УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

мр Мирко С. Јовановић

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ АПСТРАКТНИХ МЕТРИЧКИХ ПРОСТОРА

докторска дисертација

Београд, 2016

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

mr Mirko S. Jovanović

CONTRIBUTION TO THE THEORY OF ABSTRACT METRIC SPACES

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016

Ментор:

др Зоран Каделбург, редован професор,

Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Зоран Каделбург, редован професор,

Универзитет у Београду, Математички факултет

др Иван Аранђеловић, редован професор,

Универзитет у Београду, Машински факултет

др Ненад Цакић, редован професор,

Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

Датум одбране:

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ АПСТРАКТНИХ МЕТРИЧКИХ ПРОСТОРА

РЕЗИМЕ

Ова дисертација је прилог Метричкој теорији фиксне тачке, области која се у последње време интензивно развија. Састоји се из пет поглавља.

У првом поглављу доказана је једна позната лема, која се примењује у доказу Banach-овог принципа контракције, исказаног за орбитално комплетне метричке просторе.

У другом поглављу доказано је осам теорема које генералишу неке познате резултате о фиксним тачкама у метричким просторима (Boyd-Wong-ов, Ćirićev, Pant-ов и друге). Неке од тих теорема су модификације познатих, а три су потпуно нове.

У трећем поглављу доказане су три теореме које генералишу резултат Немыцкий-а о фиксним тачкама пресликавања у компактним метричким просторима, као и једно уопштење теореме Edelstein-а. Код неких теорема су оригинални доказ и исказане последице.

У четвртом поглављу разматрају се b-метрички простори, као уопштења метричких. Изведена је генерализација теореме Zamfirescu-а у b-метричком простору и неке њене примене. Дат је још један нови резултат који се односи на слаба скоро контрактивна пресликавања.

У петом поглављу разматрају се конусни метрички простори. Доказане су две теореме као аналогони одговарајућих резултата из обичних метричких простора. Изведена је и једна потпуно нова теорема која за последицу има Banach-ову теорему у конусним метричким просторима над конусом који не мора бити нормалан. Доказана је и генерализација Fisher-ове теореме у конусним метричким просторима са регуларним конусом.

Већина резултата снабдевена је одговарајућим примерима који показују у чему се ти резултати разликују од већ познатих.

Кључне речи: Конусни метрички простор, нормалан конус, b-комплетан метрички простор, Banach-ова контракција, генералисана контракција, фиксна тачка, слаба компатибилност, слаба семикомпатибилност, слаба комутативност, низ ограничене варијације.

Научна област: Математичка анализа

Ужа научна област: Нелинеарна функционална анализа

УДК број: 517.988:515.124(043.3)

CONTRIBUTION TO THE THEORY OF ABSTRACT METRIC SPACES

ABSTRACT

This dissertation is the contribution to the Metric fixed point theory, the area that has recently been rapidly developing. It contains five chapters.

The first chapter gives the proof of one already known lemma. This lemma is used in the proof of BANACH's theorem for orbital complete metric spaces.

The second chapter contains the proofs of eight theorems, which generalize some known results from the theory of fixed points in metric spaces (BOYD-WONG's, ĆIRIĆ's, PANT's, and other). Some of these theorems are modifications of the known ones, while three are completely new.

Three theorems are proven in the third chapter. They generalize the result of fixed point of mapping defined in compact metric space given by NEMYTZKI, as well as one generalization of EDELSTEIN's theorem. The proofs and stated corollaries of some theorems are original.

Chapter four discusses b-metric spaces as a generalization of metric spaces. The generalization of ZAMFIRESCU's theorem of b-metric spaces is presented as well as some of its applications. A new result concerning weakly almost contractive mappings is also determined.

Chapter five contains some new results in cone metric spaces. Two theorems are presented as the analogue of the same theorems in the setting of standard metric spaces. A completely new theorem is established which results in the BANACH's theorem in cone metric spaces whereby the cone does not need to be normal. A generalization of FISHER's theorem in cone metric spaces over a regular cone is also proven.

Almost all results in this dissertation are confirmed by corresponding examples, which explain how these results differ from the already known results.

Key Words: Cone metric space, normal cone, b-complete metric space, BANACH's contraction, generalized contraction, fixed point, weakly compatible, weakly semi compatible, weakly commutative, the sequence of bounded variation

Scientific field: Mathematical analysis

Scientific subfield: Nonlinear functional analysis

UDK number: 517.988:515.124(043.3)

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

За развој Математике анализе у последњих сто година можда су три године најзначајније. 1906. година када је француски математичар Frechet увео метричке просторе, дефинисао основне појмове, као и комплетност и компактност простора. 1914. година када је немачки математичар Hausdorff у својој књизи Теорија скупова дефинисао тополошке просторе. 1922. година када је пољски математичар Banach дефинисао комплетно нормиране просторе и доказао своју чувену теорему о фиксној тачки. После тога се поље Математичке анализе проширило у свим правцима како теоријске тако и примењене математике.

Као наставак Banach-ове теореме о фиксној тачки развила се последњих педесет година Нелинеарна функционална анализа као и њен одељак Теорија фиксних тачака, најпре у метричким просторима, а касније у њиховим разним уопштењима. Тренутно у свету у тој области ради више од хиљаду математичара, а постоје и часописи који објављују радове искључиво из те теорије.

Српски математичари су дали изузетан допринос овој теорији, својим радовима, монографијама и уџбеницима. Најзначајнији међу њима су Љ. Ћирић (једна монографија), О. Хаџић[(1)] (три монографије), М. Тасковић (две монографије), В. Ракочевић (у коауторству са Д. Илићем два уџбеника), С. Раденовић, З. Каделбург, И. Аранђеловић, Љ. Гајић и други. Неки од наведених математичара имају и по више од сто радова и више од по хиљаду цитата.

Аутор је до сада објавио 13 радова (видети Биографију).

Ова дисертација је прилог наведеној теорији. Састоји се из пет поглавља.

У првом поглављу доказана је већ позната Лема 1.1. Да би се илустровала метода њене примене у каснијим доказима (Теореме 2.2; 2.3; 2.4; 2.5; 2.6; 2.7; 2.8; 4.7), доказан је Banach-ов принцип контракције (Теорема 1.1), али на орбитално комплетном метричком простору. Указано је на разлику између датог доказа и класичног доказа. Дат је такође важан Пример 1.1.

У другом поглављу уопштава се теорема Boyd-Wong-а ([8]) у више пра-

[(1)] Аутор прве монографије из ове теорије ([60]).

ваца. Теорема 2.2 је незнатно уопштење теореме из [26]. Формулација Теореме 2.3 је потпуно нова и садржи одговарајући Пример 2.2. Теорема 2.4 је генерализација Ćirić-еве теореме ([51], [55]) и садржи одговарајући Пример 2.3. Теорема 2.5 је генерализација Pant-ове теореме ([32]). Теорема 2.6 је потпуно нова а њена последица је већ доказана Теорема 2.3. Теорема 2.7 је незнатно уопштење теореме (Theorem 3.1 [50]). Теорема 2.8 је потпуно нова и дата је њена интересантна Последица 2.7.

У трећем поглављу разматрају се пресликавања на компактним метричким просторима. Теореме 3.2, 3.3, 3.5 су генерализације Теореме 3.1. Теорема 3.4 је генерализација теореме Edelstein-а ([13]). Теорема 3.6 уопштава већ исказане Теореме 3.2 и 3.3. Дата су два доказа Теореме 3.6, а исказане су и њене последице теореме Fisher-а ([59], [56]). Дат је доказ већ познате Теореме 3.7, али су дате и њене последице. Дат је и важан Пример 3.5.

У четвртом поглављу разматрају се b-метрички простори и парцијално уређени b-метрички простори. У првом делу дају се дефиниције, основне леме и теореме, као и одговарајући примери. Оригинални су Примери 4.2 и 4.5, као и доказ да простор из Примера 4.4 није b-комплетан. Теорема 4.3 уопштава теорему Zamfirescu-а ([14]). Дате су примене Теореме 4.3 на егзистенцију решења система n линеарних алгебарских једначина (Теорема 4.4) и егзистенцију решења Fredholm-ове линеарне и нелинеарне једначине (Теореме 4.5 и 4.6). Указано је на побољшање истих резултата применом теореме (Theorem 2.1 [63]). Теорема 4.7 је незнатно уопштење теореме (Theorem 3 [44]).

У петом поглављу разматрају се конусни метрички простори. На почетку се дају дефиниције конуса и основне особине. Доказује се Лема 5.2 која се касније користи за строгу дефиницију конвергенције низа у b-конусном метричком простору. Дат је Пример 5.3, као и доказ у Примеру 5.6. После дефиниције конусне метрике дата је Лема 5.4 која се строго доказује. Многе особине обичних метричких простора се код конусних метричких простора са нормалним телесним конусном преносе. Да би се то илустровало доказане су Теореме 5.4 и 5.5 код којих се техника доказа разликује од технике примењене код обичних метричких простора. Доказана је Теорема 5.6 која за последицу има

Banach-ову теорему у конусним метричким просторима. Приметимо да се у исказу Теореме 5.6 не захтева нормалност конуса. Теорема 5.7 је аналогон Fisher-ове теореме ([56]) за конусне метричке просторе.

Велику захвалност дугујем проф. др Зорану Каделбургу на уложеном труду при читању рукописа у току писања, као и на сугестијама за прецизне исказе теорема и лема. Његово указивање на најновију литературу као и захтев за одређеним примерима знатно су побољшали квалитет овог рукописа. Непроцењиву захвалност дугујем проф. др Стојану Раденовићу који ме је увео у ову област, дао велики број чланака и пренео своје огромно искуство. На крају, захваљујем се Срђану Радовановићу на зналачкој обради текста.

У Београду 30.04.2016. Аутор

1. Banach-ов принцип контракције

У овом поглављу излажемо BANACH-ову теорему о фиксној тачки која се често назива BANACH-ов принцип контракције. Ова чувена теорема је била почетак Теорије фиксне тачке у метричким просторима.

Дефиниција 1.1. Нека је X непразан скуп и $f : X \to X$. Пресликавање f има фиксну (непокретну) тачку ако постоји x тако да је $fx = x$. Елемент $x \in X$ назива се фиксна (непокретна) тачка пресликавања f.

Пољски математичар STEFAN BANACH је у својој докторској тези ([6]) доказао:

Теорема 1.1. *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $f : X \to X$ пресликавање које задовољава услов*

$$d(fx, fy) \leq \lambda\, d(x, y) \quad x, y \in X, \tag{1}$$

где константа $\lambda \in [0, 1)$[(1)]*. Тада пресликавање f има тачно једну фиксну тачку.*[(2)]

Да бисмо проширили Теорему 1.1 на просторе који су општији од комплетних метричких простора потребна нам је следећа

Дефиниција 1.2. ([53]) Нека је (X, d) метрички простор, $f : X \to X$ и $x \in X$. Скуп

$$O(x; f) = \{f^n x : n = 0, 1, 2, \dots\}$$

назива се орбита елемента x у односу на пресликавање f. Метрички простор (X, d) је f-орбитално комплетан ако сваки CAUCHY-јев низ у $O(x; f)$ конвергира у X за свако $x \in X$.

Следећу лему ћемо користити више пута у доказима неких теорема, поглавља 2 и 4. Иначе, она је раније коришћена у разним својим варијантама, са или без доказа, у многим теоремама (видети [26], [20], [12], [38], [37], [40]).

---

(1) Пресликавање f које задовољава услов (1) називамо BANACH-ова контракција метричког простора (X, d).

(2) Теорема је у тези доказана за нормиране просторе који су комплетни у односу на метрику индуковану нормом простора. Касније су такви комплетни нормирани простори названи у његову част BANACH-ови.

Лема 1.1. *Ако низ* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *у метричком простору* (X,d) *задовољава услов*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \tag{2}$$

и није CAUCHY*-јев, тада постоје поднизови* $(m(i))_{i\in\mathbb{N}}$ *и* $(n(i))_{i\in\mathbb{N}}$ *природних бројева и* $\varepsilon > 0$ *тако да важи*

$$m(i) > n(i) > m(i-1) > n(i-1) \quad (i = 2, 3, 4, \ldots)$$

и

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) &= \lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) = \lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}) \\ &= \lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}) = \varepsilon.\end{aligned} \tag{3}$$

Доказ. Пошто $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ није CAUCHY-јев низ то значи да је тачна негација

$$\neg(\forall\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m > n > k \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon)$$

односно

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists m, n \in \mathbb{N})(m > n > k \land d(x_m, x_n) \geq \varepsilon). \tag{4}$$

За $\varepsilon > 0$, чија је егзистенција утврђена исказом (4), због услова (2), постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon. \tag{5}$$

На основу (4) за $k = n_0$ постоје $m(1), n(1) \in \mathbb{N}$ тако да је

$$m(1) > n(1) > n_0 \land d(x_{m(1)}, x_{n(1)}) \geq \varepsilon. \tag{6}$$

Ако смо изабрали $n(1) > n_0$, с обзиром на услов (5), можемо изабрати $m(1)$ као најмањи природан број за који важи (6), што значи да је

$$d(x_{m(1)-1}, x_{n(1)}) < \varepsilon.$$

Пошто смо одредили природне бројеве $m(i), n(i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ тако да важи

$$m(i) > n(i) \land d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \geq \varepsilon \land d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) < \varepsilon,$$

за $k = m(i)+1$, на основу (4) постоје $m(i+1), n(i+1) \in \mathbb{N}$ тако да је

$$m(i+1) > n(i+1) > k \wedge d(x_{m(i+1)}, x_{n(i+1)}) \geq \varepsilon. \tag{7}$$

С обзиром на услов (5) можемо изабрати $m(i+1)$ као најмањи природни број за који важи (7), што значи да је

$$d(x_{m(i+1)-1}, x_{n(i+1)}) < \varepsilon.$$

На тај начин смо формирали поднизове $(m(i))_{i\in\mathbb{N}}$ и $(n(i))_{i\in\mathbb{N}}$ природних бројева тако да је

$$m(i) > n(i) > m(i-1) > n(i-1) \quad (i = 2, 3, \ldots)$$

и

$$d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \geq \varepsilon \text{ и } d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Докажимо сада релације (3). Користећи (8) имамо

$$\varepsilon \leq d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq d(x_{m(i)}, x_{m(i)-1}) + d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) < d(x_{m(i)}, x_{m(i)-1}) + \varepsilon,$$

а одатле је

$$\varepsilon \leq \limsup_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq \limsup_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{m(i)-1}) + \varepsilon = 0 + \varepsilon = \varepsilon$$

па је

$$\limsup_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) = \varepsilon. \tag{9}$$

Из (8) следи

$$\varepsilon \leq \liminf_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}). \tag{10}$$

Из релација (9) и (10) налазимо

$$\lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) = \varepsilon. \tag{11}$$

Пошто је

$$d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}) \leq d(x_{m(i)+1}, x_{m(i)}) + d(x_{m(i)}, x_{n(i)})$$

следи

$$\begin{aligned}
\limsup_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}) &\leq \limsup_{i\to\infty} \big(d(x_{m(i)+1}, x_{m(i)}) + d(x_{m(i)}, x_{n(i)})\big) \\
&\leq \limsup_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{m(i)}) + \limsup_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{m(i)}) \\
&= 0 + \varepsilon = \varepsilon. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Користећи неједнакост

$$d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq d(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}) + d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)})$$

налазимо

$$\begin{aligned}\liminf_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) &\leq \liminf_{i\to\infty} \big(d(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}) + d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)})\big) \\ &= \lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}) + \liminf_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}) \\ &= 0 + \liminf_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}) \\ &= \liminf_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}),\end{aligned}$$

а с обзиром на (11) имамо

$$\varepsilon \leq \liminf_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}). \tag{13}$$

Из (12) и (13) следи

$$\lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}) = \varepsilon. \tag{14}$$

Аналогно се доказује

$$\lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}) = \varepsilon.$$

Користећи дати услов (2), нађену граничну вредност (11) и неједнакост

$$d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) \leq d(x_{m(i)+1}, x_{m(i)}) + d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) + d(x_{n(i)}, x_{n(i)+1})$$

имамо

$$\limsup_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) \leq \varepsilon. \tag{15}$$

Слично из

$$d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq d(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}) + d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) + d(x_{n(i)+1}, x_{n(i)})$$

следи

$$\varepsilon \leq \liminf_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}), \tag{16}$$

па из (15) и (16) налазимо $\lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) = \varepsilon$.

Тиме смо доказали релације (3). □

Напомена. Сличним поступком, користећи граничне вредности (3) може се доказати

$$\lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)-1}) = \lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)+2}, x_{n(i)}) = \varepsilon \text{ итд.}$$

Примедба. Ова лема је тачна у метричким просторима који нису ултраметрички[(3)], пошто код њих имамо еквиваленцију

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow (x_n)_{x\in\mathbb{N}} \text{ је Cauchy-јев низ.}$$

Скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ са уобичајеном метриком није ултраметрички простор. Заиста, ако уочимо низ

$$x_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

тада је $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, али $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ није Cauchy-јев низ у $\mathbb{R}$.

Докажимо Banach-ов принцип контракције.

Теорема 1.2. *Нека $f : X \to X$, где је (X, d) $f-$орбитално комплетан метрички простор и нека постоји $\lambda \in [0, 1)$ тако да је*

$$d(fx, fy) \le \lambda d(x, y) \text{ за свако } x, y \in X. \tag{17}$$

Тада пресликавање f има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Формирајмо Picard-ов низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ итерација

$$x_0 \in X, x_1 = fx_0, \ldots, x_{n+1} = fx_n, \ldots \tag{18}$$

Ако је $x_n = x_{n+1}$ за неко $n \in \mathbb{N}$ тада је x_n фиксна тачка пресликавања f и у том случају доказ је завршен. Нека је сада $x_n \neq x_{n+1}$ за савко $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(fx_n, fx_{n-1}) < d(x_n, x_{n-1}) \le \lambda d(x_n, x_{n-1}) \tag{19}$$

тј. имамо строго опадајући низ $\big(d(x_n, x_{n-1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ позитивних реалних бројева па постоји

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n-1}) = d^* \ge 0.$$

Претпоставимо да је $d^* > 0$, тада ако у (19) пустимо да $n \to \infty$ добијамо

$$d^* \le \lambda d^*, \text{ а одатле је } \lambda \ge 1,$$

[(3)] За дефиницију ултраметричких простора и њихових основних особина видети [49].

што је немогуће. Према томе $d^* = 0$, тј.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n-1}) = 0. \tag{20}$$

Претпоставимо да $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ није CAUCHY-јев низ, тада с обзиром на релацију (20) можемо применити Лему 1.1. Сходно томе, постоје поднизови $\big(m(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ и $\big(n(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ природних бројева тако да је

$$m(i+1) > n(i+1) > m(i) > n(i) \ i = 1, 2, 3, \ldots$$

и

$$\lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) = \lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) = \varepsilon > 0. \tag{21}$$

Применом услова (17) налазимо

$$d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) = d(fx_{m(i)}, fx_{n(i)}) \leq \lambda d(x_{m(i)}, x_{n(i)}). \tag{22}$$

Ако у (22) пустимо да $i \to \infty$ и користећи (21) добијамо

$$\varepsilon \leq \lambda\varepsilon, \text{ а одатле је } \lambda \geq 1,$$

што је контрадикција. Према томе, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је CAUCHY-јев низ. Како је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ орбита елемента $x_0 \in X$ и пошто је метрички простор (X, d) $f-$орбитално комплетан, то постоји

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u, u \in X. \tag{23}$$

Ако у неједнакости

$$d(fu, x_{n+1}) = d(fu, fx_n) \leq \lambda d(u, x_n)$$

пустимо да $n \to \infty$, с обзиром на (23) следи

$$d(fu, u) \leq \lambda d(u, u) = 0,$$

тј. $fu = u$.

Када би пресликавање f имало још једну фиксну тачку v ($v \neq u$), тада бисмо имали

$$0 < d(u, v) = d(fu, fv) \leq \lambda d(u, v), \text{ а одатле је } \lambda \geq 1,$$

што је контрадикција. Овим је теорема доказана. □

Приметимо да је горњи доказ егзистенцијалне природе, па се не може добити процена грешке ако се фиксна тачка u апроксимира $n-$том итерацијом $x_n = f^n x_0$. Наиме, из Banach-овог доказа може да се добије процена

$$d(u, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1),$$

што је веома важно у нумеричким применама Banach-овог принципа (видети [6], [53]).

Орбиталну комплетност је увео Ćirić у чланку [53], тако да можемо проширити Banach-ов принцип на метричке просторе који су општији од комплетних метричких простора, пошто је сваки комплетан метрички простор орбитално комплетан али обрнуто није тачно. У чланку [53] дат је пример простора који је орбитално комплетан, а није комплетан.

Због важности уведеног појма орбиталне комплетности, наводимо други пример таквог простора.

Пример 1.1. Нека је X скуп алгебарских реалних бројева са уобичајеном метриком $d(x, y) = |x - y|, x, y \in X$. Уочимо пресликавање $f : X \to X$ дефинисано са

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in X.$$

Тада је (X, d) $f-$орбитално комплетан али није комплетан метрички простор.

Доказ. Ако је $x \in X$ алгебарски број, тада је $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ алгебарски број, па је пресликавање f добро дефинисано. Како је

$$f^n(x) = \big(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{пута}}\big)(x) = \frac{x}{\sqrt{1+n^2x^2}}$$

и

$$\big|f^n(x)\big| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ за свако } x \in X, \quad f^n(x) \to 0 \ (n \to \infty)$$

одатле следи да је X $f-$орбитално комплетан. Јасно да (X, d) није комплетан метрички простор пошто за низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из X имамо

$$x_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \to e \notin X.$$

□

Историјска напомена. Метод итерације, уведен овде под (18), први је публиковао J. Liouville 1838.г. у вези са линеарним диференцијалним једначинама другог реда. G. Peano 1888.г. применио је ту методу на линеарне диференцијалне једначине n-тог реда. E. Picard је проширио ту методу на нелинеарне диференцијалне једначине 1890.г. S. Banach дао је апстрактну формулацију тог поступка и дошао до познате теореме о фиксној тачки 1922.г. у раду [6] (Видети [25], [48]).

2. Уопштења неких теорема о фиксним тачкама у комплетном метричком простору

Boyd и Wong ([8]) су 1969. доказали:

Теорема 2.1. *Нека је* (X, d) *комплетан метрички простор и нека* $T : X \to X$ *задовољава услов*

$$d(Tx, Ty) \le \phi\big(d(x, y)\big), \quad x, y \in X$$

где $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *је одозго полунепрекидна функција са десне стране, тако да*

$$\phi(t) < t, \ \text{за } t > 0.$$

Тада пресликавање T *има јединствену фиксну тачку* $u \in X$ *и* $T^n x \to u$ $(n \to \infty)$ *за свако* $x \in X$.

У овом поглављу ову теорему уопштавамо у више праваца.

Теорема 2.2. *Нека је* (X, d) *комплетан метрички простор и* $T : X \to X$ *тако да важи*

$$d(Tx, Ty) \le \max\big\{\phi(d(x, y)), \phi(d(x, Tx)), \phi(d(y, Ty))\big\}$$

за свако $x, y \in X$, *где* $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *одозго полунепрекидна функција са десне стране таква да је* $\phi(t) < t$ *за* $t > 0$ *и* $\phi(0) = 0$. *Тада пресликавање* T *има јединствену фиксну тачку* $u \in X$ *такву да је* $\lim_{n\to\infty} T^n x = u$ *за свако* $x \in X$.

Доказ. Нека је $x \in X$ произвољна тачка. Посматрајмо низ итерација $x_n = T^n x$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Постоје две могућности:

(i) $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\, d\left(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x\right) = 0$ што је еквивалентно $T^{n_0}x = T(T^{n_0}x)$, па је $T^{n_0}x = u$ фиксна тачка пресликавања T;

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\, d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) > 0$, тј. $d(x_n, x_{n+1}) > 0$, за $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тада је

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\le \max\big\{\phi(d(x_n, x_{n+1})), \phi(d(x_n, Tx_n)), \phi(d(x_{n+1}, Tx_{n+1}))\big\} \\ &= \max\big\{\phi(d(x_n, x_{n+1})), \phi(d(x_n, x_{n+1})), \phi(d(x_{n+1}, x_{n+2}))\big\} \\ &\le \phi(d(x_n, x_{n+1})), \end{aligned}$$

јер је релација $d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \phi(d(x_{n+1}, x_{n+2}))$ немогућа због услова $\phi(t) < t$, где је $t = d(x_{n+1}, x_{n+2}) > 0$, $n = 0, 1, \ldots$.

