УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ленка Главаш

ГРАНИЧНЕ РАСПОДЕЛЕ ПАРЦИЈАЛНИХ МАКСИМУМА РАВНОМЕРНИХ $AR(1)$ ПРОЦЕСА

докторска дисертација

Београд, 2015.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Lenka Glavaš

THE LIMITING DISTRIBUTIONS OF THE PARTIAL MAXIMA IN THE UNIFORM $AR(1)$ PROCESSES

Doctoral Dissertation

Belgrade , 2015

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

проф. др Павле Младеновић
редовни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

проф. др Павле Младеновић
редовни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Слободанка Јанковић
редовни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Љиљана Петровић
редовни професор
Економски факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

Садржај

Наслов: *Граничне расподеле парцијалних максимума равномерних* $AR(1)$ *процеса*

Сажетак: Тема докторске дисертације односи се на проблеме екстремних вредности у строго стационарним случајним низовима. Она припада веома актуелној области вероватноће и статистике са многобројним применама. Ослања се на велики број изворних научних радова и монографија.

Предмет докторске дисертације је одређивање асимптотског понашања максимума некомплетних узорака из ауторегресионог процеса првог реда са равномерним маргиналним расподелама.

Дисертација се састоји из три поглавља.

Оригинални резултати (теоријски резултати и симулације) изложени су у трећем поглављу. Разматрају се два типа равномерног $AR(1)$ процеса $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: позитивно корелиран, односно негативно корелиран процес, са аутокорелацијом првог реда $\rho(1) := \mathrm{Corr}(X_{n-1}, X_n)$ једнаком, редом, $\frac{1}{r}$, односно $-\frac{1}{r}$, где је $r \geqslant 2$ параметар. Нека је $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неслучајан $0-1$ низ такав да постоји гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_j = p \in [0,1]$. Нека је случајна величина $M_n := \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} X_j$ максимум комплетног узорка обима n из датог процеса, а случајна величина $\widetilde{M}_n$ парцијални максимум – максимални елемент некомплетног узорка $\{X_j : c_j = 1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Користећи различите, специфичне низове (c_n) доказује се да гранична расподела дводимензионог случајног вектора $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$, при $n \to \infty$, није једнозначно одређена граничном вредношћу p. Ово је последица чињенице да равномерни $AR(1)$ процес не задовољава један од услова слабе зависности, чије би важење онемогућило груписање екстремних вредности. Изводе се додатни, са екстремалног становишта занимљиви, закључци у погледу асимптотског заједничког понашања случајних величина M_n и $\widetilde{M}_n$. У случајевима када је парцијални максимум $\widetilde{M}_n$ одређен извесним тачкастим процесом наводе се резултати добијени компјутерским симулацијама.

Прва два поглавља су информативног карактера. С обзиром на то да је, као што је описано, од интереса проучавање линеарно нормираног дводимензионог покомпонентног максимума улога првог поглавља јесте сагледавање контекста вишедимензионих екстремних вредности. Излажу се поставке класичне теорије и дају наговештаји уопштења. У

другом поглављу формулишу се основни појмови из теорије временских серија са акцентом на линеарним стационарним моделима, посебно на ауторегресионим моделима првог реда. Највише пажње посвећује се приказу особина равномерних $AR(1)$ процеса и постојећих резултата у вези са њиховим екстремалним својствима.
У закључку, на крају трећег поглавља, наводе се отворена питања и могући правци будућег научно-истраживачког рада.

Кључне речи: Асимптотска теорија; екстремне вредности; недостајуће опсервације; парцијални максимум; равномерни $AR(1)$ процеси.

Научна област: Математика.

Ужа научна област: Вероватноћа и статистика.

УДК: 519.21, 517.51.

AMS Classification: 60G70, 60G10.

Title: *The Limiting Distributions of the Partial Maxima in the Uniform AR(1) Processes*

Summary: The subject of this doctoral dissertation is related to the problems of extreme values in strictly stationary random sequences. It belongs to the topical area of probability and statistics, broadly applicable to real life situations and in many scientific fields. It relies on large number of seminal articles and monographs. The main aim of the dissertation is to determine the asymptotic behavior of maxima of some incomplete samples from the first-order auto-regressive processes with uniform marginal distributions.

The dissertation consists of three chapters.

New results (the theoretical ones and the results of computer simulations) are presented in the third chapter. Two types of the uniform $AR(1)$ process $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are considered: positively correlated and negatively correlated process, with the lag one correlation $\rho(1) := \mathrm{Corr}(X_{n-1}, X_n)$ equal to $\frac{1}{r}$ and $-\frac{1}{r}$, respectively, where $r \geqslant 2$ is the parameter of the underlying process. Let $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a non-random $0-1$ sequence, such that $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_j = p \in [0,1]$. This sequence of degenerate random variables is introduced with the purpose to correspond to the sequence (X_n) in the following sense: r.v. X_j is observed if $c_j = 1$, otherwise r.v. X_j is not observed (missing observation). Let us use the notation: the r.v. $M_n := \max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j$ is maximum of the complete (size n) sample from the random sequence (X_n), and the r.v. $\widetilde{M}_n$ is what is called partial maximum, i.e. the maximal element of incomplete sample $\{X_j : c_j = 1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Based on different, specific deterministic sequences (c_n) it is proved that the limiting distribution, as $n \to \infty$, of the two-dimensional random vector $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$, is not uniquely determined by the limit value p. This appears as a consequence of the fact that for the uniform $AR(1)$ process one of the weak dependence conditions does not apply. Namely, the uniform $AR(1)$ process does not satisfy the local condition under which clustering of extremes is restricted. As a consequence of this property, some interesting conclusions about asymptotic joint distributions of random variables M_n and $\widetilde{M}_n$ are reached. In the cases when the partial maximum $\widetilde{M}_n$ is determined by an arbitrary point process there are presented results obtained by simulations.

The first two chapters are rather informative. Having in mind interest in studying the asymptotic behavior of linearly standardized two-dimensional component-wise maxima the role of the first chapter is to anticipate the concept of multivariate extreme values. In the second chapter the basic terms in the time series analysis are formulated, with the accent on the linear stationary models, especially on

first-order auto-regressive models. The special attention is dedicated to the uniform $AR(1)$ processes, their properties and existing results concerning their extremal behavior.
Still open questions are mentioned in the conclusion, in the very end of the third chapter.

Key Words: Asymptotic theory; extreme values; missing observations; partial maximum; uniform $AR(1)$ processes.

Scientific Area: Mathematics.

Scientific Sub-area: Probability and Statistics.

UDC: 519.21, 517.51.

AMS Classification: 60G70, 60G10.

Велику и истинску захвалност дугујем, пре свега, свом ментору професору Павлу Младеновићу. Захваљујем му се на томе што ми је пре више година пружио прилику да радимо заједно и што од тада брижљиво и посвећено руководи мојим научно-истраживачким радом.

Професорки Слободанки Јанковић од срца се захваљујем на подршци и на драгоценим саветима и сугестијама које су унапредиле форму и текст ове дисертације.

Драгим колегама, пријатељима, кумовима хвала на томе што су се увек интересовали како напредује рад и што су ме бодрили да на истом истрајем.

Највећу захвалност, коју је тешко изразити речима, осећам према својој породици – мами, Ути и Дарку. Они су увек били ту и веровали у мене и онда када сама нисам. Свако од њих је, на свој начин, допринео овој дисертацији.

Београд, децембар 2015. Ленка Главаш

Увод

Теорија екстремних вредности, којој по свом садржају и резултатима припада ова дисертација, јесте област вероватноће и статистике. Она обезбеђује теоријску основу за моделирање догађаја који се, због своје екстремалне природе, ретко или веома ретко дешавају. Интересовање за овакве догађаје, међутим, потиче из свести да они потенцијално могу имати велике последице по човечанство. Примери оваквих догађаја могу се наћи у разним областима живота и науке: климатологији, екологији, хидрологији, геофизици; финансијама, неживотном осигурању и реосигурању итд.

У последњих неколико деценија теорија, и једнодимензионих и вишедимензионих, екстремних вредности, постала је врло актуелна, широко проучавана и примењивана математичка дисциплина. Постоји велики број књига на ову тему: Kotz and Nadarajah (2000), Coles (2001), Младеновић (2002), Beirlant et al. (2004), de Haan and Ferreira (2006), Resnick (2007), Resnick (2008), Falk et al. (2011).

Кратак преглед садржаја дисертације

Поглавље 1. Теорија вишедимензионих екстремних вредности. Прво су приказане основне поставке теорије једнодимензионих екстремних вредности, чије је познавање од суштинског значаја за рад са вишедимензионим екстремима, јер се ту многи концепти на природан начин уопштавају. При томе, приказана је класична теорија и теорија за стационарне случајне низове, уз формулисање услова слабе зависности. Када је у питању теорија вишедимензионих екстремних вредности разматрани су линеарно нормирани покомпонентни максимуми независних, једнако расподељених вишедимензионих случајних вектора и њихове граничне расподеле. У том смислу наведене су различите карактеризације вишедимензионих расподела екстремних вредности и одговарајућих структура зависности. Разматран је и проблем области привлачења вишедимензионих расподела екстремних вредности. Засебан одељак посвећен је неким параметарским фамилијама дводимензионих расподела екстремних вредности, које су највише заступљене у литератури. Коначно, поменута су извесна уопштења, до којих се долази када се изостави бар једна од претпоставки о једнакој расподељености, односно независности, вишедимензионих вектора који су од интереса у екстремалном контексту.

Поглавље 2. Равномерни $\boldsymbol{AR}(1)$ процеси. Дефинисани су линеарни модели временских серија и наведене опште форме линеарних модела стационарних временских серија. Пажња је посвећена, прво, стационарном Гаусовом ауторегресионом процесу првог реда, као једном од највише проучаваних модела временских серија, а, затим, и не-Гаусовим моделима, за којима је постојала насушна потреба са становишта примена. Ипак, најзначајнији за наредно, треће поглавље свакако је равномерни ауторегресиони процес првог реда, те су стога дефиниције за оба типа овог процеса, њихове екстремалне и друге особине издвојене у посебном одељку. Референце су: Hamilton (1994) – анализа временских серија, Chernick (1978), Chernick (1981), Chernick and Davis (1982) – својства равномерних $AR(1)$ процеса.

Поглавље 3. Асимптотске расподеле максимума комплетних и некомплетних узорака из стационарних низова. Наведен је општи резултат, који се тиче заједничке граничне расподеле максимума комплетног узорка и парцијалног максимума из строго стационарног случајног низа за кога важе одређени услови слабе зависности. Главна референца је: Mladenović and Piterbarg (2006). У ситуацији када се у улози стационарног случајног низа нађе баш позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес а некомплетан узорак је одређен специфичним неслучајним $0-1$ низом, односно случајним проређивањем, граничне теореме налазе се, редом, у референцама: Mladenović (2009), Olshanski (2005).

Оригинални допринос дисертације су нове граничне теореме, које садрже резултате у вези са асимптотском расподелом, при $n \to \infty$, линеарно нормираног дводимензионог покомпонентног максимума низа случајних вектора $((X_n, c_n X_n))$, где је (X_n) равномерни ауторегресиони процес првог реда, а (c_n) неслучајан $0-1$ низ. Нађене су граничне вредности, при $n \to \infty$, вероватноћа догађаја $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1-\dfrac{x}{n}, M_n \leqslant 1-\dfrac{y}{n}\right\}$, где је $\widetilde{M}_n$ максимум некомплетног узорка одређеног низом (c_n), тј. максимум тзв. регистрованих међу првих n чланова низа (X_n), а M_n максимум комплетног узорка обима n. При разматрању позитивно корелираног равномерног $AR(1)$ процеса и низа (c_n), конструисаног надовезивањем серија 0011, добијени су међусобно различити изрази за граничну расподелу у следећим подобластима првог квадранта равни: $0 < y \leqslant x/r^2$, $0 < x/r^2 < y \leqslant x/r$, $0 < x/r < y \leqslant x$. Утврђено је да су за тачке (x, y) у првој од поменутих подобласти догађаји $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}\right\}$ и $\left\{M_n \leqslant 1 - \dfrac{y}{n}\right\}$ асимптотски перфектно зависни, док су за тачке (x, y) у преостале две подообласти они асимптотски независни. Ови изрази су, такође, различити и од израза за граничну расподелу вектора $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$ у истим областима у случају када је парцијални максимум одређен низом (c_n) добијеним надовезивањем серија 01. Ово је интересантно с обзиром на чињеницу да оба детерминистичка низа (c_n) имају исту асимптотску релативну учестаност појављивања јединица, једнаку 1/2. У погледу асимптотске (не)зависности раније је доказано да је у случају низа (c_n) добијеног надовезивањем серија 01 асимптотска потпуна зависност догађаја $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}\right\}$ и $\left\{M_n \leqslant 1 - \dfrac{y}{n}\right\}$ присутна у целој области $0 < y \leqslant x/r$, за разлику од претходног случаја.

Парцијални максимуми разматрани су и на узорцима из негативно корелираног равномерног $AR(1)$ процеса, одређеним већ поменутим низовима (c_n). Поређени су одговарајући гранични резултати за ова два типа равномерног $AR(1)$ процеса.

Формулисано је и доказано тврђење за случај некомплетног узорка из позитивно корелираног равномерног $AR(1)$ процеса, одређеног низом (c_n) добијеним надовезивањем серија 001. Добијени резултат показује да је гранична расподела, при $n \to \infty$, случајног вектора $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$ у овом случају инваријантна у односу на транслацију индекса регистрованих чланова низа (X_n).

Теоријски резултати праћени су компјутерским симулацијама, које су извршене и за некомплетне узорке одређене тачкастим процесом, за које гранични резултати (још увек) не постоје. У тим случајевима коришћене су статистичке методе, па су приказани и резултати тестирања статистичких хипотеза. Дати су и неки нумерички примери.

Референце су заједнички рад и самостални рад аутора дисертације: Mladenović and Živadinović (2015), Glavaš (2015).

Поглавље 1: Теорија вишедимензионих екстремних вредности

Многи проблеми који укључују екстремне догађаје сами по себи су вишедимензионог карактера. У XXI веку посебно је актуелна тема процене ризика од одређених појава у животној средини, која скоро по правилу захтева анализу суштински вишедимензионих екстремних догађаја.

Примера ради, савремени приступ проучавању процеса промене нивоа мора подразумева његову декомпозицију на више физичких компоненти: средњи ниво мора, ефекат плиме и осеке, узбурканост мора (посебно услед олујних ветрова). Поплаве и пробијање линије одбране мора узроковане су истовременим веома високим вредностима двеју или више поменутих компоненти, па би процену ризика требало заснивати управо на познавању њихове заједничке екстремалне структуре. Вишедимензиони контекст може, као у овом примеру, проистећи из посматрања већег броја различитих променљивих које заједно описују понашање једног процеса током времена на коначном броју локација или, рецимо, из праћења еволуције више увезаних процеса у времену, односно простору. Могу се навести и разни други примери: просторна анализа екстрема падавина на дневном нивоу ради процене ризика за хидролошке структуре, као што су резервоари, кишна канализација, дренажни системи; анализа података о брзини ветра, јачини и правцу удара на одређеној локацији ради безбедности објеката у изградњи; анализа временских серија концентрације загађивача ваздуха, посебно у ситуацијама када она током дужег временског периода премашује ниво упозорења, ради процене саобраћајних и метеоролошких утицаја на квалитет ваздуха. Са друге стране, вишедимензионе технике имају значајну примену у економији, финансијама и осигурању. За детаљнији преглед научних радова на ову тему погледати Beirlant et al. (2004) и Kotz and Nadarajah (2000).

Све наведено указује на потребу за развојем вероватносних и статистичких метода примењивих у анализи екстрема вишедимензионих опсервација.

На самом почетку намеће се фундаментално питање: када би вишедимензиону опсервацију требало сматрати „екстремном”. Да ли је довољно да само једна њена координата достигне изузетну вредност или би требало да опсервација буде екстремна по свим својим координатама истовремено? Технички говорећи, из статистичког угла важно је потражити адекватан одговор на питање: које значење, у вишедимензионом контексту, приписати статистикама поретка, узорачком максимуму, квантилима репа расподеле, прекорачењима високог нивоа – концептима значајним у теорији једнодимензионих екстремних вредности.

Други проблем је зависност и он се јавља као последица рада са више од једне променљиве, а рађа питања: у каквој су вези екстреми једне променљиве са екстремима других променљивих; које су структуре зависности могуће; како оценити природу и степен зависности и сл.

1.1 Теорија у једнодимензионом случају – кратак преглед

То је, уствари, теорија екстремних вредности случајних низова, која се бави проучавањем граничног понашања узорачких екстрема, тј. случајних величина

$$M_n := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j \quad \text{и} \quad m_n := \min_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j, \quad \text{при } n \to \infty,$$

где су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ случајне величине са датим расподелама.

Претпостави се да постоје низови константи $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тако да важи

$$P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} \to G(x), \quad \text{при } n \to \infty, \tag{1.1}$$

за сваку тачку $x \in C(G)$, уз захтев да гранична функција расподеле G буде недегенерисана. Главни математички проблем, тзв. *екстремални гранични проблем*, који се овде поставља јесте идентификовање свих могућих граничних функција расподеле G које се могу појавити у (1.1) и које се називају *функције расподеле екстремних вредности*. Константе

a_n и b_n једним именом се називају *нормирајуће константе*, а G одређује *граничну расподелу линеарно нормираног* (може се, такође, користити и термин: афино трансформисаног) *максимума*. У (1.1) коришћена је линеарна стандардизација која омогућава изградњу довољно садржајне теорије; могла би се разматрати и шира класа стандардизација о чему детаљније неће бити говора.

Уместо максимума може се, по потреби, проучавати минимум. Акценат ће у наставку бити на резултатима за максимум, из којих се лако могу добити одговарајући резултати за минимум на основу једнакости

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} X_j \;=\; -\max_{1\leqslant j\leqslant n}(-X_j). \tag{1.2}$$

1.1.1 Класична теорија

Ова теорија развијала се упоредо са централном граничном теоријом, па се оне узајамно допуњују односно контрастирају и међу њима се могу правити одређене аналогије.

Класична теорија екстремних вредности полази од претпоставке да се ради са низом (X_n) независних, једнако расподељених случајних величина са заједничком, недегенерисаном функцијом расподеле F. Функција расподеле максимума M_n првих n чланова овог низа дата је, за $x \in \mathbb{R}$, са

$$P\{M_n \leqslant x\} = P\{X_j \leqslant x, \text{за } j = 1, 2, \ldots, n\} = \prod_{j=1}^{n} P\{X_j \leqslant x\} = (F(x))^n. \tag{1.3}$$

Нека је са x_F означен десни крај носача функције расподеле F, при чему $x_F \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Јасно је да тада

$$M_n \xrightarrow{P} x_F, \quad \text{при } n \to \infty,$$

а, с обзиром на то да је низ (M_n) монотоно неопадајући по n, он конвергира и скоро сигурно ка x_F, при $n \to \infty$. Ова чињеница, међутим, није претерано корисна. Бољи увид у ред величине максимума пружају резултати у вези са слабом конвергенцијом (може се, такође, користити и термин: конвергенција у расподели) стандардизованог (центрираног и нормализованог) максимума, те отуда и захтев за недегенерисаном расподелом као граничном.

Основу класичне теорије чини *теорема о екстремалним типовима* која решава гранични проблем дајући општи облик свих могућих недегенерисаних граничних расподела у (1.1). Овај резултат, са не сасвим строгим доказом, садржан је првобитно у раду Fisher and Tippett (1928)[1], а свој допринос дали су касније Gnedenko (1943), de Haan (1970), de Haan (1976), Weissman (1978). Значај овог резултата је у томе што он карактеризује класу граничних функција расподеле G на следећи начин.

Теорема 1.1. *Ако постоје низови константи* (a_n) *и* (b_n), $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ *за свако* $n \in \mathbb{N}$, *тако да важи*

$$P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} = (F(a_n x + b_n))^n \to G(x), \quad \textit{при } n \to \infty, \tag{1.4}$$

за $\forall x \in C(G)$, *где је* G *недегенерисана функција расподеле, тада је функција расподеле* G *истог типа као нека од расподела из следеће три класе:*

$$G_0(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty \tag{1.5}$$

$$G_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & \textit{за } x \leqslant 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \textit{за } x > 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0) \tag{1.6}$$

$$G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & \textit{за } x \leqslant 0 \\ 1, & \textit{за } x \geqslant 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0). \tag{1.7}$$

Дефиниција 1.1. Функције расподела G_1 и G_2 су *истог типа* ако постоје константе $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ такве да једнакост $G_2(x) = G_1(ax + b)$ важи за $\forall x \in \mathbb{R}$.

Напомена 1.1. Доказано је да је важење (1.4) еквивалентно

$$n(1 - F(a_n x + b_n)) \to -\log G(x), \quad \text{при } n \to \infty. \tag{1.8}$$

Заједнички назив за поменуте три параметарске фамилије расподела је *расподеле екстремних вредности*, а стандардни представници ових фамилија дати формулама (1.5)–(1.7) познати су, редом, и као Гумбелова[2] расподела, Фрешеова[3] расподела с параметром $\alpha > 0$, Вејбулова[4] расподела с параметром $\alpha > 0$.

[1]Ronald Fisher (1890-1962); Leonard H. C. Tippett (1902-1985), енглески статистичари
[2]Emil Julius Gumbel (1891-1966), немачки математичар
[3]Maurice René Fréchet (1878-1973), француски математичар
[4]Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (1887-1979), шведски инжењер и математичар

Слаба конвергенција у (1.4) једнозначна је до на тип, односно до на линеарне трансформације, тј. ако се промене нормирајуће константе тако да је $\tilde{a}_n = \dfrac{a_n}{a}$ нови параметар скалирања и $\tilde{b}_n = b_n - \dfrac{a_n b}{a}$ нови параметар локације, где је $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$, онда важи

$$P\left\{\frac{M_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \leqslant x\right\} \to G\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad \text{при } n \to \infty,$$

(погледати Хинчинову[5] теорему 1.3.5. у књизи Младеновић (2002)).

Дефиниција 1.2. Недегенерисана случајна величина Z (односно њена расподела вероватноћа, тј. њена функција расподеле H) је *максимум стабилна* (кратко *M-стабилна*) ако и само ако једнакост

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} Z_j \stackrel{d}{=} a_n Z + b_n \tag{1.9}$$

важи за независне копије $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ случајне величине Z, погодно одабране константе $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$, и свако $n \geqslant 2$.

Једнакост у расподели (1.9) се, на основу (1.3), може записати и као

$$(H(a_n z + b_n))^n = H(z), \quad \text{за } \forall z \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

што, уствари, значи да је функција расподеле случајне величине $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} Z_j$ истог типа као функција расподеле H.

Даље се може показати да су расподеле екстремних вредности заправо M-стабилне и, штавише, да се ове две класе расподела поклапају.

Посебно, ако случајна величина Z има неку од функција расподеле екстремних вредности садржаних у Теореми 1.1 онда је:

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} Z_j \stackrel{d}{=} Z + \log n \qquad \text{за Гумбелову расподелу } G_0$$

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} Z_j \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} Z \qquad \text{за Фрешеову расподелу } G_{1,\alpha},\ \alpha > 0$$

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} Z_j \stackrel{d}{=} n^{-1/\alpha} Z \qquad \text{за Вејбулову расподелу } G_{2,\alpha},\ \alpha > 0.$$

Иако се са становишта моделирања ове три класе расподела међусобно веома разликују, математички су оне повезане једноставним трансформацијама. Наиме, ако је Z позитивна случајна величина онда

[5] Александр Яковлевич Хи́нчин (1894-1959), совјетски математичар

важе еквиваленције:

$$\begin{aligned} Z \text{ има функцију расподеле } G_{1,\alpha} \quad &\Leftrightarrow \\ \alpha \log Z \text{ има функцију расподеле } G_0 \quad &\Leftrightarrow \\ -\frac{1}{Z} \text{ има функцију расподеле } G_{2,\alpha}. \end{aligned}$$

Различито понашање три типа граничних расподела које се могу појавити у (1.4) одговара различитом понашању репа функције расподеле F случајне величине X_j (из формулације Теореме 1.1), односно различитој брзини његовог опадања. Стога, у применама, ове три класе расподела прилично различито манифестују екстремално понашање. У раним данима теорије екстремних вредности, приликом анализе реалних података, било је уобичајено да се одабере нека од поменуте три параметарске фамилије расподела (слабост: потребна је техника одабира фамилије која најбоље одговара подацима), а онда да се оцене релевантни параметри расподеле (слабост: када се донесе одлука о моделу, закључивање које следи почива на претпоставци да је његов избор био коректан, тј. надаље се не узима у обзир непоузданост приликом избора). Стога је, у циљу отклањања поменутих слабости и побољшања анализе и статистичког закључивања, предложено да се поменуте три класе расподела обједине у једну фамилију расподела, чији су чланови облика

$$G_\gamma(x) = \exp\left(-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\right), \quad 1+\gamma x > 0, \tag{1.11}$$

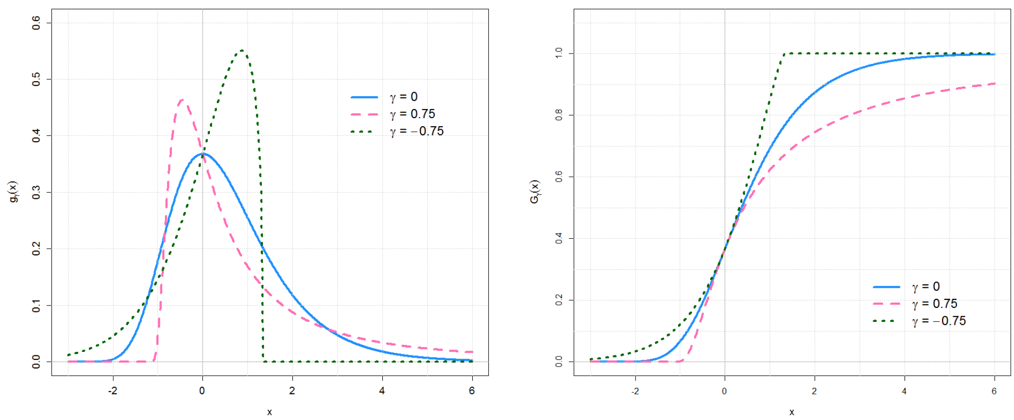
где је $\gamma \in \mathbb{R}$, при чему је, по дефиницији, за $\gamma = 0$ десна страна једнакости (1.11) једнака $\exp(-e^{-x})$ за $x \in \mathbb{R}$ (тј. G_0 се може сматрати граничном вредношћу низа G_γ, при $\gamma \to \infty$).

Репрезентацију расподела екстремних вредности садржану у формули (1.11) дали су Jenkinson-von Mises (1955) и њом је задата класа тзв. *генералисаних расподела екстремних вредности.* Параметар γ зове се *индекс расподеле екстремних вредности.* Његов значај је у томе што његова вредност указује на понашање репа конкретне расподеле. Наиме, могу се уочити и појединачно разматрати три поткласе поменуте класе, тачније разликовати случајеви $\gamma > 0$, $\gamma = 0$ и $\gamma < 0$:

- ако је $\gamma > 0$ онда је $G_\gamma(x) < 1$ за $\forall x \in \mathbb{R}$, тј. $x_{G_\gamma} = +\infty$; при $x \to \infty$ десни реп расподеле $\overline{G}_\gamma(x)$ се асимптотски понаша као $\gamma^{-1/\gamma} x^{-1/\gamma}$, па

расподела има тежак десни реп; моменти расподеле реда већег или једнаког вредности $1/\gamma$ не постоје;
искористи се $G_\gamma\left(\dfrac{x-1}{\gamma}\right)$ и $\alpha = 1/\gamma$ како би се добила Фрешеова расподела с параметром $\alpha > 0$ дата са (1.6)

- ако је $\gamma = 0$ онда је $x_{G_0} = +\infty$; при $x \to \infty$ десни реп расподеле $\overline{G}_0(x)$ се асимптотски понаша као e^{-x}, па расподела има лак десни реп; сви моменти расподеле постоје;
у питању је, уствари, Гумбелова расподела дата са (1.5)
- ако је $\gamma < 0$ онда је $x_{G_\gamma} < +\infty$;
искористи се $G_\gamma\left(-\dfrac{x+1}{\gamma}\right)$ и $\alpha = -1/\gamma$ како би се добила Вејбулова расподела с параметром $\alpha > 0$ дата са (1.7).



Слика 1: *Графици густина (лево), односно функција расподела (десно), генералисаних расподела екстремних вредности, за различите вредности* $\gamma \in \mathbb{R}$

Напомена 1.2. Овде се сматра да је *реп* разматране *расподеле лак* ако је лакши од репа неке експоненцијалне расподеле, односно да је реп расподеле *тежак* ако је тежи од репа сваке експоненцијалне расподеле (погледати Дефиницију 3.2.1. у књизи Младеновић (2014)).

Статистичко закључивање суштински се своди на оцењивање индекса расподеле екстремних вредности γ. Предност је у томе што сами подаци одређују најприкладнији тип репа расподеле, а није потребно субјективно, априори одлучивање у погледу избора одређене фамилије расподела из Теореме 1.1 као модела за податке.

Када се ради о минимуму случајних величина X_j (из формулације Теореме 1.1), на основу релације (1.2), следи да за граничну функцију расподеле $\widetilde{G}$ линеарно нормираног минимума $\dfrac{\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}(-X_j) + b_n}{a_n}$, при $n \to \infty$, где су $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, нормирајуће константе из (1.4), важи

$$\widetilde{G}(x) = 1 - G(-x), \quad \text{за } \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

За више детаља о асимптотском понашању минимума погледати нпр. Balakrishnan and Nevzorov (2004).

Након што се дошло до извесног општег облика граничне функције расподеле G линеарно нормираног максимума, при $n \to \infty$, чиме је решен екстремални гранични проблем, природно се намеће други важан проблем, тзв. *проблем области привлачења.* Уколико је G функција расподеле екстремних вредности и постоје низови константи (a_n) и (b_n), $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тако да важи (1.4), или, еквивалентно (1.8), каже се да функција расподеле F припада области привлачења (за максимуме) функције расподеле G, што се означава са $F \in D(G)$. У вези с тим, централни задатак своди се на одређивање потребних и довољних услова које би требало да задовољава функција расподеле F како би припадала области привлачења $D(G)$.

Ако је функција расподеле F апсолутно непрекидног типа једноставне довољне услове за F, при којима она припада области привлачења неке од расподела екстремних вредности, одредио је von Mises (1936). Гнеденко[6] је 1943. дао прву комплетну карактеризацију (у смислу потребних и довољних услова за F) области привлачења за све три класе расподела екстремних вредности. Према његовим речима, међутим, његова карактеризација области привлачења Гумбелове расподеле није била коначна ни једноставна за примене, те је проблем формулисања потребних и довољних услова за F при којима $F \in D(G_0)$ касније више пута поново био разматран, нпр. у радовима Mejzler (1949) и de Haan (1970). За више детаља погледати Младеновић (2002) или Embrechts et al. (2013). Постоји мноштво радова новијег датума који се баве баш овом проблематиком.

Одабир нормирајућих константи $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$ у Теореми 1.1 може

[6]Бори́с Влади́мирович Гнеде́нко (1912-1995), совјетски математичар

се свести на:

$$\begin{aligned}
a_n = F^{\leftarrow}\left(1-\frac{1}{ne}\right) - F^{\leftarrow}\left(1-\frac{1}{n}\right), b_n = F^{\leftarrow}\left(1-\frac{1}{n}\right) \quad & \text{за } F \in D(G_0) \\
a_n = F^{\leftarrow}\left(1-\frac{1}{n}\right), b_n = 0 \quad & \text{за } F \in D(G_{1,\alpha}),\ \alpha > 0 \\
a_n = x_F - F^{\leftarrow}\left(1-\frac{1}{n}\right), b_n = x_F \quad & \text{за } F \in D(G_{2,\alpha}),\ \alpha > 0,
\end{aligned}$$

где је $F^{\leftarrow}$ квантил функција за F.

1.1.2 Теорија за стационарне случајне низове

Приликом рада са конкретним подацима, које би требало анализирати са екстремалног становишта, често се показује да претпоставке о независности опсервација у разматраном узорку и/или о истој расподели вероватноћа из које свака од њих потиче нису реалистичне. Стога се поставља питање да ли се класична теорија, која је заснована управо на овим претпоставкама, може проширити тако да важи и у наведеним општијим ситуацијама.

Најприродније уопштење низа независних, једнако расподељених случајних величина је *строго стационаран случајан низ.* Под строгом стационарношћу случајног низа $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ подразумева се инваријантност његових коначнодимензионих расподела у односу на тзв. транслацију времена, тј. важење једнакости

$$(X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_m}) \overset{d}{=} (X_{n_1+k}, X_{n_2+k}, \ldots, X_{n_m+k}) \tag{1.13}$$

за $\forall m \in \mathbb{N}$, сваки избор индекса $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ и $k \in \mathbb{N}$. Јасно је да су у оваквом случајном низу сви чланови једнако расподељени што је један од услова захтеваних у класичној теорији, али они овде могу бити међусобно зависни.

Није могуће изградити општу теорију екстремних вредности за све строго стационарне случајне низове с обзиром на то да облици зависности чланова датог низа могу бити најразличитији. Зато је потребно зависност, на известан начин, ограничити. Граничне теореме се доказују при одређеним претпоставкама о слабој зависности чланова разматраног строго стационарног случајног низа чији се индекси веома разликују.

Слаба зависност (може се користити и термин: помешаност) може се дефинисати на разне начине и одређена је тзв. *коефицијентима помешаности* који одсликавају меру зависности међу члановима строго стационарног случајног низа. Како су у теорији екстремних вредности од посебног интереса догађаји облика $\{X_j \leqslant u\}$, односно њихови пресеци и супротни догађаји, за потребе ове теорије користе се мање ограничавајуће (у односу рецимо на услов јаке помешаности који је формулисао Rosenblatt (1956)) дефиниције слабе зависности које укључују само такве догађаје.

Нека је (X_n) строго стационаран случајан низ са заједничком, недегенерисаном функцијом расподеле F и M_n случајна величина која представља максимум првих n чланова овог низа.

Дефиниција 1.3. Услов $\boldsymbol{D(u_n)}$ (Leadbetter (1974)) Нека је $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ реалан низ. Случајан низ (X_n) задовољава услов $D(u_n)$ ако за сваки природан број n и сваки избор индекса

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p < j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leqslant n$$

таквих да је $j_1 - i_p \geqslant l$, важи неједнакост

$$\left| P\left\{\max_{j\in A_1\cup A_2} X_j \leqslant u_n\right\} - P\left\{\max_{j\in A_1} X_j \leqslant u_n\right\} \cdot P\left\{\max_{j\in A_2} X_j \leqslant u_n\right\} \right| \leqslant \alpha_{n,l}, \quad (1.14)$$

где је $A_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, $A_2 = \{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$, $\alpha_{n,l}$ је монотоно нерастући по l и $\alpha_{n,l_n} \to 0$, при $n \to \infty$, за неки низ $l_n \to \infty$ код кога је $l_n = o(n)$.

Ово је глобални услов слабе зависности (ен. distributional mixing condition) и његова испуњеност обезбеђује асимптотску независност екстремалних догађаја који се односе на максимуме чланова посматраног случајног низа (X_n) чији су индексни скупови дисјунктни и међусобно довољно удаљени.

Дефиниција 1.4. Услов $\boldsymbol{D'(u_n)}$ (Loynes (1965)) Нека је $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ реалан низ. Случајан низ (X_n) задовољава услов $D'(u_n)$ ако важи

$$\varlimsup_{n\to\infty} n \cdot \sum_{j=2}^{[n/k]} P\{X_1 > u_n, X_j > u_n\} = o\left(\frac{1}{k}\right), \quad \text{при } k \to \infty. \quad (1.15)$$

Ово је локални услов чија испуњеност забрањује појављивање кластера, тј. груписање, екстремних вредности. Он у следећем смислу ограничава зависност чланова строго стационарног случајног низа чији су индекси блиски по својим вредностима: задовољеност услова $D^{'}(u_n)$ имплицира

$$E\left(\sum_{1\leqslant i<j<[n/k]} I_{\{X_i>u_n, X_j>u_n\}}\right) \leqslant \left[\frac{n}{k}\right] \sum_{j=2}^{[n/k]} EI_{\{X_1>u_n, X_j>u_n\}} \to 0$$

па је, у средњем, број појављивања заједничких прекорачења нивоа u_n од стране случајних парова (X_i, X_j), за довољно велико n, практично сведен на нулу.

Дефиниција 1.5. Услов $\boldsymbol{D(u_n, v_n)}$ Нека су $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ реални низови. Случајан низ (X_n) задовољава услов $D(u_n, v_n)$ ако за сваки природан број n и сваки избор подскупова A_1, A_2, B_1, B_2 скупа индекса $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да је $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ и

$$b - a \geqslant l, \text{ за све } a \in A_1 \cup A_2, \;\; b \in B_1 \cup B_2,$$

важи неједнакост

$$\begin{aligned}&\Bigg| P\left\{\max_{j\in A_1\cup B_1} X_j \leqslant u_n, \max_{j\in A_2\cup B_2} X_j \leqslant v_n\right\} \\ &-P\left\{\max_{j\in A_1} X_j \leqslant u_n, \max_{j\in A_2} X_j \leqslant v_n\right\} \cdot P\left\{\max_{j\in B_1} X_j \leqslant u_n, \max_{j\in B_2} X_j \leqslant v_n\right\}\Bigg| \leqslant \alpha_{n,l},\end{aligned}$$

где је $\alpha_{n,l}$ је монотоно нерастући по l и $\alpha_{n,l_n} \to 0$, при $n \to \infty$, за неки низ $l_n \to \infty$ код кога је $l_n = o(n)$.

