sin\,\omega t+\frac{cE_y}{H}t,\\ y&=\frac{a}{\omega}(\cos\omega t-1). \end{aligned}\right\} \tag{21,6}$$

Ове једначине, посматране као параметарске једначине криве, одређују такозвану трохоиду. У зависности од тога, да ли је апсолутна величина a већа или мања од апсолутне величине $\frac{cE_y}{H}$, пројекција трајекторије честице на раван XY има облик претстављен респективно на сл. 3a и 3b,

Ако је $a = -\frac{cE_y}{H}$ онда (21,6) прелази у

$$x = \frac{cE_y}{\omega H}(\omega t - \sin \omega t), \qquad y = \frac{cE_y}{\omega H}(1 - \cos \omega t), \tag{21,7}$$

тј. пројекција трајекторије на раван XY је циклоида (сл. 3c).

§ 22. Тензор електромагнетног поља

У § 15 извели смо једначине кретања оптерећења у пољу, полазећи од *Lagrange*-ове функције (14,4) написане у тродимензионалном облику. Изведимо сада исте једначине из дјејства (14,1) написаног са четвородимензионалним ознакама.

Принцип најмањег дјејства гласи:

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\, ds + \frac{e}{c} A_i\, dx_i\right) = 0. \tag{22,1}$$

Како је $ds = \sqrt{-dx_i^2}$, налазимо (границе интегрирања a и b због краткоће нећемо писати):

$$\delta S = \int \left[-mc\,\delta ds + \frac{e}{c}\,\delta(A_i\, dx_i)\right] = \int \left(mc \frac{dx_i\, \delta\, dx_i}{ds} + \frac{e}{c} A_i\, \delta\, dx_i + \right.$$

$$\left. + \frac{e}{c}\, \delta A_i \delta\, dx_i\right) = \int \left(mc \frac{dx_i\, d\, \delta x_i}{ds} + \frac{e}{c} A_i\, d\, \delta x_i + \frac{e}{c}\, \delta A_i\, dx_i\right) = 0.$$

Прва два члана у изразу под интегралом интегрираћемо парцијално. Осим тога, у првом члану ставимо $\frac{dx_i}{ds} = u_i$, гдје су u_i — компоненте 4-брзине.

Тада је:

$$\int \left(-mc\, du_i\, \delta x_i - \frac{e}{c}\, \delta x_i\, dA_i + \frac{e}{c}\, \delta A_i\, dx_i\right) + \left(mc\, u_i + \frac{e}{c} A_i\right) \delta x_i \Big| = 0. \tag{22,2}$$

Други члан ове једначине једнак је нули, будући интеграл варира уз задате границе, тј. уз границе $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$. Даље је

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\, \delta x_k, \qquad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\, dx_k\,,$$

а према томе

$$\int\left(-mc\,du_i\,\delta x_i-\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\,\delta x_i\,dx_k+\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\,dx_i\,\delta x_k\right)=0.$$

Напишимо у првом члану $du_i=\frac{du_i}{ds}ds$, а у другом и трећем $dx_i=u_i\,ds$. Осим тога, у трећем члану замијенимо индексе i и k (то ништа не мијења, јер се по индексима i и k врши сумирање). Тада је

$$\int\left[-mc\frac{du_i}{ds}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)u_k\right]\delta x_i\,ds=0.$$

Због тога што је δx_i произвољно, слиједи, да је израз под интегралом једнак нули, тј.:

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)u_k. \tag{22,3}$$

Уведимо ознаку

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \tag{22,4}$$

Тензор F_{ik} назива се тензор електромагнетног поља. Једначине кретања (22,3) тада добивају облик

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}F_{ik}u_k. \tag{22,5}$$

Ове четири једначине (за $i=1, 2, 3, 4$) једначине су кретања оптерећења у електромагнетном пољу у четвородимензионалном облику.

Из дефиниције тензора F_{ik} слиједи, да је

$$F_{ik}=-F_{ki} \tag{22,6}$$

тј. тензор електромагнетног поља је антисиметричан. Према томе за $i=k$ биће $F_{ik}=0$.

Ако се, у (22,4) стави $A_{1,2,3}=A_{x,y,z}$, $A_4=i\varphi$, лако са налазе слиједеће вриједности појединих компонената тензора F_{ik}:

$$F_{11}=F_{22}=F_{33}=F_{44}=0,$$
$$F_{12}=-F_{21}=H_z,\quad F_{14}=-F_{41}=-iE_x,$$
$$F_{13}=-F_{31}=-H_y,\quad F_{24}=-F_{42}=-iE_y,$$
$$F_{23}=-F_{32}=H_x,\quad F_{34}=-F_{43}=-iE_z.$$

То се може написати и у облику таблице:

$$(F_{ik})=\left\{\begin{array}{cccc} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{array}\right\}. \tag{22,7}$$

На тај начин, компоненте јачине електричног и магнетног поља компоненте су једног 4 - тензора електромагнетног поља.

Из (22,7) види се, да су просторне компоненте тензора F_{ik} (тј. компоненте са $i, k = 1, 2, 3$) везане за магнетно поље. Компоненте магнетног поља **H**, наиме, сачињавају тродимензионални антисиметрични тензор 2. реда. То значи, као што је познато, да је вектор **H** аксијални вектор (в. § 6).

Што се тиче компонената електричног поља **E**, оне су временске компоненте F_{ik} (једно од i или k једнако је 4). Вектор **E** очевидно је обични, тј. поларни вектор.

Помоћу (22,7) и (7,2) увјерићемо се, да су прве три једначине (22,5) идентичне са једначинама кретања (15,5), а четврта са једначином (15,7), Да су, према томе, само три од њих međусобно независне може се лако показати непосредним множењем обију страна (22,5) са u_i. Тада су, у вези са (7,6) и (22,6), обје стране једначине идентично једнаке нули.

Ако се у варијацији δS посматрају само праве трајекторије, онда је први члан у (22,2) идентично једнак нули. Други члан, у коме се једна од граница сматра као промјенљива, даје диференцијал дјејства као функцију од координата. На тај начин је:

$$\delta S = \left(m c u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x_i . \tag{22,8}$$

Одавде је:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = m c u_i + \frac{e}{c} A_i = p_i + \frac{e}{c} A_i . \tag{22,9}$$

4 - вектор са компонентама $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ претставља вектор генералисаног импулса честице P_i. Користећи изразе за компоненте 4 - брзине и 4 - потенцијала, налазимо слиједеће изразе за компоненте P_i:

$$P_\alpha = p_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha , \quad P_4 = \frac{i}{c} (\mathcal{E}_{kin} + e\varphi), \tag{22,10}$$

гдје је $\mathcal{E}_{kin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Просторне компоненте 4 - вектора P_i образују, као што то и треба да буде, тродимензионални вектор генералисаног импулса (14,5). Временска пак компонента је, као и у § 10, $\frac{i\mathcal{E}}{c}$, гдје је $\mathcal{E}$ тотална енергија оптерећења у пољу.

У вези са чињеницом да је $u_i^2 = -1$, имамо

$$\left(P_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2 = - m^2 c^2, \tag{22,11}$$

релацију, која се поклапа са (14,7). Замјеном P_i са $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ добивамо *Hamilton — Jacobi*-еву једначину (14,11) у четвородимензионалном облику:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i \right)^2 + m^2 c^2 = 0. \tag{22,12}$$

Задаци:

1. Одредити кретање оптерећења, које се креће брзином блиској брзини свјетлости, у електромагнетном пољу, гдје су **E** и **H** паралелни.

Рјешење: Узимајући осу Z дуж поља, налазимо једначине кретања (21,4) у облику $\left(\text{уведимо константу } \lambda = \frac{e}{m\,c^2}\right)$:

$$\ddot{x} = \lambda H \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\lambda H \dot{x}, \quad \ddot{z} = c\,E\,\lambda\,\dot{t}, \quad c\,\ddot{t} = E\,\lambda\,\dot{z}$$

тачке над x, y, z, t, овдје означавају диференцирање по s), уз допунски услов $u_i^2 = \dot{x}_i^2 = -1$ Овај систем једначина раздваја се на два пара независних једначина. Интеграцијом тих једначина одговарајућим избором произвољне константе (почетак рачунања s, почетак и правац оса X и Y) добивамо трајекторију у параметарском облику:

$$x = \frac{a}{\lambda H} \sin \lambda H s, \quad y = \frac{a}{\lambda H} \cos \lambda H s, \quad z = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\lambda E} \operatorname{ch} \lambda E s,$$

$$c\,t = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\lambda E} \operatorname{sh} \lambda E s$$

(a је произвољна константа). Напомињемо, да је добивена трајекторија кружна спирала полупречника $\frac{a}{\lambda H}$.

2. Исти случај у електромагнетном пољу када је **E** $\perp$ **H**.

Рјешење: Узимајући осу Z дуж **H** а осу Y дуж **E**, налазимо једначине кретања:

$$\ddot{x} = \lambda H \dot{y}, \quad \ddot{y} = \lambda E c \dot{t} - \lambda H \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0, \quad c\,\ddot{t} = \lambda H \dot{y}.$$

Интегрирањем ових једначина (уз допунски услов $u_i^2 = -1$) и узимањем координатног почетка на одговарајући начин, налазимо слиједеће параметарске једначине трајекторије:

За $H > E$:

$$x = \frac{1}{\sqrt{H^2 - E^2}} (\gamma H \sin \sigma + E \beta \sigma), \quad y = \gamma \cos \sigma, \quad z = \alpha \sigma,$$

$$c\,t = \frac{1}{\sqrt{H^2 - E^2}} (\gamma E \sin \sigma + H \beta \sigma),$$

гдје су константе α, β, γ везане релацијом

$$\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 = \frac{1}{\lambda^2 (H^2 - E^2)},$$

а параметар σ везан са s релацијом $\sigma = s\,\lambda \sqrt{H^2 - E^2}$.

За $H < E$:

$$x = \frac{1}{\sqrt{E^2 - H^2}} (\gamma H \operatorname{sh} \sigma + \beta E \sigma), \quad y = \gamma \operatorname{ch} \sigma, \quad z = \alpha \sigma,$$

$$c\,t = \frac{1}{\sqrt{E^2 - H^2}} (\gamma E \operatorname{sh} \sigma + \beta H \sigma),$$

$$\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2 (E^2 - H^2)}.$$

За $E = H$:

$$x = \frac{\beta}{6}\sigma^3 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\lambda^2}{H^2}}{2\beta}\sigma, \quad y = \frac{\beta}{2}\sigma^2, \quad z = \alpha\sigma,$$

$$c\,t = \frac{\beta}{6}\sigma^3 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\lambda^2}{H^2}}{2\beta}\sigma,$$

гдје су α, β двије независне константе.

§ 23. Lorentz-ове трансформације за поље

У овом параграфу наћи ћемо трансформационе формуле за поље, тј. формуле, по којима се може поље одредити у једном инерцијалном систему референције, када је то поље познато у другом систему.

Формуле, трансформиране за потенцијале, налазе се непосредно из општих трансформационих формула 4-вектора (6,2). Како су компоненте вектора A_i : $A_{x,y,z}$, $i\varphi$, лако налазимо

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z, \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{23,1}$$

Трансформационе формуле за компоненте тензора F_{ik} могле би се наћи према општој формули (6,4) за трансформацију 4-тензора. Међутим, једноставније је поступити на слиједећи начин. Потсјетимо се на то, да је прелаз са система референције K на систем K', који се у односу на K креће дуж осе X, еквивалентан ротацији у равни $X\tau$ у четверодимензионалном простору x, y, z, τ, (в. § 4). Компоненте тензора, пак, трансформирају се као производ двају одговарајућих координата. Координате $x_2 = y$ и $x_3 = z$ не мијењају се при тој трансформацији. Из тога разлога не мијења се ни F_{23}:

$$F_{23} = F'_{23}. \tag{23,2}$$

Како се координате y и z не мијењају, компоненте F_{12}, F_{13}, и F_{42}, F_{43} трансформирају се једноставно, респективно као координате $x_1 = x$ и $x_4 = \tau$. Према формулама (6,4) лако налазимо:

$$F_{12} = \frac{F'_{12} - i\frac{V}{c}F'_{42}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad F_{42} = \frac{F'_{42} + i\frac{V}{c}F'_{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$F_{13} = \frac{F'_{13} - i\frac{V}{c}F'_{43}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad F_{43} = \frac{F'_{43} + i\frac{V}{c}F'_{13}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{23,3}$$

За одређивање трансформације компоненте F_{14} напомињемо слиједеће: као што је познато, антисиметричан тензор реда, једнаког броју димензија простора (упор. у § 6 о тензорима e_{iklm} и $e_{\alpha\beta\gamma}$), остаје инваријантан при ротацији координатног система у том простору. Ротација координатног система x, y, z, τ, у равни $X\tau$ може се, очигледно, посматрати као ротација дводимензионалног система координата x, τ у дводимензионалном простору. Тензор са компонентама $F_{11}=F_{44}=0$ $F_{14}=-F_{41}$ у том систему је тензор реда, који је једнак броју димензија. Према томе је код ротације у равни $X\tau$

$$F_{14}=F'_{14}. \tag{23,4}$$

Уврстимо сада у (23,2) — (23,4) мјесто компонената F_{ik} њихове изразе помоћу компонената поља **E** и **H** према (22,7). Тада налазимо слиједеће трансформационе формуле за електрично поље:

$$E_x=E'_x, \quad E_y=\frac{E'_y+\frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z=\frac{E'_z-\frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{23,5}$$

и за магнетно поље:

$$H_x=H'_x, \quad H_y=\frac{H'_y-\frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z=\frac{H'_z+\frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{23,6}$$

На тај начин, електрично и магнетно поље, као и већина физичких величина, релативна су, тј. њихове особине су различите у разним системима референције. Специјално, електрично и магнетно поље може бити равно нули у једном систему посматрања, а у исто вријеме постојати у другом систему.

За случај $V \ll c$ трансформационе формуле (23,5), (23,6) се знатно упрошћују. Тада из (23,5) и (23,6), с тачношћу до чланова реда $\frac{V}{c}$, имамо:

$$E_x=E'_x, \; E_y=E'_y+\frac{V}{c}H'_z, \; E_z=E'_z-\frac{V}{c}H'_y;$$

$$H_x=H'_x, \; H_y=H'_y-\frac{V}{c}E'_z, \; H_z=H'_z+\frac{V}{c}E'_y.$$

Ове формуле могу се написати у векторском облику:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}'+\frac{1}{c}\left(\mathbf{H}'\times\mathbf{v}\right), \quad \mathbf{H}=\mathbf{H}'-\frac{1}{c}\left(\mathbf{E}'\times\mathbf{V}\right). \tag{23,7}$$

Формуле за обрнуту трансформацију из K' у K добивају се непосредно из (23,5) — (23,7) промјеном знака пред V.

Ако је у систему K' магнетно поље $\mathbf{H}'=0$, онда међу електричним и магнетним пољем у систему K постоји релација:

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\left(\mathbf{V}\times\mathbf{E}\right), \tag{23,8}$$

што се лако доказује на основу (23,5) и (23,6).

Ако је, пак, у K' поље $\mathbf{E}'=0$, онда је у систему K

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\left(\mathbf{V}\times\mathbf{H}\right). \tag{23,9}$$

У оба случаја су, према томе, у систему K магнетно и електрично поље међусобно нормална.

§ 24. Инваријанте поља

Од компонената тензора електромагнетног поља могу се саставити инваријантне величине, које се не мијењају при прелазу са једног инерцијалног система референције на други. Да бисмо нашли све такве инваријанте поступићемо аналогно одређивању инваријаната симетричног тензора другог реда. Ако је A_{ik} такав тензор, онда, као што је познато, треба изједначити са нулом детерминанту:

$$|A_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=0.$$

Коријени ове једначине претстављају главне вриједности симетричног тензора A_{ik} и то су његове инваријанте. Исто то, очевидно, односи се и на коефицијенте уз разне степене у тој једначини, који се обично и узимају као основне инваријанте.

За антисиметричан тензор, као што је тензор F_{ik}, операција привођења на дијагонални облик, очевидно, нема смисла. Ипак је могуће послужити се описаним начином при налажењу инваријаната таквог тензора, гдје, наравно коријени λ неће имати смисао главних вриједности тензора.

На основу изложеног напишимо једначину

$$|F_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=0.$$

Лако је видјети, да ће у тој једначини постојати само чланови са парним степенима λ. Стварно, детерминанта се не мијења, ако се замијене врсте и колоне. Осим тога, детерминанта парног реда не мијења се промјеном знака свих величина. Према томе, због антисиметричности F_{ik}, биће:

$$|F_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=|F_{ki}-\lambda\delta_{ki}|=|-F_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=|F_{ik}+\lambda\delta_{ik}|.$$

Саобразно томе, у једначини за λ биће свега два коефицијена различита од нуле — уз λ^2 и уз λ^4, тј. антисиметричан тензор 2. реда карактерише се свега двјема инваријантама.

Уврстимо ли изразе (22,7) за компоненте тензора F_{ik}, онда без тешкоће развијамо детерминанту и налазимо:

$$\lambda^4+\lambda^2(H^2-E^2)-(\mathbf{H}\cdot\mathbf{E})^2=0$$

(при развијању детерминанте згодно је координатне осе узети на тај начин, да једна од оса, рецимо оса Z буде оријентисана дуж $\mathbf{H}$, а да вектор $\mathbf{E}$ буде у равни YZ). На тај начин, инваријанте су слиједеће величине:

$$H^2-E^2=invar., \tag{24,1}$$

$$\mathbf{E}\mathbf{H}=invar. \tag{24,2}$$

Изведени резултат показује, да су једино ове инваријанте међусобно независне. Свака се друга инваријанта може написати као функција тих двију.

Инваријанте (24,1) и (24,2) написане у четвородимензионалном облику, као што је видљиво, имају облик

$$F_{ik}^2, \tag{24,3}$$

$$e_{iklm}\, F_{ik}\, F_{lm}, \tag{24,4}$$

гдје је e_{iklm} потпуно антисиметричан јединични тензор 4-реда (в. § 6).

Неопходно је напоменути, да величина $e_{iklm}\, F_{ik}\, F_{lm}$ (или, друкчије $\mathbf{E}\mathbf{H}$), строго узевши није скалар, него псеудоскалар. То се види како из њеног четвородимензионалног приказивања (производ тензора F_{ik} са њему дуалним, в. § 6), тако и из тродимензионалног (производ аксијалног вектора **H** са поларним вектором **E**). Прави скалар је $(\mathbf{E}\mathbf{H})^2$.

Из инваријантности двају наведених израза излазе слиједећи закључци: Ако су електрично и магнетно поље у ма којем систему референције међусобно нормални, тј. $\mathbf{E}\mathbf{H}=0$, онда су они нормални и у сваком другом инерцијалном систему референције [према (24,2)]. Ако су апсолутне величине **E** и **H** у ма ком систему референције једнаке међу собом, онда су оне једнаке и у ма коме другом систему [према (24,1)].

Очевидно важе и слиједеће неједнакости: Ако је у било ком систему референције $E > H$ (или $E < H$), тада је и у сваком другом систему $E > H$ (или $E < H$). Ако у било коме систему референције вектори **E** и **H** чине оштар (или туп) угао, онда ће и у сваком другом систему чинити оштар (или туп) угао.

Lorentz-овом трансформацијом увијек се може постићи то, да би **E** и **H** добили ма које вриједности, које би испуњавале само тај услов, да $E^2 - H^2$ и $\mathbf{E}\mathbf{H}$ имају задате одређене вриједности. Напосе, увијек се може наћи такав инерцијални систем референције, у коме су електрично и магнетно поље у датој тачки паралелна међу собом. У том систему је $\mathbf{E}\mathbf{H} = EH$, и из двију једначина

$$E^2 - H^2 = E_0^2 - H_0^2, \quad EH = \mathbf{E}_o\mathbf{H}_o$$

могу се наћи вриједности **E** и **H** у том систему референције ($\mathbf{E}_o$ и $\mathbf{H}_o$ су електрично и магнетно поље у полазном систему референције).

Изузетан је случај, када су обје инваријанте једнаке нули. У том случају су **E** и **H** у свим системима референције једнаки и међу собом нормални.

Ако је $\mathbf{E}\mathbf{H}=0$, увијек је могућно наћи такав систем референције у коме је $\mathbf{E}=0$ или $\mathbf{H}=0$ (према томе, да ли је $E^2 - H^2 <$ или > 0), тј. поље је или чисто електрично, или чисто магнетно. И обрнуто, ако је у било коме систему референције $\mathbf{E}=0$ или $\mathbf{H}=0$ онда ће у сваком другом систему они бити међусобно нормални.

Задатак:

Одредити брзину система референције, у коме су електрично и магнетно поље паралелна.

Рјешење: — Постоји бесконачно много система K', који испуњавају постављени услов. Ако је нађен један од њих, онда ће исту особину имати и ма који други систем, који се у односу на први креће брзином, која је усмјерена дуж општег правца поља E и H. Према томе, довољно је одредити од тих система онај, чија је брзнна нормална на оба поља. Ако правац брзине узмемо као осу x и узмемо у обзир, да је у систему $K' : E'_x = H'_x = 0$, $E'_y H'_z - E'_z H'_y = 0$, помоћу формула (23,5—6) за брзину $\mathbf{V}$ система у односу на полазни систем добивамо слиједећу једначину:

$$\frac{\frac{\mathbf{V}}{c}}{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{E^2 + H^2}$$

(од двају коријена квадратне једначине, разумије се, треба узети онај, за који је $V < c$).

ГЛАВА IV

ЈЕДНАЧИНЕ ПОЉА

§ 25. Први пар Maxwell-ових једначина

Из израза $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$ [(15,3) и (15,4)] за поља **E** и **H** лако се добивају једначине за та поља, тј. релације које садрже само **E** и **H**. Притом из израза за **E** и **H** морамо елиминисати потенцијале **A** и **φ**. Због тога ћемо одредити rot **E**:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi.$$

Но, ротор сваког градијента једнак је нули, а $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$. Дакле,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \qquad (25,1)$$

Узимајући дивергенцију обје стране једначине $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$, и са напоменом, да је дивергенција сваког ротора једнака нули, налазимо

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \qquad (25,2)$$

Једначине (25,1) и (25,2) називају се први пар *Maxwell*-ових једначина[1]). Напомињемо, да ове двије једначине не одређују још потпуно особине поља. То се види по томе, што оне одређују промјену магнетног поља са временом $\left(\text{извод } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)$, али не одређују извод $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ·

Једначине (25,1) и (25,2) могу се написати и у интегралном облику. Према *Gauss*-овој теореми је

$$\int \operatorname{div} \mathbf{H}\, dV = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{f},$$

---

[1]) *Maxwell*-ове једначине - основне једначине електродинамике *Maxwell* је формулисао 1860-тих година.

гдје се интеграл на десној страни узима по читавој затвореној површини која обухвата запремину, по којој се на лијевој страни интегрира. На основу (25,2) имамо

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathfrak{f} = 0. \tag{25,3}$$

Интеграл вектора по некој површини назива се флукс вектора кроз ту површину. На тај начин, флукс магнетног поља кроз сваку затворену површину једнак је нули.

Према *Stokes*-овој теореми је:

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E}\, d\mathfrak{f} = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l},$$

гдје се интеграл на десној страни узима по затвореној контури, која обухвата површину, по којој се на лијевој страни интегрира. Из (25,1) налазимо интегрирањем оба дијела по некој површини:

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}\, d\mathfrak{f}. \tag{25,4}$$

Интеграл вектора по затвореној контури назива се циркулација тога вектора по контури. Циркулација електричног поља назива се, такође електромоторна сила у датој контури. На тај начин, електромоторна сила у некој контури једнака је изводу по времену флукса магнетног поља кроз површину, ограничену том контуром, узетом са обрнутим знаком.

Maxwell-ове једначине (25,1) и (25,2) могу се написати и са четвородимензионалним ознакама. На основу дефиниције тензора електромагнетног поља

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

лако се увјерити, да је

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \tag{25,5}$$

За $i = k = l$ ова једначина је идентично задовољена (јер је за $i = k$ $F_{ik} = 0$). Када су два од i, k, l једнака, ова једначина је тривијална због антисиметричности F_{ik}. Остале четири једначине (за $i \neq k \neq l$), као што је лако видјети уврштавањем израза (22,7) за F_{ik}, нису ништа друго, него једначине (25,1) и (25,2). На тај начин (25,5) је први пар *Maxwell*-ових једначина написан са четвородимензионалним ознакама.

§ 26. Дјејство за електромагнетно поље

Дјејство S за све системе, који се састоје из електромагнетног поља и честица, које се у њему налазе, мора се састојати из три дијела:

$$S = S_f + S_m + S_{mf}. \tag{26,1}$$

S_m је онај дио дејства, који зависи само од особина честица. Тај дио, очигледно, није ништа друго него дејство за слободне честице тј. за честице у отсуству поља. Као што знамо, дејство за слободну честицу је $-mc\int ds$, [в.(9,1)]. Ако постоји више честица, онда је тотално дејство једнако суми дејства за сваку честицу напосе. На тај начин је:

$$S_m = -\sum mc \int ds. \tag{26,2}$$

S_{mf} је онај дио дејства, који је условљен узајамним дејством међу честицама и пољем. Као што смо видјели у § 14 он има облик $\frac{e}{c}\int A_k dx_k$ или у случају више честица,

$$S_{mf} = \sum \frac{e}{c} \int A_k dx_k. \tag{26,3}$$

У сваком од чланова ове суме A_k је потенцијал поља у оној тачци простора и времена, у којој се налази одговарајућа честица. Сума $S_m + S_{mf}$ је нама већ познато дејство (14,1) за оптерећење у пољу, које смо раније обиљежавали једноставно са S.

Најзад, S_f је онај дио дејства, који зависи једино од особина самога поља, тј. S_f је дејство за поље у коме нема оптерећења. Све дотле, док смо се интересовали само за кретање оптерећења у задатом електромагнетном пољу, није нас интересовало S_f јер не зависи од честица, па тај члан није могао утицати на једначине кретања честица. Међутим, он је неопходан, када хоћемо да нађемо једначине, које одређују само поље. Томе одговара околност, што смо од дјелова $S_m + S_{mf}$ дејства нашли само двије једначине поља (25,1) и (25,2) које још нијесу довољне за потпуно одређивање поља.

За одређивање облика дејства поља S_f поћићемо од слиједеће врло важне особине електромагнетних поља. Као што показује експеримент, електромагнетно поље потчињава се такозваном принципу суперпозиције. Тај се принцип састоји у томе, што, ако једно оптерећење изазива једно поље, а друго оптерећење друго поље, онда поље, које изазивају оба оптерећења заједно, претставља резултат простог слагања тих поља. То значи да су јачине резултујућег поља у свакој тачци једнаке збиру (векторском) јачина сваког поља напосе у тој тачци.

Свако рјешење једначина поља је поље, које може бити остварено у природи. Према принципу суперпозиције, збир макаквих таквих поља, такође мора бити поље, које може у природи бити остварено, тј. мора задовољити једначине поља.

Као што је познато, линеарне диференцијалне једначине баш се и одликују особином, да је збир ма којих њихових рјешења такође рјешење једначине. Дакле, једначине поља морају бити линеарне диференцијалне једначине.

Из реченог слиједи, да под знаком интеграла за дејство S_f мора стојати израз у коме фигурира квадрат јачине поља. Само ће у том случају једначине поља бити линеарне функције — једначине поља се добивају варирањем дејства, а варирањем се степен подинтегралног израза снижава за јединицу.

Потенцијали поља не могу ући у израз за дјејство, будући да они нису једнозначно одређени (у S_{mf} та неједнозначност није била битна). Према томе, S_f мора бити интеграл неке функције од тензора електромагнетног поља F_{ik}[1]. Но дјејство мора бити скалар, па зато мора бити интеграл неког скалара. Осим тога, као што је раније напоменуто, тај скалар који се налази под интегралним знаком, мора бити другог степена по F_{ik}.

Ми већ знамо, да постоји само један скалар другог степена, који се може саставити из F_{ik} (§ 24); то је F_{ik}^2 (величина $e_{iklm}F_{ik}F_{lm}$ је псеудоскалар).

На тај начин S_f мора имати облик:

$$S_j = a\int\int F_{ik}^2 dV\,dt, \quad dV = dx\,dy\,dz,$$

гдје се интеграл узима по координатама у читавом простору, а по времену — међу два задата момента; a је нека константа. Под интегралом се налази $F_{ik}^2 = 2(H^2 - E^2)$. Поље $\mathbf{E}$ садржи извод $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Но лако је видјети, да $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ мора ући у дјејство с позитивним знаком (а зато и E^2 са позитивним знаком). И заиста, кад би $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ улазило у S_f са знаком минус, тада би довољно брзом промјеном потенцијала по времену (у посматраном временском интервалу) увијек било могућно учинити $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ произвољно великим, а S_f — негативном величином са произвољно великом апсолутном вриједношћу. Према томе, S_f не би могло имати минимума, као што то захтијева принцип најмањег дјејства. На тај начин, a мора бити негативно.

Бројна вриједност a зависи од избора јединица за мјерење поља. Напомињемо, да се послије избора одређене вриједности за a заједно са јединицама за мјерење поља, одређују, такође, и јединице за мјерење свих осталих електромагнетних величина.

Убудуће употребљаваћемо такозвани *Gauss*-ов систем јединица. У том систему a је величина без димензија а износи $-\frac{1}{16\pi}$.

Поред *Gauss*-овог система јединица употребљава се и такозвани *Heaveside*-ов систем, у коме је $a = -\frac{1}{4}$. У том систему јединица једначине поља имају згоднији облик (тада у њих не улази π), али зато π улази у *Coulomb*-ов закон. Напротив, у *Gauss*-овом систему јединица једначине поља садржавају π, а *Coulomb*-ов закон има једноставан облик.

---

[1] Подинтегрална функција у S_f не мора садржавати изводе од F_{ik}, јер *Lagrange*-ова функција може осим координата система садржавати само њихове прве изводе по времену, а улогу координата (тј. промјенљивих по којима се варирање врши према принципу најмањег дјејства) играју у том случају потенцијали A_k поља. То је аналогно чињеници, што у механици *Lagrange*-ова функција за механички систем садржи само координате честица и њихове прве изводе по времену.

На тај начин, дјејство за поље има облик:

$$S_f = \frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2 d\Omega, \qquad d\Omega = dx\, dy\, dz\, d\tau\,. \tag{26,4}$$

Овдје смо мјесто $dV\,dt$ написали $d\Omega$ и зато цио израз подијелити још са ic. У тродимензионалном облику је

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\int\int (E^2 - H^2)\, dV\, dt\,. \tag{26,5}$$

Другим ријечима, *Lagrange*-ова функција за поље гласи:

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\, dV. \tag{26,6}$$

Дјејство за поље заједно са оптерећењима, која се у њему налазе је

$$S = -\sum\int mc\, ds + \sum\int \frac{e}{c} A_k dx_k + \frac{i}{16\,\pi c}\int F_{ik}^2 d\Omega\,. \tag{26,7}$$

Напомињемо да се овдје оптерећења не сматрају више мала као при извођењу једначина кретања оптерећења у задатом пољу. Према томе, A_k и F_{ik} односе се на право поље, тј. на спољашње поље, заједно са пољем, које стварају сама оптерећења; A_k и F_{ik} зависе сада од положаја и брзине оптерећења.

§ 27. Четвородимензионални вектор струје

До сада смо стално посматрали само тачкаста оптерећења. У ствари сва оптерећења у природи и јесу тачкаста, јер се, као што смо видјели у § 8, свака елементарна честица мора сматрати као тачка, а свака сложена честица састоји се из појединих елементарних честица.

Па ипак, због математичке удобности, оптерећење се често посматра као да је континуално расподијељено у простору. Тада се може увести „густина оптерећења" ϱ тако, да $\varrho\, dV$ буде оптерећење, које се налази у запремини dV; ϱ је, узевши уопште, функција од координата и времена. Интеграл $\int \varrho\, dV$ по некој запремини је оптерећење, које се налази у тој запремини.

Притом треба имати на уму, да су оптерећења уствари тачкаста, те да је густина ϱ једнака нули свуда осим у оним тачкама, гдје се налазе тачкаста оптерећења, а интеграл, $\int \varrho\, d\, V$ мора бити једнак суми тих оптерећења, која се налазе у датој запремини. Према томе, ϱ се може написати помоћу δ-функције[1]) у слиједећем облику:

$$\varrho = \sum_A e_A\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \tag{27,1}$$

---

[1]) δ-функција $\delta(x)$ дефинише се на слиједећи начин: $\delta(x) = 0$ за све вриједности x које нису једнаке нули; за $x = 0$ $\delta(0) = \infty$, и то тако да је интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

гдје се сума узима преко свих оптерећења, а $\mathbf{r}_A$ — је радиус-вектор (вектор положаја) оптерећења e_A. Та функција, према особинама δ-функције, стварно је једнака нули свуда, осим у тачкама $\mathbf{r}=\mathbf{r}_A$, а интеграл је:

$$\int \varrho\, dV = \sum_A e_A ,$$

гдје је на десној страни сума свих оптерећења, која се налазе у датој запремини.

Оптерећење честице је, већ и према самој дефиницији, инваријантна величина, тј. величина која не зависи од избора система референције. Напротив, густина ϱ уопште узевши, није инваријанта, инваријантан је само производ $\varrho\, dV$.

Помножимо обје стране једначине $de=\varrho\, dV$ са dx_i:

$$de\, dx_i = \varrho\, dV\, dx_i = \varrho\, dV\, dt\, \frac{dx_i}{dt} .$$

На лијевој страни је 4-вектор (јер је de скалар, а dx_i 4-вектор). Дакле, и на десној страни мора бити 4-вектор. Но $dV\, dt$ треба сматрати као скалар (в. § 6) па је зато $\varrho \dfrac{dx_i}{dt}$ 4-вектор. Тај се вектор (означимо га са j_i) назива 4-вектор струје:

$$j_i = \varrho\, \frac{dx_i}{dt} . \qquad (27{,}2)$$

Из те дефиниције произлазе слиједеће особине: ако је $f(x)$ ма која континуална функција онда је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x-a)\, dx = f(a) ,$$

а специјално

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0)$$

(границе интегрирања наравно не морају обавезно бити $\pm\infty$; подручје интегрирања може бити ма које подручје, које обухвата тачку, у којој δ-функција није једнака нули).

Наводимо још двије једначине са δ-функцијама. Смисао тих једначина састоји се у томе, да њихова лијева и десна страна дају једнаке резултате, ако се узму као фактори под интегралним знаком:

$$\delta(-x) = \delta(x) \qquad \delta(ax) = \frac{1}{a}\, \delta(x) .$$

Као што је $\delta(x)$ дефинисана за једну промјењиву x, може се увести и тродимензионална δ-функција $\delta(\mathbf{r})$, која је једнака нули стално, осим за почетак тродимензионалног координатног система, а чији је интеграл по читавом простору једнак 1. Очигледно је, да се за такву функцију може узети производ $\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$.

Три прве компоненте овог вектора сачињавају обични просторни вектор са компонентама $\varrho \frac{dx}{dt}, \varrho \frac{dy}{dt}, \varrho \frac{dz}{dt}$, тј. вектор

$$\mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}, \tag{27,3}$$

гдје је $\mathbf{v}$ брзина оптерећења у датој тачци. Вектор $\mathbf{j}$ назива се вектор густине струје. Четврта компонента 4-вектора струје је $ic\varrho$. На тај начин је:

$$j_{1,2,3} = j_{x,y,z}, \qquad j_4 = ic\varrho\,. \tag{27,4}$$

Цјелокупно оптерећење, које се налази у посматраној запремини, као што је већ речено, једнако је интегралу $\int \varrho\, dV$ по читавој тој запремини. Тај интеграл можемо написати у четвородимензионалном облику:

$$\int \varrho\, dV = \frac{1}{ic}\int j_4\, dV = \frac{1}{ic}\int j_i\, dS_i, \tag{27,5}$$

гдје се интегрирање врши по читавој четвородимензионалној хиперравни, која је нормална на осу x_4 (очигледно, да тако интегрирање означава интегрирање по цијелом тродимензионалном простору).

Уопште, интеграл $\frac{1}{ic}\int j_i\, dS_i$, узет по ма којој хиперповршини, очевидно је сума оптерећења, чије свјетске линије сијеку ту хиперповршину.

Уврстимо 4-вектор струје у израз (26,7) за дејство. Трансформирајмо други члан у том изразу. Према овоме што је речено у овом параграфу, можемо умјесто тачкастих оптерећења e увести континуално расподијељена оптерећења са густином ϱ. Тада, наравно, умјесто наведеног израза морамо писати $\frac{1}{c}\int \varrho A_i\, dx_i\, dV$, замјењујући суму за оптерећења интегралом по цијелој запремини. Ако се то препише у облику $\frac{1}{c}\int \varrho \frac{dx_i}{dt} A_i\, dV\, dt$, видимо, да је тај члан једнак

$$-\frac{i}{c^2}\int A_i j_i\, d\Omega.$$

На тај начин, дејство S добива облик:

$$S = -\sum \int mc\, ds - \frac{i}{c^2}\int A_i j_i\, d\Omega + \frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2\, d\Omega\,. \tag{27,6}$$

§ 28. Једначина континуитета

Цјелокупно оптерећење, које се налази у некој запремини, једнако је интегралу $\int \varrho\, dV$ по тој запремини. Промјена тог оптерећења са временом дефинише се изводом $\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho\, dV$.

С друге стране, та промјена, напр. за јединицу времена, одређује се количином оптерећења, која за јединицу времена изађе напоље из дате запремине, или, обрнуто, која уђе у ту запремину. Количина оптерећења, која прође за јединицу времена кроз елемент површине $d\mathfrak{f}$, која ограничава нашу запремину, износи $\varrho\, \mathbf{v}\, d\mathfrak{f}$, гдје је $\mathbf{v}$ — брзина оптерећења у тој тачци простора, гдје се налази елемент $d\mathfrak{f}$. Вектор $d\mathfrak{f}$ је усмјерен, као што се то увијек усваја, по спољашњој нормали на површини, тј. по нормали која је усмјерена напоље од посматране запремине. Према томе, $\varrho\, \mathbf{v}\, d\mathfrak{f}$ позитивно је ако оптерећење излази из дате запремине, а негативно, ако оптерећење улази у ту запремину. Цјелокупна количина оптерећења, која у јединици времена излази из дате запремине је према томе $\oint \varrho\, \mathbf{v}\, d\mathfrak{f}$, гдје је интеграл узет по цијелој затвореној површини, која ограничава ту запремину.

Упоређивањем добивених израза налазимо:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho dV = -\oint \varrho \mathbf{v} d\mathfrak{f}. \qquad (28,1)$$

Знак — на десној страни узет је зато, што је, када се цјелокупно оптерећење у датој запремини повећа, лијева страна позитивна. Једначина (28,1) је такозвана једначина континуитета, написана у интегралном облику. Она изражава закон одржања количине електрицитета (оптерећења), Узевши у обзир да је $\varrho\mathbf{v}$ густина струје [в. (27.3)], једначина (28,1) може се преписати у облику:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho\, dV = -\int \mathbf{j}\, d\mathfrak{f}. \qquad (28,2)$$

Напишимо ту једначину у диференцијалном облику. За то ћемо на десну страну (28,2) примјенити *Gauss*-ову теорему:

$$\oint \mathbf{j}\, d\mathfrak{f} = \int \operatorname{div} \mathbf{j}\, dV.$$

Уврштавањем у (28,2) налазимо $\int \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t}\right) dV = 0$. Како то мора важити за интегрирање по ма којој запремини, то подинтегрални израз мора бити једнак нули:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \qquad (28,3)$$

Ово је једначина континуитета у диференцијалном облику.

Увјерићемо се, да израз (27,1) за ϱ у облику δ-функције аутоматски задовољава једначину (29,3). Због једноставности претпоставимо, да је дато само једно оптерећење, тако да је:

$$\varrho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Струја $\mathbf{j}$ је

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

гдје је $\mathbf{v}$ — брзина оптерећења. Нађимо извод $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$. Кретањем оптерећења мијењају се његове координате, тј. мијења се $\mathbf{r}$. Према томе је:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial \varrho}{\partial \mathbf{r}_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t}.$$

Но $\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t}$ није ништа друго, него брзина $\mathbf{v}$ оптерећења. Даље, како је ϱ функција од $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, биће:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \mathbf{r}_0} = -\frac{\partial \varrho}{\partial \mathbf{r}}.$$

Отуда се добива

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho = -\operatorname{div} \varrho \mathbf{v}$$

(брзина оптерећења $\mathbf{v}$, наравно не зависи од $\mathbf{r}$). На тај начин, долазимо до једначине (28,3).

У четвородимензионалном облику једначина континуитета (28,3), као што је лако видјети, добива облик:

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0. \tag{28,4}$$

У претходном параграфу видјели смо да се цјелокупно оптерећење, које се налази у читавој запремини, може изразити у облику $\frac{1}{ic}\int j_i\, dS_i$, гдје се интегрирање врши по хиперравни $x_4 = \text{const.}$ У другом моменту цјелокупно оптерећење ће се приказати исто таквим интегралом, узетим по другој хиперравни, нормалној на оси x_4. Лако је провјерити, да једначина (28,4) доводи до закона одржања оптерећења, тј. до тога, да је интеграл $\int j_i\, dS_i$ једнак без обзира по којој ми хиперравни $x_i = \text{const.}$ интегрирали. Разлика међу интегралима $\int j_i\, dS_i$, узетим по двијема таквим хиперравнима, може се написати у облику $\oint j_i\, dS_i$, гдје се интеграл узима по цијелој затвореној хиперравни, која обухвата 4-запремину међу двијема посматраним хиперравнима (тај интеграл се разликује од тражене разлике за интеграл по бесконачно удаљеној „бочној" хиперповршини, који, међутим, ишчезава, јер у бесконачности нема оптерећења). Помоћу *Gauss*-ове теореме (6,11) може се трансформирати тај интеграл по 4-запремини међу двјема хиперравнима и користећи (28,4), имаћемо:

$$\oint j_i\, dS_i = \int \frac{\partial j_i}{\partial x_i}\, d\Omega = 0, \tag{28,5}$$

што је и требало доказати.

Наведени доказ, очевидно, остаје на снази и за два интеграла $\int j_i\, dS_i$, код којих се интегрирање врши по ма којим двјема бесконачним хиперповршинама (а не само по хиперравнима $x_4 = \text{const.}$), које у себи укључују сав (тродимензионални) простор. Одавде се види, да интеграл $\int j_i\, dS_i$, стварно има једну те исту вриједност (једнаку цјелокупном оптерећењу у простору), без обзира по којој се таквој хиперповршини врши интегрирање.

§ 29. Други пар Maxwell-ових једначина

При изналажењу једначина поља помоћу принципа најмањег дјејства, морамо сматрати, да је дато кретање оптерећења и морамо варирати само поље, тј. потенцијале. Обрнуто, при изналажењу једначина кретања сматрали смо да је поље задато, и варирали смо трајекторију честице.

Према томе варијација првог члана (27,6) једнака је нули, а у другом струја j_i не смије се варирати. На тај начин је

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{i c^2} j_i\, \delta A_i - \frac{1}{16 \pi i c}\, \delta (F_{ik}^2) \right] d\Omega =$$

$$= \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j_i\, \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik}\, \delta F_{ik} \right\} d\Omega = 0.$$

Ставимо ли $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, имамо:

$$\delta S = \int \frac{1}{i c} \left\{ \frac{1}{c} j_i\, \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik}\, \delta \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \right\} d\Omega =$$

$$= \int \frac{1}{i c} \left\{ \frac{1}{c} j_i\, \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta A_k + \frac{1}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i \right\} d\Omega.$$

Нека у другом члану индекси i и k, по којима се сумирање изводи, међусобно измијене мјеста и осим тога замијенимо F_{ki} са $-F_{ik}$. Тада добивамо;

$$\delta S = \int \frac{1}{i c} \left\{ \frac{1}{c} j_i\, \delta A_i + \frac{1}{4\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i \right\} d\Omega.$$

Други од тих интеграла узмимо парцијално, тј. другим ријечима, примијенимо *Gauss*-ову теорему:

$$\delta S = \frac{1}{i c} \int \left\{ \frac{1}{c} j_i - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} \right\} \delta A_i\, d\Omega + \frac{1}{4\pi i c} \int F_{ik}\, \delta A_i\, dS_k \Big| . \tag{29,1}$$

У другом члану морамо узети његову вриједност на границама интегрирања. Границе интегрирања по координатама су бесконачне (јер се интегрира по цјелокупном пољу), а у бесконачности је поље једнако нули. На границама интегрирања по времену, пак, тј. за задати почетни и крајњи момент, варијација потенцијала једнака је нули, јер је према принципу најмањег дејства поље за те моменте задато. На тај начин други члан у (29,1) једнак је нули, па налазимо:

$$\frac{1}{ic}\int\left(\frac{1}{c}j_i-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}\right)\delta A_i\,d\Omega=0.$$

Због тога, што су према принципу најмањег дејства варијације δA_i произвољне, коефицијент уз δA_i мора бити једнак нули, тј.

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=\frac{4\pi}{c}j_i. \tag{29,2}$$

Ове четири једначине ($i=1,\ 2,\ 3,\ 4$) други су пар *Maxwell*-ових једначина, написан у четвородимензионалном облику. Напишимо ове једначине у тродимензионалном облику. Прва од њих ($i=1$) је

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x}+\frac{\partial F_{12}}{\partial y}+\frac{\partial F_{13}}{\partial z}+\frac{1}{ic}\frac{\partial F_{14}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j_1.$$

Стављајући вриједности компонената тензора F_{ik} из (22,7), налазимо

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j_x.$$

Заједно с двијема слиједећим ($i=2,\ 3$) једначинама оне могу бити написане као једна векторска

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{29,3}$$

Најзад, четврта једначина ($i=4$) даје:

$$\frac{\partial iE_x}{\partial x}+\frac{\partial iE_y}{\partial y}+\frac{\partial iE_z}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}ic\varrho,$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\varrho. \tag{29,4}$$

Једначине (29,3) и (29,4) су други пар *Maxwell*-ових једначина написан у векторском облику[1]). Заједно са првим паром *Maxwell*-ових једначина оне потпуно одређују електромагнетно поље и то су основне једначине теорије тих поља или, како се каже, електродинамике.

Напишимо те једначине у интегралном облику. Интегрирањем (29,4) по некој запремини и примјеном *Gauss*-ове теореме:

$$\int\operatorname{div}\mathbf{E}\,dV=\oint\mathbf{E}\,d\mathbf{f},$$

налазимо

$$\oint\mathbf{E}\,d\mathbf{f}=4\pi\int\varrho\,dV. \tag{29,5}$$

---

[1]) *Maxwell*-ове једначине у облику, који се примјењује за електромагнетно поље у вакууму заједно са електричним оптерећењем која се у њему налазе, формулисао је *Lorentz*.

На тај начин, флукс електричног поља кроз затворену површину једнак је цјелокупном оптерећењу, које се налази у запремини ограниченој том површином, помноженом са 4π.

Интегрирањем (29,3) по некој отвореној површини и примјеном *Stokes*-ове теореме

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{H}\, d\mathfrak{f} = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l},$$

налазимо:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\, d\mathfrak{f} + \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}\, d\mathfrak{f}. \tag{29,6}$$

Величина

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{29,7}$$

назива се „струја помјераја". Из (29,6), написане у облику

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) d\mathfrak{f}, \tag{29,8}$$

види се, да је циркулација магнетног поља по некој контури једнака суми праве струје и струје помјераја, које протичу кроз површину коју та контура ограничава, помноженој са $\frac{4\pi}{c}$.

Из *Maxwell*-ових једначина може се добити нама већ позната једначина континуитета (28,3). Узимајући дивергенцију обију страна једначине (29,3) налазимо:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j}.$$

Међутим је, према (29,4), $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} \equiv 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\varrho$. На тај начин поново долазимо до једначине (28,3). У четвородимензионалном облику из (29,2) имамо:

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i\, \partial x_k} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial j_i}{\partial x_i}.$$

Но због антисиметричности тензора F_{ik}, стављајући $F_{ik} = -F_{ki}$ и мијењајући затим ознаке индекса, имамо:

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i\, \partial x_k} = -\frac{\partial^2 F_{ki}}{\partial x_i\, \partial x_k} = -\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_k\, \partial x_i},$$

одакле слиједи, да је $\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0$, чиме долазимо до једначине континуитета (28,4), написане у четвородимензионалном облику.

§ 30. Густина енергије и Poynting-ов вектор

Помножимо обије стране једначине (29,3) са **E**, а обије стране једначине (25,1) са **H**, па добивене једначине појединачно саберимо. Из те операције добићемо:

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,\mathbf{E}-(\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}).$$

Примјењујући познату формулу векторске анализе:

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

ту релацију можемо написати у облику:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+H^2)=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,\mathbf{E}-\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{8\pi}=-\mathbf{j}\,\mathbf{E}-\operatorname{div}\mathbf{S}. \qquad (30,1)$$

Вектор

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \qquad (30,2)$$

назива се *Poynting*-ов вектор.

Интегрирајмо (30,1) по некој запремини и на други члан на десној страни примијенимо *Gauss*-ову теорему. Из овога добићемо:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV=-\int\mathbf{j}\,\mathbf{E}\,dV-\oint\mathbf{S}\,d\mathbf{f} \qquad (30,3)$$

Ако се интегрирање врши по читавом простору, онда нестаје интеграла по површини (поље у бесконачности једнако је нули). Даље, интеграл $\int\mathbf{j}\,\mathbf{E}\,dV$ можемо написати у облику суме $\sum e\,\mathbf{v}\,\mathbf{E}$ по свим оптерећењима, која се налазе у пољу и, према (15,7), ставити

$$e\,\mathbf{v}\,\mathbf{E}=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}_{kin}$$

$\left(\text{гдје је } \mathcal{E}_{kin}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$. Тада (30,3) прелази у

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV+\sum\mathcal{E}_{kin}\right\}=0. \qquad (30,4)$$

На тај начин, за затворени систем, који се састоји из електромагнетног поља са честицама које се налазе у њему, одржава се величина која се у наведеној једначини налази у заградама. Други члан тога израза је кинетичка енергија (заједно са енергијом мировања) свих честица; први члан је, дакле, енергија самог електромагнетног поља. Према томе, величину

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \tag{30,5}$$

можемо назвати „густина енергије“ електромагнетног поља. То је енергија јединице запремине поља.

Код интегрирања по некој коначној запремини, површински интеграл у (30,3) уопште узевши не ишчезава, па ту једначину можемо написати у облику:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\, dV + \sum \mathcal{E}_{kin}\right\} = -\oint \mathbf{S}\, d\mathbf{f}, \tag{30,6}$$

гдје се сада у другом члану у загради сумирање врши само по честицама, које се налазе у посматраној запремини. На лијевој страни се налази промјена целокупне енергије поља и честица у јединици времена. Према томе, интеграл $\oint \mathbf{S}\, d\mathbf{f}$, треба сматрати као флукс енергије поља кроз површину, која ограничава дату запремину, тако да је *Poynting*-ов вектор $\mathbf{S}$ густина тога флукса, количина енергије поља, која протече у јединици времена кроз јединицу површине[1]).

§ 31. Тензор енергије—импулса

У претходном параграфу извели смо израз за енергију електромагнетног поља. Изведимо тај израз заједно са изразом за импулс поља у четвородимензионалном облику. Због једноставности ми ћемо, за сада, посматрати електромагнетно поље без оптерећења. Имајући у виду даљњу примјену (на гравитациона поља), а такође и упрошћавање извођења, обављаћемо извођење у општем облику, не истичући конкретне врсте система. И тако, посматрајмо неки систем, за који интеграл дјејства има облик:

$$S = \int \Lambda\left(q, \frac{\partial q}{\partial x_i}\right) dV\, dt = \frac{1}{ic}\int \Lambda\, d\Omega, \tag{31,1}$$

гдје је Λ нека функција од величина q, које дефинишу систем, и од извода тих величина по координатама и времену (за електромагнетно поље величине q су компоненте 4 - потенцијала). Због краткоће овдје пишемо свега једну такву величину q. Напомињемо, да је запремински интеграл $\int \Lambda\, dV$ *Lagrange*-ова функција система, тако да се Λ може сматрати као „густина“ *Lagrange*-ове функције. Математички израз за то, да је систем затворен, претстављен је тим, да Λ не зависи експлицитно од x_i — слично томе, што *Lagrange*-ова функција затвореног механичког система не зависи експлицитно од времена.

---

[1]) Претпостављамо, да се на самој површини посматране запремине у датом моменту не налазе честице. У противном случају на десној страни једначине мора се налазити такође и флукс енергије, коју преносе честице, које пролазе кроз површину.

„Једначине кретања" (тј. једначине поља, ако је ријеч о ма којем пољу) добивају се према принципу најмањег дјејства помоћу варирања S. Добива се $\left(\text{због краткоће означимо } q_{,i} \equiv \frac{\partial q}{\partial x_i}\right)$:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q_{,i} \right) d\Omega =$$
$$= \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right] d\Omega = 0.$$

Други члан под интегралом, послије трансформирања према *Gauss*-овој теореми, једнак је нули при интегрирању по цијелом простору, па отуда налазимо слиједеће „једначине кретања":

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \tag{31,2}$$

(наравно, стално се подразумијева сумирање по двапут поновљеном индексу i),

Даљи извод аналоган је изводу, који се обавља у механици код закона о одржању енергије. Тако добивамо:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i}.$$

Уврштавајући овдје (31,2), и узевши у обзир да је: $\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k}$, налазимо:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right) q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right).$$

С друге стране, можемо написати $\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}$, тако да је

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} \delta_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} q_{,i} \right).$$

Послије увођења ознаке

$$T_{ik} = \delta_{ik} \Lambda - q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}, \tag{31,3}$$

добивена релација може се написати у облику;

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{31,4}$$

Напомињемо, да ако се има не једна, него више величина $q^{(l)}$, онда, наравно, мјесто (31,3) треба писати

$$T_{ik} = \delta_{ik} \Lambda - \sum_l q^{(l)}_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}}. \tag{31,5}$$

У § 28 видјели смо, да је једначина облика $\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0$, тј. да је 4-дивергенција вектора једнака нули, еквивалентна тврдњи, да се одржава интеграл неког вектора по хиперповршини $\int A_k dS_k$, гдје та хиперповршина обухвата цјелокупни тродимензионални простор. Очигледно је, да аналогно стање важи и за дивергенцију тензора; једначина $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$, еквивалентна је тврдњи, да се одржава вектор P_i, чије су компоненте једнаке интегралима од T_{ik} по хиперповршини:

$$P_i = \text{const.} \int T_{ik}\, dS_k \,.$$

Овај вектор мора бити идентичан са 4-вектором импулса система. Константни фактор пред интегралом узмимо тако, да четврта компонента вектора P_i, саобразно ранијим дефиницијама, буде једнака енергији система, помноженој са $\frac{i}{c}$. За то напоменимо, да се P_4 може написати у облику:

$$P_4 = \text{const.} \int T_{4k}\, dS_k = \text{const.} \int T_{44}\, dV,$$

ако се интегрирање врши по хиперравни $x_4 = \text{const}$. С друге стране, према (31,3) имамо:

$$T_{44} = -\dot{q} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} + \Lambda \qquad \left(\dot{q} \equiv \frac{\partial q}{\partial t}\right).$$

Ова величина, саобразно обичној формули, која повезује енергију са *Lagrange*овом функцијом, мора се посматрати као густина енергије система, па је према томе $-\int T_{44}\, dV$ тотална енергија система. На тај начин, морамо ставити $\text{const.} = -\frac{i}{c}$, па се за 4-импулс система дефинитивно добива израз

$$P_i = -\frac{i}{c} \int T_{ik}\, dS_k \,. \qquad (31,6)$$

Тензор T_{ik} назива се тензор енергије-импулса система.

Неопходно је напоменути, да дефиниција тензора T_{ik} у суштини није једнозначна. И заиста, тензору T_{ik} дефинисаном једначином (31,3) може се додати величина облика $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$, гдје је ψ_{ikl} ма који тензор антисиметричан по индексима k, l. Послије такве замјене нови тензор T_{ik} може задовољавати једначину (31,4), јер постоји идентитет $\frac{\partial^2 \psi_{ikl}}{\partial x_k \partial x_l} = 0$. Тотални 4-импулс система P_i уопште се притом не мијења, јер према (6,12) можемо писати:

$$\int \frac{\partial \psi_{ikl}}{\partial x_l} dS_k = \frac{1}{2} \int \left(dS_k \frac{\partial \psi_{ikl}}{\partial x_l} - dS_l \frac{\partial \psi_{ikl}}{\partial x_k} \right) = \int \psi_{ikl}\, df_{kl} \,,$$

гдје се интегрирање на десној страни једначине врши по површини (обичној), која „обавија" хиперповршину, по којој се на лијевој страни једначине врши интегрирање. Та површина, очевидно, налази се у бесконачности тродимензионалног простора, а како у бесконачности не постоји поље нити честице, то је тај интеграл једнак нули. На тај начин, 4-импулс система је, као што и мора бити, величина, која је једнозначно дефинисана. За једнозначно дефинисање тензора T_{ik} може се употријебити захтјев, да се 4-тензор момента импулса (в. § 13) система изражава 4-импулсом помоћу:

$$M_{ik}=\int(x_i\,dP_k-x_k\,dP_i)=-\frac{i}{c}\int(x_i T_{kl}-x_k T_{il})\,dS_l\,, \qquad (31,7)$$

тј. тако, да се не само цјелокупан момент система, него и његова „густина" изражавају помоћу „густине" импулса по обичној формули.

Лако је одредити какав услов мора за то задовољавати тензор енергије-импулса. У вези с тим напомињемо, да се закон одржања момента може изразити, као што већ знамо, тако да се стави, да је дивергенција подинтегралног израза у M_{ik} једнака нули. На тај начин је

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(x_i T_{kl}-x_k T_{il})=0\,.$$

Напомињемо, да је $\frac{\partial x_i}{\partial x_l}=\delta_{il}$ и $\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l}=0$; одатле налазимо:

$$\delta_{il}T_{kl}-\delta_{kl}T_{il}=T_{ki}-T_{ik}=0\,,$$

или

$$T_{ik}=T_{ki}\,, \qquad (31,8)$$

тј. тензор енергије-импулса мора бити симетричан.

Примјетимо, да T_{ik}, дефинисан формулом (31,4), уопште узевши, није симетричан, али може бити састављен на тај начин додавањем израза облика $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$ са одговарајућим ψ_{ikl}.

Видјећемо доцније (у § 93), да постоји једноставан начин директног добивања симетричног тензора T_{ik}. Као што је раније напоменуто, ако се интегрирање у (31,6) врши по хиперравни $x_4=\text{const.}$, онда P_i добива облик:

$$P_i=-\frac{i}{c}\int T_{i4}\,dV\,, \qquad (31,9)$$

гдје се интегрирање врши по цијелом простору (тродимензионалном). Како просторне компоненте P_i образују тродимензионални вектор импулса система, а временска компонента је његова енергија помножена са $\frac{i}{c}$, то се компоненте $\left(-\frac{i}{c}T_{\alpha 4}\right)$ могу назвати „густина импулса", а $(-T_{44})$ — „густина енергије" (тј. респективно импулс и енергија јединице запремине).

Због објашњења смисла осталих компонената T_{ik}, напишимо једначину одржања (31,4) у тродимензионалном облику:

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial T_{44}}{\partial t}+\frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha}=0\,, \quad \frac{1}{ic}\frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial t}+\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0\,. \qquad (31,10)$$

Интегрирајмо ове једначине по некој запремини V простора. Из прве имамо:

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\int T_{44}\,dV+\int\frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha}\,dV=0\,,$$

или, трансформацијом другог интеграла према *Gauss*-овој теореми:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int T_{44}\,dV=ic\oint T_{4\alpha}\,df_\alpha\,, \tag{31,11}$$

гдје се на десној страни интеграл узима по површини, која обавија запремину V. На лијевој страни налази се брзина промјене енергије, која се налази у запремини V. Одатле са види, да је израз на десној страни количина енергије, која прође кроз границу запремине V, а $-ic\,T_{4\alpha}$ густина је тог флукса — количина енергије која прође кроз јединицу површине у јединици времена. На тај начин, густина флукса енергије једнака је густини импулса помноженој са c^2.

Из друге једначине аналогно налазимо:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{i}{c}\int(-T_{\alpha\beta})\,dV=-\oint T_{\alpha\beta}\,df_\beta\,. \tag{31,12}$$

На лијевој страни налази се промјена импулса система у запремини V у јединици времена. Према томе, $\oint T_{\alpha\beta}df_\beta$ је количина импулса, који „истече“ у јединици времена из запремине V. На тај начин, $T_{\alpha\beta}$ је густина флукса импулса. Густина флукса енергије је вектор, а густина флукса импулса, који је сам по себи вектор, очигледно мора бити тензор (компонента $T_{\alpha\beta}$ тога тензора је величина α-компоненте импулса, која протече кроз јединицу површине, нормалне на оси x_β у јединици времена).

§ 32. Тензор енергије—импулса електромагнетног поља

Опште релације, које смо добили у претходном параграфу, примијенићемо сада на електромагнетно поље. За електромагнетно поље величина, која се налази под интегралним знаком (31,1) према (26,4), једнака је:

$$\Lambda=-\frac{1}{16\pi}F_{kl}^2=-\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)^2.$$

Компоненте 4 - потенцијала поља A_k су величине q. Уврштавањем тога у дефиницију (31,5) тензора T_{ik} имамо:

$$T_{ik}=-\frac{\partial A_l}{\partial x_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\dfrac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)}+\delta_{ik}\Lambda\,.$$

За израчунавање извода од Λ, који овдје долази, написаћемо варијацију $\delta\Lambda$. Добива се

$$\delta\Lambda=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)\delta\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)=-\frac{1}{8\pi}F_{kl}\left(\delta\frac{\partial A_l}{\partial x_k}-\delta\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right),$$

или, пермутацијом индекса и узевши у обзир да је $F_{kl} = -F_{lk}$:

$$\delta \Lambda = -\frac{1}{4\pi} F_{kl}\, \delta \frac{\partial A_l}{\partial x_k}.$$

Одавде видимо, да је

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)} = -\frac{1}{4\pi} F_{kl},$$

и према томе

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_l}{\partial x_i} F_{kl} - \frac{1}{16\pi} \delta_{ik} F_{lm}^2 .$$

Да би овај израз био симетричан по индексима i и k, додајмо му члан $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_i}{\partial x_l} F_{kl}$; тај члан има облик извода $\frac{\partial}{\partial x_l} \psi_{ikl}$, јер је:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_l} F_{kl} = \frac{\partial A_i F_{kl}}{\partial x_l} - A_i \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = \frac{\partial A_i F_{kl}}{\partial x_l}$$

[према *Maxwell*-овим једначинама (29,2) у мјестима гдје нема оптерећења је $\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = 0$], а зато се, као што је показано у претходном параграфу, и може додати тензору енергије-импулса. Како је $\frac{\partial A_l}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_l} = F_{il}$, дефинитивно налазимо слиједећи израз за тензор енергије-импулса електромагнетног поља:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{il} F_{kl} - \frac{1}{4} F_{lm}^2\, \delta_{ik} \right). \tag{32,1}$$

Није се тешко увјерити, да тензор T_{ik} електромагнетног поља задовољава захтјев $T_{ik} = T_{ki}$. Осим тога, он се одликује особином, да је збир његових дијагоналних чланова једнак нули:

$$T_{ii} = 0. \tag{32,2}$$

Изразимо компоненте тензора T_{ik} помоћу електричног и магнетног поља. На основу израза (22,7) за компоненте F_{ik}, лако је наћи слиједеће изразе за T_{ik}:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} (E^2 + H^2)\, \delta_{\alpha\beta} - E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta \right].$$

$$T_{4\alpha} = \frac{i}{c} S_\alpha, \qquad T_{44} = -W, \tag{32,3}$$

гдје је $W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$ густина енергије поља, а $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ — *Poynting*-ов вектор. Тродимензионални тензор $T_{\alpha\beta}$ назива се *Maxwell*-ов тензор напона.

До сада смо посматрали поља без оптерећења. Када се ту налазе и честице, онда су тотална енергија и импулс поља заједно са честицама једнаки суми енергије и импулса и једних и других, тј. тотални 4-импулс је једнак:

$$P_i = -\frac{i}{c}\int T_{ik}\,dS_k + \sum p_i\,, \tag{32,4}$$

гдје је $p_i = mcu_i$ 4-импулс честица, а сума се узима преко свих честица које се налазе у пољу. У тродимензионалном облику можемо за импулс поља и оптерећења написати:

$$\int \frac{\mathbf{S}}{c^2}dV + \sum \mathbf{p},$$

а за енергију,

$$\int W\,dV + \sum \mathcal{E}.$$

Није тешко провјерити, да се P_i, које је дефинисано према (32,4), стварно одржава. Израчунајмо промјену dP_i вектора P_i за вријеме dt. То се може урадити аналогно ономе, како смо израчунавали промјену оптерећења у § 28. У неком моменту t P_i се одређује формулом (32,4), гдје се интегрирање врши по читавој хиперравни $t = \text{const}$. У моменту $t + dt$ P_i се одређује истом формулом, гдје се сада интегрирање врши по хиперравни $t + dt = \text{const.}$, а импулси честица узимају се у моменту $t + dt$. Разлика вриједности интеграла $\int T_{ik}\,dS_k$ на тим хиперравнима може се написати у облику интеграла $\oint T_{ik}\,dS_k$ по хиперповршини, која окружује четвородимензионалну запремину међу тим хиперравнима (у бесконачности је поље једнако нули и зато нестаје интеграла по „бочној хиперповршини)". На тај начин је

$$dP_i = -\frac{i}{c}\oint T_{ik}\,dS_k + \sum dp_i\,,$$

или, према *Gauss*-овој теореми:

$$dP_i = -\frac{i}{c}\int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\,d\Omega + \sum dp_i\,, \tag{32,5}$$

гдје се интеграл узима по 4-запремини међу двијема бесконачно блиским хиперравнима.

Други члан у (32,5) може се трансформирати, служећи се једначинама кретања оптерећења у пољу (22,5):

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}\,u_k\,,$$

одакле, множењем са ds излази:

$$dp_i = \frac{e}{c}F_{ik}\,dx_k = \frac{e}{c}F_{ik}\frac{dx_k}{dt}dt.$$

Увођењем густине оптерећења ϱ, имамо

$$\sum dp_i = \frac{dt}{c} \int \varrho F_{ik} \frac{dx_k}{dt} dV = \frac{dt}{c} \int F_{ik} j_k dV,$$

гдје је j_k — 4-вектор струје. Добивени израз може се написати и у облику:

$$\sum dp_i = \frac{1}{ic^2} \int F_{ik} j_k \, d\Omega,$$

гдје се интеграл узима по истој 4-запремини као и код првог члана у (32,5). На тај начин је:

$$dP_i = -\frac{i}{c} \int \left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{c} F_{ik} \, j_k \right) d\Omega.$$

С друге стране, помоћу *Maxwell*-ових једначина може се доказати, да овдје нестаје подинтегралног израза, тако да је dP_i једнако нули, тј. P_i се стварно одржава. Служећи се изразом (32,1) можемо писати:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial F_{lm}^2}{\partial x_k} \delta_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_k} F_{il} \, F_{kl} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i} F_{lm} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} F_{kl} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_k} F_{il} \right).$$

Према *Maxwell*-овим једначинама (25,5) и (29,2) ставимо овдје

$$\frac{\partial F_{lk}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_l, \quad \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i} = -\frac{\partial F_{mi}}{\partial x_l} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_m}$$

и узмимо у обзир, да је тензор F_{ik} антисиметричан, па имамо:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_l} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F_{mi}}{\partial x_l} F_{lm} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_{il}}{\partial x_m} F_{lm} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} F_{kl} - \frac{4\pi}{c} F_{il} \, j_l \right).$$

Транспозицијом индекса лако је показати, да се прва три члана на десној страни међусобно поништавају, па тако долазимо до траженог резултата:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{1}{c} F_{ik} j_k. \qquad (32,6)$$

Ова једначина, која је уопштење једначине (31,4), математички је израз закона одржања енергије и импулса електромагнетног поља заједно са честицама које се у њему налазе. Као што се можемо увјерити, четврта компонента ове једначине поклапа се са једначином (30,1).

Задаци:

1. Одредити главне вриједности тензора енергије—импулса електромагнетног поља.

Рјешење: Тензор T_{ik} своди се на дијагонални облик у координатном систему, гдје су вектори **E** и **H** паралелни. У том систему је:

$$-T_{11} = T_{22} = T_{33} = -T_{44} = W$$

(оса X је узета у правцу оба вектора поља).

Ако су вектори **E** и **H** међусобно нормални и једнаки по апсолутној величини, онда се тензор T_{ik} не може свести на дијагонални облик. Компоненте T_{ik} које су различите од нуле у том случају су:

$$-T_{44} = T_{33} = -i\,T_{43} = W$$

(оса X је узета у правцу **E**, а оса Y у правцу **H**).

2. Наћи *Lorentz*-ове трансформационе формуле за компоненте тензора енергије-импулса електромагнетног поља.

Рјешење: Према општим формулама (6,4 — 5) добивамо:

$$T_{xx} = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(T'_{xx} + 2\frac{V}{c^2}S'_x + \frac{V^2}{c^2}W'\right),\ T_{yy} = T'_{yy},\ T_{yz} = T'_{yz},$$

$$T_{xy} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(T'_{xy} + \frac{V}{c^2}S'_y\right), \qquad S_x = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left[S'_x\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right) + VW' + VT'_{xx}\right],$$

$$S_y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(S'_y - VT'_{xy}\right),\ W = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(W' + 2\frac{V}{c^2}S'_x + \frac{V^2}{c^2}T'_{xx}\right)$$

и аналогне формуле за S_z, T_{xz}, T_{zz}.

§ 33. Теорема вириала

Посматрајмо систем честица које међусобно не дјејствују. Њихов општи 4-импулс може се написати у интегралном облику уводећи на одговарајући начин одређени тензор енергије-импулса. У ту сврху описиваћемо расподјелу маса у простору помоћу „густине масе“, аналогно поступку при описивању расподјеле тачкастих оптерећења помоћу њихове густине. Аналогно формули (27,1) за густину оптерећења густина масе може се написати у облику:

$$\mu = \sum_A m_A\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \tag{33,1}$$

гдје су $\mathbf{r}_A$ радиус-вектори (вектори положаја) честица, а сумирање се врши по свим честицама система.

„Густина 4-импулса“ честица пише се у облику $\mu c u_i$. Као што знамо, та густина претставља компоненте $-\frac{i}{c}T_{4\alpha}$ тензора енергије-импулса, тј. $T_{4\alpha} = -i\mu c^2 u_i$. Но, густина масе μ претставља временску компоненту 4-вектора $\frac{\mu}{ic}\frac{dx_k}{dt}$ (аналогно густини оптерећења, в. § 27). Према томе је тензор енергије-импулса система честица, које међусобно не дјејствују:

$$T_{ik} = \mu c\frac{dx_i}{ds}\cdot\frac{dx_k}{dt} = \mu c\,u_i\,u_k\frac{ds}{dt}. \tag{33,2}$$

Овај тензор је, као што то и мора бити, симетричан.

Израчунајмо збир дијагоналних чланова тензора енергије—импулса (32,2), тј. величину T_{ii}. Имамо:

$$T_{ii} = \mu c u_i u_i \frac{ds}{dt} = -\mu c \frac{ds}{dt} .$$

Стављајући овдје $ds = c\, dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ и умјесто μ — суму (33,1), налазимо

$$T_{ii} = -\sum_A m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A). \qquad (33,3)$$

Видимо, специјално, да је $T_{ii} < 0$.

Лако је показати, да израз (33,3) за T_{ii} важи за ма који систем наелектрисаних честица које међусобно дјејствују. Стварно, тензор енергије—импулса таквог система могао би се написати у облику суме тензора (33,2) и тензора енергије—импулса електромагнетног поља, које честице стварају. Но за електромагнетно поље увијек је $T_{ii} = 0$ (§ 32). На тај начин можемо утврдити, да је за сваки физички систем

$$T_{ii} \leqq 0, \qquad (33,4)$$

гдје знак једнакости важи само за електромагнетно поље без електричних оптерећења.

Посматрајмо систем наелектрисаних честица, који врши такво кретање, при коме се све карактеристичне величине за тај систем (координате, импулси) мијењају у коначним интервалима. За такво кретање каже се, да је квазистационарно. Одредимо средњу вриједност по времену тоталне енергије $\mathcal{E}$ система. У ту сврху наћи ћемо средњу вриједност по времену друге од једначина (31,10). При том треба имати у виду да је средња вриједност извода $\frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial t}$ једнака нули, као и уопште извод сваке величине, која се мијења у коначном интервалу[1]. Према томе налазимо:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \overline{T}_{\alpha\beta} = 0.$$

Помножимо ту једначину са x_α и интегрирајмо по цијелом простору. Трансформирајмо интеграл према *Gauss*-овој теореми, имајући у виду, да је у бесконачности $T_{\alpha\beta} = 0$ (кретање се врши у ограниченој области простора), па зато интеграл по површини ишчезава:

$$\int x_\alpha \frac{\partial \overline{T}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\, dV = \int \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} \overline{T}_{\alpha\beta}\, dV = \int \delta_{\alpha\beta} \overline{T}_{\alpha\beta} = 0,$$

---

[1] Нека је f таква величина. Тада је средња вриједност извода $\frac{df}{dt}$ за неки временски интервал T једнака

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt}\, dt = \frac{f(T) - f(0)}{T} .$$

Како се $f(t)$ мијења само у коначним границама, то при неограниченом повећавању T средња вриједност $\frac{df}{dt}$ стварно тежи нули.

или дефинитивно:

$$\int \overline{T}_{\alpha\alpha}\, dV = 0. \qquad (33,5)$$

На основу ове једначине можемо написати за интеграл од $\overline{T}_{ii} = \overline{T}_{\alpha\alpha} + \overline{T}_{44}$:

$$\int \overline{T}_{ii}\, dV = \int \overline{T}_{44}\, dV = -\overline{\mathcal{E}}.$$

Најзад, уврштавајући овдје израз (34,3) за T_{ii}, налазимо:

$$\overline{\mathcal{E}} = \sum_A m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}. \qquad (33,6)$$

Ова релација, која одређује средњу вриједност енергије код квазистационарног кретања, претставља релативистичко уопштење теореме вириала класичне механике[1]. За мале брзине релација (33,6) прелази у

$$\overline{\mathcal{E}} - \sum_A m_A c^2 = -\sum_A \frac{m_A v_A^2}{2},$$

тј. средња вриједност тоталне енергије (изостављајући енергију мировања) једнака је средњој вриједности кинетичке енергије, узетој са супротним знаком. То је у сагласности са резултатом, који даје класична теорема вириала за систем наелектрисаних честица (које међусобно дјејствују према *Coulomb*-овом закону).

Напоменимо, да је $\overline{\mathcal{E}} < \sum_A m_A c^2$, тј. средња вриједност тоталне енергије мања је од суме енергија мировања честица. Тако и мора бити, јер би се у противном случају честице могле разлетјети до бесконачности и кретање не би било квазистационарно.

§ 34. Тензор енергије-импулса макроскопских тијела

Посматрајмо сада неко макроскопско тијело и одредимо његов тензор енергије-импулса.

Флукс импулса кроз елемент $d\mathfrak{f}$ површине тијела није ништа друго него сила која дјејствује на тај елемент површине. Према томе $T_{\alpha\beta}\, df_\beta$ је α-та компонента силе, која дјејствује на елемент површине. Употребимо сада систем референције, у коме дати елемент запремине тијела мирује. У таквом систему референције важи *Pascal*-ов закон, тј. притисак, који врши дати дио тијела једнак је у свим правцима и увијек је нормалан на површину, на коју дјејствује[2]. Према томе можемо писати $T_{\alpha\beta}\, df_\beta = p\, df_\alpha$, одакле је

$$T_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta},$$

---

[1] Види напр. „Механика", § 14.

[2] Строго речено, *Pascal*-ов закон важи само за течности и гасове. Међутим, за чврста тијела максималне могуће разлике притиска у разним правцима незнатне су у односу на притиске, који могу играти улогу у теорији релативитета, па њихово узимање у обзир није интересантно.

гдје је p — притисак тијела. Што се тиче компонената $T_{\alpha 4}$, које претстављају густину импулса, оне су за дати елемент запремине тијела једнаке нули у посматраном систему. Компонента T_{44}, пак, као и увијек, једнака је густини енергије тијела, коју ћемо овдје означити са ε. Онда је $\frac{\varepsilon}{c^2}$, очигледно, густина масе тијела, тј. маса јединице његове запремине. Ваља истаћи, да је овдје ријеч о јединици „сопствене" запремине, тј. запремине у оном систему референције у коме дати дио тијела мирује.

На тај начин, у посматраном систему референције тензор T_{ik} (за дати дио тијела) има облик:

$$T_{ik}=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{34,1}$$

Сада је лако наћи израз за тензор енергије-импулса макроскопског тијела у ма ком систему референције. Због тога уводимо 4-брзину u_i макроскопског кретања елемента запремине тијела. У том систему референције, гдје дати елемент мирује, компоненте његове 4-брзине једнаке су $u_\alpha=0$, $u_4=i$. Израз за T_{ik} мора бити тако изабран, да у том систему добива облик (34,1). Лако је показати да је такав

$$T_{ik}=(p+\varepsilon)\,u_i\,u_k+p\,\delta_{ik}\,. \tag{34,2}$$

Овај израз одређује тензор енергије-импулса макроскопског тијела. Његове компоненте, написане у тродимензионалном облику, су:

$$T_{\alpha\beta}=\frac{(p+\varepsilon)\,v_\alpha\,v_\beta}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}+p\,\delta_{\alpha\beta}\,, \tag{34,3}$$

$$T_{\alpha 4}=\frac{i\,(p+\varepsilon)\,v_\alpha}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\,,\qquad T_{44}=-\frac{\varepsilon+p\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Ако је брзина v макроскопског тијела мала у односу на брзину свјетлости, онда је приближно $T_{\alpha 4}=\frac{i}{c}(p+\varepsilon)\,v_\alpha$. Како је $-\frac{i}{c}\,T_{\alpha 4}=\frac{1}{c^2}(p+\varepsilon)v_\alpha$ густина импулса, види се, да улогу густине масе тијела игра у том случају збир $\frac{1}{c^2}(p+\varepsilon)$.

Израз за T_{ik} поједностављује се у случају, када су брзине свих честица, које улазе у састав макроскопског тијела, мале у односу на брзину свјетлости (брзина, пак, макроскопског кретања може бити произвољна). У том случају у густини енергије ε могу се занемарити сви њени дјелови, који су мали у односу на енергију мировања, тј. може се писати μc^2 умјесто ε, гдје је μ збир маса честица, које се налазе у јединици (сопствене) запремине тијела (наглашавамо, да у општем случају треба разликовати μ од тачне густине масе тијела $\frac{\varepsilon}{c^2}$, која у себи укључује и масу која произлази од енергије микроскопског кретања честица у тијелу и енергије њиховог узајамног дејства). Што се тиче притиска одређеног енергијом микроскопског кретања молекула, он је у посматраном случају, наравно, такође мали у односу на густину енергије мировања μc^2. На тај начин, за израз T_{ik} налазимо:

$$T_{ik} = \mu c^2 u_i u_k. \tag{34,4}$$

Из израза (34,2) налазимо $T_{ii} = -\varepsilon + 3p$. Општа особина (33,4) тензора енергије-импулса ма којег система показује сада, да за притисак и густину макроскопског тијела увијек важи неједнакост[1]).

$$p < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{34,5}$$

Упоредимо релацију $T_{ii} = 3p - \varepsilon$ са општом формулом (33,3), која, као што смо видјели, важи за ма које системе. Будући да сада посматрамо макроскопско тијело, онда за израз (33,3) треба узети средњу вриједност за све вриједности $\mathbf{r}$ у јединици запремине. У резултату добивамо:

$$\varepsilon - 3p = \sum_A m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} \tag{34,6}$$

(сумирање се врши преко честица, које се налазе у јединици запремине).

Примјенимо добивене формуле на идеални гас, за који претпостављамо, да је састављен из једнаких честица. Будући да честице идеалног гаса не дјејствују једна на другу, могућно је примјенити формулу (33,2) пошто се претходно узме њена средња вриједност. На тај начин, за идеални гас је

$$T_{ik} = nmc \overline{\frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{ds}},$$

гдје је n — број честица у јединици запремине, а црта означава средњу вриједност преко свих честица. Ако у гасу не постоји никаквог макроскопског кретања, онда с друге стране за T_{ik} имамо израз (34,1). Упоређивање ових формула доводи до једначина:

$$\varepsilon = nm \overline{\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}, \qquad p = \frac{nm}{3} \overline{\frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}. \tag{34,7}$$

Ове једначине одређују густину и притисак релативистичког идеалног гаса помоћу брзина честица. Друга од њих замјењује познату формулу нерелативистичке кинетичке теорије гасова.

---

[1]) Гранична вриједност $p = \frac{\varepsilon}{3}$ постиже се само за електромагнетне таласе.

ГЛАВА V

СТАЛНО ПОЉЕ

§ 35. Coulomb-ов закон

За стално (константно) електрично, или, како се обично каже, електростатичко поље, *Maxwell*-ове једначине имају облик:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4 \pi \varrho, \tag{35,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \tag{35,2}$$

Електрично поље $\mathbf{E}$ изражава се само помоћу једног скаларног потенцијала релацијом:

$$\mathbf{E} = - \operatorname{grad} \varphi \tag{35,3}$$

Уврсти ли се (35,3) у (35,1) добива се једначина, коју задовољава потенцијал сталног електричног поља:

$$\Delta \varphi = - 4 \pi \varrho. \tag{35,4}$$

Ова једначина се назива *Poisson*-ова једначина. Специјално, у вакууму, тј. гдје је $\varrho = 0$, потенцијал задовољава *Laplace*-ову једначину:

$$\Delta \varphi = 0. \tag{35,5}$$

Из посљедње једначине слиједи, специјално, да потенцијал електричног поља нигдје не може имати ни максимум ни минимум. И заиста, да би φ имало екстремну вриједност, неопходно је да сви први изводи од φ по координатама буду једнаки нули, а да други изводи $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ имају једнаки знак. Међутим, посљедње је немогуће, јер тада не може бити испуњен услов (35,5).

Одредимо сада поље, које ствара тачкасто оптерећење. Због симетрије је јасно, да ће поље бити оријентисано у свакој тачки дуж радиус-вектора повученог из тачке, у којој се налази оптерећење e. Одавде је јасно, да ће апсолутна вриједност E поља зависити само од растојања R од оптерећења. За налажење те апсолутне вриједности примијенимо једначину (35,1) у интегралном облику (29,5). Флукс електричног поља кроз сферну површину полупречника R узету око оптерећења e, једнак је $4\pi R^2 E$. Тај флукс мора бити једнак $4\pi e$. Одавде налазимо:

$$E = \frac{e}{R^2} \cdot$$

У векторском облику поље **E** може се написати у облику:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \cdot \qquad (35,6)$$

На тај начин је поље, које изазива тачкасто оптерећење, обрнуто пропорционално квадрату растојања од тог оптерећења. То је такозвани *Coulomb*-ов закон. Потенцијал тога поља је, очевидно,

$$\varphi = \frac{e}{R} \cdot \qquad (35,7)$$

Ако имамо систем оптерећења, онда је поље, које тај систем изазива према принципу суперпозиције, једнако суми поља, која изазива свако оптерећење појединачно. Специјално, потенцијал таквог поља је:

$$\varphi = \sum_{A} \frac{e_A}{R_A},$$

гдје је R_A растојање од оптерећења e_A до тачке, у којој потенцијал тражимо. Ако се уведе густина оптерећења ϱ, та формула добива облик:

$$\varphi = \int \frac{\varrho}{R} dV, \qquad (35,8)$$

гдје је R растојање од елемента запремине dV до дате тачке.

Овдје ћемо навести и математичку релацију, која се добива, када се величине ϱ и φ за тачкасто оптерећење замијене у (35,4), тј. када се стави $\varrho = e\,\delta(\mathbf{R})$ и $\varphi = \frac{e}{R}$. Тада налазимо:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\,\delta(\mathbf{R}). \qquad (35,9)$$

§ 36. Електростатичка енергија оптерећења

Посматрајмо систем оптерећења и одредимо његову енергију. Поћићемо од појма енергије поља, тј. од израза (30,5) за густину енергије. Енергија система оптерећења мора бити једнака:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV,$$

гдје је **E** поље, изазвано тим оптерећењима, а интеграл се узима по цијелом простору. Ако се овдје стави $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, U се може трансформирати на слиједећи начин:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \operatorname{grad}\varphi\, dV = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi)\, dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div}\mathbf{E}\, dV.$$

Први од ових интеграла, према *Gauss*-овој теореми, једнак је интегралу од $\mathbf{E}\varphi$ по површини, која ограничава запремину интегрирања. Но, будући да се интегрирање врши по цјелокупном простору, а у бесконачности је поље једнако нули, интеграл ишчезава. Стављајући у други интеграл $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\varrho$ (35,1), налазимо слиједећи израз за енергију система оптерећења:

$$U = \frac{1}{2}\int \varrho\,\varphi\,dV. \tag{36,1}$$

За систем тачкастих оптерећења e_A умјесто интеграла може се написати сума преко оптерећења:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{A} e_A\,\varphi_A, \tag{36,2}$$

гдје је φ_A — потенцијал поља, које стварају сва оптерећења у тачки гдје се налази оптерећење e_A.

Према *Coulomb*-овом закону, ако се добивена формула примијени на једну елементарну оптерећену честицу (рецимо на електрон) и на поље, које она производи, долазимо до закључка, да оптерећење мора имати неку „сопствену" потенцијалну енергију, једнаку $\frac{e\varphi}{2}$, гдје је φ потенцијал поља које ствара оптерећење у мјесту гдје се налази. Но ми знамо (в. § 8), да у теорији релативитета сваку елементарну честицу треба сматрати као тачкасту. Потенцијал, пак, $\varphi = \frac{e}{R}$ његовог поља у тачци $R = 0$ постаје бесконачан. На тај начин, на основу електродинамике, електрон би морао имати бесконачну „сопствену" енергију, а према томе и бесконачну масу (једнаку енергији подијељеној са c^2). Физичка апсурдност тога резултата показује, да већ основни принципи саме електродинамике доводе до тога, да њена примјена мора бити ограничена одређеним границама.