Дакле, имамо

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \phi(d(x_n, x_{n+1})) < d(x_n, x_{n+1}),\ n = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

па је низ $(d(x_n, x_{n+1}))_{n=0,1,\ldots}$ строго опадајући и стога постоји

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = d^* \geq 0.$$

Ако је $d^* > 0$, због претпоставке да је функција ϕ непрекидна одозго са десне стране, из (1) имамо

$$d^* = \limsup_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \limsup_{n\to\infty} \phi(d(x_n, x_{n+1})) \leq \phi(d^*)$$

тј. $d^* \leq \phi(d^*)$, за $d^* > 0$ што је немогуће. Значи

$$d(x_n, x_{n+1}) \downarrow 0, \qquad n \to +\infty. \tag{2}$$

Докажимо да је (x_n) Cauchy-јев низ. Претпоставимо супротно, тј. да (x_n) није Cauchy-јев низ. Тада на основу Леме 1.1 постоје поднизови $(x_{m(i)})_{i\in\mathbb{N}}$, $(x_{n(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ низа (x_n) тако да је

$$\lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) = \lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) = \varepsilon > 0 \tag{3}$$

и

$$d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) > \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Сада је

$$\begin{aligned} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) &= d(Tx_{m(i)}, Tx_{n(i)}) \\ &\leq \max\big\{\phi(d(x_{m(i)}, x_{n(i)})), \phi(d(x_{m(i)}, Tx_{m(i)})), \phi(d(x_{n(i)}, Tx_{n(i)}))\big\} \\ &= \max\big\{\phi(d(x_{m(i)}, x_{n(i)})), \phi(d(x_{m(i)}, x_{m(i)+1})), \phi(d(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}))\big\} \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} &\limsup_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) \\ &\leq \max\Big\{ \limsup_{i\to\infty} \phi\big(d(x_{m(i)}, x_{n(i)})\big), \limsup_{i\to\infty} \phi\big(d(x_{m(i)}, x_{m(i)+1})\big), \\ &\qquad \limsup_{i\to\infty} \phi\big(d(x_{n(i)}, x_{n(i)+1})\big)\Big\}, \end{aligned} \tag{5}$$

а пошто је ϕ полунепрекидна одозго са десне стране, то је

$$\limsup_{i\to\infty} \phi\big(d(x_{m(i)}, x_{n(i)})\big) \le \phi(\varepsilon), \text{ због (3) и (4)}$$
$$\limsup_{i\to\infty} \phi\big(d(x_{m(i)}, x_{m(i)+1})\big) \le \phi(0) = 0,$$
$$\limsup_{i\to\infty} \phi\big(d(x_{n(i)}, x_{n(i)+1})\big) \le \phi(0) = 0,$$

где смо користили (2), па из (5) налазимо

$$\varepsilon \le \phi(\varepsilon), \text{ за } \varepsilon > 0$$

што је немогуће, (x_n) је CAUCHY-јев низ, а како је (X, d) комплетан, следи $\lim_{n\to\infty} x_n = u$, $u \in X$.

Докажимо да је u фиксна тачка пресликавања T.

$$d(Tx_n, Tu) \le \max\big\{\phi(d(x_n, u)), \phi(d(x_n, Tx_n)), \phi(d(u, Tu))\big\}$$

тј.

$$d(x_{n+1}, Tu) \le \max\big\{\phi(d(x_n, u)), \phi(d(x_n, x_{n+1})), \phi(d(u, Tu))\big\}. \tag{6}$$

Пошто је $\limsup_{n\to\infty} \phi(d(x_n, u)) \le \phi(0) = 0$ и $\limsup_{n\to\infty} \phi(d(x_n, x_{n+1})) \le \phi(0) = 0$, то из (6) следи

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tu) \le \phi(d(u, Tu)), \text{ тј. } d(u, Tu) \le \phi(d(u, Tu)),$$

а одатле $Tu = u$, јер у супротном бисмо имали $t \le \phi(t)$, за $= d(u, Tu) > 0$, што је немогуће.

Докажимо да је u јединствена фиксна тачка пресликавања T.

Нека је $Tu = u$, $Tv = v$, $u \ne v$, односно $d(u, v) > 0$.

Тада је

$$\begin{aligned} d(u, v) = d(Tu, Tv) &\le \max\big\{\phi(d(u, v)), \phi(d(u, Tu)), \phi(d(v, Tv))\big\} \\ &= \max\big\{\phi(d(u, v)), \phi(0), \phi(0)\big\} = \phi(d(u, v)), \end{aligned}$$

дакле,

$$d(u, v) \le \phi(d(u, v)), \text{ за } d(u, v) > 0$$

што је немогуће. Према томе, пресликавање T има јединствену фиксну тачку u такву да је $\lim_{n\to\infty} T^n x = u$. $\square$

Коментар. Ово је модификован доказ из [26] где се захтева још додатни услов да функционал $F(x) = d(x, Tx)$ буде одоздо полунепрекидан.

Напомена. У метричком простору (X, d) ако низ $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ задовољава услове:

1° $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ је ограничен

2° $d(x_{n+1}, x_n) < d(x_n, x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \ldots)$

не следи да $d(x_{n+1}, x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Заиста, ако у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ уочимо низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан помоћу

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8^{2k}}, & n = 2k, \quad k = 1, 2, \ldots \\ \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{8^{2k+1}}, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

тада он задовољава услове 1° и 2° али $d(x_{n+1}, x_n) \to \dfrac{1}{2}$ $(n \to \infty)$.

Пример 2.1. ([26]) Нека је $X = [0, 7]$ са уобичајеном метриком, $T : X \to X$ дефинисано са

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0 \le x \le 6 \\ -2x + 14, & 6 < x \le 7 \end{cases}$$

и $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ одозго полунепрекидна функција са десне стране дефинисана са

$$\phi(t) = \begin{cases} \dfrac{4}{5}, & 0 \le t < 6 \\ \dfrac{3}{5}t, & t \ge 6. \end{cases}$$

Тада је Теорема 2.1 непримењива, док су услови Теореме 2.2 испуњени.

Теорема 2.3. *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $S, T : X \to X$ тако да важи*

$$d(Sx, Ty) \le \max\big\{\phi(d(x, y)), \phi(d(x, Sx)), \phi(d(y, Ty))\big\},$$

за све $x, y \in X$, где је $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ одозго полунепрекидна функција таква да је $\phi(t) < t$, $t > 0$ и $\phi(0) = 0$. Тада пресликавања S и T имају јединствену заједничку фиксну тачку.

Доказ. Формирајмо низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ на следећи начин

$$x_{2k+1} = Sx_{2k}, x_{2k+2} = Tx_{2k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

где је $x_0 \in X$ произвољна тачка. Тада је

$$\begin{aligned}
d(x_{2k+1}, x_{2k+2}) &= d(Sx_{2k}, Tx_{2k+1}) \\
&\leq \max\left\{\phi(d(x_{2k}, x_{2k+1})), \phi(d(x_{2k}, Sx_{2k})), \phi(d(x_{2k+1}, Tx_{2k+1}))\right\} \\
&= \max\left\{\phi(d(x_{2k}, x_{2k+1})), \phi(d(x_{2k}, x_{2k+1})), \phi(d(x_{2k+1}, x_{2k+2}))\right\} \\
&= \max\left\{\phi(d(x_{2k}, x_{2k+1})), \phi(d(x_{2k+1}, x_{2k+2}))\right\} \\
&= \phi(d(x_{2k}, x_{2k+1})) < d(x_{2k}, x_{2k+1}). \qquad (7)
\end{aligned}$$

Ако би постојао $k_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $d(x_{2k_0}, x_{2k_0+1}) = 0$ тада би било $x_{2k_0} = Sx_{2k_0}$, па би x_{2k_0} била фиксна тачка пресликавања S.

$$\begin{aligned}
d(x_{2k}, x_{2k+1}) &= d(Tx_{2k-1}, Sx_{2k}) = d(Sx_{2k}, Tx_{2k-1}) \\
&\leq \max\left\{\phi(d(x_{2k}, x_{2k-1})), \phi(d(x_{2k}, Sx_{2k})), \phi(d(x_{2k-1}, Tx_{2k-1}))\right\} \\
&= \max\left\{\phi(d(x_{2k}, x_{2k-1})), \phi(d(x_{2k}, x_{2k+1})), \phi(d(x_{2k-1}, x_{2k}))\right\} \\
&= \max\left\{\phi(d(x_{2k}, x_{2k-1})), \phi(d(x_{2k}, x_{2k+1}))\right\} \\
&= \phi(d(x_{2k-1}, x_{2k})) < d(x_{2k-1}, x_{2k}). \qquad (8)
\end{aligned}$$

Из (7) и (8) закључујемо да је низ $(d(x_n, x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ строго монотоно опадајући и позитиван, па постоји

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = d^* \geq 0.$$

Ако претпоставимо да је $d^* > 0$, користећи да је функција ϕ одозго полунепрекидна из (7) следи

$$d^* = \limsup_{k\to\infty} d(x_{2k+1}, x_{2k+2}) \leq \limsup_{k\to\infty} \phi(d(x_{2k+1}, x_{2k+2})) \leq \phi(d^*),$$

тј. $d^* \leq \phi(d^*)$ за $d^* > 0$, што је контрадикција, према томе $d^* = 0$.

Ако претпоставимо да (x_n) није Cauchy-јев низ на основу Леме 1.1 постоје поднизови $(m(i))_{i\in\mathbb{N}}$ и $(n(i))_{i\in\mathbb{N}}$ природних бројева тако да је

$$\lim_{i\to\infty} d(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)+2}) = \lim_{i\to\infty} d(x_{2m(i)+2}, x_{2n(i)+3}) = \varepsilon > 0.$$

Тада из

$$\begin{aligned}
&d(x_{2m(i)+2}, x_{2n(i)+3}) = d(Tx_{2m(i)+1}, Sx_{2n(i)+2}) \\
&\leq \max\left\{\phi(d(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)+2})), \phi(d(x_{2m(i)+1}, Tx_{2m(i)+1})), \phi(d(x_{2n(i)+2}, Sx_{2n(i)+2}))\right\} \\
&= \max\left\{\phi(d(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)+2})), \phi(d(x_{2m(i)+1}, x_{2m(i)+2})), \phi(d(x_{2n(i)+2}, x_{2n(i)+3}))\right\}.
\end{aligned}$$

Пошто је ϕ одозго полунепрекидна функција, имамо

$$\begin{aligned}\limsup_{i\to\infty}\ \phi\big(d(x_{2m(i)+1},x_{2m(i)+2})\big) &\le \phi\big(\limsup_{i\to\infty}\ d(x_{2m(i)+1},x_{2m(i)+2})\big)\\ &= \phi(0)\\ &= 0\end{aligned}$$

и слично

$$\limsup_{i\to\infty}\ \phi\big(d(x_{2n(i)+2},x_{2n(i)+3})\big) \le \phi(0) = 0$$

па следи да је

$$\limsup_{i\to\infty}\ d(x_{2m(i)+2},x_{2m(i)+3}) \le \limsup_{i\to\infty}\ \phi(x_{2m(i)+1},x_{2n(i)+2}) \le \phi(\varepsilon),$$

односно $\varepsilon \le \phi(\varepsilon)$, за $\varepsilon > 0$ што је контрадикција, значи (x_n) је Cauchy-јев низ. Како је (X,d) комплетан метрички простор следи да је $\lim_{n\to\infty} x_n = u$, $u \in X$.

Докажимо да је u заједничка фиксна тачка пресликавања S и T.

$$\begin{aligned}d(x_{2k+1},Tu) &= d(Sx_{2k},Tu)\\ &\le \max\big\{\phi(d(x_{2k},u)),\phi(d(x_{2k},Sx_{2k})),\phi(d(u,Tu))\big\}\\ &= \max\big\{\phi(d(x_{2k},u)),\phi(d(x_{2k},x_{2k+1})),\phi(d(u,Tu))\big\}\end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} d(x_{2k+1},Tu) &\le \max\big\{\limsup_{k\to\infty}\ \phi(d(x_{2k},u)),\limsup_{k\to\infty}\ \phi(d(x_{2k},x_{2k+1})),\phi(d(u,Tu))\big\}\\ &= \max\big\{\phi(0),\phi(0),\phi(d(u,Tu))\big\}\end{aligned}$$

тј.

$$d(u,Tu) \le \phi(d(u,Tu)),$$

а одатле је $d(u,Tu)=0$, односно $Tu=u$.

$$\begin{aligned}d(Su,x_{2k+2}) &= d(Su,Tx_{2k+1})\\ &\le \max\big\{\phi(d(u,x_{2k+1})),\phi(d(u,Su)),\phi(d(x_{2k+1},Tx_{2k+1}))\big\}\\ &= \max\big\{\phi(d(u,x_{2k+1})),\phi(d(u,Su)),\phi(d(x_{2k+1},x_{2k+2}))\big\}\end{aligned}$$

а одатле имамо

$$\lim_{k\to\infty} d(Su,x_{2k+2}) \le \phi(d(u,Su))$$

тј. $d(u,Su) \le \phi(d(u,Su))$, па је $Su = u$.

Ако би постојала још једна тачка $v \in X$ таква да је $u \ne v$ и $Tv = v$ имали бисмо

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(Su,Tv) \\ &\le \max\big\{\phi(d(u,v)), \phi(d(u,Su)), \phi(d(v,Tv))\big\} \\ &= \max\big\{\phi(d(u,v)), \phi(0), \phi(0)\big\} = \phi(d(u,v)) \end{aligned}$$

што је немогуће ако је $d(u,v) > 0$, према томе $u = v$, тј. T има јединствену фиксну тачку u. Аналогно се доказује да је u јединствена фиксна тачка пресликавања S. □

Пример 2.2. Нека је $X = [0,1]$ са уобичајеном метриком, $S,T : X \to X$ и $Sx = \dfrac{x}{2}$, $Tx = \dfrac{x}{4}$, $\phi(t) = \dfrac{5}{6}t$. Услов

$$d(Sx,Ty) \le \max\big\{\phi(d(x,y)), \phi(d(x,Sx)), \phi(d(y,Sy))\big\}$$

је еквивалентан са

$$\left|\frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right| \le \frac{5}{6}\max\left\{|x-y|, \frac{x}{2}, \frac{3}{4}y\right\}, \qquad x,y \in [0,1]$$

односно

$$\left|x - \frac{y}{2}\right| \le \max\left\{\frac{5}{3}\left|x-y\right|, \frac{5}{6}x, \frac{5}{4}y\right\}.$$

Размотримо могућности:

1° $0 \le x \le \dfrac{y}{2}$, тада је

$$\left|x - \frac{y}{2}\right| \le \frac{y}{2} < \frac{5}{4}y \le \max\left\{\frac{5}{3}\left|x-y\right|, \frac{5}{6}x, \frac{5}{4}y\right\}.$$

2° $\dfrac{y}{2} < x \le y$, тада је

$$\left|x - \frac{y}{2}\right| \le y - \frac{y}{2} = \frac{y}{2} < \frac{5}{4}y \le \max\left\{\frac{5}{3}\left|x-y\right|, \frac{5}{6}x, \frac{5}{4}y\right\}.$$

3° $y < x \le \dfrac{7}{4}y$, тада је

$$\left|x - \frac{y}{2}\right| \le \frac{7}{4}y - \frac{y}{2} = \frac{5}{4}y \le \max\left\{\frac{5}{3}\left|x-y\right|, \frac{5}{6}x, \frac{5}{4}y\right\}.$$

4° $\dfrac{7}{4}y < x \le 1$, тада је

$$\left|x - \frac{y}{2}\right| = \frac{y}{2} + x - y < \frac{5}{3}\left(x-y\right) \le \max\left\{\frac{5}{3}\left|x-y\right|, \frac{5}{6}x, \frac{5}{4}y\right\}.$$

Ако је $1 < \dfrac{4}{7}\,y$, случај 4° не може да наступи.

Према томе, услови Теореме 2.3 су испуњени. Јединствена фиксна тачка пресликавања S и T је $x = 0$.

Теорема 2.4. *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \to X$ тако да важи*

$$d(Tx, Ty) \le \max\Big\{\phi(d(x, y)), \phi(d(x, Tx)), \phi(d(y, Ty)), \phi\Big(\frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\Big)\Big\} \tag{9}$$

за све $x, y \in X$, где $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ монотоно растућа одозго полунепрекидна функција таква да је $\phi(t) < t$, за $t > 0$ и $\phi(0) = 0$. Тада пресликавање T има јединствену фиксну тачку и такву да је $\lim_{n\to\infty} T^n x = u$ за свако $x \in X$.

Доказ. Посматрајмо низ $x_n = T^n x$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ где је $x \in X$ произвољна тачка. Постоје две могућности:

(i) $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)\, d(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x) = 0$ што је еквивалентно $T^{n_0}x = T(T^{n_0}x)$, па је $T^{n_0}x = u$ фиксна тачка пресликавања T;

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\, d(T^n x, T^{n+1}x) > 0$, тј. $d(x_n, x_{n+1}) > 0$, за $n = 0, 1, 2, \ldots$

Тада је

$$\begin{aligned}
&d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(Tx_n, Tx_{n+1})\\
&\le \max\Big\{\phi(d(x_n, x_{n+1})), \phi(d(x_n, Tx_n)), \phi(d(x_{n+1}, Tx_{n+1})),\\
&\qquad\quad \phi\Big(\frac{d(x_n, Tx_{n+1} + d(x_{n+1}, Tx_n)}{2}\Big)\Big\}\\
&= \max\Big\{\phi(d(x_n, x_{n+1})), \phi(d(x_n, x_{n+1})), \phi(d(x_{n+1}, x_{n+2})), \phi\Big(\frac{d(x_n, x_{n+2})}{2}\Big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Пошто је

$$d(x_n, x_{n+2}) \le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) \le 2\max\big\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}\big\}$$

тј.

$$\frac{d(x_n, x_{n+2})}{2} \le \max\big\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}))\big\},$$

а како је функција ϕ монотоно растућа, следи

$$\phi\Big(\frac{d(x_n, x_{n+2})}{2}\Big) \le \max\big\{\phi(d(x_n, x_{n+1}), \phi(d(x_{n+1}, x_{n+2}))\big\}. \tag{11}$$

Из (10) и (11) налазимо

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \max\big\{\phi(d(x_n, x_{n+1})), \phi(d(x_{n+1}, x_{n+2}))\big\}, \tag{12}$$

а због особине $\phi(t) < t$, за $t > 0$ закључујемо да из (12) следи

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \phi(d(x_n, x_{n+1})) < d(x_n, x_{n+1}),\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

па постоји

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = d^* \geq 0.$$

Ако претпоставимо да је $d^* > 0$, из (13) имамо

$$\limsup_{n\to\infty}\, d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \limsup_{n\to\infty}\, \phi(d(x_n, x_{n+1})) \leq \phi(d^*),$$

где смо искористили претпоставку да је ϕ полунепрекидна одозго; из последње релације налазимо

$$d^* \leq \phi(d^*),\ \text{за } d^* > 0$$

што је немогуће, дакле $d^* = 0$.

Ако претпоставимо да (x_n) није Cauchy-јев низ на основу Леме 1.1 следи да постоје поднизови $(x_{m(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ и $(x_{n(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ тако да је

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) &= \lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}) = \lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)+1})\\ &= \lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) = \varepsilon > 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Применом релације (9) налазимо

$$\begin{aligned}d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) &= d(Tx_{m(i)}, Tx_{n(i)})\\ &\leq \max\Bigg\{\phi(d(x_{m(i)}, x_{n(i)})), \phi(d(x_{m(i)}, x_{m(i)+1})), \phi(d(x_{n(i)}, x_{n(i)+1})),\\ &\qquad \phi\Big(\frac{d(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}) + d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)})}{2}\Big)\Bigg\},\end{aligned} \tag{15}$$

а одатле користећи полунепрекидност функције ϕ са горње стране и једнакости (14) имамо

$$\limsup_{i\to\infty}\, d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) \leq \max\big\{\phi(\varepsilon), \phi(0), \phi(0), \phi(\varepsilon)\big\} = \phi(\varepsilon) \tag{16}$$

пошто је

$$\limsup_{i\to\infty} \phi(d(x_{m(i)}, x_{n(i)})) \le \phi(\varepsilon)$$

$$\limsup_{i\to\infty} \phi(d(x_{m(i)}, x_{m(i)+1})) \le \phi(0) = 0$$

$$\limsup_{i\to\infty} \phi(d(x_{n(i)}, x_{n(i)+1})) \le \phi(0) = 0$$

$$\limsup_{i\to\infty} \phi\Big(\frac{d(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}) + d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)})}{2}\Big) \le \phi(\varepsilon)$$

па из (16) следи

$$\varepsilon \le \phi(\varepsilon), \quad \text{за } \varepsilon > 0$$

што је немогуће, стога је (x_n) Cauchy-јев низ у комплетном метричком простору (X, d) па постоји

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u, \ u \in X.$$

Докажимо да је u фиксна тачка за пресликавање T. Претпоставимо да је $u \ne Tu$, тј. да је $d(u, Tu) > 0$. Тада користећи релацију (9) имамо

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, Tu) &= d(Tx_n, Tu) \\ &\le \max\Big\{\phi(d(x_n, u)), \phi(d(x_n, x_{n+1})), \phi(d(u, Tu)), \\ &\qquad \phi\Big(\frac{d(x_n, Tu) + d(u, x_{n+1})}{2}\Big)\Big\}, \end{aligned} \tag{17}$$

а како је

$$\limsup_{i\to\infty} \phi(d(x_n, u)) \le \phi(0) = 0$$

$$\limsup_{i\to\infty} \phi(d(x_n, x_{n+1})) \le \phi(0) = 0$$

$$\limsup_{i\to\infty} \phi\Big(\frac{d(x_n, Tu) + d(u, x_{n+1})}{2}\Big) \le \phi\Big(\frac{d(u, Tu)}{2}\Big)$$

то из релације (17) следи

$$\limsup_{i\to\infty} \phi(d(x_{n+1}, Tu)) \le \phi(d(u, Tu)) \tag{18}$$

где смо искористили монотоност функције ϕ, тј.

$$\frac{d(u, Tu)}{2} < d(u, Tu) \Rightarrow \phi\Big(\frac{d(u, Tu)}{2}\Big) \le \phi(d(u, Tu))$$

па из (18) следи

$$d(u,Tu) \leq \phi(d(u,Tu)), \quad \text{за } d(u,Tu) > 0$$

што је немогуће, према томе $Tu = u$.

Претпоставимо да пресликавање T има још једну фиксну тачку v, тј. $Tv = v$, $v \neq u$, тада је

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(Tu,Tv) \\ &\leq \Big\{\phi(d(u,v)), \phi(d(u,Tu)), \phi(d(v,Tv)), \phi\Big(\frac{d(u,Tv)+d(v,Tu)}{2}\Big)\Big\} \\ &= \max\big\{\phi(d(u,v)), \phi(0), \phi(0), \phi(d(u,v))\big\} = \phi(d(u,v)) \end{aligned}$$

односно

$$d(u,v) \leq \phi(d(u,v)), \quad \text{за } d(u,v) > 0$$

што је контрадикција.

Тиме смо доказали да пресликавање T има јединствену фиксну тачку $u \in X$ такву да је

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = u \text{ за свако } x \in X. \qquad \square$$

Последица 2.1. *Ако у претходној теореми ставимо $\phi(t) = \lambda t, \lambda \in (0,1)$ добијамо* Ćirić*-еву теорему (видети* [51], [55]*).*

Пример 2.3. Нека је $X = [0,10]$ са уобичајеном метриком, $T : X \to X$, дефинисано са $Tx = \frac{3}{4}x$ и функција $\phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ дефинисана са

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{19}{20}t, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{191}{200}t, & t \geq 1, \end{cases}$$

тада су испуњени услови Теореме 2.4.

Доказ. Ако искористимо пример (Example 2 [51]) имамо да је

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{19}{20}\max\Big\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\Big\}.$$

Међутим, пошто је $\frac{19}{20}t \leq \phi(t)$, тада за $t \geq 0$ одмах следи услов (9) у Теореми 2.4. $\square$

Теорема 2.5. *Нека је* (X, d) *комплетан метрички простор и нека* $S, T, I, J : X \to X$ *тако да* $SX \subseteq JX$, $TX \subseteq IX$, I *и* J *су непрекидна пресликавања, парови* (S, I) *и* (T, J) *су* R*–слабо комутативни, тј. важи*

$$d(SIx, ISx) \leq R_1 d(Sx, Ix), \text{ за неко } R_1 > 0 \text{ и за свако } x \in X,$$
$$d(TJx, ISx) \leq R_2 d(Tx, Jx), \text{ за неко } R_2 > 0 \text{ и за свако } x \in X.$$

Ако је $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *одозго полунепрекидна функција таква да је* $\phi(t) < t$, *за* $t > 0$, $\phi(0) = 0$ *и*

$$d(Sx, Ty) \leq \phi(d(Ix, Jy)), \text{ за свако } x, y \in X, \tag{19}$$

тада пресликавања S, T, I *и* J *имају јединствену заједничку фиксну тачку.*

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ произвољна тачка. Пошто $Sx_0 \in JX$ то постоји x_1 тако да $Sx_0 = Jx_1$. Како $Tx_1 \in IX$ то постоји $x_2 \in X$ тако да $Tx_1 = Ix_2$. Ако је одређен x_{2k} тада $Sx_{2k} \in JX$, па постоји $x_{2k+1} \in X$ тако да $Sx_{2k} = Jx_{2k+1}$. Како је $Tx_{2k+1} \in IX$ то постоји $x_{2k+2} \in X$ тако да $Tx_{2k+1} = Ix_{2k+2}$ итд. Формирајмо Jungck-ов низ

$$y_{2k} = Sx_{2k} = Jx_{2k+1} \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$y_{2k+1} = Tx_{2k+1} = Ix_{2k+2} \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Докажимо да је (y_n) Cauchy-јев низ.

$$\begin{aligned}
d(y_{2k}, y_{2k+1}) &= d(Sx_{2k}, Tx_{2k+1}) \\
&\leq \phi(d(Ix_{2k}, Jx_{2k+1})) \\
&= \phi(d(y_{2k-1}, y_{2k})) \\
&< d(y_{2k-1}, y_{2k}), \text{ јер је } \phi(t) < t, \text{ за } t > 0. \\
d(y_{2k+1}, y_{2k+2}) &= d(Sx_{2k+2}, Tx_{2k+1}) \\
&\leq \phi(d(Ix_{2k+2}, Jx_{2k+1})) \\
&= \phi(d(y_{2k}, y_{2k+1})) \\
&< d(y_{2k}, y_{2k+1}).
\end{aligned}$$

Тиме смо доказали $d(y_n, y_{n+1}) < d(y_{n-1}, y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, а пошто је $0 \leq d(y_n, y_{n+1})$ следи да постоји

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = d^* \geq 0.$$

Претпоставимо да је $d^* > 0$, а како је

$$d(y_{2k}, y_{2k+1}) \leq \phi\big(d(y_{2k-1}, y_{2k})\big)$$

и с обзиром да је ϕ одозго полунепрекидна функција пуштајући да $k \to \infty$ добијамо

$$\begin{aligned} d^* = \limsup_{n\to\infty} d(y_{2k}, y_{2k+1}) &\leq \limsup_{k\to\infty} \phi\big(d(y_{2k-1}, y_{2k})\big) \\ &\leq \phi\big(\limsup_{k\to\infty} d(y_{2k-1}, y_{2k})\big) \\ &= \phi(d^*) \\ &< d^* \end{aligned}$$

што је немогуће, па је $d^* = 0$.

