УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

мр Дејан Д. Илић

Анализа пребројивих модела потпуних теорија линеарно уређених структура

Докторска дисертација

Београд, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

M.Sc. Dejan D. Ilić

An analysis of countable models of complete theories of linearly ordered structures

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

проф. др Предраг Тановић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Небојша Икодиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Милош Курилић, редовни професор
Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет

проф. др Александар Перовић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Саобраћајни факултет

проф. др Зоран Петровић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Предраг Тановић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Изјаве захвалности

Ова докторска дисертација представља део резултата вишегодишњег истраживања под менторством професора Предрага Тановића и у сарадњи са Славком Моцоњом.

Свом ментору, Предрагу Тановићу, дугујем неизмерну захвалност: Све што знам из теорије модела или ме је он научио или ме је мотивисао да научим или сам открио у сарадњи са њим.

Славку Моцоњи сам захвалан на сугестијама и помоћи у изради ове дисертације. Осим тога, резултати последњег поглавља су настали у сарадњи са Славком Моцоњом и Предрагом Тановићем.

Захвалност дугујем и члановима комисије на корисним саветима и коментарима. Александру Перовићу сам нарочито захвалан на дугогодишњој подршци. Зорану Петрићу и Бориши Кузељевићу такође дугујем захвалност на саветима и коментарима. Захвалан сам и колегама са катедре и пријатељима са Математичког института на подршци.

Породици сам захвалан на великој подршци коју су ми пружали током година. Бранки сам захвалан на подршци и стрпљењу. Без ње ове дисертације не би било.

Дејан Илић

Анализа пребројивих модела потпуних теорија линеарно уређених структура

Резиме: У овој тези изучавамо линеарно уређене структуре и њихове потпуне теорије. Главни технички алат који користимо у нашој анализи су кондензације, тј. разлагање уређења у конвексне делове и изучавање количничке структуре и структуре делова. Уводимо униформно дефинабилну кондензацију $\mathbf{c}_\delta$ која разлаже уређење у највеће конвексне делове чије су теорије првог реда једноставне: они су или густа или дискретна уређења. Изучавамо $\mathbf{c}_\delta$ количничке структуре које су експанзије одређених простих пребројивих дискретних уређења и дајемо детаљан опис оних које имају Кантор-Бендиксонов ранг 1. Такође користимо кондензацију $\mathbf{c}_\delta$ да докажемо да је свако линеарно уређење проширено са коначно много унарних предиката и релација еквиваленција са конвексним класама интерпретабилно у чистом линеарном уређењу.

Уводимо својства линеарне и јаке линеарне бинарности за линеарно уређене структуре и њихове потпуне теорије. У случају теорије, дефиниција описује особину групе аутоморфизама њеног засићеног модела. Доказујемо да је свака потпуна теорија линеарног уређења са унарним предикатима и релацијама еквиваленције са конвексним класама јако линеарно бинарна. Главни резултат тврди да је јако линеарно бинарна структура дефиницион о еквивалентна линеарном уређењу са додатим унарним предикатима и релацијама еквиваленције са конвексним класама. У доказу дајемо опис дефинабилних скупова произвољног линеарног уређења са унарним предикатима и релацијама еквиваленције са конвексним класама.

Кључне речи: Линеарна уређења, експанзије линеарних уређења, дефинабилне кондензације, прост тип, бинарне теорије, линеарна бинарност, јака линеарна бинарност, конвексне еквиваленције, дефинициона еквивалентност, елиминација квантификатора

Научна област: Математика

Ужа научна област: Математичка логика

УДК број: 510.67 (043.3)

AMS класификација: 03C10, 03C64, 06A05

An analysis of countable models of complete theories of linearly ordered structures

Abstract: We study linearly ordered structures and their complete theories. The main technical tools used in the analysis are condensations, i.e. partitioning the ordering into convex parts and then studying the quotient structure and that of the parts. We introduce a uniformly definable condensation relation $\mathbf{c}_\delta$ that decomposes the ordering into largest convex pieces whose first order theory is simple: they are either dense or discrete orderings. We study $\mathbf{c}_\delta$ quotient structures that are expansions of certain simple countable discrete orderings and give a precise description of those having Cantor Bendixson rank 1. We also use the condensation $\mathbf{c}_\delta$ to prove that any linear ordering expanded by finitely many unary predicates and equivalence relations with convex classes is interpretable in a pure linear ordering.

We introduce notions of linear and strong linear binarity for linearly ordered structures and their complete theories. In the case of a theory, the defining condition expresses a property of the automorphism group of its saturated model. We prove that any complete theory of a linear ordering with unary predicates and equivalence relations with convex classes is strongly linearly binary. The main result states that a strongly linearly binary structure is definitionally equivalent to a linear ordering with unary predicates and equivalence relation with convex classes added. In the proof we give a description of definable sets in any linear ordering with unary predicates and equivalence relations with convex classes.

Key words: Linear orderings, expansions of linear orderings, definable condensations, simple type, binary theories, linear binarity, strong linear binarity, convex equivalences, definitional equivalence, quantifier elimination

Scientific area: Mathematics

Scientific field: Mathematical logic

UDC number: 510.67 (043.3)

AMS subject classification: 03C10, 03C64, 06A05

Садржај

Увод

У овој тези изучавамо линеарно уређене структуре и њихове потпуне теорије. Под линеарно уређеном структуром подразумевамо структуру првог реда $\mathcal{A} = (A, <, \dots)$ такву да је $(A, <)$ линеарно уређење које у структури $\mathcal{A}$ може имати додате релације и операције на скупу A. Основна питања теорије модела која се природно намећу за структуре истог језика су:

1. Када су структуре изоморфне?
2. Када су структуре елементарно еквивалентне?
3. Како изгледају дефинабилни скупови у таквим структурама?

Ова питања су веома општа и не може се очекивати детаљан одговор у случају генералних линеарно уређених структура, већ се ваља ограничити на неке поткласе. Хауздорф се у свом чувеном раду из 1908. године ([**4**]) бавио питањем изоморфизма линеарних уређења и описом уређајних типова, тј. класа еквиваленције у односу на изоморфизам. Доказао је да је свако линеарно уређење или расуто (не садржи подуређење изоморфно уређењу рационалних бројева) или је густа сума расутих конвексних подуређења, а затим је описао ординалну хијерархију расутих уређења. Једна од кључних Хауздорфових идеја у анализи типа изоморфизма уређења је идеја кондензације: погодно растављање датог уређења на конвексне делове који су у неком смислу једноставни. Оваквим растављањем се анализа сложености уређења преноси на анализу сложености линеарног уређења тих делова наслеђеног природно из полазног уређења. Сам појам кондензације линеарних уређења, као и опис неких основних типова кондензација, дали су Душник и Милер 1940. године у раду [**2**].

Моделско теоријска анализа линеарних уређења започета је почетком педесетих година прошлога века у радовима Тарског, Мостовског, Бета и Фресеа. Најзначајнији резултат из тог периода добили су Феферман и Вот 1959. године у раду [**3**]. Доказали су да су суме линеарних уређења $\oplus_{\mathcal{I}}\mathcal{A}_i$ и $\oplus_{\mathcal{I}}\mathcal{B}_i$, где је $\mathcal{I}$ линеарно уређење, елементарно еквивалентне уколико су сви одговарајући парови суманада $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{B}_i$ елементарно еквивалентни. Тиме је актуелизован проблем елементарне еквиваленције линеарних уређења и проблем одређивања броја пребројивих модела дате потпуне теорије линеарних уређења. У периоду након тога бројни математичари су дали делимичне резултате на ту тему, а најзначајнији допринос је дао Рубин 1974. године у раду [**15**] у коме је изучавао класу линеарних уређења са придодатим унарним предикатима и потпуне теорије таквих структура. Напоменимо да та класа није суштински шира од класе линеарних уређења, јер је свако линеарно уређење са унарним предикатом интерпретабилно у неком чистом линеарном уређењу. Иако Рубин није успео да пронађе опис дефинабилних скупова у таквим структурама, доказао је да свака таква теорија има или коначно много или $2^{\aleph_0}$ неизоморфних пребројивих модела.

Први приближан опис дефинабилних скупова у линеарним уређењима дао је Симон 2011. године у раду [**16**]. Он је уочио значај монотоних бинарних релација у линеарним уређењима; бинарна релација R је монотона уколико из $x_1 \leqslant x$, $x\,R\,y$ и $y \leqslant y_1$ следи $x_1\,R\,y_1$. Доказао је да уколико дато линеарно уређење са унарним предикатима проширимо додавањем свих дефинабилних унарних предиката и монотоних бинарних релација, добијамо структуру чија теорија елиминише квантификаторе, тј. у којој је сваки дефинабилан скуп n-торки домена дефинисан Буловом комбинацијом формула са једном слободном променљивом и формула које дефинишу монотоне бинарне релације. Симонов опис дефинабилних скупова се може сматрати приближним, јер линеарно уређење додавањем монотоне бинарне релације може постати суштински сложенија структура од ма ког (чистог) линеарног уређења.

У дисертацији изучавамо моделско теоријске особине линеарних уређења. У првом поглављу дајемо преглед свих основних појмова и тврђења теорије модела које користимо. У другом поглављу изучавамо униформно дефинабилне кондензације, тј. хомоморфизме линеарних уређења, и основне операције са њима: композиције и итерације. Уводимо кондензацију $\mathbf{c}_\delta$ (оригинално уведену у коауторском раду [**7**]) која је дефинабилна формулом првог реда $\delta(x,y)$ у језику $\{<\}$, а чије су класе у сваком уређењу максимални конвексни дискретно уређени и максимални конвексни густо уређени подскупови. Добијене класе разликујемо по њиховим елементарним својствима, односно њиховим потпуним теоријама првог реда. Ту имамо пребројиво много могућности и у свим, осим у једној, ради се о коначно аксиоматизабилним потпуним теоријама, тј. о теоријама које можемо аксиоматизовати једном реченицом првог реда. Теорија густих уређења без крајева је потпуна, док теорију дискретних уређења комплетирамо додавањем информација о постојању или непостојању сваког од крајева, као и да ли се ради о коначном уређењу у ком случају прецизирамо и број његових елемената. Једина међу њима која није коначно аксиоматизабилна је теорија бесконачних дискретних уређења са најмањим и са највећим елементом. Коначно аксиоматизабилним додељујемо унарне предикате $\{W, W^*, Z, G, C_n\}_{n\in\omega}$; предикат G

теорији $\mathrm{Th}(\mathbb{Q},<)$ густих уређења без крајева, W одговара теорији $\mathrm{Th}(\omega,<)$ дискретних уређења са левим али без десног краја, W^* теорији $\mathrm{Th}(\omega,>)$, Z теорији $\mathrm{Th}(\mathbb{Z},<)$ и C_n теорији уређења са n елемената. Анализа датог уређења $\mathcal{A}$ се састоји у следећем: факторисањем релације $\mathbf{c}_\delta$ добијамо фактор уређење $\mathbf{c}_\delta(\mathcal{A})$ коме додајемо унарне релације $X^{\mathcal{A}}$ за $X \in \{W, W^*, Z, G, C_n\}_{n\in\omega}$ тако да $X([x]_{\mathbf{c}_\delta})$ означава да теорија $\mathrm{Th}([x]_{\mathbf{c}_\delta}, <_{\mathcal{A}})$ одговара предикату X. На тај начин добијамо структуру $\mathbf{c}_\delta^{\#}(\mathcal{A})$ линеарног уређења са пребројиво много дисјунктних унарних релација. Иста структура $\mathbf{c}_\delta^{\#}(\mathcal{A})$ се обично може добити овим поступком не само из уређења $\mathcal{A}$ него из више линеарних уређења; сва она су међусобно елементарно еквивалентна и њихове уређајне типове можемо лако описати. Такође, доказаћемо да елементарно еквивалентним уређењима $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ одговарају елементарно еквивалентне структуре $\mathbf{c}_\delta^{\#}(\mathcal{A})$ и $\mathbf{c}_\delta^{\#}(\mathcal{B})$, као и обрнуто тврђење. Тиме смо проблем описа типа изоморфизма линеарног уређења свели на проблем описа типа изоморфизма једноставнијег линеарног уређења, али са придодатим унарним предикатима.

Мотивација за резултате добијене у трећем поглављу је изучавање једноставних пребројивих дискретно уређених $\mathbf{c}_\delta$ класа са додатом структуром. То су експанзије уређења $(\omega,<)$, $(\omega^*,<)$ и $(\omega+\omega^*,<)$. У општем случају такве структуре могу бити веома компликоване, па уводимо додатну претпоставку, коначност Кантор Бендиксоновог ранга. Тиме сложеност сваког типа и дефинабилног скупа меримо природним бројем. Питање на које желимо да одговоримо је: да ли се такве експанзије, до на дефинициону еквивалентност, могу добити додавањем унарних предиката? Потврдан одговор дајемо у случају експанзија ранга 1. Резултати овог поглавља су објављени у ауторовом раду [**6**]. Разматраћемо експанзије дискретно уређених структура облика $(\omega+L,<,\dots)$ где је $(L,<)$ линеарно уређење. Уводимо појам простог типа у оваквим уређењима и доказујемо структурну теорему за такве типове. Затим посматрамо експанзије структура $(\omega,<)$ и $(\omega+\omega^*,<)$ Кантор Бендиксоновог ранга 1, а то су оне у којима не постоји бесконачна фамилија међусобно дисјунктних, бесконачних дефинабилних подскупова домена. Примери таквих експанзија су структуре $(\omega,<,P_d)$, где је $P_d(x)$ предикат „d дели x" и $(\omega+\omega^*,<,B_{d,l})$, где је $B_{d,l}$ скуп $(P_d+l)(\omega)\cup P_d(\omega)^*$ који је унија транслата скупа $P_d(\omega)$ за l места удесно и скупа свих $n^* \in \omega^*$ за које је n дељиво са d. Показујемо да у таквим експанзијама постоји прост тип и затим доказујемо следећу теорему.

Теорема 1. (1) Свака експанзија структуре $(\omega,<)$ која задовољава $\mathrm{CB}(x=x)=1$ је дефиниционо еквивалентна структури $(\omega,<,P_d)$ где је $d=\deg(x=x)$.

(2) Свака експанзија структуре $(\omega+\omega^*,<)$ у којој ω није дефинабилан скуп је дефиниционо еквивалентна структури $(\omega+\omega^*,<,B_{d,l})$ при чему је $d=\deg(x=x)$ а l је неки цео број.

Као последицу ове теореме добијамо следећу теорему која уопштава резултат Пилаја и Штајнхорна из рада [**12**].

Теорема 2. Не постоји права експанзија структуре $(\omega, <)$ или $(\omega + \omega^*, <)$ која задовољава $\mathrm{CB}(x = x) = \deg(x = x) = 1$.

Четврто поглавље садржи главне резултате тезе. Сви резултати у њему су добијени у сарадњи са Предрагом Тановићем и Славком Моцоњом. Посматрамо линеарна уређења са придодатим унарним предикатима и конвексним релацијама еквиваленције. Један од главних резултата овог поглавља је опис дефинабилних скупова у оваквим структурама.

Теорема 3. (Илић, Моцоња, Тановић) Нека је $\mathcal{A} = (A, <, P_i, E_j, S_j^n)_{i \in I, j \in J}$ линеарно уређење са придодатим унарним предикатима $(P_i \mid i \in I)$, конвексним релацијама еквиваленције $(E_j \mid j \in J)$ у коме су релације следбеника за класе дефинисане са: „$S_j^n(x, y)$ ако и само ако између класа x/E_j и y/E_j има тачно $n-1$ E_j- класа". Уколико $(P_i \mid i \in I)$ и $(E_j \mid j \in J)$ садрже све унарне предикате и конвексне релације еквиваленције које су дефинабилне у структури $\mathcal{A}$, тада $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ елиминише квантификаторе.

Посебан случај теореме је опис дефинабилних скупова у произвољном линеарном уређењу који је прецизнији од Симоновог описа из рада [**16**]. Теорема 3 следи из прецизног описа дефинабилних скупова у јако линеарно бинарним структурама, које уводимо и изучавамо у овом поглављу. Додатна скуповно теоријска претпоставка коју користимо је постојање јако недостижних кардинала којом обезбеђујемо постојање засићених структура. Уз ову претпоставку својство јаке линеарне бинарности се може једноставно описати на следећи начин: теорија засићене линеарно уређене структуре има то својство ако и само ако од свака два њена аутоморфизма који се поклапају на конвексном скупу можемо направити аутоморфизам тако што на уоченом конвексном скупу примењујемо један аутоморфизам, а на остатку други. Показујемо да теорије линеарног уређења са придодатим унарним предикатима и конвексним релацијама еквиваленције имају то својство, као и да су то есенцијално једине линеарно уређене структуре чије теорије имају то својство. Напоменимо да су две структуре (различитих језика) дефиниционо еквивалентне уколико имају исти домен и исте дефинабилне подскупове.

Теорема 4. (Илић, Моцоња, Тановић) Нека је $\mathcal{A} = (A <, \dots)$ линеарно уређена структура која има својство јаке линеарне бинарности. Тада је структура $\mathcal{A}$ дефиниционо еквивалентна структури $\mathcal{A}' = (A, <, P_i, E_j)_{i \in I, j \in J}$ у којој су $(P_i \mid i \in I)$ сви унарни предикати и $(E_j \mid j \in J)$ све конвексне релације еквиваленције дефинабилне у структури $\mathcal{A}$.

ПОГЛАВЉЕ 1

Преглед појмова и нотација

1. Нотација и основни појмови

За непразан скуп X са $X^{<\omega}$ означавамо скуп $\bigcup_{n\in\omega} X^{n+1}$. Свако пресликавање $F : X \to Y$ одређује пресликавање из $\mathbb{P}(X)$ у $\mathbb{P}(Y)$ тако што скупу $A \subseteq X$ додељује скуп његових слика $F(A) = \{F(a) | \, a \in A\}$. Уобичајено је да се користи ознака $F[A]$, међутим, ми ћемо користити ознаку $F(A)$, јер не постоји бојазан да ће то изазвати забуну. Такође, са $F((a_i)_{i\in I}) = (F(a_i))_{i\in I}$ је одређено пресликавање из X^I у Y^I. Нека је X непразан и $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ колекција подскупова скупа $X^{<\omega}$. Тада је $F(\mathcal{A}) = (F(A_i))_{i\in I}$.

Структуре обележавамо словима $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ итд., при чему често користимо и индексе и степене. Тако се, на пример, може појавити $\mathcal{M}_0^{\bigstar}$ као ознака структуре. Коначне низове $(a_1, \ldots, a_n)$ често обележавамо са $\bar{a}$ и уместо $\bar{a} \in A^n$ или $\bar{a} \in A^{<\omega}$ некад пишемо $\bar{a} \in A$. Некад уместо $\{a_1, \ldots, a_n\}$ пишемо $\bar{a}$, као и $B\bar{a}$ уместо $B \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\bar{a}\bar{b}$ уместо $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k)$. Овакве злоупотребе нотације су стандардне у литератури из теорије модела. Језике означавамо симболима L, L', L_1, L_2, L_A, $L(\mathcal{M})$ и сл. Последња ознака у низу је резервисана за језик структуре $\mathcal{M}$. Ознаком L_A обележавамо језик који се добија кад скуп A апсорбујемо у језик L. Формуле означавамо малим грчким словима φ, $\varphi(\bar{x})$, ϕ, ψ, θ итд. Запис $\varphi(\bar{x})$ значи да је скуп слободних променљивих подскуп скупа $\bar{x}$. Скупове формула означавамо великим грчким словима Σ, Π, $\Sigma(\bar{x})$ итд. Изузетак су теорије које означавамо са T, T_1, T_2, T' и потпуни типови које означавамо са p, q, r, p_0, p_E итд. Потпуни тип елемента a са параметрима из E обележавамо са $\mathrm{tp}(a/E)$. Слично важи за коначне низове $(a_1, \ldots, a_n)$, с тим што не пишемо $\mathrm{tp}((a_1, \ldots, a_n)/E)$, него $\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n/E)$. Ознака $\bar{a} \equiv \bar{b}(E)$ значи $\mathrm{tp}(\bar{a}/E) = \mathrm{tp}(\bar{b}/E)$. За унарне предикате често кажемо да су боје: за елемент a такав да важи $P(a)$ кажемо да је обојен бојом P.

2. Линеарна уређења

Нека је A релацијом $<$ линеарно уређен скуп. Тада за $(A, <)$, као и за саму релацију $<$, кажемо да је <u>линеарно уређење</u>. У даљем тексту, када кажемо уређење, мислимо на линеарно уређење. Стандардна је ознака: $x \leqslant y$ ако и само ако је $x = y$ или $x < y$.

Скуп је конвексан ако је непразан и ако за свако a и b које му припадају садржи и све тачке између тачака a и b. У литератури се налази двојака употреба термина интервала. На пример у [**14**] се термини интервала и конвексних скупова поклапају. Међутим, у модернијој литератури је термин интервала резервисан за скупове једног од следећих девет облика (за a и b елементе скупа A такве да је $a \leqslant b$):

- (a, b) за скуп $\{x \in A \mid a < x < b\}$;
- $[a, b]$ за скуп $\{x \in A \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
- $(a, b]$ за скуп $\{x \in A \mid a < x \leqslant b\}$;
- $[a, b)$ за скуп $\{x \in A \mid a \leqslant x < b\}$;
- $[a, -)$ за скуп $\{x \in A \mid a \leqslant x\}$;
- $(a, -)$ за скуп $\{x \in A \mid a < x\}$;
- $(-, b]$ за скуп $\{x \in A \mid x \leqslant b\}$;
- $(-, b)$ за скуп $\{x \in A \mid x < b\}$;
- $(-, -)$ за скуп A

и ми ћемо следити овај пример. У таквој терминологији, за уређење кажемо да је комплетно ако је сваки конвексан скуп интервал. Еквивалентна дефиниција би била да је уређење комплетно ако и само ако сваки одозго (одоздо) ограничен скуп има супремум (инфимум). Уређење $(A, <)$ је подуређење уређења $(B, <_B)$ ако је $A \subseteq B$ и ако за свако $a_1, a_2 \in A$ важи $a_1 < a_2$ акко $a_1 <_B a_2$. Тада кажемо и да је $(B, <_B)$ надуређење уређења $(A, <)$. Уређење $(B, <_B)$ је комплетирање уређења $(A, <)$, ако му је надуређење, ако је комплетно и ако свако друго комплетно надуређење уређења $(A, <)$ има подуређење изоморфно уређењу $(B, <_B)$. Класичан пример и инспирација за увођење појма комплетирања су линеарно уређени скупови рационалних и реалних бројева:

$$(\mathbb{R}, <) \text{ је комплетирање уређења } (\mathbb{Q}, <).$$

У стандардној литератури, на пример у [**14**], може се наћи доказ следећег тврђења:

Тврђење 1.1. Свако уређење има јединствено комплетирање.

Посматрајмо следећу ситуацију. Нека је $(B, <_B)$ комплетирање уређења $(A, <)$ и нека су I_1 и I_2 одозго ограничени подскупови скупа A. Скупови I_i имају супремум у уређењу $(B, <_B)$, али не морају имати супремум у уређењу $(A, <)$. Међутим, чак и у случају кад I_1 и I_2 у уређењу $(A, <)$ немају супремум, да ли у $(B, <_B)$ важи $\sup I_1 <_B \sup I_2$, $\sup I_1 = \sup I_2$ или $\sup I_1 >_B \sup I_2$ потпуно је одређено у уређењу $(A, <)$. Наиме, важи:

- $\sup I_1 = \sup I_2$ у $(B, <_B)$ акко I_1 и I_2 у $(A, <)$ имају исти скуп мајоранти;

- $\sup I_1 \leqslant_B \sup I_2$ у $(B, <_B)$ акко је свака мајоранта у $(A, <)$ скупа I_2 уједно и мајоранта скупа I_1;
- $\sup I_1 <_B \sup I_2$ акко је $\sup I_1 \leqslant_B \sup I_2$ и није $\sup I_1 = \sup I_2$.

Наравно, $\sup I_1 <_B \sup I_2$ је могло да се окарактерише и овако: Постоји $a \in A$ такво да је мајоранта скупа I_2 и није мајоранта скупа I_1.

За (конвексан) скуп K коме је $(-, k]$ подскуп за сваки $k \in K$ ћемо рећи да је почетни комад, док за скуп $K = \bigcup_{k \in K}[k, -)$ кажемо да је завршни комад. Интервали облика $(-, a)$, $(-, a]$ су почетни интервали. Слично, за интервале $[a, -)$ и $(a, -)$ кажемо да су завршни интервали.

Уређење је дискретно ако сваки елемент сем најмањег, ако постоји, има непосредног претходника и сваки елемент, сем највећег, ако постоји, има непосредног следбеника. Уређење је густо ако између свака два елемента постоји још неки елемент уређења. Очигледно, то је еквивалентно услову да између свака два елемента постоји бесконачно много других елемената уређења. Уређење је расуто ако не садржи густо бесконачно подуређење.

За уређење $(A, <)$ обрнуто уређење означавамо са $(A, <^*)$:

$$a_1 <^* a_2 \text{ ако и само ако } a_2 < a_1.$$

За линеарно уређене скупове L_1 и L_2, са $L_1 + L_2$ означавамо линеарно уређен скуп у коме је L_2 налепљен на крај уређења L_1. За A и B, подскупове уређења, ознака $A < B$ значи: $a < b$ за сваки $a \in A$ и сваки $b \in B$. Слично важи за $a < B$, $A < b$, $a \leqslant B$ и $A \leqslant b$. Нека је $\mathbf{K} = \{K_i \,|\, i \in I\}$ партиција уређеног скупа A конвексним скуповима, тј. нека је за свако $i \in I$ скуп K_i конвексан подскуп скупа A, нека је за $i \neq j$ испуњено $K_i \cap K_j = \emptyset$ и $\bigcup_{i \in I} K_i = A$. Тада је $(\mathbf{K}, <_K)$ линеарно уређење при чему је $<_K$ наслеђено уређење описано раније са $K_i <_K K_j$ акко $a < b$ кад год је $a \in K_i$ и $b \in K_j$. С обзиром да су K_i и K_j конвексни, међусобно дисјунктни скупови, услов да је $a < b$ кад год је $a \in K_i$ и $b \in K_j$ еквивалентан услову да је $a < b$ за бар један пар (a, b) такав да је $a \in K_i$ и $b \in K_j$. Ово једноставно разматрање је основ за касније увођење појма кондензације. Приметимо да смо на овај начин заправо уредили скуп индекса I: $i <_I j$ ако је $K_i <_K K_j$. Дуално овом разматрању, може се дефинисати сума уређења на следећи начин: Нека је $(I, <_I)$ (линеарно) уређен скуп и нека је $(A_i, <_i)$ линеарно уређење за свако $i \in I$. Тада је сума уређења $(A_i, <_i)$ уређење које се добија тако што сваки елемент скупа I заменимо уређењем A_i. Тачније сума $\oplus_{(I, <_I)}(A_i, <_i)$ је уређење $(A, <)$ које се дефинише на следећи начин:

1. $A = \bigcup_{i \in I}\{i\} \times A_i$
2. $(i, a) < (j, b)$ ако и само ако је $i <_I j$ или је $i = j$ и $a <_j b$.

Лексикографски производ $(I, <_I) \times (A, <)$ је $\oplus_{(I, <_I)}(A_i, <_i)$ где је $(A_i, <_i) = (A, <)$ за свако i. Уобичајено је да изостављамо индексе у запису релација и да уместо $<_I$, $<_i$, $<_B$ $<_K$ пишемо само $<$, јер је из контекста јасно на шта се ознака односи.

Изоморфизам је релација еквиваленције на класи свих линеарних уређења. За класе те релације кажемо да су уређајни типови.

3. Структуре

У овом поглављу ћемо увести нотацију и дати кратки преглед основних појмова и тврђења.

Структура је непразан скуп (за који кажемо да је скуп носач или да је домен структуре) снабдевен истакнутим константама и (финитарним) релацијама и функцијама: $(M, c_i, R_j, f_k)_{i\in I, j\in J, k\in K}$ при чему неки (или сваки) од скупова I, J и K може бити празан. Структуре обележавамо словима $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ итд., при чему често користимо и индексе и степене. Тако се, на пример, може појавити $\mathcal{M}_0^\star$ као ознака структуре. За кардинални број структуре узимамо кардинални број скупа носача. Када истовремено радимо са више структура, често истакнуте константе, релације и функције обележавамо са степеном $\mathcal{M}$, тј. користимо запис $\mathcal{M} = (M, c_i^{\mathcal{M}}, R_j^{\mathcal{M}}, f_k^{\mathcal{M}})_{i\in I, j\in J, k\in K}$.

Посматрајмо структуру $\mathcal{M} = (M, c_i^{\mathcal{M}}, R_j^{\mathcal{M}}, f_k^{\mathcal{M}})_{i\in I, j\in J, k\in K}$. Нека су $I_0 \subseteq I$, $J_0 \subseteq J$ и $K_0 \subseteq K$ такви да је $I_0 \cup J_0 \cup K_0$ прави подскуп скупа $I \cup J \cup K$ и нека је $\mathcal{M}_1 = (M, c_i^{\mathcal{M}}, R_j^{\mathcal{M}}, f_k^{\mathcal{M}})_{i\in I_0, j\in J_0, k\in K_0}$. Кажемо да је $\mathcal{M}$ експанзија структуре $\mathcal{M}_1$ и да је $\mathcal{M}_1$ редукт структуре $\mathcal{M}$.

Нека је $N \subseteq M$. Ако је $c_i^{\mathcal{M}} \in N$ за свако $i \in I$ и ако је за свако $k \in K$ испуњено $f_k^{\mathcal{M}}(N^{n_k}) \subseteq N$, тада за структуру $\mathcal{N} = (N, c_i^{\mathcal{N}}, R_j^{\mathcal{M}} \cap N^{n_j}, f_{k|N}^{\mathcal{M}})_{i\in I, j\in J, k\in K}$ кажемо да је подструктура структуре $\mathcal{M}$, при чему је $f_{k|N}^{\mathcal{M}}$ рестрикција пресликавања $f_k^{\mathcal{M}}$ на скуп N^{n_k}. У том случају пишемо $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$.

За дату структуру $\mathcal{M} = (M, c_i^{\mathcal{M}}, R_j^{\mathcal{M}}, f_k^{\mathcal{M}})_{i\in I, j\in J, k\in K}$, пресликавање $F : M \to N$ одређује структуру $F(\mathcal{M}) = (F(M), F(c_i), F(R_j), F(f_k))_{i\in I, j\in J, k\in K}$, при чему је $F(f_k)$ пресликавање одређено са: $Graf(F(f_k)) = F(Graf(f_k))$. Посматрајмо структуре $\mathcal{M} = (M, c_i^{\mathcal{M}}, R_j^{\mathcal{M}}, f_k^{\mathcal{M}})_{i\in I, j\in J, k\in K}$ и $\mathcal{N} = (N, c_i^{\mathcal{N}}, R_j^{\mathcal{N}}, f_k^{\mathcal{N}})_{i\in I, j\in J, k\in K}$. Ако постоји инјективно пресликавање $F : M \to N$, такво да је $F(\mathcal{M})$ подструктура структуре $\mathcal{N}$, онда за F кажемо да је утапање. Бијективно утапање је изоморфизам. Изоморфизам структуре у њу саму је аутоморфизам. Са $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ означавамо скуп свих аутоморфизама структуре $\mathcal{M}$. За $A \subseteq M$, са $\mathrm{Aut}_A(\mathcal{M})$ означавамо скуп свих аутоморфизама структуре $\mathcal{M}$ који фиксирају сваки елемент скупа A.

Уобичајено у теорији модела је почети појмом језика и сигнатуре. Посматрајмо структуру $\mathcal{M} = (M, c_i^{\mathcal{M}}, R_j^{\mathcal{M}}, f_k^{\mathcal{M}})_{i\in I, j\in J, k\in K}$. За сваку истакнуту константу $c_i^{\mathcal{M}}$ уведимо симбол c_i тако да су симболи c_{i_1} и c_{i_2} различити за различите i_1 и i_2. Слично, за сваку релацију $R_j^{\mathcal{M}}$ уведимо симбол R_j тако да су симболи R_{j_1}

и R_{j_2} различити за различите j_1 и j_2 и за сваку функцију $f_k^{\mathcal{M}}$ уведимо симбол f_k тако да су симболи f_{k_1} и f_{k_2} различити за различите k_1 и k_2. Поред тога, уочавамо пресликавање $ar : \{R_j \mid j \in J\} \cup \{f_k \mid k \in K\} \to \mathbb{N}$ које сваком R_j додељује n_j, дужину релације $R_j^{\mathcal{M}}$ и сваком f_k број n_k, број аргумената функције $f_k^{\mathcal{M}}$. Скуп $\mathcal{S} = \{c_i, R_j, f_k | i \in I, j \in J, k \in K\}$ са пресликавањем ar је сигнатура структуре $\mathcal{M}$, али често кажемо и да је $\mathcal{M}$ структура сигнатуре $\mathcal{S}$. Тада за $c_i^{\mathcal{M}}$, $R_j^{\mathcal{M}}$ и $f_k^{\mathcal{M}}$ кажемо да су интерпретације симбола c_i, R_j и f_k.

Могло се кренути и обрнутим смером: за задату сигнатуру $\mathcal{S}$ и непразан скуп M, ако сваком симболу c_i доделимо један елемент скупа M и означимо га са $c_i^{\mathcal{M}}$, сваком симболу R_j доделимо једну релацију на M дужине $ar(R_j)$ и означимо је са $R_j^{\mathcal{M}}$ и сваком симболу f_k додељујемо једну функцију из $M^{ar(f_k)}$ у M и означимо је са $f_k^{\mathcal{M}}$, онда је $\mathcal{M} = (M, c_i^{\mathcal{M}}, R_j^{\mathcal{M}}, f_k^{\mathcal{M}})_{i \in I, j \in J, k \in K}$ структура сигнатуре $\mathcal{S}$. Напоменимо да у овом придруживању различитим симболима сигнатуре не морамо обавезно доделити различите константе, релације и функције.

Када се сигнатури дода скуп $\{\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, \exists, \forall, \equiv\}$ и пребројив скуп променљивих, добијамо језик. Језике обележавамо са L, L_1, L', итд. С обзиром да је сигнатура одређена језиком, често „замагљујемо” разлику између језика и сигнатуре и кад задајемо или истичемо језик, наводимо њиме одређену сигнатуру, а логичке симболе $\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, \exists, \forall, \equiv$ [1] подразумевамо и за структуру те сигнатуре чешће кажемо да је структура језика. За кардиналност сигнатуре кажемо да је кардиналност језика који је одређен том сигнатуром. Дефиниција формуле, реченице, слободне и везане променљиве, релације задовољења, логичке (семантичке) и синтаксне последице, као и основна тврђења се могу наћи у било ком уводном уџбенику из теорије модела, на пример [**10, 11, 5**]. Овде ћемо навести само неке.

Кардинални број скупа свих формула језика L означавамо са $\|L\|$. Важи $\|L\| = |L| + \aleph_0$. Теорија језика L је скуп (неких) његових реченица. За структуру $\mathcal{M}$ кажемо да је модел теорије T и пишемо $\mathcal{M} \models T$ ако за сваку реченицу $\phi \in T$ важи $\mathcal{M} \models \phi$. За теорију кажемо да је задовољива ако има модел. Основно полазиште у теорији модела је следећа теорема.

Теорема 1.2. Компактност: Теорија има модел ако и само ако свака њена коначна подтеорија има модел.

На даље, ако није другачије речено, кад кажемо теорија, мислимо на задовољиву теорију.

Теорија је дедуктивно затворена ако садржи сваку своју логичку последицу. Теорија је потпуна ако за сваку реченицу ϕ важи тачно једно од

[1] У пракси чешће користимо „$=$” и за „$=$” и за „$\equiv$”, а из контекста је јасно на шта се мисли. Тако на пример, уместо $\varphi(x) = x \equiv x$ чешће кажемо „$\varphi(x)$ је формула $x = x$”

$$T \models \phi \text{ или } T \models \neg\phi.$$

Нека је $\mathcal{M}$ структура језика L. За скуп свих реченица језика L које важе у $\mathcal{M}$ кажемо да је потпуна теорија структуре $\mathcal{M}$ и обележавамо је са $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Она је потпуна, дедуктивно затворена теорија. Нека је $A \subseteq M$, нека је $C_A = \{c_a | a \in A\}$ скуп симбола константи које се не појављују у језику L. Ако језику L додамо скуп C_A и добијени језик обележимо са L_A, онда, уз ограничење да сваки симбол константе c_a интерпретирамо у $\mathcal{M}$ као a, кажемо да смо A апсорбовали у језик, а тако добијену структуру обележавамо са $\mathcal{M}_A$. Уместо $\phi(\bar{x}, \bar{c_a})$ чешће пишемо $\phi(\bar{x}, \bar{a})$. Такође, $\mathcal{M}_A \models \phi(\bar{b}, \bar{a})$ чешће пишемо $\mathcal{M} \models \phi(\bar{b}, \bar{a})$. Кад не доводи до забуне, уместо c_a користимо a, тј. и симболе константи и саме елементе обележавамо истим словима. Најчешће не ширимо језик експлицитно већ остајемо у језику L а за формуле језика L_A кажемо да су A формуле или формуле са параметрима из A. Ако је $\phi(\bar{x})$ формула (са или без параметара), онда за скуп $\{\bar{m} \in M | \mathcal{M} \models \phi(\bar{m})\}$ кажемо да је скуп решења формуле ϕ у структури $\mathcal{M}$ и обележавамо га са $\phi(\mathcal{M})$. Такође кажемо и да ϕ дефинише $\phi(\mathcal{M})$ и да је $\phi(\mathcal{M})$ дефинисан формулом ϕ. Скуп је дефинабилан са параметрима из A (без параметара) ако је решење формуле са параметрима из A (формуле без параметара). За скуп дефинабилан формулом са параметрима из A још кажемо да је A дефинабилан. Треба напоменути две ствари:

-Исти скуп може се дефинисати различитим формулама: ϕ и ψ дефинишу исти скуп ако и само ако је $\mathcal{M} \models \forall\bar{x}(\phi(\bar{x}) \iff \psi(\bar{x}))$;

-Пошто је формула са слободним промењљивим из скупа $\{x_1, \ldots, x_n\}$ истовремено и из сваког надскупа $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k\}$, онда таква формула истовремено дефинише и подскуп скупа M^n и подскуп скупа M^{n+k}. Рецимо, формула $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ дефинише и скуп $\{(m_1, \ldots, m_n) \,|\, \mathcal{M} \models \phi(m_1, \ldots, m_n)\}$ и скуп $\{(m_1, \ldots, m_n, m_{n+1}, \ldots, m_{n+k}) \,|\, \mathcal{M} \models \phi(m_1, \ldots, m_n)\}$. Ако из контекста није јасно, експлицитно ћемо навести на који степен скупа M мислимо.