Напомињемо, да се због добивених резултата из електродинамике, да је „сопствена" енергија и маса бесконачна, не може у електродинамици поставити питање, да ли је сва маса електрона електромагнетна (тј. везана са електромагнетном сопственом енергијом честице).

Како је појављивање бесконачне сопствене енергије, која нема физичког смисла, везано са тим, да такву честицу треба посматрати као тачкасту, то можемо закључити, да електродинамика, као логично заокружена физичка теорија, постаје сама у себи противрјечна при прелазу на довољно мала растојања. Може се поставити питање о томе, какав је ред величине тих растојања. На то питање може се одговорити, ако се напомене, да би за сопствену електромагнетну енергију електрона требало добити вриједност реда величине енергије мировања mc^2.

Ако се, с друге стране, посматра електрон са извјесним димензијама R_0, онда би његова сопствена потенцијална енергија била реда $\frac{e^2}{R_0}$. Из услова, да обје те величине буду истог реда, $\frac{e^2}{R_0} \sim m\,c^2$ налазимо:

$$R_0 \sim \frac{e^2}{m\,c^2}\,. \tag{36,3}$$

Ове димензије (оне се називају „полупречник" електрона) одређују границе примјенљивости електродинамике на електрон, које произлазе већ и из сопствених основних принципа. Треба уосталом имати у виду, да су уствари границе примјенљивости електродинамике, која се овдје излаже (она се обично назива „класична") помакнуте много даље благодарећи квантним појавама[1]).

Вратимо се поново на формулу (36,2). Потенцијали φ_A који се у њој налазе, једнаки су према *Coulomb*-овом закону:

$$\varphi_A = \sum \frac{e_B}{R_{AB}}, \tag{36,4}$$

гдје је R_{AB} растојање међу оптерећењима e_A, e_B. Израз за енергију (36,2) састоји се из два дијела. Прво, он садржи бесконачну константу — „сопствену" енергију оптерећења, — која не зависи од њиховог међусобног распореда. Други дио је енергија узајамног дјејства оптерећења, која зависи од њиховог распореда. Очевидно, само тај дио и има физички смисао. Он је једнак

$$U' = \frac{1}{2} \sum e_A \varphi'_A, \tag{36,5}$$

гдје је

$$\varphi'_A = \sum_{A \neq B} \frac{e_B}{R_{AB}} \tag{36,6}$$

потенцијал у тачци гдје се налази e_A, који изазивају сва оптерећења осим e_A. Иначе се може написати:

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{A \neq B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}. \tag{36,7}$$

Специјално, енергија узајамног дјејства двају оптерећења је:

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \tag{36,8}$$

§ 37. Поље наелектрисане честице, која се равномјерно креће

Одредимо поље проузроковано оптерећењем e, када се то оптерећење равномјерно креће брзином V. Непокретни систем референције назваћемо систем K, а систем референције, који се креће заједно са оптерећењем, систем K'. Нека се оптерећење налази у координатном почетку система K'. Систем K' креће се у односу на K паралелно оси X, а осе Y и Z су паралелне са Y' и Z'. У моменту $t = 0$ оба се координатна почетка поклапају. Према томе су координате оптерећења у систему K $x = Vt$, $y = z = 0$. У систему K' постоји стално електрично поље с векторским потенцијалом $\mathbf{A}'$ и скаларним, који је једнак $\varphi' = \frac{e}{R'}$, гдје је $R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. У систему K је према (23,1) за $\mathbf{A}' = 0$:

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{R'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{37,1}$$

---

[1]) Квантни ефекти постају битни за растојања реда h/mc, гдје је h *Planck*-ова константа.

Сада морамо R' изразити помоћу координата x, y, z у систему K. Према *Lorentz*-овим трансформационим формулама је

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

а одавде

$$R'^2 = \frac{(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{37,2}$$

Уврстивши то у (37,1), налазимо

$$\varphi = \frac{e}{R^*}, \tag{37,3}$$

гдје је уведена ознака

$$R^{*2} = (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2). \tag{37,4}$$

Векторски потенцијал у систему K [в. (23,1)] износи:

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{V}}{cR^*}. \tag{37,5}$$

У систему K' магнетно поље $\mathbf{H}'$ не постоји, а електрично поље је:

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}.$$

Према формулама (23,5) налазимо:

$$E_x = E'_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{ey'}{R'^3\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{ez'}{R'^3\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Послије замјене R', x', y', z' изражених са x, y, z, налазимо

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \tag{37,6}$$

гдје је $\mathbf{R}$ радиус-вектор од оптерећења e до тачке са координатама x, y, z, гдје тражимо поље (његове компоненте су $x - Vt, y, z$).

Тај израз за $\mathbf{E}$ може се написати у другом облику, ако се уведе угао θ међу правцем кретања и радиус-вектором $\mathbf{R}$. Очевидно је $y^2 + z^2 = R^2 \sin^2\theta$, па се зато R^{*2} (37,4) може написати у облику

$$R^{*2} = R^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right). \tag{37,7}$$

Тада се за **E** добива:

$$\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{R}}{R^3}\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}. \tag{37,8}$$

При задатом растојању R од оптерећења, вриједност поља E се повећава када θ расте од 0 до $\frac{\pi}{2}$ или када пада од π до $\frac{\pi}{2}$. Најмању вриједност има поље $E_{\|}$, усмјерено паралелно правцу кретања ($\theta=0, \pi$); оно износи:

$$E_{\|}=\frac{e}{R^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right).$$

Највеће је поље, које је нормално на брзини $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$. Оно је

$$E_{\perp}=\frac{e}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Напомињемо, да када се брзина увећава, поље $E_{\|}$ опада, а $E_{\perp}$ — расте. Може се рећи, да се електрично поље оптерећења које се креће некако „контрахује" у правцу кретања. За брзине V, које су близу брзине свјетлости, именилац у функцији (37,8) близу је нуле у уском интервалу вриједности θ око вриједности $\frac{\pi}{2}$. „Ширина" тог интервала је реда величине

$$\Delta\theta\sim\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

На тај начин, електрично поље оптерећења које се брзо креће велико је само у уском интервалу углова близу екваторске равни, при чему ширина тог интервала опада, када се V повећава, као $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$. Изван наведеног интервала углова поље брзо опада.

Магнетно поље у систему K је $\mathbf{H}=\frac{1}{c}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})$ [в. (23,8)]. За брзине $V\ll c$ из (37,6) приближно имамо $\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{R}}{R^3}$, па је

$$\mathbf{H}=\frac{e}{c}\frac{\mathbf{V}\times\mathbf{R}}{R^3}. \tag{37,9}$$

§ 38. Кретање у Coulomb-овом пољу

Посматрајмо кретање честице масе m и с оптерећењем e у пољу, изазваном другим оптерећењем e'. Претпостављамо, да је маса тога другог оптерећења толико већа од масе m, да се оно може сматрати непокретним. Тада се задатак своди на проучавање кретања оптерећења e у централно-симетричном пољу са потенцијалом $\varphi = \frac{e'}{r}$.

Енергија (тотална) $\mathcal{E}$ честице једнака је:

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r}, \tag{38,1}$$

гдје је $\alpha = ee'$. Ако употребимо поларне координате у равни кретања честице, онда се за импулс може, као што је познато из механике, написати $p^2 = \frac{M^2}{r^2} + p_r^2$, гдје је p_r — радијална компонента импулса, а M — константни момент импулса честице. Тада је:

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r}.$$

Позабавимо се питањем, да ли се честица у своме кретању може по вољи приближавати центру. Прије свега, очевидно је, да то у сваком случају није могуће, ако се оптерећења e и e' одбијају, тј. ако су e и e' истог знака. Даље, у случају привлачења (e и e' имају различите знаке) неограничено приближавање центру је немогуће, ако је $Mc > |\alpha|$. И заиста, у том случају први члан у (38,1) увијек је већи од другога, а за $r \rightarrow 0$ десна страна те једначине тежила би бесконачности. Напротив, ако је $Mc < |\alpha|$, онда за $r \rightarrow 0$ тај израз може остати коначан (тада наравно, p_r тежи бесконачности). На тај начин, ако је

$$cM < |\alpha|, \tag{38,2}$$

онда честица при своме кретању „пада" на оптерећење, које је привлачи, насупрот томе што је у нерелативистичкој механици такво падање уопште немогуће (изузевши једино случај $M = 0$, када честица лети право на честицу e').

Потпуно одређивање кретања оптерећења у *Coulomb*-овом пољу најзгодније је изводити полазећи од *Hamilton—Jacobi*-еве једначине. Узмимо поларне координате r, φ, у равни кретања. *Hamilton — Jacobi*-ева једначина (14,11) има облик:

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + m^2c^2 = 0.$$

Тражимо S у облику

$$S = -\mathcal{E}t + M\varphi + f(r),$$

гдје су $\mathcal{E}$ и M — константна енергија и момент импулса честице која се креће. У резултату добивамо:

$$S = -\mathcal{E}t + M\varphi + \int\sqrt{\left(\frac{\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r}}{c}\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2} \cdot dr. \tag{38,3}$$

Трајекторија се одређује једначином $\frac{\partial S}{\partial M}=\text{const}$. Интегрирање доводи до слиједећих резултата:

a) ако је $Mc>|\alpha|$:

$$(c^2M^2-\alpha^2)\frac{1}{r}=c\sqrt{(M\mathcal{E})^2-m^2c^2(M^2c^2-\alpha^2)}\cos\varphi\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{c^2M^2}}-\mathcal{E}\alpha; \quad (38,4)$$

b) ако је $Mc<|\alpha|$:

$$(\alpha^2-c^2M^2)\frac{1}{r}=\pm c\sqrt{(M\mathcal{E})^2+m^2c^2(\alpha^2-M^2c^2)}\operatorname{ch}\varphi\sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2M^2}-1}+\mathcal{E}\alpha; \quad (38,5)$$

c) ако је $Mc=|\alpha|$:

$$\frac{2\mathcal{E}\alpha}{r}=\mathcal{E}^2-m^2c^4-\varphi^2\left(\frac{\mathcal{E}\alpha}{cM}\right)^2. \quad (38,6)$$

Константа интегрирања зависи о произвољном избору почетка рачунања угла φ.

У (38,4) није битан избор знака пред коријеном, јер је везан са избором почетка рачунања угла φ под знаком cos. Трајекторија, коју та једначина претставља у случају привлачења ($\alpha<0$), лежи у цјелини при коначним вриједностима r (финитно кретање), ако је $E<mc^2$. Ако је, пак, $E>mc^2$, онда r тежи бесконачности и кретање је инфинитно. У нерелативистичкој механици финитном кретању одговара кретање по затвореним путањама (елипсама). Из (38,4) види се, да у релативистичкој механици трајекторија никада не може бити затворена, — при промјени угла φ за 2π растојање r од центра не враћа се на полазну вриједност. Умјесто елипса овдје имамо путање у облику незатворених „розета". Док се у нерелативистичкој механици финитно кретање у *Coulomb*-овом пољу врши по затвореним путањама, дотле у релативистичкој механици *Coulomb*-ово поље губи ту своју особину.

У (38,5) се пред коријеном мора узети знак $+$ за $\alpha<0$, а знак $-$ за $\alpha>0$ [други избор знака одговарао би измијењеном знаку пред коријеном у (38,1)].

За $\alpha<0$ трајекторије (38,5) и (38,6) претстављају спирале са растојањем r, које теже нули за $\varphi\to\infty$. Вријеме у току кога се дешава „падање" оптерећења e у координатни почетак, — коначно је. У то се лако увјерити, ако се примијети, да се зависност координате r од времена одређује једначином $\frac{\partial S}{\partial\mathcal{E}}=\text{const}$. Ако овдје уврстимо (38,3), видјећемо, да се вријеме одређује интегралом, који је за $r\to 0$ коначан.

Задаци:

1. Одредити угао скретања оптерећења које пролијеће у *Coulomb*-овом пољу ($\alpha>0$).

Рјешење: Угао скретања χ једнак је $\chi=\pi-2\varphi_0$, гдје је φ_0 угао међу двијема асимптотама трајекторије (38,4). Налазимо:

$$\chi=\pi-\frac{2cM}{\sqrt{c^2M^2-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{v\sqrt{M^2c^2-\alpha^2}}{c\alpha},$$

гдје је v — брзина оптерећења у бесконачности.

2. Одредити ефективни пресјек расипања за мале углове при расипању честица *Coulomb*-овим пољем.

Рјешење: Ефективни пресјек $d\sigma$ је однос броја честица расутих (у 1 sec) у датом елементу do тјелесног угла и густине примарног снопа честица (тј. броја честица, које у 1 sec пролазе кроз 1 cm² површине попречног пресјека снопа честица)[1]).

Будући да се угао χ скретања честице при њеном пролијетању кроз поље одређује „нишанским растојањем“ (тј. растојањем од центра до праве, по којој би се оптерећење кретало када не би било поља), то је:

$$d\sigma = 2\pi\varrho d\varrho = 2\pi\varrho \frac{d\varrho}{d\chi} d\chi = \varrho \frac{d\varrho}{d\chi} \frac{do}{\sin \chi},$$

гдје је $do = 2\pi \sin \chi \, d\chi$. За угао скретања (ако је мали) може се сматрати да је једнак односу прираштаја импулса према његовој првобитној вриједности. Прираштај импулса једнак је интегралу по времену од силе, која дјејствује на оптерећење. Компонента те силе, која је нормална на правцу кретања, приближно је једнака $\frac{\alpha}{r^2} \frac{\varrho}{r}$. На тај начин, имамо:

$$\chi = \frac{1}{p} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha\varrho \, dt}{(\varrho^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{\alpha}{p\,\varrho\, v}$$

(v је брзина честица). Одавде налазимо ефективни пресјек за мале χ:

$$d\sigma = 4\left(\frac{\alpha}{pv}\right)^2 \frac{do}{\chi^4}.$$

§ 39. Диполни момент

Посматрајмо поље које изазива систем оптерећења на великим растојањима од тога система, тј. на растојањима, која су велика у односу на растојања међу појединим оптерећењима система.

Узмимо координатни систем са почетком ма гдје унутар система оптерећења. Нека радиус-вектори појединих оптерећења буду $\mathbf{r}_A$. Одредимо потенцијал поља, које стварају сва оптерећења у тачци са радиус-вектором $\mathbf{R}_0$. Према резултатима § 35, потенцијал тога поља је

$$\varphi = \sum_A \frac{e_A}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A|} \tag{39,1}$$

(сумирање се врши преко свих оптерећења). Овдје су $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A$ радиус-вектори оптерећења e_A до тачке, гдје се тражи потенцијал.

Морамо проучити овај израз за велике вриједности $\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}_A)$. Због тога развијмо (39,1) у ред по степенима $\frac{\mathbf{r}_A}{\mathbf{R}_0}$ служеће се формулом:

$$f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) = f(\mathbf{R}_0) - \mathbf{r} \operatorname{grad} f(\mathbf{R}_0)$$

---

[1]) Види напр. „Механика“, § 21.

(у grad се диференцирање врши по координатама краја вектора ($\mathbf{R}_0$). С тачношћу до чланова првога реда имамо

$$\varphi = \frac{\sum e_A}{R_0} - \sum e_A \mathbf{r}_A \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R_0}. \tag{39,2}$$

Сума

$$\mathbf{d} = \sum e_A \mathbf{r}_A \tag{39,3}$$

назива се диполни момент система оптерећења. Важно је напоменути, да, ако је сума свих оптерећења $\sum e_A$ једнака нули, онда диполни момент $\mathbf{d}$ не зависи од избора координатног почетка. И заиста, радиус-вектори $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}'_A$ једног истог оптерећења у два разна координатна система везани су међусобно релацијом

$$\mathbf{r}'_A = \mathbf{r}_A + \mathbf{a},$$

гдје је $\mathbf{a}$ неки константни вектор. Према томе, ако је $\sum e_A = 0$, онда је диполни момент у оба система једнак:

$$\mathbf{d}' = \sum e_A \mathbf{r}'_A = \sum e_A \mathbf{r}_A + \mathbf{a} \sum e_A = \mathbf{d}.$$

Ако се са e_A^+, $\mathbf{r}_A^+$ и $-e_A^-$, $\mathbf{r}_A^-$ означе позитивна и негативна оптерећења система и њихови радиус-вектори, онда се диполни момент може написати у облику:

$$\mathbf{d} = \sum e_A^+ \mathbf{r}_A^+ - \sum e_A^- \mathbf{r}_A^- = \mathbf{R}^+ \sum e_A^+ - \mathbf{R}^- \sum e_A^-, \tag{39,4}$$

гдје су

$$\mathbf{R}^+ = \frac{\sum e_A^+ \mathbf{r}_A^+}{\sum e_A^+}, \quad \mathbf{R}^- = \frac{\sum e_A^- \mathbf{r}_A^-}{\sum e_A^-} \tag{39,5}$$

радиус-вектори „центара оптерећења“ — позитивних и негативних. Ако је $\sum e_A^+ = \sum e_A^- = e$, онда је

$$\mathbf{d} = e\mathbf{R}_{+-}, \tag{39,6}$$

гдје је $\mathbf{R}_{+-} = \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ радиус-вектор повучен од центра негативних до центра позитивних оптерећења. Специјално, ако имамо само два оптерећења, онда је $\mathbf{R}_{+-}$ радиус-вектор међу њима.

Ако је сума $\sum e_A = 0$, онда је потенцијал поља таквог система на великим растојањима

$$\varphi = \frac{\mathbf{d}\mathbf{R}_0}{R_0^3} \tag{39,7}$$

$\left(\text{стављамо } \operatorname{grad} \frac{1}{R_0} = -\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right)$. Када се зна потенцијал, може се наћи поље $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{grad} \frac{\mathbf{d}\mathbf{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \operatorname{grad} (\mathbf{d}\mathbf{R}_0) - (\mathbf{d}\mathbf{R}_0) \operatorname{grad} \frac{1}{R_0^3}.$$

Према формули $\operatorname{grad} (\mathbf{d}\mathbf{R}_0) = \mathbf{d}$ и уз напомену, да је $\operatorname{grad} \frac{1}{R_0^3} = -\frac{3\,\mathbf{R}_0}{R_0^5}$, за поље $\mathbf{E}$ налазимо израз:

$$\mathbf{E} = \frac{3\,(\mathbf{R}_0 \mathbf{d})\, \mathbf{R}_0 - R_0^2\, \mathbf{d}}{R_0^5}. \tag{39,8}$$

На тај начин, потенцијал поља, које ствара систем оптерећења $\sum e_A = 0$, обрнуто је пропорционалан квадрату растојања од система, а јачина поља кубу растојања.

§ 40. Мултиполни моменти

Код развијања потенцијала по степенима $\frac{1}{R_0}$

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(3)} + \ldots .$$

члан $\varphi^{(n)}$ је пропорционалан $\frac{1}{R_0^n}$. Видјели смо, да се први члан $\varphi^{(1)}$ одређује сумом свих оптерећења. Други, $\varphi^{(2)}$, који се понекад назива диполни потенцијал система, одређује се диполним моментом система.

Трећи члан реда $\varphi^{(3)}$ очевидно је једнак

$$\varphi^{(3)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}, \tag{40,1}$$

гдје се сума узима преко свих оптерећења. Индекс који показује редни број оптерећења овдје изостављамо. x_α су компоненте вектора $\mathbf{r}$, а X_α—вектора $\mathbf{R}_0$.

Овај дио потенцијала обично се назива квадруполни потенцијал. Ако су сума оптерећења и диполни момент система једнаки нули, онда развијање почиње са $\varphi^{(3)}$.

У израз (40,1) улазе шест величина $\sum e x_\alpha x_\beta$. Међутим, лако је видјети, да уствари поље не зависи од шест независних величина, него само од пет. То долази отуда, што функција $\frac{1}{R_0}$ задовољава *Laplace*-ову једначину, тј.

$$\Delta \frac{1}{R_0} = \frac{\partial^2}{\partial X_\beta^2} \frac{1}{R_0} = 0 .$$

Ова једначина се може написати у облику:

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = 0.$$

Према томе, можемо $\varphi^{(3)}$ написати у облику:

$$\varphi^{(3)} = \frac{1}{2} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta}\right) \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} .$$

Тензор

$$D_{\alpha\beta} = \sum e \left(3 x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}\right) \tag{40,2}$$

назива се квадруполни момент система.

Из дефиниције $D_{\alpha\beta}$ произлази, да је збир његових дијагоналних компонената

$$D_{\alpha\alpha}=0. \tag{40,3}$$

Симетрични тензор $D_{\alpha\beta}$, према томе, има свега пет независних компонената. Помоћу $D_{\alpha\beta}$ може се написати

$$\varphi^{(3)}=\frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}. \tag{40,4}$$

Потпуно аналогно могли би се написати слиједећи чланови реда φ. n-ти члан се одређује тензором n-тог ранга, који је састављен од оптерећења и компонената њихових радиус-вектора. Ти тензори називају се мултиполни моменти система. Сви су они симетрични по свим индексима и упрошћавањем по ма којем пару индекса дају нулу¹). Може се показатн да тензор мултиполног момента n-тог реда има свега $2n-1$ независних компонената.

§ 41. Систем оптерећења у спољашњем пољу

Посматрајмо сада систем оптерећења $e_1, e_2 \ldots$, који се налазе у спољашњем електричном пољу. Потенцијал тог спољашњег поља у тачци, гдје се налази оптерећење e_A означимо сада са φ_A. Потенцијална енергија сваког од оптерећења је $e_A\varphi_A$, а тотална потенцијална енергија система је

$$U=\sum e_A\varphi_A.$$

Узмимо опет координатни систем са почетком ма гдје унутар система оптерећења; $\mathbf{r}_A$ је радиус-вектор оптерећења e_A у тим координатама.

Претпоставимо, да се спољашње поље слабо мијења на подручју система оптерећења. Тада енергију U можемо развити у ред по степенима $\mathbf{r}_A$. У том реду:

$$U=U^{(1)}+U^{(2)}+U^{(3)}+\ldots$$

први члан је

$$U^{(1)}=\varphi_0\sum e_A, \tag{41,1}$$

гдје је φ_0 вриједност потенцијала у координатном почетку. Са том апроксимацијом енергија система је таква, као кад би се сва оптерећења налазила у једној тачци (у координатном почетку).

Други члан реда је:

$$U^{(2)}=\operatorname{grad}\varphi_0\cdot\sum e_A\mathbf{r}_A.$$

$\operatorname{grad}\varphi_0$ је вриједност градијента потенцијала у координатном почетку. Како је $\operatorname{grad}\varphi=-\mathbf{E}$, то није ништа друго, него јачина $\mathbf{E}_0$ поља у координатном почетку. Увођењем диполног момента система $\mathbf{d}$ добивамо:

$$U^{(2)}=-\mathbf{d}\,\mathbf{E}_0. \tag{41,2}$$

---

¹) Упрошћавање тензора по пару индекса значи изједначавање двају индекса са узастопним сумирањем по њима. Притом се ранг тензора снижава за два.

За хомогено поље израз $U^{(2)}$ излази такође и директно из израза (18,3) за потенцијал.

Слиједећи члан $U^{(3)}$ једнак је

$$U^{(3} = \frac{1}{2}\, e x_\alpha\, x_\beta \sum \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}\,.$$

И овдје смо, као и у § 40, изоставили индексе, који показују редни број оптерећења; $\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}$ су вриједности других извода од потенцијала у координатном почетку. Но потенцијал φ задовољава *Laplace*-ову једначину

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} = \delta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} = 0\,.$$

Према томе $U^{(3)}$ можемо написати у облику

$$U^{(3)} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} \sum e\left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\, r^2\right),$$

или

$$U^{(3)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6}\, \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}\,, \qquad (41,3)$$

гдје су $D_{\alpha\beta}$ — компоненте квадруполног момента (види § 40).

Претпоставимо, да имамо два система оптерећења, код којих су суме оптерећења за оба система једнаке нули, а диполни моменти су $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$. Њихово међусобно растојање је велико у односу са њиховим сопственим димензијама. Одредимо потенцијалну енергију U њиховог узајамног дејства. Може се сматрати да се један од система налази у пољу другог система. Тада је

$$U = -\,\mathbf{d}_2\, \mathbf{E}_1\,,$$

гдје је $\mathbf{E}_1$ поље првог система. Замијењујући $\mathbf{E}_1$ изразом (39,8), налазимо:

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_2)\, R^2 - 3\,(\mathbf{d}_1\, \mathbf{R})\,(\mathbf{d}_2\, \mathbf{R})}{R^5}\,, \qquad (41,4)$$

гдје је $\mathbf{R}$ — вектор растојања међу оба система.

За случај, када код једног од система сума оптерећења није једнака нули (и једнака e), на аналоган начин добивамо:

$$U = e\, \frac{\mathbf{d\,R}}{R^3}\,, \qquad (41,5)$$

гдје је $\mathbf{R}$ вектор, усмјерен од дипола (система код којега је сума оптерећења једнака нули) ка оптерећењу (систему код којега је сума оптерећења једнака e). Нећемо изводити аналогне изразе за узајамно дејство квадрупола (система чије је тотално оптерећење и диполни момент једнак нули) и оптерећења, дипола и квадрупола. Напомињемо само, да су одговарајуће потенцијалне енергије обрнуто пропорционалне 3., 4. и 5. степену растојања R.

§ 42. Стално магнетно поље

Посматрајмо магнетно поље изазвано оптерећењима, која врше стационарно кретање, Под тим се подразумијева, да оптерећења при своjем кретању не долазе из бесконачности и не одлазе у бесконачност, него се цијело вријеме крећу у неком коначном подручју простора. Осим тога претпоставимо, да су импулси свих оптерећења, такође, кроз читаво вријеме коначни. Тада се све величине мијењају само у коначним интервалима својих вриједности и од интереса је посматрати њихове средње вриједности (по времену). Специјално, можемо посматрати средње магнетно поље $\overline{\mathbf{H}}$, које изазивају оптерећења, а које ће већ сада бити функција само од координата, али не и од времена, тј. биће стално (константно).

Да бисмо нашли једначине, које одређују средње поље $\mathbf{H}$, потребно је да нађемо средњу вриједност по времену *Maxwell*-ових једначина $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$. Прва даје једноставно

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{H}}=0. \tag{42,1}$$

У другој једначини средња вриједност извода $\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, као и уопште извода сваке величине, која се мијења у коначном интервалу, једнака је нули (в. нап. на стр. 84). Према томе, друга *Maxwell*-ова једначина добива облик:

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}}=\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{42,2}$$

Те двије једначине и одређују стално поље $\overline{\mathbf{H}}$.

Уведимо средњи векторски потенцијал $\overline{\mathbf{A}}$ према

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}}=\overline{\mathbf{H}}.$$

Уврстимо то у једначину (42,2). Како је $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}$, налазимо:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{\mathbf{A}}-\Delta\overline{\mathbf{A}}=\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}},$$

Но ми знамо, да векторски потенцијал поља није одређен једнозначно, па му се може додати ма који допунски услов. На основу тога узмимо потенцијал $\overline{\mathbf{A}}$ тако, да буде

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{A}}=0. \tag{42,3}$$

Тада једначина, која одређује векторски потенцијал сталног мангетног поља, добива облик

$$\Delta\overline{\mathbf{A}}=-\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{42,4}$$

Ову једначину лако је ријешити, са напоменом, да је (42,4) потпуно аналогно *Poisson*-овој једначини (35,4) за скаларни потенцијал сталног електричног поља, гдје се умјесто густине оптерећења ϱ налази густина струје $\frac{\overline{\mathbf{j}}}{c}$. Аналогно рјешењу *Poisson*-ове једначине можемо директно писати:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\int \frac{\overline{\mathbf{j}}}{R}\,dV. \qquad (42,5)$$

гдје је R — растојање од тачке, у којој тражимо $\overline{\mathbf{A}}$ до елемента запремине dV.

У формули (42,5) може се од интеграла прећи на суму по оптерећењима, стављајући мјесто $\mathbf{j}$ производ $\varrho\mathbf{v}$ и узевши у обзир, да су сва оптерећења тачкаста. Притом је неопходно имати у виду, да је у интегралу (42,5) R просто промјенљива интегрирања, па зато, наравно, не подлијеже процедури узимања средње вриједности. Ако се умјесто интеграла $\int \frac{\mathbf{j}}{R}\,dV$ напише сума $\sum \frac{e_A \mathbf{v}_A}{R_A}$, онда овдје R_A претставља радиус-векторе појединих честица, који се мијењају при кретању оптерећења. Према томе треба писати:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\sum \overline{\frac{e_A \mathbf{v}_A}{R_A}}, \qquad (42,6)$$

гдје се средња вриједност узима за цио израз који се налази под цртом.

Када је $\overline{\mathbf{A}}$ познато, онда се може наћи и магнетно поље:

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}} = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\int\frac{\overline{\mathbf{j}}}{R}\,dV.$$

Операција rot врши се по координатама тачке, у којој се тражи поље. Према томе, rot се може увести под интегрални знак и при диференцирању сматрати $\mathbf{j}$ константним. Примјеном познате формуле

$$\operatorname{rot} f\mathbf{a} = f\operatorname{rot}\mathbf{a} - \operatorname{grad} f \times \mathbf{a},$$

гдје су f и $\mathbf{a}$ — ма који скалар и вектор, на производ $\overline{\mathbf{j}}\cdot\frac{1}{R}$ налазимо.

$$\operatorname{rot}\frac{\overline{\mathbf{j}}}{R} = \operatorname{grad}\frac{1}{R}\times\overline{\mathbf{j}} = \frac{\overline{\mathbf{j}}\times\mathbf{R}}{R^3},$$

и према томе:

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\int\frac{\overline{\mathbf{j}}\times\mathbf{R}}{R^3}\,dV \qquad (42,7)$$

(радиус-вектор $\mathbf{R}$ усмјерен је из dV према тачци, гдје се одређује поље). Ово је такозвани *Biot-Savart*-ов закон.

§ 43. Магнетни момент

Посматрајмо средње магнетно поље, изазвано системом оптерећења која се стационарно крећу на великим растојањима од тога система, тј. на растојањима, која су велика у односу на размјере самог система.

Узмимо координатни систем са почетком ма гдје унутар система оптерећења, аналогно ономе што смо радили у § 39. Опет означимо са $\mathbf{r}_A$ радиус-векторе појединих оптерећења, а са $\mathbf{R}_0$ радиус-вектор тачке, у којој тражимо поље. Тада је $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A$ радиус-вектор од оптерећења e_A до тачке, гдје се одређује поље. Према (42,6) имамо за векторски потенцијал:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\sum\overline{\frac{e_A\mathbf{v}_A}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A|}}. \qquad (43,1)$$

Као и у § 39 развијмо овај израз по степенима $\mathbf{r}_A$. С тачношћу до чланова првог реда (због краткоће изостављамо индекс A) је

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0}\sum e\overline{\mathbf{v}} - \frac{1}{c}\sum\overline{e\,\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla\frac{1}{R_0}\right)}.$$

У првом члану се може написати:

$$\sum e\overline{\mathbf{v}} = \overline{\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}}.$$

Но средња вриједност извода од величине $\sum e\mathbf{r}$, која се мијења у коначном интервалу, једнака је нули. На тај начин, за $\overline{\mathbf{A}}$ остаје израз:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0^3}\sum\overline{e\,\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)}$$

$\left(\text{овдје смо ставили } \nabla\frac{1}{R_0} = -\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right)$.

Овај израз трансформирајмо на слиједећи начин. Напомињући, да је $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, можемо написати (узевши у обзир да је $\mathbf{R}_0$ константни вектор):

$$\sum e(\mathbf{R}_0\mathbf{r})\mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) + \frac{1}{2}\sum e[\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)].$$

Уврштавањем овог израза у $\overline{\mathbf{A}}$ средња вриједност првог члана (са изводом по времену) опет је једнака нули, па добивамо:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2cR_0^3}\sum e[\overline{\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)} - \overline{\mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)}].$$

Уведимо вектор:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum e(\mathbf{r}\times\mathbf{v}), \qquad (43,2)$$

који се назива магнетни момент система. Тада за $\overline{\mathbf{A}}$ добивамо израз:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{\overline{\mathbf{m}}\times\mathbf{R}_0}{R_0^3}. \qquad (43,3)$$

Када је познат векторски потенцијал, лако је наћи магнетно поље. Помоћу формуле

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$$

налазимо

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}} = \operatorname{rot}\left(\overline{\mathbf{m}}\times\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right) = \overline{\mathbf{m}}\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} - \left(\overline{\mathbf{m}}\nabla\right)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Даље је

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \mathbf{R}_0\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3}\operatorname{div}\mathbf{R}_0 = 0$$

и

$$\left(\overline{\mathbf{m}}\nabla\right)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3}\left(\overline{\mathbf{m}}\nabla\right)\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0\left(\overline{\mathbf{m}}\nabla\frac{1}{R_0^3}\right) = \frac{\overline{\mathbf{m}}}{R_0^3} - \frac{3\,\mathbf{R}_0(\overline{\mathbf{m}}\,\mathbf{R}_0)}{R_0^5}.$$

На тај начин је

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{3\,\mathbf{R}_0(\overline{\mathbf{m}}\,\mathbf{R}_0) - \overline{\mathbf{m}}\,\mathbf{R}_0^2}{R_0^5}. \qquad (43,4)$$

Видимо, да се магнетно поље изражава помоћу магнетног момента истим формулама као и електрично поље помоћу диполног момента [в. (39,8)].

Ако је код свих оптерећења система једнак однос оптерећења према маси, онда можемо написати:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum e(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \frac{e}{2mc}\sum m(\mathbf{r}\times\mathbf{v}).$$

Ако су брзине свих оптерећења $v \ll c$, онда је $m\mathbf{v}$ импулс $\mathbf{p}$ оптерећења, па добивамо:

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2mc}\sum\mathbf{r}\times\mathbf{p} = \frac{e}{2mc}\mathbf{M}, \qquad (43,5)$$

гдје је $\mathbf{M} = \sum\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ механички момент импулса система. На тај начин, у том случају је однос магнетног момента према механичком константан и једнак $\frac{e}{2mc}$.

Означимо са L_H допунски члан у *Lagrange*-овој функцији, који је условљен магнетним пољем. У сталном хомогеном магнетном пољу, ако се послужимо изразом (18,4) за векторски потенцијал, имамо:

$$L_H = \sum\frac{e}{c}\,\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \sum\frac{e}{2c}(\mathbf{H}\times\mathbf{r})\,\mathbf{v} = \sum\frac{e}{2c}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,\mathbf{H},$$

тј.

$$L_H = \mathbf{m}\,\mathbf{H}, \qquad (43,6)$$

гдје је $\mathbf{m}$ — магнетни момент система оптерећења. Скрећемо пажњу на аналогију са електричним пољем. У хомогеном електричном пољу *La-*

grange-ова функција система оптерећења са укупним оптерећењем равним нули, садржи члан:

$$L_E = \mathbf{d}\,\mathbf{E}$$

(**d** — диполни момент система), који је у том случају потенцијална енергија система оптерећења, узета са супротним знаком (в. § 41).

Размотримо систем оптерећења, која врше финитно кретање (са брзином $v \ll c$) у централно-симетричном електричном пољу, које изазива нека непокретна честица. Финитност кретања значи, да оптерећења за све вријеме остају у неком коначном дијелу простора. Пређимо са непокретног координатног система на систем, који равномјерно ротира око осе, која пролази кроз непокретну честицу. Према познатој функцији, брзина **v** честице у новом координатном систему везана је са њеном брзином $\mathbf{v}'$ у старом систему релацијом

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}),$$

гдје је **r** — радиус-вектор честице, а **Ω** угаона брзина система који ротира. У непокретном систему *Lagrange*-ова функција система оптерећења је

$$L = \sum \frac{m v'^2}{2} - U,$$

гдје је U — потенцијална енергија оптерећења у спољашњем електричном пољу и енергија њиховог узајамног дејства. U је функција од растојања оптерећења до непокретне честице и од њихових међусобних растојања. При прелазу на систем који ротира, она се, очевидно, не мијења. Према томе, у новом систему *Lagrange*-ова функција ће бити:

$$L = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - U.$$

Претпоставимо, да је код свих оптерећења система однос $\frac{e}{m}$ оптерећења и масе једнак и ставимо:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{e}{2mc} \mathbf{H}. \qquad (43,7)$$

Тада при довољно малим H (када се могу занемарити чланови са H^2), *Lagrange*-ова функција добива облик:

$$L = \sum \frac{m v^2}{2} + \frac{1}{2c} \sum e (\mathbf{H} \times \mathbf{r})\, \mathbf{v}.$$

Видимо, да се она поклапа са *Lagrange*-овом функцијом, којом би се описивало кретање посматраних оптерећења у координатном систему који мирује у присуству константног магнетног поља **H** [упор. са (43,6)].

На тај начин долазимо до резултата, да је понашање система оптерећења са једнаким односима $\frac{e}{m}$, који врше финитно кретање (са брзинама $v \ll c$) у централно-симетричном електричном пољу и слабом хомогеном магнетном пољу **H**, еквивалентно понашању тог истог система оптерећења у истом електричном пољу у координатном систему, који равномјерно ротира са угаоном брзином (43,7) (такозвана *Larmor*-ова теорема). Угаона брзина $\Omega = \dfrac{e H}{2 mc}$ назива се *Larmor*-ова фреквенција.

Напомињемо, да ако имамо свега једну честицу, која се креће у магнетном пољу $\mathbf{H}$, онда је угаона брзина њене ротације по кружној стази једнака (20,8), тј. двострукој *Larmor*-овој фреквенцији.

Задатак

Одредити однос магнетног и механичког момента за систем од два оптерећења (брзине $v \ll c$).

Рјешење: Узмимо координатни почетак у центру инерције обије честице, па ћемо имати $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$ и $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, гдје је $\mathbf{p}$ импулс релативног кретања. Помоћу тих релација налазимо:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2\,c}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\,\mathbf{M}\,.$$

ГЛАВА VI

ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИ ТАЛАСИ

§ 44. D'Alembert-ова једначина

Електромагнетно поље у вакууму дефинише се *Maxwell*-овим једначинама, у којима треба поставити $\varrho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Напишимо те једначине још једанпут:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{44,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \tag{44,2}$$

Ове једначине могу имати рјешење, које није једнако нули. То значи, да електромагнетно поље може постојати чак и када нема никаквих оптерећења.

Електромагнетна поља, која постоје у вакууму, гдје нема оптерећења, називају се електромагнетни таласи. Овом приликом позабавићемо се проучавањем особина таквих поља.

Прије свега напомињемо, да таква електромагнетна поља, гдје нема оптерећења, неопходно морају бити промјенљива. И заиста, у противном случају је $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ и једначине (44,1) и (44,2) прелазе у једначину (35,1—2) и (42,1—2) сталног поља, код којих је сада међутим $\varrho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Но рјешења тих једначина, одређена функцијама (35,8) и (42,5) за $\varrho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, једнака су нули.

Изведимо једначине, које одређују потенцијале електромагнетних таласа.

Као што већ знамо, због неједнозначности потенцијала може им се увијек додати неки допунски услов. На основу тога узмимо потенцијале електромагнетних таласа тако, да за скаларни потенцијал буде остварена једначина

$$\varphi = 0. \tag{44,3}$$

Тада је $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ и $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Уврштавањем ових израза у прву од једначина (44,2) налазимо:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \tag{44,4}$$

Без обзира на то, што смо потенцијалима додали већ један допунски услов, потенцијал $\mathbf{A}$ још није сасвим једнозначан. Може му се додати градијент ма које функције која не зависи од времена (не мијењајући притом φ). Специјално, потенцијал електромагнетног таласа може се узети на тај начин, да буде

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{44,5}$$

И заиста, ако се $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ уврсти у $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, добива се $\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, тј. $\operatorname{div} \mathbf{A}$ функција је само од координата. Та функција се увијек може довести до тога да буде једнака нули, ако се вектору $\mathbf{A}$ дода градијент одговарајуће функције, која не зависи од времена.

Једначина (44,4) сада добива облик

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{44,6}$$

Ова једначина дефинише потенцијале електромагнетних таласа и назива се *D'Alembert*-ова једначина или таласна једначина.

Ако се на ову једначину примијене операције rot и $\frac{\partial}{\partial t}$, могуће се увјерити, да електрично и магнетно поље $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ задовољавају исто такве таласне једначине.

Оператор $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ назива се *D'Alembert*-ов оператор и означава се знаком $\Box$:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{44,7}$$

па се таласна једначина може написати у облику:

$$\Box f = 0, \tag{44,8}$$

гдје је f ма која од компонената $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$. *D'Alembert*-ов оператор може се написати у четвородимензионалном облику. Очевидно је

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{44,9}$$

§ 45. Равни таласи

Размотримо специјалан случај електромагнетских таласа, гдје поље зависи само од једне координате, рецимо x (и од времена). Такви се таласи називају равни. У том случају једначине поља добивају облик:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \tag{45,1}$$

гдје се под f подразумијева ма која компонента или вектора $\mathbf{E}$ или вектора $\mathbf{H}$.

Да бисмо риjешили ову jедначину, препишимо jе у облику

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)f=0$$

и уведимо нове промjенљиве

$$\xi=x-ct, \quad \eta=x+ct.$$

Лако се увjерити, да jе

$$\frac{\partial}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

тако да jедначина за f добива облик

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\, \partial \eta}=0.$$

Интегрирањем ове jедначине по ξ, налазимо

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=F(\eta),$$

гдjе jе $F(\eta)$ — произвољна функциjа. Интегрирајући jош jеданпут, налазимо $f=f_1(\xi)+f_2(\eta)$, гдjе су f_1 и f_2 — произвољне функциjе. На таj начин jе

$$f=f_1(x-ct)+f_2(x+ct). \tag{45,2}$$

Нека jе, напр., $f_2=0$, тако да jе $f=f_1(x-ct)$. Обjаснимо смисао овог рjешења. У свакоj равни $x=\text{const.}$ поље се миjења са временом. У сваком датом моменту поље jе различито за разна x. Очевидно jе, да поље има jеднаку вриjедност за координате x и моменте t, коjи задовољаваjу релациjе $x-ct=\text{const.}$, тj.

$$x=\text{const.}+ct.$$

То значи да, ако jе у неком моменту $t=0$ у некоj тачци простора x поље имало одређену вриjедност, кроз интервал времена t исту ту вриjедност има поље на растоjању ct дуж осе X од првобитног мjеста. Можемо рећи, да се све карактеристичне величине електромагнетног поља простиру у простору дуж осе X брзином, коjа jе jеднака брзини свjетлости c.

Према томе, $f_1(x-ct)$ претставља равни талас, коjи се креће у позитивном смjеру осе X. Лако jе увидjети, да $f_2(x+ct)$ претставља талас, коjи се креће у супротном, негативном смjеру осе X.

У § 44 показано jе, да се потенциjал електромагнетног таласа може узети тако, да буде $\varphi=0$ при чему jе $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$. Потенциjале равног таласа, коjи сада посматрамо узећемо управо такове. Услов $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$ у том случаjу даjе

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=0,$$

јер ниједна величина не зависи од y и z. Према (45,1) имаћемо тада и $\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0$, тј. $\frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const}$. Но извод $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ одређује електрично поље, и видимо да би компонента A_x, која није једнака нули, у посматраном случају означавала присуство лонгитудиналног електричног поља. Будући да такво поље нема везе са електромагнетним таласом, то се може ставити $A_x = 0$.

Према томе векторски потенцијал равног таласа може се увијек узети тако, да буде нормалан на оси X, тј. на правцу простирања тог таласа.

Размотримо равни талас, који се простире у позитивном смјеру осе X. Код таквог таласа све су величине, а специјално и $\mathbf{A}$, функције само од $x - ct$. Из формула

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

према томе, налазимо:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}', \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}\,(x - ct) = \nabla (x - ct) \times \mathbf{A}' = \mathbf{n} \times \mathbf{A}', \qquad (45,3)$$

гдје апостроф означава диференцирање по $x - ct$, а $\mathbf{n}$ — јединични вектор дуж правца простирања таласа. Стављајући прву једначину у другу, налазимо:

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \qquad (45,4)$$

Видимо [из $\mathbf{E} = \mathbf{A}'$ и (45,4)], да су и електрично поље $\mathbf{E}$ и магнетно поље $\mathbf{H}$ равног таласа оријентисана нормално на правцу простирања таласа. На основу тога електромагнетни таласи називају се трансверзални. Из (45,4), даље, види се да су електрично и магнетно поље равног таласа међусобно нормална. Осим тога, из исте једначине (45,4) слиједи, да су електрично и магнетно поље равног таласа међусобно једнака по апсолутној вриједности.

Нађимо још флукс енергије код равног таласа, тј. његов *Poynting*-ов вектор. Имамо:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right) = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})\right],$$

а будући да је $\mathbf{En} = 0$, биће

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} E^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} H^2 \mathbf{n}.$$

Према томе је флукс енергије оријентисан дуж правца простирања таласа. Како је $W = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right) = \frac{E^2}{4\pi}$ густина енергије таласа, то се може написати:

$$\mathbf{S} = c W \mathbf{n}, \qquad (45,5)$$

што се слаже с тим, да се поље простире брзином свјетлости.

Импулс јединице запремине електромагнетног поља је $\frac{\mathbf{S}}{c^2}$. За равни талас то даје $\frac{W}{c}\,\mathbf{n}$. Скрећемо пажњу на то, да је релација међу енергијом

W и импулсом $\frac{W}{c}$ електромагнетног таласа иста, као за честице које се крећу брзином свјетлости [в. (10,6)].

Флукс импулса поља одређује са компонентама $T_{\alpha\beta}$ тензора енергије — импулса. Ако, као малочас, правац простирања таласа узмемо као осу X, налазимо, да је једина компонента $T_{\alpha\beta}$ која није једнака нули:

$$T_{xx} = W\,. \qquad (45,6)$$

Као што и мора бити, флукс импулса је оријентиран по правцу простирања таласа и по величини је једнак густини енергије.

Ако електромагнетни талас пада на тијело, које га и апсорбује, онда ће на то тијело дјејствовати неки притисак (такозвани свјетлосни притисак). Он је једнак нормалној (према површини тијела) компоненти импулса, који талас предаје (у јединици времена) тијелу кроз јединицу његове површине. Ако је θ угао међу нормалом и правцем таласа који наилази, онда ће притисак бити $W \cos\theta$. У општем случају, када се талас у потпуности не апсорбује, него се дјелимично одбија од површине тијела, свјетлосни притисак је једнак збиру импулса који доноси упадни талас и односи одбијени талас.

§ 46. Монохроматични равни талас

Веома важан специјалан случај електромагнетних таласа је талас, код кога је поље једноставна периодична функција времена. Такав талас назива се монохроматични. Све величине (потенцијали, компоненте поља) код монохроматичног таласа зависе од времена преко фактора облика $\cos(\omega t + \alpha)$. Величина ω назива се циклична фреквенција таласа (ми ћемо о њој говорити једноставно као о фреквенцији). Период таласа је $\frac{2\pi}{\omega}$.

У таласној једначини сада је други извод поља по времену једнак $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$, па се простирање поља у простору код монохроматичног таласа дефинише једначином:

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0\,. \qquad (46,1)$$

Код равног таласа (који се простире дуж осе X) поље је функција само од $(x - ct)$. Према томе, ако је раван талас монохроматичан, онда је његово поље проста периодична функција од $x - ct$.

Векторски потенцијал таквог таласа најзгодније је написати у облику реалног дијела комплексног израза

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0\, e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}\right\} \qquad (46,2)$$

(Re означава реални дио). Овдје је $\mathbf{A}_0$ неки константни комплексни вектор. Очевидно је, да ће поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ таквог таласа имати аналоган облик:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\}, \quad \mathbf{H} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\}$$

са истом фреквенцијом ω.

Величина

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \tag{46,3}$$

назива се дужина таласа (таласна дужина). То је период промјене поља са координатом x у задатом моменту t. $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ називају се комплексне амплитуде одговарајућих величина.

Употреба комплексних израза је врло згодна због линеарности *Maxwell*-ових једначина. Благодарећи томе, наиме, све се операције врше не над тригонометриским, него над једноставнијим, експоненцијалним изразима, па се тек послије тога прелази на њихове реалне дјелове. Даље ћемо се често служити комплексном формом. Притом ће се увијек подразумијевати реални дио одговарајућег комплексног израза.

Ако се у правцу простирања таласа уведе јединични вектор $\mathbf{n}$, онда се (46,2) може написати у облику:

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{-i\left(\omega t-\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\,\mathbf{r}\right)}\right\}.$$

Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n} \tag{46,4}$$

назива се таласни вектор. Имамо, дакле,

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\,\mathbf{r}-\omega t)}\right\} \tag{46,5}$$

и аналогне изразе за $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ могу се према (45,3) изразити помоћу $\mathbf{A}$. За монохроматични талас из тих формула добивамо

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i(\mathbf{k}\times\mathbf{A}). \tag{46,6}$$

Четвородимензионални таласни вектор назива се вектор k_i с компонентама

$$k_{1,2,3} = k_{x,y,z}, \quad k_4 = \frac{i\omega}{c}. \tag{46,7}$$

Увођењем тога вектора (46,5) добива облик

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_o\, e^{ik_i x_i}\right\}. \tag{46,8}$$

Квадрат таласног 4 - вектора је

$$k_i^2 = 0. \tag{46,9}$$

Ова релација излази директно из дефиниције (46,4) и (46,7), а такође и ако се (46,8) стави у *D'Alembert*-ову једначину

$$\square\, \mathbf{A} = 0.$$

Задатак

Одредити кретање оптерећења у пољу равног монохроматичног таласа $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos k(x - ct)$.

Рјешење: Узмимо осу Y у правцу $\mathbf{A}$. *Hamilton - Jacobi*-ева једначина је:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left[\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{e}{c} A_0 \cos k(x - ct)\right]^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Тражићемо S у облику

$$S = \alpha y + \beta z + \gamma(x + ct) + f(x - ct),$$

гдје су α, β, γ — константе, а $f(x - ct)$ непозната функција. У резултату налазимо:

$$S = \alpha y + \beta z + \gamma(x + ct) - \frac{1}{4\gamma}\left(\alpha^2 + \beta^2 + m^2c^2 + \frac{e^2 A_0^2}{2c^2}\right)(x - ct) +$$

$$+ \frac{\alpha e A_0}{2\gamma k} \sin k(x - ct) - \frac{e^2 A_0^2}{16 \gamma k c} \sin 2k(x - ct).$$

Да би се одредило кретање треба изводе $\frac{\partial S}{\partial \alpha}, \frac{\partial S}{\partial \beta}, \frac{\partial S}{\partial \gamma}$ изједначити са неким константама, које се могу узети да су једнаке нули одговарајућим избором координатног почетка и почетка рачунања времена. Уводећи величину $\eta = k(x - ct)$ налазимо тада једначину која одређује кретање у параметарском облику:

$$x = -\frac{1}{8\gamma^2 k}\left(\alpha^2 + \beta^2 + m^2 c^2 + \frac{e^2 A_0^2}{2c^2}\right)\eta + \frac{\eta}{2k} + \frac{\alpha e A_0}{4\gamma^2 k c}\sin\eta -$$

$$- \frac{e^2 A_0^2}{32 \gamma^2 k c^2} \sin 2\eta,$$

$$y = \frac{\alpha}{2\gamma k}\eta - \frac{e A_0}{2\gamma k c}\sin\eta, \qquad z = \frac{\beta}{2\gamma k}\eta,$$

$$ct = -\frac{1}{8\gamma^2 k}\left(\alpha^2 + \beta^2 + m^2 c^2 + \frac{e^2 A_0^2}{2c^2}\right)\eta - \frac{\eta}{2k} + \frac{\alpha e A_0}{4\gamma^2 k c}\sin\eta -$$

$$- \frac{e^2 A_0^2}{32 \gamma^2 k c^2} \sin 2\eta.$$

Систему референције у којем оптерећење мирује, одговарају такве вриједности α, β, γ за које коефицијенти уз η у изразима за x, y, z постају једнаки нули. У том систему имамо:

$$x = -\frac{a^2}{2k}\sin 2\eta, \quad y = -\frac{2a}{k}\sin\eta, \quad z = 0, \quad ct = -\frac{\eta}{k} - \frac{a^2}{2k}\sin 2\eta,$$

гдје је

$$a = \frac{e A_0}{2c}\left(m^2 c^2 + \frac{e^2 A_0^2}{2c^2}\right)^{-1}.$$

На тај начин, овдје оптерећење врши периодично кретање по затвореној трајекторији облика осмице (са осом дуж осе Y).

§ 47. Doppler-ов ефект

Служећи се таласним 4-вектором, лако је извести формуле за трансформацију ω и $\mathbf{k}$ из једног координантног система у други координантни систем. Опште трансформационе формуле 4-вектора (6,2) дају:

$$k_4 = \frac{k'_4 + i\frac{V}{c}k'_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

или, замјеном вриједности компонената k_i;

$$\omega = \frac{\omega' + V k'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} ;$$

но $k_x = k\cos\alpha = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$, гдје је $\boldsymbol{\alpha}$ угао међу правцем $\mathbf{k}$ и осе X.

На тај начин, налазимо:

$$\omega = \omega' \frac{1+\frac{V}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \cdot \qquad (47,1)$$

Ово је тачна формула за *Doppler*-ов ефект. За $V \ll c$ она прелази у

$$\omega = \omega'\left(1+\frac{V}{c}\cos\alpha'\right) \cdot \qquad (47,2)$$

За $k_1 = k_x$ имамо:

$$k_x = \frac{k'_x + \frac{V}{c^2}\omega'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

или, стављајући $k_x = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$,

$$\cos\boldsymbol{\alpha} = \frac{\cos\alpha' + \frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\alpha'} \qquad (47,3)$$

Ова формула поклапа се са формулом за аберацију, која је раније изведена у § 5.

Ако се оса X узме дуж правца простирања таласа, онда ће тензор енергије-импулса монохроматичног таласа имати, као и код сваког равног таласа (в. § 46), слиједеће компоненте, које нијесу једнаке нули.

$$T_{11} = W, \quad T_{14} = iW, \quad T_{44} = -W.$$

Увођењем таласног 4-вектора k_i, те релације могу се написати у тензорском облику:

$$T_{ik} = \frac{W c^2}{\omega^2} k_i k_k . \tag{47,4}$$

Производи $k_i k_k$ сачињавају симетрични тензор другог реда. Према томе, из формуле (47,4) слиједи, да је величина $\frac{W}{\omega^2}$ скалар. Дакле, при прелазу са једног инерцијалног система референције у други, $\frac{W}{\omega^2}$ не мијења се, а густина енергије мора се трансформирати као квадрат фреквенције. Имајући у виду (47,4) на тај начин налазимо слиједећу трансформациону формулу:

$$W = W' \frac{1 + \frac{V}{c}\cos\alpha}{1 - \frac{V^2}{c^2}} . \tag{47,5}$$

Будући да је $W = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi}$, може се закључити, да се апсолутне вриједности поља монохроматичног таласа трансформирају као први степен фреквенције.

На крају напомињемо, будући да су W и W' према (47,5) међусобно просто пропорционалне, та се формула може примијенити и на равни талас, који је суперпозиција низа монохроматичних таласа, тј., уствари, на сваки равни талас.

§ 48. Поларизација

Посматрајмо електрично поље равног монохроматичног таласа:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}\right\}$$

(све што будемо рекли, односи се у истој мјери и на магнетно поље). $\mathbf{E}_0$ је неки комплексни вектор. Његов квадрат $\mathbf{E}_0^2$ уопште узевши, такође је комплексан број. Очевидно, $\mathbf{E}_0$ се увијек може претставити у облику

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{i\alpha},$$

гдје се α узима на тај начин, да вектор $\mathbf{b}$ (уопште узевши, такође комплексан) има реалан квадрат. Тада електрично поље добива облик

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{b} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha)}\right\} . \tag{48,1}$$

Напишимо $\mathbf{b}$ у облику $\mathbf{b}_1 - i\,\mathbf{b}_2$, гдје су $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ — два реална вектора. Будући да $b^2 = b_1^2 - b_2^2 - 2\,i\,\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ мора бити реално, биће $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$, тј. вектори $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ међу собом су нормални. Узмимо координантни систем са осама Y и Z паралелним са $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ (оса X у правцу простирања таласа). Тада из (48,1) налазимо:

$$\begin{aligned} E_y &= b_1 \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha), \\ E_z &= b_2 \sin(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha) . \end{aligned} \tag{48,2}$$

Коефицијенти b_1 и b_2 називају се амплитуде таласа. Израз, који претставља аргумент cosinusa или sinusa назива се фаза таласа.

Из (48,2) непосредно слиједи:

$$\frac{E_y^2}{b_1^2}+\frac{E_z^2}{b_2^2}=1\,. \tag{48,3}$$

Из ових формула види се, да у свакој тачци простора вектор електричног поља таквог таласа ротира у равни, која је паралелна равни YZ, при чему врх вектора описује елипсу (48,3) Такав талас назива се елиптично поларизован. Ако је $b_1=b_2$ онда елипса (48,3) прелази у круг тј. вектор ротира и остаје сталан по апсолутној величини. У том случају каже се, да је талас поларизован по кругу.

На крају, ако је b_1 или b_2 једнако нули, онда је поље таласа увијек оријентисано паралелно (или антипаралелно) једном истом правцу. У том случају талас се назива праволиниски поларизован или поларизован у равни[1]). Видљиво је, да се елиптично поларизован талас може посматрати као суперпозиција двају равно поларизованих таласа

§ 49. Спектрално разлагање

Сваки се талас може претставити у облику суперпозиције низа монохроматичних таласа са различитим фреквенцијама. Математички то значи: развијање поља таласа у ред или интеграл *Fourier*-а. Такво разлагање назива се и спектрално разлагање.

Ако је поље периодично у времену (са периодом T), онда се оно може разложити у *Fourier*-ов ред облика[2])

$$f=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\, e^{-i\omega_0 nt}, \tag{49,1}$$

---

[1]) Према историској традицији прихваћена је незгодна терминологија према којој се раван поларизације назива она раван, у којој се налази вектор магнетног поља, а раван електричног поља назива се раван свјетлосних осцилација.

[2]) Овдје, због једноставности, говоримо о чисто периодичном пољу изазваном чисто периодичним кретањем оптерећења. Међутим, треба имати у виду, да стационарно (тачније, скоро стационарно) кретање система честица обично није периодично, него, као што се каже, условно периодично (в. „Механика", § 62). Такво кретање не карактерише се једним, него читавим низом различитих периода (а према томе и фреквенција). Све величине, које карактеришу такво кретање (и поље које оно изазива) не могу се разложити у прости, него у генералисани *Fourier*-ов ред, који се формално може написати у облику аналогичном (49,1):

$$f=\sum_{\omega} f_\omega\, e^{-i\omega t},$$

са том разликом, што се сумирање не врши по фреквенцијама, које су цијели мултипли неке величине ω_0, него по фреквенцијама облика

$$\omega=\sum_{l=1}^{s} n^{(l)}\omega^{(l)},$$

гдје су $n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots, n^{(s)}$ — позитивни или негативни цијели бројеви, а $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(s)}$ — такозване основне фреквенције кретања.

гдје је $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, а „*Fourier*-ове компоненте" f_n:

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f \, e^{i\omega_0 nt} \, dt. \tag{49,2}$$

Ако је f реално, онда је

$$f_{-n} = f_n^*. \tag{49,3}$$

Средњи интезитет таласа (интезитет се одређује квадратом поља) има облик

$$\overline{f^2} = f_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \tag{49,4}$$

(при израчунавању средње вриједности треба имати у виду, да је средња вриједност осцилујућих фактора облика $e^{\pm i\omega_0 nt}$ једнака нули). На тај начин, средњи интезитет таласа претставља се у облику збира интензитета његових монохроматичних компонената.

Непериодично поље f може се разложити у *Fourier*-ов интеграл, ако функција $f(t)$ задовољава одређене услове (функције, које задовољавају те услове, обично су у бесконачности једнаке нули). Тада спектрално разлагање таласа има облик:

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega e^{-i\omega t} \, d\omega, \tag{49,5}$$

гдје су *Fourier*-ове компоненте поља:

$$f_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f \, e^{i\omega t} dt, \tag{49,6}$$

гдје је, аналогно са (49,3):

$$f_{-\omega} = f_\omega^*. \tag{49,7}$$

Размотримо интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2 \, dt$ и изразимо га помоћу интензитета појединих монохроматичних компонената. Користећи се са (49,5) и (49,6) налазимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f \, dt \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega \, e^{-i\omega t} \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega \, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f \, e^{-i\omega t} dt =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega \, f_{-\omega} \, d\omega,$$

или, стављајући $f_{-\omega} = f_\omega^*$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2\,dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\omega|^2\,d\omega = 4\pi \int_0^{+\infty} |f_\omega|^2\,d\omega. \qquad (49{,}8)$$

Често се догађа, да се има посла са пољима, која у времену не мијењају битно свој карактер (специјално, која не ишчезавају за $t \to \pm\infty$) и у исто вријеме нису строго периодична. Такво поље не може се разложити ни у *Fourier*-ов ред ни у интеграл (интеграли $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f e^{i\omega t}\,dt$ дивергирају). Али и у том случају може се извести разлагање на монохроматичне таласе на слиједећи начин.

Посматрајмо величину f у неком већем временском интервалу од $-\frac{T}{2}$ до $+\frac{T}{2}$ и разложимо је у том интервалу у *Fourier*-ов ред облика (49,1). Одредимо сада средњи (за временски интервал T) интензитет таласа. У вези са тим, што се претпоставља да је T врло велико, интервали $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ међу узастопним фреквенцијама врло су мали, па се од суме (49,4) може прећи на интеграл по $dn = \frac{d\omega}{\omega_0}$:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2\,dt = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} |f_n|^2 \frac{d\omega}{\omega_0},$$

или, увршттавајући (49,2):

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2\,dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} f e^{i\omega t}\,dt \right|^2 d\omega. \qquad (49{,}9)$$

На тај начин, средњи интензитет претставља се у облику суме (интеграла) интензитета монохроматичних компонената. Формула (49,9) омогућава израчунавање интензитета у ма којем бесконачно малом интервалу $d\omega$ фреквенција.

За $T \to \infty$, $\overline{f^2}$ тежи некој коначној граници. Због тога и из израза (49,9) слиједи, да интеграл $\int\limits_{-T}^{T} f e^{i\omega t}\,dt$, када T тежи ка бесконачности, расте као $\sqrt{T}$.

§ 50. Парцијално поларизована свјетлост

Сваки монохроматични талас је према самој својој дефиницији стално поларизован. Међутим, обично се има посла с таласима, који су скоро сасвим монохроматични, а фреквенције им се налазе у неком малом интервалу $\Delta\omega$. Посматрајмо такав талас и нека је ω нека његова средња фреквенција. Тада се његово поље (у задатој тачци простора) може написати у облику $\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0(t)\, e^{-i\omega t}\right\}$, гдје је комплексна амплитуда $\mathbf{A}_0(t)$ нека функција времена, која се лагано мијења (код потпуно монохроматичног таласа било би $\mathbf{A}_0 = \text{const.}$). Будући да $\mathbf{A}_0$ одређује поларизацију таласа (в. § 48), онда то значи, да се у свакој тачци таласа његова поларизација мијења са временом. Такав талас се назива парцијално поларизован. Уосталом, у специјалним случајевима, зависност $\mathbf{A}_0(t)$ од времена може бити таква, да талас ипак буде потпуно поларизован. За то је неопходно, да однос обије компоненте од $\mathbf{A}_0$ буде непромијенљив са временом, тј. да остане непромијенљив однос (реалних) амплитуда двију међусобно нормалних компонената поља таласа, као и разлика њихових фаза.

Особине поларизације електромагнетних таласа, специјално свјетлости, посматрају се експериментално пуштањем свјетлости која се проучава кроз разна тијела[1]), послије чега се мјери интензитет свјетлости, која је прошла кроз тијело. С математичке тачке гледишта то значи, да се о особинама поларизације свјетлости доносе закључци полазећи од вриједности неких квадратних функција њеног поља. Разумије се, да је овдје ријеч о средњим вриједностима тих функција по времену. Квадратна функција поља састоји се из чланова, који су пропорционални производима $A_i A_k$, $A_i A_k^*$ или $A_i^* A_k^*$ гдје су A_i компоненте, например, векторског потенцијала. Производи облика $A_i A_k = A_{0i} A_{0k} e^{-2i\omega t}$ и $A_i^* A_k^* = A_{0i}^* A_{0k}^* e^{2i\omega t}$ садрже периодичне факторе $e^{\pm 2i\omega t}$, који се брзо мијењају и постају једнаки нули, када се узму њихове средње вриједности по времену. Производи, пак, $A_i A_k^* = A_{0i} A_{0k}^*$ не садрже такав фактор, па зато њихове средње вриједности нису једнаке нули. На тај начин видимо, да се особине парцијално поларизоване свјетлости потпуно карактеришу тензором

$$J_{ik} = \overline{A_{0i} A_{0k}^*} \,. \tag{50,1}$$

Како се вектор $\mathbf{A}_0$ стално налази у равни, нормалној на правцу таласа, то тензор J_{ik} има свега четири компоненте (у овом параграфу се подразумијева, да се за индексе i, k узимају само двије вриједности: $i, k = 1,2$). Из дефиниције J_{ik} се види, да међу компонентама тога тензора постоји релација

$$J_{ik} = J_{ki}^* \,. \tag{50,2}$$

Доведимо тензор J_{ik} на најпростији облик. Нека је n_i „јединични“ комплексни вектор, који је нормиран тако, да је $n_i n_i^* = 1$. Одредимо n_i тако да буде

$$J_{ik} n_k = \lambda n_i \tag{50,3}$$

---

[1]) Напримјер кроз *Nicol*-ове призме.

аналогно поступку свођења симетричног тензора на главне осе. Једначина (50,3) може се написати у облику

$$(J_{ik}-\lambda\,\delta_{ik})\,n_k=0.$$

Да би овај систем хомогених алгебарских једначина првог степена (по n_k) имао рјешења, која нијесу једнака нули, неопходно је, као што се зна, да детерминанта буде једнака нули:

$$|J_{ik}-\lambda\,\delta_{ik}|=0, \tag{50,4}$$

одакле се одређују двије вриједности λ, које ћемо означити са λ_1 и λ_2. Стављајући ове вриједности редом у једначине (50,3) одредићемо из њих два вектора $n_i^{(1)}$ и $n_i^{(2)}$.

Лако је показати[1]), да су величине λ_1 и λ_2 реалне и позитивне, а вектори $n_i^{(1)}$ и $n_i^{(2)}$ „међусобно нормални“, тј. да задовољавају услов

$$n_i^{(1)}\,n_i^{(2)*}=0. \tag{50,5}$$

Сада тензор J_{ik} можемо написати у облику:

$$J_{ik}=\lambda_1\,n_i^{(1)}\,n_k^{(1)*}+\lambda_2\,n_i^{(2)}\,n_k^{(2)*}. \tag{50,6}$$

Непосредним уврштавањем лако је провјерити, да тај израз заиста задовољава једначину (50,3).

Ако је свјетлост потпуно поларизована, онда је $\mathbf{A}_0=\text{const.}$ и J_{ik} је просто једнако $A_{0i}\,A_{0k}^*$ (без усредњавања). Но сваки од два члана у (50,6) има баш такав облик једноставног производа двију компонента константног вектора ($\sqrt{\lambda_1}n_i^{(1)}$ или $\sqrt{\lambda_2}\,n_i^{(2)}$) и њему коњуговано-комплексног. Другим ријечима, сваки од тих чланова може се посматрати као потпуно (уопште говорећи, елиптично) поларизован талас. Даље, видимо, да у (50,6) нема члана, који садржи производе компонената тих двају таласа. То значи, да

---

[1]) Множењем (50,3) са n_i^* добивамо:

$$\lambda\,n_i\,n_i^*=\lambda=J_{ik}\,n_i^*\,n_k=\overline{|A_{0i}\,n_i|^2}.$$

Но средња вриједност квадрата модула сваке величине је реална и позитивна величина.

Да би се доказало (50,5), напишимо једначине

$$J_{ik}\,n_k^{(1)}=\lambda_1\,n_i^{(1)},\quad J_{ik}\,n_k^{(2)}=\lambda_2\,n_i^{(2)},$$

па прву помножимо са $n_i^{(2)*}$ а другу са $n_i^{(1)*}$:

$$J_{ik}\,n_k^{(1)}\,n_i^{(2)*}=\lambda_1\,n_i^{(1)}n_i^{(2)*},\quad J_{ik}\,n_k^{(2)}\,n_i^{(1)*}=\lambda_2\,n_i^{(2)}\,n_i^{(1)*}.$$

Узмимо коњуговану комплексну другој једначини, узимајући у обзир, да је $J_{ik}^*=J_{ki}$:

$$J_{ik}^*\,n_k^{(2)*}\,n_i^{(1)}=J_{ki}\,n_k^{(2)*}\,n_i^{(1)}=J_{ik}\,n_k^{(1)}\,n_i^{(2)*}=\lambda_2\,n_i^{(2)}\,n_i^{(1)},$$

послије чега се појединачним одузимањем од прве једначине добива;

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,n_i^{(1)}\,n_i^{(2)*}=0,$$

одакле и слиједи (50,5).

се за оба таласа може сматрати да су физички независни један од другога, или, како се каже да су некохерентни. И заиста, ако су два таласа међусобно независни, онда је средња вриједност производа $\overline{A_i^{(1)} A_k^{(2)}}$ једнака производу $\overline{A_i^{(1)}}\,\overline{A_k^{(2)}}$ средњих вриједности $\overline{A_i^{(1)}}$ и $\overline{A_k^{(2)}}$, а како је свака од њих једнака нули, то је и $\overline{A_i^{(1)} A_k^{(2)}} = 0$.

Видјели смо у § 48, да се увијек може узети таква комплексна амплитуда, да једна од двију међусобно нормалних компонената буде реална, а друга имагинарна. Тада њихове апсолутне величине одређују амплитуде одговарајућих осцилација.

На тај начин, можемо писати:

$$n_1^{(1)} = b_1, \quad n_2^{(1)} = i\, b_2, \tag{50,7}$$

гдје су b_1 и b_2 реални (а у вези услова нормирања $n_i^{(1)} n_i^{(1)*} = 1$ везани релацијом $b_1^2 + b_2^2 = 1$). Тада се $n_i^{(2)}$ може написати у облику:

$$n_1^{(2)} = i\, b_2, \quad n_2^{(2)} = b_1 \tag{50,8}$$

(тако да буде $n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0$). Ови изрази показују, да су елипсе обију елиптично поларизованих осцилација међусобно сличне (имају једнаке односе оса), при чему је једна од њих окренута за прави угао у односу на другу.

На тај начин долазимо до резултата, да се сваки парцијално поларизовани талас може претставити као суперпозиција двају некохерентних елиптично поларизованих таласа, код којих су елипсе поларизације сличне и међусобно нормалне.

Тотални интензитет J свјетлости просто је пропорционалан квадрату поља, тј. збиру дијагоналних компонената тензора J_{ik}:

$$J = J_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{50,9}$$

Однос пак

$$\varrho = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{50,10}$$

мање од величина λ према већој карактерише степен деполаризације свјетлости. Ако је свјетлост потпуно поларизована онда је једна од величина λ_1 или λ_2, једнака нули. Очигледно је тада $\varrho = 0$. Супротан случај је свјетлост, код које је $\lambda_1 = \lambda_2$; $\varrho = 1$. Таква свјетлост се назива неполаризована или природна. Чињеница, да у том случају једначина (50,3) има свега један коријен за λ, показује, да тензор J_{ik} има облик:

$$J_{ik} = \lambda_0\, \delta_{ik}, \tag{50,11}$$

гдје је λ_0 општа вриједност λ_1 и λ_2. Сада те једначине дају за вектор n_i бесконачно много вриједности. Другим ријечима, обична свјетлост се може сматрати као суперпозиција двају поларизованих таласа једнаког интензитета, код којих су осе поларизације распоређене на произвољан начин (у равни нормалној на правац свјетлости).

§ 51. Разлагање електростатичког поља

Поље, које изазивају оптерећења, такође се може формално разложити на равне таласе (развити у *Fourier*-ов интеграл), Међутим, то разлагање, у суштини се разликује од разлагања електромагнетних таласа у вакууму. И заиста, поље оптерећења не задовољава хомогену *D'Alembert*-ову једначину (44,8), а према томе ниједан члан реда који претставља то поље не задовољава ту једначину. Одавде слиједи, да за равне таласе на које се може раставити поље оптерећења, није испуњена релација $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, која важи за равне монохроматичне електромагнетне таласе.

Специјално, ако електростатичко поље формално претставимо у облику суперпозиције равних таласа, онда ће „фреквенција" тих таласа, очевидно, бити једнака нули, јер посматрано поље не зависи од времена. Таласни пак вектори, наравно нису једнаки нули.

Посматрајмо поље, изазвано тачкастим оптерећењем e, које се налази у координатном почетку. Потенцијал φ тога поља одређује се једначином (в. § 35)

$$\Delta \varphi = -4 \pi e \delta (\mathbf{r}). \tag{51,1}$$

Развијмо φ у *Fourier*-ов интеграл, тј. претставимо га у облику суперпозиције равних таласа облика $\varphi_\mathbf{k} e^{i \mathbf{k r}}$:

$$\varphi = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i \mathbf{k r}} \varphi_\mathbf{k} \, dk_x \, dk_y \, dk_z . \tag{51,2}$$

Примјењујући *Laplace*-ов оператор на обије стране ове једначине, налазимо:

$$\Delta \varphi = - \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{i \mathbf{k r}} \varphi_\mathbf{k} \, dk_x \, dk_y \, dk_z ,$$

јер је *Fourier*-ова компонента $(\Delta \varphi)_\mathbf{k}$ од израза $\Delta \varphi$:

$$(\Delta \varphi)_\mathbf{k} = - k^2 \varphi_\mathbf{k} .$$

С друге стране, $(\Delta \varphi)_\mathbf{k}$ може се наћи, ако се за обије стране једначине (51,1) узме *Fourier*-ова компонента

$$(\Delta \varphi)_\mathbf{k} = - \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} 4 \pi e \delta (\mathbf{r}) e^{-i \mathbf{k r}} \, dx \, dy \, dz = - \frac{e}{2 \pi^2} .$$

Упоређивањем оба добијена израза за $(\Delta \varphi)_\mathbf{k}$, налазимо

$$\varphi_\mathbf{k} = \frac{e}{2 \pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} . \tag{51,3}$$

Ова формула и ријешава постављен задатак.

Аналогно потенцијалу φ може се развити и поље

$$\mathbf{E} = \int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \mathbf{E_k}\, e^{i\mathbf{kr}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z. \tag{51,4}$$

Помоћу (51,2) добивамо:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \varphi_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{kr}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z = -\int\int\int i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{kr}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z.$$

Упоређујући са (51,4), налазимо:

$$\mathbf{E_k} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2}\cdot\frac{e}{2\pi^2}. \tag{51,5}$$

Одавде се види, да је поље таласа, на које смо разложили *Coulomb*-ово поље, оријентисано дуж таласног вектора. Према томе се ти таласи могу назвати лонгитудинални.

§ 52. Сопствене осцилације поља

Посматрајмо електромагнетно поље, које се налази у некој коначној запремини простора[1]). Да бисмо упростили даљња израчунавања, претпоставимо, да та запремина има облик правоуглог паралелопипеда са странама A, B, C. Тада можемо све величине, које у том паралелопипеду карактеришу поље, развити у троструки *Fourier*-ов ред (по трима координатама). На примјер, векторски потенцијал поља имаће сада облик:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A_k}\, e^{i\mathbf{kr}}. \tag{52,1}$$

Сумирање се врши по свим могућим вриједностима вектора $\mathbf{k}$, чије компоненте, као што се зна, имају вриједност

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \tag{52,2}$$

гдје су n_x, n_y, n_z позитивни и негативни цијели бројеви. Коефицијенти $\mathbf{A_k}$ морају задовољавати релацију $\mathbf{A_{-k}} = \mathbf{A_k^*}$ будући да $\mathbf{A}$ мора бити реално. Из једначине $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ слиједи, да је за свако $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k}\,\mathbf{A_k} = 0, \tag{52,3}$$

тј. комплексни вектори $\mathbf{A_k}$ „нормални" су на одговорајућим таласним векторима $\mathbf{k}$. Вектори $\mathbf{A_k}$ су, наравно, функције времена. Они задовољавају једначине

$$\ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + c^2 k^2 \mathbf{A_k} = 0. \tag{52,4}$$

---

[1]) Ријеч је о пољу у отсуству оптерећења („слободно зрачење").

Ако су димензије A, B, C дате запремине довољно велике, онда су сусједне вриједности k_x, k_y, k_z (код којих се n_x, n_y, n_z разликују за јединицу) скоро међусобно једнаке. У том случају ми можемо говорити о броју могућних вриједности k_x, k_y, k_z у малим интервалима $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$.

Будући да сусједне вриједности, рецимо k_x, одговарају вриједностима n_x које се разликују за јединицу, онда је број Δn_x могућих вриједности k_x у интервалу Δk_x просто једнак одговарајућем интервалу Δn_x вриједности n_x. На тај начин налазимо:

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi} \Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi} \Delta k_y, \quad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi} \Delta k_z.$$

Укупан број Δn могућих вриједности вектора $\mathbf{k}$ са компонентама у интервалима $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$ једнак је производу $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$, тј.

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \tag{52,5}$$

гдје је $V = ABC$ запремина поља.

Одавде је лако одредити број могућих вриједности таласног вектора с апсолутном вриједношћу у интервалу Δk и правцем у елементу тјелесног угла Δo. За то треба само прећи на сферне координате у „простору k_x, k_y, k_z", и умјесто $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$, написати елемент запремине у том простору. На тај начин је:

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \Delta o. \tag{52,6}$$

Најзад, укупан број вриједности таласних вектора апсолутних величина k у интервалу Δk и свих праваца једнак је (умјесто Δo пишемо 4π):

$$\Delta n = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \Delta k. \tag{52,7}$$

Вектори $\mathbf{A_k}$, као функције времена, своде се на просте периодичне функције фреквенција $\omega_k = ck$ [упор. једначину (52,4)]. Поље ћемо разложити тако да буде приказано равним таласима. У вези с тим може се ред (52,1), послије прегруписавања чланова, написати у облику;

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a_k} e^{i\,\mathbf{kr}} + \mathbf{a_k^*} e^{-i\,\mathbf{kr}}) \tag{52,8}$$

(гдје се директно изражава реалност $\mathbf{A}$). Сматраћемо, да свако $\mathbf{a_k}$ зависи од времена помоћу фактора $e^{-i\omega_k t}$:

$$\mathbf{A_k} \sim e^{-i\,\omega_k t}, \quad \omega_k = ck. \tag{52,9}$$

Тада сваки поједини члан у суми (52,8) биће функција само од разлика $\mathbf{kr} - \omega_k t$, што одговара таласу, који се простире у правцу вектора $\mathbf{k}$.

Израчунајмо укупну енергију

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2)\, dV$$

посматраног поља у запремини V, изражавајући је помоћу величина $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$. За електрично поље имамо:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c}\sum_{\mathbf{k}}\left(\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}\, e^{i\,\mathbf{kr}} + \dot{\overset{*}{\mathbf{a}}}_{\mathbf{k}}\, e^{-i\,\mathbf{kr}}\right),$$

или, узевши у обзир (52,9):

$$\mathbf{E} = i\sum_{\mathbf{k}} k\left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\,\mathbf{kr}} - \overset{*}{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}\, e^{-i\,\mathbf{kr}}\right). \tag{52,10}$$

За магнетно поље $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ налазимо:

$$\mathbf{H} = i\sum_{\mathbf{k}}\left[(\mathbf{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}})\, e^{-i\,\mathbf{kr}} - (\mathbf{k}\times\overset{*}{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}})\; e^{-i\,\mathbf{kr}}\right]. \tag{52,11}$$

При израчунавању квадрата тих сума треба имати у виду, да сви производи чланова са таласним векторима $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ дају нулу при интегрирању по цијелој запремини. И заиста, такви чланови садрже факторе облика $e^{\pm i\,\mathbf{qr}}$, $\mathbf{q} = \mathbf{k} \pm \mathbf{k}'$, а интеграл, напр.,

$$\int_0^A e^{i\frac{2\pi}{A}n_x x}\,dx$$

са цијелим $n_x \neq 0$ једнак је нули. Из тога разлога једнаки су нули производи који садрже факторе $e^{\pm 2\,i\mathbf{kr}}$. А у оним члановима гдје нема експоненцијалних чинилаца, интегрирање по dV даје једноставно запремину V.

У резултату налазимо:

$$\mathcal{E} = \frac{V}{4\pi}\sum_{\mathbf{k}}\left\{k^2\,\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\,\overset{*}{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} + (\mathbf{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}})\,(\mathbf{k}\times\overset{*}{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}})\right\}.$$

Но како је $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\,\mathbf{k} = 0$, биће

$$(\mathbf{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}})\;(\mathbf{k}\times\overset{*}{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}) = k^2\,\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\,\overset{*}{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}},$$

па се дефинитивно добија

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}}\mathcal{E}_{\mathbf{k}}, \quad \mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{k^2\,V}{2\pi}\,\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\,\overset{*}{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}. \tag{52,12}$$

На тај начин, тотална енергија поља изражава се у облику суме енергија $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$, које су појединачно везане са сваким појединим равним таласом.

Потпуно аналогно може се израчунати тотални импулс поља

$$\frac{1}{c^2}\int \mathbf{S}\,dV = \frac{1}{4\pi c}\int(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dV,$$

при чему се добива:

$$\sum_{\mathbf{k}}\frac{\mathbf{k}}{k}\,\frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{c}. \tag{52,13}$$

Овај резултат се могао и унапред очекивати с обзиром на познати однос међу енергијом и импулсом равних таласа (в. § 45).

Увођењем (52,8) [или (52,1)] постиже се описивање поља помоћу дискретног реда промјенљивих (вектора $\mathbf{a_k}$), умјесто описивања континуалним редом промјенљивих, какво је у суштини описивање помоћу потенцијала $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, који је задат у свим тачкама простора. Трансформираћемо сада промјенљиве $\mathbf{a_k}$, што ће нам омогућити, да једначинама поља дамо облик, који је аналоган канонским једначинама механике (*Hamilton*-овим једначинама).

Уведимо реалне „каноничне промјенљиве“ $\mathbf{Q_k}$ и $\mathbf{P_k}$ помоћу релација

$$\begin{aligned} \mathbf{Q_k} &= a(\mathbf{a_k} + \overset{*}{\mathbf{a}}_\mathbf{k}), \\ \mathbf{P_k} &= -i\,\omega_k\, a(\mathbf{a_k} - \overset{*}{\mathbf{a}}_\mathbf{k}) = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{52,14}$$

Овдје је a нека реална константа, коју ћемо касније одредити тако, да однос $\mathbf{P_k} = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}$ међу „генералисаним импулсима“ и „кординатама“ стварно буде посљедица једначина кретања.

Hamilton-ова функција поља добива се замјеном величина $\mathbf{a_k}$, изражених помоћу $\mathbf{P_k}$ и $\mathbf{Q_k}$ у израз за енергију (52,12):

$$\mathscr{H} = \sum_\mathbf{k} \mathscr{H}_\mathbf{k} = \sum_\mathbf{k} \frac{V}{8\pi c^2 a^2}(\mathbf{P}_\mathbf{k}^2 + \omega_k^2\, \mathbf{Q}_\mathbf{k}^2).$$

Да би се *Hamilton*-ова једначина $\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{P_k}} = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}$ слагала са $\mathbf{P_k} = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}$, треба ставити $\dfrac{V}{8\pi c^2 a^2} = \dfrac{1}{2}$ тј.

$$a = \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}. \tag{52,15}$$

Тада *Hamilton*-ова функција добива облик:

$$\mathscr{H} = \sum_\mathbf{k} \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\mathbf{k}^2 + \omega_k^2\, \mathbf{Q}_\mathbf{k}^2) = \sum_\mathbf{k} \mathscr{H}_\mathbf{k}. \tag{52,16}$$

„Једначине кретања“

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{Q_k}} = -\dot{\mathbf{P}}_\mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{P_k}} = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}$$

своде се на једначине

$$\ddot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k} + \omega_k^2\, \mathbf{Q_k} = 0, \tag{52,17}$$

тј. идентичне су са једначинама поља.

Сваки од вектора $\mathbf{Q_k}$ и $\mathbf{P_k}$ нормалан је на таласном вектору $\mathbf{k}$, тј. има по двије независне компоненте. Смјер тих вектора одређује оријентацију поларизације одговарајућег таласа. Ако се са $Q_{\mathbf{k}j}$, $j = 1{,}2$, обиљеже двије компоненте вектора $\mathbf{Q_k}$ (у равни нормалној на $\mathbf{k}$) онда се има $\mathbf{Q}_\mathbf{k}^2 = \sum\limits_j Q_{\mathbf{k}j}^2$, и аналогно за $\mathbf{P_k}$. Тада је:

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}j} \mathscr{H}_{\mathbf{k}j}, \quad \mathscr{H}_{\mathbf{k}j} = \frac{1}{2}\left(P_{\mathbf{k}j}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}j}^2\right). \tag{52,18}$$

Видимо, да се *Hamilton*-ова функција разлаже на суму независних чланова $\mathscr{H}_{\mathbf{k}j}$, од којих сваки садржи по један пар величина $Q_{\mathbf{k}j}$, $P_{\mathbf{k}j}$. Сваки такав члан одговара таласу са одређеним таласним вектором и поларизацијом. При томе $\mathscr{H}_{\mathbf{k}j}$ има облик *Hamilton*-ове функције линеарног „осцилатора", који врши просте хармонијске осцилације[1]). Зато се о добивеном разлагању понекад говори као о разлагању поља на осцилаторе.