Ако претпоставимо да подниз $(y_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ није Cauchy-јев тада на основу Леме 1.1 постоје поднизови $(m(i))_{i\in\mathbb{N}}$ и $(n(i))_{i\in\mathbb{N}}$ природних бројева и $\varepsilon > 0$ тако да је

$$\lim_{i\to\infty} d(y_{2m(i)}, y_{2n(i)}) = \lim_{i\to\infty} d(y_{2m(i)}, y_{2n(i)+1}) = \lim_{i\to\infty} d(y_{2m(i)+1}, y_{2n(i)+2}) = \varepsilon, \tag{20}$$

а како је

$$d(y_{2m(i)+1}, y_{2n(i)+2}) \leq \phi(d(y_{2m(i)}, y_{2n(i)+1}))$$

одатле ако $i \to \infty$, с обзиром на (20) и одозго полунепрекидност функције ϕ следи

$$\varepsilon \leq \phi(\varepsilon) < \varepsilon, \text{ за } \varepsilon > 0$$

што је контрадикција. Према томе $(y_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ је Cauchy-јев низ и стога конвергентан у комплетном метричком простору (X, d). Ако приметимо да смо доказали $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0$ следи да је

$$\lim_{n\to\infty} y_n = z, \; z \in X$$

тј.

$$\lim_{k\to\infty} Sx_{2k} = \lim_{k\to\infty} Jx_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} Tx_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} Ix_{2k+2} = z. \tag{21}$$

Из непрекидности пресликавања I следи

$$\lim_{k\to\infty} ISx_{2k} = Iz, \ \lim_{k\to\infty} I^2x_{2k} = Iz. \tag{22}$$

Из услова да су пресликавања S и I R–слабо комутативни, налазимо

$$d(SIx_{2k}, ISx_{2k}) \leq R_1 d(Sx_{2k}, Ix_{2k}).$$

Ако пустимо да $k \to \infty$ и узимајући у обзир (21) и (22) добијамо

$$\lim_{k\to\infty} SIx_{2k} = Iz. \tag{23}$$

Применом релације (19) имамо

$$d(SIx_{2k}, Tx_{2k+1}) \leq \phi(d(I^2x_{2k}, Jx_{2k})).$$

Ако пустимо да $k \to \infty$ и узимајући у обзир релације (23), (21) и (22) као и одозго полунепрекидност функције ϕ имамо

$$d(Iz, z) \leq \phi(d(Iz, z)).$$

Ако је $Iz \neq z$, тада је $d(Iz, z) > 0$, па је

$$d(Iz, z) \leq \phi(d(Iz, z)) < d(Iz, z)$$

што је контрадикција, значи $Iz = z$.

Пошто је пресликавање J непрекидно из (21) налазимо

$$\lim_{k\to\infty} JTx_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} J^2x_{2k+1} = Jz. \tag{24}$$

Из услова да су J, T R–слабо комутативни имамо

$$d(TJx_{2k+1}, JTx_{2k+1}) \leq R_2 d(Tx_{2k+1}, Jx_{2k+1}).$$

Ако у последњој релацији пустимо да $k \to \infty$ и с обзиром на релације (24) и (21) следи

$$\lim_{k\to\infty} TJx_{2k+1} = Jz. \tag{25}$$

Применом релације (19) имамо

$$d(Sx_{2k}, TJx_{2k+1}) \leq \phi(d(Ix_{2k}, J^2x_{2k+1})).$$

Ако у последњој релацији пустимо да $k \to \infty$ и узимајући у обзир релације (21), (25) и (24) и због одозго полунепрекидности функције ϕ следи

$$d(z, Jz) \leq \phi(d(z, Jz))$$

а одатле је $Jz = z$, аналогно закључку $Iz = z$.

Из услова (19) имамо

$$d(Sz, Tx_{2k+1}) \leq \phi(d(Iz, Jx_{2k+1})).$$

Пуштајући да $k \to \infty$ налазимо

$$d(Sz, z) \leq \phi(d(Iz, z)).$$

Пошто је $Iz = z$, а функција ϕ таква да је $\phi(0) = 0$, онда следи $Sz = z$.

Даље је

$$d(Sz, Tz) \leq \phi(d(Iz, Jz)) = \phi(d(z, z)) = \phi(0) = 0$$

а одатле је $Sz = Tz$. Тиме смо показали да је

$$Sz = Tz = Iz = Jz = z.$$

Докажимо јединост заједничке фиксне тачке z. Ако постоји $u \neq z$ и

$$Su = Tu = Iu = Ju = u$$

тада је

$$0 < d(u, z) = d(Su, Tz) \leq \phi(d(Iu, Jz)) = \phi(d(u, z)) < d(u, z)$$

што је немогуће, према томе $u = z$. $\square$

Коментар. Теорема 2.5 је проширење Pant-ове теореме ([32]) која гласи:

(X, d) је комплетан метрички простор и нека $T, I : X \to X$ тако да $TX \subseteq IX$, T или I су непрекидна пресликавања која су R-слабо комутативна, тј. важи

$$d(ITx, TIx) \leq Rd(Ix, Tx), \text{ за свако } R > 0 \text{ и свако } x \in X.$$

Ако је $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ непрекидна функција тако да је $\varphi(t) < t$ за $t > 0$ и

$$d(Tx, Ty) \leq \phi\big(d(Ix, Iy)\big), \quad x, y \in X$$

онда I и T имају јединствену заједничку фиксну тачку.

Да бисмо исказали следећу теорему потребна нам је:

Дефиниција 2.1 ([19])**.** Нека је X непразан скуп и нека $f, g : X \to X$. Кажемо да је пар (f, g) пресликавања слабо компатибилан ако

$$fu = gu \Rightarrow gfu = fgu, \quad \text{за } u \in X.$$

Теорема 2.6. *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и нека су дата пресликавања $P, Q, S, T : X \to X$ која задовољавају услове:*

1° $S(X) \subseteq Q(X)$ *и* $\overline{T(X)} \subseteq P(X)$;

2° *Парови пресликавања (P, S) и (Q, T) су слабо компатибилни;*

3° *За свако $x, y \in X$ важи*

$$\begin{aligned}\big[1 + \mu d(Px, Qy)\big] d(Sx, Ty) \leq \mu \max\big\{&d(Px, Sx) \cdot d(Qy, Ty), d(Px, Ty) \cdot d(Sx, Qy)\big\} \\ &+ \max\big\{\phi(d(Px, Qy)), \phi(d(Sx, Px)), \phi(d(Qy, Ty))\big\}\end{aligned}$$

где је $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ таква да је ϕ одозго полунепрекидна, $\phi(t) < t$, за $t > 0$ и $\phi(0) = 0$; константа $\mu \geq 0$ не зависи од x и y.

Тада пресликавања P, Q, S и T имају јединствену заједничку фиксну тачку.

Доказ. Користећи 1° можемо формирати низ $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да је

$$\begin{aligned} y_{2n} &= Sx_{2n} = Qx_{2n+1} \\ y_{2n+1} &= Tx_{2n+1} = Px_{2n+2}. \end{aligned} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{26}$$

Доказаћемо да је (y_n) Cauchy-јев низ.

Ставимо

$$d_n = d(y_n, y_{n+1}) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{27}$$

Постоје две могућности које се међусобно искључују:

$$\text{(i)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ d_n > 0 \quad \text{или} \quad \text{(ii)} \quad (\exists n \in \mathbb{N})\ d_n = 0.$$

Размотримо (i).

Ако у 3° ставимо $x = x_{2n}$ и $y = x_{2n+1}$ налазимо

$$\begin{aligned}
&\big[1 + \mu d(Px_{2n}, Qx_{2n+1})\big] d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\
&\leq \mu \max\big\{d(Px_{2n}, Sx_{2n}) \cdot d(Qx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), d(Px_{2n}, Tx_{2n+1}) \cdot d(Sx_{2n}, Qx_{2n+1})\big\} \\
&\quad + \max\big\{\phi(d(Px_{2n}, Qx_{2n+1})), \phi(d(Sx_{2n}, Px_{2n})), \phi(d(Qx_{2n+1}, Tx_{2n+1}))\big\}.
\end{aligned}$$

Узимајући у обзир како је дефинисан низ (y_n), релација (26), имамо

$$\begin{aligned}
&\big[1 + \mu d(y_{2n-1}, y_{2n})\big] d(y_{2n}, y_{2n+1}) \\
&\leq \mu \max\big\{d(y_{2n-1}, y_{2n}) \cdot d(y_{2n}, y_{2n+1}), d(y_{2n-1}, y_{2n}) \cdot d(y_{2n}, y_{2n})\big\} \\
&\quad + \max\big\{\phi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \phi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \phi(d(y_{2n}, y_{2n+1}))\big\}
\end{aligned}$$

пошто је $d(y_{2n}, y_{2n}) = 0$, горња релација се трансформише у

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \max\big\{\phi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \phi(d(y_{2n}, y_{2n+1}))\big\}.$$

Ако је

$$\max\big\{\phi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \phi(d(y_{2n}, y_{2n+1}))\big\} = \phi(d(y_{2n}, y_{2n+1})),$$

тада бисмо имали

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \phi(d(y_{2n}, y_{2n+1}))$$

што је контрадикција услову 3°, тј. да је $\phi(t) < t$ за $t > 0$ где је $t = d(y_{2n}, y_{2n+1})$.

Према томе, имамо

$$\max\big\{\phi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \phi(d(y_{2n}, y_{2n+1}))\big\} = \phi(d(y_{2n-1}, y_{2n})),$$

стога је

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \phi(d(y_{2n-1}, y_{2n})),$$

односно с обзиром на (27) и 3° следи

$$d_{2n} \leq \phi(d_{2n-1}) < d_{2n-1}. \tag{28}$$

Ако у 3° ставимо $x = x_{2n+2}, y = x_{2n+1}$, добијамо

$$\begin{aligned}
&\big[1 + \mu d(Px_{2n+2}, Qx_{2n+1})\big] d(Sx_{2n+2}, Tx_{2n+1}) \\
&\leq \mu \max\big\{d(Px_{2n+2}, Sx_{2n+2}) \cdot d(Qx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \\
&\qquad d(Px_{2n+2}, Tx_{2n+1}) \cdot d(Sx_{2n+2}, Qx_{2n+1})\big\} \\
&\quad + \max\big\{\phi(d(Px_{2n+2}, Qx_{2n+1})), \phi(d(Sx_{2n+2}, Px_{2n+2})), \phi(d(Qx_{2n+1}, Tx_{2n+1}))\big\}
\end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned}
&\big[1+\mu d(y_{2n+1},y_{2n})\big]d(y_{2n+2},y_{2n+1})\\
&\le \mu\max\big\{d(y_{2n+1},y_{2n+2})\cdot d(y_{2n},y_{2n+1}),d(y_{2n+1},y_{2n+1})\cdot d(y_{2n+2},y_{2n})\big\}\\
&\quad+\max\big\{\phi(d(y_{2n+1},y_{2n})),\phi(d(y_{2n+2},y_{2n+1})),\phi(d(y_{2n},y_{2n+1}))\big\}
\end{aligned}$$

пошто је $\phi(d(y_{2n+1},y_{2n+1}))=0$, горња релација се трансформише у

$$\begin{aligned}
d(y_{2n+1},y_{2n+2})&\le\max\big\{\phi(d(y_{2n},y_{2n+1})),\phi(d(y_{2n+1},y_{2n+2}))\big\}\\
&=\phi(d(y_{2n},y_{2n+1})),
\end{aligned}$$

јер ако је

$$\max\big\{\phi(d(y_{2n},y_{2n+1})),\phi(d(y_{2n+1},y_{2n+2}))\big\}=\phi(d(y_{2n+1},y_{2n+2}))$$

тада бисмо имали

$$d(y_{2n+1},y_{2n+2})\le\phi(d(y_{2n+1},y_{2n+2}))$$

што је контрадикција услову 3° за функцију ϕ ако је $t=d(y_{2n+1},y_{2n+2})>0$.

Тиме смо доказали

$$d(y_{2n+1},y_{2n+2})\le\phi(d(y_{2n},y_{2n+1})),$$

а тада с обзиром на (27) и 3° следи

$$d_{2n+1}\le\phi(d_{2n})<d_{2n}. \tag{29}$$

Из (28) и (29) добијамо

$$d_{n+1}\le\phi(d_n)<d_n\ (n=0,1,\ldots). \tag{30}$$

Из (30) следи да је низ реалних бројева $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ строго монотоно опадајући, а пошто је $d_n>0$ $(n=0,1,\ldots)$ то постоји

$$\lim_{n\to\infty}d_n=d^*\ge 0.$$

Ако би било $d^*>0$, тада из (30) следи

$$\limsup_{n\to\infty}d_n\le\limsup_{n\to\infty}\phi(d_n)\le\phi(d^*),$$

где смо искористили да је ϕ одозго полунепрекидна функција. Из последње релације добијамо да је

$$d^* \leq \phi(d^*), \text{ за } d^* > 0$$

што је контрадикција за функцију ϕ (услов 3°). Према томе, имамо да је $d^* = 0$, тј.

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0, \tag{31}$$

а одатле је $\lim_{n\to\infty} d(y_{2n}, y_{2n+2}) = 0$, што следи из (31) применом неједнакости троугла. Ако претпоставимо да (y_{2n}) није Cauchy-јев низ, применом Леме 1.1 постоје поднизови $(y_{2m(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ и $(y_{2n(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ тако да је $m(i) > n(i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} d(y_{2m(i)}, y_{2n(i)}) &= \lim_{i\to\infty} d(y_{2m(i)}, y_{2n(i)+1}) \\ &= \lim_{i\to\infty} d(y_{2m(i)-1}, y_{2n(i)+1}) = \varepsilon > 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Ако у 3° ставимо $x = x_{2m(i)}, y = x_{2n(i)+1}$ добијамо

$$\begin{gathered}\big[1 + \mu d(Px_{2m(i)}, Qx_{2n(i)+1})\big] d(Sx_{2m(i)}, Tx_{2n(i)+1}) \\ \leq \mu \max\big\{d(Px_{2m(i)}, Sx_{2m(i)}) \cdot d(Qx_{2n(i)+1}, Tx_{2n(i)+1}), \\ d(Px_{2m(i)}, Tx_{2n(i)+1}) \cdot d(Sx_{2m(i)}, Qx_{2n(i)+1})\big\} \\ + \max\big\{\phi(d(Px_{2m(i)}, Qx_{2n(i)+1})), \phi(d(Sx_{2m(i)}, Px_{2m(i)})), \phi(d(Qx_{2n(i)+1}, Tx_{2n(i)+1}))\big\}.\end{gathered}$$

Узимајући у обзир релације (26), налазимо

$$\begin{gathered}\big[1 + \mu d(y_{2m(i)-1}, y_{2n(i)})\big] d(y_{2m(i)}, y_{2n(i)+1}) \\ \leq \mu \max\big\{d(y_{2m(i)-1}, y_{2m(i)}) \cdot d(y_{2n(i)}, y_{2n(i)+1}), d(y_{2m(i)-1}, y_{2n(i)+1}) \cdot d(y_{2m(i)}, y_{2n(i)})\big\} \\ + \max\big\{\phi(d(y_{2m(i)-1}, y_{2n(i)})), \phi(d(y_{2m(i)}, y_{2m(i)-1})), \phi(d(y_{2n(i)}, y_{2n(i)+1}))\big\}.\end{gathered}$$

Ако у последњој релацији пустимо да $i \to \infty$ и користећи граничне вредности (31) и (32) добијамо

$$\begin{aligned}(1 + \mu\varepsilon)\varepsilon \leq \mu\varepsilon^2 + \max\big\{ &\limsup_{i\to\infty} \phi(d(y_{2m(i)-1}, y_{2n(i)})), \\ &\limsup_{i\to\infty} \phi(d(y_{2m(i)}, y_{2m(i)-1})), \limsup_{i\to\infty} \phi(d(y_{2n(i)}, y_{2n(i)+1}))\big\}.\end{aligned} \tag{33}$$

Како је

$$\limsup_{i\to\infty}\ \phi(d(y_{2m(i)-1}, y_{2n(i)})) \le \phi(\varepsilon),$$
$$\limsup_{i\to\infty}\ \phi(d(y_{2m(i)}, y_{2m(i)-1})) \le \phi(0) = 0,$$
$$\limsup_{i\to\infty}\ \phi(d(y_{2n(i)}, y_{2n(i)+1})) \le \phi(0) = 0,$$

јер је ϕ одозго полунепрекидна функција, релација (33) постаје

$$(1+\mu\varepsilon)\varepsilon \le \mu\varepsilon^2 + \phi(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon \le \phi(\varepsilon),\ \text{за } \varepsilon > 0,$$

тј. добили смо контрадикцију. Према томе, (y_{2n}) је CAUCHY-јев низ, а одатле с обзиром на (31) следи да је и (y_n) такође CAUCHY-јев низ. Пошто је (X,d) комплетан то постоји $\lim_{n\to\infty} y_n = z, z \in X$. Користећи дефиницију низа (y_n), релације (26), имамо

$$\lim_{n\to\infty} Sx_{2n} = \lim_{n\to\infty} Qx_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} Px_{2n+2} = z \tag{34}$$

Пошто је

$$y_{2n+1} = Tx_{2n+1} \in T(X) \text{ и } y_{2n+1} \to z, \text{ то } z \in \overline{T(X)} \subseteq P(X) \text{ (услов } 1^\circ\text{)},$$

зато постоји $u \in X$ тако да је

$$z = Pu. \tag{35}$$

Применом релације 3°, налазимо

$$\begin{aligned}&\big[1+\mu d(Pu, Qx_{2n+1})\big] d(Su, Tx_{2n+1})\\ &\le \mu \max\big\{d(Pu,Su)\cdot d(Qx_{2n+1},Tx_{2n+1}), d(Pu,Tx_{2n+1})\cdot d(Su,Qx_{2n+1})\big\}\\ &\quad + \max\big\{\phi(d(Pu,Qx_{2n+1})), \phi(d(Su,Pu)), \phi(d(Qx_{2n+1},Tx_{2n+1}))\big\}.\end{aligned}$$

Узимајући у обзир релације (26) следи

$$\begin{aligned}\big[1+\mu d(Pu,y_{2n})\big] d(Su,y_{2n+1}) \le \mu \max\big\{&d(Pu,Su)\cdot d(y_{2n},y_{2n+1}),\\ &d(Pu,y_{2n+1})\cdot d(Su,y_{2n})\big\}\\ + \max\big\{&\phi(d(Pu,y_{2n})), \phi(d(Su,Pu)),\\ &\phi(d(y_{2n},y_{2n+1}))\big\}.\end{aligned}$$

Ако у последњој релацији узмемо лимес супериор када $n \to \infty$, добијамо

$$\left[1 + \mu d(Pu, z)\right] d(Su, z) \leq \mu d(Pu, z) \cdot d(z, Su) + \phi(d(Su, z)) \tag{36}$$

где смо користили

$$\lim_{n\to\infty} y_n = z, \quad \lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \phi(d(Pu, y_{2n})) \leq \phi(d(Pu, z)) = \phi(d(z, z)) = \phi(0) = 0, Pu = z,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \phi(d(y_{2n}, y_{2n+1})) \leq \phi(0) = 0.$$

Из релације (36) следи

$$d(Su, z) \leq \phi(d(Su, z))$$

а одатле је

$$z = Su. \tag{37}$$

Пошто су пресликавања (P, S) слабо компатибилна (услов 2°) из (35) и (37) налазимо

$$Pz = P(Su) = S(Pu) = Sz, \text{ тј. } Pz = Sz. \tag{38}$$

Како је $S(X) \subseteq Q(X)$ (услов 1°) то из (37) следи да постоји $v \in X$ тако да је

$$z = Qv. \tag{39}$$

Применом релације 3° имамо

$$\begin{aligned}[1 + \mu d(Pu, Qv)]\, d(Su, Tv) \leq \mu \max\left\{d(Pu, Su) \cdot d(Qv, Tv), d(Pu, Tv) \cdot d(Su, Qv)\right\} \\ + \max\left\{\phi(d(Pu, Qv)), \phi(d(Su, Pu)), \phi(d(Qv, Tv))\right\},\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}\left[1 + \mu d(z, z)\right] d(z, Tv) \leq \mu \max\left\{d(z, z) \cdot d(z, Tv), d(z, Tv) \cdot d(z, z)\right\} \\ + \max\left\{\phi(d(z, z)), \phi(d(z, z)), \phi(d(z, Tv))\right\}\end{aligned}$$

тј.

$$d(z, Tv) \leq \phi(d(z, Tv)),$$

а одатле следи

$$z = Tv. \tag{40}$$

Из (39) и (40) имамо

$$Qv = Tv = z. \tag{41}$$

Пошто су пресликавања (Q,T) слабо компатибилна (услов 2°), следи

$$Qz = Q(Tv) = T(Qv) = Tz, \text{ тј. } Qz = Tz. \tag{42}$$

Поновном применом релације 3° налазимо

$$\begin{aligned}\big[1+\mu d(Pz,Qv)\big]d(Sz,Tv) \le \mu \max\big\{d(Pz,Sz)\cdot d(Qv,Tv), d(Pz,Tv)\cdot d(Sz,Qv)\big\}\\ + \max\big\{\phi(d(Pz,Qv)), \phi(d(Sz,Pz)), \phi(d(Qv,Tv))\big\}.\end{aligned}$$

Користећи (38) и (41) из последње релације добијамо

$$\begin{aligned}\big[1+\mu d(Sz,z)\big]d(Sz,z) \le \mu \max\big\{d(Sz,Sz)\cdot d(z,z), d(Sz,z)\cdot d(Sz,z)\big\}\\ + \max\big\{\phi(d(Sz,z)), \phi(d(Sz,Sz)), \phi(d(z,z))\big\}\end{aligned}$$

односно

$$[1+\mu d(Sz,z)]\, d(Sz,z) \le \mu d(Sz,z)\cdot d(z,Sz) + \max\{\phi(d(Sz,z)), \phi(0), \phi(0)\},$$

а како је $\phi(0) = 0$ следи

$$d(Sz,z) \le \phi(d(Sz,z)),$$

одатле је $Sz = z$. Користећи једнакост (38) имамо

$$Pz = Sz = z. \tag{43}$$

Ако поново применимо релацију 3°, налазимо

$$\begin{aligned}\big[1+\mu d(Pz,Qz)\big]d(Sz,Tz) \le \mu \max\big\{d(Pz,Sz)\cdot d(Qz,Tz), d(Pz,Tz)\cdot d(Sz,Qz)\big\}\\ + \max\big\{\phi(d(Pz,Qz)), \phi(d(Pz,Sz)), \phi(d(Qz,Tz))\big\}.\end{aligned}$$

Узимајући у обзир једнакости (42) и (43) из последње неједнакости добијамо

$$\begin{aligned}\big[1+\mu d(Pz,Qz)\big]d(Sz,Tz) \le \mu \max\big\{d(z,z)\cdot d(Qz,Tz), d(Pz,Qz)\cdot d(Sz,Tz)\big\}\\ + \max\big\{\phi(d(Sz,Tz)), \phi(d(Sz,Sz)), \phi(d(Qz,Qz))\big\}\\ d(Sz,Tz) \le \phi(d(Sz,Tz)), \text{ пошто је } d(z,z) = 0 \text{ и } \phi(0) = 0,\end{aligned}$$

а одатле следи

$$Sz = Tz. \tag{44}$$

Из једнакости (42), (43) и (44) коначно имамо

$$Pz = Qz = Sz = Tz = z, \tag{45}$$

тј. z је заједничка фиксна тачка за пресликавања P, Q, S и T. Докажимо да је z једина таква тачка. Претпоставимо да постоји тачка $w \in X, w \neq z$ таква да је

$$Pw = Qw = Sw = Tw = w. \tag{46}$$

Применом релације 3° имамо

$$\begin{aligned}\big[1 + \mu d(Pz, Qw)\big] d(Sz, Tw) \leq \mu \max \big\{ & d(Pz, Sz) \cdot d(Qw, Tw), \\ & d(Pz, Tw) \cdot d(Sz, Qw) \big\} \\ & + \max \big\{ \phi(d(Pz, Qw)), \phi(d(Sz, Pz)), \phi(d(Qw, Tw)) \big\}.\end{aligned}$$

Ако искористимо једнакости (45) и (46), добијамо

$$\begin{aligned}\big[1 + \mu d(z, w)\big] d(z, w) &\leq \mu \max \big\{ d(z, z) \cdot d(w, w), d(z, w) \cdot d(z, w) \big\} \\ &\quad + \max \big\{ \phi(d(z, w)), \phi(d(z, z)), \phi(d(w, w)) \big\} \\ \big[1 + \mu d(z, w)\big] d(z, w) &\leq \mu \max \big\{ 0, d(z, w) \cdot d(z, w) \big\} + \max \big\{ \phi(d(z, w)), \phi(0), \phi(0) \big\}\end{aligned}$$

односно

$$d(z, w) \leq \phi(d(z, w)), \text{ пошто је } \phi(0) = 0,$$

што је контрадикција услову $\phi(t) < t$, за $t = d(z, w) > 0$.

Тиме смо доказали јединост фиксне тачке z.

Размотримо (ii). Тада постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $y_{2n_0+1} = y_{2n_0}$. Користећи релацију (26) следи

$$Px_{2n_0+2} = Qx_{2n_0+1} = Sx_{2n_0} = Tx_{2n_0+1} = z. \tag{47}$$

Пошто је $\overline{T(X)} \subseteq P(X)$ и $z = Tx_{2n_0+1}$ следи да постоји $u \in X$ тако да је $z = Pu$.