Увођење овог услова очигледно је мотивисано једнодимензионим условом $D(u_n)$ и он представља његову модификацију/уопштење. Он је, ипак, као и $D(u_n)$, слабији од услова јаке помешаности. Слични услови могу се пронаћи у литератури из области теорије екстремних вредности где се обично користе за решавање вишедимензионих проблема који се појављују у једнодимензионој теорији. Први такав услов уведен је у раду Davis (1979) за потребе проучавања асимптотске заједничке расподеле максимума и минимума у строго стационарном случајном низу. Услов овог типа такође је формулисан у књизи Leadbetter et al. (1983) у циљу разматрања заједничке расподеле максимума чланова строго стационарног случајног низа на дисјунктним временским интервалима.

Нека је, даље, (X_n^*) низ независних, једнако расподељених случајних величина са заједничком функцијом расподеле F. Овакав низ назива се *пратећи низ* (за (X_n)) случајних величина. Нека је $M_n^* := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j^*$.

За стационарне случајне низове може се формулисати аналогон теореме о екстремалним типовима. Тај резултат садржан је у следећој теореми и доказан је у раду Leadbetter (1974).

Теорема 1.2. *Нека су (a_n) и (b_n), $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, низови константи и G недегенерисана функција расподеле, тако да важи*

$$P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} \to G(x), \quad \textit{при } n \to \infty, \tag{1.16}$$

за $\forall x \in C(G)$. Уколико за $\forall x \in \mathbb{R}$ и $u_n = a_n x + b_n$ важи услов $D(u_n)$, онда је G функција расподеле екстремних вредности.

Међутим, то не значи и да за граничну функцију расподеле H стандардизованог максимума M_n^* првих n чланова пратећег низа (X_n^*), са истим нормирајућим константама које се појављују у (1.16), важи $H \equiv G$. Заправо, при одређеним условима регуларности, за функције расподеле G и H тачна је једнакост

$$G(x) = (H(x))^{\theta}, \quad \text{за } \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.17}$$

где је $\theta \in (0, 1]$ константа која се назива *екстремални индекс.*

Напомена 1.3. Екстремални индекс се дефинише тако да је могуће и $\theta = 0$, што је дегенерисан али не и немогућ случај, значајан пре свега са теоријског становишта.

Примера ради, уколико постоје низови константи (a_n) и (b_n), $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тако да важи

$$P\left\{\frac{M_n^* - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} \to H(x), \quad \text{при } n \to \infty,$$

за $\forall x \in C(H)$ и неку недегенерисану функцију расподеле H, ако је, даље, задовољен услов $D(u_n)$ за $\forall x \in \mathbb{R}$ и $u_n = a_n x + b_n$, и ако $P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right\}$ конвергира, при $n \to \infty$, за бар једну тачку $x \in \mathbb{R}$, онда

$$P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} \to (H(x))^{\theta}, \quad \text{при } n \to \infty,$$

за неку константу $\theta \in [0, 1]$.

Екстремални индекс одражава степен зависности чланова строгог стационарног случајног низа, а вредност θ^{-1} може се интерпретирати као асимптотски очекиван број прекорачења нивоа u_n унутар временског интервала дужине $d_n = o(n)$, при услову да се догодило бар једно такво прекорачење (ен. limiting mean cluster size).

Ако су (a_n), (b_n) и (u_n), $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ и $u_n = a_n x + b_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, низови константи и за $\forall x \in \mathbb{R}$ важе услови $D(u_n)$ и $D'(u_n)$, у раду Leadbetter (1974), доказано је да онда

$$P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} \to G(x), \quad \text{при } n \to \infty,$$

важи за неку недегенерисану функцију расподеле G и $\forall x \in C(G)$ ако и само ако

$$P\left\{\frac{M_n^* - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} \to G(x), \quad \text{при } n \to \infty.$$

Формулације свих поменутих тврђења, заједно са доказима и образложењима, могу се наћи у трећем поглављу монографије Leadbetter et al. (1983).

Засебан део теорије екстремних вредности за строго стационарне случајне низове посвећен је строго стационарним Гаусовим[7] низовима.

Дефиниција 1.6. *Гаусов случајан процес* је случајан процес код кога су све коначнодимензионе расподеле нормалне.

Може се показати да је стандардна нормална расподела пример расподеле која припада области привлачења Гумбелове расподеле са нормирајућим константама

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{2\log n}}, \\ b_n &= \sqrt{2\log n} - \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log n}}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Нека је, у наставку, специјално, (X_n) строго стационаран Гаусов (може се, такође, користити и термин: нормалан) случајан низ за који важи $X_n \in \mathcal{N}(0,1)$, за свако $n \in \mathbb{N}$, и нека је (r_n) коваријациони низ, тј. $r_n = E(X_k X_{k+n})$, $n \in \mathbb{N}$. У раду Berman (1964) показано је да резултат аналоган поменутом (за низ независних случајних величина са заједничком $\mathcal{N}(0,1)$ расподелом) важи за овакав низ под врло слабим довољним условом који би требало да задовољава коваријациона функција датог низа (она суштински одређује све коначнодимензионе

[7] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), немачки математичар

расподеле датог случајног низа). Услов о коме се говори односи се на брзину конвергенције коваријационог низа (r_n) ка нули и гласи

$$r_n \log n \to 0, \quad \text{при } n \to \infty. \tag{1.19}$$

Ако је за коваријациони низ (r_n) случајног низа (X_n) испуњен услов (1.19) онда за $\forall x \in \mathbb{R}$ важи

$$P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} \to \exp(-e^{-x}), \quad \text{при } n \to \infty, \tag{1.20}$$

где су константе a_n и b_n задате једнакостима (1.18). Ово тврђење је главни екстремални резултат за строго стационарне нормалне случајне низове. Иста гранична теорема за максимум M_n првих n чланова низа (X_n) добија се уколико се уместо важења услова (1.19) претпостави да важи

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r_n^2 < +\infty. \tag{1.21}$$

При томе, не постоји импликација између ова два услова, али из сваког од њих следи слабији услов

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |r_k| \log k \exp(\gamma |r_k| \log k) \to 0, \quad \text{при } n \to \infty,$$

за неко $\gamma > 2$, чија испуњеност, заједно са претпоставком да $r_n \to 0$, при $n \to \infty$, обезбеђује да за низ (X_n) важе услови $D(u_n)$ и $D^{'}(u_n)$, где је (u_n) реалан низ одређен захтевом да низ $(n(1-\Phi(u_n)))$ буде ограничен (Leadbetter et al. (1978)).

Упркос томе што је, очигледно, могуће мало ослабити услов (1.19) испоставља се да је он, поред тога што је довољан, такорећи и потребан услов за важење (1.20). Наиме, ако $r_n \log n \to \nu > 0$, онда је гранична расподела линеарно стандардизованог максимума M_n, при $n \to \infty$, са нормирајућим константама a_n и b_n задатим једнакостима (1.18), конволуција Гумбелове и нормалне расподеле (Leadbetter et al. (1983)). Ако, пак, $r_n \log n \to +\infty$, монотоно за довољно велико n, и $r_n \to 0$, монотоно, онда је гранична расподела линеарно стандардизованог максимума M_n, при $n \to \infty$, али са новим нормирајућим константама

$$a_n = \sqrt{r_n},$$
$$b_n = \sqrt{1 - r_n} \cdot \left(\sqrt{2 \log n} - \frac{\log \log n + \log 4\pi}{2\sqrt{2 \log n}} \right),$$

стандардна нормална расподела (Mittal and Ylvisaker (1975)).

1.2 Граничне расподеле вишедимензионих екстрема

Вишедимензионо проширење теорије екстремних вредности у једнодимензионом случају, као што је раније речено, са собом носи различите нетривијалне тешкоће. Прва од њих је, свакако, дефинисање вишедимензионог екстремног догађаја, с обзиром на то да не постоји јединствено уређење вишедимензионих опсервација.

Barnett (1976) је разматрао четири различите категорије релација поретка у скупу вишедимензионих опсервација. Најкориснија од њих за теорију вишедимензионих екстремних вредности је тзв. *маргинално уређење*:
нека су дати d-димензиони вектори $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$; тада је релација $\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}$ дефинисана са $x_j \leqslant y_j$, за свако $j = 1, 2, \ldots, d$.

Требало би приметити да овако дефинисано уређење, међутим, није тотално уређење, тј. нису свака два вектора у простору $\mathbb{R}^d$ упоредива. Максимум коначног броја вектора је, овде, вектор чије су координате покомпонентни (ен. componentwise) максимуми.

За узорак $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$, обима n, d-димензионих опсервација $\boldsymbol{X}_j = (X_{j,1}, X_{j,2}, \ldots, X_{j,d})$, $j = 1, 2, \ldots, d$, *максимум* $\boldsymbol{M}_n := \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \boldsymbol{X}_j$ се дефинише са

$$\boldsymbol{M}_n = (M_{n,1}, M_{n,2}, \ldots, M_{n,d}) = \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_{j,1}, \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_{j,2}, \ldots, \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_{j,d} \right). \quad (1.22)$$

Напомена 1.4. У литератури се често користи и ознака: $M_{n,j} = \bigvee\limits_{i=1}^{n} X_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, d$, односно $\boldsymbol{M}_n = \bigvee\limits_{j=1}^{n} \boldsymbol{X}_j$.

Надаље ће се, осим ако изричито не буде речено другачије, подразумевати да се све операције и релације поретка између вектора, односно операција множења вектора константом, примењују покомпонентно.

Важно је приметити да резултујући максимум $\boldsymbol{M}_n$ обично сам није елемент узорка због чега се његова дефиниција може чинити вештачком. Без обзира на то, из проучавања овако задатог максимума произилази богата теорија са широким спектром статистичких алата, погодних за разне примене.

У зависности од потребе може се разматрати покомпонентни минимум уместо максимума. Наравно, као и у једнодимензионом случају резултати за минимум лако се могу дедуковати из оних добијених за максимум, и обрнуто, коришћењем једнакости

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \boldsymbol{X}_j = -\bigvee_{j=1}^{n}(-\boldsymbol{X}_j),$$

те ће у наставку, без губитка општости, тежиште бити искључиво на максимумима.

Нека је $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ узорак обима n, тј. нека су $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ независни, једнако расподељени d-димензиони случајни вектори са заједничком функцијом расподеле F. d-димензиона функција расподеле покомпонентног максимума $\boldsymbol{M}_n$ дата је, за $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, са

$$P\{\boldsymbol{M}_n \leqslant \boldsymbol{x}\} = P\{\boldsymbol{X}_j \leqslant \boldsymbol{x}, \text{за } j = 1, 2, \ldots, n\} = (F(\boldsymbol{x}))^n. \tag{1.23}$$

Слично као и у једнодимензионом случају потребно је некако стандардизовати $\boldsymbol{M}_n$ како би се добила нетривијална гранична расподела, када обим разматраног узорка n тежи бесконачности. Сва теорија која је развијена заснива се на егзистенцији области привлачења, па је формулација проблема следећа: да ли постоје низови вектора $(\boldsymbol{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\boldsymbol{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{a}_n > \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{b}_n \in \mathbb{R}^d$, тј. $a_{n,j} > 0$ и $b_{n,j} \in \mathbb{R}$, за свако $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, тако да важи

$$\begin{aligned} &P\left\{\frac{\boldsymbol{M}_n - \boldsymbol{b}_n}{\boldsymbol{a}_n} \leqslant \boldsymbol{x}\right\} \\ &= P\left\{\frac{M_{n,1} - b_{n,1}}{a_{n,1}} \leqslant x_1, \frac{M_{n,2} - b_{n,2}}{a_{n,2}} \leqslant x_2, \ldots, \frac{M_{n,d} - b_{n,d}}{a_{n,d}} \leqslant x_d\right\} \\ &= (F(\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_n))^n \xrightarrow{D} G(\boldsymbol{x}), \quad \text{при } n \to \infty, \end{aligned} \tag{1.24}$$

где је G d-димензиона функција расподеле, чије су (једнодимензионе) маргиналне расподеле недегенерисане.

Уколико постоје овакви нормирајући вектори $(\boldsymbol{a}_n)$ и $(\boldsymbol{b}_n)$ функција расподеле G зове се *вишедимензиона функција расподеле екстремих вредности*, а функција расподеле F припада (*вишедимензионој*) *области привлачења* (*за максимуме*) функције расподеле G, што се означава са $F \in D(G)$.

Важно је уочити и следеће. Нека су са F_j и G_j означене j-те маргиналне функције расподеле, редом, функција расподеле F и G. Како конвергенција у расподели низа случајних вектора у (1.24) имплицира конвергенцију у расподели одговарајућих координата (на основу теореме о непрекидном пресликавању у вишедимензионом случају), добија се да важи и

$$P\left\{\frac{M_{n,j} - b_{n,j}}{a_{n,j}} \leqslant x_j\right\} \to G_j(x_j), \quad \text{при } n \to \infty, j = 1, 2, \ldots, d, \tag{1.25}$$

за $\forall x_j \in C(G_j)$, тј.

$$(F_j(a_{n,j}x_j + b_{n,j}))^n \xrightarrow{D} G_j(x_j), \quad \text{при } n \to \infty, j = 1, 2, \ldots, d. \tag{1.26}$$

С обзиром на то да је, по претпоставци, G_j недегенерисана функција расподеле она је, истовремено, (једнодимензиона) функција расподеле екстремних вредности (на основу Теореме 1.1) и $F_j \in D(G_j)$, $j = 1, 2, \ldots, d$, а нормирајуће константе су баш оне дате на стр. 12. Како су маргиналне функције расподеле за функцију расподеле G непрекидне и она сама је, такође, непрекидна.

Слаба конвергенција сваке од d компоненти стандардизованог вектора $\boldsymbol{M}_n$ у (1.25), међутим, строго је слабија од конвергенције у расподели целог вектора, па је за важење обрнуте импликације, под претпоставком да су функције расподеле F_j непрекидне, довољан нпр. услов који се односи на конвергенцију структура зависности – копула.

Проучавање вишедимензионих екстрема је слојевито и може се суштински раздвојити на две компоненте: једна је анализа маргиналних расподела, а друга, знатно компликованија, јесте управљање структурама зависности. У наставку ће бити речи о обе теме с тим што би одмах требало поменути да се, за разлику од једнодимензионог случаја, вишедимензионе расподеле екстремних вредности не могу објединити унутар параметарске фамилије са коначнодимензионим параметарским вектором.

Два појма која је, на овом месту, погодно поменути су максимум стабилност и максимум бесконачна дељивост вишедимензионе функције расподеле.

Дефиниција 1.7. d-димензиона функција расподеле H је максимум стабилна (кратко *M-стабилна*) ако једнакост

$$(H(\boldsymbol{a}_n \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_n))^n = H(\boldsymbol{x}), \quad \text{за } \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.27}$$

важи за погодно одабране векторе $\boldsymbol{a}_n > \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{b}_n \in \mathbb{R}^d$, и свако $n \geqslant 2$.

Дефиниција 1.8. d-димензиона функција расподеле H је *максимум бесконачно дељива* (кратко *M-бесконачно дељива*) ако је функција $H^{1/k}$ функција расподеле за свако $k \in \mathbb{N}$.

Прво, уколико важи (1.24), на основу Хинчинове теореме (Теорема 1.3.5. у књизи Младеновић (2002)) следи да, за $\forall k \geqslant 2$, постоје вектори $\boldsymbol{\alpha}_k > \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\beta}_k \in \mathbb{R}^d$, тако да $\dfrac{\boldsymbol{a}_{nk}}{\boldsymbol{a}_n} \to \boldsymbol{\alpha}_k$ и $\dfrac{\boldsymbol{b}_{nk} - \boldsymbol{b}_n}{\boldsymbol{a}_n} \to \boldsymbol{\beta}_k$, при $n \to \infty$, и тачна је једнакост

$$(G(\boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}_k))^k = G(\boldsymbol{x}), \quad \text{за } \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.28}$$

Према томе, јасно је да свака d-димензиона M-стабилна функција расподеле припада сопственој области привлачења, а да се класе функција расподела екстремних вредности и M-стабилних функција расподеле са недегенерисаним маргиналним функцијама расподеле поклапају.

Друго, последица једнакости (1.28) је чињеница да је $G^{1/k}$ функција расподеле за свако $k \in \mathbb{N}$, што, по дефиницији, значи да је G и M-бесконачно дељива.

1.3 Карактеризација вишедимензионих расподела екстремних вредности

Да би се извршила карактеризација вишедимензионих расподела екстремних вредности погодно је „стандардизовати" читав проблем тако да гранична функција расподеле G из (1.24) има тачно одређене, исте, једнодимензионе маргиналне функције расподеле. Нема губитка општости уколико се одабере нека специфична расподела као једнодимензиона маргинална расподела, што је показано у књизи Resnick (2008), но требало би имати у виду да неке особине и/или карактеризација постају најочигледније за посебан избор исте. Дакле, одабир маргиналне расподеле, сам по себи, није од значаја, али је уобичајено и посебно корисно радити са тзв. стандардном Фрешеовом $G_{1,1}$ расподелом (датом са (1.6), $\alpha = 1$). И ова и друге репрезентације, у вези са другачијим изборима једнодимензионе маргиналне расподеле, биће укратко приказане. У сваком случају, стандардизација проблема омогућава јасно разграничење понашања маргиналних расподела и структура зависности, и, након тога, фокусирање искључиво на проучавање зависности.

Нека је $\boldsymbol{Y}$ d-димензиони случајан вектор са заједничком функцијом расподеле G, која има непрекидне једнодимензионе маргиналне расподеле. Уколико се изврши трансформација

$$\begin{aligned} G_*(\boldsymbol{y}) &= G\left(\left(-\frac{1}{\log G_1}\right)^{\leftarrow}(y_1), \left(-\frac{1}{\log G_2}\right)^{\leftarrow}(y_2), \ldots, \left(-\frac{1}{\log G_d}\right)^{\leftarrow}(y_d)\right) \\ &= G(G_1{}^{\leftarrow}(e^{-1/y_1}), G_2{}^{\leftarrow}(e^{-1/y_2}), \ldots, G_d{}^{\leftarrow}(e^{-1/y_d})), \quad \boldsymbol{y} \in (\boldsymbol{0}, +\infty), \end{aligned} \tag{1.29}$$

онда је G_* функција расподеле случајног вектора

$$\left(-\frac{1}{\log G_1(Y_1)}, -\frac{1}{\log G_2(Y_2)}, \ldots, -\frac{1}{\log G_d(Y_d)}\right)$$

и њене једнодимензионе маргиналне расподеле су стандардне Фрешеове, тј. $G_{*j}(y) = G_{1,1}(y)$ за $\forall y > 0$. При томе, G је вишедимензиона функција расподеле екстремних вредности ако и само ако је и G_* таква. На описани начин изводи се жељена стандардизација маргиналних расподела вишедимензионе функције расподеле екстремних вредности тако да свака од њих буде стандардна Фрешеова, уз очување својства екстремних вредности.

Алтернативно, маргинална функција расподеле G_j, $j = 1, 2, \ldots, d$, функције расподеле екстремних вредности G може се представити у облику генералисане функције расподеле екстремних вредности као

$$G_j(y_j) = \exp\left(-(1 + \gamma_j y_j)^{-1/\gamma_j}\right), \quad 1 + \gamma_j y_j > 0,$$

где је $\gamma_j \in \mathbb{R}$ одговарајући маргинални индекс раподеле екстремних вредности, што омогућава да се G_* запише и као

$$G_*(\boldsymbol{y}) = G\left(\frac{y_1^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \frac{y_2^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2}, \ldots, \frac{y_d^{\gamma_d} - 1}{\gamma_d}\right).$$

За више детаља о овом приступу погледати Поглавље 6 у књизи de Haan and Ferreira (2006).

Расподела екстремних вредности, односно одговарајућа функција расподеле, чије су све маргиналне расподеле стандардне Фрешеове расподеле назива се *једноставна*.

1.3.1 Репрезентације вишедимензионе функције расподеле екстремних вредности

- **Експонент мера**

Савремена вишедимензиона теорија екстремних вредности углавном се заснива на карактеризацији M-бесконачно дељивих функција расподеле, коју су установили Balkema and Resnick (1977) за дводимензионе функције расподеле. Резултати који су ту добијени без проблема се могу проширити са дводимензионог случаја тако да важе за произвољан број димензија $d > 2$.

Већ је констатовано да је d-димензиона функција расподеле екстремних вредности G M-бесконачно дељива па постоји *експонент мера* μ на $\mathcal{B}_{[-\boldsymbol{\infty},+\boldsymbol{\infty})}$, тј. μ је σ-коначна мера и задовољава

$$\begin{aligned} &\mu\left(\mathbb{R}^{j-1} \times [-\infty,+\infty) \times \mathbb{R}^{d-j}\right) = +\infty, && \text{за } j \leqslant d \\ &\mu\left((-\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{x}_0]^{\complement}\right) < +\infty, && \text{за неко } \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d \\ &G(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\mu\left((-\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{x}]^{\complement}\right)\right), && \text{за } \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Нека је са μ_* означена експонент мера једноставне функције расподеле екстремних вредности G_*, дефинисане трансформацијом (1.29). Без губитка општости ова мера може се одабрати тако да буде концентрисана на скупу $E := [\mathbf{0},+\boldsymbol{\infty})\backslash\{\mathbf{0}\}$, тј. дефинисана на одређеној σ-алгебри његових подскупова, што обезбеђује њену јединственост. Тада је

$$V_*(\boldsymbol{y}) := -\log G_*(\boldsymbol{y}) = \mu_*([\mathbf{0},+\boldsymbol{\infty})\backslash[\mathbf{0},\boldsymbol{y}]), \quad \text{за } \boldsymbol{y} \in E. \tag{1.30}$$

С обзиром на то да је G_* M-стабилна функција расподеле, важи

$$G_*^k(k\boldsymbol{y}) = G_*(\boldsymbol{y}), \quad \text{за } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{N},$$

па, посебно, важи и

$$G_*^k(k\boldsymbol{y}) = G_*^m(m\boldsymbol{y}), \quad \text{за произвољне } k, m \in \mathbb{N},$$

односно

$$G_*^r(r\boldsymbol{y}) = G_*(\boldsymbol{y}), \quad \text{за произвољан позитиван рационалан број } r.$$

На основу непрекидности функције G_* следи и једнакост

$$G_*^t(t\boldsymbol{y}) = G_*(\boldsymbol{y}), \quad \text{за } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d, t > 0. \tag{1.31}$$

Из једнакости (1.30) и (1.31) добија се, као последица, да експонент мера μ_*, која одговара функцији расподеле G_*, задовољава

$$\mu_*([\mathbf{0}, +\infty) \backslash [\mathbf{0}, \boldsymbol{y}]) = t\mu_*([\mathbf{0}, +\infty) \backslash [\mathbf{0}, t\boldsymbol{y}]) = t\mu_*(t([\mathbf{0}, +\infty) \backslash [\mathbf{0}, \boldsymbol{y}])) \tag{1.32}$$

за свако $\boldsymbol{y} \in E$ и $t > 0$. Лако се може установити да једнакост (1.32) важи и за све d-димензионе квадре садржане у E, и не само то. Искористи се ознака $tB := \{t\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y} \in B\}$, где је $B \subset E$. На основу теорије мере (погледати нпр. Поглавље 3 у књизи Арсеновић ет ал. (1998)) једнакост

$$\mu_*(tB) = \frac{1}{t}\mu_*(B) \tag{1.33}$$

тачна је за сваки Борелов[8] скуп $B \in \mathcal{B}(E)$ и произвољно $t > 0$, где је $\mathcal{B}(E)$ Борелова σ-алгебра подскупова скупа E. Својство мере садржано у једнакости (1.33) назива се *својство хомогености* и оно је карактерише.

На овом месту требало би поменути и *стабилну функцију зависности репова* (ен. stable tail dependence function) означену са l, која је задата са

$$l(\boldsymbol{y}) := V_*\left(\frac{1}{\boldsymbol{y}}\right) = \mu_*\left([\mathbf{0}, +\infty) \backslash \left[\mathbf{0}, \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \ldots, \frac{1}{y_d}\right)\right]\right), \quad \text{за } \boldsymbol{y} \in E. \tag{1.34}$$

Она описује расподелу вишедимензионих екстрема на еквивалентан начин као што то чини функција експонент мере V_* дефинисана у (1.30). Корисно запажање о овим функцијама јесте да је l хомогена функција реда 1, а V_*, такође, хомогена али реда -1.

- **Де Хан[9] – Ресникова[10] репрезентација**

Нека су задате две произвољне норме $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на $\mathbb{R}^d$, тако да је $\|\boldsymbol{x}\|_i$ растојање вектора $\boldsymbol{x}$ од $\mathbf{0}$ индуковано одговарајућом нормом, $i = 1, 2$.

[8] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956), француски математичар

[9] Laurens de Haan (1937-), холандски математичар

[10] Sidney Resnick, амерички математичар

Уобичајено је да се ради са L^p-нормама: $\|\boldsymbol{x}\| = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_d|^p)^{1/p}$, где је $1 \leqslant p < +\infty$, или максимум L^∞-нормом: $\|\boldsymbol{x}\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant d} |x_j|$.

Нека је $S_E := \{\boldsymbol{u} \in E : \|\boldsymbol{u}\|_2 = 1\}$ јединична сфера снабдевена нормом $\|\cdot\|_2$. Даље, означе се са: $r := \|\boldsymbol{y}\|_1$ и $\boldsymbol{w} := \dfrac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_2}$, редом, *радијални* и *угаони део* d-димензионог вектора $\boldsymbol{y} \in E$, и са $T(\boldsymbol{y}) = (r, \boldsymbol{w})$ дефинише пресликавање $T : E \longrightarrow (0, +\infty) \times S_E$, које представља трансформацију вектора у своје (псеудо)поларне координате у односу на норме $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Како је пресликавање T бијекција постоји његов инверз $T^{-1}(r, \boldsymbol{w}) = \dfrac{r \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|_1}$. Сада је могуће увести меру H_* са

$$H_*(A) = \mu_* \left(\left\{ \boldsymbol{y} \in E : \|\boldsymbol{y}\|_1 \geqslant 1, \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_2} \in A \right\} \right), \tag{1.35}$$

где је A Борелов подскуп скупа S_E. Мера H_* назива се *спектрална мера*, а у литератури се помиње и као угаона мера.

Релација хомогености (1.33), која важи за меру μ_*, имплицира једнакост

$$\mu_* \left(\left\{ \boldsymbol{y} \in E : \|\boldsymbol{y}\|_1 \geqslant r, \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_2} \in A \right\} \right) = \frac{H_*(A)}{r},$$

за $r > 0$ и Борелов подскуп скупа S_E означен са A, а она управо указује на чињеницу да се експонент мера μ_* може факторизовати на познату функцију радијалне компоненте r и меру H_* угаоне компоненте $\boldsymbol{w}$. Та два њена чиниоца не зависе један од другог. Ово својство мере μ_* познато је као *спектрална декомпозиција* и записује се као

$$\mu_* \circ T^{-1}(dr, d\boldsymbol{w}) = \frac{1}{r^2} dr H_*(d\boldsymbol{w}), \tag{1.36}$$

где је $r > 0$, $\boldsymbol{w} \in S_E$. Први су га формулисали de Haan and Resnick (1977), који су разматрали специјалан случај када су обе норме једнаке стандардној еуклидској норми, тј. L^2-норми.

Суштински резултат садржан је у тврђењу да се свака једноставна функција расподеле екстремних вредности G_* може представити у облику

$$G_*(\boldsymbol{y}) = \exp \left(- \int_{S_E} \bigvee_{j=1}^{d} \frac{w_j}{y_j \|\boldsymbol{w}\|_1} H_*(d\boldsymbol{w}) \right), \quad \text{за } \boldsymbol{y} \in [\boldsymbol{0}, +\boldsymbol{\infty}), \tag{1.37}$$

при чему је спектрална мера H_* коначна и задовољава једнакости

$$\int\limits_{S_E} \frac{w_j}{\|\boldsymbol{w}\|_1} H_*(d\boldsymbol{w}) = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, d. \tag{1.38}$$

Захтев да све маргиналне расподеле функције расподеле G_* буду баш стандардне Фрешеове еквивалентан је једнакости (1.38). Како се на меру H_* не намећу никаква додатна ограничења не постоји коначна параметризација за H_*.

Коначност мере H_* следи из једнакости (1.38) и чињенице да су све норме на $\mathbb{R}^d$ еквивалентне.

Тачан је и обрнут смер, тј. свака позитивна и коначна мера H_* за коју важи (1.38) је спектрална мера једноставне d-димензионе функције расподеле екстремних вредности G_* дате једнакошћу (1.37).

Преглед спектралне декомпозиције за неке конкретне изборе норми $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ може се наћи у књизи Beirlant et al. (2004).

- **Спектрална репрезентација**

У теорији вероватноћа добро је позната и доста примењивана тзв. *метода инверзне функције* (ен. probability integral transform), која се користи за генерисање (псеудо)случајних бројева из задате расподеле. Нека је $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m)$ Лебегов[11] простор вероватноћа и са U означено идентичко пресликавање на сегменту $[0,1]$ (приметити да уколико се U посматра као случајна величина, онда она има равномерну расподелу на сегменту $[0,1]$). Уколико је са F означена функција расподеле којој одговара вероватносна мера Q, онда је $F^{\leftarrow}(U)$ случајна величина, у истом простору вероватноћа, која има функцију расподеле F.

Описана метода може се уопштити тако да буде примењива на вероватносну меру Q, дефинисану на Бореловој σ-алгебри подскупова произвољног комплетног и сепарабилног метричког простора S. Наиме, постоји случајан елемент $f : [0,1] \longrightarrow S$ (претпоставља се да је у основи Лебегов простор вероватноћа), тако да важи

$$Q = m \circ f^{-1} \tag{1.39}$$

(погледати Теорему 3.2. у књизи Billingsley (1971)).

[11]Henri Léon Lebesgue (1875-1941), француски математичар

Овај резултат се, затим, може применити на Де Хан – Ресникову репрезентацију једноставне функције расподеле екстремних вредности G_*, дату у једнакости (1.37), тако што се стави

$$Q := \frac{H_*}{H_*(S_E)}, \tag{1.40}$$

где је H_* спектрална мера, добијена уз претпоставку да су обе одабране норме исте. Тада је Q вероватносна мера на S_E.

На основу једнакости (1.39) добија се да постоји случајан вектор $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_d)$, $\boldsymbol{f} : [0,1] \longrightarrow S_E$, тако да d-димензиони случајан вектор $(f_1(U), f_2(U), \dots, f_d(U))$, $U \in \mathcal{U}[0,1]$, има расподелу вероватноћа Q. Ово имплицира постојање *спектралне репрезентације*

$$\begin{aligned} G_*(\boldsymbol{y}) &= \exp\left(-H_*(S_E)\int\limits_{S_E}\bigvee_{j=1}^{d}\frac{w_j}{y_j}Q(d\boldsymbol{w})\right) \\ &= \exp\left(-H_*(S_E)\int\limits_0^1\bigvee_{j=1}^{d}\frac{f_j(t)}{y_j}dt\right) \\ &= \exp\left(-\int\limits_0^1\bigvee_{j=1}^{d}\frac{\tilde{f}_j(t)}{y_j}dt\right), \end{aligned} \tag{1.41}$$

при чему ненегативне функције $\tilde{f}_j := H_*(S_E)f_j$, које се зову *спектралне функције*, задовољавају једнакости $\int\limits_0^1 \tilde{f}_j(t)dt = 1$, $j = 1, 2, \dots, d$.

Наведени резултат је специјалан случај спектралне репрезентације M-стабилних случајних процеса (за више детаља погледати de Haan (1984) и de Haan and Pickands (1986)).

Важи и обрнуто, тј. ако постоје ненегативне, Лебег интеграбилне функције $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_d$ на $[0,1]$, за које важи $\int\limits_0^1 \tilde{f}_j(t)dt = 1$, $j = 1, 2, \dots, d$, и G_* је функција из једнакости (1.41), онда је G_* једноставна d-димензиона функција расподеле екстремних вредности.

- **Нехомоген Пуасонов[12] процес**

Вишедимензиона функција расподеле G_* је једноставна функција расподеле екстремних вредности ако и само ако постоји нехомоген

[12] Siméon Denis Poisson (1781-1840), француски математичар

Пуасонов процес $N = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_{(T_j, \boldsymbol{Z}_j)}$, дефинисан на $(0, +\infty) \times E$, са мером интензитета Λ датом са $\Lambda((0,t] \times B) = t\mu_*(B)$, где је $t > 0$ и $B \in \mathcal{B}(E)$, при чему је

$$G_*(\boldsymbol{y}) = P\{\boldsymbol{Y}(1) \leqslant \boldsymbol{y}\}, \quad \text{за } \boldsymbol{y} \in E, \tag{1.42}$$

а $\boldsymbol{Y}(1) := \sup\{\boldsymbol{Z}_j : T_j \leqslant 1, j \in \mathbb{N}\}$; μ_* је мера из формуле (1.35), уз претпоставку да су обе одабране норме исте; H_* је одговарајућа спектрална мера.

Дефиниција 1.9. Нека је S подскуп коначнодимензионог реалног простора и $\mathcal{S}$ одговарајућа Борелова σ-алгебра генерисана отвореним скуповима у S. *Диракова*[13] *мера* ε_x, за $x \in S$, дефинише се са

$$\varepsilon_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in A \\ 0, & \text{ако } x \notin A \end{cases} \quad \text{где је } A \in \mathcal{S}.$$

1.3.2 Дводимензиони случај

Ограничавање на случај када је $d = 2$, тј. када се ради са дводимензионим случајним векторима, омогућава далеко детаљније проучавање њихових расподела, у смислу екстремалног понашања.

Најстарије карактеризације дводимензионих расподела екстремних вредности датирају са краја педесетих и почетка шездесетих година XX века и налазе се у радовима:

- Tiago de Oliveira (1958)

$$G_*(y_1, y_2) = (G_{1,\alpha}(y_1) G_{1,\alpha}(y_2))^{\nu(\log y_2 - \log y_1)}, \quad y_1, y_2 > 0, \tag{1.43}$$

  где је ν одговарајућа тзв. функција зависности;

- Geffroy (1958/59)

$$G_*(y_1, y_2) = \exp\left(-\frac{1}{y_2}\left(1 + \varphi\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right)\right), \quad y_1, y_2 > 0, \tag{1.44}$$

  где је φ функција која се може задати преко стабилне функције зависности репова l, дате у (1.34), са $\varphi(v) = l(v, 1) - 1$, $v > 0$;

[13]Paul Dirac (1902-1984), британски теоријски физичар

– Sibuya (1960)

$$G_*(y_1, y_2) = \exp\left(-\frac{1}{y_1}\left(1 + \chi\left(\frac{y_1}{y_2}\right)\right) - \frac{1}{y_2}\right), \quad y_1, y_2 > 0, \tag{1.45}$$

где је χ функција која се, такође, може задати преко стабилне функције зависности репова l са $\chi(v) = l(1, v) - (1 + v)$, $v > 0$;

– Gumbel (1962)

ако су $G_{B_1}, G_{B_2}, \dots, G_{B_m}$ познате дводимензионе функције расподеле екстремних вредности са стандардним Фрешеовим маргиналним расподелама, онда је њихова пондерисана геометријска средина

$$(G_{B_1}(y_1, y_2))^{\beta_1}(G_{B_2}(y_1, y_2))^{\beta_2} \dots (G_{B_m}(y_1, y_2))^{1-\beta_1-\beta_2-\dots-\beta_{m-1}},$$

$y_1, y_2 > 0$, $0 < \beta_j < 1$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $1 - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{m-1} > 0$, такође, дводимензиона функција расподеле екстремних вредности са стандардним Фрешеовим маргиналним расподелама.

Са G_* свуда је означена једноставна дводимензиона функција расподеле екстремних вредности.

На основу једнакости (1.29) очигледно је да важи

$$G(y_1, y_2) = G_*\left(-\frac{1}{\log G_1(y_1)}, -\frac{1}{\log G_2(y_2)}\right), \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

где је G дводимензиона функција расподеле екстремних вредности са маргиналним функцијама расподеле G_1 и G_2, што омогућава да се формуле (1.43)–(1.45) запишу у мало општијем облику. То је корисно имајући у виду да су и у дводимензионом контексту маргиналне расподеле у другом плану у односу на структуре зависности.

Репрезентација коју је дао Pickands (1981)

$$G_*(y_1, y_2) = \exp\left(-\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) A\left(\frac{y_1}{y_1 + y_2}\right)\right), \quad y_1, y_2 > 0, \tag{1.46}$$

међутим, показала се знатно погоднијом од претходних. Ту је A тзв. *Пикандсова*[14] *функција зависности* која у потпуности одређује стабилну функцију зависности репова l са

$$l(v_1, v_2) = (v_1 + v_2) A\left(\frac{v_2}{v_1 + v_2}\right), \quad v_1, v_2 > 0, \text{ при чему } v_1 + v_2 > 0.$$

[14] James Pickands III, амерички математичар

Заправо, важи

$$A(t) = l(1-t, t), \quad t \in [0, 1],$$

па се Пикандсова функција зависности може схватити као рестрикција стабилне функције зависности репова на јединични једнодимензиони симплекс.