Написаћемо формуле, које експлицитно изражавају поље помоћу промјенљивих $\mathbf{P_k}$ и $\mathbf{Q_k}$. Из (52,14) и (52,15) имамо:

$$\mathbf{a_k} = \frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}\left(\mathbf{P_k} - i\,\omega_k\,\mathbf{Q_k}\right), \quad \mathbf{a}_\mathbf{k}^* = -\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}\left(\mathbf{P_k} + i\,\omega_k\,\mathbf{Q_k}\right). \tag{52,19}$$

Замјењујући ове изразе у (52,8) налазимо векторски потенцијал поља:

$$\mathbf{A} = 2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_\mathbf{k}\frac{1}{k}\left(ck\,\mathbf{Q_k}\cos\mathbf{kr} - \mathbf{P_k}\sin\mathbf{kr}\right). \tag{52,20}$$

За електрично и магнетно поље добивамо

$$\begin{gathered}\mathbf{E} = 2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_\mathbf{k}\left(ck\,\mathbf{Q_k}\sin\mathbf{kr} + \mathbf{P_k}\cos\mathbf{kr}\right),\\ \mathbf{H} = 2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_\mathbf{k}\frac{1}{k}\left[ck\,(\mathbf{k}\times\mathbf{Q_k})\sin\mathbf{kr} + (\mathbf{k}\times\mathbf{P_k})\cos\mathbf{kr}\right].\end{gathered} \tag{52,21}$$

---

[1]) В., напримјер, „Механика" § 30.

ГЛАВА VII

ПРОСТИРАЊЕ СВЈЕТЛОСТИ

§ 53. Геометриска оптика

Равни талас се одликује особином да правац његовог простирања и амплитуда увијек остају исти. Произвољни електромагнетни таласи. наравно, немају ту особину.

Међутим, у великом броју случајева електромагнетни таласи, који нису равни, одликују се том особином, да се у сваком малом дијелу простора могу посматрати као равни. За то је, очевидно, потребно, да се амплитуда и правац таласа готово не мијењају на дужини, која је реда дужине таласа.

Ако је тај услов испуњен, онда се могу увести такозване таласне површине, тј. површине, код којих је у свим њиховим тачкама фаза таласа (у датом моменту) једнака. Таласне површине равног таласа, очевидно, претстављају равни, нормалне на правцу простирања таласа. За сваки мали дио простора може се говорити о правцу простирања таласа, који је нормалан на таласној површини. Притом се може увести појам зрака - линија, код којих се тангента у свакој тачци поклапа с правцем простирања таласа.

Проучавање закона простирања таласа у том случају претставља предмет геометриске оптике. Геометриска оптика, дакле, посматра простирање електромагнетних таласа, а специјално свјетлости, као простирање зрака гдје се сасвим занемарује њихова таласна природа. Другим ријечима, геометриска оптика одговара граничном случају малих таласних дужина, $\lambda \to 0$.

Позабавимо се сада извођењем основне једначине геометриске оптике, једначине која одређује правац зрака. Нека је f ма која величина која описује поље таласа (ма која од компонената **E** или **H**). Код равног монохроматичног таласа f има облик:

$$f = ae^{i(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha)} = ae^{i(k_i x_i + \alpha)} \tag{53,1}$$

(изостављамо знак Re јер се стално подразумијева реални дио).

Напишимо израз за поље у облику

$$f = ae^{i\psi} . \tag{53,2}$$

У случају, када талас није раван, али се геометриска оптика може примјенити, амплитуда a је општа функција координата и времена, а фаза ψ, која се назива такође ајконал, нема прост облик као у (53,1). Међутим, ајконал ψ је у суштини релативно огромна величина. То се непосредно види по томе, што се мијења за 2π у интервалу једне таласне дужине, а геометриска оптика одговара граници $\lambda \to 0$.

За мале дјелове простора и интервала времена ајконал ψ може се развити у ред. С тачношћу до чланова првог реда имамо

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} + t\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

(координатни почетак и почетак рачунања времена узети су у посматраном дијелу простора и интервалу времена; вриједности извода узимају се у координатном почетку). Упоређивањем тога израза са (53,1) можемо написати:

$$\mathbf{k} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} \equiv \operatorname{grad}\psi\,, \qquad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}\,, \tag{53,3}$$

што и одговара чињеници, да се у сваком малом дијелу простора (и у малим интервалима времена) талас може сматрати равним. У 4-димензионалном облику релације (53,3) пишу се

$$k_i = -\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,, \tag{53,4}$$

гдје је k_i-таласни 4-вектор.

Видјели смо у § 46, да међу компонентама 4-вектора k_i постоји релација $k_i^2 = 0$. Ако се овдје уврсти (53,4), налази се једначина

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \tag{53,5}$$

Ова једначина, која се назива једначина ајконала, је основна једначина геометриске оптике.

Једначина ајконала може се, такође, извести и непосредним прелазом на границу $\lambda \to 0$ у таласној једначини. Поље f задовољава таласну једначину

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0\,.$$

Ако овдје ставимо $f = ae^{i\psi}$, налазимо

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2} e^{i\psi} + 2i\frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} e^{i\psi} + if\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 f = 0. \tag{53,6}$$

Но, као што је горе показано, ајконал ψ има велику вриједност. Према томе, овдје се могу занемарити три прва члана у односу на четврти те се поново долази до једначине (53,5).

Навешћемо овдје још низ релација, које међутим, примијењене на простирање свјетлости у вакууму доводе само до потпуно очевидних резултата. Наводимо их овдје и због тога, што имамо у виду, да се у свом општем облику ти закључци могу примијенити и на простирање свјетлости у материјалним срединама.

Из облика једначине ајконала излази важна аналогија међу геометриском оптиком и механиком материјалних честица. Кретање материјалне честице приказује се *Hamilton-Jacobi*-евом једначином (22,12):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{eA_i}{c}\right)^2 + m^2c^2 = 0.$$

Ова једначина, као и једначина ајконала, је парцијална једначина првог реда и другог степена. Као што је познато, дјејство S је повезано с импулсом $\mathbf{p}$ и *Hamilton*-овом функцијом $\mathcal{H}$ честица помоћу релација

$$\mathbf{p}=\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \mathcal{H}=-\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Упоређивањем ових формула с формулама (53,3) видимо, да таласни вектор таласа игра у геометриској оптици улогу импулса честица у механици, а фреквенција — улогу *Hamilton*-ове функције, тј. енергије честица. Апсолутна величина k таласног вектора везана је с фреквенцијом помоћу формуле $k=\frac{\omega}{c}$. Видимо, да је та релација аналогна релацији $p=\frac{\mathcal{E}}{c}$ међу импулсом и енергијом честице с масом једнаком нули и брзином која је једнака брзини свјетлости.

За честице важе *Hamilton*-ове једначине

$$\dot{\mathbf{p}}=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

С обзиром на изнешену аналогију можемо непосредно написати аналогну једначину за зраке

$$\dot{\mathbf{k}}=-\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{53,7}$$

У вакууму је $\omega=ck$, па је $\dot{\mathbf{k}}=0$, $\mathbf{v}=c\,\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ је јединични вектор дуж правца простирања), тј. као што и мора бити, у вакууму су зраци праве линије дуж којих се свјетлост простире брзином c.

Аналогија међу таласним вектором таласа и импулсом честице нарочито се јасно појављује при слиједећој околности. Посматрајмо тапас, који претставља суперпозицију монохроматичних таласа с фреквенцијама, које се налазе у неком малом интервалу, и који заузима неки коначни дио простора (такозвани „таласни пакет“). Израчунајмо 4-импулс поља тога таласа, служећи се формулом (31,6) с тензором енергије-импулса (47,4) (за сваку монохроматичну компоненту). Ако у тој формули замијенимо k_i неком његовом средњом вриједности, добивамо израз облика

$$P_i=A\,k_i, \tag{53,8}$$

гдје је коефицијент пропорционалности A међу два 4-вектора P_i и k_i неки скалар. У тродимензионалном облику ова релација даје:

$$\mathbf{P}=A\mathbf{k}, \quad \mathcal{E}=A\omega. \tag{53,9}$$

На тај начин видимо, да се импулс и енергија таласног пакета трансформирају респективно као таласни вектор и фреквенција при прелазу од једног система референције на други.

Настављајући аналогију може се у геометриској оптици установити принцип, који је аналоган принципу најмањег дјејства у механици. Међутим, он се не може написати у *Hamilton*-овом облику $\delta\int L\,dt=0$, јер се испоставља, да је за зраке немогућно увести функцију, која је аналогна *Lagrange*-овој функцији за честице. Стварно, *Lagrange*-ова функција L честица повезана је са *Hamilton*-ово мфункцијом $\mathcal{H}$ помоћу релације $L = \mathbf{p}\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} - \mathcal{H}$. Замијењујући *Hamilton*-ову функцију фреквенцијом ω, а импулс таласним вектором $\mathbf{k}$, написали бисмо у оптици, умјесто *Lagrange*-ове функције, $\mathbf{k}\dfrac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} - \omega$. Но тај израз је једнак нули, јер је $\omega = ck$. Немогућност увођења *Lagrange*-ове функције за зраке види се уосталом и непосредно из горе наведене околности, да је простирање зрака аналогно кретању честица, чија је маса једнака нули.

Ако талас има одређену сталну фреквенцију ω, онда се зависност његовог поља од времена одређује фактором облика $e^{-i\omega t}$. Према томе, може се за ајконал таквог таласа написати:

$$\psi = -\omega t + \psi_1(x, y, z), \tag{53,10}$$

гдје је ψ_1 функција само од координата. Сада једначина ајконала (53,5) добива облик:

$$(\text{grad}\,\psi_1)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{53,11}$$

Таласне површине су површине константног ајконала, тј. претстављају фамилију површина облика $\psi_1(x, y, z) = \text{const}$. У свакој тачки зраци су нормални на одговарајућој таласној површини. Њихова оријентација одређује се градијентом $\nabla\psi_1$.

У случају када је енергија константна, може се, као што је познато, принцип најмањег дјејства за честицу написати и у облику такозваног *Maupertius*-овог принципа:

$$\delta S = \delta \int \mathbf{p}\, d\mathbf{l} = 0,$$

гдје се интегрирање врши по трајекторији честице међу два њена задата положаја. При томе се претпоставља, да је импулс изражен у функцији од енергије и диференцијала координата честице. Аналоган принцип за зраке назива се *Fermat*-ов принцип. У том случају можемо према аналогији написати:

$$\delta \psi = \delta \int \mathbf{k}\, d\mathbf{l} = 0. \tag{53,12}$$

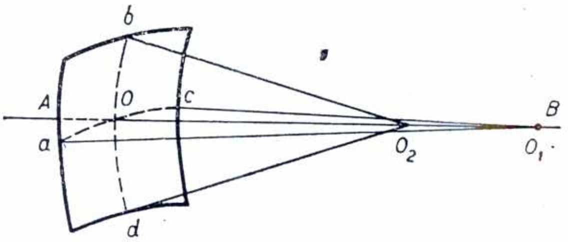
У вакууму је $\mathbf{k} = \dfrac{\omega}{c}\mathbf{n}$, и добивамо:

$$\delta \int dl = 0, \tag{53,13}$$

(јер је $d\mathbf{l}\cdot\mathbf{n} = dl$) што и одговара праволинијском простирању зрака.

§ 54. Интензитет

Према раније изложеном, може се у геометријској оптици свјетлосни талас посматрати као сноп зрака. Међутим, зраци сами по себи одређују само правац простирања свјетлости у свакој тачки, а не и расподјелу интензитета свјетлости у простору. Посматрајмо бесконачно мали елемент на макојој таласној површини посматраног снопа. Из диференцијалне геометрије је познато, да свака површина у свакој својој тачки има два главна полупречника кривине, који су, уопште говорећи, различити. Нека су ac и bd (сл. 4) елементи главних кругова кривине, који пролазе кроз дати елемент таласне површине. Тада се зраци, који пролазе кроз тачке a и c, међусобно сијеку у одговарајућем центру кривине O_1, а зраци, који пролазе кроз b и d, сијеку се у другом центру кривине O_2.



Сл. 4

При датим угловима међу зрацима из O_1 и O_2, дужине сегмената ac и bp очигледно су пропорционалне одговарајућим полупречницима кривине R_1 и R_2 (тј. дужинама $O_1 a$ и $O_2 b$). Површина елемента пропорционална је производу из ac и bd тј. производу $R_1 R_2$. Другим ријечима, када се посматра елемент таласне површине, која је ограничена одређеним низом зрака, онда се при кретању дуж тих зрака површина тог елемента мијења пропорционално величини $R_1 R_2$.

С друге стране, интензитет, тј. флукс енергије кроз јединицу површине, обрнуто је пропорционалан површини кроз коју протиче дата количина свјетлосне енергије. На тај начин долазимо до закључка, да је интензитет:

$$I = \frac{\text{const.}}{R_1 R_2}. \tag{54,1}$$

Ову формулу треба разумијети на слиједећи начин. На сваком датом зраку (AB на сл. 4) постоје одређене тачке O_1 и O_2 као центри кривине (у тачкама гдје се сијеку са зраком) свих таласних површина које сијеку дати зрак. Растојања OO_1 и OO_2, од пресјечне тачке O таласне површине и зрака до тачака O_1 и O_2, претстављају полупречнике кривине R_1 и R_2 таласне површине у тачки O. На тај начин формула (54,1) одређује промјену интензитета свјетлости дуж датог зрака у функцији од растојања до одређених тачака на том зраку. Напомињемо, да іе ова формула неподесна за упоређивање интензитета у разним тачкама једне исте таласне површине.

Будући да се интензитет одређује квадратом модула поља, то се за промјену самог поља дуж зрака може написати

$$f = \frac{\text{const.}}{\sqrt{R_1 R_2}} e^{ikR}, \tag{54,2}$$

гдје се у фазном фактору e^{ikR} под R може подразумијевати како R_1 тако и R_2. Величине e^{ikR_1} и e^{ikR_2} међусобно се разликују само у константном фактору (за дати зрак), јер је разлика $R_1 - R_2$, односно растојање међу оба центра кривине, константна.

Ако се оба полупречника кривине таласне површине поклапају, онда (54,1) и (54,2) имају обик:

$$I = \frac{\text{const.}}{R^2}, \quad f = \frac{\text{const.}}{R^2}\, e^{ikR}. \tag{54,3}$$

Ово важи специјално увијек у оним случајевима, када свјетлост проистиче из тачкастог извора (онда су таласне површине концентричне сфере, а R растојање од извора свјетлости).

Из (54,1) видимо, да интензитет постаје бесконачан у тачкама $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, тј. у центрима кривине таласних површина. Ако се то примијени на све зраке у снопу, налази се, да интензитет свјетлости у датом снопу тежи ка бесконачности уопште узевши на двијема површинама — геометриском мјесту свих центара кривине таласне површине. Те се површине називају каустике. У специјалном случају снопа зрака са сферним таласним површинама обје каустике се своде на једну тачку (фокус).

Према својствима геометриског мјеста центра кривине фамилије површина, познатим из диференцијалне геометрије, зраци тангирају каустике.

Треба имати у виду, да се центри кривина таласних површина могу налазити не на зрацима, него на њиховом продужењу иза оптичког система од којега произлазе. У таквим случајевима има се посла са имагинарним каустичним површинама (или фокусима). Притом интензитет свјетлости нигдје не постаје бесконачан.

Што се тиче повећавања интензитета до бесконачности, он, истина, у тачкама каустике постаје велики, али ипак остаје коначан (в. задатак из § 59). Формално, бесконачно велика вриједност интензитета показује, да се близу каустика не може у потпуности примијенити апроксимација геометриске оптике. Са том околношћу повезана је и чињеница, да се промјена фазе дуж зрака може одредити формулом (54,2) само на оним сегментима зрака, који не садрже тачке додира са каустикама. Касније (у § 59) показаћемо, да се стварно при пролазу поред каустика фаза поља смањује за $\frac{\pi}{2}$. То значи, да, ако је на дијелу зрака до његовог тангирања са првом каустиком поље пропорционално фактору e^{ikx} (x је кордината дуж зрака), онда ће послије пролаза поред каустике поље бити пропорционално са $e^{i(kx-\pi/2)}$. Исто то се догађа и близу додирне тачке са другом каустиком, па ће иза те тачке поље бити пропорционално са $e^{i(kx-\pi)}$.

§ 55. Угаони ајконал

Свјетлосни зрак, који при кретању кроз вакуум наиђе на ма које провидно материјално тијело, имаће по излазу из тог тијела, уопште узевши, правац различит од првобитног. Наравно, промјена правца зависи од конкретних особина тијела и од његовог облика. Ипак се испоставило да је могуће извести неке опште законе, који се односе на промјену правца свјетлосних зрака при пролазу кроз произвољна материјална тијела. При томе се претпоставља само, да за зраке, које се простиру кроз посматрано тијело, важи геометриска оптика. Ми ћемо таква тијела, кроз која се пропуштају свјетлосни зраци, називати, као што је уобичајено, оптичким системима.

Према аналогији међу простирањем зрака и кретањем честице, која је наведена у § 53, исто такви закони важе и за промјену правца кретања честица, које се најприје крећу праволиниски у вакууму, а затим пролазе кроз ма какво електромагнетно поље и поново излазе из тог поља у вакуум. Ми ћемо због веће одређености стално говорити о простирању свјетлосних зракова.

У претходном параграфу видјели смо, да се једначина ајконала, која одређује простирање свјетлосних зракова, може написати у облику (53,11): $(\nabla\psi_1)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ (за свјетлост са одређеном фреквенцијом). Убудуће, због практичности, са ψ обиљежаваћемо количник из ајконала и константне величине $\frac{\omega}{c}$. Тада ће основна једначина геометриске оптике имати облик:

$$(\nabla\psi)^2 = 1. \tag{55,1}$$

Свако рјешење ове једначине описује одређени сноп зракова, при чему се правац зрака који пролази кроз дату тачку простора, одређује градијентом ψ у тој тачки. Ипак је за наше сврхе такво описивање недовољно, јер ми тражимо опште релације, које одређују пролаз кроз оптичке системе ма којих зрака, а не једног одређеног снопа зракова. Зато се морамо послужити ајконалом, узетим у таквом облику, у коме би могао описивати све могуће свјетлосне зраке, тј. зраке, који пролазе кроз ма који пар тачака у простору. У свом обичном облику ајконал $\psi(\mathbf{r})$ је фаза зрака из неког снопа, који пролази кроз тачку $\mathbf{r}$. Сада морамо увести ајконал као функцију $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ кордината двију тачака ($\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$) су радиус-вектори почетне и крајње тачке зрака). Зрак се може повући кроз сваке двије тачке $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, а $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ је фазна разлика (или, како се каже, оптичка дужина пута) тога зрака међу тачкама $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Касније ћемо под $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ стално подразумијевати радиус-векторе тачака на зраку респективно до и послије његовог пролаза кроз оптички систем.

Ако се у $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ сматра да је задат један од радиус-вектора, рецимо $\mathbf{r}'$, онда ће ψ као функција од $\mathbf{r}$ описивати одређени сноп зракова, и то оних, који пролазе кроз тачку $\mathbf{r}'$. Тада ψ мора задовољавати једначину (55,1) у којој се диференцирање врши по компонентама од $\mathbf{r}$. Аналогно, ако се сматра да је $\mathbf{r}$ дато, онда налазимо још једну једначину за $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ тако да је:

$$(\nabla_{\mathbf{r}}\psi)^2 = 1, \qquad (\nabla_{\mathbf{r}'}\psi)^2 = 1. \tag{55,2}$$

Као што је познато из претходног параграфа, правац зрака одређује се градијентом његове фазе. Како је ψ $\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ фазна разлика у тачкама $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$, то се правац зрака у тачки $\mathbf{r}'$ одређује вектором $\mathbf{n}' = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}$, а у тачки $\mathbf{r}$ — вектором $\mathbf{n} = -\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}$. Из (55,2) види се, да су вектори $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ јединични:

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1. \tag{55,3}$$

Четири вектора $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ међусобно су повезани неком релацијом, јер су два од њих ($\mathbf{n}$, ψ') изводи неке функције ψ по другим ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$). Што се тиче саме функције $\mathbf{n}$, она задовољава допунске услове — једначине (55,2).

За налажење релација међу $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, згодно је мјесто ψ увести величину, на коју се не би надовезивали никакви допунски услови, (тј. која не би морала задовољавати ма какве диференцијалне једначине). То се може урадити на слиједећи начин. У функцији ψ независне промјенљиве су $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, па за диференцијал $d\psi$ имамо:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} d\mathbf{r} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' = -\mathbf{n}\, d\mathbf{r} + \mathbf{n}'\, d\mathbf{r}'.$$

Извршимо сада *Legendre*-ову трансформацију по независним промјенљивим $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ умјесто $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, тј. напишимо:

$$d\psi = -d(\mathbf{n}\,\mathbf{r}) + \mathbf{r}\, d\mathbf{n} + d(\mathbf{n}'\mathbf{r}') - \mathbf{r}'\, d\mathbf{n}',$$

одакле, увођењем функције

$$\chi = \mathbf{n}'\mathbf{r}' - \mathbf{n}\,\mathbf{r} - \psi, \tag{55,4}$$

имамо

$$d\chi = -\mathbf{r}\, d\mathbf{n} + \mathbf{r}'\, d\mathbf{n}'. \tag{55,5}$$

Функција χ назива се угаони ајконал. Као што се види из (55,5), у угаоном ајконалу независне промјенљиве су $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. На χ се не надовезују никакви допунски услови. Стварно, једначина (55,3) изражава сада само да је $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1$, а то су услови, који се односе на независне промјенљиве. Из тих услова види се, да су од три компоненте n_x, n_y, n_z вектора $\mathbf{n}$ (и аналогно $\mathbf{n}'$) само двије независне. Убудуће, као независно промјенљиве сматраћемо компоненте n_y, n_z, n'_y, n'_z па је $n_x = \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2}$, $n'_x = \sqrt{1 - n_y'^2 - n_z'^2}$.

Увршта вајући те изразе у

$$d\chi = -x\, dn_x - y\, dn_y - z\, dn_z + x'\, dn'_x + y'\, dn'_y + z'\, dn'_z,$$

налазимо за диференцијал

$$d\chi = -\left(y - \frac{n_y}{n_x} x\right) dn_y - \left(z - \frac{n_z}{n_x} x\right) dn_z + \left(y' - \frac{n'_y}{n'_x} x'\right) dn'_y +$$
$$+ \left(z' - \frac{n'_z}{n'_x} x'\right) dn'_z .$$

Одавде налазимо дефинитивно слиједеће једначине:

$$y - \frac{n_y}{n_x} x = -\frac{\partial\chi}{\partial n_y}, \quad z - \frac{n_z}{n_x} x = -\frac{\partial\chi}{\partial n_z},$$
$$y' - \frac{n'_y}{n'_x} x' = \frac{\partial\chi}{\partial n'_y}, \quad z' - \frac{n'_z}{n'_x} x' = \frac{\partial\chi}{\partial n'_z}. \tag{55,6}$$

Ове једначине одређују општи тражени однос међу $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$. Функција χ карактерише конкретна својства тијела кроз која пролазе зраци (или својства поља — у случају гибања наелектрисаних честица).

Када су **n′** и **n** задати, онда сваки пар из једначина (55,6) претставља праву линију. Те праве линије нијесу ништа друго него зраци, и то прије и послије проласка кроз оптички систем. На тај начин, једначине (55,6) непосредно одређују кретање зрака на обим странама оптичког система.

§ 56. Танки снопови зрака

При третирању проласка снопова зрака кроз оптичке системе нарочити интерес претстављају снопови, чији се сви зраци сијеку у једној тачки (такозвани хомоцентрични снопови).

Хомоцентрични сноп зрака, послије проласка кроз оптички систем, уопште узевши, губи ту своју особину, тј. послије проласка кроз тијела зраци се не скупљају поново у некој тачки. Само у нарочитим случајевима, када излазе из свјетлосне тачке, послије проласка кроз оптички систем пресијецају се у једној тачки у лику свијетле тачке¹).

Може се показати (в. § 57) да јединствен случај, када сви хомоцентрични снопови и послије проласка кроз оптички систем остају хомоцентрични, претставља случај идентичног пресликавања, тј. случај таквог оптичког система, који за ма који предмет даје лик који је идентичан са њим и по облику и по димензијама (другим ријечима, лик се разликује од предмета само помјерањем, ротацијом или огледањем предмета као цјелине).

На тај начин, никакав оптички систем не може дати потпуно вјеран лик предмета (који има коначне димензије) изузевши тривијални случај идентичног пресликавања²). Могуће је само апроксимативно, не потпуно вјерно идентично огледање предмета са извјесним димензијама.

Најважнији случај прелаза хомоцентричних снопова у хомоцентричне претстављају довољно танки снопови (тј. снопови са малим углом отвора), који пролазе близу одређене линије (за дати оптички систем). Та линија назива се оптичка оса оптичког система.

Неопходно је притом напоменути, да чак и бесконачно уски снопови зрака (у тродимензионалном простору), у општем случају, нису хомоцентрични. Видјели смо, да се у таквом снопу различити зраци пресијецају у разним тачкама; та појава назива се астигматизам. Изузетак претстављају оне тачке таласне површине у којима су оба њена полупречника кривине međусобно једнаки. У близини такве тачке мали дио површине може се сматрати као сферни, па се одговарајући танки сноп зрака може сматрати као хомоцентричан.

Посматраћемо оптичке системе, који посједују аксијалну симетрију. Оса симетрије таквог система истодобно је и његова оптичка оса. И заиста, таласна површина снопа свјетлосних зрака који пролази дуж те осе, очевидно има такође и аксијалну симетрију, а ротационе површине, као што је познато, имају у тачкама пресјека са осом симетрије два међусобно једнака полупречника кривине. Према томе, танки сноп, који се креће у том

---

¹) Пресјечна тачка може се налазити или на самим зрацима или на њиховој продужној линији; у зависности од тога ликови се називају респективно реални или имагинарни.

²) Такво пресликавање може се остварити помоћу равних огледала.

правцу остаће хомоцентричан. Исто то се односи и на довољно танке снопове, који се крећу у правцима, који захватају довољно мале углове с оптичком осом[1]).

За налажење општих квантитативних релација, које одређују ликове помоћу танких снопова, који пролазе кроз аксијално-симетричне оптичке системе, користићемо се општим једначинама (55,6), након претходног одређивања облика функције χ у посматраном случају.

Како су снопови зрака танки и пролазе близу оптичке осе биће вектори $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ за сваки сноп оријентисани скоро дуж те осе. Ако се оптичка оса узме као оса X, онда ће компоненте n_y, n_z, n'_y, n'_z бити мале у односу на јединицу. Што се тиче компонената n_x, n'_x, биће $n_x \approx 1$, а n'_x може приближно бити једнак или $+1$ или -1. У првом случају зраци се и даље крећу скоро у истом правцу као и раније, упадајући у простор на другој страни оптичког система, који се у том случају назива сочивом. У другом случају зраци мијењају смјер скоро за π; такав оптички систем се назива огледало.

Користећи чињеницу, да су n_y, n_z, n'_y, n'_z мали, развићемо угловни ајконал $\chi(n_y, n_z, n'_y, n'_z)$ у ред и ограничићемо се на прве чланове. Због аксијалне симетрије читавог система, χ мора бити инваријантно у односу на ротацију координатног система око оптичке осе. Одавде се види, да не може бити чланова првог реда који су пропорционални првим степенима y- и z-компонената вектора $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ у реду за χ. Такви чланови не би били инваријантни. Од чланова другог реда то својство имају квадрати $\mathbf{n}^2$, $\mathbf{n}'^2$ и скаларни производ $\mathbf{n}\mathbf{n}'$. На тај начин, са тачношћу до чланова другог реда, угловни ајконал за аксијално симетрични оптички систем има облик:

$$\chi = \text{const.} + \frac{g}{2}(n_y^2 + n_z^2) + f(n_y n'_y + n_z n'_z) + \frac{h}{2}(n'^2_y + n'^2_z), \tag{56,1}$$

гдје су f, g и h, константе.

Посматраћемо случај сочива, при чему ћемо ставити $n'_x \approx 1$. За огледало ће, као што ће се касније показати, све формуле имати аналоган облик. Стављајући сада израз (56,1) у опште једначине (55,6) налазимо:

$$\begin{aligned} n_y(x-g) - fn'_y &= y, \quad fn_y + n'_y(x'+h) = y', \\ n_z(x-g) - fn'_z &= z, \quad fn_z + n'_z(x'+h) = z'. \end{aligned} \tag{56,2}$$

Посматрајмо хомоцентрични сноп који полази из тачке x, y, z. Нека x', y', z' буде тачка у којој се пресијецају сви зраци снопа послије проласка кроз сочиво. Када би први и други пар једначина (56,2) били независни, онда би те четири једначине, када су задати x, y, z, x', y', z', одређивале један систем вриједности n_y, n_z, n'_y, n'_z, а то значи, да би од зракова који полазе из тачке x, y, z само један прошао кроз тачку x', y', z'. Услов, да би сви зраци који полазе из тачке x, y, z, прошли кроз x', y', z', састоји се, дакле, у томе, да једначине (56,2) не буду међусобно назависне, тј. да један пар тих једначина буде посљедица другог. Неопходан услов за

---

[1]) Може се показати, да се задатак о пресликавању помоћу танких снопова, који пролазе близу оптичке осе у неаксијалном симетричном оптичком систему, може свести на пресликавање аксијално - симетричног система заједно са накнадним обртањем притом добивеног лика као цјелине у односу на предмет који се пресликава.

то је, очигледно, пропорционалност коефицијената једног пара једначина са коефицијентима другог пара (тада се један пар добива из другог просто консекутивним множењем једном константом). На тај начин, мора бити:

$$\frac{x-g}{f} = -\frac{f}{x'+h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \; ; \tag{56,3}$$

специјално:

$$(x-g)\,(x'+h) = -f^2. \tag{56,4}$$

Добивене једначине одређују тражену зависност координата тачке лика од координата предмета при пресликавању помоћу танких снопова.

Тачке $x=g$, $x=-h$ на оптичкој оси називају се главни фокуси оптичког система. Посматрајмо снопове зракова који су паралелни са оптичком осом. Јасно је, да се тачка емитовања таквог зрака налази у бесконачности на оптичкој оси, тј. $x=\infty$. Из (56,3) види се, да је у том случају $x'=-h$. На тај начин, паралелни сноп зрака послије проласка кроз оптички систем, пресијеца се у главном фокусу. И обрнуто, сноп зрака који полази из главног фокуса, постаје, након пролаза кроз систем, паралелан.

У једначини (56,3) координате x и x' рачунају се од једног истог координатног почетка, који се налази на оптичкој оси. Ипак згодније је, да се координате предмета и лика рачунају од разних координатних почетака, који би се узели респективно у главним фокусима. Као позитивни смјер рачунања координата узећемо смјерове од одговарајућег фокуса на ону страну на коју се зрак креће. Ако нове координате предмета и лика обиљежимо великим словима, имамо:

$$X = x-g, \quad X' = x'+h, \quad Y = y, \quad Y' = y', \quad Z = z, \quad Z' = z'.$$

Једначине пресликавања (56,3) и (56,4) добивају са новим ознакама облик

$$X X' = -f^2, \tag{56,5}$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = \frac{f}{X} = -\frac{X'}{f} \; . \tag{56,6}$$

Величина f назива се главна фокусна раздаљина система.

Однос $\frac{Y'}{Y}$ назива се бочно или попречно увеличање. Што се тиче уздужног увеличања, њега треба писати у диференцијалном облику, упоређујући елемент дужине предмета (у правцу осе) са елементом дужине лика, јер координате нису једноставно међусобно пропорционалне. Према (56,5) можемо написати за „уздужно увеличање“

$$\left| \frac{dX'}{dX} \right| = \frac{f^2}{X^2} = \left(\frac{Y'}{Y} \right)^2 \; . \tag{56,7}$$

Одавде се види, да се чак и за бесконачно мале предмете не може добити геометриски сличан лик. Уздужно увеличање није никада једнако попречном увеличању (изузетак чини наравно, идентично пресликавање).

Сноп, који полази из тачке $X=f$ на оптичкој оси, пресијеца се поново у тачки $X'=-f$ на истој оси. Те двије тачке називају се главне тачке. Из једначина (56,2) ($n_y X - f n'_y = Y$, $n_z Y - f n'_z = Z$) види се, да у том случају $(X = f,\ \ Y = Z = 0)$ важе једначине $n_y = n'_y,\ \ n_z = n'_z$. На тај начин, сваки зрак, који полази из главне тачке, поново пресијеца оптичку осу у другој главној тачки, у правцу, који је паралелан првобитном правцу.

Ако се координате предмета и његовог лика рачунају од главних тачака а не од главних фокуса, онда за те координате ξ и ξ' имамо:

$$\xi' = X' + f, \quad \xi = X - f.$$

Уврштавањем овога у (56,5) лако се добива једначина „пресликавања“ у облику:

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}\ . \tag{56,8}$$

Може се показати, да се код оптичких система мале дебљине (напр. код огледала и уског сочива) обије главне тачке скоро поклапају. У том случају, специјално, згодна је једначина (56,8), јер се у њој тада ξ и ξ' практично рачунају од исте тачке.

Ако је фокусна раздаљина позитивна, онда се предмети, који се налазе сприједа (у правцу кретања зрака) од фокуса $(X > 0)$, пресликавају право $\left(\frac{Y'}{Y} > 0\right)$. Такви оптички системи називају се сабирни. Ако је, пак, $f < 0$, онда за $X > 0$ имамо $\frac{Y'}{Y} < 0$, тј. предмет се пресликава обрнуто. Такви системи се називају расипавајући.

Постоји један гранични случај пресликавања, који није садржан у формулама (56,8). То је случај, када сва три коефицијента f, g, h (56,1) постају бескрајно велики (тј. оптички систем има бескрајно велику фокусну раздаљину и његови главни фокуси налазе се у бесконачности). Ослобађањем од заграда у једначини (56,4), дијељењем чланова са g и прелазом ка граници да f, g и h буду бескрајно велики, налазимо:

$$x' = \frac{h}{g}\,x + \frac{f^2 - g\,h}{g}\ .$$

Како нас интересује само случај, када се предмет и његов лик налазе на коначним раздаљинама од оптичког система, то f, g, и h морају тежити бескрајности тако, да односи $\frac{h}{g}$, $\frac{f^2 - g\,h}{g}$, буду коначни. Ако их респективно означимо са α и β, имамо

$$x' = \alpha\,x + \beta.$$

За друге двије координате имамо сада из опште једначине (56,7) $\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \sqrt{\alpha}$. Најзад, рачунајући опет координате x и x' од разних координатних почетака, наиме од произвољне тачке на оси одражавања и од лика те тачке респективно, дефинитивно добивамо једначине пресликавања у простом облику

$$X' = \alpha\,X, \quad Y' = \pm\sqrt{\alpha}\,Y, \quad Z' = \pm\sqrt{\alpha}\,Z. \tag{56,9}$$

На тај начин, уздужна и попречна увеличања су константна (ма да лик није геометриски сличан предмету, јер та два увеличања нису међусобно једнака). Посматрани случај пресликавања назива се телескопски.

Све формуле (56,5) — (56,9), које смо извели за сочиво, могу се у истој мјери примјенити и на огледала, па чак и на оптичке системе без аксијалне симетрије, само ако се пресликавање врши танким сноповима зрака који пролазе близу оптичке осе. Притом се увијек морају x-координате предмета и лика рачунати дуж оптичке осе почев од одговарајућих тачака (главних фокуса или главних тачака) у правцу простирања зрака. Притом треба имати у виду, да се код оптичких система, који немају аксијалну симетрију, правци оптичке осе сприједа и позади система не налазе на једној правој.

Задатак

Одредити фокусну раздаљину за пресликавање помоћу два аксијално-симетрична оптичка система, чије се оптичке осе поклапају.

Рјешење: Нека су f_1 и f_2 фокусне раздаљине оба система. За сваки систем појединачно имамо:

$$X_1 X'_1 = -f_1^2, \quad X_2 X'_2 = -f_2^{'2}.$$

Како ликови, које даје први систем служе као предмети за други систем, то означавајући са l раздаљину међу задњим главним фокусом првог система и предњим фокусом другог система, имамо $X_2 = X'_1 - l$. Изражавајући X'_2 са X_1 налазимо:

$$X'_2 = \frac{X_1 f_2^2}{f_1^2 + l X_1},$$

или

$$\left(X_1 + \frac{f_1^2}{l}\right)\left(X'_2 - \frac{f_2^2}{l}\right) = -\left(\frac{f_1 f_2}{l}\right)^2,$$

одакле се види, да се главни фокуси саставног система налазе у тачкама

$$X_1 = -\frac{f_1^2}{l}, \quad X'_2 = \frac{f_2^2}{l},$$

а фокусно растојање износи

$$f = -\frac{f_1 f_2}{l}$$

(за избор знакова у овом изразу треба написати одговарајућу једначину за попречно увеличање).

У случају да је $l = 0$, биће фокусна раздаљина $f = \infty$, тј. састављени систем даје телескопско пресликавање. У том случају имамо $X'_2 = X_1\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2$, тј. параметар α у општој формули (56,9) износи

$$\alpha = \frac{f_2^2}{f_1^2}.$$

§ 57. Пресликавање широким сноповима зрака

Пресликавање предмета помоћу танких снопова зрака које је третирано у претходном параграфу, само је апроксимативно. Оно је утолико тачније (тј. оштрије) уколико су ужи ти снопови. Пређимо сада на питање, колико је могуће остварити тачно пресликавање предмета сноповима зрака произвољне ширине?

Насупрот пресликавању предмета танким сноповима, што се може остварити ма којим оптичким системом који има аксијалну симетрију, пресликавање широким сноповима могуће је само помоћу оптичких система конструисаних на одређен начин. Као што је показано у § 56, чак и са тим ограничењем није могуће пресликавање ни издалека свих тачака простора.

Даља извођења заснована су на слиједећој битној напомени. Нека се сви зраци, који полазе из неке тачке O и пролазе кроз оптички систем, поново сијеку у некој другој тачки O'. Лако је видјети, да је оптичка дужина пута ψ једнака за све те зраке. И заиста, близу сваке од тачака O, O' таласне површине за зраке, који се у њима сијеку, претстављају сферне површине са центрима у O и O' и у граничном случају, при приближавању ка O и O' дегенеришу се у саме те тачке. Но, таласне површине су површине константне фазе, па су једнаке и промјене фазе дуж разних зрака међу њиховим пресјечним тачкама са двијема одређеним таласним површинама. Из реченог слиједи, да су (за разне зраке) промјене фаза међу тачкама O и O' једнаке и потпуне.

Почећемо са посматрањем услова, које треба испунити за остварење пресликавања широким сноповима малог сегмента праве. Лик претставља притом такође мали сегмент праве. Узмимо правце тих сегмента као правце оса x и x' са координатним почетком O и O' у ма каквим тачкама предмета и лика које једна другој одговарају. Нека је ψ оптичка дужина пута за зраке, који излазе из O и стижу у O'. За зраке, који излазе из тачке, која је бесконачно близу тачки O са координатом dx и којој одговара тачка код лика са координатом dx', оптичка дужина пута је $\psi + d\psi$, гдје је

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial x'} dx'.$$

Уведимо „увеличање“ при пресликавању

$$\alpha = \frac{dx'}{dx}$$

као однос дужине dx' елемента лика и дужине пресликаног елемента dx. Због тога, што је сегмент који се пресликава мали, увеличање α се може сматрати као величина, која је константна дуж тога сегмента. Ако се као обично напише $\frac{\partial\psi}{\partial x} = -n_x$, $\frac{\partial\psi}{\partial x'} = n'_x$ (n_x и n'_x су косинуси углова међу правцима зрака и оса x и x'), добива се

$$d\psi = (\alpha n'_x - n_x)\, dx.$$

Као и за сваки пар тачака предмета и лика које једна другој одговарају, оптичка дужина пута $\psi + d\psi$ мора бити једнака за све зраке, који излазе из тачке dx и стижу у тачку dx'. Одавде добивамо услов:

$$\alpha n'_x - n_x = \text{const.} \tag{57,1}$$

Ово и јесте тражени услов, који морају задовољити зраци у оптичком систему при пресликавању малог сегмента праве широким сноповима. Релација (57,1) мора се испунити за све зраке, који полазе из тачке O.

Примијенимо, напр. услов (57,1) на пресликавање сегмента праве помоћу аксијално-симетричног оптичког система, гдје се та права поклапа са оптичком осом система. Очевидно је, да се лик такође поклапа са осом. Зрак, који пролази дуж оптичке осе ($n_x = 1$) не мијења свој правац при пролазу кроз њу и то због аксијалне симетрије. То значи, да је и $n'_x = 1$. Одавде слиједи, да константа у (57,1) у посматраном случају износи $\alpha - 1$, па (57,1) можемо преписати у облику:

$$\frac{1 - n_x}{1 - n'_x} = \alpha.$$

Означимо ли са θ и θ' углове, које зраци чине са оптичком осом у тачкама предмета и лика, имаћемо:

$$1 - n_x = 1 - \cos\theta = 2 \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad 1 - n'_x = 1 - \cos\theta' = 2\sin^2\frac{\theta'}{2} \cdot$$

На тај начин добивамо услов пресликавања у облику:

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta'}{2}} = \text{const.} = \sqrt{\alpha}. \tag{57,2}$$

Пређимо сада на пресликавање малог дијела равни. Лик ће бити мали дио друге равни. Лако је показати, да, ако су за ма која два сегмента правих, које леже у равни предмета, испуњени услови облика (57,1), ти услови ће се испунити и за сваки други сегмент у тој равни, па ће се зато и остварити пресликавање читавог посматраног дијела равни. Увијек се могу изабрати осе X и Y у равни предмета на тај начин, да пресликане осе X', Y' буду такође међусобно нормалне. Услови, које зраци у оптичком систему треба да испуне при пресликавању малог дијела равни широким сноповима, могу се према томе написати у облику:

$$\alpha n'_x - n_x = \text{const.}, \quad \beta n'_y - n_y = \text{const.}, \tag{57,3}$$

гдје су α и β константе, које одређују увеличање у правцима X и Y.

Као примјер посматрајмо пресликавање дијела равни, која је нормална на оптичкој оси аксијално-симетричног оптичког система. Очевидно је, да ће лик бити такође нормалан на тој оси. Због симетрије је $\alpha = \beta$ и оба услова (57,3) своде се сада на један. Уводећи опет углове θ и θ' међу зраком и оптичком осом у тачкама предмета и лика, добивамо

$$\alpha \sin\theta' - \sin\theta = \text{const.}$$

За зраке, који излазе из пресјечне тачке равни која се пресликава и оптичке осе у правцу те осе ($\theta = 0$), мора због симетрије бити и $\theta' = 0$. Према томе је const. $= 0$, па се услов за пресликавање добива у облику:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \text{const.} \equiv \alpha. \tag{57,4}$$

Што се тиче пресликавања широким сноповима тродимензионалних предмета, лако је видјети, да је оно немогућно чак и код тијела мале запремине. И заиста, услове таквог пресликавања претстављало би задовољавање релација облика (57,1) за ма који од трију сегмента правих, које пролазе кроз дио простора који се пресликава. Те релације морају се испуњавати за све зраке, који излазе из тачке O предмета, тј. при произвољном $\mathbf{n}$. На тај начин, три компоненте n'_x, n'_y, n'_z јединичног вектора $\mathbf{n}'$ морале би задовољавати три једначине облика (57,1) и, осим тога, релацију $n'^2_x + n'^2_y + n'^2_z = 1$, што значи свега четири једначине, а то је уопште узевши немогуће (изузевши тривијални случај идентичног пресликавања).

§ 58. Границе геометриске оптике

Из дефиниције равног монохроматичног таласа види се непосредно, да такав талас има увијек и свуда исту амплитуду. Такав талас је бесконачан у свим правцима у простору и постоји у цјелокупном интервалу времена од $-\infty$ до $+\infty$. Сваки талас, који нема увијек нити свуда константну амплитуду, може само бити више или мање монохроматичан. Позабавићемо се објашњавањем питања „степена монохроматичности" таласа.

Посматрајмо електромагнетни талас са амплитудом, која је функција од времена. Другим ријечима, у свакој тачки простора, кроз који пролази талас, амплитуда се мијења са временом.

Нека је ω_0 нека средња фреквенција таласа. Тада поље таласа, на пр. електрично, у датој тачки има облик $\mathbf{E}(t)\, e^{i\omega_0 t}$. То поље, наравно, није монохроматично, али се ипак може разложити на монохроматичне таласе, тј. у *Fourier*-ов интеграл. Амплитуда компоненте у том реду са фреквенцијом ω пропорционална је интегралу облика

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(t)\, e^{i(\omega - \omega_0)t}\, dt.$$

Фактор $e^{i(\omega - \omega_0)t}$ периодична је функција, чија је средња вриједност једнака нули. Када би $\mathbf{E}_0$ било уопште константно, онда би интеграл био једнак нули за све $\omega \neq \omega_0$. Ако је, пак, $\mathbf{E}_0(t)$ промјенљиво, али се скоро не мијења у временским интервалима реда $\dfrac{1}{\omega - \omega_0}$, онда је интеграл скоро једнак нули и то утолико тачније уколико се лаганије мијења $\mathbf{E}_0$. Да би интеграл био осјетно различит од нуле, потребно је, да се $\mathbf{E}_0(t)$ осјетно мијења у току временског интервала реда периода $\frac{1}{\omega - \omega_0}$.

Означимо са Δt ред величине временског интервала у току којег се амплитуда таласа осјетно мијења у датој тачки простора. Из наведених излагања излази, да се фреквенције које се највише разликују од ω_0, а које улазе у спектрално разлагање тог таласа са осјетним интензитетима, одређује из услова $\frac{1}{\omega - \omega_0} \sim \Delta t$. Ако се са $\Delta\omega$ означи интервал фреквенција (око средње фреквенције ω_0), које улазе у спектрално разлагање таласа, онда, према томе, важи релација

$$\Delta\omega\,\Delta t \sim 1. \tag{58,1}$$

Уколико је мање $\Delta\omega$, утолико мањи интервал фреквенција улази у спектрално разлагање датог таласа, тј. утолико више је монохроматичан тај талас. Према томе видимо, да је талас утолико монохроматичнији, уколико је веће Δt, тј. уколико се лаганије мијења његова амплитуда у свакој тачки простора.

Релације, аналогне са (58,1), лако је извести и за таласни вектор. Нека су Δx, Δy, Δz величине реда растојања дуж оса X, Y, Z, на којима се осјетно мијења амплитуда таласа. У датом моменту времена поље таласа као функција од координата x (када су задати y и z) има облик $\mathbf{E}_0(x)\,e^{ik_{0x}x}$, гдје је k_{0x} нека средња компонента таласног вектора. Сасвим аналогно извођењу (58,1) може се наћи интервал Δk_x вриједности, које се налазе у разлагању посматраног таласа у *Fourier*-ов интеграл (исто то за k_y и k_z). Притом налазимо:

$$\Delta k_x\,\Delta x \sim 1, \qquad \Delta k_y\,\Delta y \sim 1, \qquad \Delta k_z\,\Delta z \sim 1. \tag{58,2}$$

Посматрајмо, специјално, талас, који се емитује у току коначног временског интервала. Означимо са Δt ред величине тог интервала. Амплитуда у датој тачки простора, у сваком случају, примјетно се мијења за вријеме Δt у току кога талас успије да у потпуности прође кроз ту тачку. На основу релације (58,1) сада можемо рећи, да „степен немонохроматичности" таквог таласа $\Delta\omega$, у сваком случају не може бити мањи од $\frac{1}{\Delta t}$ (али, наравно, може бити и већи):

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}\,\cdot \tag{58,3}$$

Аналогно, ако су Δx, Δy, Δz величине реда димензија таласа у простору, онда за интервале вриједности компонената таласног вектора, које улазе у разлагање таласа, налазимо:

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \qquad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \qquad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}\,\cdot \tag{58,4}$$

Из ових формула слиједи, да ако имамо сноп свјетлости са коначном ширином, онда правац простирања свјетлости у таквом снопу не може бити константан. Ако оријентишемо осу X у правцу (средњем) свјетлости, са коначном ширином, онда правац простирања свјетлости у таквом снопу не може бити константан. Ако оријентишемо осу X у правцу (средњем) свјетлости, добивамо:

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \qquad (58,5)$$

гдје је θ_y — величина реда скретања снопа од средњег правца у равни XY (упор. такође § 61).

С друге стране формула (58,5) одговара на питање о граничној оштрини оптичких ликова. Сноп свјетлости, код кога би се сви зраци према геометриској оптици морали сјећи у једној тачки, уствари даје лик у облику неке мрље, а не у облику тачке. За ширину Δ те мрље имамо према (58,5)

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \qquad (58,6)$$

гдје је θ угао отвора зрака. Ова формула се може примијенити не само на лик него и на предмет. Наиме, може се утврдити, да при посматрању свјетлосног снопа, који излази из свјетле тачке, та тачке не може се разликовати од тијела димензије $\frac{\lambda}{\theta}$. Саобразно таквом резултату формула (58,6) одређује граничну видну моћ микроскопа. Минимална вриједност Δ, која се достиже за $\theta \sim 1$ јесте λ, што се потпуно слаже са чињеницом да се границе геометриске оптике одређују таласном дужином свјетлости.

Задатак

Наћи ред величине најмање ширине свјетлосног снопа, који се добива од паралелног снопа на растојању l од диафрагме.

Рјешење: Ако димензије диафрагме означимо са d, онда из (58,5) имамо за угао дифракције λ/d, одакле је ширина снопа реда $d + \frac{\lambda}{d} l$. Најмања вриједност те величине је $\sqrt{\lambda l}$.

§ 59. Дифракција

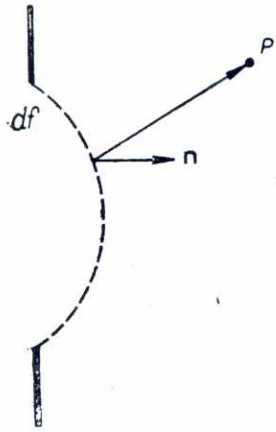
Закони геометриске оптике строго су тачни само у идеалном случају, када се таласна дужина сматра као бесконачно мала. Уколико је слабије испуњен тај услов, утолико се јаче појављују удаљавања од геометриске оптике. Појаве које се посматрају у вези са тим скретањима називају се појаве дифракције.

Појаве дифракције могу се посматрати, напримјер, када се на путу простирања свјетлости¹) налазе препреке — непровидна тијела (називаћемо их екрани или застори) произвољног облика или, пак, када свјетлост

---

¹) Убудуће, када будемо говорили о дифракцији, због одређености говорићемо о свјетлости. Иначе, све што слиједи односи се, наравно, на ма које електромагнетне таласе.

пролази кроз отворе на непровидним екранима. Када би се закони геометриске оптике строго испуњавали, онда би се иза екрана налазила област „сјенке“, која би била оштро раздвојена од области на коју свјетлост пада. Дифракција, пак, доводи до прилично компликоване слике расподјеле интензитета свјетлости умјесто оштре границе између свјетлости и сјенке. Те појаве дифракције утолико су јаче изражене, уколико су мање димензије екрана и отвора у њима или уколико је већа таласна дужина.



Сл. 5

Задатак теорије дифракције састоји се у одређивању распоређивања свјетлости, тј. електромагнетног поља у читавом простору, када су дати распоред и облик тијела (и распоред извора свјетлости). Тачно рјешавање тог задатка могуће је само рјешавањем таласне једначине са одговарајућим граничним условима на површини тијела, који зависе још и од оптичких особина материјала. Такво рјешавање обично претставља велике математичке тешкоће.

Ипак се у већини случајева показује, да је довољан и приближни метод рјешавања задатака о расподјели свјетлости близу границе међу свјетлошћу и сјенком. Тај метод се може примијенити у случајевима знатног скретања од геометриске оптике, тј. тада, када су у првом реду димензије свих тијела сувише велике у односу на таласну дужину и друго, када се посматрају само мала скретања свјетлости од правца зрака, које дефинише геометриска оптика.

Посматријмо ма какав екран са отвором кроз који пролази свјетлост од датих извора. Слика 5 приказује тај екран у пресјеку (дебела линија). Свјетлост се креће с лијева у десно. Ма коју од компонента поља **E** или **H** обиљежићемо са u. Притом ћемо под u подразумијевати поље као функцију само од координата, тј. без фактора $e^{-i\omega t}$, који опредељује зависност од времена. Наш задатак састоји се у одређивању интензитета свјетлости, тј. поља u у ма којој тачки посматрања P иза екрана. У приближним рјешавањима тога задатка у случајевима када су скретања од геометриске оптике мала, може се сматрати, да је у тачкама отвора поље исто онакво, као што би било, када уопште не би било никаквог екрана. Другим ријечима, овдје су вриједности поља онакве, какве непосредно слиједе из геометриске оптике. А за све тачке које се налазе непосредно за екраном, може се ставити, да је поље једнако нули. Очигледно је да притом својства самог екрана (материјала од којег је састављен) уопште не играју улогу. Također је очигледно, да је у посматраним случајевима за дифракцију битан само облик краја отвора, а није битан облик непровидног екрана.

Замислимо неку површину која обухвата отвор на екрану тако да се граничи крајевима отвора (пресјек такве површине на сл. 5 приказан је цртицама). Раздијелимо ту површину на дјелове површина df, чије су димензије још увијек велике у односу на таласну дужину свјетлости. Тада сваки од тих дјелића површине до којих стигне свјетлосни талас можемо посматрати као извор свјетлосног таласа, који се простире на све стране од тог дјелића површине. Поље у тачки P посматраћемо као резултат суперпозиције поља, која потичу од свих површинских дјелића df, који прекривају отвор (такозвани *Huygens*-ов принцип).

Поље, које изазива дјелић df у тачки P очевидно је пропорционално величини u поља у самом дјелићу df (напомињемо, да претпостављамо, да је поље у df онакво какво би било у отсуству екрана). Осим тога, оно је пропорционално пројекцији df_n површине df на површину, која је нормална на правцу n зрака, који стиже у df из свјетлосног извора. То је због тога што кроз елемент df пролазе једнаки зраци, без обзира на облике тог елемента, само ако је његова пројекција df_n константна, па ће зато и његово дејство на поље у тачки P бити исто.

На тај начин биће поље које дјелић df изазива у тачки P, пропорционално величини udf_n. Даље, потребно је још урачунати промјену амплитуде и фазе таласа при простирању од df до тачке P. Закон те промјене приказује се формулом (54,3). Према томе треба udf_n помножити још са $\frac{1}{R}e^{ikR}$ (гдје је R растојање од df до P, а k — апсолутна вриједност таласног вектора свјетлости), па налазимо, да је тражено поље пропорционално величини $udf_n \frac{e^{ikR}}{R}$, тј. износи:

$$a\,u\,\frac{e^{ikR}}{R}\,df_n,$$

гдје је a за сада непозната константа. Поље у тачки P, које је уствари суперпозиција поља изазваних од стране свих df, износи дакле

$$u_P = a\int \frac{u\,e^{ikR}}{R}\,df_n, \tag{59,1}$$

гдје се интеграл простире по површини, која је ограничена крајем отвора. Јасно је да тај интеграл при посматраној апроксимацији не може зависити од облика те површине. Формула (59,1) може се примијенити наравно и на дифракцију не од отвора на екрану, него и од екрана око којег се свјетлост може слободно простирати. У том случају површина интегрирања у (59,1) простире се на све стране од краја екрана.

За одређивање константе a посматрајмо равни талас, који се простире дуж осе X. Таласне површине су паралелне са равни YZ. Нека је u величина поља у равни YZ. Тада у тачки P, коју узимамо на оси X, поље износи $u_P = ue^{ikx}$. С друге стране, поље у тачки P може се одредити полазећи од формуле (59,1) узевши као површину интегрирања, напр. раван YZ. Због тога што је притом угао дифракције мали, тј. мало је скретање од геометриске оптике, у интегралу су битне само оне тачке равни YZ, које су близу координатног почетка, тј. тачке за које је $y, z \ll x$ (x је координата тачке P). Тада је

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

и (59,1) даје

$$u_P = \frac{a}{x}\int\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{ik\left(x + \frac{y^2}{2x} + \frac{z^2}{2x}\right)}\,dy\,dz.$$

Овдје је u константа (поље у равни YZ), а у фактору $\frac{1}{R}$ може се узети $R \cong x = \text{const}$. Онда је

$$u_P = au \frac{e^{ikx}}{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2x}}\, dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2x}}\, dz.$$

Оба ова интеграла су наравно једнаки. Замјеном $y = \xi \sqrt{\frac{2x}{k}}$ своде се појединачно на интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2}\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos \xi^2\, d\xi + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin \xi^2\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+i)\ ,$$

па се добива

$$u_P = a\,u\,e^{ikx}\,\frac{2\,i\pi}{k}\ .$$

С друге стране је $u_P = ue^{ikx}$, па је

$$a = \frac{k}{2\pi i}\ .$$

Увршташањем ове вриједности у (59,1) налазимо дефинитивно рјешење постављеног задатка у сблику

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i\, R} e^{ikR}\, df_n . \tag{59,2}$$

Примијенимо формулу (59,2) на рјешење питања о промјени фазе при пролазу зрака кроз његову додирну тачку с каустиком (в. крај § 54). Узмимо као површину интегрирања у (59,2) ма коју таласну површину. Треба да одредимо поље u_P у тачки P, која се налази на неком датом зраку на растојању x од његове пресјечне тачке са изабраном таласном површином (ту тачку узмимо као координатни почетак O; као раван YZ узећемо раван која таласну површину тангира у тачки O). При интегрирању у (59,2) битан је само мали дио таласне површине у близини тачке O. Ако су равни XY и XZ изабране тако, да се поклапају са главним равнима кривине таласне површине у тачки O, онда је близу те тачке једначина површине

$$X = \frac{y^2}{2\,R_1} + \frac{z^2}{2\,R_2}\ ,$$

гдје су R_1 и R_2 полупречници кривине. Растојање R од тачке таласне површине са координатама X, y, z до тачке P са координатама x, 0, 0, износи

$$R = \sqrt{(x-X)^2 + y^2 + z^2} \cong x + \frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}\right)\cdot$$

На таласној површини поље се може сматрати константно. Исто то важи и за фактор $\frac{1}{R}$. Будући да се интересујемо само промјеном фазе таласа, можемо изоставити коефицијент и једноставно писати:

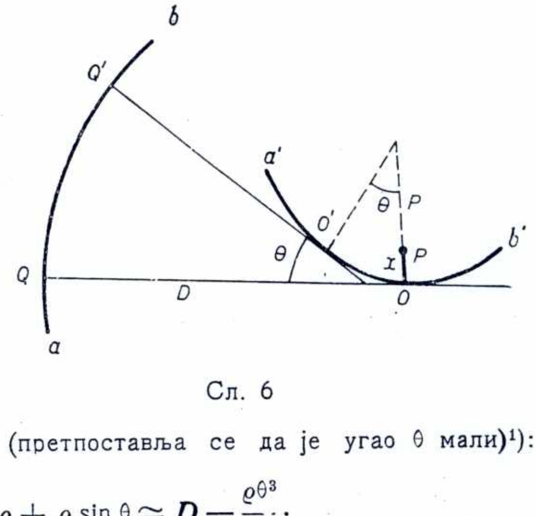
$$u_P \sim \frac{1}{i} \int e^{ikR}\, df_n \cong \frac{e^{ikx}}{i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right)}\, dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right)}\, dz. \qquad (59,3)$$

Центри кривине таласне површине налазе се на посматраном зраку у тачкама $x = R_1$ и $x = R_2$, а то су додирне тачке зрака и обије каустике. Нека је $R_2 < R_1$. За $x < R_2 < R_1$ коефицијенти уз i у експонентима подинтегралних израза оба интеграла (по dy и dz) позитивни су, а сваки од тих интеграла пропорционалан је $(1 + i)$. Према томе биће на дијелу зрака до додира прве каустике $u_P \sim e^{ikx}$. За $R_2 < x < R_1$ тј. на дијелу зрака међу двијема додирним тачкама, и интеграл по dy биће пропорционалан са $1 + i$, а интеграл по dz пропорционалан са $1 - i$, тако да њихов производ уопште не садржи i. На тај начин овдје имамо $u_P \sim -ie^{ikx} = e^{i(kx - \pi/2)}$, тј. при пролазу зрака близу прве каустике фаза се мијења за $-\pi/2$. Најзад, за $x > R_1 > R_2$ имамо $u_P \sim -e^{ikx} = e^{i(kx-\pi)}$, тј. при пролазу близу друге каустике фаза се још једанпут промијени за $-\pi/2$.

Задатак

Одредити расподјелу интензитета свјетлости близу додирне тачке зрака са каустиком.

Рјешење: Да бисмо ријешили овај задатак употребићемо формулу (59,2) вршећи у њој интегрирање по ма којој таласној површини, која је довољно удаљена од посматране тачке додира зрака са каустиком. На сл. 6 $a\,b$ је пресјек те таласне површине, а $a'\,b'$ пресјек каустике; $a'\,b'$ је еволута криве $a\,b$. Нас интересује расподјела интензитета близу тачке O додира зрака $Q\,O$ са каустиком. Претпоставља се, да је дужина D сегмента $Q\,O$ довољно велика. Са x обиљежићемо растојање од тачке O дуж нормале на каустику, при чему ћемо сматрати као позитивне вриједности x за тачке, које се налазе на нормали у правцу ка центру кривине.



Сл. 6

Подинтегрални израз у (59,2) је функција од растојања R од произвољне тачке Q' на таласној површини до тачке P. Према познатом својству еволуте биће збир дужине сегмента $Q'O'$ тангенте у тачки O' и дужине лука OO' једнак дужини QO тангенте у тачки O. Када су тачке O и O' врло близу, биће $OO' = \theta\varrho$ (ϱ је полупречник кривине каустике у тачки O). Према томе биће $Q'O' = D - \theta\varrho$. Растојање $Q'O$ (по правој) приближно износи (претпоставља се да је угао θ мали)[1]:

$$Q'O \cong Q'O' + \varrho \sin\theta = D - \theta\varrho + \varrho \sin\theta \cong D - \frac{\varrho\theta^3}{6}\cdot$$

---

[1] Ми овдје примјењујемо приближу формулу за алсопутну величину збира двају вектора, од којих је један по апсолутној величини велик у односу на други:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{a}| \cong A + a_A$$

($A \gg a$; a_A је пројекција вектора $\mathbf{a}$ на правцу вектора $\mathbf{A}$).

Дефинитивно, растојање $R = Q'P$ износи $R = Q'O - x\sin\theta \cong Q'O - x\theta$, тј.

$$R \cong D - x\theta - \frac{1}{6}\varrho\theta^3 .$$

Уврштавањем овог израза у (59,2) налазимо

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx\theta - \frac{ik\varrho\theta^3}{6}} d\theta = 2\int_0^{\infty} \cos\left(kx\theta + \frac{k\varrho}{6}\theta^3\right) d\theta$$

(фактор $1/R$ под интегралом мијења се лагано и није битан у односу на експоненцијални фактор, па сматрамо да је константан). Увођењем нове промјенљиве интегрирања $\xi = \left(\frac{k\varrho}{2}\right)^{1/3}\theta$, добивамо:

$$u_P \sim \Phi\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\varrho}}\right),$$

гдје је $\Phi(t)$ такозвана *Airy*-ева функција[1]). За интензивност $I \sim |u_P|^2$ пишемо

$$I = 2A\left(\frac{2k^2}{\varrho}\right)^{1/6}\Phi^2\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\varrho}}\right)$$

(у вези са избором константног фактора види ниже).

За велике позитивне вриједности x добивамо одавде асимптотичку формулу:

$$I \approx \frac{A}{2\sqrt{x}}\exp\left\{-\frac{4x^{3/2}}{3}\sqrt{\frac{2k^2}{\varrho}}\right\},$$

тј. интензитет опада експоненцијално (област „сјенке"). За велике по апсолутној вриједности негативне вриједности x имамо:

$$I \approx \frac{2A}{\sqrt{-x}}\sin^2\left\{\frac{2(-x)^{3/2}}{3}\sqrt{\frac{2k^2}{\varrho}} + \frac{\pi}{4}\right\},$$

---

[1]) Према *V. A. Foku* („Таблице *Airy*-евих функција", Москва 1946), *Airy*-ева функција $\Phi(t)$ дефинише се релацијом:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi t\right) d\xi$$

Када су позитивне вриједности аргумента велике, онда за функцију $\Phi(t)$ важи асимптотички израз:

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{2t^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}},$$

тј. $\Phi(t)$ експоненцијално тежи нули. За велике негативне вриједнсости t (по апсолутној величини) важи формула:

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(-t)^{1/4}}\sin\left[\frac{2}{3}\left(-t\right)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right],$$

тј. $\Phi(t)$ осцилира са амплитудом, која опада обрнуто пропорционално са $(-t)^{1/4}$.

Преглед формула, које описују *Airy*-еве функције и таблице бројних вриједности могу се наћи у наведеној књижици *V. A. Foka* [функција $\Phi(t)$ означена је тамо са $v(t)$].

тј. интензитет брзо осцилује. Средња вриједност интензитета, узета по тим осцилацијама, износи:

$$\overline{I} = \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

Одавде се објашњава смисао константе A; она одређује интензитет далеко од каустике, који би се добио из геометриске оптике не узимајући у обзир појаву дифракције.

У самој додирној тачки зрака са каустиком ($x = 0$) имамо:

$$I = 0{,}89\, A k^{-\,^1/_3}\, \varrho^{-\,^1/_6}$$

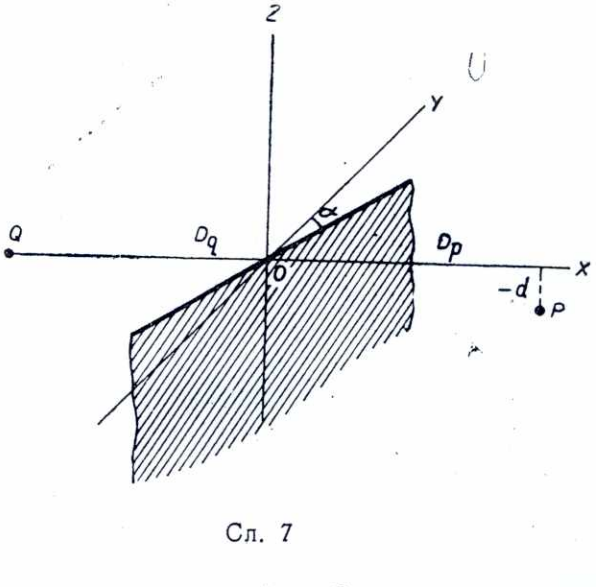
(јер је $\Phi(0) = 0{,}629\ldots$). Према томе, у тачкама каустике интензитет је пропорционалан са $k^{1/3}$, тј. са $\lambda^{-\,1/3}$ (гдје је λ таласна дужина). За $\lambda \longrightarrow 0$ интензитет тежи ка бесконачности, као и што би морало бити (упор. § 54).

§ 60. Fresnel-ова дифракција

Ако се извор свјетлости и тачка P у којој се тражи интензитет свјетлости налази на коначном растојању од екрана, онда за одређивање интензитета у тачки P игра улогу само мали дио таласне површине, по којој се врши интегрирање у (59,2) . Тај дио се налази близу дужи, која спаја извор са тачком P. И заиста, како су скретања од геометриске оптике незнатна, то ће интензитет свјетлости, која у P стиже са разних тачака таласне површине, врло брзо опадати у зависности од удаљености од те дужи. Дифракционе појаве, код којих играју улогу само мали дјелови таласне површине, називају се дифракционе *Fresnel*-ове појаве.

Посматрајмо *Fresnel*-ову дифракцију од ма каквог екрана. Према наведеном својству такве дифракције, ту игра улогу само мали дио краја екрана. С друге стране за довољно мале дјелове краја екрана увијек се може сматрати да су праволиниски. Према томе, под крајем екрана подразумијеваћемо баш такав мали праволиниски сегмент.

Узмимо као XY ону раван, која пролази кроз извор свјетлости Q (сл. 7) и кроз линију краја екрана. Нормално на њој узмимо раван XZ, тако да ова посљедња пролази кроз тачку Q и тачку посматрања P у којој тражимо вриједност јачине свјетлости. Најзад, координатни почетак O узмимо на линији краја екрана, послије чега је положај свих трију оса потпуно одређен.



Сл. 7

Нека D_q буде нека раздаљина од извора свјетлости Q до координатног почетка. Са D_p обиљежићемо x-координату тачке посматрања P, а са d њену z-координату, тј. раздаљину до равни XY. Према геометриској оптици свјетлост би могла пасти само у тачке, које се налазе изнад равни XZ. Област под равни XZ је област гдје би према геометриској оптици била сјенка (област геометриске сјенке).

Овом приликом одредићемо расподјелу интензитета свјетлости за екраном близу границе геометриске сјенке, тј. за мале вриједности d (у односу на D_p и D_q). Негативно d показује, да се тачка P налази у области геометриске сјенке.

Као површину интегрирања у (59,2) узећемо полураван која пролази кроз линију краја екрана нормално на равни XY. Координате x и y тачака те површине повезане су међусобно релацијом $x = y \operatorname{tg} \alpha$ (α је угао између линије краја екрана и осе Y), а координата z је позитивна. Поље таласа, који полазе из извора Q, биће на растојању R_q од тог извора пропорционално фактору e^{ikR_q}. Према томе поље u на површини интегрирања биће пропорционално

$$u \sim \exp\left[ik\sqrt{y^2 + z^2 + (D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2}\right].$$

У интегралу (59,2) треба сада за R ставити

$$R = \sqrt{y^2 + (z-d)^2 + (D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2}.$$

У подинтегралном изразу нису битни фактори који се лагано мијењају, ако се узму у односу на експоненцијалне. Према томе можемо $\frac{1}{R}$ сматрати константно, а исто тако можемо умјесто df_n писати $dy\,dz$. Тада налазимо да је поље у тачки P:

$$u_P \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left\{ik\left[\sqrt{(D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + z^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{(D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2 + (y-d)^2 + z^2}\right]\right\} dy\,dz. \qquad (60{,}1)$$

Као што смо већ раније навели, у тачку P пада свјетлост углавном из оних тачака равни интегрирања, које су близу тачке O. Отуда у интегралу (60,1) играју улогу мали y и z (у односу на D_q и D_p). Из тога разлога можемо писати

$$\sqrt{(D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + z^2} \cong D_q + \frac{y^2 + z^2}{2\,D_q} + y \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sqrt{(D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2 + (y-d)^2 + z^2} \cong D_p + \frac{(y-d)^2 + z^2}{2\,D_p} - y \operatorname{tg} \alpha$$

Уврстимо то у (60,1). Како нас поље интересује само као функција од растојања d, можемо изоставити константни фактор $\exp\{ik(D_p + D_q)\}$. Интеграл по dz даје израз у коме нема d, па ћемо и њега изоставити. Тада налазимо:

$$u_P \sim \int\limits_0^{\infty} \exp\left\{ik\left[\frac{1}{2\,D_q}y^2 + \frac{1}{2\,D_p}(y-d)^2\right]\right\} dy\,.$$

Овај израз се може написати и у слиједећем облику:

$$u_P \sim \exp\left\{-ik\frac{d^2}{2(D_p + D_q)}\right\}\int\limits_0^{\infty} \exp\left\{ik\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}\right)y - \frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}}\right\} dy\,.$$

Интензитет свјетлости одређује се квадратом поља, тј. квадратом модула $|u_P|^2$. Према томе за налажење интензитета није битан фактор који се налази под интегралом, јер множењем са коњугованим изразом он даје у резултату јединицу. Извршимо у интегралу слиједећу замјену:

$$\frac{k}{2}\,\frac{\left[\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right)y-\frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}}=\eta^2.$$

Тада добивамо:

$$u_P\sim\int_{-w}^{\infty}e^{i\eta^2}d\eta, \tag{60,2}$$

гдје је

$$w=d\sqrt{\frac{kD_q}{2D_p\,(D_q+D_p)}}\,. \tag{60,3}$$

На тај начин интензитет I у тачки P износи:

$$I=\frac{I_0}{2}\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-w}^{\infty}e^{i\eta^2}d\eta\right|^2=\frac{I_0}{2}\left\{\left[C\,(w)+\frac{1}{2}\right]^2+\left[S\,(w)+\frac{1}{2}\right]^2\right\}, \tag{60,4}$$

гдје су

$$C\,(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{w}\cos\eta^2\,d\eta,\qquad S\,(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{w}\sin\eta^2\,d\eta$$

такозвани *Fresnel*-ови интеграли. Формула (60,4) ријешава постављени задатак, одређујући интензитет свјетлости као функцију од d. Даље је I_0, као што је лако видјети, интензитет у освијетљеној области и то у оним тачкама, које нису сувише близу краја сјенке, или тачније за $w\gg 1$ $\left[C(\infty)=S\,(\infty)=\frac{1}{2}\right]$.

За област геометриске сјенке важе негативни w. Лако је објаснити асимптотички облик функције $I(w)$ за велике негативне вриједности w по апсолутној величини. Због тога ћемо поступити на слиједећи начин. Парцијалним интегрирањем имамо:

$$\int_{|w|}^{\infty}e^{i\eta^2}d\eta=-\frac{1}{2\,i\,|\,w\,|}\,e^{iw^2}+\frac{1}{2\,i}\int_{|w|}^{\infty}e^{i\eta^2}\frac{d\eta}{\eta^2}\,.$$

Даљим парцијалним интегрирањима десне стране добива се ред по степенима $\frac{1}{|\,w\,|}$:

$$\int_{|w|}^{\infty}e^{i\eta^2}\,d\eta=e^{iw^2}\left[-\frac{1}{2\,i\,|w|}+\frac{1}{4\,|w|^3}-\cdots\right].$$

Иако бесконачни ред оваквог облика није конвергентан, ипак, због тога што за велика $|w|$ величина његових узастопних чланова брзо опада, већ сам први члан тога реда даје добру претставу функције која се налази на лијевој страни, рачунајући да $|w|$ имају велике вриједности (редови такве врсте називају се асимптотички). На тај начин добивамо за интензитет $I(w)$ (60,4) слиједећу асимптотичку формулу, која је подесна за велике негативне вриједности w:

$$I = \frac{I_0}{4\,\pi w^2}\,. \tag{60,5}$$

Видимо, да у области геометриске сјенке, далеко од њеног краја, интензитет тежи ка нули и то обрнуто пропорционално квадрату растојања од краја сјенке.

Посматрајмо сада позитивне вриједности w, тј. област изнад равни XY. Можемо написати

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta - \int_{-\infty}^{-w} e^{i\eta^2}\,d\eta = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_{w}^{\infty} e^{-i\eta^2}\,d\eta\,.$$

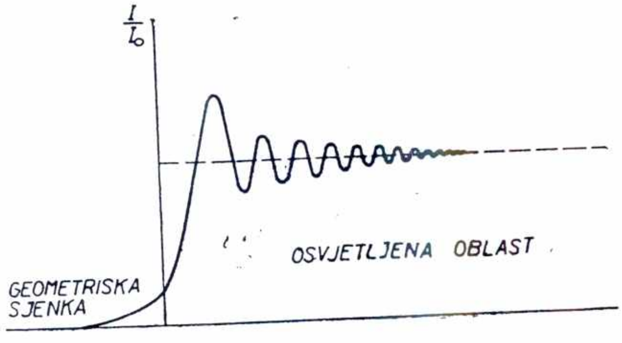
За довољно велике w може се користити асимптотички израз у интегралу на десној страни једначине, па ћемо имати:

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta \cong (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2\,iw}\,e^{iw^2}\,.$$

Уврштавањем овог израза у (60,4) добивамо:

$$I = I_0\left[1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\left(w^2 - \frac{\pi}{4}\right)}{w}\right]. \tag{60,6}$$

Према томе, у освијетљеној области, далеко од краја сјенке, има неограничен број максимума и минимума, јер однос $\frac{I}{I_0}$ осцилира на обије стране од јединице. Величина тих осцилација смањује се, када се w повећава, обрнуто пропорционално растојању од краја геометриске сјенке, а тачке максимума и минимума постепено су међусобно све ближе и ближе.



Сл. 8

За мале вриједности w функција $I(w)$ има квалитативно исти карактер. На сл. 8 та је функција приказана графички. У области геометриске сјенке интензитет опада монотоно при удаљавању од границе сјенке. На самој тој граници је $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{4}$. За позитивна w интензитет има наизмјеничне максимуме и минимуме.

§ 61. Fraunhofer-ова дифракција

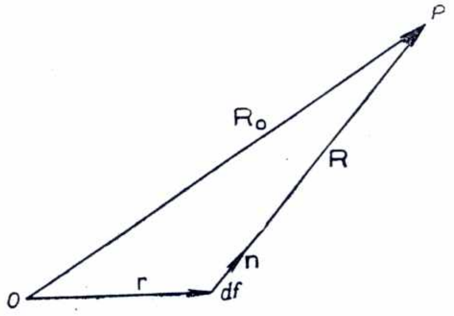
Постоји читав низ случајева дифракције, код којих се интензитет у тачци посматрања одређује цјелокупном таласном површином. Другим ријечима, у интегралу (59,2), који одређује u_P, битна је укупна таласна површина по којој се врши интегрирање. С друге стране, сматраћемо на основу изложеног, да је скретање од геометриске оптике мало, тј. у тачку посматрања P стижу само они зраци, који треба да мало скрећу са пута по којем би се кретали према геометриској оптици. Према томе је цјелокупна таласна површина значајна само у слиједећа два случаја.

Први случај је, када се тачка посматрања налази близу фокуса, тј. близу тачке у којој конвергирају геометриски путеви свих свјетлосних зрака.

Други, најважнији случај претставља такозвана *Fraunhofer*-ова дифракција. Код *Fraunhofer*-ове дифракције налазе се и извор свјетлости и тачка посматрања P на врло великим растојањима (бесконачно великим) од екрана¹). При томе се зраци из извора свјетлости крећу ка екранима у облику паралелног снопа. Исто то важи и за зраке, који полазе од екрана према тачци посматрања. Због тога нас код *Fraunhofer*-ове дифракције интересује само промјена правца снопа свјетлости, тј. тражимо интензитет као функцију од угла скретања свјетлости од првобитног правца (угла дифракције). Како посматрамо мала скретања од геометриске оптике, тај угао мора бити мали.

Извешћемо општу формулу, која приказује *Fraunhofer*-ову дифракцију од екрана и отвора произвољног облика. Нека се свјетлост креће с лијева на десно. Узмимо координатни почетак негдје лијево од екрана. На сл. 9 је O координатни почетак, P тачка посматрања и df неки елемент таласне површине по којој се врши интегрирање у формули (59,2):

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} \, df_n .$$



Сл. 9

У посматраном случају *Fraunhofer*-ове дифракције у свјетлости која пада имаће сви зраци исти правац, тј. исти таласни вектор $\mathbf{k}$ (јединични вектор у том правцу је $\mathbf{n}$). Тачку P треба замислити на бесконачном растојању од екрана. Због тога су сви зраци, који полазе од екрана у P, такође међусобно паралелни, тј. имају једнаке таласне векторе $\mathbf{k}'$ (јединични вектор у том правцу означимо са $\mathbf{n}'$). Угао међу $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ јесте угао дифракције, ($\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ се наравно разликују само по правцу, а величине су им исте).

---

¹) Наравно, *Fraunhofer*-ова дифракција експериментално се не посматра на бесконачном растојању, него помоћу сочива које се налази иза екрана. Онда се у фокусној равни добива дифракциона слика. Ипак се може доказати, да та околност ништа ни мијења у каснијим формулама, само ако сочиво није сувише мало, тако да у њему не настају дифракционе појаве, које условљава само сочиво.

Поље на површини интегрирања у изразу за u_P износи $u = u_0 e^{i\mathbf{kr}}$ ($\mathbf{r}$ је радиус-вектор од O према df). Величина $\frac{1}{R}$ у подинтегралном изразу може се сматрати као константа, која износи $\frac{1}{R_0}$. Према томе налазимо:

$$u_P = \frac{u_0}{2\pi i R_0} \int e^{i\mathbf{kr}} e^{ikR}\, df_n.$$

Из слике 9 види се, да је $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$. Помножимо ову једначину с обе стране са $\mathbf{n}'$. Када је тачка P бесконачно далека, вектори $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_0$ су паралелни, па је зато $\mathbf{R}_0 \mathbf{n}' = R_0$. На тај начин је

$$R = R_0 - \mathbf{rn}',$$

па је

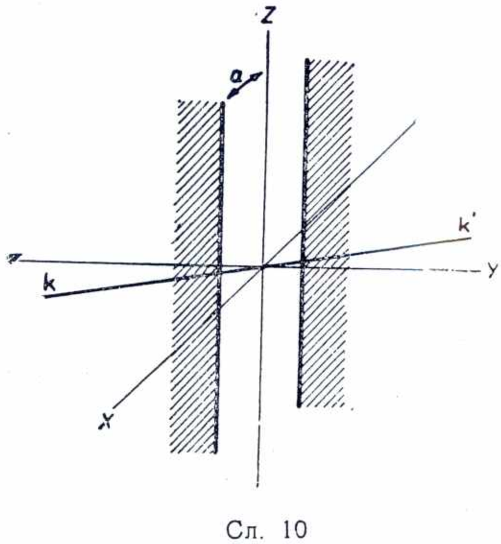
$$e^{ikr} = e^{ikR_0}\, e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}$$

(овдје је $k\mathbf{n}' = \mathbf{k}'$). Фактор e^{ikR_0} је константан. Према томе дефинитивно добивамо:

$$u_P = \frac{u_0 e^{ikR_0}}{2\pi\, i\, R_0} \int e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\,\mathbf{r}} df_n. \qquad (61,1)$$

Ова формула приказује интензитет $|u_P|^2$ као функцију од угла дифракције.

Посматрајмо *Fraunhofer*-ову дифракцију код бесконачног прореза са паралелним крајевима, који се налази у непровидном екрану (сл. 10). Узмимо осу Z паралелно са рубом прореза, а осу Y нормално на равни прореза (раван XZ).



Сл. 10

Узмимо у (61,1) као површину интегрирања раван прореза међу оба његова краја. Елемент интегрирања df_n једнак је тада пројекцији елемента $dx\,dz$ те равни на правац $\mathbf{k}$. Али како су сви зраци који падају међусобно паралелни, биће угао међу $\mathbf{k}$ и елементом $dx\,dz$ константан дуж читаве равни прореза. Због тога можемо у (61,1) са тачношћу до константног фактора, умјесто df_n написати једноставно $dx\,dz$, тако да је:

$$u_P \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-a}^{+a} e^{i(k_x - k'_x)\,x}\, e^{i(k_z - k'_z)\,z}\, dx\, dz$$

($2\,a$ је ширина прореза). Интеграл по dz од периодичне функције $e^{i(k_z - k'_z)}$ једнак је нули увијек када је $k_z \neq k_z'$. Према томе мора бити $k_z = k_z'$, тј.

свјетлост скреће само у равни XY, што се, уосталом, могло и очекивати због симетрије. Израз за u_P своди се на тај начин на

$$u_P \sim \int_{-a}^{+a} e^{i\varkappa x} dx$$

гдје је $\varkappa = k_x - k_x'$[1]. Интегрирањем налазимо

$$u_P \sim \frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a}.$$

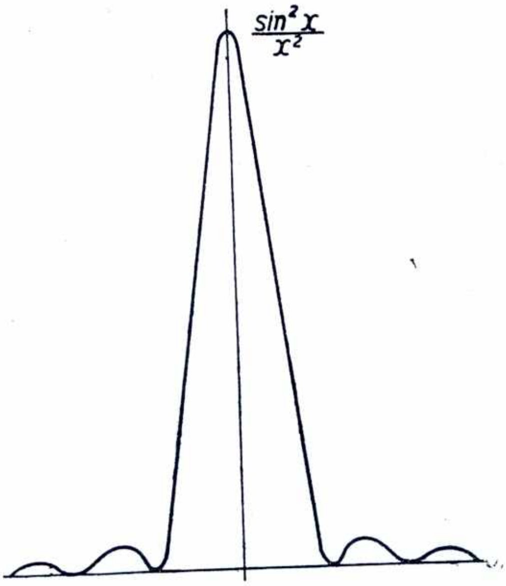
Одавде се за интензитет dI свјетлости, који је подвргнут дифракцији у интервалу $d\varkappa$ вриједности $\varkappa$, налази:

$$dI = I_0 \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a} \right)^2 d\varkappa, \qquad (61,2)$$

гдје смо константни фактор изабрали тако да је I_0 тотални интензитет свјетлости, која пролази кроз прорез (тј. интеграл од dI за све вриједности $\varkappa$).

$\frac{dI}{d\varkappa}$ као функција од угла дифракције има облик приказан на слици 11. Ако се $\varkappa$ повећава са једне и друге стране од $\varkappa = 0$ интензитет добива низ наизмјеничних максимума и минимума. Висина максимума брзо опада када се $\varkappa$ повећава. Највећи максимум I има за $\varkappa = 0$. Код минимума је $I = 0$. Ти минимуми настају када је;

$$\varkappa a = n\pi$$
$$(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots) \qquad (61,3)$$



Сл. 11

Као што је наведено у напомени на стр. 155, *Fraunhofer*-ова дифракција се обично посматра помоћу система сочива. Паралелни сноп зрака, послије пролаза кроз сочиво, скупља се у његовом главном фокусу. У равни која пролази кроз тај фокус нормално на оптичку осу сочива, поље u_P биће увијек једнако нули, изузев сами фокус. Ако се пак пред сочивом налази ма какав екран, онда сноп зрака подлијеже дифракцији. Саобразно томе добива се тада у фокалној равни сочива нека издужена дифракциона слика, а не тачкасти лик извора свјетлости.

---

[1] $\varkappa$ се може изразити помоћу угла дифракције α, тј. помоћу угла међу $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$. Наиме, лако се добива формула (за мале $\varkappa$ и α)

$$\alpha = \frac{\varkappa \sin(\mathbf{k}, Z)}{k \cos(\mathbf{k}, Y)},$$

гдје су $(\mathbf{k}, Y)$ и $(\mathbf{k}, Z)$ углови међу $\mathbf{k}$ и осама Y и Z.

Замијенимо сада екран „допунским", тј. таквим, који има прорезе на оним мјестима гдје је први екран непровидан и обрнуто. Обиљежимо поље у фокалној равни сочива у оба случаја, респективно са $u_P^{(1)}$ и $u_P^{(2)}$. Како се $u_P^{(1)}$ и $u_P^{(2)}$ изражавају интегралима, узетим по разрезима екрана, а разрези оба екрана допуњавају се до цијеле равни, то ће бити $u_P^{(1)}+u_P^{(2)}=u_P$, гдје је u_P поље, које се добива када екрана не би било. Већ је показано, да је $u_P=0$ свуда осим у фокусу, одакле се добива $u_P^{(1)}+u_P^{(2)}=0$, или за одговарајуће интензитете:

$$|u_P^{(1)}|^2=|u_P^{(2)}|^2 . \tag{61,4}$$

На тај начин допунски екрани дају једнаку дифракциону слику у читавој фокалној равни сочива, изузев сами фокус (такозвани *Babinet*-ов принцип).