Применом релације 3° налазимо

$$\begin{aligned}&\big[1+\mu d(Pu,Qx_{2n_0+1})\big]d(Su,Tx_{2n_0+1})\\&\le \mu\max\big\{d(Pu,Su)\cdot d(Qx_{2n_0+1},Tx_{2n_0+1}),d(Pu,Tx_{2n_0+1})\cdot d(Su,Qx_{2n_0+1})\big\}\\&\quad+\max\big\{\phi(d(Pu,Qx_{2n_0+1})),\phi(d(Su,Pu)),\phi(d(Qx_{2n_0+1},Tx_{2n_0+1}))\big\}.\end{aligned}$$

Узимајући у обзир једнакости (47) и $z = Pu$ добијамо

$$\begin{aligned}\big[1+\mu d(z,z)\big]d(Su,z)\le \mu\max\big\{d(z,Su)\cdot d(z,z),d(z,z)\cdot d(Sz,z)\big\}\\+\max\big\{\phi(d(z,z)),\phi(d(Su,z)),\phi(d(z,z))\big\}\end{aligned}$$

односно

$$d(Su,z)\le\phi(d(Su,z)),$$

пошто смо искористили да је $\phi(0)=0$, а одатле је $Su=z$. Доказ је затим исти као под (i) од релације (37).

Тиме је доказ завршен. □

Напомена. Приметимо да у тачки 1° горње теореме можемо узети услов

$$\overline{S(X)}\subseteq Q(X) \text{ и } T(X)\subseteq P(X),$$

а доказ теореме у том случају је скоро исти изведеном.

Последица 2.2. *Ако у Теореми* 2.6 *ставимо* $\mu = 0$ *и* $\phi(t)=\lambda t, \lambda\in[0,1)$ *добијамо на неки начин уопштење* FISHER*-ове теореме* ([58]) *код које се захтева да су парови пресликавања* (P,S) *и* (Q,T) *комутативни и да је бар једно од пресликавања* P,Q,S,T *непрекидно. Приметимо да се у Последици* 2.2 *захтева услов* $S(X)\subseteq Q(X)$ *и* $\overline{T(X)}\subseteq P(X)$ *који се не тражи у* FISHER*-овој теореми већ само* $S(X)\subseteq Q(X)$ $T(X)\subseteq P(X)$.

Последица 2.3. *Ако у Теореми* 2.6 *ставимо* $\mu=0$, $P=Q=i_X$ *(идентичко пресликавање) добијамо Теорему* 2.3 *из овог поглавља.*

Теорема 2.7. *Нека је* (X,d) *комплетан метрички простор и нека су дата пресликавања* $P,Q,S,T: X\to X$ *која задовољавају услове:*

1° $S(X)\subseteq Q(X)$ *и* $\overline{T(X)}\subseteq P(X)$;

2° Парови пресликавања (P, S) и (Q, T) су слабо компатибилни;

3° За свако $x, y \in X$ важи

$$\begin{aligned}&[1+\mu d(Px, Qy)]\, d(Sx, Ty)\\ &\leq \mu \max\{d(Px, Sx)\cdot d(Qy, Ty), d(Px, Ty)\cdot d(Sx, Qy)\} + \phi(M(x, y))\end{aligned}$$

где је

$$M(x, y) := \max\left\{d(Px, Qy), d(Px, Sx), d(Qy, Ty), \frac{d(Px, Ty) + d(Sx, Qy)}{2}\right\}$$

и $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ одозго полунепрекидна функција, таква да је $\phi(t) < t$, за $t > 0$ и $\phi(0) = 0$; $\mu \geq 0$ константа која не зависи од x и y.

Тада пресликавања P, Q, S и T имају јединствену заједничку фиксну тачку.

Доказ. Аналогно као у доказу претходне теореме формирамо низ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такав да је

$$\begin{aligned}y_{2n} &= Sx_{2n} = Qx_{2n+1}\\ y_{2n+1} &= Tx_{2n+1} = Px_{2n+2}.\end{aligned} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{48}$$

Доказаћемо да је (y_n) Cauchy-јев низ. Ставимо

$$d_n = d(y_n, y_{n+1}) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{49}$$

Постоје две могућности које се међусобно искључују:

$$\text{(i)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\; d_n > 0 \quad \text{или} \quad \text{(ii)} \quad (\exists n \in \mathbb{N}) \quad d_n = 0.$$

(i) Ако у 3° ставимо $x = x_{2n}$ и $y = x_{2n+1}$ налазимо

$$\begin{aligned}&[1+\mu d(Px_{2n}, Qx_{2n+1})]\, d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1})\\ &\leq \mu \max\big\{d(Px_{2n}, Sx_{2n})\cdot d(Qx_{2n+1}, Tx_{2n+1}),\\ &\qquad d(Px_{2n}, Tx_{2n+1})\cdot d(Sx_{2n}, Qx_{2n+1})\big\} + \phi(M(x_{2n}, x_{2n+1})),\end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned}M(x_{2n}, x_{2n+1}) = \max\Big\{&d(Px_{2n}, Qx_{2n+1}), d(Px_{2n}, Sx_{2n}),\\ &d(Qx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \frac{d(Px_{2n}, Tx_{2n+1}) + d(Sx_{2n}, Qx_{2n+1})}{2}\Big\}.\end{aligned}$$

С обзиром како је дефинисан низ (y_n), релације (48), имамо

$$\big[1+\mu d(y_{2n-1},y_{2n})\big]d(y_{2n},y_{2n+1}) \leq \mu \max\big\{d(y_{2n-1},y_{2n})\cdot d(y_{2n},y_{2n+1}),$$
$$d(y_{2n-1},y_{2n+1})\cdot d(y_{2n},y_{2n})\big\} + \phi(M(x_{2n},x_{2n+1})) \tag{50}$$

и

$$\begin{aligned} M(x_{2n},x_{2n+1}) &= \max\Big\{d(y_{2n-1},y_{2n}), d(y_{2n-1},y_{2n}), d(y_{2n},y_{2n+1}), \\ &\qquad \frac{d(y_{2n-1},y_{2n+1})+d(y_{2n},y_{2n})}{2}\Big\} \\ &= \max\Big\{d(y_{2n-1},y_{2n}), d(y_{2n},y_{2n+1}), \frac{d(y_{2n-1},y_{2n+1})}{2}\Big\}. \end{aligned}$$

Пошто је

$$\begin{aligned} d(y_{2n-1},y_{2n+1}) &\leq d(y_{2n-1},y_{2n}) + d(y_{2n},y_{2n+1}) \\ &\leq 2\max\big\{d(y_{2n-1},y_{2n}), d(y_{2n},y_{2n+1})\big\}, \end{aligned}$$

односно

$$\frac{1}{2}\,d(y_{2n-1},y_{2n+1}) \leq \max\big\{d(y_{2n-1},y_{2n}), d(y_{2n},y_{2n+1})\big\}$$

стога је

$$M(x_{2n},x_{2n+1}) = \max\big\{d(y_{2n-1},y_{2n}), d(y_{2n},y_{2n+1})\big\}.$$

Пошто је $d(y_{2n},y_{2n}) = 0$ и ако искористимо смену (49), релацију (50) можемо написати у облику

$$d_{2n} \leq \phi(M(x_{2n},x_{2n+1})) \tag{51}$$

где је $M(x_{2n},x_{2n+1}) = \max\{d_{2n-1},d_{2n}\}$. Ако би било $d_{2n-1} \leq d_{2n}$, тада имамо да је $\max\{d_{2n-1},d_{2n}\} = d_{2n}$, па из (51) следи

$$d_{2n} \leq \phi(d_{2n}) < d_{2n},\ \text{пошто је } d_{2n} > 0,$$

а то је контрадикција. Дакле имамо $d_{2n} < d_{2n-1}$. Из (51) налазимо

$$d_{2n} \leq \phi(d_{2n-1}) < d_{2n-1}. \tag{52}$$

Аналогним поступком, као у претходном, ако у 3° ставимо $x = x_{2n+2}, y = x_{2n+1}$ добијамо

$$d_{2n+1} \leq \phi(d_{2n}) < d_{2n}. \tag{53}$$

Из (52) и (53) имамо

$$0 < d_{n+1} \leq \phi(d_n) < d_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{54}$$

Из (54) следи да постоји

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d^* \geq 0.$$

Ако би било $d^* > 0$, пошто је функција ϕ одозго полунепрекидна из (54) следи

$$\limsup_{n\to\infty} d_{n+1} \leq \limsup_{n\to\infty} \phi(d_n) \leq \phi(d^*)$$

тј.

$$d^* \leq \phi(d^*), \text{ за } d^* > 0,$$

што је контрадикција за функцију ϕ (услов 3°). Према томе, имамо да је $d^* = 0$, тј.

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0, \tag{55}$$

а одатле је $\lim_{n\to\infty} d(y_{2n}, y_{2n+2}) = 0$.

Претпоставимо да $(y_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ није Cauchy-јев низ. Тада на основу Леме 1.1 постоје поднизови $(y_{2m(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ и $(y_{2n(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ тако да је $m(i) > n(i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} d(y_{2m(i)}, y_{2n(i)}) &= \lim_{i\to\infty} d(y_{2m(i)}, y_{2n(i)+1}) = \lim_{i\to\infty} d(y_{2m(i)-1}, y_{2n(i)}) \\ &= \lim_{i\to\infty} d(y_{2m(i)-1}, y_{2n(i)+1}) = \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Ако у 3° ставимо $x = x_{2m(i)}, y = x_{2n(i)+1}$ добијамо

$$\begin{aligned} &\big[1 + \mu d(Px_{2m(i)}, Qx_{2n(i)+1})\big] d(Sx_{2m(i)}, Tx_{2n(i)+1}) \\ &\leq \mu \max\big\{d(Px_{2m(i)}, Sx_{2m(i)}) \cdot d(Qx_{2n(i)+1}, Tx_{2n(i)+1}), \\ &\quad d(Px_{2m(i)}, Tx_{2n(i)+1}) \cdot d(Sx_{2m(i)}, Qx_{2n(i)+1})\big\} + \phi(M(x_{2m(i)}, x_{2n(i)+1})), \end{aligned}$$

односно узимајући у обзир релације (48), налазимо

$$\begin{aligned} &\big[1 + \mu d(y_{2m(i)-1}, y_{2n(i)})\big] d(y_{2m(i)}, y_{2n(i)+1}) \\ &\leq \mu \max\big\{d(y_{2m(i)-1}, y_{2m(i)}) \cdot d(y_{2n(i)}, y_{2n(i)+1}), \\ &\qquad d(y_{2m(i)-1}, y_{2n(i)+1}) \cdot d(y_{2m(i)}, y_{2n(i)})\big\} + \phi(M(x_{2m(i)}, x_{2n(i)+1})), \end{aligned} \tag{57}$$

где је

$$M(x_{2m(i)},x_{2n(i)+1}) = \max\Big\{d(Px_{2m(i)},Qx_{2n(i)+1}), d(Px_{2m(i)},Sx_{2m(i)}),$$
$$d(Qx_{2n(i)+1},Tx_{2n(i)+1}),$$
$$\frac{d(Px_{2m(i)},Tx_{2n(i)+1})+d(Sx_{2m(i)},Qx_{2n(i)+1})}{2}\Big\}$$
$$= \max\Big\{d(y_{2m(i)-1},y_{2n(i)}), d(y_{2m(i)-1},y_{2m(i)}), d(y_{2n(i)},y_{2n(i)+1}),$$
$$\frac{d(y_{2m(i)-1},y_{2n(i)+1})+d(y_{2m(i)},y_{2n(i)})}{2}\Big\}. \tag{58}$$

Узимајући лимес супериор у (57) када $i \to \infty$ и с обзиром на граничне вредности (55) и (56) добијамо из (57)

$$(1+\mu\varepsilon)\varepsilon \le \mu\varepsilon^2 + \limsup_{i\to\infty} \phi(M(x_{2m(i)},x_{2n(i)+1})). \tag{59}$$

Ако у (58) пустимо да $i \to \infty$ с обзиром на граничне вредности (55) и (56) добијамо

$$\lim_{i\to\infty} M(x_{2m(i)},x_{2n(i)+1}) = \varepsilon,$$

па из (59) следи, пошто је функција ϕ одозго полунепрекидна

$$\varepsilon \le \limsup_{i\to\infty} \phi(M(x_{2m(i)},x_{2n(i)+1})) \le \phi(\varepsilon), \text{ за } \varepsilon > 0$$

што је контрадикција услову $\phi(t) < t$, за $t > 0$. Према томе, (y_{2n}) је CAUCHY-јев низ, а пошто је $\lim_{n\to\infty} d(y_n,y_{n+1}) = 0$, то значи да је (y_n) CAUCHY-јев низ, у комплетном метричком простору (X,d) па постоји $z \in X$ тако да је $\lim_{n\to\infty} y_n = z$. Користећи дефиницију низа (y_n), релације (48), имамо

$$\lim_{n\to\infty} Sx_{2n} = \lim_{n\to\infty} Qx_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} Px_{2n+1} = z. \tag{60}$$

Како

$$y_{2n+1} = Tx_{2n+1} \in T(X) \text{ и } y_{2n+1} \to z, \text{ тада } z \in \overline{T(X)} \subseteq P(X) \text{ (услов } 1^\circ),$$

стога постоји $u \in X$ тако да је

$$z = Pu. \tag{61}$$

Применом релације 3°, налазимо

$$\big[1+\mu d(Pu,Qx_{2n+1})\big] d(Su,Tx_{2n+1})$$
$$\le \mu \max\big\{d(Pu,Su)\cdot d(Qx_{2n+1},Tx_{2n+1}),$$
$$d(Pu,Tx_{2n+1})\cdot d(Su,Qx_{2n+1})\big\} + \phi(M((u,x_{2n+1}))),$$

где је

$$M(u,x_{2n+1}) = \max\Big\{d(Pu,Qx_{2n+1}), d(Pu,Su), d(Qx_{2n+1},Tx_{2n+1}),$$
$$\frac{d(Pu,Tx_{2n+1})+d(Su,Qx_{2n+1})}{2}\Big\}.$$

Користећи релације (48) и (61) добијамо

$$\begin{aligned}&\big[1+\mu d(z,y_{2n})\big]d(Su,y_{2n+1})\\&\le \mu\max\big\{d(z,Su)\cdot d(y_{2n},y_{2n+1}), d(z,y_{2n+1})\cdot d(Su,y_{2n})\big\} + \phi(M(u,x_{2n+1}))\end{aligned} \tag{62}$$

и

$$M(u,x_{2n+1}) = \max\left\{d(z,y_{2n}), d(z,Su), d(y_{2n},y_{2n+1}), \frac{d(z,y_{2n+1})+d(Su,y_{2n})}{2}\right\}.$$

Из (62) следи

$$\limsup_{n\to\infty}\,[1+\mu d(z,y_{2n})]\,d(Su,y_{2n+1}) \le \limsup_{n\to\infty}\,\phi(M(u,x_{2n+1})) \tag{63}$$

где смо искористили (55) и $\lim y_n = z$.

Пошто је

$$\lim_{n\to\infty} M(u,x_{2n+1}) = \max\left\{0, d(z,Su), 0, \frac{d(z,Su)}{2}\right\} = d(z,Su)$$

и користећи да је функција ϕ одозго полунепрекидна из (63) налазимо

$$d(Su,z) \le \limsup_{n\to\infty}\,\phi(M(u,x_{2n+1})) \le \phi(d(z,Su))$$

а одатле је $d(z,Su)=0$, тј.

$$Su = z. \tag{64}$$

Пошто су пресликавања (P,S) слабо компатибилна (услов 2°) из (61) и (64) имамо

$$Pz = P(Su) = S(Pu) = Sz, \text{ односно } \quad Pz = Sz. \tag{65}$$

Како је $S(X)\subseteq Q(X)$ (услов 1°) то из (64) следи да постоји $v\in X$ тако да је

$$z = Qv. \tag{66}$$

Применом релације 3° имамо

$$\begin{aligned}&\big[1+\mu d(Pu,Qv)\big]d(Su,Tv)\\&\le \mu\max\big\{d(Pu,Su)\cdot d(Qv,Tv), d(Pu,Tv)\cdot d(Qv,Su)\big\} + \phi(M(u,v)),\end{aligned}$$

где је

$$M(u,v) = \max\left\{d(Pu,Qv), d(Pu,Su), d(Qv,Tv), \frac{d(Pu,Tv)+d(Su,Qv)}{2}\right\}.$$

Како је $Pu = Su = z$ (једнакости (61) и (64)) и $Qv = z$ (једнакост (66)) добијамо

$$\begin{aligned}\big[1+\mu d(z,z)\big]d(z,Tv) \le \mu \max\{d(z,z)\cdot d(z,Tv), d(z,Tv)\cdot d(z,z)\}& \\ + \phi(M(u,v)),& \qquad (67)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}M(u,v) &= \max\left\{d(z,z), d(z,z), d(z,Tv), \frac{d(z,Tv)+d(z,z)}{2}\right\} \\ &= \max\left\{0, 0, d(z,Tv), \frac{d(z,Tv)}{2}\right\} \\ &= d(z,Tv),\end{aligned}$$

па из релације (67) следи

$$d(z,Tv) \le \phi(d(z,Tv)),$$

а одатле закључујемо да је $d(z,Tv) = 0$, односно

$$Tv = z. \qquad (68)$$

Из (66) и (68) следи $Qv = Tv = z$, а пошто су пресликавања (Q,T) слабо компатибилна (услов 2°) добијамо $Tz = T(Qv) = Q(Tv) = Qz$ тј.

$$Tz = Qz. \qquad (69)$$

Поновном применом релације 3° налазимо

$$\begin{aligned}\big[1+\mu d(Pz,Qv)\big]d(Sz,Tv) \le \mu \max\big\{d(Pz,Sz)\cdot d(Qv,Tv), d(Pz,Tv)\cdot d(Sz,Qv)\big\}& \\ + \phi(M(z,v))& \qquad (70)\end{aligned}$$

где је

$$M(z,v) = \max\left\{d(Pz,Qv), d(Pz,Sz), d(Qv,Tv), \frac{d(Pz,Tv)+d(Sz,Qv)}{2}\right\}. \qquad (71)$$

Пошто је $Pz = Sz$, једнакост (65), и $Qv = Tv = z$, једнакости (66) и (68) то се релације (70) и (71) трансформишу у

$$\begin{aligned}\big[1+\mu d(Sz,z)\big]d(Sz,z) &\le \mu \max\{d(Sz,Sz)\cdot d(z,z), d(Sz,z)\cdot d(z,Sz)\} + \phi(M(z,v)),\\ M(z,v) &= \max\left\{d(Sz,z), d(Sz,Sz), d(z,z), \frac{d(Sz,z)+d(z,Sz)}{2}\right\}\\ &= d(Sz,z)\end{aligned}$$

односно

$$[1+\mu d(Sz,z)]\, d(Sz,z) \le \mu d(Sz,z) d(z,Sz) + \phi(d(Sz,z))$$

тј.

$$d(Sz,z) \le \phi(d(Sz,z)),$$

а одатле следи $Sz = z$, а користећи (65) имамо

$$Sz = Pz = z. \tag{72}$$

Ако поново применимо релацију 3°, налазимо

$$\begin{aligned}&\big[1+\mu d(Pz,Qz)\big]d(Sz,Tz)\\ &\le \mu \max\{d(Pz,Sz)\cdot d(Qz,Tz), d(Pz,Tz)\cdot d(Sz,Qz)\} + \phi(M(z,z))\end{aligned}$$

где је

$$M(z,z) = \max\left\{d(Pz,Qz), d(Pz,Sz), d(Qz,Tz), \frac{d(Pz,Tz)+d(Sz,Qz)}{2}\right\}.$$

Пошто је $d(Pz,Sz) = d(z,z) = 0$ (једнакост (72)) и $Tz = Qz$ (једнакост (69)), горње релације можемо написати у облику

$$[1+\mu d(Pz,Qz)]\, d(Sz,Tz) \le \mu d(Pz,Qz)\cdot d(Sz,Tz) + \phi(d(Sz,Tz)) \tag{73}$$

јер је

$$\begin{aligned}M(z,z) &= \max\left\{d(Sz,Tz), d(Sz,Sz), d(Tz,Tz), \frac{d(Sz,Tz)+d(Sz,Tz)}{2}\right\}\\ &= d(Sz,Tz).\end{aligned}$$

Из релације (73) следи

$$d(Sz,Tz) \le \phi(d(Sz,Tz)),$$

а одатле је $Sz = Tz$. Користећи једнакости (69) и (72) и $Sz = Tz$ следи

$$Pz = Qz = Sz = Tz = z. \tag{74}$$

Ако би постојала још једна тачка $w \in X$ таква да је

$$Pw = Qw = Sw = Tw = w, \ w \neq z. \tag{75}$$

Тада бисмо имали

$$\begin{aligned} &\big[1 + \mu d(Pz, Qw)\big] d(Sz, Tw) \\ &\leq \mu \max\big\{d(Pz, Sz) \cdot d(Qw, Tw), d(Pz, Tw) \cdot d(Sz, Qw)\big\} + \phi(M(z, w)), \end{aligned}$$

где је

$$M(z, w) = \max\left\{d(Pz, Qw), d(Pz, Sz), d(Qw, Tw), \frac{d(Pz, Tw) + d(Sz, Qw)}{2}\right\}.$$

Ако искористимо релације (74) и (75) добијамо

$$[1 + \mu d(z, w)]\, d(z, w) \leq \mu \max\{d(z, z) \cdot d(w, w), d(z, w) \cdot d(z, w)\} + \phi(d(z, w)),$$

јер је

$$\begin{aligned} M(z, w) &= \max\left\{d(z, w), d(z, z), d(w, w), \frac{d(z, w) + d(z, w)}{2}\right\} \\ &= d(z, w), \end{aligned}$$

односно налазимо

$$d(z, w) \leq \phi(d(z, w)), \text{ за } d(z, w) > 0, \text{ пошто је } z \neq w,$$

а то је контрадикција, према томе $z = w$, тј. z је јединствена фиксна тачка за пресликавања P, Q, S и T.

(ii) Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $y_{2n_0+1} = y_{2n_0}$; користећи релације (48) тада је

$$Px_{2n_0+2} = Qx_{2n_0+1} = Sx_{2n_0} = Tx_{2n_0+1} = z. \tag{76}$$

Пошто $z = Tx_{2n_0+1} \in T(X)$ и $\overline{T(X)} \subseteq P(X)$, то постоји $u \in X$ тако да је $z = Pu$.

Применом релације 3° налазимо

$$
\begin{aligned}
&\big[1+\mu d(Pu,Qx_{2n_0+1})\big]d(Su,Tx_{2n_0+1})\\
&\leq \mu \max\left\{d(Pu,Su)\cdot d(Qx_{2n_0+1},Tx_{2n_0+1}), d(Pu,Tx_{2n_0+1})\cdot d(Su,Qx_{2n_0+1})\right\}\\
&\qquad\qquad + \phi(M(u,x_{2n_0+1}))
\end{aligned}
$$

где је

$$
\begin{aligned}
M(u,x_{2n_0+1}) = \max\Big\{&d(Pu,Qx_{2n_0+1}), d(Pu,Su), d(Qx_{2n_0+1},Tx_{2n_0+1}),\\
&\frac{d(Pu,Tx_{2n_0+1})+d(Su,Qx_{2n_0+1})}{2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Узимајући у обзир једнакости (76) и $z=Pu$ претходне релације можемо написати у облику

$$
\begin{aligned}
\big[1+\mu d(z,z)\big]d(Su,z) \leq \mu \max&\left\{d(z,Su)\cdot d(z,z), d(z,z)\cdot d(Su,z)\right\}\\
&+\phi(M(u,x_{2n_0+1})), \qquad (77)\\
M(u,x_{2n_0+1}) &= \max\left\{d(z,z), d(z,Su), d(z,z), \frac{d(z,z)+d(z,Su)}{2}\right\}\\
&= \max\left\{0, d(z,Su), 0, \frac{1}{2}d(z,Su)\right\}\\
&= d(z,Su),
\end{aligned}
$$

а тада је релација (77)

$$d(Su,z) \leq \phi(d(Su,z)),$$

а одатле је $Su=z$. Доказ је затим исти као под (i) од релације (64).

Тиме је доказ завршен. □

Напомена. У тачки 1° претходне теореме могли смо узети услов

$$\overline{S(X)} \subseteq Q(X) \text{ и } T(X) \subseteq P(X)$$

уместо датог.

Коментар. У чланку [50] (Theorem 3.1) исказана је потпуно иста Теорема 2.7 али су захтеви нешто јачи, тј. захтева се да је бар једно од пресликавања P,Q,S,T непрекидно и да је ϕ неопадајућа функција али је услов 2° из Теореме 2.7 нешто слабији, тј. захтева се само

$$S(X) \subseteq Q(X) \text{ и } T(X) \subseteq P(X).$$

У чланку [28] (Theorem 3.1) захтеви за пресликавања P, Q, S, T су потпуно исти као у Теореми 2.7, али је зато услов

$$d(Sx, Ty) \leq \phi\big(M(x, y)\big)$$

где је $M(x, y)$ дефинисано као у Теореми 2.7 јачи него услов 3° у Теореми 2.7.

Последица 2.4. *Ако у Теореми* 2.7. *ставимо* $\mu = 0$ *добијамо теорему из чланка* [28] (*Theorem* 3.1).

Последица 2.5. *Ако ставимо* $\mu = 0, \phi(t) = \lambda t,\ \lambda \in (0, 1)$ *и* $P = Q = i_X$ (*идентичко пресликавање*) *добијамо* Ćirić*-еву теорему* (*Theorem* 1 [52]).

Последица 2.6. *Ако ставимо* $\mu = 0, S = T$ *и* $P = Q = i_X$ (*идентичко пресликавање*) *добијамо побољшан резултат* Pant*-а* ([34], [33]).