Дефиниција 1.10. Јединични $(d-1)$-димензиони *симплекс*, у ознаци S_d, је подскуп од $\mathbb{R}^d$ дефинисан са

$$S_d = \{\boldsymbol{w} \in [\mathbf{0}, +\boldsymbol{\infty}) : w_1 + w_2 + \cdots + w_d = 1\}.$$

Лако се да проверити да је A непрекидна, конвексна функција, чији је домен сегмент $[0, 1]$ а кодомен сегмент $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, при чему је неједнакост $\max\{t, 1-t\} \leqslant A(t)$ тачна за $\forall t \in [0, 1]$.

Спектрална мера H_* из (1.35), за произвољан избор норми $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на $\mathbb{R}^2$, може се довести у везу са функцијом A следећом једнакошћу

$$A(t) = \int\limits_{S_E} \max\left\{(1-t)\frac{w_1}{\|(w_1, w_2)\|_1}, t\frac{w_2}{\|(w_1, w_2)\|_1}\right\} H_*(d(w_1, w_2)).$$

За функцију зависности ν из (1.43) важи

$$\nu\left(\log\frac{1-v}{v}\right) = A(v), \quad 0 < v < 1,$$

што је показао Obretenov (1991), а бавио се и уопштењима постојећих функција зависности на случај када је број димензија простора у коме се ради већи од два.

1.3.3 Други избори маргиналних расподела

Нека у наставку d-димензиони случајан вектор $\boldsymbol{Y}$ има функцију расподеле екстремних вредности G.

$\star$ **Експоненцијална расподела као маргинална расподела**

У раду Pickands (1981) као маргинална расподела одабрана је стандардна експоненцијална $\epsilon(1)$ расподела, која се може појавити као једнодимензиона расподела екстремних вредности, на одговарајући начин, стандардизованог минимума. Тада случајан вектор

$$(-\log G_1(Y_1), -\log G_2(Y_2), \ldots, -\log G_d(Y_d))\,,$$

добијен након трансформације вектора $\boldsymbol{Y}$, има вишедимензиону функцију расподеле екстремних вредности за минимум, означену са G_{**}, при чему су њене једнодимензионе маргиналне расподеле стандардне експоненцијалне.

Дефиниција 1.11. Нека је $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_d)$ случајан вектор са заједничком, d-димензионом функцијом расподеле H. Са $\overline{H}$ означена је *функција преживљавања* која одговара функцији расподеле H, и која је дефинисана са

$$\overline{H}(\boldsymbol{z}) = P\{Z_1 \geqslant z_1, Z_2 \geqslant z_2, \ldots, Z_d \geqslant z_d\}, \quad \text{за } \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d.$$

Важно је приметити да је за $d = 1$ функција преживљавања уствари десни реп дате функције расподеле и да ту важи $\overline{H}(z) = 1 - H(z)$, што за $d \geqslant 2$, у општем случају, није тачно.

Заједничка функција преживљавања $\overline{G}_{**}$ дата је са

$$\overline{G}_{**}(\boldsymbol{y}) = \exp(-l(\boldsymbol{y})), \quad \text{за } \boldsymbol{y} \in E, \tag{1.47}$$

где је l, као и раније, стабилна функција зависности репова и дата је са $l(\boldsymbol{y}) = \int\limits_{S_E} \bigvee\limits_{j=1}^{d} (w_j y_j) H_*(d\boldsymbol{w})$, а H_* је спектрална мера, уз претпоставку да су обе одабране норме исте и да је, конкретно, у питању L^1-норма. Тада је S_E јединични $(d-1)$-димензиони симплекс.

Једнакост (1.47) садржи Пикандсову репрезентацију минимум стабилне вишедимензионе експоненцијалне функције расподеле. За више детаља погледати Поглавље 6 у књизи Joe (1997).

⋆ Вејбулова расподела као маргинална расподела

У књизи Falk et al. (2011) дат је приказ Пикандсове репрезентације али са стандардном Вејбуловом $G_{2,1}$ расподелом (датом са (1.7), $\alpha = 1$) као маргиналном.

Лако се показује да уколико случајна величина Z има $\epsilon(1)$ расподелу, случајна величина V, дата са $V = -Z$, има стандардну

Вејбулову расподелу, па је, на основу (1.47), вредност функције расподеле случајног вектора

$$(\log G_1(Y_1), \log G_2(Y_2), \ldots, \log G_d(Y_d)),$$

у тачки $\boldsymbol{y} \in (-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{0})$, тј. вероватноћа

$$P\{\log G_1(Y_1) \leqslant y_1, \log G_2(Y_2) \leqslant y_2, \ldots, \log G_d(Y_d) \leqslant y_d\},$$

једнака

$$\exp(-l(-\boldsymbol{y})). \tag{1.48}$$

Наведени случајан вектор има жељене стандардне Вејбулове маргиналне расподеле.

Тако се стиже и до поменуте Пикандсове репрезентације којом се тврди да је дата функција M-стабилна d-димензиона функција расподеле са стандардним Вејбуловим маргиналним расподелама ако и само ако је њена вредност у тачки $\boldsymbol{y} \in (-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{0})$ једнака

$$\exp\left(\int\limits_{S_E} \bigwedge_{j=1}^{d} (x_j y_j)\mu(d\boldsymbol{x})\right), \tag{1.49}$$

при чему је μ коначна мера на јединичном $(d-1)$-димензионом симплексу означеном са S_E, са својством

$$\int\limits_{S_E} x_j \mu(d\boldsymbol{x}) = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, d.$$

Овде се, за $d > 2$, на аналоган начин као у дводимензионом случају, може увести појам Пикандсове функције зависности A, чији је домен сада скуп $\left\{(t_1, t_2, \ldots, t_{d-1}) \in [0,1]^{d-1} : \sum_{j=1}^{d-1} t_j \leqslant 1\right\}$, а кодомен сегмент $\left[\frac{1}{d}, 1\right]$, и, као тамо, схватити као рестрикција стабилне функције зависности репова на јединични $(d-1)$-димензиони симплекс S_E. Falk et al. (2011) приказују бројне особине које поседује ова функција, од којих је свакако најважнија могућност карактеризације случајева независности и потпуне зависности (погледати стр. 39) случајних величина $Y_1, Y_2, \ldots, Y_d$, које су компоненте случајног вектора $\boldsymbol{Y}$ са функцијом расподеле екстремних вредности G.

⋆ **Гумбелова расподела као маргинална расподела**

Стандардизовање проблема тако да се добије Гумбелова G_0 расподела (дата са (1.5)) као маргинална било је уобичајено у раним данима развоја теорије вишедимензионих екстремних вредности, вероватно под утицајем Гумбелове класичне монографије из 1958. године.

Лако се показује да уколико случајна величина Z има $\epsilon(1)$ расподелу, случајна величина W, дата са $W = -\log Z$, има Гумбелову расподелу, па је вредност функције расподеле случајног вектора

$$(-\log(-\log G_1(Y_1)), -\log(-\log G_2(Y_2)), \ldots, -\log(-\log G_d(Y_d)))\,,$$

у тачки $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ једнака

$$\exp(-l(e^{-y_1}, e^{-y_2}, \ldots, e^{-y_d})). \tag{1.50}$$

Наведени случајан вектор има жељене Гумбелове маргиналне расподеле.

⋆ **Равномерна расподела као маргинална расподела**

Актуелан приступ, који омогућава да се вишедимензионе структуре зависности сагледавају и проучавају независно од једнодимензионих маргиналних расподела, састоји се у коришћењу копуле. У најкраћем, копула је вишедимензиона функција расподеле, чија је свака једнодимензиона маргинална расподела – равномерна $\mathcal{U}[0,1]$ расподела, и која суштински резимира структуру зависности.

Нека је F d-димензиона функција расподеле, при чему је њена j-та једнодимензиона маргинална расподела, као и до сада, означена са F_j, $j = 1, 2, \ldots, d$; *копула* за F, која се означава са C_F, је функција расподеле $C_F : (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \longrightarrow [0,1]$ са $\mathcal{U}[0,1]$ маргиналним расподелама, за коју важи

$$F(\boldsymbol{y}) = C_F(F_1(y_1), F_2(y_2), \ldots, F_d(y_d)), \quad \text{за } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.51}$$

Уколико су маргиналне функције расподеле F_j, $j = 1, 2, \ldots, d$, непрекидне онда је копула C_F једнозначно одређена и дата је са

$$C_F(\boldsymbol{u}) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2), \ldots, F_d^{\leftarrow}(u_d)), \quad \text{за } \boldsymbol{u} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]. \tag{1.52}$$

Овај резултат почива на два својства једнодимензионих функција расподеле: прво својство је већ описано код методе инверзне функције (ради подсећања – ако су H и $H^{\leftarrow}$, редом, дата функција расподеле и њена квантил функција, и $U \in \mathcal{U}(0,1)$, онда $H^{\leftarrow}(U) \stackrel{d}{=} H$), а друго је својство непрекидних функција расподеле, које се састоји у томе да ако случајна величина V има непрекидну функцију расподеле H онда случајна величина $H(V)$ има $\mathcal{U}(0,1)$ расподелу.

Стога, ако случајан вектор $\boldsymbol{Z}$ има d-димензиону функцију расподеле F са непрекидним маргиналним расподелама онда је C_F функција расподеле случајног вектора $(F_1(Z_1), F_2(Z_2), \ldots, F_d(Z_d))$ и, обрнуто, ако случајан вектор $\boldsymbol{W}$ има d-димензиону функцију расподеле C_F онда случајан вектор $(F_1^{\leftarrow}(W_1), F_2^{\leftarrow}(W_2), \ldots, F_d^{\leftarrow}(W_d))$ има функцију расподеле F.

Копула за d-димензиону функцију расподеле екстремних вредности G, коју има случајан вектор $\boldsymbol{Y}$ са почетка, је, дакле, функција расподеле d-димензионог случајног вектора $(G_1(Y_1), G_2(Y_2), \ldots, G_d(Y_d))$ и може се изразити преко стабилне функције зависности репова l једнакошћу

$$C_G(\boldsymbol{u}) = \exp(-l(-\log u_1, -\log u_2, \ldots, -\log u_d)), \quad \text{за } \boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]. \tag{1.53}$$

По дефиницији, фамилија тзв. *копула екстремних вредности* (погледати нпр. Дефиницију 6.2.1. у Gudendorf and Segers (2010)) поклапа се са скупом копула за функције расподеле екстремних вредности, па C_G задовољава својство стабилности

$$C_G(\boldsymbol{u}) = \left(C_G\left(u_1^{1/m}, u_2^{1/m}, \ldots, u_d^{1/m}\right)\right)^m, \tag{1.54}$$

за свако $m \in \mathbb{N}$ и сваку тачку $\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$.

Важи и обрнуто, свака копула за коју је тачна једнакост (1.54) је копула за неку d-димензиону функцију расподеле екстремних вредности.

1.4 Област привлачења вишедимензионе расподеле екстремних вредности

Док је у претходна два одељка у фокусу била класа вишедимензионих расподела екстремних вредности, односно задатак карактеризације граничне функције расподеле G у

$$(F(\boldsymbol{a}_n \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_n))^n \to G(\boldsymbol{x}), \quad \text{при } n \to \infty, \tag{1.55}$$

за $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, где су $\boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_n$ низови вектора, $\boldsymbol{a}_n > \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{b}_n \in \mathbb{R}^d$, за свако $n \in \mathbb{N}$, овде се формулише низ еквивалентних описа области привлачења $D(G)$ d-димензионе функције расподеле екстремних вредности G, до којих доводе управо поменуте различите карактеризације.

Поново ће бити разматран стандардизован проблем, у смислу да се функција расподеле G трансформише као у (1.29) тако да се добије d-димензиона функција расподеле екстремних вредности G_*, чије су све једнодимензионе маргиналне расподеле стандардне Фрешеове. Над функцијом расподеле F примењује се аналогна трансформација, тако да се добије одговарајућа функција расподеле F_*. Стандардизација се оправдава чињеницом да $F \in D(G)$ ако и само ако $F_* \in D(G_*)$. Наиме, нека је $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots X_d)$ случајан вектор са функцијом расподеле F и нека је са F_j означена j-та маргинална функција расподеле за F. Нека је, даље, $U_j := -\dfrac{1}{\log F_j}$ и $X_{*j} := U_j(X_j)$, $j = 1, 2, \ldots, d$, и нека је F_* функција расподеле случајног вектора $(X_{*1}, X_{*2}, \ldots, X_{*d})$ тако да

$$F_*(\boldsymbol{y}) = F\left(U_1^{\leftarrow}(y_1), U_2^{\leftarrow}(y_2), \ldots, U_d^{\leftarrow}(y_d)\right). \tag{1.56}$$

Ако су $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ независне копије случајног вектора $\boldsymbol{X}$ и $F \in D(G)$ онда и $F_* \in D(G_*)$ и важи

$$\begin{aligned} &P\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{U_1(X_{j,1})}{n} \leqslant y_1, \max_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{U_2(X_{j,2})}{n} \leqslant y_2, \ldots, \max_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{U_d(X_{d,1})}{n} \leqslant y_d\right\} \\ =&F_*(n\boldsymbol{y}) \to G_*(\boldsymbol{y}), \quad \text{при } n \to \infty. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Обрнуто, ако $F_* \in D(G_*)$, поред тога важи

$$(F_j(a_{n,j}x_j + b_{n,j}))^n \xrightarrow{D} G_j(x_j), \quad \text{при } n \to \infty, j = 1, 2, \ldots, n,$$

и једнодимензионе маргиналне расподеле за G_* су недегенерисане онда $F \in D(G)$.

У наставку је дато неколико фундаменталних резултата којима се врши карактеризација услова области привлачења, $F_* \in D(G_*)$, или, еквивалентно, $F \in D(G)$.

Нека, надаље, случајан вектор $\boldsymbol{X}_*$ има функцију расподеле F_*.

У наставку су дати потребни и довољни услови за $F_* \in D(G_*)$.

- **Marshall and Olkin (1983)**

$F_* \in D(G_*)$ ако и само ако

$$\lim_{t\to\infty} \frac{-\log F_*(t\boldsymbol{y})}{-\log F_*(t\mathbf{1})} = \lim_{t\to\infty} \frac{1-F_*(t\boldsymbol{y})}{1-F_*(t\mathbf{1})} \overset{\Diamond}{=} \frac{-\log G_*(\boldsymbol{y})}{-\log G_*(\mathbf{1})} = \frac{\mu_*([\mathbf{0},+\boldsymbol{\infty})\backslash[\mathbf{0},\boldsymbol{y}])}{\mu_*([\mathbf{0},+\boldsymbol{\infty})\backslash[\mathbf{0},\mathbf{1}])}, \quad \text{за } \boldsymbol{y} \in E,$$

где је μ_* експонент мера из (1.30).
Једнакост означена са $\Diamond$, у претходно наведеном низу једнакости, значи да је $1 - F_*$, по дефиницији, вишедимензиона правилно променљива функција, односно да је F_* *вишедимензиона правилно променљива функција расподеле* (у бесконачности) са индексом правилне променљивости једнаким један и граничном мером ν, таквом да $\nu(B) = \dfrac{\mu_*(B)}{\mu_*([\mathbf{0},+\boldsymbol{\infty})\backslash[\mathbf{0},\mathbf{1}])}$, за сваки Борелов скуп $B \in \mathcal{B}(E)$.

Дефиниција 1.12. d-димензиона функција расподеле F, са носачем $[\mathbf{0},+\boldsymbol{\infty})$, је правилно променљива у бесконачности ако постоји функција $\lambda : (\mathbf{0},+\boldsymbol{\infty}) \longrightarrow (0,+\infty)$, тако да $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1-F(t\boldsymbol{x})}{1-F(t\mathbf{1})} = \lambda(\boldsymbol{x})$, за $\boldsymbol{x} \in (\mathbf{0},+\boldsymbol{\infty})$.
Следи да постоји мера ν на Бореловој σ-алгебри $\mathcal{B}(E)$, таква да $\lambda(\boldsymbol{x}) = \nu([\mathbf{0},+\boldsymbol{\infty})\backslash[\mathbf{0},\boldsymbol{x}])$, за $\forall \boldsymbol{x} > \mathbf{0}$.

Детаљнији приказ вишедимензионе правилне променљивости може се наћи у књигама Resnick (2008), Finkenstädt and Rootzén (2004), Bingham et al. (1989), а, такође, и у раду Basrak et al. (2002).

- $$\lim_{t\to\infty} P\{\boldsymbol{X}_* \leqslant t\boldsymbol{x} | \boldsymbol{X}_* \nleqslant t\mathbf{1}\} = \lim_{t\to\infty} P\left\{\boldsymbol{X}_* \leqslant t\boldsymbol{x} \,\middle|\, \bigvee_{i=1}^{n} X_{*,j} > t\right\} = \frac{1}{-\log G_*(\mathbf{1})} \log\left(\frac{G_*(\boldsymbol{x})}{G_*(\boldsymbol{x} \wedge \mathbf{1})}\right)$$

Овим је дата карактеризација припадања области привлачења у терминима расподеле *прекорачења високог вишедимензионог нивоа.*

Веза са експонент мером μ_* и спектралном мером H_*, које одговарају функцији расподеле G_*, установљена је у следећим двема карактеризацијама:

- **Resnick (2008)**

$F_* \in D(G_*)$ ако и само ако

$$\mu_{*t}(B) := tP\left\{\frac{\boldsymbol{X}_*}{t} \in B\right\} \to \mu_*(B), \quad \text{при } t \to \infty,$$

за сваки релативно компактан Борелов скуп $B \in \mathcal{B}(E)$ за који је $\mu_*(\partial B) = 0$, тј. граница скупа B има μ_*-меру једнаку нула (може се, такође, користити и нотација: $\mu_{*t} \xrightarrow{v} \mu_*$, при $t \to \infty$).

- **de Haan (1985)**

Нека је T, као и раније, трансформација вектора у своје (псеудо)поларне координате у односу на норме $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на $\mathbb{R}^d$, дата са

$$T(\boldsymbol{y}) = (r, \boldsymbol{w}), \quad \text{где је } r := \|\boldsymbol{y}\|_1 \text{ и } \boldsymbol{w} := \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_2}.$$

$F_* \in D(G_*)$ ако и само ако

$$tP\left\{\|\boldsymbol{X}_*\|_1 > t, \frac{\boldsymbol{X}_*}{\|\boldsymbol{X}_*\|_2} \in A\right\} \to H_*(A), \quad \text{при } t \to \infty,$$

за сваки релативно компактан Борелов подскуп A скупа S_E за који је $H_*(\partial A) = 0$, што је, са друге стране, еквивалентно

$$\left.\begin{aligned} P\{\|\boldsymbol{X}_*\|_1 > t\} &\sim \frac{H_*(S_E)}{t} \\ P\left\{\frac{\boldsymbol{X}_*}{\|\boldsymbol{X}_*\|_2} \in A \,\middle|\, \|\boldsymbol{X}_*\|_1 > t\right\} &\to \frac{H_*(A)}{H_*(S_E)} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } t \to \infty.$$

Овим је, успут, дата и интерпретација спектралне мере H_* у терминима расподеле угаоне компоненте случајног вектора X_* у области где је њена радијална компонента велика.

Следећа карактеризација извршена је преко *тачкастог процеса* (ен. point process).

- **de Haan (1985)**

Нека је $N_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{\frac{\boldsymbol{X}_{*j}}{n}}$ тачкасти процес дефинисан на E, где су $\boldsymbol{X}_{*1}, \boldsymbol{X}_{*2}, \ldots, \boldsymbol{X}_{*n}$ независне копије случајног вектора $\boldsymbol{X}_*$.
$F_* \in D(G_*)$ ако и само ако

$$N_n \Rightarrow N, \quad \text{при } n \to \infty,$$

где је са N означен нехомоген Пуасонов процес са мером интензитета μ_*.

Обухватан увод у теорију тачкастих случајних процеса и Пуасонове случајне мере може се наћи у раду Resnick (1986) и књизи Resnick (2008).

Наредна карактеризација показује како се припадање области привлачења може свести на конвергенцију структуре зависности.

- **Takahashi (1994)**

$F_* \in D(G_*)$ ако и само ако

$$(F_*(t\boldsymbol{y}))^t \to G_*(\boldsymbol{y}), \quad \text{при } t \to \infty,$$

за $\forall \boldsymbol{y} \in (\boldsymbol{0}, +\boldsymbol{\infty})$. Алтернативне формулације су

$$t(1 - F_*(t\boldsymbol{y})) \to -\log G_*(\boldsymbol{y}), \quad \text{при } t \to \infty,$$

односно

$$\left.\begin{aligned} 1 - F_*(t\boldsymbol{y}) &\sim -\log G_*(\boldsymbol{y}) \\ &\sim \ 1 - G_*(t\boldsymbol{y}) \end{aligned}\right\} \quad \text{при } t \to \infty.$$

Како Фрешеова расподела припада сопственој области привлачења за максимуме овакав потребан и довољан услов за $F_* \in D(G_*)$ еквивалентан је конвергенцији одговарајућег низа копула. Наиме, нека су независне копије случајног вектора $\boldsymbol{X}_*$ означене са $\boldsymbol{X}_{*1}, \boldsymbol{X}_{*2}, \ldots, \boldsymbol{X}_{*n}$ и нека је $\boldsymbol{M}_{*n}$ њихов покомпоненти максимум, тј. $\boldsymbol{M}_{*n} = \bigvee_{j=1}^{n} \boldsymbol{X}_{*j}$. Функција расподеле случајног вектора $\boldsymbol{M}_{*n}$ је тада n-ти степен функције расподеле F_*, у ознаци F_*^n, а копула за њу дата је са

$$\begin{aligned} C_{F_*^n}(\boldsymbol{u}) &= \left(F_*\left((F_{*1}^n)^{\leftarrow}(u_1), (F_{*2}^n)^{\leftarrow}(u_2), \ldots, (F_{*d}^n)^{\leftarrow}(u_d)\right)\right)^n \\ &= \left(F_*\left(F_{*1}^{\leftarrow}\left(u_1^{1/n}\right), F_{*2}^{\leftarrow}\left(u_2^{1/n}\right), \ldots, F_{*d}^{\leftarrow}\left(u_d^{1/n}\right)\right)\right)^n \\ &= \left(C_{F_*}\left(u_1^{1/n}, u_2^{1/n}, \ldots, u_d^{1/n}\right)\right)^n, \quad \text{за } \boldsymbol{u} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}). \end{aligned}$$

Нека је C_{G_*} копула за функцију расподеле G_*. Тада $F_* \in D(G_*)$ ако и само ако за $\forall \boldsymbol{u} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$

$$C_{F_*^n}(\boldsymbol{u}) \to C_{G_*}(\boldsymbol{u}), \quad \text{при } n \to \infty.$$

Како је гранична копула C_{G_*} непрекидна, претходна конвергенција је равномерна на $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$. Стога се дискретна вредност n може заменити непрекидном вредношћу t

$$\left(C_{F_*}\left(u_1^{1/t}, u_2^{1/t}, \ldots, u_d^{1/t}\right)\right)^t = C_{F_*^t}(\boldsymbol{u}) \to C_{G_*}(\boldsymbol{u}), \quad \text{при } t \to \infty, \tag{1.58}$$

а како копула задовољава својство стабилности (1.54), не само за $m \in \mathbb{N}$ него и за свако $m > 0$, добија се нпр. и да $C_{F_*}(\boldsymbol{u}) \approx C_{G_*}(\boldsymbol{u})$, за такве векторе $\boldsymbol{u}$ код којих су све компоненте u_j, $j = 1, 2, \ldots, d$, довољно близу јединице.

За сваку вишедимензиону функцију расподеле екстремних вредности G тачне су неједнакости

$$\prod_{j=1}^{d} G_j(x_j) \leqslant G(\boldsymbol{x}) \leqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant n} G_j(x_j), \quad \text{за } \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

где је са G_j означена j-та маргинална функција расподеле за G. На самим крајевима опсега зависности маргиналних расподела налазе се два екстремна случаја: маргинална *независност* – $G(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} G_j(x_j)$ и маргинална *потпуна зависност* – $G(\boldsymbol{x}) = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} G_j(x_j)$. У оба ова случаја G је вишедимензиона функција расподеле екстремних вредности, а карактеризацију је одредио Takahashi (1988).

Посебна пажња у литератури посвећује се тзв. проблему области привлачења независности, који се састоји у проучавању области привлачења вишедимензионе M-стабилне функције расподеле G са независним једнодимензионим маргиналним расподелама, тј. такве да $G(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} G_j(x_j)$, за $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. За случајан вектор чија функција расподеле припада области привлачења овакве функције расподеле G каже се да поседује *својство асимптотске независности компоненти.*

Нека је $(\boldsymbol{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених случајних вектора у $\mathbb{R}^d$ са заједничком d-димензионом функцијом расподеле F. Ради једноставности, претпостави се да су све једнодимензионе маргиналне функције расподеле исте и једнаке F_1, а да $F_1 \in D(G_1)$, тј. да постоје низови константи (a_n) и (b_n), $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тако да важи

$$(F_1(a_n x + b_n))^n \xrightarrow{D} G_1(x), \quad \text{при } n \to \infty.$$

Berman (1961) је формулисао потребне и довољне услове при којима функција расподеле F припада области привлачења независности, тј. доказао је да су следећи искази еквивалентни:

– F припада области привлачења независности:

$$(F(a_n \boldsymbol{x} + b_n \mathbf{1}))^n \xrightarrow{D} \prod_{j=1}^{d} G_1(x_j) = G(\boldsymbol{x}), \quad \text{при } n \to \infty,$$

– за свака два природна броја k и l, таква да $1 \leqslant k < l \leqslant d$,

$$P\{M_{n,k} \leqslant a_n x_k + b_n, M_{n,l} \leqslant a_n x_l + b_n\} \to G_1(x_k) G_1(x_l), \quad \text{при } n \to \infty,$$

где је $M_{n,j} = \bigvee_{i=1}^{n} X_{i,j}$

– за свака два природна броја k и l, таква да $1 \leqslant k < l \leqslant d$,

$$nP\{X_{1,k} > a_n x_k + b_n, X_{1,l} \leqslant a_n x_l + b_n\} \to 0, \quad \text{при } n \to \infty$$

– за свака два природна броја k и l, таква да $1 \leqslant k < l \leqslant d$,

$$P\{X_{1,k} > t | X_{1,l} > t\} \to 0, , \quad \text{при } t \to x_{F_1}.$$

Други исказ, уствари, тврди да асимптотска независност у паровима максимума компоненти имплицира њихову заједничку асимптотску независност, чиме се општа асимптотска независност у простору димензије $d > 2$ заправо своди на дводимензиони случај. Четврти исказ је услов којим се утврђује дводимензиона асимптотска независност, а формулисао га је Sibuya (1959).

1.5 Структуре зависности и мерење екстремалне зависности

Важан аспект вишедимензионе теорије екстремних вредности представља проучавање структура зависности M-стабилних расподела. Класа структура зависности је веома велика и њен распон се креће од независности компоненти (то су тзв. слабе структуре зависности), као једног изузетног случаја, до њихове перфектне зависности (то су тзв.

јаке структуре зависности), као другог. Структура зависности може се, на еквивалентан начин, описати разним објектима: функцијама зависности или одређеним мерама зависности, при чему су сви они повезани и расветљавају расподелу екстремних вредности са различитих становишта. Овде ће бити дат кратак приказ објеката који оличавају структуру зависности и начина на које то чине.

Нека је, у наставку, $(\boldsymbol{X}_n)$ низ независних, једнако расподељених случајних вектора димензије d са заједничком функцијом расподеле F, која припада области привлачења за максимуме функције расподеле екстремних вредности G. Нека су, даље, F_* и G_* одговарајуће функције расподеле са стандардним Фрешеовим маргиналним расподелама, добијене, редом, трансформацијама (1.56) и (1.29). Након што се, на овај начин, изврши стандардизација проблема пажња се може усредсредити искључиво на структуре зависности.

- **Експонент мера и спектрална мера**

Експонент мера μ_* дата у (1.30) описује структуру зависности између необично великих вредности $X_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, d$, након што се изврши стандардизација помоћу функција $U_j = -\dfrac{1}{\log F_j}$, како би се добиле жељене маргиналне расподеле. Resnick (2008) је доказао да је независност једнодимензионих маргиналних функција расподеле G_{*j}, или, другим речима, асимптотска независност максимума компоненти вектора из низа $(\boldsymbol{X}_n)$, еквивалентна чињеници да је мера μ_* концентрисана на скупу

$$\bigcup_{j=1}^{d} \{\boldsymbol{x} \in E : x_i = 0 \text{ за } i \neq j\},$$

тако да за $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$

$$\mu_* \left(\bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant d} \{\boldsymbol{x} \in E : x_i > y_i, x_j > y_j\} \right) = 0.$$

Посебно, у случају $d = 2$ то једноставно значи да је експонент мера μ_* концентрисана на позитивним деловима координатних оса и нема атоме у унутрашњости првог квадранта.

Дефиниција 1.13. Каже се да је $\{a\} \in \mathcal{B}(E)$ *атом* (ен. point mass) дате мере ако је мера скупа $\{a\}$ строго позитивна.

Важи

$$\mu_*([\mathbf{0},+\infty)\backslash[\mathbf{0},\boldsymbol{y}]) = \sum_{j=1}^{d}\frac{1}{y_j} = l\left(\frac{1}{y_1},\frac{1}{y_2},\ldots,\frac{1}{y_d}\right), \quad \text{за } \boldsymbol{y}\in E.$$

Када је у питању потпуна зависност она је еквивалентна чињеници да је μ_* концентрисана на полуправој

$$\{t\mathbf{1} : t>0\}$$

и важи

$$\mu_*([\mathbf{0},+\infty)\backslash[\mathbf{0},\boldsymbol{y}]) = \max_{1\leqslant j\leqslant d}\frac{1}{y_j}, \quad \text{за } \boldsymbol{y}\in E.$$

Спектрална декомпозиција експонент мере μ_* (1.36) омогућава да се структура зависности опише путем спектралне мере H_*, која је, уствари, угаона компонента μ_*. Нека је дата стандардна база $(\boldsymbol{e}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ простора $\mathbb{R}^d$, при чему је $\boldsymbol{e}_j$ j-ти јединични вектор, тј. његова j-та координата једнака је један, а остале су нула. Максимуми компоненти вектора из низа $(\boldsymbol{X}_n)$ су асимптотски независни ако и само ако је мера H_* концентрисана на атомима $\left\{\frac{\boldsymbol{e}_j}{\|\boldsymbol{e}_j\|_2}\right\}$ мере $\|\boldsymbol{e}_j\|_1$, $H_*(\cdot) = \sum_{j=1}^{d}\|\boldsymbol{e}_j\|_1\varepsilon_{\frac{\boldsymbol{e}_j}{\|\boldsymbol{e}_j\|_2}}(\cdot)$, тј.

$$\int_{S_E} f(\boldsymbol{w})H_*(d\boldsymbol{w}) = \sum_{j=1}^{d}\|\boldsymbol{e}_j\|_1 f\left(\frac{\boldsymbol{e}_j}{\|\boldsymbol{e}_j\|_2}\right),$$

за произвољну реалну, H_*-интеграбилну функцију f на S_E.

Са друге стране, нека је $\boldsymbol{w}_0 = w_0\mathbf{1}$ тачка пресека сфере S_E и праве дате са $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d : x_1 = x_2 = \cdots = x_d\}$. Максимуми компоненти вектора из низа $(\boldsymbol{X}_n)$ су асимптотски потпуно зависни ако и само ако је H_* концентрисана (тачније, колапсира) на једном јединим атому $\{\boldsymbol{w}_0\}$ мере $\frac{\|\boldsymbol{w}_0\|_1}{w_0}$, $H_*(\cdot) = \frac{\|\boldsymbol{w}_0\|_1}{w_0}\varepsilon_{\boldsymbol{w}_0}(\cdot)$, тј.

$$\int_{S_E} f(\boldsymbol{w})H_*(d\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{w}_0)\frac{\|\boldsymbol{w}_0\|_1}{w_0},$$

за произвољну реалну, H_*-интеграбилну функцију f на S_E.

Посебно, ако су обе одабране норме исте и у питању је, конкретно, L^1-норма, онда је S_E, уствари, јединични $(d-1)$-димензиони симплекс и, при томе, независност је присутна ако и само ако је мера H_*

концентрисана на јединичним атомима у теменима $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_d$ симплекса S_E, док је потпуна зависност присутна ако и само ако је мера H_* концентрисана на једном јединим атому мере d у централној тачки $\left(\frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \ldots, \frac{1}{d}\right)$.

Изражено у терминима вероватносне мере Q из формуле (1.39) и спектралних функција, које се појављују код спектралне репрезентације (1.41), независност је еквивалентна чињеници да је Q дискретна равномерна расподела на скупу темена поменутог симплекса S_E (асимптотски: само једна компонента у опсервацији може узети велику вредност), односно да спектралне функције имају дисјунктне носаче скоро свуда, док је потпуна зависност еквивалентна чињеници да је Q дегенерисана расподела са вероватноћом једнаком један у централној тачки $\left(\frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \ldots, \frac{1}{d}\right)$ симплекса S_E (асимптотски: све компоненте узимају приближно једнаке вредности), односно да су све спектралне функције једнаке скоро свуда на сегменту $[0, 1]$.

- **Дводимензиони случај**

У једнакости (1.46) дата је популарна Пикандсова репрезентација дводимензионе M-стабилне функције расподеле G_* са стандардним Фрешеовим маргиналним расподелама, где је A Пикандсова функција зависности. Већ је речено да за функцију A важе неједнакости: $\max\{t, 1-t\} \leqslant A(t) \leqslant 1$, за $\forall t \in [0, 1]$. Случај када је A једнака својој горњој граници, тј. $A(t) = 1$, за $\forall t \in [0, 1]$, одговара независности G_{*1} и G_{*2} и тада је $G_*(y_1, y_2) = G_{*1}(y_1)G_{*2}(y_2)$, за $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, а случај када је A једнака својој доњој граници, тј. $A(t) = \max\{t, 1-t\}$, за $\forall t \in [0, 1]$, одговара потпуној зависности маргиналних функција расподеле G_{*1} и G_{*2} и тада је $G_*(y_1, y_2) = G_{*1}(\min\{y_1, y_2\})$, за $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Друге функције зависности које се појављују у (1.43)–(1.45), такође, карактеришу структуру зависности.

- **Копула**

Копула C_G за функцију расподеле екстремних вредности G не зависи од једнодимензионих маргиналних функција расподеле G_j и, стога, садржи све информације релевантне за сагледавање структуре зависности, што је чини погодним објектом за описивање исте. Може се показати да за копулу екстремних вредности C_G важи

$$\prod_{j=1}^{d} u_j \leqslant C_G(\boldsymbol{u}) \leqslant \min_{1\leqslant j\leqslant n} u_j, \quad \text{за } \boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}].$$

Сви овде поменути објекти су бесконачнодимензиони и из тог разлога рад са њима није једноставан. Могуће решење састоји се у бирању коначнодимензионих поткласа структура зависности (надајући се да су оне довољно широке), тј. у фокусирању на параметарске моделе о чему ће бити више речи у следећем одељку. Алтернативно решење јесте да се разматрају главне особине структуре зависности коришћењем добро одабраних мера зависности, чиме се стиче груба али репрезентативна слика о јачини зависности у граничној вишедимензионој расподели екстремних вредности.

На самом почетку, требало би поменути да је Пирсонов[15] коефицијент корелације, који се често узима за меру (линеарне) зависности случајних величина, у вишедимензионој теорији екстремних вредности практично неупотребљив с обзиром на то да, са једне стране, није инваријантан у односу на трансформације маргиналних расподела (тачније, инваријантан је само у односу на строго растуће линеарне трансформације), а, са друге стране, неке једнодимензионе расподеле екстремних вредности (рецимо стандардна Фрешеова расподела) имају бесконачну дисперзију.

Усредсређујући се управо на потребе екстремалног контекста предложено је неколико мера зависности, углавном за дводимензиони случај:

⋆ **Екстремални коефицијент**

Нека је G дводимензиона функција расподеле екстремних вредности случајног вектора $\boldsymbol{Y}$ са маргиналним функцијама расподеле G_1 и G_2. У дводимензионом случају *екстремални коефицијент* θ дефинисан је са

$$\theta = l(1,1) = 2A\left(\frac{1}{2}\right),$$

[15]Karl Pearson (1857-1936), британски математичар

где је l стабилна функција зависности репова, а A Пикандсова функција зависности. Овај коефицијент може узети вредност у сегменту $[1,2]$ и задовољава једнакост

$$P\{Y_1 \leqslant G_1^{\leftarrow}(p), Y_2 \leqslant G_2^{\leftarrow}(p)\} = p^{\theta}, \quad \text{за } 0 < p < 1.$$

Уколико су маргиналне функције расподеле G_1 и G_2 једнаке претходна једнакост своди се на

$$P\{Y_1 \leqslant x, Y_2 \leqslant x\} = P\{\max\{Y_1, Y_2\} \leqslant x\} = (G_1(x))^{\theta}, \quad \text{за } x \in \mathbb{R},$$

и њу је Tiago de Oliveira (1962/63) користио да би дефинисао овај коефицијент (то је, уствари, индекс екстремалне зависности). Очигледно је да вредност θ има великог утицаја на облик Пикандсове функције зависности A. Посебно, вредности θ блиске двојци указују на слабе структуре зависности ($\theta = 2$ – независност), док вредности θ блиске доњој граници указују на јаке структуре зависности ($\theta = 1$ – потпуна зависност). Уопштење се може формулисати и за случајеве када је број димензија d већи од два; за више детаља погледати радове Coles (1993), Smith (1991).