Рећићемо нешто о једној интересантној посљедици *Babinet*-ова принципа. Посматрајмо ма које црно тијело, тј. тијело, које у потпуности апсорбује цјелокупну свјетлост, која на њега пада. Према ставу геометриске оптике при освјетљавању таквог тијела образовала би се изнад њега област геометриске сјенке, чија би површина пресјека била једнака површини пресјека тијела у правцу, који је нормалан на правац у коме свјетлост пада. Међутим, постојање дифракције доводи до тога, да свјетлост при пролазу поред тијела дјелимично скреће са свог првобитног правца. Због тога на великом растојању позади тијела сјенке неће бити, а осим свјетлости која се простире у првобитном правцу, постојаће и нека количина свјетлости, која ће се простирати под малим угловима према својем првобитном правцу. Та свјетлост је расута свјетлост и њен интензитет није тешко одредити. У ту сврху напомињемо, да према *Babinet*-овом принципу количина свјетлости, која скреће због дифракције на посматраном тијелу, износи исто колико и свјетлост, која скреће при дифракцији од прореза у непровидном екрану при чему се облик и површина тога прореза поклапају са обликом и површином попречног пресјека тијела. Али код *Fraunhofer*-ове дифракције од прореза наступа скретање цјелокупне свјетлости, која пролази кроз прорез. Одавде слиједи, да је укупна количина свјетлости, која је расута на црном тијелу, једнака количини свјетлости, која пада на површину тог тијела и коју то тијело апсорбује.

Задаци

1. Одредити *Fraunhofer*-ову дифракцију код правоугаоног разреза (са странама $2a$ и $2b$).

Рјешење. Рјешење је аналогно одређивању дифракције од прореза. Увођењем ознака

$$k_x-k'_x=\varkappa_x, \qquad k_z-k'_z=\varkappa_z$$

(осе X и Z паралелне су странама правоугаоног прореза) налазимо за интензитет

$$dI=I_0\frac{ab}{\pi^2}\left(\frac{\sin\varkappa_x a}{\varkappa_x a}\right)^2\left(\frac{\sin\varkappa_z b}{\varkappa_z b}\right)^2 d\varkappa_x d\varkappa_z .$$

2. Одредити *Fraunhofer*-ову дифракцију код дифракционе решетке — равног екрана са једнаким паралелним прорезима (ширина прореза је $2a$, ширина непровидног екрана међу узастопним прорезима износи $2b$, број прореза је N).

Рјешење: Узмимо раван решетке као раван XZ, гдје је Z оса паралелна прорезима. Интегрирање у (61,1) даје

$$u_P = u'_P \sum_{n=0}^{N-1} e^{2in\varkappa d} = u'_P \frac{1 - e^{2iN\varkappa d}}{1 - e^{2i\varkappa d}},$$

гдје је $\varkappa = k_x - k'_x$, $d = a + b$, а u'_P је резултат интегрирања по једном прорезу. Користећи се са (61,2) имамо за интензитет $|u_P|^2$:

$$dI = \frac{I_0}{N} \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin N\varkappa d}{\sin \varkappa d} \right)^2 \left(\frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a} \right)^2 d\varkappa$$

(I_0 је тотални интензитет свјетлости, која пролази кроз прорезе).

У случају великог броја прореза, тј. за $N \to \infty$, ова формула може се написати у другом облику. За вриједности $\varkappa = \frac{\pi n}{d}$ (n цио број) $\frac{dI}{d\varkappa}$ има максимуме. Близу таквог максимума тј. када је $\varkappa d = n\pi + \varepsilon$, а ε мало), биће

$$dI = \frac{I_0}{N} \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a} \right)^2 \frac{\sin^2 N\varepsilon}{\varepsilon^2} d\varkappa.$$

Но када $N \to \infty$ важи формула[1])

$$\lim_{N \to \infty} \left(\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} \right) = \pi \delta(x),$$

тј. близу сваког максимума тотални интензитет износи

$$I = I_0 \frac{d}{\pi a} \frac{\sin^2\left(n\pi \frac{a}{d}\right)}{n^2}.$$

3. Одредити *Fraunhofer*-ову дифракцију код кружног отвора (полупречника a) када свјетлост пада нормално на раван отвора.

Рјешење: Уведимо цилиндричне координате z, r, φ са осом Z која пролази кроз центар отвора нормално на његову раван. Означимо са $\varkappa$ пројекцију вектора $\mathbf{k}$ на ту раван ($\varkappa = k\alpha$, гдје је α угао дифракције). Због симетрије излази, да ће дифракција зависити само од $\varkappa$, па се због тога можемо ограничити на посматрање зрака, који се креће у равни $\varphi = 0$. Тада формула (61,1) даје

$$u_P = \frac{ku_0 e^{ikR_0}}{2\pi i K_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i\varkappa r \cos\varphi} r \, d\varphi \, dr = \frac{e^{ikR_0} ku_0}{iR_0} \int_0^a J_0(\varkappa r) \, r \, dr,$$

---

[1]) Према формулама, које су познате из теорије *Fourier*-ових редова. биће

$$\lim_{N \to \infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} f(x) \frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} dx \right\} = f(0).$$

Одавде се види, да су својства функције $\lim\limits_{N \to \infty} \left(\frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} \right)$ уствари својства δ — функције (в. пр. на стр. 66).

гдје је $J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ix\cos\varphi}\, d\varphi$ *Bessel*-ова функција нултог реда, а u_0 је поље у самом отвору. Из теорије *Bessel*-ових функција познато је, да је:

$$\int\limits_0^a J_0(\varkappa r)\, r dr = \frac{a\, J_1(a\varkappa)}{\varkappa}\,.$$

Интензитет дифракције у просторни угао do добива се множењем $|u_P|^2$ са $R_0^2\, do$. На крају се за интензитет свјетлости dI, који подлијеже дифракцији, налази:

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ak\alpha)}{\pi\,\alpha^2}\, do\,,$$

гдје је I_0 тотални интензитет свјетлости која пада.

Г Л А В А VIII

ПОЉЕ ОПТЕРЕЋЕЊА У КРЕТАЊУ

§ 62. Ретардовани потенцијали

У глави V проучавали смо константно поље проузроковано оптерећењима која мирују, а у глави VI — промјенљиво поље, али без оптерећења. Сада ћемо се позабавити проучавањем промјенљивих поља у присуству оптерећења која се произвољно крећу.

Извешћемо једначине, које одређују потенцијале произвољног електромагнетног поља. То извођење је згодније извршити у четверодимензионалном облику. Због тога ћемо други пар *Maxwell*-ових једначина написати у облику (29,2)

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i \,.$$

Уврстимо овдје F_{ik} изражено помоћу потенцијала, тј.

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \,.$$

Тада налазимо

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \, \partial x_k} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = \frac{4\pi}{c} j_i \,. \qquad (62,1)$$

Додајмо сада потенцијалима A_i допунски услов

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0 \,. \qquad (62,2)$$

Написан у тродимензионалном облику тај услов гласи·

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \,. \qquad (62,3)$$

Овај услов је генералисање услова, које смо додавали потенцијалима у случајевима које смо посматрали раније. Тако, за константно поље (62,3) он се трансформира у $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, услов, који се поклапа с (42,3). За електромагнетно поље у вакууму (§ 44) узимали смо потенцијале тако, да буде $\varphi = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Такви потенцијали, очевидно, испуњавају и услов (62,3)[1].

Једначина (62,1) трансформира се сада у

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = -\frac{4\pi}{c} j_i \,. \tag{62,4}$$

Ова једначина дефинише потенцијале произвољног електромагнетног поља. У тродимензионалном облику она се пише у облику двију једначина — за $\mathbf{A}$ и за φ:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \,, \tag{62,5}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \varrho \,. \tag{62,6}$$

За константно поље оне се трансформирају у нама већ познате једначине (35,4) и (42,4), а за промјенљиво поље без оптерећења — у једначину (44,6). У (62,5) и (62,6) ϱ и $\mathbf{j}$ су, уопште узевши, функције од свих координата и од времена.

Рјешење нехомогених линеарних једначина (62,5) и (62,6), као што је познато, може се претставити у облику збира рјешења истих тих једначина без десне стране и парцијалног интеграла једначина с десном страном. Да бисмо нашли тај парцијални интеграл раздијелимо цио простор на бесконачно мале дијелове и одредимо поље, проузроковано оптерећењем, које се налази у једном од таквих елемената запремине. Благодарећи линеарности једначина поља, право поље ће бити једнако суми поља, проузрокованих свим таквим елементима.

Оптерећење de у датом елементу запремине, уопште узевши, функција је од времена. Ако се координатни почетак узме у посматраном елементу запремине, онда је густина оптерећења $\varrho = de(t)\, \delta(\mathbf{R})$, гдје је $\mathbf{R}$ — растојање од координатног почетка (ми посматрамо само један такав елеменат)

На тај начин треба да ријешимо једначину

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\, de(t)\, \delta(\mathbf{R}). \tag{62,7}$$

Изузев координатног почетка, увијек је $\delta(\mathbf{R}) = 0$, па се добива једначина

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \,. \tag{62,8}$$

---

[1] Треба напоменути, да, без обзира на допунски услов (62,3), потенцијали φ и $\mathbf{A}$ не остају потпуно једнозначни. И заиста, вектору $\mathbf{A}$ може се додати $\operatorname{grad} f$, а од φ притом одузети $\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$, гдје, међутим, функција сада већ није произвољна, него мора, као што се је лако увјерити, задовољавати једначину

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \,.$$

Очевидно, да у посматраном случају φ посједује централну симетрију, тј. да је φ функција само од R. Према томе, ако се *Laplace*-ов оператор напише у сферним координатама, онда (62,8) добива облик

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0.$$

Да бисмо ријешили ову једначину извршимо замјену $\varphi=\frac{\chi(R,t)}{R}$. Тада за χ добивамо

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0.$$

Но ово је једначина равних таласа, чије рјешење има облик (в. § 45):

$$\chi=f_1\left(t-\frac{R}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{R}{c}\right).$$

Пошто тражимо само парцијални интеграл једначине, довољно је узети само једну од функција f_1 и f_2. Обично је згодно узети $f_2=0$ (о томе види ниже). Тада потенцијал има свуда, осим у координатном почетку, облик

$$\varphi=\frac{\chi\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{62,9}$$

Функција χ у овој једначини је за сада произвољна. Узмимо је сада тако, да се добије прецизна вриједност потенцијала такође и у координатном почетку. Другим ријечима, морамо χ узети тако, да и за координатни почетак буде задовољена једначина (62,7). То је лако урадити, с напоменом, да за $R\to 0$ сам потенцијал тежи бесконачности, па зато његови изводи по координатама расту брже него изводи по времену. Дакле, за $R\to 0$ у једначини (62,7) члан $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ може се занемарити у односу на $\Delta\varphi$. Тада (62,7) прелази у нама већ познату једначину (35,9), која доводи до *Coulomb*-овог закона. На тај начин, у близини координатног почетка (62,9) мора прећи у *Coulomb*-ов закон, одакле слиједи, да је $\chi(t)=de(t)$, тј.

$$\varphi=\frac{de\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{62,10}$$

Одавде је лако прећи на рјешење једначине (62,6) за произвољну расподјелу оптерећења $\varrho(x, y, z, t)$. За то је довољно у (62,10) написати $de=\varrho\, dV$ (dV је елеменат запремине) и интегрирати по цјелокупном простору. Тако добивеном рјешењу нехомогене једначине (62,6) може се додати још рјешење φ_0 исте једначине без десне стране. На тај начин, опште рјешење (62,6) има облик:

$$\varphi(x,y,z,t)=\int\frac{1}{R}\,\varrho\left(x',y',z',t-\frac{R}{c}\right)dV'+\varphi_0,$$

$$R^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,\qquad dV'=dx'\,dy'\,dz'$$

(R је растојање од елемента запремине dV до „тачке посматрања", у којој тражимо вриједности потенцијала). Тај израз писаћемо кратко у облику

$$\varphi = \int \frac{\varrho_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV + \varphi_0 , \qquad (62,11)$$

гдје индекс $t - \frac{R}{c}$ показује, да вриједност ϱ треба узети у моменту $t - \frac{R}{c}$ док смо апостроф уз dV изоставили.

Потпуно аналогно ријешава се и једначина (62,5). Очевидно је

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV + \mathbf{A}_0 , \qquad (62,12)$$

гдје је $\mathbf{A}_0$ — рјешење једначине (62,5) без десне стране.

Потенцијали (62,11) и (62,12) без φ_0 и $\mathbf{A}_0$ називају се ретардовани потенцијали или потенцијали са закашњењем.

У случају непокретних оптерећења (тј. кад густина ϱ не зависи од времена), формула (62,11) прелази у већ познату формулу (35,8) $\varphi = \int \frac{\varrho}{R} dV$ за електростатичко поље, а (62,12) прелази (послије узимања средње вриједности) у формулу (42,5) за константно магнетно поље.

$\mathbf{A}_0$ и φ_0 у (62,11) и (62,12) одређују се тако, да испуњавају услове задатка. За то је, очигледно, довољно да буду задати почетни услови, тј. поље у почетном моменту. Ипак, обично се нема посла с таквим почетним условима. Умјесто тога обично се задају услови при великим растојањима од система оптерећења у току читавог времена. Наиме, даје се спољашње зрачење које пада на систем. Саобразно томе, поље, које настане као резултат међусобног дејства тога зрачења и система, може се разликовати од спољашњег поља само зрачењем, које излази од система. Такво зрачење које излази од система на великим растојањима мора имати облик равног таласа, који се простире по правцу од система, тј. у смјеру растућих R. Но томе услову, као што се види из тога што смо ставили $f_2 = 0$, баш одговара рјешење облика (62,11) и (62,12 , тј., у облику ретардованих потенцијала. На тај начин у том рјешењу први чланови приказују поље, које излази од система, а φ_0 и $\mathbf{A}_0$ треба да буду једнаки спољашњем пољу, које дјејствује на систем.

§ 63. Liénard - Wiechert-ови потенцијали

Примијенимо формуле (62,11) и (62,12) на поље, проузроковано једним оптерећењем (елементарном честицом), које се произвољно креће. У том случају подинтегрални изрази у ретардованим потенцијалима могу бити различити од нуле само у појединим изолованим тачкама. Наиме, лако је видјети, да ће у сваком моменту t они бити различити од нуле само у једној тачки простора. За то узмимо тачку посматрања P са координатама x, y, z и моменат посматрања t као почетак O четвородимензионалног координатног система и конструирајмо „свјетлосни конус" (в стр. 8) са осом дуж временске осе. Површину доњег отвора тог конуса, која обухвата подручје „апсолутне прошлости“ (у односу на догађај O), претставља геометриско мјесто таквих тачака, из којих упућени свјетлосни сигнал стиже у свјетску тачку O. Тачке, у којима та површина сијече свјетску линију кретања оптерећења, очевидно су такве свјетске тачке, у којима су подинтегрални изрази у (62,11) и (62,12) различити од нуле. Али, пошто је брзина честице увијек мања од брзине свјетлости, онда свјетска линија њеног кретања увијек има мањи „нагиб“ према временској оси, него што је „нагиб“ површине свјетлосног конуса. Зато је јасно, да свјетска линија честице може сијећи доњи отвор свјетлосног конуса само у једној тачки. Моменат t' који одговара тој тачки, очевидно се одређује из једначине

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t\,, \tag{63,1}$$

гдје је t — моменат посматрања, а $R(t')$ — растојање од оптерећења до тачке посматрања, која се сматра као задата функција од времена.

Да би се одредили потенцијали, требало би посматрати оптерећење коначних димензија, а затим узети да његове димензије теже нули. Притом, очевидно, фактор $1/R$ у подинтегралним изразима у (62,11) и (62,12) може се изнијети испод интегралног знака. Међутим, није могућно, рецимо у (62,11), интеграл од ϱ просто замијенити величином оптерећења e, у вези с тим, што разним тачкама подручја интегрирања одговарају разни моменти $t - \dfrac{R}{c}$.

То се може урадити само, ако у моменту t' одређеном из (63,1), оптерећење мирује. Другим ријечима, у систему референције, у коме у моменту t' оптерећење мирује, потенцијали у тачки посматрања у моменту t једнаки су

$$\varphi = \frac{e}{R}\,, \qquad \mathbf{A} = 0, \tag{63,2}$$

гдје је R растојање од оптерећења до тачке посматрања у моменту t' у том систему референције.

Изрази за потенцијале у произвољном систему посматрања могу се добити непосредно, ако се напише такав 4-вектор, који би за $\mathbf{v} = 0$ давао за φ и $\mathbf{A}$ малочас написане вриједности. Узевши у обзир, да се φ из (63,2) може написати и у облику

$$\varphi = \frac{e}{c(t - t')}$$

[према (63,1)], налазимо, да је тражени 4-вектор:

$$A_i = -e\,\frac{u_i}{R_k u_k}\,, \tag{63,3}$$

гдје је u_i — 4-брзина оптерећења, R_k — 4-вектор с компонентама $(x - x')$, $(y - y')$, $(z - z')$, $c(t - t')$, а x', y', z', t' су међусобно везани релацијом (63,1), која се у четвородимензионалном облику пише

$$R_i^2 = 0. \tag{63,4}$$

Поновним прелазом на тродимензионалне ознаке, добивамо сада за потенцијале поља, проузрокованог тачкастим оптерећењем које се слободно креће, слиједеће изразе:

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \qquad \mathbf{A} = \frac{e\,\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \tag{63,5}$$

гдје је $\mathbf{R}$ — радиус-вектор од тачке у којој се налази оптерећење до тачке посматрања P, а све величине на десној страни једначина морају се узети у моментима t', који се одређују из (63,1). Потенцијали поља у облику (63,5) називају се потенцијали *Liénard-Wiechert*-а.

За израчунавање јачине електричног и магнетног поља пс формулама

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$$

треба диференцирати φ и $\mathbf{A}$ по координатама x, y, z тачке и моменту посматрања t. Међутим, формуле (63,5) изражавају потенцијале као функције од t' и само помоћу релације (63,1) — као имплицитне функције од x, y, z, t. Због тога, за израчунавање тражених извода треба претходно израчунати изводе од t'. Диференцирањем релације $R(t') = c\,(t - t')$ по t, имамо:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{Rv}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

(вриједност $\frac{\partial R}{\partial t'}$ добива се диференцирањем идентитета $R^2 = \mathbf{R}^2$ и замјеном

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t')}{\partial t'} = -\mathbf{v}(t')\ ^{1}),$$

или

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{vR}}{Rc}}. \tag{63,6}$$

Аналогно, диференцирањем исте релације по координатама, налази се:

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{1}{c}\operatorname{grad} R\,(t') = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}\operatorname{grad} t' + \frac{\mathbf{R}}{R}\right),$$

одакле

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{\mathbf{R}}{c\left(R - \frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)}. \tag{63,7}$$

---

[1] Знак минус је у вези са тим, што је $\mathbf{R}$ радиус-вектор од оптерећења e ка тачки P, а не обрнуто.

Помоћу ових формула није тешко израчунати поља **E** и **H**. Изостављајући детаљна рачунања, наводимо добивени резултат:

$$\mathbf{E}=e\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)+\frac{e}{c^2\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left[\mathbf{R}\times\left(\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)\times\dot{\mathbf{v}}\right)\right], \quad (63{,}8)$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{R}(\mathbf{R}\times\mathbf{E}). \quad (63{,}9)$$

Овдје је $\dot{\mathbf{v}}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t'}$, а све величине на десним странама једначина узимају се у моменту t'. Интересантно је напоменути, да је магнетно поље увијек нормално на електричном.

На крају наводимо и нешто друкчији облик писања *Liénard-Wichert*-ових потенцијала, који је користан у неким случајевима. Он се добива замјеном израза (63,1) и (63,6) у (63,5):

$$\varphi=\frac{e}{c(t-t')}\frac{\partial t'}{\partial t}, \qquad \mathbf{A}=\frac{\mathbf{v}}{c}\varphi. \quad (63{,}10)$$

§ 64. Спектрално разлагање ретардованих потенцијала

Поље изазвано наелектрисаним честицама у кретању може се разложити на монохроматичне таласе. Потенцијали поједине монохроматичне компоненте (*Fourier*-ове компоненте) поља имају облик $\varphi_\omega\, e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$. Аналоган облик имају и друге величине, које одређују поље. Густине оптерећења и струје система оптерећења која изазивају поље, такође се могу развити у *Fourier*-ов ред или интеграл. Јасно је, да за стварање одређене монохроматичне компоненте поља одговарају респективне *Fourier*-ове компоненте од ϱ и **j**.

Да бисмо *Fourier*-ове компоненте поља изразили помоћу *Fourier*-ових компонената густина оптерећења и струје, ставимо у (62,11) умјесто φ и ϱ респективно $\varphi_\omega\, e^{-i\omega t}$ и $\varrho_\omega e^{-i\omega t}$. Тада налазимо

$$\varphi_\omega\, e^{-i\omega t}=\int\varrho_\omega\frac{e^{-i\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{R}\,dV.$$

Послије скраћења са $e^{-i\omega t}$ и увођења апсолутне вриједности таласног вектора $k=\frac{\omega}{c}$, имамо:

$$\varphi_\omega=\int\varrho_\omega\frac{e^{ikR}}{R}dV. \quad (64{,}1)$$

Аналогно за $\mathbf{A}_\omega$ добивамо[1]):

$$\mathbf{A}_\omega = \int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{c\,R}\, dV. \qquad (64,2)$$

Напомињемо, да формула (64,1) претставља уопштење рјешења *Poisson*-ове једначине у општију једначину облика:

$$\Delta\,\varphi + k^2\,\varphi = -4\,\pi\,\varrho_\omega \qquad (64,3)$$

(добива се из једначине (62,6), гдје ϱ и φ зависе од времена помоћу фактора $e^{-i\omega t}$). За $k=0$, формула (64,1) прелази у (35,8).

Ако се ради о разлагању у *Fourier*-ов интеграл, онда је *Fourier*-ова компонента густине оптерећења (в. § 49)

$$\varrho_\omega = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varrho\, e^{-i\omega t}\, dt\,.$$

Уврштавањем овог израза у (64,1), добивамо:

$$\varphi_\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\int \frac{\varrho}{R}\, e^{i(\omega t + kR)}\, dV\, dt. \qquad (64,4)$$

Ако се, пак, ради о разлагању у *Fourier*-ов ред у временском интервалу T (период поља), онда ћемо имати [упор. (49,2)]:

$$\varphi_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\!\int \frac{\varrho}{R}\, e^{i\,(n\,\omega_0\,t + kR)}\, dV\, dt\,. \qquad (64,5)$$

Аналогни изрази $\mathbf{A}_\omega$ разликују се само по томе што је под интегралним знаком ϱ зимијењено са $\frac{1}{c}\mathbf{j}$.

Сада ћемо добивене формуле примијенити на поље, које изазива једно тачкасто оптерећење у покрету. Нека радиус-вектор тога оптерећења $\mathbf{r}_0(t)$ претставља задату функцију од времена. Тада је густина оптерећења:

$$\varrho = e\,\delta\,[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\,(t)]. \qquad (64,6)$$

Замјеном овог израза у (64,4) и интегрирањем по dV [што се своди на замјену $\mathbf{r}$ са $\mathbf{r}_0(t)$], добивамо:

$$\varphi_\omega = \frac{e}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R(t)}\, e^{i[\omega\,t + kR\,(t)]}\, dt\,. \qquad (64,7)$$

---

[1]) Изразе за φ_ω и $\mathbf{A}_\omega$ пишемо у комплексном облику. Треба упамтити, да у таквим случајевима увијек треба узети реалан дио од њихових производа са $e^{-i\omega t}$, а не од самих тих величина.

Аналогно је за векторски потенцијал:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e}{2\pi c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)}\, e^{i[\omega t + kR(t)]}\, dt\,, \tag{64,8}$$

гдје је $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ брзина оптерећења, а $R(t)$ растојање од оптерећења до тачке посматрања.

Задатак

Разложити на равне таласе поље наелектрисане честице, која се креће равномјерно и праволиниски.

Рјешење. Поступићемо аналогно поступку у § 51. Густину оптерећења писаћемо у облику $\rho = e\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, где је $\mathbf{v}$ брзина честице. Узевши *Fourier*-ову компоненту од једначине

$$\Box\,\varphi = -4\pi e\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\,,$$

налазимо

$$(\Box\,\varphi)_{\mathbf{k}} = -\frac{e}{2\pi^2}\, e^{-i(\mathbf{vk})t}.$$

С друге стране се из

$$\varphi = \iiint e^{i\mathbf{kr}}\, \varphi_{\mathbf{k}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z$$

добива

$$(\Box\,\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}\,.$$

На тај начин је

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} + k^2\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}\, e^{-i(\mathbf{kv})t}\,,$$

одакле је дефинитивно

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}\, \frac{e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}\,.$$

Одавде излази, да талас са таласним вектором $\mathbf{k}$ има фреквенцију $\omega = (\mathbf{kv})$. Аналогно налазимо за векторски потенцијал:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2 c}\, \frac{\mathbf{v}e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}\,.$$

Најзад, за поље имамо

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{i(\mathbf{kv})}{c}\,\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}\; i\, \frac{-\mathbf{k} + \frac{(\mathbf{kv})\,\mathbf{v}}{c^2}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}\, e^{-i(\mathbf{kv})t}\,,$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = i(\mathbf{k}\times\mathbf{A}_{\mathbf{k}}) = \frac{e}{2\pi^2}\, \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{v}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}\, e^{-i(\mathbf{kv})t}.$$

§ 65. Lagrange-ова функција с тачношћу до чланова другог реда

У обичној, класичној механици може се систем честица које међусобно дејствују, описивати помоћу *Lagrange*-ове функције, која зависи само од координата и брзина тих честица (у једном те истом моменту). Могућност тога условљена је у крајњем резултату чињеницом, што се у механици претпоставља, да је брзина простирања узајамног дејства бесконачна.

Ми већ знамо, да због коначне брзине простирања узајамног дејства поље треба посматрати као самостални систем са сопственим „степенима слободе“. Одавде слиједи да, ако имамо систем честица (оптерећења), које међусобно дејствују, за описивање тог система морамо посматрати систем, који се састоји од тих честица и од поља. Према томе, при израчунавању коначне брзине простирања узајамног дејства, уопште узевши, систем честица, које међусобно дејствују, немогуће је описивати помоћу *Lagrange*-ове функције, која зависи само од координата и брзина честица, и која не садржи никакве величине, које су везане са сопственим „степенима слободе“ поља. Ипак, ако су брзине v свих честица мале у односу на брзину свјетлости, онда се систем оптерећења може описивати неком приближном *Lagrange*-овом функцијом. Притом се испоставља, да је могућно увести *Lagrange*-ову функцију, која описује систем не само занемаривањем свих степена v/c (класична *Lagrange*-ова функција), него и са тачношћу до величина реда $\frac{v^2}{c^2}$ (*Darwin*, 1920).

Претходно напомињемо, да при нултој апроксимацији, тј. када се занемаре ретардовани потенцијали, *Lagrange*-ова функција за систем оптерећења има облик:

$$L = \sum_A \frac{m_A v_A^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{A \neq B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}} \tag{65,1}$$

(сумирање се врши преко оптерећења, која улазе у састав система). Други члан је потенцијална енергија узајамног дејства у случају када би оптерећења мировала [в. (36,7)].

За добивање слиједеће апроксимације код *Lagrange*-ове функције поступићемо на слиједећи начин. *Lagrange*-ова функција за оптерећење, које се налази у спољашњем пољу, је [в. (14,4)].

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}\,.$$

Узмимо ма које оптерећење система. Одредимо потенцијале поља, проузрокованог свим осталим оптерећењима у тачки гдје се налази прво оптерећење, и изразимо их помоћу координата и брзина оптерећења, која проузрокују то поље (то се може урадити само приближно: $\boldsymbol{\varphi}$ — с тачношћу до чланова реда $\frac{v^2}{c^2}$, а $\mathbf{A}$ — до чланова реда v/c). Замјеном тако добивених израза за потенцијале у горе наведени израз за L, добивамо *Lagrange*-ову функцију за једно од оптерећења система (када је дато кретање осталих). Онда се одавде лако може наћи L за цио систем.

Поћићемо од израза (62,11) и (62,12) за ретардоване потенцијале:

$$\varphi = \int \frac{\varrho_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV , \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV .$$

Ако су брзине свих оптерећења мале у односу на брзину свјетлости, онда расподјела оптерећења, тј. ϱ и $\mathbf{j}$, не успије да се сувише измијени за вријеме R/c. Према томе можемо $\varrho_{t-\frac{R}{c}}$ и $\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}$ развити у ред по степенима R/c. На тај начин, за скаларни потенцијал налазимо, са тачношћу до чланова другог реда:

$$\varphi = \int \frac{\varrho\, dV}{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \varrho\, dV + \frac{1}{2\, c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \varrho\, dV$$

(ϱ без индекса је ϱ у моменту t; $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ очевидно могу се изнијети испод интегралног знака). Али $\int \varrho\, dV$ је тотално оптерећење, а истодобно је константа која не зависи од времена. Према томе, други члан у добивеном изразу једнак је нули, па је

$$\varphi = \int \frac{\varrho\, dV}{R} + \frac{1}{2\, c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \varrho\, dV . \tag{65,2}$$

Аналогно се може поступити и за $\mathbf{A}$. Но израз за векторски потенцијал помоћу густине струје већ сам по себи садржи $1/c$, а замјеном у *Lagrange*-ову функцију множи се још једанпут са $1/c$. Будући да *Lagrange*-ову функцију тражимо само са тачношчу до чланова другог реда, онда је довољно у реду за $\mathbf{A}$ узети само први члан, тј.:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\varrho \mathbf{v}}{R} dV \tag{65,3}$$

(ставили смо $\mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}$).

Претпоставимо, да се има само једно тачкасто оптерећење e (када их је неколико, потребно је узети суму добивених израза). Тада за потенцијале поља, које оно проузрокује, добивамо из (65,2) и (65,3)

$$\varphi = \frac{e}{R} + \frac{e}{2\, c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cR}, \tag{65.4}$$

гдје је R — растојање од оптерећења.

Узмимо умјесто φ и $\mathbf{A}$ друге потенцијале φ' и $\mathbf{A}'$, извршивши трансформацију:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f ,$$

гдје за f узимамо слиједећу функцију

$$f = \frac{e}{2\, c} \frac{\partial R}{\partial t} .$$

Тада добијамо:

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c}\nabla\frac{\partial R}{\partial t}\,^{1)}$$

Да бисмо израчунали $\mathbf{A}'$, прије свега напоменимо, да је $\nabla\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla R$. Операција ∇ овдје значи диференцирање по координатама тачке посматрања, у којој се тражи вриједност $\mathbf{A}'$. Због тога је ∇R једнако јединичном вектору $\mathbf{n}$, оријентисаном од оптерећења e према тачки посматрања, па је

$$\mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c}\dot{\mathbf{n}} \quad .$$

За израчунавање $\dot{\mathbf{n}}$ пишимо:

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right) = \frac{\dot{\mathbf{R}}}{R} - \frac{\mathbf{R}\dot{R}}{R^2}.$$

Но извод $\dot{\mathbf{R}}$ при задатој тачки посматрања јесте брзина $\mathbf{v}$ оптерећења, а извод $\dot{R}$ се лако одређује диференцирањем једначине $R^2 = \mathbf{R}^2$, тј.

$$R\dot{R} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{v} \; .$$

На тај начин је

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{-\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})}{R} \; .$$

Стављајући све ово у израз за $\mathbf{A}'$, дефинитивно налазимо:

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e[\mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathbf{n})\,\mathbf{n}]}{2cR} \; . \tag{65,5}$$

Акс се има неколико оптерећења, онда је, очевидно, потребно извршити сумирање по свим оптерећењима.

Замјењујући ове изразе за потенцијале у *Lagrange*-ову функцију за оптерећења у спољашњем пољу, налазимо *Lagrange*-ову функцију L_A оптерећења e_A (када је задато кретање свих осталих оптерећења).

Притом је потребно и кинетичку енергију $-m_A c^2\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}$ такође развити по степенима v_A/c, задржавајући чланове до другог реда. На тај начин налазимо слиједећи израз за L_A:

$$L_A = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{1}{8}\frac{m_A v_A^4}{c^2} - e_A\sum_B \frac{e_B}{R_{AB}} + \frac{e_A}{2c^2}\sum_B \frac{e_B}{R_{AB}}\,[\mathbf{v}_A\mathbf{v}_B + (\mathbf{v}_A\,\mathbf{n})\,(\mathbf{v}_B\,\mathbf{n})]$$

(сумирање се врши по свим оптерећењима, са изузетком e_A; $\mathbf{n}$ је јединични вектор по правцу међу e_B и e_A).

---

[1] Потенцијали φ' и $\mathbf{A}'$ неће више задовољавати *D'Alembert*-ове једначине, јер неће испуњавати услов (62,3). У исто вријеме, наравно, $\mathbf{A}'$ и φ' ће дати тачан резултат за поље, ако φ и $\mathbf{A}$ дају тај резултат.

Одавде није тешко наћи L за читав систем. Лако је увидјети, да та функција није једнака суми L_A за сва оптерећења, него има облик:

$$L=\sum_{A}\frac{m_A v_A^2}{2}+\sum_{A}\frac{m_A v_A^4}{8\,c^2}-\sum_{A>B}\frac{e_A e_B}{R_{AB}}+$$

$$+\sum_{A>B}\frac{e_A e_B}{2\,c^2 R_{AB}}[\mathbf{v}_A\mathbf{v}_B+(\mathbf{v}_A\mathbf{n})(\mathbf{v}_B\,\mathbf{n})]. \qquad (65,6)$$

И стварно, за свако оптерећење, при задатом кретању свих осталих, та функција прелази у горе наведену функцију L_A. Израз (65,6) претставља *Lagrange*-ову функцију система оптерећења с тачношћу до чланова другог реда.

На крају, одредимо са истом апроксимацијом још и *Hamilton*-ову функцију система оптерећења. То би се могло урадити по општим правилима налажења $\mathcal{H}$ помоћу L; али је једноставније поступати на слиједећи начин. Други и четврти члан у (65,6) претстављају малу поправку израза

$$L_0=\sum_{A}\frac{m_A v_A^2}{2}-\sum_{A>B}\frac{e_A e_B}{R_{AB}}\,.$$

С друге стране, познато је из механике, да су за малу промјену L и $\mathcal{H}$ мала додавања једном и другом међусобно једнака по величини, а супротна по знаку (гдје се промјена L посматра при константним координатама и брзинама, а промјена $\mathcal{H}$ — при константним координатама и импулсима[1]).

Према томе $\mathcal{H}$ можемо одмах написати, одузимајући од $\mathcal{H}_0=$ $=\sum_{A}\frac{p_A^2}{2\,m_A}+\sum_{A>B}\frac{e_A e_B}{R_{AB}}$ исти други и четврти члан из (65,6) замјењујући у њима брзине импулсима $\left(\mathbf{v}_A=\frac{\mathbf{p}_A}{m_A}\right)$. На тај начин је:

$$\mathcal{H}=\sum_{A}\frac{p_A^2}{2\,m_A}-\sum_{A}\frac{p_A^4}{8\,c^2 m_A^3}+\sum_{A>A}\frac{e_A e_B}{R_{AB}}-$$

$$-\sum_{A>B}\frac{e_A e_B}{2\,c^2\,m_A m_B R_{AB}}\,[\mathbf{p}_A\mathbf{p}_B+(\mathbf{p}_A\,\mathbf{n})(\mathbf{p}_B\,\mathbf{n})]. \qquad (65,7)$$

---

[1] Ако *Lagrange*-ова функција зависи, осим од координата и брзине, још и од неког параметра λ, онда је

$$dL=F\,dq+p\,d\dot q+\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right)_{q,\dot q}d\lambda$$

$\left(F=\frac{\partial L}{\partial q},\quad p=\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right.$ — генералисана сила и импулс$\left.\right)$. Одавде за $\mathcal{H}=p\dot q-L$ имамо

$$d\,\mathcal{H}=-F\,dq+\dot q\,dp-\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right)_{q,\,\dot q}d\lambda,$$

па је

$\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda}\right)_{q,\,p}=-\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right)_{q,\,\dot q}$. Ако се мало промијени параметар λ, онда се такође мало мијењају $\mathcal{H}$ и L. Из добивене једначине види се, да за промјене $\delta\mathcal{H}$, и δL важи једначина $(\delta\mathcal{H})_{q,\,p}=$ $=-(\delta L)_{q,\,\dot q}$ (индекси под заградама показују, које величине треба посматрати као константе).

аци

1. Одредити (са тачношћу до чланова другог реда) центар инерције система честица које међусобно дјејствују.

Рјешење: Брзина $\mathbf{V}$ система као цјелине одређују се формулом

$$\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}} = \frac{c^2 \mathbf{P}}{\mathcal{E}},$$

гдје је $\mathbf{P} = \sum\limits_A \mathbf{p}_A = \sum\limits_A \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_A}$ тотални импулс система, а $\mathcal{E}$ његова енергија, која износи $\sum m_A c^2 + \mathcal{H}$ [$\mathcal{H}$, које је написано у облику (65,7), не садржи у себи енергију мировања честице]. Послије замјене одговарајућих израза испоставља се, да се написана релација може интегрирати по времену, тако да појам центра инерције система честица које међусобно дјејствују стварно постоји са посматраном апроксимацијом. За радиус-вектор $\mathbf{R}$ центра инерције добива се израз:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum \mathcal{E}_A \mathbf{r}_A}{\sum \mathcal{E}_A},$$

гдје је

$$\mathcal{E}_A = m_A c^2 + \frac{p_A^2}{2 m_A} + \frac{e_A}{2} \sum_{B \neq A} \frac{e_B}{K_{AB}}.$$

2. Написати *Hamilton*-ову функцију у другој апроксимацији за систем од двије честице, искључивши кретање система као цјелине.

Рјешење: Узмимо систем референције, у коме је збир импулса обије честице једнак нули. Ако импулсе напишемо као изводе од дјејства, имамо:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_2} = 0.$$

Одавде се види, да је у посматраном систему референције дјејство функција разлике $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ радиус-вектора обију честица. Према томе имамо $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$, гдје је $\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}$ импулс релативног кретања честица. *Hamilton*-ова функција је једнака:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) p^2 - \frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3}\right) p^4 + \frac{e_1 e_2}{r} +$$

$$+ \frac{e_1 e_2}{2c^2 m_1 m_2 r}\left[p^2 + (\mathbf{p}\,\mathbf{n})^2\right].$$

ГЛАВА IX

ЗРАЧЕЊЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА

§ 66. Поље система оптерећења на далеким растојањима

Посматрајмо поље, проузроковано системом оптерећења у покрету, на далеком растојању од тог система (тј. на растојању, које је велико у односу на димензије система). Притом ћемо опет поћи од израза за ретардоване потенцијале

$$\varphi = \int \frac{1}{R} \varrho_{t-\frac{R}{c}} \, dV, \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{1}{R} \mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}} \, dV \cdot$$

Узмимо координатни почетак O гдје било у систему оптерећења. Означимо са $\mathbf{R}_0$ радиус-вектор од тачке O до тачке P, гдје тражимо вриједност поља, а јединични вектор у том правцу означимо са $\mathbf{n}$. Радиус-вектор оптерећења $de = \varrho \, dV$ нека буде $\mathbf{r}$, а радиус-вектор од de до тачке P нека буде $\mathbf{R}$, Очевидно је $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$ и $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|$. При интегрирању по dV у изразу за φ и $\mathbf{A}$ сматра се, да је $\mathbf{R}_0$ константно.

На великим растојањима од система оптерећења је $\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}$. Функцију $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|$ можемо према томе развити у ред по степенима $\mathbf{r}$, ограничивши се на члан првог реда. Према општој формули

$$f(\mathbf{r}) \cong f(0) + \operatorname{grad} f(0) \cdot \mathbf{r}$$

добивамо

$$R = R_0 - \mathbf{r}\mathbf{n}.$$

Уврстимо то у израз за ретардоване потенцијале. У имениоцу подинтегралних израза $\mathbf{r}\mathbf{n}$ може се занемарити у односу на R_0. Међутим, у $t - \dfrac{R}{c}$ то се занемаривање не може учинити; могућност тога занемаривања овдје се не одређује релативном величином R_0/c и $\mathbf{r}\mathbf{n}/c$, него тим, колико се мијењају сами ϱ и $\mathbf{j}$ за вријеме $\mathbf{r}\mathbf{n}/c$. На тај начин, за потенцијале поља на великом растојању од система оптерећења налазимо изразе:

$$\varphi = \frac{1}{R_0} \int \varrho_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}}{c}} \, dV, \tag{66,1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c R_0} \int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}}{c}} \, dV. \tag{66,2}$$

На великим растојањима од система оптерећења поље се у не много великим дјеловима простора може посматрати као раван талас. За то је потребно, да растојања буду велика не само у односу на размјере система, него и у односу на дужину електромагнетних таласа, које систем ствара, или како се каже, зрачи. За такво се подручје поља говори као о „таласној зони“ зрачења.

Код равног таласа поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ су међусобно повезана релацијом $\mathbf{E}=\mathbf{H}\times\mathbf{n}$ [в. (45,4)]. Како је $\mathbf{H}=\text{rot}\,\mathbf{A}$, то је за потпуно одређивање поља у таласној зони довољно израчунати само векторски потенцијал. Код равног таласа имамо $\mathbf{H}=\frac{1}{c}(\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n})$ [в. (46,3)], гдје тачка означава диференцирање по времену.[1]

На тај начин, када знамо $\mathbf{A}$, налазимо $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ по формулама:[2]

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}(\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n}\,,\qquad \mathbf{E}=\frac{1}{c}[(\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}]. \tag{66,3}$$

Напомињемо, да је на далеким растојањима поље обрнуто пропорционално првом степену растојања (R_0) од система који зрачи. Такође треба напоменути, да вријеме t улази у изразе (66,1—3) увијек у комбинацији $t-\frac{R_0}{c}$

За зрачење, које изазива неко тачкасто оптерећење у произвољном кретању, згодно се послужити *Liénard-Wiechert*-овим потенцијалима. На далеким растојањима може се у формули (63,5) радиус-вектор R замијенити са R_0 (кординатни почетак се узима ма гдје унутра коначне области про-

---

[1] Ту формулу лако је провјерити непосредним израчунавањем. Напишимо (66,2) у облику $\mathbf{A}=\frac{1}{R_0}\mathbf{f}(t')$, гдје је $\mathbf{f}(t')$ функција од $t'=t-\frac{R_0}{c}$. За $\mathbf{H}$ имамо $\mathbf{H}=\text{rot}\,\frac{\mathbf{f}(t')}{R_0}$. При диференцирању производа $\mathbf{f}\cdot\frac{1}{R_0}$ фактор $\frac{1}{R_0}$ може се сматрати константним (јер се диференцирањем $\frac{1}{R_0}$ добива члан пропорционалан са $\frac{1}{R_0^2}$, који се може занемарити у односу на члан са $\frac{1}{R_0}\Big)$, па се диференцира само по R_0, које је садржано у t'. Тада је $\mathbf{H}=\frac{1}{R_0}\,\text{rot}\,\mathbf{f}(t')$. За вектор, који је функција само од t', важи

$$\text{rot}\,\mathbf{f}(t')=\nabla t'\times\frac{d\mathbf{f}}{dt'}=-\frac{1}{c}\left(\mathbf{n}\times\frac{d\mathbf{f}}{dt'}\right)$$

$\left(\text{јер је } \nabla t'=-\frac{1}{c}\nabla R_0=-\frac{\mathbf{n}}{c}\right)$. Дефинитивно имамо:

$$\mathbf{H}=\frac{1}{cR_0}(\dot{\mathbf{f}}\times\mathbf{n})=\frac{1}{c}(\mathbf{A}\times\mathbf{n}),$$

што је и требало доказати.

[2] Овдје се не може употребити формула $\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}$ [в. (45,3)], будући да потенцијали φ и $\mathbf{A}$ овдје не задовољавају допунске услове, који су им били постављени у § 45.

стора, у којој се оптерећење креће), а у услов (63,1), који одређује t', треба ставити $R = R_0 - \mathbf{r}_0 \mathbf{n}$ [$\mathbf{r}_0(t)$ је радиус-вектор оптерећења]. Онда је:

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}(t')}{cR_0\left(1 - \frac{\mathbf{nv}(t')}{c}\right)}, \tag{66,4}$$

гдје се t' одређује из једначине:

$$t' - \frac{\mathbf{r}_0(t')}{c}\mathbf{n} = t - \frac{R_0}{c}. \tag{66,5}$$

Зрачење електромагнетних таласа врши се, наравно, зрачењем енергије. Флукс енергије одређује се *Poynting*-овим вектором, који за равне таласе износи:

$$\mathbf{S} = c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}.$$

Интензитет dI зрачења у елементу просторног угла do одређује се као количина енергије, која протиче у јединици времена кроз елеменат $df = R_0^2\,do$ сферне површине са центром у координатном почетку и са полупречником R_0. Очевидно је, да је та количина једнака производу густине флукса енергије S и df, тј:

$$dI = c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2\,do \tag{66,6}$$

Како је поље H обрнуто пропорционално са R_0^2, види се, да је енергија, коју систем зрачи у јединици времена у елеменат просторног угла do, једнака за сва растојања [када су за њих једнаке вриједности $t - \frac{R_0}{c}$].

Разумије се, да тако и мора бити, јер се енергија, коју систем зрачи, простире кроз околни простор брзином свјетлости c, при чему се нигдје не акумулира, нити исчезава.

Извешћемо формуле за спектрално разлагање поља које зрачи систем таласа. Те се формуле могу добити непосредно из формула § 64. Стављајући у (64,2) $R = R_0 - \mathbf{rn}$ (гдје се у имениоцу подинтегралног израза можемо ограничити замјеном $R = R_0$), добивамо за *Fourier*-ове компоненте векторског потенцијала:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0}\int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{kr}}\,dV \tag{66,7}$$

(гдје је $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$). Компоненте $\mathbf{H}_\omega$ и $\mathbf{E}_\omega$ одређују се помоћу $\mathbf{A}_\omega$ користећи формуле (66,3). Стављајући у њих $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$ умјесто $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ и скраћујући затим са $e^{-i\omega t}$, добива се:

$$\mathbf{H}_\omega = i(\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\omega), \quad \mathbf{E}_\omega = \frac{ic}{\omega}[(\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\omega)\times\mathbf{k}]. \tag{66,8}$$

Када се говори о спектралној расподјели интензитета зрачења, неопходно је да се разликује разлагање у *Fourier*-ов интеграл од разлагања у *Fourier*-ов ред. На разлагање у *Fourier*-ов интеграл наилази се код третирања зрачења, које настаје при судару наелектрисаних честица. Ту је интересантна укупна количина енергије, која се зрачи у току судара (коју изгубе честице које се сударају). Нека је $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}$ енергија, коју систем при судару зрачи у елеменат просторног угла do у облику таласа са фреквенцијама у интервалу $d\omega$. Према општој формули (49,8) онај дио укупног зрачења, који отпада на интервал фреквенција $d\omega$, добива се из обичног израза за интензитет замјеном квадрата поља квадратом модула његове *Fourier*-ове компоненте и истодобним множењем са 4π. Отуда имамо [упор. (66,6)]:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = c\,|\,\mathbf{H}_\omega\,|^2\, R_0^2\, do\, d\omega. \tag{66,9}$$

Ако, пак, оптерећења врше финитно периодично кретање, онда се поље зрачења мора разложити у *Fourier*-ов ред. Према општој формули (49,4) интензитет појединe компоненте *Fourier*-овог реда добива се из обичног израза за интензитет замјеном поља са његовом *Fourier*-овом компонентом и множењем са 2. На тај начин, интензитет зрачења у елеменат просторног угла do са фреквенцијом $\omega = n\omega_0 = n\frac{2\pi}{T}$ износи

$$dI_n = \frac{c}{2\pi}\,|\,\mathbf{H}_n\,|^2\, R_0^2\, do. \tag{66,10}$$

За спектрално разлагање таласа, које зрачи једно тачкасто оптерећење (када се креће у спољашњем пољу), може се написати и овај израз

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{2\pi c R_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e\mathbf{v}(t)\, e^{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]}\, dt, \tag{66,11}$$

који се добива из формуле (64,8) аналогно поступку добивања (66,7) из (66,2). Како је $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$, биће $\mathbf{v}\, dt = d\mathbf{r}_0$, па се та формула може написати и у облику контурног интеграла, узетог дуж трајекторије честице:

$$\mathbf{A}_\omega = e\,\frac{e^{ikR_0}}{2\pi c\, R_0}\int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)}\, d\mathbf{r}_0\,. \tag{66,12}$$

Fourier-ова компонента магнетног поља према (66,8) има облик:

$$\mathbf{H}_\omega = e\,\frac{i\omega e^{ikR_0}}{2\pi c^2 R_0}\int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)}\,(\mathbf{n}\times d\mathbf{r}_0)\,. \tag{66,13}$$

Формуле (66,11-13) приказују *Fourier*-ове компононте поља (разложеног у *Fourier*-ов интеграл) непосредно по закону кретања оптерећења које зрачи.

Ако оптерећење врши периодично кретање по затвореној трајекторији, онда се поље мора разложити у *Fourier*-ов ред. Компоненте разлагања у *Fourier*-ов ред добивају се замјеном у добивеним формулама (66,11-13) фактора $1/2\pi$ са $1/T$, при чему се интегрирање врши по периоду кретања T

(в. § 49). За *Fourier*-ову компоненту магнетног поља са фреквенцијом $\omega = n\,\omega_0 = 2\pi\, n/T$ имамо:

$$\mathbf{H}_n = e\,\frac{2\,\pi\, i\, n\, e^{ikR_0}}{c^2\, T^2\, R_0} \int\limits_0^T e^{i[n\omega_0 t - \mathbf{kr}_0(t)]}\,[\mathbf{n}\times\mathbf{v}\,(t)]\,dt =$$

$$= e\,\frac{2\,\pi\, i\, n\, e^{\,ikR_0}}{c^2\, T^2\, R_0} \oint e^{\,i(n\omega_0 t - \mathbf{kr}_0)}\,(\mathbf{n}\times d\mathbf{r}_0)\,. \qquad (66,14)$$

У другом интегралу интегрирање се врши по затвореној орбити честице.

§ 67. Диполно зрачење

У подинтегралним изразима (66,1) и (66,2) за ретардоване потенцијале вријеме $\mathbf{rn}/c$ може се занемарити у случајевима, ако се за то вријеме расподјела оптерећења мало мијења. Лако је наћи услове остварења тога захтјева. Нека нам T означава ред величине времена, током којег се расподјела оптерећења осјетно промијени. Очевидно је да ће зрачење тог система имати периоду реда самог T (тј. имаће фреквенцију реда $1/T$). Означимо затим са a ред величине размјера система. Тада ће вријеме $\mathbf{rn}/c$ бити реда a/c. Да се за то вријеме распоред оптерећења не би знатно промјенио, потребно је да буде $a/c \ll T$. Али cT није ништа друго него таласна дужина зрачења λ. На тај начин, услов $a \ll cT$ може се написати у облику

$$a \ll \lambda, \qquad (67,1)$$

тј. димензије система морају бити мале у односу на дужину зраченог таласа.

Напомињемо, да се исти овај услов (67,1) може добити и из (66,7). У подинтегралном изразу $\mathbf{r}$ добива вриједности у подручју реда димензије система, јер је ван система $\mathbf{j}$ једнако нули. Према томе степен $i\mathbf{kr}$ је мали и може се занемарити за оне таласе, код којих је $ka \ll 1$, што је еквивалентно са (67,1).

Тај се услов може написати и у другом облику, са напоменом, да је $T \sim a/v$, па је $\lambda \sim ca/v$, ако је v ред величине брзине оптерећења. Из $a \ll \lambda$ тада налазимо

$$v \ll c, \qquad (67,2)$$

тј. брзине оптерећења морају бити мале у упоређењу са брзином свјетлости.

Претпоставићемо, да је тај услов испуњен и позабавимо се проучавањем зрачења на растојањима од система који зрачи, која су велика у односу на таласну дужину (а у сваком случају велика у односу на размјере система). Као што је показано у § 66, поље се на таквим растојањима може сматрати као раван талас, па је зато за одређивање поља довољно израчунати само векторски потенцијал.

Векторски потенцијал (66,2) поља на далеким растојањима има сада облик:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'}\, dV, \qquad (67,3)$$

гдје је $t' = t - R_0/c$. Сада вријеме t' више не зависи од промјенљивих интегрирања. Узимајући $\mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}$, препишимо (67,3) у облику

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\left(\sum e\mathbf{v}\right),$$

(сумирање се врши по свим оптерећењима система; због краткоће изоставићемо индекс t' — све величине на десним странама једначина се узимају за моменат t'). Но имамо

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

гдје је $\mathbf{d}$ диполни моменат система. На тај начин је:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}}. \tag{67,4}$$

Према формулама (66,3) налазимо, да је магнетно поље једнако

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2R_0}(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}), \tag{67,5}$$

а електрично поље

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2R_0}[(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}]. \tag{67,6}$$

Напомињемо, да се код посматране апроксимације зрачење одређује другим изводом диполног момента система. Такво зрачење се назива диполно.

Како је $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, то је $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. На тај начин, оптерећења могу зрачити само у случају, ако се крећу убрзано. Оптерећења, која се крећу равномјерно, не зраче. То, уосталом, непосредно слиједи из принципа релативитета, јер се оптерећење које се креће равномјерно може посматрати у таквом инерцијалном систему, гдје оно мирује, а оптерећења која мирују, очевидно, не зраче.

Уврштавањем (67,5) у (66,6) добивамо интензитет диполног зрачења

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2\, do. \tag{67,7}$$

Ово је количина енергије, коју систем зрачи у јединици времена у тјелесни угао do. Укупна количина енергије, која се зрачи у јединици времена у свим правцима, добива се интегрирањем по свим угловима. Због тога уведимо сферне координате с поларном осом дуж вектора $\ddot{\mathbf{d}}$. Нека поларни угао и азимут вектора $\mathbf{n}$ у тим координатама буду θ и φ. Дакле, θ је угао међу $\ddot{\mathbf{d}}$ и $\mathbf{n}$. Тада је $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ и (67,7) прелази у:

$$dI = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Интегрирањем по $d\varphi$ од 0 до 2π и по $d\theta$ од 0 до π, налазимо:

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 . \tag{67,8}$$

Ако постоји свега једно оптерећење, које се креће у спољашњем пољу, биће $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ и $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, гдје је $\mathbf{w}$ убрзање оптерећења. На тај начин, укупно зрачење оптерећења које се креће биће

$$I = \frac{2e^2w^2}{3c^3} . \tag{67,9}$$

Напомињемо, да систем, састављен од честица, код којих је однос оптерећења и масе једнак, не може зрачити (диполно). И заиста, за такав систем диполни моменат је

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{const.} \sum m\mathbf{r},$$

гдје је const. однос оптерећења и масе, који је исти за сва оптерећења. Но $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R}\sum m$, где је $\mathbf{R}$ радиус-вектор центра инерције система (напомињемо, да су све брзине $v \ll c$, па се може примијенити нерелативистичка механика). Према томе, $\ddot{\mathbf{d}}$ је пропорционално убрзању центра инерције, тј. једнако је нули, јер се центар инерције креће равномјерно.

На крају, написаћемо формуле за спектрално разлагање интензитета диполног зрачења. За зрачење при судару увешћемо количину енергије $d\mathcal{E}_\omega$, која се за све вријеме судара зрачи у облику таласа са фреквенцијама у интервалу $d\omega$ (упор. § 66). Добива се замјеном у (67,8) вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ његовом *Fourier*-овом компонентом $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ и истовременим множењем са 4π [упор. формуле (66,6) и (66,9)]:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{8\pi}{3c^3}(\ddot{\mathbf{d}}_\omega)^2\, d\omega.$$

Према дефиницији *Fourier*-ове компоненте, имамо:

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

одакле је $\ddot{\mathbf{d}}_\omega = -\omega^2\mathbf{d}_\omega$. На тај начин добивамо:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3}|\mathbf{d}_\omega|^2\, d\omega. \tag{67,10}$$

Код периодичног кретања честица налази се на аналоган начин интензитет зрачења са фреквенцијом $\omega = n\omega_0$ [упор. (66,10)] у облику

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3}|\mathbf{d}_n|^2. \tag{67,11}$$

§ 68. Зрачење при сударима

У задацима о зрачењу при сударима ријеђе се проучава зрачење при судару двију честица, које се крећу по одређеним путањама. Обично се третира расипање читавог снопа честица, које се крећу паралелно, па се задатак састоји у одређивању укупног зрачења. које се односи на јединицу густине флукса честица.

Ако је густина флукса равна јединици, тј., ако у јединици времена кроз јединицу површине пресјека снопа пролази једна честица, онда број честица, које пролазе са „нишанским растојањем“ или „параметром судара“[1]) међу ϱ и $\varrho + d\varrho$, износи $2\pi\varrho d\varrho$ (а то је површина ограничена круговима полупречника ϱ и $\varrho + d\varrho$). Због тога тражено укупно зрачење добива се множењем укупног зрачења $\Delta\mathcal{E}$ једне честице (са задатом вриједношћу параметра судара) са $2\pi\varrho d\varrho$ и интегрирањем по $d\varrho$ од 0 до ∞. На тај начин добивена величина има димензије производа енергије и површине. Назваћемо је ефективно зрачење (по аналогији са ефективним пресјеком расипања) и обиљежићемо је са $\varkappa$:

$$\varkappa = \int\limits_0^\infty \Delta\mathcal{E} \cdot 2\pi\varrho\, d\varrho. \tag{68,1}$$

Сасвим аналогно може се одредити ефективно зрачење у одређени елеменат do просторног угла, у одређеном интервалу $d\omega$ фреквенција и т. сл.[2]).

Извешћемо општу формулу, која приказује расподјелу зрачења по правцима при расипању флукса честица централно-симетричним пољем, претпостављајући да је зрачење диполно.

Интензитет зрачења (у сваком моменту) поједине честице расипног флукса одређује се формулом (67,7), у којој је $\mathbf{d}$ диполни моменат честице у односу на центар који расипа[3]). Прије свега, наћићемо средњу вриједност тог израза по свим правцима вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ у равни попречног пресјека флукса. Како је $[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 = \ddot{\mathbf{d}}^2 - (\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})^2$, то ће средњу вриједност имати само величина $(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})^2$. Због централне симетрије поља које расипа и због паралености снопа честица који упада, расипање (а заједно са њим и зрачење) има аксијалну симетрију у односу на осу, која пролази кроз центар паралелно протицању. Узмимо ту осу као осу X. Због симетрије очевидно је, да су средње вриједности производа $\ddot{d}_x \ddot{d}_y$, $\ddot{d}_x \ddot{d}_z$ и $\ddot{d}_y \ddot{d}_z$ једнаке нули, а средње вриједности од $\ddot{d}_y^2$ и $\ddot{d}_z^2$ међусобно једнаке, при чему је очевидно:

$$\overline{\ddot{d}_y^2} = \overline{\ddot{d}_z^2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2).$$

---

[1]) Под параметром судара подразумијева се растојање, за које би се мимоишле честице које се сударају, када би се кретале по правој.

[2]) Ако израз, који се интегрира зависи од угла, под којим се налази пројекција диполног момента честице у равни попречног пресјека снопа, онда се мора претходно наћи његова средња вриједност по свим правцима у тој равни, а тек послије тога треба га помножити са $2\pi\rho\, d\rho$ и интегрирати.

[3]) У ствари, обично се ради о диполном моменту двију честица — оне, која се расипа и оне, која расипа — у односу на њихов заједнички центар инерције.

Имајући све то у виду, лако ћемо наћи:

$$\overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 + \ddot{d}_x^2) + \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\,\ddot{d}_x) \cos^2\theta\,,$$

гдје је θ угао међу правцем зрачења $\mathbf{n}$ и осом X.

Интегрирањем интензитета по времену и по свим параметрима судара добивамо слиједећи дефинитивни израз, који одређује ефективно зрачење у зависности од правца зрачења:

$$d\varkappa_{\mathbf{n}} = \frac{do}{4\pi c^3}\left[A + B\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right], \qquad (68,2)$$

гдје је:

$$A = \frac{2}{3}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\mathbf{d}}^2\, dt \cdot 2\pi\varrho\; d\varrho, \quad B = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\,\ddot{d}_x^2)\, dt \cdot 2\pi\varrho\, d\varrho. \qquad (68,3)$$

Други члан у (68,2) написан је у таквом облику, да интегрирањем по do у резултату даје нулу.

Интензитет зрачења, које настаје при расипању, може се подијелити у два дијела: зрачење, поларизовано у равни, која пролази кроз X осу и правац $\mathbf{n}$ (узмимо ту раван као XY раван), и зрачење, поларизовано у равни, која је нормална на наведеној равни. Вектор електричног поља је оријентисан као вектор

$$(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{n}\,(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}}$$

[в. (67,6)]. Компонента тога вектора у правцу нормалном на раван XY износи $-\ddot{d}_z$, а пројекција на раван XY износи $\sin\theta\, \ddot{d}_x - \cos\theta\, \ddot{d}_y$. Дизањем $\mathbf{E}$ на квадрат и налажењем средње вриједности по свим правцима вектора $\mathbf{d}$ у равни YZ, прије свега видимо, да производ пројекција поља на раван XY и нормалних на њој, постаје једнак нули. То значи, да се интензитет стварно може претставити у облику збира два независна дијела—интензитета зрачења, које је поларизовано у двијема међусобно нормалним равнима.

Интензитет зрачења са електричним вектором у равни XY одређује се средњим квадратом $\overline{\ddot{d}_z^2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2)$. За одговарајући дио ефективног зрачења добивамо израз:

$$d\varkappa_{\mathbf{n}}^{\|} = \frac{do}{4\pi c^3}\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2)\, dt \cdot 2\pi\varrho\, d\varrho. \qquad (68,4)$$

Напомињемо, да је овај дио зрачења изотропан по правцима. Није потребно писати израз за ефективно зрачење са правцем електричног поља у равни, нормалној на оси снопа и на вектору $\mathbf{n}$, јер је очевидно да је $d\varkappa_{\mathbf{n}}^{\|} + d\varkappa_{\mathbf{n}}^{|} = d\varkappa_{\mathbf{n}}$.

На аналоган начин може се добити израз за расподјелу ефективног зрачења по правцима у одређеном интервалу фреквенција $d\omega$. Нећемо поново наводити расматрања, која су сасвим аналогна горе наведеним, него ћемо навести дефинитиван израз:

$$d\varkappa_{\mathbf{n},\omega} = \frac{do \cdot d\omega}{c^3}\left[A(\omega) + B(\omega)\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right], \tag{68,5}$$

гдје је

$$A(\omega) = \frac{2\omega^4}{3}\int\limits_0^\infty \mathbf{d}_\omega^2\, 2\pi\varrho\, d\varrho, \quad B(\omega) = \frac{\omega^4}{3}\int\limits_0^\infty (\mathbf{d}_\omega^2 - d_{\chi\omega}^2)\, 2\pi\varrho\, d\varrho. \tag{68,6}$$

Извешћемо даље неке формуле, које се односе на онај дио спектралног разлагања зрачења при судару, за који фреквенције испуњавају услов

$$\omega\tau \ll 1, \tag{68,7}$$

гдје је τ величина реда трајања судара. У интегралу:

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}\, e^{i\omega t}\, dt$$

поље зрачења $\mathbf{H}$ примјетно је различито од нуле само у току времена величине реда τ. Због тога, уз услов (68,7), можемо сматрати, да је под интегралом $\omega t \ll 1$, па се $e^{i\omega t}$ може замијенити јединицом. Тада је

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}\, dt.$$

Замјењујући овдје израз (66,7) $\mathbf{H} = \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n})$ и интегрирајући по времену, добивамо:

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{2\pi c}[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \times \mathbf{n}], \tag{68,8}$$

гдје је $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ промјена векторског потенцијала поља, које за вријеме судара изазивају честице које се сударају.

Замјеном (68,8) у (66.9) наћићемо тотално зрачење у току судара. Овдје ћемо само навести резултат интегрирања по свим правцима [интегрирање се врши тачно онако, као при извођењу (67,8) из (67,7)]:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2}{3\pi c}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)^2 R_0^2\, d\omega. \tag{68,9}$$

Видимо, да за мале фреквенције зрачење не зависи од фреквенције, тј. када $\omega \to 0$ онда $\frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega}$ тежи некој константној граници [1]).

---

[1]) Интегрирањем по параметрима судара може се добити аналоган резултат за ефективно зрачење при расипању снопа честица. Ипак треба имати у виду, да тај резултат не важи за ефективно зрачење при *Coulomb*-овом узајамном дјејству честица које се сударају, а то у вези с тим, што је интеграл по $d\rho$ дивергентан (логаритамски) за велика ρ. У слиједећем параграфу видјећемо, да у том случају ефективно зрачење за мале фреквенције није константно, него логаритамски зависи од фреквенције.

Када су брзине честица, које се сударају, мале у односу на брзину свјетлости, а зрачење је диполно, онда, користећи се изразом (67,5), добивамо

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2}{3\pi c^3}\left(\sum e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\right)^2, \tag{68,10}$$

гдје су $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ брзине честица прије и послије судара, а сумирање се врши по честицама које се сударају. Ако су, пак, брзине честица упоредљиве са брзином свјетлости, онда се у (68,9) треба послужити потенцијалом поља у облику (66,4).

§ 69. Зрачење код Coulomb-овог узајамног дејства

У овом параграфу извешћемо низ формула, које се односе на диполно зрачење система двију наелектрисаних честица. Претпоставља се, да су брзине честица мале у односу на брзину свјетлости.

Равномјерно кретање система као цјелине (тј. кретање центра инерције система) не доводи до зрачења, те за нас овдје није интересантно. Због тога ћемо посматрати само релативно кретање честица. Узмимо координатни почетак у центру инерције. Тада се диполни моменат система $\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2$ може писати у облику

$$\mathbf{d} = \frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2}\,\mathbf{r}\,, \tag{69,1}$$

гдје се индекси 1 и 2 односе на обије честице, а $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ је радиус-вектор међу њима.

Почећемо са зрачењем при елиптичком кретању двију честица, које се привлаче према *Coulomb*-овом закону. Као што је познато из механике[1]), то се кретање може приказати као кретање честице масе $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (редукована маса честица m_1 и m_2) по елипси, која у поларним координатама има једначину облика:

$$1 - \varepsilon \cos\varphi = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}\,, \tag{69,2}$$

гдје су велика полуоса a и ексцентрицитет ε једнаки:

$$a = \frac{\alpha}{2\,|\mathcal{E}|}\,, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2\,|\mathcal{E}|\,M^2}{\mu\,\alpha^2}}\,. \tag{69,3}$$

Овдје је $\mathcal{E}$ тотална енергија честица (негативна код финитног кретања), $M = \mu r^2 \dot{\varphi}$ — моменат количине кретања, α — константа у *Coulomb*-овом закону ($\alpha = |e_1 e_2|$). Зависност координата од времена може се написати у облику параметарских једначина:

$$r = a(1 - \varepsilon\cos\xi), \qquad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}\,(\xi - \varepsilon\sin\xi). \tag{69,4}$$

---

[1]) В. напр. „Механика“, § 20.

Једном пуном обрту по елипси одговара промјена параметра ξ од нуле до 2π. Период кретања износи:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}\,.$$

Сада ћемо одредити *Fourier*-ове компоненте диполног момента. Због периодичности кретања ради се о разлагању у *Fourier*-ов ред. Како је диполни моменат пропорционалан радиус-вектору $\mathfrak{r}$, задатак се своди на израчунавање *Fourier*-ових компонената координата $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$. Зависност x и y од времена одређује се према (69,2) — (69,4) параметарским једначинама:

$$x = a(\varepsilon - \cos\xi), \qquad y = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\xi, \qquad \omega_0 t = \xi - \varepsilon\sin\xi \tag{69,5}$$

(увели смо фреквенцију $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}}$) .

Умјесто *Fourier*-ових компонената координата згодније је израчунати *Fourier*-ове компоненте брзина, узевши у обзир да је $\dot{x}_n = -i\omega_0 n x_n$, $\dot{y}_n = -i\omega_0 n y_n$. Онда је

$$x_n = \frac{\dot{x}_n}{-i\omega_0 n} = \frac{i}{\omega_0 n}\,\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\omega_0 nt}\,\dot{x}\,dt.$$

Али, $\dot{x}\,dt = dx = a\sin\xi\,d\xi$. На тај начин, прелазећи од интегрирања по dt на интегрирање по $d\xi$, имамо:

$$x_n = \frac{ia}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon\sin\xi)}\sin\xi\,d\xi.$$

На сличан начин налазимо:

$$y_n = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\cos\xi\,d\xi = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n\varepsilon}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\,d\xi$$

[при прелазу од првог интеграла на други у подинтегралном изразу пишемо $\cos\xi \equiv \left(\cos\xi - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}$; тада се интеграл са $\left(\cos\xi - \frac{1}{\varepsilon}\right)$ сабира и притом идентично постаје једнак нули]. Најзад, ако се примијени позната формула из теорије *Bessel*-ових функција, добива се:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x\sin\xi)}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\xi - x\sin\xi)\,d\xi = J_n(x),$$

гдје је $J_n(x)$ *Bessel*-ова функција реда цијелог броја $\boldsymbol{n}$. У резултату дефинитивно добивамо слиједеће изразе за тражене *Fourier*-ове компоненте:

$$x_n = \frac{a}{n}J'_n(n\varepsilon), \qquad y_n = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\varepsilon}J_n(n\varepsilon) \tag{69,6}$$

(цртица код *Bessel*-ове функције означава диференцирање по њеном аргументу).

Израз за интензитет монохроматичних компонената зрачења добива се уврштавањем x_ω и y_ω у формулу (67,11):

$$I_n = \frac{4\,\omega_4^0 n^2 a^2}{3\,c^3}\left[J_n^{\prime 2}(n\varepsilon) + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\,J_n^2(n\varepsilon)\right]\left(\frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2}\right)^2. \qquad (69,7)$$

Напишимо напосе, асимптотски израз за интензитет, када је n врло велико[1]·

$$I_n = \frac{2\,\omega_0^4 a^2 n}{3\pi c^3 \varepsilon^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \left[\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]^{2n}. \qquad (69,8)$$

Ова формула може се примијенити када ε није сувише близу јединице; наиме, неопходно је да буде испуњен услов

$$n\,(1-\varepsilon^2)^{3/2} \gg 1.$$

Посматраћемо, затим, судар двију наелектрисаних честица, које се привлаче. Њихово релативно кретање описује се као кретање честице масе μ по хиперболи

$$1 - \varepsilon\cos\varphi = \frac{a\,(\varepsilon^2 - 1)}{r}, \qquad (69,9)$$

гдје је

$$a = \frac{\alpha}{2\,\mathcal{E}}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,\mathcal{E} M^2}{\mu\,\alpha^2}}, \qquad (69,10)$$

(сада је $\mathcal{E} > 0$). Зависност r од времена приказује се параметарским једначинама:

$$r = a\,(\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\xi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}\,(\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\xi - \xi), \qquad (69,11)$$

гдје параметар ξ поприма вриједности од $-\infty$ до $+\infty$. За координате x и y имамо:

$$x = a\,(\mathrm{ch}\,\xi - \varepsilon), \quad y = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,\mathrm{sh}\,\xi. \qquad (69,12)$$

Израчунавање *Fourier*-ових компонената (овдје се ради о разлагању у *Fourier*-ов интеграл) врши се сасвим аналогно претходном случају. У резултату се добива:

$$x_\omega = -\frac{a}{2\omega}H^{(1)\prime}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\,\varepsilon\right), \quad y_\omega = -\frac{a\sqrt{\varepsilon^2-1}}{2\omega\,\varepsilon}\,H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\,\varepsilon\right). \qquad (69,13)$$

---

[1] За добивање формула (69,8) из (69.7) треба примијенити асимптотску формулу, која је позната из теорије *Bessel*-ових функција:

$$J_n(n\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,(1-\varepsilon^2)^{1/4}}\left[\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]^n,$$

која важи за $n\,(1-\varepsilon^2)^{3/2} \gg 1$. Напомињемо, да је *V. A. Fok* добио општију формулу, која одређује $J(n\varepsilon)$ за велике вриједности n и за произвољне ε (Д.А.Н. **1**, 97, 1934).

Овдје је $H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}$ *Hanckel*-ова функција прве врсте и реда $\frac{i\omega}{\omega_0}$, а $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}}$ (наравно, ω_0 није сада фреквенција кретања). При израчунавању употребљена је формула из теорије *Bessel*-ових функција:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\nu\xi - ix\,\mathrm{sh}\,\xi}\,d\xi = i\pi\,H^{(1)}_{\nu}(ix). \qquad (69{,}14)$$

Уврштавањем добивених израза у формулу (66,10) добива се тотално зрачење при судару за интервале фреквенција $d\omega$[1]:

$$d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{2\pi\,\omega^2 a^2}{3c^3}\left(\frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \left\{-\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2}\left[H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\varepsilon\right)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[H^{(1)\prime}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\varepsilon\right)\right]^2\right\} d\omega. \qquad (69{,}15)$$

Врло је важно „ефективно зрачење", које карактерише зрачење при расипању снопа честица, које се паралелно крећу (в. претходни параграф). Да би се оно израчунало, помножимо $d\mathcal{E}_{\omega}$ са $2\pi\varrho\,d\varrho$ и интегрирајмо по свима ϱ од нуле до бесконачности. Интегрирање по $d\varrho$ замјењујемо интегрирањем по $d\varepsilon$ (у границама од 1 до ∞), користећи се чињеницом, да је $2\pi\varrho\,d\varrho = 2\pi a^2\,\varepsilon\,d\varepsilon$ (ова релација добива се из дефиниција (69,9), у којима су моменат M и енергија $\mathcal{E}$ везани са параметром судара ϱ и брзином честице у бесконачности v_0 помоћу релација $M = \mu v_0 \varrho$, $\mathcal{E} = \frac{\mu v_0^2}{2}$. Добивени интеграл се приказује непосредно помоћу формуле:

$$z\left[Z_p^{\prime 2} + \left(\frac{p^2}{z^2} - 1\right)Z_p^2\right] = \frac{d}{dz}\left(z\,Z_p\,Z_p^{\prime}\right),$$

гдје је $Z_p(z)$ ма које рјешење *Bessel*-ове једначине реда p[2]). Имајући у виду, да за $\varepsilon \to \infty$ *Hanckel*-ова функција $H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\varepsilon\right)$ тежи нули, у резултату се добива слиједећа формула:

$$d\varkappa_{\omega} = \frac{4\pi^2 i a^2 \omega}{3c^3}\sqrt{\frac{\alpha\,a}{\mu}}\left[\frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2}\right]^2 H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) H^{(1)\prime}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cdot \qquad (69{,}16)$$

---

[1]) Код узимање квадрата модула треба имати у виду, да је y_{ω} чисто имагинарно, а x_{ω} чисто реално.

[2]) Ова формула је непосредна посљедица *Bessel*-ове једначине:

$$Z'' + \frac{1}{z}Z' + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right)Z = 0.$$

Посматрајмо, напосе, граничне случајеве малих и великих фреквенција. У интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi - \operatorname{sh}\xi)}\, d\xi = i\pi H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right), \qquad (69,17)$$

који дефинише *Hanckel*-ову функцију, битна је само она област вриједности промјенљиве интегрирања ξ, у којој експоненцијални фактор има величину реда јединице. Због тога је за мале фреквенције $(\omega \ll \omega_0)$ битна област великих ξ. Али код великих ξ имамо $\operatorname{sh}\xi \gg \xi$. Отуда је приближно:

$$H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cong -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\omega}{\omega_0}\operatorname{sh}\xi}\, d\xi = H^{(1)}_0\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right).$$

На аналоган начин налазимо, да је

$$H^{(1)'}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cong H^{(1)'}_0\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right).$$

Користећи се најзад приближним изразом (за мале x), познатим из теорије *Bessel*-ових функција:

$$iH^{(1)}_0(ix) \cong \frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x}$$

($\gamma = e^C$, гдје је C — *Euler*-ова константа; $\gamma = 1{,}78107\ldots$), добивамо слиједећи израз за ефективно зрачење када су фреквенције мале:

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\, e_1^2 e_2^2}{3 v_0^2 c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \ln\left(\frac{2 v_0^3\, m_1 m_2}{\gamma\omega\, |e_1 e_2|\, (m_1 + m_2)}\right) d\omega \qquad (68,18)$$

$$\text{за } \omega \ll \frac{\mu v_0^3}{|e_1 e_2|}.$$

Оно зависи од фреквенције логаритамски.

Када су фреквенције велике $(\omega \gg \omega_0)$, онда су, напротив, у интегралу (69,17) битни мали ξ. У вези са тим разлажемо експоненцијални фактор подинтегралног израза по степенима ξ и имамо приближно:

$$H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cong -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\omega}{6\omega_0}\xi^3}\, d\xi = -\frac{2i}{\pi}\operatorname{Re}\left\{\int_0^{\infty} e^{-\frac{i\omega}{6\omega_0}\xi^3}\, d\xi\right\}.$$

Овај се интеграл замјеном $\frac{i\omega}{6\omega_0}\xi^3 = \eta$ своди на Γ-функцију, па се у резултату добива:

$$H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cong -\frac{i}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6\omega_0}{\omega}\right)^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Аналогно налазимо:

$$H^{(1)'}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\,\omega}{\omega_0}\right)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6\,\omega_0}{\omega}\right)^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Најзад, примјеном познате формуле из теорије Γ-функција

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

добивамо за ефективно зрачење при великим фреквенцијама:

$$d\varkappa_\omega=\frac{16\,\pi e_1^2 e_2^2}{3\sqrt{3}v_0^2c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 d\omega,\quad \text{за } \omega\gg\frac{\mu v_0^3}{|e_1\,e_2|},\tag{69,19}$$

тј, израз, који не зависи од фреквенције.

Пређимо сада на зрачење, које се појављује при судару двију честица које се одбијају по закону $U=\frac{\alpha}{r}$ $(\alpha>0)$. Кретање се врши по хиперболи

$$-1+\varepsilon\cos\varphi=\frac{a\,(\varepsilon^2-1)}{r}.\tag{69,20}$$

Зависност од времена приказује се параметарским једначинама:

$$x=a\,(\varepsilon+\operatorname{ch}\xi),\quad y=-\,a\sqrt{\varepsilon^2-1}\operatorname{sh}\xi,$$

$$t=\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}\,(\varepsilon\operatorname{sh}\xi+\xi)\tag{69,21}$$

[a и ε су из (69,10)]. Сва израчунавања за овај случај директно се своде на већ наведена, па их није потребно поново изводити. Заиста, интеграл

$$x_\omega=\frac{i\,a}{2\pi\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\varepsilon\operatorname{sh}\xi+\xi)}\operatorname{sh}\xi\,d\xi$$

за *Fourier*-ове компоненте координате x са замјеном $\xi\to\iota\pi-\xi$ своди се на исти интеграл као и код привлачења, само помножен са $e^{-\pi\omega/\omega_0}$. Исто важи и за y_ω.

Према томе, изрази за *Fourier*-ове компоненте x_ω, y_ω у случају одбијања разликују се од одговарајућих израза код привлачења, само по факторима $e^{-\pi\omega/\omega_0}$. Дакле, у формулама за зрачење појављују се сувишни фактори $e^{-2\pi\omega/\omega_0}$. Напосе, за мале фреквенције добива се ранија формула (69,18) (јер је за $\omega\ll\omega_0 : e^{-2\pi\omega/\omega_0}\cong 1$). За велике фреквенције ефективно зрачење има облик:

$$d\varkappa_\omega=\frac{16\,\pi\,e_1^2\,e_2^2}{3\sqrt{3}\,v_0^2\,c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 e^{\frac{-2\pi\omega e_1 e_2}{\mu r_0^3}}\,d\omega,\quad \text{за } \omega\gg\frac{\mu v_0^3}{e_1\,e_2}\cdot\tag{69,22}$$

Оно опада експоненцијално са повећањем фреквенције.

Задаци

1. Одредити укупни средњи интензитет зрачења код елиптичног кретања два оптерећења која се привлаче.

Рјешење. Са изразом (69,1) за диполни моменат имамо за укупни интензитет зрачења:

$$I = \frac{2}{3\,c^3}\left(\frac{e_1\,m_2 - e_2\,m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2.$$

Према једначини кретања је $\mu\,\ddot{\mathbf{r}} = \frac{|\,e_1\,e_2\,|}{r^3}\,\mathbf{r}$ (μ—редукована маса), па је:

$$I = \frac{2\;e_1^2\,e_2^2}{3\;c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{1}{r^4}\,.$$

r изражавамо помоћу φ према једначини орбите (69,2), а интегрирање по времену помоћу једначине $dt = \mu\,r^2\,\frac{d\varphi}{M}$ замијенимо интегрирањем по углу (од 0 до 2π). У резултату налазимо за средњи интензитет $\overline{I} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T I\,dt$ слиједећи израз:

$$\overline{I} = \frac{2^{3/2}}{3\;c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\mu^{5/2}\;|\,e_1\;e_2\,|^3 |\mathcal{E}\,|^{3/2}}{M^5}\left(\;3 - \frac{2\,|\,\mathcal{E}\,|\;M^2}{\mu\,e_1^2\,e_2^2}\right).$$

2. Одредити тотално зрачење $\Delta\,\mathcal{E}$ при судару двију наелектрисаних честица.

Рјешење. У случају привлачења, трајекторија биће хипербола (69,9), а у случају одбијања (69,20). Асимптоте хиперболе чине са њеном осом угао φ_0, који се одређује из $\cos\varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, а угао скретања честица (у координатном систему, у којем центар инерције мирује) биће $\chi = \pi - 2\,\varphi_0$. Израчунавање врши се исто као и у задатку 1 (интеграл по $d\varphi$ узима се у границама међу $-\varphi_0$ и $+\varphi_0$) У случају привлачења као резултат налазимо:

$$\Delta\,\mathcal{E} = \frac{\mu^3\,v_0^5}{3c^3\,|e_1 e_2\,|}\;\mathrm{tg}^3\,\frac{\chi}{2}\left\{(\pi + \chi)\left(\;1 + 3\;\mathrm{tg}^2\,\frac{\chi}{2}\;\right) + 6\;\;\mathrm{tg}\,\frac{\chi}{2}\right\}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2,$$

а у случају одбијања:

$$\Delta\,\mathcal{E} = \frac{\mu^3\,v_0^5}{3c^3\;e_1 e_2}\;\;\mathrm{tg}^3\,\frac{\chi}{2}\left\{(\pi - \chi)\left(1 + 3\;\;\mathrm{tg}^2\,\frac{\chi}{2}\right) - 6\;\;\mathrm{tg}\,\frac{\chi}{2}\right\}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\;\right)^2.$$

У оба случаја под χ подразумијева се позитивни угао, који се одређује из релације $\mathrm{ctg}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{\mu\,v_0^2\,\rho}{|\,e_1 e_2\,|}$, гдје је ρ „параметар судара“.

Тако ће при „фронталном“ судару ($\rho = 0$, $\chi = \pi$) двију наелектрисаних честица бити:

$$\Delta\,\mathcal{E} = \frac{8\mu^3\,v_0^5}{45c^3\;e_1\;e_2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

3. Одредити тотално ефективно зрачење при расипању снопа честица (оптерећења e_1 и масе m_1) на оптерећењу e_2 (масе m_2). (Оптерећења e_1 и e_2 су истог знака).

Рјешење: Тражена величина је

$$\varkappa = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty I\,dt \cdot 2\pi\rho\; d\rho = \frac{2e_1^2 e_2^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{r^4}\,dt \cdot \rho\; d\rho \cdot$$

Интегрирање по времену замијенићемо интегрирањем по dr дуж трајекторије честице, пишући $dt = \dfrac{dr}{v_r}$, гдје се радијална брзина $v_r \equiv \dot{r}$ изражава помоћу r формулом:

$$v_r = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left[\mathcal{E} - \frac{M^2}{2\,\mu r^2} - U(r)\right]} = \sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{2e_1 e_2}{\mu r}}\,.$$

Интегрирање по dr врши се у границама од ∞ до најближег растојања r_0 од центра (тачка у којој $v_r = 0$), а затим од r_0 поново до бесконачности. То се своди на двоструки интеграл од r_0 до ∞. Израчунавање двоструког интеграла подесно је извршити, ако се измијени редослијед интегрирања, односно, ако се најприје интегрира по $d\rho$, а затим по dr. Као резултат израчунавања добива се слиједећи резултат:

$$\varkappa = \frac{8\pi}{9}\,\frac{e_1 e_2 m_1 m_2}{c^3(m_1 + m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

4. Одредит ирасподјелу тоталног зрачења по правцима при пролијетању једне наелектрисане честице поред друге, ако је брзина толико велика (макар да је и мала у односу на брзину свјетлости), да се скретање од праволиниског кретања може сматрати мало.

Рјешење. Угао скретања је мали, ако је кинетичка енергија $\mu\dfrac{v^2}{2}$ велика у односу на потенцијалну енергију, чији је ред величине $\dfrac{a}{\rho}$ $(\mu v^2 \gg a\rho)$. Узмимо правац кретања као осу X, а координатни почетак опет у центру инерције. У првој апроксимацији трајекторија се одређује као $x = vt$, $y = \rho$. У слиједећој апроксимацији једначине кретања дају:

$$\mu\ddot{x} = \frac{a}{r^2}\,\frac{x}{r} = \frac{avt}{r^3}\,; \quad \mu\ddot{y} = \frac{a}{r^2}\,\frac{y}{r} = \frac{a\rho}{r^3}\,,$$

гдје се за r може написати $r = \sqrt{\rho^2 + v^2 t^2}$. Интегрирајући помоћу тих израза формулу (67,7) по времену у границама од $-\infty$ до $+\infty$, налазимо за тотално зрачење у просторни угао do:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \frac{a^2}{32\,v\,c^3\,\rho^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 (4 - 3\,n_x^2 - n_y^2)\,do.$$

(n_x и n_y су компоненте јединичног вектора $\mathbf{n}$ у правцу do).