Фамилију скупова дефинабилних формулама са параметрима из скупа A обележавамо са $\mathbf{D}^{\mathcal{M}}(A)$, а фамилију $\mathbf{D}^{\mathcal{M}}(A) \cap \mathbb{P}(M^n)$ са $\mathbf{D}_n^{\mathcal{M}}(A)$. Скупове дефинабилне формулама без параметара чешће обележавамо са $\mathbf{D}^{\mathcal{M}}$ и $\mathbf{D}_n^{\mathcal{M}}$ уместо са $\mathbf{D}^{\mathcal{M}}(\emptyset)$ и $\mathbf{D}_n^{\mathcal{M}}(\emptyset)$. За M дефинабилни скуп кажемо да је дефинабилан параметрима. Елемент b је дефинабилан над A ако је $\{b\} \in \mathbf{D}^{\mathcal{M}}(A)$. Скуп свих елемената дефинабилних над A обележавамо са $\mathrm{dcl}^{\mathcal{M}}(A)$. Формула је алгебарска ако јој је скуп решења непразан и коначан. Елемент је алгебарски над A ако је решење алгебарске L_A-формуле. Скуп свих елемената алгебарских над A означавамо са $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A)$.

Ако је $\mathcal{M}_2$ експанзија структуре $\mathcal{M}_1$ и ако је $\mathbf{D}^{\mathcal{M}_1} = \mathbf{D}^{\mathcal{M}_2}$, онда за $\mathcal{M}_2$ кажемо да је дефиниционо раширење или дефинициона експанзија структуре $\mathcal{M}_1$. Ако је $\mathcal{M}_2$ експанзија структуре $\mathcal{M}_1$, очигледно је да је услов

- $\{c_i^{\mathcal{M}_2}\} \in \mathbf{D}^{\mathcal{M}_1}$ за свако c_i које није у језику структуре $\mathcal{M}_1$;
- $R_j^{\mathcal{M}_2} \in \mathbf{D}^{\mathcal{M}_1}$ за свако R_j које није у језику структуре $\mathcal{M}_1$;
- Граф функције $f_k^{\mathcal{M}_2}$ припада фамилији $\mathbf{D}^{\mathcal{M}_1}$ за свако f_k које није у језику структуре $\mathcal{M}_1$

потребан и довољан да $\mathcal{M}_2$ буде дефинициона експанзија структуре $\mathcal{M}_1$. Ако су $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ две структуре (различитих) сигнатура са истим скупом носачем и ако имају исте дефинабилне скупове, онда кажемо да су $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ дефиниционо еквивалентне структуре. О дефиниционо еквивалентним структурама ће бити више речи касније.

Нека је T потпуна задовољива теорија језика L и нека је $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ скуп неких L формула облика $\phi(x_1, \ldots, x_n)$. Нека је $\{c_1, \ldots, c_n\}$ скуп симбола константи који се не јавља у језику L, нека је $L_1 = L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ и нека је $T_1 = T \cup \Sigma(c_1, \ldots, c_n)$. Ако је T_1 задовољива теорија, онда за $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ кажемо да је n-тип (теорије T). Као последицу теореме компактности имамо да је претходна дефиниција типа еквивалентна следећој:

За Σ кажемо да је n-тип теорије T, ако је коначно задовољив: за сваки коначан $\Gamma \subseteq \Sigma$ важи

$$T \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{\phi \in \Gamma} \phi(x_1, \ldots, x_n).$$

Формула $\varphi(\bar{x})$ је задовољива у теорији T, ако је $\{\varphi(\bar{x})\}$ n-тип теорије T.

Посматрајмо структуру $\mathcal{M}$, $A \subseteq M$ и $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$, скуп неких A формула облика $\phi(x_1, \ldots, x_n)$. Ако је $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ n-тип теорије $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A)$, онда кажемо да је n-тип над A или n-тип са параметрима из A. Као и у претходном случају имамо еквивалентну дефиницију:

За $\Sigma(\bar{x})$ кажемо да је n-тип над A или n-тип са параметрима из A ако је коначно задовољив: за сваки коначан $\Gamma \subseteq \Sigma$ важи

$$\mathcal{M} \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{\phi \in \Gamma} \phi(x_1, \ldots, x_n).$$

Кажемо да је $\Sigma(\bar{x})$ потпун n-тип над A ако за сваку формулу $\phi(\bar{x})$ са параметрима из A важи $\phi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$ или важи $\neg\phi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$. Из ове дефиниције непосредно следи да за потпуни тип $\Sigma(\bar{x})$ важи $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A) \subseteq \Sigma(\bar{x})$.

Уобичајено је да потпуне типове обележавамо са p, q, r, $p(\bar{x})$ итд. Некад ћемо (непотпуне) типове као и (могуће противречне) скупове формула обележавати са Σ, Γ, Π итд.

Сваком n-типу Σ са параметрима из A одговара $\mathbf{T}(\Sigma)_A^{\mathcal{M}} = \{\phi(\mathcal{M}) | \phi \in \Sigma\}$, подфамилија фамилије $\mathbf{D}^{\mathcal{M}}(A)$ која има својство коначног пресека: свака коначна подфамилија $\mathbf{T}_0 \subseteq \mathbf{T}(\Sigma)_A^{\mathcal{M}}$ има непразан пресек. Ако је Σ потпун, онда је $\mathbf{T}(\Sigma)_A^{\mathcal{M}}$ максималан (у смислу инклузије): за сваки $D \in \mathbf{D}_n^{\mathcal{M}}(A)$ важи тачно једно од $D \in \mathbf{T}(\Sigma)_A^{\mathcal{M}}$ и $M^n \setminus D \in \mathbf{T}(\Sigma)_A^{\mathcal{M}}$.

Важи и обрнуто: Нека је $\mathbf{T}_A^{\mathcal{M}}$ фамилија скупова из $\mathbf{D}_n^{\mathcal{M}}(A)$ која има својство коначног пресека. Њој одговара тип са параметрима из A:

$$\Sigma_{\mathbf{T}_A^{\mathcal{M}}} = \bigcup_{D \in \mathbf{T}_A^{\mathcal{M}}} \{\phi(\bar{x}) | \phi(\mathcal{M}) = D\}.$$

Ако је $\mathbf{T}_A^{\mathcal{M}}$ максималан, онда је $\Sigma_{\mathbf{T}_A^{\mathcal{M}}}$ потпун, дедуктивно затворен тип.

Коресподенција између типова и фамилија дефинабилних скупова је таква да важи: $\mathbf{T}(\Sigma_{\mathbf{T}_A^{\mathcal{M}}})_A^{\mathcal{M}} = \mathbf{T}_A^{\mathcal{M}}$ и $\Sigma_{\mathbf{T}(\Sigma)_A^{\mathcal{M}}} = \{\psi | T \models (\psi \iff \phi), \phi \in \Sigma\}$.

Скуп реализација типа Σ у $\mathcal{M}$ је скуп $\bigcap \mathbf{T}(\Sigma)_A^{\mathcal{M}}$. Означавамо га са $\Sigma(\mathcal{M})$. Кажемо да $\bar{m}$ реализује Σ и пишемо $\bar{m} \models \Sigma$ ако је $\bar{m} \in \Sigma(\mathcal{M})$. Другим речима, $\bar{m}$ реализује Σ ако је решење сваке формуле која припада типу Σ. Ако постоји $\bar{m} \in M$ који реализује Σ, онда кажемо да $\mathcal{M}$ реализује Σ, а у супротном да га испушта. Σ је изолован ако је $\Sigma(\mathcal{M}) \in \mathbf{D}^{\mathcal{M}}(A) \setminus \{\emptyset\}$ и тада за било коју формулу која дефинише $\Sigma(\mathcal{M})$ кажемо да изолује тип Σ. Ако $\varphi(\bar{x})$ изолује тип $\Sigma(\bar{x})$, онда за сваку формулу $\psi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$ важи

$$\mathcal{M} \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \Longrightarrow \psi(\bar{x}).$$

Очигледно, $\mathcal{M}$ реализује све изоловане типове.

Стонова теорема свакој Буловој алгебри придружује тополошки простор ултрафилтера који је компактан, тотално неповезан Хауздорфов простор.

У случају Булове алгебре $\mathbf{D}_n^{\mathcal{M}}(A)$, одговарајући Стонов простор одговара простору свих потпуних n-типова над A који означавамо са $\mathrm{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$ и у коме је топологија задата базом отворено-затворених скупова

$$\{[\phi(\bar{x})] \mid \phi(\bar{x}) \text{ је } L_A \text{ формула}\},$$

при чему је $[\phi(\bar{x})] = \{p \in \mathrm{S}_n^{\mathcal{M}}(A) \mid \phi \in p\}$. Директна последица Стонове теореме је следећа теорема.

Теорема 1.3. Компактност простора типова: Простор $\mathrm{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$ је компактан, тотално неповезан Хауздорфов простор.

Често ћемо се у ситуацији када покријемо неки затворен скуп у $\mathrm{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$ позивати на ову теорему да бисмо извукли коначан потпокривач. Једини отворено-затворени скупови у $\mathrm{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$ су облика $[\phi]$ за L_A-формуле ϕ. Типови $\Sigma(\bar{x})$ одређују затворене скупове у $\mathrm{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$ на следећи начин: скуп свих потпуних типова који садрже (продужују) Σ је $\bigcap_{\phi \in \Sigma}[\phi]$.

Из дефиниције изолованог типа коју смо навели следи да је потпун тип p изолован ако и само ако је $[\phi] = \{p\}$ за неко $\phi \in p$ и тада ϕ (као и свака њој еквивалентна (модуло $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A)$) формула) изолује p. Поновимо, скуп реализација изолованог типа се поклапа са скупом решења формуле која изолује тип. Тип је алгебарски ако је нека коначна коњункција формула типа алгебарска. Потпуни тип који не садржи алгебарску формулу је неалгебарски. За $\bar{m} \in M$ са $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{m}/A)$ обележавамо потпун n-тип $\{\phi(\bar{x}) | \phi(\bar{x})$ је L_A формула и $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})\}$.

У сваком тополошком простору се може дефинисати Кантор-Бендиксонов ранг елемента. Специјално за тополошки простор $S_n(A)$ важи следеће:

(1) $\mathrm{CB}^n_A(p) \geqslant 0$ важи за свако $p \in S_n(A)$;

(2) $\mathrm{CB}^n_A(p) \geqslant \alpha + 1$ акко је p тачка нагомилавања скупа $\{q \,|\, \mathrm{CB}^n_A(q) \geqslant \alpha\}$;

(3) За гранични ординал α: $\mathrm{CB}^n_A(p) \geqslant \alpha$ акко $\mathrm{CB}^n_A(p) \geqslant \beta$ за свако $\beta < \alpha$.

Ако постоји ординал α такав да је $\mathrm{CB}^n_A(p) \geqslant \alpha$ и $\mathrm{CB}^n_A(p) \not\geqslant \alpha + 1$ онда за α кажемо да је Кантор-Бендиксонов ранг типа p и пишемо $\mathrm{CB}^n_A(p) = \alpha$; Ако такав ординал не постоји, онда кажемо да p нема ординални CB^n_A ранг (у литератури се у случају да не постоји ординални ранг може наћи запис $\mathrm{CB}^n_A(p) = \infty$). Ако је $S_n(A)$ пребројив, тада сваки његов елемент има ординални CB^n_A ранг. У компактним Хаусдорфовим просторима дефиниција CB^n_A ранга се природно продужава на затворене скупове: $\mathrm{CB}^n_A(F) = \max\{\mathrm{CB}^n_A(p) \,|\, p \in F\}$ (по компактности максимум постоји). С обзиром да је $S_n(A)$ компактан Хауздорфов простор а затворени скупови представљају непотпуне типове, за последицу имамо дефиницију CB^n_A ранга за све непотпуне типове, а тиме и за задовољиве формуле,[2] као специјалан случај (најчешће непотпуних) типова. CB^n_A степен (задовољиве) формуле $\varphi(\bar{x})$ са параметрима из A је број типова из $S_n(A)$ који садрже φ и имају исти ранг као сама формула; обележавамо га са $\deg^n_A(\varphi)$. Кад год је $\mathrm{CB}^n_A(\varphi)$ ординал, $\deg^n_A(\varphi)$ је природан број. Ако је $\mathrm{CB}^n_A(p) = \alpha$ онда постоји $\varphi(\bar{x})$, формула са параметрима из A таква да је $\mathrm{CB}^n_A(\varphi) = \alpha$ и

$$\{q \,|\, \varphi(\bar{x}) \in q, \mathrm{CB}^n_A(q) \geqslant \alpha\} = \{p\}.$$

За такву формулу кажемо да изолује тип релативно у његовом CB рангу.

CB ранг формуле смо дефинисали као ранг затвореног скупа у $S_n(A)$:

$$\mathrm{CB}^n_A(\varphi) = \max\{\mathrm{CB}^n_A(p) \,|\, p \in \varphi\}.$$

Алтернативна дефиниција CB^n_A ранга формула, односно дефинабилних скупова је следећа:

(1) $\mathrm{CB}^n_A(D) \geqslant 0$ акко је D непразан A дефинабилан скуп;

[2] Бихлер у [**1**] за формуле које нису задовољиве уводи да су ранга -1

(2) $\mathrm{CB}^n_A(D) \geqslant \alpha+1$ акко постоји бесконачно много међусобно дисјунктних A дефинабилних скупова $D_i \subseteq D$ таквих да је $\mathrm{CB}^n_A(D_i) \geqslant \alpha$;

(3) За гранични ординал α: $\mathrm{CB}^n_A(D) \geqslant \alpha$ акко $\mathrm{CB}^n_A(D) \geqslant \beta$ за свако $\beta < \alpha$.

$\mathrm{CB}^n_A(D) = \alpha$ ако је $\mathrm{CB}^n_A(D) \geqslant \alpha$ и није $\mathrm{CB}^n_A(D) \geqslant \alpha + 1$.

Дакле, ако је A дефинабилни скуп D ранга α, онда може бити највише коначна дисјунктна унија A дефинабилних скупова ранга α. Ако се D не може распарчати на два A дефинабилна скупа истог ранга, онда кажемо да је Кантор-Бендиксонов степен скупа D један и пишемо $\deg^n_A(D) = 1$. Ако се D може написати као дисјунктна унија фамилије A дефинабилних скупова $\{D_1, \ldots, D_k\}$ истог ранга као D, онда је $\deg^n_A(D) \geqslant k$. $\deg^n_A(D) = k$ ако је $\deg^n_A(D) \geqslant k$ и није $\deg^n_A(D) \geqslant k + 1$.

Приметимо да ако је $\mathrm{CB}^n_A(D) = \alpha$ и $\deg^n_A(D) = k$ и то сведочи фамилија $\{D_1, \ldots, D_k\}$, онда је $\mathrm{CB}^n_A(D_i) = \alpha$ и $\deg^n_A(D_i) = 1$.

Ако је $\mathrm{CB}^n_A(D) = \alpha$ за A дефинабилни скуп D, онда:

(1) $\deg^n_A(D) \geqslant k$ акко постоје A дефинабилни скупови $D_1, \ldots D_k$, такви да
   (а) $D \supseteq D_1 \cup \cdots \cup D_k$;
   (б) $\mathrm{CB}^n_A(D_i \cap D_j) < \alpha$, за $i \neq j$;
   (ц) $\mathrm{CB}^n_A(D_i) = \alpha$.

(2) $\deg^n_A(D) = k$ акко постоје A дефинабилни скупови $D_1, \ldots D_k$, такви да
   (а) $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$;
   (б) $\mathrm{CB}^n_A(D_i \cap D_j) < \alpha$, за $i \neq j$;
   (ц) $\mathrm{CB}^n_A(D_i) = \alpha$;
   (д) $\deg^n_A(D_i) = 1$.

Ако постоје A дефинабилни скупови $D_1, \ldots D_k$ и $E_1, \ldots, E_m$, такви да важи

(1) $D_1 \cup \cdots \cup D_k = E_1 \cup \cdots \cup E_m$;
(2) $\mathrm{CB}^n_A(D_i \cap D_j) < \alpha$, за $i \neq j$;
(3) $\mathrm{CB}^n_A(E_i \cap E_j) < \alpha$, за $i \neq j$;
(4) $\mathrm{CB}^n_A(D_i) = \alpha = \mathrm{CB}^n_A(E_j)$;
(5) $\deg^n_A(D_i) = 1 = \deg^n_A(E_j)$,

онда је $k = m$ и постоји σ, пермутација скупа $\{1, \ldots, k\}$ таква да је $\mathrm{CB}^n_A(D_i \cap E_{\sigma(i)}) < \alpha$.

Приметимо да $\mathrm{CB}_M(D) = 0$ важи тачно за коначне непразне скупове и тада је $\deg_M(D) = k$ ако и само ако је $|D| = k$. За M дефинабилан скуп D за који је $\mathrm{CB}_M(D) = 1$ и $\deg_M(D) = 1$ кажемо да је минималан. Дакле, $D \subseteq M$ је минималан ако је бесконачан дефинабилан скуп и не може се поделити на два бесконачна дефинабилна скупа. Ако су D_1 и D_2 два минимална скупа, онда за њих постоје тачно две могућности:

1) $D_1 \cap D_2$ је коначан скуп;

2) $D_1 \Delta D_2$ је коначан скуп.

$\mathrm{CB}_M(D) = 1$ и $\deg_M(D) = k$ ако и само ако постоје минимални скупови $\{D_1, \ldots, D_k\}$ такви да је $D_i \cap D_j$ коначан скуп кад год је $i \neq j$ и $D = \bigcup\{D_1, \ldots, D_k\}$.

Нека је $\mathcal{M}$ подструктура структуре $\mathcal{N}$. Кажемо да је $\mathcal{M}$ елементарна подструктура структуре $\mathcal{N}$ и пишемо $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ ако за сваку L формулу $\phi(\bar{x})$ и свако $\bar{m} \in M$ важи:

$$\mathcal{N} \models \phi(\bar{m}) \text{ акко } \mathcal{M} \models \phi(\bar{m}).$$

Тврђење 1.4. Вотов тест: Ако је $\mathcal{M}$ подструктура структуре $\mathcal{N}$, онда је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ акко за сваку формулу $\phi(\bar{t}, x)$ језика L и свако $\bar{m} \in M$ важи:

Ако је $\mathcal{N} \models \exists x \phi(\bar{m}, x)$, онда постоји $a \in M$ такво да је $\mathcal{N} \models \phi(\bar{m}, a)$.

Нека су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ структуре језика L, нека је $A \subseteq M$ и $F : A \to N$ такво да за сваку формулу $\phi(\bar{x})$ језика L и свако $\bar{a} \in A$ које је исте дужине као $\bar{x}$ важи

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \text{ ако и само ако } \mathcal{N} \models \phi(F(\bar{a})),$$

онда за F кажемо да је елементарно пресликавање. Наводимо неколико чињеница везаних за елементарна пресликавања:

- Нека је $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Тада је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ акко је идентитета елементарно пресликавање.
- Нека је $A \subseteq M$ и $F : A \to N$. Тада је F елементарно пресликавање акко је $\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(F(\bar{a}))$ за сваки коначан низ елемената $\bar{a}$ из A.
- Изоморфизам је елементарно пресликавање.
- Нека је $A \subseteq M$ и нека је $F : A \to N$ елементарно пресликавање. Тада постоје $\mathcal{N}_1$ и $G : M \to N_1$ такви да је $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{N}_1$ и да је G елементарно утапање које продужава F.
- Нека је $A \subseteq M$ и нека је $F : A \to M$ елементарно пресликавање. Тада постоје $\mathcal{M}_1$ и $G \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}_1)$ такви да је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{M}_1$ и да G продужава F. Специјално, ако је $\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$ за нека два коначна низа елемената из M, онда постоји $\mathcal{M}_2$ елементарно раширење структуре $\mathcal{M}$ и аутоморфизам структуре $\mathcal{M}_2$ такав да $\bar{a}$ слика у $\bar{b}$.

4. Засићене структуре, универзум теорије

Тврђење 1.5. Нека је $\aleph_0 \leqslant \kappa \leqslant |\mathcal{M}|$. Следећи искази су еквивалентни.

(1) Сваки 1-тип над A је реализован у $\mathcal{M}$ кад год је $A \subseteq M$ такво да је $|A| < \kappa$;

(2) За сваки природан број n, сваки n-тип над A је реализован у $\mathcal{M}$ кад год је $A \subseteq M$ такво да је $|A| < \kappa$.

Дефиниција 1.6. Нека је κ бесконачан кардинал.

(1) Структура $\mathcal{M}$ је <u>κ засићена</u> ако реализује сваки тип над A, кад год је $A \subseteq M$ такво да је $|A| < \kappa$. Она је <u>засићена</u> ако је $|\mathcal{M}|$ засићена.
(2) Структура $\mathcal{M}$ је <u>κ хомогена</u> ако се свако елементарно пресликавање $F : A \to M$, за свако $m \in M$ може продужити до елементарног $F_1 : A \cup \{m\} \to M$, кад год је $A \subseteq M$ такво да је $|A| < \kappa$. Она је <u>хомогена</u> ако је $|\mathcal{M}|$ хомогена.
(3) Структура $\mathcal{M}$ је <u>јако κ хомогена</u> ако се свако елементарно пресликавање $f : A \to M$ може продужити до аутоморфизма кад год је $A \subseteq M$ такво да је $|A| < \kappa$.
(4) Структура $\mathcal{M}$ је <u>κ универзална</u> ако се сваки $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ кардиналности мање од κ елементарно утапа у $\mathcal{M}$. Она је <u>универзална</u> ако је $|\mathcal{M}|^+$ универзална.

Напомена 1.7. Структура $\mathcal{M}$ је κ засићена ако за свако $A \subseteq M$ такво да је $|A| < \kappa$ и свако $\mathbf{T}_A^{\mathcal{M}}$, фамилију скупова из $\mathbf{D}_n^{\mathcal{M}}(A)$ која има својство коначног пресека важи да има непразан пресек.

Тврђење 1.8. Нека је T потпуна теорија језика L и $\kappa = 2^{<\kappa} \geqslant \|L\|$. Постоји засићен модел теорије T кардиналности κ.

Тврђење 1.9. Ако је структура $\mathcal{M}$ хомогена, онда је јако $|\mathcal{M}|$ хомогена.

Тврђење 1.10. Структура $\mathcal{M}$ је κ засићена акко је κ хомогена и κ^+ универзална.

Тврђење 1.11. Нека је $\mathcal{M}$ засићена структура, $D \subseteq M^n$ скуп дефинабилан параметрима из M и $A \subseteq M$ такав да је $|A| < |M|$. Скуп D је дефинабилан формулом са параметрима из A ако и само ако сваки аутоморфизам структуре $\mathcal{M}$ који фиксира све елементе скупа A фиксира скуп D.

Нека је $\mathcal{M}$ засићена структура моћи κ и T њена потпуна теорија. Због универзалности се сваки модел теорије T кардиналности не веће од κ елементарно утапа у $\mathcal{M}$. Другим речима, ако је $\mathcal{N} \models T$ и $|\mathcal{N}| \leqslant \kappa$, онда постоји његова копија $\mathcal{N}' \preccurlyeq \mathcal{M}$. Зато је свако својство првог реда које је инваријантно под изоморфизмима и које имају модели теорије T кардиналности не веће од κ сачувано у некој елементарној подструктури структуре $\mathcal{M}$. При том је свака елементарна подструктура структуре $\mathcal{M}$ одређена својим скупом носачем. Друга важна особина засићених структура је хомогеност. Ако је $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}$ и $A \subseteq M$, онда се свако елементарно пресликавање из A у $\mathcal{N}$ продужава до аутоморфизма структуре $\mathcal{M}$. Специјално ако су $\mathcal{N}_i \preccurlyeq \mathcal{M}$, и F елементарно утапање из $\mathcal{N}_1$ у $\mathcal{N}_2$, онда се F продужава до утапања из $\mathcal{N}_2$ у $\mathcal{M}$.

Посматрајмо следећу ситуацију: рецимо да желимо да покажемо да сваки модел потпуне теорије T има неко својство. Претпоставимо да T има засићене моделе прозвољно велике кардиналности (у општем случају, за то су потребне додатне скуповно теоријске претпоставке; у светлу тврђења 1.8, довољно је претпоставити да за сваки кардинал λ постоји $\kappa = 2^{<\kappa} \geqslant \lambda$). Ако фиксирамо $\mathcal{M}$ засићен модел теорије T кардиналности κ и докажемо тврђење за све елементарне подструктуре структуре $\mathcal{M}$ чија кардиналност је мања од $|\mathcal{M}|$, онда смо доказали тврђење за све моделе теорије T који су кардиналности мање од κ. Ако наш доказ не зависи од κ, онда је то заправо доказ тврђења за све моделе теорије T. Та независност од κ се постиже на следећи начин: Ако се наш доказ релативизације тврђења „за све моделе теорије T" на „за све елементарне подструктуре структуре $\mathcal{M}$" простом заменом $\mathcal{M}$ са $\mathcal{N}$ преводи на доказ релативизације почетног тврђења на доказ релативизације истог тврђења на другу засићену структуру $\mathcal{N}$, онда не зависи од κ, тј. то је доказ оригалног тврђења. Из тог разлога се често засићен модел теорије T „велике" кардиналности може сматрати универзалним (у зависности од тога шта је предмет нашег истраживања) за моделе теорије T које видимо као елементарне подмоделе изабраног засићеног модела.

Дефиниција 1.12. Нека је T потпуна теорија и $\mathcal{U}$ њен засићен модел произвољно велике кардиналности. За $\mathcal{U}$ кажемо да је <u>универзални домен теорије T</u> или да је <u>универзум теорије T</u>.

У литератури се може наћи и назив „монструм модел" за универзум. Када се ради у универзуму, онда за скупове $A \subseteq U^n$ такве да је $|A| < |\mathcal{U}|$ кажемо да су мали, за структуре чији је скуп носач мали кажемо да су мале и кад кажемо „$\mathcal{M}$ је модел теорије T" мислимо на „$\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{U}$", где је $\mathcal{M}$ мала структура. Често изостављамо придев мали и само кажемо скуп или модел. Чињеница да радимо са елементарним подструктурама универзума доводи до следеће ситуације: када кажемо да је a елемент, мислимо на елемент структуре $\mathcal{U}$, ако је $\mathcal{M}$ модел теорије $T = \mathrm{Th}(\mathcal{U})$, који садржи елемент a и ϕ формула, тада важи $\mathcal{M} \models \phi(a)$ ако и само ако $\mathcal{U} \models \phi(a)$. Зато пишемо $\models \phi(a)$ уместо $\mathcal{U} \models \phi(a)$ или $\mathcal{M} \models \phi(a)$. Пошто је термин „модел теорије T" резервисан за елементарне подструктуре структуре $\mathcal{U}$, онда, ако апсорбујемо елементе структуре $\mathcal{M}$ у језик имамо јединствено одређену интерпретацију симбола нових константи. Кад кажемо тип, мислимо на тип са параметрима из неког малог скупа. За скуп реализација $p(\mathbb{U})$ кажемо да је <u>локус типа p</u>. За тип из $S^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ је резервисан термин <u>глобални тип</u>. За $\bar{a}$, низ елемената из $\mathcal{U}$ и мали скуп A, важи следеће: Кад год је $A \cup \bar{a} \subseteq \mathcal{M}$, онда је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}^{\mathcal{U}}(\bar{a}/A)$. Зато користимо ознаку $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ мислећи на $\mathrm{tp}^{\mathcal{U}}(\bar{a}/A)$ и на $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A)$ кад год је $A \cup \bar{a} \subseteq \mathcal{M}$. Такође, уместо $\mathrm{dcl}^{\mathcal{U}}(A)$ пишемо $\mathrm{dcl}(A)$.

Дефиниција 1.13. Нека је T потпуна теорија и $\Pi(\bar{x})$ неки скуп формула њеног језика.

а) Кажемо да $\Pi(\bar{x})$ форсира формулу $\sigma(\bar{x})$, у ознаци $\Pi(\bar{x}) \vdash_T \sigma(\bar{x})$, ако је свака реализација скупа $\Pi(\bar{x})$ у сваком моделу теорије T уједно и решење формуле $\sigma(\bar{x})$.

б) Кажемо да $\Pi(\bar{x})$ форсира скуп формула $\Sigma(\bar{x})$, у ознаци $\Pi(\bar{x}) \vdash_T \Sigma(\bar{x})$ ако за сваку формулу $\sigma(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$ важи $\Pi(\bar{x}) \vdash_T \sigma(\bar{x})$.

Због компактности, лако је видети да $\Pi(\bar{x}) \vdash_T \phi(\bar{x})$ важи ако и само ако за неки коначан подскуп $\Pi_0(\bar{x}) \subseteq \Pi(\bar{x})$ важи

$$T \models (\forall \bar{x}) \left(\bigwedge \Pi_0(\bar{x}) \Longrightarrow \phi(\bar{x})\right).$$

Још један еквивалентан услов је да $\Pi(\mathcal{U}) \subseteq \phi(\mathcal{U})$ важи у бар једном (еквивалентно сваком) засићеном моделу $\mathcal{U}$ теорије T. Слично је и $\Pi(\bar{x}) \vdash_T \Sigma(\bar{x})$ еквивалентно са $\Pi(\mathcal{U}) \subseteq \Sigma(\mathcal{U})$. Уколико је $p(\bar{x})$ потпуни тип, он садржи потпуну теорију T, па је тада $p(\bar{x}) \vdash_T \phi(\bar{x})$ исто што и $p(\bar{x}) \vdash \phi(\bar{x})$. Приметимо да формула $\phi \in p$ изолује тип p ако и само ако ϕ форсира p. Очигледно је да је $\vdash_T$ транзитивна релација. Уколико је T јасна из контекста изостављамо индекс.

5. Дефинициона еквивалентност

Појам дефиниционе еквивалентности се може увести на два начина: семантички и синтаксни.

Семантика: Ако две структуре са истим скупом носачем имају исте дефинабилне скупове, онда за њих кажемо да су дефиниционо еквивалентне.

Кажемо да је $\mathcal{M}$ дефинициона експанзија структуре $\mathcal{M}'$ ако је експанзија (новим релацијама, функцијама и константама) и ако су структуре $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ дефиниционо еквиваленте.

То практично значи да се дефиниционе експанзије структуре $\mathcal{M}'$ добијају тако што се њеном језику додају имена неких дефинабилних елемената, функција и релација (и онда се нови симболи интерпретирају као дефинабилни скупови чија су имена). Стандардан пример је структура поља реалних бројева $\mathcal{M}' = (R, +, \cdot, 0, 1)$ у којој се може дефинисати линеарно уређење „x је мање од y" формулом $\exists t \neq 0 (y = x + t \cdot t)$. Додавањем имена $<$ за нову релацију, проширили смо језик и добили уређено поље реалних бројева $\mathcal{M} = (R, +, \cdot, 0, 1, <)$, али нисмо додали нове дефинабилне скупове. Са друге стране, ако „заборавимо" константе у структури $\mathcal{M}$ и на тај начин добијемо структуру $\mathcal{M}'' = (R, +, \cdot, <)$ и даље имамо исте дефинабилне скупове јер

$$\mathcal{M} \models x = 0 \Longleftrightarrow \phi(x), \quad \text{где је } \phi(x) \text{ формула} \quad \forall y (x + y = y) \quad \text{и}$$

$$\mathcal{M} \models x = 1 \Longleftrightarrow \psi(x), \quad \text{где је } \psi(x) \text{ формула} \quad \forall y (x \cdot y = y).$$

Из тог разлога формуле $\theta(\bar{x},0,1)$ у $\mathcal{M}$ дефинишу исте скупове које формуле $(\exists y,z)(\theta(\bar{x},y,z)\wedge\phi(y)\wedge\psi(z))$ дефинишу[3] у $\mathcal{M}''$. Дакле, структура $\mathcal{M}''$ је дефиниционо еквивалентна структури $\mathcal{M}$, а тиме и структури $\mathcal{M}'$. Није тешко закључити да важи следеће тврђење, као што је то илустровано за структуре $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}''$ претходним примером.

Тврђење 1.14. (1) Две структуре са истим скупом носачем су дефиниционо еквивалентне ако и само ако је интерпретација симбола језика једне структуре дефинабилан скуп у другој структури.

(2) Две структуре са истим скупом носачем су дефиниционо еквивалентне ако и само ако имају заједничку дефинициону експанзију.

Доказ. (1) С обзиром на то како се дефинабилни скупови у структури $\mathcal{M}$ граде од скупова $\{c^{\mathcal{M}}\}$, $R^{\mathcal{M}}$ и графова функција $f^{\mathcal{M}}$, то ће сваки дефинабилни скуп у $\mathcal{M}$ бити и дефинабилан у $\mathcal{N}$ (где је $M=N$) ако су дефинабилни поменути скупови $\{c^{\mathcal{M}}\}$, $R^{\mathcal{M}}$ и графови функција $f^{\mathcal{M}}$.

(2) Ако $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ имају заједничку дефинициону експанзију $\mathcal{M}$, јасно је да су дефиниционе еквивалентне.
За други смер, ако су $\mathcal{M}_n=(M,c_{i_n}^{\mathcal{M}_n},R_{j_n}^{\mathcal{M}_n},f_{k_n}^{\mathcal{M}_n})_{i_n\in I_n,j_n\in J_n,k_n\in K_n}$ дефиниционо еквивалентне структуре, онда је

$$\mathcal{M}=(M,c_{i_1}^{\mathcal{M}_1},c_{i_2}^{\mathcal{M}_2},R_{j_1}^{\mathcal{M}_1},R_{j_2}^{\mathcal{M}_2},f_{k_1}^{\mathcal{M}_1},f_{k_2}^{\mathcal{M}_2})_{i_1\in I_1,i_2\in I_2\smallsetminus I_1,j_1\in J_1,j_2\in J_2\smallsetminus J_1,k_1\in K_1,k_2\in K_2\smallsetminus K_1}$$

заједничка дефинициона експанзија. □

Синтакса: Нека је $L_1\subseteq L_2$ и T_i потпуна теорија језика L_i. Кажемо да је T_2 дефинициона експанзија теорије T_1 ако:

(1) $T_1\subseteq T_2$;

(2) за сваку L_2-формулу $\phi(\bar{x})$ постоји L_1-формула $\psi(\bar{x})$ таква да важи

$$T_2\models\forall\bar{x}(\phi(\bar{x})\iff\psi(\bar{x})).$$

За потпуне теорије T_1 и T_2 кажемо да су дефиниционо еквивалентне ако имају заједничку дефинициону експанзију у неком језику $L\supseteq L(T_1)\cup L(T_2)$.

Напомена 1.15. Ако је T' дефинициона експанзија теорије T, јасно је да се онда сваки модел $\mathcal{M}$ теорије T може проширити до модела $\mathcal{M}'$ теорије T' и тада је $\mathcal{M}'$ дефинициона експанзија структуре $\mathcal{M}$. Ако су теорије T_1 и T_2 дефиниционо еквивалентне, онда, по дефиницији имају заједничку дефинициону експанзију. Означимо је са T'. Ако је $\mathcal{M}'\models T'$ експанзија модела $\mathcal{M}_1\models T_1$ и $\mathcal{M}_2$ редукт структуре $\mathcal{M}'$ на језик теорије T_2, онда су $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ дефиниционо еквивалентне структуре.

[3] Овде смо мало злоупотребили нотацију: записом $\theta(\bar{x},0,1)$ смо истакли сва евентуална појављивања константи 0 и 1.

Тврђење 1.16. Ако је структура $\mathcal{M}$ дефинициона експанзија структуре $\mathcal{N}$, онда је теорија $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ дефинициона експанзија теорије $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Доказ. Нека је $\varphi(\bar{x})$ формула без параметара језика $L(\mathcal{M})$ сагласна са $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Тада је скуп $\varphi(\mathcal{M})$ дефинабилан у структури $\mathcal{N}$ (јер је $\mathcal{M}$ дефинициона експанзија структуре $\mathcal{N}$). Нека је $\psi(\bar{x})$ формула без параметара језика $L(\mathcal{N})$ таква да је $\varphi(\mathcal{M}) = \psi(\mathcal{N})$. Тада $\varphi(\mathcal{M}) = \psi(\mathcal{M})$, па важи

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \iff \psi(\bar{x})).$$

Дакле, $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ је дефинициона експанзија теорије $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$. $\square$

Ако је $\mathcal{M}'$ дефинициона експанзија структуре $\mathcal{M}$, онда сваки n-тип структуре $\mathcal{M}'$ (заправо сваки скуп формула језика $L(\mathcal{M}')$) има јединствено сужење на тип структуре $\mathcal{M}$: Сужење типа је просто скуп $L(\mathcal{M})$-формула које му припадају. Када су у питању потпуни типови, онда је та кореcподенција узајамно једнозначна, па елементе простора $S^{\mathcal{M}}(A)$ и $S^{\mathcal{M}'}(A)$ можемо у извесном смислу поистоветити. Штавише, у питању је изоморфизам тополошких простора $S^{\mathcal{M}}(A)$ и $S^{\mathcal{M}'}(A)$. Ову чињеницу не истичемо у исказу тврђења јер је не користимо у остатку рада.