⋆ **Кендалово[16] $\boldsymbol{\tau}$ и Спирманово[17] $\boldsymbol{\rho}$**

Тако се називају две популарне непараметарске мере зависности између компоненти дводимензионог случајног вектора. Примењене на дводимензиону M-стабилну расподелу служе за увид у структуру зависности.

Нека је $\boldsymbol{Y}$ дводимензиони случајни вектор са функцијом расподеле F и $\boldsymbol{X}$ његова независна копија. *Кендалово* τ дефинише се са

$$\begin{aligned}\tau &= \operatorname{cov}(\operatorname{sgn}(X_1 - Y_1), \operatorname{sgn}(X_2 - Y_2)) \\ &= P\{(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0\}\end{aligned}$$

и оно мери известан облик зависности познат као „сагласност" (ен. concordance). Оно, уствари, мери нелинеарну зависност.

Пар дводимензионих опсервација је сагласан уколико су оне упоредиве при маргиналном уређењу у $\mathbb{R}^2$, тј. ако су, при поређењу

[16] David George Kendall (1918-2007), британски статистичар и математичар

[17] Charles Spearman (1863-1945), британски психолог

вредности одговарајућих координата, вредности обе координате једне опсервације веће од одговарајућих вредности координата друге опсервације. У супротном, пар опсервација је несагласан. Према томе, τ је, уствари, вероватноћа сагласности умањена за вероватноћу несагласности.

Ако су маргиналне функције расподеле F_1 и F_2 функције расподеле F непрекидне онда је копула C_F за F једнозначно одређена, а τ је дато са

$$\tau = 4E(C_F(U_1, U_2)) - 1,$$

где је $(U_1, U_2) := (F_1(Y_1), F_2(Y_2))$ и овај случајан вектор има функцију расподеле C_F.

Ако је G дводимензиона функција расподеле екстремних вредности копула C_G за G може се записати у терминима Пикандсове функције зависности A као

$$C_G(u, v) = \exp\left(\log(uv) A\left(\frac{\log v}{\log(uv)}\right)\right), \quad \text{за } (u, v) \in (0,1)^2.$$

Кендалово τ може се, за класу дводимензионих копула екстремних вредности, изразити у облику

$$\begin{aligned}\tau &= \int_0^1 \frac{t(1-t)}{A(t)} dA'(t) \\ &= 1 - \int_0^1 \left(1 + (1-t)\frac{A'(t)}{A(t)}\right)\left(1 - t\frac{A'(t)}{A(t)}\right) dt,\end{aligned}$$

где је $A'(t)$ десни извод функције A за $t \in [0, 1)$, при чему важи

$$A'(t) \in [-1, 1], \text{ а узима се да је } A'(1) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} A'(t).$$

Спирманово ρ_S такође мери сагласност и дефинисано је као Пирсонов коефицијент корелације малопре уведених случајних величина U_1 и U_2, тј.

$$\rho_S = \mathrm{Corr}(U_1, U_2) = \mathrm{Corr}(F_1(Y_1), F_2(Y_2)) = 12E(U_1 U_2) - 3.$$

У терминима Пикандсове функције зависности A Спирманово ρ_S, за класу дводимензионих копула екстремних вредности, може се записати као

$$\rho_S = 12\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+A(t))^2}dt - 3.$$

Кендалово τ и Спирманово ρ_S, за класу дводимензионих копула екстремних вредности, задовољавају неједнакост

$$-1+\sqrt{1+3\tau} \leqslant \rho_S \leqslant \min\left\{\frac{3}{2}\tau, 2\tau-\tau^2\right\}.$$

Обе описане мере зависности, практично, почивају само на копули за одговарајућу дводимензиону функцију расподеле, а не и на њеним маргиналним расподелама. Њихова предност огледа се у чињеници да су инваријантне у односу на строго растуће трансформације. Обе узимају вредности у сегменту $[-1,1]$, при чему вредности 0 и 1 одговарају изузетним случајевима независности и потпуне зависности (тзв. комонотоности), редом.

⋆ **Коефицијенти зависности репова**

Зависност репова је, генерално, мера јачине зависности у заједничком десном или левом репу вишедимензионе расподеле. Уствари, то је екстремална зависност. Коефицијенти који мере овај тип зависности задати су као условне вероватноће прекорачења квантила. *Коефицијент зависности десних репова* λ за функцију расподеле F дефинише се са

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{u\to 1-} P\{U_1 > u | U_2 > u\} = \lim_{u\to 1-} P\{U_2 > u | U_1 > u\} \\ &= \lim_{u\to 1-} \frac{P\{Y_1 > F_1^{\leftarrow}(u), Y_2 > F_2^{\leftarrow}(u)\}}{1-u},\end{aligned}$$

користећи раније уведене случајне величине U_1 и U_2, што се у ситуацији када су F_1 и F_2 непрекидне функције своди на

$$\lambda = \lim_{u\to 1-} \frac{1-2u+C_F(u,u)}{1-u}, \tag{1.59}$$

а, ако су, поред тога, још F_1 и F_2 и једнаке, на

$$\lambda = \lim_{y\to y_F-} \frac{\overline{F}(y,y)}{1-F_1(y)},$$

где је $\overline{F}$ одговарајућа функција преживљавања.

Очигледно је да λ узима вредности у сегменту $[0,1]$, при чему ако $\lambda \in (0,1]$ онда се каже да Y_1 и Y_2 показују асимптотску зависност десних репова/екстремалну зависност у десном репу, а ако је, пак, $\lambda = 0$ нема зависности десних репова и оне су асимптотски независне (у десном репу). Независност Y_1 и Y_2 имплицира $\lambda = 0$, али обрнуто не важи. На асимптотску независност требало би гледати као на најслабији облик зависности који се може измерити коефицијентом зависности репова.

Аналогно се може дефинисати и коефицијент зависности левих репова, с тим што је са становишта примена овде, за максимуме, ипак значајнији коефицијент зависности десних репова (као гранична вероватноћа да случајна величина Y_1 узима врло велику вредност, ако Y_2 узима врло велику вредност). Оба коефицијента инваријантна су у односу на строго растуће трансформације.

У раду Coles et al. (1999) формулисана је асимптотски еквивалентна верзија једнакости (1.59)

$$\lambda = 2 - \lim_{u \to 1-} \frac{\log C_F(u,u)}{\log u}.$$

Постоје бројни примери копула које потпадају под случај асимптотске независности левих и/или десних репова, али код којих је дозвољено постојање извесне зависности између случајних величина Y_1 и Y_2 у областима репова. Асимптотска независност ових случајних величина ипак не имплицира независност репова. Мера којом се квантификује „зависност унутар независности репова" предложена је у истом раду и у те сврхе дефинисан *коефицијент слабе зависности десних репова* као

$$\chi = \lim_{u \to 1-} \chi(u), \quad \text{где је } \chi(u) = \left(\frac{2\log(1-u)}{\log(1-2u+C_F(u,u))} - 1 \right), \quad \text{за } u \in (0,1),$$

уколико оваква гранична вредност постоји.

Једноставно се показује да χ узима вредности у сегменту $[-1,1]$; $\chi = 1$ у случају асимптотске зависности десних репова ($\lambda > 0$) и тада управо вредност λ указује на јачину екстремалне зависности; $\chi = 0$ у случају асимптотске независности случајних величина Y_1 и Y_2; $-1 \leqslant \chi < 1$ у случају асимптотске независности десних репова ($\lambda = 0$) и тада је вредност χ примеренија као мера екстремалне зависности; χ расте истовремено са јачањем зависности у области репова.

Уколико је G дводимензиона функција расподеле екстремних вредности коефицијент зависности десних репова λ може се записати преко Пикандсове функције зависности A као

$$\lambda = 2\left(1 - A\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

У књизи Joe (2014) показано је да ако дводимензиона функција расподеле F припада области привлачења за максимуме функције расподеле екстремних вредности G и λ је њен коефицијент зависности десних репова, онда је λ, такође, и коефицијент зависности десних репова за функцију расподеле G.

Уместо да се оригиналне случајне величине Y_1 и Y_2 трансформишу тако да се добије равномерна расподела на $[0,1]$, као маргинална расподела, погодно је да се изврши трансформација $Z_j := \dfrac{1}{-\log U_j}$, $j = 1,2$, чиме се стиже до стандардне Фрешеове маргиналне расподеле. Ово је строго растућа трансформација, па, зато, не погађа описане коефицијенте зависности. У раду Ledford and Tawn (1996) предложен је трећи коефицијент зависности, под претпоставком да је заједничка функција преживљавања случајних величина Z_1 и Z_2 правилно променљива функција

$$P\{Z_1 > z, Z_2 > z\} = \mathcal{L}(z) z^{-1/\eta}, \quad \text{за } z > 0, \tag{1.60}$$

где је η позитивна константа, а $\mathcal{L}$ споро променљива функција у бесконачности, тј. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\mathcal{L}(tx)}{\mathcal{L}(t)} = 1$, за $\forall x > 0$. Аутори η називају коефицијент зависности репова, али с обзиром на то да η није исто што и λ, што ће у наставку бити и показано, уместо тог термина биће коришћен термин *индекс преостале зависности*, како је предложено у књизи de Haan and Ferreira (2006).

Брзину опадања вероватноће преживљавања (1.60) контролише првенствено вредност η. Како је

$$P\{Z_1 > z, Z_2 > z\} \leqslant P\{Z_1 > z\} = P\{Z_2 > z\} = 1 - e^{-1/z} \sim \frac{1}{z}, \tag{1.61}$$

за велике вредности z, следи да је $\eta \leqslant 1$.

Веза између стандардних Фрешеових маргиналних расподела и копуле C_F дата је са

$$P\{Z_1 > z, Z_2 > z\} = 1 - 2e^{-1/z} + C_F\left(e^{-1/z}, e^{-1/z}\right), \tag{1.62}$$

па се, користећи (1.61), добија да ако $\mathcal{L}(z)z^{1-1/\eta} \sim P\{Z_2 > z | Z_1 > z\}$ конвергира, при $z \to \infty$, онда је, на основу (1.59), та гранична вредност једнака λ.

Даље, из (1.60) и (1.62) следи $1 - 2u + C_F(u, u) = \mathcal{L}\left(-\dfrac{1}{\log u}\right) \cdot (-\log u)^{1/n}$, за $u \in (0, 1)$, па се замењивањем десне стране ове једнакости у израз за $\chi(u)$ добија да је $\chi = 2\eta - 1$.

Гранични случајеви перфектне негативне, односно позитивне зависности, одговарају, редом, $\eta \to 0$, односно $\eta = 1$ и, истовремено, $\mathcal{L}(z) \to 1$, при $z \to \infty$. Ако је $\eta = 1$ и $\mathcal{L}(z) \to c$, при $z \to \infty$, за неко $c \in (0, 1)$, онда је $\chi = 1$ и компоненте су асимптотски зависне, у описаном смислу, са степеном зависности $\lambda = c$. Ако је, пак, $0 < \eta < 1$ или ако је $\eta = 0$ и, истовремено, $\mathcal{L}(z) \to 0$, при $z \to \infty$, онда је $\lambda = 0$ и компоненте су асимптотски независне са степеном (не)зависности $\chi = 2\eta - 1$. Унутар класе асимптотски независних случајева могу се препознати три типа независности, према знаку вредности $\chi = 2\eta - 1$ (Heffernan (2000)). Прво, када је $\frac{1}{2} < \eta < 1$ или $\eta = 1$ и, истовремено, $\mathcal{L}(z) \to 0$, при $z \to \infty$, опсервације код којих и Z_1 и Z_2 прекорачују висок ниво z реализују се учесталије него при тачној независности (тзв. позитивна асоцираност). Друго, када је $\eta = \frac{1}{2}$ реализације екстремних опсервација за Z_1 и Z_2 су скоро независне и, чак, тачно независне у случају $\mathcal{L}(z) = 1$. Коначно, када је $0 < \eta < \frac{1}{2}$ реализације опсервација, таквих да и Z_1 и Z_2 прекорачују висок ниво z, су мање учестале него при тачној независности (тзв. негативна асоцираност). Дакле, вредност η описује тип граничне зависности компоненти дводимензионог случајног вектора (Z_1, Z_2), а $\mathcal{L}$ њену релативну јачину за одређену вредност η.

Користећи чињеницу $P\{Z_1 > z, Z_2 > z\} = P\{\min\{Z_1, Z_2\} > z\}$, η се још може схватити и као индекс репа расподеле једнодимензионе случајне величине $\min\{Z_1, Z_2\}$.

1.6 Параметарске фамилије дводимензионих расподела екстремних вредности

Већ је објашњено зашто фамилија вишедимензионих расподела екстремних вредности нема коначну параметризацију. У најкраћем, разлог лежи у чињеници да је класа структура зависности бесконачнодимензиона. Стога се, практично, конструишу параметарске поткласе и то се може чинити на различите начине: спецификовањем спектралне мере H_*, параметарским моделирањем стабилне функције зависности репова l, конструисањем Пикандсове функције зависности A (у случају када је $d = 2$). Овако се добија само мали подскуп комплетне класе вишедимензионих расподела екстремних вредности, али је, ипак, пажљивим одабиром приступа (ту се мисли на избор модела и начина конструкције) могуће обезбедити апроксимацију њене знатно шире поткласе. У наставку ће бити наведене неке од бројних параметарских фамилија дводимензионих расподела екстремних вредности, које се наводе у литератури.

Користе се уобичајене ознаке: G за дводимензиону M-стабилну функцију расподеле; G_* за дводимензиону функцију расподеле добијену трансформацијом (1.29); H_* за одговарајућу спектралну меру, при чему су обе одабране норме исте и конкретно је у питању L^1-норма; l за стабилну функцију зависности репова; C_G за копулу за G. Ако је G_* апсолутно непрекидна функција онда постоји спектрална густина у унутрашњости јединичног интервала и дата је са

$$h_*(w) = -\frac{1}{w(1-w)} \cdot \frac{\partial^2 l}{\partial v_1 \partial v_2}(1-w, w), \quad \text{за } w \in (0,1). \tag{1.63}$$

Величине атома мере H_* у тачкама $(0,1)$ и $(1,0)$ су

$$\begin{aligned} H_*(\{(0,1)\}) &= \lim_{v_1 \to \infty} \frac{\partial l}{\partial v_2}(v_1, v_2) \\ H_*(\{(1,0)\}) &= \lim_{v_2 \to \infty} \frac{\partial l}{\partial v_1}(v_1, v_2). \end{aligned} \tag{1.64}$$

- **Логистички модел и варијације**

– <u>Основна, симетрична расподела</u>

То је један од најстаријих модела вишедимензионих екстремних вредности и увео га је Gumbel (1960). Због своје једноставности још увек је најпопуларнији модел. Ту је

$$G_*(y_1, y_2) = \exp\left(-\left(\left(\frac{1}{y_1}\right)^{1/\alpha} + \left(\frac{1}{y_2}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\right), \quad y_1, y_2 > 0,$$

са параметром $0 < \alpha \leqslant 1$. Одговарајућа спектрална мера H_* нема атоме ни у једној од тачака $(0,1)$, $(1,0)$, а спектрална густина h_* на интервалу $(0,1)$ дата је формулом

$$h_*(w) = \frac{1-\alpha}{\alpha}(w(1-w))^{1/\alpha - 2}\left((1-w)^{1/\alpha} + w^{1/\alpha}\right).$$

Одговарајућа копула (ен. Gumbel-Hougaard copula) је

$$C_G(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^{1/\alpha} + (-\log u_2)^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\right), \quad 0 < u_1, u_2 \leqslant 1,$$

и она се користи у анализи преживљавања.

Поткласа дводимензионих расподела екстремних вредности генерисана логистичком фамилијом покрива све нивое зависности: од независности $\left(G_*(y_1, y_2) = e^{-1/y_1} \cdot e^{-1/y_2} = G_{*1}(y_1)G_{*2}(y_2) \text{ за } \alpha = 1\right)$ до потпуне зависности $\left(G_*(y_1, y_2) \to \exp\left(-\max_{j \in \{1,2\}} \frac{1}{y_j}\right) \text{ при } \alpha \to 0\right)$.

Дакле, предност овог модела је његова флексибилност, а мана симетрија структуре зависности.

– Асиметрична расподела

Асиметрично проширење претходног модела предложио је Tawn (1988) и ту је

$$G_*(y_1, y_2) = \exp\left(-\frac{1-\psi_1}{y_1} - \frac{1-\psi_2}{y_2} - \left(\left(\frac{\psi_1}{y_1}\right)^{1/\alpha} + \left(\frac{\psi_2}{y_2}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\right), \quad y_1, y_2 > 0,$$

са параметрима $0 < \alpha \leqslant 1$ и $0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$, $j = 1, 2$. Независност се појављује чим је $\alpha = 1$ или $\psi_1 = 0$ или $\psi_2 = 0$, а ако је $\alpha < 1$ спектрална мера H_* је концентрисана и у унутрашњости, а има и атоме у теменима јединичног једнодимензионог симплекса (тј. сегмента $[0,1]$) и то за $w \in (0,1)$

$$h_*(w) = \frac{1-\alpha}{\alpha}(\psi_1\psi_2)^{1/\alpha}(w(1-w))^{1/\alpha - 2}\left((\psi_1(1-w))^{1/\alpha} + (\psi_2 w)^{1/\alpha}\right)^{\alpha - 2},$$
$$H_*(\{(0,1)\}) = 1 - \psi_2, \quad H_*(\{(1,0)\}) = 1 - \psi_1.$$

При $\alpha \to 0+$ добија се недиференцијабилан модел, код кога је

$$G_*(y_1, y_2) = \exp\left(-\max\left\{(1-\psi_1)\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_1} + (1-\psi_2)\frac{1}{y_2}\right\}\right), \quad y_1, y_2 > 0.$$

Одговарајућа спектрална мера концентрисана је на три тачке:

$$H_*(\{(0,1)\}) = 1 - \psi_2, \quad H_*\left(\left\{\left(\frac{\psi_1}{\psi_1+\psi_2}, \frac{\psi_2}{\psi_1+\psi_2}\right)\right\}\right) = \psi_1 + \psi_2,$$
$$H_*(\{(1,0)\}) = 1 - \psi_1.$$

Ако је овде $\psi_1 = \psi_2$ добија се дводимензиони модел који су открили Marshall and Olkin (1967) у контексту анализе преживљавања, а Tiago de Oliveira (1971) препознао га је као структуру зависности екстремних вредности и назвао га Гумбелов модел. При томе, бирајући $\psi_1 = 1$ или $\psi_2 = 1$ добија се биекстремална расподела. Потпуна зависност одговара ситуацији када је $\psi_1 = \psi_2 = 1$.

– Билогистичка расподела

Овај модел мотивисан је спектралном репрезентацијом (1.41), при чему се као спектралне функције користе функције

$$\tilde{f}_1(t) = \frac{1-\alpha}{t^\alpha}, \quad \tilde{f}_2(t) = \frac{1-\beta}{(1-t)^\beta}, \quad 0 < t < 1.$$

Предложен је у раду Joe et al. (1992), када је коришћен за оцењивање вероватних комбинација нивоа сулфата и нитрата у киселој киши. Представља једно од уопштења логистичког модела, које допушта асиметрију структуре зависности. Ту је

$$G_*(y_1, y_2) = \exp\left(-\int_0^1 \max\left\{\frac{1-\alpha}{t^\alpha y_1}, \frac{1-\beta}{(1-t)^\beta y_2}\right\} dt\right), \quad y_1, y_2 > 0, \quad (1.65)$$

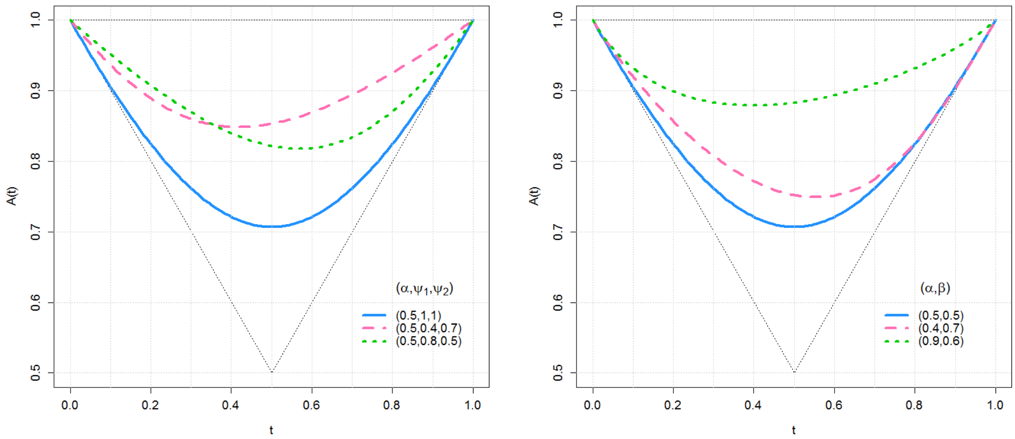
са параметрима $0 \leqslant \alpha < 1$ и $0 \leqslant \beta < 1$. Одговарајућа спектрална мера H_* нема атоме ни у једној од тачака $(0,1)$, $(1,0)$, а спектрална густина h_* на интервалу $(0,1)$ дата је формулом

$$h_*(w) = \frac{(1-\alpha)(1-z)z^{1-\alpha}}{(1-w)w^2((1-z)\alpha + z\beta)},$$

где је $z = z(w; \alpha, \beta)$ решење једначине

$$(1-\alpha)(1-w)(1-z)^{\beta} - (1-\beta)wz^{\alpha} = 0.$$

Вредност $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ може бити схваћена као мера зависности, а вредност $\alpha - \beta$ као мера асиметрије.



Слика 2: *Графици Пикандсове функције зависности за (а)симетричан логистички модел (лево), односно билогистички модел (десно), за различите вредности параметара*

– Негативна логистичка и негативна билогистичка расподела

Први модел предложен је у раду Joe (1990) и он је по својој структури врло сличан логистичком моделу. У асиметричној формулацији је

$$G_*(y_1, y_2) = \exp\left(-\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} + \left(\left(\frac{\psi_1}{y_1}\right)^{1/\alpha} + \left(\frac{\psi_2}{y_2}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\right), \quad y_1, y_2 > 0,$$

са параметрима $\alpha < 0$ и $0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$, $j = 1, 2$, при чему специјалан случај када је $\psi_1 = \psi_2 = 1$ даје симетричну расподелу.

Одговарајућа копула C_G позната је као ен. Galambos copula.

На исти начин као што је билогистички модел настао као асиметрично проширење дводимензионог симетричног логистичког модела, негативни билогистички модел предложен је у раду Coles and Tawn (1994), као проширење дводимензионог симетричног негативног логистичког модела. Функција расподеле G_* истог је облика као у (1.65), само што су овде параметри α и β негативни. У истом раду ова расподела сматрана је најпогоднијом за оцењивање зависности између екстрема узбурканости воде и висине таласа, при примени на океанографске податке.

- **Гаусов модел**

Стандардна нормална расподела свакако је једна од најпознатијих и најкоришћенијих у применама вероватносне и статистичке методологије, па је сасвим природно очекивати је и у екстремалном контексту. Ту је

$$G_*(y_1, y_2) = \exp\left(-\frac{1}{y_1}\Phi\left(a - s\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}\right)\right) - \frac{1}{y_2}\Phi\left(s\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}\right)\right)\right), \quad y_1, y_2 > 0,$$

где је $s(w) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{a}\log\dfrac{w}{1-w}$, $a = \left(\dfrac{t_1 - t_2}{\sigma}\right)^2$. У радовима Smith (1991) и Coles (1993) ова фамилија расподела коришћена је за моделирање просторне различитости и зависности између олуја, у функцији растојања између локација на којима се олује дешавају (локацијама одговарају вредности t_1 и t_2).

Уместо на три параметра модел се може засновати на само једном параметру $\lambda := \dfrac{a}{2}$, који узима позитивне вредности. Овај параметар контролише јачину зависности, са граничним, изузетним случајевима $\lambda \to \infty$, односно $\lambda \to 0+$, који одговарају, редом, независности односно потпуној зависности.

- **Циркуларни модел**

Ту је

$$G_*(y_1, y_2) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \max\left\{\frac{f_\zeta(t;\theta_1)}{y_1}, \frac{f_\zeta(t;\theta_2)}{y_2}\right\} dt\right), \quad y_1, y_2 > 0,$$

при чему је $f_\zeta(t;\beta)$ густина расподеле Фон Мизесове[18] нормалне расподеле на кружници (ен. circular normal distribution) дата са

$$f_\zeta(t;\beta) = \frac{1}{2\pi I_0(\zeta)}\exp\left(\zeta\cos(t-\beta)\right), \quad \text{за } 0 < t \leqslant 2\pi,$$

[18] Richard Edler von Mises (1883-1953), аустроугарски математичар

а $I_0(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp(x\cos t)dt$ је модификована Беселова[19] функција реда нула. Параметри модела су $0 \leqslant \zeta$ и $0 < \theta_j \leqslant 2\pi$, $j = 1, 2$.

Модел је предложен у раду Coles and Walshaw (1994) и коришћен за описивање зависности између екстрема брзине ветра у правцима θ_1 и θ_2.

- **Бета модел**

У раду Coles and Tawn (1991) предложен је Дирихлеов[20] модел, тј. како се другачије назива, фамилија бета расподела екстремних вредности. Ту је

$$\begin{aligned} G_*(y_1, y_2) = \exp\Bigg(&-\frac{1}{y_1}\left(1 - \mathrm{Be}\left(\frac{\alpha_1 y_1}{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2}; \alpha_1 + 1, \alpha_2\right)\right) \\ &- \frac{1}{y_2}\left(1 - \mathrm{Be}\left(\frac{\alpha_1 y_1}{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2}; \alpha_1, \alpha_2 + 1\right)\right)\Bigg), \quad y_1, y_2 > 0, \end{aligned}$$

при чему је $\mathrm{Be}(w; \alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int\limits_0^w t^{\alpha_1 - 1}(1 - t)^{\alpha_2 - 1}dt$ нормализована непотпуна бета функција. Параметри модела су $0 < \alpha_j$, $j = 1, 2$.

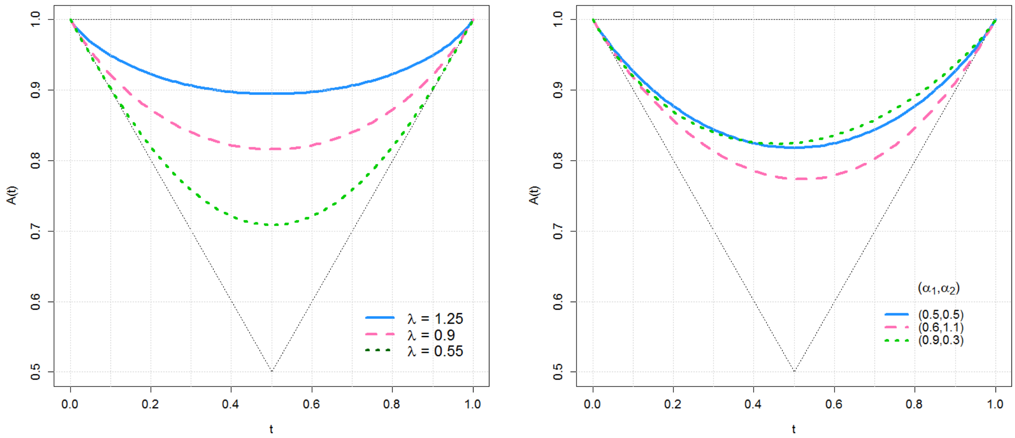
Одговарајућа спектрална мера H_* нема атоме ни у једној од тачака $(0, 1)$, $(1, 0)$, а спектрална густина h_* на интервалу $(0, 1)$ дата је формулом

$$h_*(w) = \frac{\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_1}\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot \frac{w^{\alpha_1 - 1}(1 - w)^{\alpha_2 - 1}}{(\alpha_1 w + \alpha_2(1 - w))^{\alpha_1 + \alpha_2 + 1}}.$$

Требало би напоменути да се у конструкцији овог модела кренуло од густине двопараметарске бета $B(\alpha_1, \alpha_2)$ расподеле (она се често користи за моделирање хидролошких опсервација), а затим је показано како се она, а генерално и произвољна ненегативна функција h на интервалу $(0, 1)$, може модификовати тако да се добије функција која је спектрална густина апсолутно непрекидне спектралне мере H_*. Дакле, заправо се конструише израз за H_* моделирањем функције h_*, која ће служити као њена спектрална густина. Новодобијена функција h_* мора задовољавати ограничење $\int\limits_0^1 w h_*(w)dw = 1 = \int\limits_0^1 (1 - w)h_*(w)dw$.

[19] Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), пруски математичар

[20] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), немачки математичар



Слика 3: *Графици Пикандсове функције зависности за Гаусов модел (лево), односно Дирихлеов модел (десно), за различите вредности параметара*

- **Полиномијални модел**

Овај модел предложен је у раду Klüppelberg and May (1998) и настао је конструкцијом Пикандсове функције зависности A. Наиме, нека је, за $m \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$A(t) = a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \cdots + a_2 t^2 - \left(\sum_{j=2}^{m} a_j\right) t + 1,$$

при чему је

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant a_2 \\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{j=2}^{m} a_j \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{j=2}^{m} (j-1)a_j \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{j=2}^{m} j(j-1)a_j \end{array}\right\} .$$

Такође, A мора бити конвексна функција, тј. мора важити и

$$0 \leqslant \sum_{j=2}^{m} j(j-1)a_j t^{j-2}, \quad \text{за } \forall t \in (0,1).$$

Ту је

$$G_*(y_1, y_2) = \exp\left(-\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} + \sum_{j=2}^{m} a_j \sum_{k=0}^{m-j} \binom{m-j}{k} \frac{y_1^{j+k-1} y_2^{m-j-k-1}}{(y_1+y_2)^{m-1}}\right), \quad y_1, y_2 > 0,$$

са укупно $(m-2)$ параметара. Одговарајућа спектрална мера H_* може се онда лако израчунати коришћењем

$$H_*([0,w]) = \begin{cases} 1 + A'(w), & \text{за } w \in [0,1) \\ 2, & \text{за } w = 1 \end{cases},$$

а величине атома мере H_* у тачкама $(0,1)$ и $(1,0)$ су

$$H_*(\{(0,1)\}) = 1 + A'(0) \quad \text{и} \quad H_*(\{(1,0)\}) = 1 - A'(1).$$

Према томе, $H_*(\{(0,1)\}) = 1 - \sum_{j=2}^{m} a_j$ и $H_*(\{(1,0)\}) = 1 - \sum_{j=2}^{m} (j-1)a_j$, а спектрална густина h_* на интервалу $(0,1)$ дата је формулом

$$h_*(w) = A''(w).$$

Како је функција A заправо полином потпуна зависност се може постићи када $m \to \infty$. У линеарном случају, $m = 1$, мора бити $A \equiv 1$, што одговара независности.

За потребе статистичког закључивања најважнији су тзв. квадратни и кубни случајеви, који одговарају, редом, мешовитом и асиметричном мешовитом моделу.
Ако је $m = 2$ мора важити $-a_1 = \theta = a_2 \in [0,1]$ што доводи до (симетричног) мешовитог модела код кога је $A(w) = 1 - \theta w + \theta w^2$, $0 \leqslant w \leqslant 1$ (Gumbel and Mustafi (1967)).
Ако је $m = 3$ мора важити $0 \leqslant \theta_1$, $0 \leqslant \theta_1 + 3\theta_2$, $\theta_1 + 2\theta_2 \leqslant 1$, где је $\theta_j := a_{j+1}$, $j = 1, 2$, што доводи до асиметричног мешовитог модела код кога је $A(w) = 1 - (\theta_1 + \theta_2)w + \theta_1 w^2 + \theta_2 w^3$, $0 \leqslant w \leqslant 1$ (Tawn (1988)).

1.7 Уопштења

Задржавајући претпоставку о независности и једнакој расподељености d-димензионих случајних вектора $\boldsymbol{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$, чије је екстремално понашање од интереса, уместо проучавања покомпонентног максимума у литератури су разматране и друге величине које су у вези са њиховим екстремима. Ту се, у првом реду, мисли на прекорачења високог вишедимензионог нивоа. Догађај облика $\{\boldsymbol{X}_1 \nleqslant \boldsymbol{b}_n\}$ назива се *прекорачење (d-димензионог) нивоа* $\boldsymbol{b}_n$. Он подразумева да постоји бар једна координатна случајна величина $X_{1,j}$ која прекорачује њој припадни ниво $b_{1,j}$, иако њен редни број у вектору остаје неодређен. Задатак је одређивање асимптотске расподеле, при $n \to \infty$, тзв. вектора скалираних прекорачења, тј. условног случајног вектора $\dfrac{\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{b}_n}{\boldsymbol{a}_n}$ при услову $\boldsymbol{X}_1 \nleqslant \boldsymbol{b}_n$. Ово се, затим, може повезати са проблемом области привлачења (1.55). За више детаља погледати нпр. Smith (1994), Tajvidi (1996), Kaufmann and Reiss (1995).

Вишедимензионе статистике поретка вишег реда (поред максимума) проучаване су у раду Cheng et al. (1997). Оне се, такође, дефинишу покомпонентно и то на следећи начин. Нека је, за $j = 1, 2, \dots d$,

$$X_{(1),j} \leqslant X_{(2),j} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n),j}$$

растући низ статистика поретка које одговарају опсервацијама $X_{1,j}, X_{2,j}, \dots, X_{n,j}$. Нека је за свако $j = 1, 2, \dots d$, $(k_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ низ природних бројева, такав да $k_{n,j} \to \infty$ и $\dfrac{k_{n,j}}{n} \to 0$, при $n \to \infty$, при чему је брзина раста $k_{n,j}$ иста за свако j. Задатак је одређивање асимптотске расподеле, при $n \to \infty$, низа $\boldsymbol{X}_{(k_n),n} := \big(X_{(k_{n,1}),n}, X_{(k_{n,2}),n}, \dots, X_{(k_{n,d}),n}\big)$.

Могу се проучавати и *рекорди у вишедимензионом случају.* Уколико је успостављено маргинално уређење у $\mathbb{R}^d$ $\boldsymbol{X}_n$ је рекорд у низу $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_n$ ако $\boldsymbol{X}_n > \bigvee_{j=1}^{n-1} \boldsymbol{X}_j$. Асимптотском расподелом низа овако дефинисаних рекорда бавили су се у свом раду Goldie and Resnick (1995).

Концепт који је природно вишедимензионог карактера јесте концепт „пратилаца" (ен. concomitants) – *придружених* или *индукованих статистика поретка.* Примера ради, ако је $(X_{i,1}, X_{i,2})$, $i = 1, 2, \dots, n$, узорак, обима n, дводимензионих случајних вектора нека је $X_{(1),1} \leqslant X_{(2),1} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n),j}$ растући низ статистика поретка прве координате вектора. Онда се вредност друге координате у пару чија је прва координата $X_{(j),1}$ назива пратилац те статистике поретка и означава са $X_{[j],2}$. Расподелу пратилаца екстремних статистика поретка проучавали су нпр. David (1994) и Nagaraja and David (1994).

Изостављање бар једне од претпоставки које се тичу независности и једнаке расподељености d-димензионих случајних вектора доводи до различитих генерализација. Прва могућност јесте да се изостави претпоставка о стационарности, тј. једнакој расподељености. У раду Hüsler (1989b) дата је карактеризација класе граничних расподела стандардизованог (покомпонентног) максимума, у низу независних случајних вектора који нису и једнако расподељени, као и резултати у погледу неких својстава одговарајућих структура зависности. За додатна уопштења погледати нпр. и Hüsler (1989a). Друга могућност је да се изостави претпоставка о независности. Најпознатији радови на ову тему су Hsing (1989) и Hüsler (1990).

У трећем поглављу ове дисертације биће приказани нови резултати у вези са граничном расподелом, при $n \to \infty$, дводимензионог покомпонентног максимума првих n чланова низа случајних вектора $((X_n, c_n X_n))$, стандардизованог одговарајућим нормирајућим векторима, при чему је (X_n) равномерни ауторегресиони процес првог реда, а (c_n) специфичан неслучајан $0-1$ низ. Због особина самог процеса (X_n), који се налази у основи, добијени резултати су интересантни и излазе из оквира опште теорије.

Поглавље 2: Равномерни $AR(1)$ процеси

Једна од статистичких дисциплина са најдинамичнијим развојем у последњих неколико деценија је *анализа временских серија*. Њен интензиван развој уследио је, између осталог, и због присутне интеракције са другим научним пољима и потребе за различитим практичним применама. Примери временских серија могу се наћи у разним областима живота: у финансијама и економији (нпр. промена цена акција на берзи на дневном нивоу, дневне флуктуације девизног курса, месечно кретање индустријске производње и цена, годишња вредност друштвеног производа), у медицини и здравственој заштити (нпр. у епидемиологији – број оболелих од грипа у одређеној области на недељном нивоу), у демографији (нпр. годишња стопа природног прираштаја), у инжењерству (нпр. очитавања температуре у хемијском пилот-постројењу у једноминутним интервалима), у метеорологији, хидрологији, геофизици, климатологији и проучавању загађености ваздуха.