§ 70. Квадруполно и магнетно диполно зрачење

Посматрајмо зрачење, које је условљено слиједећим члановима реда векторског потенцијала (66,2), Ако су димензије система мале у односу на таласну дужину, онда су, уопште узевши, ти чланови знатно мањи од првог члана, који приказује диполно зрачење. Међутим, они су важни у оним случајевима, када је диполни моменат система оптерећења једнак нули, па зато нема диполног зрачења.

Развијањем (66,2), тј.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t' + \frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV$$

по степенима $\frac{\mathbf{rn}}{c}$, налазимо с тачношћу до чланова првог реда:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}\, dV + \frac{1}{c^2 R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int (\mathbf{rn})\,\mathbf{j}_{t'}\, dV\,.$$

Стављајући $\mathbf{j} = \varrho\mathbf{v}$, препишимо $\mathbf{A}$ у облику

$$\mathbf{A} = \frac{\Sigma e\mathbf{v}'}{cR_0} + \frac{1}{c^2 R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\sum e\,\mathbf{v}'(\mathbf{r}'\mathbf{n}). \tag{70,1}$$

(Даље ћемо, као и у § 67, због краткоће изостављати индекс t'). У другом члану са десне стране можемо писати

$$\mathbf{v}\,(\mathbf{rn}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}\,(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2}\mathbf{v}\,(\mathbf{nr}) - \frac{1}{2}\mathbf{r}\,(\mathbf{nv}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}\,(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2}[(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\times\mathbf{n}].$$

Тада за $\mathbf{A}$ налазимо израз:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\mathbf{r}\,(\mathbf{nr}) + \frac{1}{cR_0}(\dot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n}),$$

гдје је $\mathbf{d}$ диполни моменат система, а $\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum e\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$ — магнетни моменат система. Ради даље трансформације напомињемо, да се вектору $\mathbf{A}$ може, без промјене поља, додати ма који вектор, који би био пропорционалан са $\mathbf{n}$, јер се у вези формула (66,3) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ притом не мијењају.

На основу тога додајмо добивеном изразу за $\mathbf{A}$ вектор

$$-\frac{\mathbf{n}}{6c^2 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e r^2.$$

Тада добивамо:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\,[3\,\mathbf{r}\,(\mathbf{nr}) - \mathbf{n}r^2] + \frac{1}{cR_0}(\dot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n}).$$

Али израз под знаком $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ није ништа друго, него производ $n_\beta D_{\alpha\beta}$ вектора $\mathbf{n}$ и тензора квадруполног момента $D_{\alpha\beta} = \sum e\,(3\,x_\alpha\, x_\beta - \delta_{\alpha\beta}\, r^2)$ (в. § 40). Уведемо ли вектор $\mathbf{D}$ са компонентама $D_\alpha = D_{\alpha\beta}\, n_\beta$, налазимо дефинитиван израз за векторски потенцијал:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2 R_0}\ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{cR_0}(\dot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n}). \tag{70,2}$$

Када знамо $\mathbf{A}$, можемо одредити поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ зрачења. Помоћу опште формуле (66,3) налазимо слиједеће изразе:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0}\left\{ (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) + \frac{1}{6c}(\dddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}) + [(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}]\right\} \cdot$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0}\left\{[(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] + \frac{1}{6c}[(\dddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] + (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}})\right\} \cdot \qquad (70,3)$$

Интензитет зрачења dI у просторном углу do одређује се према општој формули (66,6). Овдје ћемо одредити укупно зрачење, тј. енергију, коју систем зрачи у јединици времена у свим правцима. Због тога узмимо средњу вриједност од dI по свим правцима $\mathbf{n}$. Очевидно је, да је укупно зрачење једнако тој средњој вриједности помноженој са 4π. Код налажења средње вриједности квадрата магнетног поља ишчезавају сви производи првог, другог и трећег члана у $\mathbf{H}$, тако да остају само средње вриједности њихових квадрата. Једноставна израчунавања[1]) дају за резултат слиједећи израз за I:

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta} + \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{m}}^2. \qquad (70,4)$$

На тај начин, укупно зрачење састоји се из три независна дијела. Они се називају респективно диполно, квадруполно и магнетно-диполно зрачење.

Напомињемо, да магнетно-диполно зрачење у многим случајевима фактично не постоји. Тако, оно не постоји у систему, у којем је однос оптерећења и масе исти код свих честица које се крећу (у том случају нема ни диполног зрачења, као што је већ наведено у § 67). Стварно, код таквог система магнетни моменат је пропорционалан механичком моменту импулса (в. § 43), па је зато, на основу закона одржања посљедњег, $\ddot{\mathbf{m}} = 0$. Из истог разлога (в. задатак у § 43) магнетно-диполно зрачење не постоји ни у једном систему, који се састоји из два оптерећења (што се, међутим, не може казати о диполном зрачењу).

Задатак

Израчунати тотално ефективно зрачење при расипању снопа наелектрисаних честица на честицама, које су једнаке са њима.

Рјешење. При судару једнаких честица не постоји диполно (а исто тако ни магнетно-диполно, зрачење, па треба израчунати квадруполна зрачења. Тензор квадру-

---

[1]) Наводимо згодан метод налажења средњих вриједности производа компонената јединичног вектора. Будући да је $\mathbf{n}$ јединични вектор, онда се $\overline{n_\alpha n_\beta}$, будући симетричан тензор, може само изразити помоћу јединичног тензора $\delta_{\alpha\beta}$, тј. $\overline{n_\alpha n_\beta} = a\delta_{\alpha\beta}$. Упрошћавањем по паровима индекса α, β и узевши у обзир да је $n_\alpha^2 = 1$, налазимо, да је $a = 1/3$.

За средњу вриједност производа четири компоненте пишемо аналогно ($\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = a(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$) (имајући у виду симетричност $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}$ за сва четири индекса). Упрошћавањем по паровима индекса α, β и γ, δ налазимо $a = 1/15$.

полног момента система од двије једнаке честице (у односу на њихов заједнички моменат инерције) износи:

$$D_{\alpha\beta} = \frac{e}{2}\left(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}\right),$$

гдје су x_α компоненте радиус-вектора $\mathbf{r}$ међу честицама. Увртићемо тај израз у формулу $I = \frac{1}{180\,c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}$ за интензитет зрачења. Први, други и трећи извод по времену од ксордината x_α изразићемо помоћу одговарајуће брзине честице v_α:

$$\dot{x}_\alpha = v_\alpha, \quad \mu\ddot{x}_\alpha = \frac{m}{2}\ddot{x}_\alpha = \frac{e^2 x_\alpha}{r^3}, \quad \frac{m}{2}\dddot{x}_\alpha = e^2\,\frac{v_\alpha r - 3x_\alpha v_r}{r^4},$$

гдје је $v_r = \mathbf{vr}$ — радијална компонента брзине (друга једнакост претставља једначину кретања оптерећења, а трећа се добива диференцирањем друге). Израчунавањем се долази до слиједећег израза за интензитет:

$$I = \frac{4\,e^6}{5\,m^2\,c^5}\frac{1}{r^4}\left(v^2 + 11\,v_\varphi^2\right)$$

$(v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2)$; v и v_φ изражавамо помоћу r релацијама

$$v^2 = v_0^2 - \frac{4e^2}{mr}, \qquad v_\varphi = \frac{\rho\,v_0}{r}.$$

Интегрирање по времену замијенимо интегрирањем по dr слично поступку у задатку 3 § 69, односно

$$dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{4e^2}{mr}}}.$$

У двоструком интегралу (по dr и $d\rho$) вршимо најприје интегрирање по $d\rho$, а затим по dr. На крају рачунања добива се слиједећи резултат:

$$\varkappa = \frac{8\,\pi}{3}\cdot\frac{e^4\,v_0^3}{m\,c^5}.$$

§ 71. Поље зрачења на малим растојањима

Формуле диполног зрачења биле су изведене за поље на растојањима, која су велика у односу на таласну дужину (и знатно већа од димензија система који зрачи). У овом параграфу сматраћемо, да је таласна дужина велика у односу на димензије система, али ћемо поље посматрати на растојањима, ма да и великим у односу на размјере система, али која су реда таласне дужине.

Формула (67,4) за векторски потенцијал

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}} \tag{71,1}$$

према изложеном важи и овдје, јер је за њено извођење узета само та околност, да је R_0 велико у односу на димензије система. Међутим, поље не треба сада сматрати као равни талас чак ни у малим областима. Због тога се формуле (67,5) и (67,6) за електрично и магнетно поље не могу више примијенити, па за њихово израчунавање треба претходно одредити и $\mathbf{A}$ и φ.

Формула за скаларни потенцијал може се добити из израза за $\mathbf{A}$ директно помоћу општег услова (62,3)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

који задовољавају потенцијали. Стављајући овдје (71,1) и интегрирајући по времену, наћићемо:

$$\varphi = - \operatorname{div} \frac{\mathbf{d}}{R_0}\,. \tag{71,2}$$

Овдје не пишемо константу интегрирања (произвољну функцију од координата), јер нас интересује само промјенљиви дио потенцијала. Напомињемо, да у формули (71,2), као и у (71,1), треба вриједност $\mathbf{d}$ узети у моменту $t' = t - \frac{R_0}{c}$[1].

Сада више не претставља никакве тешкоће израчунавање електричног и магнетног поља. Према обичним формулама, које повезују $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ са потенцијалима, налазимо:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0}, \tag{71,3}$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{\mathbf{d}}{R_0} - \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}\,. \tag{71,4}$$

Израз за $\mathbf{E}$ може се написати у другом облику, уз напомену, да $\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{t'}}{R_0}$ [као и свака функција од координата и времена облика $\frac{1}{R_0} f\left(t - \frac{R_0}{c}\right)$] задовољава *D'Alembert*-ову једначину:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0} = \Delta \frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}\,.$$

Користећи такође и познату формулу векторске анализе

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a},$$

налазимо, да је

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}\,. \tag{71,5}$$

---

[1] Понекад се уводи такозвани *Hertz*-ов вектор, који се дефинише овако:

$$\mathbf{Z} = -\frac{1}{R_0}\mathbf{d}\left(t - \frac{R_0}{c}\right).$$

Тада је:

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{Z}}, \quad \varphi = \operatorname{div} \ddot{\mathbf{Z}}.$$

Добивене формуле одређују поље на растојањима реда таласне дужине. Разумије се, да се у свим тим формулама не смије $\frac{1}{R_0}$ изнијети испред знака диференцирања по координатама, јер је однос чланова, који садрже $\frac{1}{R_0^2}$, према члановима са $\frac{1}{R_0}$, баш величина реда односа таласне дужине и R_0.

Напосљетку написаћемо формуле за *Fourier*-ове компоненте поља. За одређивање $\mathbf{H}_\omega$ ставимо у формулу (71,3) умјесто $\mathbf{H}$ и $\mathbf{d}$ њихове монохроматичне компоненте, тј. респективно $\mathbf{H}_\omega\, e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{d}_\omega\, e^{-i\omega t}$. Међутим, треба имати у виду, да се величине на десној страни једначина (71,1) — (71,5) узимају за моменат $t' = t - \frac{R_0}{c}$. Због тога морамо мјесто $\mathbf{d}$ ставити израз:

$$\mathbf{d}_\omega\, e^{-i\omega\left(t - \frac{R_0}{c}\right)} = \mathbf{d}_\omega\, e^{-i\omega t + ikR_0}.$$

Замјеном и скраћивањем са $e^{-i\omega t}$ налазимо:

$$\mathbf{H}_\omega = -\, ik \operatorname{rot}\left(\mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right)$$

или

$$\mathbf{H}_\omega = ik\left(\mathbf{d}_\omega \times \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right). \qquad (71,6)$$

Аналогно се налази из (71,4):

$$\mathbf{E}_\omega = k^2\, \mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0} + (\mathbf{d}_\omega \nabla)\, \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}. \qquad (71,7)$$

Задатак

Одредити поље квадруполног и магнетно-диполног зрачења на малим растојањима.

Рјешење. Ако због краткоће претпоставимо да диполног зрачења уопште нема, онда имамо (упор. израчунавања из § 70):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}_{t - \frac{R}{c}} \frac{dV}{R} \cong -\frac{1}{c}\int (\mathbf{r}\,\nabla)\, \frac{\mathbf{j}_{t - \frac{R_0}{c}}}{R_0}\, dV$$

(вршимо разлагање по степенима од $\mathbf{r}$; $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$). Насупрот ономе, што смо учинили у § 70, фактор $\frac{1}{R_0}$ сада се не може изнијети испод знака диференцирања. Изнесимо знак диференцирања испод интегралног знака и препишимо формулу са тензорским ознакама:

$$A_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_k}\int \frac{x_k j_i}{R_0}\, dV$$

(X_k означава компоненте радиус-вектора $\mathbf{R}_0$). Прелазећи од интеграла на суму по оптерећењима, налазимо:

$$A_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_k}\frac{(\Sigma e v_i x_k)_{t'}}{R_0}.$$

На исти начин као и у § 70, овај израз се раздјељује на квадруполни и магнетно-диполни дио. Одговарајући скаларни потенцијали израчунавају се из векторског потенцијала као у § 71. Тако се за квадруполно зрачење добива:

$$A_i = -\frac{1}{6c}\frac{\partial}{\partial X_k}\frac{\dot{D}_{ik}}{R_0}, \qquad \varphi = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_i\,\partial X_k}\cdot\frac{D_{ik}}{R_0},$$

а за магнетно-диполно зрачење:

$$\mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{m}}{R_0}, \quad \varphi = 0.$$

(Све величине на десној страни једначина узимају се, као и обично, у моменту $t' = t - \frac{R_0}{c}\Big)$.

§ 72. Зрачење оптерећења, које се брзо креће

Посматрајмо сада оптерећену честицу, која се креће брзином, која није мала у односу на брзину свјетлости. Формуле § 67, изведене под претпоставком $v \ll c$, не могу се на овај случај директно примијенити. Међутим, ми честицу можемо посматрати у оном систему референције, у коме она у датом моменту мирује. У том систему референције, очевидно, поменуте формуле могу се примијенити (скрећемо пажњу на чињеницу, да се то може урадити само у случају једне честице која се креће; за систем оптерећења, наравно, не постоји систем референције, у коме би све честице једновремено мировале).

На тај начин, у наведеном систему референције честица зрачи у току времена dt енергију

$$d\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3}\, w_0^2\, dt. \tag{72,1}$$

[према формули (67,9)], гдје је w_0 убрзање честице у истом систему референције. Препишимо сада ту формулу у четвородимензионалном облику, у коме ће се моћи примијенити у произвољном систему референције. Због тога напомињемо, да је $w_0^2 = c^4 w_k^2$, гдје је w_k 4-убрзање честице у маком систему референције (в. зад. 1 § 7). Даље, умјесто зрачене енергије $d\mathcal{E}$ морамо сада писати „зрачење 4-импулса“ $\frac{c}{i}\,dP_i$, јер је енергија (помножена са $\frac{i}{c}$, временска компонента 4-импулса, а умјесто dt треба из сличног разлога писати $\frac{dx_i}{ic}$. На тај начин налазимо:

$$dP_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 dx_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 u_i\, ds, \tag{72,2}$$

гдје је u_k 4-брзина честице. Лако је провјерити, да у систему референције гдје је $v=0$, временска компонента те једначине у ствари даје (72,1); просторне пак компоненте дају за зрачење импулса у јединици времена $\frac{d\mathbf{P}}{dt}=0$ (за $v=0$ просторне компоненте u_i такође су једнаке нули). Посљедњи резултат може се добити и директно, када се зрачење импулса одреди као интеграл густине флукса импулса по затвореној површини, која обухвата честицу. У систему референције, у коме је $v=0$, зрачење се одређује формулама § 67, и импулс, који се уноси по супротним смјеровима, једнак је по апсолутној величини, а супротан по смјеру, па је наведени интеграл идентично једнак нули.

Тотално зрачење за вријеме пролијетања честице кроз дато електромагнетно поље једнако је интегралу од израза (72,2), тј.

$$\Delta P_i = \frac{2e^2}{3c}\int\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 dx_i.$$

Ова формула може се написати у другом облику, ако се у њој 4-убрзања $\frac{du_i}{ds}$ изразе помоћу тензора електромагнетног поља према једначинама кретања (22,4):

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}F_{kl}u_l.$$

Тада налазимо:

$$\Delta P_i = \frac{2e^4}{3m^2c^5}\int (F_{kl}u_l)^2\,dx_i. \qquad (72,3)$$

Временска компонента ове једначине даје тотално зрачење енергије $\Delta\mathcal{E}$. Узимајући за све четвородимензионалне величине њихове изразе помоћу одговарајућих тродимензионалних величина, налазимо:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\right\}^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\,\mathbf{v})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt. \qquad (72,4)$$

Аналогно, за тотално зрачење импулса имамо:

$$\Delta\mathbf{P} = \frac{2e^4}{3m^2c^5}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\right\}^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\,\mathbf{v})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathbf{v}\,dt. \qquad (72,5)$$

Из формуле (72,4) види се, да код брзина, које су близу брзине свјетлости, тотално зрачење енергије у јединици времена зависи од брзине у основном као $\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{-1}$, тј. пропорционално је квадрату енергије честице у кретању. Изузетак претставља само кретање у електричном пољу, паралелно правцу поља. У том случају фактор $\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]$, који се налази у имениоцу, скраћује се са исто таквим фактором у бројиоцу, па се испоставља, да зрачење не зависи од енергије честице.

На крају, задржаћемо се на питању о расподјели зрачења по правцима честица које се брзо крећу. За рјешавање овог задатка згодно се је послужити *Liénard-Wiechert*-овим изразом за поље (63,8—9). За велика растојања морамо у њему задржати само члан са најнижим степеном $1/R$ [други члан у формули (63,8)]. Увођењем јединичног вектора $\mathbf{n}$ у правцу зрачења ($\mathbf{R} = \mathbf{n}R$) за поље, које изазива оптерећење, имамо, дакле, формулу:

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\left\{\mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{w}\right]\right\}}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^3}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \tag{72,6}$$

гдје се све величине на десној страни ових једначина узимају у ретардованом моменту $t' = t - \frac{R}{c}$ ($\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$ је убрзање честице).

Интензитет зрачења у просторни угао do износу $dI = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 do$. Развијањем квадрата E^2 налазимо:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{2(\mathbf{n}\mathbf{w})(\mathbf{v}\mathbf{w})}{c\left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c}\right)^5} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\mathbf{w})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c}\right)^6} \right\} do. \tag{72,7}$$

Ако, пак, хоћемо да одредимо угалвном расподјелу тоталног зрачења за сво вријеме кретања оптерећења, онда треба интегрирати интензитет по времену. Притом треба имати у виду, да израз који се интегрира, претставља функцију од t'. Због тога треба писати:

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t'} dt' = \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right) dt' \tag{72,8}$$

[в. (63,6)], послије чега се интегрирање врши директно по dt'. На тај начин имамо слиједећи израз за тотално зрачење у елеменат просторног угла do:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \frac{e^2}{4\pi c^3} do \int \left\{ \frac{2(\mathbf{n}\mathbf{w})(\mathbf{v}\mathbf{w})}{c\left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c}\right)^4} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c}\right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\mathbf{w})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c}\right)^5} \right\} dt. \tag{72,9}$$

(изоставили смо апостроф код промјењљиве интегрирања).

Задатак

Израчунати тотално зрачење оптерећења e_1, које пролијеће кроз *Coulomb*-ово поље $\left(\text{с потенцијалом } \varphi = \frac{e_2}{r}\right)$ брзином реда брзине свјетлости.

Рјешење. — При пролијетању кроз поље честица скоро не скреће. Због тога се у (72,4) брзина $\mathbf{v}$ може сматрати као константна, па је $\mathbf{E} = \frac{e_2 \mathbf{r}}{r^3} = \frac{e_2 \mathbf{r}}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}}$, $x = vt$,

$y = \rho$ (в. зад. 4 у § 69). Интегрирањем (72,4) по времену, добивамо у резултату тотално зрачење:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12 m^2 c^3 \rho^3 v} \cdot \frac{4 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

§ 73. Зрачење оптерећења, које се креће равномјерно по кругу

Овдје ћемо детаљно посматрати зрачење оптерећења, које се произвољном брзином креће по кругу у хомогеном константном магнетном пољу. Полупречник путање r и циклична фреквенција кретања ω_0 приказују се помоћу јачине поља H и брзине честице v једначинама (в. § 20):

$$r = \frac{mcv}{eH\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{73,1}$$

Тотални интензитет зрачења у свим правцима одређује се директно према формули (72,4), гдје треба ставити $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{H} \perp \mathbf{v}$:,

$$I = \frac{2 e^4 H^2 v^2}{3 m^2 c^5 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{73,2}$$

Види се, да је тотални интензитет пропорционалан квадрату импулса честице.

Ако нас интересује угловна расподјела зрачења, онда треба користити формулу (72,8). Интересантна је и средња вриједност интензитета, узета по периоду кретања. Сообразно томе, интегрираћемо у (72,8) по времену окретања честица по кругу и подијелити резултат величином периода $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Узмимо раван путање као раван XY (координатни почетак у центру круга), а раван YZ узећемо кроз правац зрачења $\mathbf{n}$. Магнетно поље биће оријентисано дуж осе Z. Нека је, затим, θ угао међу правцем зрачења $\mathbf{n}$ и осом Z (поларни угао правца $\mathbf{n}$), а $\varphi = \omega_0 t$ угао међу радиус-вектором честице и осом X. Тада косинус угла међу правцем $\mathbf{n}$ и брзином $\mathbf{v}$ (тј. осом X) износи $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \sin\theta\cos\varphi$ (вектор $\mathbf{v}$ налази се у равни XY и у сваком моменту је нормалан на радиус-вектору честице). Убрзање честице $\dot{\mathbf{v}}$ приказујемо помоћу поља $\mathbf{H}$ и брзине $\mathbf{v}$ према једначини кретања [в. (19,1)]:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{mc}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H}).$$

Послије простог израчунавања добива се:

$$\overline{dI} = do\,\frac{e^4 H^2 v^2}{8\pi^2 m^2 c^5}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta + \left(\frac{v}{c} - \sin\theta\cos\varphi\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^2}\,d\varphi \tag{73,3}$$

(интегрирање по времену замијењено је интегрирањем по $d\varphi = \omega_0 dt$) Процес интегрирања је елементаран, иако су изрази прилично гломазни Као резултат добива се слиједећа формула:

$$\overline{dI} = do \frac{e^4 H^2 v^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi m^2 c^5} \left[\frac{2+\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{5/2}} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(4+\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta}{4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{7/2}} \right]. \qquad (73,4)$$

Однос интензитета зрачења под углом $\theta = 0$ (нормално на раван орбите) и интензитета под углом $\theta = \frac{\pi}{2}$ (у равни орбите) износи:

$$\frac{\left(\frac{dI}{do}\right)_{\pi/2}}{\left(\frac{dI}{do}\right)_0} = \frac{4+3\frac{v^2}{c^2}}{8\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}.$$

Када $v \to 0$, овај однос тежи ка $1/2$, а за брзине близу брзине свјетлости постаје врло велики. Другим ријечима, код кретања са великом брзином зрачење је концентрисано у основном близу равни орбите. „Ширина" $\Delta\theta$ области углова, у коме се налази главни дио зрачења, лако се оцјењује из услова $1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta \sim 1-\frac{v^2}{c^2}$, стављајући $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \Delta\theta$; $\sin\theta \cong 1 - \frac{(\Delta\theta)^2}{2}$. Очевидно је, да је

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (73,5)$$

Посматраћемо затим спектралну расподјелу зрачења. Како је кретање оптерећења периодично $\left(\text{период } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi r}{v}\right)$, то се ради о разлагању у *Fourier*-ов ред. Израчунавање је згодно почети од векторског потенцијала. За *Fourier*-ове компоненте векторског потенцијала имамо формулу (в. § 66)

$$\mathbf{A}_n = e\frac{e^{ikR_0}}{c R_0 T} \oint e^{i(\omega_0 nt - \mathbf{kr})} d\mathbf{r},$$

гдје се интегрирање врши дуж трајекторије честице (круга). Координате честице су $x = r\cos\omega t$, $y = r\sin\omega t$. Као промјенљиву интегрирарања узећемо угао $\varphi = \omega t$. Уз напомену, да је $dx = -r\sin\varphi\, d\varphi$ и $\mathbf{kr} = kr\sin\theta \cdot \sin\varphi = \frac{nv}{c}\sin\theta\sin\varphi$ (θ је угао међу правцем зрачења и осом Z; $k = \frac{n\omega_0}{c} =$

$= \frac{nv}{cr}\Big)$, налазимо за *Fourier*-ове компоненте x-компоненте векторског потенцијала:

$$A_{xn} = -\frac{ev}{2\pi c R_0} e^{ikR_0} \int_0^{2\pi} e^{in\left(\varphi - \frac{v}{c}\sin\theta\sin\varphi\right)} \sin\varphi \, d\varphi .$$

Већ смо на овакав интеграл наишли у § 69. Он се приказује изводом *Bessel*-ове функције:

$$A_{xn} = -\frac{iev}{cR_0} e^{ikR_0} J'_n\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right) \cdot \tag{73,6}$$

Аналогно се израчунава A_{yn}:

$$A_{yn} = \frac{e}{R_0 \sin\theta} e^{ikR_0} J_n\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right) \cdot \tag{73,7}$$

Компонента дуж осе Z уопште је једнака нули.

Према формулама § 66 имамо за интензитет зрачења са фреквенцијом $\omega = n\omega_0$ у елеменат просторног угла do:

$$I_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 do = \frac{c}{2\pi} |(\mathbf{k} \times \mathbf{A}_n)|^2 R_0^2 do \cdot$$

Напомињући, да је

$$|(\mathbf{A} \times \mathbf{k})|^2 = A_x^2 k^2 + A_y^2 k^2 \cos^2\theta,$$

и замијењујући изразе (73,7), добивамо за интензитет зрачења слиједећу формулу (*Schott*, 1912):

$$dI_n = \frac{n^2 e^4 H^2}{2\pi c^3 m^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left[\operatorname{ctg}^2\theta . J_n^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right) + \frac{v^2}{c^2} J_n'^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right)\right] do. \tag{73,8}$$

За одређивање тоталног интензитета зрачења са фреквенцијом $\omega = n\omega_0$ у свим правцима, тај израз треба интегрирати по свим угловима. Међутим, интегрирање се не може вршити у коначном облику. Помоћу низа трансформација, које су у вези са неким релацијама теорије *Bessel*-ових функција, тражени интеграл може се свести на слиједећи облик:

$$I_n = \frac{2e^4 H^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{m^2 c^2 v} \left[n \frac{v^2}{c^2} J'_{2n}\left(\frac{2nv}{c}\right) - n^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \int_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi)\, d\xi\right]. \tag{73,9}$$

Сада ћемо детаљније посматрати спектралну расподјелу зрачења у случају, када је брзина кретања честице близу брзине свјетлости (***L. Arcimovič*** и ***I. Pomerančuk***, 1945). Ниже ћемо видјети, да у том случају основну улогу у зрачењу играју фреквенције са великим n. У вези с тим треба објаснити асимптотски облик *Bessel*-ове функције $J_{2n}\left(\frac{2nv}{c}\right)$ за велика n

(и за случај, када је v/c близу јединице). Ако напишемо *Bessel*-ову функцију у интегралном облику:

$$J_{2n}(2n\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2in(\varphi - \xi\sin\varphi)}\, d\varphi,$$

опажамо, да у посматраном случају у интегралу основну улогу играју мале вриједности промјенљиве интегрирања φ (јер ће за велике φ подинтегрални израз бити функција, која брзо осцилира). Саобразно томе разложићемо експонент подинтегралног израза по степенима од φ:

$$J_{2n}(2n\xi) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2in\left[(1-\xi)\varphi + \frac{\varphi^3}{6}\right]}\, d\varphi$$

[интегрирање може се узети за цијелу област од $-\infty$ до $+\infty$, јер интеграл брзо конвергира; члан трећег реда мора се задржати, јер је у случају који нас интересује $(1-\xi)$ мало и према томе је линеарни члан мали]. Добивени интеграл директно се своди на *Airy*-еву функцију (в. нап. на стр. 145). На тај начин добивамо асимптотски израз за *Bessel*-ову функцију:

$$J_{2n}(2n\xi) \approx \frac{1}{n^{1/3}\sqrt{\pi}}\,\Phi\left[2n^{2/3}(1-\xi)\right]. \qquad (73,10)$$

Замјеном израза (73,10) у (73,9) добивамо за спектралну расподјелу зрачења при великим вриједностима n[1]) слиједећу формулу:

$$I_n = -\frac{2e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)n^{1/3}}{\sqrt{\pi}\; m^2\; c^3}\left\{\Phi'(u) + \frac{u}{2}\int_u^{\infty}\Phi(u)\,du\right\}, \qquad (73,11)$$

$$u = n^{2/3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Када $u \to 0$, онда израз у великој загради тежи константној граници $\Phi'(0) = -0,4587\ldots$. Према томе за $u \ll 1$ имамо:

$$I_n = 0,52\,\frac{e^4H^2}{m^2c^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)n^{1/3}, \qquad 1 \ll n \ll \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}, \qquad (73,12)$$

тј. интензитет n-тог хармоника пропорционалан је са $n^{1/3}$. За $u \gg 1$ може се употријебити познати асимптотски израз *Airy*-еве функције (в. нап. на стр. 145) и добива се:

$$I_n = \frac{e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/4}n^{1/2}}{2\sqrt{\pi}\; m^2\; c^3}\exp\left\{-\frac{2}{3}n\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\right\}, \qquad (73,13)$$

$$n \gg \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2},$$

---

[1] У замјени је горња граница интеграла, $(2n^{2/3})$, узета као ∞ (јер је n велико), а доња граница, $2\left(1-\frac{v}{c}\right)$, узета као $1-\frac{v^2}{c^2}$ (због тога што је $v \cong c$). Осим тога, у коефицијенту пред великом заградом v је замијењено са c.

тј, интензитет опада експоненцијално, када је n врло велико. Према томе, спектрална расподјела има максимум за $n \sim \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$, а основни дио зрачења концентрисан је у области фреквенција, у којој је:

$$\omega \sim \omega_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} = \frac{eH}{mc}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}. \qquad (73,14)$$

Како су те вриједности ω врло велике, а растојање међу двијема оближњим фреквенцијама износи ω_0 (које је релативно мало), то можемо рећи, да спектар зрачења има „квазиконтинуални“ карактер, будући да је састављен из врло великог броја густо распоређених линија.

Задаци

1. — Наћи асимптотску формулу за спектралну расподјелу зрачења при великим n за честицу, која се креће по кругу брзином, која није близу брзине свјетлости.

Рјешење. — Помоћу асимптотског израза *Bessel*-ove функције, која је наведена у напомени на стр. 187, налазимо из (73,9):

$$I_n = \frac{e^4 H^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{5/4} n^{1/2}}{2\sqrt{\pi}\, m^2 c^3} \left(\frac{v/c}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, e^{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^{2n}.$$

Ова формула може се примијенити, ако је $n\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \gg 1$. Ако је *k* томе $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ мало, онда добивена формула прелази у формулу (73,13).

2. — Одредити закон промјене енергије са временом за оптерећење, које се креће по кружној путањи у константном хомогеном магнетном пољу и губи енергију зрачењем.

Рјешење. — Према (73.2), за губитак енергије у јединици времена, имамо:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2 e^4 H^2}{3 m^4 c^7}\left(\mathcal{E}^2 - m^2 c^4\right)$$

($\mathcal{E}$ је енергија честице). Одавде налазимо:

$$\arg\operatorname{th} \frac{\mathcal{E}}{mc^2} - \arg\operatorname{th} \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} = \frac{2 e^4 H^2}{3 m^3 c^5} t,$$

гдје је $\mathcal{E}$ енергија честице у почетном моменту ($t = 0$). Видимо, да енергија опада, приближавајући се асимптотски вриједности $\mathcal{E} = mc^2$ (потпуно заустављање честице), када $t \to \infty$.

§ 74. Кочење зрачењем

У § 65 показано је, да развијање потенцијала поља система оптерећења у ред по степенима v/c, доводи у другој апроксимацији до *Lagrange*-ове функције, која потпуно одређује (са том апроксимацијом) кретање оптерећења. Развијмо, сада, поље до чланова вишег реда и објаснимо, до каквих ефеката ти чланови доводе.

У реду за скаларни потенцијал

$$\varphi = \int \frac{1}{R} \varrho_{t-\frac{R}{c}} dV$$

члан трећег реда по $\frac{1}{c}$ износи

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2 \varrho \, dV \tag{74,1}$$

[овдје нећемо писати прве чланове реда (в. § 65) због краткоће]. Из истих разлога, као и при извођењу (65,3), у реду за векторски потенцијал морамо узети само члан другог реда по $\frac{1}{c}$, тј.

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j} \, dV. \tag{74,2}$$

Извршимо трансформацију потенцијала:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f,$$

узимајући функцију f на тај начин, да скаларни потенцијал $\varphi^{(3)}$ буде једнак нули. За то мора очигледно бити:

$$f = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2 \varrho \, dV.$$

Тада ће нови векторски потенцијал бити

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\int R^2 \varrho \, dV =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathbf{R}\varrho \, dV.$$

Прелазећи сада са интеграла на суме по појединим оптерећењима, за први члан на десној страни имамо $-\frac{1}{c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. У другом члану пишимо $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, гдје $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ имају обични смисао (в. § 66). Тада је $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$ и други члан постаје $\frac{1}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. На тај начин је

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}. \tag{74,3}$$

Магнетно поље, које одговара томе потенцијалу једнако је нули ($\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}'^{(2)} = 0$), јер $\mathbf{A}'^{(2)}$ не садржи координате експлицитно. Електрично поље $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}$, износи:

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}, \tag{74,4}$$

гдје је $\mathbf{d}$ диполни моменат система.

На тај начин, чланови трећег реда у развијеном изразу за поље приказују неке допунске силе, које дјејствују на оптерећења, и које се не налазе у *Lagrange*-овој функцији (65,6). Те силе зависе од извода убрзања оптерећења по времену.

Посматрајмо систем оптерећења, која врше стационарно кретање[1] и израчунајмо средњу вриједност рада, који поље (74,4) врши у јединици времена. На свако оптерећење e дјејствује сила $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, тј.

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}. \tag{74,5}$$

У јединици времена ова сила врши рад, који је једнак $\mathbf{f}\mathbf{v}$, па је укупни рад извршен на сва оптерећења једнак суми по оптерећењима:

$$\sum \mathbf{f}\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}} \sum e\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\,\dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}}\,\ddot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}_2.$$

Узимањем средње вриједности по времену првог члана нестаје, па је средњи рад једнак:

$$\overline{\sum \mathbf{f}\mathbf{v}} = -\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{74,6}$$

Но израз на десној страни није ништа друго, него (узето с обрнутим знаком) зрачење енергије, које систем врши у јединици времена [в. (67,9)]. На тај начин, силе које се појављују у трећој апроксимацији (74,5) описују обрнуто дјејство зрачења на оптерећења. Те силе се називају кочење зрачењем или *Lorentz*-ове силе трења.

Истовремено са губитком енергије у систему оптерећења који зрачи, настаје и извјестан губитак момента количине кретања. Умањење момента количине кретања у јединици времена, $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$, лако је израчунати помоћу израза за силе кочења. Диференцирањем момента количине кретања $\mathbf{M} = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ по времену, имамо $\dot{\mathbf{M}} = \sum(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}})$, будући да је $\sum(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = \sum m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \equiv 0$. Извод по времену од импулса честице замјењујемо силом трења (74,4), која на њу дјејствује и налазимо:

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) = \frac{2}{3c^3}\sum e(\mathbf{r} \times \dddot{\mathbf{d}}) = \frac{2}{3c^3}(\mathbf{d} \times \dddot{\mathbf{d}}).$$

Нас интересује средња вриједност (у времену) губитка момента количине кретања код стационарног кретања, слично ономе, кад нас је раније интересовао средњи губитак енергије. Ако напишемо

$$(\mathbf{d} \times \dddot{\mathbf{d}}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{d} \times \ddot{\mathbf{d}}) - (\dot{\mathbf{d}} \times \ddot{\mathbf{d}})$$

---

[1] Тачније, — кретање, које би било стационарно, када се занемари зрачење, које доводи до постепеног пригушивања кретања.

и напоменемо, да средња вриједност тоталног првог извода по времену (први члан) исчезава, наћићемо дефинитивно слиједећи израз за средњи губитак момента количине кретања система који зрачи:

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}} = -\frac{2}{3c^3}(\dot{\mathbf{d}} \times \ddot{\mathbf{d}}). \tag{74,7}$$

Кочење зрачењем важи и када постоји свега једно оптерећење, које се креће у спољашњем пољу. Тада оно износи:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \tag{74,8}$$

За једно оптерећење увијек се може узети такав систем референције, у коме оно, у датом моменту, мирује у кординатном почетку. Ако се у таквом систему израчунавају даљи чланови реда за поље, које изазива оптерећење, испоставиће се, да ти чланови имају слиједеће својство. Када радиус-вектор од оптерећења до тачке посматрања тежи нули, онда су те чланови функције правца и смјера радиус-вектора и то такве, да њихови средње вриједности по свим правцима постају једнаке нули. Другим ријечима, на тај начин добивене средње вриједности за чланове вишег реда, у реду за силу дејства оптерећења „на само себе", једнаке су нули. На тај начин, у случају једног оптерећења, формула (74,8) је у неку руку тачна формула за обратно дејство зрачења у оном систему референције, у коме оптерећење мирује.

Међутим, треба имати у виду, да описивање дејства оптерећења „самог на себе" помоћу силе кочења уопште сасвим не задовољава и у себи садржи противрјечности. Једначина кретања оптерећења у отсуству спољашњег поља, на које дејствује само сила (74,8), је:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}\ .$$

Ова једначина има, осим тривијалног рјешења $\mathbf{v} = \text{const.}$, још и рјешење, код кога је убрзање $\dot{\mathbf{v}}$ пропорционално са $e^{\frac{3mc^3}{2e^2}t}$, тј, неограничено расте са временом. То значи, на пр., да би се оптерећење, које је прошло кроз ма какво поље по излазу из поља морало неограничено „само собом убрзавати". Апсурдност тога резултата свједочи о ограниченој примјенљивости формуле (74,8).

Може се појавити питање о томе, на који начин електродинамика, која задовољава закон одржања енергије, може довести до тог апсурдног резултата, по коме слободна честица неограничено повећава своју енергију. Коријени те тешкоће у ствари налазе се у бесконачној електромагнетној „сопственој маси" елементарних честица, о којој је било ријечи раније (§ 36). Када у једначинама кретања пишемо коначну масу оптерећења, ми му у суштини приписујемо формално бесконачну негативну „сопствену масу", која није електромагнетног поријекла, а која би заједно с електромагнетном масом доводила до коначне масе честице. Но, како одузимање једне бесконачности од друге није потпуно једнозначна математичка операција, то и доводи до низа даљих тешкоћа, међу којима је и тешкоћа, на коју смо овдје указали.

У систему координата, у којем је брзина честице мала, једначина кретања са урачунатим кочењем зрачења има облик:

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}\,. \qquad (74,9)$$

Према изложеним резоновањима ова једначина може се примијенити само у случајевима, када је сила кочења мала у односу на силу, која произлази из спољашњег поља.

Да би објаснили физички смисао тог услова, поступимо на слиједећи начин. У систему референције, у коме оптерећење у датом моменту мирује, други извод брзине по времену, ако занемаримо силу кочења, једнак је:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc}(\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{H})\cdot$$

У другом члану стављамо (ограничавајући се на исту тачност) $\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$, па добивамо

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e^2}{m^2c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot$$

Према томе, сила кочења састојаће се из два члана:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot \qquad (74,10)$$

Ако је ω фреквенција кретања, онда је $\dot{\mathbf{E}}$ пропорционално са $\omega\mathbf{E}$, па је према томе први члан реда величине $\frac{e^3\omega}{mc^3}\mathbf{E}$, а други реда $\frac{e^4}{m^2c^4}EH$. Према томе услов, да сила кочења буде мала у односу на спољну силу $e\mathbf{E}$, која дјејствује на оптерећење, даје $\frac{e^2}{mc^3}\omega \ll 1$, или, ако се уведе таласна дужина $\lambda \sim \frac{c}{\omega}$:

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}\,. \qquad (74,11)$$

На тај начин, формула (72,8) за кочење зрачењем може се примијенити само ако је дужина таласа, који пада на оптерећење, велика у односу на „полупречник" оптерећења $\frac{e^2}{mc^2}$. Видимо, да растојања реда $\frac{e^2}{mc^2}$ опет претстављају границу, иза које електродинамика долази сама са собом у противрјечност (в. § 36).

Друго, ако упоредимо други члан силе кочења са силом $e\mathbf{E}$, имамо услов:

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3}\cdot \qquad (74,12)$$

На тај начин, неопходно је потребно да и само поље не буде сувише велико. Поља реда $\frac{m^2 c^4}{e^3}$, такође, претстављају границу, иза које класична електродинамика доводи до унутрашњих противрјечности. И овдје треба имати у виду, да се у ствари електродинамика показује непримјенљива већ код мањих поља[1]) и то због квантних ефеката.

Изведимо релативистички израз за кочење зрачењем (за једно оптерећење), који се може примијенити и за кретања са брзинама реда брзине свјетлости. Те силе биће сада 4-вектори f_i, којима треба допунити једначину кретања оптерећења, написану у четвородимензионалном облику:

$$m c \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k + f_i. \tag{74,13}$$

За одређивање f_i напоменимо, да за $v \ll c$ три његове просторне компоненте морају прећи у компоненте вектора $\frac{\mathbf{f}}{c}$ (74,8). Лако је видјети, да то својство има 4-вектор $\frac{2\, e^2}{3\, c} \frac{d^2 u_i}{d s^2}$. Ипак, он не задовољава релацију $f_i u_i = 0$, која важи за компоненте сваког 4-вектора силе. Да би се тај услов испунио, треба написаном изразу додати неки допунски 4-вектор, састављен из 4-брзине u_i и њених извода. У граничном случају $\mathbf{v} = 0$, три просторне компоненте тога вектора морају постати једнаке нули тако, да се не би измијенила права вриједност f_i, која је већ дата изразом $\frac{2\, e^2}{3\, c} \frac{d^2 u_i}{ds^2}$. Ту особину има 4-вектор u_i, па зато тражени допунски члан мора имати облик $\alpha\, u_i$. Скалар α треба изабрати тако, да би се задовољила релација $f_i u_i = 0$. У резултату налазимо

$$f_i = \frac{2\, e^2}{3\, c} \left(\frac{d^2 u_i}{ds^2} + u_i u_k \frac{d^2 u_k}{ds^2} \right). \tag{74,14}$$

Добивена формула може се преписати у другом облику, према једначинама кретања, ако се изводи $\frac{d^2 u_i}{ds^2}$ изразе непосредно помоћу тензора вањског електромагнетног поља, које дјејствује на честицу:

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{m c^2} F_{ik} u_k,$$

$$\frac{d^2 u_i}{ds^2} = \frac{e}{m c^2} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} u_k u_l + \frac{e^2}{m^2 c^4} F_{ik} F_{kl} u_l.$$

При замјени треба имати у виду, да је производ по индексима i, k антисиметричног тензора $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}$ и симетричног тензора $u_i u_k$ идентично једнак нули. Дакле,

$$f_i = \frac{2\, e^3}{3\, m c^3} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} u_k u_l - \frac{2\, e^4}{3\, m^2\, c^4} F_{il} F_{kl} u_k - \frac{2\, e^4}{3\, m^2 c^4} (F_{kl} u_l)^2 u_i. \tag{74,15}$$

---

[1]) Код поља реда $\frac{m^2 c^3}{h e}$, гдје је h *Planck*-ова константа.

Интеграл од 4 - силе f_i, узет по свјетској линији кретања оптерећења, које пролијеће кроз задато поље, мора се поклапати (са обрнутим знаком) са тоталним зрачењем оптерећења 4 - импулса ΔP_i, одређеним формулом (72,3) [слично томе, као што се средња вриједност рада силе **f** у нерелативистичком случају поклапа с интензитетом диполног зрачења — в. (74,6)]. Лако се је увјерити, да је то заиста тако. Прва два члана у (74,15) поклапају се с првим чланом у (74,14) $\left(\frac{2\,e^2}{3\,c}\frac{d^2u_i}{ds^2}\right)$ и при интегрирању постају једнаки нули, јер у бесконачности честица нема убрзања, тј. $\frac{du_i}{ds}=0$. Трећи члан даје:

$$-\int f_i\,ds=\frac{2\,e^4}{3\,m^2\,c^4}\int (F_{kl}\,u_l)^2\,u_i\,ds,$$

што се у потпуности поклапа са (72,3).

Ако се брзина честице приближава брзини свјетлости („ултрарелативистички" случај), онда од три члана у формули (74,15) најбрже се повећава трећи, који садржи троструке производе компонената 4 - брзине (напомињемо, да компоненте 4 - брзине садрже у имениоцу $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$). Због тога се, кад је $\frac{v}{c}$ довољно близу јединице, може писати:

$$f_i=-\frac{2\,e^4}{3m^2c^4}(F_{kl}\,u_l)^2\,u_i\,. \tag{74,16}$$

Просторне компоненте дају за силу кочења израз:

$$f_x=-\frac{2\,e^4}{3m^2c^4}\frac{(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{74,17}$$

Овдје је X оса изабрана дуж брзине **v** и свуда, гдје је било могућно, стављено је $v=c$. Видимо, да је за ултрарелативистичку честицу кочење зрачењем пропорционално квадрату њене енергије.

Скрећемо пажњу на слиједећу интересантну околност. Горе је наведено, да се добивени израз за кочење зрачењем може примијенити само у пољима, која су мала у односу на $\frac{m^2\,c^4}{e^3}$ (у систему референције K_o, у коме честица мирује). Нека је F ред величине попречног поља (у односу на правац кретања) у систему референције K, у коме се честица креће брзином v [поље, које улази у формулу (74,17)]. Тада у систему K_o поље има вриједност реда $\frac{F}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (в. трансформационе формуле у § 23). Због тога F мора испуњавати услов:

$$\frac{e^3\,F}{m^2\,c^4\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ll 1. \tag{74,18}$$

Међутим, сила кочења (74,17) претставља величину реда

$$f \sim \frac{e^4 F^2}{m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)},$$

те видимо, да се услов (74,18) може испунити [када је $1 - \frac{v^2}{c^2}$ довољно мало] чак и онда, када је сама сила кочења f велика у односу на обичну *Lorentz*-ову силу, која дјејствује на оптерећење у електромагнетном пољу $(f \gg eF)$. На тај начин, за ултрарелативистичку честицу може важити случај, да кочење зрачењем (74,17) претставља основну силу, која на њу дјејствује.

У том случају може се сматрати, да је губитак (кинетичке) енергије честице на јединицу дужине пута $\left(-\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dx}\right)$ једнак само сили кочења f_x. Имајући у виду, да је посљедња пропорционална квадрату енергије честице, можемо написати:

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dx} = -g(x)\,\mathcal{E}^2_{\text{kin}},$$

гдје се са $g(x)$ означава коефицијенат који зависи од координате x, који се према (74,17) изражава помоћу трансверзалних компонената поља. Интегрирањем ове диференцијалне једначине налазимо:

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{\text{kin}}} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} + \int\limits_{-\infty}^{x} g(x)\,dx,$$

гдје се са $\mathcal{E}_0$ означава почетна енергија честице (енергија за $x \to -\infty$). Специјално, крајња енергија честице $\mathcal{E}_1$ (послије пролијетања честице кроз поље) одређује се формулом

$$\frac{1}{\mathcal{E}_1} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Видимо, да за $\mathcal{E}_0 \to \infty$ коначна енергија $\mathcal{E}_1$ тежи константној граници, која не зависи од $\mathcal{E}_0$ (*I. Pomerančuk*, 1939). Другим ријечима, послије пролијетања кроз поље енергија честице не може превазићи $\mathcal{E}_{\text{kr}}$, која је одређена једначином

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{\text{kr}}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$$

или, замјеном израза за $g(x)$,

$$\mathcal{E}_{\text{kr}}^{-1} = \frac{2}{3\,m^2 c^4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2\right] dx. \qquad (74,19)$$

Задаци

1. Израчунати вријеме на крају којег ће „пасти“ једна на другу двије наелектрисане честице, које се вршећи елиптично кретање међусобно привлаче (са брзином, која је мала у односу на брзину свјетлости) и које због зрачења губе енергију.

Рјешење. Средњи губитак енергије тих честица у јединици времена износи (в. зад. 1, § 69):

$$\frac{d\,|\mathcal{E}|}{dt}=\frac{(2|\mathcal{E}|)^{3/2}\,\mu^{5/2}|e_1\,e_2|^3}{c^3\,M^5}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left(1-\frac{2\,|\mathcal{E}|\,M^2}{3\mu\,e_1^2\,e_2^2}\right) \tag{1}$$

(напомињемо, да је код елиптичног кретања $|\mathcal{E}|<0$, па је $\frac{d\,|\mathcal{E}|}{dt}>0$. Претпостављамо, да је мали губитак енергије за један обрт, а то омогућава да се може искористити њена средња вриједност. Упоредо са енергијом честице губе моменат количине кретања. Губитак момента у јединици времена дат је формулом (74,7). Замјеном израза (69,1) за $\mathbf{d}$ и уз напомену, да је

$$\mu\,\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{(e_1\,e_2)\,\mathbf{r}}{r^3}\quad \text{и}\quad \mathbf{M}=\mu\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v}),$$

налазимо

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=-\frac{2\,|e_1\,e_2|}{3\,c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{\mathbf{M}}{r^3}.$$

Наћићемо средњу вриједност овог израза по периоду кретања Средња вриједност од r^{-3} израчунава се исто тако, као што се у задатку 1 § 69 израчунава средња вриједност од r^{-4} У резултату налазимо за средњи губитак момента у јединици времена слиједећи израз:

$$\frac{dM}{dt}=-\frac{2\,|\,e_1\,e_2\,|\,(2\mu\,|\,\mathcal{E}\,|)^{3/2}}{3\,c^3\,M^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \tag{2}$$

[као и у (1) знак за средњу вриједност изостављамо]. Дијељењем (1) са (2) добивамо диференцијалну једначину:

$$\frac{d\,|\,\mathcal{E}\,|}{d\,M}=-\frac{\mu\,e_1^2\,e_2^2}{2\,M^3}\left(3-2\,\frac{|\,\mathcal{E}\,|\,M^2}{\mu\,e_1^2\,e_2^2}\right),$$

интегрирањем које налазимо:

$$|\,\mathcal{E}\,|=\frac{\mu\,e_1^2\,e_2^2}{2\,M^2}\left(1-\frac{M^3}{M_0^3}\right)+\frac{|\,\mathcal{E}_0\,|}{M_0}\,M. \tag{3}$$

Константа интегрирања узета је тако, да за $M=M_0$ буде $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0$, гдје су M_0 и $\mathcal{E}_0$ почетне вриједности момента и енергије честице.

„Падању“ једне честице на другу одговара $M\to 0$. Из (3) види се, да притом $\mathcal{E}\to\infty$, као што се и претпостављало. Напомињемо, да производ $|\mathcal{E}|\,M^2$ тежи ка $\frac{1}{2}\,\mu e_1^2\,e_2^2$, а из формуле (69,3) види се, да ексцентрицитет $\varepsilon\to 0$, тј. приближавањем честица орбита се приближава кругу. Замјеном (3) у (2) одређујемо извод $\frac{dt}{dM}$, изражен као функцију од M, послије чега интегрирање по dM у границама од M_0 до 0 непосредно даје вријеме падања:

$$t_{\text{pad}}=\frac{c^3\,M_0^5}{\sqrt{2\,\mu\,|\,\mathcal{E}_0\,|}\;\mu\,e_1^2\,e_2^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^{-2}\left(\sqrt{\mu\,e_1^2\,e_2^2}+\sqrt{2\,M_0^2\,|\,\mathcal{E}_0\,|}\right)^{-2}.$$

2. Одредити граничну енергију, коју може имати честица послије пролијетања кроз поље магнетног дипола **m**. Вектор **m** и правац кретања налазе се у једној равни.

Рјешење. Узмимо као XZ раван, ону раван, која пролази кроз вектор $\mathbf{m}$ и правац кретања, при чему се честица креће паралелно X оси на растојању ρ. За трансверзалне компоненте поља магнетног дипола имамо [в. (43.4)]:

$$H_y = 0, \quad H_z = \frac{3(\mathbf{m}\,\mathbf{r})\,z - m_z r^2}{r^5} = \frac{\mathbf{m}}{(\rho^2 + x^2)^{5/2}}\,[3(\rho\cos\varphi + x\sin\varphi)\,\rho - (\rho^2 + x^2)\cos\varphi\,]$$

(овдје је φ угао међу $\mathbf{m}$ и осом Z). Замјеном у (74,19) и интегрирањем добивамо:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{kr}}^{-1} = \frac{\mathbf{m}^2\pi}{2\,m^2\,c^4\,\rho^5}\left(\frac{e^2}{m\,c^2}\right)^2\left[\frac{41}{32} - \frac{39}{16}\sin^2\varphi + \frac{5}{3}\sin\varphi\cos\varphi\right]$$

3. Написати тродимензионални израз за силу кочења у релативистичком случају.

Рјешење. Израчунавањем просторних компонената 4-вектора (74,15) добивамо[1]:

$$\mathbf{f} = \frac{2\,e^3}{3\,m\,c^3}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\nabla)\right)\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\nabla)\right)\mathbf{H}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{2\,\epsilon^4}{3\,m^2\,c^1}\left\{[\mathbf{E}\,\mathbf{H}] + \frac{1}{c}\left[\mathbf{H}\,[\mathbf{H}\,\mathbf{v}]\right] + \frac{1}{c}\,\mathbf{E}\,(\mathbf{v}\,\mathbf{E})\right\} +$$

$$+ \frac{2\,e^4}{3\,m^2\,c^5\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\,\mathbf{v}\left\{\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{v}\,\mathbf{H}]\right)^2 - \frac{1}{c^2}\,(\mathbf{E}\,\mathbf{v})^2\right\}.$$

§ 75. Спектрално разлагање зрачења у ултрарелативистичком случају

Угаона расподјела зрачења честице, која се креће брзином близу брзине свјетлости („ултрарелативистички" случај) има карактеристичну особину, која се може видјети непосредно из општег израза (72,7) за интензитет зрачења. У имениоце разних чланова тога израза улазе високи степени разлике $\left(1 - \frac{\mathbf{v}\,\mathbf{n}}{c}\right)$. Ако је v близу c $\left(\text{тј. } 1 - \frac{v}{c} \ll 1\right)$, онда ће интензитет имати оштар максимум у уском угаоном интервалу, у коме је $\mathbf{v}\,\mathbf{n} \cong v$, тј. $\mathbf{n}$ је скоро паралелно са $\mathbf{v}$. На тај начин, ултрарелативистичка честица, углавном, зрачи у правцу свог кретања.

Лако је оцијенити угаони интервал $\Delta\theta$ око правца $\mathbf{v}$, у коме је интензитет зрачења примјетно различит од нуле. Ако се напише

$$1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c} = 1 - \frac{v}{c}\cos\theta \cong 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2},$$

налазимо, да је та разлика мала $\left(\text{реда } 1 - \frac{v}{c}\right)$ у интервалу $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v}{c}}$, или, што је исто:

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{75,1}$$

---

[1] Овдје су за векторске производе узете угласте заграде, да би било јасније обиљежавање. (Пр. пр.).

За израчунавање спектралног разлагања зрачења битну улогу игра узајамни однос међу величином угаоног интервала $\Delta\theta$ и укупним углом α скретања честице при пролијетању кроз спољашње електромагнетно поље. Угао α се може оцијенити на слиједећи начин. Трансверзална (према правцу кретања) промјена импулса честице има ред величине производа трансверзалне силе eF[1]) и времена пролијетања кроз поље $t \sim \frac{a}{v} \cong \frac{a}{c}$ (гдје је a растојање, на коме је поље примјетно различито од нуле).

Однос те величине и импулса $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cong \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ одређује ред величине угла α (апсолутна вриједност угла скретања α за ултрарелативистичку честицу узима се да је мала). На тај начин је

$$\alpha \sim \frac{eFa}{mc^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \,.$$

Дакле, однос $\frac{\alpha}{\Delta\theta}$ има ред величине

$$\frac{\alpha}{\Delta\theta} \sim \frac{eFa}{mc^2} \,.$$

Скрећемо пажњу, да овај однос не зависи од брзине честице и у цјелини се одређује својствима самог спољашњег поља.

Претпоставимо најприје, да је

$$eFa \gg mc^2, \tag{75,2}$$

тј. потпуни угао скретања честице велик је у односу на $\Delta\theta$. Тада можемо закључити, да зрачење у задатом правцу углавном произлази из оног дијела трајекторије, на коме је брзина честице скоро паралелна са тим правцем (прави са њим угао у интервалу $\Delta\theta$), а дужина тога дијела је мала у односу на a. На таквом дијелу поље F може се сматрати константно, а пошто се мали дио криве може сматрати као дио круга, то можемо примијенити резултате, које смо добили у § 73 за зрачења при равномјерном кретању по кругу (замјењујући притом H са F). Специјално, може се закључити, да ће главни дио зрачења бити концентрисан у области фреквенција

$$\omega \sim \frac{eF}{mc\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \tag{75,3}$$

[в. (73,14)]. Детаљније израчунавање спектралног разлагања дато је у задатку бр. 1 уз овај параграф.

У обрнутом граничном случају

$$eFa \ll mc^2, \tag{75,4}$$

цијели угао скретања честице мали је у односу на $\Delta\theta$. У том случају укупно зрачење, углавном, управљено је у уском интервалу $\Delta\theta$ око правца кретања, при чему на дату тачку упада зрачење са цијеле трајекторије. За одре-

---

[1]) Ако се оса X узме у правцу кретања честице, онда је $(eF)^2$ збир квадрата y- и z-компонената *Lorentz*-ове силе $e\mathbf{E} + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$, гдје се притом може ставити $v \cong c$:

$$F_2 = (E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2.$$

ђивање спектралног разлагања зрачења у том случају послужићемо се *Liénard-Wiechert*-овим изразом (72,6) за поље у таласној зони и израчунаћемо његову *Fourier*-ову компоненту. Ў ту сьрху треба интегрирати $\mathbf{E}e^{i\omega t}$ по dt. Но, како је израз (72,6) функција од $t-\frac{R}{c}\cong t-\frac{R_0}{c}-\frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c}=t'-\frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c}$ (овдје је $\mathbf{r}'=\mathbf{r}(t')\cong\mathbf{v}t'$ радиус-вектор честице). Због тога је згодно прећи од интегрирања по dt на интегрирање по dt', узимајући

$$dt=\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)dt'$$

[в. (72,8)] и

$$e^{i\omega t}=e^{i\omega\left(t'-\frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c}\right)}=e^{i\omega t'\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c}\right)}.$$

На крају добићемо:

$$\mathbf{E}_\omega=\frac{e}{2\pi c^2 R_0}\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^{-2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\mathbf{n}\times\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{w}(t)\right]\right\}e^{i\omega t\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)}dt \quad (75,5)$$

(изостављамо апстроф код промјенљиве интегрирања). Брзину $\mathbf{v}$ посматрамо увијек као константну величину (узимајући у обзир самим тим, да је скретање честице у даном случају мало), а промјенљиво је само убрзање $\mathbf{w}(t)$.

Процјена реда величине фреквенција, у области којих је концентрисан основни дио зрачења, може се извршити на слиједећи начин. Период експоненцијалног фактора у подинтегралном изразу у (75,5) има ред величине

$$\frac{1}{\omega}\left(1-\frac{v}{c}\right)^{-1}\cong\frac{2}{\omega}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

Интеграл ће бити знатно различит од нуле, ако тај период буде истог реда, као и вријеме T, у току којег се убрзање $w(t)$ честице мијења на осјетан начин. Очигледно је $T\sim\frac{a}{v}\cong\frac{a}{c}$ (a је растојање, на коме је поље примјетно различито од нуле). Према томе налазимо:

$$\omega\sim\frac{c}{a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \quad (75,6)$$

Зависност ових фреквенција од енергије честице је иста као и у (75,3), али је коефицијент друкчији.

Детаљније третирање интеграла (75,5) дато је у задатку 2 овог параграфа.

Задаци

1. Одредити спектралну расподјелу тоталног интензитета (по свим правцима) зрачења при услову (75,2).

Рјешење. Зрачење са сваког елемента дужине трајекторије одређује се формулом (73,11), у којој треба H замијенити вриједношћу F трансверзалне силе у датој тачки и, осим тога, треба прећи са дискретног спектра фреквенција на континуалан. Тај прелаз се врши формалним множењем са dn и замјеном

$$I_n dn=I_n\frac{dn}{d\omega}d\omega=I_n\frac{d\omega}{\omega_0}.$$

Ако се затим интензитет интегрира по читавом времену, наћиће се спектрална расподјела тоталног зрачења у слиједећем облику:

$$d\mathcal{E}_\omega = -\,d\omega\,\frac{2\,e\omega\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{\pi}\,c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{u}\,\Phi'(u)+\frac{1}{2}\int\limits_{u}^{\infty}\Phi(u)\,du\right]dt,$$

гдје је $\Phi(u)$ *Airy*-ева функција од аргумента

$$u=\left[\frac{mc\omega}{eF}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{2/3}.$$

Подинтегрални израз зависи од промјенљиве интегрирања t имплицитно преко величине u (F, а заједно са њим и u, мијења се дуж трајекторије честице; при задатом кретању та промјена може се сматрати као зависност од времена).

2. Исто то уз услов (75,4).

Р ј е ш е њ е. Имајући у виду, да основну улогу игра зрачење под малим угловима θ према правцу кретања, можемо написати:

$$1-\frac{\mathbf{vn}}{c}=1-\frac{v}{c}\cos\theta\cong 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2}\cong\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right).$$

Уводећи и вектор $\vec{\theta}=\mathbf{n}-\mathbf{v}/v$ (с апсолутном вриједношћу θ), преписаћемо израз (75,5) с тачношћу до чланова вишег реда у слиједећем облику:

$$\mathbf{F}_\omega=\frac{2e}{\pi c^2 R_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)^{-2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{i\omega t}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)}\left\{(\mathbf{w}\vec{\theta})\,\vec{\theta}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)\mathbf{w}\right\}dt$$

или, ако се уведе ознака

$$\omega'=\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right),$$

$$\mathbf{E}_\omega=\frac{e}{c^2R_0}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2\left\{(\mathbf{w}_{\omega'}\vec{\theta})\vec{\theta}-\frac{\omega'}{\omega}\,\mathbf{w}_{\omega'}\right\},$$

где је $\mathbf{w}_\omega$ *Fourier*-ова компонента убрзања. Овај израз уврстићемо у формулу (66,9) $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}=cR_0^2\,|\mathbf{E}_\omega|^2\,do\,d\omega$ и интегрираћемо по свим правцима (стављајући $do=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\cong=\theta\,d\theta\,d\varphi$). Тако се за спектрално разлагање тоталног зрачења у резултату добива слиједећа формула:

$$d\mathcal{E}_\omega=\frac{2\pi e^2}{c^3\omega}\int\limits_{\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}^{\infty}|\mathbf{w}_{\omega'}|^2\left[1-\frac{\omega}{\omega'}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\omega^2}{2\,\omega'^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right]d\omega'.$$

§ 76. Расипање слободним оптерећењима

Ако на систем оптерећења пада електромагнетни талас, онда се под утицајем тог таласа оптерећења крећу. То кретање праћено је зрачењем на све стране. Дешава се, како се каже, расипање првобитног таласа.

Расипање је најзгодније окарактерисати односом количине енергије, коју емитује систем у датом правцу у јединици времена, према густини флукса енергије, који пада на систем зрачења. Очевидно, тај однос има димензију површине и назива се ефективни пресјек расипања.

Нека је dI енергија, коју систем зрачи у просторни угао do (у 1 sec), када на њега пада талас, чији је *Poynting*-ов вектор $\mathbf{S}$. Тада ефективни пресјек расипања (у просторни угао do) износи:

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{S}} \tag{76,1}$$

(црта означава средњу вриједност по времену). Интеграл σ од $d\sigma$ по свим правцима претставља цјелокупни ефективни пресјек расипања.

Посматрајмо расипање, које врши једно слободно оптерећење. Нека на то оптерећење пада равни монохроматични линиски поларизовани талас. Његово електрично поље може се написати у облику:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha).$$

Претпоставићемо, да је брзина, коју оптерећење добије под дјејством поља таласа који пада, мала у односу на брзину свјетлости, што је практично увијек остварено. Тада се може сматрати, да сила, која дјејствује на оптерећење, износи $e\mathbf{E}$, а сила $(e/c)(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$ од стране магнетног поља може се занемарити. У том случају, такође, може се занемарити утицај помјераја оптерећења када осцилује под утицајем поља. Ако оптерећење врши осцилације око координатног почетка, тада се може сматрати, да на њега за цијело вријеме дјејствује оно поље, које постоји у координатном почетку, тј.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \alpha).$$

Како једначине кретања оптерећења гласе

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

а његов диполни моменат је $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, биће

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \tag{76,2}$$

За израчунавање расутог зрачења употребићемо формулу (67,8) за диполно зрачење (имамо право да то урадимо, јер је брзина, коју оптерећење добије под утицајем таласа који пада, мала у односу на брзину свјетлости). Напомињемо, такође, да је фреквенција таласа који оптерећење зрачи (тј. расутог оптерећењем) очевидно једнака фреквенцији таласа који упада.

Замјеном (76,2) у (67,7) налазимо:

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}(\mathbf{E} \times \mathbf{n})^2\, do.$$

С друге стране, *Poynting*-ов вектор таласа, који упада износи

$$S = \frac{c}{4\pi}E^2.$$

Одавде налазимо ефективни пресјек расипања у просторни угао do:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{76,3}$$

гдје је θ — угао међу правцем расипања (вектором $\mathbf{n}$) и правцем електричног поља $\mathbf{E}$ таласа који пада. Видимо, да ефективни пресјек расипања слободним оптерећењем не зависи од фреквенције.

Одредимо цјелокупни ефективни пресјек σ. Узећемо сферне координате с почетком у мјесту, гдје се налази оптерећење и са поларом дуж $\mathbf{E}$. Тада је $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Замјеном и интегрирањем по $d\theta$ од 0 до π и по $d\varphi$ од 0 до 2π, налазимо:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \tag{76,4}$$

На крају, израчунајмо ефективни пресјек $d\sigma$ у случају, када талас који пада није поларизован (природна свјетлост). Тада морамо узети средњу вриједност од (76,3) по свим правцима вектора $\mathbf{E}$ у равни, нормалној на правцу простирања таласа који пада (на правцу таласног вектора $\mathbf{k}$). Узмимо координатни систем са осом Z дуж вектора $\mathbf{k}$ и осом X дуж вектора $\mathbf{E}$. Тада косинус угла θ међу $\mathbf{n}$ и $\mathbf{E}$, тј. пројекција јединичног вектора $\mathbf{n}$ на осу Z, износи $\cos\theta = \sin\vartheta\cos\varphi$, гдје су ϑ и φ поларни угао и азимут правца $\mathbf{n}$. Средња вриједност узета по свим правцима од $\mathbf{E}$ у равни, која је нормална на $\mathbf{k}$, еквивалентна је средњој вриједности по азимуту φ. Онда је

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \frac{\sin^2\vartheta}{2} = \frac{1+\cos^2\vartheta}{2},$$

па замјеном у (76,3) налазимо за ефективни пресјек расипања неполаризованог таласа слободним оптерећењем:

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta)\, do, \tag{76,5}$$

гдје је ϑ угао међу таласом који пада и расутим таласом.

Расипање специјално доводи до појаве неке силе, која дјејствује на честицу која расипа. У то се може лако увјерити слиједећим резоновањима. Талас, који пада на честицу, губи у јединици времена просјечно енергију $c\overline{W}\sigma$, гдје је $\overline{W}$ — средња густина енергије у њему, а σ — тотални ефективни пресјек расипања. Будући да је импулс поља једнак количнику његове енергије и брзине свјетлости, то талас који пада губи притом импулс, који је по величини једнак $\overline{W}\sigma$. С друге стране, у систему референције у коме оптерећење врши само мале осцилације под утицајем силе $e\mathbf{E}$, биће према томе и његова брзина v мала, а укупан флукс импулса у расутом таласу једнак, с тачношћу до чланова вишег реда по v/c, нули (у § 71 показано је, да у систему референције у коме је $v = 0$, не настаје зрачење импулса од стране честице). Према томе, сав импулс који губи упадни талас „апсорбује" честица која расипа. Средња сила $\overline{\mathbf{f}}$, која дјејствује на честицу, једнака је средњој вриједности импулса апсорбованог у јединици времена, тј.

$$\overline{\mathbf{f}} = \sigma\overline{W}\mathbf{n}_0 \tag{76,6}$$

($\mathbf{n}_0$ је јединични вектор у правцу простирања упадног таласа). Напомињемо, да је средња сила величина другог реда у односу на поље таласа, који пада, док је „тренутна" сила (чији је главни дио $e\mathbf{E}$) првог реда у односу на поље.

Формула (76,6) може се добити и директно налажењем средње вриједности силе кочења (74,10). Први члан, који је пропорционалан са $\dot{\mathbf{E}}$, постаје једнак нули, када му се нађе средња вриједност (као и средња вриједност основне силе $e\mathbf{E}$). Други члан даје:

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{2e^4}{3m^2c^4}E^2\mathbf{n}_0 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\cdot\frac{E^2}{4\pi}\mathbf{n}_0,$$

што се, према (76,4), поклапа са (76,6).

Задаци

1. Израчунати ефективни пресјек расипања елиптично поларизованог таласа слободним оптерећењем.

Рјешење. Поље таласа има облик $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos(\omega t + \alpha) + \mathbf{B}\sin(\omega t + \alpha)$, гдје су **A** и **B** међусобно нормални вектори (в. § 48). Аналогно извођењу, које је наведено у тексту, налазимо:

$$d\sigma = \frac{e^4}{4\pi m^2c^3}\,\frac{[\mathbf{A}\times\mathbf{n}]^2 + [\mathbf{B}\times\mathbf{n}]^2}{A^2 + B^2}\,do.$$

2. Израчунати ефективни пресјек расипања линеарно поларизованог таласа оптерећењем, које (под утицајем неке еластичне силе) врши мале осцилације (такозваним осцилатором).

Рјешење. Једначина кретања оптерећења у таласу који на њега пада $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos(\omega t + \alpha)$ гласи:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\cos(\omega t + \alpha),$$

гдје је ω_0 фреквенција његових слободних осцилација. Одавде имамо за присилне осцилације

$$\mathbf{r} = \frac{e\,\mathbf{E}_0\cos(\omega t + \alpha)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Ако одавде одредимо $\ddot{\mathbf{d}}$, наћићемо

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\cdot\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\sin^2\theta\, do$$

(θ је угао међу **E** и **n**).

3. Одредити степен деполаризације (в. § 50) код расипања неполаризоване свјетлости слободним оптерећењем.

Рјешење. Због симетрије очигледно је, да ће обије главне компоненте расуте свјетлости бити поларизоване у равни; једна у равни која пролази кроз упадни и расути зрак, а друга у нормалној на овој. Узмимо осу Y у наведеној равни. Тада за прву поларизацију налазимо $E = \text{const}\cdot E_y\cos\vartheta$, а за другу $E = \text{const}.\,E_z$. Дизањем на квадрат, налажењем средње вриједности и односа, добивамо (пошто је за неполаризовану свјетлост $\overline{E_y^2} = \overline{E_z^2}$):

$$\rho = \cos^2\vartheta$$

(ϑ је угао међу правцима упадне и расуте свјетлости).

4. Одредити фреквенцију свјетлости расуте оптерећењем у кретању.

Рјешење. У координатном систему, гдје честица мирује, фреквенција свјетлости при расипању не мијења се ($\omega = \omega'$). У инваријантном облику та релација може се написати у облику

$$k'_i u_i = k_i u_i,$$

гдје је u_i — 4-брзина оптерећења. Одавде се без тешкоћа добива:

$$\omega'\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta'\right) = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right),$$

гдје су θ и θ' углови међу правцем кретања и таласом који упада и који се расипа (v је брзина оптерећења).

5. Израчунати угаону расподјелу расипања линеарно поларизованог таласа оптерећењем, које се креће брзином v у правцу простирања таласа.

Рјешење. Интензитет расипања одређује се формулом (72,7), у којој убрзање честице $\mathbf{w}$ треба изразити помоћу поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ таласа који упада, а према формули, која је добивена у задатку уз § 15. Притом треба имати у виду, да је $\mathbf{v}$ нормално и на $\mathbf{E}$ и на $\mathbf{H}$. Дијељењем интензитета dI *Poynting*-овим вектором таласа који пада, налазимо слиједећи израз за ефективни пресјек расипања:

$$d\sigma=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^6}\left[\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^2-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta\right],$$

гдје су θ и φ поларни угао и азимут правца $\mathbf{n}$ у односу на координатни систем са осом Z дуж вектора $\mathbf{E}$ и осом X дуж $\mathbf{v}$ [$\cos(\mathbf{n},\mathbf{E})=\cos\theta$; $\cos(\mathbf{n},\mathbf{v})=\sin\theta\cos\varphi$].

6. Одредити кретање оптерећења под утицајем средње силе, којом на њега дјејствује оптерећењем расути талас.

Рјешење. Сила (76,6), а онда и брзина посматраног кретања, оријентисани су у правцу простирања упадног таласа (оса X). У помоћном систему референције K_0, у коме оптерећење мирује (напомињемо, да је ријеч о средњој вриједности периода малих осцилација), сила која на њега дјејствује износи према (76,6) $\sigma\overline{W}_0$, а убрзање, које добије под утицајем силе, биће:

$$w_0=\frac{\sigma}{m}\overline{W}_0$$

(индекс нула односи се на систем референције K_0). Убрзање w и густина енергије W таласа у полазном систему референције K (у коме се оптерећење креће брзином v), везани су са w_0 и W_0 формулом, која је добивена у задатку § 7 и формулом (46,12). Пошто се обави та трансформација, добива се:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\overline{W}\sigma}{m}\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\,.$$

Интегрирањем ове једначине добива се:

$$\frac{\overline{W}\sigma}{m}t=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\cdot\frac{2-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}-\frac{2}{3},$$

чиме се имплицитно одређује брзина $v=\frac{dx}{dt}$ као функција од времена (константа интегрирања узета је тако, да је за $t=0$ брзина $v=0$).

7. Одредити средњу силу, која дјејствује на оптерећење, које се креће у електромагнетном пољу, које је суперпозиција таласа са свим могућим, изотропно распоређеним правцима распростирања.

Рјешење. Напишимо једначине кретања оптерећења у четвородимензионалном облику

$$mc\frac{du_i}{ds}=f_i.$$

За одређивање 4-вектора f_i, напомињемо, да у систему референције, у коме оптерећење у датом моменту мирује, када постоји свега један талас, који се простире у одређеном правцу (рецимо, дуж осе X), једначина кретања је ($v_x\equiv v$):

$$m\frac{dv}{dt}=\sigma W$$

(знак средње вриједности стално изостављамо). То значи, да x-компонента вектора f_i мора прећи у $\frac{W}{c}\sigma$. Такву особину има 4-вектор $-\frac{\sigma}{c}T_{ik}u_k$, гдје је T_{ik} тензор енергије-импулса таласа, а u_k — 4-брзина оптерећења. Даље, f_i мора задовољавати услов $f_i u_i = 0$, што се може постићи додавањем написаном изразу 4-вектора облика αu_i, гдје је α скалар. Одређујући α на одговарајући начин, [уп. извођење формуле (74,13)], добивамо:

$$mc\frac{du_i}{ds} = -\frac{\sigma}{c}(T_{ik}u_k + u_i u_k u_l T_{kl}). \tag{1}$$

У електромагнетном пољу изотропног зрачења због симетрије нестаје *Poynting*-овог вектора, а тензор напона $T_{\alpha\beta}$ мора имати облик const. $\delta_{\alpha\beta}$. Напомињући такође, да мора бити $T_{ii} = 0$, налазимо за компоненте T_{ik}:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{W}{3}\delta_{\alpha\beta}, \quad T_{\alpha 4} = 0, \quad T_{44} = -W.$$

Замјењујући ове изразе у (1) добивамо за силу, која дјејствује на оптерећење:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{4W\sigma}{3c}\frac{v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Ова сила дјејствује у смјеру, који је супротан кретању оптерећења, тј. кретање оптерећења се кочи. Напомињемо, да је за $v \lll c$ сила кочења пропорционална брзини оптерећења:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{4W\sigma}{3c}v.$$

8. Одредити ефективни пресјек расипања линеарно поларизованог таласа осцилатором, узевши у обзир и кочење зрачењем.

Рјешење. Једначину кретања оптерећења у таласу који пада, пишемо у облику:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

Због кочења може се приближно ставити $\dddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$. Тада добивамо:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t},$$

гдје је $\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2$. Одавде налазимо:

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Ефективни пресјек је:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}.$$

§ 77. Расипање таласа са малим фреквенцијама

Расипање електромагнетних таласа системом оптерећења разликује се од расипања једним (непокретним) оптерећењем прије свега по томе, што захваљујући постојању сопственог кретања оптерећења у систему, фреквенција расутог зрачења може бити различита од фреквенције таласа који упада. Наиме, у спектрално разлагање расутог зрачења улазе, напоредо са фреквенцијом ω таласа који пада, такође и фреквенције облика $\omega' = \omega + \sum \omega^{(l)} n^{(l)}$ [гдје су $\omega^{(l)}$ основне фреквенције условно-периодичног кретања честица у систему, а $n^{(l)}$ произвољни цијели бројеви (в. нап. на стр. 116)]. Расипање са промјеном фреквенције назива се некохерентно (или комбинационо), насупрот кохерентном расипању без промјене фреквенције.

Ако претпоставимо, да је поље таласа који пада слабо, можемо густину струје претставити у облику $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'$, гдје је $\mathbf{j}_0$ густина струје, када спољашње поље не постоји, а $\mathbf{j}'$ је промјена струје под утицајем таласа који пада. У вези са тим, векторски потенцијал (и друге величине) поља система такође има облик $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$, гдје се $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}'$ одређују помоћу струја $\mathbf{j}_0$ и $\mathbf{j}'$. Очигледно је, да $\mathbf{A}'$ претставља талас, који систем расипа.

Сада ћемо посматрати расипање таласа, код кога је фреквенција ω мала у односу на све сопствене фреквенције система. Расипање ће се састојати, како из кохерентног тако и из некохерентног дијела, али овдје ћемо посматрати само кохерентно расипање.

За израчунавање поља расутог таласа при довољно малој фреквенцији ω, увијек се можемо послужити разлагањем ретардованих потенцијала, које је извршено у § 67 и § 70, чак и онда, када брзине честица у систему и нису мале у односу на брзину свјетлости. Доиста, да би наведено разлагање интеграла

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}}{c}} dV$$

потпуно важило, потребно је само, да вријеме $\frac{\mathbf{rn}}{c} \sim \frac{a}{c}$ буде мало у односу на вријеме $\sim 1/\omega$, у току којег се расподјела струје осјетно мијења. За довољно мале ω $\left(\omega \ll \frac{c}{a}\right)$ овај услов је испуњен независно од величине брзина честица у систему.

Први чланови реда дају:

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2 R_0}\{(\ddot{\mathbf{d}}' \times \mathbf{n}) + [(\ddot{\mathbf{m}}' \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}]\},$$

гдје су $\mathbf{d}'$, и $\mathbf{m}'$ — они дјелови диполног и магнетног момента система, који настају услијед расипног зрачења, које пада на систем. Слиједећи чланови реда садрже изводе по времену вишег него другог реда, па их занемарујемо.

Компонента $\mathbf{H}'_\omega$ спектралног разлагања поља расутог таласа са фреквенцијом, која је једнака фреквенцији зрачења које пада, одређује се том истом формулом, гдје је, умјесто свих величина потребно ставити њихове *Fourier*-ове компоненте:

$$\ddot{\mathbf{d}}'_\omega = -\omega^2 \mathbf{d}'_\omega, \quad \ddot{\mathbf{m}}'_\omega = -\omega^2 \mathbf{m}'_\omega.$$

Тада добивамо:

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{\omega^2}{c^2 R_0}\{(\mathbf{n} \times \mathbf{d}'_\omega) + [\mathbf{n} \times (\mathbf{m}'_\omega \times \mathbf{n})]\}. \qquad (77{,}1)$$

Слиједећи чланови разлагања поља, дали би чланове пропорционалне вишим степенима мале фреквенције. Ако су брзине свих оптерећења у систему мале $(v \ll c)$, онда се у (77,1) други члан може занемарити у односу на први, јер магнетни моменат садржи однос v/c. Тада је:

$$\mathbf{H}'_{\omega} = \frac{1}{c^2 R_0} \omega^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{d}'_{\omega}). \tag{77,2}$$

Ако је збир оптерећења система једнак нули, онда за $\omega \rightarrow 0$, $\mathbf{d}'_{\omega}$ тежи константној граници (кад збир оптерећења не би био једнак нули, онда би за $\omega = 0$, тј. у константном пољу, систем почео као цјелина да се креће). Према томе, за мале ω $\left(\omega \ll \frac{v}{c}\right)$, може се сматрати, да $\mathbf{d}'_{\omega}$ и $\mathbf{m}'_{\omega}$ не зависе од фреквенције. Одавде видимо, да је поље расутог таласа пропорционално квадрату фреквенције. Његов интензитет је, дакле, пропорционалан ω^4. На тај начин, код расипања таласа мале фреквенције, ефективни пресјек расипања (кохерентног) пропорционалан је четвртом степену фреквенције зрачења које упада.[1]

§ 78. Расипање таласа са великим фреквенцијама

Посматрајмо расипање таласа системом оптерећења под претпоставком, да је фреквенција ω таласа велика у односу на основне сопствене фреквенције система. Посљедње имају ред величине $\omega_0 \sim \frac{v}{a}$, па ω мора испуњавати услов

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a} \cdot \tag{78,1}$$

Осим тога претпоставићемо, да су брзине оптерећења у систему мале $(v \ll c)$.

Према услову (78,1), период кретања оптерећења у систему велик је у односу на период таласа. Према томе, у току интервала времена реда периода таласа, кретање оптерећења у систему може се сматрати равномјерним. То значи, да код посматрања расипања кратких таласа није битно узимати у обзир међусобно дјејство оптерећења у систему, тј. могу се сматрати слободним.

На тај начин, код израчунавања брзине $\mathbf{v}'$, коју оптерећење добије у пољу таласа који пада, можемо посматрати свако оптерећење појединачно и за њега писати једначину кретања у облику:

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})},$$

гдје је $\mathbf{k}_1 = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}_1$ — таласни вектор упадног таласа. Радиус-вектор оптерећења, наравно, претставља функцију времена. У експоненту експоненцијалног

---

[1] Исто то се, уосталом, односи и на расипање свјетлости не само неутралним атомима, него и јонима. Благодарећи великој маси језгра, може се занемарити расипање, које настаје од кретања јона као цјелине.

фактора на десној страни те једначине брзина промјене првог члана са временом велика је у односу на брзину промјене другог члана (прва износи ω, друга је реда $kv \sim \frac{v\omega}{c} \ll \omega$). Према томе, код интегрирања једначина кретања може се на њиховој десној страни $\mathbf{r}$ сматрати као константно. Тада је:

$$\mathbf{v}' = -\frac{e}{i\omega m}\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})}. \tag{78,2}$$

За векторски потенцијал расутог таласа (на великим растојањима од система) добива се према општој формули (66,2):

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}_2}{c}} dV = \frac{1}{cR_0}\sum (e\mathbf{v}')_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}_2}{c}},$$

гдје се сума узима за сва оптерећења система; $\mathbf{n}_2$ је јединични вектор у правцу расипања. Замјењујући овдје (78,2) налазимо:

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{icR_0\omega} e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} \mathbf{E}_0 \sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \tag{78,3}$$

гдје је $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ разлика између таласног вектора $\mathbf{k}_1$ упадног и таласног вектора $\mathbf{k}_2 = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}_2$ расутог таласа (строго узевши, таласни вектор $\mathbf{k}_2 = \frac{\omega'}{c}\mathbf{n}_2$, гдје се фреквенција ω' расутог таласа може разликовати од ω. Међутим, промјена фреквенције код расипања представља величину реда ω_0, тј. у посматраном случају мала је у односу на саму фреквенцију ω, и у $\mathbf{k}_2$ та промјена може се занемарити). Вриједност суме у (78,3) мора се узети у моменту $t' = t - \frac{R_0}{c}$ (као обично, због краткоће изостављамо индекс t' у $\mathbf{r}$). Промјена $\mathbf{r}$ за вријеме $\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}_2}{c}$ може се занемарити због тога, што је претпостављено, да су брзине честица мале.

За поље $\mathbf{H}'$ расутог таласа налазимо према (66,3):

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_0}{c^2 R_0} e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} \sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}. \tag{78,4}$$

Флукс енергије у елементу просторног угла у правцу $\mathbf{n}_2$ износи:

$$\frac{c\,|\mathbf{H}'|^2}{4\pi} R_0^2\, do = \frac{1}{4\pi c^3}(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_0)^2 \left| \sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right|^2.$$

Дијељењем флуксом енергије $\frac{c}{4\pi}E_0^2$ упадног таласа и увођењем угла међу правцем поља $\mathbf{E}$ упадног таласа и правцем расипања, дефинитивно налазимо ефективни пресјек расипања у облику:

$$d\sigma = \overline{\left|\sum \frac{e^2}{mc^2} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\right|^2} \sin^2\theta\, do. \tag{78,5}$$

Црта значи узимање средње вриједности по времену, тј. средње вриједности по кретању оптерећења у систему. Оно се врши због тога, што се расипање посматра у интервалима времена, који су велики у односу на период кретања оптерећења у систему.