Тврђење 1.17. Нека су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ дефиниционо еквивалентне структуре, онда:

(1) Сваки аутоморфизам структуре $\mathcal{M}$ је уједно и аутоморфизам структуре $\mathcal{N}$;
(2) Ако је $\mathcal{M}$ засићена структура онда су и $\mathcal{N}$ и њихова заједничка дефинициона експанзија засићене структуре.

Доказ. (1) Нека је F аутоморфизам структуре $\mathcal{M}$. Да бисмо показали да је F аутоморфизам структуре $\mathcal{N}$, довољно је показати да за сваку формулу $\psi(\bar{x})$ језика $L(\mathcal{N})$ и свако $\bar{a} \in N = M$ важи

$$\mathcal{N} \models \psi(\bar{a}) \text{ акко } \mathcal{N} \models \psi(F(\bar{a})).$$

С обзиром да су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ дефиниционо еквивалентне, за сваку формулу $\psi(\bar{x})$ језика $L(\mathcal{N})$, постоји формула $\phi(\bar{x})$ језика $L(\mathcal{M})$ таква да је $\psi(\mathcal{N}) = \phi(\mathcal{M})$. Зато важи низ еквиваленција

$$\mathcal{N} \models \psi(\bar{a}) \text{ акко } \bar{a} \in \psi(\mathcal{N}) \text{ акко } \bar{a} \in \phi(\mathcal{M}) \text{ акко } \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}).$$

С обзиром да је F аутоморфизам структуре $\mathcal{M}$ важиће

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \text{ акко } \mathcal{M} \models \phi(F(\bar{a})).$$

Поново због дефиниционе еквивалентности и чињенице да је $\psi(\mathcal{N}) = \phi(\mathcal{M})$ важиће

$$\mathcal{M} \models \phi(F(\bar{a})) \text{ акко } F(\bar{a}) \in \phi(\mathcal{M}) \text{ акко } F(\bar{a}) \in \psi(\mathcal{N}) \text{ акко } \mathcal{N} \models \psi(\bar{a}).$$

Спајајући истакнуте еквиваленције закључујемо да важи

$$\mathcal{N} \models \psi(\bar{a}) \text{ акко } \mathcal{N} \models \psi(F(\bar{a})),$$

што је требало показати.

(2) Доказ овог дела следи директно из напомене 1.7. □

Следећа лема даје критеријум за утврђивање дефиниционе еквивалентности.

Лема 1.18. Нека су $T' \subseteq T$ редом потпуне теорије језика L' и L, при чему је $L' \subseteq L$. Теорија T је дефинициона екпанзија теорије T' ако и само ако следећи услов важи за свако n и сваку L формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$:

за сваки тип $p \in S_n(T)$ који садржи φ постоји L'-формула $\psi_p(x_1, \ldots, x_n) \in p$ таква да $T \models \psi_p(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказ. Доказаћемо нетривијалан смер. Претпоставимо да је услов из исказа леме испуњен. Скуп $[\varphi(\bar{x})]$ је отворено-затворени подскуп простора $S_n(T)$ који се састоји од свих типова који садрже формулу $\varphi(\bar{x})$. Како се за свако $p \in [\varphi(\bar{x})]$ може наћи L'-формула $\psi_p(\bar{x})$ таква да је задовољен услов из исказа леме, тада $p \in [\psi_p(\bar{x})] \subseteq [\varphi(\bar{x})]$. Из чињенице да је за свако $p \in [\varphi(\bar{x})]$ испуњено $\{p\} \subseteq [\psi_p(\bar{x})]$ следи да је

$$[\varphi(\bar{x})] = \bigcup_{p \in [\varphi(\bar{x})]} \{p\} \subseteq \bigcup_{p \in [\varphi(\bar{x})]} [\psi_p(\bar{x})].$$

Дакле, $\{[\psi_p(\bar{x})] | p \in [\varphi(\bar{x})]\}$ је покривач скупа $[\varphi(\bar{x})]$ који је затворени подскуп простора $S_n(T)$. С обзиром да је $S_n(T)$ компактан Хауздорфов простор, из уоченог покривача може се извући коначан потпокривач скупа $[\varphi(\bar{x})]$. Нека је то $\{[\psi_{p_i}(\bar{x})] \,|\, i \leqslant m\}$. Дакле важи

$$[\varphi(\bar{x})] \subseteq \bigcup_{i \leqslant m} [\psi_{p_i}(\bar{x})].$$

Са друге стране, из $[\psi_{p_i}(\bar{x})] \subseteq [\varphi(\bar{x})]$ следи да важи

$$\bigcup_{i \leqslant m} [\psi_{p_i}(\bar{x})] \subseteq [\varphi(\bar{x})],$$

па мора бити

$$[\varphi(\bar{x})] = \bigcup_{i \leqslant m} [\psi_{p_i}(\bar{x})].$$

То управо значи да је $T \models \varphi(\bar{x}) \Longleftrightarrow \bigvee_{i \leq m} \psi_{p_i}(\bar{x})$, тј. постоји L'-формула која је T-еквивалентна формули $\varphi(\bar{x})$. □

6. Линеарно уређен универзум

Нека је $\mathcal{U} = (U, <, \dots)$ универзум теорије $T = \mathrm{Th}(\mathcal{U})$ велике кардиналности и нека релација $<$ линеарно уређује универзум. Да засићена непребројива линеарно уређена структура није комплетна види се из следећег резоновања. Нека је $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничен и строго растући низ елемената. Ако би $(U, <)$ било комплетно уређење, онда би скуп A имао супремум у U. Тада је скуп формула $\Sigma(x) = \{a_n < x < a \mid n \in \mathbb{N}\}$, где је $a = \sup A$, коначно задовољив (за сваки коначан подскуп $\Sigma_0(x)$ скупа $\Sigma(x)$, нађе се k - највећи индекс елемената $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који учествују у формули из скупа Σ_0 и онда a_{k+1} задовољава сваку формулу из Σ_0), али није задовољив, јер би свака његова реализација била мајоранта, а елемент a је најмања мајоранта скупа A, будући да је његов супремум. То је у контрадикцији са чињеницом да је $\mathcal{U}$ засићен. Дакле, $(U, <)$ не може бити комплетно уређење. Зато неки одозго ограничени скупови немају супремум у U, али се, као што је наведено у поглављу 1.2 („Линеарна уређења”), $\sup B \leqslant \sup A$ може коректно дефинисати, јер у комплетирању уређења $(U, <)$ важи $\sup B \leqslant \sup A$ ако и само ако су све мајоранте скупа A (у уређењу $(U, <)$) уједно и мајоранте скупа B, па ћемо ми ту ознаку користити и за рад у универзуму. Ако је $(U, <)$ уређење без крајева и ако комплетирању уређења $(U, <)$ додамо најмањи и највећи елемент и у њему посматрамо супремум, онда је $\sup B \leqslant \sup A$ добро дефинисано за сваки (не обавезно одозго ограничен) скуп. Приметимо да уколико су скупови D_1 и D_2 подскупови универзума дефинабилни формулом са параметрима из скупа A, онда је својство $\sup D_1 \leqslant \sup D_2$ описиво формулом првог реда са параметрима из скупа A. Наиме, дефинабилно је својство „d је мајоранта скупа D_i” (за које ми користимо ознаку „$D_i \leqslant d$”), па је дефинабилно и својство „за свако d важи: ако је d мајоранта скупа D_2, онда је d мајоранта скупа D_1”. Слично резоновање користимо за инфимум. За формулу $\phi(x)$, нека је

$$\operatorname{cvx}\phi(x) = (\exists y, z)(y \leqslant x \leqslant z \wedge \phi(y) \wedge \phi(z)).$$

Ако је $\phi(\mathcal{U}) = D$, онда је

$$\operatorname{cvx}\phi(\mathcal{U}) = \operatorname{cvx} D = \bigcup_{d_1, d_2 \in D,\ d_1 \leqslant d_2} [d_1, d_2].$$

Формула $\operatorname{cvx}\phi(x)$ дефинише конвексно затворење скупа који дефинише формула $\phi(x)$.

За линеарно уређену структуру $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ кажемо да је дискретна, густа или расута ако је $(M, <)$ дискретно, густо или расуто уређење.

ПОГЛАВЉЕ 2

Дефинабилне кондензације

Идеја техника кондензација је следећа: Линеарно уређење се распарча погодним начином на конвексне делове, тако да је уређајни тип оригиналног уређења одређен (у врло слабом смислу) уређајним типом делова и уређајним типом количничког уређења. Ако на линеарно уређење гледамо као на алгебру са једном бинарном операцијом min, онда кондензације одговарају релацијама конгруенције, па се уређење може проучавати тако што проучавамо количничку алгебру и класе конгруенције. Ако нас интересују класе елементарно еквивалентних линеарних уређења, на пример класа свих модела потпуне теорије линеарних уређења, онда конгруенција мора бити дефинабилна. Услов да кондензација буде дефинабилна је битан јер елементарно еквивалентне структуре имају елементарно еквивалентне количничке структуре. Идеално окружење за изучавање структура првог реда и њихове количничке структуре је Шелахов (Shelah) вишесортни ^{eq} универзум у коме се налазе све количничке структуре као засебне сорте.

Главни циљ овог поглавља је да мотивишемо употребу моделско теоријских метода у изучавању својстава првог реда линеарних уређења, нарочито елементарну еквивалентност. У делу 1 уводимо нотацију и наводимо познате чињенице. Затим укратко уводимо појам итерирања кондензација из угла теорије модела. Потом уводимо нову дефинабилну кондензацију $\mathbf{c}_\delta$ и показујемо како се од линеарног уређења $\mathcal{A}$ добија $c_\delta^{\#}(\mathcal{A})$, линеарно уређење са унарним предикатима такво да се из $c_\delta^{\#}(\mathcal{A})$ може „прочитати” теорија уређења $\mathcal{A}$. То постижемо захваљујући чињеници да $c_\delta^{\#}(\mathcal{A})$ добијамо тако што сваки максимални[1] конвексни комад уређења $\mathcal{A}$ елементарно еквивалентан уређењу $(\mathbb{Q}, <)$ заменимо тачком обојеном бојом G, сваки максимални конвексни комад уређења $\mathcal{A}$ елементарно еквивалентан уређењу $(\omega, <)$ заменимо тачком обојеном бојом W и слично за максималне конвексне комаде елементарно еквивалентним уређењима $(\omega^*, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$ и за максималан конвексан комад који има коначно много елемената.

Као примену метода ове анализе доказаћемо да је потпуна теорија линеарних уређења са највише пребројиво много међусобно дисјунктних унарних предиката, као и потпуна теорија линеарних уређења са коначно много унарних

[1] у смислу да није прави подскуп ниједног другог конвексног комада који му је елементарно еквивалентан

предиката и коначно много конвексних релација еквиваленције интерпретабилна у комплетној теорији (чистог) уређења, односно да је класа линеарних уређења једнаке сложености као класа линеарних уређења којој је придодато највише пребројиво много унарних предиката или класа линеарних уређења којима је придодато коначно много конвексних еквиваленција и унарних предиката.

1. Ознаке и уводни појмови

До краја овог поглавља, кад кажемо *уређење* мислимо на линеарно уређење.

Подсетимо се да је затворени интервал у уређењу $\mathcal{A} = (A, <)$ скуп $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, где су a и , $b \in A$ крајеви или крајње тачке интервала а све остале тачке интервала су унутрашње. Слично важи за отворени интервал. Кажемо да је $b \in A$ непосредни следбеник тачке $a \in A$ ако је $a < b$ и ако интервал $[a, b]$ нема унутрашње тачке. Тада кажемо и да је a непосредни претходник тачке b. Непосредни следбеник и непосредни претходник тачке a су њене суседне тачке. Теорија густих уређења није потпуна. Једна могућност за комплетирање је да посматрамо густа уређења без крајева. Ради краћег записа и лакшег праћења усвајамо следећу конвенцију (а тиме и нестандарну дефиницију).

До краја овог поглавља, под густим уређењем подразумевамо уређење без крајева у коме ниједан елемент нема суседне елементе.

Изоморфизам линеарних уређења је релација еквиваленције: за њене класе кажемо да су уређајни тип или да су тип уређења. Неки од уређајних типова су означени карактеристичним елементима. На пример:

- $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}^*$ су уређајни типови уређења $(\alpha, <)$ и $(\alpha, >)$ тим редом, за сваки ординал α;
- $\boldsymbol{\zeta}$ је уређајни тип уређења $(\mathbb{Z}, <)$;
- $\boldsymbol{\eta}$ је уређајни тип уређења $(\mathbb{Q}, <)$.

Подсетимо се основних операција са уређењима: суме и производа уређења.

Нека је $(I, <_I)$ (линеарно) уређен скуп и нека је $(A_i, <_i)$ линеарно уређење за свако $i \in I$. Тада је сума уређења $(A_i, <_i)$ уређење које се добија тако што сваки елемент скупа I заменимо уређењем A_i. Тачније сума $\oplus_{(I,<_I)}(A_i, <_i)$ је уређење $(A, <)$ које се дефинише на следећи начин:

1. $A = \bigcup_{i \in I}\{i\} \times A_i$
2. $(i, a) < (j, b)$ ако и само ако је $i <_I j$ или је $i = j$ и $a <_i b$.

Лексикографски производ $(I, <_I) \times (A, <)$ је $\oplus_{(I,<_I)}(A_i, <_i)$ где је $(A_i, <_i) = (A, <)$ за свако i. Уобичајено је да изостављамо индексе у запису релација и да уместо $<_I$, $<_i$ пишемо само $<$, јер је из контекста јасно на шта се ознака односи.

$\mathcal{A}$ је линеарно уређена структура са унарним предикатима ако су уређењу додате само унарне релације.

Линеарно уређење $(A, <)$ је дискретно ако сваки елемент који није минимум има непосредног следбеника и ако сваки елемент који није максимум има непосредног претходника. Примери дискретних уређајних типова су $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}^*$ и $\boldsymbol{\zeta}$, док $\boldsymbol{\omega} + \mathbf{1}$ није дискретно зато што максимум нема непосредног претходника. Слично, $1 + \boldsymbol{\omega}^*$ није дискретно. Чињеница да је линеарно уређење дискретно се лако изражава реченицом првог реда па је класа дискретних линеарних уређења коначно аксиоматизабилна. Теорију дискретних линеарних уређења обележавамо са dLO. То није потпуна теорија, али се комплетирања могу лако описати. Пошто је свако коначно уређење дискретно, за свако n је теорија линеарног уређења са тачно n елемената једно комплетирање теорије dLO. Што се тиче бесконачних дискретних линеарних уређења, разграничење је постојање или непостојање максималног и/или минималног елемента. Зато постоје тачно четири комплетирања теорије бесконачних дискретних линеарних уређења. Детаљи се могу наћи у [**10**]. На пример, теорија $\mathrm{Th}(\omega, <, S, 0)$, где је S функција следбеника, је означена са dLO^+. Показаје се да dLO^+ има елиминацију квантификатора и да су њени модели тачно неограничена дискретна линеарна уређења која имају минимум и функцију следбеника. Уређајни тип модела теорије dLO^+ је $\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{L}$ за јединствен уређајни тип $\mathbf{L}$ (или $\mathbf{L} = \emptyset$).

Постоје следеће класе уређајних типова дискретних уређења:

(W) $\quad \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{L}$

(W^*) $\quad \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{L} + \boldsymbol{\omega}^*$

(Z) $\quad \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{L}$

(C_∞) $\quad \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{L} + \boldsymbol{\omega}^*$

(C_n) $\quad \boldsymbol{n}.$

Нека је $dLO_{(i,j)}$ за $i, j \in \{0, 1\}$ теорија dLO са две додате аксиоме; једна која каже да постоји минимални елемент ако и само ако је $i = 1$ и друга која каже да постоји максимални елемент ако и само ако је $j = 1$. Приметимо да свака од теорија $dLO_{(i,j)}$ има коначан скуп аксиома.

Напомена 2.1. (1) $dLO_{(1,0)}$ је потпуна и аксиоматизује тип уређења (W).

(2) $dLO_{(0,1)}$ је потпуна и аксиоматизује тип уређења (W^*).

(3) $dLO_{(0,0)}$ је потпуна и аксиоматизује тип уређења (Z).

(4) $dLO_{(1,1)}$ је непотпуна и аксиоматизује линеарна уређења чији је тип уређења у неком (C_ξ) за $\xi \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Нека је $\mathcal{A} = (A, <)$ линеарно уређење. Кажемо да је релација еквиваленције на A конвексна ако су њене класе конвексни подскупови скупа A. За сваку конвексну релацију e на A нека је $e(A) = \{[a]_e \mid a \in A\}$ њен количнички скуп на коме дефинишемо: $[a]_e \leqslant_e [b]_e$ ако и само ако је $a' \leqslant b'$ за неко $a' \in [a]_e$ и $b' \in [b]_e$. Тада је $e(\mathcal{A}) = (e(A), <_e)$ линеарно уређење за које кажемо да је кондензација уређења $\mathcal{A}$ конвексном еквиваленцијом e. Такође, за e кажемо да је релација кондензације на A. Нотација $e(A)$ није случајна; ознаку e користимо и за канончко пресликавање које A слика на $e(A)$. Дакле, e ће означавати и релацију еквиваленције и пресликавање. Кад год значење ознаке e није јасно из контекса, експлицитно ћемо навести да ли се ознака односи на релацију или пресликавање e. Пресликавање e је епиморфизам (сурјективни хомоморфизам) линеарних уређења; подсетимо се да је $f : A \longrightarrow B$ хомоморфизам из $\mathcal{A}$ у линеарно уређење $\mathcal{B} = (B, <')$ ако $a \leqslant a'$ повлачи $f(a) \leqslant' f(a')$ за све $a, a' \in A$. Са друге стране, сваки хомоморфизам $g : A \longrightarrow B$ индукује релацију еквиваленције e на A одређену са $g(x) = g(y)$. Копију уређења $\mathcal{A}$ реконструишемо из његове кондензације $e(\mathcal{A})$ тако што сваки елемент $[x]_e$ заменимо копијом уређења $([x]_e, <)$:

$$\mathcal{A} \cong \oplus_{[x]_e \in e(A)}([x]_e, <).$$

Као што је споменуто у уводу, идеално окружење за анализу струкутуре првог реда у којој посматрамо и дефинабилне хомоморфизме су Шелахове eq-експанзије оригиналне структуре, у којој се налазе копије свих хомоморфних слика. За $\mathcal{M}$, структуру првог реда језика L, структура $\mathcal{M}^{eq}$ је вишесортна структура која шири структуру $\mathcal{M}$. Језик структуре $\mathcal{M}^{eq}$ има имена сорти S_E за сваку дефинабилну релацију еквиваленције E на скупу M^n (подсетимо се да овде под дефинабилношћу подразумевамо $L_{\omega,\omega}$-дефинабиност). Подсетимо се да у језику вишесортне структуре свака променљива има назначено име (своје) сорте, као и место у релацијском и функцијском симболу; ниједна променљива се не интерпретира ван сорте чије име носи. Слично важи за релацијске и функцијске симболе.

За свако E постоји функцијски симбол π_E такав да су променљиве $x_1, \ldots, x_n$ у $\pi_E(x_1, \ldots, x_n) = Y$ из сорте $S_=$ и Y је из сорте S_E. Сви остали симболи језика су они који се интерпретирају у $\mathcal{M}$ и односе се само на сорту $S_=$.

$\mathcal{M}^{eq}$ се дефинише на следећи начин. Сорта $S_=(\mathcal{M}^{eq})$ је $\mathcal{M}$ и за њу кажемо да је оригинална сорта. Скуп носач сорте $S_E(\mathcal{M})$ је M^n/E и за E различито од релације $=$, ниједан симбол језика се не интерпретира у њој. Сва структура коју сорта $S_E(\mathcal{M})$ има се наслеђује из оригиналне сорте (каноничком) пројекцијом π_E из M^n на M^n/E. Испоставља се да је дефинабилни скуп у сорти S_E ($\subseteq (M/E)^m$) пројекција при π_E неког дефинабилног подскупа скупа $\mathcal{M}$; специјално, у сорти $S_=$ (тј. $\mathcal{M}$) нема нових дефинабилних скупова. Посебно, ако је $\mathcal{M}$ алгебра и E дефинабилна конгруенција, тада је количничка алгебра репрезентована у сорти S_E. Посебно, ако је $\mathcal{M}$ линеарно уређење, тада копију сваке његове дефинабилне кондензације можемо пронаћи у некој сорти $\mathcal{M}^{eq}$. Структура $\mathcal{M}^{eq}$ садржи и сорту која одговара скупу M^n: узмимо једнакост као релацију еквиваленције на скупу M^n. Ову сорту означавамо и са $S_{=^n}$, или само са S_n. Детаље о $\mathcal{M}^{eq}$ читалац може наћи у [**9**] и [**11**]. Овде ћемо навести неке основне чињенице.

Чињеница 2.2. (а) Сваки у $\mathcal{M}^{eq}$ дефинабилни подскуп скупа M^n је дефинабилан у $\mathcal{M}$.

(б) Свако елементарно утапање из $\mathcal{M}$ у $\mathcal{N}$ продужава се јединствено до елементарног утапања из $\mathcal{M}^{eq}$ у $\mathcal{N}^{eq}$.

(в) $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ повлачи $\mathcal{M}^{eq} \equiv \mathcal{N}^{eq}$.

(г) Потпуна теорија првог реда T има природно вишесортно проширење T^{eq} такво да $\mathcal{M} \models T$ ако и само ако $\mathcal{M}^{eq} \models T^{eq}$.

(д) Нека је E дефинабилна еквиваленција на M^n и $\pi : S_n(M) \to S_E(M)$ природна пројекција. Ако је $\mathcal{N}$ елементарна подструктура сорте $S_E(\mathcal{M})$, тада је и $\pi^{-1}[\mathcal{N}]$ елементарна подструктура структуре сорте $S_n(\mathcal{M})$.

Нека је $\mathcal{M} = (M, \dots)$ структура језика L и нека је $\mathcal{M}_1 = (M_1, R, \dots, f \dots)$ структура језика L_1. Кажемо да је структура $\mathcal{M}_1$ интерпретабилна у структури $\mathcal{M}$ ако постоји n, дефинабилна еквиваленција E на M^n, дефинабилан скуп $D \subseteq M^n$ и бијекција $F : D/E \longrightarrow M_1$ таква да је за сваку основну релацију $R \subseteq M_1^m$ скуп $F^{-1}(R) \subset M^{m \cdot n}$ дефинабилан у $\mathcal{M}$ и слично за сваку основну функцију. На пример, кад год именујемо неке дефинабилне подскупове у фиксираној сорти из $\mathcal{M}^{eq}$, тада је тако добијена структура (чији је скуп носач сорта) интерпретабилна у $\mathcal{M}$.

2. Композиције и итерације $L_{\infty,\infty}$-дефинабилних кондензација

Подсетимо да је $L_{\kappa,\lambda}$ формула (овде су κ и λ бесконачни кардинали) она чије су конјункције величине $< \kappa$ док јој се квантификатори примењују на $< \lambda$ променљивих. Кад за φ кажемо да је $L_{\infty,\infty}$ формула мислимо да је φ $L_{\kappa,\lambda}$ формула за неко κ, λ. $L_{\infty,\infty}$ реченице се чувају изоморфизмима.

У линеарним уређењима су обично интересантне конвексне еквиваленције које су дефинисане $L_{\infty,\infty}$ формулама језика $\{<\}$ такве да њихова дефинициона формула дефинише еквиваленцију са конвексним класама у било ком линеарном уређењу. У овом случају тип изоморфизма структуре $e(\mathcal{A})$ зависи само од типа изоморфизма структуре $\mathcal{A}$, па такве формуле могу бити посматране као формуле које дефинишу кондензације на уређајним типовима. Зато за $L_{\kappa,\lambda}$

формулу језика $\{<\}$ кажемо да је кондензујућа формула ако дефинише кондензујуће релације на било ком линеарном уређењу. За кондензујуће релације дефинисане њима кажемо да су униформно дефинабилне; ако је дефинициона формула $L_{\kappa,\lambda}$, онда за релацију кажемо да је униформно $L_{\kappa,\lambda}$ дефинабилна. За кондензациону формулу $\epsilon(x,y)$, одговарајућу кондензацију схваћену као пресликавање уређајних типова ћемо означавати са $\mathbf{c}_\epsilon$, кондензацију линеарног уређења $\mathcal{A}=(A,<)$ ћемо означавати са $\mathbf{c}_\epsilon(\mathcal{A})$, њен скуп носач са $\mathbf{c}_\epsilon(A)$

Душник и Милер су у [**2**] увели појам кондензација и навели њихове основне особине. Најпознатији примери униформно дефинабилних кондензација су:

- $\mathbf{c_F}$ где је $F(x,y)$,,$[x,y]$ је коначно";
- $\mathbf{c_W}$ где је $W(x,y)$,,$[x,y]$ је добро уређено";
- $\mathbf{c}_S$ где је $S(x,y)$,,$[x,y]$ је расуто".

Формуле W и S су L_{ω_1,ω_1} формуле, док је F $L_{\omega_1,\omega}$ формула. Више о применама кондензација на анализу линеарних уређења се може наћи у књизи Розенштајна ([**14**]), а овде наводимо само неке интересантне примере итерираних кондензација.

Пример 2.3. Посматрајмо $(\omega^\omega,<)$ и кондензацију $\mathbf{c_F}$. За добро уређење $(A,<)$ нека је $\Gamma(A)\subseteq A$ скуп свих елемената скупа A који немају непосредних претходника; такве елементе назовимо граничним. Тада је $\Gamma(A)$ и сам добро уређен, па се може дефинисати $\Gamma(\Gamma(A))$. Природно је обележити га са $\Gamma^2(A)$ и индуктивно наставити са $\Gamma^{\beta+1}(A)=\Gamma(\Gamma^\beta(A))$.

Нека је $a\in\omega^\omega$ и b највећи елемент скупа $\Gamma(\omega^\omega)$ који је мањи од a. Тада је a на коначном растојању од елемента b, па је $\mathbf{c_F}(a)=\mathbf{c_F}(b)$. Зато за представника класе $\{b+m\,|\,m\in\omega\}$ можемо узети баш гранични b. Дакле, свака класа еквиваленције садржи тачно један гранични ординал, тако да се $\mathbf{c}_F(\omega^\omega)$ може идентификовати са $\Gamma(\omega^\omega)$, скупом свих граничних ординала испод ω^ω који је такође добро уређен и изоморфан почетном уређењу $(\omega^\omega,<)$: $\boldsymbol{\omega^\omega}=\mathbf{c_F}(\boldsymbol{\omega^\omega})$.
У првој итерацији се елемент a сликао у први гранични мањи од њега $\mathbf{c_F}(a)=b$. Слично претходном разматрању, за сваки елемент $b\in\Gamma(\omega^\omega)$, елемент $\mathbf{c_F}(b)$ је највећи елемент из $\Gamma^2(\omega^\omega)$ који је мањи од b. Дакле, $\mathbf{c_F}^2(a)=\mathbf{c_F}(b)$ је највећи елемент скупа $\Gamma^2(\omega^\omega)$ који је мањи од a. Важи: $\boldsymbol{\omega^\omega}=\mathbf{c_F^2}(\boldsymbol{\omega^\omega})$. Сличним резоновањем се закључује да ће за сваки $n\in\omega$ важити да је $\mathbf{c_F}^n(a)$ је највећи елемент скупа $\Gamma^n(\omega^\omega)$ који је мањи од a. Дакле за свако $n\in\omega$ ће важити: $\boldsymbol{\omega^\omega}=\mathbf{c_F^n}(\boldsymbol{\omega^\omega})$, али не и $\boldsymbol{\omega^\omega}=\mathbf{c}^\omega_\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega^\omega})$. Наиме, за сваки $n\in\omega$ важи: $\mathbf{c_F}(\boldsymbol{\omega^n})=\boldsymbol{\omega^{n-1}}$, $\mathbf{c_F^2}(\boldsymbol{\omega^n})=\mathbf{c_F}(\boldsymbol{\omega^{n-1}})=\boldsymbol{\omega^{n-2}}$, ..., $\mathbf{c_F^{n-1}}(\boldsymbol{\omega^n})=\mathbf{c_F}(\boldsymbol{\omega^2})=\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{c_F^n}(\boldsymbol{\omega^n})=\mathbf{c_F}(\boldsymbol{\omega})=\mathbf{1}$. То заправо значи да се елемент ω^n, као и сви мањи од њега, у n-тој итерацији сликао у 0. Како за сваки $a\in\omega^\omega$ постоји n такав да је $a\leqslant\omega^n$, онда ће за

такво a и n бити $\mathbf{c}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{n}}(a) \leqslant \mathbf{c}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{n}}(\omega^n) = 0$. Дакле, сваки елемент се у коначно много итерација слика у 0. То управо значи да на нивоу ω имамо само једну класу:

$$\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{c}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\omega}}) = \mathbf{c}_{\mathbf{F}}^2(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\omega}}) = \dots \quad \text{и} \quad \mathbf{c}_{\mathbf{F}}^{\omega}(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\omega}}) = \mathbf{1}.$$

Претпоставимо да је $\mathbf{c}$ униформно дефинабилна кондензујућа релација уређајних типова. Као пресликавање, природно се итерира n пута, тј. $\mathbf{c}^n$ се дефинише као одговарајућа композиција. У нашем окружењу одговарајућа дефиниција је у терминима релација еквиваленција. За $L_{\omega,\omega}$ дефинабилне релације, свако коначно итерирање може се идентификовати као сорта у ^{eq} универзуму.

Нека је $\epsilon(x,y)$ кондензујућа $L_{\kappa,\lambda}$ формула и нека је ϕ било која $L_{\kappa,\lambda}$ формула (која може имати много слободних промењљивих). У леми 2.4 ћемо показати да је „$\phi([x]_\epsilon,[y]_\epsilon)$ важи у количничкој структури" изражено формулом $\phi \circ \epsilon(x,y)$ дефинисаном на следећи начин: Формула $\phi\circ\epsilon(x,y)$ се добија из формуле $\phi(x,y)$ тако што:

- свако појављивање подформуле $u < v$ заменимо подформулом

$$\forall u' \forall v' (\epsilon(u,u') \wedge \epsilon(v,v') \Rightarrow u' < v'),$$

(где се промењљиве u', v' не појављују у ϵ, ϕ); на овај начин трансформишемо $x < y$ у $[x]_\epsilon < [y]_\epsilon$.

- свако појављивање подформуле $u = v$ заменимо подформулом $\epsilon(u,v)$.

Приметимо да је $\phi\circ\epsilon(x,y)$ $L_{\kappa,\lambda}$ формула. Како смо ознаку $\bar{x}$ резервисали за коначан низ $(x_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, за потенцијално бесконачан низ $(x_i)_{i<\alpha}$ (за неки ординал α) ћемо користити ознаку $\overrightarrow{x}$.

Лема 2.4. Нека је $\mathcal{A} = (A,<)$ линеарно уређење и $\epsilon(x,y)$ кондензујућа $L_{\infty,\infty}$ формула.Тада за сваку $L_{\infty,\infty}$ формулу $\phi(\overrightarrow{x})$ и сваки низ $\overrightarrow{b}$ елемената из A важи:

$$\mathcal{A} \models \phi\circ\epsilon(\overrightarrow{b}) \text{ ако и само ако } \mathbf{c}_\epsilon(\mathcal{A}) \models \phi([\overrightarrow{b}]_\epsilon).$$

Доказ. Индукцијом по ординалној комплексности формуле ϕ. Ако је ϕ атомска закључак следи из дефиниције; круцијално је да је $\mathbf{c}_\epsilon$ конвексна. Индукциони корак је директан, разматраћемо само егзистенцијални квантификатор. Прво претпоставимо да $\mathcal{A} \models \exists \overrightarrow{y} \phi\circ\epsilon(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{b})$ и изаберимо $\overrightarrow{c}$ у A такво да $\mathcal{A} \models \phi\circ\epsilon(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})$. Индукциона хипотеза повлачи да је $\mathbf{c}_\epsilon(\mathcal{A}) \models \phi([\overrightarrow{c}]_\epsilon, [\overrightarrow{b}]_\epsilon)$, а тиме и $\mathbf{c}_\epsilon(\mathcal{A}) \models \exists\overrightarrow{x}\phi(\overrightarrow{x}, [\overrightarrow{b}]_\epsilon)$. За други смер претпоставимо да $\mathbf{c}_\epsilon(\mathcal{A}) \models \exists\overrightarrow{x}\phi(\overrightarrow{x}, [\overrightarrow{b}]_\epsilon)$ и изаберимо $\overrightarrow{c}'$ такво да $\mathbf{c}_\epsilon(\mathcal{A}) \models \phi([\overrightarrow{c}']_\epsilon, [\overrightarrow{b}]_\epsilon)$. Индукциона хипотеза повлачи да је $\mathcal{A} \models \phi\circ\epsilon(\overrightarrow{c}', \overrightarrow{b})$, а одатле следи да је $\mathcal{A} \models \exists\overrightarrow{x}\phi\circ\epsilon(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{b})$. □

Чињеница 2.5. Ако су $\epsilon(x,y)$ и $\delta(x,y)$ кондензационе $L_{\kappa,\lambda}$ формуле, тада је и $\delta\circ\epsilon(x,y)$ кондензациона $L_{\kappa,\lambda}$ формула. Штавише, ако је $\mathbf{L}$ уређајни тип, онда је $\mathbf{c}_{\delta\circ\epsilon}(\mathbf{L}) = \mathbf{c}_\delta(\mathbf{c}_\epsilon(\mathbf{L}))$. □

Нека је $\epsilon(x,y)$ $L_{\kappa,\lambda}$ формула. Формула $\epsilon^\alpha(x,y)$ се дефинише рекурзивно за ординал α на следећи начин:

(1) $\epsilon^0(x,y)$ је $x=y$, $\epsilon^1(x,y)$ је $\epsilon(x,y)$.

(2) $\epsilon^{\beta+1}(x,y)=\epsilon\circ\epsilon^\beta(x,y)$

(3) За гранични ординал α дефинишимо: $\epsilon^\alpha(x,y)=\bigvee_{\xi<\alpha}\epsilon^\xi(x,y)$.

Очигледно, свака формула $\epsilon^\alpha(x,y)$ је $L_{\kappa+|\alpha|^+,\lambda+|\alpha|^+}$ формула. У следећем запажању наводимо основне особине итерација кондензујућих формула.

Запажање 2.6. Нека је $\epsilon(x,y)$ кондензујућа $L_{\kappa,\lambda}$ формула и нека је $\mathcal{A}=(A,<)$ линеарно уређење.

а) Свако $\mathbf{c}_\epsilon^\alpha$ је конвексна еквиваленција на A.

б) $\mathbf{c}_\epsilon^\alpha\subseteq\mathbf{c}_\epsilon^{\alpha+1}$ и $\mathbf{c}_\epsilon(\mathbf{c}_\epsilon^\alpha(\mathcal{A}))\cong\mathbf{c}_\epsilon^{\alpha+1}(\mathcal{A})$.

в) Ако је α гранични ординал, онда је $\mathbf{c}_\epsilon^\alpha=\bigcup_{\xi<\alpha}\mathbf{c}_\epsilon^\xi$.

г) $\{\mathbf{c}_\epsilon^\xi\,|\,\xi\geqslant 0\}$ је низ неопадајућих подскупова скупа A^2. Ако је $\mathbf{c}_\epsilon^\alpha=\mathbf{c}_\epsilon^{\alpha+1}$, онда је $\mathbf{c}_\epsilon^\alpha=\mathbf{c}_\epsilon^\beta$ за свако $\beta>\alpha$. $\square$

По делу (г) претходног запажања, низ $\{\mathbf{c}_\epsilon^\xi\,|\,0\leqslant\xi\}$ (подскупова скупа A^2) је неопадајући, па је неминовно константан почевши од неког ξ. За најмањи ординал α за које је $\mathbf{c}_\epsilon^{\alpha+1}=\mathbf{c}_\epsilon^\alpha$ кажемо да је $\mathbf{c}_\epsilon$ ранг уређења $\mathcal{A}$. За линеарна уређења за која је $\mathbf{c}_\epsilon(\mathcal{A})=id_A$ кажемо да су $\mathbf{c}_\epsilon$ инертна. $L_{\infty,\infty}$ дефинабилност пресликавања $\mathbf{c}_\epsilon^\xi$ гарантује да $\mathbf{c}_\epsilon$ ранг зависи само од уређајног типа линеарног уређења, па је $\mathbf{c}_\epsilon$ ранг уређајних типова добро дефинисан. Процес итерација се користи за анализу структуре $\mathcal{A}$ и представља низ кондензацијских релација који расте до једног тренутка кад је хомоморфна слика $\mathbf{c}_\epsilon$ инертна.

Од нарочитог интереса су униформне $L_{\omega,\omega}$ дефинабилне кондензације. За дато линеарно уређење $\mathcal{A}$ разматрамо одговарајући део структуре $\mathcal{A}^{eq}$ где су сви дефинабилни хомоморфизми именовани пројекцијским пресликавањима. $\mathbf{c}(\mathcal{A}),\mathbf{c}^2(\mathcal{A}),\dots$ могу бити идентификовани са $\mathcal{A}^{eq}$ сортама.

3. Дискретне/густе кондензације $\mathbf{c}_\delta$

За конвексан подскуп линеарног уређења $(A,<)$ кажемо да је:

- дискретно уређен ако је дискретно уређен рестрикцијом релације $<$;

- густо уређен ако нема ни максимални ни минимални елемент и ако је рестрикцијом релације $<$ густо уређен.