Важно је напоменути да ће се, у наставку, под појмом *временска серија* подразумевати једна реализација случајног процеса са дискретним временом, тј. случајног низа, који се, онда, назива *модел временске серије*.

Нека је $X = (X_t)_{t\in T}$ (уобичајено је да се за област T дефинисаности процеса узима скуп целих или природних бројева) случајан низ и нека је $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ његова природна филтрација, тј.

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\{X_s : s \leqslant t\}\right) = \left\{X_s^{-1}(A) : s \leqslant t, A \in \mathcal{B}\right\},$$

где је $\mathcal{B}$ Борелова σ-алгебра подскупова скупа $\mathbb{R}$. Значајна класа модела временских серија добија се моделирањем условног математичког очекивања $E_{t-1}X_t := E(X_t|\mathcal{F}_{t-1})$ случајне величине X_t, при услову да је позната прошлост временске серије до тренутка t. Ради једноставности, често се претпоставља да је $E_{t-1}X_t$ одређена линеарна функција, тј. да случајне величине $E_{t-1}X_t$ чине линеаран случајан процес. У последње две деценије све се више пажње посвећује и нелинеарним моделима о чему детаљније неће бити говора.

Дефинисање линеарног модела врши се помоћу случајног низа (ξ_t) за који се, у општем случају, претпоставља да је низ некорелираних случајних величина са математичким очекивањем једнаким нули и константном дисперзијом једнаком σ^2. Овакав случајан низ назива се *бели шум* (ен. white noise process) или потпуно случајан процес (може се, такође, користити и термин: *иновациони низ*). Постоје три основне групе линеарних модела, које имају коначан број параметара, и то су:

- ауторегресиони процес реда p
  ако је
  $$E_{t-1}X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + c \tag{2.1}$$
  онда је X $AR(p)$ модел, $p \geqslant 1$
- процес покретних средина реда q
  ако је $E_{t-1}X_t = \beta_1\xi_{t-1} + \beta_2\xi_{t-2} + \cdots + \beta_q\xi_{t-q} + c$ онда је X $MA(q)$ модел, $q \geqslant 1$
- (мешовити) ауторегресиони процес покретних средина
  он представља кобинацију $AR(p)$ и $MA(q)$ процеса;
  ако је $E_{t-1}X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \beta_1\xi_{t-1} + \beta_2\xi_{t-2} + \cdots + \beta_q\xi_{t-q} + c$
  онда је X $ARMA(p,q)$ модел, $p, q \geqslant 1$

при чему је $c \in \mathbb{R}$ константа, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ су непознати параметри модела.
Опште форме линеарних модела стационарних временских серија дате су са:

- $\star$ $AR(p)$, $p \geqslant 1$
$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \xi_t + c \tag{2.2}$$
- $\star$ $MA(q)$, $q \geqslant 1$
$$X_t = \xi_t + \beta_1\xi_{t-1} + \beta_2\xi_{t-2} + \cdots + \beta_q\xi_{t-q} + c \tag{2.3}$$
- $\star$ $ARMA(p,q)$, $p, q \geqslant 1$
$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \xi_t + \beta_1\xi_{t-1} + \beta_2\xi_{t-2} + \cdots + \beta_q\xi_{t-q} + c. \tag{2.4}$$

При томе, јасно је да је други начин задавања процеса X рестриктивнији него први – моделирањем условног математичког очекивања, у смислу да се добија ужа класа модела. Постоје многи модели, од којих ће неки касније бити и наведени, код којих је условно математичко очекивање задато линеарним изразом али се они сами не могу написати у оваквој општој форми за X_t.

Претпоставља се да важи

$$E\left(\xi_{t+s}|\mathcal{F}_t\right) = \begin{cases} \xi_{t+s}, & \text{ако је } s \leqslant 0 \\ 0, & \text{ако је } s > 0 \end{cases}.$$

Функција средње вредности m_X случајног низа $X = (X_t)$ је функција

$$m_X(t) = EX_t, \text{ за } t \in T.$$

У ситуацији када дати случајан низ (X_t) има коначне моменте другог реда (тј. припада класи $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ квадратно-интеграбилних случајних процеса) могу се дефинисати и

- *функција дисперзије*: $D_X(t) = DX_t = E\left(X_t^2\right) - (EX_t)^2$, за $t \in T$
- *(ауто)коваријациона функција*:

$$K_X(t,s) = \operatorname{cov}(X_t, X_s) = E(X_tX_s) - m_X(t)m_X(s), \text{ за } t, s \in T$$

- *(ауто)корелациона функција*:

$$\rho_X(t,s) = \operatorname{Corr}(X_t, X_s) = \frac{K_X(t,s)}{\sqrt{DX_tDX_s}}, \text{ за } t, s \in T.$$

С обзиром на то да је, приликом проучавања реалних појава, обично на располагању само по једна реализација сваке случајне величине X_t, $t \in T$, временска хетерогеност је особина случајног низа (X_t) која ствара непремостиве тешкоће при моделирању и прогнозирању појава од интереса. Због тога се разматрање може (а то се често и ради) ограничити на оне моделе који испољавају одређену правилност, током времена, у понашању временске серије. У те сврхе уводи се концепт стационарности. О својству строге стационарности случајног низа већ је било говора у Пододељку 1.1.2 и оно је значајније са становишта теорије вероватноћа, а много мање је од користи у применама јер је престрого и тешко се може установити у временској серији (суштински је базирано на непознатој расподели вероватноћа). Уместо да се услови намећу на коначнодимензионе расподеле уводи се тип стационарности за који би се могло рећи да више служи у оперативне сврхе, а код кога се услови изражавају у терминима момената првог и другог реда. Тако се стиже и до *својства слабе стационарности* L^2-случајног низа (X_t), које се дефинише са

– функција средње вредности m_X је константна и не зависи од вредности аргумента $t \in T$, $m_X(t) = m = \text{const}$, за свако $t \in T$, тј. инваријантна је у односу на транслацију времена

– аутоковаријациона функција $K_X(t, s)$ зависи од временских тренутака t и s једино преко њихове разлике $|t - s|$, тј. $K_X(t, t - k) = \text{const}$, за дато $k \in \mathbb{Z}$, фиксирано и такво да $t - k \in T$, и $t \in T$.

Како аутоковаријациона функција $K_X(t, s)$, а самим тим и аутокорелациона функција $\rho_X(t, s)$, слабо стационарног случајног низа $X = (X_t)$ не зависе од појединачних вредности својих аргумената t и s већ само од дужине $|t - s|$ одговарајућег временског интервала, може се поједноставити нотација тако што се поменуте функције запишу као функције по једног аргумента – поменутог временског размака (ен. time lag) $|t - s|$. Дакле, овде $K_X : \mathbb{N}_0 \longrightarrow [-DX_1, DX_1]$ и $\rho_X : \mathbb{N}_0 \longrightarrow [-1, 1]$, при чему се вредности $K_X(j)$ и $\rho_X(j)$ називају, редом, *аутоковаријација* и *аутокорелација j-тог реда*, $j \in \mathbb{N}_0$.

Јасно је да је строго стационаран случајан низ са коначним моментима другог реда, такође, и слабо стационаран. Обрнута импликација, у општем случају – без важења додатних услова, није тачна.

У погледу важења својства слабе стационарности за раније уведене линеарне моделе са коначним бројем параметара могу се донети следећи закључци:

- ⋆ $AR(p)$ модел, описан једначином (2.2), је слабо стационаран уколико сви корени тзв. карактеристичне једначине

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \cdots - \alpha_p z^p = 0$$

леже изван јединичног круга, тј. ако су вредности свих параметара $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ по апсолутној вредности строго мање од јединице

- ⋆ $MA(q)$ модел, описан једначином (2.3), је увек слабо стационаран
- ⋆ $ARMA(p,q)$ модел дат у општој форми (2.4) – његова слаба стационарност у потпуности зависи од вредности ауторегресионих параметара $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, а не и од параметара покретних средина $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$, тј. он је слабо стационаран ако његова AR компонента испуњава услов слабе стационарности.

У наставку ће бити више речи о линеарном ауторегресионом процесу првог реда. Он заслужује дужну пажњу с обзиром на то да је један од најосновнијих случајних процеса који се користи као једноставан модел многих временских серија (посебно у финансијама и економији), али има и веома значајну улогу „градивног блока” за комплексније моделе неопходне у применама. Укратко, $AR(1)$ структура је једноставна, корисна и објашњива у разним контекстима.

Сматраће се да је, по дефиницији, $X = (X_t)_{t \in T}$ $AR(1)$ процес са иновационим низом (ξ_t) и (ауторегресионим) параметром α ако је

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \xi_t, \quad \text{за } \forall t \in T, \tag{2.5}$$

при чему је (ξ_t) низ независних, једнако расподељених случајних величина, таквих да је случајна величина ξ_t независна не само од случајне величине X_{t-1} него и од целокупне прошлости процеса X до тренутка t.

Овај процес је слабо стационаран уколико важи $|\alpha| < 1$ и тада су његове функције средње вредности и дисперзије једнаке, редом,

$$m := m(t) = \frac{\mu}{1-\alpha}, \quad \text{и} \quad D(t) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}, \quad \text{за } \forall t \in T,$$

где је $\mu := E\xi_1$, $\sigma^2 := D\xi_1$.

За аутоковаријациону функцију важи формула $K(j) = \dfrac{\alpha^j \sigma^2}{1-\alpha^2}$, а за аутокорелациону функцију $\rho(j) = \alpha^j$, $j \in \mathbb{N}_0$. При истој претпоставци

($|\alpha| < 1$) процес X је *ергодичан у средње-квадратном смислу* (кратко L^2-ергодичан) у односу на математичко очекивање, тј.

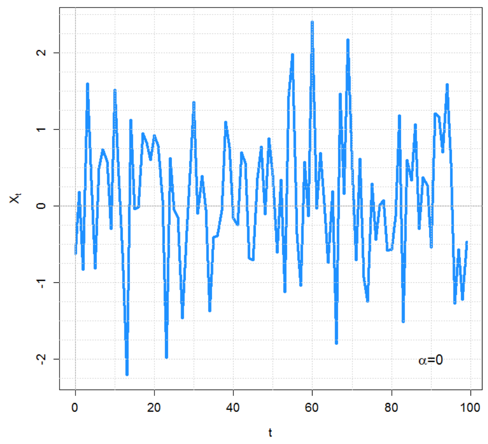
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \overset{\text{с.к.}}{\to} m, \quad \text{при } n \to \infty.$$

L^2-ергодичност у односу на математичко очекивање је значајна особина слабо стационарног случајног низа, јер омогућава да се на основу једне његове (довољно дуге) реализације дође до закључка о нумеричкој карактеристици низа – моменту првог реда. Прецизније, она омогућава приближно одређивање теоријског математичког очекивања датог низа користећи временску средину његове довољно дуге реализације. Довољан услов за L^2-ергодичност у односу на математичко очекивање је да ред са општим чланом $K(j)$ апсолутно конвергира, тј. $\sum_{j=1}^{+\infty}|K(j)| < +\infty$, што је код $AR(1)$ процеса са $|\alpha| < 1$ свакако испуњено. Одатле следи да за овај процес важи закон великих бројева. За више детаља погледати нпр. књигу Hamilton (1994).

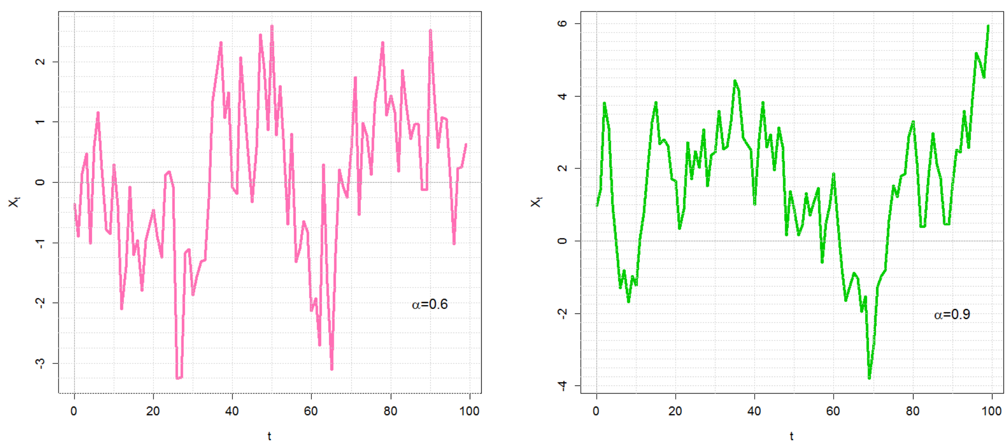
Из формуле (2.5), којом се дефинише линеарни ауторегресиони процес првог реда, јасно је да он поседује марковско својство, тј. будућност временске серије зависи од њене прошлости само кроз садашњост.

Један од највише проучаваних модела у класичној литератури за анализу временских серија је *стационаран Гаусов* $AR(1)$ *процес.* Низ (ξ_t) у једнакости (2.5) је строги Гаусов бели шум, тј. иновациони низ је низ независних, једнако расподељених случајних величина са нормалном $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ расподелом. На еквивалентан начин дефинише се захтевом да условна случајна величина X_t, при услову $X_{t-1} = x$, има $\mathcal{N}(\alpha x + \mu, \sigma^2)$ расподелу. Тада је тачно и (2.1) при чему је $\alpha_1 = \alpha$ и $c = \mu$, па $E_{t-1}X_t \in \mathcal{N}\left(\frac{\mu}{1-\alpha}, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right)$. Како су иновације ξ_t нормално расподељене, и случајне величине у низу (X_t) имају нормалне маргиналне расподеле, тачније $X_t \in \mathcal{N}\left(\frac{\mu}{1-\alpha}, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right)$. Код реалних Гаусових процеса појмови строге и слабе стационарности су еквивалентни, те је то случај и код Гаусовог $AR(1)$ процеса. Наиме, заједничка густина вишедимензионе нормалне расподеле параметризована је вектором математичких очекивања и коваријационом матрицом одговарајућег случајног вектора чија је то густина, па, стога, слаба стационарност Гаусовог процеса очигледно имплицира строгу стационарност. Занимљиво је још поменути да је класа AR процеса, као и њено проширење – класа $ARMA$ процеса, густа у класи Гаусових линеарних процеса.

На следећем графику приказане су три реализације Гаусовог $AR(1)$ процеса, за различите вредности α у (2.5), које показују утицај промене ауторегресионог параметра на изглед временске серије (X_t).



Слика 4: *Трајекторија строгог Гаусовог белог шума ($\alpha = 0$)*



Слика 5: *Трајекторија Гаусовог линеарног $AR(1)$ модела са $\alpha = 0.6$ (лево), односно $\alpha = 0.9$ (десно)*

2.1 Ауторегресиони процеси првог реда са маргиналном расподелом која није Гаусова

Потреба за конструисањем и проучавањем линеарних ауторегресионих модела првог реда који нису Гаусови појавила се сасвим природно с обзиром на то да су опсервације које очигледно не потичу из нормалне расподеле веома уобичајене у различитим областима живота и науке. Ту се, пре свега, мисли на низове бројачких вредности (нпр. у системима масовног опслуживања), процентуалних вредности (нпр. у метеорологији – влажност ваздуха), бинарних вредности (нпр. у макроекономији; телекомуникацијама) односно на низове чисто ненегативних опсервација и/или опсервација „са тешким репом" (мисли се на опсервације које потичу из маргиналних расподела са високим коефицијентом спљоштености, односно тешким репом у смислу Напомене 1.2). Дакле, постоји снажна мотивација за развој оваквих модела. О томе говори чињеница да се у литератури може наићи на више десетина различитих модела са линеарном $AR(1)$ структуром, који се предлажу као не-Гаусови аналогони Гаусовог $AR(1)$ модела. Најстарији од њих датирају из осамдесетих година прошлог века. Детаљна класификација (до тада) познатих модела, њих око 30, и неки теоријски резултати, уз разматрање примена модела на анализу података и релевантне референце дати су у прегледном раду Grunwald et al. (1997).

Овде је право место да се помену неки од модела са линеарном ауторегресионом структуром, хронолошки како су установљени:

- модели са апсолутно непрекидним маргиналним расподелама, дефинисани као у (2.5):
  - $EAR(1)$ – модел са експоненцијалном маргиналном расподелом (Gaver and Lewis (1980))
  - $GAR(1)$ – модел са гама маргиналном расподелом (Lawrance (1982))
  - $LAR(1)$ – модел са Лапласовом[21] маргиналном расподелом (Anděl (1983))
- модели са дискретним маргиналним расподелама које узимају вредности у скупу $\mathbb{N}_0$

[21] Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749-1827), француски математичар

модели у наставку нису линеарни у смислу важења (2.5), већ припадају широј класи условних линеарних ауторегресионих процеса првог реда, тј. $CLAR(1)$ класи процеса, који се дефинишу рекурентном везом облика (2.1):

– $INAR(1)$ – класа модела (McKenzie (1985), Al-Osh and Alzaid (1987)) која обухвата:
  $PINAR(1)$ – модел са Пуасоновом маргиналном расподелом
  $GINAR(1)$ – модел са геометријском маргиналном расподелом
  $NBINAR(1)$ – модел са негативном биномном маргиналном расподелом.

У наредном одељку више пажње биће посвећено линеарним $AR(1)$ процесима са равномерном маргиналном расподелом, с обзиром да су добијени нови, занимљиви резултати у погледу асимптотског заједничког понашања максимума комплетних и некомплетних узорака из ових процеса, што ће бити приказано у трећем поглављу ове дисертације.

2.2 Дефиниција и особине равномерног $AR(1)$ процеса

Први линеарни ауторегресиони модел првог реда са непрекидном равномерном маргиналном расподелом (кратко *равномерни* $AR(1)$ *модел*) конструисан је у Chernick (1978), Chernick (1981).

Дефиниција 2.1. *Позитивно корелиран равномерни* $AR(1)$ *процес* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ са параметром r дефинише се рекурентном формулом

$$X_n = \frac{1}{r}X_{n-1} + \xi_n, \quad n \geqslant 2, \tag{2.6}$$

при чему је r природан број, такав да је $r \geqslant 2$, $X_1 \in \mathcal{U}[0,1]$, $(\xi_n)_{n\geqslant 2}$ је низ независних, једнако расподељених случајних величина са дискретном равномерном расподелом на скупу $\left\{\frac{j}{r} : j = 0, 1, \ldots, r-1\right\}$, а ξ_m и X_{m-1} су независне случајне величине за $\forall m \geqslant 2$.

Овако дефинисан случајан процес пример је временске серије са тешким репом. Овде се појам „тешког репа” појављује у значењу које му је дао O'Brien, а то је да је вероватноћа реализације опсервације која има (изузетно) велику вредност (у односу на границе носача расподеле из које потиче) релативно велика, тј. није занемарљива.

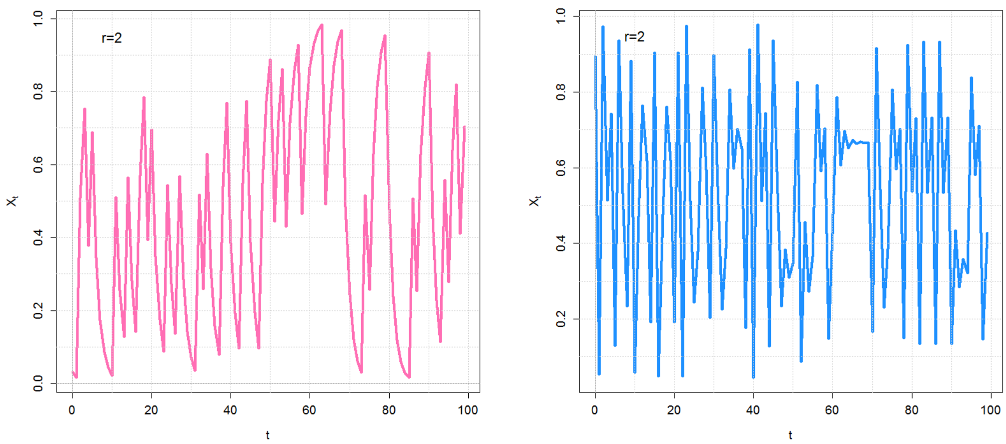
Други линеарни $AR(1)$ модел, такође са равномерном маргиналном расподелом, конструисан је у раду Chernick and Davis (1982).

Дефиниција 2.2. *Негативно корелиран равномерни* $AR(1)$ *процес* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ са параметром r дефинише се рекурентном формулом

$$X_n = -\frac{1}{r}X_{n-1} + \xi_n, \quad n \geqslant 2, \tag{2.7}$$

при чему је r природан број, такав да је $r \geqslant 2$, $X_1 \in \mathcal{U}[0,1]$, $(\xi_n)_{n\geqslant 2}$ је низ независних, једнако расподељених случајних величина са дискретном равномерном расподелом на скупу $\left\{\frac{j}{r} : j = 1, 2, \ldots, r\right\}$, а ξ_m и X_{m-1} су независне случајне величине за $\forall m \geqslant 2$.

Овим дефиницијама уведена су два типа равномерних $AR(1)$ процеса – процеси са позитивном, односно негативном аутокорелацијом првог реда $\rho(1)$ једнаком $\frac{1}{r}$, односно $-\frac{1}{r}$, респективно.



Слика 6: *Трајекторија равномерног* $AR(1)$ *процеса са позитивном аутокорелацијом првог реда* $\rho(1) = 0.5$ *(лево), односно негативном аутокорелацијом првог реда* $\rho(1) = -0.5$ *(десно)*

Значајна вероватносна својства ова два процеса доказана су поменутим радовима. Дакле, ако је (X_n) равномерни $AR(1)$ процес са позитивном, односно негативном, аутокорелацијом првог реда тада важи:

- ⋆ (X_n) је строго стационаран случајан низ

- ⋆ маргинална расподела је равномерна расподела на јединичном интервалу (отуда потиче и назив процеса), тј. $X_n \in \mathcal{U}[0,1]$, за свако $n \in \mathbb{N}$
- ⋆ низ (X_n) задовољава услов $D(u_n)$ из Дефиниције 1.3, при чему је у неједнакости (1.14) $\alpha_{n,l} = \dfrac{|\rho(1)|^l}{1-|\rho(1)|}$, за $n \in \mathbb{N}$, $\rho(1)$ аутокорелација првог реда и $u_n = 1 - \dfrac{x}{n}$, за $x > 0$
- ⋆ за низ (X_n) не важи услов $D'(u_n)$ из Дефиниције 1.4, при чему је у (1.15) $u_n = 1 - \dfrac{x}{n}$, за $x > 0$.

Последње својство има врло интересантне последице у погледу екстремалног понашања ових процеса.

Нека је M_n случајна величина која представља максимум првих n чланова низа (X_n), тј.

$$M_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j.$$

Прво ће бити разматран случај када је (X_n) позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром r, дефинисан рекурзивном везом (2.6).

Из класичне једнодимензионе теорије екстремних вредности познато је да равномерна расподела на сегменту $[0,1]$ припада области привлачења за максимуме Вејбулове $G_{2,1}$ расподеле, тј. ако је (X_n^*) пратећи низ за (X_n) и $M_n^* = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j^*$ онда важи

$$P\left\{\frac{M_n^* - 1}{\frac{1}{n}} \leqslant x\right\} \to e^x, \quad \text{при } n \to \infty, \text{ за } \forall x \leqslant 0. \tag{2.8}$$

Да низ (X_n) задовољава услов $D'(u_n)$, то би, уз већ констатовано важење услова $D(u_n)$, имплицирало да линеарно нормиран максимум M_n, стандардизован истим нормирајућим константама као у (2.8), такође, има $G_{2,1}$ расподелу. Међутим, у процесу (X_n) постоји тежња да се велике вредности процеса гомилају, тј. појављују у кластерима $\Big($уочити: ако је $\xi_n = \dfrac{r-1}{r}$ – што се дешава са вероватноћом $\dfrac{1}{r}$ – онда је $X_{n+1} > X_n$ и, стога, колико год велико, тј. блиско јединици, X_n било постоји фиксирана вероватноћа једнака $\dfrac{1}{r}$ да ће X_{n+1} бити веће, односно једнака $\dfrac{1}{r^2}$ да ће X_{n+2} бити још веће итд$\Big)$, услед чега, као што је раније речено, не важи услов $D'(u_n)$. Асимптотска расподела M_n, при

$n \to \infty$, садржана је у следећој теореми која је резултат у Chernick (1978), Chernick (1981).

Теорема 2.1. *За случајан низ* (X_n), *дефинисан рекурзивном везом (2.6) важи*

$$P\left\{M_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}\right\} \to e^{-\frac{r-1}{r}x}, \quad \text{при } n \to \infty, \ \text{за } \forall x \geqslant 0, \tag{2.9}$$

или, еквивалентно,

$$P\left\{\frac{M_n - 1}{\frac{1}{n}} \leqslant y\right\} \to e^{\frac{r-1}{r}y}, \quad \text{при } n \to \infty, \ \text{за } \forall y \leqslant 0. \tag{2.10}$$

Гранична вредност у (2.10) указује на то да је екстремални индекс θ низа (X_n) једнак $\dfrac{r-1}{r}$.

У наставку ће бити разматран случај када је (X_n) негативно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром r, дефинисан рекурзивном везом (2.7). Асимптотска расподела максимума M_n, при $n \to \infty$, садржана је у следећој теореми, која је један од резултата у Chernick and Davis (1982).

Теорема 2.2. *За случајан низ* (X_n), *дефинисан рекурзивном везом (2.7) важи*

$$P\left\{M_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}\right\} \to e^{-\frac{r^2-1}{r^2}x}, \quad \text{при } n \to \infty, \ \text{за } \forall x \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Дакле, из претходно наведене теореме, може се закључити да се максимум оваквог низа и максимум из позитивно корелираног равномерног $AR(1)$ процеса са параметром r^2 асимптотски исто понашају. Екстремални индекс θ овде је једнак $\dfrac{r^2-1}{r^2}$.

У раду Chernick et al. (1991) дефинишу се локални услови слабе зависности, у ознаци $D^{(k)}(u_n)$, за строго стационарне случајне низове који задовољавају услов $D(u_n)$. При новоуведеним условима могуће је одредити асимптотску расподелу узорачког максимума само на основу познавања заједничке расподеле k узастопних чланова низа. Хијерархија све слабијих локалних услова слабе зависности уводи се на следећи начин. Нека је (X_n) строго стационаран случајан низ за који важи услов $D(u_n)$. За овај низ испуњен је услов $D^{(k)}(u_n)$, $k \in \mathbb{N}$, ако постоје низови природних бројева (s_n) и (l_n), такви да $s_n \to \infty$, $s_n \alpha_{n,l_n} \to 0$, $\dfrac{s_n l_n}{n} \to 0$ и

$$nP\{X_1 > u_n \geqslant M_{2,k}, M_{k+1,r_n} > u_n\} \to 0, \quad \text{при } n \to \infty, \tag{2.12}$$

где је $M_{i,j} := -\infty$ за $i > j$, $M_{i,j} := \max\limits_{1\leqslant t\leqslant j} X_t$ за $i \leqslant j$, и $r_n = \left[\dfrac{n}{s_n}\right]$. Очигледно је да је услов (2.12) имплициран условом

$$n \sum_{j=k+1}^{r_n} P\{X_1 > u_n \geqslant M_{2,k}, X_j > u_n\} \to 0, \quad \text{при } n \to \infty, \tag{2.13}$$

а последњи услов, садржан у (2.13), нпр. за $k = 1$ није ништа друго до услов $D^{'}(u_n)$.

У истом раду доказано је да уколико важе услови $D(u_n)$ и $D^{(k)}(u_n)$ за неко $k \in \mathbb{N}$ и $u_n = u_n(x)$, за $\forall x > 0$, $n \in \mathbb{N}$, онда постоји екстремални индекс за дати случајан низ (X_n) и једнак је θ ако и само ако

$$P\{M_{2,k} \leqslant u_n | X_1 > u_n\} \to \theta, \quad \text{при } n \to \infty, \quad \text{за } \forall x > 0.$$

Такође је показано да за позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес важи услов $D^{(2)}(u_n)$ (кластере прекорачења формирају групе узастопних опсервација), док за негативно корелиран равномерни $AR(1)$ процес овај услов није задовољен већ важи услов $D^{(3)}(u_n)$ (карактеристичан је чисто осцилирајући образац унутар кластера), што је интересантно с обзиром на то да оба процеса имају исте маргиналне расподеле. У обе ситуације је $u_n = 1 - \dfrac{x}{n}$, $s_n = [n^{3/4}]$, $l_n = [n^{1/8}]$, $\alpha_{n,l_n} = \dfrac{(\rho(1))^{l_n}}{1-\rho(1)}$.

У раду Davis (1979) разматран је проблем слабе конвергенције, односно одређивања заједничке граничне расподеле, при $n \to \infty$, случајног вектора чије су компоненте максимум и минимум првих n чланова строго стационарног случајног низа, при условима слабе зависности који су по својој природи врло слични условима $D(u_n)$ и $D^{'}(u_n)$. Добро је познато да ако је низ (X_n) низ независних, једнако расподељених случајних величина онда су случајне величине M_n и m_n зависне, за $\forall n \in \mathbb{N}$ фиксирано, а асимптотски су независне, при $n \to \infty$, након линеарног нормирања. Код стационарних, помешаних случајних низова овај класичан резултат не мора важити, тј. може се појавити асимптотска зависност поменутих случајних величина. У Davis (1979) дати су довољни услови: један је тзв. услов асимптотске независности а други је услов $D^{'}(u_n, v_n)$ – он представља локални услов зависности који имплицира немогућност груписања високих вредности (виших од нивоа u_n) односно ниских вредности (нижих од нивоа v_n), при којима се максимум и минимум заједнички и појединачно, тј. маргинално, асимптотски понашају као да потичу из пратећег низа за (X_n). Дакле, између осталог, формулисани су и довољни услови при којима су максимум и минимум асимптотски независни.

Извесно побољшање резултата који се односи на поменуту асимптотску независност, у смислу да је ослабљен један од услова, дато је у раду Davis (1982). Ту је показано да уколико:

- за низ (X_n) важи следећи услов слабе зависности:
  за сваки природан број n и сваки избор индекса

  $$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p < j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leqslant n$$

  таквих да је $j_1 - i_p \geqslant l$, важе неједнакости

  $$\begin{aligned}
  &\left| P\left\{ \max_{j \in A_1 \cup A_2} X_j \leqslant u_n \right\} - P\left\{ \max_{j \in A_1} X_j \leqslant u_n \right\} \cdot P\left\{ \max_{j \in A_2} X_j \leqslant u_n \right\} \right| \leqslant \alpha_{n,l}, \\
  &\left| P\left\{ \min_{j \in A_1 \cup A_2} X_j > v_n \right\} - P\left\{ \min_{j \in A_1} X_j > v_n \right\} \cdot P\left\{ \min_{j \in A_2} X_j > v_n \right\} \right| \leqslant \alpha_{n,l}, \\
  &\left| P\left\{ \min_{j \in A_1 \cup A_2} X_j > v_n, \max_{j \in A_1 \cup A_2} X_j \leqslant u_n \right\} \right. \\
  &\left. -P\left\{ \min_{j \in A_1} X_j > v_n, \max_{j \in A_1} X_j \leqslant u_n \right\} \cdot P\left\{ \min_{j \in A_2} X_j > v_n, \max_{j \in A_2} X_j \leqslant u_n \right\} \right| \leqslant \alpha_{n,l},
  \end{aligned} \tag{2.14}$$

  где је $A_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, $A_2 = \{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$, и $\alpha_{n,l_n} \to 0$, при $n \to \infty$, за неки низ $l_n \to \infty$ код кога је $l_n = o(n)$
- $P\{M_n \leqslant u_n\} \to G(x)$, при $n \to \infty$, за $x \in \mathbb{R}$, где је G недегенерисана функција расподеле
- $P\{m_n > v_n\} \to H(y)$, при $n \to \infty$, за $y \in \mathbb{R}$, где је H недегенерисана функција расподеле
- важи услов:

  $$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n \cdot \sum_{j=2}^{[n/k]} \left(P\left\{ X_1 > u_n, X_j \leqslant v_n \right\} + P\left\{ X_1 \leqslant v_n, X_j > u_n \right\} \right) = o(1), \tag{2.15}$$

  при $k \to \infty$, онда

  $$P\{M_n \leqslant u_n, m_n > v_n\} \to G(x)H(y), \quad \text{при } n \to \infty, \quad \text{за } x, y \in \mathbb{R}.$$

Поред тога одређена је и класа свих заједничких, недегенерисаних граничних расподела за максимум и минимум у строго стационарном случајном низу који задовољава одређене услове помешаности.

Специјално, нека је дати строго стационаран случајан низ (X_n) управо позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес, код кога је $\rho(1) = \frac{1}{r}$. Нека је $V_j := 1 - X_j$, за $j \in \mathbb{N}$. Лако се може приметити да је и (V_n) тада позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром r, као и да је максимум првих n чланова овог низа уствари минимум првих n чланова оригиналног случајног низа (X_n), и обрнуто. Стога важи

$$P\{m_n > v_n\} = P\{M_n < 1 - v_n\}, \quad \text{где је } v_n = \frac{y}{n}, y \geqslant 0,$$

на основу чега је, користећи Теорему 2.1, у Chernick and Davis (1982) доказано

$$P\left\{m_n > \frac{y}{n}\right\} \to e^{-\frac{r-1}{r}y}, \quad \text{при } n \to \infty, \text{ за } \forall y \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Такође, показано је да услов слабе зависности из (2.14) важи за $u_n = 1 - \frac{x}{n}$ и $v_n = \frac{y}{n}$, $\forall x, y \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha_{n,l} = \frac{2(\rho(1))^l}{1 - \rho(1)}$, а важи и услов (2.15), па како су испуњена сва четири услова следи закључак да су код овог процеса максимум и минимум асимптотски независни. То, међутим, није случај код негативно корелираног равномерног $AR(1)$ процеса што је свакако занимљиво али можда не и превише изненађујуће.

Поглавље 3: Асимптотске расподеле максимума комплетних и некомплетних узорака из стационарних низова

Приликом анализе реалних података веома је честа *појава недостајућих опсервација.* Опсервације могу бити изгубљене (рецимо услед отказивања система за мерење), цензурисане, односно недоступне из неког разлога. У наставку ће се под појмом *некомплетан узорак* подразумевати управо узорак код кога одређене опсервације фале, тј. код кога су реализације одређених случајних величина, из комплетног узорка датог обима, нерегистроване.

Проучавање екстремних вредности некомплетних узорака из строго стационарних случајних низова посебно је актуелно последњих година. Већи број радова написан је на ову тему. Разматрање утицаја (на случајан начин или, пак, детерминистички одређених) нерегистрованих опсервација на максимум у строго стационарном случајном низу приказано је у радовима: Scotto (2005), Hall and Hüsler (2006), Hall and Scotto (2008), Hall and Temido (2009). Са друге стране, посматрано је и асимптотско заједничко понашање максимума комплетних и некомплетних узорака из неких посебних низова: Гаусовог низа (Mittal (1978)), Гаусовог низа са псеудо-стационарним трендом (Kudrov and Piterbarg (2007)), вишедимензионог стационарног Гаусовог низа (Peng et al. (2010)), стационарног Гаусовог низа (Hashorva et al. (2013)), процеса складиштења са дискретним временом и улазним фракционалним Брауновим[22] кретањем (ен. a storage process in discrete time with fractional Brownian motion as input) (Mladenović and Piterbarg (2006)) итд.

[22]Robert Brown (1773-1858), шкотски ботаничар

3.1 Општи резултати

Опште тврђење које је најзначајније у контексту новодобијених резултата (Одељак 3.3) садржано је у раду Mladenović and Piterbarg (2006). Оно ће бити наведено и укратко прокоментарисано.

Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ строго стационаран случајан низ са заједничком функцијом расподеле F, $F(x) = P\{X_1 \leqslant x\}$, $x \in \mathbb{R}$. Нека је, даље, случајна величина M_n максимум првих n чланова овог низа, тј. $M_n := \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} X_j$. Претпостави се да неке случајне величине у низу $X_1, X_2, \ldots$ могу бити *регистроване* и да низ Бернулијевих[23] случајних величина $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, независан од низа (X_n), указује на то који су од чланова првобитног низа регистровани. Случајна величина I_j није ништа друго до индикатор догађаја да је случајна величина X_j регистрована, $j \in \mathbb{N}$. Парцијална сума $S_n := \sum\limits_{j=1}^{n} I_j$ је, једноставно, број регистрованих међу првих n чланова низа (X_n). Случајна величина $\widetilde{M}_n := \max\{X_j : I_j = 1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ тада је *парцијални максимум* регистрованих међу првих n чланова низа (X_n).