За таласну дужину зрачења из услова (78,1) слиједи неједначина $\lambda \ll \frac{c}{v} a$. Што се тиче релативне величине λ и a, могућа су оба гранична случаја $\lambda \gg a$ и $\lambda \ll a$. У оба та случаја општа формула (78,5) знатно се упрошћава.

У случају $\lambda \gg a$ у изразима (78,5) је $\mathbf{q}\mathbf{r} \ll 1$, јер је $q \sim \frac{1}{\lambda}$, а r реда величине a. Замјењујући, према томе, $e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ јединицом, имамо

$$d\sigma = \left(\sum \frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do. \tag{78,6}$$

Специјално, код расипања атомом са Z електрона биће:

$$d\sigma = \left(\frac{Z\, e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{78,7}$$

тј. расипање је пропорционално квадрату атомског броја (члан, који одговара атомском језгру може се у суми (78,6) занемарити, јер је маса језгра знатно већа од масе електрона).

Пређимо сада на случај $\lambda \ll a$. У квадрату суме, који се налази у (78,5) поред квадрата $(e^2/mc^2)^2$ модула сваког од чланова налазе се производи облика:

$$\frac{e^2}{mc^2}\,\frac{e'^2}{m'c^2}\, e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} .$$

Код налажења средње вриједности по кретању оптерећења, тј. по њиховим међусобним распоредима у систему, $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ добива вриједности у интервалу реда a. Како је $q \sim \frac{1}{\lambda}$, $\lambda \ll a$, то је експоненцијални фактор $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ у том интервалу брзо-промијенљива периодична функција, и њена средња вриједност једнака је нули. На тај начин, за $\lambda \ll a$ ефективни пресјек расипања је:

$$d\sigma = \sum \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do. \tag{78,8}$$

Специјално, код расипања атомом, имамо у том случају:

$$d\sigma = Z\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{78,9}$$

тј. расипање је пропорционално првом степену атомског броја. Напомињемо, да се формуле (78,8) и (78,9) не могу примијенити за мале углове расипања (реда λ/a), јер у том случају q више није велико и експонент $\mathbf{qr}$ је мали у односу на јединицу.

За одређивање ефективног пресјека кохерентног расипања морамо одијелити онај дио поља расутог таласа, који има фреквенцију ω. Израз (78,4) за поље зависи од времена помоћу фактора $e^{-i\omega t}$, а осим тога, од времена зависи, такође, и сума $\sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}(t)}$. Посљедња зависност и доводи до тога, да се у пољу расутог таласа поред фреквенције ω налазе још и друге (њој блиске) фреквенције. Тај дио поља, који има фреквенцију ω, тј. зависи од времена само помоћу фактора $e^{-i\omega t}$, очевидно се добија, ако се узме средња вриједност по времену за суму $\sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$, тј. по кретању оптерећења. Саобразно томе, израз за ефективни пресјек $d\sigma_{\text{koh}}$ кохерентног расипања разликује се од укупног пресјека $d\sigma$ у томе, што умјесто средње вриједности квадрата модула суме у њему се налази квадрат модула средње вриједности суме:

$$d\sigma_{\text{koh}} = \left|\overline{\sum \frac{e^2}{mc^2} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}\right|^2 \sin^2\theta\, do. \tag{78,10}$$

У случају ако је $\lambda \gg a$, опет можемо замијенити $e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ јединицом, па је:

$$d\sigma_{\text{koh}} = \left(\sum \frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do. \tag{78,11}$$

Упоређујући ово с цјелокупним ефективним пресјеком (78,6), видимо да је $d\sigma_{\text{koh}} = d\sigma$, тј. цијело расипање је кохерентно.

Ако је, пак, $\lambda \ll a$, онда код узимања средње вриједности у (78,10) сви чланови суме (као брзо промјенљиве периодичне функције времена) нестају, па је $d\sigma_{\text{koh}} = 0$. На тај начин је у том случају цијело расипање некохерентно.

ГЛАВА X

ЧЕСТИЦА У ГРАВИТАЦИОНОМ ПОЉУ

§ 79. Гравитационо поље у нерелативистичкој механици

Поред електромагнетних поља у природи још постоје и поља друге врсте, такозвана гравитациона поља или поља теже. Та поља имају слиједећу основну особину: у њима се сва тијела, без обзира на њихову масу или оптерећење, крећу на исти начин (наравно, ако су почетни услови исти).

На примјер, закони слободног падања у пољу земљине теже исти су за сва тијела, без обзира на њихову масу; сва она добивају једно те исто убрзање.

Та особина гравитационих поља даје могућност за установљење битне аналогије међу кретањем тијела у гравитационом пољу и кретањем тијела, која се не налазе ни у каквом спољашњем пољу, но се посматрају с тачке гледишта неинерцијалног система референције. И заиста, у инерцијалном систему референције слободно кретање свих тијела врши се праволиниски и равномјерно, и ако су, рецимо, у почетном моменту њихове брзине биле једнаке, биће једнаке за читаво вријеме. Према томе је очевидно да, ако се то слободно кретање посматра у задатом неинерцијалном систему, онда ће се и у односу на њега сва тијела кретати на исти начин.

На тај начин, особине кретања у неинерцијалном систему референције, исте су као и у инерцијалном систему у присуству гравитационог поља. Другим ријечима, неинерцијални систем референције еквивалентан је неком гравитационом пољу. Та околност назива се принцип еквивалентности

Посматрајмо, на пр., кретање у равномјерно убрзаном систему референције. Тијела ма које масе, која се слободно крећу у таквом систему референцније, очевидно ће, у односу на тај систем, имати исто константно убрзање, које је једнако и супротно убрзању самог система референције. Такво је кретање у хомогеном константном гравитационом пољу, на примјер, у пољу земљине теже (у малим његовим дјеловима, гдје се поље може сматрати хомогеним). На тај начин, равномјерно убрзани систем референције еквивалентан је константном хомогеном спољашњем пољу. Нешто општији случај је систем референције, који се неравномјерно убрзано креће постепено и праволиниски; он је, очевидно, еквивалентан хомогеном, али промијенљивом гравитационом пољу.

Међутим, неопходно је напоменути, да поља, са којима су еквивалентни неинерцијални системи референције, нису сва сасвим идентична с „правим" гравитационим пољима, која постоје и у инерцијалним системима. Међу њима, наиме, постоји сасвим битна разлика у односу на њихове особине у бесконачности. На бесконачном растојању од тијела која изазивају поље, „право" гравитационо поље увијек тежи нули. Међутим, поља, са којима су еквивалентни неинерцијални системи посматрања у бесконачности напротив, неограничено се повећавају, или, у крајњем случају, остају коначна по величини. Тако, на пр., центрифугалне силе, које настају у систему референције, који ротира, неограничено се повећавају при удаљењу од осе ротације. Поље, са којим је еквивалентан систем референције, који се креће убрзано праволиниски, једнако је у читавом простору, укључивши ту и бесконачност.

Поља, са којима су еквивалентни неинерцијални системи посматрања, нестају, чим пређемо на инерцијални систем. Насупрот томе, „права" гравитациона поља (која постоје и у инерцијалном систему референције) не могу се искључити никаквим избором система референције. То се види непосредно из горе наведене разлике међу условима у бесконачности у „правим" гравитационим пољима и у пољима, којима су еквивалентни неинерцијални системи; како посљедњи у бесконачности не теже нули, то је јасно, да се никаквим избором система референције не могу искључити „права" поља, која су у бесконачности једнака нули,

Једино, што се може постићи одговарајућим избором система референције, то су искључења гравитационог поља у датом дијелу простора, који је довољно мали, тако, да се у њему поље може сматрати хомогеним. То се може урадити помоћу избора система, који се креће убрзано, а убрзање система било би једнако по величини, а супротно по правцу убрзању, које добије честица, која се налази у посматраном дијелу поља.

Кретање честице у гравитационом пољу одређује се у нерелативистичкој механици *Lagrange*-овом функцијом, која (у инерцијалном систему референције) има облик

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \qquad (79\ 1)$$

гдје је φ нека функција од координата и времена, која карактерише поље и која се назива гравитациони потенцијал[1]). Према томе једначине кретања честице гласе

$$\dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad}\varphi. \qquad (79{,}2)$$

Оне не садрже масу ни ма какву другу константу, која карактерише особине честице, што изражава основну особину гравитационих поља, која је изнешена на почетку параграфа,

§ 80. Гравитационо поље у релативистичкој механици

Основна особина гравитационих поља, да се у њима сва тијела крећу на исти начин, која је изложена у претходном параграфу, важи и у релативистичкој механици. Важи, дакле, и аналогија међу гравитационим пољима и неинерцијалним системима референције. Према томе, при проучавању особина гравитационих поља у релативистичкој механици природно је, такође, поћи од те аналогије.

---

[1]) Касније нећемо имати више посла са електромагнетним потенцијалом, па означавање гравитационог потенцијала истим словом не може довести до забуне.

У инерцијалном систему референције у *Descartes*-овом координатном систему интервал ds се одређује из релације:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

При прелазу на ма који други инерцијални систем референције, тј. код *Lorentz*-овиx трансформација, интервал, као што знамо, одржава исти облик. Али, ако пређемо на неинерцијални систем референције, онда ds^2 више неће бити збир квадрата диференцијала четири координате.

Тако, на пр., при прелазу на координатни систем који равномјерно ротира

$$x = x' \cos\Omega t - y' \sin\Omega t, \quad y = x' \sin\Omega t + y' \cos\Omega t, \quad z = z'$$

(Ω је угаона брзина ротације, оријентисана дуж осе Z) интервал добива облик

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2 (x'^2 + y'^2)]\, dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\, c\Omega\, y' dx' dt - 2 c\Omega x' dy' dt.$$

Без обзира по којем би се закону вријеме трансформирало, овај израз не може се свести на збир квадрата диференцијала четири координате.

На тај начин, у неинерцијалном систему референције квадрат интервала је нека квадратна форма општег облика диференцијала координата, тј., има облик

$$-ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{80,1}$$

гдје су g_{ik} — неке функције координата, тј. просторних координата x_1, x_2, x_3 и временске координате x_0. Према томе, четвородимензионални координатни систем x_0, x_1, x_2, x_3, када се употребљавају неинерцијални системи референције, биће криволиниски систем. Величине g_{ik}, које одређују сва својства геометрије у сваком датом криволиниском координатном систему, претстављају, као што се каже, метрику простора-времена.

Како ds^2 свакако није збир квадрата, то нема смисла употребљавати имагинарну временску координату $x_4 = ict$. Реалну временску координату означаваћемо са x_0 (или ct)[1].

Величине g_{ik} се, очевидно, увијек могу сматрати симетричне према индексима i и k ($g_{ik} = g_{ki}$), јер се дефинишу из симетричне форме (80,1), гдје g_{ik} и g_{ki} улазе помножене једним истим производом $dx_i\, dx_k$. У општем случају, очевидно постоји свега 10 разних величина g_{ik} — четири с једнаким и $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ с различитим индексима. У инерцијалном систему референције при употреби *Descartes*-овиx просторних координата $x_{1,2,3} = x, y, z$ и времена $x_0 = ct$, величине g_{ik} су:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{00} = -1, \quad g_{ik} = 0 \quad \text{за } i \neq k. \tag{80,2}$$

Координатни систем (четвородимензионални) са тим вриједностима g_{ik}, називаћемо *Galilei*-ев систем.

У претходном параграфу показано је, да су неинерцијални системи референције еквивалентни неким пољима сила. Сада видимо, да се у релативистичкој механици та поља дефинишу величинама g_{ik}.

---

[1] Саобразно томе, убудуће, када је латински индекс написан двапут, подразумијеваће се сумирање од 0 до 3, а за грчки, као и раније, од 1 до 3.

Исто то се односи и на „права" гравитациона поља. Свако гравитационо поље није ништа друго, него промјена просторно-временске метрике, па се према томе дефинише величинама g_{ik}. Та веома важна околност показује, да се геометриске особине простора-времена (метрика) дефинишу физичким појавама, а нису непромјенљиве особине простора и времена.

Теорија гравитационих поља, изграђена на основу теорије релативитета, назива се општа теорија релативитета. Засновао ју је *Einstein* (и дефинитивно ју је формулисао 1916 год.) и можда је најљепша од свих постојећих физичких теорија. Интересантно је напоменути, да ју је *Einstein* изградио чисто дедуктивним путем, па је тек касније потврђена астрономским посматрањима.

Као и у нерелативистичкој механици, међу „правим" гравитационим пољима и пољима, која су еквивалентна неинерцијалним системима референције, постоји темељна разлика. При прелазу на инерцијални систем референције квадратна форма (80,1), тј. величине g_{ik}, добивају се из њихових (*Galilei*-евих) вриједности помоћу просте трансформације координата. У вези са тим, у инерцијалном систему референције g_{ik} имају сасвим специјалан облик, и то баш такав, да се трансформацијом координата могу у читавом простору свести на *Galilei*-еве вриједности (80,2). Чињеница, да је такав облик стварно сасвим специјалан, види се по томе, што се у општем случају трансформацијом свега само четири координате не могу десет величина g_{ik} свести на унапријед задати облик.

„Право" гравитационо поље не може се елиминисати никаквом трансформацијом координата. Другим ријечима, у присуству гравитационог поља простор-вријеме је такво, да се величине g_{ik}, које дефинишу његову метрику, не могу никаквом трансформацијом координата свести у читавом простору на њихов *Galilei*-ев облик. Такав простор-вријеме назива се нееуклидски или закривљен за разлику од еуклидског или равног, у коме се $-ds^2$ увијек може свести на збир квадрата четири диференцијала. У нееуклидском простору не важе закони обичне еуклидске геометрије1).

Једино што се може постићи трансформацијом координата у нееуклидском простору, то је свођење величина g_{ik} на вриједности (80,2), тј. елиминисање гравитационог поља у датом бесконачно малом елементу „запремине" простор-времена, док у осталом простор-времену g_{ik} остају негалилејски. И заиста, у бесконачно малом простору g_{ik} могу се сматрати константним, а свака квадратна форма с константним коефицијентима може се свести на збир квадрата. Такав координатни систем за дату тачку назваћемо галилејски.

Будући да су величине g_{ik} у датој тачци сведене на дијагонални облик, напомињемо, да на тај начин имају једну негативну и три позитивне главне вриједности. Одавде слиједи, да је детерминанта g, састављена из величина g_{ik} у реалном простор-времену, увијек негативна.

До сада смо говорили о просторним и временским координатама, остављајући по страни питање о томе, на какав се начин те координате могу узети. Међутим, сам појам система референције добива у општој теорији

---

1) Строго узевши, да би важила еуклидска геометрија, неопходно је, да се ds^2 може свести баш на збир квадрата диференцијала координата, док у реалном простор-времену диференцијали трију просторних координата улазе у ds^2 са једним, а dx_0^2 са обратним знаком (ако се не уводе имагинарне координате). Четвородимензионална геометрија, која се дефинише квадратном формом $dx_0^2-dx_1^2-dx_2^2-dx_3^2$, понекад се назива псеудоеуклидна. Ипак, ми овдје нећемо употребљавати тај термин (напомињемо, да је у псеудо-еуклидном простор-времену чисто просторна, тј. тродимензионална геометрија, наравно просто еуклидска).

релативитета смисао, који се разликује од смисла који је имао у специјалној теорији. У специјалној теорији релативитета као систем референције узимали смо укупност тијела, која се налазе на непромјенљивим растојањима, тј. која мирују једно у односу на друге. Међутим, у општој теорији релативитета, то је немогућно. И заиста, присуство ма каквог гравитационог поља значи, као што смо видјели, промјену метрике простор-времена, при чему се, специјално, мијења и метрика самог простора, а осим тога зависи и од времена. Тако долази до тога, да ни у каквом систему тијела која га састављају не могу бити једно према другом непокретна[1]). Очевидно, да се на основу тога ни у каквом систему тијела не могу посматрати са непромјенљивим међусобним растојањима.

На тај начин, појам о непокретности једног тијела у односу на друго губи смисао у општој теорији релативитета. Још више, нема смисла ни уопште појам ма какве одређене брзине релативног кретања тијела.

Према томе за тачно одређивање положаја тијела у простору у присуству гравитационог поља, строго узевши, неопходно је имати систем од бесконачног броја тијела, која испуњавају читав простор. Такав систем тијела, заједно са сатовима који су везани са сваким од њих, а који раде на произвољан начин, је систем референције у општој теорији релативитета.

§ 81. Криволиниске координате

Као што смо видјели, код проучавања гравитационих поља појаве морамо обавезно посматрати у криволиниским координатама. У вези с тим неопходно је изградити четвородимензионалну геометрију са произвољним криволиниским координатама. Томе су намијењени §§ 80—85.

Посматрајмо трансформацију једног координатног система x^0, x^1, x^2, x^3 у други x'^0, x'^1, x'^2, x'^3:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

гдје су f^i неке функције. Приликом трансформације координата њихови диференцијали трансформишу се према релацији:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \qquad (81.1)$$

Свака укупност четири величине $A^i (i = 0, 1, 2, 3)$, које се трансформацијом координата трансформирају као њихови диференцијали, назива се контраваријантни 4-вектор. На тај начин код трансформације координата је:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^\kappa} A'^k. \qquad (81,2)$$

Компоненте контраваријантних вектора означаваћемо индексом горе (при врху слова)[2]).

---

[1]) Неизбјежност таквих деформација види се, на примјер, из тога, што у нееуклидном простору однос дужине периферије круга према радиусу није једнак 2π и уопште, мијења се са временом. Према томе, ако растојања тијела по радиусу круга остају непромјенљива, онда се морају растојања по периферији мијењати, и обрнуто.

[2]) Будући да диференцијали координата x^i сами сачињавају контраваријантни вектор, овдје и убудуће писаћемо индекс координата горе. Само понекад ћемо код појединих координата индекс писати доље и то тамо, гдје би било незгодно да се пишу горе. [на пр. x_2^2 умјесто $(x^2)^2$].

Нека је φ неки скалар. Четири величине $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ при трансформацији координата трансформирају се према формулама

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x'^k}\,\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \tag{81,3}$$

које се разликују од формула (81,2). Свака укупност четири величине A_i, које се трансформацијом координата трансформирају као изводи од скалара, назива се коваријантни 4-вектор. На тај начин, при трансформацији координата је:

$$A_i=\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\,A'_k. \tag{81,4}$$

Компоненте коваријантних вектора означаваћемо индексом доље.

У *Descartes*-овом координатном систему нема разлике међу коваријантним и контраваријантним векторима; трансформациона правила (81,2) и (81,4) ту су еквивалентна[2]).

У вези са постојањем два облика вектора у криволиниским координатама постоје три облика тензора 2. реда. Контраваријантни тензор другог реда A^{ik} назива се укупност 16 величина, које се трансформирају као производ компонената двају контраваријантних вектора, тј. према закону

$$A^{ik}=\frac{\partial x'^l}{\partial x'^i}\,\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}\,A'^{lm}, \tag{81,5}$$

Аналогно дефинише се коваријантни тензор, који се трансформира према формулама

$$A_{ik}=\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\,\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}\,A'_{lm}. \tag{81,6}$$

и мјешовити тензор, који се трансформише према формулама

$$A^i_k=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\,\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}\,A'^l_m. \tag{81,7}$$

Сасвим аналогно дефинишу се тензори вишег реда. Напр. тензор A^m_{ikl}, коваријантан по три индекса, а контраваријантан по једном, трансформира се према формули:

$$A^m_{ikl}=\frac{\partial x'^p}{\partial x^i}\,\frac{\partial x'^r}{\partial x^k}\,\frac{\partial x'^s}{\partial x^l}\,\frac{\partial x^m}{\partial x'^t}\quad A'^t_{prs}.$$

Ако је тензор симетричан или антисиметричан по ма којем пару индекса (ако је једнаке коваријантности или контраваријантности), онда то важи и у ма којем координатном систему. Међутим, за мјешовити тензор, рецимо за A^i_k, појам симетрије или антисиметрије нема смисла, јер разним индексима одговарају различити закони трансформације, па се зато при прелазу

---

[1]) У вези са тим, уосталом, довољно је истаћи, да у *Descartes*-овим координатама градијент има исте векторске особине као и сви други вектори. У еквивалентност трансформација (81,2) и (81,4) можемо се формално увјерити на слиједећи начин. Трансформације различитих *Descartes*-ових координатних система су линеарне трансформације облика $x^i=\alpha_{ik}x'^k$, гдје су α_{ik} константе, које задовољавају тзв. услов ортогоналности: $\alpha_{il}\,\alpha_{kl}=\delta_{ik}$ Према формулама (81,2) и (81,4) имамо $A^i=\alpha_{ik}\,A'^k$ и $A'_i=\alpha_{ki}\,A_k$. Множењем друге од тих једначина са α_{li} и сумирањем по индексу l добивамо $A_l=\alpha_{li}\,A'_i$, тј. исту такву трансформацију, као и за A^l.

од једног координатног система на други, уопште узевши, мијењају особине симетрије.

Ако је тензор, тј. све његове компоненте, једнак нули и у једном координатном систему, онда ће бити једнак нули и у сваком координатном систему. Збир два тензора једнаког ко- или контраваријантног карактера, тензор је истог карактера.

Очевидно је, да је производ компонената вектора A_i и B_k тензор облика A_{ik}, а вектора A_i и B^k — тензор облика A_i^k. Производ вектора A_l са тензором A^{ik} је тензор облика A_l^{ik} и т. сл.

У *Descartes*-овим координатама може се од ма која два вектора саставити скалар—скаларни производ тих вектора. У криволиниским, пак, координатама не може се саставити скалар од два контраваријантна или коваријантна вектора. Али, од контраваријантног вектора A^i и коваријантног B_k може се саставити скалар; тај скалар је величина $A^i\, B_i$, која се назива скаларни производ вектора A^i и B_i. Да је $A^i B_i$ заиста скалар, лако се увјерити помоћу трансформационих формула (81,2) и (81,4).

Формирање скаларног производа двају вектора претставља специјалан случај слиједећег правила „упрошћења" тензора. Ако имамо тензор $A^{..i..}_{..k..}$, онда је израз $A^{.i.}_{.i.}$ (сумирање по i) тензор за двије јединице нижег реда од реда тензора $A^{.i.}_{.k.}$. Тако, на пр., од тензора A_i^k може се формирати скалар A_i^i. И заиста, према (81,7) је

$$A_i^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i}\, A'^l_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l}\, A'^l_m = A'^l_l,$$

тј. A_i^i је заиста инваријанта[1]). Слично томе скаларни су изрази A^{ik}_{ik}, $A_i^k\, B_k^i$ и т. сл. Израз A^i_{kli} коваријантни је тензор другог реда, $A_k^i\, B^k$ — контраваријантни вектор и т. сл. Напомињемо, да изрази, који се добијају при сумирању по два горња или два доња индекса (на примјер A^i_{kll}), нису тензори. Убудуће такве величине нећемо употребљавати.

Јединични тензор у криволиниским координатама је мјешовити тензор δ_i^k, чије су компоненте $\delta_i^k = 0$ за $i \neq k$, а за $i = k$ равне јединици. Ако је A^k вектор, онда множењем са δ_k^i добивамо

$$A^k \delta_k^i = A^i,$$

тј. опет вектор, а то и доказује да је δ_k^i тензор.

Квадрат елемента дужине ds^2 је квадратна функција диференцијала dx^i, тј.

$$-\, ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \tag{81,8}$$

гдје су g_{ik} — функције координата. g_{ik} су симетрични према индексима i и k, тј

$$g_{ik} = g_{ki}. \tag{81,9}$$

Пошто је производ (упрошћени) од g_{ik} и контраваријантног тензора $dx^i\, dx^k$ скалар, g_{ik} је коваријантни тензор. Тензор g_{ik} назива се метрички тензор.

---

[1]) Скалар и инваријанта су синоними.

Као што је показано у § 80, у реалном euклидном простор-времену одговарајућим избором координатног система тензор g_{ik} увијек се може трансформирати у галилејску форму (у датој тачки)

$$g_{ik}^{(0)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{81,10}$$

Два тензора A_{ik} и B^{ik} називају се међусобно инверсни, ако је:

$$A_{ik}B^{kl}=\delta_i^l.$$

Специјално, контраваријантни метрички тензор g^{ik} назива се тензор, инверсан тензору g_{ik}, тј,

$$g_{ik}g^{kl}=\delta_i^l. \tag{81,11}$$

Галилејски тензор $g^{(0)ik}$, очевидно, има исте компоненте, као и тензор $g_{ik}^{(0)}$.

У *Descartes*-овом (четвородимензионалном) координатном систему, као што је већ напоменуто, нема разлике међу ко- и контраваријантним векторима; та разлика појављује се тек при прелазу на криволиниске координате. Према томе, ако је ма која физичка величина у *Descartes*-овом координатном систему вектор, онда се при прелазу на криволиниске координате та величина може претставити на два начина: или у облику коваријантног или у облику контраваријантног вектора. Оба облика једног истог вектора означаваћемо једнаким словом, али са индексима горе и доље (A_i и A^i).

Лако је наћи формуле, по којима се мора вршити прелаз од коваријантног на контраваријантни облик вектора, и обратно. Прије свега очевидно је, да су компоненте метричког тензора једине величине, које могу одредити везу међу ко- и контраваријантним компонентама вектора. Даље, тражене релације морају довести у *Descartes*-овом координатном систему (тј. за $g_{ik}=\delta_{ik}$) до $A_i=A^i$[1]) Да би се контраваријантни вектор могао изразити помоћу коваријантног, морамо, дакле, од компонената A_i и компонената метричког тензора саставити контраваријантни вектор, који би одговарао постављеном услову. Такав је:

$$A^i=g^{ik}A_k, \tag{81,12}$$

и обратно:

$$A_i=g_{ik}A^k. \tag{81,13}$$

---

[1]) У овом и у аналогним случајевима, гдје се при доказивању служимо *Descartes*-овим координатним системом, мора се имати у виду, да се *Descartes*-ов систем може узети само у том случају, када је простор еуклидни. У случају нееуклидног простора при доказивању затреба координатни систем сматрати *Descartes*-овим у датом бесконачно малом елементу запремине, што се увијек може урадити (в. § 80). Сви изводи остају тада исти и за нееуклидни простор. У сличним случајевима због краткоће убудуће увијек ћемо говорити о *Descartes*-овом координатном систему; али треба имати у виду, да се сви резултати и истој мјери могу примијенити и на нееуклидни простор.

Мора се напоменути, да у реалном простор-времену, ако се узимају реалне координате x^i, — ds^2 може се у датом бесконачном малом елементу свести само на галилејски облик, у коме три квадрата диференцијала улазе са позитивним, а један са негативним знаком. Међутим, та околност ништа не мијења у излагањима овог и слиједећих параграфа, јер за прелаз од галилејских координата на четвородимензионалне *Descartes*-ове, треба увести само умјесто координате x^0, њен производ са i.

И заиста, у *Descartes*-овом координатном систему је $g_{ik} = \delta_{ik}$ и те формуле дају $A_i = A^i$, што и мора бити.

Напомињемо, да се у галилејским координатама ко- и контраваријантне компоненте вектора не поклапају у потпуности. Наиме, $A_\alpha = A^\alpha, A_o = - A^o$.

Све ово што је речено односи се и на тензоре. Сваки тензор у *Descartes*-овом координатном систему при прелазу на криволиниске координате може се претставити у неколико облика разног ко- и контраваријантног карактера. Разне облике истог тензора означаваћемо истим словом са различитим распоредом индекса. Прелаз међу различитим облицима тензора врши се сасвим аналогно поступку, који се врши код вектора. Тако је

$$A^{i}_{kl} = g_{lm} A^{im}_{k}, \quad A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm} \text{ итд.}$$

Ако је тензор другог реда несиметричан, онда треба разликовати $A_k{}^i$ од $A^k{}_i$, тј. мјесто, са којег је дигнут индекс.

У *Descartes*-овом координатном систему квадрат апсолутне вриједности вектора једнак је збиру квадрата његових компонената. Очевидно је, да је у нерелативистичким координатама квадрат апсолутне величине вектора скалар:

$$A_i A^i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k . \tag{81,14}$$

Корисно је напоменути, да индекси, по којима се врши сумирање у производу тензора, имају извјесну слободу премјештања. Тако, на пр.:

$$A_{ik} B^{ik} = A^{ik} B_{ik}, \quad A_{ik} B^{lk} = A_i{}^k B^l{}_k \text{ итд.}$$

Индекс се у једном фактору може подићи под условом, да се исти такав индекс у другом спусти (то је лако провјерити, користећи везу међу коваријантним и контраваријантним компонентама тензора, која се остварује тензором g_{ik}).

У § 6 потпуно је дефинисан (у *Descartes*-овим координатама) јединични антисиметрични псеудотензор e_{iklm}. Трансформирајмо га сада према произвољном криволиниском координатном систему. Претходно напоменимо, да према дефиницији e_{iklm}, можемо написати за произвољни тензор k_{ik}:

$$e_{nrst} k_{ni} k_{rk} k_{sl} k_{tm} = k e_{iklm}, \tag{81,15}$$

гдје је k детерминанта, састављена из величина k_{ik}. И заиста, поједини чланови детерминанте добијају се узимајући четири елемента по једној од сваке врсте (тако да је $n \neq r \neq s \neq t$) и из сваког реда (тако да је $i \neq k \neq l \neq m$) и стављајући пред њихов производ знак $+$ или $-$, према томе, да ли је могуће ред бројева редова превести у ред бројева врста помоћу парног или непарног броја транспозиција.

Према општим правилима трансформација тензора и помоћу (81,15) добивамо при прелазу на криволиниске координате:

$$e_{iklm} = e'_{nrst} \frac{\partial x'^n}{\partial x^i} \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} \frac{\partial x'^t}{\partial x^m} = e'_{iklm} J, \tag{81,16}$$

гдје је

$$J = \frac{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

јакобијан трансформације са координата x^i на x'^i. Овај јакобијан може се изразити помоћу детерминанте g', која је састављена од компонената тензора g'_{ik}. У вези са тим напомињемо, да због тога што је у *Descartes*-овом координатном систему $g_{ik}=\delta_{ik}$, биће према трансформационим формулама

$$\delta_{ik}=g'_{lm}\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}.$$

Упоређивањем детерминаната, које су састављене из величина из обије стране те једначине, имамо $1=g'J^2$, тј. $\sqrt{g'}=\frac{1}{J}$. Међутим, даље ћемо под коријеном стално писати $-g$, јер је уствари у свим координатама, које се односе на реалан простор-вријеме, детерминанта g негативна (в. § 80). Из (81,16) сада налазимо, да је:

$$e'_{iklm}=\sqrt{-g'}\,e_{iklm}.$$

На тај начин, у криволиниским координатама антисиметрични јединични тензор 4-ог реда мора се дефинисати као

$$E_{iklm}=\sqrt{-g}\,e_{iklm}.$$

Подизањем индекса код тензора $\sqrt{-g}\,e_{iklm}$ лако је наћи, да је контраваријантни јединични антисиметрични тензор 4-ог реда

$$E^{iklm}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\,e_{iklm}.$$

У *Descartes*-овом координатном систему интеграл од скалара по $d\Omega=dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3$ такође је скалар, тј. $d\Omega$ се при интегрирању понаша као инваријанта (§ 6). При прелазу на криволиниске координате x'^i еленат интегрирања $d\Omega$ прелази у $\frac{1}{J}\,d\Omega'=\sqrt{-g'}\;d\Omega'$. На тај начин, у криволиниским координатама при интегрирању по некој области 4-простра $\sqrt{-g}\,d\Omega$ понаша се као инваријанта[1]).

Све што је на крају § 6 речено с обзиром на елементе интегрирања по хиперповршини, површини и линији, остаје на снази и у криволиниским координатама, само с том разликом, што се унеколико мијења дефиниција дуалних тензора. Елемент „површине“ хиперповршине формиран од три бесконачна мала помјераја, контраваријантни је антисиметрични тензор dS^{ikl}. Његов дуални вектор добива се множењем тензором $\sqrt{-g}\,e_{iklm}$, тј. износи:

$$\sqrt{-g}\,dS_i=\frac{1}{6}\,e_{klmi}\,dS^{klm}\sqrt{-g}. \tag{81,17}$$

---

[1]) Ако је φ скалар, онда се величина $\sqrt{-g}\,\varphi$, која је при интегрирању по $d\Omega$ инваријанта, понекад назива скаларна густина. Аналогно се говори о векторској и тензорској густини $\sqrt{-g}A^i$, и $\sqrt{-g}A^{ik}$ итд. Ове величине дају вектор или тензор при интегрирању по бесконачно малој 4-запремини (интеграл $\int A^i\sqrt{-g}\,d\Omega$ по коначној области, узевши уопште, не може бити вектор, јер су закони трансформације вектора A^i у разним тачкама различити).

Аналогно, ако је df^{ik} елеменат површине (дводимензионалне), формиране на два бесконачно мала помјераја, онда се његов дуални тензор дефинише овако:

$$\sqrt{-g}\, df^{*}_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, e_{iklm}\, df^{lm}. \tag{81,18}$$

Овде остављамо ознаке dS_i и df^{*}_{ik}, као и раније, респективно за $\frac{1}{6} e_{iklm}\, dS^{klm}$ и $\frac{1}{2} e_{iklm}\, df^{lm}$, а не за њихове производе са $\sqrt{-g}$). Правила (6,11) — (6,13) за међусобну трансформацију интеграла тада остају иста, јер њихово извођење има формални карактер, који није везан с тензорским особинама одговарајућих величина. Од њих нам је нарочито потребно правило трансформације интеграла по хиперповршини у интеграл по запремини (*Gauss*-ова теорема), која се врши замјеном

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{81,19}$$

§ 82. Растојања и интервали времена

Већ смо говорили, да у општој теорији релативитета избор система референције није ничим ограничен. Три просторне координате x^1, x^2, x^3 могу бити ма које величине које одређују распоред тијела у простору, а временска кордината x^0 може се одређивати сатом, који произвољно ради. Настаје питање о томе, на који се начин на основу вриједности величина x^1, x^2, x^3, x^0 могу одредити права растојања и интервали времена.

Одредимо најприје везу правог времена, које ћемо убудуће означавати са τ, са координатом x^0. У вези са тим посматрајмо два бесконачно блиска догађаја, који се дешавају у једној истој тачки простора. Тада интервал ds међу тим догађајима, као што знамо, није ништа друго, него $cd\tau$, гдје је $d\tau$ — интервал времена (правог) међу оба догађаја. Стављајући $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ у општи израз $-ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$, налазимо, дакле,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00} dx_0^2,$$

одакле је:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\, dx^0; \tag{82,1}$$

или, уопште, за вријеме међу ма која два догађаја, који се дешавају на једном истом мјесту у простору

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g_{00}}\, dx^0. \tag{82,2}$$

Ове релације одређују интервале правог времена (или, како се још каже, сопственог времена за дату тачку простора) у вези са промјеном координате x^0. Узгред напомињемо, да је величина g_{00}, као што се види из наведених формула, негативна

$$g_{00} < 0. \tag{82,3}$$

Неопходно је подвући разлику међу смислом услова (82,3) и смислом услова, да три главне вриједности тензора g_{ik} морају бити позитивне, а једна негативна (стр. 231). Тензор g_{ik}, који не задовољава други од тих услова, уопште не може одговарати било каквом реалном гравитационом пољу, тј. метрици реалног простор-времена. А неиспуњавање услова (82,3) значило би само, да одговарајући систем референције не могу остварити реална тијела; ако се услов за главне вриједности притом испуњава, онда се подесном трансформацијом координата увијек може постићи, да g_{00} буде негативно (на примјер сличног система наићи ћемо у § 89 при посматрању ротирајућег координатног система).

Одредимо сада елеменат dl просторног растојања. У специјалној теорији релативитета (§ 2), dl може се одређивати као интервал између два бесконачно блиска догађаја, који се дешавају у истом моменту. Уопште узевши, то се у општој теорији релативитета не може урадити, тј. не може се одредити dl стављајући у ds просто $dx^0 = 0$ и то због тога, што је у гравитационом пољу сопствено вријеме у разним тачкама простора на разне начине везано с координатом x^0.

За одређивање dl поступимо сада на слиједећи начин. Замислимо, да се из дате тачке простора одашиље свјетлосни сигнал у другу тачку, која је на бесконачно малом растојању од прве, а затим обратно истим путем. Очевидно је, да је производ брзине свјетлости c и времена, које је за то неопходно, (измјерено у једној истој тачки простора) једнак двоструком растојању међу тим двјема тачкама. Напишимо интервал, одвајајућу просторну и временску координату:

$$-ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha}\,dx^0\,dx^\alpha + g_{00}\,dx_0^2, \tag{82,4}$$

гдје се под поновљеним грчким индексима подразумијева сумирање по вриједностима 1, 2, 3. За два догађаја, који претстављају одлазак и стизање сигнала из једне тачке у другу, као што се зна, интервал је једнак нули. Стављајући $ds^2 = 0$, налазимо за „вријеме“ простирања сигнала из прве тачке у другу

$$dx_0^{(1)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0\alpha}\,dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}\,g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}\,g_{00})\,dx^\alpha\,dx^\beta)}\right\}$$

(узимамо позитивни коријен једначине $ds^2 = 0$).

За кретање сигнала натраг из друге тачке у прву „вријеме“ $dx_0^{(2}$ одређује се исто таквом формулом, гдје сада треба промијенити знак свих dx^α, тј

$$dx_0^{(2)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{g_{0\alpha}\,dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}\,g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}\,g_{00})\,dx^\alpha\,dx^\beta}\right\}.$$

На тај начин, интервал „времена“ међу одашиљањем и враћањем сигнала у ту исту тачку једнак је

$$dx_0^{(1)} + dx_0^{(2)} = -\frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}\,g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}\,g_{00})\,dx^\alpha\,dx^\beta}.$$

Одговарајући интервал правог времена одавде се добива према (79,1) множењем са $\frac{\sqrt{-g_{00}}}{c}$, а растојање dl међу обје тачке још множењем са $\frac{c}{2}$. За резултат добивамо:

$$dl^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}\, g_{0\beta}}{g_{00}}\right) dx^\alpha\, dx^\beta\,.$$

Ово је тражени израз, који одређује растојање помоћу елемената просторних координата. Препишимо га у облику

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta\,, \tag{82,5}$$

гдје је

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}\, g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{82,6}$$

тродимензионални метрички тензор, који дефинише метрику, тј. геометриске особине простора [1]. Релацијом (82,6) успоставља се веза међу метриком реалног простора и метриком четвородимензионалног простор-времена [2].

Ипак је неопходно упамтити, да, уопште узевши, g_{ik} зависе од x^0, тако, да се и просторна метрика (82,5) временом мијења. Из тог разлога нема смисла интегрирати dl; такав интеграл зависио би од тога, по каквој би се свјетској линији узео међу двијема задатим тачкама у простору. На тај начин, у општој теорији релативитета нема смисла појам о одређеном растојању

---

[1] Напомињемо да је $\gamma_{\alpha\beta}$ тензор, који је инверсан контраваријантном тродимензионалном тензору $g^{\alpha\beta}$. И заиста, из $g^{ik}\, g_{kl} = \delta^i_l$ имамо напосе:

$$g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma} + g^{\alpha_0}\, g_{0\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \quad g^{\alpha\beta}\, g_{\beta_0} + g^{\alpha_0}\, g_{00} = 0.$$

Одређујући g^{α_0} из друге једначине и уврштавањем у прву, добивамо $g^{\alpha\beta}\ \gamma^{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\gamma$, што је и требало доказати.

Напоменимо, такође, да су детерминанте g и γ, које су састављене респективно од величина g_{ik} и $\gamma_{\alpha\beta}$, међусобно везане релацијом $g = g_{00}\gamma$.

[2] Квадратна форма (82,5), очевидно мора бити битно позитивна. Због тога њени коефицијенти морају, као што је познато из теорије форми, задовољавати услове:

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Ако изразимо γ_{ik} помоћу g_{ik}, лако нађемо да ти услови добивају облик:

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} < 0, \quad g < 0.$$

Компоненте метричког тензора морају задовољавати ове услове, заједно са условима (82,3), у сваком систему референције, који се може остварити помоћу реалних тијела.

међу тијелима, а важи само за бесконачно мала растојања. Једини случај, када се растојање може одредити и у коначним подручјима простора, претстављају такви системи референције, у којима g_{ik} не зависе од времена, и зато интеграл $\int dl$ дуж просторне криве има одређени смисао.

Пређимо сада на дефиницију појма једновремености у општој теорији релативитета. Другим ријечима, објаснимо питање о могућностима синхронизације сатова, који се налазе у разним тачкама простора, тј. довођења до сагласности показивања тих сатова.

Нека се из неке тачке B одашиље сигнал у тачку A, која је на бесконачно малом растојању од прве тачке, а затим одмах натраг из A у B. „Вријеме" простирања сигнала из B у A и из A у B једнако је, респективно, горе одређеним $dx_0^{(2)}$ и $dx_0^{(1)}$, гдје се растојање рачуна од A према B. Ако је x^0 моменат стизања сигнала у A, онда је моменат одашиљања тог сигнала из $B: x^0 - dx_0^{(2)}$, а момент повратка у $B: x^0 + dx_0^{(1)}$. Очевидно је, да треба узети показивање сата у B једновремено са доласком сигнала у A, а оно је на средини међу моментом одашиљања и моментом повратка сигнала. Другим ријечима, са неким моментом x^0 у тачки A истовремен је моменат $x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{dx_0^{(1)} - dx_0^{(2)}}{2}$ у тачки B. Помоћу горе наведених израза за $dx_0^{(1)}$ и $dx_0^{(2)}$ може се, дакле, разлика вриједности „времена" x^0 за два истовремена догађаја, који се дешавају у бесконачно блиским тачкама, претставити у облику

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}. \qquad (82,7)$$

Ова релација даје могућност, да се сатови синхронизирају у ма којој бесконачно малој запремини простора. Ако се слична синхронизација продужи даље иза тачке B, онда се сатови могу синхронизирати, тј. одредити истовременост догађаја дуж ма које линије (која није затворена).

Али, ако покушамо добити синхронизацију сатова дуж неке затворене контуре, то се може показати као немогуће. И заиста, обилажењем дуж контуре и враћањем у полазну тачку, добили бисмо за x^0, узевши уопште, вриједност која није једнака нули. Тим више показује се као немогућа синхронизација сатова у цјелокупном простору. Другим ријечима, у општој теорији релативитета истовременост догађаја не само што има различити смисао у разним системима референције као у специјалној теорији релативитета, него уопште не може бити установљена ни унутар једног те истог система референције. Једини случај, када се синхронизација показује као могућна, јесу такви системи референције, у којима су величине $g_{0\alpha}$ једнаке нули (или се могу свести на нулу одговарајућим избором координате x^0).

Најзад, ако посматрамо интервал сопственог времена међу два догађаја који се дешавају у некој тачки простора, и интервал времена међу истовременим догађајима на другом мјесту простора, онда, уопште узевши, ти интервали неће бити међусобно једнаки. Другим ријечима, право вријеме тече на различити начин у разним тачкама простора. Међутим, како у отсуству гравитационог поља рад часовника зависи само од избора система референције, он је у општој теорији релативитета различит у разним тачкама простора, чак и у једном те истом систему референције.

§ 83. Коваријантно диференцирање

У *Descartes*-овим координатама[1]) диференцијали dA_i вектора A_i сачињавају вектор, а изводи $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ компонената по координатама сачињавају тензор. У криволиниским координатама то не важи; dA_i није вектор, а такође ни $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ није тензор. То је у вези с чињеницом, што је dA_i разлика вектора, који се налазе у разним (које су бесконачно близу) тачкама простора. А у разним тачкама простора вектори се трансформирају различито, пошто су коефицијенти у трансформационим формулама (81,2), (81,4) функције координата.

У ово се може лако увјерити и директно. Због тога ћемо одредити трансформационе формуле за диференцијале dA_i у криволиниским координатама. Коваријантни вектор трансформише се према формулама:

$$A_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A'_k;$$

према томе је:

$$dA_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i x'^l} dx'^l .$$

На тај начин, dA_i уопште се не трансформира као вектор (наравно, исто то односи се и на диференцијале контраваријантних вектора). Само у случају, када су други изводи $\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l} = 0$, тј. када су x^k линеарне функције од x'^k, трансформационе формуле имају облик:

$$dA_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k,$$

тј. dA_i се трансформира кео вектор.

Сада ћемо дефинисати тензор, који у криволиниским координатама игра улогу тензора $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ у *Descartes*-овим координатама. Другим ријечима, морамо трансформисати $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ из *Descartes*-ових у криволиниске координате.

Да би се у криволиниским координатама добио диференцијал вектора, који је такође вектор, треба да се оба вектора, који се међусобно одузимају налазе у једној тачки простора. Другим ријечима, треба на неки начин „премјестити" један од два бесконачно блиских вектора у тачку, гдје се налази други, послије чега треба одредити разлику оба вектора, који се сада односе на исту тачку простора. Сама операција помјерања мора се при том одредити на тај начин, да се у *Descartes* овим координатама тражена разлика поклапа с обичним диференцијалом dA_i. Пошто је dA_i просто разлика компонената двају вектора, који су међусобно бесконачно близу, то значи, да се послије операције помјерања употребом *Descartes*-ових координата, ком-

---

[1]) А такође у правим косоуглим; уопште увијек, када су величине g_{ik} константне.

поненте вектора не морају измијенити. Али то помјерање није ништа друго него премјештање вектора паралелно самом себи. При паралелном помјерању вектора његове компоненте у *Descartes*-овим координатама не мијењају се.[1]) Али ако се употријебе криволиниске координате, онда се таквим помјерањем компоненте вектора уопште мијењају. Према томе, у криволиниским координатама разлика компонената оба вектора послије помјерања једног од њих у тачку гдје се налази други, неће се поклапати с њиховом разликом прије помјерања, тј. с диференцијалом dA_i.

На тај начин, при упоређењу двају вектора, који су међусобно бесконачно близу, морамо један од њих паралелно помјерити у тачку, гдје се налази други. Посматрајмо ма који контраваријантни вектор. Ако његова вриједност у тачки с координатама x^i износи A^i, онда у сусједној тачки $x^i + dx^i$ износи $A^i + dA^i$. Извршимо бесконачно малу транслацију вектора A^i у тачку $x^i + dx^i$. Промјену вектора означићемо притом са δA^i. Тада разлика DA^i међу оба вектора, који се сада налазе у једној тачки, износи:

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \tag{83,1}$$

Промјена δA^i компонената вектора при бесконачно малој паралелној транслацији зависи од величине самих компонената, гдје та зависност очевидно мора бити линеарна. То непосредно слиједи из тога, што се збир двају вектора мора трансформирати по истом закону, по коме и сваки од њих. На тај начин δA^i има облик

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l, \tag{83,2}$$

гдје су Γ^i_{kl} — неке функције од координата. Γ^i_{kl} зависе наравно од координатног система; у *Descartes*-овом[2]) координатном систему је $\Gamma^i_{kl} = 0$.

Већ се одавде види, да величине Γ^i_{kl} не сачињавају тензор, јер тензор, који је једнак нули у једном координатном систему, једнак је нули и у сваком другом систему. Наравно, у нееуклидском простору никаквим избором координата се не може добити, да све Γ^i_{kl} буду једнаке нули у читавом простору. Може се само узети такав координатни систем — *Descartes*-ов за дату тачку, — у коме Γ^i_{kl} постају једнаке нули у датом бесконачном малом дијелу[3]). Величине Γ^i_{kl} називају се *Christoffel*-ови симболи. Осим величина Γ^i_{kl}, касније ћемо употребљавати, такође, и величине $\Gamma_{i,kl}$[4]), које се дефинишу на слиједећи начин:

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im} \Gamma^m_{kl}. \tag{83,3}$$

---

[1]) Напомињемо, да у случају нееуклидног простора за све доказе и дефиниције, умјесто *Descartes*-овог координатног система, треба узети *Descartes*-ов (или тачније, галилејски) координатни систем за дати бесконачно мали дио.

[2]) А исто тако и у ма коме правом косоуглом.

[3]) Касније ћемо видјети (§ 84), да се Γ^i_{kl} изражавају помоћу првих извода од метричког тензора g_{ik}. Може се доказати могућност избора таквог координатног система, у коме су, у датој тачки, сви први изводи од g_{ik}, а према томе и Γ^i_{kl}, једнаки нули (притом други изводи од g_{ik} нису једнаки нули).

[4]) Умјесто ознака Γ^i_{kl} и $\Gamma_{i,kl}$ понекад се употребљавају ознаке, респективно $\left\{ {kl \atop i} \right\}$ и $\left[{kl \atop i} \right]$.

Наравно, важи и обрнуто:

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\,\Gamma_{m,kl}. \tag{83,4}$$

Са *Christoffel*-овим симболима лако је повезати и промјену компонената коваријантног вектора при параленом помјерању. У вези са тим напомињемо, да се при паралелном помјерању скалари, очевидно, не мијењају. Специјално, при паралелном помјерању не мијења се ни скаларни производ двају веткора.

Нека су A_i и B^i неки коваријантни и неки контраваријантни вектор. Тада из $\delta(A_i\, B^i) = 0$ имамо:

$$B^i\,\delta A_i = -A_i\,\delta B^i = \Gamma^i_{kl}\,B^k\,A_i\,dx^l,$$

или, ако се замјене ознаке индекса,

$$B^i\,\delta A_i = \Gamma^k_{il}\,A_k\,B^i\,dx^l.$$

Како је B^i произвољно, одавде имамо:

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il}\,A_k\,dx^l, \tag{83,5}$$

што и дефинише промјену коваријантног вектора при паралелном помјерању.

Замјеном (83,2) и $dA^i = \dfrac{\partial A^i}{\partial \lambda^l}\,dx^l$ у (83,1) добива се

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial \lambda^l} + \Gamma^i_{kl}\,A^k\right)dx^l. \tag{83,6}$$

Аналогно налазимо за коваријантни вектор

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k\right)dx^l. \tag{83,7}$$

Изрази, који се налазе у заградама у (83,6) и (83,7) претстављају тензоре, јер помножени вектором $d\lambda^l$ дају опет вектор. Очевидно је, да су то тензори, који у криволиниским координатама играју исту улогу, коју игра тензор $\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}$ у *Descartes*-овим. Ти тензори се називају коваријантни изводи респективно вектора A^i и A_i. Означићемо их у облику $A^i_{;k}$ и $A_{i;k}$. На тај начин је

$$DA^i = A^i_{;l}\,dx^l,\quad DA_i = A_{i;l}\,dx^l, \tag{83,8}$$

а сами коваријантни изводи:

$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}\,A^k, \tag{83,9}$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}\,A_k. \tag{83,10}$$

У *Descartes*-овим координатама је $\Gamma^i_{kl} = 0$ и коваријантни изводи прелазе у обичне.

Такође је лако дефинисати коваријантни извод тензора. За то треба одредити промјену тензора при бесконачно малом паралелном помјерању. На пр., посматрајмо ма који контраваријантни тензор, који је производ двају контраваријантних вектора $A^i B^k$. Паралелним помјерањем излази према (83,5)

$$\delta (A^i B^k) = A^i \delta B^k + B^k \delta A^i = - A^i \Gamma^k_{lm} B^l dx^m - B^k \Gamma^i_{lm} A^l dx^m.$$

Због линеарности ове трансформације она мора важити и за ма који тензор A^{ik}:

$$\delta A^{ik} = - (A^{im} \Gamma^k_{ml} + A^{mk} \Gamma^i_{ml}) dx^l. \qquad (83,11)$$

Замјеном у

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}_{;l} \Gamma dx^l,$$

налазимо коваријантни извод $A^{ik}_{;l}$ тензора A^{ik} у облику

$$A^{ik}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} A^{mk} + \Gamma^k_{ml} A^{im}. \qquad (83,12)$$

Сасвим аналогно налазимо коваријантне изводе мјешовитог тензора A^i_k и коваријантног A_{ik} у облику:

$$A^i_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl} A^i_m + \Gamma^i_{ml} A^m_k, \qquad (83,13)$$

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{im}. \qquad (83,14)$$

Аналогно може се дефинисати коваријантни извод тензора ма којег реда. Притом се добија слиједеће правило коваријантног диференцирања. Да би се добио коваријантни извод тензора $A^{\cdots\cdot}_{\cdots\cdot}$ по x^l, треба обичном изводу $\frac{\partial A^{\cdots}_{\cdots}}{\partial x^l}$ за сваки коваријантни индекс i $(A^{\cdots\cdot}_{\cdot i\cdot\cdot})$ додати члан $- \Gamma^k_{il} A^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot k\cdot}$, а за сваки контраваријантни индекс i $(A^{\cdot i\cdot}_{\cdots})$ треба додати члан $+ \Gamma^i_{kl} A^{\cdot k\cdot}_{\cdots}$.

Лако се можемо увјерити, да се коваријантни извод производа налази по истим правилима, као и обичан извод производа. Притом коваријантни извод скалара φ треба сматрати као обичан извод, тј. као коваријантни вектор $\varphi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$ у сагласности са тим, што је за скаларе $\delta\varphi = 0$, и зато $D\varphi = d\varphi$. На пр., коваријантни извод производа $A_i B_k$ је:

$$(A_i B_k)_{;l} = A_{i;l} B_k + A_i B_{k;l}.$$

Ако се код коваријантних извода подигне индекс, који означава диференцирање, добивају се такозвани контраваријантни изводи. Тако је:

$$A_i^{;k} = g^{kl} A_{i;l}, \qquad A^{i;k} = g^{kl} A^i_{;l}.$$

Докажимо сада, да су *Christoffel*-ови симболи Γ^i_{kl} симетрични по доњим индексима. Пошто је коваријантни извод вектора $A_{i;k}$ тензор, онда је тензор и разлика $A_{i;k} - A_{k;i}$. Нека је вектор A_i градијент скалара, тј. $A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$. Тада у вези израза (83,10) за $A_{i;k}$ имамо:

$$A_{k;i} - A_{i;k} = (\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^l}$$

$\left(\text{јер је} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \, \partial x^i} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right)$. У *Descartes*-овом координатном систему коваријантни изводи трансформирају се у обичне, па је зато лијева страна написане једначине за вектор $A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ једнака нули. Но, пошто је $A_{k;i} - A_{i;k}$ тензор, а будући да је једнак нули у једном систему, он мора бити једнак нули и у ма коме координатном систему. Одавде налазимо, да је:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk} \, . \tag{83,15}$$

Очевидно је:

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}. \tag{83,16}$$

У општем случају постоји свега 40 разних величина Γ^i_{kl}, — за сваки од четири могуће вриједности индекса i постоји 10 различитих парова вриједности индекса k и l (сматрајући да су једнаки парови, који се добивају транспозицијом k и l).

На завршетку овог параграфа навешћемо још за *Christoffel*-ове симболе формуле за трансформацију из једног координатног система у други. Те формуле могу се добити упоређивањем трансформационих закона с обије стране једначина, које одређују ма који од коваријантних извода, из услова, да ти закони за обије стране буду једнаки. На тај начин прости рачун даје:

$$\Gamma^l_{kl} = \Gamma'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \, \partial \lambda^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \, . \tag{83,17}$$

Из ове формуле види се, да се величине Γ^i_{kl} понашају као тензор у односу на линеарне трансформације [када нестаје другог члана у (83,17)],

§ 84. Веза међу Christoffel-овим симболима и метричким тензором

Докажимо, да је коваријантни извод метричког тензора g_{ik} једнак нули. У вези са тим напомињемо, да за вектор DA_i, као и за сваки вектор, важи релација

$$DA_i = g_{ik} \, DA^k.$$

С друге стране је $A_i = g_{ik} A^k$, па је

$$DA_i = D(g_{ik} A^k) = g_{ik} \, DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

Упоређивањем са $DA_i = g_{ik} DA^k$, а због произвољности вектора A^i, имамо:

$$Dg_{ik} = 0.$$

Одавде непосредно слиједи, да је коваријантни извод

$$g_{ik;l}=0. \tag{84,1}$$

На тај начин, код коваријантног диференцирања g_{ik} треба сматрати као константу.

Једначина $g_{ik;l}=0$ може се употријебити у ту сврху, да се *Christoffel*-ови симболи Γ^i_{kl} изразе помоћу метричког тензора g_{ik}. Због тога, према општој дефиницији (83,14) коваријантног извода тензора, напишимо:

$$g_{ik;l}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-g_{mk}\Gamma^m_{il}-g_{im}\Gamma^m_{kl}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\Gamma_{k,il}-\Gamma_{i,kl}=0.$$

Одавде је лако одредити $\Gamma_{i,kl}$, — на .пр , на слиједећи начин. Напишимо вриједност извода од g_{ik} послије транспозиције индекса i, k, l:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}=\Gamma_{k,il}+\Gamma_{i,kl},$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}=\Gamma_{i,kl}+\Gamma_{l,ik},$$

$$-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}=-\Gamma_{l,ki}-\Gamma_{k,li}.$$

Узимајући полузбир тих једначина налазимо, (узимајући у обзир да је $\Gamma_{i,kl}=\Gamma_{i,lk}$):

$$\Gamma_{i,kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right). \tag{84,2}$$

Одавде добивамо за симболе $\Gamma^i_{kl}=g^{im}\Gamma_{m,kl}$:

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{84,3}$$

Ове формуле дају тражене изразе *Christoffel*-ових симбола помоћу метричког тензора.

Изведимо израз за упрошћени *Christoffel*-ов симбол Γ^i_{kl}, који је важан за будуће излагање. Због тога ћемо одредити диференцијал dg детерминанте g, која је састављена од компонената тензора g_{ik};dg се може добити, ако се узме диференцијал сваке компоненте тензора g_{ik} и умножи са одговарајућим коефицијентом у детерминанти, тј. одговарајућим минором. С друге стране, као што је познато, компоненте тензора g^{ik}; који је инверзан тензору g_{ik}, једнаке су минорима детерминанте од величина g_{ik} подијељеним том детерминантом. Према томе минори детерминанте g износе gg^{ik}. На тај начин је:

$$dg=gg^{ik}dg_{ik}=-gg_{ik}dg^{ik} \tag{84,4}$$

(пошто је $g_{ik}g^{ik}=\delta^i_i=4$, биће $g^{ik}dg_{ik}=-g_{ik}dg^{ik}$).

Из (84,3) имамо

$$\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{mi}}{\partial x}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right).$$

Ако индекси m и i у трећем и првом члану у загради измијене мјеста, видимо, да се та два члана међусобно поништавају, па је

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

или, према (84,4);

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \qquad (84,5)$$

Корисно је изнијети и израз за величине $g^{kl}\Gamma^i_{kl}$. Имамо

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

Помоћу (84,4) то се може трансформирати на облик

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} \cdot g^{ik})}{\partial x^k}. \qquad (84,6)$$

Код разних израчунавања треба имати у виду, да су изводи контраваријантног тензора g^{ik} повезани с изводима од g_{ik} слиједећим ралацијама

$$g_{il} \frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = - g^{lk} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \qquad (84,7)$$

(које се добивају диференцирањем једначине $g_{il} g^{lk} = \delta^k_i$). На крају, покажимо да се изводи од g^{ik} могу изразити помоћу величина Γ^i_{kl}. Наиме, из инденститета $g^{ik}_{;l} = 0$ непосредно излази, да је:

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = - \Gamma^i_{ml} g^{mk} - \Gamma^k_{ml} g^{im}. \qquad (84,8)$$

Помоћу добивених формула израз $A^i_{;i}$ може се свести на подесан облик, који претставља генералисање дивергенције вектора у криволиниским координатама. Како је:

$$A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} A^l$$

[в. (83,9)], биће:

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{li} A^l = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^l \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l}.$$

или дефинитивно

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{(\partial \sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i}. \qquad (84,9)$$

Изведимо аналоган израз за $A^{ik}_{;k}$ и за антисиметричан тензор A^{ik}. Из (83,12) имамо:

$$A^{ik}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im}.$$

Но, како је $A^{mk} = - A^{km}$, биће:

$$\Gamma^i_{mk} A^{mk} = - \Gamma^i_{km} A^{km} = 0.$$

Замјеном израза (84,5) за Γ^i_{mk}, налазимо, дакле:

$$A^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{ik})}{\partial x^k}. \qquad (84,10)$$

Нека је сада A_{ik} симетричан тензор. Одредимо израз. $A^k_{i;k}$ за његове мјешовите компоненте. Имамо:

$$A^k_{i;k} = \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk} A^l_i - \Gamma^l_{ik} A^k_l = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(A^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki} A^k_l \cdot$$

Посљедњи члан једнак је:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right) A^{kl}.$$

Због симетрије тензора A^{kl} два члана у загради се поништавају и остаје:

$$A^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^k_i)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} A^{kl}. \qquad (84,11)$$

У *Descartes*-овим координатама $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ је антисиметрични тензор. У криволиниским координатама тај тензор је $A_{i;k} - A_{k;i}$. Међутим, на основу израза за $A_{i;k}$, и због тога што је $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$, имамо:

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \cdot \qquad (84,12)$$

Најзад, трансформираћемо на криволиниске координате суму $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{l^2}}$ извода неког скалара φ. Очевидно је, да у криволиниским координатама та сума прелази у $\varphi^{;i}_{;i}$. Но $\varphi_{;i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, јер се коваријантно диференцирање скалара своди на обично диференцирање. Подижући индекс i, имамо:

$$\varphi^{;i} = g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k},$$

па према формули (84,9) налазимо:

$$\varphi^{;i}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) \cdot \qquad (84,13)$$

Корисно је напоменути, да се *Gauss*-ова теорема за трансформирање интеграла вектора по хиперповршини у интеграл по 4-запремини може написати у облику (84,9) као:

$$\oint A^i \sqrt{-g}\, dS_i = \int A^i_{;i} \sqrt{-g}\, d\Omega \cdot \qquad (84,14)$$

§ 85. Кретање честице у гравитационом пољу

Кретање слободне материјалне честице одређује се у специјалној теорији релативитета принципом најмањег дјејства:

$$\delta S = -mc\delta \int ds, \tag{85,1}$$

према коме се честица креће тако, да је њена свјетска линија екстремна међу двјема датим свјетским тачкама, тј. у датом случају је права (у обичном тродимензионалном дростору томе одговара праволиниско равномјерно кретање).

Очевидно је, да се кретање честица у гравитационом пољу одређују принципом најмањег дјејства у том истом облику (85,1), јер гравитационо поље није ништа друго, него промјена метрике 4-простора, па се у њему само замјењују изрази ds са dx^i. На тај начин, у гравитационом пољу честица се креће тако, да се њена свјетска тачка креће по екстремној или, како се каже, по геодетској линији у 4-простору x^0, x^1, x^2, x^3. Међутим, како је у присуству гравитационог поља простор-вријеме нееуклидски, онда та линија већ није права.

Видјели смо (§ 10), да су у специјалној теорији релативитета, тј. у галилејском 4-координатном систему, једначине кретања слободне честице $\frac{du^i}{ds} = 0$, или друкчије, $du^i = 0$, гдје је $u = \frac{dx^i}{ds}$ — 4-брзина. Очевидно је, да се у криволиниским координатама та једначина генералише у једначину

$$Du^i = 0. \tag{85,2}$$

Из израза (83,6) за коваријантни диференцијал вектора имамо

$$du^i + \Gamma^i_{kl}\, u^k\, dx^l = 0.$$

Дијељењем те једначине са ds, као први члан добива се $\frac{du^i}{ds} = \frac{d^2 x^i}{ds^2}$ и на тај начин налазимо:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{85,3}$$

Ово су тражене једначине кретања. Видимо, да се кретање честице у гравитационом пољу одређује величинама Γ^i_{kl}, тј. величинама, које немају карактер тензора. За $\Gamma^i_{kl} = 0$ (85,3) прелази у обичне једначине $\frac{d^2x^i}{ds^2} = 0$.

Извод $\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$ је 4-убрзање честице. Према томе величину $-m\,\Gamma^i_{kl}\, u^k u^l$ можемо назвати „4-сила“, која дјејствује на честицу у гравитационом пољу. Тензор g_{ik} притом игра улогу „потенцијала“ гравитационог поља; његови изводи одређују „јачину“ поља Γ^i_{kl}.

Једначина (85,3) може се извести и директно из принципа најмањег дјејства $\delta\int ds=0$. Имамо1)

$$-\delta\, ds^2=-2\,ds\,\delta\,ds=\delta\,(g_{ik}\,dx^i\,dx^k)=dx^i\,dx^k\,\delta\,g_{ik}+2g_{ik}\,dx^i\,\delta\,dx^k=$$

$$=dx^i\,dx^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l+2\,g_{ik}\,dx^i\,d\delta x^k.$$

Према томе је:

$$\delta S=-mc\int\delta\, ds=mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l+g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{d\delta x^k}{ds}\right\}ds=$$

$$=mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l-\frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\right)\delta x^k\right\}ds+mc\,g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\,\delta x^k\Big|\,. \tag{85,4}$$

Другог члана нестаје, јер је на границама $\delta x^k=0$. Замијенимо у другом члану под интегралом индекс k индексом l. Тада, ако ставимо да је коефицијент уз произвољну варијацију δx^l једнак нули, налазимо:

$$\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{d}{ds}\left(g_{il}\frac{dx^i}{ds}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-g_{il}\frac{d^2x^i}{ds^2}-\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}=0\,.$$

Уз напомену, да се трећи члан може написати у облику

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\,,$$

и уводећи *Christoffel*-ове симболе $\Gamma_{l.ik}$ према (84,2) добивамо:

$$g_{il}\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma_{l,ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0.$$

Множењем са g^{ml} и напомињући, да је $g^{ml}\,g_{il}=\delta_i^m$, $g^{ml}\,\Gamma_{l,ik}=\Gamma_{ik}^m$ долазимо до једначине (85,3).

Посматрајући, као обично, стварне трајекторије и једну од граница као промјењљиве, из (85,4) за варијацију δS добивамо израз $\delta S=mcu_i\,\delta x^i$. Према томе, ако 4-импулс p_i честице у гравитационом пољу према ранијем одредимо као извод $\frac{\partial S}{\partial x^i}$, онда добивамо

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial x^i}=mcu_i \;\; \text{2)} \tag{85,5}$$

Његов квадрат је

$$p_i\,p^i=-m^2c^2. \tag{85,6}$$

---

1) Не смије се мијешати варијација δ с промјеном δ при паралелном помјерају (транслацији).

2) У вези са тим, што овдје употребљавамо координату x^0 умјесто x^4, веза компонената p_i с тродимензионалним импулсом и енергијом у галилејским координатама разликује се од везе, коју смо раније имали. Наиме, просторне и временска компонента p^i једнаке су $\mathbf{p}$ и $\frac{\mathcal{E}}{c}$, а компоненте коваријантног вектора p_i респективно су $\mathbf{p}$ и $-\frac{\mathcal{E}}{c}$.

Замијенимо ли овдје p_i са $\frac{\partial S}{\partial \lambda^i}$, налазимо *Hamilton-Jacobi*-еву једначину за честицу у гравитационом пољу

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}+m^2c^2=0. \qquad (85,7)$$

Једначина геодетске линије не може се у облику (85,3) примијенити на простирање свјетлосног сигнала, јер је по свјетској линији простирања свјетлосног зрака, као што знамо, интервал ds једнак нули, па сви чланови једначине (85,3) постају бесконачни. Као што је познато, правац простирања свјетлосног зрака у геометриској оптици одређује се таласним вектором, који тангира зрак. Према томе, четвородимензионални таласни вектор можемо написати у облику $k^i=\frac{dx^i}{d\lambda}$, гдје је λ неки параметар. У специјалној теорији релативитета, тј. у еуклидном простору, при простирању свјетлости у вакууму таласни вектор се не мијења дуж зрака, тј. $dk^i=0$ (в. § 53). Та једначина у гравитационом пољу, очевидно, прелази у $Dk^i=0$ или

$$\frac{dk^i}{d\lambda}+\Gamma^i_{kl}k^k k^l=0 \qquad (85,8)$$

(из тих једначина одређује се и параметар λ).

Апсолутна вриједност таласног 4-вектора, као што знамо (в. § 46) једнака је нули, тј.:

$$k_i k^i=0. \qquad (85,9)$$

Уврштавајући овдје $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$ умјесто k^i (ψ је ајконал), налазимо једначину ајконала у гравитационом пољу у облику

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}=0. \qquad (85,\ 0)$$

§ 86. Гранични прелаз

У граничном случају малих брзина релативистичке једначине кретања честице у гравитационом пољу морају прећи у одговарајуће нерелативистичке једначине. Притом треба имати у виду, да из претпоставке, да је брзина мала, такође излази услов, да и само гравитационо поље мора бити слабо; у противном случају честица, која се налази у њему, добила би велику брзину.

Показаћемо како је у том граничном случају метрички тензор g_{ik}, који дефинише поље, повезан с нерелативистичким потенцијалом φ гравитационог поља.

У нерелативистичкој механици кретање честица у гравитационом пољу одређује се *Lagrange*-овом функцијом (79,1). Написаћемо је сада у облику:

$$L=-mc^2+\frac{mv^2}{2}-m\varphi,$$

гдје смо додали константну $-mc^2$ (константни чланови нису битни за *Lagrange*-ову функцију). То је потребно урадити из разлога, да би нерелативистичка *Lagrange*-ова функција у отсуству поља $L=-mc^2+\frac{mv^2}{2}$ била потпуно иста, као функција у коју прелази одговарајућа нерелативистичка функција $L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ у граничном случају када $\frac{v}{c}\to 0$.

Дакле, нерелативистичко дјејство S за честицу у гравитационом пољу је:

$$S=\int L dt=-mc\int\left(c-\frac{v^2}{2c}+\frac{\varphi}{c}\right)dt,$$

или, пошто је $\mathbf{v}\,dt=d\mathbf{r}$

$$S=-mc\int\left(c\,dt-\frac{1}{2}\frac{\mathbf{v}}{c}d\mathbf{r}+\frac{1}{c}\varphi\,dt\right).$$

Упоређујући овај израз с релативистичким дјејством $S=-mc\int ds$, видимо, да је у посматраном граничном случају ds једнако:

$$ds=c\,dt-\frac{1}{2}\frac{\mathbf{v}}{c}d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\varphi\,dt.$$

Квадрирањем и занемаривањем чланова реда $\frac{v^2}{c^2}$, налазимо

$$ds^2=(c^2+2\varphi)\,dt^2-d\mathbf{r}^2. \qquad (86,1)$$

На тај начин, компонента g_{00} метричког тензора у граничном случају износи:

$$g_{00}=-1-\frac{2\varphi}{c^2}. \qquad (86,2)$$

Што се тиче осталих компонената, слиједило би из (86,1), да је $g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha}=0$. Међутим, уопште узевши, поправке су истог реда величине, као и поправка за g_{00} (види о том детаљније у § 100). Немогућност одређивања тих поправки на наведени начин у вези је са тим, што би поправка у $g_{\alpha\beta}$, будући да има исти ред величине као и поправка у g_{00}, у *Lagrange*-овој функцији довела до малих чланова вишег реда (захваљујући томе, што се у изразу за ds^2 компоненте $g_{\alpha\beta}$ не множе са c^2, као што се то ради код g_{00}).

§ 87. Једначине електродинамике у присуству гравитационог поља

Једначине електромагнетног поља специјалне теорије релативитета лако је уопштити тако, да се могу примијенити у ма коме криволиниском координатном систему, тј. у случају присуства гравитационог поља.

Тензор електромагнетног поља у специјалној теорији релативитета дефинише се као $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$. Очевидно је, да се сада мора дефинисати као $F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}$ [1]). Но у вези са (84,12) излази да је:

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \qquad (87,1)$$

те се, према томе, веза F_{ik} с потенцијалом A_k не мијења. На основу тога први пар *Maxwell*-ових једначина (25,5)

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0 \qquad (87,2)$$

такође одржава свој облик.

Да би се написао други пар *Maxwell*-ових једначина, претходно треба дефинисати 4-вектор струје у криволиниским координатама. То ћемо урадити потпуно аналогно нашем поступку у § 27.

Оптерећење, које се налази у елементу запремине $dV = dx^1 dx^2 dx^3$, може се написати у облику $de = \varrho dV$, гдје је густина $\varrho = \sum_A e_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)$ [види (27,1)]. Множењем $de = \varrho dV$ са dx^i имамо

$$de\, dx^i = \varrho dV dx^i = \frac{\varrho}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{dx^0} \sqrt{g}\, dV dx^0.$$

Инваријантни елемент 4-запремине је $\sqrt{-g}\, dV\, dx^0 = \sqrt{-g}\, d\Omega$ (§ 81), па је 4-вектор струје

$$j^i = \frac{\varrho c}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{dx^0}. \qquad (87,3)$$

$\frac{dx^i}{dx^0}$ је брзина, измјерена помоћу „времена“ x^0 $\left(\frac{dx^i}{dx^0}\right.$ није вектор$\left.\right)$. Компонента j^0 4-вектора струје, помножена са $\frac{1}{c}\sqrt{-g}$, је просторна густина оптерећења.

У специјалној теорији релативитета други пар *Maxwell*-ових једначина (29,2) има облик:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i.$$

У гравитационом пољу оне добивају облик

$$F^{ik}_{;k} = \frac{4\pi}{c} j^i,$$

---

[1]) У галилејским координатама компоненте A_i везане су сада са скаларним и векторским потенцијалима помоћу $A_{1,2,3} = A^{1,2,3} = A_{x,y,z}$, $A_0 = -A^0 = -\varphi$ (тако да ће члан $A_i dx^i$, који се налази у изразу за дејство, имати ранију вриједност). Саобразно томе, мијења се веза компонената F_{ik} с пољима **E** и **H**. Сада имамо $F_{12} = H_z$, $F_{13} = -H_y$, $F_{23} = H_z$, $F_{10} = E_x$, $F_{20} = E_y$, $F_{30} = E_z$.

или, према (84,10),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,F^{ik})=\frac{4\pi}{c}j^i. \tag{87,4}$$

Једначина континуитета $\frac{\partial j^i}{\partial x^i}=0$ (28,4) сада добива облик:

$$j^i_{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{-g}\,j^i)=0 \tag{87,5}$$

[у сагласности са (84,9)].

Најзад, лако је написати једначине кретања оптерећене честице, када једновремено постоји и гравитационо и електромагнетно поље. За то је потребно извршити варирање (при задатом пољу) оног дијела дејства, који зависи од узајамног дејства честице с оба поља, тј.

$$-mc\int ds+\frac{e}{c}\int A_k\,dx^k.$$

Међутим, тражене једначине кретања једноставније је написати, директно простим генералисањем једначина (22,5) према криволиниским координатама, тј. написати у њима Du^i умјесто du^i. На тај начин налазимо:

$$mc\frac{Du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^i_k u^k. \tag{87,6}$$

§ 88. Константно гравитационо поље

Врло важан специјалан случај гравитационих поља претстављају константна гравитациона поља. У константном гравитационом пољу може се изабрати такав систем референције, у коме ниједна величина, а напосе ни метрички тензор g_{ik}, не зависи од временске координате x^0.

Гравитационо поље константно је, специјално, у том случају, ако су сва тијела непокретна (у систему референције, у коме g_{ik} не зависи од x^0). Очевидно је, да су тада оба смјера времена исте вриједности (тј. не мора се мијењати ни једна једначина, када се промијени знак пред x^0). Одавде слиједи, да су у том случају све компоненте $g_{0\alpha}$ метричког тензора једнаке нули; у противном случају интервал ds би се измијенио при замјени x^0 са $-x^0$. Гравитациона поља те врсте називаћемо статичка.

Гравитационо поље такође је константно и у случају, када тијела врше стационарно кретање. Под стационарним кретањем овдје подразумијевамо такво кретање, код којега су густина и брзина материје у сваком елементу простора константни. Као примјер таквог кретања може се узети равномјерна ротација симетричног тијела око своје осе симетрије. У том случају оба смјера времена већ нису исте вриједности. Када се промијени знак времена, онда се мијења, на пр., знак угаоне брзине ротације. Код гравитационих поља такве врсте, очевидно, компоненте $g_{0\alpha}$ метричког тензора уопште нису једнаке нули. Таква константна поља називаћемо стационарна.

Временска координата x^0, која је изабрана тако, да тензор g_{ik} не зависи од x^0, назива се свјетско вријеме. Неопходно је напоменути, да избор свјетског времена, није потпуно једнозначан. Наиме, свјетско вријеме дефинисано је само с тачношћу до произвољне функције од просторних координата. Наравно, да додавањем такве функције ниједна од g_{ik}, према ранијем, неће садржавати x^0. Осим тога, x^0 може се помножити произвољном константом.

Ако имамо посла са статичким гравитационим пољем гдје имамо могућност да употребимо систем, у коме је $g_{0\alpha}=0$, онда се тим условом λ^0 одређује толико, да само остаје могућност, да га се помножи произвољном константом. Ако, осим тога, поље нестаје у бесконачности, онда је згодно узети систем референције на тај начин, да интервал ds^2 у бесконачности добије галилејски облик, — специјално, да у бесконачности буде $g_{00}=-1$. Тим условом тада се одређује наведена произвољна константа и избор свјетског времена постаје једнозначан. Ако се узме систем референције, у коме је временска координата свјетско вријеме, онда, будући да напосе просторна метрика не зависи од x^0, у таквом систему има смисла одређивање растојања међу тијелима (в. § 82).

Због тога, што g_{ik} не зависи од x^0, специјално слиједи, да разлика Δx^0 вриједности свјетског времена за два истовремена (у смислу објашњеном у § 82) догађаја, који се дешавају у двијема задатим тачкама простора, не зависи од x^0 (у статичком пољу једноставно имамо $\Delta x^0=0$). То значи, ако посматрамо два догађаја A и B, који се дешавају у некој тачки простора, и два друга догађаја A' и B', који се дешавају у другој тачки простора, при чему је A истовремено са A', а B са B', онда ће разлика вриједности x^0 за догађаје A и B бити једнака разлици вриједности x^0 за догађаје A' и B'. На тај начин може се рећи, да је смисао свјетског времена садржан у томе, да је интервал тога времена међу ма која два догађаја у некој тачки простора једнак интервалу свјетског времена међу ма која два друга догађаја, који су респективно истовремени с првим паром догађаја, који се дешавају у ма којој другој тачки простора. Што се тиче веза међу свјетским и правим временом, то се формула (82,1) може сада написати у облику:

$$\tau=\frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\,x^0, \tag{88,1}$$

који се може примијенити на ма који коначни интервал времена. Једним интервалима свјетског времена одговарају у разним тачкама простора различити интервали сопственог времена.

Ако су брзине свих тијела мале, а гравитационо поље слабо, онда се могу примијенити приближни изрази (86,2), па (88,1) даје

$$\tau=\frac{x^0}{c}\sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}},$$

и пошто је $\frac{\varphi}{c^2}\ll 1$, онда је приближно

$$\tau=\frac{x_0}{c}\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{88,2}$$

На тај начин, сопствено вријеме тече утолико laganije, уколико је мањи гравитациони потенцијал у датој тачки простора, тј. уколико је већа његова апсолутна вриједност (ниже, у § 95 показаће се, да је потенцијал φ негативан). Ако се један од два једнака сата налазио неко вријеме у гравитационом пољу, онда ће послије тога сат, који је био у пољу, бити у заостатку за првим.

Као што је већ горе показано, компоненте $g_{0\alpha}$ метричког тензора једнаке су нули у статичком гравитационом пољу. Према резултатима § 82 то значи, да је у таквом пољу могућна синхронизација сатова у читавом простору. Такође напомињемо, да је елемент просторног растојања dl (82,5) у статичком пољу једноставно

$$dl^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta. \tag{88,3}$$

У стационарном пољу $g_{0\alpha}$ није једнако нули, и немогућа је синхронизација сатова у читавом простору, Пошто g_{ik} не зависи од x^0, то се формула (82,7) за разлику вриједности свјетског времена за два истовремена догађаја, који се дешавају у разним тачкама простора, може написати у облику:

$$\Delta x^0 = -\int \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{88,4}$$

који се може примијенити за ма које двије тачке на линији, дуж које се врши синхронизација сатова. Код синхронизације дуж затворене контуре разлика вриједности свјетског времена, која би се констатовала при повратку у полазну тачку, једнака је интегралу

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{88,5}$$

узетом по тој затвореној контури.

Може се догодити, да сума $\frac{1}{g_{00}} g_{0\alpha}\, dx^\alpha$ буде тотални диференцијал ма које функције координата (просторних), тако да интеграл (88,5) по затвореној контури буде једнак нули, а синхронизација сатова да буде могућа. У том случају појава компонената $g_{0\alpha}$ није условљена особинама самог система референције, него просто неподесним избором координате x^0, и избором који јој одговара увијек се може учинити, да $g_{0\alpha}$ буде једнако нули.

Посматрајмо простирање свјетлосних зрака у константном гравитационом пољу. Видјели смо у § 53, да је фреквенција свјетлости једнака изводу ајконала ψ по времену (са супротним знаком). Фреквенција, измјерена свјетским временом $\frac{x^0}{c}$, према томе износи $\omega_0 = -c\frac{\partial\psi}{\partial x^0}$. Како једначина ајконала (85,10) у константном пољу не садржи x^0, то фреквенција ω_0 остаје константна код простирања свјетлосног зрака. Фреквенција, измјерена сопственим временом, износи $\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$. Та фреквенција је различита у разним тачкама простора. У вези са релацијом

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{-g_{00}}}$$

имамо

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{-g_{00}}} \cdot \tag{88,6}$$

За слабо гравитационо поље одавде се приближно добива

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{88,7}$$

Видимо, да се фреквенција свјетлости повећава, када се повећава апсолутна вриједност потенцијала гравитационог поља, тј. када се свјетлост приближава тијелима, која проузрокују поље. Обрнуто, када се зрак удаљује од тих тијела, фреквенција свјетлости се смањује.

Ако свјетлосни зрак, који полази из тачке, гдје је гравитациони потенцијал једнак φ_1, има (у тој тачки) фреквенцију ω, он ће, када стигне у тачку с потенцијалом φ_2, имати фреквенцију (измјерену сопственим временом у тој тачки), која је једнака

$$\frac{\omega}{1 - \frac{\varphi_1}{c^2}} \left(1 - \frac{\varphi_2}{c^2}\right) = \omega \left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right).$$

Линиски спектар, који емитују ма који атоми, који се, напр., налазе на Сунцу, изгледа тако исто, као што на земљи изгледа спектар, који емитују исто такви атоми, који се налазе на Земљи. Ако се, пак, на Земљи посматра спектар, који испуштају атоми на Сунцу, онда ће, према горе изложеном, његове линије бити помјерене у односу на линије истог таквог спектра, емитованог на Земљи. Наиме, свака линија фреквенције ω помјериће се за интервал $\Delta\omega$, који се одређује из формуле

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}, \tag{88,8}$$

гдје су φ_1 и φ_2 потенцијали гравитационог поља респективно у мјесту емитовања и у мјесту посматрања спектра. Ако се на Земљи посматра спектар, који се емитује са Сунца или звијезда, онда је $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ и из (88,8) слиједи, да је $\Delta\omega < 0$, тј. помјерање се дешава према мањим фреквенцијама. Описана појава назива се „црвени депласман“.

Постанак те појаве може се објаснити непосредно на основу горе реченог о сопственом времену. Због тога, што су све величине независне од x^0, интервал сопственог времена, у току кога се нека осцилација у свјетлосном таласу простире из једне тачке простора у другу, једнак је за све осцилације. Према томе јасно је, да ће број осцилација, које се врше у јединици свјетског времена, бити једнаке за све тачке дуж зрака. Али један те исти интервал свјетског времена одговара утолико већем интервалу сопственог времена, уколико се даље налазимо од тијела која проузрокују поље. Дакле, фреквенција, тј. број осцилација у јединици сопственог времена, опадаће удаљавањем свјетлости од тих маса.

Код кретања честице у константном пољу одржава се њена енергија, дефинисана као извод дјејства по свјетском времену $\left(-c\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)$. То, напр., слиједи због тога, што x^0 не улази директно у *Hamilton-Jacobi*-еву једначину. На тај начин дефинисана енергија је временска компонента коваријантног 4-вектора импулса $p_k = mcu_k = mcg_{ki}u^i$. У статичком пољу је $ds^2 = - g_{00}dx_0^2 - dl^2$, па за енергију, коју ћемо овдје означити са $\mathcal{E}_0$, имамо:

$$\mathcal{E}_0 = - mc^2 g_{00} \frac{dx^0}{ds} = - mcg_{00} \frac{dx^0}{\sqrt{- g_{00}dx_0^2 - dl^2}}.$$

Уведимо брзину честице $v = \frac{dl}{\sqrt{-g_{00}}dx^0}$ измјерену у сопственом времену, тј. коју мјери посматрач, који се налази на датом мјесту. Тада за енергију добивамо:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc^2\sqrt{-g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{88,9}$$

То је она величина, која остаје константна код кретања честице. Величина, пак, $\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ притом није константна. Може се доказати, да израз за енергију (88,9), остаје на снази и у стационарном пољу, само ако се брзина v мјери у сопственом времену, одређеном сатовима који су синхронизирани дуж трајекторије честице.

У граничном случају слабог гравитационог поља, и малих брзина, из (88,9) налазимо помоћу једначине $-g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$ приближно:

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi, \tag{88,10}$$

гдје је $m\varphi$ — нерелативистичка енергија честице у гравитационом пољу, што је у сагласности са *Lagrange*-овом функцијом (79,1).

Задаци

1. Одредити силу, која дјејствује у константном гравитационом пољу на честицу, која се полагано креће.