Дефиниција 2.7. За затворени интервал кажемо да је:

- густог типа ако је прави подскуп густо уређеног конвексног подскупа (сетимо се да тај конвексни подскуп нема крајеве);

- дискретног типа ако није густог типа и ако је дискретно уређен (рестрикцијом релације $<$).

Интервал $[a,a]$ има одређен тип: ако није густог типа, с обзиром да је дискретно уређен, онда је дискретног типа. То нам омогућава да дефинишемо тип елемента a: кажемо да је a густог (дискретног) типа ако је такав интервал $[a,a]$.

Постоје интервали који нису ни дискретног ни густог типа. Пример је уређен јединични интервал реалних бројева $\mathcal{A} = ([0,1],<)$. У овом уређењу сам интервал $[0,1]$ није ни дискретног ни густог уређеног типа.

Лема 2.8. Нека је $(A,<)$ линеарно уређење.

(а) Затворен интервал је густог типа ако и само ако је свака његова тачка густог типа.

(б) Све тачке затвореног интервала дискретног типа имају дискретан тип.

(в) Ако је затворени интервал густог (дискретног) типа, онда сваки његов затворени подинтервал има густи (дискретни) тип.

(г) Затворени интервали различитог типа су дисјунктни.

(д) Ако два затворена интервала истог типа имају непразан пресек, онда је њихова унија затворени интервал који има исти тип као почетни.

Доказ. (а) Доказаћемо нетривијалан смер. Претпоставимо да је свака тачка интервала $[a,b]$ густог типа. За свако $c \in [a,b]$ нека је I_c конвексан густо уређен подскуп скупа A који садржи тачку c и нека је I унија свих таквих I_c. Ниједан елемент скупа I није крајња тачка јер ниједан I_c нема крајњу тачку. Директно се проверава да је I конвексан и да је густо уређен. Пошто I_a има тачке ван интервала $[a,b]$ и пошто I садржи цео $[a,b]$, закључујемо да I сведочи да је $[a,b]$ густог типа.

(б) Нека је $[a,b]$ дискретног типа и нека је $c \in [a,b]$. Ако је $a=b$, по дефиницији типа тачке следи да је c дискретног типа. Претпоставимо да је $a \neq b$. Тада c има непосредног претходника или непосредног следбеника, па не може бити садржан у конвексном густом скупу. Дакле, c је дискретног типа.

(в) Нека је $[c,d] \subseteq [a,b]$. Ако је $[a,b]$ густог типа, онда је, по делу (а), свака тачка интервала $[a,b]$, а тиме и интервала $[c,d]$ густог типа. Поново по делу (а) следи да је $[c,d]$ густог типа. У случају кад је $[a,b]$ дискретног типа, довољно је приметити да је конвексни подскуп дискретног уређења дискретно уређен.

(г) По делу (а) је свака тачка интервала густог типа и сама густог типа па, по делу (б), не може бити садржана у интервалу дискретног типа, одакле следи закључак.

(д) Нека су $[a,b]$ и $[c,d]$ истог типа. Ако је један од њих садржан у другом, онда закључак тривијално следи, зато претпоставимо да то није случај. Без умањења општости претпоставимо да је $a < c \leqslant b < d$.

Прво претпоставимо да су $[a,b]$ и $[c,d]$ густог типа. Тада су, по (а), све тачке интервала $[a,b]$ и $[c,d]$ (а тиме и њихове уније) густог типа. Поново по (а), интервал $[a,d]$ је густог типа.

Претпоставимо сад да су $[a,b]$ и $[c,d]$ интервали дискретног типа. Свака унутрашња тачка интервала $[a,d]$ има непосредног претходника и непосредног следбеника, тачка a има непосредног следбеника, тачка d има непосредног претходника, па је (по дефиницији) интервал $[a,d]$ дискретног типа. $\square$

Релација „$[x,y]$ је густог типа" је дефинабилна: постоји формула првог реда $\phi(x,y)$ таква да за свако линеарно уређење $\mathcal{A}=(A,<)$ важи

$$\mathcal{A}\models\phi(a,b) \text{ ако и само ако је } [a,b] \text{ интервал густог типа.}$$

Слично, постоји формула која каже да „$[x,y]$ није густог типа" и да је „$[x,y]$ дискретно уређен" (сетимо се да је теорија дискретног уређења коначно аксиоматизабилна). Зато постоји формула $\delta(x,y)$ у језику $\{<\}$ која каже

$$\text{„интервал } [\min\{x,y\},\max\{x,y\}] \text{ је или густог или дискретног типа".}$$

Специјално, релација „x је густог типа" је дефинабилна у било ком линеарном уређењу.

Тврђење 2.9. Формула $\delta(x,y)$ је кондензациона.

Доказ. Нека је $(A,<)$ линеарно уређење и нека је $E\subseteq A^2$ дефинисан формулом $\delta(x,y)$. Рефлексивност и симетричност следе директно. Да бисмо доказали транзитивност претпоставимо да је $(a,b),(b,c)\in E$, тј. сваки од интервала $[\min\{a,b\},\max\{a,b\}]$ и $[\min\{b,c\},\max\{b,c\}]$ је дискретног или густог типа. Они имају тачку b као заједничку тачку, па, по леми 2.8, имају исти тип и њихова унија је, опет по леми 2.8, истог тог типа. Интервал $[\min\{a,c\},\max\{a,c\}]$ је подинтервал (не обавезно прави подскуп) те уније, па је, поново по леми 2.8, и он сам истог типа као $[\min\{a,b\},\max\{a,b\}]$ и $[\min\{b,c\},\max\{b,c\}]$. Овим је доказана транзитивност релације E, па закључујемо да је она релација еквиваленције. Остаје да се примети да су класе еквиваленције E конвексне. Заиста, $[a]_E$ је унија свих интервала којима је један крај сама тачка a, а други крај је у $[a]_E$. Како је унија конвексних скупова од којих свака два имају непразан пресек такође конвексан, следи да је $[a]_E$ конвексан скуп. Дакле, E је конвексна релација еквиваленције. $\square$

Тврђење 2.10. Нека је $\mathcal{A}=(A,<)$ линеарно уређење.

(а) Сваки пар нетривијалних затворених подинтервала фиксиране $\mathbf{c}_\delta$ класе има исти тип.

(б) Свака $\mathbf{c}_\delta$ класа је или дискретно или густо уређена.

(в) Ако је $a \in A$ дискретног (густог) типа, онда је $[a]_{c_\delta}$ максимум у смислу инклузије у скупу свих конвексних дискретно (густо) уређених подскупова скупа A који садрже тачку a.

Доказ. (а) Претпоставимо да су два нетривијална затворена интервала садржана у истој $\mathbf{c}_\delta$ класи. Конвексно затворење њихове уније је затворени интервал садржан у класи, па је или дискретног или густог типа. Пошто су наши интервали садржани у конвексном затворењу њихове уније, по леми 2.8, сваки од њих има исти тип као то конвексно затворење. Дакле, истог су типа.

(б) Тврђење је очигледно ако је класа једночлана. Зато претпоставимо да је $b \in [a]_{\mathbf{c}_\delta}$ и $a < b$. Први случај је када је $[a, b]$ дискретног типа. Нека $c \in [a]_{\mathbf{c}_\delta}$ није максималан у $[a]_{\mathbf{c}_\delta}$ и изаберимо $d \in [a]_{\mathbf{c}_\delta}$ такво да је $c < d$. По делу (а) интервали $[a, b]$ и $[c, d]$ имају исти тип, па је $[c, d]$ дискретног типа. То специјално значи да c има непосредног следбеника. Слично, ако елемент класе $[a]_{\mathbf{c}_\delta}$ није минималан, онда он има непосредног претходника, па је $[a]_{\mathbf{c}_\delta}$ дискретно уређен релацијом $<$.

У случају да је $[a, b]$ густог типа, довољно је показати да је свака тачка скупа $[a]_{\mathbf{c}_\delta}$ густог типа. Ако је $c \in [a]_{\mathbf{c}_\delta}$, онда је $c < b$ или $a < c$. Ако је $c < b$, онда је интервал $[c, b] \subseteq [a]_{\mathbf{c}_\delta}$, по делу (а), густог типа јер сече $[a, b]$, па је c густог типа. Ако није $c < b$, онда је $a < c$ и тада је интервал $[a, c] \subseteq [a]_{\mathbf{c}_\delta}$,густог типа јер сече $[a, b]$, па је c густог типа.

(в) Остаје да се покаже да $[a]_{\mathbf{c}_\delta}$ не може бити прави подскуп конвексног густо (дискретно) уређеног подскупа скупа A. Нека је K конвексан подскуп густо (дискретно) уређеног скупа A који садржи $[a]_{\mathbf{c}_\delta}$ и нека је $c \in K$. Тада је $[\min\{a, c\}, \max\{a, c\}]$ густог (дискретног) типа, па важи $\models \delta(c, a)$, а тиме и $c \in [a]_{\mathbf{c}_\delta}$, па K не може бити прави надскуп скупа $[a]_{\mathbf{c}_\delta}$. □

Пример 2.11. (1) Класе $\mathbf{c}_\delta$ разлажу $([0, 1]_\mathbb{Q}, <)$ у облик $\mathbf{1} + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{1}$.

(2) Посматрајмо $\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{2}$. Ово уређење се добија из пребројивог густог линеарног уређења (без крајева) тако што му се сваки елемент замени двочланим уређењем. У њему нема тачака густог типа јер сваки елемент има или непосредног претходника или непосредног следбеника. Свака $\mathbf{c}_\delta$ класа се састоји од тачно два суседна елемента и после факторисања ће бити $\mathbf{c}_\delta(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{2}) = \boldsymbol{\eta}$.

Нека је $\mathcal{A} = (A, <)$ линеарно уређење. По тврђењу 2.10, свака c_δ класа еквиваленције је или густа или дискретна. То даје једноставни опис формуле која дефинише тип тачке:

x је густог (дискретног) типа ако и само ако
„$\mathbf{c}_\delta$ класа тачке x је густо (дискретно) уређена".

Дискретно уређење класе можемо разликовати по њиховим теоријама првог реда, као што је истакнуто у напомени 2.1. То можемо урадити тако што проширимо језик додавајући погодне унарне предикате: $W,^* W, Z$ и за свако $n \in \mathbb{N}$ по један унарни предикат C_n. Намерно изостављамо предикат за C_∞ уређајне типове зато што, за разлику од других, у општем линеарном уређењу класе тог уређајног типа нису дефинабилне; другим речима класе линеарног уређења чији је уређајни тип C_∞ нису коначно аксиоматизабилне (лака примена компактности). Међутим, тачке које припадају уређајном типу C_∞ су тип-дефинабилне (пребројивом конјункцијом). Можемо додати предикат и за једину преосталу c_δ класу: G за густо уређену класу и тако добити језик $L^\# = \{<, G, W,^* W, Z\} \cup \{C_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Дефиниција 2.12. За било које линеарно уређење $\mathcal{A} = (A, <)$, са $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A})$ обележавамо $L^\#$ структуру $(\mathbf{c}_\delta(A), <_{\mathbf{c}_\delta}, G^\mathcal{A}, W^\mathcal{A},^* W^\mathcal{A}, Z^\mathcal{A}, C_n^\mathcal{A})_{n\in\mathbb{N}}$, где је свака унарна релација $X^\mathcal{A}$ дефинисана са: $a \in X^\mathcal{A}$ ако и само ако је класа $[a]_{\mathbf{c}_\delta}$ уређајног типа X у $\mathcal{A}$.

Феферман и Вот су 1959. године у раду [3] доказали веома општу теорему која описује елементарне теорије директних $\mathcal{I}$-производа и дисјунктних $\mathcal{I}$-унија L-структура, где је $\mathcal{I}$ структура првог реда неког језика. Ми ћемо користити специјални случај ове теореме у ком су и структура $\mathcal{I}$ и структуре које унирамо линеарна уређења.

Феферман Вотова теорема. Нека је $(I, <)$ линеарно уређење и $\{\mathcal{A}_i | i \in i\}$ и $\{\mathcal{B}_i | i \in i\}$ две фамилије линеарних уређења такве да је $\mathcal{A}_i \equiv \mathcal{B}_i$, за свако $i \in I$. Тада је $\oplus_{i\in I} A_i \equiv \oplus_{i\in I} B_i$.

Лема 2.13. Нека су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ линеарна уређења.

(а) Структура $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A})$ језика $L^\#$ је интерпретабилна у уређењу $\mathcal{A}$.

(б) Ако је $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, тада је и $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A}) \equiv \mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{B})$.

(в) Ако је $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A}) \cong \mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{B})$, тада је $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Доказ. (а) Интерпретирајућа еквиваленција је $\mathbf{c}_\delta$. Остало следи из дефиниције структуре $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A})$, имајући у виду да су сви унарни предикати дефинабилни у језику $\{<\}$.

(б) Следи непосредно из чињенице 2.2(в).

(в) Доказ је директна примена Феферман Вотове теореме. Претпоставимо да је $f : \mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A}) \to \mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{B})$ изоморфизам $L^\#$ структура. За сваки $x \in A$ уређења $([x]_{\mathbf{c}_\delta}, <_\mathcal{A})$ и $(f([x]_{\mathbf{c}_\delta}), <_\mathcal{B})$ имају исти дискретни (W, W^*, C_n, C_∞) или густи (G) тип уређења зато што $[x]_{\mathbf{c}_\delta}$ и $f([x]_{\mathbf{c}_\delta}])$ истовремено задовољавају сваки од унарних предиката језика $L^\#$. Како сваки од тих типова одређује и потпуну елементарну теорију уређења, имамо да $([x]_{\mathbf{c}_\delta}, <_\mathcal{A}) \equiv (f([x]_{\mathbf{c}_\delta}]), <_\mathcal{B})$ важи за све $x \in A$. Према Феферман Вотовој теореми и одговарајуће уређене суме су елементарно еквивалентне, па важи:

$$\mathcal{A} \cong \oplus_{[x]_{\mathbf{c}_\delta} \in \mathbf{c}_\delta(A)}([x]_{\mathbf{c}_\delta}, <_\mathcal{A}) \equiv \oplus_{[x]_{\mathbf{c}_\delta} \in \mathbf{c}_\delta(A)}(f([x]_{\mathbf{c}_\delta}), <_\mathcal{B}) = \oplus_{[y]_{\mathbf{c}_\delta} \in \mathbf{c}_\delta(B)}([y]_{\mathbf{c}_\delta}, <_\mathcal{B}) \cong \mathcal{B}.$$

□

Теорема 2.14. Нека су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ линеарна уређења.Тада важи:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \text{ ако и само ако } \mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A}) \equiv \mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{B}).$$

Доказ. Један смер је доказан у леми 2.13. Даћемо само скицу доказа другог смера, у намери да избегнемо компликовану нотацију. Претпоставимо да је $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A}) \equiv \mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{B})$. Изаберимо засићено уређење $\mathcal{U} \succ \mathcal{A}$ кардиналности веће од $|A|$ и $|B|$. Тада је и $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A})$ елементарна подструктура $L^\#$ структуре $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{U})$ чији су дефинабилни скупови такође дефинабилни и у структури сорте S_{c_δ}. Због засићености уређења $\mathcal{U}$ и структура $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{U})$ је засићена (пресек сваке ,,мале" центриране фамилије дефинабилних скупова је непразан (напомена 1.7)). Сада имамо $c_\delta^\#(\mathcal{B}) \equiv c_\delta^\#(\mathcal{A}) \equiv c_\delta^\#(\mathcal{U})$ па је $c_\delta^\#(\mathcal{B})$ изоморфна некој структури $\mathcal{C}' \prec c_\delta^\#(\mathcal{U})$. Означимо са $\mathcal{C}$ подуређење уређења $\mathcal{U}$ на скупу $\mathbf{c}_\delta^{-1}[C']$. Користећи чињеницу 2.2(д) у $\mathcal{U}^{eq}$ докаже се да је $\mathcal{C} \prec \mathcal{U}$. Тада је $\mathcal{C}' = \mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{C})$, па применом леме 2.13(в) добијамо $\mathcal{B} \equiv \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \equiv \mathcal{U}$. Значи $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$. □

На основу леме 2.13 и теореме 2.14 закључујемо да се анализа модела потпуне теорије линеарног уређења $\mathcal{A}$ може свести на анализу модела потпуне теорије структуре $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A})$. На пример, ако за неко $a \in A$ његова c_δ класа $[a]$ у структури $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A})$ задовољава $W(x)$, то значи да је $[a]$ конвексан подскуп уређења $\mathcal{A}$ облика $(\omega + L \times \mathbb{Z}, <)$ при чему је L неко уређење или празан скуп. Ако тај конвексни подскуп уређења $\mathcal{A}$ заменимо уређењем $(\omega + L_1 \times \mathbb{Z}, <)$ и, евентуално, то урадимо и за друге c_δ класе уређења $\mathcal{A}$, добијемо уређење $\mathcal{A}_1$ које је, према Феферман Вотовој теореми, елементарно еквивалентно почетном $\mathcal{A}$. Овако добијена уређења су једина за која важи $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A}_1) = \mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{A})$. Зато се за дату структуру $\mathbb{B}^\#$ језика $L^\#$ лако конструишу сва могућа чиста уређења $\mathcal{B}$, таква да је $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathcal{B}) = \mathbb{B}^\#$. Уређење $\mathcal{B}$ конструишемо као суму $\oplus_{b \in B^\#}(L_b, <_b)$, при чему је $(L_b, <)$ уређајног типа X акко је $b \in X^{\mathbb{B}^\#}$ (за X из $\{ G, W, ^*W, Z, C_\infty, C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$). Дакле, анализирајући структуру $\mathbb{B}^\#$, анализирамо класу линеарних уређења којима одговара $\mathbb{B}^\#$.

До краја поглавља доказаћемо још два тврђења чији су докази мотивисани претходном анализом. Грубо речено она тврде да су класа свих линеарних уређења, класа свих линеарних уређења са пребројиво много дисјунктних унарних релација и класа линеарних уређења са коначно много унарних релација и конвексних еквиваленција једнако сложене.

Теорема 2.15. Свако линеарно уређење са највише пребројиво много унарних предиката чије су интерпретације по паровима дисјунктне је интерпретабилно у чистом линеарном уређењу, Штавише, ако је оригинално уређење расуто, онда се чисто уређење може изабрати тако да такође буде расуто.

Доказ. Нека је $L = \{<\} \cup \{P_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ где је сваки P_n унаран и нека је $\mathcal{A} = (A, <, P_n^{\mathcal{A}})_{n\in\mathbb{N}}$ структура језика L таква да су $P_n^{\mathcal{A}}$ по паровима дисјунктни подскупови скупа A. Ако унија скупова $P_n^{\mathcal{A}}$ није цело A, онда можемо додати унарни предикат за подскуп скупа A који је остао непокривен. Зато без умањења општости можемо претпоставити да је унија $P_n^{\mathcal{A}}$ цео скуп A.

Нека су $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}_n$ линеарна уређења редом уређајног типа $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\omega}^*$ и $\mathbf{n}$ (за све $n \in \mathbb{N}$). За сваки $a \in A$, нека је $\mathcal{B}_a = \mathbf{L} + \mathbf{F}_{n_a} + \mathbf{R}$, где је n_a јединствено одређен са $a \in P_{n_a}^{\mathcal{A}}$. Дакле, сваки $\mathcal{B}_a$ је уређајног типа $\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{n}_a + \boldsymbol{\omega}^*$. Нека је $\mathcal{B} = \sum_{a\in A} \mathcal{B}_a$. Показаћемо да је $\mathcal{A}$ интерпретабилно у $\mathcal{B} = (B, <')$.

Прво ћемо показати да су $\{a\} \times \mathbf{L}, \{a\} \times \mathbf{F}_{n_a}$ и $\{a\} \times \mathbf{R}$ класе релације $\mathbf{c}_\delta$. Посматрајмо $\{a\} \times \mathbf{L}$ који је дискретног уређајног типа. По тврђењу 2.10(в), довољно је показати да није прави подскуп дискретног конвексног подскупа скупа B. Нека је C дискретан надскуп скупа $\{a\} \times \mathbf{L}$. Он не може садржати тачке десно од $\{a\}\times\mathbf{L}$, јер би онда, с обзиром да је конвексан, садржао минимум скупа $\{a\} \times \mathbf{F}_{n_a}$, а тај минимум нема непосредног претходника, јер би тај претходник био максималан елемент скупа $\{a\}\times\mathbf{L}$, што је немогуће јер је $\{a\}\times\mathbf{L}$ уређајног типа $\boldsymbol{\zeta}$. Слично, C не може имати елементе лево од $\{a\}\times\mathbf{L}$, јер би онда (с обзиром да је конвексан), садржао и $0^* \in \{a'\} \times \mathbf{R}$ за неко $a' < a$. 0^* не може имати непосредног следбеника, што је противречно са чињеницом да је C дискретног уређајног типа. Дакле, $C = \{a\} \times \mathbf{L}$ је максималан конвексан дискретно уређен скуп који садржи a, па је по тврђењу 2.10 он сам класа еквиваленције $\mathbf{c}_\delta$. Сличним аргументима се показује да су $\{a\}\times\mathbf{F}_{n_a}$ и $\{a\}\times\mathbf{R}$ класе еквиваленције релације $\mathbf{c}_\delta$.

Нека је $\phi(x)$ формула која каже да „$[x]_{\mathbf{c}_\delta}$ има обе крајње тачке" (тј. задовољава $dLO_{(1,1)}$); очигледно, $\phi(x)$ дефинише $\bigcup_{a\in A}\{a\} \times F_{n_a}$ у $\mathcal{B}$. Нека је $E(x, y)$ формула која каже да:

- класе $[x]_{\mathbf{c}_\delta}$ и $[y]_{\mathbf{c}_\delta}$ имају заједничку суседну класу чији елементи задовољавају формулу ϕ или
- класе $[x]_{\mathbf{c}_\delta}$ и $[y]_{\mathbf{c}_\delta}$ су суседне и елементи једне од њих задовољавају формулу ϕ.

Тада је E конвексна релација еквиваленције на $\mathcal{B}$ чије су класе $\{a\}\times B_a$. Посматрајмо функцију $f : B/E \longrightarrow A$, дефинисану са $f(\{a\}\times B_a) = a$. Показаћемо да је то интерпретација структуре $\mathcal{A}$ у структури $\mathcal{B}$. За то је довољно показати да су $<$ и $\mathbf{P}_n^{\mathcal{A}}$ дефинабилни. Очигледно је да је $<$ дефинабилно јер је E конвексна.

Нека је $\psi_n(x)$ формула која каже „постоји елемент класе $[x]_E$ чија C_δ класа (у $\mathcal{B}$) има тачно n елемената". Тада је $P_n^{\mathcal{A}}$ пројекција скупа свих решења формуле $\psi_n(x)$ у $\mathcal{B}$. Овим је показано да је $\mathcal{A}$ интерпретабилно у $\mathcal{B}$. „Штавише" део следи из конструкције структуре $\mathcal{B}$. $\square$

Напомена 2.16. Сваки унаран предикат у линеарном уређењу дефинише одређену релацију еквиваленције са конвексним класама. Нека је $(A, <, P)$ линеарно уређење са унарним предикатом. Дефинишимо бинарну релацију на скупу A условом

$$(a, b) \in E_P \text{ ако и само ако интервал } (\min(a, b), \max(a, b)) \text{ је или празан, или је подскуп скупа } P\text{, или је подскуп скупа } A \setminus P.$$

Лако је видети да је E_P дефинабилна, конвексна релација еквиваленције која има две врсте класа: максималне конвексне подскупове скупа P и максималне конвексне скупове дисјунктне са скупом P. Релацију E_P ћемо звати *конвексна P-еквиваленција.*

Опишимо поступак којим за свако линеарно уређење са конвексном релацијом еквиваленције конструишемо линеарно уређење у коме је почетна структура интерпретабилна. Пођимо од такве структуре $\mathcal{A} = (A, <, E)$. Заменимо сваки елемент уређења копијом уређења $(\mathbb{Z}^*, <)$ које је добијено додавањем крајева $-\infty$ и ∞ уређењу целих бројева. У добијеном уређењу $(A_1, <)$ формула $\epsilon(x, y)$ која изражава:

отворени интервал $(\min\{x, y\}, \max\{x, y\})$ је празан или дискретно уређен

дефинише конвексну еквиваленцију чије су класе копије уређења $(\mathbb{Z}^*, <)$ којима смо мењали елементе скупа A. Факторисањем те релације добијамо уређење изоморфно уређењу $(A, <)$. Нека је $\pi_\epsilon : A_1 \to A$ хомоморфизам уређења индукован том релацијом. Релацију E природно преносимо на скуп A_1: нека је $E_1 = \pi_\epsilon^{-1}(E)$. Релација E_1 је конвексна релација еквиваленције и структура $\mathcal{A}$ је интерпретабилна у структури $\mathcal{A}_1 = (A_1, <, E_1)$ при интерпретацији π_ϵ.

Проширимо сада скуп A_1 додавањем копија уређења рационалних бројева на почетак сваке E_1-класе: Формално, посматрајмо скуп $A_2 = A_1 \cup (A_1/E_1) \times \mathbb{Q}$ тако да за све $a, b \in A_1$ и $q \in \mathbb{Q}$ важи

$$a < ([b]_{E_1}, q) \text{ ако и само ако } a < b.$$

Посматрајмо уређење $\mathcal{A}_2 = (A_2, <)$ и докажимо да је структура $\mathcal{A}$ интерпретабилна у њему. Прво приметимо да је свака тачка скупа A_1 дискретног типа у уређењу $\mathcal{A}_2$, док је свака тачка скупа $(A_1/E_1) \times \mathbb{Q}$ густог типа. Закључимо да је скуп A_1 дефинабилан у $\mathcal{A}_2$. Посматрајмо конвексну A_1-еквиваленцију $E_{A_1} \subseteq A_2^2$. Свака њена класа која садржи елемент скупа A_1 је максималан конвексан подскуп скупа A_2 који садржи само тачке скупа A_1, па из дефиниције уређења скупа A_2 следи да је то тачно E_1-класа скупа A_1. Према томе, $E_{A_1} \cap A_1^2 = E_1$ и релација $E_1 \subset A_1 \times A_1$ је дефинабилна у структури $\mathcal{A}_2$. Све базне релације структуре $\mathcal{A}_1$ су дефинабилне у уређењу $\mathcal{A}_2$, па је структура $\mathcal{A}_1$ интерпретабилна у структури $\mathcal{A}_2$. Будући да је структура $\mathcal{A}$ интерпретабилна у $\mathcal{A}_1$, она је интерпретабилна и у уређењу $\mathcal{A}_2$.

Теорема 2.17. Свако линеарно уређење са коначно много унарних предиката и конвексних релација еквиваленције је интерпретабилно у чистом линеарном уређењу.

Доказ. Посматрајмо прво структуру $\mathcal{A} = (A, <, P, E)$ са по једним унарним предикатом и конвексном еквиваленцијом. Конструишимо структуру $\mathcal{A}_1$ и уређење $\mathcal{A}_2$ на претходно описан начин и означимо са $\mathcal{A}_1'$ и $\mathcal{A}_2'$ њихове експанзије добијене додавањем предиката P_1. Лако се види да је предикат P_1 дефинабилан у структури $\mathcal{A}_2'$ па, слично претходном, закључујемо да је $\mathcal{A}$ интерпретабилна у структури $\mathcal{A}_2 = (A_2, <, P_1)$. Према теореми 2.15 $\mathcal{A}_2'$ је интерпретабилна у чистом линеарном уређењу, па исто важи и за структуру $\mathcal{A}$.

Скицирајмо сада начин на који се структура $\mathcal{B} = (B, <, P_i, E_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ интерпретира у чистом линеарном уређењу. Слично претходном, заменимо сваки елемент домена копијом уређења $(\mathbb{Z}^*, <)$ и означимо са $(B_1, <)$ добијено уређење и дефинишимо у њему унарне предикате P_i' и релације E_i' као у претходном случају. Означимо са $\mathcal{B}_1$ добијену структуру.

Нека је $\mathcal{Q}_n = (Q_n, <)$ уређење типа $\eta + n + \eta$ за $n \geqslant 3$. Проширимо уређење структуре $\mathcal{B}_1$ додавањем уређења $\mathcal{Q}_3$ на леви крај сваке E_1-класе; затим новодобијено уређење проширимо додавањем уређења $\mathcal{Q}_4$ на леви крај сваке E_2-класе,... и на крају додавањем копије уређења $\mathcal{Q}_{n+2}$ на леви крај сваке E_n-класе. Означимо са $\mathcal{B}_2 = (B_2, <)$ тако добијено уређење. Његове коначне $\mathbf{c}_\delta$-класе са $k + 2 \geqslant 3$ елемента су „средње” $\mathbf{c}_\delta$-класе уређења $\mathcal{Q}_k$ које смо додавали (да бисмо кодирали релацију E_k); унија свих тих класа, означимо тај скуп са C_k, је дефинабилан у уређењу $\mathcal{B}_2$, као и конвексна C_1-еквиваленција E_{C_1}. Читаоцу препуштамо да провери да је и скуп B_1 такође дефинабилан, као и релација $E_i = E_{C_i} \cap B_1^2$. Одатле следи да је структура $(B, <, E_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ интерпретабилна у уређењу $\mathcal{B}_2$. Проширимо ово уређење додавањем унарних предиката P_i'. Добијена структура је интерпретабилна у неком чистом уређењу, па исто важи и за структуру $\mathcal{B}$. □

У примеру 2.3 смо видели да ни за једно n није за свако $a \in \omega^\omega$ испуњено $\mathbf{c}_\mathbf{F}^\mathbf{n}(a) = \mathbf{c}_\mathbf{F}^{\mathbf{n+1}}(a)$ и да је за свако $a \in \omega^\omega$ испуњено $\mathbf{c}_\mathbf{F}^\omega(a) = \mathbf{c}_\mathbf{F}^{\omega+\mathbf{1}}(a)$, што управо значи да је ω $\mathbf{c}_\mathbf{F}$ ранг уређења ω^ω. Приметимо да се кондензације $\mathbf{c}_\delta$ и $\mathbf{c}_F$ понашају исто на уређењу ω^ω, па је $\mathbf{c}_\delta$ ранг уређења ω^ω такође ω.

Нека је $\sigma^1(x)$ формула „x је следбеник неког елемента" и нека је $\sigma^0(x)$ формула „x није следбеник ниједног елемента". И сада ћемо, као у примеру 2.3, за елементе који нису следбеници рећи да су гранични. Обе формуле су сагласне са теоријом уређења $\mathcal{M} = (\omega^\omega, <)$. У структури $(\sigma^i(\mathcal{M}), <)$ су неки елементи следбеници, а неки гранични. Нека је $\sigma^{i1}(x)$ формула „x је следбеник у структури $(\sigma^i(\mathcal{M}), <)$" и нека је $\sigma^{i0}(x)$ формула „x је следбеник у структури $(\sigma^i(\mathcal{M}), <)$". Све четири формуле су сагласне са теоријом $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ и важи

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) \models \forall x(\sigma^{ij}(x) \Longrightarrow \sigma^i(x)).$$

Настављајући поступак, за свако n и сваки $\tau \in 2^n$, дефинисана је $\sigma^\tau(x)$. Такође, свака формула је сагласна са $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ и важи

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) \models \forall x(\sigma^{\tau j}(x) \Longrightarrow \sigma^\tau(x)).$$

Нека је за $\tau \in 2^\omega$ са $\tau(n)$ означен низ њених првих n елемената и нека је $p_\tau = \{\sigma^{\tau(n)}(x) | n \in \omega\}$. Ако је $\{\sigma^{\tau(n_1)}(x), \dots, \sigma^{\tau(n_k)}(x)\}$ коначан поскуп скупа p_τ, онда је

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) \models \forall x(\sigma^{\tau(m)}(x) \Longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{k} \sigma^{\tau(n_i)}(x)),$$

где је $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, па је, с обзиром да је $\sigma^{\tau(m)}(x)$ сагласна са $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ за свако m, скуп формула p_τ коначно задовољив, а тиме и тип. Очигледно је да за $\tau \neq \nu$ испуњено $p_\tau \neq p_\nu$. Закључујемо да $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ није мала теорија.

Са друге стране, није тешко видети да је $\mathrm{Th}(\omega^n, <)$ мала, као и да је $\mathbf{c}_\delta$ ранг уређења ω^n коначан (n). Отуд следеће питање.

Питање 1. Да ли је услов да је теорија линеарно уређене структуре мала довољан да структура има коначан c_δ ранг?

За одговор на ово питање и даљу анализу потребно је развити додатне алате.

ПОГЛАВЉЕ 3

Прости типови и експанзије дискретних уређења

Минимална структура је структура у којој је сваки скуп дефинабилан формулом са параметрима коначан или коконачан (комплемент му је коначан). Најједноставнија дискретна уређења су $(\omega, <)$, $(\omega^*, <)$ и $(\omega + \omega^*, <)$, где је ω^* обрнуто уређено ω. То су есенцијално једина линеарна уређења која чине минималне структуре. У овом поглављу истражујемо моделско теоријска својства експанзија уређења $(\omega, <)$ и $(\omega+\omega^*, <)$ која имплицирају извесну једноставност структуре. Да је минималност једно такво својство следи из резултата Пилаја (Pillay) и Штајнхорна (Steinhorn). Теорема 3.1 из [**12**] каже:

Теорема 3.1. Не постоји експанзија $\mathcal{M}$ структуре $(\omega, <)$ релацијама и функцијама које нису дефинабилне тако да је $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ јако o-минимална.

Убрзо потом су показали у [**13**] да је o-минималност структура (структура $\mathcal{M}$ је o-минимална ако је сваки M дефинабилни подскуп скупа M коначна унија интервала и тачака) сачувана у елементарним екстензијама, тако да се ,,јако" може избацити из формулације претходне теореме. Приметимо да су у контексту теореме o-минималност и минималност еквивалентни, па је алтернативни начин њеног исказа:

Минималне експанзије структуре $(\omega, <)$ су дефиниционе.

Ми ћемо уопштити теорему 3.1 у шири контекст: разматрамо експанзије дискретно уређених структура облика $\omega + \mathbb{L}$ где је $\mathbb{L} = (L, <)$ линеарно уређење (или $\emptyset$), ω је уређено на стандардан начин а $+$ означава уобичајену суму линеарних уређења. Такве структуре означавамо са $(\omega + L, <, \dots)$. Нека је T потпуна теорија такве експанзије. Уместо да претпоставимо да је $L = \emptyset$, ми ћемо претпоставити да ниједан 0-дефинабилан подскуп не цепа ω на два бесконачна дела. Последица ове претпоставке је да постоји јединствен неалгебарски 1-тип $p \in S_1(T)$ који је коначно задовољив у ω (за потпун тип коначна задовољивост у ω се своди на то да свака формула типа има решење у ω). Његов локус попуњава расцеп у универзуму $\mathcal{U}$ између ω и свих 0-дефинабилних скупова који леже изнад ω. Локус $p(\mathcal{U})$ може али не мора да сече L: примери су структуре $(\omega + \mathbb{Z}, <)$ и $(\omega + \omega^*, <)$. По дефиницији 3.8 p је прост тип и у тврђењу 3.11 ћемо показати да сваки прост тип локално живи у окружењу сличном као наш

p. Наш главни резултат је следећа теорема. Грубо говорећи, она каже да на локусу типа p нема друге структуре осим оне која је задата релацијом $<$.

Теорема 3.2. Нека је T потпуна теорија језика L, $p \in S_1(T)$, $\sigma(x) \in p$ и нека је $<$ 0-дефинабилно линеарно уређење на $\sigma(\mathcal{U})$. Претпоставимо да $\sigma(x)$ и $(C,<)$ сведоче да је p прост тип. Нека је L' језик који садржи само симбол $<$ и елементе скупа C. Тада је сваки релативно 0-дефинабилни подскуп скупа $p(\mathcal{U})^n$ или скупа $(C \cup p(\mathcal{U}))^n$ релативно 0-дефинабилан формулом језика L'.

Није тешко извести теорему 3.1 као специјалан случај теореме 3.2 за $L = \emptyset$. Детаљи су дати у последњем делу ове главе. Други специјалан случај је кад је $L = \omega^*$. Тако ћемо у последњем делу овог поглавља закључити да не постоји права минимална експанзија структуре $(\omega + \omega^*, <)$. Иако то није експлицитно речено у [**12**], доказ Пилаја и Штајнхорна се може адаптирати тако да ради и у овом случају. Наш доказ је нов и користи технику C-низова које је увео Тановић у [**17, 18, 19**].

Поред овога, разматрамо и други правац у коме се теорема 3.1 може уопштити. Већ смо приметили да су минималност и o-минималност еквивалентни у контексту теореме 3.1. Још један еквивалент у истом контексту је тополошке природе: $\mathrm{CB}(x = x) = \deg(x = x) = 1$, одакле добијамо исказ теореме 2 као еквивалент исказа теореме 3.1. Зато је природно питати се које експанзије имају ординални CB ранг, тј. малу теорију. Постоје једноставни примери који задовољавају $\mathrm{CB}(x = x) = 1$ и $\deg(x = x) = d > 1$.

Надаље у овој глави, ако није другачије речено, кад кажемо да је скуп дефинабилан мислимо да је 0-дефинабилан.

Пример 3.3. (1) Пример праве унарне експанзије структуре $(\omega,<)$ CB ранга 1 и степена d је структура $\mathcal{M} = (\omega, <, P_d)$, где је $d \geqslant 2$ и $P_d(x)$ је „d дели x". Дефинабилни скупови садржани у скупу P_d, су тачно његови коначни и коконачни подскупови. Зато је P_d, као и његови транслати $P_d+1, \ldots, P_d+d-1$, минималан скуп. С обзиром да је $\{P_d, P_d+1, \ldots, P_d+d-1\}$ партиција скупа M, закључујемо да за $\mathcal{M}$ важи $\mathrm{CB}(x = x) = 1$ и $\deg(x = x) = d$.