Теорема 3.1. *Нека важе следећи услови:*

а) *$F \in D(G)$, тј. важи (1.4) за $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, и $\forall x \in \mathbb{R}$*

б) *(X_n) је строго стационаран случајан низ, такав да задовољава услове $D(u_n, v_n)$ и $D'(u_n)$ за $u_n = a_n x + b_n$ и $v_n = a_n y + b_n$, при чему је $x < y$*

в) *(I_n) је низ индикатора, независан од низа (X_n), такав да*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p \in [0,1], \quad \text{при } n \to \infty. \tag{3.1}$$

Једнакост

$$\lim_{n\to\infty} P\{\widetilde{M}_n \leqslant a_n x + b_n, M_n \leqslant a_n y + b_n\} = (G(x))^p (G(y))^{1-p} \tag{3.2}$$

тада је тачна за свако $x < y$.

Дакле, при наведеним условима, од којих би посебно требало истаћи услов чије важење онемогућава груписање екстремних вредности, стандардизовани максимуми $\widetilde{M}_n$ и M_n су *асимптотски независни*, у смислу да су догађаји $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant a_n x + b_n\right\}$ и $\{M_n \leqslant a_n y + b_n\}$,

[23] Jakob Bernoulli (1655-1705), швајцарски математичар

$x < y$, асимптотски независни, при $n \to \infty$, за погодан избор $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$.

Штавише, гранична расподела дводимензионог случајног вектора $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$ *једнозначно је одређена* вредношћу p из (3.1).

При томе, случајна величина S_n, која се појављује у Теореми 3.1, не мора обавезно имати биномну расподелу. Посебно, уместо низа (I_n) Бернулијевих случајних величина може се узети дегенерисан, тј. неслучајан $0-1$ низ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такав да

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_j \to p \in [0,1], \quad \text{при } n \to \infty, \tag{3.3}$$

и да тврђење и даље важи.

У раду Krajka (2011) резултат из Теореме 3.1 уопштен је на случај када гранична вредност p у (3.1) није константа, него је и сама случајна величина означена са $\mathcal{P}$. Гранична вредност у (3.2) тада је једнака

$$E\left((G(x))^{\mathcal{P}}(G(y))^{1-\mathcal{P}}\right).$$

На овом резултату базиран је и резултат у погледу асимптотске заједничке расподеле максимума и минимума комплетних и некомплетних узорака из строго стационарних случајних низова, садржан у раду Hashorva and Weng (2014). При одређеним додатним, слабим условима који се намећу на низ (X_n) показано је да су случајни вектори $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$ и $(\widetilde{m}_n, m_n)$ асимптотски независни ако је $\mathcal{P}$ константа; m_n и $\widetilde{m}_n$ су, редом, минимум комплетног и некомплетног узорка. Ова чињеница је интересантна и донекле очекивана с обзиром на то да некомплетност узорка погађа и максимум и минимум, па стога њихова асимптотска независност није увек могућа.

Други приступ уопштењу резултата Mladenović and Piterbarg (2006) дат је нпр. у раду Robert (2010), где је дозвољено формирање кластера екстремних вредности у строго стационарном случајном низу (X_n) уз додатне услове, који се, између осталог, односе на низ (I_n).

3.2 Ранији резултати за узорке из равномерног $AR(1)$ процеса

У раду Mladenović (2009) разматран је максимум једног, специфичног некомплетног узорка из позитивно корелираног равномерног $AR(1)$ процеса са параметром r, дефинисаног формулом (2.6).

Теорема 3.2. *Нека је (X_n) позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром $r \geqslant 2$, нека је (c_n) неслучајан $0-1$ низ дат са*

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{ако је } n = 2m \\ 0, & \text{ако је } n = 2m-1 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

и нека је $\widetilde{M}_n$ максимум подузорка комплетног узорка обима n, одређен низом (c_n), тј. максимум подузорка кога чине случајне величине из низа (X_n) са парним индексима, мањим или једнаким n. Тада важи:

а) *ако је $0 < x < y$ онда*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{r-1}{r}y\right) \tag{3.5}$$

б) *ако је $0 < \frac{x}{r} < y \leqslant x$ онда*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{r-1}{2r}x - \frac{r-1}{2r}y\right) \tag{3.6}$$

в) *ако је $0 < y \leqslant \frac{x}{r}$ онда*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{r^2-1}{2r^2}x\right). \tag{3.7}$$

Случај а) у Теореми 3.2 већ је садржан у Теореми 2.1.

Значајно је закључити да су догађаји $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}\right\}$ и $\left\{M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}$ асимптотски независни ако је $0 < \frac{x}{r} < y \leqslant x$. Ако је, пак, $0 < y \leqslant \frac{x}{r}$, ова два догађаја су асимптотски перфектно зависна. То указује на чињеницу да је услов $D'(u_n)$ у Теореми 3.1 не само довољан него и потребан.

Неки резултати у вези са овим процесом дати су у докторској дисертацији Olshanski (2005). Ту се *случајним проређивањем* назива случајан низ $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, независан од процеса (X_n), и такав да је $\tau_0 = 0$, а, прираштаји $T_n := \tau_n - \tau_{n-1}$ су независне, једнако расподељене случајне величине на скупу $\mathbb{N}$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Нека је $ET_1 < +\infty$ и интензивност проређивања $\lambda := \dfrac{1}{ET_1}$. За случајну величину $\widehat{M}_n$, дефинисану са $\widehat{M}_n := \max\limits_{\tau_j \leqslant n} X_{\tau_j}$, важи

$$P\left\{\widehat{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{\lambda n}\right\} \to e^{-\widehat{\theta}x}, \quad \text{при } n \to \infty, \text{ за } \forall x \geqslant 0,$$

где је $\widehat{\theta} = 1 - E\left(\dfrac{1}{r^{T_1}}\right)$. Вредност $\widehat{\theta}$ је ектремални индекс строго стационарног случајног низа (X_{τ_n}), који је добијен из првобитног низа (X_n), случајним проређивањем. Лако се може приметити да је веза између екстремалног индекса θ низа (X_n) и екстремалног индекса $\widehat{\theta}$ низа (X_{τ_n}) дата једнакошћу

$$\widehat{\theta} = 1 - E\left((1-\theta)^{T_1}\right).$$

Оваква веза, међутим, не важи и у општем случају, тј. за произвољан строго стационаран случајан низ, који поседује екстремални индекс, и његов подниз добијен проређивањем.

Низ (X_{τ_n}) задовољава услов $D(u_n)$ из Дефиниције 1.3, при чему је у неједнакости (1.14) $\alpha_{n,l} = \min\left\{\dfrac{x}{n}, \dfrac{(\rho(1))^l}{1-\rho(1)}\right\}$, за $n \in \mathbb{N}$, $\rho(1)$ аутокорелација првог реда и $u_n = 1 - \dfrac{x}{n}$, за $x > 0$.

У погледу заједничког асимптотског понашања случајног вектора $\left(\widehat{M}_n, M_n\right)$, при $n \to \infty$, добијене су следеће две неједнакости, а последња једнакост садржана је у Теореми 2.1

$$\varliminf_{n\to\infty} P\left\{\widehat{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} \geqslant \exp(-\lambda\widehat{\theta}(x-y) - \theta y), \text{ за } 0 \leqslant y < x \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{n\to\infty} P\left\{\widehat{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}\\ &\leqslant \exp\left(-\lambda\widehat{\theta}(x-y) - \theta y + 2\min\left\{\frac{1-P\{T_1=1\}}{r-1}\,x, \frac{1-\widehat{\theta}}{\widehat{\theta}}\,y\right\}\right), \text{ за } 0 \leqslant y < x\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\widehat{M}_n \leqslant 1-\frac{x}{n}, M_n \leqslant 1-\frac{y}{n}\right\} = \exp(-\theta y), \text{ за } 0 \leqslant x \leqslant y. \tag{3.10}$$

3.3 Нове граничне теореме

Резултати који ће бити приказани у наставку садржани су у коауторском раду Mladenović and Živadinović (2015) и самосталном раду аутора дисертације Glavaš (2015).

⋆ **Позитивно корелиран равномерни $\boldsymbol{AR}(1)$ процес**

Нека је (X_n) позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром $r \geqslant 2$.

Теорема 3.3 (Mladenović and Živadinović (2015))**.** *Нека је (c_n) неслучајан $0-1$ низ дат са*

$$c_n = \begin{cases} 1, & \textit{ако је } n = 4m-1, n = 4m \\ 0, & \textit{ако је } n = 4m-3, n = 4m-2 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{3.11}$$

и нека је $\widetilde{M}_n$ максимум подузорка комплетног узорка обима n, одређен низом (c_n), тј. $\widetilde{M}_n := \max\{X_j : c_j = 1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Тада важи:

а) *ако је $0 < y \leqslant \frac{x}{r^2}$ онда*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1-\frac{x}{n}, M_n \leqslant 1-\frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{2r^3-r^2-1}{4r^3}x\right) \tag{3.12}$$

б) *ако је $0 < \frac{x}{r^2} < y \leqslant \frac{x}{r}$ онда*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1-\frac{x}{n}, M_n \leqslant 1-\frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{2r^2-r-1}{4r^2}x - \frac{r-1}{4r}y\right) \tag{3.13}$$

в) *ако је $0 < \frac{x}{r} < y \leqslant x$ онда*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1-\frac{x}{n}, M_n \leqslant 1-\frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{r-1}{2r}x - \frac{r-1}{2r}y\right). \tag{3.14}$$

Случај када је $0 < x < y$ своди се на резултат у раду Chernick (1981) и већ је наведен у Теореми 2.1.

Требало би уочити да детерминистички низови (c_n) (они одређују који ће чланови оригиналног случајног низа (X_n) бити регистровани) из формулација Теореме 3.2 и Теореме 3.3 имају исту асимптотску релативну учестаност појављавања јединица, која износи $\frac{1}{2}$. Заправо, гранична вредност p, која се појављује у (3.3), у оба случаја износи по $\frac{1}{2}$. Међутим, без обзира на ту чињеницу, очигледно се могу појавити *различите граничне расподеле* дводимензионог случајног вектора $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$, што је у супротности са општим резултатом из Теореме 3.1. Ово је последица неважења услова $D'(u_n)$ за процес (X_n). Закључак је дат следећим тврђењем.

Теорема 3.4 (Mladenović and Živadinović (2015)). *Нека је (X_n) позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес, са параметром $r \geqslant 2$, и нека су, даље,*

$$M_n := \max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j, \quad \widetilde{M}_n := \max\{X_j : c_j = 1, 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

при чему је (c_n) неслучајан $0-1$ низ, такав да важи

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_j \to p \in [0,1], \quad \text{при } n \to \infty.$$

Гранична расподела случајног вектора $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$ није једнозначно одређена вредношћу p.

Нека су $\left(c_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(c_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(c_n^{(3)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ три неслучајна $0-1$ низа дата са

$$\begin{aligned} &c_n^{(1)} = 1 \text{ ако је } n = 3m \quad ; \; c_n^{(1)} = 0 \text{ ако је } n = 3m-2 \text{ или } n = 3m-1,\; m \in \mathbb{N};\\ &c_n^{(2)} = 1 \text{ ако је } n = 3m-1; \; c_n^{(2)} = 0 \text{ ако је } n = 3m-2 \text{ или } n = 3m,\; m \in \mathbb{N};\\ &c_n^{(3)} = 1 \text{ ако је } n = 3m-2; \; c_n^{(3)} = 0 \text{ ако је } n = 3m-1 \text{ или } n = 3m,\; m \in \mathbb{N}; \end{aligned} \tag{3.15}$$

максимум комплетног узорка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ је, по обичају, означен са M_n; максимум подузорка комплетног узорка, одређен одговарајућим низом $\left(c_n^{(k)}\right)$, означен је са $\widetilde{M}_n^{(k)}$, тј. $\widetilde{M}_n^{(k)} := \max\left\{X_j : c_j^{(k)} = 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\right\}$, за $k = 1, 2, 3$.

Теорема 3.5 (Glavaš (2015)). *За свако $k = 1, 2, 3$:*

a) *ако је $0 < y \leqslant \frac{x}{r^2}$ онда*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\widetilde{M}_n^{(k)} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{r^3-1}{3r^3}x\right) \tag{3.16}$$

б) *ако је* $0 < \dfrac{x}{r^2} < y \leqslant \dfrac{x}{r}$ *онда*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\widetilde{M}_n^{(k)} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{r^2-1}{3r^2}x - \frac{r-1}{3r}y\right) \quad (3.17)$$

в) *ако је* $0 < \dfrac{x}{r} < y \leqslant x$ *онда*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\widetilde{M}_n^{(k)} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{r-1}{3r}x - \frac{2(r-1)}{3r}y\right). \quad (3.18)$$

Преостали случај када је $0 < x < y$ намерно је изостављен из формулације тврђења, јер ако је $0 < x < y$ онда је ниво $1 - \dfrac{x}{n}$ већи од нивоа $1 - \dfrac{y}{n}$. Стога, $M_n \leqslant 1 - \dfrac{y}{n}$ имплицира $\widetilde{M}_n^{(j)} \leqslant 1 - \dfrac{y}{n} < 1 - \dfrac{x}{n}$, па је пресек $\left\{\widetilde{M}_n^{(j)} \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \dfrac{y}{n}\right\}$ ова два догађаја тачно други од њих. Важи резултат из рада Chernick (1981), који је наведен у Теореми 2.1.

Требало би приметити да између три низа $\left(c_n^{(j)}\right)$, $j = 1, 2, 3$, у (3.15) постоји извесна веза – ако је нпр. низ $\left(c_n^{(1)}\right)$ одабран као „полазни” онда се чланови друга два низа могу (помоћу чланова полазног низа) записати и као: $c_n^{(2)} = c_{n+1}^{(1)}$ и $c_n^{(3)} = c_{n+2}^{(1)}$, за $\forall n \in \mathbb{N}$.

Резултат Теореме 3.5 интересантан је утолико што показује да *гранична расподела* случајног вектора, кога чине парцијални максимум специфичног подузорка комплетног узорка (одређеног неслучајним низом из (3.15)) и максимум комплетног узорка, остаје *неизмењена* уколико се вредности индекса регистрованих случајних величина транслирају за константу 1, односно 2.

⋆ Негативно корелиран равномерни $\boldsymbol{AR(1)}$ процес

Нека је (X_n) равномерни $AR(1)$ процес са негативном аутокорелацијом првог реда једнаком $-\dfrac{1}{r}$, $r \geqslant 2$. Нека су

$$M_n := \max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j, \qquad \widetilde{M}_n := \max\{X_j : c_j = 1, 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

У следеће две теореме дато је асимптотско заједничко понашање ове две случајне величине, при $n \to \infty$, а као детерминистички низови (c_n) узети су баш низови задати, редом, у (3.4) и (3.11). Аналогни резултати за позитивно корелиран $AR(1)$ процес већ су наведени у Теореми 3.2 и Теореми 3.3, респективно. Случај када је $0 < x < y$ биће изостављен из формулације ових граничних теорема, са истим образложењем као раније, а то је да се резултат своди на већ постојећи у раду Chernick and Davis (1982) и наведен је у Теореми 2.2.

Теорема 3.6 (Glavaš (2015)). *Нека је* (c_n) *неслучајан* $0-1$ *низ дат са*

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{ако је } n = 2m \\ 0, & \text{ако је } n = 2m-1 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Ако је $0 < y \leqslant x$ *онда*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{r^2-1}{2r^2}x - \frac{r^2-1}{2r^2}y\right). \tag{3.20}$$

Теорема 3.7 (Glavaš (2015)). *Нека је* (c_n) *неслучајан* $0-1$ *низ дат са*

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{ако је } n = 4m-1, n = 4m \\ 0, & \text{ако је } n = 4m-3, n = 4m-2 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.21}$$

Тада важи:

а) *ако је* $0 < y \leqslant \frac{x}{r^2}$ *онда*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{r^4-1}{2r^4}x\right) \tag{3.22}$$

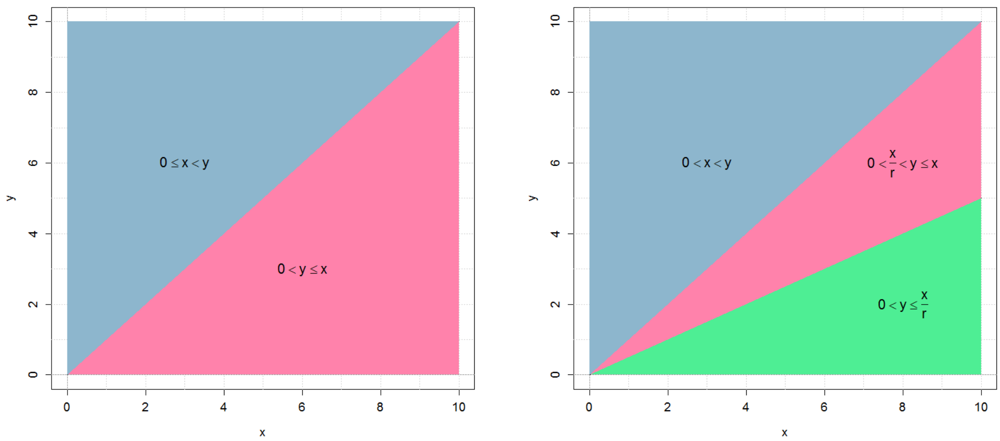
б) *ако је* $0 < \frac{x}{r^2} < y \leqslant x$ *онда*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} = \exp\left(-\frac{r^2-1}{2r^2}x - \frac{r^2-1}{2r^2}y\right). \tag{3.23}$$

Како су доступне одговарајуће граничне теореме за специфичне некомплетне узорке, за оба типа равномерног $AR(1)$ процеса, могуће је, на известан начин, упоредити добијене резултате и донети неке закључке:

- ако је низ (c_n) дефинисан са (3.4)/(3.19) и
  - (X_n) је негативно корелиран равномеран $AR(1)$ процес – за све вредности x и y такве да је $0 < y \leqslant x$ догађаји $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}\right\}$ и $\left\{M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}$ су асимптотски независни

– (X_n) је позитивно корелиран равномеран $AR(1)$ процес – област у равни $\mathbb{R}^2$ која се састоји од свих тачака (x, y) таквих да је $0 < y \leqslant x$ раздељена је на две подобласти, у којима се појављују различити изрази за граничну вероватноћу од интереса; асимптотски, догађаји $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}\right\}$ и $\left\{M_n \leqslant 1 - \dfrac{y}{n}\right\}$ су независни у једној подобласти $\left(0 < \dfrac{x}{r} < y \leqslant x\right)$, док су у другој подобласти $\left(0 < y \leqslant \dfrac{x}{r}\right)$ перфектно зависни;

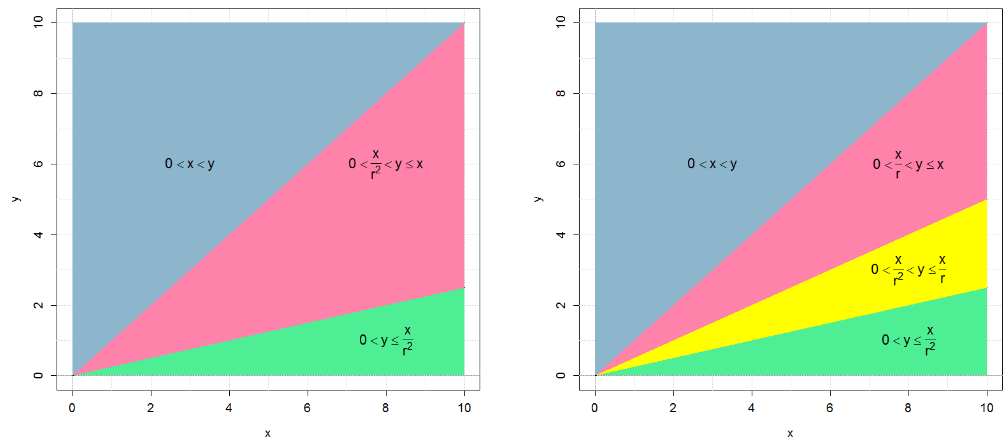


Слика 7: *Пример некомплетног узорка одређеног низом* (c_n) *(3.4)/(3.19) за негативно (лево), односно позитивно (десно) корелиран равномерни* $AR(1)$ *процес, код кога је* $|\rho(1)| = 0.5$

- ако је низ (c_n) дефинисан са (3.11)/(3.21) и

  – (X_n) је негативно корелиран равномеран $AR(1)$ процес – за све вредности x и y такве да је $0 < \dfrac{x}{r^2} < y \leqslant x$ догађаји $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}\right\}$ и $\left\{M_n \leqslant 1 - \dfrac{y}{n}\right\}$ су асимптотски независни, а ако је $0 < y \leqslant \dfrac{x}{r^2}$ они су асимптотски перфектно зависни

  – (X_n) је позитивно корелиран равномеран $AR(1)$ процес – област у равни $\mathbb{R}^2$ која се састоји од свих тачака (x, y) таквих да је $0 < \dfrac{x}{r^2} < y \leqslant x$ раздељена је на две подобласти, у којима се појављују међусобно различити изрази за граничну вероватноћу од интереса, а, такође, различити и од израза за исту вероватноћу у области $0 < y \leqslant \dfrac{x}{r^2}$; ипак, у целој области где је $0 < \dfrac{x}{r^2} < y \leqslant x$ догађаји $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}\right\}$ и $\left\{M_n \leqslant 1 - \dfrac{y}{n}\right\}$ су асимптотски независни, док су у области где је $0 < y \leqslant \dfrac{x}{r^2}$ они асимптотски перфектно зависни.



Слика 8: *Пример некомплетног узорка одређеног низом* (c_n) *(3.11)/(3.21) за негативно (лево), односно позитивно (десно) корелиран равномерни* $AR(1)$ *процес,* $r = 2$

На Сликама 7 и 8 илустроване су области у равни $\mathbb{R}^2$, тачније у првом квадранту, у којима се појављују разматрани случајеви асимптотске независности, односно асимптотске потпуне зависности догађаја $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}\right\}$ и $\left\{M_n \leqslant 1 - \dfrac{y}{n}\right\}$. У областима плаве боје важи резултат из рада Chernick and Davis (1982), тј. Теореме 2.2, односно из рада Chernick (1981), тј. Теореме 2.1. У областима зелене боје присутна је асимптотска перфектна зависност, за разлику од области розе боје у којој је присутна асимптотска независност. Област у којој су догађаји такође асимптотски независни, али се израз за граничну вероватноћу од интереса разликује од оног у области розе боје, обојена је жуто.

3.3.1 Докази граничних теорема

Доказ Теореме 3.3.

Прво ће бити одређена вероватноћа

$$a_m := P\left\{\widetilde{M}_{4m} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m} \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} \tag{3.24}$$

за $0 < y \leqslant x$, довољно велико n и неко $4m < n$. У ту сврху уводе се и следеће вероватноће

$$b_m(s) := P\left\{\widetilde{M}_{4m} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m} \leqslant 1 - \frac{r^{4s}x}{n}\right\}, \tag{3.25}$$

$$c_m(s) := P\left\{\widetilde{M}_{4m} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m} \leqslant 1 - \frac{r^{4s-1}x}{n}\right\}, \tag{3.26}$$

$$d_m(s) := P\left\{\widetilde{M}_{4m} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m} \leqslant 1 - \frac{r^{4s-2}y}{n}\right\}, \tag{3.27}$$

$$e_m(s) := P\left\{\widetilde{M}_{4m} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m} \leqslant 1 - \frac{r^{4s-3}y}{n}\right\}, \tag{3.28}$$

где је $4s \leqslant s_0$, а $s_0 = s_0(n, x)$ је природан број, такав да

$$1 - \frac{r^{s_0}x}{n} \geqslant 0 > 1 - \frac{r^{(s_0+1)}x}{n}.$$

Прво би требало приметити да је

$$\begin{aligned} a_m = P\Big\{&\widetilde{M}_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m-3} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, \\ &X_{4m-2} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m-1} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, X_{4m} \leqslant 1 - \frac{x}{n}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Једнакости

$$X_{4m-3} = \frac{1}{r}X_{4m-4} + \xi_{4m-3} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, \tag{3.30}$$

$$X_{4m-2} = \frac{1}{r^2}X_{4m-4} + \frac{1}{r}\xi_{4m-3} + \xi_{4m-2} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, \tag{3.31}$$

$$X_{4m-1} = \frac{1}{r^3}X_{4m-4} + \frac{1}{r^2}\xi_{4m-3} + \frac{1}{r}\xi_{4m-2} + \xi_{4m-1} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, \tag{3.32}$$

$$X_{4m} = \frac{1}{r^4}X_{4m-4} + \frac{1}{r^3}\xi_{4m-3} + \frac{1}{r^2}\xi_{4m-2} + \frac{1}{r}\xi_{4m-1} + \xi_{4m} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, \tag{3.33}$$

редом, имплицирају неједнакости

$$X_{4m-4} \leqslant r - r\xi_{4m-3} - \frac{ry}{n}, \tag{3.34}$$

$$X_{4m-4} \leqslant r^2 - r\xi_{4m-3} - r^2\xi_{4m-2} - \frac{r^2y}{n}, \tag{3.35}$$

$$X_{4m-4} \leqslant r^3 - r\xi_{4m-3} - r^2\xi_{4m-2} - r^3\xi_{4m-1} - \frac{r^3x}{n}, \tag{3.36}$$

$$X_{4m-4} \leqslant r^4 - r\xi_{4m-3} - r^2\xi_{4m-2} - r^3\xi_{4m-1} - r^4\xi_{4m} - \frac{r^4x}{n}. \tag{3.37}$$

Коришћењем формуле потпуне вероватноће, додајући услове који се односе на случајне величине ξ_{4m}, ξ_{4m-1}, ξ_{4m-2}, ξ_{4m-3}, стиже се до следеће једнакости

$$\begin{aligned}
a_m = \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{r-1} & P\left\{\xi_{4m-3} = \frac{i}{r}, \xi_{4m-2} = \frac{j}{r}, \xi_{4m-1} = \frac{k}{r}, \xi_{4m} = \frac{l}{r}\right\} \\
& \cdot P\left\{\widetilde{M}_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m-4} \leqslant r - i - \frac{ry}{n}, \right. \\
& \quad X_{4m-4} \leqslant r^2 - i - rj - \frac{r^2 y}{n}, X_{4m-4} \leqslant r^3 - i - rj - r^2 k - \frac{r^3 x}{n}, \\
& \quad \left. X_{4m-4} \leqslant r^4 - i - rj - r^2 k - r^3 l - \frac{r^4 x}{n}\right\}.
\end{aligned}$$

Како је (ξ_n) низ независних иновација, добија се

$$\begin{aligned}
a_m = \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{r-1} \frac{1}{r^4} P\Bigg\{ & \widetilde{M}_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, \\
& X_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, X_{4m-4} \leqslant r - i - \frac{ry}{n}, \\
& X_{4m-4} \leqslant r^2 - i - rj - \frac{r^2 y}{n}, \\
& X_{4m-4} \leqslant r^3 - i - rj - r^2 k - \frac{r^3 x}{n}, \\
& X_{4m-4} \leqslant r^4 - i - rj - r^2 k - r^3 l - \frac{r^4 x}{n}\Bigg\}. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Неједнакост $X_{4m-4} \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}$, која се појављује у претходној формули, последица је $\widetilde{M}_{4m-4} \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}$ и може се, не правећи додатне измене, укључити у пресек наведених догађаја.

Нека је n довољно велико, тако да

$$\frac{x}{n},\ \frac{ry}{n},\ \frac{r^2 y}{n},\ \frac{r^3 x}{n},\ \frac{r^4 x}{n} \in (0,1).$$

Како је још на почетку претпостављено да је $0 < y \leqslant x$, довољно је захтевати да је n такво да $\dfrac{r^4 x}{n} \in (0,1)$.

Даље би требало приметити да за $i,j,k,l \in \{0,1,\ldots,r-1\}$ важе следећи једноставни искази:

$$r - i \begin{cases} = 1, & \text{ако је } i = r-1 \\ \geqslant 2, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$r^2 - i - rj \begin{cases} = 1, & \text{ако је } i = j = r-1 \\ \geqslant 2, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$r^3 - i - rj - r^2k \begin{cases} = 1, & \text{ако је } i = j = k = r-1 \\ \geqslant 2, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$r^4 - i - rj - r^2k - r^3l \begin{cases} = 1, & \text{ако је } i = j = k = l = r-1 \\ \geqslant 2, & \text{иначе} \end{cases}.$$

⋆ **Случај $\boldsymbol{0 < r^2y \leqslant x}$**

За овакве вредности x и y тачне су следеће неједнакости

$$0 < 1 - \frac{r^4x}{n} < 1 - \frac{r^3x}{n} < 1 - \frac{x}{n} \leqslant 1 - \frac{r^2y}{n} < 1 - \frac{ry}{n} < 1.$$

За $i = j = k = l = r-1$ одговарајући сабирак у (3.38) једнак је

$$\frac{1}{r^4}P\left\{\widetilde{M}_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{r^4x}{n}\right\} = \frac{b_{m-1}(1)}{r^4}. \quad (3.39)$$

За $i = j = k = r-1$, и $l \neq r-1$, добија се $(r-1)$ сабирака једнаких

$$\frac{1}{r^4}P\left\{\widetilde{M}_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{r^3x}{n}\right\} = \frac{c_{m-1}(1)}{r^4}. \quad (3.40)$$

Коначно, ако неки од i, j, k узме вредност различиту од $r-1$, добија се преосталих $r(r^3-1)$ сабирака, који су једнаки

$$\frac{1}{r^4}P\left\{\widetilde{M}_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} = \frac{a_{m-1}}{r^4}. \quad (3.41)$$

Стога важи следећа једнакост

$$a_m = \frac{r(r^3-1)}{r^4}a_{m-1} + \frac{r-1}{r^4}c_{m-1}(1) + \frac{1}{r^4}b_{m-1}(1). \quad (3.42)$$

За $b_m(s)$ добија се

$$b_m(s) = P\Big\{\widetilde{M}_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m-3} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, \\ X_{4m-2} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m-1} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, X_{4m} \leqslant 1 - \frac{r^{4s}x}{n}\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{1}{r^4}P\bigg\{\widetilde{M}_{4m-4}\leqslant 1-\frac{x}{n}, M_{4m-4}\leqslant 1-\frac{y}{n},\\
&\qquad X_{4m-4}\leqslant 1-\frac{x}{n}, X_{4m-4}\leqslant r-i-\frac{ry}{n},\\
&\qquad X_{4m-4}\leqslant r^2-i-rj-\frac{r^2y}{n}, X_{4m-4}\leqslant r^3-i-rj-r^2k-\frac{r^3x}{n},\\
&\qquad X_{4m-4}\leqslant r^4-i-rj-r^2k-r^3l-\frac{r^{4(s+1)}x}{n}\bigg\},
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

а, одатле следи,

$$
b_m(s)=\frac{r(r^3-1)}{r^4}a_{m-1}+\frac{r-1}{r^4}c_{m-1}(1)+\frac{1}{r^4}b_{m-1}(s+1). \tag{3.44}
$$

На сличан начин добија се и следећа формула за $c_m(s)$

$$
c_m(s)=\frac{r(r^3-1)}{r^4}a_{m-1}+\frac{r-1}{r^4}c_{m-1}(1)+\frac{1}{r^4}c_{m-1}(s+1). \tag{3.45}
$$

За довољно велико n лако се може показати да, такође, важе и следеће једнакости

$$
a_1=1-\frac{2(r-1)}{rn}\,y-\frac{2r-1}{rn}\,x, \tag{3.46}
$$

$$
b_1(s)=1-\frac{2(r-1)}{rn}\,y-\frac{r^{4s+1}+r-1}{rn}\,x, \tag{3.47}
$$

$$
c_1(s)=1-\frac{2(r-1)}{rn}\,y-\frac{r^{4s}+r-1}{rn}\,x. \tag{3.48}
$$

Из (3.42), (3.44) и (3.45) следи

$$
a_m=\frac{r(r^3-1)}{r^4}a_1+(r-1)\sum_{s=1}^{m-1}\frac{c_1(s)}{r^{4s}}+\frac{r(r^3-1)}{r^4}\sum_{s=1}^{m-2}\frac{b_1(s)}{r^{4s}}+\frac{b_1(m-1)}{r^{4(m-1)}}. \tag{3.49}
$$

Директним сумирањем и на основу (3.46)–(3.48) коначно се долази до израза за a_m

$$
a_m=1-\frac{(2r^3-r^2-1)m+1}{r^3n}\,x-\frac{2(r-1)}{rn}\,y. \tag{3.50}
$$

Ако $m\to\infty$ и $k:=\left[\dfrac{n}{4m}\right]\to\infty$, при $n\to\infty$, тада важи једнакост

$$
\lim_{n\to\infty}a_m^k=\exp\bigg(-\frac{2r^3-r^2-1}{4r^3}\,x\bigg). \tag{3.51}
$$

⋆ **Случај $0 < ry \leqslant x < r^2y$**

За овакве вредности x и y тачне су следеће неједнакости

$$0 < 1 - \frac{r^4x}{n} < 1 - \frac{r^3x}{n} < 1 - \frac{r^2y}{n} < 1 - \frac{x}{n} \leqslant 1 - \frac{ry}{n} < 1.$$

За $i = j = k = l = r - 1$ одговарајући сабирак у (3.38) једнак је оном у (3.39). За $i = j = k = r - 1$, $l \neq r - 1$, добија се $(r - 1)$ сабирака једнаких оном у (3.40). За $i = j = r - 1$, $k \neq r - 1$ добија се $r(r - 1)$ сабирака једнаких

$$\frac{1}{r^4}P\left\{\widetilde{M}_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{r^2y}{n}\right\} = \frac{d_{m-1}(1)}{r^4}. \quad (3.52)$$

Коначно, ако неки од i, j узме вредност различиту од $r - 1$, добија се преосталих $r^2(r^2-1)$ сабирака, који су једнаки $\frac{a_{m-1}}{r^4}$. Стога важи следећа једнакост

$$a_m = \frac{r^2(r^2-1)}{r^4}a_{m-1} + \frac{r(r-1)}{r^4}d_{m-1}(1) + \frac{r-1}{r^4}c_{m-1}(1) + \frac{1}{r^4}b_{m-1}(1). \quad (3.53)$$

На сасвим сличан начин, за $b_m(s)$, $c_m(s)$ и $d_m(s)$, добијају се следеће рекурентне везе

$$b_m(s) = \frac{r^2(r^2-1)}{r^4}a_{m-1} + \frac{r(r-1)}{r^4}d_{m-1}(1) + \frac{r-1}{r^4}c_{m-1}(1) + \frac{1}{r^4}b_{m-1}(s+1), \quad (3.54)$$

$$c_m(s) = \frac{r^2(r^2-1)}{r^4}a_{m-1} + \frac{r(r-1)}{r^4}d_{m-1}(1) + \frac{r-1}{r^4}c_{m-1}(1) + \frac{1}{r^4}c_{m-1}(s+1), \quad (3.55)$$

$$d_m(s) = \frac{r^2(r^2-1)}{r^4}a_{m-1} + \frac{r(r-1)}{r^4}d_{m-1}(1) + \frac{r-1}{r^4}c_{m-1}(1) + \frac{1}{r^4}d_{m-1}(s+1). \quad (3.56)$$

Користећи рекурентне везе (3.53)–(3.56) добија се

$$\begin{aligned} a_m = {} & \frac{r^2(r^2-1)}{r^4 \cdot r^4}\sum_{s=1}^{m-2}\frac{b_1(s)}{r^{4(s-1)}} + \frac{r-1}{r^4 \cdot r^4}\sum_{s=2}^{m-1}\frac{c_1(s)}{r^{4(s-2)}} + \frac{r(r-1)}{r^4 \cdot r^4}\sum_{s=2}^{m-1}\frac{d_1(s)}{r^{4(s-2)}} \\ & + \frac{r^2(r^2-1)}{r^4}a_1 + \frac{1}{r^{4(m-1)}}b_1(m-1) + \frac{r-1}{r^4}c_1(1) + \frac{r(r-1)}{r^4}d_1(1). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Поново су вероватноће a_1, $b_1(s)$ и $c_1(s)$ дате једнакостима (3.46)–(3.48), а за довољно велико n важи и

$$d_1(s) = 1 - \frac{r-1}{rn}\,x - \frac{r^{4s-1} + 2(r-1)}{rn}\,y. \quad (3.58)$$

Из (3.46)–(3.48), (3.58) и (3.57) следи израз за a_m

$$a_m = 1 - \frac{(2r^2 - r - 1)m - 2r^2 + r + 2}{r^2 n}\,x - \frac{(r-1)m}{rn}\,y. \tag{3.59}$$

Ако $m \to \infty$ и $k = \left[\dfrac{n}{4m}\right] \to \infty$, при $n \to \infty$, тада важи једнакост

$$\lim_{n\to\infty} a_m^k = \exp\biggl(-\frac{2r^2 - r - 1}{4r^2}\,x - \frac{r-1}{4r}\,y\biggr). \tag{3.60}$$

⋆ **Случај $\boldsymbol{0 < y \leqslant x < ry}$**

За овакве вредности x и y тачне су следеће неједнакости

$$0 < 1 - \frac{r^4 x}{n} < 1 - \frac{r^3 x}{n} < 1 - \frac{r^2 y}{n} < 1 - \frac{ry}{n} < 1 - \frac{x}{n} < 1.$$

За $i = j = k = l = r - 1$ одговарајући сабирак у (3.38) једнак је оном у (3.39). За $i = j = k = r - 1$, $l \neq r - 1$, добија се $(r - 1)$ сабирака једнаких оном у (3.40). За $i = j = r - 1$, $k \neq r - 1$, добија се $r(r - 1)$ сабирака једнаких оном у (3.52). За $i = r - 1$, $j \neq r - 1$, добија се $r^2(r - 1)$ сабирака једнаких

$$\frac{1}{r^4} P\biggl\{\widetilde{M}_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_{4m-4} \leqslant 1 - \frac{ry}{n}\biggr\} = \frac{e_{m-1}(1)}{r^4}. \tag{3.61}$$

Коначно, за $i \neq r - 1$, добија се преосталих $r^3(r - 1)$ сабирака, који су једнаки $\dfrac{a_{m-1}}{r^4}$. Стога важи следећа једнакост

$$\begin{aligned} a_m = {} & \frac{r^3(r-1)}{r^4} a_{m-1} + \frac{r^2(r-1)}{r^4} e_{m-1}(1) + \frac{r(r-1)}{r^4} d_{m-1}(1) \\ & + \frac{r-1}{r^4} c_{m-1}(1) + \frac{1}{r^4} b_{m-1}(1). \end{aligned} \tag{3.62}$$

На сасвим сличан начин, за $b_m(s)$, $c_m(s)$, $d_m(s)$ и $e_m(s)$ добијају се следеће рекурентне везе

$$\begin{aligned} b_m(s) = {} & \frac{r^3(r-1)}{r^4} a_{m-1} + \frac{r^2(r-1)}{r^4} e_{m-1}(1) + \frac{r(r-1)}{r^4} d_{m-1}(1) \\ & + \frac{r-1}{r^4} c_{m-1}(1) + \frac{1}{r^4} b_{m-1}(s+1), \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$c_m(s) = \frac{r^3(r-1)}{r^4} a_{m-1} + \frac{r^2(r-1)}{r^4} e_{m-1}(1) + \frac{r(r-1)}{r^4} d_{m-1}(1)$$

$$+\frac{r-1}{r^4}c_{m-1}(1)+\frac{1}{r^4}c_{m-1}(s+1), \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned} d_m(s) &= \frac{r^3(r-1)}{r^4}a_{m-1}+\frac{r^2(r-1)}{r^4}e_{m-1}(1)+\frac{r(r-1)}{r^4}d_{m-1}(1)\\ &+\frac{r-1}{r^4}c_{m-1}(1)+\frac{1}{r^4}d_{m-1}(s+1), \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned} e_m(s) &= \frac{r^3(r-1)}{r^4}a_{m-1}+\frac{r^2(r-1)}{r^4}e_{m-1}(1)+\frac{r(r-1)}{r^4}d_{m-1}(1)\\ &+\frac{r-1}{r^4}c_{m-1}(1)+\frac{1}{r^4}e_{m-1}(s+1). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Користећи рекурентне везе (3.62)–(3.66) добија се

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{r^3(r-1)}{r^4}a_1+\frac{r^2(r-1)}{r^4}e_1(1)+\frac{r(r-1)}{r^4}d_1(1)+\frac{r-1}{r^4}c_1(1)\\ &+\frac{r^3(r-1)}{r^4\cdot r^4}\sum_{s=1}^{m-2}\frac{b_1(s)}{r^{4(s-1)}}+\frac{r^2(r-1)}{r^4\cdot r^4}\sum_{s=2}^{m-1}\frac{e_1(s)}{r^{4(s-2)}}+\frac{r(r-1)}{r^4\cdot r^4}\sum_{s=2}^{m-1}\frac{d_1(s)}{r^{4(s-2)}}\\ &+\frac{r-1}{r^4\cdot r^4}\sum_{s=2}^{m-1}\frac{c_1(s)}{r^{4(s-2)}}+\frac{1}{r^{4(m-1)}}b_1(m-1). \end{aligned} \tag{3.67}$$

Поново су вероватноће a_1, $b_1(s)$, $c_1(s)$ и $d_1(s)$ дате једнакостима (3.46)–(3.48) и (3.58), а за довољно велико n важи и

$$e_1(s)=1-\frac{r-1}{rn}\,x-\frac{2(r-1)+r^{4s-2}}{rn}\,y. \tag{3.68}$$

Из (3.46)–(3.48), (3.58), (3.68) и (3.67) следи израз за a_m

$$a_m=1-\frac{2(r-1)(m-2)+4r-3}{rn}\,x-\frac{2(r-1)(m-2)+4(r-1)}{rn}\,y. \tag{3.69}$$

Ако $m\to\infty$ и $k=\left[\frac{n}{4m}\right]\to\infty$, при $n\to\infty$, тада важи једнакост

$$\lim_{n\to\infty}a_m^k=\exp\left(-\frac{r-1}{2r}\,x-\frac{r-1}{2r}\,y\right). \tag{3.70}$$

У завршници доказа требало би показати да се вредност вероватноће од интереса

$$P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}$$

може, при $n \to \infty$, апроксимирати k-тим степеном вероватноће означене са a_m из (3.24), где је $k = \left[\frac{n}{4m}\right]$ цео део разломка $\frac{n}{4m}$. Ово се иначе доказује коришћењем стандардних аргумената, на аналоган начин као у раду Mladenović (2009), стр. 1419, а онда тврђење Теореме 3.3 следи директно.