Рјешење. Из (85,3) имамо, послије занемаривања чланова другог реда по брзини:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = - \Gamma^{\alpha}_{00}(u^0)^2 - 2\Gamma^{\alpha}_{0\beta}\, u^0 u^\beta .$$

Са истом тачношћу имамо:

$$u_i u^i = g_{00}(u^0)^2 + 2\, g_{0\alpha} u^0 u^\alpha = - 1 .$$

Уводећи тродимензионални вектор брзине као $v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$, гдје је $d\tau = \frac{1}{c} ds$ елемент сопственог времена на тијелу које се креће (при малим брзинама тај вектор прелази у обичну галилејску брзину), добивамо:

$$u^{\alpha}=\frac{1}{c}v^{\alpha},\quad u^{0}\cong\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}-\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\frac{v^{\alpha}}{c}.$$

Величине Γ^{α}_{00}, $\Gamma^{\alpha}_{0\beta}$ израчунавамо по општој формули (84,3), гдје сви изводи по x^0 испадају због константности поља. Помоћу израза добијених на тај начин, израчунајмо $\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2}=\frac{1}{c^2}w^{\alpha}$, гдје је $w^{\alpha}=\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}$ тродимензионални (просторни) вектор убрзања. У одговору згодније је прећи на коваријантне компоненте. Притом треба имати у виду, да се веза међу ко- и контравари- јантним компонентама просторног вектора w^{α} одређује просторним метричким тензором $\gamma_{\alpha\beta}$, па је $w_{\alpha}=\gamma_{\alpha\beta}w^{\beta}$. При израчунавању треба имати у виду, да је $\gamma_{\alpha\beta}\,g^{\beta\gamma}=\delta^{\gamma}_{\alpha}$ (в. прим. на стр. 240) и $\gamma_{\alpha\beta}\,g^{\beta 0}=-\frac{g^{\alpha 0}}{g_{00}}$ (у што се лако можемо увјерити множењем једначине $g^{\alpha i}g_{i_0}=g^{\alpha\beta}g_{\beta_0}+g_{\alpha_0}g_{00}=0$ са $\gamma_{\gamma\alpha}$ и сумирањем по α). У резултату добивамо слиједећи израз:

$$\frac{1}{c^2}w_{\alpha}=-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\ln\sqrt{-g_{00}}+\sqrt{-g_{00}}\,\frac{v^{\beta}}{c}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{g_{\alpha_0}}{g_{00}}\right)-\frac{\partial}{\partial\ \alpha}\left(\frac{g_{\beta_0}}{g_{00}}\right)\right].$$

Сила f_{α} добива се множењем w_{α} са масом тијела m. Уводећи тродимензионални вектор са компонентама $g_{\alpha}=-\frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}}$ и ознаку $-g_{00}=h$, добивени израз можемо написати са тродимензионалним ознакама:

$$\mathbf{f}=-mc^2\,\mathrm{grad}\,\ln\sqrt{h}+mc\sqrt{h}\,(\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{g}).\tag{1}$$

Компоненте вектора и све векторске операције морају се овдје вршити у криволиниским просторним координатама, које одговарају просторној метрици дефинисаној тензором $\gamma_{\alpha\beta}$.

Напомињемо, да ако се тијело уопште не креће, онда сила, која дјејствује на њега [први члан у (1)], има потенцијал. Други члан у (1) има облик аналоган *Coriolis*-овој сили. Тај члан се налази у изразу за стационарно поље (када $g_{0\alpha}$ није једнако нули). Може се рећи, да *Foucault*-ово клатно, које се налази у стационарном гравитационом пољу, које проузрокује ротирајуће тијело, претрпљује исто скретање, које би опажали, када би се оно налазило на тијелу, које ротира (у отсуству гравитационог поља) са угаоном брзином $\mathbf{\Omega}=\frac{c}{2}\sqrt{h}\,\mathrm{rot}\ \mathbf{g}$.

2. Извести *Fermat*-ов принцип за простирање зракова у константном гравитационом пољу.

Рјешење. *Fermat*-ов принцип (в. § 53) гласи $\delta\int \boldsymbol{k}_{\alpha}\,dx^{\alpha}=0$, гдје се интеграл узима дуж зрака, а подинтегрални израз мора бити изражен помоћу фреквенције ω_0, константне дуж зрака, и диференцијала координата. Пошто је $k_0=\frac{\partial\psi}{\partial x_0}=-\frac{\omega_0}{c}$, пишемо $\boldsymbol{k}_0=g_{0i}\ k^i$, или

$$-\frac{\omega^0}{c}=g_{00}\,k^0+g_{0\alpha}\ k^{\alpha}.$$

Уврштавањем тога у релацију $k_i\,k^i=g_{ik}\,k^i\ k^k=0$, коју ћемо написати у облику:

$$g_{00}\left(k^0+\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}k^{\alpha}\right)^2+\gamma_{\alpha\beta}\,k^{\alpha}\ k^{\beta}=0,$$

добивамо

$$\frac{1}{g_{00}}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 + \gamma_{\alpha\beta} k^{\alpha}\, k^{\beta} = 0.$$

Из ове релације и из тога, што вектор k^{α} мора имати правац вектора dx^{α}, налазимо:

$$k^{\alpha} = \frac{\omega_0}{c\sqrt{-g_{00}}}\frac{d\lambda^{\alpha}}{dl},$$

гдје је dl (82,5) елемент просторне раздаљине дуж зрака. Да би се добио израз за k_{α} пишемо $k^{\alpha} = g^{\alpha i}\, k_i = -g^{\alpha 0}\frac{\omega_0}{c} + g^{\alpha\beta} k_{\beta}$. Узевши у обзир, да је тензору $g^{\alpha\beta}$ инверзни $\gamma_{\alpha\beta}$ одавде имамо

$$k_{\alpha} = \gamma_{\alpha\beta}\left(k^{\beta} + \frac{\omega_0}{c} g^{\beta 0}\right) = \gamma_{\alpha\beta}\frac{\omega_0}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\frac{dx^{\beta}}{dl} + g^{0\beta}\right).$$

Најзад, множењем са dx^{α} добива се *Fermat*-ов принцип у облику (изостављајући константни фактор $\frac{\omega_0}{c}$):

$$\delta\int\left(\frac{dl}{\sqrt{-g_{00}}} - \frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}} dx^{\alpha}\right) = 0.$$

У статичком пољу имамо једноставно $\delta\int\frac{dl}{\sqrt{-g_{00}}} = 0$. Скрећемо пажњу на то, да се у гравитационом пољу зрак не креће по најкраћој линији у простору, јер би се најкраћа линија претстављала једначином

$$\delta\int dl = 0.$$

§ 89. Ротација

Као примјер стационарног гравитационог поља посматраћемо систем референције, који равномјерно ротира.

Дефинисаћемо интервал ds у посматраном систему. У вези са тим извршићемо трансформацију са непокретног система на систем који равномјерно ротира. У непокретном координатном систему r', φ', z', t (употребљавамо цилиндричне координате r', φ', z') интервал има облик

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz'^2.$$

Нека су у ротирајућем систему r, φ, z, цилиндричне координате. Ако се оса ротације поклапа са осама Z и Z', онда имамо $r' = r$, $z' = z$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$, гдје је Ω — угаона брзина ротације. Замјеном се добива израз за ds^2 у ротирајућем систему референције:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2)\, dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi\, dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2. \tag{89,1}$$

Неопходно је напоменути, да се ротирајућим системом референције, који проучавамо у овом параграфу, може служити само до растојања једнаких $\frac{c}{\Omega}$. И заиста, из (89,1) види се, да за $r > \frac{c}{\Omega}$ величина g_{00} постаје позитивна, што не може бити. Непримјенљивост ротирајућег система референције за већа растојања је у вези са тим, што би брзина ротације на њима постала већа од брзине свјетлости, па се зато такав систем не може остварити реалним тијелима.

Као и у сваком стационарном пољу, на тијелима која ротирају сатови се не могу синхронизирати у свим тачкама. И заиста, ако се обави синхронизација дуж неке затворене линије, онда ћемо по повратку у полазну тачку добити вријеме, које се од првобитног разликује за величину [в. (88,5)]:

$$\Delta t = -\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} d\lambda^{\alpha} = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}},$$

или, претпоставивши да је $\frac{\Omega r}{c} \ll 1$ (тј. да је брзина ротације мала у поређењу са брзином свјетлости):

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2 d\varphi = \pm \frac{2\Omega}{c^2} S, \qquad (89,2)$$

гдје је S — површина пројекције контуре на раван, нормалну на осу ротације (знак $+$ или $-$ важи за обилажење по контури респективно у или супротно смјеру ротације).

Претпоставимо, да се по некој затвореној контури простире свјетлосни зрак. Израчунајмо до тачности чланова реда v/c вријеме t, које протече међу одашиљањем свјетлосног зрака и његовим повратком у полазну тачку. Брзина свјетлости према дефиницији увијек је једнака c, ако се вријеме синхронизира дуж дате затворене линије и ако се у свакој тачки служимо сопственим временом. Будући, да је разлика међу сопственим и свјетским временом реда v^2/c^2, то се при израчунавању траженог интервала времена t са тачношћу до величине реда v/c та разлика може занемарити. Према томе имамо:

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2} S,$$

гдје је L — дужина контуре. Сагласно томе, брзина свјетлости измјерена као однос L/t износи:

$$c \pm 2\Omega \frac{S}{L}. \qquad (89,3)$$

Ову формулу, као и формулу за прву апроксимацију *Doppler*-овог ефекта, лако је извести и чисто класичним путем.

Задатак

Одредити елемент просторног растојања у ротирајућем координатном систему.

Рјешење. Помоћу (89,1), (82,5) и (82,6) налазимо:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2\, d\varphi^2}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}},$$

чиме се дефинише просторна геометрија у ротирајућем систему референције. Напомињемо, да однос дужине периферије круга у равни $z = \text{const.}$ (с центром на оси ротације) према полупречнику r износи

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}},$$

тј. већи је од 2π.

ГЛАВА XI

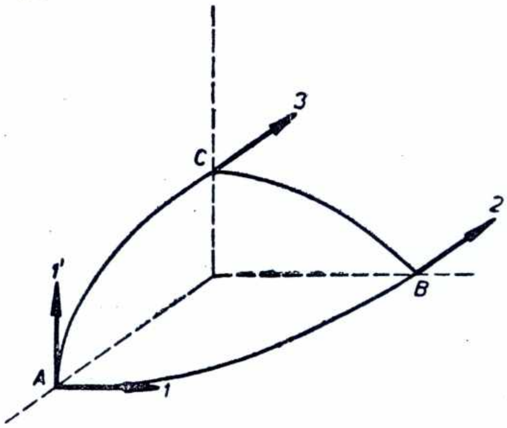
ЈЕДНАЧИНЕ ГРАВИТАЦИОНОГ ПОЉА

§ 90. Тензор кривине

Вратимо се опет на појам паралелног помјерања вектора. Као што је паречено у § 83, у општем случају нееуклидског простора бесконачно мало паралелно помјерање вектора дефинише се као транслација, при којој се компоненте вектора не мијењају у координатном систему, који је *Descartes*-ов у датом бесконачно малом елементу запремине.

Ако је $x^i = x^i(s)$ параметарска једначина неке криве (s је дужина лука рачуната од неке тачке), онда је вектор $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ јединични вектор, који тангира криву. Ако је посматрана крива геодетска, онда је, као што смо видјели у § 85, дуж ње $Du^i = 0$ [види (85,2)]. То значи, ако се вектор u^i подвргне паралелној транслацији из тачке x^i на геодетској линији у тачку $x^i + dx^i$ на истој линији, онда се он поклапа са вектором $u^i + du^i$, који тангира линију у тачки $x^i + dx^i$. На тај начин, помјерањем тангенте геодетске линије дуж саме те линије, она се помјера паралелно самој себи.

С друге стране, при паралелној транслацији двају вектора „угао“ међу њима, очигледно, не мијења се, Према томе можемо рећи, да се при паралелној транслацији ма којег вектора дуж ма које геодетске линије, угао међу тим вектором и тангентом на тој линији не мијења. Другим ријечима, при паралелном помјерању вектора, његове компоненте по геодетским линијама у свим тачкама пута морају бити непромјенљиве.



Сл. 12.

Веома важна околност је, да у нееуклидном простору паралелно помјерање вектора из једне задате тачке у другу даје разне резултате, ако се помјерање врши по разним путовима. Специјално, одавде слиједи, да ако се вектор помјера паралелно самом себи по некој затвореној контури, при повратку у првобитну тачку он се неће поклопити са својим првобитним положајем.

Да бисмо то објаснили, посматрајмо нееуклидски дводимензионални простор, тј. ма коју криву површину. На сл. 12 претстављен је дио такве површине, ограничен трима геодетским линијама. Помјеримо вектор 1 паралелно дуж контуре, коју формирају те линије. Помјерањем дуж линије AB вектор 1, одржавајући стално исти угао с том линијом, прелази у вектор 2. Помјерањем дуж BC он на исти начин прелази у 3. Најзад, кретањем из C у A дуж криве CA, одржавајући стални угао с том кривом, посматрани вектор прелази у 1', који се не поклапа с вектором 1.

Изведимо општу формулу, која приказује промјену вектора при паралелној транслацији по некој бесконачно малој затвореној контури. Та промјена ΔA_k очевидно се може написати у облику $\oint \delta A_k$, гдје се интеграл узима по датој контури. Замјеном δA_k изразом (83,5) имамо:

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l$$

(вектор A_i, који се налази под интегралом, мијења се у вези са његовим помјерањем дуж контуре). Тај криволиниски интеграл можемо трансформирати помоћу *Stokes*-ове теореме (6,14) у интеграл по површини, коју дата контура обвија. Тада је:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km} A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl} A_i)}{\partial x^m} \right] df^{lm} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left[\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} A_i - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} A_i + \Gamma^i_{km} \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl} \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right] df^{lm}.$$

Но промјена вектора A_i дуж контуре је његова измјена услијед паралелног помјерања, па према томе изводе од A_i можемо одредити директно из $\delta A_i = \Gamma^n_{il} A_n dx^l$, тј. $\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n$. Замијењујући то и мијењајући ознаку индекса у два посљедња члана под интегралом, налазимо:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl} \right\} A_i df^{lm}.$$

Због тога, што је затворена контура бесконачно мала, можемо подинтегрални израз замијенити његовом вриједношћу у некој тачки унутра контуре и изнијети испод интегралног знака. Преостали интеграл тада једноставно даје величину Δf^{lm} површине, коју обвија контура, и дефинитивно добивамо:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm}, \tag{90,1}$$

гдје је R^i_{klm} — тензор 4-реда:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl}. \tag{90,2}$$

Да је R^i_{klm} тензор, види се из тога, што се у (90,1) на лијевој страни налази вектор: разлика ΔA_k вриједности вектора у истој тачки. Тензор R^i_{klm} назива се тензор кривине, или *Riemann-Christoffel*-ов тензор.

Лако се добива аналогна формула за контраваријантни вектор A^k. Због тога напомињемо, да због тога, што се при паралелној транслацији скалари не мијењају, биће $\Delta(A^k B_k) = 0$, гдје је B_k неки коваријантни вектор. Помоћу (90,1) одатле имамо:

$$\Delta(A^k B_k) = A^k \Delta B_k + B_k \Delta A^k = \frac{1}{2} A^k B_i R^i_{klm} \Delta f^{lm} + B_k \Delta A^k =$$

$$= B_k (\Delta A^k + \frac{1}{2} A^i R^k_{ilm} \Delta f^{lm}) = 0,$$

или, због тога што је вектор B_k произвољан:

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R^k_{ilm} A^i \Delta f^{lm}. \tag{90,3}$$

Ако се вектор A_i двапут коваријантно диференцира по x^k и по x^l, онда ће уопште узевши, резултат зависити од реда диференцирања, супротно ономе што важи за обичне изводе. Испоставља се, да се разлика $A_{i;k;l} - A_{i:l:k}$ одређује истим тензором кривине, који смо горе извели. Наиме, важи формула

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl} \; . \tag{90,4}$$

коју је лако провјерити непосредним рачуном (то израчунавање овдје ћемо због краткоће изоставити). Аналогно, за контраваријантни вектор је:

$$A^i_{;k;l} - A^i_{;l;k} = - A^m R^i_{mkl}. \tag{90,5}$$

Најзад, лако је добити аналогне формуле за друге изводе тензора [то је најједноставније урадити, ако се посматра, напр., умјесто тензора A_{ik} специјални случај тензора облика $A_i B_k$ и при томе употребе формуле (90,4) и (90,5). Формуле, добивене на тај начин, због њихове линеарности важе за ма који тензор].

Очевидно је, да је у еуклидском простору тензор кривине једнак нули И заиста, у еуклидском простору могу се узети координате код којих су у читавом простору све $\Gamma^i_{kl} = 0$, а зато и $R^i_{klm} = 0$. Због тензорног карактера R^i_{klm}, он је тада једнак нули и у ма којем другом координатном систему. То је у вези са чињеницом, да је у еуклидном простору паралелно помјерање вектора из једне тачке у другу једнозначна операција, а при обилажењу затворене контуре вектор се не мијења. Лако је видјети, да се у еуклидном простору може мијењати ред коваријантног диференцирања.

Важи и обрнута теорема: ако је $R^i_{klm} = 0$, онда је простор еуклидски. Стварно, у сваком простору може се узети координатни систем, који је *Descartes*-ов у датом бесконачно малом дјелићу. Ако је $R^i_{klm} = 0$, онда је паралелно помјерање једнозначна операција, па се помоћу паралелног помјерања *Descartes*-овог система из датог бесконачно малог дјелића у све остале може добити *Descartes*-ов систем у читавом простору, тј. простор је еуклидски.

На тај начин, критеријум за одређивање да ли је простор еуклидски или није, сазнање је, да ли је тензор кривине једнак нули или различит од нуле.

Напомињемо, да иако се у нееуклидском простору може изабрати координатни систем, који би био *Descartes*-ов у датој тачки, тј. такав, да су у датој тачки све Γ^i_{kl} једнаке нули, ипак притом тензор кривине није једнак нули (јер изводи од Γ^i_{kl} нијесу једнаки нули скупа са Γ^i_{kl}).

§ 91. Особине тензора кривине

Из израза (90,2) за тензор R^i_{klm} непосредно слиједи, да је тензор кривине антисиметричан по индексима l и m:

$$R^i_{klm} = -R^i_{kml} \,. \tag{91,1}$$

Затим, лако је провјерити да важи слиједећи идентитет

$$R^i_{klm} + R^i_{mkl} + R^i_{lmk} = 0. \tag{91,2}$$

Поред мјешовитог тензора кривине R^i_{klm}, такође се употребљава коваријантни тензор кривине

$$R_{iklm} = g_{in} R^n_{klm} \,. \tag{91,3}$$

Помоћу простих трансформација лако је добити слиједећи израз за R_{iklm}

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) +$$

$$+ g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right). \tag{91,4}$$

Из овог израза непосредно излазе слиједеће особине симетрије:

$$R_{iklm} = -R_{kilm}, \tag{91,5}$$

$$R_{iklm} = -R_{ikml}, \tag{91,6}$$

$$R_{iklm} = R_{lmik}. \tag{91,7}$$

Из ових формула слиједи, напосе, да су све компонете R_{iklm}, код којих је $i=k$ или $l=m$, једнаке нули.

Најзад, за R_{iklm}, као и за R^i_{klm} важи идентитет (91,2):

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0. \tag{91,8}$$

У вези са релацијама (91,5) — (91,7) осим овога одавде слиједи, да ако се у R_{iklm} изврши једна те иста циклична пермутација на ма којим трима индексима, па се добивене три компоненте саберу, резултат ће бити једнак нули.

Докажимо још слиједећи идентитет:

$$R^n_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0. \tag{91,9}$$

Згодно га је провјерити, ако се узме координатни систем, који је *Descartes*-ов у тој тачки. Због тензорског карактера релација (91,9), тада ће важити у ма ком координатном систему. Диференцирањем израза (91,2) и изједначавањем у њему Γ^i_{kl} са нулом, у посматраној тачки, налазимо:

$$R^n_{ikl;m} = \frac{\partial R^n_{ikl}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma^n_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{ik}}{\partial x^m \partial x^l} \cdot$$

Помоћу огога израза лако се увјерити, да (91,9) заиста важи.

Од тензора кривине може се помоћу упрошћења саставити тензор другог реда. Такво упрошћење може се извести само на један начин. И заиста, ако R^m_{ikl} упростимо по индексима m и i, добићемо нулу:

$$R^m_{mkl} = g^{im} R_{imkl} = 0,$$

због антисиметричности R_{imkl} по индексима i и m. Упрошћење по m и k (упрошћење по m и l, очевидно, даје исто то са супротним знаком) даје тензор другог реда:

$$R_{ik} = R^l_{ilk} = -\frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{km} + \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm}. \qquad (91,10)$$

Лако је видјети, да је овај тензор симетричан:

$$R_{ik} = R_{ki}. \qquad (91,11)$$

Најзад, ако се упрости R_{ik}' добивамо инваријанту

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}, \qquad (91,12)$$

која се назива скаларна кривина простора.

Према релацијама (91,5 — 8) нису све компоненте тензора кривине независне. Одредимо број независних компонената тензора R_{iklm}. Посматрајмо у почетку случај простора с двије димензије, тј. обичну површину. Индекси i, k, l, m могу тада имати вриједности 1, 2. Компоненте код којих су истовремено i и k или l и m једнаки 1 или 2, једнаке су нули. А све оне компоненте, које нијесу једнаке нули, или су међусобно једнаке, или се разликују само по знаку. На тај начин, тензор кривине у том случају има само једну независну компоненту, напр., R_{1212}. Лако је наћи, да је скаларна кривина $R = g^{il} g^{km} R_{iklm}$ у том случају $R = 2R_{1212}/g^2$ (g је детерминанта, која је састављена од величина g_{ik}). $R/2$ се притом показује, да је једнак познатој *Gauss*-овој кривини површине, тј. јединици подијељеној производом главних радиуса кривине.

Одредимо сада број независних компонената тензора кривине у тродимензионалном простору. Посматрајмо оне компоненте, код којих су само два индекса различита, тј. компоненте облика R_{abab} (треба памтити, да овдје нема сумирања по индексима). Пар вриједности a и b може се добити из вриједности 1, 2, 3 на три начина. Сваки пар a и b даје према (91,5) — (91,7) само једну независну компоненту. На тај начин, компонената таквог типа биће свега три. Компонената са три различита индекса, тј. компонената облика R_{abac}, такође ће бити свега три: R_{1213}, R_{2123}, R_{3231}. Све остале су или једнаке овима, или се од њих рвзликују само по знаку. На тај начин, у тродимензионалном простору тензор кривине има шест независних компонената. Исто толико компонената има симетрични тензор R_{ik}. Према томе, из линеарних релација $R_{ik} = g^{ml} R_{limk}$, све компоненте тензора R_{iklm} могу се изразити са R_{ik} и метричким тензором g_{ik}. Ако се узме координатни систем, који је *Descartes*-ов у тој тачки, онда се при трансформацијама, које доводе до простог обртања *Descartes*-овог система у посматраној тачки, компоненте метричког тензора у тој тачки не мијењају. Међутим, компоненте тензора, уопште узевши, промијениће се. Одговарајућим избором координатног система увијек се може постићи, да три компоненте тензора кривине у датој тачки буду једнаке нули. Специјално, тензор R_{ik} може се свести на главне осе. На тај начин, кривина тродимензионалног простора у свакој тачки одређује се трима величинама.

Најзад, пређимо на четвородимензионални простор. Број компонената тензора кривине с два разна индекса (тј. типа R_{abab}) свега је шест: индекси a и b могу се узети из четири вриједности 1, 2, 3, 4 на шест начина, а сваки пар вриједности даје једну независну компоненту. Број компонената са три разна индекса је свега 12: три различита индекса могу се из 1, 2, 3, 4 добити на четири начина, а свака тројка вриједности даје три независне компоненте (напр., R_{1213}, R_{2123}, R_{3132}). Најзад, број компонената, код којих су сва четири индекса различити, износи три: R_{1234}, R_{1423}, R_{1342}; остале су или једнаке овима, или се од њих разликују само знаком. Али и из ових трију компонената само двије су независне, јер су све три међусобно повезане једним идентитетом (88,2):

$$R_{1234}+R_{1423}+R_{1342}=0.$$

На тај начнн, у четвородимензионалном простору тензор кривине има свега 20 независних компонената[1]). Ако се узме координатни систем, који се може у датој тачки сматрати као *Descartes*-ов, и ако се посматрају трансформације, које обрћу тај систем (тако да се вриједности g_{ik} не мијењају у посматраној тачки), може се постићи, да шест компонената тензора кривине буду једнаке нули. (Шест је број могућних независних обртања четвородимензионалног координатног система). На тај начин, кривина четвородимензионалног простора у свакој тачки одређује се помоћу 14 величина.

Задатак

Израчунати компоненте тензора R_{ik} (узимајући из њих чисто просторни дио) у систему референције, у коме је $g_{0\alpha}=0$, $g_{00}=-1$ (подобном трансформацијом четири координата, увијек се та четири услова могу испунити).

Рјешење. За $g_{0\alpha}=0$ тродимензионални метрички тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ (82,6) поклапа се са $g_{\alpha\beta}$ ($\gamma_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}$). Изводи $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}=\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^0}$, такође, сачињавају тродимензионални тензор,

---

[1]) Напишимо комбинације индекса i, k, l, m, које дају независне компоненте:

1212	1223	1313	1324	1423	2323	2424
1213	1224	1314	1334	1424	2324	2434
1214	1234	1323	1414	1434	2334	3434

при чему је

$$R_{1234}-R_{1324}+R_{1423}=0.$$

који ћемо означити са $\varkappa_{\alpha\beta}$. Непосредно израчунавање по формули (91,10) доводи до слиједећег резултата:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\varkappa^{\alpha}_{\alpha} - \frac{1}{4}\varkappa^{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta},$$

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2}\left(\varkappa^{\beta}_{\alpha;\beta} - \varkappa^{\beta}_{\beta,\alpha}\right),$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\varkappa_{\alpha\beta} + \boldsymbol{P}_{\alpha\beta}.$$

Овдје је $P_{\alpha\beta}$ тродимензионални тензор, који се изражава помоћу $\gamma_{\alpha\beta}$, као што се R_{ik} изражава помоћу g_{ik}. Све операције подизања индекса и коваријантног диференцирања овдје се врше у тродимензионалном простору, тј. помсћу метричког тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ (по истим формулама као и у четвородимензионалном простору, те операције врше се помоћу тензора g_{ik}).

§ 92. Дјејство за гравитационо поље

За налажење једначина, које дефинишу гравитационо поље, неопходно је претходно одредити дјејство S_g тога поља. Тражене једначине тада се добивају помоћу варирања суме дјејства поља и материјалних честица.

Дјејство S_g, као и дјејство за електромагнетно поље, мора се изразити у облику интеграла по цијелом пољу, тј. по читавом простору и по временској координати x^0 међу двије њене задате вриједности. Будући да S_g мора бити инваријанта, оно има облик

$$\int G\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

гдје је G неки скалар. За одређивање тог скалара поћиһемо од чињенице да једначине гравитационог поља морају садржавати изводе „потенцијала" поља, који нису виши од другог реда (слично ономе, што важи за једначине електромагнетног поља). Пошто се једначине поља добивају помоћу варирања дјејства, онда је за то неопходно, да скалар G садржи изводе од g_{ik}, који нису виши од првог реда. Према томе, G мора садржавати само тензор g_{ik} и величине Γ^i_{kl}.

Међутим, из самих величина g_{ik} и Γ^i_{kl} није могуће саставити инваријанту. То се непосредно види из те околности, што се помоћу одговарајућег избора координатног система увијек може удесити, да све величине Γ^i_{kl} у датој тачки буду једнаке нули. Ипак, постоји скалар R — кривина 4-простора, — који, ма да осим тензора g_{ik} и његових првих извода, садржи још и друге изводе од g_{ik}, посљедње садржи само линеарно. Због те линеарности инваријантни интеграл $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ може се трансформирати помоћу *Gauss*-ове теореме у интеграл израза који не садржи друге изводе. Наиме, $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ може се претставити у облику

$$\int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \int G\sqrt{-g}\,d\Omega + \int \frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^i)}{\partial x^i}\,d\Omega\,,$$

гдје G садржи само тензор g_{ik} и његове прве изводе, а подинтегрални израз у другом интегралу има облик дивергенције неке величине w^i (детаљна операција изведена је на крају овог параграфа). Према *Gauss*-овој теореми тај други интеграл може се трансформирати у интеграл по хиперповршини, која обухвата 4-запремину, по којој се врши интегрирање код друга два интеграла. Варирањем дејства нестаје, дакле, варијације другог члана на десној страни, јер по смислу принципа најмањег дјејства на границама интегрирања варијација поља једнака је нули. Према томе, можемо написати:

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int G\sqrt{-g}\, d\Omega.$$

На лијевој страни је скалар, па је према томе и израз на десној страни такође скалар (док сам интеграл $\int G\sqrt{-g}\, d\Omega$, наравно, није скалар).

Величина G задовољава горе постављени услов, јер садржи само g_{ik} и његове прве извводе. Пошто је, као што се види из претходног, $\delta\int G\sqrt{-g}\, d\Omega$ једина таква инваријанта, то можемо писати

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi k}\,\delta \int G\sqrt{-g}\, d\Omega = \frac{c^3}{16\pi k}\,\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega, \qquad (92,1)$$

гдје је k — нова универзална константа. Аналогно поступку, који је извршен у § 26 за дјејство електромагнетног поља, може се видјети, да константа k мора бити позитивна (види крај овог параграфа).

Константа k назива се гравитациона константа. Димензија за k слиједи непосредно из (92,1). Дјејство има димензију $g \cdot cm^2\, sec^{-1}$. Може се сматрати, да све координате имају димензију cm, а g_{ik} су без димензија, па, према томе, R има димензију cm^{-2}. Дефинитивно налазимо, да k има димензију $cm^3 \cdot g^{-1} \cdot sec^{-2}$. Њена нумеричка вриједност је

$$k = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\, cm^3 \cdot g^{-1} \cdot sec^{-2}. \qquad (92,2)$$

Напомињемо, да бисмо могли ставити да је k равно јединици (или другом произвољно наименованом броју). Међутим, притом би се одредио и избор јединице за мјерење масе, која би се у том случају поклапала с јединицом за мјерење дужине.¹)

Израчунајмо сада величину G у (92,1). Из израза (91,10) за R_{ik} имамо:

$$\sqrt{-g}\,R = \sqrt{-g}\,g^{ik} R_{ik} =$$

$$= \sqrt{-g}\left\{-g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} + g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right\}.$$

Прва два члана на десној страни су:

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{ik}\right) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right),$$

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{il}\right) - \Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right).$$

---

¹) Понекад се ставља $k = c^2$. Тада се маса мјери у cm, при чему је $1\ cm = 1{,}35 \cdot 10^{28} g$. Маса, измјерена помоћу тих јединица, назива се гравитациони полупречник тијела.

Изостављајући тоталне изводе, налазимо:

$$\sqrt{-g}\,G = -\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ik}) + \Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik}) -$$

$$- (\Gamma^m_{il}\,\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\,\Gamma^m_{lm})\,g^{ik}\sqrt{-g}\,.$$

Помоћу формула (84,5) — (84,8) налазимо, да су прва два члана на десној страни једнаки производу из $\sqrt{-g}$ и

$$-\Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}\,g^{kl} + 2\,\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}\,g^{mk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\,g^{ik} =$$

$$= g^{ik}(-\Gamma^m_{m}\,\Gamma^l_{ik} + 2\,\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{li} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}) = 2\,g^{ik}\,(-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} + \Gamma^m_{il}\,\Gamma^l_{km}).$$

Дефинитивно, дакле, добивамо:

$$G = g^{ik}\,(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}). \qquad (92,3)$$

Компоненте метричког тензора величине су, које дефинишу гравитационо поље. Према томе, у принципу најмањег дјејства за гравитационо поље управо величине g_{ik} подлијежу варирању. Ипак је овдје неопходно истаћи слиједећу резерву. Наиме, ми сада не можемо тврдити, да у реално насталом пољу интеграл дјејства има минимум (а не једноставно екстремум) у односу на све могућне варијације g_{ik}. То је у вези са чињеницом, да свака промјена g_{ik} не одговара промјени метрике простор-времена, тј. реалној промјени гравитационог поља. Компоненте g_{ik} мијењају се већ и при простој трансформацији координата, која је везана само с прелазом са једног система референције на други у једном истом простор-времену. Свака таква трансформација координата, уопште узевши, претставља укупност четири (већ према броју координата) независних трансформација. Да би се искључила могућност таквих промјена g_{ik}, које нијесу у вези са промјеном метрике, могу им се додати четири допунска услова, и захтијевати испуњење тих услова при варирању. На тај начин, принцип најмањег дјејства примијењен на гравитационо поље доказује само, да се величинама g_{ik} могу додати неки допунски услови на тај начин, да би при њиховом одржању дјејство имало минимум у односу на варирање g_{ik}. [1])

Имајући у виду те напомене, покажимо сада, да гравитациона константа мора бити позитивна. Као четири допунска услова о којима је било говора узмимо, да све три компоненте $g_{0\alpha}$ буду једнаке нули и да детерминанта $|g_{\alpha\beta}|$, састављена од компонената $g_{\alpha\beta}$, буде константна:

$$g_{0\alpha} = 0, \ |g_{\alpha\beta}| = \text{const.}$$

(на основу посљедњег од тих услова имаћемо: $g^{\alpha\beta}\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = \dfrac{\partial}{\partial x^\gamma}\,|g_{\alpha\beta}| = 0$).

---

[1]) Подвлачимо, међутим, да све што је речено не утиче на извод једначине поља из принципа најмањег дјејства (§ 94). Те једначине се добивају већ и као резултат услова екстремума дјејства (тј. нестанка његове прве варијације), али не обавезно минимума. Према томе, при њиховом извођењу могу се независно подврћи варирању све компоненте g_{ik}.

Нас овдје интересирају они чланови у подинтегралном изразу у дејству, који садрже изводе од g_{ik} по x^0 (упор. стр. 65). Прост рачун помоћу (92,3) показује, да су такви чланови у G

$$\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}.$$

Лако је видјети, да је та величина у суштини позитивна. И заиста, узимајући просторни координатни систем, који би у датој тачки простора у датом моменту био декартов (тако да је $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$), добивамо $\frac{1}{4}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)^2$, тј. збир квадрата.

Довољно брзом промјеном компонената $g_{\alpha\beta}$ са временом x^0 (у интервалу међу двијема границама интегрирања по dx^0) може се, дакле, величина G учинити произвољно великом. Када би константа k била негативна, онда би се при томе дејство неограничено смањивало (узимајући произвољно велике негативне величине по апсолутној вриједности), тј. не би могло имати минимума.

§ 93. Тензор енергије-импулса

У § 31 добивено је опште правило за израчунавање тензора енергије-импулса ма којег физичког система, чије је дејство претстављено у облику интеграла (31,1) по 4-простору. У криволиниским координатама тај интеграл мора бити написан у облику

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega \tag{93,1}$$

(у галилејским координатама је $g = -1$, и S прелази у $\int \Lambda\, dV dt$) Интегрирање се врши по читавом (тродимензионалном) простору и по времену међу два задата момента, тј. по бесконачном подручју 4-простора, које се налази међу двијема хиперповршинама.

Као што је било речено већ у § 31, тензор енергије-импулса, дефинисан формулом (31,5), уопште узевши, није симетричан, као што он мора да буде. Да би постао симетричан, неопходно је било изразу (31,5) додати на одговарајући начин изабрани члан облика $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi_{ikl}$, гдје је ψ_{ikl} антисиметрично по индексима k и l. Сада ћемо дати други начин израчунавања тензора енергије-импулса, који има то преимућство, да одмах доводи до правог израза.

Извршимо у (90,1) трансформацију координата x^i на координате $x'^i = x^i - \xi^i$, гдје су ξ^i — мале величине. Код те трансформације компоненте g^{ik} трансформирају се према основним формулама, као што слиједи:

$$g^{ik}(x^l) = g'^{lm}(x'^l) \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} = g'^{lm} \left(\delta_l^i - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta_m^k - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) \approx$$

$$\approx g'^{ik}(x'^l) + g'^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g'^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Тензор g'^{ik} овдје је функција од x'^l, а тензор g^{ik} функција ранијих координата x^l. Да би се сви чланови претставили у облику функције једних те истих промјенљивих, у g'^{ik} ставимо $x'^l = x^l - \xi^l$ и развијмо $g'^{ik}(x^l - \xi^l)$ по степенима ξ^l. Затим, занемарујући чланове вишег реда по ξ^l можемо у свим члановима, који садрже ξ^l, написати g^{ik} умјесто g'^{ik}. На тај начин налазимо:

$$g^{ik}(x^l) = g'^{ik}(x^l) - \xi^l \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{il} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Директном контролом лако се увјерити, да се посљедња три члана на десној страни могу написати у облику збира $\xi^{i;k} + \xi^{k;i}$ контраваријантних извода од ξ^i. На тај начин налазимо дефинитивно трансформацију g^{ik} у облику:

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = -\xi^{i;k} - \xi^{k;i}. \qquad (93,2)$$

Пошто је дјејство S скалар, оно се не мијења при трансформацији координата. С друге стране, промјена дјејства δS при трансформацији координата може се написати у слиједећем облику. Нека, као и у § 31, q означава величине које дефинишу онај физички систем, на који се односи дјејство S. Трансформацијом координата величине q се мијењају за δq. Међутим, код израчунавања δS не морају се писати чланови, који су везани с промјенама од q. Сви ти чланови се међусобно скрате због „једначина кретања" физичког система, пошто се те једначине и онако добивају када се стави да варијација од S по величинама q буде једнака нули. Према томе, довољно је писати само чланове, који су везани с промјеном од g_{ik}. Ако, као обично, примјенимо *Gauss*-ову теорему и за границе интегрирања ставимо $\delta g^{ik} = 0$, налазимо δS у облику [1])

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right\} d\Omega =$$

$$= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\} \delta g^{ik} \, d\Omega.$$

---

[1]) Неопходно је подвући, да ознака извода коју смо увели по компонентама симетричног тензора g_{ik} у неку руку има симболички карактер. Наиме, изводи $\frac{\partial F}{\partial g^{ik}}$ (F је нека функција од g_{ik}) имају уствари смисао само зато, што означавају чињеницу, да је $dF = \frac{\partial F}{\partial g^{ik}} dg^{ik}$. Али у збир $\frac{\partial F}{\partial g^{ik}} dg_{ik}$ чланови са диференцијалима dg_{ik} сваке од компонената при $i \neq k$ симетричког тензора улазе двапут. Због тога код диференцирања конкретног израза F по ма којој одређеној компоненти g_{ik} при $i \neq k$ добили бисмо величину, која је двапут већа од оне у случају када се означава са $\frac{\partial F}{\partial g^{ik}}$. Ову напомену треба имати у виду, ако се дају одређене вриједности индексима i, k у формулама у које улазе изводи по $\frac{\partial F}{\partial g^{ik}}$.

Уведимо сада ознаку

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{ik}=-\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}}+\frac{\partial}{\partial x^{l}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{l}}}; \tag{93,3}$$

тада δS добива облик [1])

$$\delta S=-\frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=\frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega \tag{93,4}$$

(напомињемо, да је $g^{ik}\delta g_{lk}=-g_{lk}\delta g^{ik}$ и зато $T^{ik}\delta g_{ik}=-T_{ik}\delta g^{ik}$). Стављајући овдје за δg^{ik} израз (93,2) добива се, користећи се симетријом тензора T_{ik},

$$\delta S=\frac{1}{2c}\int T_{ik}(\xi^{i;k}+\xi^{k;i})\sqrt{-g}\,d\Omega=\frac{1}{c}\int T_{ik}\xi\quad\sqrt{-g}\,d\Omega\cdot$$

Трансформирајмо сада тај израз на слиједећи начин:

$$\delta S=\frac{1}{c}\int(T_{i}^{k}\xi^{i})_{;k}\sqrt{-g}\,d\Omega-\frac{1}{c}\int T_{i;k}^{k}\,\xi^{i}\sqrt{-g}\,d\Omega\cdot \tag{93,5}$$

Први интеграл помоћу (84,9) може се написати у облику:

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(\sqrt{-g}\,T_{i}^{k}\xi^{i}\right)d\Omega$$

и трансформирати у интеграл по хиперповршини. Пошто су на границама ξ^{i} равни нули, тај интеграл нестаје.

На тај начин, изједначујући δS са нулом, налазимо:

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int T_{i;k}^{k}\,\xi^{i}\sqrt{-g}\,d\Omega=0.$$

Због тога што су ξ^{i} произвољни, добива се

$$T_{i;k}^{k}=0. \tag{93,6}$$

Упоређујући ову једначину са једначином (31,4) $\dfrac{\partial T_{ik}}{\partial x^{k}}=0$, која важи у галилејским координатама, видимо да тензор T_{ik}, дефинисан формулом (93,3), мора бити идентичан с тензором енергије-импулса, — у крајњој мјери с тачношћу до константног фактора. Лако је провјерити, да је тај фактор раван јединици, тј. да је T_{ik} из (93,3) управо тензор енергије-импулса, а

---

[1]) Скрећемо пажњу на то, да у посматраном случају десет величина δg_{ik} нису независне, јер претстављају резултат трансформације координата, којих има свега четири, Према томе, из изједначења δS са нулом не излази, да је $T_{ik}=0$. Такође напомињемо. да је израз (93,4) за δS тачан за ма коју варијацију од g_{ik}.

то се, напримјер, може урадити рачунањем по формули (93,3) за електромагнетно поље $\left(\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik} = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F_{lm} g^{il} g^{km}\right)$[1]).

На тај начин формула (93,3) омогућава израчунавање тензора енергије-импулса путем диференцирања Λ по компонентама метричког тензора (и њиховим изводима). Притом је тензор T_{ik}, који се дефинише према (93,3), симетричан тензор. Формула (93,3) је подесна за израчунавање тензора енергије-импулса не само у случају присуства гравитационог поља, него и онда када оно не постоји, када метрички тензор нема самосталног смисла, па се прелаз на криволиниске координате врши формално као интервална етапа при израчунавању T_{ik}.

Израз (32,1) за тензор енергије-импулса електромагнетног поља мора бити у криволиниским координатама написан у облику:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il} F_k^l - \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} g_{ik}\right),$$

или, за компоненте мјешовитог тензора;

$$T_i^k = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il} F^{kl} - \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} \delta_i^k\right) \cdot \qquad (93,7)$$

Аналогно, коваријантне компоненте тензора енергије-импулса макроскопских тијела (34,2) су:

$$T_{ik} = (p + \varepsilon) u_i u_k + g_{ik} p,$$

а мјешовите:

$$T_i^k = (p + \varepsilon) u_i u^k + p\delta_i^k \cdot \qquad (93,8)$$

Напомињемо, да је величина T_{00} увијек позитивна[2]):

$$T_{00} \geqq 0. \qquad (93,9)$$

За компоненте T_0^0, уопште узевши, то се не може рећи.

§ 94. Једначине гравитационог поља

Сада можемо прећи на извођење једначина гравитационог поља. Те једначине добивају се из принципа најмањег дејства $\delta(S_m + S_g) = 0$, гдје су S_g и S_m дејства респективно за гравитационо поље и за материју (честице). Сада се подвргава варирању гравитационо поље, тј. величине g_{ik}.

---

[1]) У галилејским координатама је $T_{00} = T^{00} = -T_0^0$ густина енергије, а $\frac{1}{c} T_{\alpha}^0 = -\frac{1}{c} T_{0\alpha} = \frac{1}{c} T^{0\alpha}$ густина компонената импулса; величине $T_{\alpha}^{\beta}\ T_{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}$ сачињавају тензор густине флукса импулса.

[2]) Заиста, имамо $T_{00} = \varepsilon u_0^2 + p(u_0^2 + g_{00})$. Први члан је у сваком случају позитиван. У другом члану напишимо $u_0 = g_{00} u^0 + g_{0\alpha} u^{\alpha} = \frac{g_{00} dx^0 + g_{0\alpha} d\lambda^{\alpha}}{ds}$ и послије просте трансформације добивамо $p\left(\frac{dl}{ds}\right)^2$, гдје је dl елемент просторног растојања (82,5). Одавде се види, да је и други члан у T_{00} позитиван.

Израчунајмо варијацију δS_g. Имамо:

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=$$

$$=\delta\int g^{ik}R_{ik}\,\delta\sqrt{-g}\,d\Omega=\int\left\{R_{ik}\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}+R_{ik}g^{ik}\,\delta\sqrt{-g}+g^{ik}\sqrt{-g}\,\delta R_{ik}\right\}d\Omega.$$

Из формуле (84,4) имамо

$$\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ik}\,\delta g^{ik},$$

па се замјеном добива:

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=$$

$$=\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega+\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega. \quad (94,1)$$

За израчунавање δR_{ik} напоменимо, да иако величине Γ^i_{kl} не сачињавају тензор, њихова варијација $\delta\Gamma^i_{kl}$ претставља тензор. И заиста, $\Gamma^k_{il}A_k\,dx^l$ је промјена вектора при паралелној транслацији [види (83,5)] из неке тачке P у тачку P' која се налази на бесконачно блиском растојању. Према томе, $\delta\Gamma^k_{il}A_k\,dx^l$ је разлика двају вектора који се добивају, респективно, помоћу двије паралелне транслације (с неварираним и варираним Γ^i_{kl}) из тачке P у једну исту тачку P'. Разлика двају вектора у једној истој тачки је вектор, па је зато $\delta\Gamma^i_{kl}$ тензор.

Употријебимо координатни систем, који је галилејски у датој тачки. Тада су у тој тачки сви $\Gamma^i_{kl}=0$. На основу израза (91,10) за R_{ik} имамо (узевши у обзир, да су први изводи од g^{ik} сада једнаки нули):

$$g^{ik}\delta R_{ik}=g^{ik}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{il}+\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik}\right\}=-g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^k_{ik}+g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik}=\frac{\partial w^l}{\partial x^l}$$

гдје је

$$w^l=-g^{il}\,\delta\Gamma^k_{ik}+g^{ik}\,\delta\Gamma^l_{ik}.$$

Пошто је w^l вектор, добивену релацију можемо у произвољном координатном систему написати у облику:

$$g^{ik}\delta R_{ik}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,w^l\right)$$

[замјењујући $\dfrac{\partial w^l}{\partial x^l}$ са $w^l_{;l}$ и примјењујући (84,9)]. Дакле, други интеграл на десној страни у (94,1) је:

$$\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=\int\frac{\partial\sqrt{-g}\,w^l}{\partial x^l}d\Omega$$

и према *Gauss*-овој теореми може се трансформирати у интеграл од w^l по хиперповршини, која обухвата сву 4-запремину. Пошто је на границама интегрирања варијација поља једнака нули, тај члан отпада. На тај начин, варијација δS_g је ¹)

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega\,. \tag{94,2}$$

Ако бисмо пошли од израза

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi k}\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$$

за дјејство поља, као што се лако увјерити, добили бисмо

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi k}\int\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ki}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}\,\delta\Omega\,.$$

Упоређујући то с (94,2) налазимо слиједећу релацију

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\cdot \tag{94,3}$$

За варијацију дјејства материје можемо писати непосредно на основу (90,4):

$$\delta S_m = -\frac{1}{2c}\int T_{ik}\,\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega, \tag{94,4}$$

гдје је T_{ik} тензор енергије-импулса материје (укључујући и електромагнетно поље). Гравитационо узајамно дјејство игра улогу само за тијела с довољно великом масом (захваљујући чињеници што је гравитациона константа мала). Према томе, при проучавању гравитационог поља обично имамо посла с макроскопским тијелима. Саобразно томе треба за T_{ik} обично писати израз (93,8). Ако се гравитационо поље проузрокује електромагнетним зрачењем у вакууму, онда би се за T_i^k требало послужити изразом (93,7). Међутим, неопходно је имати у виду, да је густина енергије слободног зрачења, које постоји у природи мала према густини енергије материјалних тијела, где је урачуната и њихова енергија мировања. Према томе, посматрање гравитационог поља, проузрокованог електромагнетним пољем у отсуству маса не претставља нарочити интерес.

---

¹) Овдје наводимо слиједећу интересантну околност. Ако би се израчунавала варијација $\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ [са R_{ik} из (91,10)], сматрајући Γ^i_{kl} као независно промјенљиве, а g_{ik} као константе, послије чега се користе изрази (84,3) за Γ^i_{kl}, онда би се добило, као што се лако увјерити, израз који је идентично једнак нули. И обрнуто, ако се стави да је наведена варијација једнака нули, могла би се одредити веза између Γ^i_{kl} и метричког тензора.

На тај начин, из принципа најмањег дјејства $\delta S_m + \delta S_g = 0$ налазимо помоћу релација (94,2) и (94,4):

$$\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

одакле је, због произвољности δg^{ik}:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}, \tag{94,5}$$

или са мјешовитим компонентама

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4}T^k. \tag{94,6}$$

Ово су тражене једначине гравитационог поља — основне једначине опште теорије релативитета.

Упрошћењем (94,6) по индексима i и k налазимо $R = -\frac{8\pi k}{c^4}T\left(T = T_i^i\right)$. Према томе, једначине поља могу се написати, такође, у облику

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{94,7}$$

Напомињемо, да су једначине гравитационог поља нелинеарне једначине. Према томе, за гравитациона поља не важи принцип суперпозиције, за разлику од тога што он важи за електромагнетно поље у специјалној теорији релативитета (§ 26).

Треба, уосталом, имати у виду, да се у пракси обично догађа. да се има посла са слабим гравитационим пољима, за која су једначине поља у првој апроксимацији линеарне (види слиједећи параграф). За таква поља са истом апроксимацијом важи и принцип суперпозиције.

У вакууму је $T_{ik} = 0$, па се једначине гравитационог поља своде на једначине

$$R_{ik} = 0. \tag{94,8}$$

Напомињемо, да то никако не значи, да је простор-вријеме вакуума равно; за то би морало бити $R^i_{klm} = 0$.

Тензор енергије-импулса електромагнетног поља има особину, да је $T_i^k = 0$ [в. (32,2)]. Како је с друге стране $R = -\frac{8\pi k}{c^4}T$, онда је, дакле, у присуству самог електромагнетног поља без икаквих маса скаларна кривина простор-времена једнака нули ($R = 0$).

Као што је познато, дивергенција $T^k_{i;k}$ тензора T_i^k једнака је нули (§ 93). Према томе мора бити једнака нули и дивергенција лијеве стране једначине (94,6). Лако се увјерити, да стварно важи идентитет

$$R^k_{i;k} - \frac{1}{2}\left(\delta_i^k R\right)_{;k} = R^k_{i;k} - \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^i} = 0. \tag{94,9}$$

Овај идентитет директно излази из идентитета (91,9) множењем са $g^{ik}\delta^l_n$.

На тај начин једначине $T^k_{i;k}=0$ у суштини се садрже у једначинама поља (94,6). С друге стране једначине $T^k_{i;k}=0$, које изражавају законе одржања енергије и импулса, садрже једначине кретања оног физичког система на који се односи посматрани тензор енергије-импулса (тј. једначине кретања материјалних честица или други пар *Maxwell*-ових једначина). На тај начин једначине гравитационог поља садрже у себи и једначине за саму материју (материјалних честица и електромагнетног поља), које проузрокује то поље. Насупрот томе, једначине електромагнетног поља (*Maxwell*-ове једначине) у себи садрже само једначину одржања цјелокупног оптерећења (једначину континуитета), али не садрже једначине кретања тих оптерећења која проузрокују поље.

Према томе, у случају електромагнетног поља распоред и кретање оптерећења могу бити задати на произвољан начин, само да тотално оптерећење буде константно. Кад је задат распоред оптерећења, на основу њега се, помоћу *Maxwell*-ових једначина, одређује поље, које она проузрокују. У гравитационом пољу распоред и кретање материје, која га проузрокује, никако не могу бити задати на произвољан начин, — напротив, морају бити одређени (помоћу рјешавања једначина поља код задатих почетних услова) истовремено са самим пољем, које та материја проузрокује.

Ипак, неопходно је напоменути, да једначине гравитационог поља не одређују распоред и кретање материје у цјелини. Наиме, те једначине у себи не садрже једначине стања супстанце, тј. једначине које међусобно повезују притисак и густину. Та једначина мора бити задата поред једначина поља.

Четири координате x^i могу бити подвргнуте произвољној трансформацији. Помоћу те трансформације могу се на произвољан начин изабрати четири од десет компонената тензора g_{ik}. Према томе, независно је само шест величина g_{ik}. Затим, четири компоненте које улазе у тензор енергије-импулса материје 4-брзине u^i повезане су међусобно релацијом $u^i u_i = -1$, па су од њих независне свега три компоненте. На тај начин, десет једначина поља (94,5) стварно одређују десет непознатих величина, наиме шест компонената g_{ik}, три компоненте u^i и густину ϱ материје (или њен притисак p).

Ако се из једначина (94,5) елиминирају четири непознате — брзина и густина, може се добити шест једначина, које одређују шест величина g_{ik}. Да се за g_{ik} има свега шест једначина види се непосредно из тога, што су десет једначина (94,5) међусобно повезане са четири идентитета $T^k_{i;k}=0$.

Задатак

Написати једначине стационарног гравитационог поља.

Рјешење. Увешћемо ознаке $g_{00}=-h$ и $g_{0\alpha}=hg_\alpha$. Тада је $g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}-hg_\alpha g_\beta$, гдје је $\gamma_{\alpha\beta}$ просторни (тродимензионални) метрички тензор (82,6). Убудуће све операције подизања и спуштања индекса и коваријантног диференцирања врше се у тродимензионалном простору са метриком $\gamma_{\alpha\beta}$ (као и у задатку из § 91). Увешћемо и тродимензионални антисиметрични тензор

$$f_{\alpha\beta}=g_{\beta;\alpha}-g_{\alpha;\beta}\equiv\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}$$

и тродимензионалну брзину v^{α}, дефинишући је као

$$\frac{v^{\alpha}}{c} = \frac{dx^{\alpha}}{\sqrt{h}\,(dx^0 - g_{\alpha}\, dx^{\alpha})} .$$

Послије израчунавања компонената тензора R_{ik} и T_{ik} добивају се слиједеће једначине [1]):

$$\frac{1}{2h} h^{;\alpha}_{;\alpha} - \frac{1}{4h^2} h_{;\alpha} h^{;\alpha} + \frac{h}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \left[\frac{\varepsilon + p}{1 - \dfrac{v_{\alpha} v^{\alpha}}{c^2}} - \frac{\varepsilon - p}{2} \right],$$

$$\frac{\sqrt{h}}{2} f^{\beta\alpha}_{;\beta} + \frac{3}{4\sqrt{h}} f^{\beta\alpha} h_{;\beta} = - \frac{8\pi k}{c^4} \frac{p + \varepsilon}{1 - \dfrac{v_{\alpha} v^{\alpha}}{c^2}},$$

$$P^{\alpha}_{\beta} + \frac{h}{2} f^{\alpha\gamma} f_{\beta\gamma} - \frac{1}{2h} h^{;\alpha}_{;\beta} + \frac{1}{4h^2} h^{;\alpha} h_{;\beta} = \frac{8\pi k}{c^1} \left[\frac{\varepsilon - p}{2} \delta^{\alpha}_{\beta} + \frac{(p + \varepsilon) v^{\alpha} v_{\beta}}{c^2 \left(1 - \dfrac{v_{\alpha} v^{\beta}}{c^2}\right)} \right].$$

(P^{α}_{β} је тродимензионални тензор, који се изражава помоћу $\gamma_{\alpha\beta}$, као што се R^k_i изражава помоћу g_{ik}).

§ 95. Newton-ов закон

У добивеним једначинама гравитационог поља извршимо гранични прелаз на нерелативистичку механику. Као што је показано у § 86, претпоставка мале вриједности брзина ових честица истовремено изискује, да само гравитационо поље буде слабо.

Изрази за компоненте g_{00} метричког тензора у посматраном граничном случају нађени су у § 86:

$$g_{00} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2} .$$

Затим, за компоненте енергије-импулса можемо се послужити изразом (34,4) $T^k_i = \mu c^2 u_i u^k$, гдје је μ густина масе тијела (сума маса честица у јединици запремине). Што се тиче 4-брзина u^i то, пошто се макроскопско кретање наравно такође мора сматрати полагано, морамо занемарити све њене про-

---

[1]) Израчунавање може се олакшати ако се унапријед напомене, да дефинитивне једначине могу садржати само изводе вектора g_{α} у комбинацији $f_{\alpha\beta}$, а не сами тај вектор. И заиста, једначине морају бити инваријантне у односу на трансформацију временске координате облика $x^0 \rightarrow x^0 + \varphi(x^{\alpha})$, која не мијења стационираност поља Али при таквој трансформацији g_{α} прелази у $g_{\alpha} + \varphi_{;\alpha}$. Тензор $f_{\alpha\beta}$ се очевидно не мијења.

сторне компоненте, задржавајући само временску, тј. морамо ставити $u^\alpha = 0$, $u^0 = -u_0 = 1$. Од свих компонената T_i^k на тај начин остаје само

$$T_0^0 = -\mu c^2. \tag{95,1}$$

Скалар $T = T_i^i$ биће једнак истој величини: $-\mu c^2$.

Напишимо једначине поља у облику (94,7):

$$R_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T\right).$$

За $i = k = 0$ биће

$$R_0^0 = -\frac{4\pi k}{c^2}\mu.$$

Све остале једначине, као што се лако можемо увјерити, при посматраној апроксимацији идентично су једнаке нули.

При израчунавању R_0^0 по општој формули (91,10) напоменимо, да су чланови који садрже производе величина Γ_{kl}^i у сваком случају величине другог реда по φ. Чланови, пак, који садрже изводе по $x^0 = ct$, мали су (у односу на чланове са изводима по координатама x^α), јер садрже само степене од $\frac{1}{c}$. Дефинитивно остаје $R_{00} = -R_0^0 = \frac{\partial \Gamma_{00}^\alpha}{\partial x^k}$. Замјеном $\Gamma_{00}^\alpha \cong -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$, налазимо

$$R_0^0 = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{\alpha^2}} \equiv -\frac{1}{c^2}\Delta\varphi.$$

На тај начин, једначине поља прелазе у

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu. \tag{95,2}$$

Једначина (95,2) је једначина гравитационог поља у нерелативистичкој механици. Скрећемо пажњу на то, да је потпуно аналогна *Poisson*-овој једначини (35,4) за електрични потенцијал, у којој се сада умјесто густине оптерећења налази густина масе помножена са $-k$. Зато можемо одмах написати опште једначине (95,2) аналогно с (35,8) у облику

$$\varphi = -k\int\frac{\mu dV}{R}. \tag{95,3}$$

Ова формула одређује потенцијал гравитационог поља ма ког распореда маса у нерелативистичкој апроксимацији.

Специјално, за потенцијал поља једне честице масе m имамо

$$\varphi = -\frac{km}{R}, \tag{95,4}$$

па је, дакле, сила $F = -m' \frac{\partial \varphi}{\partial R}$, која дјејствује у том пољу на другу честицу (масе m')

$$F = -\frac{kmm'}{R^2}. \qquad (95,5)$$

Ово је познати *Newton*-ов закон гравитације[1]).

Потенцијална енергија честице у гравитационом пољу једнака је производу из њене масе и потенцијала поља (§ 88), аналогно томе, што је потенцијална енергија у електричном пољу једнака производу оптерећења и потенцијала тога поља. Према томе, аналогно (36,1) за потенцијалну енергију ма ког распореда маса можемо написати израз

$$U = -\frac{k}{2} \int \mu \varphi dV \cdot \qquad (95,6)$$

За *Newton*-ов потенцијал константног гравитационог поља, далеко од маса које га изазивају, може се написати ред, аналогно ономе који је добивен у §§ 39—40 за електростатичко поље. Узмимо координатни почетак у центру инерције маса. Тада интеграл $\int \mu \mathbf{r} dV$, који је аналоган диполном моменту система оптерећења, идентично је једнак нули. На тај начин, за разлику од електростатичког поља, у гравитационом пољу увијек се може искључити „диполни члан". Развијени потенцијал φ према томе има облик

$$\varphi = -k \left\{ \frac{M}{R_0} + \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_{\alpha\delta} \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} + \cdots \right\}, \qquad (95,7)$$

гдје је $M = \int \mu dV$ — укупна маса система, а величине

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu (3 x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) dV \qquad (95,8)$$

могу се назвати тензори квадруполног момента маса[2]). Они су са обичним тензором инерције

$$J_{\alpha\beta} = \int \mu (r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta) dV$$

повезани очевидним релацијама

$$D_{\alpha\beta} = J_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 3 J_{\alpha\beta}. \qquad (95,9)$$

---

[1]) Из (95,5) се види, да је код елементарних честица однос гравитационих сила према електромагнетним сасвим незнатан. Тако за два електрона је $\frac{km^2}{e^2} = 2 \cdot 10^{-43}$, а за два протона $7 \cdot 10^{-37}$.

[2]) Овдје све индексе α, β пишемо доље, не правећи разлику међу ко- и контраваријантним компонентама, саобразно томе, што се подразумијевају операције у обичном *Newton*-овом (еуклидском простору).

§ 96. Централно-симетрично гравитационо поље

Посматрајмо гравитационо поље, које има централну симетрију. Такво поље може се проузроковати ма каквим централно-симетричним распоредом супстанце. При томе, наравно, морају бити централно-симетрични не само распоред супстанце, него и њено кретање, тј. брзина у свакој тачки мора бити оријентирана дуж радиуса.

Централна симетрија поља показује, да метрика простор-времена, тј. израз за интервал ds мора бити исти за све тачке, које се налазе на једнаком растојању од центра. У euклидском простору то растојање је једнако радиус-вектору, док у нееуклидском простору, који егзистира у присуству гравитационог поља, нема величине која би имала сва својства еуклидског радиус-вектора (напр., која би била истовремено једнака и растојању до центра и периферије подијељене са 2π). Према томе, сада је избор „радиус-вектора“ произвољан.

Ако се употријебе „сферне“ просторне координате r, θ, φ, онда је најопштији централно-симетрични израз за ds^2

$$ds^2 = h(r,t)\,dr^2 + k(r,t)\,(\sin^2\theta\cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + l(r,t)\,dt^2 + a(r,t)\,dr\,dt, \qquad (96,1)$$

гдје су a, h, k, l, неке функције „радиус-вектора“ r и „времена“ t. Но, због тога, што је у општој теорији релативитета избор система референције произвољан, ми координате можемо још подвргнути произвољној трансформацији, која не квари централну симетрију ds^2. То значи, да координате r и t можемо трансформирати помоћу формула $r = f_1(r', t')$, $t = f_2(r', t')$, гдје су f_1, f_2 ма какве функције нових координата r', t'.

Користећи ту могућност, узмимо координату r и вријеме t на тај начин, да би, прво, коефицијент $a\,(r,t)$ уз $drdt$ у изразу за ds^2 био једнак нули и друго, коефицијент $k(r,t)$ био једноставно раван r^2 [1]). Посљедње значи, да је радиус-вектор r одређен на тај начин, да дужина периферије с центром у координатном почетку буде једнака $2\pi r$ (елемент лука периферије у равни $\theta = \pi/2$ је $dl = r\,d\varphi$). Згодно ће бити, да величине h и l пишемо у експоненцијалном облику, и то респективно као $-e^\lambda$ и $c^2 e^\nu$, гдје су λ и ν неке функције од r и t. На тај начин израз за ds^2 употребљаваћемо у облику

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\cdot d\varphi^2) - e^\lambda\,dr^2. \qquad (96,2)$$

Ако се под x^1, x^2, x^3, x^0, подразумијевају респективно координате r, θ, φ, ct, имамо дакле за компоненте метричког тензора, које нису једнаке нули; изразе:

$$g_{11} = e^\lambda,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2\sin^2\theta,\ g_{00} = -e^\nu.$$

Лако је видјети, да је

$$g^{11} = e^{-\lambda},\ g^{22} = \frac{1}{r^2},\ g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta},\ g^{00} = -e^{-\nu}.$$

---

[1]) Треба напоменути, да тај услов не одређује једнозначно временске координате. Наиме, она се још може трансформирати било којом трансформацијом облика $t = f(t')$, која не садржи r.

Помоћу ових вриједности лако је по општој формули (84,3) одредити величине Γ^i_{kl}. Израчунавање доводи до слиједећих израза (апостроф означава диференцирање по r а тачка над словом диференцирање по ct):

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11}=\frac{\lambda'}{2}, && \Gamma^0_{10}=\frac{\nu'}{2}, && \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^0_{11}=\frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu}, && \Gamma^1_{22}=-re^{-\lambda}, && \Gamma^1_{00}=\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\\
&\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r}, && \Gamma^3_{23}=\operatorname{ctg}\theta, && \Gamma^0_{00}=\frac{\dot\nu}{2},\\
&\Gamma^1_{10}=\frac{\dot\lambda}{2}, && \Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta\, e^{-\lambda},
\end{aligned}\tag{96,3}$$

Све остале компоненте Γ^i_{kl} (осим оних, које се разликују од написаних само транспозицијом индекса k и l) једнаке су нули.

За добивање једначина гравитационог поља треба према формули (91,10) израчунати компоненте тензора R^i_k. Једноставна, али доста дуга израчунавања доводе до слиједећих једначина:

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_1=e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2},\tag{96,4}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^2_2=\frac{8\pi k}{c^4}T^3_3=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot\lambda+\frac{\dot\lambda^2}{2}-\frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right),\tag{96,5}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^0_0=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)-\frac{1}{r^2},\tag{96,6}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_0=e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r}.\tag{96,7}$$

Остале компоненте су идентично једнаке нули.

Једначине гравитације се у потпуности могу интегрирати за врло важан случај централно-симетричног поља у вакууму, тј. изван маса које га проузрокују (*Schwartzschild*, 1916). Ако се тензор енергије-импулса изједначи са нулом, добивају се слиједеће једначине:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0,\tag{96,8}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0,\tag{96,9}$$

$$\dot\lambda=0\tag{96,10}$$

[четврта једначина, тј. једначина (96,5) не мора се писати, јер је посљедица трију осталих једначина].

Из (96,10) одмах видимо, да λ не зависи од времена. Даље из једначина (94,8) и (94,9) налазимо $\lambda' + \nu' = 0$, тј.

$$\lambda + \nu = f(t), \tag{96,11}$$

гдје је $f\ (t)$ функција само од времена. Али, како је интервал ds^2 узет у облику (96,2), ми смо још допустили могућност и произвољне трансформације времена облика $t = f(t')$ (в. нап. на стр. 284). Таква трансформација еквивалентна је додавању ка ν произвољне функције од времена, па се помоћу тога увијек може $f(t)$ у (96.11) изједначити са нулом. Дакле, не ограничавајући генералисање, може се сматрати да је $\lambda + \nu = 0$, тј. $\lambda = -\nu$. Напомињемо, да се на тај начин централно-симетрично поље у вакууму аутоматски показује као статичко.

Једначина (96,9) лако се интегрира и даје:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{\text{const}}{r}.$$

Наведимо интересантну околност, да је у бесконачности ($r \to \infty$) $e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1$, тј. на удаљености од гравитационих тијела метрика је аутоматски галилејска. Константу, која овде улази, лако је изразити помоћу масе тијела, уз услов, да на великим растојањима од маса, гдје је поље слабо, важи *Newton*-ов закон. Наиме, мора бити $g_{00} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2}$ [в. (86,2)], гдје је потенцијал φ једнак своме њутновском изразу (95,4): $\varphi = -\frac{km}{r}$ (m је укупна маса тијела, које проузрокује поље). Одавде се види, да је $\text{const.} = \frac{2\,km}{c^2}$.

На тај начин, за интервал дефинитивно налазимо

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2\,km}{r}\right) dt^2 - r^2 (\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2km}{c^2 r}}. \tag{96,12}$$

Овај израз потпуно дефинише гравитационо поље у вакууму, које је проузроковано ма којим централно-симетричним распоредом маса. Подвлачимо, да ово рјешење важи не само за масе које мирују, него и за масе које се крећу, само ако то кретање такође посједује централну симетрију (на примјер централно-симетричне пулсације).

Просторна метрика дефинише се за елемент dl просторног растојања:

$$dl^2 = r^2 (\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + \frac{dr^2}{1 - \frac{2km}{c^2 r}} \tag{96,13}$$

[компоненте тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ (82,6) овдје се поклапају с одговарајућим компонентама $g_{\alpha\beta}$]. Растојање од центра до ма које тачке простора је $\int\limits_0^r \sqrt{g_{11}}\, dr$, а како је $g_{11} \geq 1$, то је

$$\int_0^r \sqrt{g_{11}}\, dr \geq r$$

(знак једнакости важи само за тачке у бесконачности). Дужина, пак, периферије круга, која пролази кроз посматрану тачку (са центром у координатном почетку), износи $2\pi r$. Видимо, дакле, да је однос дужине периферије рпема њеном полупречнику мањи од 2π.

Затим из (96,12) видимо, да је $-g_{00} \leq 1$. У вези с формулом (82,1) $d\tau = \sqrt{-g_{00}}\, dt$, која одређује право вријеме, слиједи да је

$$d\tau \leq dt.$$

Знак једнакости важи за бесконачност, гдје се t поклапа с правим временом. На тај начин, на коначним растојањима од маса дешава се „успорење“ времена у односу на вријеме у бесконачности. Другим ријечима, помјерање спектралних линија у гравитационом пољу (в. § 88) врши се према црвеној страни.

Компонента g_{00}, као што се зна, мора бити негативна. Према томе из (96,12) видимо, да „радиус-вектор“ r не може имати вриједности мање од $2km/c^2$. Одговарајућа минимална дужина периферије је $2\pi \cdot 2km/c^2 = 4\pi km/c^2$. То значи, да материјално тијело не може имати димензије, које би биле мање од неке одређене доње границе. Наиме, тијело масе m не може имати у кругу дужину, која би била мања од $4\pi km/c^2$ [1]).

На крају изнијећемо још приближни израз за ds^2 на великим растојањима од координатног почетка:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2\,km}{c^2 r}(dr^2 - c^2\,dt^2). \tag{96,14}$$

Други члан претставља малу поправку према галилејској метрици ds_0^2. На великим растојањима од маса које проузрокују поље, свако поље је централно-симетрично. Према томе, (96,14) одређује метрику на великим растојањима од ма којег система тијела.

Могу се изнијети и неки општи ставови и поводом централно-симетричног гравитационог поља унутар гравитационих маса. Из једначине (96,6) види се, да за $r \rightarrow 0$ мора и λ постати једнако нули, у крајњој линији, барем као r^2. У противном случају десна страна једначине постала би тада за $r \rightarrow 0$ бесконачно велика, тј. и T_0^0 би у $r = 0$ имало сингуларну тачку, што је физички апсурдно. Формалним интегрирањем једначине (96,6) уз гранични услов $\lambda|_{r=0} = 0$, добивамо:

$$\lambda = -\ln\left\{1 + \frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^r T_0^0 r^2\, dr\right\}\cdot \tag{96,15}$$

---

[1]) Скрећемо пажњу на то, да овај резултат нема смисла код примјене на елементарне честице. У односу на те честице цјелокупна теорија, која се излаже у овој књизи, због квантних појава, као што је већ речено, губи свој смисао већ и за размјере, које су у огромном броју пута (реда 10^{-40}) веће од km/c^2.

Како је $T_0^0 = -e^{\nu} T_{00} \leq 0$ [в. (93,9)], то се одавде види, да је $\lambda \geq 0$, тј.

$$e^{\lambda} \geq 1. \tag{96,16}$$

Имајући у виду ту неједначину и неједначину

$$T_1^1 = p + (p + \varepsilon)(u^1)^2 e^{\lambda} \geq 0,$$

из једначине (96,4) налазимо, да је $\nu' \geq 0$. Но када $r \to \infty$ (далеко од маса), онда метрика прелази у галилејску, тј. $e^{\nu} \to 1$, $\nu \to 0$. Према томе, из $\nu' \geq 0$ слиједи, да је у цјелокупном простору $\nu \leq 0$, тј.

$$e^{\nu} \leq 1. \tag{96,17}$$

Добивене неједначине показују, да се особине просторне метрике и рад сатова у централно симетричном пољу у вакууму односе, у истој мјери, и на поље унутар гравитационих маса.

Ако се гравитационо поље изазива сферним тијелом „полупречника" **a**, онда за $r > a$ имамо $T_0^0 = 0$. За тачке са $r > a$, формула (96,14) према томе даје:

$$\lambda = -\ln\left\{1 + \frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^a T_0^0 r^2 dr\right\}.$$

С друге стране, овдје се може примијенити израз (96,12), који се односи на вакуум. Према томе изразу је:

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{2km}{c^2 r}\right).$$

Упоређивањем оба израза налазимо формулу

$$m = -\frac{4\pi}{c^2}\int_0^a T_0^0 r^2 dr, \tag{96,18}$$

која одређује укупну масу тијела помоћу његовог тензора енергије-импулса.

Задаци

1. Одредити просторну кривину у централно-симетричном гравитационом пољу у вакууму.

Рјешење. Просторни тензор кривине (означимо га са $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$) изражава се помоћу просторног метричног тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ исто као што се R^{i}_{klm} изражава помоћу g_{ik}. Компоненте тензора $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ могу се изразити помоћу компонената тензора $P_{\alpha\beta} = P^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta}$ (и $\gamma_{\alpha\beta}$) тако, да је довољно израчунати $P_{\alpha\beta}$ (§ 91). Са вриједностима $\gamma_{\alpha\beta}$ из (96,13), послије рачунања добивамо слиједеће изразе за компоненте тензора

$$P_{\theta}^{\theta} = P_{\varphi}^{\varphi} = \frac{km}{c^2 r^3}, \quad P_r^r = -\frac{2km}{c^2 r^3}$$

и $P^{\alpha}_{\beta} = 0$ за $\alpha \neq \beta$, па се добива да је тензор P^{α}_{β} сведен на главне осе. Скрећемо пажњу на то, да су $P^{\theta}_{\theta}, P^{\varphi}_{\varphi}$ позитивни, а P^{r}_{r} негативно. То значи, да је просторна геометрија таква, да је у „равнима" које пролазе кроз координатни почетак збир углова троугла већи од π, а у „равнима" које су „нормалне" на радиус-векторима, тај збир је мањи од π.

2. Одредити облик ротационе површине, на којој је геометрија иста као на „равни", која пролази кроз координатни почетак у централно-симетричном гравитационом пољу у вакууму.

Рјешење. Геометрија на ротационој површини $z = z(r)$ (у цилиндричним координатама) дефинише се елементом дужине

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2 = dr^2(1 + z'^2) + r^2\, d\varphi^2.$$

Упоређењем са елементом дужине у „равни" $\theta = \pi/2$ у посматраном пољу

$$dl^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{1}{1 - \dfrac{2mk}{c^2 r}},$$

налазимо

$$1 + z'^2 = \frac{1}{1 - \dfrac{2mk}{c^2 r}}$$

одакле је

$$z = 2\sqrt{\frac{2\,mk}{c^2}}\sqrt{r - \frac{2\,mk}{c^2}}.$$

3. Трансформирати интервал (96,12) у такве координате, код којих је елемент dl просторног растојања пропорционалан своме еуклидном изразу.

Рјешење. Стављајући

$$r = \left(1 + \frac{mk}{2\,c^2 r_1}\right)^2 r_1,$$

добивамо из (96,12):

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \dfrac{km}{2\,c^2 r_1}}{1 + \dfrac{km}{2\,c^2 r_1}}\right)^2 c^2\, dt^2 - \left(1 + \frac{km}{2 c^2 r_1}\right)^4 \left(dr_1^2 + r_1^2 d\theta^2 + r_1^2 \sin^2\theta \cdot d\varphi^2\right).$$

Координате r_1, θ, φ називају се изотропне сферне координате.

4 Извести једначине централно-симетричног гравитационог поља у координатном систему, који се у свакој тачки креће заједно са супстанцом која се налази у тој тачки (такав систем референције може да се назове „сопствени систем").

Рјешење. Послужићемо се двијема могућим трансформацијама координата r, t у елементу интервала (96,1), да бисмо најприје изједначили са нулом коефицијент $a(r, t)$ при $dr\,dt$, а затим, да сведемо на нулу у свакој тачки радијалну брзину $\dot{r}$ супстанце (остале компоненте брзине уопште не постоје због централне симетрије). Послије тога координате r и t могу се још трансформирати помоћу трансформација облика: $r = r(r')$, $t = t(t')$.

Означавајући h, k, l респективно са $-e^{\lambda}, -e^{\mu}$, $c^2 e^{\nu}$ (λ, μ, ν су функције од r и t) добивамо израз ds^2 у облику

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\mu}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - e^{\lambda}\, dr^2. \tag{1}$$

Компоненте тензора енергије-импулса супстанце износе

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = p, \quad T^0_0 = -\varepsilon. \tag{2}$$

Прилично дуго израчунавање доводи до слиједећих једначина гравитације:

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_1^1 = \frac{8\pi k}{c^4} p = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu' \nu' \right) - e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{\nu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 \right) - e^{-\mu}, \tag{3}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi k}{c^4} p = \frac{1}{4} e^{-\lambda} (2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\lambda' - \nu'\lambda' + \mu'\nu') +$$

$$+ \frac{1}{4} e^{-\nu} \left(\dot{\lambda} \dot{\nu} + \dot{\mu} \dot{\nu} - \dot{\lambda} \dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \mu^2 \right), \tag{4}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^0 = - \frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2} \right) - \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\dot{\lambda} \dot{\mu} + \frac{\mu^2}{2} \right) - e^{-\mu}, \tag{5}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^1 = 0 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(-2\dot{\mu}' - \dot{\mu}\mu' + \dot{\lambda}\mu' + \nu'\dot{\mu} \right). \tag{6}$$

Неке опште релације за λ, μ, ν могу се лако наћи, ако се пође од једначина, које се налазе у једначинама гравитације (93,6) $T_{i;k}^{k} = 0$. Замјеном T_i^k и g_{ik} из (1) и (2) налазимо слиједеће двије једначине

$$\dot{\lambda} + 2\dot{\mu} = - \frac{2\dot{\varepsilon}}{p + \varepsilon}, \quad \nu' = - \frac{2p'}{p + \varepsilon}.$$

Ако је p одређена функција енергије ε, онда се те једначине интегрирају непосредно у облику

$$\lambda + 2\mu = -2 \int \frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} + f_1(r), \tag{7}$$

$$\nu = -2 \int \frac{dp}{p + \varepsilon} + f_2(t), \tag{8}$$

гдје се функције $f_1(r)$ и $f_2(t)$ могу узети произвољно због могућности горе наведених произвољних трансформација облика

$$r = r(r') \text{ и } t = t(t').$$

5. Наћи опште рјешење једначина централно-симетричног гравитационог поља, када притисак супстанце износи p (*B. Datt*, 1937).

Рјешење. Послужићемо се „сопственим" системом референције (в. зад. 4). Из формуле (8) види се, да се за $p = 0$ може ставити $\nu = 0$. Тада се једначина (6) непосредно интегрира по времену и даје

$$e^{\lambda} = \frac{e^{\mu} \mu'^2}{4(f + 1}, \tag{1}$$

гдје је $f = f(r)$ — произвољна функција од r (која задовољава само услов $f + 1 > 0$). Замјеном овог израза у једначини (3) задатка 4 добијамо једначину

$$\ddot{\mu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 - f e^{-\mu} = 0.$$

Први интеграл те једначине је

$$\frac{\dot{\mu}^2}{4} = f e^{-\mu} + F e^{-3\mu/2},$$

гдје је $F = F(r)$ — још једна произвољна функција. Још једном интеграцијом добивамо

$$\left.\begin{array}{l} \text{за } f > 0: \\ \qquad ct = \frac{1}{f}\sqrt{fe^{\mu} + Fe^{\mu/2}} - \frac{F}{f^{3/2}} \operatorname{arg\,sh} \sqrt{\frac{fe^{\mu/2}}{F}} + \Phi(r), \\ \text{за } f < 0: \\ \qquad ct = \frac{1}{f}\sqrt{fe^{\mu} + Fe^{u/2}} - \frac{F}{(-f)^{3/2}} \arcsin \sqrt{\frac{-fe^{\mu/2}}{F}} + \Phi(r). \end{array}\right\} \tag{2}$$

Замјеном добивених израза у једначини (5) задатка 4 добивамо за ε

$$\frac{4\pi k}{c^4}\varepsilon = \frac{F'}{f'}e^{-\frac{3\mu}{2}}. \tag{3}$$

Формуле (1 — 3) одређују тражено опште рјешења. То рјешење у суштини не зависи од три, него свега од двије произвољне функције, које одређују везу међу f, F, Φ, јер се сама координата r може изабрати на произвољан начин (избор времена t постаје једнозначан, када се стави $\nu = 0$).

§ 97. Кретање у централно-симетричном гравитационом пољу

Посматрајмо кретање тијела у централно-симетричном гравитационом пољу. Као и у сваком централно-симетричном пољу, кретање ће се вршити у некој „равни“ која пролази кроз координатни почетак. Узмимо ту раван као раван $\theta = \pi/2$.

За одређивање трајекторије тијела (масе m) послужићемо се *Hamilton*, *Jacobi*-евом једначином:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} + m^2c^2 = 0.$$

Помоћу g^{ik}, који се одређује изразом (96,12) за интервал налазимо слиједећу једначину:

$$e^{-\nu}\left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2 - e^{\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2c^2 = 0, \tag{97,1}$$

гдје је

$$e^{\nu} = 1 - 2km'/c^2r \tag{97,2}$$

(m' је маса тијела, које проузрокује поље). Према општим правилима за рјешавање *Hamilton-Jacobi*-еве једначине, тражимо S у облику

$$S = -\mathscr{E}_0 t + M\varphi + f(r),$$

са константном енергијом $\mathscr{E}_0$ и моментом импулса M. Замјеном у (97,1) налазимо једначину

$$e^{-\nu}\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2} - \frac{M^2}{r^2} - e^{\nu}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = m^2c^2,$$

одакле је

$$\frac{df}{dr} = e^{-\nu/2}\sqrt{\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}e^{-\nu} - m^2c^2 - \frac{M^2}{r^2}}.$$

На тај начин, дејство је:

$$S = -\mathcal{E}_0 t + M\varphi + \int e^{-\nu/2}\sqrt{\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2}e^{-\nu} - m^2c^2 - \frac{M^2}{r^2}}\,dr. \tag{97,3}$$

Трајекторија се, као што је познато, одређује једначином $\frac{\partial S}{\partial M} = \text{const.}$, одакле, је:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} - m^2c^2e^{\nu} - \frac{M^2}{r^2}e^{\nu}}}. \tag{97,4}$$

Овај интеграл своди се на елиптични.

Као примјер кретања у централно-симетричном пољу служи кретање планета у пољу теже Сунца. Будући да су брзине планета мале у односу на брзину свјетлости, то релативистичка теорија гравитације доводи само до сасвим незнатних поправки за орбите планета у односу на *Newton*-ову теорију.

За приближно проучавање једначине орбите (97,4) згодно ју је написати у облику диференцијалне једначине

$$\left(\frac{M}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} - m^2c^2e^{\nu} - \frac{M^2}{r^2}e^{\nu}$$

или, уводећи нову промјенљиву $\sigma = 1/r$ и уврштавањем израза за e^{ν}:

$$M^2c^2\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \mathcal{E}_0^2 - m^2c^4 + 2km'm^2c^2\sigma - M^2c^2\sigma^2 + 2km'M^2\sigma^3.$$

Диференцирањем те једначине по φ добивамо

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma + \alpha\sigma^2, \tag{97,5}$$

гдје су уведене константе $p = \frac{M^2}{km'm^2}$, $\alpha = \frac{3km'}{c^2}$.

Ова једначина разликује се од једначине која би се добила у *Newton*-овој теорији за мали члан $\alpha\sigma^2$. Ријешићемо је методом сукцесивних апроксимација. При нултој апроксимацији изостављамо члан $\alpha\sigma^2$. Преостала једначина, као што је познато, има као рјешење њутновску орбиту

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi),$$

гдје је p параметар орбите, а e њен ексцентрицитет; велика полуоса је $a = p/(1 - e^2)$, а перихел орбите одговара вриједности угла $\varphi = \pi$.

При слиједећој апроксимацији тражимо σ у облику $\sigma = \sigma_6 + \sigma_1$, гдје је σ_0 нулта апроксимација. Замјеном $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ у (97,5) налазимо за σ_1 једначину:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = \alpha\sigma_0^2 = \frac{\alpha}{p^2}(1 + e\cos\varphi)^2 = \frac{\alpha}{p^2}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e\cos\varphi + \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi\right].$$

Од свих чланова из заграде на десној страни само други члан доводи до примјетне промјене орбите — захваљујући резонанцији (рјешењем хомогене једначине $\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}+\sigma_1=0$) он доводи до ефекта, који се непрекидно повећава. Задржавајући само тај члан, налазимо за σ парцијални интеграл нехомогене једначине

$$\sigma_1=\frac{\alpha e}{p^2}\varphi\sin\varphi.$$

На тај начин, у траженој апроксимацији је

$$\sigma=\frac{1}{r}=\frac{1}{p}\left(1+e\cos\varphi+\frac{\alpha e}{p}\varphi\sin\varphi\right)\approx\frac{1}{p}\left[1+e\cos\varphi\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\right]. \quad (97,6)$$

Одавде видимо, да њутновска елипса ротира; за вријеме једног обрта планете перихел њене орбите помјери се за[1])

$$\delta\varphi=\frac{2\pi\alpha}{p}=\frac{6\pi\, km'}{c^2a\,(1-e^2)}. \quad (97,7)$$

Посматрајмо, даље, пут зрака свјетлости у централно-симетричном гравитационом пољу. Тај пут се одређује једначином ајконала (85,10):

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}=0,$$

која се од *Hamilton-Jacobi*-еве једначине разликује само по томе, што у посљедњој треба ставити $m=0$. Према томе, за трајекторију зрака можемо одмах написати, стављајући у (97,4) $m=0$:

$$\varphi=\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2M^2}-\frac{e^\nu}{r^2}}} \quad (97,8)$$

(умјесто енергије честице $\mathcal{E}_0=-\frac{\partial S}{\partial t}$ сада пишемо фреквенцију свјетлости $\omega_0=-\frac{\partial\psi}{\partial t}$).

За испитивање те трајекторије, као и у претходном случају напишимо (97,8) у облику диференцијалне једначине:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)=\frac{\omega_0^2}{c^2M^2}-\sigma^2+\frac{2\,km'}{c^2}\sigma^3$$

или, диференцирањем по φ и поновним увођењем константе $\alpha=3km'/c^2$,

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=-\sigma+\alpha\sigma^2. \quad (97,9)$$

---

[1]) Нумеричка вриједност тога помјерања одређеног формулом (97,7), за Меркур и Земљу износе респективно 43,0″ и 3,8″ у сто година. Астрономска мјерења дају вриједности 42,6″ ± 0,9″ и 4,6″ ± 2,7″ у савршеном слагању са теоријом.