(2) Слично као малопре можемо конструисати прву унарну експанзију структуре $(\omega+\omega^*,<)$ чији је CB ранг 1 и степен d: $(\omega+\omega^*,<,B_{d,l})$ где су d и l цели бројеви такви да је $d \geqslant 2$ и $B_{d,l}$ је унија $(P_d(\omega)+l) \cup P_d^*(\omega)$, где је P_d дефинисано као у претходном примеру а P_d^* је дефинисано аналогно на ω^*. У овом примеру сваки дефинабилан скуп је Булова комбинација коначних скупова и транслата скупа $B_{d,l}(\omega \cup \omega^*)$ при чему ω није дефинабилан подскуп.

Показаћемо, у теореми 1, да ови примери описују, до на дефинициону еквивалентност, све експанзије структуре $(\omega+\omega^*,<)$ које задовољавају $\mathrm{CB}(x = x) = 1$

у којој ω није дефинабилан (као подскуп) и све експанзије структуре $(\omega, <)$ које задовољавају $\mathrm{CB}(x = x) = 1$.

Сетимо се да је T бинарна теорија ако је свака формула еквивалентна, модуло T, Буловој комбинацији формула са највише две слободне променљиве. Нека је $\mathcal{M} = (M, <, P_i)_{i \in I}$ експанзија линеарног уређења унарним предикатима. По теореми 13.37 из Розенштајнове књиге [**14**], $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ је бинарна теорија. Теорема 1 имплицира да свака експанзија структуре $(\omega, <)$ CB ранга 1 има бинарну теорију. То мотивише следеће питање.

Питање 2. Да ли постоји права експанзија структуре $(\omega, <)$ чија је теорија мала и није бинарна?

Верујемо да би негативан одговор открио интересантне структуралне теореме о дискретним уређењима чије су теорије мале и чији је скуп дефинабилних елемената велики. Бинарним теоријама линеарних уређења посвећујемо последњу главу.

Наше радно окружење је $\mathcal{U}$, универзум пребројиве потпуне теорије првог реда T. Подсетимо се да за $X \subseteq \mathcal{U}^n$ кажемо да је мали скуп ако је $|X| < |\mathcal{U}|$, у супротном је велики скуп, да је $\varphi(\mathcal{M}) = \{\bar{m} \mid \mathcal{M} \models \varphi(\bar{m})\}$ скуп решења формуле $\varphi(\bar{x})$ и да је $D \subseteq M^n$ дефинабилан над A (или краће A дефинабилан) ако постоји формула φ са параметрима из A чији је скуп решења тачно D, тј. $D = \varphi(M)$. За $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ и било које $X \subseteq \mathcal{U}$ (мало или велико) са $\varphi(X, \bar{a})$ означавамо скуп решења формуле φ које припадају скупу X^n; $\varphi(X, \bar{a}) = \varphi(\mathcal{U}) \cap X^n$. Слично, за (могуће непотпун) тип $p(\bar{x})$ са $p(X)$ означавамо скуп реализација типа p које припадају скупу X^n; $p(\mathcal{U})$ је локус типа p.

Скуп $X \subseteq \mathcal{U}$ је 0-инваријантан ако $F(X) = X$ важи за сваки аутоморфизам универзума F. Скуп D је релативно 0-дефинабилан у 0-инваријантном скупу X ако постоји 0-дефинабилан скуп D' такав да је $D = D' \cap X$. С обзиром да је локус сваког типа без параметара 0-инваријантан, следи да је D 0-релативно дефинабилан у $p \in S(\emptyset)$ ако и само ако постоји 0-дефинабилан скуп D' такав да је $D = D' \cap p(\mathcal{U})$. Елемент a је дефинабилан над A (или краће A дефинабилан) ако је $\{a\}$ скуп дефинабилан над A. Скуп свих A дефинабилних елемената означавамо са $\mathrm{dcl}(A)$.

Користимо стандардну нотацију за дискретна линеарна уређења. Функцију (непосредног) следбеника означавамо са $S(x)$ а (непосредног) претходника са $S^{-1}(x)$. Приметимо да су то дефинабилне функције и да су парцијалне (S кад уређење има максимум, S^{-1} кад уређење има минимум). За $m \in \mathbb{Z}$, ознака $S^m(x)$ сама себе објашњава.

1. Дефиниција и основна својства C-типа

Дефиниција 3.4. Нека је $C \subseteq \mathrm{dcl}(\emptyset)$ бесконачан скуп. За тип $p \in S_1(A)$ кажемо да је <u>C-тип над A</u> ако је $\phi(C)$ бесконачан скуп за свако $\phi \in p$. За непотпун тип $\Sigma(x)$ кажемо да је <u>C-тип над A</u> ако је подскуп неког потпуног C-типа над A и ако се не може продужити до алгебарског. Тип је C-тип ако је C-тип над A за неко A. За низ елемената $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ кажемо да је C-низ над A ако је $\mathrm{tp}(a_i/Aa_0 \ldots a_{i-1})$ C-тип за свако $i \leqslant n$.

Запажање 3.5. Јасно је да C тип не може бити алгебарски. Штавише, потпуни тип је C-тип ако и само ако је неалгебраски и задовољив у C, тј. ако свака формула типа има решење у C. То је једна алтернативна дефиниција за потпуне типове. Други алтернативни начин увођења појма потпуног C-типа над A је да је то тачка нагомилавања скупа $\{\mathrm{tp}(c/A) | c \in C\}$ простора $S_1(A)$.

Лема 3.6. Нека је $C \subseteq \mathrm{dcl}(\emptyset)$ бесконачан, нека је A мали скуп и нека је

$$\Sigma(x) = \{\varphi(x) \,|\, \varphi \text{ је са параметрима из } A \text{ и } C \setminus \varphi(C) \text{ је коначан}\}.$$

За свако $p \in S_1(A)$ важи:
- (а) p је C-тип над A акко $\Sigma \subseteq p$;
- (б) p је јединствен C-тип над A акко $\Sigma = p$.

Доказ. (а) Претпоставимо да је p C-тип. Ако $\varphi \in \Sigma$, онда је $\neg\varphi(C)$ коначан, па не може бити $\neg\varphi \in p$ јер је p C-тип. С обзиром да је p потпун, мора бити $\varphi \in p$. Закључујемо да је $\Sigma \subseteq p$.

За доказ другог смера претпоставимо да је p није C-тип. Тада садржи формулу φ такву да је $\varphi(C)$ коначан. Тада је $\neg\varphi \in \Sigma$, па не може бити $\Sigma \subseteq p$.

(б) Ако је $\Sigma = p$, с обзиром на доказано под (а), онда је p јединствен C-тип над A.

Ако је Σ прави подскуп типа p, показаћемо да p није јединствен C-тип над A. Из $\Sigma \subsetneq p$ следи да постоји $\varphi \in p \setminus \Sigma$ и тада су и $\varphi(C)$ и $\neg\varphi(C)$ бесконачни скупови. Ако су $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$, онда су $C \setminus \sigma_i(C)$ коначни скупови, па је и $C \setminus (\sigma_1(C) \cap \cdots \cap \sigma_n(C))$ коначан. Тада је $\neg\varphi(C) \setminus (\sigma_1(C) \cap \cdots \cap \sigma_n(C))$ коначан, па је $\neg\varphi(C) \cap \sigma_1(C) \cap \cdots \cap \sigma_n(C)$ бесконачан, а тиме је $\neg\varphi(x) \wedge \sigma_1(x) \wedge \cdots \wedge \sigma_n(x)$ задовољива формула. То значи да је $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ коначно задовољив скуп формула, па је (непотпун) тип и има комплетирање $q \in S_1(A)$. Свака формула из q има бесконачан скуп решења у C јер би у супротном њена негација припадала типу Σ, а тиме и типу q. Закључујемо да је q C-тип над A и да је $q \neq p$, што је требало показати. □

Типу $\Sigma(x) = \{\varphi(x) \,|\, \varphi$ је са параметрима из A и $C \smallsetminus \varphi(C)$ је коначан$\}$ одговара затворен подскуп простора $S_1(A)$ одређен са $\bigcap_{\sigma\in\Sigma}[\sigma]$. То је скуп свих C-типова над A.

Напомена 3.7. Део леме 3.6 означен са (б) се могао исказати и овако: Нека је C бесконачан подскуп скупа $\mathrm{dcl}(\emptyset)$. Над A постоји јединствен потпун C-тип ако и само ако је за сваку формулу $\varphi(x)$ са параметрима из A тачно један од скупова $\varphi(C)$ и $C \smallsetminus \varphi(C)$ коначан.

2. Дефиниција и основна својства простог типа

Дефиниција 3.8. Нека је T потпуна теорија језика L, нека је $\mathcal{U}$ универзум теорије T и нека је $p \in S_1(T)$. Кажемо да је p прост (или једноставан) тип ако постоји формула $\sigma(x) \in p$, дефинабилно линеарно уређење $<_\sigma$ на $\sigma(\mathcal{U})$ и $C \subseteq \mathrm{dcl}(\emptyset)$ такво да је испуњено:

(1) Скуп C је конвексан (у односу на $<_\sigma$) подскуп скупа $\sigma(\mathcal{U})$;
(2) $(C, <_\sigma) \cong (\omega, <)$;
(3) За сваку формулу $\varphi(x) \in p$ је коначан скуп $C \smallsetminus \varphi(C)$.

Такође кажемо да је p прост с лева у односу на уређење $(\sigma, <_\sigma)$. Ако је p прост с лева у односу на $(\sigma, <_\sigma^*)$, онда кажемо да је прост с десна у односу на уређење $(\sigma, <_\sigma)$. За скуп C и формулу σ кажемо да сведоче да је p прост тип.

Када је из контекста јасно која је формула σ, уместо ,,скуп C и формула σ сведоче да је p прост тип" кажемо краће ,,скуп C сведочи да је p прост тип". Такође, у случају да је из контекста јасно која је формула σ и које је дефинабилно уређење, уместо $<_\sigma$ пишемо само $<$ и кажемо да p прост с лева или десна не истичући $(\sigma, <_\sigma^*)$. Дефиницију простог типа смо дали најопштије што смо могли, како би се теорема 3.2 могла применити у што општијој ситуацији. Нисмо захтевали ни да уређење на $\sigma(\mathcal{U})$ буде дискретно, али ћемо у тврђењу 3.11 показати да оно увек може бити изабрано тако да буде дискретно. У тврђењу 3.13 ћемо показати да прости типови могу лако да се нађу и у структурама чије су теорије мале и које имају бар један дефинабилан елемент.

Лема 3.9. Нека је $\sigma(x)$ формула језика L, нека је $<_\sigma$ $\emptyset$-дефинабилно линеарно уређење на $\sigma(\mathcal{U})$ и нека је $C \subseteq \mathrm{dcl}(\emptyset)$ конвексан скуп у $(\sigma(\mathcal{U}), <_\sigma)$ типа уређења ω или ω^*. Тада C сведочи да је $p \in S_1(T)$ прост ако и само ако је p јединствен C-тип у $S_1(T)$.

Доказ. Директном применом дефиниције простог типа и леме 3.6 (б), тј. напомене 3.7. □

Пример 3.10. У сваком од примера је $\sigma(x)$ формула $x = x$.

(1) Теорија структуре $(\omega, <)$ има јединствен неалгебарски тип $p \in S_1(T)$. Он је прост с лева, што сведочи $C = \omega$. Да би се то видело, приметимо да су $(\omega, <)$ и $(\omega, <, S, 0)$ дефиниционо еквивалентне структуре, где је S функција следбеника. По поглављу 2.2 из [**10**] теорија $dLO^+ = Th(\omega, <, S, 0)$ има елиминацију квантификатора. Одатле следи да је $(\omega, <)$ минимална структура (сваки дефинабилан скуп је коначан или коконачан). Лако се проверава да је p прост са лева и да то сведочи ω.

(2) Слично као у (1) може се закључити да је структура $(\omega + \omega^*, <)$ минимална. Постоји јединствен неалгебарски потпун 1-тип. Он је прост с лева што сведочи ω и истовремено прост с десна, што сведочи ω^*.

(3) Пример простог типа CB ранга 2. Посматрајмо структуру

$$\mathcal{M} = (\omega + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <, S, 0, 0_z)_{z \in \mathbb{Z}},$$

где је $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ уређено лексикографски и 0_z је $(z, 0)$. По резултатима поглавља 2.2 из [**10**] сваки модел теорије dLO^+ је изоморфан структури $(\omega + L \times \mathbb{Z}, <)$ за неко линеарно уређење L, при чему је производ лексикографски уређен. Другим речима, модел теорије dLO^+ почиње уређењем ω и наставља се копијама уређених целих бројева. Зато је редукт структуре $\mathcal{M}$ на језик $\{<, S, 0\}$ модел теорије dLO^+. Сама структура $\mathcal{M}$ је експанзија константама модела теорије dLO^+, одакле закључујемо да има елиминацију квантификатора.

Нека је p_z комплетирање типа $\{S^n(0_z) < x < S^{-m}(0_{z+1}) \mid m, n \in \omega\}$. Користећи елиминацију квантификатора, није тешко видети да $\{S^n(0_z) \mid n \in \mathbb{N}\}$ сведочи да је p_z прост с лева док $\{S^{-n}(0_{z+1}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ сведочи да је p_z прост с десна, као и да је CB ранг типа p_z једнак 1.

Нека је p комплетирање типа $\{n < x < 0_z \mid n \in \omega,\ z \in \mathbb{Z}\}$. Тип p је прост с лева што сведочи ω. Његов CB ранг је 2 јер је он тачка нагомилавања типова p_z.

(4) Скицираћемо пример простог типа који нема ординални CB ранг. Нека је $\mathcal{M} = (\omega + \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, <, S, P_q, 0)_{q \in \mathbb{Q}}$, при чему је $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ уређено лексикографски и унарни предикати P_q су дефинисани на следећи начин:

$$(r, m) \in P_q \ \text{ ако и само ако } \ q \leqslant_{\mathbb{Q}} r.$$

Слично као у (3) закључујемо да је $\mathcal{M}$ модел теорије dLO^+ коме смо додали унарне предикате P_q. Сваки предикат P_q се састоји од копија $\mathbb{Z}$ које су означене рационалним бројевима $r \geqslant q$. Користећи стандардне методе може се проверити да $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ има елиминацију квантификатора. Формуле $\{n < x \mid n \in \omega\} \cup \{\neg P_q(x) \mid q \in \mathbb{Q}\}$ одређују потпун тип $p \in S_1(T)$. Елиминација квантификатора имплицира да је p прост с лева што сведочи ω.

За сваки ирационалан број r нека је p_r потпуни тип одређен формулама

$$\{P_q(x)\,|\,q\in\mathbb{Q}\,,\ q<r\}\cup\{\neg P_q(x)\,|\,q\in\mathbb{Q}\,,\ r<q\}\ .$$

Јасно је да за све ирационалне бројеве r важи $\mathrm{CB}(p_r)\geqslant\alpha$ за сваки ординал α. Пошто је p тачка нагомилавања типова p_r, закључујемо да је $\mathrm{CB}(p)\geqslant\alpha$ за сваки ординал α.

Тврђење 3.11. Нека је $p\in S_1(T)$ прост с лева. Постоје формула $\sigma(x)\in p$, дефинабилно уређење $<$ на $\sigma(\mathcal{U})$ и $C\subseteq\mathrm{dcl}(\emptyset)$ такви да важи:

(1) $(\sigma(\mathcal{U}),<)$ је дискретно линеарно уређење;
(2) $C\cup p(\mathcal{U})$ је почетни комад уређења $\sigma(\mathcal{U})$;
(3) $(C,<)\cong(\omega,<)$;
(4) За сваку формулу $\varphi(x)\in p$ је скуп $C\smallsetminus\varphi(C)$ коначан.

Доказ. Нека $\sigma(x)$, $<$ и C сведоче да је p прост с лева. Нека је c_0 минимални елемент C-а. Пошто је C конвексан можемо претпоставити да формула $\sigma(x)$ имплицира формулу $c_0\leqslant x$ (у супротном заменимо формулу $\sigma(x)$ формулом $\sigma(x)\wedge c_0\leqslant x$). Пошто је C конвексан, он је почетни комад уређења $\sigma(\mathcal{U})$. За свако $c\in C$ формула $c<x$ за скуп реализација има све сем коначно много елемената скупа C, па је $(c<x)\in p$. Одатле следи да је $C<p(\mathcal{U})$.

Показаћемо да је $C\cup p(\mathcal{U})$ почетни комад уређења $\sigma(\mathcal{U})$. Претпоставимо да a реализује p и да је $C<b<a$ за неко $b\in\sigma(\mathcal{U})$. Довољно је показати да b реализује p. По леми 3.9 то ће важити ако је $\mathrm{tp}(b)$ C-тип. Да бисмо доказали да је $\mathrm{tp}(b)$ коначно задовољив у C, претпоставимо да је $\varphi(x)\in\mathrm{tp}(b)$. С обзиром да је $b\in\sigma(\mathcal{U})$, тј. $\sigma(x)\in\mathrm{tp}(b)$, биће и $\varphi(x)\wedge\sigma(x)\in\mathrm{tp}(b)$. Тада је $(\exists y)(\varphi(y)\wedge\sigma(y)\wedge y<x)\in\mathrm{tp}(a)=p$. Пошто је p C-тип, за неко $c\in C$ ће бити $(\exists y)(\varphi(y)\wedge\sigma(y)\wedge y<x)\in\mathrm{tp}(c)$. Пошто је C почетни комад уређења $\sigma(\mathcal{U})$, сваки сведок формуле $\models(\exists y)(\varphi(y)\wedge\sigma(y)\wedge y<c)$ је елемент скупа C који задовољава $\varphi(x)$. Овим смо показали да је $\mathrm{tp}(b)$ коначно задовољив у C. Тип $\mathrm{tp}(b)$ не може бити алгебарски јер би онда b био 0-дефинабилан и формула $b<x\in\mathrm{tp}(a)$ не би имала реализације у скупу C (јер $c<b$ важи за сваки $c\in C$) што је у контрадикцији са чињеницом да C сведочи да је $p=\mathrm{tp}(a)$ прост с лева. Овим смо показали да је $\mathrm{tp}(b)$ неалгебарски. На основу запажања 3.5 из чињеница да је $\mathrm{tp}(b)$ неалгебарски и задовољив у C, закључујемо да је C-тип. Пошто је p јединствен потпун C-тип над $\emptyset$, мора бити $\mathrm{tp}(b)=p$, тј. $b\models p$. Управо смо показали да је $C\cup p(\mathcal{U})$ почетни комад скупа $\sigma(\mathcal{U})$. Одатле следи и да је $C\cup p(\mathcal{U})$ линеарно уређен релацијом $<$.

Покажимо да је $(C\cup p(\mathcal{U}),<)$ дискретно уређење. Нека је $\psi(x)$ формула без параметара која каже да x има и непосредног претходника и непосредног следбеника у $\sigma(\mathcal{U})$. Формулу $\psi(x)$ реализују сви елементи скупа $C\smallsetminus\{c_0\}$. Пошто је p C-тип, мора бити $\psi(x) \in p$. Дакле, $(C \cup p(\mathcal{U}), <)$ је дискретно линеарно уређење.

Преостало је још да модификујемо σ тако да $(\sigma(\mathcal{U}), <)$ буде линеарно уређење. То се лако постиже тиме што уместо $\sigma(x)$ узмемо формулу $\sigma(x) \wedge \theta(x)$ при чему формула $\theta(x)$ каже да је за свако $y \leqslant x$ интервал $[c_0, y]$ дискретно уређен релацијом $<$ и да y има непосредног следбеника. На тај начин, $(\sigma(\mathcal{U}), <)$ постаје дискретно уређење. $\square$

Напомена 3.12. Надаље, када кажемо да $\sigma(x)$ и $(C, <)$ сведоче да је p прост с лева, мислимо да су задовољени услови тврђења 3.11.

Тврђење 3.13. Претпоставимо да је теорија T мала и да садржи теорију дискретно уређених структура и да има дефинабилни елемент. Тада у $S_1(T)$ постоји прост тип.

Доказ. Нека је c дефинабилан елемент. С обзиром да је уређење дискретно, бар један од скупова $\{S^n(c) \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\{S^{-n}(c) \mid n \in \mathbb{N}\}$ је бесконачан. Претпоставимо да је то први и означимо га са C. С обзиром да је C бесконачан, онда скуп $\{\mathrm{tp}(a) | a \in C\}$ има тачку нагомилавања (у тополошком простору $S_1(T)$), тј. постоји C-тип. Пошто је T мала теорија сваки тип из $S_1(T)$ има ординални CB ранг. Нека је $p \in S_1(T)$ C-тип најмањег CB ранга. Означимо тај ранг са α. Нека је $\sigma(x)$ формула која изолује p релативно у односу његов CB ранг, тј. нека је $\sigma(x) \in p$ таква да $\mathrm{CB}(\sigma) = \alpha$ и да је $\deg(\sigma) = 1$. То значи да ће сваки други потпуни тип који садржи формулу σ имати мањи CB ранг. С обзиром да је p један C-тип, он садржи формулу $c < x$. Зато формулу $\sigma(x)$ можемо заменити формулом $(\sigma(x) \wedge c \leqslant x)$ и тако измењена ће и даље изоловати p у његовом CB рангу. Тада је $C \subseteq \sigma(\mathcal{U})$ и $c \leqslant \sigma(\mathcal{U})$. По начину на који смо изабрали скуп C и с обзиром да T садржи теорију дискретно уређених структура, он је конвексан и важи $(C, <) \cong (\omega, <)$.

Прва два услова дефиниције простог с лева типа су задовољене. Претпоставимо да трећи услов није испуњен, тј. да постоји $\varphi(x) \in p(x)$ таква да је скуп $C \smallsetminus \varphi(C)$ бесконачан. С обзиром да је $\neg\varphi(C)$ бесконачан скуп и да је $C \subseteq \sigma(\mathcal{U})$ постоји C-тип $q \in S_1(T)$ који садржи $\neg\varphi(x) \wedge \sigma(x)$.

По начину на који смо изабрали формулу σ, p је јединствен потпуни 1-тип који садржи $\sigma(x)$ такав да је $\mathrm{CB}(p) = \mathrm{CB}(\sigma) = \alpha$, одакле следи да је $CB(q) < \alpha$. Са друге стране, с обзиром да је $p \in S_1(T)$ C-тип минималног CB ранга, мора важити $CB(q) \geqslant \alpha$. Контрадикција! Закључујемо да и трећи услов дефиниције простог типа мора бити испуњен чиме је доказан исказ тврђења. $\square$

Ово поглавље завршавамо описом типова који су прости и са лева и са десна у односу на фиксирано уређење. Пример оваквог типа је јединствени неалгебарски потпуни 1-тип без параметара структуре $(\omega + L \times \mathbb{Z} + \omega^*, <)$, где је L било које линеарно уређење или празан скуп.

Тврђење 3.14. Нека је $p \in S_1(T)$ истовремено прост и с лева и с десна у односу на $(\sigma'(\mathcal{U}), <')$. Тада постоји формула $\sigma(x) \in p$, $\emptyset$-дефинабилно дискретно линеарно уређење $<$ на $\sigma(\mathcal{U})$ и $C_L, C_R \subseteq \mathrm{dcl}(\emptyset)$ такви да важе следећи услови

(1) $(\sigma(\mathcal{U}), <)$ је дискретно линеарно уређење коме је C_L почетни комад и коме је C_R завршни комад;
(2) $(C_L, <) \cong (\omega, <)$ и $(C_R, <) \cong (\omega^*, <)$;
(3) Сваку формулу $\varphi(x) \in p$ задовољавају сви сем коначно много елемената скупа $C_L \cup C_R$;
(4) $C_L \cup p(\mathcal{U}) \cup C_R = \sigma(\mathcal{U})$; p је јединствен неалгебарски потпуни 1-тип које садржи $\sigma(x)$.

Доказ. Као у тврђењу 3.11 можемо наћи $\sigma(x)$, C_L и C_R који задовољавају три услова дефиниције простог типа такве да је $C_L \cup p(\mathcal{U})$ почетни комад и $p(\mathcal{U}) \cup C_R$ завршни комад уређења $(\sigma(\mathcal{U}), <)$. Одатле следи да је $C_L \cup p(\mathcal{U}) \cup C_R = \sigma(\mathcal{U})$, а тиме и да је p јединствен потпуни 1-тип који садржи $\sigma(x)$. □

3. Структура на локусу простог типа

Главни резултат овог одељка је следећа теорема. Грубо речено, она каже да на локусу простог типа нема друге структуре осим оне индуковане уређењем $<$.

Теорема 3.2: Претпоставимо да је T комплетна теорија језика L, $p \in S_1(T)$, $\sigma(x) \in p$ и да је $<$ $\emptyset$-дефинабилно уређење на $\sigma(\mathcal{U})$. Нека $\sigma(x)$ и $(C, <)$ сведоче да је p прост тип и нека је L' језик који садржи само симбол за $<$ и симболе елемената скупа C. Тада је сваки релативно $\emptyset$-дефинабилан подскуп скупова $p(\mathcal{U})^n$ и $(C \cup p(\mathcal{U}))^n$ релативно $\emptyset$-дефинабилан формулом језика L'.

Да бисмо доказали теорему 3.2 потребна су нам нека помоћна тврђења. У исказу тврђења је речено да $\sigma(x)$ и $(C, <)$ сведоче да је $p \in S_1(T)$ прост тип. Формула $\sigma(x)$ и скуп C се могу изабрати да задовољавају услове тврђења 3.11. На даље ћемо, без умањења општости, претпоставити да је p прост с лева и означаваћемо га са $p_0 \in S_1(T)$, да је C садржано у језику L и да је уређено типом уређења ω и да је $(\sigma(\mathcal{U}), <)$ дискретно уређење. С обзиром да ћемо радити искључиво у $\sigma(\mathcal{U})$ не користећи спољне параметре, можемо, не губећи на општости, претпоставити да је $\sigma(x)$ заправо формула $x = x$.

Дакле, радићемо у дискретно уређеној структури $(\omega + \mathbb{L}, <, \dots)$ и њеном универзуму $\mathcal{U}$. Тада је p_0 јединствен ω-тип из $S_1(T)$ и за сваку формулу без параметра $\varphi(x)$ тачно један од скупова $\varphi(\omega)$ и $\neg\varphi(\omega)$ је коначан. За било који скуп параметара E дефинишимо

$$p_E(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi(x) \text{ има параметре из } E \text{ и } \omega \smallsetminus \varphi(\omega) \text{ је коначан } \}.$$

У леми 3.6 смо слично дефинисали (могуће непотпун) тип $\Sigma(x)$. Приметимо да за $E = \emptyset$ важи $p_\emptyset = p_0$.

Користићемо само скупове параметара $E \subset p_0(\mathcal{U})$. Скица доказа теореме 3.2 је следећа: прво ћемо у леми 3.24 доказати да је p_E потпун тип. То ће нам дозволити да применимо раније доказану лему 3.20 и закључимо да су функције облика $S^m(x)$ једине E-дефинабилне функције на локусу типа p_E. Одатле ће следити да су типови низова реализација типа p_0 потпуно одређени типовима свих њихових двочланих поднизова. За $a \leqslant b$ који реализују p_0 све могућности за $\mathrm{tp}(a, b)$ су описане у последици 3.21: или је $S^m(a) = b$ за неко m (тј. копије $\mathbb{Z}$ око елемената a и b се поклапају) или $a \models p_b$. То се може описати формулама које користе само $<$ и константе из C, тј. ω, одакле следи закључак.

Подсетимо се леме 3.6 која за $C = \omega$ и скуп параметара E постаје следећа лема.

Лема 3.15. (1) $p_E(x)$ је ω-тип.

(2) $p \in S_1(E)$ је ω-тип ако и само ако је $p_E(x) \subseteq p(x)$.

(3) Ако је p_E потпун тип онда је јединствен потпун ω-тип над E.

Приметимо да је p_E потпун ако и само ако је прост тип у T_E.

Лема 3.16. Нека је $E \subseteq p_0(\mathcal{U})$ било који скуп параметара. Тада

(1) За свако $a \models p_E$ важи $\omega < a$.

(2) Скупови $p_E(\mathcal{U})$ и $\omega \cup p_E(\mathcal{U})$ су конвексни.

Доказ. (1) За свако $n \in \omega$ формула $n < x$ има коконачан скуп решења, па припада типу p_E. Дакле, $n < a$ важи за свако $a \in p_E$ и свако $n \in \omega$.

(2) Слично доказу у случају $(\omega \cup p_0(\mathcal{U}))^n$ тврђења 3.11, претпоставимо да је $\omega < b < a$ и да је $a \models p_E$. Доказаћемо да је $\mathrm{tp}(b/E)$ коначно задовољен у ω. Нека је $\varphi(x) \in \mathrm{tp}(b/E)$. Тада $(\exists y)(\varphi(y) \wedge y < x) \in \mathrm{tp}(a/E)$. С обзиром да је $\mathrm{tp}(a/E) \supseteq p_E$, по леми 3.15 (2), он је ω-тип. Зато је свака формула која му припада задовољена у ω. Закључујемо да за неко $n \in \omega$ важи $(\exists y)(\varphi(y) \wedge y < x) \in \mathrm{tp}(n/E)$. Сваки сведок за $\models (\exists y)(\varphi(y) \wedge y < n)$ је елемент ω који задовољава $\varphi(x)$. Дакле, $\mathrm{tp}(b/E)$ је коначно задовољив у ω. Приметимо да $\mathrm{tp}(b/E)$ не може бити алгебарски јер би онда елемент b био дефинабилан и формула $b < x$ би била формула типа $\mathrm{tp}(a/E)$ која није задовољена у ω (јер је $\omega < b$), што је у супротности са чињеницом да је $\mathrm{tp}(a/E)$ ω-тип. Закључујемо да је $\mathrm{tp}(b/E)$ такође ω-тип. По леми 3.15(2) важи $p_E \subseteq \mathrm{tp}(b/E)$, па $b \models p_E$. Одатле следи да је $\omega \cup p_E(\mathcal{U})$ конвексан скуп, а самим тим је и $p_E(\mathcal{U})$ конвексан скуп. □

Лема 3.17. Нека је $D \subseteq \mathcal{U}$ непразан E-дефинабилан скуп.

(1) Ако је D одозго ограничен елементом скупа $p_0(\mathcal{U})$, онда D има максимум и $\max D$ је E-дефинабилан.

(2) Ако D сече локус типа p_0, онда D има минимум и $\min D$ је E-дефинабилан.

Доказ. (1) Нека је $a \in p_0(\mathcal{U})$. Ради свођења на контрадикцију претпоставимо да $D \leqslant a$ нема максимум. Нека формула $\varphi(t, \bar{e})$ дефинише D, при чему је $\bar{e} \subseteq E$, и нека $\theta(x, \bar{y}) \in \mathrm{tp}(a, \bar{e})$ буде формула која каже

$$\varphi(\mathcal{U}, \bar{y}) \neq \emptyset \text{ нема максимум и } \varphi(\mathcal{U}, \bar{y}) \leqslant x.$$

Тада $(\exists \bar{y})\theta(x, \bar{y}) \in \mathrm{tp}(a)$. Пошто је $\mathrm{tp}(a) = p_0$ ω-тип, постоји $n \in \omega$ такво да $(\exists \bar{y})\theta(x, \bar{y}) \in \mathrm{tp}(n)$. То значи да за неко $\bar{b} \in \mathcal{U}$ важи $\models \theta(n, \bar{b})$, па $\theta(\mathcal{U}, \bar{b}) \subseteq [0, n]$ нема максимум. Контрадикција. Овим смо показали да D има максимум. Максимум је дефинисан формулом $\varphi(x, \bar{e}) \wedge (\forall z)(\varphi(z, \bar{e}) \Rightarrow z \leqslant x)$. Очигледно је да ова формула користи исте параметре који су коришћени да се дефинише скуп D, а то су параметри из скупа E.

(2) Нека је $a \in D \cap p_0(\mathcal{U})$. Ако је a минимум скупа D завршили смо. У супротном нека је $D' = \{ x \mid x \leqslant D \}$. Тада је $0 \in D'$, па је $D' \neq \emptyset$. С обзиром да је $D' \leqslant a$, можемо применити део (1) ове леме и закључити да D' има максимум. Лако је увидети да је $\max D' = \min D$, одакле следи да D има минимум као и да је минимум дефинабилан формулом која користи исте параметре које користи формула која дефинише скуп D. □

Дефиниција 3.18. $\mathrm{cl}(E)$ је конвексно затворење скупа $p_0(\mathcal{U}) \cap \mathrm{dcl}(E)$.

У следећој леми ћемо показати да је $\mathrm{cl}(E)$ изнад свих реализација типа p_E.

Лема 3.19. Нека $a \models p_0$ и нека је $\mathrm{cl}(E) \neq \emptyset$. Следећи искази су еквивалентни.

(1) $\mathrm{tp}(a/E)$ је ω-тип; еквивалентно $a \models p_E$.

(2) $\omega < a < \mathrm{cl}(E)$.

Доказ. (1)⇒(2) Претпоставимо да је $\mathrm{tp}(a/E)$ ω-тип. Тада важи $\omega < a$ (лема 3.16(1)). Преостаје да покажемо да је $a < \mathrm{cl}(E)$. Претпоставимо да је $b \in p_0(\mathcal{U}) \cap \mathrm{dcl}(E)$ и докажимо да је $a < b$. Нека је f 0-дефинабилна функција таква да је $f(\bar{e}) = b$ за неко $\bar{e} \in E^n$. Ако је $f(\bar{e}) \leqslant a$, онда је $f(\bar{e}) \leqslant x \in \mathrm{tp}(a/E)$ и, пошто је $\mathrm{tp}(a/E)$ ω-тип, за неко $n \in \omega$ биће $f(\bar{e}) \leqslant n$, а тиме и $f(\bar{e}) \in \omega$. Контрадикција! Закључујемо да мора бити $a < b$.

(2)⇒(1) Претпоставимо да је $\omega < a < \mathrm{cl}(E)$. Очигледно је $\mathrm{tp}(a/E)$ неалгебарски, па је довољно показати (запажање 3.5) да је задовољив у ω. Нека је $\varphi(x, \bar{e}) \in \mathrm{tp}(a/E)$ и нека је $D = \varphi(\mathcal{U}, \bar{e})$. Тада D сече $p_0(\mathcal{U})$ пошто је $a \in D$. Зато можемо применити лему 3.17(2) и закључити да D има минимум, рецимо да је то b. Тада $b \leqslant a$, $b \in \mathrm{dcl}(E)$ и $\omega < a < \mathrm{cl}(E)$ повлаче да је $b \in \omega$. То управо значи да је $\varphi(x, \bar{e})$ задовољено елементом $b \in \omega$. Овим је лема доказана. $\square$

Лема 3.20. Нека је p_E потпуни тип и нека је f унарна E-дефинабилна функција на $\mathcal{U}$ која $p_E(\mathcal{U})$ слика на њега самог. Нека је $f_E = f \restriction p_E(\mathcal{U})$. Тада

(1) Функција f_E је строго растућа;

(2) Постоји $k \in \mathbb{Z}$такво да је $(f(x) = S^k(x)) \in p_E(x)$.

Доказ. (1) У сврху свођења на контрадикцију претпоставимо супротно, тј. да f_E није строго растућа. Тада постоје $a, b \models p_E$ такви да је $a < b$ и да је $f(b) \leqslant f(a)$. Разматрамо два случаја:

1. случај: $(x < f(x)) \in p_E(x)$.

Тада је $b < f(b)$ а тиме и $a < b < f(b) \leqslant f(a)$. Дефинишимо

$$D(x, y) = x < y < f(y) \leqslant f(x)\,.$$

Тада $b \in D(a,\mathcal{U})$, па је $D(a,\mathcal{U})$ непразан скуп и важи $\exists y D(x, y) \in p_E(x)$. Пошто је $p_E(\mathcal{U})$ конвексан (лема 3.16), $a < D(a,\mathcal{U}) < f(a)$ и $a, f(a) \in p_E(\mathcal{U})$, закључујемо да је $D(a,\mathcal{U}) \subseteq p_E(\mathcal{U})$. Заправо, $D(c,\mathcal{U}) \subseteq p_E(\mathcal{U})$ важи за свако c које реализује p_E. Скуп $D(a,\mathcal{U})$ је непразан и ограничен, па, по леми 3.17(1), има максимум, рецимо да је то d. Важи следеће

$$a < d < f(d) \leqslant f(a)\ . \tag{1}$$

С обзиром да d реализује p_E и да је $\exists y D(x, y) \in p_E(x)$, скуп $D(d,\mathcal{U})$ мора бити непразан. Нека је d' елемент скупа $D(d,\mathcal{U})$. Важи

$$d < d' < f(d') \leqslant f(d)\ . \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи да је $a < d < d' < f(d') \leqslant f(d) \leqslant f(a)$. Дакле, d' је елемент скупа $D(a,\mathcal{U})$ и $d' > d = \max D(a,\mathcal{U})$. Контрадикција! Овим је завршен доказ у случају када је $(x < f(x)) \in p_E(x)$.

2. случај: $(f(x) < x) \in p_E(x)$

У овом случају важи $f(b) \leqslant f(a) < a < b$. Дефинишимо $D(x, y) = f(x) \leqslant f(y) < y < x$ и наставимо слично као у 1. случају (У овом случају користимо део (2) леме 3.17).