Да бисмо исказали следећу теорему потребна нам је следећа дефиниција.

Дефиниција 2.2 ([46])**.** За пар (f, g) пресликавања $f, g : X \to X$, где је (X, d) метрички простор кажемо да је слабо семикомпатибилан ако је

$$\lim_{n\to\infty} fgx_n = gt \text{ или } \lim_{n\to\infty} gfx_n = ft$$

за сваки низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ за који је

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t, \text{ за неко } t \in X.$$

Пример 2.4. ([46]) Нека је $X = [0, 1]$ са уобичајеном метриком d. Дефинишимо $f, g : X \to X$ помоћу

$$fx = x, x \in X \text{ и } gx = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Тада је (f, g) слабо семикомпатибилно пресликавање.

Доказ. Нека је $x_n = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тада је

$$fx_n = \frac{1}{n} \to 0 (n \to \infty), \quad gx_n = 0 \to 0 \quad (n \to \infty),$$
$$fgx_n = 0 \to 0 \neq g(0) \text{ и } gfx_n = 0 \to 0 = f(0),$$

па је тачан исказ

$$\lim_{n\to\infty} fgx_n = g(0) \text{ или } \lim_{n\to\infty} gfx_n = f(0).$$

□

Теорема 2.8. *Нека $f, g : X \to X$, где је (X, d) комплетан метрички простор тако да је $g(X) \subseteq f(X)$ и*

$$d(fx, fy) \geq \phi\big(d(gx, gy), d(fx, gx), d(fy, gy)\big) \text{ за свако } x, y \in X, \tag{78}$$

где је функција $\phi : [0, +\infty)^3 \to [0, +\infty)$, монотоно неопадајућа по свакој промењивој и полунепрекидна одоздо са особином $\phi(t, 0, 0) > t$ за свако $t > 0$. Ако су пресликавања f и g непрекидна и слабо семикомпатибилна тада она имају јединствену заједничку фиксну тачку.

Доказ. Из датих услова теореме можемо формирати Jungck-ов низ

$$y_n = gx_n = fx_{n+1} \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Размотримо:

Случај 1°. $d(y_n, y_{n+1}) > 0$ за свако $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$\begin{aligned} d(y_{n+1}, y_n) &= d(fx_{n+2}, fx_{n+1}) \geq \phi\big(d(gx_{n+2}, gx_{n+1}), d(fx_{n+2}, gx_{n+2}), d(fx_{n+1}, gx_{n+1})\big) \\ &= \phi\big(d(y_{n+2}, y_{n+1}), d(y_{n+1}, y_n), d(y_n, y_{n+1})\big) \\ &\geq \phi\big(d(y_{n+2}, y_{n+1}), 0, 0\big), \text{ пошто је } \phi \text{ неопадајућа по свакој промењивој} \\ &> d(y_{n+2}, y_{n+1}). \end{aligned} \tag{79}$$

Ставимо $\alpha_n = d(y_n, y_{n+1})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Тада је $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ строго монотоно опадајући низ позитивних бројева, па стога постоји

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \geq 0.$$

Ако је $\alpha > 0$ тада из (79) имамо

$$\alpha_n \geq \phi(\alpha_{n+1}, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

а одатле је

$$\begin{aligned} \alpha = \liminf_{n\to\infty} \alpha_n &\geq \liminf_{n\to\infty} \phi(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \\ &\geq \phi(\alpha, \alpha, \alpha) \\ &\geq \phi(\alpha, 0, 0) \\ &> \alpha \end{aligned}$$

што је контрадикција. Према томе $\alpha = 0$, тј. $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0$.

Да бисмо доказали да је $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан низ довољно је доказати да је $(y_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-јев низ. Претпоставимо супротно, тј. да (y_{2n}) није Cauchy-јев низ. Тада на основу Леме 1.1 постоје поднизови $(y_{2m(k)})_{k\in\mathbb{N}}, (y_{2n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ тако да је

$$\lim_{k\to\infty} d(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}) = \varepsilon + 0 \ (\varepsilon > 0).$$

Пошто је

$$\begin{aligned} d(y_{2m(k)+1}, y_{2n(k)+1}) &= d(fx_{2m(k)}, fx_{2n(k)}) \\ &\geq \phi\big(d(gx_{2m(k)}, gx_{2n(k)}), d(fx_{2m(k)}, gx_{2m(k)}), d(fx_{2n(k)}, gx_{2n(k)})\big) \\ &= \phi\big(d(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}), d(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)}), d(y_{2n(k)-1}, y_{2n(k)})\big) \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \liminf_{k\to\infty} d(y_{2m(k)+1}, y_{2n(k)+1}) \\ &\geq \liminf_{k\to\infty} \phi\big(d(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}), d(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)}), d(y_{2n(k)-1}, y_{2n(k)})\big) \\ &\geq \phi\big(\lim_{k\to\infty} d(y_{2m(k)}, y_{2n(k)}), \lim_{k\to\infty} d(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)}), \lim_{k\to\infty} d(y_{2n(k)-1}, y_{2n(k)})\big) \\ &= \phi(\varepsilon, 0, 0) \\ &> \varepsilon \end{aligned}$$

што је контрадикција.

Тиме смо доказали да је (y_{2n}) Cauchy-јев низ у комплетном метричком простору (X, d) па $y_{2n} \to z \ (n \to \infty), z \in X$. Како је (y_n) Cauchy-јев низ то је $\lim_{n\to\infty} y_n = z$ односно

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = z. \tag{80}$$

Пошто су (f, g) слабо семикомпатибилна пресликавања, имамо да је

$$\lim_{n\to\infty} fgx_n = gz \text{ или } \lim_{n\to\infty} gfx_n = fz.$$

Ако је $\lim_{n\to\infty} fgx_n = gz$, а пошто је f непрекидно пресликавање то из (80) следи $\lim_{n\to\infty} fgx_n = fz$, па је $fz = gz$.

Како је

$$d(ffx_n, fx_n) \geq \phi\big(d(gfx_n, gx_n), d(ffx_n, , gfx_n), d(fx_n, gx_n)\big),$$

тј.

$$
\begin{aligned}
d(fz,z) = \liminf_{n\to\infty} d(ffx_n, fx_n) &\geq \liminf_{n\to\infty} \phi\big(d(gfx_n, gx_n), d(ffx_n,, gfx_n),\\
&\quad d(fx_n, gx_n)\big)\\
&\geq \phi\big(\lim_{n\to\infty} d(gfx_n, gx_n), \lim_{n\to\infty} d(ffx_n,, gfx_n), \lim_{n\to\infty} d(fx_n, gx_n)\big)\\
&= \phi\big(d(gz,z), d(fz,gz), d(z,z)\big)\\
&= \phi\big(d(fz,z), 0, 0) \ (fz = gz). \qquad (81)
\end{aligned}
$$

Стога, ако је $fz \neq z \Leftrightarrow d(fz,z) > 0$, добијамо из (81) да је

$$d(fz,z) \geq \phi\big(d(fz,z), 0, 0\big) > d(fz,z).$$

Контрадикција, дакле имамо $fz = gz = z$.

Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} gfx_n = fz$, тада пошто је g непрекидна функција из (80) имамо $\lim\limits_{n\to\infty} gfx_n = gz$, па је $fz = gz$, а затим из (81) следи $fz = z$, тј. $fz = gz = z$.

Случај $2°$. $d(y_n, y_{n+1}) = 0$ за неко $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

то значи да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $y_{n_0} = y_{n_0+1}$, односно

$$y_{n_0} = gx_{n_0} = fx_{n_0+1} = y_{n_0+1} = gx_{n_0+1} = fx_{n_0+2}$$

тј.

$$fx_{n_0+1} = gx_{n_0+1} = y_{n_0},$$

па је

$$
\begin{aligned}
0 = d(y_{n_0}, y_{n_0+1}) &= d(fx_{n_0+1}, fx_{n_0+2})\\
&\geq \phi\big(d(gx_{n_0+1}, gx_{n_0+2}), d(fx_{n_0+1}, gx_{n_0+1}), d(fx_{n_0+2}, gx_{n_0+2})\big)\\
&= \phi\big(d(y_{n_0+1}, y_{n_0+2}), 0, d(y_{n_0+1}, y_{n_0+2})\big)\\
&\geq \phi\big(d(y_{n_0+1}, y_{n_0+2}), 0, 0\big).
\end{aligned}
$$

Ако је $d(y_{n_0+1}, y_{n_0+2}) > 0$, тада бисмо имали

$$0 \geq \phi\big(d(y_{n_0+1}, y_{n_0+2}), 0, 0\big) > d(y_{n_0+1}, y_{n_0+2}).$$

Контрадикција. Дакле, имамо $y_{n_0+1} = y_{n_0+2}$. Тиме смо доказали да је низ (y_n) стационаран, тј.

$$y_n = y_{n_0}, \text{ за } n \geq n_0,$$

па је $\lim_{n\to\infty} y_n = z$, за $z = y_{n_0}$, сада се доказ понавља као у случају 1°.

Докажимо да је z јединствена фиксна тачка.

Претпоставимо да постоји $u \in X$ тако да је $fu = gu = u$ и $u \neq z$ $\big(\Leftrightarrow d(u,z) > 0\big)$.

Како је

$$\begin{aligned} d(z,u) = d(fz,fu) &\geq \phi\big(d(gz,gu), d(fz,gz), d(fu,gu)\big) \\ &= \phi\big(d(z,u), d(z,z), d(u,u)\big) \\ &= \phi\big(d(z,u), 0, 0) \\ &> d(z,u), \end{aligned}$$

добијамо контрадикцију. □

Последица 2.7. *Ако је $f : X \to X$ непрекидна сурјекција метричког простора (X,d) која задовољава услов*

$$\lambda \max\big\{d(x,y), d(x,fx), d(y,fy)\big\} \leq d(fx,fy) \text{ за свако } x,y \in X$$

где је константа $\lambda > 1$, тада пресликавање f има јединствену фиксну тачку.

Доказ. У исказу претходне теореме ставимо $g = i_X$ (идентичко пресликавање). Нека функција $\phi : [0,+\infty)^3 \to [0,+\infty)$ буде дефинисана са

$$\phi(t_1,t_2,t_3) = \lambda \max\{t_1,t_2,t_3\},$$

пар (f, i_X) је слабо семикомпатибилан, па су испуњени услови претходне теореме, према томе f има јединствену фиксну тачку. □

3. Уопштена контрактивна пресликавања на компактним метричким просторима

У чланку [31] руски математичар НЕМЫЦКИЙ исказао је (без доказа) следећу теорему:

Теорема 3.1. *Ако је (X, d) компактан метрички простор, а $T : X \to X$ пресликавање које задовољава услов*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \text{ за свако } x \neq y, \quad x, y \in X,$$

тада пресликавање T има јединствену фиксну тачку.

У исказу теореме НЕМЫЦКИЙ-а не можемо компактност простора X заменити комплетношћу.

Пример 3.1. Нека је $X = [1, +\infty)$ са уобичајеном метриком, $T : X \to X$ и $Tx = \dfrac{1}{1+x}$, тада је

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \quad \text{ за свако } x \neq y, \ x, y \in X.$$

Међутим, пресликавање T нема фиксну тачку, X је комплетан али није компактан метрички простор.

Теорема НЕМЫЦКИЙ-а је општија од BANACH-ове теореме ако је (X, d) компактан метрички простор.

Пример 3.2. Нека је $X = [0, 1]$ са уобичајеном метриком, $T : X \to X$ и $Tx = \dfrac{x}{1+x}$. Тада је

$$d(Tx, Ty) = \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| = \frac{1}{(1+x)(1+y)} |x - y| < |x - y|, \text{ за } x \neq y, x, y \in X,$$

па можемо применити Теорему 3.1.

Пошто је

$$\sup \left\{ \frac{1}{(1+x)(1+y)} : x, y \in X, x \neq y \right\} = 1,$$

пресликавање T није BANACH-ова контракција.

Многи аутори су доказивали сличне теореме (видети [41], [48], [15]).

Уопштићемо Теорему 3.1. у више праваца.

Теорема 3.2. *Нека је* (X, d) *метрички простор,* $T, I : X \to X$ *комутативна пресликавања, постоји компактан скуп* $K \subseteq X$ *тако да важи* $T(K) \subseteq K \subseteq I(K)$ *и*

$$d(Tx, Ty) < d(Ix, Iy), \qquad \text{за свако } x \neq y,\ x, y \in K. \tag{1}$$

Ако је I *непрекидно пресликавање на скупу* K*, тада пресликавања* T *и* I *имају јединствену заједничку фиксну тачку у скупу* K*.*

Доказ. Из непрекидности пресликавања I на скупу K и услова (1) следи да је пресликавање T непрекидно на K. Заиста, нека је $x \in K$ и уочимо низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ различитих тачака у K тако да $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Из услова (1) следи

$$d(Tx_n, Tx) < d(Ix_n, Ix) \to 0, \quad (n \to \infty),$$

па $Tx_n \to Tx$ $(n \to \infty)$. Како је $x \in K$ произвољна тачка, то је T непрекидно пресликавање на K.

Посматрајмо функцију $F(x) = d(Ix, Tx), x \in K$. Пошто су I и T непрекидна пресликавања следи да је функција $F : K \to \mathbb{R}$ непрекидна, па постоји $u \in K$ тако да је

$$F(u) = \min\big\{F(x) : x \in K\big\}. \tag{2}$$

За тако нађено u, а пошто је $T(K) \subseteq K \subseteq I(K)$ постоји $v \in K$ тако да је $Iv = u$ и $Tv \in K$.

Претпоставимо да је $Tv \neq Iv$, тада је

$$\begin{aligned} F(Tv) &= d(ITv, TTv) = d(TIv, TTv),\ \text{јер су } T \text{ и } I \text{ комутативни} \\ &< d(IIv, ITv),\ \text{услов (1) и } Iv \neq Tv \\ &= d(IIv, TIv), \text{јер су } T \text{ и } I \text{ комутативни} \\ &= d(Iu, Tu) \\ &= F(u), \end{aligned}$$

тј. добили смо $F(Tv) < F(u)$ што је немогуће због услова (2), стога је $Tv = Iv = u$.

Сада постоје две могућности:

1° $u = v$, тада је $Iv = Tv = v$, па је v заједничка фиксна тачка за пресликавања T и I.

2° $u \neq v$, тј. $Tv = Iv \neq v$. Имамо

$$\begin{aligned} Tu &= T(Iv) \\ &= I(Tv), \text{због комутативности } T \text{ и } I \\ &= Iu, \text{ јер је } Tv = u. \end{aligned}$$

Сада је

$$\begin{aligned} d(Iu, u) &= d(Tu, u), \text{ пошто је } Tu = Iu \\ &= d(TIv, Tv), \text{ пошто је } Iv = Tv = u \\ &< d(IIv, Iv), \text{ због (1) и претпоставке } Iv \neq v \\ &= d(Iu, u) \text{ јер је } u = Iv. \end{aligned}$$

Дакле, добили смо контрадикцију, па могућност 2° не може да наступи. Према томе, показали смо да пресликавања T и I имају заједничку фиксну тачку $v \in K$.

Докажимо јединост заједничке фиксне тачке v.

Претпоставимо да постоји још једна заједничка фиксна тачка $z \in X$ ($z \neq v$), тако да је $Tz = Iz = z$.

Тада је

$$\begin{aligned} 0 < d(z, v) = d(Tz, Tv) &< d(Iz, Iv), \quad z \neq v \\ &= d(z, v). \end{aligned}$$

Контрадикција. $\square$

Пример 3.3. Нека је $X = [0, 1)$ са уобичајеном метриком, $T, I : X \to X$ дефинисани са $Tx = x^2, Ix = \sqrt{x}$. Тада су на скупу $K = \left[0, \frac{1}{4}\right] \subset X$ испуњени услови Теореме 3.2.

Доказ. Једноставно се доказује комутативност пресликавања T, I и $T(K) \subseteq K \subseteq I(K)$.

Услов

$$
\begin{aligned}
&d(Tx,Ty) < d(Ix,Iy).x \neq y, x,y \in K\\
&\Leftrightarrow \left|x^2 - y^2\right| < \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|, x \neq y, x,y \in \left[0, \frac{1}{4}\right]\\
&\Leftrightarrow (x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}\,) < 1, \quad \text{што је тачно за } x \neq y,\ x,y \in \left[0, \frac{1}{4}\right]. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Последица 3.1. *Ако је у претходној теореми* $I = i_X$ *(идентичко пресликавање) и* $K = X$ *компактан скуп добијамо Теорему* 3.1.

Дефиниција 3.1 ([10],[54],[15])**.** Нека је (X,d) метрички простор и $T : X \to X$. Пресликавање T је контрактивно ако задовољава услов:

$$
d(Tx,Ty) < d(x,y),\ x \neq y,\ x,y \in X. \tag{3}
$$

Пресликавање T је уопштено контрактивно ако задовољава услов (где $x \neq y,\ x,y \in X$)

$$
d(Tx,Ty) < \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}, \tag{4}
$$

Очигледно да ако је T контрактивно пресликавање тада је оно и уопштено контрактивно (тј. (3) $\Rightarrow$ (4)), али обрнуто није тачно.

Пример 3.4. Нека је $X = [0,4]$ скуп реалних бројева са уобичајеном метриком $d(x,y) = |x-y|$ и $T : X \to X$ пресликавање дефинисано помоћу

$$
Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0\\ \frac{x}{3}, & x \in (0,3]\\ \frac{x}{4}, & x \in (3,4]. \end{cases} \tag{5}
$$

Тада пресликавање T задовољава услов (4) али не (3). Да задовољава услов (4), видети [54]. Да не задовољава услов (3) можемо закључити тако што пресликавање T дефинисано помоћу (5) није непрекидно на X (прекиди у тачкама $x = 0$ и $x = 3$) док контрактивна пресликавања (тј. која задовољавају услов (3)), су нужно непрекидна.

У делу који следи доказујемо уопштење теореме Немыцкий-а.

Теорема 3.3. *Нека је* $T : X \to X$ *непрекидно пресликавање компактног метричког простора* (X,d)*. Ако* T *задовољава услов* (4) *тада оно има јединствену фиксну тачку.*

Доказ. Ставимо $f(x) = d(x, Tx)$, $x \in X$. Тада је $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна функција, пошто је T непрекидно пресликавање. Како је X компактан метрички простор тада постоји $u \in X$ тако да је

$$f(u) = d(u, Tu) = \min\big\{f(x) : x \in X\big\}. \tag{6}$$

Ако претпоставимо да за свако $x \in X$ важи $x \neq Tx$, што је еквивалентно са $f(u) > 0$ тј. $d(u, Tu) > 0$ можемо да применимо услов (4):

$$\begin{aligned} d(TuT^2u) &= d(Tu, T(Tu)) \\ &< \max\left\{d(u, Tu), d(u, Tu), d(Tu, T(Tu)), \frac{d(u, T(Tu)) + d(Tu, Tu)}{2}\right\} \\ &= \max\left\{d(u, Tu), d(Tu, T^2u), \frac{d(u, T^2u)}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Како је

$$d(u, T^2u) \leq d(u, Tu) + d(Tu, T^2u) \leq 2\max\big\{d(u, Tu), d(Tu, T^2u)\big\}$$

тј.

$$\frac{d(u, T^2u)}{2} \leq \max\big\{d(u, Tu), d(Tu, T^2u)\big\}$$

па је

$$d(Tu, T^2u) < \max\big\{d(u, Tu), d(Tu, T^2u)\big\}. \tag{7}$$

На основу (6) и (7) закључујемо да је

$$d(Tu, T^2u) < d(Tu, T^2u),$$

што је контрадикција. Дакле, $f(u) = 0$, односно $Tu = u$. Тиме је доказано постојање фиксне тачке. Докажимо јединственост фиксне тачке. Претпоставимо да T има још једну фиксну тачку v ($Tv = v$) и $v \neq u$. Тада је на основу (4):

$$\begin{aligned} d(u, v) = d(Tu, Tv) &< \max\left\{d(u, v), d(u, Tu), d(v, Tv), \frac{d(u, Tv) + d(v, Tu)}{2}\right\} \\ &= \max\left\{d(u, v), d(u, u), d(v, v), \frac{d(u, v) + d(v, u)}{2}\right\} \\ &= d(u, v), \end{aligned}$$

што је контрадикција. Према томе, пресликавање T има јединствену фиксну тачку. □

Последица 3.2. *Пошто је у теореми* Немыцкий*-ја T непрекидно пресликавање и како је*

$$d(x,y) \leq \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$$

одмах добијамо Теорему 3.1.

Последица 3.3 (Fisher)**.** *Ако је (X,d) компактан метрички простор и $T : X \to X$ непрекидно пресликавање које задовољава услов*

$$d(Tx,Ty) < \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}, \quad x \neq y, \quad x,y \in X$$

тада T има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Пошто је

$$\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2} \leq \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$$

то из Теореме 3.1 добијамо Fisher-ову теорему ([57]).

Услов да T мора бити непрекидно пресликавање у исказу Теореме 3.3 се не може одстранити, што показује Пример 3.4. Овде прекидно пресликавање T које пресликава компактан метрички простор $X = [0,4]$ нема фиксну тачку. У следећој теореми услов непрекидности пресликавања је ослабљен захтевом да је T орбитално непрекидно, а компактност простора је замењена постојањем итерираног низа који има конвергентан подниз уз захтев да T задовољава услов (4), а не услов (3) као у исказу теореме Edelstein-а ([13]).

Дефиниција 3.2 ([53])**.** Пресликавање $T : X \to X$ метричког простора (X,d) је T-орбитално непрекидно у тачки $x \in X$ ако

$$T^{n_i}x \to u \ (i \to \infty) \Rightarrow T(T^{n_i}x) \to Tu \ (i \to \infty), \quad u \in X$$

за сваки строго растући низ $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ природних бројева.

Пресликавање T је T-орбитално непрекидно на простору X ако је T-орбитално непрекидно у свакој тачки x простора X.

Теорема 3.4. *Нека је (X,d) метрички простор и $T : X \to X$ пресликавање које задовољава услов* (4)*. Ако постоји тачка $x_0 \in X$ тако да низ $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ садржи конвергентан подниз $(T^{n_i}x_0)_{i\in\mathbb{N}}$ и T је T-орбитално непрекидно у тачки x_0, онда $u = \lim\limits_{i\to\infty} T^{n_i}x_0$ је јединствена фиксна тачка пресликавања T.*

Доказ. Размотрићемо два случаја који се међусобно искључују:

(i) Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да $T^{n_0+1}x_0 = T^{n_0}x_0$;

(ii) За свако $n \in \mathbb{N}$ је $T^{n+1}x_0 \neq T^n x_0$, тј. $d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) > 0$.

У случају (i) $T^{n_0}x_0 = u$ је фиксна тачка, јер је $Tu = u$. Размотримо случај (ii)

$$\begin{aligned}
&d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0) = d(T(T^n x_0), T(T^{n+1}x_0)) \\
&< \max\Big\{ d(T^n x_0, T^{n+1}x_0), d(T^n x_0, T(T^n x_0)), d(T^{n+1}x_0, T(T^{n+1}x_0)), \\
&\quad \frac{d(T^n x_0, T(T^n x_0)) + d(T^{n+1}x_0, T(T^n x_0))}{2} \Big\} \\
&= \max\Big\{ d(T^n x_0, T^{n+1}x_0), d(T^n x_0, T^{n+1}x_0), d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0), \\
&\quad \frac{d(T^n x_0, T^{n+2}x_0) + d(T^{n+1}x_0 T^{n+1}x_0)}{2} \Big\} \\
&= \max\Big\{ d(T^n x_0, T^{n+1}x_0), d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0), \frac{d(T^n x_0, T^{n+2}x_0)}{2} \Big\}.
\end{aligned}$$

Пошто је

$$\begin{aligned}
d(T^n x_0, T^{n+2}x_0) &\leq (T^n x_0, T^{n+1}x_0) + d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0) \\
&\leq 2\max\left\{ d(T^n x_0, T^{n+1}x_0), d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0) \right\},
\end{aligned}$$

односно

$$\frac{d(T^n x_0, T^{n+2}x_0)}{2} \leq \max\left\{ d(T^n x_0, T^{n+1}x_0), d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0) \right\},$$

налазимо

$$d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0) < \max\left\{ d(T^n x_0, T^{n+1}x_0), d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0) \right\},$$

а одатле је

$$d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0) < d(T^n x_0, T^{n+1}x_0), \tag{8}$$

пошто је $d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0) < d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0)$ немогуће.

Тиме смо доказали да је низ $(d(T^n x_0, T^{n+1}x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ строго опадајући, а пошто је ненегативан, постоји

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n x_0, T^{n+1}x_0).$$

Како итерирани низ $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ има конвергентан подниз $(T^{n_i} x_0)_{i\in\mathbb{N}}$, тј. важи $\lim\limits_{i\to\infty} T^{n_i} x_0 = u$ и пошто је T орбитално непрекидно пресликавање, онда следи $\lim\limits_{i\to\infty} T(T^{n_i} x_0) = Tu$ и $\lim\limits_{i\to\infty} T(T^{n_i+1} x_0) = T(Tu)$ па је

$$\lim_{i\to\infty} d(T^{n_i} x_0, T^{n_i+1} x_0) = d(u, Tu) \text{ и } \lim_{i\to\infty} d(T^{n_i+1} x_0, T^{n_i+2} x_0) = d(Tu, T^2 u).$$

С обзиром да су $(d(T^{n_i} x_0, T^{n_i+1} x_0))_{i\in\mathbb{N}}$ и $(d(T^{n_i+1} x_0, T^{n_i+2} x_0))_{i\in\mathbb{N}}$ поднизови конвергентног низа $(d(T^n x_0, T^{n+1} x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ закључујемо да је

$$d(u, Tu) = d(Tu, T^2 u). \tag{9}$$

Ако је $Tu \neq u$ истим поступком како смо доказали неједнакост (8) добијамо

$$d(Tu, T^2 u) < d(u, Tu)$$

што је немогуће с обзиром на (9). Према томе, $Tu = u$. Јединственост фиксне тачке u доказује се исто као у Теореми 3.3. □

Коментар. Теорема 3.4. уопштава EDELSTEIN-ову теорему ([13]) у којој се само захтева да пресликавање T буде контрактивно, а уместо непрекидности пресликавања T (које је имплицитно садржано у исказу EDELSTEIN-ове теореме) захтева се T-орбитална непрекидност.