Изостављајући мали члан αc^2, налазимо у нултој апроксимацији

$$\sigma = \frac{\cos\varphi}{R}$$

(са R смо означили ω_0/cM), тј. праву $r = \frac{R}{\cos\varphi}$, која пролази на растојању R од координатног почетка, За одређивање слиједеће апроксимације ставимо у (97,9) $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$. Тада за σ_1 налазимо једначину:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = \alpha\sigma_0^2 = \frac{\alpha}{R^2}\cos^2\varphi.$$

Парцијални интеграл ове једначине је $\sigma_1 = \frac{\alpha}{3R^2}(1 + \sin^2\varphi)$, па према томе, за трајекторију зрака добивамо једначину:

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{\cos\varphi}{R} + \frac{\alpha}{3R^2}(1 + \sin^2\varphi)\cdot \qquad (97,10)$$

Одредимо оријентацију те криве на великим растојањима од центра. За то ставимо $r = \infty$ или $\sigma = 0$ и из тако добивене једначине тражимо φ у облику: $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\Delta\varphi$ с малим $\Delta\varphi$ [имајући у виду, да је у (97,10) други члан на десној страни мали]. Са тачношћу до величина вишег реда то даје

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi = \pm\frac{2\alpha}{3R}\cdot$$

На тај начин, трајекторија зрака претставља криву с асимптотама, међу којима је угао

$$\Delta\varphi = \frac{4\alpha}{3R} = \frac{4km'}{c^2R}\cdot \qquad (97,11)$$

Дакле, свјетлосни зрак, који пролази кроз централно-симетрично гравитационо поље на растојању R од центра, скреће, а то скретање је одређено наведеном формулом¹).

§ 98. Псеудотензор енергије-импулса

У отсуству гравитационог поља закон о одржавању енергије и импулса материје (заједно с електромагнетним пољем) изражава се једначином (31,4) $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = 0$. Као уопштење те једначине за случај присуства гравитационог поља служи једначина (93,6)

$$T^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(T^k_i\sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl} = 0. \qquad (98,1)$$

---

¹) За зрак, који пролази поред Сунца биће $\Delta\varphi = 1{,}75''$.

Али у оваквом облику, уопште узевши, ова једначина не изражава закон о одржању ма чега¹). Та околност у вези је са тим, што се у гравитационом пољу мора одржавати 4-импулс не само саме супстанце, него 4-импулс супстанце заједно с гравитационим пољем. Посљедњи није урачунат у изразу за T_i^k.

За налажење одржаваног тоталног 4-импулса гравитационог поља заједно с материјом која се налази у њему, поступићемо на слиједећи начин²). Узмимо координатни систем на тај начин, да у некој задатој тачки простор-времена сви први изводи од g_{ik} по координатама буду једнаки нули (сами g_{ik} притом не морају обавезно имати галилејске вриједности). Тада је у тој тачки други члан у једначини (98,1) једнак нули, а у првом се може $\sqrt{-g}$ изнијети испод знака извода, па остаје

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_i^k = 0,$$

или, у контраваријантним компонентама

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0.$$

Величине T^{ik}, које идентично задовољавају ту једначину, могу се написати у облику:

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \eta^{ikl},$$

гдје су η^{ikl} величине антисиметричне по индексима k, l:

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}.$$

Фактички није тешко T^{ik} свести на тај облик. Зато ћемо поћи од једначина поља

$$T^{ik} = \frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R\right),$$

а за R^{ik} имамо, према (91,4):

$$R^{ik} = \frac{1}{2} g^{im} g^{kp} g^{ln} \left\{ \frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l \partial x^n} \right\}$$

---

¹) И заиста, интеграл $\int T_i^k \sqrt{-g}\, dS_k$ одржава се само када је испуњен услов $\frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^k}{\partial x^k} = 0$, а не (98,1). У то се лако увјерити, ако се у криволиниским координатама изведу исти рачуни, који су изведени у § 28 у *Descartes*-овим координатама. Уосталом довољно је просто напоменути, да та рачунања имају чисто формални карактер, који није у вези с тензорским својствима одговарајућих величина, као ни доказ *Gauss*-ове теореме, која у криволиниским координатама има исти облик (81,19), као и у *Descartes*-овим.

²) Може се појавити мисао да се на гравитационо поље примјени формула (93,3) стављајући у њу $\Lambda = \frac{c^4}{16\pi k} G$. Међутим, подвлачимо, да се та формула односи само на физичке системе, које се описују величинама q, које се разликују од g_{ik}. Према томе, она се не може примјенити на гравитационо поље, које дефинишу саме величине g_{ik}. Унапред напомињемо, да бисмо замјеном у (93,3) G умјесто Λ добили једноставно нулу, као што се то директно види из релације (94,3) и једначине поља у вакууму.

(напомињемо, да су у посматраној тачки све $\Gamma^i_{kl} = 0$). Послије простих трансформација тензор T^{ik} може се свести на слиједећи облик:

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{c^4}{16\pi k}\frac{1}{(-g)}\frac{\partial}{\partial x^m}\Big[(-g)\,(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km})\Big]\right\}.$$

Израз који се налази у великој загради је антисиметричан по индексима k, l и претставља величину, коју смо горе означили са η^{ikl}. Будући да су први изводи од g_{ik} у посматраној тачки једнаки нули, то се фактор $\frac{1}{(-g)}$ може изнијети испод знака извода $\frac{\partial}{\partial x^l}$. Уведимо ознаку

$$h^{ikl} = \frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^m}\Big[(-g)\,(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km})\Big]; \tag{98,2}$$

ове величине, такође, су антисиметричне по индексима k, l:

$$h^{ikl} = -h^{ilk}. \tag{98,3}$$

Тада се може написати

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} = (-g)\,T^{ik}.$$

Ова релација, која је изведена претпоставком $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = 0$ престаје да важи при прелазу на произвољни координатни систем. У општем случају разлика $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} - (-g)\,T^{ik}$ није једнака нули. Означићемо је са $(-g)t^{ik}$. Тада ћемо према дефиницији имати:

$$(-g)\,(T^{ik} + t^{ik}) = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}. \tag{98,4}$$

Величине t^{ik} симетричне су по индексима i, k:

$$t^{ik} = t^{ki}. \tag{98,5}$$

То се види непосредно из њихових дефиниција, јер су и тензор T^{ik} и изводи $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$ симетричне величине[1]). Ако се T^{ik} изрази помоћу R^{ik} према једначинама гравитације, и ако се примјени израз (98,2) за h^{ikl}, послије довољно дугог рачунања, које овдје нећемо износити, може се добити слиједећи израз за t^{ik}:

$$\begin{aligned} t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k}\Big\{&(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp})(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) + \\ &+ g^{il}g^{mn}(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np}) + \\ &+ g^{kl}g^{mn}(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np}) + \\ &+ g^{lm}g^{np}(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np})\Big\}. \end{aligned} \tag{98,6}$$

---

[1]) Управо због тога смо горе и изнијели $(-g)$ испод знака извода по x^l у изразу за T^{ik}. У противном случају било би $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$, а зато и t^{ik}, несиметрично по i, k.

Битно својство величина t^{ik} састоји се у томе, што не сачињавају тензор. То се види по томе, што се у $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$ налазе прости, а не коваријантни изводи. Међутим t^{ik} се изражавају помоћу величина Γ^i_{kl}, а посљедње се понашају као тензор у односу на линеарну трансформацију координата (в. § 83). Исто то се односи, дакле, и на t^{ik}.

Из дефиниције (98,4) слиједи, да се за збир $T^{ik}+t^{ik}$ идентично задовољавају једначине

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)(T^{ik}+t^{ik})=0. \tag{98,7}$$

То значи, да важи закон о одржању величина

$$P^i=\frac{1}{c}\int(-g)(T^{ik}+t^{ik})\,dS_k. \tag{98,8}$$

У отсуству гривитационих поља у галилејским координатама је $t^{ik}=0$ и написани интеграл прелази у $\frac{1}{c}\int T^{ik}dS_k$, тј. у 4-импулс материје. Према томе величине (98,8) морају бити идентичне с тоталним 4-импулсом материје скупа с гравитационим пољем. Укупност величина t^{ik} назива се псеудотензор енергије-импулса гравитационог поља.

Интегрирање у (98,8) може се вршити по ма којој бесконачној хиперповршини, која у себи садржи читав тродимензионални простор (в. § 28 и § 31). Ако се као таква узме хиперповршина $x^0=\text{const.}$, онда се P^i може написати у облику тродимензионалног просторног интеграла

$$P^i=\frac{1}{c}\int(-g)(T^{i0}+t^{i0})\,dV. \tag{98,9}$$

Величина $(-g)(T^{00}+t^{00})$ може се, као обично, назвати „густина“ тоталне енергије материје и поља, а величине $\frac{1}{c}(-g)(T^{\alpha 0}+t^{\alpha 0})$ — компоненте густине тоталног импулса. Посљедње (помножене са c^2) у исто вријеме претстављају компоненте густине флукса енергије, а $(-g)(T^{\alpha\beta}+t^{\alpha\beta})$ су компоненте густине флукса импулса. У отсуству материје*) је $T^{ik}=0$ тако, да је густина енергије гравитационог поља $(-g)\,t^{00}$, а густина импулса је $\frac{1}{c}(-g)\,T^{0\alpha}$.

Врло је важна та чињеница, да се тотални 4-импулс материје и поља изражава у облику интеграла од величина $(-g)(T^{ik}+t^{ik})$, које су симетричне по индексима i, k. Она показује, да важи закон о одржавању момента импулса, који је одређен (в. § 31) са:

$$M^{ik}=\int(x^i dP^k-x^k dP^i)=$$

$$=\int\{x^i(T^{kl}+t^{kl})-x^k(T^{il}+t^{il})\}(-g)\,dS_l. \tag{98,10}$$

---

*) Треба: масе (Пр. пр.).

На тај начин у гравитационом пољу продужава се важење закона о одржању тоталног момента импулса¹).

Одабирањем координатног система, који је галилејски у датом елементу запремине, може се удесити да све t^{ik} у ма којој тачки простор-времена буду једнаке нули (па су притом једнаке нули све Γ^{i}_{kl}). С друге стране, могу се добити t^{ik} који нијесу једнаки нули у еуклидном простору, тј. у отсуству гравитационог поља, ако се једноставно узму криволиниске координате умјесто декартовских. На тај начин, у сваком случају нема смисла говорити о одређеној локализацији енергије гравитационог поља у простору. Ако је у некој свјетској тачки тензор $T^{ik}=0$, онда то важи и у ма ком другом систему референције, тако да можемо рећи, да у тој тачки нема материје*) или електромагнетног поља. Напротив, на основу тога, што је псеудотензор једнак нули у некој тачки у једном систему референције, никако не слиједи, да то исто важи и за други систем референције, па према томе нема смисла говорити о томе, да ли на датом мјесту постоји гравитациона енергија или не постоји. То потпуно одговара томе, да се подесним избором координата може „уништити" гравитационо поље у датом елементу запремине, при чему према горе изложеном истовремено нестаје и псеудотензора t^{ik} у том елементу.

Величине P^{i} — 4-импулс поља и материје — имају потпуно одређени смисао и показују се као независне од избора система референције, и то баш у таквој мјери, како је то неопходно на основу физичких резоновања. Издвојимо око посматраних маса дио простора толико велик, да се може сматрати, да изван њега не постоји гравитационо поље. У четвородимензионалном простор-времену то подручје током времена прорезује „канал". Изван тога „канала" нема поља, тако да је 4-простор—раван. У вези са тим, код израчунавања енергије и импулса поља, очевидно треба одабрати четвородимензионални координатни систем тако, да би изван „канала" он прелазио у галилејски систем и сви t^{ik} били једнаки нули. Наравно, систем референције се тим условом никако не одређује једнозначно; он може унутра канала бити још произвољно изабран. У пуној сагласности са физичким смислом величина P^{i}, оне се, међутим, показују сасвим независне од избора координатног система унутар „канала". И заиста, посматрајмо два координатна система, који су различити унутар „канала", али изван „канала" прелазе у један исти галилејски систем, и упоредимо вриједности 4-импулса P^{i} и P'^{i} у тим системима у одређеним моментима „времена" x^{0} и x'^{0}. Узмимо трећи координатни систем, који се унутар „канала" у моменту x^{0} поклапа с првим системом, у моменту x'^{0} — са другим, а изван „канала" са истим тим галилејским. Но на основу закона о одржању енергије и импулса величине P^{i} су константе $\left(\frac{\partial P^{i}}{\partial x^{0}}=0\right)$. То важи како у првим двама, тако и у трећем координатном систему. Одавде слиједи $P^{i}=P'^{k}$, што је и требало доказати.

---

¹) Неопходно је напоменути, да добивени израз за 4-импулс материје и поља није и једини могући; напротив, могу се на бесконачан број начина (види на пр. задатак из овог параграфа) наћи такви изрази, који би у отсуству поља прелазили у T^{ik}, а при интегрирању по dS_k давали би величине које се одржавају. Иако су, наравно, ти интеграли, тј. тотална енергија и импулс материје и поља притом међусобно једнаки, ипак ће „распоред густине" енергије и импулса у простору бити различити. Ипак је избор, који смо извршили, једини избор, код којег је псеудотензор енергије-импулса поља симетричан и зато даје могућност да се формулише закон о одржању момента импулса (такву ситуацију имали смо у суштини већ у § 31).

* Треба: масе (Прим. прев.).

Горе је напоменуто, да су величине t^{ik} тензори у односу на линеарне трансформације координата. Према томе P^i сачињавају вектор у односу на такве трансформације, специјално у односу на *Lorentz*-ове трансформације. Замјеном (98,4) у (98,8) налазимо

$$P^i = \frac{1}{c}\int \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}\, dS_k = \frac{1}{2c}\int \left(dS_k \frac{\partial}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial}{\partial x^k} \right) h^{ikl}.$$

Овај интеграл може се трансформирати у интеграл по обичној површини помоћу (6,12):

$$P^i = \frac{1}{c}\oint h^{ikl}\, df^*_{kl}. \qquad (98,11)$$

Ако се као површина интегрирања у (98,8) узме хипер-површина $x^0 = \text{const.}$, онда је у (98,11) површина интегрирања чисто просторна обична површина[1]) На тај начин налазимо израз за 4-импулс материје и гравитационог поља у неком подручју тродимензионалног простора у облику интеграла по површини, која обухвата ту запремину

$$P^i = \frac{1}{c}\oint h^{i0\alpha}\, df_\alpha. \qquad (98,12)$$

Приликом примјене ове формуле на израчунавање тоталног 4-импулса материје и поља, треба имати у виду, да саобразно са горе изложеним, систем просторних координата мора бити узет тако, да у бесконачности, гдје је простор еуклидни, тај систем прелази у *Descartes*-ов систем.

Примјењујући формулу (98,12) на изоловани систем тијела, која се стално налазе близу координатног почетка, можемо узети површину интегрирања довољно удаљену од тијела, тако да се на њој гравитационо поље одређује изразом (96,14) за интервал. Израчунавање доводи до резултата

$$P^\alpha = 0, \quad P^0 = mc, \qquad (98,13)$$

гдје је m укупна маса система. Овај резултат се наравно и очекивао, јер он изражава чињеницу једнакости такозване „тешке“ и „инертне“ масе („тешка“ маса назива се маса, која дефинише гравитационо поље проузроковано тијелом; то је она маса, која се налази у изразу за интервал у гравитационом пољу, или специјално у *Newton*-овом закону. „Инертна“ маса одређује однос међу импулсом и енергијом тијела и, напосе, енергија мировања тијела једнака је производу те његове масе и c^2).

У случају константног гравитационог поља испоставља се, да је могуће извести једноставан израз за тоталну енергију материје заједно с пољем у облику интеграла само по простору, који материја заузима. Тај израз

---

[1]) df^*_{kl} је „нормалан“ елемент површине, који је повезан с „тангенцијалним“ елементом df^{ik} помоћу (6,9): $df^*_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm}\, df^{lm}$. На површини која обухвата хипер-површину, нормалну на оси x^0 нису једнаке нули само компоненте df^{lm} гдје је $l, m = 1, 2, 3$, па према томе df^*_{ik} има само компоненте са једним од i или k једнаким нули. Компоненте $df^*_{0\alpha}$ нису ништа друго, него компоненте тродимензионалног елемента обичне површине, који означавамо просто са df_α.

може се добити, на примјер, полазећи од слиједећег идентитета, који важи, као што је лако провјерити, када ни једна величина не зависи од x^0 ¹):

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g}\, g^{i0} \Gamma^{\alpha}_{i0}$$

Интегрирањем $R_0^0 \sqrt{-g}$ по (тродимензионалном) простору и примјеном тродимензионалне *Gauss*-ове теореме, добивамо

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = \oint \sqrt{-g}\, g^{i0} \Gamma^{\alpha}_{0i}\, df_{\alpha}.$$

Узевши довољно удаљену површину интегрирања и користећи се на њој израза за g^{ik}, које даје формула (96,14), послије једноставног рачуна добивамо:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = -\frac{4\pi k}{c^2} m,$$

тј. написани интеграл је једнак $-\frac{4\pi k}{c^3} P^0$. Узимајући такође у обзир, да је према једначинама поља

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_0^0 - \frac{1}{2} T\right) = \frac{4\pi k}{c^4}\left(T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3\right),$$

добивамо тражену формулу

$$P^0 = mc = \frac{1}{c} \int \left(T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 - T_0^0\right) \sqrt{-g}\, dV. \qquad (98,14)$$

Ова формула приказује тоталну енергију материје и константног гравитационог поља, тј. укупну масу тијела, помоћу тензора енергије-импулса само материје (*R. Tolman*, 1930). Напомињемо, да бисмо у случају централне симетрије поља имали за исту величину још и други израз — формулу (96,17).

---

¹) Из (91,10) имамо

$$R_0^0 = g^{0i} R_{i0} = g^{0i}\left(\frac{\partial \Gamma^l_{i0}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{i0} \Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{0m}\right),$$

а помоћу (84,5) и (84,8) налазимо, да се тај израз може написати овако:

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{0i} \Gamma^l_{i0}\right) + g^{im} \Gamma^0_{ml} \Gamma^l_{i0}.$$

Помоћу исте релације (84,8) лако се увјерити у то, да је други члан на десној страни идентично једнак $-\frac{1}{2} \Gamma^0_{lm} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}$ и због тога, што ниједна величина не зависи од x^0, једнак је нули. Напокон, ако из истог разлога замијенимо у првом члану сумирање по l сумирањем по α, добивамо формулу која је изведена у тексту.

Задатак

Наћи израз за тотални 4-импулс материје и гравитационог поља, примјењујући формулу (31,5).

Рјешење. У криволиниским координатама имамо умјесто (31,1) $S = \int \Lambda \sqrt{-g}\, dV dt$ па зато, да би се добила величина која се одржава, треба у (31,5) умјесто Λ писати $\Lambda \sqrt{-g}$, тако да 4-импулс добија облик

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left\{ \Lambda \sqrt{-g}\, \delta_i^k - \sum_l \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, \Lambda)}{\partial \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} \right\} dS_k .$$

Примјењујући ову фомулу на материју, за коју су величине $q^{(l)}$ различите од g_{ik}, може се $\sqrt{-g}$ изнијети испред знака извода, па подинтегрални израз износи $\sqrt{-g}\, T_i^k$, гдје је T_i^k тензор енергије-импулса материје. Приликом примјене написане формуле на гравитационо поље треба ставити $\Lambda = \frac{c^4}{16\pi k} G$, а величине $q^{(l)}$ су компоненте g_{ik} метричког тензора. Тотални 4-импулс поља и материје износи према томе

$$P_i = \frac{1}{c} \int T_i^k \sqrt{-g}\, dS_k + \frac{c^3}{16\pi k} \int \left[G \sqrt{-g}\, \delta_i^k - \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \frac{\partial (G \sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \right] dS_k .$$

Коришћењем израза (92,3) за G, ова формула може се трансформирати на облик

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left\{ T_i^k \sqrt{-g} + \frac{c^4}{16\pi k} \left[G \sqrt{-g}\, \delta_i^k + \Gamma^k_{lm} \frac{\partial (g^{lm} \sqrt{-g})}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ml} \frac{\partial (g^{mk} \sqrt{-g})}{\partial x^i} \right] \right\} dS_k .$$

Други члан у великој загради приказује 4-импулс гравитационог поља у отсуству материје*). Подинтегрални израз није симетричан према индексима i, k, па зато не омогућава формулисање закона одржања момента импулса.

§ 99. Гравитациони таласи

Посматрајмо слабо гравитационо поље у вакууму. У слабом пољу метрика простор-времена је „скоро еуклидска", тј. може се узети такав систем референције, у коме су компоненте метричког тензора g_{ik} скоро једнаке својим галилејским вриједностима, које ћемо означити овако:

$$g^{(0)}_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \; g^{(0)}_{\alpha 0} = 0, \; g_{00} = -1. \qquad (99,1)$$

Можемо, дакле, g_{ik} написати у облику:

$$g_{ik} = g^{(0)}_{ik} + h_{ik}, \qquad (99,2)$$

гдје је h_{ik} мала поправка, која дефинише гравитационо поље.

За мале h_{ik} компоненте гравитационог поља Γ^i_{kl}, које су изражене помоћу извода од g_{ik}, такође су мале. Занемарујући степене h_{ik} више од првог,

---

*) Треба: масе (честица). (Прим. прев.).

можемо у тензору R_{iklm} (91,4) задржати само чланове у првој загради:

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l}+\frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m}-\frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l}-\frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m}\right). \qquad (99,3)$$

За упрошћени тензор R_{ik} имамо са истом тачношћу:

$$R_{ik}=g^{lm} R_{limk} \approx g^{(0)lm} R_{limk},$$

или

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\left(-g^{(0)lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}+\frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^k \partial x^l}+\frac{\partial^2 h_k}{\partial x^i \partial x^l}-\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}\right), \qquad (99,4)$$

гдје је $h_i^k=g^{(0)lk} h_{il}, \quad h=h_i^i$.

Систем референције узели смо на тај начин, да се g_{ik} мало разликује од $g_{ik}^{(0)}$. Но тај се услов одржава и за ма коју бесконачно малу трансформацију координата, тако да се за h_{ik} може поставити још четири (према броју координата) услова, а да се приликом тога не ремете услови да њихове величине буду мале.

Узмимо за те допунске услове једначине1)

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k}=0, \quad \psi_i^k=h_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k h. \qquad (99,5)$$

Тада се посљедња три члана у R_{ik} међусобно крате, па налазимо

$$R_{ik}=-\frac{1}{2} g^{(0)lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}.$$

На тај начин, једначине (94.7) гравитационог поља у вакууму добивају облик

$$\Box\, h_i^k=0, \qquad (99,6)$$

гдје је $\Box$ *D'Alembert*-ов оператор.

$$\Box=-g^{(0)lm}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m}=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Ово је обична таласна једначина. На тај начин, гравитациона поља простиру се, као и електромагнетна, у вакууму брзином свјетлости.

---

1) Ако се трансформација, која доводи до h_i^k које испуњавају те услове, тражи у облику $x'^i=x^i+\xi^i$ (ξ^i су мале величине истог реда, као и h_i^k), онда се лако увјерити, да функције ξ^i те трансформације морају задовољити једначине

$$\Box\,\xi^i=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(h_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k h\right),$$

гдје је $\xi_i=g_{ik}^{(0)}\xi^k$. Одавде се види, да се координатни систем, који испуњава услов (99,5) може још подвргнути ма којој малој трансформацији $x'^i=x^i+\xi^i$, гдје за ξ^i важи једначина $\Box\,\xi^i=0$. Осим тога, координатни систем може очевидно бити подвргнут ма којој *Lorentz*-овој трансформацији.

Посматрајмо равни гравитациони талас. Код таквог таласа поље се мијења само по једном правцу у простору. Нека тај правац буде оса $x^1 = x$. Једначине (99,6) добивају тада облик:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h_i^k = 0, \tag{99,7}$$

а њихово рјешење је нека функција од $x \pm ct$ (§ 45).

Посматрајмо талас, који се простире у позитивном смјеру осе X. Све величине h_i^k у њему су функције од $x - ct$. Допунски услови (99,5) у том случају дају $\dot{\psi}_i^1 - \dot{\psi}_i^0 = 0$, гдје тачка над словом означава диференцирање по t. Те једначине могу се интегрирати једноставно изостављајући знак диференцирања. Може се ставити, да су интеграционе константе једнаке нули, јер се овде интересирамо (као и у случају електромагнетних таласа) само промјенљивим дијелом поља. Тако се међу појединим компонентама ψ_i^k добивају релације:

$$\psi_1^1 = \psi_1^0, \quad \psi_2^1 = \psi_2^0, \quad \psi_3^1 = \psi_3^0, \quad \psi_0^1 = \psi_0^0. \tag{99,8}$$

Као што је на страни (302) у напомени речено, услови (99,5) још не дефинишу једнозначно систем референције. Наиме, ми још можемо трансформирати координате у облику $x'^i = x^i + \xi^i(x - ct)$. Таква трансформација не ремети услове (99,5), јер ξ^i задовољавају једначину $\Box\,\xi^i = 0$ (в. исту напомену). Те трансформације се могу употребљавати тако да постану једнаке нули четири величине ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0, $\psi_2^2 + \psi_3^3$. Из једначина (99,8) слиједи, да су притом једнаке нули и компоненте ψ_1^1, ψ_2^1, ψ_3^1, ψ_0^0. Што се тиче преосталих величина ψ_2^3, $\psi_2^2 - \psi_3^3$, — оне не могу постати једнаке нули никаквим избором система референције, пошто се, као што се можемо увјерити трансформацијом $x'^i = x^i + \xi^i(x - ct)$, те компоненте уопште не мијењају. Напомињемо, да је на тај начин једнако нули и $\psi = \psi_i^i$, па је зато $\psi_i^k = h_i^k$.

На тај начин, равни гравитациони талас одређује се двјема величинама, наиме са h_{23}, $h_{22} - h_{33}$. Другим ријечима, гравитациони таласи су трансверзални таласи, чија се поларизација одређује симетричним тензором другог реда у равни YZ, а збир његових дијагоналних чланова $h_{22} + h_{33}$ једнак је нули.

Гравитациони таласи посједују неку енергију, чија је „густина" једнака $t^{00}(-g)$. Као и свака енергија, и она проузрокује неко гравитационо поље. На тај начин, гравитациони талас сам око себе проузрокује неко допунско гравитационо поље. То је поље величина вишег реда (и то другог) у односу на поље самог таласа, јер је његова енергија другог реда [извод $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ је првог реда по h_{ik}, па је према (98.6) t^{ik} другог реда].

Израчунајмо флукс енергије у равном гравитационом таласу. У претходном параграфу видјели смо, да се флукс енергије гравитационог поља одређује величинама $ct^{0\alpha}(-g)$. Код таласа, који се простире дуж осе x^1, очевидно није једнака нули само компонента t^{10}.

Као што је познато, псеудотензор t^{ik} је мала величина другог реда. Морамо израчунати t^{10} само с том тачношћу. Једноставан рачун помоћу опште формуле (98,6), а користећи се чињеницом, да у равном таласу нису једнаке нули само компоненте $h_{23}, h_{22} = -h_{33}$ тензора h_{ik}, доводи нас до резултата:

$$t^{01} = -\frac{c^4}{32\pi k}\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x}\frac{\partial h_{22}}{\partial t} + \frac{\partial h_{33}}{\partial x}\frac{\partial h_{33}}{\partial t} + 2\frac{\partial h_{23}}{\partial x}\frac{\partial h_{23}}{\partial t}\right).$$

Ако су све величине функције само од $x - ct$, онда одавде добивамо дефинитивно

$$t^{01} = \frac{c^3}{32\pi k}\left[\dot{h}_{23}^2 + \left(\frac{\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33}}{2}\right)^2\right]. \qquad (99,9)$$

§ 100. Слабо гравитационо поље

Овдје ћемо посматрати слабо гравитационо поље, изазвано произвољним тијелима, која се крећу малим брзинама у односу на брзину свјетлости.

Због присуства супстанце једначине гравитационог поља разликоваће се од просте таласне једначине облика $\square h_i^k = 0$ (99,6) по члановима на десној страни једначине, који потичу од тензора енергије-импулса супстанце. Написаћемо те једначине у облику:

$$\frac{1}{2}\square\,\psi_i^k = -\frac{8\pi k}{c^4}\tau_i^k, \qquad (100,1)$$

гдје смо умјесто h_i^k увели овдје за нас подесније величине $\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h$, а τ_i^k претставља допунске изразе, који се добивају у тачним једначинама $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k$ при прелазу на случај слабих поља са посматраном апроксимацијом. Лако се увјерити, да се компоненте τ_0^0 и τ_α^0 добивају директно из одговарајућих компонената T_i^k, када се из њих издвоје мале величине оног реда који нас интересује. Што се пак тиче компонената τ_β^α, оне, поред чланова који се добивају из T_β^α, садрже и чланове мале величине другог реда из $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R$.

Величине ψ_i^k задовољавају услов (99,5), $\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0$. Из (100,1) слиједи, да иста таква једначина важи и за τ_i^k.

$$\frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0. \qquad (100,2)$$

Ова једначина замјењује овдје општу релацију $T_{i;k}^k = 0$.

Одредићемо, прије свега, метрику простор-времена у слабом гравитационом пољу на релативно не сасвим великим растојањима од система тијела, која то поље изазивају (растојања, која су велика у односу на димензије система a, али мала у односу на дужине гравитационих таласа, које систем зрачи, $\lambda \sim ac/v$). У првој апроксимацији могу се у једначинама (100,1) занемарити чланови са изводима по времену $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi_i^k}{\partial t^2}\right)$, који садрже $1/c^2$, а од свих компонената τ_i^k може се сматрати различита од нуле само компонента $\tau_0^0 = -\mu c^2$ [в. (95,1)], која садржи c^2 (док остале садрже први или други степен брзина тијела). Тада добивамо једначине

$$\Delta\psi_\alpha^\beta = 0, \quad \Delta\psi_0^\alpha = 0, \quad \Delta\psi_0^0 = \frac{16\pi k}{c^2}\mu. \qquad (100,3)$$

Морамо тражити рјешења тих једначина, која су у бесконачности једнака нули (галилејска метрика). Према томе, из првих двију једначина слиједи $\psi_\alpha = 0$, $\psi_0^\alpha = 0$. Упоређењем треће једначине са једначином (95,2) за *Newton* ов гравитациони потенцијал φ, налазимо $\psi_0^0 = \frac{4\varphi}{c^2}$. Одавде налазимо за компоненте тензора $h_i^k = \psi_i^k - \frac{1}{2}\psi\delta_i^k$ слиједеће вриједности:

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2}\varphi\delta_\alpha^\beta, \quad h_0^\alpha = 0, \quad h_0^0 = \frac{2}{c^2}\varphi, \qquad (100,4)$$

или за интервал:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2}\varphi\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,. \qquad (100,5)$$

Други члан овдје дефинише просторну метрику у слабом гравитационом (*Newton*-овом) пољу.

Видимо, да поправни чланови првог реда по φ постоје не само у g_{00}, него и у $g_{\alpha\beta}$. У § 96 већ је наведено, да у једначинама кретања честица (са брзином $v \ll c$) поправни чланови у $g_{\alpha\beta}$ доводе до малих величина вишег реда од чланова који потичу из g_{00}. У вези с тим били смо у стању, да у § 86 одредимо само h_{00}.

Што се тиче мјешовитих компонената g_0^α метричког тензора, оне су у посматраној апроксимацији остале једнаке нули. У слиједећој апроксимацији имамо за одређивање величина $g_0^\alpha = h_0^\alpha = \psi_0^\alpha$ једначину

$$\Delta g_{\alpha 0} = -\frac{16\pi k}{c^4}\tau_{\alpha 0}\,.$$

Увртићемо овдје $\tau_{\alpha 0} = \mu c^2 u_0 u_\alpha \cong -\mu c v_\alpha$, гдје је $\mathbf{v}$ обична тродимензионална брзина, и увешћемо тродимензионални вектор $\mathbf{g}$ са компонентама $g_\alpha = -\frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}} \cong g_{\alpha 0}$. Тада добивамо једначину

$$\Delta\mathbf{g} = \frac{16\pi k}{c^3}\mu\mathbf{v}. \qquad (100,6)$$

За велика растојања (у односу на димензије тијела) њено рјешење може се написати непосредно по аналогији са рјешењем (43,3) једначине (42,2):

$$\mathbf{g} = -\frac{2k}{c^3R_0^3}(\mathbf{M}\times\mathbf{R}_0), \tag{100,7}$$

гдје је $\mathbf{M} = \int(\mathbf{r}\times\mu\mathbf{v})\,dV$ момент импулса тијела.[1])

У 1. задатку у § 88 показано је, да у гравитационом пољу са $g_{0\alpha}$ различитим од нуле дјејствује на честицу „*Coriolis*-ова сила“ и то исто таква сила, која би дјејствовала на честицу тијела, које ротира са угаоном брзином $\boldsymbol{\Omega} = \frac{c}{2}\sqrt{h}\,\operatorname{rot}\mathbf{g}$. Према томе можемо казати, да у гравитационом пољу које изазива ротирајуће тијело (с моментом импулса $\mathbf{M}$), на честицу дјејствује сила која је еквивалентна *Coriolis*-овој сили при ротацији са угаоном брзином

$$\boldsymbol{\Omega} \cong \frac{c}{2}\operatorname{rot}\mathbf{g} = \frac{k}{c^2R_0^5}\left[R_0^2\mathbf{M} - 3\mathbf{R}_0(\mathbf{M}\mathbf{R}_0)\right]$$

$$[h\cong 1,\ \ \mathbf{g}\ \text{из}\ (100,7)].$$

Задатак

Одредити дјејство за гравитационо поље у *Newton*-овој апроксимацији.

Рјешење. Помоћу g_{ik} из (100,5) израчунавамо према општој формули (92,3): $G = -\frac{4}{c^2}(\nabla\varphi)^2$, па је дјејство за поље:

$$S_g = -\frac{1}{4\pi k}\int(\nabla\varphi)^2\,dV dt.$$

Укупно дјејство за поље заједно с масама распоређених у простору са густином μ износи:

$$S = \int\!\!\int\left[\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi - \frac{1}{4\pi k}(\nabla\varphi)^2\right]dV dt.$$

Лако се увјерити, да варирање S по φ доводи до *Poisson*-ове једначине (95,2).

§ 101. Зрачење гравитационих таласа

Израчунавање енергије коју зраче покретна тијела у облику гравитационих таласа, изискује одређивање гравитационог поља у „таласној зони“, тј. на растојањима, која су велика у односу на дужине емитованих таласа.

Сва израчунавања су принципијелно потпуно аналогна израчунавањима, која смо вршили за електромагнетне таласе. Једначине (100,1) слабог гра-

---

[1]) Ако се израчуна тотални момент гравитационог поља и материје према општој формули (98,10) са $g_{0\alpha}$ из (100,7), добива се управо величина $\mathbf{M}$. То показује да формула (100,7) правилно одређује $g_{0\alpha}$ далеко од тијела чак и у случају, када се близу тијела гравитационо поље не може сматрати слабим. Ипак, притом је $\mathbf{M}$ момент импулса не само за сама тијела, него и за тијела заједно са гравитационим пољем (ако је поље свуда слабо, онда се његов момент може занемарити).

витационог поља по облику се поклапају са једначинама ретардованих потенцијала (§ 62). Према томе њихово опште рјешење може се одмах написати у облику

$$\psi_i^k = \frac{4k}{c^4}\int \left(\tau_i^k\right)_{t-\frac{R}{c}} \frac{dV}{R}. \tag{101,1}$$

Будући да су брзине свих тијела у систему мале, може се поље на великим растојањима од система написати (в. §§ 66 и 67):

$$\psi_i^k = \frac{4k}{c^4 R_0}\int \left(\tau_i^k\right)_{t-\frac{R_0}{c}} dV, \tag{101,2}$$

гдје је R_0 растојање од координатног почетка, који се налази ма гдје унутра система. Због краткоће изоставићемо индекс $t-\dfrac{R_0}{c}$ у подинтегралним изразима.

За израчунавање тих интеграла употријебимо једначине (100,2). Изостављајући индексе код τ_i^k и одвајајући просторне и временске компоненте, напишимо (100,2) у облику

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{\alpha 0}}{d x^0} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{00}}{\partial x^0} = 0. \tag{101,3}$$

Послије множења прве једначине са x^β интегрирајмо по цијелом простору

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{\alpha 0} x^\beta dV = \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta dV = \int \frac{\partial(\tau_{\alpha\gamma} x^\beta)}{\partial x^\gamma}\partial V - \int \tau_{\alpha\beta} dV.$$

Како је у бесконачности $\tau_{ik}=0$, отпада први интеграл на десној страни, јер је трансформиран према *Gauss*-овој теореми. Узимајући полузбир преостале једначине и исте једначине с транспонираним индексима, налазимо:

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\int \left(\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha\right) dV.$$

Помножимо затим другу од једначина (101,3) са $x^\alpha x^\beta$ и поново интегрирајмо по цијелом простору. Аналогна трансформација доводи до

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{00} x^\alpha x_\beta dV = -\int \left(\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha\right) dV.$$

Упоређењем добивених резултата налазимо:

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\int \tau_{00} x^\alpha x^\beta dV. \tag{101,4}$$

На тај начин, интеграли од свих $\tau_{\alpha\beta}$ изражени су помоћу интеграла који садрже само компоненту τ_{00}. Али та компонента при датој апроксимацији (као што је речено у § 100) једнака је одговарајућој компоненти T_{oo} тензора T_{ik}.

$$\tau_{00} = -\tau_0^0 = \mu c^2.$$

Замјењујући то у (101,4) и уводећи вријеме $t = x^0/c$ добивамо (101,2) у облику

$$\psi_{\alpha\beta} = \frac{2k}{c^4 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mu x^\alpha x^\beta \, dV. \qquad (101,5)$$

На великим растојањима од система оптерећења талас се може (у малим дјеловима простора) сматрати као равни талас. Према томе, може се израчунати флукс енергије, коју систем зрачи, рецимо у правцу осе x^1, користећи се формулом (99,9).

У формулу (99,9) улазе компоненте $h_{23} = \psi_{23}$ и $h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$. Из (101,5) за њих налазимо изразе:

$$h_{23} = -\frac{2k}{c^4 R_0} \ddot{D}_{23}, \quad h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{c^4 R_0} \left(\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}\right)$$

(тачка означава диференцирање по времену), гдје смо увели тензор

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu \left(3 x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta} x_\gamma^2\right) dV \qquad (101,6)$$

„квадруполног момента“ маса (в. § 95). Дефинитивно добивамо флукс енергије дуж осе x^1 у облику

$$t^{10} = \frac{k}{4\pi c^5 R_0^2} \left[\left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2\right]. \qquad (101,7)$$

Када је познато зрачење у правцу осе x^1, лако је одредити зрачење у произвољном правцу, по коме ћемо јединични вектор означити са **n**. Због тога треба од компонената тензора $\dddot{D}_{\alpha\beta}$ и вектора n_α саставити скалар другог степена по $\dddot{D}_{\alpha\beta}$, који би за $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$ прешао у

$$\dddot{D}_{23}^2 + \left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2.$$

Интензитет зрачења енергије у елемент просторног угла do дефинитивно износи:

$$dI = \frac{k}{4\pi c^5} \left[\frac{1}{4} \left(\dddot{D}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta\right)^2 + \frac{1}{2} \dddot{D}_{\alpha\beta}^2 - \dddot{D}_{\alpha\beta} \dddot{D}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma\right] do. \qquad (101,8)$$

Тотално зрачење у свим правцима, тј. губитак енергије система у јединици времена $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)$ може се наћи, ако се нађе средња вриједност тог флукса по правцима, па затим та вриједност помножи са 4π. Налажење средње вриједности врши се лако помоћу формула које су наведене у напомени на стр. 194, и доводи до слиједећег израза за губитак енергије:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{k}{5c^5} \dddot{D}_{\alpha\beta}^2. \qquad (101,9)$$

Неопходно је напоменути, да је нумеричка вриједност тог губитка енергије, чак и за астрономске објекте, толико мала, да је његов утицај на кретање, чак и за космичке интервале времена, сасвим незнатан (тако за двојне звијезде губитак енергије гравитационим зрачењем током једне године је реда 10^{-12} од њихове тоталне енергије).

Израз за $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ садржи $\frac{1}{c^5}$. То значи, да се губитак енергије изолираног система појављује само при петој апроксимацији по $1/c$. Код прве четири апроксимације енергија система остаје константна. Одавде слиједи, да се систем тијела у гравитационом пољу може описати помоћу *Lagrange*-ове функције с тачношћу до чланова реда v^4/c^4, за разлику од електромагнетног поља, гдје *Lagrange*-ова функција постоји само с тачношћу до чланова другог реда посљедње је у вези с тим, што губитак енергије електромагнетним зрачењем садржи $1/c^3$). Ипак су ефекти, које изазивају ти допунски чланови у *Lagrange*-овој функцији, сасвим незнатни[1]).

Задатак

Два тијела, која се привлаче према *Newton*-овом закону, крећу се по кружним путањама (око њиховог заједничког центра инерције). Одредити брзину приближавања оба тијела, која је условљена губитком енергије зрачењем гравитационих таласа.

Рјешење. Ако су m_1 и m_2 масе тијела, а r њихово међусобно растојање (константно при кретању по кружним путањама), онда израчунавање помоћу (101,9) даје

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt}=\frac{32k}{5c^5}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)^2 r^4\omega^6,$$

гдје је $\omega=\frac{2\pi}{T}$; T период обртања. ω је везано са r помоћу $\omega^2r^3=k\ (m_1+m_2)$. Пошто је $\mathcal{E}=-k\frac{m_1m_2}{2r}$, биће $\dot{r}=-\frac{2r^2}{km_1m_2}\frac{d\mathcal{E}}{dt}$, па дефинитивно добивамо:

$$\dot{r}=-\frac{64\,k^3(m_1+m_2)\,m_1m_2}{5c^5r^3}.$$

§ 102. Изотропни простор

Примијенићемо једначине гравитације на простор, који је свуда потпуно хомоген и изотропан. То значи, да се може узети такво „свјетско“ вријеме, гдје би у сваком датом моменту тога времена просторна метрика била једнака у свим тачкама и у свим правцима. Другим ријечима, простор има

---

[1]) Наводимо, без извођења, израз за *Lagrange*-ову функцију система честица које међусобно дјејствују на гравитациони начин, и то у другој апроксимацији:

$$L=\sum_{A}\frac{m_Av^2{}_A}{2}\left(1-3\sum_{B\neq A}\frac{km_B}{c^2R_{AB}}\right)+\sum_{A}\frac{m_Av^4{}_A}{8c^2}+\sum_{A\neq B}\frac{km_Am_B}{2R_{AB}}+$$
$$+\sum_{\substack{A\neq B\\A\neq C}}\frac{k^2m_Am_Bm_C}{2c^2R_{AB}R_{AC}}+\sum_{A\neq B}\frac{km_Am_B}{2\,c^2R_{AB}}\left(7\,\mathbf{v}_A\mathbf{v}_B+\mathbf{v}_A\mathbf{n}_{AB}\cdot\mathbf{v}_B\,\mathbf{n}_{AB}\right),$$

гдје је $\mathbf{n}_{AB}$ — јединични вектор у правцу радиус-вектора $\mathbf{R}_{AB}$ међу честицама m_A и m_B.

потпуну симетрију. Притом се, наравно, аутоматски претпоставља, да је густина материје (у сваком даном моменту „свјетског" времена) константна у цијелом простору[1]).

Прије свега поставимо просторну метрику изотропног простора у одређеном моменту „свјетског" времена. Другим ријечима, морамо наћи израз за елемент просторног растојања dl помоћу диференцијала координата, тј. одредити компоненте тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ у општем изразу

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{102,1}$$

Тродимензионални метрички тензор означавамо са $\gamma_{\alpha\beta}$ за разлику од четвородимензионалног тензора g_{ik}

Кривина простора потпуно се одређује његовим тродимензионалним тензором кривине, који ћемо означити са $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ за разлику од четвородимензионалног тензора R^i_{klm} (особине тензора $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, наравно, потпуно су аналогне особинама тензора R^i_{klm}). У случају потпуне изотропије мора се $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ изражавати само помоћу метричког тензора $\gamma_{\alpha\beta}$. Лако је видјети, да због особина симетрије $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ (в. § 91) он мора, дакле, имати облик:

$$P^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \lambda\left(\delta^\alpha_\gamma \gamma_{\delta\beta} - \delta^\alpha_\delta \gamma_{\gamma\beta}\right). \tag{102,2}$$

гдје је λ нека константа. Тензор 2. реда $P_{\alpha\beta} = P^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$ износи

$$P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta}, \tag{102,3}$$

а скаларна кривина

$$P = 6\lambda. \tag{102,4}$$

На тај начин видимо, да се особине кривине изотропног простора одређују свега једном константом λ. Према томе, могућна су свега три битно различита случаја просторне метрике: 1) такозвани простор константне позитивне кривине (који одговара позитивним вриједностима λ), 2) простор константе негативне кривине (који одговара вриједностима $\lambda < 0$) и 3) простор са кривином једнаком нули ($\lambda = 0$). Посљедњи од њих претставља равни, тј. еуклидни простор.

При проучавању метрике згодно је полазити од геометриске аналогије посматрајући геометрију изотропног тродимензионалног простора као геометрију на изотропној хипер-површини (у неком фиктивном четвородимензионалном простору[2]). Таква површина је хиперсфера. Тродимензионални простор који њој одговара, простор је позитивне константне кривине. Једначина

---

[1]) Ако се примијене добивени резултати, онда мора бити говора о својствима простора, који се посматра у „великој размјери", занемарујући „локалне" нехомогености, које су изазване скупљањем материје у звијездама и звјезданом систему (такозване вангалактичне маглине или галактике). Тако се под густином масе мора подразумијевати средња маса узета по областима простора, великих размјера у односу на растојања међу маглинама.

Иако данашњи астрономски подаци дају основ за претпоставку о хомогености такве густине, ипак та претпоставка неизбјежно може имати само приближни карактер, па остаје отворено питање, да ли та околност може измијенити чак и квалитативно добивене резултате и, у којој се мјери поклапају са стварношћу чак и битна својства на тај начин добивених рјешења једначина гравитације.

[2]) Разумије се, да овакав простор нема ништа заједничко са четвородимензионалним простор-временом.

хиперсфере с радиусом a у четвородимензионалном простору x_1, x_2, x_3, x_4 гласи:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$

а елемент дужине на њој

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Посматрајући координате x^1, x^2, x^3, као три просторне координате и елиминирајући из dl^2 фиктивну координату x^4 помоћу прве једначине, налазимо елемент просторног растојања у облику

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \qquad (102,5)$$

Из овог израза лако је израчунати константу λ из (102,2). Пошто нам је од раније познато, да $P_{\alpha\beta}$ има облик (102,3) у цијелом простору, довољно је да се израчуна само за тачке, које се налазе близу координатног почетка, гдје је

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}.$$

Како су први изводи од $\gamma_{\alpha\beta}$, а затим и величине $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ у координатном почетку једнаки нули, то се израчунавање по општој формули (91,10) показује врло просто и дефинитивно даје:

$$\lambda = \frac{1}{a^2}. \qquad (102,6)$$

Величина a може се назвати „полупречник кривине" простора. Уведимо умјесто координата x^1, x^2, x^3, одговарајуће „сферне" координате r, θ, φ. Тада елемент дужине добија облик

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2). \qquad (102,7)$$

Координатни почетак, наравно, може се узети у ма којој тачки простора. Дужина кружне периферије у тим координатама је $2\pi r$, а површина сфере $4\pi r^2$.

Дужина, пак, „полупречника" круга (или сфере) је $\int\limits_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}$, тј. већа је од r. На тај начин у таквом простору однос дужине кружне периферије према радиусу мањи је од 2π.

Други згодан облик dl^2 има у „четвородимензионалним сферним координатама" које се добивају, ако се мјесто координате r уведе „угао" χ

према релацији $r = a \sin \chi$ (χ се мијења у границама од 0 до 2π) [1]). Тада је:

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (\sin^2 \theta \, d\varphi^2 + d\theta^2)]. \tag{102,8}$$

Координатом χ мјери се растојање од координатног почетка, које износи $a\chi$. Површина сфере у тим координатама износи $4\pi a^2 \sin \chi$. Видимо, да се удаљавањем од координатног почетка, величина површине сфере повећава, док на растојању $\pi a/2$ не достигне максималну вриједност, која износи $4\pi a^2$. Затим почиње да се смањује док се не трансформира у тачку на „супротном полу“ простора на растојању πa, највећем растојању, које уопште може постојати у таквом простору [наравно, све се то види из (102,7), ако се напомене, да координата r не може имати вриједности веће од a].

Запремина простора с позитивном кривином износи према (102,8):

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} a^3 \sin^2 \chi \sin \theta \, d\chi \, d\theta \, d\varphi,$$

одакле је

$$V = 2\pi^2 a^3. \tag{102,9}$$

На тај начин, простор са позитивном кривином је коначан (али, разумије се, нема граница). Може се рећи да је „затворен сам у себи“.

Интересантно је истаћи, да је у затвореном простору тотално електрично оптерећење једнако нули. И заиста, свака затворена површина у коначном простору са обије своје стране обухвата коначне области простора. Према томе, флукс електричног поља кроз ту површину једнак је с једне стране тоталном оптерећењу, које се налази унутра површине, а с друге стране једнак је оптерећењу, које се налази изван ње, гдје се оптерећење узима са супротним знаком. Сума оптерећења с обије стране површине једнака је, дакле, нули.

Пређимо сада на посматрање геометрије простора, који посједује константну негативну кривину. Из (102,7) видимо, да константа λ постаје негативна, ако је a^2 негативно, тј. a је имагинарно. Према томе све формуле за простор негативне кривине могу се добити директно из претходних, ако се у њима a земјени са ia. Другим ријечима, геометрија простора са негативном кривином добива се математички као геометрија на четверодимензионалној псеудосфери с имагинарним полупречником.

На тај начин константа λ је сада

$$\lambda = -\frac{1}{a^2}, \tag{102,10}$$

а елемент дужине у простору са негативном кривином у координатама r, θ, φ, има облик

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (\sin^2 \theta \, d\varphi^2 + d\theta^2), \tag{102,11}$$

---

[1]) „*Descartes*-ове“ координате x_1, x_2, x_3, x_4 повезане су са четверодимензионалним сферним координатама a, θ, φ, χ према релацијама

$$x_1 = a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \qquad x_2 = a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi$$

$$x_3 = a \sin \chi \cos \theta, \qquad x_4 = a \cos \chi.$$

гдје координата r може имати све вриједности од 0 до ∞. Сада је однос дужине кружне периферије према полупречнику већи од 2π. Израз за dl^2, који одговара (102,8), добива се, ако се уведе координата χ према релацији $r = a\,\mathrm{sh}\,\chi$ (χ се овдје мијења од 0 до ∞). Тада је

$$dl^2 = a^2 \left\{ d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi \left(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2 \right) \right\}. \qquad (102,12)$$

Површина сфере је сада $4\pi a^2 \,\mathrm{sh}^2\chi$ и удаљавањем од координатног почетка (повећавањем χ) бесконачно се повећава. Запремина простора негативне кривине, очевидно је бесконачна.

Задатак

Трансформирати елемент дужине (102,7) на облик у коме би био пропорционалан свом еуклидском изразу.

Рјешење. Замјена

$$r = \frac{r_1}{1 + \dfrac{r_1^2}{4a^2}}$$

доводи до резултата

$$dl^2 = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{r_1^2}{4a^2}\right)^2} \left(dr_1^2 + r_1^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 \right).$$

§ 103. Просторно-временска метрика затвореног изотропног модела

Прелазећи на третирање просторно-изотропне метрике[1]) ми морамо прије свега изабрати систем референције. Најподеснији је онај систем, који се у свакој тачки простора креће заједно са супстанцом, која се налази у тој тачки. Може се рећи, да је систем референције сама материја која испуњава простор. Брзина супстанце у том систему је према дефиницији увијек једнака нули („сопствени" систем референције). Очевидно је, да је такав избор система референције за изотропни модел рационалан. При другом избору оријентација брзина материје изазивала би привидну нееквивалентност разних праваца у простору. Временска координата морала би се изабрати на начин, који је наведен у почетку претходног параграфа, тј. тако, да у сваком датом моменту метрика у читавом простору буде једнака.

Због потпуне еквивалентности свих праваца, компоненте $g_{0\alpha}$ метричког тензора у изабраном систему референције једнаке су нули. И заиста, три компоненте $g_{0\alpha}$ могу се посматрати као компоненте тродимензионалног вектора, који би изазивао различитост за разне правце, јер је различит од нуле. На тај начин ds^2 мора имати облик $ds^2 = -g_{00}\, dx_0^2 - dl^2$. Компонента g_{00} овдје је функција само од x^0. Због тога се временска координата може

---

[1]) Рјешење једначина, које се посматрају у овом и слиједећем параграфу, први је извео *A. Friedmann* (1922).

изабрати увијек тако, да g_{00} пређе у $-c^2$. Означавајући је са τ добићемо:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2. \tag{103,1}$$

Јасно је, да вријеме τ претставља сопствено вријеме у свакој тачки простора.

Почнимо са посматрањем простора са позитивном кривином. Убудуће, због краткоће, говорићемо о одговарајућем рјешењу једначина гравитације као о „затвореном моделу“. За dl послужићемо се изразом (102,8) у коме је „полупречник кривине“ a, уопште узевши, функција времена. На тај начин можемо ds^2 написати у облику

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a^2(\tau)\{d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\}. \tag{103,2}$$

Функција $a(\tau)$ одређује се једначинама гравитационог поља. За рјешавање тих једначина згодно се послужити величином η умјесто временом, гдје се η дефинише релацијом

$$c d\tau = a d\eta. \tag{103,3}$$

Тада се ds^2 може написати у облику

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 x(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)\}. \tag{103,4}$$

За састављање једначина поља треба почети са израчунавањем компонената тензора R_{ik} (координате x^0, x^1, x^2, x^3 су $\eta, \chi, \theta, \varphi$). Због симетрије може се одмах закључити, да су компоненте $R_{0\alpha}$ идентично једнаке нули. Затим можемо примијетити, да су од величина Γ^i_{kl} компоненте облика Γ^α_{00} и $\Gamma^0_{0\alpha}$, такође, једнаке нули, што је лако доказати. Због тога у изразу за R_{00} остају само слиједећи чланови:

$$R_{00} = -\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\ln\sqrt{-g}\,\Gamma^\alpha_{0\beta}\,\Gamma^\beta_{0\alpha} + \frac{\partial\Gamma^0_{00}}{\partial\eta}.$$

Што се тиче компонената $R_{\alpha\beta}$, напомињемо због упрошћења њиховог израчунавања, да, будући је $g_{0\alpha} = 0$, то се компоненте тродимензионалног тензора $\gamma_{\alpha\beta}$, поклапају са компонентама $g_{\alpha\beta}$. Због тога, послије издвајања из $R_{\alpha\beta}$ оних чланова, који садрже само $g_{\alpha\beta}$, добићемо компоненте тродимензионалног тензора $P_{\alpha\beta}$. На тај начин налазимо:

$$R_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} + \frac{\partial\Gamma^0_{\alpha\beta}}{\partial\eta} + \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial\eta} - \Gamma^0_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\beta 0} - \Gamma^0_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha 0}.$$

Помоћу вриједности компонената метричког тензора из (103,4)

$$g_{00} = -a^2, \quad g_{11} = a^2, \quad g_{22} = a^2\sin^2\chi, \quad g_{33} = a^2\sin^2\chi\sin^2\theta,$$

израчунавамо од величина Γ^i_{kl} оне које су нам потребне:

$$\Gamma^0_{00}\frac{\dot{a}}{a}, \ \Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{\dot{a}}{a^3}g_{\alpha\beta}, \ \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^\alpha_\beta$$

(тачка означава диференцирање по η). Тензор $P_{\alpha\beta}$ је према (102,3) и (102,6)

$$P_{\alpha\beta} = \frac{2}{a^2}g_{\alpha\beta}.$$

Помоћу свих тих израза добивамо послије простог израчунавања:

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = -\frac{3}{a^4}\left(\dot{a}^2 + a^2\right).$$

Ово треба изједначити са величином $\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0$. Како је у изабраном систему референције материја непокретна, биће $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1/a$, а из (93,8) имамо $T_0^0 = -\varepsilon$ (ε је густина енергије материје).

На тај начин добивамо слиједећу једначину[1]:

$$\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = \frac{3}{a^4}\left(\dot{a}^2 + a^2\right). \qquad (103,5)$$

Овдје улазе двије непознате функције, ε и a. Због тога је неопходно узети још једну једначину. За ту једначину згодно је узети једначину $T_{0;i}^{i} = 0$ (умјесто просторних компонената једначина поља). То је једна од четири једначине (98,1) које се, као што је познато, садрже у једначинама гравитације. Ова једначина може се извести и непосредно помоћу термодинамичких релација на слиједећи начин.

Користећи се у једначинама поља изразом (93,8) за тензор енергије-импулса, ми самим тим занемарујемо све процесе дисипације енергије, који доводе до повећања ентропије. Такво занемаривање овдје је потпуно законито, јер су допунски чланови, које би требало додати величини T_i^k у вези са дисипацијом енергије необично мали у односу на густину енергије ε, која у себе укључује и енергију мировања материјалних тијела.

На тај начин, при извођењу једначина поља можемо сматрати, да је тотална енергија константна. Послужићемо се сада познатом термодинамичком релацијом $d\mathcal{E} = TdS - pdV$, гдје су $\mathcal{E}$, S, V — енергија, ентропија и запремина система, а p и T — притисак и температура. При константној ентропији имамо једноставно $d\mathcal{E} = -pdV$. Увођењем густине енергије $\varepsilon = \mathcal{E}/V$, без тешкоћа налазимо

$$d\varepsilon = -(\varepsilon + p)\frac{dV}{V}.$$

Према (102,9) запремина простора V је пропорционална кубу полупречника кривине a. Према томе је $dV/V = 3da/a = 3d\ln a$, па можемо написати

$$-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = 3d(\ln a),$$

или, интегрирањем

$$3\ln a = -\int\frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} + \text{const.} \qquad (103,6)$$

(доња граница у интегралу је константна)[2].

---

[1] Ми уопште не посматрамо једначине са такозваном космолошком константом, јер је у најскорије вријеме дефинитивно доказано, да нема никаквих физичких основа за такво мијењање једначина гравитације.

[2] Скрећемо пажњу на чињеиицу, да се једначина (103,6) поклапа са једначином (8), која је добивена у 4 задатку § 96 интегрирањем једначине $T_{0;i}^{i} = 0$ у „сопственом" систему референције.

Ако је позната веза међу ε и p („једначина стања" материје), онда једначина (103,6) одређује ε као функцију од a. Тада из (103,5) можемо одредити η у облику.

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\varepsilon a^2 - 1}} \, . \tag{103,7}$$

Једначине (103,6) и (103,7) рјешавају у општем облику задатак о дефинисању метрике у изотропном затвореном моделу.

Ако је материја у простору распоређена у облику посебних макроскопских тијела, онда се при одређивању изазваног гравитационог поља та тијела могу посматрати као материјалне честице, које имају одређене масе, уопште се не интересујући за њихову унутарњу структуру. Сматрајући брзине тијела релативно малима (малима у односу на c), може се једноставно ставити $\varepsilon = \mu c^2$, гдје је μ збир маса тијела у односу на јединицу запремине. Из истог разлога притисак „гаса", који се састоји од тих тијела, сувише је мали у односу на ε, па се може занемарити (притисци, пак, у тијелима, према већ реченом, не односе се на посматрано питање). Што се тиче зрачења у простору, оно је релативно мало, па се његова енергија и притисак такође могу занемарити.

Стављајући у (103,6) $\varepsilon = \mu c^2$, $p = 0$ и интегрирајући, добивамо

$$\mu a^3 = \text{const.} \tag{103,8}$$

Ова једначина могла би се написати и директно, јер једноставно изражава чињеницу, да збир маса тијела у цјелокупном простору остаје константан, као и што мора бити у посматраном случају (очевидно је $\text{const.} = M/2\pi^2$, гдје је $M = \mu V$ — укупна маса у простору запремине $V = 2\pi^2 a^3$). Уврштавањем (103,8) у једначину (103,7) и интегрирајући, добивамо:

$$a = a_0 (1 - \cos\eta), \tag{103,9}$$

гдје је $a_0 = \frac{2kM}{3\pi c^2}$ — константа. Најзад, за везу између τ и η, налазимо из (103,3)

$$\tau = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin\eta). \tag{103,10}$$

Једначине (103,9) и (103,10) одређују у параметарском облику функцију $a(\tau)$. Крива, која приказује ту зависност, јесте циклоида.

За $\eta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \ldots a$ постаје једнако нули, а μ бесконачно. Но када $\mu \to \infty$, такође и притисак постаје велик, па зато при третирању метрике за вриједности η, које су близу наведеним, треба посматрати супротан гранични случај највећег могућног притиска (при датој густини енергије). У § 34 видјели смо, да максимални притисак износи $p = \varepsilon/3$ [в. (34,5)]. Уврштавањем тога у формулу (103,6), добивамо

$$\varepsilon a^4 = \text{const.}, \tag{103,11}$$

послије чега (103,7) и (103,3) доводе до релација:

$$a = a'_0 \sin\eta, \; \tau = \frac{a'_0}{c}(1 - \cos\eta), \tag{103,12}$$

гдје међу константом a'_0 и константом у (103,11) постоји одређена веза. Будући да ово рјешење има смисла посматрати само за врло мале вриједности од a, може се одмах написати одговарајућа приближна формула (која се добива развијањем у ред за $\eta \ll 1$):

$$a = \text{const.} \sqrt{\tau}. \tag{103,13}$$

Промјеном знака величине τ, величина a у (103,12) постала би имагинарна, а њен квадрат негативан. Онда би све четири компоненте g_{ik} у (103,2) биле негативне, а детерминанта g позитивна. Али таква метрика је физички апсурдна (в. стр. 230). То значи, да за горе наведене вриједности η метрика стварно има изоловане тачке. Због тога вриједности η треба посматрати само у интервалу од 0 до 2π. (или што је исто, од 2π до 4π и т. сл.) и нема физичког смисла аналитички продужавати метрику иза наведеног интервала.

§ 104. Просторно-временска метрика отвореног изотропног модела

Рјешење које одговара изотропном простору негативне кривине („отворени модел“) добива се на начин, који је потпуно аналоган претходном. Умјесто (103,2) имамо сада

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a^2(\tau)\{d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)\}. \tag{104,1}$$

Опет ћемо умјесто τ увести промјенљиву η према $cd\tau = ad\eta$. Тада добивамо

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sh}^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)\}. \tag{104,2}$$

Овај израз формално се може добити из (103,4) замјеном η, χ, a респективно са $i\eta$, $i\chi$, ia. Према томе и једначине поља могу се добити непосредно помоћу исте замјене у (103,5) и (103,6). Једначина (103,6) притом задржава свој ранији облик:

$$3 \ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} + \text{const.}, \tag{104,3}$$

а умјесто (103,7) имамо

$$\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = \frac{3}{a^4}(\dot{a}^2 - a^2). \tag{104,4}$$

Саобразно томе умјесто (103,7) налазимо

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon a^2 + 1}}. \tag{104,5}$$

Најприје ћемо посматрати случај малих притисака. Узимајући $p = 0$, $\varepsilon = \mu c^2$, налазимо слиједеће дефинитивне формуле:

$$a = a_o(\operatorname{ch}\eta - 1), \quad \tau = \frac{a_0}{c}(\operatorname{sh}\eta - \eta),$$
$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi k} a_0. \tag{104,6}$$

Прве двије приказују у параметарском облику функцију $a(\tau)$.

За $\eta = 0$ полупречник кривине $a(\eta)$ постаје једнак нули, а μ тежи бесконачности (константе интегрирања узете су у (104,5) тако, да тој вриједности одговара $\tau = 0$). Насупрот рјешењу (103,8) — (103,10), то овдје важи само за једну вриједност η. У близини $\eta = 0$ нађено рјешење се не може примијенити, па се опет мора узети случај $p = \varepsilon/3$. Према ранијем имамо из (104,3)

$$\varepsilon a^4 = \text{const.}, \tag{104,7}$$

а за зависност a од τ налазимс

$$a = a'_0 \operatorname{sh}\eta, \; \tau = \frac{a'_0}{c}(\operatorname{ch}\eta - 1)$$

За мале η, када уосталом само и има смисла посматрати то рјешење, опет имамо

$$a = \text{const.}\sqrt{\tau}\,. \tag{104,8}$$

На тај начин, у посматраном случају метрика има сингуларну тачку за $\eta = 0$, па зато све функције треба посматрати само за вриједности $\eta > 0$, или само за $\eta < 0$.

За $\eta > 0$ полупречник кривине монотоно расте са τ. Напомињемо, да повећавање полупречника кривине доводи до повећавања, уопште, свих растојања у простору, као што се то непосредно види из чињенице, да је елемент просторног растојања (102,3) пропорционалан са a. То доводи до међусобног „разилажења“ тијела у таквом простору. С тачке гледишта посматрача, који би се налазио на неком од њих, изгледало би, као да се сва остала тијела крећу у радијалном правцу, удаљавајући се од посматрача[1]).

Најзад, гранични случај посматраних рјешења, који одговара бесконачном полупречнику кривине простора, претставља модел са равним (еуклидским) простором. Интервал ds^2 у одговарајућем простор-времену може се написати у облику:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - b^2(\tau)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{104,9}$$

(као просторне координате узете су *Descartes*-ове координате x, y, z). Фактор који зависи од времена у елементу просторног растојања очигледно не мијења еуклидност просторне метрике, јер је при задатом τ тај фактор константан и простом трансформацијом координата може се свести на јединицу.

Израчунавања, аналогна онима из претходног параграфа, доводе до слиједећих једначина:

$$\frac{8\pi k}{c^2}\varepsilon = \frac{3}{b^2}\left(\frac{db}{d\tau}\right)^2, \; 3\ln b = -\int \frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} + \text{const.}$$

У случају малих притисака налазимо:

$$\mu b^3 = \text{const.}, \; b = \text{const.}\ \tau^{2/3}. \tag{104,10}$$

---

[1]) Да би се извео закључак о „разилажењу“ тијела, неопходно је да непосредно узајамно дјејство тих тијела буде довољно слабо, тачније, потенцијална енергија узајамног дјејства тијела мора бити мала у односу на кинетичку енергију њиховог кретања при „разилажењу“ (овај услов је у сваком случају испуњен за довољно удаљена тијела). У противном случају, међусобна растојања тијела одређују се углавном њиховим узајамним дјејством. Због тога, напр., морају остати константне димензије појединих макроскопских тијела.

За мале τ опет треба посматрати случај $p = \varepsilon/3$, када добивамо

$$\varepsilon b^4 = \text{const.}, \quad b = \text{const.} \sqrt{\tau}. \qquad (104{,}11)$$

На тај начин, у том случају метрика има сингуларну тачку ($\tau = 0$).

Сви посматрани модели са изотропним простором одликују се заједничким својством — њихове метрике имају сингуларне тачке. Ипак, треба имати у виду, да само потпуније испитивање једначина поља у општем случају неизотропног простора може одговорити на питање у којој је мјери наведено својство тих рјешења специјално својство изотропног модела, који не важи у реалном случају када просторна изотропија може бити само приближна.

Изложићемо овдје још неколико напомена, које се тичу резултата примјене термодинамике у општој теорији релативитета.

Видјели смо у § 98, да закон одржања тоталног 4-импулса у општој теорији релативитета добива карактер идентитета. Напосе, тотални 4-импулс P^i у читавом простору једнак је нули. То непосредно излази из нзраза (98,12) за 4-импулс у облику интеграла по површини $P^i = \frac{1}{c} \oint h^{i0\alpha} df_\alpha$.

Стварно, у коначном моделу свака затворена површина обухвата са обије стране коначну област простора. Због тога је наведени интеграл једнак тоталном 4-импулсу, који се налази у простору са једне стране површине и у исто вријеме узетом са обрнутим знаком од импулса у простору, који се налази са друге њене стране. Према томе, тотални 4-импулс у читавом простору израчунат према формули (98,9), раван је нули.

На тај начин, дефиниција тоталног 4-импулса у читавом простору према формули (98,9) у суштини нема смисла, јер се одговарајући закон одржања енергије дегенерише у безсадржајни идентитет $0 = 0$.

У нерелативистичкој термодинамици ентропија сваког затвореног система монотоно се повећава, постижући своју максималну вриједност кроз прилични интервал времена. Та вриједност одговара стању термодинамичне равнотеже и она је највећа од свих вриједности, које ентропија може имати, када су дате константке вриједности импулса и енергије система.

У релативистичкој термодинамици, према изложеном, важи закон монотоног повећавања ентропије затворених система. Ипак, због наведених особина закона одржања, сада губи смисао тврдња, да при том повећавању ентропија на крају крајева добива највећу могућну вриједност при датој енергији и импулсу, — наравно, када се примијени на космос као цјелину. На тај начин, ентропија космоса систематски се повећава без икаквог прелаза космоса у ма какво равнотежно стање, које има максималну ентропију.

Задатак

Трансформирати интервал ds у отвореном моделу за велика τ на централно симетрични облик (96,2).

Рјешење. За $\eta \gg 1$ имамо из (104,5) $a \cong c\tau$, тако да интервал (104,2) добива облик

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - c^2 d\tau^2 \left\{ d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) \right\}.$$

Уведимо нову координату r према релацији

$$r = c\tau \operatorname{sh}\chi$$

тако да коефицијент уз $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$ буде r^2. Пишући даље

$$c^2(d\tau^2 - \tau^2 d\chi^2) = \frac{(c^2\tau d\tau + rdr)^2}{c^2\tau^2 + r^2} - dr^2,$$

ставићемо

$$\frac{c^2\tau d\tau + rdr}{\sqrt{c^2\tau^2 + r^2}} = cdt,$$

одакле је

$$t = \sqrt{\tau^2 + \frac{r^2}{c^2}} = \tau \operatorname{ch}\chi.$$

Изражен у промјенљивим r, θ, φ, t интервал онда добива облик

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Овај резултат показује, да за велика τ метрика отвореног модела у првој апроксимацији постаје галилејска. Међутим, у систему референције r, θ, φ, t материја није непокретна, а њена расподјела је нехомогена. Притом је расподјела и кретање материје централно-симетричног облика око произвољне тачке у простору, која је узета као координатни почетак. У систему χ, θ, φ, τ свакој датој материјалној честици одговарају одређене константне вриједности χ, θ, φ. Према томе радијална брзина честице v у систему r, θ, φ, t износи $v = \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_\chi = \operatorname{cth}\chi$ или $v = r/t$. Она се повећава са растојањем пропорционално првом степену од r. За одређивање расподјеле густине материје, напомињемо, да у систему χ, θ, φ количина материје, која се налази у сферном слоју „дебљине“ $d\chi$ има облик const. $\operatorname{sh}^2\chi d\chi$. Но како је $\operatorname{sh}^2\chi d\chi = \frac{ctr^2 dr}{(c^2t^2 - r^2)^2}$, то послије дијељења запремином $4\pi r^2 dr$ сферног слоја у координатама r, θ, φ, налазимо, да расподјела материје има облик

$$\text{const.}\frac{t}{(c^2t^2 - r^2)^2}$$

Све добивене формуле, изведене под претпоставком $u \gg 1$, не могу се примијенити за случај, када су величине r близу величинама ct (за мало $ct - r$ биће мало и τ).

§ 105. Простирање свјетлости

Посматраћемо простирање зрака свјетлости у изотропном простору. У ту сврху најједноставније је узети у обзир чињеницу, да је дуж свјетске линије простирања свјетлосног сигнала интервал $ds = 0$. Узећемо као координатни почетак система χ, θ, φ тачку, из које полази свјетлосни зрак. Због симетрије очигледно је, да ће се зраци простирати „радијално“, тј. дуж линије $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ Стављајући саобразно томе $d\theta = d\varphi = 0$ у (103,4) или (104,2), добићемо $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\chi^2)$. Изједначавањем са нулом, налазимо $d\eta = \pm d\chi$, или интегрирањем

$$\chi = \pm\eta + \text{const.} \qquad (105,1)$$

Знак плус пред η одговара зраку, који се простире у смјеру од координатног почетка, а знак минус одговара зраку, који је оријентисан према координатном почетку. У таквом облику једначина (105,1) може се примијенити на простирање зрака како код отвореног, тако и код затвореног модела. Помоћу формула претходних параграфа, одавде се може растојање које зрак пређе изразити у функцији времена.

Код отвореног модела свјетлосни зрак, који излази из неке тачке, простире се тежећи да се неограничено удаљи од ње. Код затвореног модела свјетлосни зрак, који полази од неке тачке, на крају крајева може стићи до „супротног пола“ простора (чему одговара промјена χ од 0 до π); при даљем простирању зрак се почиње приближавати полазној тачки. Обиласку зрака „око простора“ и враћању у полазну тачку одговарала би промјена χ од 0 до 2π. Из (105,1) види се, да се при том мора и η мијењати од 0 до 2π, што је међутим немогуће (изузев један случај — када зрак излази у моменту, који одговара $\eta = 0$). На тај начин, зрак се не би могао вратити у полазну тачку, обишавши „око простора“.

Зраку, који би стигао у тачку посматрања (координатни почетак), одговара једначина (105,1) са знаком минус пред η. Ако је $\tau(\eta_0)$ момент наиласка зрака у ту тачку, онда за $\eta = \eta_0$ мора бити $\chi = 0$, тако да једначина простирања таквих зрака има облик

$$\chi = \eta_0 - \eta. \tag{105,2}$$

Одавде се види, да до посматрача, који се налази у тачки $\chi = 0$, могу стићи у моменту $\tau(\eta_0)$ зраци, који су пошли из тачака, које се налазе на „растојањима“ не већим од $\chi = \eta_0$.

Овај резултат, који се односи и на отворени и на затворени модел, веома је битан. Видимо, да у сваком моменту времена $\tau(\eta)$ у датој тачки простора физичко посматрање не може обухватати цио простор, него само дио простора, који одговара $\chi \leqq \eta$. Са математичке тачке гледишта, „видљива област“ простора претставља пресјек четвородимензионалног простор-времена свјетлосним конусом. Тај пресјек је коначан, како код отвореног, тако и код затвореног модела (код отвореног модела је бесконачан пресјек хиперповршином $\tau = \text{const.}$, који одговара простору, који се у свим тачкама посматра у истом моменту τ). У том смислу разлика међу отвореним и затвореним моделом мање је дубока, него што би могло изгледати на први поглед.

Уколико је у датом моменту област простора удаљеиија од посматрача, утолико она ранијим моментима одговара. Замислимо сферну површину, која је геометријско мјесто тачака из којих је свјетлост изашла у моменту $\tau(\eta - \chi)$, а посматра се у координатном почетку у моменту $\tau(\eta)$. Та површина износи $4\pi a^2(\eta - \chi)\,\mathrm{sh}^2\chi$ (код затвореног модела) или $4\pi a^2(\eta - \chi)\sin^2\eta$ (код отвореног модела). У функцији удаљавања од посматрача површина „видљиве сфере“ у почетку расте од нуле (за $\chi = 0$), затим достиже максималну вриједност, а послије се смањује, док дође у нулу за $\chi = n$ [гдје је $a(\eta - \chi) = a(0) = 0$]. То значи, да је пресјек свјетлосним конусом не само коначан него и затворен. Изгледа као да се затвара у тачки, која је „супротна“ од тачке у којој се налази посматрач. У тој тачки $8 \to \infty$.

Укупно посматрана количина материје код отвореног модела једнака је интегралу

$$M_{\text{posm}} = 4\pi \int_0^{\eta} \mu a^3 \,\mathrm{sh}^2\chi \cdot d\chi.$$

Замјеном μa^3 из (104,6), налазимо

$$M_{\text{posm}} = \frac{3c^2 a_0}{2k} (\mathrm{sh}\eta \cdot \mathrm{h}\eta - \eta).$$

Ова величина неограничено расте, када $\eta \to \infty$. Код затвореног модела рашћење M_{posm} је ограничено, разумије се, тоталном масом M.

Посматрајмо сада промјену фреквенције свјетлости при простирању кроз изотропни простор. У ту сврху истаћи ћемо претходно слиједећу околност. Нека у некој тачки простора настану два догађаја, међу којима је временски интервал $d\tau = (1/c)\, a(\eta) d\eta$. Ако се у моментима њихових настајања одашиљу свјетлосни сигнали, који се посматрају у другој тачки простора, онда ће међу моментима њихових констатовања проћи временски интервал који одговара истој промјени $d\eta$ величине η, као и у тачки одашиљања. То непосредно излази из једначине (105,1), према којој промјена величине η за вријеме простирања свјетлосног зрака из једне тачке у другу, зависи само од разлике координата χ тих тачака. Али, пошто се за вријеме простирања сигнала мијења полупречник кривине a, то ће интервали времена τ међу моментима одашиљања двају сигнала и моментима њихових констатовања (примања) бити различита. Однос тих интервала једнак је односу одговарајућих вриједности a.

Из наведених резоновања слиједи, специјално, да се и периоди свјетлосних осцилација, мјерени у свјетском времену τ, мијењају дуж зрака пропорционално величини a. Фреквенција свјетлости очевидно биће обрнуто пропорционална величини a. На тај начин, код простирања свјетлосног зрака биће константан производ ωa дуж њега,

$$\omega a = \text{const.} \tag{105,3}$$

Претпоставимо, да у моменту $\tau(\eta)$ посматрамо свјетлост коју зрачи извор, који се налази на растојању, које одговара одређеној вриједности координате χ. Момент емитовања те свјетлости биће према (105,1) момент $\tau(\eta - \chi)$. Ако је ω_0 фреквенција свјетлости у моменту њеног емитовања, онда ће фреквенција ω, коју посматрамо, према (105,3), износити

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)}. \tag{105,4}$$

Када се функција $a(\eta)$ монотоно повећава, имамо $\omega < \omega_0$, тј. настаје смањивање фреквенције свјетлости. То значи, да се код посматрања спектра свјетлости која стиже, све његове линије морају помјерити према црвеној страни у односу на спектре истих супстанци у обичним условима. Та појава у суштини претставља *Doppler*-ов ефект узајамног „разилажења" тијела.

Величина црвеног помјерања, мјерења напр. односом ω/ω_0 поремећене према непоремећеној фреквенцији, зависи (при датом моменту посматрања) од растојања на којима се налази посматрани извор свјетлости [у релацију (105,4) улази координата χ свјетлосног извора]. Када растојања нису сувише велика, израз $a(\eta - \chi)$ може се развити у ред по степенима од χ, задржавајући се на прва два члана

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \chi \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}$$

(тачка означава диференцирање по η). Даље напомињемо, да овдје производ $\chi a(\eta)$ није ништа друго, него растојање l до посматраног извора. И заиста, „радијални“ елемент дужине износи $dl = a d\chi$. При интегрирању те релације настаје питање, каквим се начином физичког посматрања одређује растојање; у зависности од тога треба узети вриједности a у разним тачкама пута интегрирања у разним моментима (интегрирање за $\eta = \text{const}$. одговарало би једновременом посматрању свих тачака пута, што је физички неостварљиво). Али код „малих“ растојања може се занемарити промјена a дуж пута интегрирања и просто написати $l = a\chi$, гдје је вриједност за a узета у моменту посматрања.

За релативну величину промјене фреквенција коначно налазимо слиједећу формулу:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\alpha l, \tag{105,5}$$

гдје је уведена ознака

$$\alpha = \frac{\dot{a}(\eta)}{a^2(\eta)}. \tag{105,6}$$

Коефицијент α уз l константан је (за дати момент посматрања). На тај начин, релативно помјерање спектралних линија мора бити пропорционално растојању до посматраног извора свјетлости.

Ако се црвено помјерање посматра као резултат *Doppler*-овог ефекта, могу се одредити брзине v тијела, којима се она удаљују од посматрача. Узевши да је $(\omega - \omega_0)/\omega_0 = -v/c$ и упоредивши са (105,5), добивамо

$$v = \alpha c l \tag{105,7}$$

$\left(\text{ова формула може се добити и непосредно израчунавањем извода } v = \frac{d(a\chi)}{d\tau}\right)$.

Ако се покуша да се формула (105,7) примјени на експерименталне податке, онда се за коефицијент добива вриједност

$$\alpha = 5{,}6 \cdot 10^{-26}\, cm^{-1}. \tag{105,8}$$

Ова вриједност одговара повећању „брзине разилажења“ од 160 km/sec на сваки милион свјетлосних година растојања. Позитивни знак α значи, да је $\dot{a}(\eta) > 0$. Код отвореног модела томе одговара $\eta > 0$, а код затвореног: $0 < \eta < \pi$.

Ако се у једначину (104,4) стави $\varepsilon = \mu c^2$ и $\alpha = \frac{\dot{a}}{a^2}$, онда ће се за отворени модел добити слиједећа релација:

$$\frac{1}{a^2} = \alpha^2 - \frac{8\pi k}{3c^2}\,\mu. \tag{105,9}$$

Комбиновањем ове једначине са једнакошћу

$$\alpha = \frac{\text{sh}\,\eta}{a_0(\text{ch}\,\eta - 1)} = \frac{1}{a}\,\text{cth}\,\frac{\eta}{2},$$

добивамо

$$\mathrm{ch}\frac{\eta}{2} = a\sqrt{\frac{3c^2}{8\pi k\mu}}. \qquad (105{,}10)$$

За затворени модел добило би се умјесто (105,9)

$$\frac{1}{a^2} = \frac{8\pi k}{3c^2}\mu - a^2. \qquad (105{,}11)$$

Ако се упореди (105,9) и (105,11) види се, да је кривина простора негативна или позитивна, што зависи од тога, да ли је негативна или позитивна разлика $(8\pi k/3c^2)\mu - a^2$. Та разлика постаје једнака нули за $\mu = \mu_k$, гдје је

$$\mu_k = \frac{3a^2c^2}{8\pi k} = 6\cdot 10^{-28}\,\frac{g}{cm^3}.$$

При савременом стању астрономских података, средња густина материје у простору може се одредити само са врло малом тачношћу и она не омогућава нити да се одреди знак разлике $\mu - \mu_k$.

Навешћемо овдје једну неједначину, коју је могуће добити при задатим вриједностима a. За отворени модел имамо $a = \mathrm{sh}\eta/a_0(\mathrm{ch}\eta - 1)^2$, а одавде

$$c\tau = a_0(\mathrm{sh}\eta - \eta) = \frac{\mathrm{sh}\eta(\mathrm{sh}\eta - \eta)}{a(\mathrm{ch}\eta - 1)^2}.$$

Како је $0 < \eta < \infty$, то мора бити

$$\frac{2}{3a} < c\tau < \frac{1}{a}. \qquad (105{,}12)$$

Аналогно за затворени модел добивамо

$$c\tau = \frac{\sin\eta(\eta - \sin\eta)}{a(1 - \cos\eta)^2}.$$

Повећавању $a(\eta)$ одговара интервал $0 < \eta < \pi$, па се према томе добива

$$0 < c\tau < \frac{2}{3a}. \qquad (105{,}13)$$

У оба случаја је $c\tau < 1/a = 2\cdot 10^9$ свјетлосних година.

Одредимо затим интензитет I свјетлости, која стиже до посматрача од извора који се налази на растојању, које одговара одређеној вриједности координате χ. Густина флукса свјетлосне енергије у тачки посматрања обрнуто је пропорционална површини сфере, која је повучена кроз посматрану тачку са центром у тачки, у којој се налази свјетлосни извор. У простору са негативном кривином, површина сфере је $4\pi a^2 \mathrm{sh}^2\chi$. Свјетлост, коју емитује извор у току времена $d\tau = \frac{1}{c}a(\eta - \chi)\,d\eta$, стићи ће у тачку посматрања у току времена $d\tau \frac{a(\eta)}{a(\eta-\chi)}=\frac{1}{c}a(\eta)d\eta$. Како се интензитет дефинише као флукс свјетлосне енергије у јединици времена, онда ће се у I појавити фактор $\frac{a(\eta-\chi)}{a(\eta)}$. Најзад, енергија таласног пакета пропорционална је фреквенцији [в. (53,9)]. Како се фреквенција мијења при простирању свјетлости по закону (105,3), то ће се у I појавити још један фактор $\frac{a(\eta-\chi)}{a(\eta)}$. Дефинитивно се интензитет добива у облику

$$I=\text{const.}\frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\text{sh}^2\chi}. \tag{105,14}$$

За затворени модел добило би се аналогно

$$I=\text{const.}\frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\sin^2\chi}. \tag{105,15}$$

Ове формуле приказују зависност видљиве освијетљености посматраног објекта од његовог растојања (када је задата апсолутна освијетљеност). За мала χ може се ставити $a(\eta-\chi)\cong a(\eta)$, па је тада

$$I\sim\frac{1}{a^2(\eta)\chi^2}=\frac{1}{l^2},$$

тј. обичии закон умањења интензитета, које је обрнуто пропорционално квадрату растојања.

На крају, посматраћемо питање о такозваним сопственим кретањима тијела. Када смо говорили о густини и кретању материје, увијек смо подразумијевали средњу густину и средње кретање. Специјално, у оном систему референције којим смо се стално служили, брзина средње вриједности кретања једнака је нули. Праве брзине тијела растурене су око своје средње вриједности. У току времена брзине сопственог кретања тијела мијењају се. За одређивање закона те промјене посматраћемо тијело, које се слободно креће и узећемо координатни почетак у ма којој тачки његове трајекторије. Тада ће трајекторија бити радијална линија $\theta=\text{const.}$, $\varphi=\text{const.}$ *Hamilton-Jacobi*-ева једначина (85,7) послије замјене величина g^{ik} поприма облик

$$\left(\frac{\partial S}{\partial\chi}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial\eta}\right)^2+m^2c^2a^2(\eta)=0. \tag{105,16}$$

Како у коефицијенте ове једначине не улази χ (тј. координата χ је циклична), то важи закон одржања $\frac{\partial S}{\partial\chi}=\text{const.}$ Импулс p покретног тијела према општој дефиницији износи $p=\frac{\partial S}{\partial l}=\frac{\partial S}{a\partial\chi}$. На тај начин, код кретања тијела остаје константан производ

$$pa=\text{const.} \tag{105,17}$$

Ако уведемо брзину v сопственог кретања тијела према релацији

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

добићемо

$$\frac{va}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const.} \tag{105,18}$$

Овом релацијом приказује се закон промјене брзине v у времену. Када се a повећава, онда брзине v монотоно опадају.