(2) Нека је $a < b$ и нека су a и b реализације типа p_E. Тада по делу (1) ове леме следи да је $f \restriction [a, b]$ строго растућа а тиме и „1-1".
Она је такође и „на": f слика $p_E(\mathcal{U})$ у себе самог па за свако d које реализује p_E важи $d' = f(d) \in p_E(\mathcal{U})$, а тиме је $(\exists y)(f(y) = x) \in \mathrm{tp}(d'/E) = p_E$. Зато важи

$$p_E(x) \cup p_E(y) \cup \{x < y\} \vdash \text{„}f{\restriction}[x, y] \text{ је бијекција на } [f(x), f(y)]\text{"}.$$

По компактности постоји формула $\theta(x) \in p_E(x)$ таква да је

$$\theta(x) \wedge \theta(y) \wedge x < y \vdash \text{„}f \restriction [x,y] \text{ је бијекција на } [f(x), f(y)]\text{”}.$$

Пошто је $\theta(x) \in p_E(x)$, скуп $\neg\theta(\omega)$ је коначан, па постоји n_0 такав да $\models \theta(n)$ важи за све $n \geqslant n_0$. Дакле, за све природне бројеве m и n такве да је $m > n \geqslant n_0$ функција $f \restriction [n,m]$ је бијекција из $[n,m]$ на $[f(n), f(m)]$. То специјално значи да интервали $[n_0, n]$ и $[f(n_0), f(n)]$ имају исту дужину за свако $n \geqslant n_0$ и тада $n - n_0 = f(n) - f(n_0)$. Зато $f(n) - n = f(n_0) - n_0$ важи за свако $n \geqslant n_0$, тј. $f(n) - n = k$ важи за $k = f(n_0) - n_0$ и свако $n \geqslant n_0$. Пошто је p_E јединствен ω-тип, биће $(f(x) = S^k(x)) \in p_E(x)$. $\square$

Као непосредну последицу добијамо потпуни опис свих могућих комплетирања типа $p_0(x) \cup p_0(y)$.

Последица 3.21. Нека важи $a, b \models p_0$.

а) $\mathrm{cl}(a) = \{S^k(a) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

б) $\mathrm{tp}(b/a)$ је ω-тип ако и само ако $\mathrm{cl}(b) < \mathrm{cl}(a)$.

в) Постоје тачно три могућности:

1) $\mathrm{cl}(a) < \mathrm{cl}(b)$ (када је (b,a) ω-низ);
2) $\mathrm{cl}(b) < \mathrm{cl}(a)$ (када је (a,b) ω-низ);
3) $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(b)$ (када је $a = S^m(b)$ за неко $m \in \mathbb{Z}$).

Доказ. **а)** Следи из леме 3.20(2);

б) По леми 3.19 $\mathrm{tp}(b/a)$ је ω-тип ако и само ако $\omega < b < \mathrm{cl}(a)$. Последње је еквивалентно са $\omega < S^m(b) < \mathrm{cl}(a)$ за неко (свако) $m \in \mathbb{Z}$. По делу **а** ове последице ово је еквивалентно са $\mathrm{cl}(b) < \mathrm{cl}(a)$.

в) Ако је $\mathrm{cl}(a) < \mathrm{cl}(b)$ или $\mathrm{cl}(b) < \mathrm{cl}(a)$, закључак следи на основу дела **б**. Једина преостала могућност је, по делу **а**, $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(b)$. $\square$

Опис 2-типова без параметара је последица леме 3.20, чија примена је била могућа јер је p_0 потпун тип. Ради описа n-типова (за $n > 2$), доказаћемо у низу лема да је $p_{\bar{a}}$ потпун тип за било који низ реализација типа p_0.

Лема 3.22. Нека је p_E потпун и нека $d \models p_E$. Следећи услови су еквивалентни:

(1) $\mathrm{tp}(a/dE)$ је ω-тип;

(2) $\mathrm{tp}(a/d)$ је ω-тип.

Доказ. (1) $\Rightarrow$ (2) важи јер је рестрикција ω-типа такође ω-тип. Да бисмо доказали (2) $\Rightarrow$ (1) претпоставимо да је $\mathrm{tp}(a/d)$ ω-тип. Тада по последици 3.21 важи $\omega < \mathrm{cl}(a) < \mathrm{cl}(d)$. Показаћемо да је $\omega < a < \mathrm{cl}(dE)$. Претпоставимо да за неку E-дефинабилну функцију f важи да $f(d)$ реализује p_0. Ако $f(d)$ не реализује p_E, тада (по леми 3.19) није $f(d) < \mathrm{cl}(E)$, тј. важи $b \leqslant f(d)$ за неко $b \in \mathrm{cl}(E)$.

Пошто је $\mathrm{tp}(d/E) = p_E$ ω-тип, по леми 3.19, мора бити $d < \mathrm{cl}(E)$. То заједно са $a < \mathrm{cl}(d)$ даје $a < f(d)$. Зато претпоставимо да $f(d)$ реализује p_E. Тада f слика локус типа p_E на њега самог, па можемо да применимо лему 3.20(2): За неки $k \in \mathbb{Z}$ је $f(d) = S^k(d)$. Тада је $f(d) \in \mathrm{cl}(d)$, па из $a < \mathrm{cl}(d)$ следи $a < f(d)$. Зато $a < f(d)$ важи за било коју E-дефинабилну функцију f такву да је $f(d) \models p_0$. Закључујемо да је $\omega < a < \mathrm{cl}(dE)$ па је, по леми 3.19, $\mathrm{tp}(a/dE)$ ω-тип. □

Лема 3.23. Ако је p_E потпун тип, и $d \models p_E$, онда је и p_{dE} потпун тип.

Доказ. Ради свођења на контрадикцију претпоставимо да су типови $\mathrm{tp}(a'/dE)$ и $\mathrm{tp}(a/dE)$ различити ω-типови. Тада $\mathrm{tp}(a'd/E) \neq \mathrm{tp}(ad/E)$. Типови $\mathrm{tp}(a'/E)$ и $\mathrm{tp}(a/E)$ су ω-типови, па и a и a' реализују $p_E(x)$. Нека је H аутоморфизам који фиксира све елементе скупа E и слика a' у a и нека је $b = H(d)$. Такав аутоморфизам постоји јер радимо у универзуму (засићеној структури). Тада је $H(a', d) = (a, b)$, па је $\mathrm{tp}(a'd/E) = \mathrm{tp}(ab/E)$, а тиме и $\mathrm{tp}(ad/E) \neq \mathrm{tp}(ab/E)$. Нека је $\varphi(x, y, \bar{e}) \in \mathrm{tp}(ab/E) \setminus \mathrm{tp}(ad/E)$. Сада је ситуација следећа:

(1) Елементи a, d и $b = H(d)$ реализују p_E;
(2) Типови $\mathrm{tp}(a/d)$ и $\mathrm{tp}(a/b)$ су ω-типови, $a < d$ и $a < b$;
(3) Важи $\models \varphi(a, b, \bar{e}) \wedge \neg\varphi(a, d, \bar{e})$.

Без умањења општости претпоставимо да је $b < d$. Тада је $a < b < d$. Нека је $D = \{x \,|\, a < x < d \wedge \varphi(a, x, \bar{e})\}$. Тада је $b \in D$, па је D непразан и одозго ограничен елементом d. По леми 3.17(1) D има максимум; означимо га са b'. Сада важи $b \leqslant b' < S(b') \leqslant d$. Локус типа p_E је конвексан и $b, d \models p_E$, па b' и $S(b')$ реализују p_E. Дакле, важи:

$$\varphi(x, b', \bar{e}) \wedge \neg\varphi(x, S(b'), \bar{e}) \in \mathrm{tp}(a/b'E).$$

По леми 3.19, с обзиром да је $\mathrm{tp}(a/bE)$ ω-тип, закључујемо да важи $\omega < a < \mathrm{cl}(b\bar{e})$. По леми 3.20, свака E-дефинабилна функција f, која локус типа p_E слика на њега самог је растућа, па из $b \leqslant b'$ и $\omega < a < f(b, \bar{e})$ следи да је $\omega < a < f(b', \bar{e})$. Зато из $\omega < a < \mathrm{cl}(b\bar{e})$ следи $\omega < a < \mathrm{cl}(b'\bar{e})$. По леми 3.19, $\mathrm{tp}(a/b'\bar{e})$ је ω-тип, па за неко (заправо за скоро свако) $n \in \omega$ важи

$$\models \varphi(n, b', \bar{e}) \wedge \neg\varphi(n, S(b'), \bar{e}) \ .$$

Дакле, $\mathrm{tp}(b'/E) \neq \mathrm{tp}(S(b')/E)$. Са друге стране, пошто је $p_E(\mathcal{U})$ конвексан и затворен за претходнике и следбенике, елементи b' и $S(b')$ реализују p_E, а тиме $\mathrm{tp}(b'/E) = \mathrm{tp}(S(b')/E)$. Контрадикција. Дакле постоји јединствен ω-тип са параметрима dE, тј. тип p_{dE} је потпун. □

Лема 3.24. Нека су $a_n \leqslant \cdots \leqslant a_1$ реализације типа p_0. Тада

(1) $p_{a_1 \dots a_n}$ је потпун тип; постоји јединствен ω-тип у $S_1(a_1 \dots a_n)$.

(2) Ако је $b \leqslant a_n$ и $b \in \mathrm{cl}(a_1, \dots, a_n)$, онда је $b \in \mathrm{cl}(a_n)$.

Доказ. Доказ ћемо спровести користећи индукцију истовремено на оба дела леме. Прво посматрајмо случај $n = 1$. Пошто $a_1 \models p_0$ и пошто је p_0 потпун тип, примењујући лему 3.23 на a_1 и $\emptyset$ као d и E, закључујемо да је p_{a_1} потпун тип. Дакле, део (1) важи за $n = 1$. Очигледно је да за $n = 1$ део (2) важи.

Претпоставимо да је хипотеза тачна за $n = k$. Тада је $p_{a_1 \dots a_k}$ потпун тип. Подсетимо се да је $a_{k+1} \leqslant a_k \leqslant \dots \leqslant a_1$. За a_{k+1} постоје две могућности:

Први случај: $a_{k+1} \not< \mathrm{cl}(a_1, \dots, a_k)$.

Тада је $a_{k+1} \in \mathrm{cl}(a_1, \dots, a_k)$, а тиме је, по делу (2) хипотезе, $a_{k+1} \in \mathrm{cl}(a_k)$. По последици 3.21(а) из $a_{k+1} \in \mathrm{cl}(a_k)$ следи да је $a_{k+1} = S^{-r}(a_k)$ за неко $r \in \mathbb{N}$.

Пошто је a_{k+1} дефинабилан над a_k и пошто је $p_{a_1 \dots a_k}$ потпун тип закључујемо да је $p_{a_1 \dots a_k a_{k+1}}$ такође комплетан. Овим је доказан део (1) за $n = k + 1$.

Да бисмо доказали део (2), претпоставимо да неко $b \leqslant a_{k+1}$ задовољава $b \in \mathrm{cl}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$. Тада постоји $\emptyset$-дефинабилна функција f таква да важи:

$$\omega < f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \leqslant b \leqslant a_{k+1} \leqslant a_k \leqslant \dots \leqslant a_1.$$

Тада важи $\omega < f(a_1, \dots, a_k, S^{-r}(a_k)) \leqslant b \leqslant a_k \leqslant \dots \leqslant a_1$, па је $b \in \mathrm{cl}(a_1, \dots, a_k)$. По делу (2) хипотезе следи да је $b \in \mathrm{cl}(a_k)$, па, по последици 3.21(а), следи да је $b = S^{-m}(a_k)$. Зато је $b = S^{r-m}(a_{k+1})$, а тиме и $b \in \mathrm{cl}(a_{k+1})$.

Други случај: $a_{k+1} < \mathrm{cl}(a_1, \dots, a_k)$.

По леми 3.19 следи да је $\mathrm{tp}(a_{k+1}/\bar{a})$ ω-тип, где је $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k)$. По делу (1) хипотезе следи да је $p_{\bar{a}}$ потпун тип, па је $a_{k+1} \models p_{\bar{a}}$.

Примењујући лему 3.23 на a_{k+1} и $\bar{a}$ као d и E закључујуемо да је тип $p_{a_1 \dots a_k a_{k+1}}$ потпун. Овим је доказан део (1).

Да бисмо доказали део (2) претпоставимо да је $b \in \mathrm{cl}(\bar{a}, a_{k+1})$. Тада постоји $\emptyset$-дефинабилна функција f таква да је $\omega < f(\bar{a}, a_{k+1}) \leqslant b$. Нека $f_{\bar{a}}(x)$ означава $f(\bar{a}, x)$. Важи:

$$\omega < f_{\bar{a}}(a_{k+1}) \leqslant b \leqslant a_{k+1} < \mathrm{cl}(\bar{a}).$$

По хипотези $p_{\bar{a}}$ је потпун и, по леми 3.19, $f_{\bar{a}}(a_{k+1})$ и a_{k+1} реализују $p_{\bar{a}}$. Према томе, $f_{\bar{a}}$ слика локус типа $p_{\bar{a}}$ у њега самог. По леми 3.20 важи $f_{\bar{a}}(a_{k+1}) = S^{-m}(a_{k+1})$ за неко m. Тада важи $S^{-m}(a_{k+1}) \leqslant b \leqslant a_{k+1}$, па је $b \in \mathrm{cl}(a_{k+1})$. Овим је доказ завршен. □

Лема 3.25. Претпоставимо да $a_n \leqslant \dots \leqslant a_1$ реализују p_0. Тада важи

$$\bigcup_{1 \leqslant i < n} \mathrm{tp}_{x_{i+1}, x_i}(a_{i+1}, a_i) \vdash \mathrm{tp}_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n).$$

Доказ. Индукцијом. Претпоставимо да тврђење важи за n, тј. да важи

$$\bigcup_{1\leqslant i<n} \mathrm{tp}_{x_{i+1},x_i}(a_{i+1},a_i) \vdash \mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n)$$

и доказаћемо да важи и за $n+1$. Ради лакшег читања у остатку текста ћемо изоставити индексе који указују на променљиве типова. То неће омести праћење јер ће x_i, x_j увек бити променљиве типа $\mathrm{tp}(a_i,a_j)$. По хипотези важи

$$\bigcup_{1\leqslant i<n+1} \mathrm{tp}(a_{i+1},a_i) \vdash \mathrm{tp}(a_{n+1},a_n) \cup \mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n),$$

па је потребно доказати да тип на десној страни форсира $\mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n)$. Разликујемо два случаја.

Први случај: Тип $\mathrm{tp}(a_{n+1}/a_n)$ је ω-тип.
По леми 3.24(1) постоји јединствен ω-тип у $S_1(a_1\dots a_n)$, па можемо применити лему 3.22 и закључити да је $\mathrm{tp}(a_{n+1}/a_1,\dots,a_n)$ јединствен ω-тип. Дакле, важи $\mathrm{tp}(a_{n+1},a_n) \vdash \mathrm{tp}(a_{n+1}/a_1,\dots,a_n)$ и

$$\mathrm{tp}(a_{n+1},a_n) \cup \mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n) \vdash \mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n,a_{n+1}).$$

Други случај: Тип $\mathrm{tp}(a_{n+1}/a_n)$ није ω-тип.
По последици 3.21 је $a_{n+1} = S^{-m}(a_n)$ за неко $m \in \mathbb{N}$. Тада је

$$\mathrm{tp}(a_{n+1},a_n) \cup \mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n) \vdash \mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})$$

чиме је доказ завршен. □

Опис свих потпуних 2-типова који шире $p_0(x) \cup p_0(y)$ је дат у последици 3.21. Комбинујући ту последицу са лемом 3.25 добијамо опис свих потпуних n-типова. Специјално, имамо опис типа ω-низа: Ако $a_1\dots a_n$ реализују p_0, онда је $(a_1,\dots,a_n)$ ω-низ ако и само ако је $\mathrm{cl}(a_n) < \dots < \mathrm{cl}(a_1)$.

Последица 3.26. Нека $a_n \leqslant \dots \leqslant a_1$ реализују p_0. Нека је $W = \{i \leqslant n \mid \mathrm{cl}(a_{i+1}) < \mathrm{cl}(a_i)\}$ и $V = \{i \leqslant n \mid \mathrm{cl}(a_{i+1}) = \mathrm{cl}(a_i)\}$. За свако $i \in V$ нека је $m_i \in \mathbb{N}$ такав да важи $S^{m_i}(a_{i+1}) = a_i$. Тада је

$$p_0(x_1) \cup p_0(x_n) \cup \{S^m(x_{i+1}) < x_i \mid m \in \mathbb{N},\, i \in W\} \cup \{S^{m_i}(x_{i+1}) = x_i \mid i \in V\} \vdash$$
$$\vdash \mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n).$$

Доказ. Следи директно из леме 3.25 и последице 3.21. □

Доказ теореме 3.2: Нека је $L' = \{<\} \cup \omega$. Тада важи $L' \subseteq L$ зато што је ω апсорбовано у L. Треба показати да ако $(\omega,<)$ сведочи да је p_0 прост тип, онда је сваки релативно $\emptyset$-дефинабилан подскуп скупа $p_0(\mathcal{U})^n$ или $(\omega \cup p_0(\mathcal{U}))^n$ релативно дефинабилан L'-формулом. Користићемо критеријум описан у леми 1.18. Доказ делимо на два дела.

Случај $p_0(\mathcal{U})^n$**:** Претпоставимо да је $D \subseteq p_0(\mathcal{U})^n$ релативно дефинисан L формулом $\varphi(\bar{x})$. Показаћемо да је D релативно дефинисан L'-формулом. Нека је $K = \{\mathrm{tp}(\bar{a}) \,|\, \bar{a} \in D\}$. Тада је K скуп свих потпуних n-типова који садрже $\{\varphi(\bar{x})\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} p_0(x_i)$, па је K затворен подскуп простора $S_n(T)$. Треба показати да за сваки тип $q(\bar{x}) \in K$ постоји L'-формула $\theta_q(\bar{x})$ таква да

$$\theta_q(\bar{x}) \in q \quad \text{и} \quad p_0(x_1) \cup \cdots \cup p_0(x_n) \cup \{\theta_q(\bar{x})\} \vdash \varphi(\bar{x}) \ . \tag{1}$$

Тада, пошто је K затворен у $S_n(T)$, L'-формула се може лако добити по компактности (као у критеријуму описаном у леми 1.18). Да бисмо доказали (1) претпоставимо, не умањујући општост, да $\varphi(\bar{x})$ имплицира $x_n \leqslant \cdots \leqslant x_1$ и да је $\bar{a} \models q$. Тада $a_n \leqslant \cdots \leqslant a_1$ реализују p_0, па можемо да применимо последицу 3.26: за повољно одабрану партицију W, V скупа $\{1, \ldots, n\}$ важи да је тип $\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n) = q(\bar{x})$ форсиран типом

$$p_0(x_1) \cup p_0(x_n) \cup \{S^m(x_{i+1}) < x_i \,|\, m \in \mathbb{N},\, i \in W\} \cup \{S^{m_i}(x_{i+1}) = x_i \,|\, i \in V\} \subseteq q(\bar{x}),$$

Пошто је $\varphi(\bar{x}) \in \mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n) = q(\bar{x})$ важи

$$p_0(x_1) \cup p_0(x_n) \cup \{S^m(x_{i+1}) < x_i \,|\, m \in \mathbb{N},\, i \in W\} \cup \{S^{m_i}(x_{i+1}) = x_i \,|\, i \in V\} \vdash \varphi(\bar{x}) \,.$$

По компактности постоји формула $\theta_q(\bar{x})$ која је конјункција формула облика $S^m(x_{i+1}) < x_i$ и $S^{m_i}(x_{i+1}) = x_i$ таква да $p_0(x_1) \cup p_0(x_n) \cup \{\theta_q(\bar{x})\} \vdash \varphi(\bar{x})$. Формула $\theta_q(\bar{x})$ је L'-формула (јер је $S^m(x) = y$ дефинисано L'-формулом) која је задовољена низом $\bar{a}$, па припада типу q и задовољава (1). Овим је доказан први случај теореме.

Случај $(\omega \cup p_0(\mathcal{U}))^n$**:** Претпоставимо да је $D \subseteq (\omega \cup p_0(\mathcal{U}))^n$ релативно дефинисан L формулом $\varphi(\bar{x})$. Да бисмо доказали да је D релативно дефинисан L'-формулом довољно је показати да је $\omega \cup p_0(\mathcal{U})$ тип-дефинабилан скуп, јер ће тад остатак доказа бити сличан доказу у првом случају (за $p_0(\mathcal{U})^n$). Пошто је p_0 јединствен потпуни ω-тип у $S_1(\emptyset)$ тада је $b \notin \omega \cup p_0(\mathcal{U})$ ако и само ако постоји формула $\psi(x) \in \mathrm{tp}(b)$ коју не задовољава ниједан елемент скупа ω. Ако $\mathcal{F}$ означава скуп свих таквих формула онда је $\omega \cup p_0(\mathcal{U})$ дефинисан типом $\{x < \psi(\mathcal{U}) \mid \psi(x) \in \mathcal{F}\}$. Дакле, $(\omega \cup p_0(\mathcal{U}))^n$ је тип-дефинабилан. □

4. Експанзије СВ ранга 1 и степена k

У овом одељку ћемо доказати карактеризацију експанзија структура $(\omega, <)$ и $(\omega + \omega^*, <)$ (у којима ω није дефинабилно) чији је СВ ранг једнак 1, која је исказана у теореми 1. Прво ћемо се бавити случајем $\deg(x = x) = 1$.

Доказ теореме 2: Доказаћемо да не постоји права експанзија структуре $(\omega, <)$ која задовољава услов $\mathrm{CB}(x = x) = \deg(x = x) = 1$. Претпоставимо да је структура $\mathcal{M} = (\omega, <, \dots)$ једна таква експанзија. Радићемо у $\mathcal{U}$, универзуму теорије $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Услов $\mathrm{CB}(x = x) = \deg(x = x) = 1$ имплицира да је сваки $\emptyset$-дефинабилан подскуп скупа ω или коначан или коконачан. Зато постоји јединствен неалгебарски потпуни тип $p \in S_1(\emptyset)$: то је тип који садржи све формуле чији је скуп решења коконачан. Лако је видети да $(C, <) = (\omega, <)$ сведочи да је p прост слева (овде је $\sigma(x)$ заправо $x = x$). Нека је D $\emptyset$-дефинабилни подскуп скупа $\mathcal{U}^n$. Пошто је $\omega \cup p(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, сваки релативно $\emptyset$-дефинабилни скуп је $\emptyset$-дефинабилан, па примењујући теорему 3.2 закључујемо да је D $\emptyset$-дефинабилан у језику који се састоји од симбола релације $<$ и симбола константи за елементе скупа ω. Специјално, D је $\emptyset$-дефинабилан у $(\mathcal{U}, <)$, па је $\mathcal{M}$ дефинициона експанзија структуре $(\omega, <)$. $\square$

Теорема 3.27. Не постоји права експанзија структуре $(\omega + \omega^*, <)$ која задовољава $\mathrm{CB}(x = x) = \deg(x = x) = 1$.

Доказ. Претпоставимо да је $\mathcal{M} = (\omega + \omega^*, <, \dots)$ једна таква експанзија у језику L који садржи симболе константи свих елемената скупа носача. Нека је L' језик који се састоји само од симбола релације $<$ и симбола константи свих елемената скупа носача. Радимо у универзуму $\mathcal{U}$ који је екстензија структуре $\mathcal{M}$. Постоји јединствен неалгебарски тип $p \in S_1(T)$. Тип p је прост с лева што сведочи ω и истовремено прост с десна што сведочи ω^*. Зато је $\mathcal{U} = \omega + p(\mathcal{U}) + \omega^*$. Нека је $p_0(x) := \{n < x \wedge x < n^* \mid n \in \omega\}$. Очигледно је p_0 подтип типа p и садржи само L'-формуле. Претпоставке о СВ рангу и степену имплицирају да $p_0(x)$ форсира $p(x)$.

Нека је $\varphi(\bar{x})$ формула језика L таква да је $D = \varphi(\mathcal{U})$ непразан скуп. Показаћемо да је D дефинабилан формулом језика L'. Нека је $K := \{\mathrm{tp}(a_1, \dots, a_k) \mid (a_1, \dots, a_k) \in D\}$. Довољно је да за свако $q \in K$ нађемо формулу $\theta_q(\bar{x}) \in q$ језика L' такву да имплицира $\varphi(\bar{x})$. Нека је $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k) \models q$. Не губећи на општости претпоставимо да је

$$\bar{a}' = \{a_{n+1}, \dots, a_k\} = (\omega \cup \omega^*) \cap \bar{a} \ \text{ и да је } \ a_n \leqslant \dots \leqslant a_1.$$

Тада $(a_1, \dots, a_n) \in p(\mathcal{U})^n$ задовољава L формулу $\varphi(x_1 \dots, x_n, \bar{a}')$. Применимо последицу 3.26 на p као на тип прост с лева: за погодно изабрану партицију W, V скупа $\{1, \dots, n\}$ важи

$$p(x_1) \cup p(x_n) \cup \{S^m(x_{i+1}) < x_i \mid m \in \mathbb{N},\, i \in W\} \cup \{S^{m_i}(x_{i+1}) = x_i \mid i \in V\} \vdash \mathrm{tp}(a_1, \dots, a_n),$$

при чему је лева страна подскуп типа $\mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n)$. С обзиром да је $\varphi(\bar{x},\bar{a}')\in\mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n)$ важи

$$p(x_1)\cup p(x_n)\cup\{S^m(x_{i+1})<x_i\,|\,m\in\mathbb{N},\,i\in W\}\cup\{S^{m_i}(x_{i+1})=x_i\,|\,i\in V\}\vdash\varphi(\bar{x},\bar{a}').$$

По компактности, постоји формула $\theta(\bar{x})$ која је конјункција формула облика $S^m(x_{i+1})<x_i$ и $S^{m_i}(x_{i+1})=x_i$ таква да је $p(x_1)\cup p(x_n)\cup\{\theta(\bar{x})\}\vdash\varphi(\bar{x},\bar{a}')$. С обзиром да $p_0(x)\vdash p(x)$ следи

$$p_0(x_1)\cup p_0(x_n)\cup\{\theta(\bar{x})\}\vdash\varphi(\bar{x},\bar{a}').$$

Лева страна садржи само формуле језика L', па, по компактности, следи да постоји L'-формула $\theta_q(\bar{x})\in\mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n)$ која имплицира $\varphi(\bar{x},\bar{a}')$. Формула $\theta_q(\bar{x})\wedge\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant k-n}x_{n+i}=a_{n+i}$ је формула језика L' која припада типу q и која имплицира $\varphi(x_1,\dots,x_k)$, па је, по критеријуму из леме 1.18, φ модуло T еквивалентна формули језика L', чиме је доказ завршен. □

Доказ претходне теореме може бити искоришћен да објасни локалну структуру типова који су истовремено прости и с лева и с десна у односу на исто уређење. Грубо говорећи, следећа теорема исказује да су локално, до на дефинициону еквивалентност, такви типови јединствени неалгебарски потпуни 1-типови структуре $(\omega+\omega^*,<)$. За формулу без параметара $\sigma(x)$ под структуром индукованом на $\sigma(\mathcal{U})$ подразумевамо структуру којој је скуп носач $\sigma(\mathcal{U})$ и чије су $\emptyset$-дефинабилне релације тачно они у структури $\mathcal{U}$ $\emptyset$-дефинабилни подскупови скупа $\sigma(\mathcal{U})^n$ (за свако n).

Теорема 3.28. Нека је $p\in S_1(T)$ истовремено прост са лева и са десна у односу на $(\sigma(\mathcal{U}),<)$. Нека $C_L,C_R\subseteq\mathrm{dcl}(\emptyset)$ задовољавају услове тврђења 3.14:

(1) $(\sigma(\mathcal{U}),<)$ је дискретно линеарно уређење, C_L му је почетни комад и C_R му је завршни комад.
(2) $(C_L,<)\cong(\omega,<)$ и $(C_R,<)\cong(\omega^*,<)$.
(3) За сваку формулу $\varphi(x)\in p$ је $C_L\cup C_R\smallsetminus\varphi(C_L\cup C_R)$ је коначан.
(4) $C_L\cup p(\mathcal{U})\cup C_R=\sigma(\mathcal{U})$; p је јединствен неалгебарски потпун 1-тип који садржи $\sigma(x)$.

Тада је индукована структура $(\sigma(\mathcal{U}),\dots)$ дефиниционо еквивалентна структури $(\sigma(\mathcal{U}),<)$. Специјално, $(\sigma(\mathcal{U}),<)\equiv(\omega+\omega^*,<)$.

Доказ. Главни део доказа теореме 3.27 је чињеница да је p јединствен неалгебарски потпуни 1-тип и да је његов локус смештен између ω и ω^*. Исти поступак у коме C_L и C_R заузму место скупова ω и ω^* тим редом примењив је у овом доказу. □

Остатак ове главе је посвећен доказу теореме 1. Доказ њена два дела је дат у посебна два поглавља која следе.

4.1. Експанзије структуре $(\omega, <)$.

У овом поглављу ћемо разматрати експанзије структуре $(\omega, <)$ СВ ранга 1 и степена $k > 1$ и доказати први део теореме 1. Зато ћемо претпоставити да је $\mathcal{M} = (\omega, <, \dots)$ и да је $\mathrm{CB}(x = x) = 1$ и $\deg(x = x) = k > 1$. Показаћемо да је структура $\mathcal{M}$ дефиниционо еквивалентна структури $(\omega, <, P_k)$. Повољно је увести следећу нотацију: Кажемо да је бесконачан $\mathcal{M}$-дефинабилан скуп $D \subseteq \omega$ минималан у $\mathcal{M}$ уколико га ниједан други $\mathcal{M}$-дефинабилан скуп не цепа на два бесконачна дела. За минималне скупове D_1, D_2 постоје две могућности:

(1) Скоро су дисјунктни:: $D_1 \cap D_2$ је коначан.
(2) Скоро су једнаки (у ознаци $D_1 =^* D_2$): $D_1 \Delta D_2$ је коначан.

Претпоставка $\deg(x = x) = k$ је еквивалентна с тим да је k јединствен природан број за који постоје минимални, по паровима скоро дисјунктни скупови $D_1, D_2, \dots, D_k$ такви да је $\omega =^* \bigcup_{i=1}^k D_i$.

Напомена 3.29. Ако су $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ и $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ две фамилије минималних, по паровима скоро дисјунктних скупова такве да је $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i =^* \bigcup_{j=1}^{m} E_j$ тада је $m = n$ и постоји пермутација τ скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ таква да је $D_i =^* E_{\tau(i)}$ за свако $i \leqslant n$.

Лема 3.30. Скуп $\{x \mid x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)\}$ је минималан (дефинабилан) скуп у $\mathcal{M}$.

Доказ. Претпоставимо да је D минималан скуп. Тада је за свако $i \in \mathbb{Z}$ транслат $D + i$ такође минималан. Нека је $S := \{i \in \mathbb{Z} | D =^* (D + i)\}$. Показаћемо да је S подгрупа групе $(\mathbb{Z}, +)$. Нека су $i, j \in S$. Тада је $D =^* D + i$ и $D =^* D + j$ и, по транзитивности релације $=^*$, биће и $D + i =^* D + j$. Транслирајући оба скупа за $-i$ добија се $D =^* D + j - i$. Дакле, $j - i \in S$, па закључујемо да је S подгрупа. Показаћемо да је S нетривијална подгрупа. Пошто скупови $D + i$ не могу да буду по паровима дисјунктни за свако $i \in \mathbb{Z}$, мора бити $D + i =^* D + j$ за неке међусобно различите $i, j \in \mathbb{Z}$. тада је $D =^* D + i - j$, $i - j \neq 0$ и $i - j \in S$.

Нека је $n \in \mathbb{N}$ такво да је $S = n\mathbb{Z}$. Из дефиниције скупа S и особина подгрупа групе $(\mathbb{Z}, +)$ закључујемо да је n највећи број за који су скупови $D, D + 1, D + 2, \dots, D + (n - 1)$ по паровима скоро дисјунктни. Показаћемо да је њихова унија скоро једнака скупу ω. Једнакост $D =^* (D + n)$ имплицира да за неко $a \in D$ важи

$$\mathcal{M} \models (\forall x > a)(x \in D \Leftrightarrow x + n \in D) \ . \tag{1}$$

Тврдимо за b, c, било који пар елемената скупа D који су већи од a, да су конгруентни модуло n. Нека је $B = \{b + i\, n \mid i \in \mathbb{N}\}$ и нека је $C = \{c + i\, n \mid i \in \mathbb{N}\}$. Тада, по (1), важи $B \subseteq D$ и $C \subseteq D$. Пошто је $B = C + b - c$ закључујемо да је $D + b - c \supseteq B$, па је $D \cap D + b - c$ бесконачан и, по минималности скупова

D и $D+b-c$, важи $D =^* D+b-c$. Зато важи $b-c \in S$, а тиме и да су b, c конгруентни модуло n, чиме је доказана тврдња.

Нека је D' скуп свих елемената скупа D који су већи од a. Тада је $D =^* D'$, па је D' минималан. Пошто су свака два елемена скупа D' когруентна модуло n и $b \in D'$, важи $D' \subseteq B$. Тада, по (1), следи да је $B =^* D'$, па је B дефинабилан и минималан. Дакле, $B - b = \{x \,|\, x \equiv 0 (\text{mod } n)\}$. Пошто је ω дисјунктна унија n транслата скупа $B-b$ и сваки је минималан, закључујемо да је $n = \deg(x = x) = k$. Зато је $\{x \,|\, x \equiv 0(\text{mod } k)\}$ минималан, чиме је лема доказана. $\square$

Доказ теореме 1(1): По леми 3.30, $P_k(x)$ је дефинабилан у $\mathcal{M}$, па је експанзија $\mathcal{M}_1 = (\omega, <, P_k(\omega), \dots)$ дефинициона експанзија структуре $\mathcal{M}$. Нека је $\mathcal{U}$ универзум теорије $\text{Th}(\mathcal{M}_1)$.

Тврдња: Сваки $\emptyset$- дефинабилан скуп у $\mathcal{U}$ има дефиницију у језику L' који се састоји од симбола $<$, P_k и симбола константи за елементе скупа ω.

Очигледно је да тврдња имплицира дефинициону еквивалентност структура $\mathcal{M}_1$ и $(\omega, <, P_k(\omega))$.

Прво ћемо доказати тврдњу за $\emptyset$-дефинабилни подскуп $D' \subseteq P_k(\mathcal{U})^n$. Нека је $p \in S_1(T)$ један $P_k(\omega)$-тип. Пошто је $P_k(\omega)$ минималан скуп у $\mathcal{M}_1$, p је јединствен потпуни $P_k(\omega)$-тип и $P_k(x)$ и $(P_k(\omega), <)$ сведоче да је p прост с лева. Приметимо да важи $P_k(\mathcal{U}) = P_k(\omega) \cup p(\mathcal{U})$. Применимо теорему 3.2 на p: D' је релативно дефинисан формулом језика L' унутар $(P_k(\omega) \cup p(\mathcal{U}))^n = P_k(\mathcal{U})^n$. Пошто је $P_k(\mathcal{U})$ L'-дефинабилан, мора и D' бити L'-дефинабилан. Овим је доказан специјалан случај тврдње. Да бисмо доказали потпуну тврдњу претпоставимо да је $D \subseteq \mathcal{U}^n$ $\emptyset$-дефинабилан скуп. За сваки $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \{0, \dots, k-1\}^n$ дефинишимо $D_{\bar{v}} := \{\bar{a} \in D \,|\, \bar{a} + \bar{v} \in P_k(\mathcal{U})^n\}$. Приметимо да је D дисјунктна унија скупова $D_{\bar{v}}$. Тада је $D_{\bar{v}} + \bar{v}$ дефинабилан подскуп скупа $P_k(\mathcal{U})^n$. По доказаном специјалном случају тврђења, скуп $D_{\bar{v}} + \bar{v}$ је L'-дефинабилан, па је то и $D_{\bar{v}}$. С обзиром да је D унија скупова $D_{\bar{v}}$, и сам D је L'-дефинабилан. Овим је завршен доказ теорме 1(1). $\square$

4.2. Експанзије структуре $(\omega + \omega^*, <)$.

Доказ другог дела теореме 1 је сличан доказу првог. Скица доказа је следећа: Претпоставимо да је $\mathcal{M}$ експанзија структуре $(\omega + \omega^*, <)$ таква да је $CB(x = x) = 1$, $\deg(x = x) = k > 1$ и да ω није дефинабилно у $\mathcal{M}$. Показаћемо да је $\mathcal{M}$ дефиниционо еквивалентно структури $(\omega + \omega^*, <, B_{k,l})$.

Претпоставимо да је D минималан скуп у $\mathcal{M}$. Као у доказу леме 3.30 добија се да је $\{i \in \mathbb{Z} \,|\, D =^* D + i\} = n\mathbb{Z}$. Пошто ω није дефинабилно у $\mathcal{M}$ и важи $D =^* D + n$, постоји $m \in \omega$ такво да важи

$$\mathcal{M} \models (\forall x)(m < x < m^* \Rightarrow (x \in D \iff S^n(x) \in D)) \ .$$

Следи да је $D \cap \omega$ скоро једнако неком транслату скупа $n \cdot \omega$ и да је $D \cap \omega^*$ скоро једнако неком транслату скупа $n \cdot \omega^*$. Закључујемо да је $n = k$, да је D скоро једнако неком $B_{k,l}$ и да је $B_{k,l}$ дефинабилан и минималан у $\mathcal{M}$. Доказ дефиниционе еквивалентности структура $\mathcal{M}$ и $(\omega + \omega^*, <, B_{k,l})$ је сличан одговарајућем доказу првог дела теореме.

ПОГЛАВЉЕ 4

Линеарна бинарност, јака линеарна бинарност

У овом поглављу описујемо дефинабилне скупове у линеарним уређењима, могуће са придодатим унарним предикатима и конвексним еквиваленцијама и као резултат испитивања доказујемо теорему 3. Бавимо се специфичним облицима бинарности који су карактеристични за теорије линеарно уређених структура. Уводимо појам линеарне бинарности и јаке линеарне бинарности и доказујемо теорему 4, односно да својство јаке линеарне бинарности есенцијално карактерише теорије линеарних уређења са придодатим унарним и конвексним релацијама еквиваленције.