У наставку ће бити показано како се конструише овај део доказа, а у доказима наредних теорема тај део биће изостављен.

Посматра се разлика

$$\Delta = P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} - \left(P\left\{\widetilde{M}_{4m} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m} \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}\right)^k.$$

Нека је N_{4mk} скуп првих $4mk$ природних бројева и

$$N_{4mk} = \{1, 2, \ldots, 4mk\} = (I_1 \cup J_1) \cup (I_2 \cup J_2) \cup \cdots \cup (I_k \cup J_k),$$

где су I_t и J_t, $t = 1, 2, \ldots, k$, поскупови од N_{4mk} кардиналости, редом, $4m - 4l$ и $4l$, такви да је, уствари,

$$\begin{aligned} I_t &= \{4m(t-1)+1, 4m(t-1)+2, \ldots, 4mt - 4l\}, \\ J_t &= \{4mt - 4l + 1, 4mt - 4l + 2, \ldots, 4mt\}. \end{aligned}$$

Бирају се бројеви m, l, k тако да $m \to \infty$, $l \to \infty$, $k \to \infty$ и $\frac{l}{m} \to 0$, при $n \to \infty$. Циљ је, као што је раније речено, показати да $\Delta \to 0$, при $n \to \infty$, за $0 \leqslant y \leqslant x$.

Нека је

$$\widetilde{M}(I_t) := \max\{X_j : c_j = 1, j \in I_t\}, \quad M(I_t) := \max_{j \in I_t} X_j. \tag{3.71}$$

Може се направити следећа процена одозго за Δ

$$\begin{aligned} |\Delta| \leqslant &\left| P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} - P\left\{\widetilde{M}_{4mk} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4mk} \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}\right| \\ &+ \left| P\left(\bigcap_{t=1}^{k}\left\{\widetilde{M}(I_t) \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M(I_t) \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}\right) - P\left\{\widetilde{M}_{4mk} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4mk} \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left|P\left(\bigcap_{t=1}^{k}\left\{\widetilde{M}(I_t)\leqslant 1-\frac{x}{n}, M(I_t)\leqslant 1-\frac{y}{n}\right\}\right)-\left(P\left\{\widetilde{M}(I_1)\leqslant 1-\frac{x}{n}, M(I_1)\leqslant 1-\frac{y}{n}\right\}\right)^k\right|\\
&+\left|\left(P\left\{\widetilde{M}(I_1)\leqslant 1-\frac{x}{n}, M(I_1)\leqslant 1-\frac{y}{n}\right\}\right)^k-\left(P\left\{\widetilde{M}_{4m}\leqslant 1-\frac{x}{n}, M_{4m}\leqslant 1-\frac{y}{n}\right\}\right)^k\right|\\
&=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4.
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Даље би додатно требало проценити одозго свако Δ_j, $j=1,2,3,4$.

Прво се може уочити да је догађај $\left\{\widetilde{M}_{4mk}\leqslant 1-\frac{x}{n}, M_{4mk}\leqslant 1-\frac{y}{n}\right\}$ надскуп догађаја $\left\{\widetilde{M}_n\leqslant 1-\frac{x}{n}, M_n\leqslant 1-\frac{y}{n}\right\}$, и да за њихову разлику важи инклузија

$$
\left\{\widetilde{M}_{4mk}\leqslant 1-\frac{x}{n}, M_{4mk}\leqslant 1-\frac{y}{n}\right\}\setminus\left\{\widetilde{M}_n\leqslant 1-\frac{x}{n}, M_n\leqslant 1-\frac{y}{n}\right\}\subset\bigcup_{t=4mk+1}^{n}\left\{X_t>1-\frac{x}{n}\right\},
$$

па је, као последица овога,

$$
\Delta_1\leqslant\sum_{t=4mk+1}^{n}P\left\{X_t>1-\frac{x}{n}\right\}<4m\cdot\frac{x}{n}\to 0,\quad\text{при } n\to\infty. \tag{3.73}
$$

На сличан начин добија се и да је

$$
\Delta_2\leqslant 4lk\cdot P\left\{X_t>1-\frac{x}{n}\right\}<4lk\cdot\frac{x}{n}=\frac{l}{m}\cdot\frac{4mk}{n}x\to 0,\quad\text{при } n\to\infty. \tag{3.74}
$$

Уведу се ознаке $B_t:=\left\{\widetilde{M}(I_t)\leqslant 1-\frac{x}{n}, M(I_t)\leqslant 1-\frac{y}{n}\right\}$, $t=1,2,\dots,k$. Како је низ (X_n) строго стационаран сви догађаји B_t, $t=1,2,\dots,k$, имају једнаке вероватноће, што се може искористити у запису за Δ_3

$$
\Delta_3=\left|P\left(\bigcap_{t=1}^{k}B_t\right)-(P(B_1))^k\right|=\left|P\left(\bigcap_{t=1}^{k}B_t\right)-\prod_{t=1}^{k}P(B_t)\right|.
$$

Скупови индекса I_t конструисани су тако да су свака два „удаљена” за тачно $4l$ природних бројева. Познато је (из рада Chernick and Davis (1982)) да низ (X_n) задовољава услов $D(u_n,v_n)$ из Дефиниције 1.5, при чему је у неједнакости из поменуте дефиниције $\alpha_{n,l}=\frac{\max\{x,y\}}{n}$, за $n\in\mathbb{N}$, и $u_n=1-\frac{y}{n}$, $v_n=1-\frac{x}{n}$ за $x,y>0$. На основу тога и Леме 5.4.1 у књизи Leadbetter et al. (1983) следи

$$
\Delta_3\leqslant(k-1)\cdot\frac{\max\{x,y\}}{n}\to 0,\quad\text{при } n\to\infty. \tag{3.75}
$$

За апсолутну вредност разлике $|x^p - y^p|$, $p \geqslant 2$, важи да је она једнака $|x-y| \cdot |x^{p-1} + x^{p-2}y + \cdots + xy^{p-2} + y^{p-1}|$, па, ако је $|x| < M$ и $y < M$, онда важи неједнакост

$$|x^p - y^p| \leqslant pM^{p-1}\,|x-y|\,.$$

Користећи ову неједнакост ($M = 1$) добија се да је

$$\begin{aligned}\Delta_4 &\leqslant k \cdot \left| P\left\{\widetilde{M}(I_1) \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M(I_1) \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} - P\left\{\widetilde{M}_{4m} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m} \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}\right| \\ &< k \cdot 4l \cdot \frac{x}{n} \to 0, \quad \text{при } n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.76}$$

На основу (3.73)–(3.76) следи жељени закључак да $\Delta \to 0$, при $n \to \infty$, чиме је доказ комплетиран. ∎

Доказ Теореме 3.4.

Резултат садржан у Теореми 3.1 у раду Mladenović (2009) овде је већ наведен у Теореми 3.2 и односи се на некомплетан узорак, одређен низом (c_n) из (3.4), из позитивно корелираног равномерног $AR(1)$ процеса. За овај низ важи

$$p := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_j = \frac{1}{2}.$$

Са друге стране, за низ (c_n) из (3.11), којим је одређен некомплетан узорак, такође, из позитивно корелираног равномерног $AR(1)$ процеса у Теореми 3.3, такође је $p = \frac{1}{2}$. Међутим, гранична расподела случајног вектора $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$ дата са (3.6)–(3.7) очигледно није једнака оној која је дата са (3.12)–(3.14). Овим је доказ завршен. ∎

Доказ Теореме 3.5.

Идеја доказа аналогна је оној за доказ Теореме 3.3. Само извођење се усложњава и технички је компликованије и обимније. Доказ ће, из наведених разлога, овде бити изостављен. ∎

Доказ Теореме 3.6.

Идеја доказа аналогна је оној за доказ Теореме 3.7, који ће до детаља бити приказан у наставку. Извођење овог доказа је једноставније, па ће оно, из наведених разлога, овде бити изостављено. ∎

Доказ Теореме 3.7.

Уведе се ознака

$$a_m := P\left\{\widetilde{M}_{4m} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m} \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}. \tag{3.77}$$

Први корак састојаће се у одређивању вероватноће a_m за $0 < y \leqslant x$, довољно велико n и неко $4m < n$.

Требало би приметити да је догађај $\left\{\widetilde{M}_{4m} \leqslant 1 - \frac{x}{n}, M_{4m} \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}$ еквивалентан догађају (прецизније, пресеку $4m$ догађаја)

$$\left\{X_{4i-3} \leqslant 1-\frac{y}{n}, X_{4i-2} \leqslant 1-\frac{y}{n}, X_{4i-1} \leqslant 1-\frac{x}{n}, X_{4i} \leqslant 1-\frac{x}{n}, i = 1, 2, \dots, m\right\}. \tag{3.78}$$

Искористи се рекурентна формула (2.7), којом се дефинише негативно корелиран равномерни $AR(1)$ процес, како би се добила једнакост

$$X_i = \left(-\frac{1}{r}\right)^{i-1} X_1 + \sum_{j=2}^{i} \left(-\frac{1}{r}\right)^{i-j} \xi_j, i \geqslant 2. \tag{3.79}$$

Она омогућава да се сви догађаји у (3.78) изразе преко случајне величине X_1 и иновација (ξ_n), па се након уметања формула (3.79) у израз за a_m и додатног сређивања стиже до следеће једнакости

$$\begin{aligned} a_m = P\Bigg\{&X_1 \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_1 \geqslant -r + r\xi_2 + \frac{ry}{n},\\ &X_1 \leqslant r^2 + r\xi_2 - r^2\xi_3 - \frac{r^2x}{n}, X_1 \geqslant -r^3 + r\xi_2 - r^2\xi_3 + r^3\xi_4 + \frac{r^3x}{n},\\ &X_1 \leqslant r^{4i-4} + \sum_{j=2}^{4i-3}(-1)^j r^{j-1}\xi_j - \frac{r^{4i-4}y}{n},\\ &X_1 \geqslant -r^{4i-3} + \sum_{j=2}^{4i-2}(-1)^j r^{j-1}\xi_j + \frac{r^{4i-3}y}{n},\\ &X_1 \leqslant r^{4i-2} + \sum_{j=2}^{4i-1}(-1)^j r^{j-1}\xi_j - \frac{r^{4i-2}x}{n},\\ &X_1 \geqslant r^{4i-1} + \sum_{j=2}^{4i}(-1)^j r^{j-1}\xi_j + \frac{r^{4i-1}x}{n}, i = 2, 3, \dots, m\Bigg\}. \end{aligned}$$

Након тога искористи се формула потпуне вероватноће, додајући услове који се односе на $(4m-1)$ случајних величина $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{4m}$. При томе, требало би имати у виду све претпоставке о овим случајним величинама (наиме, (ξ_n) је низ независних, једнако расподељених случајних величина са дискретном равномерном расподелом).

Овде је погодно уочити следеће, наравно када је n довољно велико тако да $\frac{r^{4m}x}{n}, \frac{r^{4m-2}y}{n} \in (0,1)$,

– догађај $A_i := \left\{X_1 \leqslant r^{4i-4} + \sum_{j=2}^{4i-3}(-1)^j r^{j-1}\xi_j - \frac{r^{4i-4}y}{n}\right\}$ је нетривијалан када све иновације са парним индексима, $\xi_2, \xi_4, \ldots, \xi_{4i-4}$, узимају вредност $\frac{1}{r}$, и, истовремено, све оне са непарним индексима, $\xi_3, \xi_5, \ldots, \xi_{4i-3}$, узимају вредност 1 – у том случају A_i се своди на $\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4i-4}y}{n}\right\}$, $2 \leqslant i \leqslant m$

– догађај $B_i := \left\{X_1 \geqslant -r^{4i-3} + \sum_{j=2}^{4i-2}(-1)^j r^{j-1}\xi_j + \frac{r^{4i-3}y}{n}\right\}$ је нетривијалан када све иновације са парним индексима, $\xi_2, \xi_4, \ldots, \xi_{4i-2}$, узимају вредност 1, и, истовремено, све оне са непарним индексима, $\xi_3, \xi_5, \ldots, \xi_{4i-3}$, узимају вредност $\frac{1}{r}$ – у том случају B_i се своди на $\left\{X_1 \geqslant \frac{r^{4i-3}y}{n}\right\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$

– догађај $C_i := \left\{X_1 \leqslant r^{4i-2} + \sum_{j=2}^{4i-1}(-1)^j r^{j-1}\xi_j - \frac{r^{4i-2}x}{n}\right\}$ је нетривијалан када све иновације са парним индексима, $\xi_2, \xi_4, \ldots, \xi_{4i-2}$, узимају вредност $\frac{1}{r}$, и, истовремено, све оне са непарним индексима, $\xi_3, \xi_5, \ldots, \xi_{4i-1}$, узимају вредност 1 – у том случају C_i се своди на $\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4i-2}x}{n}\right\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$

– догађај $D_i := \left\{X_1 \geqslant r^{4i-1} + \sum_{j=2}^{4i}(-1)^j r^{j-1}\xi_j + \frac{r^{4i-1}x}{n}\right\}$ је нетривијалан када све иновације са парним индексима, $\xi_2, \xi_4, \ldots, \xi_{4i}$, узимају вредност 1, и, истовремено, све оне са непарним индексима, $\xi_3, \xi_5, \ldots, \xi_{4i-1}$, узимају вредност $\frac{1}{r}$ – у том случају C_i се своди на $\left\{X_1 \geqslant \frac{r^{4i-1}x}{n}\right\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

У зависности од вредности које узму случајне величине $\xi_2, \xi_4, \ldots, \xi_{4m}$ може доћи до смањивања броја догађаја облика

$$\{X_1 \leqslant u_n\}, \quad \text{односно} \quad \{X_1 \geqslant v_n\},$$

у пресецима у којима они учествују, чиме се израз за вероватноћу a_m поједностављује. На овом месту, очигледно је да би требало засебно разматрати два случаја, јер ће се a_m разликовати уколико је $0 < r^2 y \leqslant x$, односно уколико је $0 < y \leqslant x < r^2 y$. Коначно, за оба случаја биће израчунате све неопходне вероватноће, користећи чињеницу да $X_1 \in \mathcal{U}[0,1]$, како би се добиле одговарајуће, сажете формуле за a_m.

* **Случај $\boldsymbol{0 < r^2 y \leqslant x}$**

За овакве вредности x и y и $1 \leqslant i \leqslant m-1$ тачне су инклузије

$$\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4i-2}x}{n}\right\} \subseteq \left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4i}y}{n}\right\}, \text{ јер је } 1 - \frac{r^{4i}y}{n} \geqslant 1 - \frac{r^{4i-2}x}{n},$$
$$\left\{X_1 \geqslant \frac{r^{4i-1}x}{n}\right\} \subseteq \left\{X_1 \geqslant \frac{r^{4i+1}y}{n}\right\}, \text{ јер је } \frac{r^{4i-1}x}{n} \geqslant \frac{r^{4i+1}y}{n}.$$

Стога се, након груписања, добија следећа једнакост

$$\begin{aligned}
a_m =& \frac{r^{4m-3}(r(r-1)-1)}{r^{4m-1}} P\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\} \\
&+ \frac{r(r^4-1)}{r^{4m-1}} \sum_{i=1}^{m-1} r^{4(m-1-i)} P\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4i-2}x}{n}\right\} \\
&+ \frac{r}{r^{4m-1}} P\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4m-2}x}{n}\right\} \\
&+ \frac{r^{4m-4}(r^2-1)}{r^{4m-1}} P\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_1 \geqslant \frac{ry}{n}\right\} \\
&+ \frac{r^4-1}{r^{4m-1}} \sum_{i=1}^{m-1} r^{4(m-1-i)} P\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_1 \geqslant \frac{r^{4i-1}x}{n}\right\} \\
&+ \frac{1}{r^{4m-1}} P\{X_1 \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_1 \geqslant \frac{r^{4m-1}x}{n}\bigg\},
\end{aligned}$$

и, даље,

$$\begin{aligned}
a_m =& \frac{r^2-r-1}{r^2}\left(1 - \frac{y}{n}\right) + \frac{r^4-1}{r^2} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{r^{4i}} \left(1 - \frac{r^{4i-2}x}{n}\right) + \frac{1}{r^{4m-2}} \left(1 - \frac{r^{4m-2}x}{n}\right) \\
&+ \frac{r^2-1}{r^3}\left(1 - \frac{y}{n} - \frac{ry}{n}\right) + \frac{r^4-1}{r^3} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{r^{4i}} \left(1 - \frac{y}{n} - \frac{r^{4i-1}x}{n}\right) \\
&+ \frac{1}{r^{4m-1}}\left(1 - \frac{y}{n} - \frac{r^{4m-1}x}{n}\right).
\end{aligned}$$

Директним сумирањем коначно се долази до израза за a_m

$$a_m = 1 - \frac{2(r^4-1)m+2}{r^4 n}\,x - \frac{2(r^2-1)}{r^2 n}\,y. \tag{3.80}$$

Ако $m \to \infty$ и $k := \left[\dfrac{n}{4m}\right] \to \infty$, при $n \to \infty$, тада важи једнакост

$$\lim_{n\to\infty} a_m^k = \exp\left(-\frac{r^4-1}{2r^4}x\right). \tag{3.81}$$

⋆ **Случај $0 < y \leqslant x < r^2 y$**

За овакве вредности x и y и $1 \leqslant i \leqslant m-1$ тачне су инклузије

$$\begin{gathered}\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4i+2}x}{n}\right\} \subseteq \left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4i}y}{n}\right\} \subseteq \left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4i-2}x}{n}\right\},\\ \left\{X_1 \geqslant \frac{r^{4i+1}x}{n}\right\} \subseteq \left\{X_1 \geqslant \quad \frac{r^{4i+1}y}{n}\right\} \subseteq \left\{X_1 \geqslant \frac{r^{4i-1}x}{n}\right\}.\end{gathered}$$

Стога се, након груписања, добија следећа једнакост

$$\begin{aligned}a_m = {} & \frac{r^{4m-3}(r(r-1)-1)}{r^{4m-1}}P\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{y}{n}\right\}\\ & + \frac{r(r^2-1)}{r^{4m-1}}\sum_{i=1}^{m-1} r^{4(m-1-i)}P\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4i}y}{n}\right\}\\ & + \frac{r^3(r^2-1)}{r^{4m-1}}\sum_{i=1}^{m-1} r^{4(m-1-i)}P\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4i-2}x}{n}\right\}\\ & + \frac{r}{r^{4m-1}}P\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{r^{4m-2}x}{n}\right\}\\ & + \frac{r^4(r^2-1)}{r^{4m-1}}\sum_{i=1}^{m} r^{4(m-1-i)}P\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_1 \geqslant \frac{r^{4i-3}y}{n}\right\}\\ & + \frac{r^2(r^2-1)}{r^{4m-1}}\sum_{i=1}^{m-1} r^{4(m-1-i)}P\left\{X_1 \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_1 \geqslant \frac{r^{4i-1}x}{n}\right\}\\ & + \frac{1}{r^{4m-1}}P\{X_1 \leqslant 1 - \frac{y}{n}, X_1 \geqslant \frac{r^{4m-1}x}{n}\Big\},\end{aligned}$$

и, даље, сличним поступком као у претходном случају,

$$a_m = 1 - \frac{2(r^2-1)m+2}{r^2 n}\,x - \frac{2(r^2-1)m}{r^2 n}\,y. \tag{3.82}$$

Ако $m \to \infty$ и $k = \left[\dfrac{n}{4m}\right] \to \infty$, при $n \to \infty$, тада важи једнакост

$$\lim_{n\to\infty} a_m^k = \exp\left(-\frac{r^2-1}{2r^2}x - \frac{r^2-1}{2r^2}y\right). \tag{3.83}$$

Последњи корак у доказу јесте коришћење стандардних аргумената, аналогно као у завршници Доказа Теореме 3.3.

Важна је следећа напомена. Осим репрезентације случајне величине X_i, која је дата у формули (3.79), могу се, алтернативно користити формуле

$$X_{2i-1} = \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant 2i-2 \\ j \text{ парно}}} \frac{1}{r^{2i-j-2}}\left(\xi_{j+1} - \frac{1}{r}\xi_j\right) + \frac{1}{r^{2i-2}}X_1, \quad \text{за } i \geqslant 2 \tag{3.84}$$

$$X_{2i} = \sum_{\substack{3\leqslant j\leqslant 2i-1 \\ j \text{ непарно}}} -\frac{1}{r^{2i-j}}\left(\xi_j - \frac{1}{r}\xi_{j-1}\right) - \frac{1}{r^{2i-1}}X_1, \quad \text{за } i \geqslant 2. \tag{3.85}$$

Није тешко проверити да су поднизови (X_{2n-1}) и (X_{2n}) чланова почетног случајног низа са непарним, односно парним индексима, позитивно корелирани $AR(1)$ процеси са истим параметром, једнаким r^2. Према томе може се констатовати важење услова $D(u_n, v_n)$ и за цео случајан низ (X_n), што је значајно за завршетак доказа. ■

3.3.2 Резултати симулација

У ери рачунара и информационих технологија извођење компјутерских симулација постало је неизоставан и врло значајан део математичког моделирања.

У наставку ће бити приказани *резултати симулација* и *оцењене вредности вероватноће* од интереса, која се тиче дводимензионог случајног вектора $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$.

Први корак био је да се NS пута симулира првих n чланова случајног низа $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, други корак да се преброји колико се пута (од тих NS пута) реализовао догађај $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \dfrac{y}{n}\right\}$, за неке вредности x и y, при чему је парцијални максимум $\widetilde{M}_n$ био одређен конкретним, специфичним детерминистичким низом (c_k). У трећем кораку израчунавана је оцена $\hat{P} = \hat{P}(x, y)$ вероватноће тог догађаја, као релативна фреквенција његових реализација. Описани компјутерски експеримент понављан је више пута, те је добијено неколико оцена

$\hat{P}_i = \hat{P}_i(x, y)$. Са $G(x, y)$ свуда ће бити означене (теоријске) граничне вероватноће из одговарајућих граничних теорема.

- **Симулација 1**

Ова симулација односи се на случај када је (X_k) позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром r, а (c_k) низ одређен са

$$c_k = \begin{cases} 1, & \text{ако је } k = 2m \\ 0, & \text{ако је } k = 2m - 1 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Одговарајућа гранична теорема је Теорема 3.2.

Резултати симулације садржани су у Табелама 1 и 2.

Како су доступни теоријски резултати, било је могуће извршити њихово поређење са оценама добијеним симулацијама. У том смислу, испод сваке табеле одређена је вредност $\max\limits_{x,y,i} |G(x, y) - \hat{P}_i|$, а у самој табели сивом бојом назначено је поље са оценом вероватноће за коју се добија та максимална апсолутна грешка.

Табела 1: *$r = 2$, $x \in \{1, 2\}$ и неке вредности y*

$NS = 5000$, $n = 10000$						
x	y	$G(x, y)$	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_2$	$\hat{P}_3$	$\hat{P}_4$
1	0.8	0.6376282	0.6378	0.6342	0.6454	0.6378
1	0.4	0.6872893	0.6870	0.6812	0.6764	0.6994
1	0.2	0.6872893	0.6880	0.6906	0.6930	0.6970
1	0.1	0.6872893	0.6990	0.6852	0.7024	0.6770
2	1.6	0.4065697	0.4000	0.3970	0.4086	0.4070
2	0.8	0.4723666	0.4804	0.4776	0.4722	0.4782
2	0.4	0.4723666	0.4760	0.4738	0.4670	0.4654
2	0.2	0.4723666	0.4478 [1]	0.4770	0.4854	0.4708

Максимална апсолутна разлика је [1] $\max\limits_{x,y,i} \left| G(x, y) - \hat{P}_i \right| = 0.0245666.$

Табела 2: $r = 2$, $x \in \{1, 2\}$ *и неке вредности* y

$NS = 10000,\ n = 20000$						
x	y	$G(x,y)$	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_2$	$\hat{P}_3$	$\hat{P}_4$
1	0.8	0.6376282	0.6380	0.6331	0.6365	0.6397
1	0.4	0.6872893	0.7008 [1]	0.6911	0.6886	0.6880
1	0.2	0.6872893	0.6843	0.6867	0.6863	0.6861
1	0.1	0.6872893	0.6946	0.6878	0.6870	0.6833
2	1.6	0.4065697	0.4045	0.4064	0.4030	0.4060
2	0.8	0.4723666	0.4752	0.4718	0.4652	0.4722
2	0.4	0.4723666	0.4742	0.4711	0.4648	0.4724
2	0.2	0.4723666	0.4697	0.4737	0.4744	0.4617

Максимална апсолутна разлика је [1] $\max\limits_{x,y,i}\left|G(x,y) - \hat{P}_i\right| = 0.0135107.$

- **Симулација 2**

Ова симулација односи се на случај када је (X_k) негативно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром r, а (c_k) исти низ као у Симулацији 1.

Одговарајућа гранична теорема је Теорема 3.6.

Резултати симулације садржани су у Табели 3.

Табела 3: $r = 2$, $x \in \{1, 2\}$ *и неке вредности* y

$r = 2,\ NS = 5000,\ n = 10000$							
x	y	$G(x,y)$	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_2$	$\hat{P}_3$	$\hat{P}_4$	$\hat{P}_5$
1	0.8	0.5091564	0.5134	0.5056	0.5028	0.5144	0.4946
1	0.4	0.5915554	0.5898	0.5800	0.5970	0.5918	0.6026
1	0.2	0.6376282	0.6408	0.6324	0.6346	0.6422	0.6308
1	0.1	0.6619932	0.6468	0.6604	0.6568	0.6676	0.6696
2	1.6	0.2592403	0.2642	0.2590	0.2580	0.2494	0.2662
2	0.8	0.3499377	0.3536	0.3394	0.3446	0.3664 [1]	0.3456
2	0.4	0.4065697	0.4142	0.3950	0.4174	0.4122	0.4210
2	0.2	0.4382350	0.4310	0.4332	0.4340	0.4304	0.4290

Максимална апсолутна разлика је [1] $\max\limits_{x,y,i}\left|G(x,y)-\hat{P}_i\right| = 0.0164623.$

- **Симулација 3**

Ова симулација односи се на случај када је (X_k) позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром r, а (c_k) низ одређен са

$$c_k = \begin{cases} 1, & \text{ако је } k = 4m-1, k = 4m \\ 0, & \text{ако је } k = 4m-3, k = 4m-2 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Одговарајућа гранична теорема је Теорема 3.3.

Резултати симулације садржани су у Табелама 4 и 5.

Користећи аргументе са краја доказа Теореме 3.3 (а слично је и у случају на који се односи Симулација 1), и тамошње ознаке, није тешко установити да, за $m = O(\sqrt{n})$, $l \to \infty$ и $\dfrac{l}{m} \to 0$, важи неједнакост

$$\left|P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1-\frac{x}{n}, M_n \leqslant 1-\frac{y}{n}\right\} - G(x,y)\right| \leqslant \frac{l}{\sqrt{n}}C(x,y), \tag{3.86}$$

где је $C(x,y)$ константа која не зависи од n.

Табела 4: *$r=2$, $x \in \{1,2\}$ и неке вредности y*

$NS = 5000,\ n = 10000$						
x	y	$G(x,y)$	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_2$	$\hat{P}_3$	$\hat{P}_4$
1	0.8	0.6376282	0.6416	0.6326	0.6258	0.6364
1	0.4	0.6959343	0.6912	0.6892	0.7016	0.7042
1	0.2	0.7091062	0.7036	0.7164	0.7034	0.7032
1	0.1	0.7091062	0.7152	0.7120	0.7076	0.7046
2	1.6	0.4065697	0.4020	0.4128	0.4142	0.4016
2	0.8	0.4843246	0.4808	0.4794	0.4866	0.4664 [1]
2	0.4	0.5028316	0.4980	0.4964	0.5108	0.5074
2	0.2	0.5028316	0.5070	0.5056	0.4874	0.5126

Максимална апсолутна разлика је [1] $\max\limits_{x,y,i}\left|G(x,y)-\hat{P}_i\right| = 0.0179246.$

Табела 5: $r = 2,\ x \in \{1, 2\}$ *и неке вредности* y

$NS = 10000,\ n = 20000$						
x	y	$G(x,y)$	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_2$	$\hat{P}_3$	$\hat{P}_4$
1	0.8	0.6376282	0.6333	0.6351	0.6423	0.6368
1	0.4	0.6959343	0.6955	0.6984	0.6885 [1]	0.6960
1	0.2	0.7091062	0.7096	0.7113	0.7053	0.7144
1	0.1	0.7091062	0.7082	0.7095	0.7121	0.7074
2	1.6	0.4065697	0.4080	0.4008	0.4086	0.4003
2	0.8	0.4843246	0.4919	0.4896	0.4796	0.4819
2	0.4	0.5028316	0.5067	0.5066	0.5037	0.5094
2	0.2	0.5028316	0.4960	0.5098	0.5037	0.5029

Максимална апсолутна разлика је [1] $\max\limits_{x,y,i} \left| G(x,y) - \hat{P}_i \right| = 0.0074343.$

- **Симулација 4**

Ова симулација односи се на случај када је (X_k) негативно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром r, а (c_k) исти низ као у Симулацији 3.

Одговарајућа гранична теорема је Теорема 3.7.

Резултати симулације садржани су у Табели 6.

Табела 6: $r = 2,\ x \in \{1, 2\}$ *и неке вредности* y

$r = 2,\ NS = 10000,\ n = 20000$							
x	y	$G(x,y)$	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_2$	$\hat{P}_3$	$\hat{P}_4$	$\hat{P}_5$
1	0.8	0.5091564	0.5062	0.5196 [1]	0.5119	0.5138	0.5075
1	0.4	0.5915554	0.5848	0.5927	0.5942	0.5936	0.5988
1	0.2	0.6257840	0.6169	0.6192	0.6322	0.6247	0.6247
1	0.1	0.6257840	0.6229	0.6268	0.6293	0.6166	0.6236
2	1.6	0.2592403	0.2541	0.2575	0.2561	0.2618	0.2610
2	0.8	0.3499377	0.3472	0.3487	0.3525	0.3502	0.3444
2	0.4	0.3916056	0.3849	0.3979	0.3972	0.3911	0.3979
2	0.2	0.3916056	0.3855	0.3884	0.3832	0.3921	0.3865

Максимална апсолутна разлика је ${}^{1}\max_{x,y,i}\left|G(x,y)-\hat{P}_i\right| = 0.0104436.$

- **Симулација 5**

Ова симулација односи се на случај када је (X_k) позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром r, а $\left(c_k^{(1)}\right)$, $\left(c_k^{(2)}\right)$, $\left(c_k^{(3)}\right)$ су низови одређени са

$c_k^{(1)} = 1$ ако је $k = 3m$; $c_k^{(1)} = 0$ ако је $k = 3m-2$ или $k = 3m-1,\ m \in \mathbb{N}$;
$c_k^{(2)} = 1$ ако је $k = 3m-1$; $c_k^{(2)} = 0$ ако је $k = 3m-2$ или $k = 3m,\ m \in \mathbb{N}$;
$c_k^{(3)} = 1$ ако је $k = 3m-2$; $c_k^{(3)} = 0$ ако је $k = 3m-1$ или $k = 3m,\ m \in \mathbb{N}$;

Одговарајућа гранична теорема је Теорема 3.5.

Резултати симулације садржани су у Табели 7.

Табела 7: *$r = 2$, $x \in \{1,2\}$ и неке вредности y*

$r = 2,\ NS = 5000,\ n = 12000$								
x	y	$G(x,y)$	$\hat{P}_1^{(1)}$	$\hat{P}_2^{(1)}$	$\hat{P}_1^{(2)}$	$\hat{P}_2^{(2)}$	$\hat{P}_1^{(3)}$	$\hat{P}_2^{(3)}$
1	0.8	0.6483443	0.6492	0.6484	0.6532	0.6552	0.6292 [3]	0.6518
1	0.6	0.6930406	0.6912	0.6944	0.6938	0.6778 [2]	0.6872	0.7088
1	0.4	0.7285736	0.7284	0.7304	0.7352	0.7308	0.7264	0.7246
1	0.3	0.7408182	0.7456	0.7474	0.7332	0.7360	0.7540	0.7284
1	0.2	0.7470175	0.7394	0.7344 [1]	0.7548	0.7400	0.7484	0.7394
1	0.1	0.7470175	0.7550	0.7436	0.7502	0.7396	0.7410	0.7360

Максималне апсолутне разлике су

$${}^{1}\max_{x,y,j}\left|G(x,y)-\widehat{P}_j^{(1)}\right| = 0.0126175$$

$${}^{2}\max_{x,y,j}\left|G(x,y)-\widehat{P}_j^{(2)}\right| = 0.0152406$$

$${}^{3}\max_{x,y,j}\left|G(x,y)-\widehat{P}_j^{(3)}\right| = 0.0191443.$$

Информација о величинама апсолутних вредности разлика граничних и оцењених вероватноћа догађаја од интереса, која је обезбеђена за сваку од претходних симулација, требало би да укаже на квалитет резултата добијених компјутерским симулацијама.