Теорема 3.5. *Нека је (X, d) компактан метрички простор и нека су $S, T : X \to X$ непрекидна пресликавања која задовољавају услов*

$$d(Sx, Ty) < \max\{d(x,y), d(x,Ty), d(y,Sx)\}, \text{ за свако } x, y \in X \tag{10}$$

за које је десна страна неједнакости (10) *позитивна, онда пресликавања S и T имају јединствену заједничку фиксну тачку која је и јединствена фиксна тачка за пресликавања S и T одвојено.*

Доказ 1. Прво ћемо показати да пресликавања S и T имају заједничку фиксну тачку, а затим доказати њену јединост.

Нека је

$$M(x,y) = \max\{d(x,y), d(x,Ty), d(y,Sx)\}, \text{ за свако } x, y \in X.$$

Размотримо могућности:

(i) За неке $u_0, v_0 \in X$, $M(u_0, v_0) = 0$. Тада је

$$\begin{aligned} M(u_0, v_0) = 0 &\Leftrightarrow d(u_0, v_0) = 0, d(u_0, Tv_0) = 0, d(v_0, Su_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow u_0 = v_0, Tv_0 = u_0, Su_0 = v_0 \\ &\Leftrightarrow Su_0 = Tu_0 = u_0, \end{aligned}$$

тј. пресликавања S и T имају заједничку фиксну тачку u_0.

(ii) За свако $x, y \in X$, $M(x, y) > 0$. Тада је

$$F(x, y) := \frac{d(Sx, Ty)}{M(x, y)}, \quad F : X^2 \to [0, 1)$$

непрекидна функција, пошто су S и T непрекидна пресликавања. Како је X компактан скуп, такав је и X^2, па је непрекидна функција F дефинисана на компактном скупу X^2, следствено постоји

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \max\left\{F(x, y) : (x, y) \in X^2\right\} \\ &= F(x_0, y_0) < 1, \text{ за неко } (x_0, y_0) \in X^2, \end{aligned}$$

тј. имамо да је

$$d(Sx, Ty) \leq \lambda_0 M(x, y) \text{ за свако } x, y \in X.$$

На основу теореме (Theorem 4.19 [54]) следи да пресликавања S и T имају заједничку фиксну тачку u, односно $Su = Tu = u$.

Претпоставимо да пресликавањае T има још једну фиксну тачку v $(v \neq u)$ тако да је $v = Tv$. Имамо

$$\begin{aligned} 0 < d(u, v) = d(Su, Tv) &< \max\left\{d(u, v), d(u, Tv), d(v, Su)\right\} \\ &= \max\left\{d(u, v), d(u, v), d(u, v)\right\} \\ &= d(u, v) \end{aligned}$$

што је контрадикција. Према томе, пресликавање T осим фиксне тачке u нема других фиксних тачака. Слично доказујемо, да пресликавање S осим фиксне тачке u нема других фиксних тачака.

Тиме смо доказали да пресликавања S и T имају јединствену фиксну тачку и која је уједно и једина фиксна тачка одвојено за прерсликавања S и T. $\square$

Доказ 2. Постоје две могућности које могу да наступе и које искључују једна другу:

(i) Пресликавања S и T имају заједничку фиксну тачку;

(ii) Пресликавања S и T немају заједничку фиксну тачку, што значи да је $M(x, y) > 0$ за свако $x, y \in X$. (За ово видети Доказ 1 (i))

Ако је задовољен услов (i) доказ је завршен, треба још само доказати јединост. Ако наступи (ii) претпоставимо да пресликавања S и T задовољавају услов

$$(\exists \lambda \in [0, 1))(\forall x, y \in X)\, d(Sx, Ty) \leq \lambda M(x, y), \tag{11}$$

али тада пресликавања S и T на основу (Theorem 4.19 [54]) имају заједничку фиксну тачку, што је претпоставком (ii) искључено. Према томе тачан је услов $\neg$ (11), односно

$$(\forall \lambda \in [0, 1))(\exists x, y \in X)\, d(Sx, Ty) > \lambda M(x, y) \tag{12}$$

и тада можемо изабрати низ $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ тако да $\lambda_n \in [0, 1)$ и $\lambda_n \to 1 - 0$ и низове тачака (x_n) и (y_n) у X тако да је

$$d(Sx_n, Ty_n) > \lambda_n M(x_n, y_n).$$

Пошто је (x_n) низ у компактном метричком простору X то постоји подниз $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ такав да $x_{n(k)} \to x_0$ $(k \to \infty)$. Сада је подниз $(y_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ низа (y_n) низ у компактном метричком простору па он има подниз који ради једноставности рачуна поново означавамо са $(y_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ тако да $y_{n(k)} \to y_0$ $(k \to \infty)$ и имамо

$$d(Sx_{n(k)}, Ty_{n(k)}) > \lambda_{n(k)} M(x_{n(k)}, y_{n(k)}), \quad k = 1, 2, \ldots).$$

Ако у последњој неједнакости пустимо да $k \to \infty$ и искористимо непрекидност пресликавања S и T добијамо

$$d(Sx_0, Ty_0) \geq M(x_0, y_0),$$

што је контрадикција услову (10) с обзиром да је $M(x_0, y_0) > 0$.

Следствено, могућност (ii) не може да наступи, па пресликавања S и T имају заједничку фиксну тачку.

Јединост фиксне тачке аналогно се доказује као код Доказа 1. $\square$

Последица 3.4. *Ако је $S = T$, тада добијамо уопштење теореме* Немыцкий-*а пошто је*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \leq \max\{d(x, y), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \text{ за } x \neq y.$$

Последица 3.5. *Ако је $S = T$ добијамо уопштење теореме* Fisher-*а* (Последица 3.3), *пошто је*

$$d(Tx, Ty) < \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \leq \max\{d(x, y), d(x, Ty), d(y, Tx)\}, \text{ за } x \neq y.$$

Да бисмо исказали следећу теорему потребан нам је појам слабо комутирајућих (комутативних) пресликавања, појам који је увео S. Sessa [47].

Дефиниција 3.3 ([47]). Нека је (X, d) метрички простор. За два пресликавања $g, f : X \to X$ кажемо да су слабо комутирајућа (комутативна) ако је

$$d(fgx, gfx) \leq d(fx, gx), \text{ за свако } x \in X.$$

Теорема 3.6. *Нека је (X, d) компактан метрички простор и нека су $f, g : X \to X$ непрекидна пресликавања која слабо комутирају. Ако је $g(X) \subseteq f(X)$ и*

$$d(gx, gy) < M(x, y) \tag{13}$$

где је[1]

$$M(x, y) = \max\big\{d(fx, fy), d(fx, gx), d(fy, gy), d(fx, gy), d(fy, gx)\big\}$$

и (13) *важи за свако $x, y \in X$ за које је десна страна неједнакости* (13) *позитивна, тада f и g имају јединствену заједничку фиксну тачку.*

Доказ 1. Претпоставимо да f и g немају заједничку фиксну тачку, тада је $d(fx, gx) > 0$ за свако $x \in X$. У супротном, ако постоји $x_0 \in X$ тако да је $fx_0 = gx_0 \neq x_0$, тада је

$$\begin{aligned} M(gx_0, x_0) = \max\big\{&d(fgx_0, fx_0), d(fgx_0, ggx_0), d(fx_0, gx_0), \\ &d(fgx_0, gx_0), d(fx_0, ggx_0)\big\}. \end{aligned} \tag{14}$$

[1] Ако је $M(x, y) = 0$ за неке $x, y \in X$, тада је $gx = gy$, тј. $d(gx, gy) = 0$, па имамо једнакост у (13).

Пошто f и g слабо комутирају, тада је

$$d(fgx_0, gfx_0) \leq d(fx_0, gx_0) = 0 \Rightarrow fgx_0 = gfx_0 \text{ и } fx_0 = gx_0 \tag{15}$$

па из (15) следи

$$fgx_0 = ggx_0. \tag{16}$$

Ако (15) и (16) заменимо у израз (14) добијамо

$$\begin{aligned} M(gx_0, x_0) &= \max\left\{d(ggx_0, gx_0), d(ggx_0, ggx_0), d(gx_0, gx_0), d(ggx_0, gx_0), d(gx_0, ggx_0)\right\} \\ &= d(ggx_0, gx_0). \end{aligned}$$

Ако претпоставимо да је $ggx_0 \neq gx_0$, тј. $d(ggx_0, gx_0) > 0$ на основу (13) налазимо

$$d(gx_0, ggx_0) < M(x_0, gx_0) = d(ggx_0, gx_0),$$

што је контрадикција. Према томе имамо

$$ggx_0 = gx_0. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следи да је

$$fgx_0 = ggx_0 = gx_0,$$

тј. gx_0 је заједничка фиксна тачка за пресликавања f и g што је контрадикција са претпоставком да f и g немају заједничку фиксну тачку. Следствено имамо

$$d(fx, gx) > 0, \text{ за свако } x \in X.$$

Пошто је $M(x, y) \geq d(fx, gx)$ за свако $x, y \in X$, следи да је

$$M(x, y) > 0, \text{ за свако } x, y \in X.$$

Сада можемо дефинисати функцију $F : X^2 \to [0, 1)$ помоћу

$$F(x, y) := \frac{d(gx, gy)}{M(x, y)} < 1, \text{ за свако } x, y \in X. \tag{18}$$

Пошто су f и g непрекидна пресликавања, функција F је непрекидна, на компактном скупу X^2 па постоји

$$\max\{F(x, y) : x, y \in X\} = F(x_0, y_0) < 1, (x_0, y_0) \in X^2. \tag{19}$$

Ако ставимо $\lambda_0 = F(x_0, y_0)$, из (18) и (19) имамо

$$d(gx, gy) \le \lambda_0 M(x, y), \text{ за свако } x, y \in X.$$

Тада на основу [10] (Theorem 2.1) и Remarks [47] следи да пресликавања f и g имају заједничку фиксну тачку, што је контрадикција са претпоставком да f и g немају заједничку фиксну тачку. Дакле, можемо да закључимо да пресликавања f и g имају заједничку фиксну тачку.

Докажимо јединост заједничке фиксне тачке.

Претпоставимо да f и g имају две различите заједничке фиксне тачке, на пример u и v, тј. $d(u, v) > 0$. Тада из (13) имамо

$$\begin{aligned} d(u, v) = d(gu, gv) &< \max\big\{d(fu, fv), d(fu, gu), d(fv, gv), d(fu, gv), d(fv, gu)\big\} \\ &= \max\big\{d(u, v), d(u, u), d(v, v), d(u, v), d(v, u)\big\} \\ &= d(u, v), \end{aligned}$$

што је контрадикција. □

Напомена. Приметимо, да пошто је X компактан метрички простор тада $\operatorname{diam}(X) < \infty$, па је

$$\operatorname{diam}\big\{f^n x : x \in X, n = 0, 1, 2, \dots\big\} \le \operatorname{diam}(X) < \infty,$$

што се експлицитно претпоставља у исказу Theorem 4 ([47]) и користи у Remarks ([47]).

Доказ 2. За пресликавања f и g постоје две могућности:

(i) да задовољавају услов

$$(\exists \lambda \in [0, 1))(\forall x, y \in X)\, d(gx, gy) \le \lambda M(x, y), \tag{20}$$

тада на основу Theorem 2.1 ([10]) пресликавања f и g имају јединствену заједничку фиксну тачку.

(ii) не задовољавају услов (20), већ услов

$$(\forall \lambda \in [0, 1))(\exists x, y \in X)\, d(gx, gy) > \lambda M(x, y), \tag{21}$$

али тада можемо на основу (21) да одредимо низ (λ_n) тако да $\lambda_n \to 1 - 0$ $(n \to \infty)$ и низове тачака (x_n) и (y_n) у X тако да је

$$d(gx_n, gy_n) > \lambda_n M(x_n, y_n).$$

Тада, пошто је X компактан простор постоје конвергентни поднизови $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ и $(y_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ такви да $x_{n(k)} \to x_0$ и $y_{n(k)} \to y_0$ $(k \to \infty)$ и

$$d(gx_{n(k)}, gy_{n(k)}) > \lambda_{n(k)} M(x_{n(k)}, y_{n(k)}), \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Ако у (22) пустимо да $k \to \infty$ и с обзиром на непрекидност пресликавања f и g добијамо

$$d(gx_0, gy_0) \geq M(x_0, y_0).$$

Размотримо последњу неједнакост. Разликоваћемо ове могућности:

1° $M(x_0, y_0) > 0$, тада је

$$d(gx_0, gy_0) > M(x_0, y_0) > 0,$$

што је немогуће с обзиром на услов (13).

2° $M(x_0, y_0) = 0$. Тада из

$$M(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow fx_0 = fy_0 = gx_0 = gy_0,$$

и сада се као у Доказу 1 показује да је $u = fx_0 = gx_0$ заједничка фиксна тачка за пресликавања f и g. Из анализе могућности (i) и (ii) закључујемо да пресликавања f и g имају заједничку фиксну тачку.

Јединост заједничке фиксне тачке пресликавања f и g доказује се као у Доказу 1. $\square$

Имамо следеће последице.

Последица 3.6. *Пошто је*

$$d(fx, fy) \leq M(x, y),$$

добијамо незнатно модификовану Теорему 3.2.

Последица 3.7. *Ако у претходној теореми ставимо $f = i_X$ пошто је*

$$\max\left\{d(x, y), d(x, gx), d(y, gy), \frac{d(x, gy) + d(y, gx)}{2}\right\} \leq M(x, y)$$

добијамо Теорему 3.3.

Последица 3.8. *Ако у претходној теореми ставимо* $f = i_X$ *и пошто је*

$$\frac{d(x,gx)+d(y,gy)}{2} \le M(x,y),$$

добијамо теорему Fisher-*а* [56].

Како је

$$\frac{d(x,gy)+d(y,gx)}{2} \le M(x,y)$$

добијамо другу теорему Fisher-*а* [57] (*видети Последицу* 3.3).

Сада ћемо дати други доказ теореме која је доказана у чланку [59] као Theorem 4.

Теорема 3.7. *Нека је* (X,d) *компактан метрички простор,* $p,q \in \mathbb{N}$ *и* $T : X \to X$ *непрекидно пресликавање које задовољава услов*

$$\begin{aligned} d(T^p x, T^q y) < \max\big\{&d(T^r x, T^s y), d(T^r x, T^{r'} x), \\ &d(T^s y, T^{s'} y) : 0 \le r, r' \le p, 0 \le s, s' \le q\big\} \end{aligned} \tag{23}$$

за свако $x, y \in X$ *за које је десна страна неједнакости* (23) *позитивна. Тада* T *има јединствену фиксну тачку.*

Доказ. Нека је

$$M(x,y) := \max\big\{d(T^r x, T^s y), d(T^r x, T^{r'} x), d(T^s y, T^{s'} y) : 0 \le r, r' \le p, 0 \le s, s' \le q\big\}.$$

Претпоставимо да пресликавање T нема фиксну тачку, тј. да је

$$Tx \ne x, \text{ за свако } x \in X,$$

што је еквивалентно услову

$$d(Tx, x) > 0, \text{ за свако } x \in X.$$

Пошто је $M(x,y) \ge d(Tx,x)$, то је

$$M(x,y) > 0, \text{ за свако } x, y \in X. \tag{24}$$

Користећи (24) можемо посматрати функцију

$$F(x,y) = \frac{d(T^p x, T^q y)}{M(x,y)}, \text{ за } x, y \in X. \tag{25}$$

Тада $F : X^2 \to [0,1)$. Функција F је непрекидна пошто је такво пресликавање T, а $F(x,y) < 1$ за свако $x, y \in X$, због услова (23).

Дакле, имамо непрекидну функцију F дефинисану на компактном метричком простору X^2, па постоји $(x_0, y_0) \in X^2$ тако да је

$$\max \Big\{ F(x,y) : x, y \in X \Big\} = F(x_0, y_0) < 1. \tag{26}$$

Ако ставимо $F(x_0, y_0) = \lambda_0$ из (25) и (26) налазимо

$$d(T^p x, T^q y) \leq \lambda_0 M(x,y), \text{ за свако } x, y \in X.$$

Применом теореме Fisher-а (Theorem 2 [59]) следи да пресликавање T има јединствену фиксну тачку на X, што је контрадикција са претпоставком да T нема фиксних тачака. Према томе, закључујемо да пресликавање T има бар једну фиксну тачку.

Докажимо јединост фиксне тачке.

Претпоставимо да прсликавање T има две различите фиксне тачке x и y. Пошто су x и y фиксне тачке пресликавања T, добијамо да је $T^r x = x, T^s y = y$ за свако $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, па је тада $M(x,y) = d(x,y) > 0$, а из (23) добијамо

$$d(x,y) < d(x,y),$$

што је контрадикција. □

Последица 3.9. *Ако је (X,d) компактан метрички простор, $p, q \in \mathbb{N}$ и $T : X \to X$ непрекидно пресликавање које задовољава услов*

$$d(T^p x, T^q y) < d(x,y), \text{ за свако } x \neq y, \quad x, y \in X,$$

тада пресликавање T има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Пошто је $d(x,y) \leq M(x,y)$, за свако $x, y \in X$ доказ непосредно следи из претходне теореме. □

Ако је $p = q$ у горњем исказу Последице 3.9 не мора да се захтева непрекидност пресликавања T. Дакле важи:

Теорема 3.8. *Ако је* (X,d) *компактан метрички простор и* $p \in \mathbb{N}$ *и*

$$d(T^p x, T^p y) < d(x,y), \text{ за свако } x \neq y, x, y \in X \tag{1}$$

Тада пресликавање T *има јединствену фиксну тачку.*

Доказ. Применом теореме Немыцкий-а пресликавање T^p има јединствену фиксну тачку, рецимо $u \in X$. Тада из

$$T^p u = u \Rightarrow T(T^p u) = Tu \Leftrightarrow T^p(Tu) = Tu,$$

следи да је Tu фиксна тачка за пресликавање T^p. Из јединствености фиксне тачке u за пресликавање T^p добијамо да је $Tu = u$. □

Сада ћемо дати пример пресликавања T које је прекидно као и све његове итерације T^r $(1 \leq r \leq p-1)$, али је T^p непрекидно пресликавање.

Пример 3.5. Нека је $p \in \mathbb{N}$ и $X = [0,p]$ метрички простор са уобичајеном метриком. Дефинишимо $T : X \to X$ на следећи начин

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \\ \vdots & \\ k, & x \in (k, k+1] \\ \vdots & \\ p-1, & x \in (p-1, p]. \end{cases}$$

Тада је

$$T^r(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,r] \\ 1, & x \in (r, r+1] \\ 2, & x \in (r+1, r+2] \\ \vdots & \\ p-r, & x \in (p-1, p] \end{cases}$$

и $T^p(x) = 0$, за $x \in [0,p]$.

Пресликавање T задовољава услов горње теореме, X је компактан метрички простор, па има $0 \in X$ као фиксну тачку, док је пресликавање T прекидно.

Напомена. За $p = 2$ и Banach-ову контракцију разматрано је у [9].

4. Уопштења неких теорема о фиксним тачкама у b-метричким просторима и парцијално уређеним b-метричким просторима

Аксиому троугла у дефиницији метричког простора ослабио је 1993.г. Czerwik ([62]) са циљем генерализације Banach-овог принципа контракције и увео појам b-метричког простора. Пре појаве чланка [62] Bakhtin је у [5] користио ове просторе под другим називом (видети и [22]).

Следеће дефиниције и резултати биће нам потребни у наставку ове главе.

Дефиниција 4.1. ([43]) Нека је X непразан скуп и $s \geq 1$ реалан број. Функција $d : X^2 \to [0, \infty)$ назива се b-метрика на скупу X ако за све $x, y, z \in X$ важе следеће релације:

(b_1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(b_2) $d(x, y) = d(y, x)$

(b_3) $d(x, z) \leq s\big[d(x, y) + d(y, z)\big]$.

У овом случају пар (X, d) назива се b-метрички простор. Ако је пар $(X, \preceq)$ парцијално уређен скуп онда се (X, d) назива парцијално уређен b-метрички простор и означава $(X, \preceq, d)$. Константу s из аксиоме (b_3) називамо параметром b-метричког простора.

За $s = 1$ b-метрички простор је управо метрички простор, тако да b-метрички простори садрже метричке просторе међутим, постоје b-метрички простори који нису метрички.

Пример 4.1. ([35]) Нека је $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $d : X^2 \to [0, \infty)$ функција дефинисана на следећи начин:

$$d(x_1, x_2) = t \geq 2,\ d(x_1, x_3) = d(x_1, x_4) = d(x_2, x_3) = d(x_3, x_4) = 1$$

$$d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i) \text{ за све } i, j = 1, 2, 3, 4 \text{ и } d(x_i, x_i) = 0 \text{ за } i = 1, 2, 3, 4.$$

Онда је

$$d(x_i, x_j) \leq \frac{t}{2}\big[d(x_i, x_k) + d(x_k, x_j)\big] \text{ за } i, j, k = 1, 2, 3, 4,$$

па за $s = \dfrac{t}{2} > 1$ очигледно не важи аксиома троугла у дефиницији метричког простора, тј. d није метрика на скупу X али је d b-метрика на истом.

Дајемо пример b-метричких простора од којих неке користимо у наставку.

Пример 4.2. У скуп ограничених низова $X = \big\{x = (\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} : \sup\limits_{\nu\geq 1} |\xi_\nu| < +\infty,\ \xi_\nu \in \mathbb{R}\big\}$ уведимо растојање

$$d(x,y) = \sup_{\nu\geq 1} |\xi_\nu - \eta_\nu|^p, \quad (p \geq 1). \tag{1}$$

Тада је (X,d) b-метрички простор са параметром $s = 2^{p-1}$.

Доказ. Аксиоме (b_1) и (b_2) су очигледне. Да бисмо доказали (b_3) користимо неједнакост

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), a, b \geq 0 \tag{2}$$

која непосредно следи из JENSEN-ове неједнакости примењене на функцију $t \to t^p$ за $t \geq 0$ и $p \geq 1$.

Нека $x = (\xi_\nu), y = (\eta_\nu)$ и $z = (\zeta_\nu)$ припадају скупу X. Тада имамо редом

$$\begin{aligned}
|\xi_\nu - \eta_\nu|^p &\leq \big(|\xi_\nu - \zeta_\nu| + |\zeta_\nu - \eta_\nu|\big)^p \\
&\leq 2^{p-1}\big(|\xi_\nu - \zeta_\nu|^p + |\zeta_\nu - \eta_\nu|^p\big) \text{ (применом неједнакости (2))} \\
&\leq 2^{p-1}\big(\sup_{\nu\geq 1} |\xi_\nu - \zeta_\nu|^p + \sup_{\nu\geq 1} |\zeta_\nu - \eta_\nu|^p\big) \\
&= 2^{p-1}\big(d(x,z) + d(z,y)\big),
\end{aligned}$$

а одатле је

$$\sup_{\nu\geq 1} |\xi_\nu - \eta_\nu|^p \leq 2^{p-1}\big(d(x,z) + d(z,y)\big)$$

односно

$$d(x,y) \leq 2^{p-1}\big(d(x,z) + d(z,y)\big),$$

тј. (X,d) је b-метрички простор са параметром $s = 2^{p-1}$. $\square$

Напомена. Приметимо да је за $0 < p \leq 1$ са (1) дефинисана метрика на скупу X ограничених низова.

Пример 4.3. У скуп $C[a,b]$ свих непрекидних функција на сегменту $[a,b]$ можемо увести b-метрику са

$$d(x,y) = \max_{a\leq x\leq b} \big|x(t) - y(t)\big|^p \quad (p \geq 1)$$

са параметром $s = 2^{p-1}$.

Доказ је сличан као доказ у Примеру 4.2.

Пример 4.4. ([45]) У скуп $C[0,1]$ свих непрекидних функција на сегменту $[0,1]$ b-метрику можемо увести на следећи начин

$$d(x,y) = \int_0^1 \left|x(t) - y(t)\right|^2 \mathrm{d}t.$$

У овом простору је параметар $s = 2$.

Пример 4.5. У скуп $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ дефинишемо $\dfrac{1}{\infty} = 0$ и

$$d(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{ако је } m = n \\ \left|\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}\right| & \text{ако су: } m, n \text{ парни или } m \text{ парно, } n = \infty \text{ или } m = \infty, n \text{ парно} \\ 5 & \text{ако су } m, n \text{ непарни и } m \neq n \\ \dfrac{5}{2} & \text{ако је: } m \text{ непарно, } n = \infty \text{ или } m = \infty, n \text{ непарно} \\ 2 & \text{ако је: } m \text{ парно, } n \text{ непарно или } m \text{ непарно, } n \text{ парно,} \end{cases}$$

тада је $(\mathbb{N}^*, d)$ b-метрички простор за који важи

$$d(m,n) \leq \frac{5}{4}\big(d(m,p) + d(p,n)\big), \text{ за свако } m, n, p \in \mathbb{N}^*$$

а параметар је $s = \dfrac{5}{4}$.

Доказ. Разматрањем свих могућности за $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ доказ се једноставно изводи. □

Напомена. У [21] дат је сличан пример.

Пример 4.6. Нека $\mathbb{C}^n$ означава скуп свих уређених $n-$торки комплексних бројева и нека је функција $d : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$ дефинисана помоћу

$$d(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^p \right\}^{1/p} \quad (0 < p < 1) \tag{3}$$

где $x = (\xi_\nu) \in \mathbb{C}^n$, $y = (\eta_\nu) \in \mathbb{C}^n$. Тада је $(\mathbb{C}^n, d)$ b-метрички простор са параметром $s = 2^{1/p}$.