Потпуна теорију првог реда T је бинарна ако је свака L формула T-еквивалентна Буловој комбинацији L формула које имају највише две слободне променљиве. Бинарност се на еквивалентан начин може изразити и преко типова следећим условом:

За сваки природан број n и сваки потпун тип $p(x_1, \ldots, x_n)$ важи

$$\bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p_{i,j}(x_i, x_j) \vdash p(x_1, \ldots, x_n),$$

где је $p_{i,j}(x_i, x_j)$ потпуни 2-тип који се састоји од свих формула $\phi(x_i, x_j) \in p$.

Примењујући теорему компактности, није тешко доказати да је претходни услов еквивалентан бинарности теорије T. Розенштајн у [**14**] наводи да је Ф. Галвин показао да су теорије линеарних уређења бинарне, а Рубин је у [**15**] показао да је свака потпуна теорија линеарног уређења са унарним предикатима бинарна и то у смислу јачем од обичне бинарности. То је исти облик бинарности до кога смо ми дошли у другом поглављу: За $a_n \leqslant \cdots \leqslant a_1$ из локуса простог типа важи

$$\bigcup_{1 \leqslant i < n} \mathrm{tp}_{x_i, x_{i+1}}(a_i, a_{i+1}) \vdash \mathrm{tp}_{x_1, \ldots, x_n}(a_1, \ldots, a_n).$$

Ми ћемо ово својство именовати и дати више услова који су му еквивалентни. За такво својство структура и теорија кажемо да је својство линеарне бинарности. Један од интересантних еквивалената је описан у леми 4.8 која каже да у линеарно бинарним структурама скуп $D\cap[b,-)$ има коначно много слика при аутоморфизмима који фиксирају тачку b кад год су параметри у формули која дефинише скуп D мањи од b. У теореми 4.17 (заправо у варијанти ове теореме) показујемо да је a дефинабилан скуп $D(a)$ који има коначно много конвексних компоненти једнак Буловој комбинацији $\emptyset$-дефинабилних скупова, скупова $[a,-)$, $(-,a]$, $\{a\}$ и класа елемента a (коначно много) $\emptyset$-дефинабилних конвексних еквиваленција и (коначно много) следбеника класа елемента a.

За даљу анализу линеарне бинарности проблем представља постојање скупова који имају бесконачно много конвексних компоненти. Зато уводимо појам јако линеарно бинарних структура; то је поткласа линеарно бинарних структура чија ће формална дефиниција бити дата касније: Ако се два аутоморфизма поклапају на конвексном скупу, онда се од њих може направити аутоморфизам тако што се на уоченом конвексном скупу примењује један аутоморфизам, а на остатку други.

Инспирација за истицање ове особине су линеарна уређења са додатим бојама (унарним предикатима) и релацијама еквиваленције чије су класе конвексне. Зато се намеће питање, могу ли и неке друге структуре бити јако линеарно бинарне. На крају поглавља дајемо одговор на ово питање, а то је да су уочене структуре есенцијално једине које имају то својство. Тачније, показујемо да је јака линеарна бинарност, иако уведена као својство засићене структуре, заправо својство теорије и да је теорија која има то својство дефиниционо еквивалентна теорији линеарног уређења са додатим унарним предикатима и конвексним релацијама еквиваленције.

1. Линеарна бинарност

У овом одељку ћемо увести појам линеарне бинарности и приказати њене основне особине. Главни резултат овог дела је теорема 4.17 у којој дајемо опис a дефинабилних скупова који имају коначно много конвексних компоненти у линеарно бинарним структурама: то су Булове комбинације $\emptyset$-дефинабилних скупова, скупа $[a,-)$ и класа елемента a (коначно много) $\emptyset$-дефинабилних конвексних еквиваленција и (коначно много) следбеника класа елемента a.

Лема 4.1. Нека је T потпуна теорија. Следећи искази су еквивалентни:

(1) За сваки природан број n и сваки потпун тип $p(x_1,\dots,x_n)$ који садржи формулу $\bigwedge\limits_{1\leqslant i<n} x_i<x_{i+1}$ важи

$$\bigcup_{1\leqslant i<n} p_i(x_i,x_{i+1})\vdash p(x_1,\dots,x_n),$$

где је $p_i(x_i, x_{i+1})$ 2-тип који се састоји од свих формула $\phi(x_i, x_{i+1}) \in p$.

(2) За сваки природан број n и сваки потпун тип $p(x_1, \dots, x_n)$ који садржи формулу $\bigwedge\limits_{1 \leqslant i < n} x_i < x_{i+1}$ и свако $i \in \{2, \dots, n-1\}$ важи

$$p_{\leqslant i}(x_1, \dots, x_i) \cup p_{\geqslant i}(x_i, \dots, x_n) \vdash p(x_1, \dots, x_n),$$

где је $p_{\leqslant i}(x_1, \dots, x_i)$ тип који се састоји од свих формула типа p чије су слободне променљиве међу $\{x_1, \dots, x_i\}$ и где је $p_{\geqslant i}(x_i, \dots, x_n)$ тип који се састоји од свих формула типа p чије су слободне променљиве међу $\{x_i, \dots, x_n\}$.

(3) За сваку L формулу $\phi(x_1, \dots, x_n)$ сагласну са теоријом T и која имплицира формулу $\bigwedge\limits_{1 \leqslant i < n} x_i < x_{i+1}$ постоје L формуле $\psi_j(x_1, \dots, x_i,)$ и $\theta_j(x_i, \dots, x_n)$ за $j \in \{1, \dots, k\}$ такве да је њихова Булова комбинација T-еквивалентна формули ϕ.

(4) За сваку L формулу $\phi(x_1, \dots, x_n)$ сагласну са теоријом T и која имплицира формулу $\bigwedge\limits_{1 \leqslant i < n} x_i < x_{i+1}$ постоје формуле $\phi_{i,j}(x_i, x_{i+1})$ за $i \in \{1, \dots, n-1\}$ и $j \in \{1, \dots, k\}$ такве да је њихова Булова комбинација T-еквивалентна формули ϕ.

Доказ. Користићемо транзитивност релације $\vdash$, тј. да из $A \vdash B$ и $B \vdash C$ следи $A \vdash C$.

$(\mathbf{1}) \implies (\mathbf{2})$**:** Нека је $p(x_1, \dots, x_n)$ потпуни тип који садржи формулу $\bigwedge\limits_{1 \leqslant i < n} x_i < x_{i+1}$ и нека је $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Важи $\bigcup\limits_{1 \leqslant j < i} p_j(x_j, x_{j+1}) \subseteq p_{\leqslant i}(x_1, \dots, x_i)$ и $\bigcup\limits_{i \leqslant j < n} p_j(x_j, x_{j+1}) \subseteq p_{\geqslant i}(x_i, \dots, x_n)$. Дакле,

$$p_{\leqslant i}(x_1, \dots, x_i) \cup p_{\geqslant i}(x_i, \dots, x_n) \vdash \bigcup_{1 \leqslant j < n} p_j(x_j, x_{j+1}) \vdash p(x_1, \dots, x_n).$$

Прву рампу оправдавају уочене релације подскупа, другу претпоставка да је испуњен услов (1).

$(\mathbf{2}) \implies (\mathbf{3})$: Нека је $\phi(x_1, \dots, x_n)$ формула без параметара сагласна са теоријом T таква да важи

$$T \models (\forall x_1, \dots, x_n) \left(\phi(x_1, \dots, x_n) \implies \bigwedge_{1 \leqslant i < n} x_i < x_{i+1} \right).$$

Нека је $p(x_1, \dots, x_n)$ потпуни тип који садржи формулу ϕ. Пошто је испуњен услов (1), важи

$$p_{\leqslant i}(x_1, \dots, x_i) \cup p_{\geqslant i}(x_i, \dots, x_n) \vdash p(x_1, \dots, x_n),$$

а тиме и

$$p_{\leqslant i}(x_1,\dots,x_i) \cup p_{\geqslant i}(x_i,\dots,x_n) \vdash \phi(x_1,\dots,x_n).$$

По компактности, постоје формуле $\psi_p(x_1,\dots,x_i,) \in p_{\leqslant i}(x_1,\dots,x_i)$ и $\theta_p(x_i,\dots,x_n) \in p_{\geqslant i}(x_i,\dots,x_n)$ такве да је

$$\psi_p(x_1,\dots,x_i,) \wedge \theta_p(x_i,\dots,x_n) \vdash_T \phi(x_1,\dots,x_n).$$

Дакле, за сваки тип $p(x_1,\dots,x_n) \in [\phi(x_1,\dots,x_n)]$, нашли смо

$$\psi_p(x_1,\dots,x_i,) \wedge \, \theta_p(x_i,\dots,x_n)$$

такву да је

$$p(x_1,\dots,x_n) \in [\psi_p(x_1,\dots,x_i,) \wedge \, \theta_p(x_i,\dots,x_n)] \subseteq [\phi(x_1,\dots,x_n)]\,,$$

па је $\{[\psi_p(x_1,\dots,x_i,) \wedge \, \theta_p(x_i,\dots,x_n)] \ \mid p(x_1,\dots,x_n) \in [\phi(x_1,\dots,x_n)]\}$ отворен покривач компактног простора $[\phi(x_1,\dots,x_n)]$. По компактности, постоји његов коначан потпокривач

$$\{[\psi_{p_1}(x_1,\dots,x_i,) \wedge \, \theta_{p_1}(x_i,\dots,x_n)],\dots,[\psi_{p_k}(x_1,\dots,x_i,) \wedge \, \theta_{p_k}(x_i,\dots,x_n)]\}.$$

Уместо $\psi_{p_j}(x_1,\dots,x_i,) \wedge \theta_{p_j}(x_i,\dots,x_n)$ писаћемо $\psi_j(x_1,\dots,x_i,) \wedge \theta_j(x_i,\dots,x_n)$. Дакле, $[\psi_1(x_1,\dots,x_i,) \wedge \, \theta_1(x_i,\dots,x_n)] \cup \dots \cup [\psi_k(x_1,\dots,x_i,) \wedge \, \theta_k(x_i,\dots,x_n)] = [\phi(x_1,\dots,x_n)]$ тј.

$(\psi_1(x_1,\dots,x_i,) \wedge \, \theta_1(x_i,\dots,x_n)) \vee \dots \vee (\psi_k(x_1,\dots,x_i,) \wedge \, \theta_k(x_i,\dots,x_n)) \iff \phi(x_1,\dots,x_n)$, што је требало показати.

Импликације $(\mathbf{3}) \Longrightarrow (\mathbf{4})$ и $(\mathbf{4}) \Longrightarrow (\mathbf{1})$ се једноставно доказују. □

Дефиниција 4.2. За потпуну теорију линеарно уређене структуре која испуњава услове леме 4.1 кажемо да је линеарно бинарна.

Пример теорије која је линеарно бинарна и пример структуре која је бинарна, а није линеарно бинарна није тешко наћи, што показује следећи пример.

Пример 4.3. (1) Нека је $\mathcal{M}_n = (Q, <, E_n)$ при чему је E_n релација еквиваленције која има тачно n густих класа еквиваленције. Слично доказу да је теорија уређења рационалних бројева $\aleph_0$ категорична и има елиминацију квантификатора, може се показати да исто важи и за теорију $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_n)$. Претпоставимо да низови $a_1,\dots,a_n$ и $b_1,\dots,b_n$ имају исти бескванторни тип, односно да задовољавају исте атомске формуле. Лако је видети да за сваки елемент $a \in \mathbb{Q}$ постоји $b \in \mathbb{Q}$ такав да и низови $a_1,\dots,a_n,a$ и $b_1,\dots,b_n,b$ имају исти бескванторни тип. Ова чињеница даје основ за примену напред-назад методе којом пресликавање дефинисано са $f(a_i) = b_i$ (за $1 \leqslant i \leqslant n$) продужавамо до аутоморфизма структуре $\mathcal{M}_n$ одакле следи $\mathrm{tp}(a_1,\dots,a_n) = \mathrm{tp}(b_1,\dots,b_n)$. С друге стране, напред-назад методом показује се и да су свака два пребројива модела теорије $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_n)$ изоморфна, односно да је та теорија $\aleph_0$ категорична. Посебно, $\mathcal{M}_n$ је засићен модел ове теорије и сваки њен n-тип је реализован у њему. Закључујемо да свака два коначна низа елемената модела теорије $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_n)$ која имају исти бескванторни тип, морају имати и исти тип, одакле елиминација квантификатора следи.

Потпуна теорија структуре $\mathcal{M}_2$ је линеарно бинарна. То се види из чињенице да су потпуни 2-типови (у променљивима x и y) одређени (форсирани) поретком и формулом $E_2(x, y)$ и да су потпуни 3-типови одређени Буловом комбинацијом формула из скупа $\{x < y, y < z, x < z, E_2(x, y), E_2(x, z), E_2(y, z)\}$. Тада за $a < b < c$ из чињенице да знамо да ли су a и b у релацији E_2 и да ли су b и c у релацији E_2, знамо и да ли су a и c у релацији E_2, па важи

$$\mathrm{tp}(a, b) \cup \mathrm{tp}(b, c) \vdash \mathrm{tp}(a, b, c).$$

Са друге стране, потпуна теорија структуре $\mathcal{M}_n$ за $n > 2$ је бинарна, али није линеарно бинарна. Да та теорија није линеарно бинарна види се из следећег резоновања: $\mathrm{tp}(a, b)$ је потпуно одређен (уз услов $a < b$) информацијом о томе да ли су a и b у истој или различитој класи еквиваленције E_n. Ако важи $a < b < c$ и ако имамо информацију да a и b нису у релацији E_n и b и c нису у релацији E_n, немамо информацију о томе да ли a и c јесу или нису у релацији E_n. Дакле, из $\mathrm{tp}(a, b)$ и $\mathrm{tp}(b, c)$, не можемо закључити да ли је $E_n(x, y) \in \mathrm{tp}(a, c)$ или је $\neg E_n(x, y) \in \mathrm{tp}(a, c)$, а тиме не знамо ни како изгледа $\mathrm{tp}(a, b, c)$. У овој структури је могуће да (за $a < b < c$) важи

$$\mathrm{tp}(b, c) = \mathrm{tp}(b, c') \text{ и } \mathrm{tp}(a, b, c) \neq \mathrm{tp}(a, b, c'),$$

док код структура које су линеарно бинарне то не може да се деси.

(2) Еренхфојт је 1959. године пронашао први пример теорије која има тачно 3 пребројива модела до на изоморфизам. То је теорија $T = Th(\mathbb{Q}, <, n)_{n\in\mathbb{N}}$. Слично као у претходном примеру може се доказати да она допушта елиминацију квантификатора и да је линеарно бинарна. Напоменимо још да су преостала два (до на изоморфизам) пребројива модела ове теорије $(\mathbb{Q}, <, -\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\mathbb{Q}, <, \frac{[n\sqrt{2}]-1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, односно да су одређени информацијом о томе да ли низ константи конвергира или не. Занимљиво је да су сви познати примери теорија са коначно много а више од једног пребројивог модела варијанте овог примера; На пример, уместо константи можемо узети унарне предикате P_n које чини скуп свих рационалних бројева мањих од $n\pi$. Линеарна бинарност Еренхфојтове теорије следи и из много општије чињенице коју ћемо доказати у 4.18: Свака експанзија ма ког линеарног уређења унарним предикатима је линеарно бинарна. Констатујмо још да неке од варијанти Еренхфојтове теорије не морају бити линеарно бинарне. У раду [**8**] конструисана

је потпуна теорија бесконачне линеарно уређене структуре која има и структуру Абелове групе и свега 3 пребројива модела.

Ови примери илуструју да структуре линеарно бинарне теорије имају, у извесном смислу, независне подструктуре чији су скупови носачи $(-, a]$ и $[a, -)$ (за било које a), док структуре теорије које нису линеарно бинарне то немају. Ту „независност” описује следећа лема.

Лема 4.4. Нека је T потпуна теорија линеарног уређења. Следећи искази су еквивалентни:

(1) Теорија T је линеарно бинарна.

(2) Постоји $\mathcal{U}$, засићен модел теорије T такав да кад год је $F \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{U}}$ за који је $F(a) = a$ за неко $a \in U$, пресликавање H одређено са

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \geqslant a \\ x, & \text{за} \quad x \leqslant a \end{cases}$$

је такође аутоморфизам структуре $\mathcal{U}$.

(3) За сваки $\mathcal{U}$, засићен модел теорије T важи да за свако $F \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{U}}$ такво да је $F(a) = a$ за неко $a \in U$, пресликавање H одређено са

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \geqslant a \\ x, & \text{за} \quad x \leqslant a \end{cases}$$

је такође аутоморфизам структуре $\mathcal{U}$.

Доказ. $(1) \Longrightarrow (3)$: Претпоставимо да је испуњен услов (1) и да је $\mathcal{U}$ било који засићен модел теорије T. Тада се за свака два растућа низа $\bar{b}$ и $\bar{d}$ структуре $\mathcal{U}$ из $\mathrm{tp}(b_1, \ldots, b_i) = \mathrm{tp}(d_1, \ldots, d_i)$ и $\mathrm{tp}(b_i, \ldots, b_k) = \mathrm{tp}(d_i, \ldots, d_k)$ може закључити да је $\mathrm{tp}(b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_k) = \mathrm{tp}(d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_k)$. Нека је F аутоморфизам универзума $\mathcal{U}$ такав да је $F(a) = a$ за неко $a \in U$ и нека је H одређено са

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \geqslant a \\ x, & \text{за} \quad x \leqslant a. \end{cases}$$

Покажимо да је H аутоморфизам универзума. С обзиром да је H очито аутоморфизам линеарног уређења довољно је показати да за сваки растући низ $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ важи $\mathrm{tp}(\bar{c}) = \mathrm{tp}(H(\bar{c}))$. Без умањења општости можемо претпоставити да је a један од елемената c_j, јер ако није, можемо га додати и ако докажемо да важи $\mathrm{tp}(\bar{c}a) = \mathrm{tp}(H(\bar{c}a))$, онда се одатле може закључити да важи $\mathrm{tp}(\bar{c}) = \mathrm{tp}(H(\bar{c}))$. Случајеви $a = c_1$ и $a = c_n$ су тривијални: у првом случају је $H(\bar{c}) = F(\bar{c})$, па, с обзиром да је F аутоморфизам, важи $\mathrm{tp}(\bar{c}) = \mathrm{tp}(H(\bar{c}))$; у другом је $H(\bar{c}) = \bar{c}$. Преостао је случај $c_1 < a = c_i < c_n$. Важи

$$(\lozenge) \qquad \mathrm{tp}(c_1, \ldots, c_{i-1}, a) = \mathrm{tp}(H(c_1), \ldots, H(c_{i-1}), H(a)),$$

јер је $(H(c_1), \dots, H(c_{i-1}), H(a)) = (c_1, \dots, c_{i-1}, a)$. Такође, важи

$$(\blacklozenge) \qquad \mathrm{tp}(a, c_{i+1}, \dots, c_n) = \mathrm{tp}(H(a), H(c_{i+1}), \dots, H(c_n)),$$

јер је $(H(a), H(c_{i+1}), \dots, H(c_n)) = (F(a), F(c_{i+1}), \dots, F(c_n))$ и јер је F аутоморфизам. Из $(\lozenge)$ и $(\blacklozenge)$, пошто је испуњен услов (1), закључујемо да важи

$$\mathrm{tp}(c_1, \dots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \dots, c_n) = \mathrm{tp}(H(c_1), \dots, H(c_{i-1}), H(a), H(c_{i+1}), \dots, H(c_n)),$$

што је требало показати.

(3) $\Longrightarrow$ **(2):** Очигледно.

(2) $\Longrightarrow$ **(1):** Претпоставимо сад да је испуњен услов **(2)**. Нека је $p(x_1, \dots, x_k)$ потпуни тип који садржи формулу $\bigwedge\limits_{1 \leqslant i < k} x_i < x_{i+1}$. Нека је $\bar{a} \in U$ реализација типа p. Претпоставимо да је $(b_1, \dots, b_i) \in U$ реализација типа $p_{\leqslant i}(x_1, \dots, x_i)$ и да је $(b_i, \dots, b_k) \in U$ реализација типа $p_{\geqslant i}(x_i, \dots, x_k)$ за неко $i \in \{2, \dots, k-1\}$. Показаћемо да је $\mathrm{tp}(\bar{b}) = p$ а тиме и да је испуњен услов (2). За то је довољно да конструишемо аутоморфизам који слика низ $\bar{b}$ у низ $\bar{a}$. Из $\mathrm{tp}(b_1, \dots, b_i) = \mathrm{tp}(a_1, \dots, a_i)$ следи да постоји аутоморфизам G који слика $(b_1, \dots, b_i)$ у $(a_1, \dots, a_i)$. Означимо са $(c_i, \dots, c_k)$ низ $(G(b_i), \dots, G(b_k))$. Сада имамо да

$$\mathrm{tp}(c_i, \dots, c_k) = \mathrm{tp}(b_i, \dots, b_k) = \mathrm{tp}(a_i, \dots, a_k).$$

Прва једнакост важи због тога што је G аутоморфизам, друга је почетна претпоставка, па постоји аутоморфизам F који слика низ $(c_i, \dots, c_k)$ у низ $(a_i, \dots, a_k)$. Нека је H пресликавање одређено са

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \geqslant c_i \\ x, & \text{за} \quad x \leqslant c_i \end{cases}.$$

Пошто је испуњен услов (2) и пошто је $c_i = G(b_i) = a_i$, закључујемо да је H аутоморфизам. Тада је и $H \circ G$ аутоморфизам који слика $(b_1, \dots, b_i, \dots, b_k)$ у $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_k)$. Дакле, важи $\mathrm{tp}(b_1, \dots, b_i, \dots, b_k) = \mathrm{tp}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_k)$, што је требало показати. $\square$

Претходно тврђење оправдава следећу дефиницију

Дефиниција 4.5. За структуру кажемо да има <u>својство линеарне бинарности</u> или да је <u>линеарно бинарна</u> ако је засићен модел линеарно бинарне теорије.

Запажање 4.6. Приметимо да за сваку (еквивалентно неку) засићену линеарно уређену структуру услов линеарне бинарности исказан у леми 4.4 (2) је еквивалентан, наизглед јачем услову:

Кад год су F и G аутоморфизми структуре $\mathcal{U}$ такви да је $F(a) = G(a)$ за неко $a \in U$, онда је H дефинисано са

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \leqslant a \\ G(x), & \text{за} \quad x \geqslant a \end{cases}$$

такође аутоморфизам структуре $\mathcal{U}$.

У примеру 4.3 смо показали да је једино за $n = 2$ структура $\mathcal{M}_n = (Q, <, E_n)$ линеарно бинарна. У следећем примеру наводимо још неке линеарно бинарне структуре, од којих је прва посебно важна, што ће се показати у запажању 4.18: наиме, та структура има својство које је јаче од својства линеарне бинарности. То својство ћемо именовати у одељку 2 овог поглавља и оно је главни циљ изучавања тог одељка.

Пример 4.7. Следеће структуре су примери структура са својством линеарне бинарности.

1. $(L, <, P_i, E_j)_{i,j \in \omega}$, где је $(L, <)$ линеарно уређење и где су P_i унарни предикати, а E_j релације еквиваленције са конвексним класама.

2. Нека је $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, <, P_1, \ldots, P_k, E, R)$, где је $k > 2$ и где су P_i боје такве да су елементи обојени бојом P_i густи у $\mathbb{Q}$ и да је сваки елемент обојен тачно једном бојом. Нека је

$$E(x, y) \Longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^{k} (P_i(x) \Leftrightarrow P_i(y)) \quad \text{и}$$

$$R(x, y) \Longleftrightarrow (P_k(x) \Leftrightarrow P_1(y)) \vee \bigvee_{i=1}^{k-1} (P_i(x) \Leftrightarrow P_{i+1}(y)).$$

Нека је $\mathcal{M}_0$ редукт структуре $\mathcal{M}$ на језик $\{<, E, R\}$. Њена теорија је линеарно бинарна. Ово следи из чињенице да релација R делује као показивач, који из једне класе релације E гледа у следећу, тако да су класе у извесном смислу нумерисане, тачније класи је додељен број боје којом је била обојена у структури $\mathcal{M}$. Дакле, за $a < b < c$, из чињенице да знамо колико пута треба применити R да бисмо из E-класе елемента a дошли до класе E-елемента b и колико пута треба применити R бисмо из E-класе елемента b дошли до класе E-елемента c, онда знамо и колико пута треба применити R бисмо из E-класе елемента a дошли до E- класе елемента c, па све информације о тројци (a, b, c) носе информације парова (a, b) и (a, c) и распоред елемената a, b и c.

Једно од основих својстава које имају структуре са својством линеарне бинарности је дато у следећој леми.

Лема 4.8. Нека $\mathcal{U}$ има својство линеарне бинарности и нека је $\phi(x, y)$ формула без параметара. Тада постоје формуле без параметара $\psi_1(x, y), \dots, \psi_k(x, y)$ такве да за свако a и b такве да је $a \leqslant b$ постоји $i \in \{1, \dots, k\}$ такво да важи

$$(\forall x \geqslant b)(\phi(x, a) \Leftrightarrow \psi_i(x, b)).$$

Доказ. Нека је $a \leqslant b$. Користећи тврђење 1.11, показаћемо прво да формула $\phi(x, a) \wedge b \leqslant x$ дефинише скуп који је b-дефинабилан. Означимо са D скуп који дефинише формула $\phi(x, a) \wedge b \leqslant x$. Како је то формула са параметрима a и b, по тврђењу 1.11, сваки аутоморфизам који фиксира a и b, фиксираће скуп D. Да бисмо показали да је D заиста b-дефинабилан скуп, довољно је, опет по тврђењу 1.11, показати да произвољан аутоморфизам који фиксира b фиксира цео скуп D. Нека је F аутоморфизам универзума који фиксира b. Из дефиниције својства линеарне бинарности следи да је

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \geqslant b \\ x, & \text{за} \quad x \leqslant b \end{cases}$$

такође аутоморфизам. Тада важи

$$F(D) = H(D) = D.$$

Прва једнакост следи из чињенице да је $D \geqslant b$ и конструкције H-а, а друга из тврђења 1.11 јер је H аутоморфизам који фиксира параметре a и b који дефинишу скуп D. Дакле, D је b-дефинабилан скуп. Тада је $D = \psi(\mathcal{U}, b)$ за неку формулу без параметара $\psi(x, y)$. Ако означимо $\mathrm{tp}(a, b)$ са q, онда због претходно показаног, кад год је $\mathrm{tp}(a', b') = q$, важиће

$$\forall x(\phi(x, a') \wedge b' \leqslant x \Longleftrightarrow \psi(x, b')).$$

Зато ћемо писати $\psi_q(x, y)$ уместо само $\psi(x, y)$. Такође, формулу

$$(\forall x \geqslant t_2)(\phi(x, t_1) \Leftrightarrow \psi_q(x, t_2))$$

ћемо означити са $\theta_q(t_1, t_2)$. Пошто за свако $q \in [t_1 \leqslant t_2]$ важи $q \in [\theta_q(t_1, t_2)]$ следи да је $\{[\theta_q(t_1, t_2)] \mid q \in [t_1 \leqslant t_2]\}$ покривач компактног простора $[t_1 \leqslant t_2]$ (отворено-затворен подскуп простора $S_2(\emptyset)$). С обзиром да је то покривач компактног простора, закључујемо да постоји коначан потпокривач $\{\theta_1(t_1, t_2), \dots, \theta_k(t_1, t_2)\}$, тј.

$$\{(\forall x \geqslant t_2)(\phi(x, t_1) \Leftrightarrow \psi_1(x, t_2)), \dots, (\forall x > t_2)(\phi(x, t_1) \Leftrightarrow \psi_k(x, t_2))\}$$

датог покривача простора $[t_1 \leqslant t_2]$. Управо смо показали да важи

$$(\forall t_1, t_2)(t_1 \leqslant t_2 \Longrightarrow \bigvee_{i=1}^{k} (\forall x \geqslant t_2)(\phi(x, t_1) \Longleftrightarrow \psi_i(x, t_2))),$$

што је требало показати. □

Ознака: Запис A_p је ознака за $A \cap p(\mathcal{U})$. Ако је скуп D дефинабилан формулом која користи параметар a, онда ћемо некад истакнути ту чињеницу тако што ћемо писати $D(a)$ уместо D. Тада ће $D_p(a)$ означавати скуп $D(a) \cap p(\mathcal{U})$.

Дефиниција 4.9. Полуинтервал је конвексан скуп који има бар један крај, десни је онај који има инфимум, а леви онај који има супремум. За полуинтервал који је дефинабилан параметром a који је уједно и један од његових крајева кажемо да је дефинабилан својим крајем.

Наравно, сваки интервал ограничен и одозго и одоздо је уједно и леви и десни полуинтервал. Ми ћемо тврђења формулисати и доказивати углавном за десне полуинтервале. Кад у таквим тврђењима уређење $<$ заменимо уређењем $>$, закључујемо да дуална тврђења важе за леве полуинтервале. Појам полуинтервала је кључан за доказ главног резултата овог дела теореме 4.17. Доказаћемо у леми 4.13 да је сваки десни полуинтервал дефинабилан својим крајем a у линеарно бинарној структури садржан у дисјунктној унији класе $[a]_E$ неке 0-дефинабилне класе еквиваленције E и коначно много њој следбеничких класа $s^i([a]_{E^s_\phi})$, а затим у ставу 4.15 да се полуинтервал добија када прву класу пресечемо скупом $[a, -)$ а последњу 0-дефинабилним скупом, одакле неће бити тешко извести тврђење теореме 4.17.

Подсетимо се ознаке које смо увели у одељцима 1.2 („Линеарна уређења”) и 1.6 („Линеарно уређен универзум”). За дефинабилне скупове D_1 и D_2 је $\sup D_1 \leqslant \sup D_2$ ознака за формулу „за свако d важи: ако је d мајоранта скупа D_2, онда је d мајоранта скупа D_1”. Ако је скуп D_i дефинисан формулом која користи параметре из скупа A_i, онда је $\sup D_1 \leqslant \sup D_2$ формула која користи параметре из скупа $A_1 \cup A_2$.

Лема 4.10. Претпоставимо да скуп $\phi(\mathcal{U}, a_0)$ садржи бар један елемент завршног интервала $[a_0, -)$. Тада за све $a_1 \leqslant a_0$ такве да је $\mathrm{tp}(a_0) = \mathrm{tp}(a_1)$ важи

$$\sup \phi(\mathcal{U}, a_1) \leqslant \sup \phi(\mathcal{U}, a_0).$$

Доказ. Без умањења општости можемо претпоставити да је $\phi(\mathcal{U}, a_0)$ конвексан подскуп скупа $[a_0, -)$, јер за сваки скуп D важи да D и његово конвексно затворење $\mathrm{cvx}\,(D)$ имају исти скуп мајоранти. Претпоставимо да, супротно тврђењу, постоји $a_1 \equiv a_0$ такав да је $a_1 < a_0$ и $\sup \phi(\mathcal{U}, a_0) < \sup \phi(\mathcal{U}, a_1)$. То значи да постоји b_0, мајоранта скупа $\phi(\mathcal{U}, a_0)$ која није мајоранта скупа $\phi(\mathcal{U}, a_1)$, тј. важи $b_0 \in \phi(\mathcal{U}, a_1)$ и $\phi(\mathcal{U}, a_0) < b_0$. С обзиром да a_0 и a_1 реализују исти тип без параметара, постоји аутоморфизам F такав да је $F(a_0) = a_1$. За свако $n \in \omega$, елемент $F(a_n)$ означимо са a_{n+1} и елемент $F(b_n)$ означимо са b_{n+1}. Из $a_{n+1} < a_n$ и чињенице да је F аутоморфизам следи да је $F(a_{n+1}) < F(a_n)$, тј. $a_{n+2} < a_{n+1}$. Слично, из $b_n \in \phi(\mathcal{U}, a_{n+1})$ и $\phi(\mathcal{U}, a_n) < b_n$ следи да је

$b_{n+1} \in \phi(\mathcal{U}, a_{n+2})$ и $\phi(\mathcal{U}, a_{n+1}) < b_{n+1}$, као и да је сваки од скупова $\phi(\mathcal{U}, a_n)$ конвексан. Специјално, из чињенице да је $b_n \in \phi(\mathcal{U}, a_{n+1}) \setminus \phi(\mathcal{U}, a_n)$ за свако n, закључујемо да је $\{\phi(\mathcal{U}, a_n) \cap [a_0, -) \mid n \in \omega\}$ бесконачна фамилија скупова. Међутим, по леми 4.8, постоје $\psi_1(x, y), \ldots, \psi_k(x, y)$ такве да за свако $a \leqslant a_0$ постоји $i \in \{1, \ldots, k\}$ такво да је

$$\phi(\mathcal{U}, a) \cap [a_0, -) = \psi_i(\mathcal{U}, a_0),$$

па је

$$\{\phi(\mathcal{U}, a_n) \cap [a_0, -) \mid n \in \omega\} \subseteq \{\psi_1(\mathcal{U}, a_0), \ldots, \psi_k(\mathcal{U}, a_0)\},$$

скуп кардиналност не веће од k. Контрадикција. Дакле, претпоставка да постоји $a_1 \equiv a_0$ такав да је $a_1 < a_0$ и $\sup \phi(\mathcal{U}, a_0) < \sup \phi(\mathcal{U}, a_1)$ је неодржива. □

Дефиниција 4.11. Под монотоном фамилијом дефинабилних скупова сматрамо фамилију облика $\{\phi(\mathcal{U}, a) \,|\, a \in \mathcal{U}\}$ такву да важи бар једно од следећа два

(1) $a < b$ повлачи $\sup \phi(\mathcal{U}, a) \leqslant \sup \phi(\mathcal{U}, b)$;

(2) $a < b$ повлачи $\inf \phi(\mathcal{U}, a) \leqslant \inf \phi(\mathcal{U}, b)$.

У првом случају кажемо да се ради о монотоно растућој фамилији, а у другом да се ради о монотоно опадајућој фамилији.

Ако је $\{\phi(\mathcal{U}, b) \,|\, b \in \mathcal{U}\}$ монотона фамилија и $D = \phi(\mathcal{U}, a)$, онда кажемо да је $\phi(x, a)$ монотона дефиниција скупа D.

Нас ће занимати монотоне дефиниције полуинтервала.

Лема 4.12. Сваки полуинтервал који је дефинабилан својим крајем има монотону дефиницију.

Доказ. Без умањења општости претпоставимо да је $D(a) = \phi(\mathcal{U}, a)$ полуинтервал коме је леви крај елемент $a \in D(a)$. По леми 4.10 следи да кад год је $y \equiv y' \equiv a$ онда важи:

$$\text{Из } y \leqslant y' \text{ следи да је } \sup D(y) \leqslant \sup D(y').$$

Желимо да ова особина важи кад год је $y \leqslant y'$, а не само за реализације $\mathrm{tp}(a)$. Уколико то не важи, може се постићи малом „поправком” формуле која дефинише скуп $D(y)$.

Нека је $\mathrm{tp}(a) = p$ и нека је $D(a) = \phi(\mathcal{U}, a)$. Нека је $\phi^{\sup}(t_1, t_2)$ формула која каже да је свака мајоранта скупа $\phi(\mathcal{U}, t_2)$ уједно и мајоранта скупа $\phi(\mathcal{U}, t_1)$. Нека је $\phi^{\mathrm{cvx}}(t)$ формула која каже да је скуп $\phi(\mathcal{U}, t)$ десни полуинтервал дефинисан својим крајем t, тј. да је конвексан, да садржи t и да је подскуп скупа $[t, +\infty)$. Тада

$$p(t_1) \cup p(t_2) \vdash (\ t_1 \leqslant t_2 \Rightarrow \phi^{\sup}(t_1, t_2)\ ) \wedge \phi^{\mathrm{cvx}}(t_1) \wedge \phi^{\mathrm{cvx}}(t_2).$$

По компактности следи да постоји формула $\theta(x) \in p(x)$ таква да је

$$\theta(t_1) \wedge \theta(t_2) \vdash (\ t_1 \leqslant t_2 \Rightarrow \phi^{\sup}(t_1, t_2)\ ) \wedge \phi^{\mathrm{cvx}}(t_1) \wedge \phi^{\mathrm{cvx}}(t_2).$$

Означимо са $\phi_1(x,t)$ формулу $t \leqslant x \wedge (\exists y \leqslant t)(\ \theta(y) \wedge \phi(x,y)\ )$ и са $D_1(t)$ скуп $\phi_1(\mathcal{U}, t)$. Тада је

$$D_1(t) = \{t\} \cup \left([t, -) \cap \bigcup \{D(y) \mid y \in \theta(\mathcal{U}) \cap (-, t]\}\right).$$

Није тешко видети да важи $\sup D_1(y) \leqslant \sup D_1(z)$ кад год је $y \leqslant z$, да је $D_1(y)$ десни полуинтервал дефинисан својим крајем y, као и да је $D_1(a) = D(a)$. Дакле, $\phi_1(x,y)$ је монотона дефиниција левог полуинтервала $D(a)$. $\square$

Монотона фамилија $\mathcal{F} = \{\phi(\mathcal{U}, a) \,|\, a \in \mathcal{U}\}$ индукује природно конвексну релацију еквиваленције:

Нека је $E^s_\phi(x,y)$ ознака за формулу $\sup D(x) = \sup D(y)$ (тј. за формулу $\phi^{\sup}(x,y) \wedge \phi^{\sup}(y,x)$, где смо $\phi^{\sup}(t_1,t_2)$ дефинисали као ,,свака мајоранта скупа $\phi(\mathcal{U}, t_2)$ уједно и мајоранта скупа $\phi(\mathcal{U}, t_1)$"). Очигледно је да је $E^s_\phi(x,y)$ 0-дефинабилна еквиваленција. По претходном доказу је за $x \leqslant y \leqslant z$ испуњено $\sup D(x) \leqslant \sup D(y) \leqslant \sup D(z)$, одакле следи да су класе еквиваленције $E^s_\phi(x,y)$ конвексне.