Заиста, испоставља се да се извођењем симулација може доћи до сасвим добрих апроксимација граничне вероватноће

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1-\frac{x}{n}, M_n \leqslant 1-\frac{y}{n}\right\}.$$

Истовремено, писање програма (у статистичком софтверу), који служе у те сврхе, није превише компликовано. Стога постаје сасвим јасно колико су компјутерске симулације корисне, а у ситуацијама када теоријски резултати не постоје, чак неопходне. Примери који следе најбоље то илуструју.

- **Симулација 6**

Ова симулација односи се на случај када је (X_k) позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром r, а некомплетни узорак је уместо неслучајним $0-1$ низом (c_k) одређен *низом* (I_k) *Бернулијевих случајних величина*, независним од случајног низа (X_k). При томе, претпоставља се да су индикатор случајне величине из овог низа међусобно независне и са истим параметром $p := P\{I_k = 1\}$, $k \in \mathbb{N}$. Тада парцијална сума $S_k := \sum_{j=1}^{k} I_j$ има биномну $B(k,p)$ расподелу и, на основу јаког закона великих бројева, важи

$$\frac{S_k}{k} \stackrel{\text{с.с.}}{\to} p, \quad \text{при } k\to\infty.$$

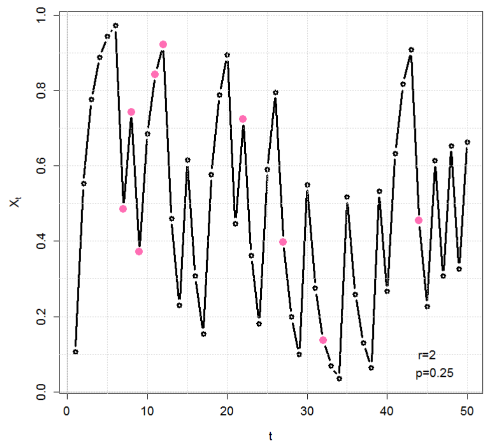
Резултати симулације садржани су у Табелама 8 и 9.

Табела 8: *$r=2$, $p=0.25$, $x=1$ и неке вредности y*

$r=2$, $NS=5000$, $n=10000$ ($NS=10000$, $n=20000$)						
y	0.80	0.50	0.40	0.20	0.10	0.02
$\hat{P}_1$	0.6668	0.7356	0.7636	0.7880	0.8110 (0.8124)	0.8204 (0.8187)
$\hat{P}_2$	0.6512	0.7274	0.7632	0.7932	0.7950 (0.8157)	0.8172 (0.8128)
$\hat{P}_3$	0.6506	0.7232	0.7472	0.7958	0.8134 (0.8100)	0.8184 (0.8151)

Табела 9: *$r = 2$, $p = 0.25$, $x = 2$ и неке вредности y*

$r = 2,\ NS = 5000,\ n = 10000\ (NS = 10000,\ n = 20000)$						
y	1.60	1.00	0.80	0.40	0.20	0.04
$\hat{P}_1$	0.4276	0.5342	0.5720	0.6296	0.6576 (0.6548)	0.6616 (0.6675)
$\hat{P}_2$	0.4280	0.5418	0.5570	0.6230	0.6590 (0.6588)	0.6750 (0.6784)
$\hat{P}_3$	0.4340	0.5380	0.5710	0.6210	0.6642 (0.6542)	0.6760 (0.6698)



Слика 9: *Трајекторија позитивно корелираног равномерног $AR(1)$ процеса, $r = 2$; розе тачке одговарају елементима некомплетног узорка одређеног низом (I_k)*

- **Симулација 7**

Ова симулација односи се на случај када је (X_k) позитивно корелиран равномерни $AR(1)$ процес са параметром r, а некомплетни узорак одређен *једноставним тачкастим процесом*, или прецизније *процесом обнављања* (за више детаља погледати нпр. књигу Serfozo (2009)).

За наставак приче потребно је увести низ $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ независних и једнако расподељених случајних величина, таквих да је $P\{Y_1 \in \mathbb{N}\} = 1$, $EY_1 = \mu < +\infty$. Са T_k означе се парцијалне суме првих k чланова овог низа, тј. $T_k := \sum_{j=1}^{k} Y_j$, $k \in \mathbb{N}$. Оне представљају тренутке обнављања. Такође, претпоставља се да су случајни низови (Y_n) и (X_n) независни.

Нека је $N(n) = \#\{k : T_k \leqslant n\}$. На основу јаког закона великих бројева, тада, важи

$$\frac{N(n)}{n} \overset{\text{с.с.}}{\to} \frac{1}{\mu}, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Нека је, као и до сада, M_n максимум првих n чланова низа (X_n), а случајна величина $\widetilde{M}_n$ се дефинише са $\widetilde{M}_n := \max\{X_{T_k} : T_k \leqslant n\}$.

– Нека Y_1 има геометријску расподелу с параметром p, $0 < p < 1$, тј.

$$P\{Y_1 = k\} = p(1-p)^{k-1} \text{ за } k \in \mathbb{N}, \quad EY_1 = \frac{1}{p}, \quad \frac{N(n)}{n} \overset{\text{с.с.}}{\to} p, \text{ при } n \to \infty.$$

Резултати симулације садржани су у Табелама 10 и 11.

Табела 10: *$r = 2$, $p = 0.5$, $x = 1$ и неке вредности y*

$r = 2,\ NS = 5000,\ n = 10000$						
y	0.80	0.50	0.40	0.20	0.10	0.02
$\hat{P}_1$	0.6342	0.6858	0.7050	0.7146	0.7132	0.7074
$\hat{P}_2$	0.6432	0.6864	0.6968	0.7148	0.7080	0.7246
$\hat{P}_3$	0.6408	0.6832	0.6870	0.7048	0.7100	0.7094

Табела 11: *$r = 2$, $p = 0.5$, $x = 2$ и неке вредности y*

$r = 2,\ NS = 5000,\ n = 10000$						
y	1.60	1.00	0.80	0.40	0.20	0.04
$\hat{P}_1$	0.4136	0.4592	0.4858	0.5162	0.5054	0.5128
$\hat{P}_2$	0.4130	0.4750	0.4824	0.5018	0.5190	0.5190
$\hat{P}_3$	0.4122	0.4772	0.4868	0.4998	0.5182	0.5096

– Нека Y_1 има негативну биномну расподелу с параметрима $s \in \mathbb{N}$ и $\tilde{p}$, $0 < \tilde{p} < 1$, тј.

$$P\{Y_1 = k\} = \binom{k-1}{s-1}\tilde{p}^s(1-\tilde{p})^{k-s} \text{ за } k \in \{s, s+1, \dots\},$$
$$EY_1 = \frac{s}{\tilde{p}}, \quad p := \frac{N(n)}{n} \overset{\text{с.с.}}{\to} \frac{\tilde{p}}{s}, \text{ при } n \to \infty.$$

За $s = 1$ негативна биномна расподела уствари је геометријска расподела и $N(n) \stackrel{d}{=} S_n$, где је S_n случајна величина са $B(n, p)$ расподелом.
Резултати симулације садржани су у Табелама 12 и 13.

Табела 12: *$r = 2$, $\tilde{p} = 0.5$ $(p = 0.25)$, $s = 2$, $x = 1$ и неке вредности y*

$r = 2,\ NS = 5000,\ n = 10000\ (NS = 10000,\ n = 20000))$						
y	0.80	0.50	0.40	0.20	0.10	0.02
$\hat{P}_1$	0.6594	0.7380	0.7494	0.7836	0.8024 (0.7942)	0.8020 (0.7999)
$\hat{P}_2$	0.6494	0.7218	0.7554	0.7772	0.7988 (0.7963)	0.8070 (0.8004)
$\hat{P}_3$	0.6552	0.7412	0.7540	0.7836	0.8006 (0.7949)	0.8028 (0.7966)

Табела 13: *$r = 2$, $\tilde{p} = 0.5$ $(p = 0.25)$, $s = 2$, $x = 2$ и неке вредности y*

$r = 2,\ NS = 5000,\ n = 10000$						
y	1.60	1.00	0.80	0.40	0.20	0.04
$\hat{P}_1$	0.4304	0.5296	0.5670	0.6130	0.6290 (0.6370)	0.6362 (0.6520)
$\hat{P}_2$	0.4298	0.5456	0.5598	0.6308	0.6394 (0.6309)	0.6518 (0.6390)
$\hat{P}_3$	0.4418	0.5262	0.5608	0.6150	0.6288 (0.6322)	0.6468 (0.6377)

Требало би приметити да је парцијални максимум $\widetilde{M}_n$ уствари максимум чланова случајног низа (X_{T_k}), који је добијен *случајним проређивањем* оригиналног низа (X_k), са индексима мањим или једнаким n. У докторској дисертацији Olshanski (2005) доказано је важење двеју неједнакости у вези са асимптотским понашањем случајног вектора $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$, при $n \to \infty$. Оне су наведене у (3.8) и (3.9). Симулације показују да је неједнакост (3.8) оштра, за разлику од неједнакости (3.9), која је прилично груба за неке вредности x и y.

Теоријски резултати – граничне теореме за некомплетне узорке на које се односе Симулације 6 и 7 не постоје, па се не могу вршити поређења као у претходним примерима. У наставку ће, стога, бити приказани закључци које је било могуће добити *статистичком* *анализом* података добијених компјутерским симулацијама. Наиме, користећи стандардне аргументе, могу се тестирати хипотезе које се тичу вероватноћа, чије се оцене налазе у горњим табелама. Идеја је оценити да ли је разлика између двеју непознатих вероватноћа p_1 и p_2 статистички значајна. Нулта хипотеза је $H_0 : p_1 = p_2$, а оцене $\hat{p}_1 = \dfrac{x_1}{n_1}$ и $\hat{p}_2 = \dfrac{x_2}{n_2}$ вероватноћа p_1 и p_2, су неке од вредности $\hat{P}_i$ наведених у табелама. Овде су n_1 и n_2 једнаки броју извршених симулација. Алтернативна хипотеза је $H_1 : p_1 \neq p_2$. Тест статистика

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}},$$

где је $\sigma^2_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}\left(1 - \dfrac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}\right)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)$, има стандардну нормалну $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу.

Обавезно би требало приметити да су некомплетни узорци у последња два симулациона задатка одређени случајним низом (I_k), односно извесним процесом обнављања. Различите трајекторије ових процеса могу резултирати различитим асимптотским понашањем случајног вектора $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$. То је главни разлог због кога је симулација изведена више пута за исте вредности x и y.

- ⋆ Нека су p_1 и p_2 вероватноће догађаја $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \dfrac{y}{n}\right\}$ при условима датим у Симулацијама 6 и 7, респективно, и нека су $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$ оцене ових вероватноћа, наведене редом у Табелама 9 и 13. Приликом тестирања хипотеза добијени су следећи резултати.

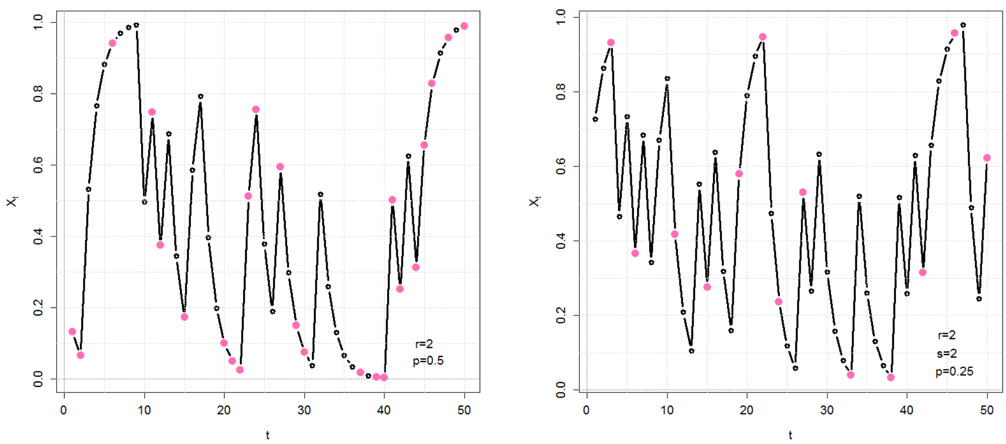
  За $x = 1$, $y \in \{0.8, 0.5, 0.4, 0.2\}$ и $x = 2$, $y \in \{1.6, 1, 0.8, 0.4\}$, и све изборе вредности $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$, реализована вредност тест статистике $|z|$ мања је од 1.96. Према томе, нема разлога да се одбаци нулта хипотеза ни за праг значајности $\alpha = 0.05$ нити за $\alpha = 0.01$.

  За $x = 1$, $y \in \{0.1, 0.02\}$ и $x = 2$, $y \in \{0.2, 0.04\}$, и све изборе вредности $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$ (на основу симулација са $NS = 10000$), вредност тест статистике $|z|$ већа је од 1.96. Уз неколико изузетака, добија се да је $|z| > 2.58$. Према томе, нулту хипотезу $H_0 : p_1 = p_2$ требало би увек одбацити у корист алтернативне за праг значајности $\alpha = 0.05$. Уз неколико изузетака, ову хипотезу требало би одбацити, такође, и за праг значајности $\alpha = 0.01$.
- ⋆ Нека су p_1 и p_2 вероватноће догађаја $\left\{\widetilde{M}_n \leqslant 1 - \dfrac{x}{n}, M_n \leqslant 1 - \dfrac{y}{n}\right\}$ при условима датим у Симулацијама 6 и 7, респективно, и нека су $\hat{p}_1$ и

$\hat{p}_2$ оцене ових вероватноћа, наведене редом у Табелама 8 и 12. Приликом тестирања хипотеза дошло се до следећих резултата, који су, иако не потпуно исти, веома слични онима добијеним малопре.

За $x = 1$, $y \in \{0.8, 0.5, 0.4, 0.2\}$ и $x = 2$, $y \in \{1.6, 1, 0.8, 0.4\}$, уз неколико изузетака у погледу избора вредности $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$, реализована вредност тест статистике $|z|$ мања је од 1.96. Вредност $|z|$ увек је мања од 2.58. Према томе, уз неколико изузетака, нема разлога да се одбаци нулта хипотеза за праг значајности $\alpha = 0.05$. Она се увек прихвата за $\alpha = 0.01$.

За $x = 1$, $y \in \{0.1, 0.02\}$ и $x = 2$, $y \in \{0.2, 0.04\}$, и све изборе вредности $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$ (на основу симулација са $NS = 10000$), вредност тест статистике $|z|$ већа је од 1.96. Уз неколико изузетака, добија се да је $|z| > 2.58$. Према томе, нулту хипотезу $H_0 : p_1 = p_2$ требало би увек одбацити у корист алтернативне за праг значајности $\alpha = 0.05$. Уз неколико изузетака, ову хипотезу требало би одбацити, такође, и за праг значајности $\alpha = 0.01$.



Слика 10: *Трајекторија позитивно корелираног равномерног $AR(1)$ процеса, $r = 2$; розе тачке одговарају елементима некомплетног узорка одређеног низом (Y_k) са $G(p)$ (лево), односно $NB(s, \tilde{p})$ (десно) расподелом*

3.4 Закључак

Равномерни $AR(1)$ процес пример је случајног низа који је, по својој структури, веома једноставан и „правилан”, али ипак интересантан са екстремалног становишта. У прилог томе говоре све раније наведене граничне теореме.

С обзиром на то да се нови резултати тичу конкретних некомплетних узорака из овог процеса, проблематика заједничке граничне расподеле вектора кога чине максимум комплетног узорка и парцијални максимум, није исцрпљена. Напротив, резултати добијени компјутерским симулацијама, за случајеве који нису теоријски покривени, наговештавају колико се још отворених питања намеће. Најзначајније од њих свакако би било питање карактеризације заједничких граничних расподела случајног вектора $\left(\widetilde{M}_n, M_n\right)$, при $n \to \infty$, у ситуацији када је некомплетан узорак, а онда на известан начин и парцијални максимум $\widetilde{M}_n$, одређен тачкастим процесом. За сада није јасно да ли је уопште могуће и како решити овај проблем. Можда би приступ у коме би се добијене граничне теореме сагледале у контексту структура зависности (експонент мере и спектралне мере, стабилне функције зависности репова, Пикандсове функције зависности, копула) водио ка новим, интересантним закључцима. У будућности би се могло, за почетак, радити на (за нијансу једноставнијем) проблему побољшања неједнакости (3.8) и (3.9), које је предложио Olshanski (2005). Са друге стране, ако се задржи претпоставка да је некомплетан узорак одређен неслучајним $0-1$ низом, конструисаним периодичним понављањем одређених серија нула и јединица, било би занимљиво позабавити се питањем да ли транслација индекса регистрованих случајних величина за неку вредност има утицаја на граничну расподелу од интереса (то би било уопштење Теореме 3.5). Са друге стране, може се ићи и у правцу доказивања додатних особина равномерног $AR(1)$ процеса, продубљујући рецимо резултате који се тичу ергодичности.

Литература

M. A. Al-Osh and A. A. Alzaid. First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process. *Journal of Time Series Analysis*, 8(3):261–275, 1987.

J. Anděl. Marginal distributions of autoregressive processes. In *Transactions of the Ninth Prague Conference*, volume 9A of *Czechoslovak Academy of Sciences*, pages 127–135. Springer Netherlands, 1983.

M. Арсеновић, M. Достанић, and Д. Јоцић. *Теорија мере, функционална анализа, теорија оператора.* Математички факултет, Универзитет у Београду, 1998.

N. Balakrishnan and V. Nevzorov. *A Primer on Statistical Distributions.* John Wiley & Sons, 2004.

A. A. Balkema and S. I. Resnick. Max-infinite divisibility. *Journal of Applied Probability*, 14(2):309–319, 1977.

V. Barnett. The ordering of multivariate data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 139(3):318–355, 1976.

B. Basrak, R. A. Davis, and T. Mikosch. A characterization of multivariate regular variation. *The Annals of Applied Probability*, 12(3):908–920, 2002.

J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Segers, J. Teugels, D. De Waal, and C. Ferro. *Statistics of Extremes: Theory and Applications.* Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, 2004.

S. M. Berman. Convergence to bivariate limiting extreme value distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 13(1):217–223, 1961.

S. M. Berman. Limit theorems for the maximum term in stationary sequences. *The Annals of Mathematical Statistics*, 35(2):502–516, 1964.

P. Billingsley. *Weak Convergence of Measures: Applications in Probability.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1971.

N. Bingham, C. Goldie, and J. Teugels. *Regular Variation.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1989.

S. Cheng, L. de Haan, and J. Yang. Asymptotic distributions of multivariate intermediate order statistics. *Theory of Probability & Its Applications*, 41(4): 646–656, 1997.

M. R. Chernick. A limit theorem for the maximum of autoregressive processes with uniform marginal distributions and its implications to the analysis of air pollution data. Technical report, Department of Statistics Stanford University, 1978.

M. R. Chernick. A limit theorem for the maximum of autoregressive processes with uniform marginal distributions. *The Annals of Probability*, 9(1):145–149, 1981.

M. R. Chernick and R. A. Davis. Extremes in autoregressive processes with uniform marginal distributions. *Statistics & Probability Letters*, 1:85–88, 1982.

M. R. Chernick, T. Hsing, and W. P. McCormick. Calculating the extremal index for a class of stationary sequences. *Advances in Applied Probability*, 23(4):835–850, 1991.

S. G. Coles. Regional modelling of extreme storms via max-stable processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 55(4):797–816, 1993.

S. G. Coles. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values.* Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2001.

S. G. Coles and J. A. Tawn. Statistical methods for multivariate extremes: An application to structural design. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 43(1):1–48, 1994.

S. G. Coles and D. Walshaw. Directional modelling of extreme wind speeds. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 43(1):139–157, 1994.

S. G. Coles, J. Heffernan, and J. A. Tawn. Dependence measures for extreme value analyses. *Extremes*, 2(4):339–365, 1999.

H. David. Concomitants of extreme order statistics. In J. Galambos, J. Lechner, and E. Simiu, editors, *Extreme Value Theory and Applications*, pages 211–224. Springer US, 1994.

R. A. Davis. Maxima and minima of stationary sequences. *The Annals of Probability*, 7(3):453–460, 1979.

R. A. Davis. Limit laws for the maximum and minimum of stationary sequences. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 61:31–42, 1982.

L. de Haan. *On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes*. Mathematical Centre Tracts. Mathematisch Centrum, 1970.

L. de Haan. Sample extremes: An elementary introduction. *Statistica Neerlandica*, 30(4):161–172, 1976.

L. de Haan. A spectral representation of max-stable processes. *The Annals of Probability*, 12(4):1194–1204, 1984.

L. de Haan. Extremes in higher dimensions: The model and some statistics. In *Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 45th Session, Amsterdam, Paper 26.3.*, 1985.

L. de Haan and A. Ferreira. *Extreme Value Theory: An Introduction*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer New York, 2006.

L. de Haan and J. Pickands. Stationary min-stable stochastic processes. *Probability Theory and Related Fields*, 72(4):477–492, 1986.

L. de Haan and S. I. Resnick. Limit theory for multivariate sample extremes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 40:317–337, 1977.

P. Embrechts, C. Klüppelberg, and T. Mikosch. *Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

M. Falk, J. Hüsler, and R.-D. Reiss. *Laws of Small Numbers: Extremes and Rare Events*. Springer Basel, 2011.

B. Finkenstädt and H. Rootzén. *Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment*. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. CRC Press, 2004.

R. A. Fisher and L. H. C. Tippett. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24:180–190, 1928.

D. P. Gaver and P. A. W. Lewis. First-order autoregressive gamma sequences and point processes. *Advances in Applied Probability*, 12(3):727–745, 1980.

L. Glavaš. New examples of partial samples from the uniform AR(1) process and asymptotic distributions of extremes. To appear in *Filomat*, 29(10):2289-2299, 2015.

B. V. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, 44(3):423–453, 1943.

C. M. Goldie and S. I. Resnick. Many multivariate records. *Stochastic Processes and their Applications*, 59(2):185 – 216, 1995.

G. K. Grunwald, R. J. Hyndman, L. Tedesco, and R. L. Tweedie. A unified view of linear AR(1) models. Available at `http://www.stat.colostate.edu/statresearch/stattechreports/Technical%20Reports/1997/97-18%20Grunwald%20Hyndman%20Tedesco%20Tweedie.pdf`, 1997.

G. Gudendorf and J. Segers. Extreme-value copulas. In P. Jaworski, F. Durante, W. Härdle, and T. Rychlik, editors, *Copula Theory and Its Applications: Proceedings of the Workshop Held in Warsaw, 25-26 September 2009*, Lecture Notes in Statistics. Springer Berlin Heidelberg, 2010.

E. J. Gumbel. Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55(292):698–707, 1960.

E. J. Gumbel and C. K. Mustafi. Some analytical properties of bivariate extremal distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 62(318):569–588, 1967.

A. Hall and J. Hüsler. Extremes of stationary sequences with failures. *Stochastic Models*, 22(3):537–557, 2006.

A. Hall and M. Scotto. On the extremes of randomly sub-sampled time series. *REVSTAT – Statistical Journal*, 6(2):151–164, 2008.

A. Hall and M. G. Temido. On the max-semistable limit of maxima of stationary sequences with missing values. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139: 875–890, 2009.

J. Hamilton. *Time Series Analysis.* Princeton University Press, 1994.

E. Hashorva and Z. Weng. Maxima and minima of complete and incomplete stationary sequences. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 86(5):707–720, 2014.

E. Hashorva, Z. Peng, and Z. Weng. On Piterbarg theorem for maxima of stationary Gaussian sequences. *Lithuanian Mathematical Journal*, 53(3):280–292, 2013.

T. Hsing. Extreme value theory for multivariate stationary sequences. *Journal of Multivariate Analysis*, 29:274–291, 1989.

J. Hüsler. Limit distributions of multivariate extreme values in nonstationary sequences of random vectors. In J. Hüsler and R. Reiss, editors, *Extreme value theory: proceedings of a conference held in Oberwolfach, Dec. 6-12, 1987*, Lecture notes in statistics. Springer-Verlag, 1989a.

J. Hüsler. Limit properties for multivariate extreme values in sequences of independent, non-identically distributed random vectors. *Stochastic Processes and their Applications*, 31:105–116, 1989b.

J. Hüsler. Multivariate extreme values in stationary random sequences. *Stochastic Processes and their Applications*, 35:99–108, 1990.

H. Joe. Families of min-stable multivariate exponential and multivariate extreme value distributions. *Statistics & Probability Letters*, 9(1):75 – 81, 1990.

H. Joe. *Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts.* Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Taylor & Francis, 1997.

H. Joe. *Dependence Modeling with Copulas.* Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Taylor & Francis, 2014.

H. Joe, R. L. Smith, and I. Weissman. Bivariate threshold methods for extremes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 54(1):171–183, 1992.

E. Kaufmann and R.-D. Reiss. Approximation rates for multivariate exceedances. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 45(1–2):235 – 245, 1995.

C. Klüppelberg and A. May. The dependence function for bivariate extreme value distributions - a systematic approach, 1998.

S. Kotz and S. Nadarajah. *Extreme Value Distributions: Theory and Applications.* Imperial College Press, 2000.

T. Krajka. The asymptotic behaviour of maxima of complete and incomplete samples from stationary sequences. *Stochastic Processes and their Applications*, 121:1705–1719, 2011.

A. V. Kudrov and V. I. Piterbarg. On maxima of partial samples in Gaussian sequences with pseudo-stationary trends. *Lithuanian Mathematical Journal*, 47 (1):48–56, 2007.

A. J. Lawrance. The innovation distribution of a gamma distributed autoregressive process. *Scandinavian Journal of Statistics*, 9(4):234–236, 1982.

M. Leadbetter, G. Lindgren, and H. Rootzén. *Extremes and related properties of random sequences and processes*. Springer series in statistics. Springer-Verlag, 1983.

M. R. Leadbetter. On extreme values in stationary sequences. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 28:289–303, 1974.

M. R. Leadbetter, G. Lindgren, and H. Rootzén. Conditions for the convergence in distribution of maxima of stationary normal processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 8(2):131 – 139, 1978.

A. W. Ledford and J. A. Tawn. Statistics for near independence in multivariate extreme values. *Biometrika*, 83(1):169–187, 1996.

R. M. Loynes. Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 36(3):993–999, 1965.

A. W. Marshall and I. Olkin. A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 62(317):30–44, 1967.

A. W. Marshall and I. Olkin. Domains of attraction of multivariate extreme value distributions. *The Annals of Probability*, 11(1):168–177, 1983.

E. McKenzie. Some simple models for discrete variate time series. *Journal of the American Water Resources Association*, 21(4):645–650, 1985.

D. G. Mejzler. On a theorem of B. V. Gnedenko. *Sb. Trudov Inst. Mat. Akad. Nauk. Ukrain. R.S.R.*, 12:31–35, 1949.

Y. Mittal. Maxima of partial samples in Gaussian sequences. *The Annals of Probability*, 6(3):421–432, 1978.

Y. Mittal and D. Ylvisaker. Limit distributions for the maxima of stationary Gaussian processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 3(1):1 – 18, 1975.

P. Mladenović. Maximum of a partial sample in the uniform AR(1) processes. *Statistics & Probability Letters*, 79:1414–1420, 2009.

P. Mladenović and V. I. Piterbarg. On asymptotic distribution of maxima of complete and incomplete samples from stationary sequences. *Stochastic Processes and their Applications*, 116:1977–1991, 2006.

P. Mladenović and L. Živadinović. Uniform AR(1) processes and maxima on partial samples. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 44(12):2546–2563, 2015.

П. Младеновић. *Екстремне вредности случајних низова.* Математички факултет, Универзитет у Београду, 2002.

П. Младеновић. *Елементи актуарске математике.* Математички факултет, Универзитет у Београду, 2014.

H. N. Nagaraja and H. A. David. Distribution of the maximum of concomitants of selected order statistics. *The Annals of Statistics*, 22:478–494, 1994.

A. Obretenov. On the dependence function of Sibuya in multivariate extreme value theory. *Journal of Multivariate Analysis*, 36(1):35 – 43, 1991.

K. A. Olshanski. *Some Statistical Problems in the Theory of Time Series.* PhD thesis, Moscow Lomonosov State University, 2005.

Z. Peng, L. Cao, and S. Nadarajah. Asymptotic distributions of maxima of complete and incomplete samples from multivariate stationary Gaussian sequences. *Journal of Multivariate Analysis*, 101:2641–2647, 2010.

J. Pickands. Multivariate extreme value distributions. In *Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 43rd Session, Buenos Aires*, 1981.

S. I. Resnick. Point processes, regular variation and weak convergence. *Advances in Applied Probability*, 18(1):66–138, 1986.

S. I. Resnick. *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling.* Heavy-tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling. Springer, 2007.

S. I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes.* Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer New York, 2008.

C. Y. Robert. On asymptotic distribution of maxima of stationary sequences subject to random failure or censoring. *Statistics & Probability Letters*, 80:134–142, 2010.

M. Rosenblatt. A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 42(1):43–47, 1956.

M. Scotto. Extremes of a class of deterministic sub-sampled processes with applications to stochastic difference equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 115:417–434, 2005.

R. Serfozo. *Basics of Applied Stochastic Processes*. Probability and Its Applications. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

M. Sibuya. Bivariate extreme statistics, I. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 11(2):195–210, 1959.

R. L. Smith. Max-stable processes and spatial extremes. Available at `http://www.stat.unc.edu/postscript/rs/spatex.pdf`, 1991.

R. L. Smith. Multivariate treshold methods. In J. Galambos, J. Lechner, and E. Simiu, editors, *Extreme Value Theory and Applications*, Extreme Value Theory and Applications: Proceedings of the Conference on Extreme Value Theory and Applications, Gaithersburg, Maryland, 1993. Springer US, 1994.

N. Tajvidi. *Characterisation and Some Statistical Aspects of Univariate and Multivariate Generalised Pareto Distributions*. PhD thesis, University of Göteborg, 1996.

R. Takahashi. Characterizations of a multivariate extreme value distribution. *Advances in Applied Probability*, 20(1):235–236, 1988.

R. Takahashi. Domains of attraction of multivariate extreme value distributions. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 99(4): 551–554, 1994.

J. A. Tawn. Bivariate extreme value theory: Models and estimation. *Biometrika*, 75(3):397–415, 1988.

J. Tiago de Oliveira. Structure theory of bivariate extremes; extension. *Estudos de Matemática, Estatistica e Econometrica*, 7:165–195, 1962/63.

R. von Mises. La distribution de la plus grande de n valeurs. Revue Mathematique de l'Union Interbalkanique 1:141-160, 1936.

I. Weissman. Estimation of parameters and large quantiles based on the k largest observations. *Advances in Applied Probability*, 10(2):331–332, 1978.

Математичка нотација

Списак ознака

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$	d-димензиони интервал $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] := \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\} = \bigtimes_{1 \leqslant j \leqslant d} (a_j, b_j]$
$[-\boldsymbol{\infty}, +\boldsymbol{\infty})$	d-димензиони интервал $[-\boldsymbol{\infty}, +\boldsymbol{\infty}) := [-\infty, +\infty)^d$
$\#\{\cdots\}$	кардиналност скупа
$\mathbf{0}$	d-димензиони нула вектор
$\mathbf{1}$	d-димензиони вектор чије су све компоненте једнаке 1
$\boldsymbol{x}$	d-димензиони реалан вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\stackrel{d}{=}$	једнакост у расподели
Corr	коефицијент корелације случајних величина
cov	коваријација случајних величина
$\bigvee_{j \in J} a_j$	$\bigvee_{j \in J} a_j := \sup_{j \in J} a_j$
$\bigwedge_{j \in J} a_j$	$\bigwedge_{j \in J} a_j := \inf_{j \in J} a_j$
$\epsilon(\lambda)$	експоненцијална расподела с параметром $\lambda > 0$
$\log(\cdot)$	природни логаритам
$\mathbb{R}^d$	d-димензиони реални простор
$\mathcal{N}(0,1)$	стандардна нормална расподела
$\mathcal{U}[0,1]$	(непрекидна) равномерна расподела на сегменту $[0,1]$
$\sim$	$a(t) \sim b(t)$, при $t \to \infty$, је ознака за $\dfrac{a(t)}{b(t)} \to 1$, при $t \to \infty$
$\overline{F}(\cdot)$	десни реп функције расподеле F, тј. $\overline{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$
$\xrightarrow{\text{с.к.}}$	средње-квадратна конвергенција
$\xrightarrow{\text{с.с.}}$	скоро сигурна конвергенција
$\xrightarrow{D}$	конвергенција у расподели

$\xrightarrow{P}$	конвергенција у вероватноћи
∂B	граница скупа B
$\Phi(\cdot)$	функција расподеле стандардне нормалне расподеле
$\Rightarrow$	слаба конвергенција тачкастих процеса
$\varepsilon_x(\cdot)$	Диракова мера
$A^{\complement}$	комплемент скупа A
$C(G)$	скуп тачака непрекидности функције расподеле G
C_F	копула за функцију расподеле F
$D(G)$	област привлачења функције расподеле G
$f(\cdot;\boldsymbol{\theta})$	функција са вектором параметара $\boldsymbol{\theta}$
$f^{-1}(A)$	$f^{-1}(A) := \{\omega : f(\omega) \in A\}$, где је f случајан елемент у простору S
$F^{\leftarrow}(\cdot)$	уопштени инверз функције расподеле F, тј. $F^{\leftarrow}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant q\}$, за $0 < q < 1$; може се, такође, користити и термин: квантил функција за F
I_A	индикатор случајног догађаја A
$m(\cdot)$	Лебегова мера
x_F	десни крај носача функције расподеле F, тј. $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$

Биографија аутора

Ленка (Живадиновић) Главаш рођена је 1988. године у Београду. Завршила је Девету београдску гимназију „Михаило Петровић-Алас” 2006. године као носилац Вукове дипломе.

Основне студије на Математичком факултету, Универзитета у Београду, на смеру Статистика, актуарска и финансијска математика завршила је 2010. године са просечном оценом 9.63.

Мастер студије, на студијском програму Математика – Примењена математика, завршила је 2011. године када је одбранила мастер тезу под насловом „Екстремне вредности у равномерном ауторегресионом процесу првог реда”, под руководством проф. др Павла Младеновића.

Од 2011. године запослена је на Математичком факултету, прво као сарадник у настави (2011-2014) а затим и као асистент (2014-) за ужу научну област Вероватноћа и статистика. Држала је, односно држи, вежбе на курсевима: Вероватноћа и статистика А, Теорија вероватноћа, Случајни процеси, Теорија узорака, Елементи актуарске математике, Стохастички модели у операционим истраживањима.

Радови у часописима:

- P. Mladenović, L. Živadinović (2015): *Uniform AR(1) Processes and Maxima on Partial Samples*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 44(12):2546-2563.
- L. Glavaš (2015): *New Examples of Partial Samples from the Uniform AR(1) Process and Asymptotic Distributions of Extremes*, Filomat, 29(10):2289-2299.
- L. Glavaš, J. Jocković, P. Mladenović (2015): *A Modification of Hill's Tail Index Estimator*, Scientific Bulletin of Mircea cel Batran Naval Academy, 18(2):261-268.

Имала је следећа саопштења на међународним конференцијама:

- L. Glavaš (speaker), P. Mladenović (2015): *Limit Distributions of Partial Maxima in the Uniform AR(1) Processes*, EVA 2015, June 15-19, 2015, Ann Arbor, Michighan, USA.

- P. Mladenović, L. Glavaš (coauthor) (2015): *Asymptotic Behavior of Point Processes Associated with Coupon Collector's Problem*, EVA 2015, June 15-19, 2015, Ann Arbor, Michighan, USA.
- J. Jocković, P. Mladenović, L. Glavaš (coauthor) (2015): *A Modification of Hill's Tail Index Estimator*, BALCOR 2015, September 09-13, 2015, Constanta, Romania.
- J. Jocković, P. Mladenović, L. Glavaš (coauthor) (2015): *Some Tail Index Estimators and their Properties*, MICOM 2015, September 22-26, 2015, Athens, Greece.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Ленка Главаш

број уписа 2017 / 2011

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Граничне расподеле парцијалних максимума равномерних AR(1) процеса

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 07.12.2015. г.

LGlavaš

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Ленка Главаш

Број уписа 2017/2011

Студијски програм Математика – Вероватноћа и статистика

Наслов рада Граничне расподеле парцијалних максимума равномерних AR(1) процеса

Ментор проф. др Павле Младеновић

Потписани Ленка Главаш

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 07.12.2015. г.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Граничне расподеле парцијалних максимума равномерних AR(1) процеса

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 07.12.2015. г.

Lj. Glavaš