Доказ. Релације (b_1) и (b_2) у Дефиницији 1 су непосредне последице релације (3). За $0 < p < 1$ имамо

$$|a_i+b_i| \le |a_i|+|b_i| \Rightarrow |a_i+b_i|^p \le \big(|a_i|+|b_i|\big)^p \le |a_i|^p+|b_i|^p.^{(1)} \tag{4}$$

Применом неједнакости (4) налазимо

$$\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p \le \sum_{i=1}^n |a_i|^p + \sum_{i=1}^n |b_i|^p \le 2\max\Big\{\sum_{i=1}^n |a_i|^p, \sum_{i=1}^n |b_i|^p\Big\},$$

односно

$$\begin{aligned}\Big\{\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\Big\}^{1/p} &\le 2^{1/p}\max\bigg\{\Big\{\sum_{i=1}^n |a_i|^p\Big\}^{1/p}, \Big\{\sum_{i=1}^n |b_i|^p\Big\}^{1/p}\bigg\} \\ &\le 2^{1/p}\bigg(\Big\{\sum_{i=1}^n |a_i|^p\Big\}^{1/p} + \Big\{\sum_{i=1}^n |b_i|^p\Big\}^{1/p}\bigg).\end{aligned}$$

Ако у последњој неједнакости ставимо $a_i = \xi_i - \zeta_i, b_i = \zeta_i - \eta_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ добијамо

$$d(x,y) \le 2^{1/p}\big(d(x,z)+d(z,y)\big),$$

где је $z = (\zeta_i) \in \mathbb{C}^n$. □

Дефиниција 4.2. ([7]) Нека је (X,d) b-метрички простор. Низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у X је

1° b-конвергентан ако постоји $x \in X$ тако да $d(x_n, x) \to 0$ кад $n \to \infty$. Тада пишемо $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ или $x_n \to x$ $(n \to \infty)$;

2° b-Cauchy-јев ако $d(x_n, x_m) \to 0$ кад $m, n \to \infty$.

Теорема 4.1. (Remark 2.1 [7]) *Ако је (X,d) b-метрички простор тада важе следећа тврђења:*

1° *b-конвергентан низ конвергира јединственој тачки у X;*

2° *Сваки b-конвергентан низ је b-Cauchy-јев низ;*

3° *У општем случају b-метрика није непрекидна функција.*

---

(1) Неједнакост (4) $\Leftrightarrow$ $(1+t)^p \le 1+t^p$, за $t = \left|\dfrac{b_i}{a_i}\right| \ge 0$. Ако уочимо функцију $f(t) = 1+t^p-(1+t)^p, t \ge 0$ имамо

$$\begin{aligned}f(t)-f(0) &= tf'(\xi), \quad 0<\xi<t \\ &= t\cdot p\Big[\frac{1}{\xi^{1-p}} - \frac{1}{(1+\xi)^{1-p}}\Big] > 0,\end{aligned}$$

а пошто је $f(0)=0$ добијамо $f(t) \ge 0$, за $t \ge 0$ тј. горњу неједнакост (4).

Доказ. Тврђења 1° и 2° доказују се исто као код метричких простора.

3° Ако уочимо Пример 4.5 и низ $x_n = 2n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, тада $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, пошто је

$$d(x_n, \infty) = d(2n, \infty) = \frac{1}{2n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Међутим,

$$d(x_n, 1) = d(2n, 1) = 2 \text{ и } d(\infty, 1) = \frac{5}{2}$$

па је $\lim_{n\to\infty} d(x_n, 1) \neq d(\infty, 1)$.

b-метрике у осталим примерима су непрекидне функције. □

Дефиниција 4.3. ([27]) b-метрички простор је b-комплетан ако сваки b-Cauchy-јев низ у X конвергира.

b-метрички простори наведени у Примерима 4.1, 4.2, 4.3, 4.5 и 4.6 су b-комплетни, међутим простор из Примера 4.4 није b-комплетан. Заиста, ако уочимо низ (x_n) непрекидних функција дефинисаних на следећи начин

$$x_n(t) = \begin{cases} n, & 0 \leq t \leq 1/n^4 \\ t^{-1/4}, & 1/n^4 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

тада за $m > n$ имамо

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= \int_0^1 \left|x_m(t) - x_n(t)\right|^2 \mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{1/n^4} \left(t^{-1/4}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{n^2} \to 0 \ \ (n \to \infty), \end{aligned}$$

а одатле следи да је уочени низ (x_n) b-Cauchy-јев. Ако би простор $\big(C[0,1], d\big)$ био b-комплетан тада би низ (x_n) конвергирао непрекидној функцији $t \to x(t)$ на сегменту $[0, 1]$. Функција $t \to x(t)$ била би ограничена, тј. постојала би константа $k \in \mathbb{N}$ тако да је

$$\left|x(t)\right| \leq k, \text{ за свако } t \in [0, 1].$$

Међутим, тада за $n \geq 2k$ имамо

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \int_0^1 \left|x_n(t) - x(t)\right|^2 \mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^1 \left||x_n(t)|^2 - |x(t)|^2\right| \mathrm{d}t \geq \int_0^{1/(2k)^4} |2k - k|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{16k^2}, \end{aligned}$$

па закључујемо да $x_n \nrightarrow x$, што је контрадикција.

У b-метричком простору (X,d) можемо увести топологију ако дефинишемо затворене скупове.

Дефиниција 4.4. ([7]) Нека је (X,d) b-метрички простор. Ако је Y непразан подскуп од X онда се адхеренција $\overline{Y}$ скупа Y дефинише

$$\overline{Y} = \{x \in X : \text{ постоји низ } (x_n) \text{ у } Y \text{ тако да } x_n \to x\}.$$

Дефиниција 4.5. ([7]) Нека је (X,d) b-метрички простор. Скуп $Y \subset X$ $(Y \neq \emptyset)$ је затворен ако и само ако је $Y = \overline{Y}$.

Дефиниција 4.6. ([7]) Нека су (X,d) и (X',d') два b-метричка простора, онда је функција $f : X \to X'$ b-непрекидна у тачки $x \in X$ ако је f b-низовно непрекидна у тачки x, тј. када

$$x_n \to x \ (n \to \infty) \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \ (n \to \infty).$$

Дефиниција 4.7. Нека је (X,d) b-метрички простор. Функција $f : X \to \mathbb{R}$ је b-полунепрекидна са доње (горње) стране у тачки $x \in X$ ако за сваки низ (x_n) у X важи

$$x_n \to x \ (n \to \infty) \Rightarrow \ \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x) \quad \big(\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x)\big).$$

Дефиниција 4.8. Нека је (X,d) је b-метрички простор. $A \subset X$ је b-компактан скуп ако и само ако сваки низ (x_n) у A има b-конвергентан подниз $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ тако да

$$x_{n(k)} \to x \ \ (k \to \infty), \ x \in A.$$

У b-метричким просторима важе и неке аналогне теореме из метричких простора.

Теорема 4.2. *Нека је $A \subset X$ b-компактан скуп b-метричког простора (X,d) и $f : X \to \mathbb{R}$ је b-полунепрекидна функција са доње стране. Тада постоји $x_0 \in A$ тако да је*

$$f(x_0) = \inf\big\{f(x) : x \in A\big\}.$$

Доказ. Ако се искористе Дефиниције 4.8 и 4.7 и примети да је b-компактан скуп A затворен у смислу Дефиниције 4.5, доказ се изводи аналогно као код метричког простора (видети [2]). $\square$

Лема 4.1. ([1]) *Нека је (X,d) b-метрички простор са параметром $s \geq 1$ и нека низови (x_n) и (y_n) b-конвергирају ка x и y, респективно. Тада је*

$$\frac{1}{s^2}\, d(x,y) \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \leq s^2 d(x,y).$$

У партикуларном случају ако је $x = y$, онда $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$. Осим тога, за свако $z \in X$ имамо

$$\frac{1}{s}\, d(x,z) \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_n,z) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n,z) \leq sd(x,z).$$

Лема 4.2. (Lemma 3.1 [18]) *Нека је (x_n) низ у b-метричком простору (X,d) са параметром $s \geq 1$. Тако да је*

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1},x_n) \quad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{5}$$

за неко $\lambda \in [0,1/s)$. Тада је (x_n) b-Cauchy-јев низ. Ако је (X,d) b-комплетан тада $x_n \to u$ $(n\to\infty)$, $u \in X$ и имамо процену

$$d(x_n,u) \leq \frac{s^2\lambda^n}{1-\lambda s}\, d(x_1,x_0) \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Доказ. Ако више пута применимо релацију (b_3) (Дефиниција 4.1) за $m > n$ добијамо

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) \leq{}& s^{m-n}d(x_m,x_{m-1}) + s^{m-n-1}d(x_{m-1},x_{m-2}) + \cdots + s^2 d(x_{n+2},x_{n+1}) \\ &+ sd(x_{n+1},x_n). \end{aligned} \tag{6}$$

Из услова (5) налазимо

$$d(x_{n+1},x_n) \leq \lambda d(x_n,x_{n-1}) \leq \lambda^2 d(x_{n-1},x_{n-2}) \leq \cdots \leq \lambda^n d(x_1,x_0). \quad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{7}$$

Ако (7) заменимо у неједнакост (6) имамо

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leq s^{m-n}\lambda^{m-1}d(x_1,x_0) + s^{m-n-1}\lambda^{m-2}d(x_1,x_0) + \cdots + s^2\lambda^{n+1}d(x_1,x_0) \\ &\qquad + s\lambda^n d(x_1,x_0) \\ &= s\lambda^n\big[1 + (s\lambda) + (s\lambda)^2 + \cdots + (s\lambda)^{m-n-1}\big]d(x_1,x_0) \\ &= s\lambda^n \frac{1-(s\lambda)^{m-n}}{1-s\lambda}\, d(x_1,x_0) < \frac{s\lambda^n}{1-\lambda s}\, d(x_1,x_0), \end{aligned} \tag{8}$$

пошто је $\lambda s < 1$.

Међутим, пошто $\dfrac{s\lambda^n}{1-\lambda s}\, d(x_1, x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$, јер је $\lambda < 1/s \leq 1$, закључујемо да је (x_n) b-Cauchy-јев низ.

Ако је b-метрички простор (X, d) b-комплетан тада $x_n \to u$ $(n \to \infty), u \in X$ па из (8) имамо

$$\limsup_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \frac{s\lambda^n}{1-\lambda s}\, d(x_1, x_0). \tag{9}$$

Применом Леме 4.1 налазимо

$$\frac{1}{s}\, d(x_n, u) \leq \liminf_{m\to\infty}\, d(x_m, x_n) \leq \limsup_{m\to\infty}\, d(x_m, x_n). \tag{10}$$

Из (9) и (10) закључујемо да је

$$\frac{1}{s}\, d(x_n, u) \leq \frac{s\lambda^n}{1-\lambda s}\, d(x_1, x_0), \text{ тј. } d(x_n, u) \leq \frac{s^2\lambda^n}{1-\lambda s}\, d(x_1, x_0). \qquad \square$$

Теорема 4.3. *Нека је (X, d) комплетан b-метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $T : X \to X$ пресликавање за које постоје позитивни реални бројеви a, b, c тако да је за свако $x, y \in X$ бар један од услова задовољен:*

1° $d(Tx, Ty) \leq a d(x, y)$;

2° $d(Tx, Ty) \leq b\big[d(x, Tx) + d(y, Ty)\big]$;

3° $d(Tx, Ty) \leq c\big[d(x, Ty) + d(y, Tx)\big]$.

Ако је $a < 1/s$, $b < 1/2s^3$, $c < 1/2s^3$ тада пресликавање T има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Нека је задовољен услов 2°, тада имамо

$$\begin{aligned}
d(Tx, Ty) &\leq b\big(d(x, Tx) + d(y, Ty)\big)\\
&\leq bd(x, Tx) + bs\big[d(y, x) + d(x, Ty)\big]\\
&= bd(x, Tx) + bsd(x, y) + bsd(x, Ty)\\
&\leq bd(x, Tx) + bsd(x, y) + bs \cdot s\big[d(x, Tx) + d(Tx, Ty)\big].
\end{aligned}$$

Из последње неједнакости имамо

$$(1 - bs^2)d(Tx, Ty) \leq b(1 + s^2)d(x, Tx) + bsd(x, y)$$

тј.

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{b(1+s^2)}{1-bs^2}\, d(x,Tx) + \frac{bs}{1-bs^2}\, d(x,y). \tag{11}$$

Исто тако из услова 2° следи

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\leq b\big(d(x,Tx)+d(y,Ty)\big) \\ &\leq b\big[s(d(x,Ty)+d(Ty,Tx))+s(d(y,x)+d(x,Ty))\big] \\ &= 2bsd(x,Ty)+bsd(Tx,Ty)+bsd(x,y) \end{aligned}$$

односно

$$(1-bs)d(Tx,Ty) \leq 2bsd(x,Ty)+bsd(x,y)$$

тј.

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{2bs}{1-bs}\, d(x,Ty) + \frac{bs}{1-bs}\, d(x,y). \tag{12}$$

Приметимо да је

$$\frac{b(1+s^2)}{1-bs^2} \leq \frac{2bs^2}{1-bs^2}, \quad \frac{bs}{1-bs^2} \leq \frac{bs^2}{1-bs^2}, \quad \frac{bs}{1-bs} \leq \frac{bs^2}{1-bs^2}. \tag{13}$$

Неједнакости у (13) су тачне пошто су све три еквивалентне услову $s \geq 1$.

Ако искористимо неједнакост (13) релације (11) и (12) можемо написати у облику

$$d(Tx,Ty) \leq 2\frac{bs^2}{1-bs^2}\, d(x,Tx) + \frac{bs^2}{1-bs^2}\, d(x,y) \tag{14}$$

$$d(Tx,Ty) \leq 2\frac{bs^2}{1-bs^2}\, d(x,Ty) + \frac{bs^2}{1-bs^2}\, d(x,y). \tag{15}$$

Ако је задовољен услов 3° имамо

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\leq c\big(d(x,Ty)+d(y,Tx)\big) \\ &\leq cd(x,Ty)+cs\big(d(y,x)+d(x,Tx)\big) \\ &= cd(x,Ty)+csd(x,y)+csd(x,Tx) \\ &\leq cd(x,Ty)+csd(x,y)+cs\cdot s\big[d(x,Ty)+d(Ty,Tx)\big]. \end{aligned}$$

Из последње неједнакости следи

$$(1-cs^2)d(Tx,Ty) \leq c(1+s^2)d(x,Ty)+csd(x,y)$$

тј.

$$d(Tx,Ty) \le \frac{c(1+s^2)}{1-cs^2}\, d(x,Ty) + \frac{cs}{1-cs^2}\, d(x,y). \tag{16}$$

Исто тако из 3° налазимо

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\le c\big[s(d(x,Tx)+d(Tx,Ty)) + s(d(y,x)+d(x,Tx))\big] \\ &= 2csd(x,Tx) + csd(Tx,Ty) + csd(x,y) \end{aligned}$$

односно

$$(1-cs)d(Tx,Ty) \le 2csd(x,Tx) + csd(x,y)$$

тј.

$$d(Tx,Ty) \le 2\frac{cs}{1-cs}\, d(x,Tx) + \frac{cs}{1-cs}\, d(x,y). \tag{17}$$

Аналогно неједнакостима (13) имамо

$$\frac{c(1+s^2)}{1-cs^2} \le \frac{2cs^2}{1-cs^2}, \quad \frac{cs}{1-cs^2} \le \frac{cs^2}{1-cs^2}, \quad \frac{cs}{1-cs} \le \frac{cs^2}{1-cs^2},$$

стога неједнакости (16) и (17) можемо написати у облику

$$d(Tx,Ty) \le 2\frac{cs^2}{1-cs^2}\, d(x,Ty) + \frac{cs^2}{1-cs^2}\, d(x,y) \tag{18}$$

$$d(Tx,Ty) \le 2\frac{cs^2}{1-cs^2}\, d(x,Tx) + \frac{cs^2}{1-cs^2}\, d(x,y). \tag{19}$$

Ако ставимо

$$\lambda = \max\left\{a, \frac{bs^2}{1-bs^2}, \frac{cs^2}{1-cs^2}\right\}$$

релације (15), (18), (14) и (19) можемо представити у форми

$$d(Tx,Ty) \le 2\lambda d(x,Ty) + \lambda d(x,y) \tag{20}$$

$$d(Tx,Ty) \le 2\lambda d(x,Tx) + \lambda d(x,y). \tag{21}$$

Јасно, ако је испуњен услов 1° да су тривијално задовољене неједнакости (20) и (21).

Формирајмо низ (x_n):

$$x_0 \in X,\ x_n = Tx_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Применом неједнакости (20) налазимо

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) &\leq 2\lambda d(x_n, Tx_{n-1}) + \lambda d(x_n, x_{n-1}) \\
&= 2\lambda d(x_n, x_n) + \lambda d(x_n, x_{n-1}) \\
&= \lambda d(x_n, x_{n-1}).
\end{aligned} \tag{22}$$

Да бисмо применили Лему 4.2 користећи (22) довољно је доказати да је $\lambda < 1/s$. Ако је $\lambda = a$ то је очигледно због услова $a < 1/s$. Ако је $\lambda = \dfrac{bs^2}{1-bs^2}$ тада имамо

$$\begin{aligned}
b < \frac{1}{2s^3} \text{ и } \frac{1}{2s^3} \ \leq \frac{1}{s^2\,(s+1)} &\Rightarrow b \leq \frac{1}{s^2(1+s)} \\
&\Leftrightarrow \frac{bs^2}{1-bs^2} < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{bs^2}{1-bs^2} < \frac{1}{s} \\
&\Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Аналогно се доказује за $\lambda = \dfrac{cs^2}{1-cs^2}$.

Применом Леме 4.2 имамо да $x_n \to u$ $(n \to \infty)$ $u \in X$. Ако искористимо релацију (21) налазимо

$$d(Tx_n, Tu) \leq 2\lambda d(x_n, Tx_n) + \lambda d(x_n, u)$$

односно

$$d(x_{n+1}, Tu) \leq 2\lambda d(x_n, x_{n+1}) + \lambda d(x_n, u)$$

а одатле је

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tu) \leq \limsup_{n\to\infty} \left[2\lambda d(x_n, x_{n+1}) + \lambda d(x_n, u)\right] = 0,$$

односно

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tu) = 0.$$

Применом Теореме 4.1 тачка 1° следи да је $Tu = u$.

Ако пресликавање T има још једну фиксну тачку v $(v \neq u)$ користећи релацију (21) имамо

$$\begin{aligned}
0 < d(u, v) = d(Tu, Tv) &\leq 2\lambda d(u, Tu) + \lambda d(u, v) \\
&= \lambda d(u, v),
\end{aligned}$$

а одавде следи $\lambda \geq 1$, шо је контрадикција услову $\lambda < 1/s \leq 1$. $\square$

Последица 4.1. *Ако је $s = 1$ у Теореми 4.3 добијамо резултат* Zamfirescu-*а у метричким просторима* ([14]).

Примедба. Недавно је у чланку [63] (Theorem 2.1) област за λ у Banach-овом принципу контракције (видети Теорему 1.1) у b-метричким просторима проширен на $[0, 1)$.

Применићемо Теорему 4.3 на егзистенцију решења система n линеарних алгебарских једначина и егзистенцију решења Fredholm-ове линеарне и нелинеарне интегралне једначине.

Теорема 4.4. *Линеарни систем*

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n = b_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n = b_n \end{cases} \tag{23}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{C}, b_i \in \mathbb{C}$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ *има јединствено решење ако је*

$$\sum_{i=1}^{n} \max_{1 \le j \le n} |c_{ij}|^p < \frac{1}{2} \quad (0 < p < 1) \tag{24}$$

где је

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}, \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Доказ. Дати систем можемо представити у облику

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (1 - a_{11})\xi_1 - a_{12}\xi_2 - \cdots - a_{1n}\xi_n + b_1 \\ \xi_2 &= -a_{21}\xi_1 + (1 - a_{22})\xi_2 - \cdots - a_{2n}\xi_n + b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_n &= -a_{n1}\xi_1 - a_{n2}\xi_2 - \cdots + (1 - a_{nn})\xi_n + b_n, \end{aligned}$$

или ако уведемо смену

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

у облику

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\xi_j + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Дефинишимо пресликавање $T:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, где је $(\mathbb{C}^n, d)$ b-метрички простор из Примера 4.6 тако да тачки $x = (\xi_i) \in \mathbb{C}^n$ одговара тачка $y = Tx = (\eta_i) \in \mathbb{C}^n$ таква да је

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\xi_j + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Фиксне тачке пресликавања T простора $(\mathbb{C}^n, d)$ у самог себе су решења система (23).

Нека су тачке $x_1 = \big(\xi_i^{(1)}\big)$, $x_2 = \big(\xi_i^{(2)}\big)$ две произвољне тачке из $\mathbb{C}^n$ и нека је $Tx_1 = \big(\eta_i^{(1)}\big)$ и $Tx_2 = \big(\eta_i^{(2)}\big)$ дефинисано помоћу (25), тада је

$$\big|\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}\big| = \left|\sum_{j=1}^{n} \big(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}\big)\right| \le \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|\,\big|\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}\big|$$

а одатле је

$$\begin{aligned}
\big|\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}\big|^p &\le \left(\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|\,\big|\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}\big|\right)^p \\
&\le \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^p \big|\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}\big|^{p\,(\mathbf{2})} \\
&\le \max_{1\le j\le n} |c_{ij}|^p \sum_{j=1}^{n} \big|\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}\big|^p \\
&= \max_{1\le j\le n} |c_{ij}|^p \cdot \big[d(x_1, x_2)\big]^p,
\end{aligned}$$

односно

$$\sum_{i=1}^{n} \big|\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}\big|^p \le \left\{\sum_{i=1}^{n} \max_{1\le j\le n} |c_{ij}|^p\right\} \big[d(x_1, x_2)\big]^p$$

тј.

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} \big|\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}\big|^p\right\}^{1/p} \le \left\{\sum_{i=1}^{n} \max_{1\le j\le n} |c_{ij}|^p\right\}^{1/p} d(x_1, x_2)$$

$$d(y_1, y_2) \le \lambda d(x_1, x_2), \qquad \text{за свако } x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n,$$

где је

$$\lambda = \left\{\sum_{i=1}^{n} \max_{1\le j\le n} |c_{ij}|^p\right\}^{1/p},$$

(2) Неједнакост $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|\Big)^p \le \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^p$ $(0 < p < 1)$ доказује се математичком индукцијом користећи неједнакост (3) из Примера 4.6.

Пошто је параметар $s = 2^{1/p}$ налазимо да је

$$\lambda < \frac{1}{s} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{i=1}^{n} \max_{1\le j\le n} |c_{ij}|^p \right\}^{1/p} < \frac{1}{2^{1/p}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \max_{1\le j\le n} |c_{ij}|^p < \frac{1}{2},$$

па применом Теореме 4.3 закључујемо да пресликавање T има јединствену фиксну тачку тј. да систем (23) има јединствено решење ако је испуњен услов (24). $\square$

Коментар. Ако бисмо применили теорему из [63] (видети Примедбу после Последице 4.1), тада је услов (24)

$$\sum_{i=1}^{n} \max_{1\le j\le n} |c_{ij}|^p < 1 \quad (0 < p < 1).$$

Теорема 4.5. Fredholm-*ова интегрална једначина*

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(s,t)x(s)\mathrm{d}s + g(t), \quad (a < b) \tag{26}$$

где је језгро $(s,t) \to K(s,t)$ *непрекидна функција у квадрату* $P = [a,b] \times [a,b]$, *дата функција* $t \to g(t)$ *непрекидна на* $[a,b]$, $t \to x(t)$ *непозната непрекидна функција на* $[a,b]$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$ *има јединствено решење ако је задовољен услов*

$$|\lambda| < 2^{-1/q}(b-a)^{-1/p} \max_{a\le t\le b} \left\{ \int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s \right\}^{1/q} \tag{27}$$

где је $p > 1$ *и* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Доказ. Непрекидно решење $t \to x(t)$ интегралне једначине (26) можемо схватити као фиксну тачку пресликавања

$$Tx(t) = \lambda \int_a^b K(s,t)x(s)\mathrm{d}s + g(t)$$

b-метричког простора $C[a,b]$ са уведеном b-метриком из Примера 3. Нека $x, y \in C[a,b]$, тада је

$$\begin{aligned}\big|Tx(t) - Ty(t)\big| &= |\lambda| \left| \int_a^b K(s,t)\big(x(s) - y(s)\big)\mathrm{d}s \right| \le |\lambda| \int_a^b \big|K(s,t)\big|\big|x(s) - y(s)\big|\mathrm{d}s \\ &\le |\lambda| \left\{ \int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s \right\}^{1/q} \left\{ \int_a^b \big|x(s) - y(s)\big|^p \mathrm{d}s \right\}^{1/p} {}^{(\mathbf{3})}\end{aligned}$$

односно

(3) Hölder-ову неједнакост можемо применити пошто је по претпоставци $p > 1$ (видети [29]).

$$\begin{aligned}\big|Tx(t)-Ty(t)\big|^p &\le |\lambda|^p\bigg\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\bigg\}^{p/q}\cdot\int_a^b \big|x(s)-y(s)\big|^p \mathrm{d}s\\ &\le |\lambda|^p \max_{a\le t\le b}\bigg\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\bigg\}^{p/q}\cdot(b-a)\max_{a\le t\le b}\big|x(s)-y(s)\big|^p\end{aligned}$$

тј.

$$\max_{a\le t\le b}\big|Tx(t)-Ty(t)\big|^p \le |\lambda|^p\cdot(b-a)\max_{a\le t\le b}\bigg\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\bigg\}^{p/q} d(x,y).$$

или

$$d(Tx,Ty)\le q d(x,y) \tag{28}$$

где је

$$q=|\lambda|^p(b-a)\max_{a\le t\le b}\bigg\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\bigg\}^{p/q}.$$

Да бисмо имали контракцију T у (28) у b-метричком простору $\big(C[a,b],d\big)$ мора да буде испуњен услов

$$qs<1,\ \text{где је } s=2^{p-1}.$$

Заиста,

$$\begin{aligned}qs<1 &\Leftrightarrow |\lambda|^p(b-a)\max_{a\le t\le b}\bigg\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\bigg\}^{p/q} 2^{p-1}<1\\ &\Leftrightarrow |\lambda|(b-a)^{1/p}\max_{a\le t\le b}\bigg\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\bigg\}^{1/q} 2^{1-1/p}<1\\ &\Leftrightarrow |\lambda|<2^{-1/q}(b-a)^{-1/p}\max_{a\le t\le b}\bigg\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\bigg\}^{-1/q},\end{aligned}$$

последња неједнакост је услов (27).