За конвексну релацију еквиваленције E са s_E означавамо (парцијалну) функцију непосредног следбеника у сорти S_E; итерације s^n_E су дефинисане на одговарајући начин. Уколико је релација E јасна из контекста, пишемо s уместо s_E.

Нека је E конвексна релација еквиваленције, D унија неколико узастопних E-класа почевши од $[a]_E$ и $D_a = [a, -) \cap D$. Тада је D_a полуинтервал дефинабилан крајем a. У наредним лемама ћемо доказати да је сваки полуинтервал дефинабилан својим крајем a на локусу фиксираног потпуног типа садржан у унији коначног броја узастопних класа неке 0-дефинабилне конвексне релације еквиваленције (у леми 4.13), а затим га (у ставу 4.15) потпуно описати.

Лема 4.13. Претпоставимо да је $\phi(x,a)$ монотона дефиниција десног затвореног полуинтервала $D(a)$ чији је крај a. Тада је за неко $n \in \omega$ испуњено

$$D[a, -) \cap [a]_{E^s_\phi} \subseteq D(a) \subseteq [a, -) \cap \bigcup_{i=0}^{n} s^i([a]_{E^s_\phi}).$$

Доказ. Показујемо да је D садржан у унији неколико узастопних E^s_ϕ-класа. У супротном, нека је b_n растући низ елемената скупа D који су из различитих E^s_ϕ-класа и који су већи од a. Нека су $\psi_1, \ldots, \psi_k$ формуле које задовољавају услов леме 4.8 за формулу ϕ. Означимо b_{k+1} са d. На основу леме 4.8 следи да су i_j за $j \in \{1, \ldots, k\}$ одређени са $(\forall x > d)(\phi(x, b_j) \Leftrightarrow \psi_{i_j}(x, d))$, међусобно различити јер су $b_1, \ldots, b_k$ представници различитих класа релације E^s_ϕ (ако би било $i_j = i_l$, онда би, због леме 4.8, било

$$\phi(U, b_j) \cap [d, -) = \psi_{i_j}(x, d) = \psi_{i_l}(x, d) = \phi(U, b_l) \cap [d, -),$$

па би морало важити $\sup \phi(U, b_j) = \sup \phi(U, b_l)$, а тиме и $E^s_\phi(b_j, b_l)$). На основу тврђења 4.8 је и $(\forall x > d)(\phi(x, a) \Leftrightarrow \psi_m(x, d))$, за неко $m \in \{1, \ldots, k\}$, па је тиме и $(\forall x > d)(\phi(x, a) \Leftrightarrow \phi(x, b_j))$, за оно j за које је $i_j = m$. Дакле, за то j су a и b_j представници исте а не различите класе релације E^s_ϕ. Закључујемо да класа релације E^s_ϕ које имају пресек са $D(a)$ има највише k.

Овим смо показали да постоји n такво да је $D(a) \subseteq [a, -) \cap \bigcup_{i=0}^{n} s^i([a]_{E^s_\phi})$.

Из дефиниције релације E^s_ϕ, следи да је $[a, -) \cap [a]_{E^s_\phi} \subseteq D(a)$. □

Дефиниција 4.14. За полуинтервал D дефинисан својим левим крајем a, са N_D обележавамо најмањи број n такав да је D садржан у унији $\bigcup_{i=0}^{n} s^i([a]_{E^s_\phi})$

Лемом 4.13 смо показали да је полуинтервал $D(a)$ садржан у коначној унији узастопних класа $\emptyset$-дефинабилне еквиваленције, али нисмо испитали да ли се поклапа са том унијом. Јасно је, по дефиницији броја N_D, да скуп $D(a)$ има непразан пресек са класом $s^{N_D}([a]_{E^s_\phi})$ и да садржи све претходне класе будући да је конвексан, као и да нема заједничких елемената ни са једном класом после N_D-тог следбеника класе елемента a. Сама класа $s^{N_D}([a]_{E^s_\phi})$ може бити подељена скупом $D(a)$. У том случају, део класе $s^{N_D}([a]_{E^s_\phi})$ који је у скупу $D(a)$ се може одсећи 0-дефинабилним скупом, о чему говори следећи став.

Став 4.15. *Нека је $D(a)$ десни затворени полуинтервал дефинисан својим крајем a. Ако је $N_D > 0$, онда постоји формула без параметара $\psi(x)$ таква да је $D(a)$ унија дисјунктних конвексних скупова*

- $[a, -) \cap [a]_{E^s_\phi}$
- $\bigsqcup_{i=1}^{N_D - 1} s^i([a]_{E^s_\phi})$, *уколико је* $N_D > 1$
- $\psi(\mathcal{U}) \cap s^{N_D}([a]_{E^s_\phi})$

Доказ. Уз ознаку из дефиниције 4.14, лема 4.13 тврди:

$$[a, -) \cap [a]_{E^s_\phi} \subseteq D(a) \subseteq [a, -) \cap \bigcup_{i=0}^{N_D} s^i([a]_{E^s_\phi}).$$

Постоји могућност да није цела класа $s^{N_D}([a]_{E^s_\phi})$ садржана у $D(a)$. Нека је $\phi(x, a)$ монотона дефиниција полуинтервала $D(a)$ и нека је $E^{s\,i}_\phi(x, y)$ формула без параметара која каже да је i-ти следбеник класе $[y]_{E^s_\phi}$ класа $[x]_{E^s_\phi}$.

Нека је $\psi(x)$ формула $\exists y(x \in D(y) \cap s^{N_D}([y]_{E^s_\phi})$, тј.

$$\psi(x) := \exists y(\phi(x,y) \wedge E^{sN_D}_\phi(x,y)).$$

Дакле, важи

$$D(a) \cap s^{N_D}([a]_{E^s_\phi}) = s^{N_D}([a]_{E^s_\phi}) \cap \psi(\mathcal{U}).$$

Скуп $D(a)$ је конвексан и садржи $[a]_{E^s_\phi} \cap [a,-)$ и $s^{N_D}([a]_{E^s_\phi}) \cap \psi(\mathcal{U})$, онда садржи и све E^s_ϕ-класе између класе елемента a и $s^{N_D}([a]_{E^s_\phi})$. Закључујемо да је $D(a)$ скуп састављен од уније конвексних скупова као што је описано у исказу става. □

Дефиниција 4.16. Рећи ћемо да је K конвексна компонента скупа A ако је K конвексан подскуп скупа A и ако сваки његов прави конвексан надскуп садржи елементе који не припадају скупу A.

Теорема 4.17. Нека је $\mathcal{M} = (M, <, ...)$ линеарно бинарна структура, $a \in M$ и нека је a дефинабилан скуп $D(a)$ подскуп скупа $[a,-)$. Ако $D(a)$ има коначно много конвексних компоненти, онда је једнак Буловој комбинацији $\emptyset$-дефинабилних скупова, скупа $[a,-)$ и класа елемента a (коначно много) $\emptyset$-дефинабилних конвексних еквиваленција и (коначно много) следбеника класа елемента a.

Доказ. Скуп $D(a)$ је једнак Буловој комбинацији десних полуинтервала дефинабилних својим крајем a. По ставу 4.15 сваки од тих полуинтервала је Булова комбинација $\emptyset$-дефинабилног скупа, скупа $[a,-)$ и класа елемента a неке $\emptyset$-дефинабилне конвексне еквиваленције и (коначно много) следбеника те класе. □

2. Јака линеарна бинарност

У овом одељку ћемо увести појам јаке линеарне бинарности. Дефиниција овог појма је мотивисана једном особином групе аутоморфизама било ког линеарног уређења са евентуално придодатим унарним предикатима и конвексним релацијама еквиваленције коју дајемо у следећем запажању. Та особина ових структура је издвојена у докторској дисертацији Славка Моцоње [**20**] и повезана са правилношћу глобалних типова у таквим структурама. Ми ћемо се бавити другим питањем које се природно појављује: Да ли једино структуре овог облика имају уочено својство? Потврдан одговор дајемо у теореми 4.

Запажање 4.18. Посматрајмо структуру $\mathcal{M} = (M, <, P_i, E_j)$, **засићено** проширење линеарног уређења бојама и конвексним еквиваленцијама. Нека је K

конвексан скуп у $\mathcal{M}$, нека је F аутоморфизам структуре $\mathcal{M}$ који фиксира K и нека је H пресликавање дефинисано са

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \in K \\ x, & \text{за} \quad x \notin K \end{cases}$$

Показаћемо да је H такође аутоморфизам структуре $\mathcal{M}$. Јасно је да је H аутоморфизам уређења $(M, <)$. Ако је $a \in K$ онда је $H(a) = F(a)$, па како је F аутоморфизам биће

$$a \in P(\mathcal{M}) \text{ акко } F(a) \in P(\mathcal{M}) \text{ акко } H(a) \in P(\mathcal{M}).$$

Ако је $a \in M \smallsetminus K$ онда је $H(a) = a$, па је тривијално испуњено

$$a \in P(\mathcal{M}) \text{ акко } H(a) \in P(\mathcal{M}).$$

Што се конвексних релација еквиваленције тиче, може се резоновати на следећи начин:

- Ако су $a, b \in K$, онда из чињенице да је F аутоморфизам следи да је

$$E(a, b) \text{ акко } E(F(a), F(b)) \text{ акко } E(H(a), H(b)).$$

-Ако је $a, b \in M \smallsetminus K$, онда је $(H(a), H(b)) = (a, b)$, па тривијално важи

$$E(a, b) \text{ акко } E(H(a), H(b)).$$

-Ако је $a \in K$ и $K < b$, онда је $F(a) < b$ и $a < F(b)$ јер је $F(K) = K$. Уочавамо два случаја:

1. случај $[a] = [b]$. Тада је $[F(a)] = [a] = [F(b)] = [b]$. То следи из следећег:

Пошто је F аутоморфизам, онда је $[F(a)] = [F(b)]$. Даље, ако је $F(a) < a$, онда је $F(a) < a < F(b)$, па с обзиром да је класа $[F(a)]$ (као и све остале) конвексна, мора бити и $a \in [F(a)]$, а тиме је и $b \in [F(a)]$. Ако је $a \leqslant F(a)$, онда је $a \leqslant F(a) < b$, па с обзиром да је класа $[a]$ конвексна, мора бити и $F(a) \in [a]$.

Закључујемо да је $[F(a)] = [b]$, тј. $[H(a)] = [H(b)]$.

2. случај $[a] \neq [b]$. Приметимо да све што смо до сад показали за H важи и за H^{-1}. Не може бити $[H(a)] = [H(b)]$, јер би онда, по претходно доказаном, било $[H^{-1}(H(a))] = [H^{-1}(H(b))]$, тј. $[a] = [b]$.

Дакле, за било коју конвексну еквиваленцију E важи

$$E(a, b) \text{ акко } E(H(a), H(b)).$$

-Ако је $b < K$ и $a \in K$, онда се слично показује да је за сваку ковексну еквиваленцију E испуњено

$$E(a, b) \text{ акко } E(H(a), H(b)).$$

Дакле, H је бијекција сагласна са поретком, са свим унарним пресликавањима и свим релацијама еквиваленције, па је аутоморфизам.

Ради даље анализе, ми ћемо уочено својство именовати.

Дефиниција 4.19. (1) Кажемо да је $\mathcal{U}$ јако линеарно бинарна структура ако је засићена линеарно уређена структура која испуњава следећи услов:

Кад год је F аутоморфизам структуре $\mathcal{U}$ који фиксира конвексан скуп K, онда је H одређено са

$$(\bigstar) \qquad H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \in K \\ x, & \text{за} \quad x \notin K \end{cases}$$

такође аутоморфизам структуре $\mathcal{U}$.

(2) За теорију T кажемо да је јако линеарно бинарна ако је сваки њен засићен модел јако линеарно бинарна структура.

Није тешко доказати еквиваленте јаке линеарне бинарности наведене у следећем запажању.

Запажање 4.20. Нека је $\mathcal{U}$ засићена линеарно уређена структура. Следећи искази су еквивалентни:

(1) Структура $\mathcal{U}$ је јако линеарно бинарна

(2) Кад год је K конвексан скуп и F и G аутоморфизми структуре $\mathcal{U}$ такви да је $F(K) = G(K)$, онда је H одређено са

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \in K \\ G(x), & \text{за} \quad x \notin K \end{cases}$$

такође аутоморфизам структуре $\mathcal{U}$.

Пример 4.21. Од структура из примера 4.7 само је прва јако линеарно бинарна.

Лако је приметити да јака линеарна бинарност структуре повлачи њену линеарну бинарност. Ако аутоморфизам F фиксира a, онда треба показати да је пресликавање одређено са

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \leqslant a \\ x, & \text{за} \quad x \geqslant a \end{cases}$$

такође аутоморфизам да бисмо закључили да $\mathcal{U}$ има својство својство линеарне бинарности. Како фиксирањем елемента a, аутоморфизам F чува $(-, a]$. Тада важи

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \in (-, a] \\ x, & \text{за} \quad x \notin (-, a]. \end{cases}$$

Будући да $\mathcal{U}$ јако линеарно бинарна, закључујемо да је H аутоморфизам.

Лема 4.22. Нека је $\mathcal{U}$ јако линеарно бинарна структура. Ако за неки елемент a и аутоморфизам F важи $F(a) < a$, онда постоји аутоморфизам G такав да је $G(a) = F(a)$ и да је $G(x) \leqslant x$ за свако x.

Доказ. Нека је A скуп свих b таквих да на интервалу са крајевима $\{a, b\}$ важи $F(x) \leqslant x$. Очигледно је да је скуп A конвексан и да је $F(A) = A$, па ако није цео U, онда јака линеарна бинарност структуре обезбеђује постојање аутоморфизма G такво да се поклапа са F на скупу A и да је идентитета на остатку. То је тражени аутоморфизам. □

Напомена: До краја овог поглавља радимо под претпоставком да је $\mathcal{U}$ јако линеарно бинарна структура.

Лема 4.23. Нека је E релација еквиваленције чије су класе конвексне и нека су d и d' елементи исте класе и a елемент ван њихове класе. Ако $d \equiv d'$, онда $ad \equiv ad'$.

Доказ. Из $d \equiv d'$ следи да постоји аутоморфизам F који d слика у d'. Тада он фиксира $[d]$. Нека је $H(x) = F(x)$, за $x \in [d]$ и идентитета иначе. Због јаке линеарне бинарности, H је аутоморфизам и важи $H(a, d) = (a, d')$. □

Лема 4.24. Ако је $\mathrm{tp}(a_1, a_2) = \mathrm{tp}(a_2, a_3)$, онда за свако $b_1 \in [a_1, a_2]$ такво да је $\mathrm{tp}(a_1) = \mathrm{tp}(b_1)$ постоји $b_2 \in [a_2, a_3]$ такав да је $\mathrm{tp}(b_1, b_2) = \mathrm{tp}(a_1, a_2)$.

Доказ. Приметимо да a_1, a_2, a_3 и b_1 имају исти тип. Из чињенице да $a_1 \equiv b_1$ следи да постоји аутоморфизам F који a_1 слика у b_1. Слично, постоји аутоморфизам G такав да је $G(b_1) = a_2$. По леми 4.22, F и G се могу изабрати тако да важи $F(x) \geqslant x$ и $G(x) \geqslant x$ за свако x. Нека су $c = F(a_2)$ и $d = G(c)$. Тада је

$$a_2a_3 \equiv a_1a_2 \equiv a_2d.$$

Прва једнакост типова важи по услову леме, а друга јер аутоморфизам $G \circ F$ слика (a_1, a_2) у (a_2, d). Зато постоји аутоморфизам H_1 који пар (a_2, d) слика у пар (a_2, a_3). Нека је

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{за} \quad x \in [a_2, -) \\ x, & \text{за} \quad x \in (-, a_2] \end{cases}$$

Тада H_1 фиксира (конвексан) скуп $[a_2, -)$, па јака линеарна бинарност имплицира да је пресликавање H аутоморфизам. Како H једну n-торку слика у другу, важи:

$$a_1b_1a_2cd \equiv a_1b_1a_2H(c)a_3.$$

Специјално, одатле важи да је $H(c) \in [a_2, a_3]$ и да је $b_1H(c) \equiv b_1c$. Ово последње уз чињеницу да аутоморфизам F обезбеђује да је $b_1c \equiv a_1a_2$, даје закључак да је $a_1a_2 \equiv b_1H(c)$. Зато за b_2 бирамо елемент $H(c)$. □

Подсетимо се да је A_D ознака за $A \cap D$. Оваква ознака је погодна када фиксирамо скуп D.

Дефиниција 4.25. K је конвексан релативно у D ако је $[a,b]_D \subseteq K$ испуњено за свако $a, b \in K_D$. Најмањи конвексан скуп који садржи K обележавамо са $\mathrm{cvx}\,(K)$ и кажемо да је конвексно затворење скупа K.

Напомена: Ако је K конвексан релативно у D онда је $K \cap D = \mathrm{cvx}\,(K) \cap D$.

Ако дефинабилан скуп D има на дефинабилном скупу B коначно много конвексних компоненти, онда је свака од тих компоненти дефинабилна. Последња компонента је дефинабилна формулом

$$\theta(x) := x \in B \wedge \forall y \in B((x < y \wedge y \in D) \Longrightarrow [x,y]_B \subseteq D).$$

Слично је и за остале компоненте. Важи $D_B = \bigcup_{i=1}^{n} \theta_i(\mathcal{U})$.

Лема 4.26. Ако тип у $S_1(c)$ шири $p \in S_1(0)$, онда је његов локус конвексан релативно у $p(\mathcal{U})$.

Доказ. Нека су $a_1 < b_1 < a_2$ три реализације типа p такве да је $a_1 \equiv a_2(c)$. Тада је c ван интервала $[a_1, a_2]$. С обзиром да a_1 и a_2 имају исти тип над c, постоји $F \in \mathrm{A}ut_c(U)$ такав да a_1 слика у a_2. За $k \in \mathbb{Z}$, нека је $a_{k+1} = F^k(a_1)$. Тада је $c \notin [a_k, a_{k+1}]$ и $a_1, a_2 \equiv a_k, a_{k+1}(c)$ за свако k. По леми 4.24, за свако k постоји $b_k \in (a_k, a_{k+1})$ такво да је $b_k, b_{k+1} \equiv a_k, a_{k+1}$. Због линеарне бинарности,

$$\text{из} \quad \left.\begin{array}{c} a_{-k}, a_{-k+1} \equiv b_{-k}, b_{-k+1} \\ \vdots \\ a_1, a_2 \equiv b_1, b_2 \\ \vdots \\ a_{k-1}, a_k \equiv b_{k-1}, b_k, \end{array}\right\} \quad \text{следи да је} \quad a_{-k}, \ldots, a_k \equiv b_{-k}, \ldots, b_k.$$

Дакле, $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \equiv (b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Зато постоји аутоморфизам G који слика a_k у b_k за свако k. Аутоморфизмом G се $[a_k, a_{k+1}]$ слика на $[b_k, b_{k+1}] \subseteq [a_{k-1}, a_{k+1}]$, па закључујемо да G фиксира скуп $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[a_k, a_{k+1}]$. Зато се G могло изабрати тако да је идентитета на остатку. Како је c ван скупа $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[a_k, a_{k+1}]$, важи $G(c) = c$. Тада је $G(a_1, c) = (b_1, c)$, а тиме је $a_1 \equiv b_1(c)$, што је требало показати. $\square$

Лема 4.27. Нека је $\phi(x,t)$ формула без параметра и $p \in S_1(\emptyset)$. Скуп $\phi(\mathcal{U}, b)$ има коначно много конвексних компоненти на локусу типа p.

Доказ. Претпоставимо супротно. Тада је, по компактности, скуп формула

$$\Sigma = \bigcup_{i<\kappa} p(x_i) \cup \{x_i < x_{i+1}, \phi(x_i, b) \Longleftrightarrow \neg\phi(x_{i+1}, b) | i < \kappa\}.$$

задовољив за сваки кардинал κ. Нека низ $\{a_i | i < \kappa\}$ задовољава тај скуп формула. Ако би за неке i и j такве да је $i < j$ било $a_i \equiv a_j(b)$, онда би и сви елементи интервала $[a_i, a_j]_p$ припадали локусу типа $\mathrm{tp}(a_i/b)$, с обзиром да је, по леми 4.26, локус типа $\mathrm{tp}(a_i/b)$ конвексан у $p(\mathcal{U})$ и да му и a_i и a_j припадају. Одатле би следило да a_i и a_{i+1} имају исти тип над b, а тиме да се оба налазе у $\phi(\mathcal{U}, b)$ или да се оба налазе у $\mathcal{U} \smallsetminus \phi(\mathcal{U}, b)$, што је немогуће јер низ a_i задовољава формуле скупа Σ. Дакле, кад год је $i \neq j$, онда је $\mathrm{tp}(a_i/b) \neq \mathrm{tp}(a_j/b)$, одакле следи да је $|S_1(b)| \geqslant \kappa$. Ово је контрадикција јер је језик пребројив, па је $|S_1(b)| \leqslant 2^{\aleph_0}$. Дакле, $\phi(\mathcal{U}, b)$ на локусу типа p има коначно много конвексних компоненти. □

По теореми компактности, из доказа претходне леме, директно следи следећа лема.

Лема 4.28. Нека је $\phi(x, t)$ формула без параметара и $p \in S_1(\emptyset)$. Постоји формула $\psi(x) \in p$ таква да $\phi(\mathcal{U}, b)$ на $\psi(\mathcal{U})$ и на локусу типа p има исти број конвексних компоненти. □

Став 4.29. Нека је $\phi(x, t)$ формула без параметара. Постоје $\emptyset$-дефинабилни скупови $D_1, \dots, D_n$ и за свако $i \in \{1, \dots, n\}$ постоје b-дефинабилни конвексни скупови $B_{i,1}, \dots, B_{i,n_i}$ такви да је

$$\phi(\mathcal{U}, b) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(D_i \cap \bigsqcup_{j=1}^{n_i} B_{i,j} \right).$$

Доказ. На основу леме 4.27 следи да за сваки $p \in S_1(\emptyset)$ скуп $\phi(\mathcal{U}, b)$ на $p(\mathcal{U})$ има коначан број конвексних компоненти. На основу леме 4.28 следи да постоји формула $\psi_p(x) \in p$, таква да $\phi(\mathcal{U}, b)$ на $\psi_p(\mathcal{U})$ има исти број конвексних компоненти. Нека је то n_p. Тада постоје формуле $\theta_{p,1}(x, b), \dots, \theta_{p,n_p}(x, b)$ такве да дефинишу релативно конвексне скупове у $\psi_p(\mathcal{U})$ који су међусобно дисјунктни и линеарно уређени и да важи

$$\psi_p(x) \wedge \phi(x, b) \iff \psi_p(x) \wedge \bigvee_{j=1}^{n_p} \theta_{p,j}(x, b).$$

У светлу напомене иза дефиниције 4.25, јасно је да су се формуле θ могле изабрати тако да дефинишу конвексне скупове и да су ти скупови међусобно дисјунктни. (Ако $\theta_{p,j}(x, b)$ не дефинише конвексан скуп, онда се уместо ње може посматрати формула $\mathrm{cvx}\,(\theta)_{p,j}(x, b)$).

Скуп $\{[\psi_p] \mid p \in S_1(\emptyset)\}$ је отворен покривач простора $S_1(\emptyset)$, па постоји коначан покривач $\{[\psi_{p_1}], \dots, [\psi_{p_n}]\}$. Уместо ψ_{p_i}, n_{p_i} и $\theta_{p_i,j}$ писаћемо ψ_i, n_i и $\theta_{i,j}$. Зато важи

$$\phi(x, b) \iff \bigvee_{i=1}^{n} \left(\psi_i(x) \wedge \bigvee_{j=1}^{n_i} \theta_{i,j}(x, b) \right).$$

То је оно што је требало показати. $\square$

Последица 4.30. Нека је $\phi(x,t)$ формула без параметара и $p \in S_1(\emptyset)$. Или је скуп $\phi(\mathcal{U},b)$ одозго ограничен у $p(\mathcal{U})$ или је то његов комплемент.

Последица 4.31. Нека је $\phi(x,t)$ формула без параметара и $a \in \mathcal{U}$, Тада је скуп $\phi(\mathcal{U},a)$ једнак Буловој комбинацији $\emptyset$-дефинабилних скупова, скупа $[a,-)$, скупа $(-,a]$ и класа елемента a неких $\emptyset$-дефинабилних конвексних еквиваленција.

Доказ. По ставу 4.29, скуп $\phi(\mathcal{U},a)_{[a,-)}$ има коначно много конвексних компоненти. Тиме су испуњени услови теореме4.17, одакле следи да је скуп $\phi(\mathcal{U},a)_{[a,-)}$ једнак Буловој комбинацији $\emptyset$-дефинабилних скупова, скупа $[a,-)$ и класа елемента a неких $\emptyset$-дефинабилних конвексних еквиваленција. Дуално важи за скуп $\phi(\mathcal{U},a) \cap (-,a]$. Закључак следи. $\square$

Став 4.32. Нека су $M = \{(a,b) | a \leqslant b, a,b \in \mathcal{U}\}$ и $N = \{(a,b) | a \geqslant b, a,b \in \mathcal{U}\}$, нека је $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{U})$ фамилија свих $\emptyset$-дефинабилних подскупова универзума, нека је $\mathcal{E}$ фамилија свих подскупова из $\mathcal{U}^2$ које дефинишу $\emptyset$-дефинабилне конвексне еквиваленције и њихови следбеници и нека је $\mathcal{F}$ најмањи скуп затворен за Булове комбинације који садржи $\mathcal{D}^2$, $\mathcal{E}$ и $\{M,N\}$. Сваки 0-дефинабилни скуп $D \subseteq \mathcal{U}^2$ припада скупу $\mathcal{F}$.

Доказ. Нека је $\phi(x,y)$ формула без параметара која дефинише D. На основу последице 4.31 закључујемо да за свако $a \in \mathcal{U}$ постоји формула $\theta(x,y)$ која је Булова комбинација $\emptyset$-дефинабилних формула по промењљивој x, $\emptyset$-дефинабилних конвексних еквиваленција и њихових следбеника и формула $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, таква да важи

$$\models \forall x(\phi(x,a) \iff \theta(x,a)).$$

Означимо са q тип $\mathrm{tp}(a)$ и уочену формулу θ са θ_q. Тада

$$q(y) \models \forall x(\phi(x,y) \iff \theta_q(x,y)).$$

По компактности постоји формула $\delta_q(y) \in q$ таква да је

$$\delta_q(y) \models \forall x(\phi(x,y) \iff \theta_q(x,y)).$$

Скуп $\{[\delta_q(y)] | q \in S_1(\emptyset)\}$ је отворен покривач компактног тополошког простора $S_1(\emptyset)$, па садржи коначан потпокривач $\{[\delta_{q_1}(y)], \ldots, [\delta_{q_n}(y)]\}$. Уместо $\delta_{q_i}(y)$ писаћемо $\delta_i(y)$ и $\theta_i(x,y)$ уместо $\theta_{q_1}(x,y)$. Сада имамо следећу ситуацију:

$$\delta_i(y) \models \forall x(\phi(x,y) \iff \theta_q(x,y)),$$

се може видети као

$$(\mathcal{U} \times \delta_i(\mathcal{U})) \cap \phi(\mathcal{U},\mathcal{U}) = (\mathcal{U} \times \delta_i(\mathcal{U})) \cap \theta_i(\mathcal{U},\mathcal{U}). \tag{2}$$

Чињеница да је $\{[\delta_{q_1}(y)], \ldots, [\delta_{q_n}(y)]\}$ покривач простора $S_1(\emptyset)$ видимо као

$$\delta_1(\mathcal{U}) \cup \cdots \cup \delta_n(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \tag{3}$$

Заједно једначине 2 и 3 дају

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathcal{U} \times \delta_i(\mathcal{U})) \cap \phi(\mathcal{U},\mathcal{U}) = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathcal{U} \times \delta_i(\mathcal{U})) \cap \theta_i(\mathcal{U},\mathcal{U}),$$

што је требало показати. □

Нотација 4.33. Нека је $\mathcal{M}$ линеарно уређена структура и L њен језик. Са $L^\bigstar$ означавамо језик који се састоји од тачно следећих симбола

- P_ψ, за сваку L формулу $\psi(x)$ за коју је $\mathcal{M} \models \exists x \psi(x)$;
- E_θ, за сваку L формулу $\theta(x, y)$ која у $\mathcal{M}$ дефинише конвексну еквиваленцију
- $<$.

Са $\mathcal{M}'$ означавамо проширење структуре $\mathcal{M}$ до језика $L \cup L^\bigstar$ такво да је:

- $P_\psi^{\mathcal{M}'}(\mathcal{M}') = \psi(\mathcal{M})$, за свако $P_\psi \in L^\bigstar$;
- $E_\theta^{\mathcal{M}'}(\mathcal{M}'^2) = \theta(\mathcal{M}^2)$, за свако $E_\theta \in L^\bigstar$.

Са $\mathcal{M}^\bigstar$ означавамо редукт структуре $\mathcal{M}'$ на језик $L^\bigstar$.

Коначно смо у могућности да докажемо теорему 4; то ћемо урадити у првом делу следеће теореме.

Теорема 4.34. Нека је $\mathcal{U}$ јако линеарно бинарна структура и нека је $\mathcal{U}^\bigstar$ структура означена у складу са нотацијом 4.33. Тада:

(1) Структуре $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^\bigstar$ су дефиниционо еквивалентне.

(2) Теорија $T = \mathrm{Th}(\mathcal{U})$ је јако линеарно бинарна.

Доказ. (1) Довољно је показати да је сваки скуп $D \subseteq \mathcal{U}^n$ који је $\emptyset$-дефинабилан у структури $\mathcal{U}$ уједно и $\emptyset$-дефинабилан у структури $\mathcal{U}^\bigstar$.

Нека L формула $\phi(\bar{x})$ дефинише скуп D. С обзиром да је $\mathrm{Th}(\mathcal{U})$ линеарно бинарна, формула ϕ је еквивалентна Буловој комбинацији L формула облика $\theta(x_i, x_{i+1})$. Обележимо са D_i скуп дефинисан формулом $\theta(x_i, x_{i+1})$. Тада је D једнак Буловој комбинацији скупова облика $D_i \subseteq \mathcal{U}^2$. По ставу 4.32, сваки D_i, а тиме и цео D, је дефинабилан формулама језика $L^\bigstar$, а тиме и у структури $\mathcal{U}^\bigstar$.

(2) Означимо са T', T, $T^\bigstar$редом теорије $\mathrm{Th}(\mathcal{U}')$, $\mathrm{Th}(\mathcal{U})$ и $\mathrm{Th}(\mathcal{U}^\bigstar)$. Из првог дела теореме, по тврђењу 1.16, следи да је T' дефиниционо проширење теорија T и $T^\bigstar$. Нека је $\mathcal{M} \models T$ засићен и нека је $\mathcal{M}^\bigstar$ њему одговарајући (у

смислу 4.33) модел теорије $T^{\bigstar}$. Тада су модели $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^{\bigstar}$ дефиниционо еквивалентни, па је $\mathcal{M}^{\bigstar}$, по другом делу тврђења 1.17, такође засићен. Нека је F аутоморфизам структуре $\mathcal{M}$ који фиксира конвексан скуп K. По првом делу тврђења 1.17, F је аутоморфизам структуре $\mathcal{M}^{\bigstar}$. Пошто је $\mathcal{M}^{\bigstar}$ проширење линеарног уређења бојама и конвексним еквиваленцијама, по запажању 4.18, је јако линеарно бинарна структура, па је

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & \text{за} \quad x \in K \\ x, & \text{за} \quad x \notin K \end{cases}$$

аутоморфизам структуре $\mathcal{M}^{\bigstar}$. Поново по првом делу тврђења 1.17, H је аутоморфизам структуре $\mathcal{M}$, што је требало показати. □

Следећа директна последица става 4.32 и теореме 4.34 је јачи облик теореме 3.

Последица 4.35. Ако је теорија јако линеарно бинарна, онда има елиминациони скуп састављен од релације $<$, формула P_ψ и E_θ уведених у 4.33 и релација s^n_E уведених у поглављу 4.1 као „$s^n_{E_\theta}(x, y)$ ако и само ако између E_θ-класа елемената x и y налази се тачно $n-1$ класа релације E_θ".

Теорема 3 је директна последица запажања 4.18 и последице 4.35.

Закључак

У другом поглављу смо описали један корак моделско теоријске анализе линеарног уређења: кондензацијом $\mathbf{c}_\delta$ добијамо једноставније уређење које има и придодате предикате. Такође смо описали начин на који можемо ићи уназад. Поставља се питање: Како даље анализирати такву структуру, односно које су дефинабилне кондензације погодне за анализу линеарног уређења са унарним предикатима? Било би занимљиво знати одговор на ово питање, али се он не може наслутити из ове дисертације.

Дискретне класе кондезације c_δ уведене у другом поглављу смо детаљније изучавали у трећем поглвљу. Показано је како изгледају дефинабилни скупови експанзије уређења $(\omega, <)$, Кантор Бендиксоновог ранга 1. Тачније, показано је да је таква експанзија дефинициона ако јој је степен 1, а ако је степен $d > 1$, онда је таква експанзија дефиниционо еквивалентна структури $(\omega, <, P_d)$ из примера 3.3. Остало је отворено питање како изгледају експанзије ранга већег од 1 и да ли постоји права експанзија структуре $(\omega, <)$ чија теорија је мала и није бинарна?

Један од основних задатака теорије модела је опис дефинабилних скупова дате структуре. За структуре јако линеарно бинарне теорије тај задатак је решен у четвртој глави ове дисертације. За нешто ширу класу, структуре линеарно бинарне теорије, тај задатак је делимично одрађен: описани су конвексни скупови дефинабилни једним параметром, одакле следи и опис скупова дефинабилних једним параметром који имају коначно много конвексних компоненти. Остало је отворено питање како изгледају скупови дефинабилни једним параметром који имају бесконачно много конвексних компоненти.

Литература

[1] Buechler, S. (1996). Essential Stability Theory. Springer.

[2] Dushnik, B.; Miller, E. W. (1940). Concerning similarity transformations of linearly ordered sets. Bulletin of the American Mathematical Society, 46(4), 322-326.

[3] Feferman, S.; Vaught, R. L. (1959). The first order properties of products of algebraic systems. Fundamenta Mathematicae, 47(1), 57-103.

[4] Hausdorff, F. (1908). Grundzuge einer Theorie der geordneten Mengen. Mathematische Annalen, 65(4), 435-505.

[5] Hodges, W. (1993). Model Theory. Cambridge University Press.

[6] Ilić, D. (2014). Simple types in discretely ordered structures. Archive for Mathematical Logic, 53(7-8), 929-947.

[7] Ilić, D.; Tanović, P. (2014). A definable condensation of linear orderings. Novi Sad Journal of Mathematics, 44(2), 225-234.

[8] Ilić, D.; Moconja, S.; Tanović, P. (2015). Groups with finitely many countable models. Publications de l'Institut Mathematique, 97(111), 33-41.

[9] Makkai, M. (1984). A survey of basic stability theory, with particular emphasis on orthogonality and regular types. Israel Journal of Mathematics, 49(1-3), 181-238.

[10] Marcja, A.; Toffalori, C. (2003). A Guide to Classical and Modern Model Theory. Kluwer Academic Publishers.

[11] Marker, D. (2002). Model Theory. Springer-Verlag, New York.

[12] Pillay, A.; Steinhorn, C. (1987). Discrete o-minimal structures. Annals of Pure and Applied Logic, 34(3), 275-289.

[13] Pillay, A.; Steinhorn, C. (1988). Definable sets in ordered structures. III. Transactions of the American Mathematical Society, 469-476.

[14] Rosenstein, J.G. (1982). Linear Orderings. Academic Press, New York.

[15] Rubin, M. (1974). Theories of linear order. Israel Journal of Mathematics, 17(4), 392-443.

[16] Simon, P. (2011). On dp-minimal ordered structures. Journal of Symbolic Logic, 76(2), 448-460.

[17] Tanović, P. (2006). On constants and the strict order property. Archive for Mathematical Logic, 45(4), 423-430.

[18] Tanović, P. (2010). Types directed by constants. Annals of Pure and Applied Logic, 161(7), 944-955.

[19] Tanović, P. (2011). Minimal first-order structures. Annals of Pure and Applied Logic, 162(11), 948-957.

[20] Моцоња, С. (2015). Асиметрични правилни типови. Докторска дисертација, Универзитет у Београду, Математички факултет.

[21] Тановић, П. (2015). Минималне структуре првог реда. Академска мисао, Београд.

Биографија

Дејан Илић рођен је 28. марта 1970. године у Београду. Дипломирао је на Математичком факултету у Београду 2000. године на смеру Теоријска математика и примене. Магистарску тезу „Димензија модела непребројиво категоричне теорије" одбранио је 2011. године под менторством професора Предрага Тановића. Од 2000. године запослен је као асистент на Саобраћајном факултету у Београду.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а мр Дејан Илић

број уписа ______________________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Анализа пребројивих модела потпуних теорија линеарно уређених структура

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

Дејан Илић

У Београду, 1.6.2016. године

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: мр Дејан Илић

Број уписа:

Студијски програм:

Наслов рада: Анализа пребројивих модела потпуних теорија линеарно уређених структура

Ментор: проф. др Предраг Тановић, ванредни професор

Потписани: мр Дејан Илић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

Дејан Илић

У Београду, 1.6.2016. године

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Анализа пребројивих модела потпуних теорија линеарно уређених структура

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 1.6.2016. године

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.