Применом Теореме 4.3 добијамо да једначина (26) има јединствено непрекидно решење. □

Коментар. Ако искористимо теорему из [63] (Примедба после Последице 4.1) услов (27) је тада

$$|\lambda|<(b-a)^{-1/p}\max_{a\le t\le b}\bigg\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\bigg\}^{-1/q}\quad \Big(p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Big).$$

Последица 4.2. *Нека је* $M=\max\big\{|K(s,t)|:(s,t)\in P\big\}$ *и важи*

$$\max_{a\le t\le b}\bigg\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\bigg\}\le\frac{1}{2}(b-a)M^q. \tag{29}$$

Тада имамо

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \Rightarrow |\lambda| < 2^{-1/q}(b-a)^{-1/p} \max_{a\le t\le b}\left\{\int_a^b \left|K(s,t)\right|^q \mathrm{d}s\right\}^{-1/q}. \tag{30}$$

Доказ. Из (29) добијамо

$$2^{1/q}(b-a)^{1/p}\max_{a\le t\le b}\left\{\int_a^b \left|K(s,t)\right|^q \mathrm{d}s\right\}^{1/q} < 2^{1/q}(b-a)^{1/p}2^{-1/q}(b-a)^{1/q}M = (b-a)M$$

а одатле је

$$\frac{1}{M(b-a)} \le 2^{-1/q}(b-a)^{-1/p}\max_{a\le t\le b}\left\{\int_a^b \left|K(s,t)\right|^q \mathrm{d}s\right\}^{-1/q}$$

што има за последицу да је тачна импликација (30). □

На тај начин смо проширили интервал за параметар λ за који интегрална једначина (26) из Теореме 4.3 има јединствено решење. У вези интегралне једначине (26) из Теореме 4.3 и услова $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ видети [30], [2], [23], [27].

Теорема 4.6. *Нелинеарна интегрална једначина*

$$x(t) = \int_a^b F\big(s,t,x(s)\big)\mathrm{d}s + g(t) \quad (a<b) \tag{31}$$

где је функција $(s,t,u)\to F(s,t,u)$ непрекидна на скупу $[a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R}$ и задовољава услов

$$\big|F(s,t,u_1)-F(s,t,u_2)\big| \le \big|K(s,t)\big|\,|u_1-u_2|, (s,t)\in P=[a,b]\times[a,b], \tag{32}$$

а функција $(s,t)\to K(s,t)$ је непрекидна у квадрату P, $t\to g(t)$ непрекидна функција на $[a,b]$, има јединствено решење ако је

$$\max_{a\le t\le b}\int_a^b \left|K(s,t)\right|^q \mathrm{d}s < \frac{1}{2}(b-a)^{-q/p} \quad \Big(p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Big). \tag{33}$$

Доказ. Посматрајмо b-метрички простор $C[a,b]$ из Примера 4.3. Тада је

$$Tx(t) = \int_a^b F\big(s,t,x(s)\big)\mathrm{d}s + g(t)$$

пресликавање $T: C[a,b]\to C[a,b]$. Решење интегралне једначине (31) је фиксна тачка пресликавања T. Нека $x, y \in C[a,b]$. Тада

$$\begin{aligned}
&\big|Tx(t)-Ty(t)\big| = \left|\int_a^b \big[F(s,t,x(s)) - F(s,t,y(s))\big]\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \int_a^b \big|F(s,t,x(s)) - F(s,t,y(s))\big|\mathrm{d}s \\
&\leq \int_a^b \big|K(s,t)\big|\big|x(s)-y(s)\big|\mathrm{d}s \quad (\text{услов } (32)) \\
&\leq \left\{\int_a^b \big|x(s)-y(s)\big|^p \mathrm{d}s\right\}^{1/p}\left\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\right\}^{1/q}, \quad \Big(p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Big),
\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}
\big|Tx(t)-Ty(t)\big|^p &\leq \left\{\int_a^b \big|x(s)-y(s)\big|^p \mathrm{d}s\right\}\left\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\right\}^{p/q} \\
&\leq \max_{a\leq t\leq b}\big|x(s)-y(s)\big|^p \cdot (b-a)\max_{a\leq t\leq b}\left\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\right\}^{p/q} \\
&\leq (b-a)\max_{a\leq t\leq b}\left\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\right\}^{p/q} d(x,y)
\end{aligned}$$

а одатле је

$$\max_{a\leq t\leq b}\big|Tx(t)-Ty(t)\big|^p \leq (b-a)\max_{a\leq t\leq b}\left\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\right\}^{p/q} d(x,y),$$

тј.

$$d(Tx,Ty) \leq (b-a)\max_{a\leq t\leq b}\left\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\right\}^{p/q} d(x,y).$$

Да би пресликавање T била контракција треба да буде испуњен услов

$$(b-a)\max_{a\leq t\leq b}\left\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\right\}^{p/q} 2^{p-1} < 1,$$

односно

$$\max_{a\leq t\leq b}\left\{\int_a^b \big|K(s,t)\big|^q \mathrm{d}s\right\} < \frac{1}{2}(b-a)^{-q/p}$$

што је уствари услов (33). Пошто је T контракција, применом Теореме 3 закључујемо да пресликавање T има јединствену фиксну тачку, тј. интегрална једначина (31) има јединствено непрекидно решење $t \to x(t)$. $\square$

У наставку главе разматрамо парцијално уређене b-метричке просторе

Да бисмо једноставније формулисали уопштење теореме (Theorem 3 [44]) уводимо следеће ознаке.

Нека је (X, d) b-метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $T : X \to X$. Ставимо

$$M_s(x, y) := \max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2s}\right\},$$
$$N(x, y) := \min\left\{d(x, Tx), d(y, Tx)\right\}.$$

Теорема 4.7. *Нека је $(X, \preceq, d)$ парцијално уређен комплетан b-метрички простор са параметром $s \geq 1$. Нека је $T : X \to X$ непрекидно неоападајуће пресликавање у односу на $\preceq$ тако да важи*

$$\psi\big(sd(Tx, Ty)\big) \leq \psi\big(M_s(x, y)\big) - \varphi\big(d(x, y)\big) + L\psi\big(N(x, y)\big) \tag{34}$$

за свака два упоредива елемента $x, y \in X$ и константу $L \geq 0$. Функције $\varphi, \psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ су неопадајуће, φ полунепрекидна са доње стране, а ψ полунепрекидна са горње стране које имају особине да је $\varphi(t) = 0$ ако и само ако је $t = 0$ и $\psi(t) = 0$ ако и само ако је $t = 0$. Ако постоји $x_0 \in X$ тако да је $x_0 \preceq Tx_0$, тада пресликавање T има фиксну тачку.

Доказ. Нека $x_0 \in X$. Дефинишимо низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у X тако да је $x_{n+1} = Tx_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Пошто је $x_0 \preceq Tx_0 = x_1$ и T неопадајуће пресликавање имамо $x_1 = Tx_0 \preceq Tx_1 = x_2$, а одатле пошто је T неопадајуће пресликавање $x_2 = Tx_1 \preceq Tx_2 = x_3$ итд. тј. формиран је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тако да је

$$x_0 \preceq x_1 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq \cdots .$$

Ако постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ доказ је завршен пошто је $x_{n_0} \in X$ фиксна тачка пресликавања T. Зато претпоставимо да је за свако $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \neq x_{n+1} \Leftrightarrow d\left(x_n, x_{n+1}\right) > 0. \tag{35}$$

Ако применимо релацију (34) добијамо

$$\begin{aligned}\psi\big(sd(x_n, x_{n+1})\big) &= \psi\big(s(d(Tx_{n-1}, Tx_n))\big)\\ &\leq \psi\big(M_s(x_{n-1}, x_n)\big) - \varphi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big) + L\psi\big(N(x_{n-1}, x_n)\big)\end{aligned} \tag{36}$$

где је

$$
\begin{aligned}
M_s(x_{n-1},x_n) &= \max\Big\{d(x_{n-1},x_n), d(x_{n-1},Tx_{n-1}), d(x_n,Tx_n),\\
&\qquad \frac{d(x_{n-1},Tx_n)+d(x_n,Tx_{n-1})}{2s}\Big\}\\
&= \max\Big\{d(x_{n-1},x_n), d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1},x_{n+1})+d(x_n,x_n)}{2s}\Big\}\\
&= \max\Big\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1},x_{n+1})}{2s}\Big\}. \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Пошто је

$$d(x_{n-1},x_{n+1}) \le s\big[d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})\big] \le 2s\max\big\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\big\}$$

односно

$$\frac{d(x_{n-1},x_{n+1})}{2s} \le \max\big\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\big\}. \qquad (38)$$

Из (37) и (38) имамо

$$M_s(x_{n-1},x_n) = \max\big\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\big\} \qquad (39)$$

и

$$
\begin{aligned}
N(x_{n-1},x_n) &= \min\big\{d(x_{n-1},Tx_{n-1}), d(x_n,Tx_{n-1})\big\}\\
&= \min\big\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,xn)\big\}\\
&= \min\big\{d(x_{n-1},x_n), 0\big\}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

па је

$$\psi\big(N(x_{n-1},x_n)\big) = \psi(0) = 0. \qquad (40)$$

Ако би било $d(x_{n-1},x_n) \le d(x_n,x_{n+1})$ тада из (39) имамо

$$M_s(x_{n-1},x_n) = d(x_n,x_{n+1}). \qquad (41)$$

Користећи (36), (40) и (41) добијамо

$$\psi\big(sd(x_n,x_{n+1})\big) \le \psi\big(d(x_n,x_{n+1})\big) - \varphi\big(d(x_{n-1},x_n)\big). \qquad (42)$$

Како је функција ψ неопадајућа то је

$$\psi\big(d(x_n,x_{n+1})\big) \le \psi\big(sd(x_n,x_{n+1})\big),$$

па из последње две неједнакости следи $\varphi\big(d(x_{n-1},x_n)\big) \le 0$, што је контрадикција с обзиром на услове (35) и $\varphi(t)=0 \Leftrightarrow t=0$.

Стога закључујемо да је

$$0 < d(x_n,x_{n+1}) < d(x_{n-1},x_n) \quad (n=1,2,\ldots)$$

па постоји

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = \alpha \ge 0.$$

Ако би било $\alpha>0$ тада из (42) имамо

$$\begin{aligned}\psi(s\alpha) &\le \psi\big(sd(x_n,x_{n+1})\big), \text{јер је } \psi \text{ неопадајућа функција}\\ &\le \psi\big(d(x_n,x_{n+1})\big) - \varphi\big(d(x_n,x_{n+1})\big)\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}\psi(s\alpha) &\le \limsup_{n\to\infty}\ \big[\psi(d(x_n,x_{n+1})) - \varphi(d(x_n,x_{n+1}))\big]\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\ \psi\big(d(x_n,x_{n+1})\big) - \liminf_{n\to\infty}\ \varphi\big(d(x_n,x_{n+1})\big). \qquad (43)\end{aligned}$$

Пошто је ψ полунепрекидна функција са горње стране то је

$$\limsup_{n\to\infty}\ \psi\big(d(x_n,x_{n+1})\big) \le \psi\big(\limsup_{n\to\infty}\ d(x_n,x_{n+1})\big) = \psi(\alpha) \qquad (44)$$

а φ полунепрекидна са доње стране, то је

$$\varphi(\alpha) = \varphi\big(\liminf_{n\to\infty}\ d(x_n,x_{n+1})\big) \le \liminf_{n\to\infty}\ \varphi\big(d(x_n,x_{n+1})\big) \qquad (45)$$

па из (43), (44) и (45) налазимо

$$\psi(s\alpha) \le \psi(\alpha) - \varphi(\alpha)$$

а одавде

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &\le \psi(\alpha) - \psi(s\alpha)\\ &\le 0, \text{ јер је } \psi \text{ неопадајућа функција},\end{aligned}$$

а то је контрадикција услову $\varphi(t)>0$ за $t>0$. Према томе $\alpha=0$, тј.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = 0. \qquad (46)$$

Докажимо да је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ b-Cauchy-јев низ. Претпоставимо супротно, тј. да $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ није b-Cauchy-јев низ, а тада на основу Леме 1.1 постоји $\varepsilon > 0$ и поднизови $(x_{n(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ и $(x_{m(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тако да је $m(i) > n(i) > i$ и

$$d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \geq \varepsilon \text{ и } d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{47}$$

Користећи неједнакост троугла у b-метричким просторима имамо

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) &\leq s\big[d(x_{m(i)}, x_{m(i)-1}) + d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)})\big]\\ &\leq sd(x_{m(i)}, x_{m(i)-1}) + s^2\big[d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) + d(x_{n(i)-1}, x_{n(i)})\big],\end{aligned}$$

ако пустимо да $i \to \infty$ и искористимо (46) добијамо

$$\varepsilon \leq s^2 \liminf_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}), \text{ тј. } \frac{\varepsilon}{s^2} \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}).$$

Такође из

$$\begin{aligned}d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) &\leq s\big[d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) + d(x_{n(i)}, x_{n(i)-1})\big]\\ &< s\big(\varepsilon + d(x_{n(i)}, x_{n(i)-1})\big) \text{ (користећи (47))}\end{aligned}$$

следи

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) \leq s\varepsilon \text{ (користимо (46))}$$

па је

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) \leq s\varepsilon. \tag{48}$$

Из неједнакости (47) имамо

$$\varepsilon \leq d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq s\big[d(x_{m(i)}, x_{m(i)-1}) + d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)})\big]$$

и

$$d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) < \varepsilon,$$

а одавде користећи (46) следи

$$\varepsilon \leq s \cdot \liminf_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) \text{ и } \limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) \leq \varepsilon$$

тј.

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) \leq \varepsilon. \tag{49}$$

Слично налазимо

$$\varepsilon \leq d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq sd(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) + sd(x_{n(i)-1}, x_{n(i)}) \tag{50}$$

$$\leq s^2 d(x_{m(i)}, x_{m(i)-1}) + s^2 d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) + sd(x_{n(i)-1}, x_{n(i)}). \tag{51}$$

Из (50) имамо

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}),$$

а из (51)

$$s \limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) \leq s^2 \limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})$$

па користећи (48) налазимо

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) \leq s \cdot s\varepsilon$$

односно добијамо

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) \leq s^2\varepsilon. \tag{52}$$

Користећи релацију (47) имамо

$$\varepsilon \leq d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq s\big[d(x_{m(i)}, x_{m(i)-1}) + d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)})\big]$$

$$\varepsilon \leq d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq s\big[d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) + d(x_{n(i)-1}, x_{n(i)})\big].$$

Сабирањем последње две неједнакости а затим дељењем збира са s следи

$$\frac{2\varepsilon}{s} \leq d(x_{m(i)}, x_{m(i)-1}) + \big[d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) + d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1})\big] + d(x_{n(i)-1}, x_{n(i)})$$

а одавде ако искористимо (46) налазимо

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{s^2} &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) + d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1})}{2s} \\ &\leq \frac{1}{2s}\big[\limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) + \limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1})\big] \\ &\leq \frac{1}{2s}[\varepsilon + s^2\varepsilon], \end{aligned} \tag{53}$$

где смо искористили (49) и (52).

Из услова (34) исказа Теореме имамо

$$\begin{aligned}\psi\big(sd(x_{m(i)}, x_{n(i)})\big) &= \psi\big(sd(Tx_{m(i)-1}, Tx_{n(i)-1})\big) \\ &\leq \psi\big(M_s(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big) - \varphi\big(d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big) \\ &\quad + L\psi\big(N(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big). \end{aligned} \tag{54}$$

Пошто је

$$\begin{aligned}M_s(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) &= \max\Big\{d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}), d(x_{m(i)-1}, Tx_{m(i)-1}),\\ &\qquad d(x_{n(i)-1}, Tx_{n(i)-1}), \frac{d(x_{m(i)-1}, Tx_{n(i)-1}) + d(x_{n(i)-1}, Tx_{m(i)-1})}{2s}\Big\}\\ &= \max\Big\{d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}), d(x_{m(i)-1}, x_{m(i)}), d(x_{n(i)-1}, x_{n(i)}),\\ &\qquad \frac{d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) + d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1})}{2s}\Big\}\end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} M_s(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\\ &\le \max\Big\{\limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}), \limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{m(i)}),\\ &\qquad \limsup_{n\to\infty} d(x_{n(i)-1}, x_{n(i)}), \limsup_{n\to\infty} \frac{d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) + d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1})}{2s}\Big\}\\ &\le \max\Big\{s\varepsilon, 0, 0, \frac{s^2+1}{2s}\varepsilon\Big\}, \text{ користимо (48), (46), (53)}\\ &= s\varepsilon \qquad (55)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}N(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) &= \min\big\{d(x_{m(i)-1}, Tx_{m(i)-1}), d(x_{m(i)-1}, Tx_{n(i)-1})\big\}\\ &= \min\big\{d(x_{m(i)-1}, x_{m(i)}), d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)})\big\}\\ &\le d(x_{m(i)-1}, x_{m(i)})\end{aligned}$$

то је

$$\limsup_{n\to\infty} N(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) \le \limsup_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{m(i)}) = 0$$

односно

$$\limsup_{n\to\infty} N(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) = 0. \qquad (56)$$

Ако искористимо да је ψ неопадајућа функција, (47) и (54) имамо

$$\begin{aligned}\psi(s\varepsilon) &\le \limsup_{n\to\infty} \psi\big(sd(x_{m(i)}, x_{n(i)})\big)\\ &\le \limsup_{n\to\infty} \psi\big(M_s(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big) - \liminf_{n\to\infty} \varphi\big(d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big)\\ &\qquad + \limsup_{n\to\infty} \psi\big(N(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big). \qquad (57)\end{aligned}$$

Пошто је ψ полунепрекидна са горње стране имамо

$$\limsup_{n\to\infty} \psi\big(M_s(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big) \leq \psi\big(\limsup_{n\to\infty} M_s(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big) \leq \psi(s\varepsilon). \quad (58)$$

Последња неједнакост следи из (55) и монотоности функције ψ.

Из истог разлога је

$$\limsup_{n\to\infty} \psi\big(N(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big) \leq \psi\big(\limsup_{n\to\infty} N(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big) = \psi(0) = 0, \quad (59)$$

где смо искористили (56).

Пошто је φ полунепрекидна са доње стране, имамо

$$\varphi\big(\liminf_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi\big(d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big),$$

а како је ψ неопадајућа функција с обзиром на (48) имамо

$$\varphi\Big(\frac{\varepsilon}{s^2}\Big) \leq \varphi\big(\liminf_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big)$$

па из последње две неједнакости добијамо

$$-\varphi\big(\liminf_{n\to\infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})\big) \leq -\varphi\Big(\frac{\varepsilon}{s^2}\Big). \quad (60)$$

Ако искористимо (58), (60) и (59) из релације (57) следи

$$\psi(s\varepsilon) \leq \psi(s\varepsilon) - \varphi\Big(\frac{\varepsilon}{s^2}\Big),$$

односно добијамо $\varphi(\varepsilon/s^2) \leq 0$ за $\varepsilon/s^2 > 0$, што је контрадикција.

Према томе низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је b-Cauchy-јев низ у комплетном b-метричком простору (X, d) па постоји

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u, u \in X.$$

Пошто је пресликавање T непрекидно следи $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tu$ (Дефиниција 4.6), односно $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = Tu$. Како низ у b-метричком простору ако конвергира има јединствену граничну вредност (Теорема 4.1, 1°) то је $Tu = u$. $\square$

Коментар. У исказу теореме (Theorem 3 [44]) захтева се непрекидност функција φ и ψ, као и услов

$$\psi\big(sd(Tx, Ty)\big) \leq \psi\big(M_s(x, y)\big) - \varphi\big(M_s(x, y)\big) + L\psi\big(N(x, y)\big),$$

док су остали услови исти као код Теореме 4.7, па је Теорема 4.7 општија од наведене теореме из [44].

У вези Теореме 4.7 видети чланак ([43]).

5. Уопштења неких теорема о фиксним тачкама у конусним метричким просторима

Конусне метричке просторе под тим називом поново су увели L. G. HUANG и X. ZHANG ([61]) али је појам конуса био познат као и примена уређених нормираних простора у нумеричкој анализи ([11, 39]).

Приметимо да је Ђ. R. KUREPA ([24]) први користио уређене скупове као кодомен за метрику уместо скупа реалних бројева.

5.1. Појам конуса и врсте конуса у Banach-овим просторима

Дефиниција 5.1. Нека је $\big(E, \|.\|\big)$ реалан BANACH-ов простор и $P \subset E$. Подскуп P називамо конус ако су испуњени услови

(p_1) P је затворен скуп, непразан и $P \neq \{\theta\}$[(1)];

(p_2) $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ и ако $x, y \in P$ тада $ax + by \in P$;

(p_3) $P \cap (-P) = \{\theta\}$.

Приметимо да особину (p_2) можемо написати у облику $P + P \subseteq P, \lambda P \subseteq P$ ($\lambda \geq 0$).

Конус P називамо телесним ако је $\operatorname{int} P \neq \emptyset$.

За дат конус P можемо дефинисати парцијално уређење $\preceq$ у односу на конус P у простору $\big(E, \|.\|\big)$ на следећи начин

$$x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in P. \tag{1}$$

Ако је $x \preceq y$ и $x \neq y$ означавамо $x \prec y$.

Ако је $\operatorname{int} P \neq \emptyset$ уведимо ознаку

$$x \ll y \Leftrightarrow y - x \in \operatorname{int} P. \tag{2}$$

Примери конуса:

1. Ако је $\mathbb{R}$ скуп реалних бројева са уобичајеном нормом конус је скуп $P = [0, +\infty)$;

[(1)] θ је ознака неутралног елемента у векторском простору $(E, +)$

2. У скуп $\mathbb{R}^2$ са уобичајеном нормом скуп $P = \big\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\big\}$ jесте конус;

3. У простор ℓ_p $(p > 1)$ са нормом $\|x\| = \Big\{ \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p \Big\}^{1/p}$, где је $x = (\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ конус је скуп $P = \big\{x = (\xi_\nu) : \xi_\nu \geq 0 \ \nu = 1, 2, \dots\big\}$.

Једноставно доказујемо да је код конуса у Примерима 1 и 2 $\operatorname{int} P \neq \emptyset$, док је у Примеру 3 $\operatorname{int} P = \emptyset$. Заиста, ако уочимо $x = (\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in P$ и $x \neq \theta$, тада постоји $\nu_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $\xi_{\nu_0} > 0$. За тако нађено ξ_{ν_0} и произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $k \in \mathbb{N}$ тако да је $0 < \xi_{\nu_0} - \dfrac{1}{k}$ и $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$. Ако уочимо $\overline{x} = (\overline{\xi_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ тако да је

$$\overline{\xi_\nu} = \begin{cases} \xi_\nu, \nu \neq \nu_0 \\ \dfrac{1}{k} - \xi_\nu, \nu = \nu_0 \end{cases}$$

тада $\overline{x} \notin P$, јер је $\xi_{\nu_0} = \dfrac{1}{k} - \xi_\nu < 0$, међутим $\|x - \overline{x}\| = \dfrac{1}{k} < \varepsilon$, па $K(x,\varepsilon) \subsetneq P^{(\mathbf{2})}$, тј $\operatorname{int} P = \emptyset$.

У наставку задржавамо терминологију која је у вези са релацијом $\preceq$. Тако за низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у E кажемо да је монотон ако је растући $x_n \preceq x_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ или опадајући $x_{n+1} \preceq x_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. За непразан скуп $M \subset E$ кажемо да је ограничен одозго ако скуп M има горње ограничење у односу на $\preceq$, тј. постоји $y \in E$ тако да за свако $x \in M$ важи $x \preceq y$. Са $\sup M$ означавамо најмање горње ограничење за скуп M у односу на $\preceq$ ако оно постоји. Аналогно дефинишемо доње ограничење скупа M као и $\inf M$ ако постоји.

Како ћемо се у наставку бавити конвергенцијама у конусима P $(\operatorname{int} P \neq \emptyset)$ потребне су нам следеће особине релација $\preceq$ и $\ll$:

Лема 5.1. *Следећа тврђења важе*:

1° *Ако је* $u \preceq v$ *и* $v \ll w$ *онда* $u \ll w$;

2° *Ако је* $u \ll v$ *и* $v \preceq w$ *онда* $u \ll w$;

3° *Ако је* $u \ll v$ *и* $v \ll w$ *онда* $u \ll w$;

4° *Ако је* $\theta \preceq u \ll c$ *за свако* $c \in \operatorname{int} P$ *онда је* $u = \theta$;

5° *Ако је* $a \preceq b + c$ *за свако* $c \in \operatorname{int} P$ *онда је* $a \preceq b$;

$^{(\mathbf{2})}$Са $K(x,\varepsilon)$ означавамо отворену куглу у нормираном простору $\big(X, \|.\|\big)$, тј. $K(x,\varepsilon) = \{y \in x : \|x - y\| < \varepsilon\}$.

6° *Ако је* $a \preceq \lambda a$, *где* $a \in P$ *и* $0 < \lambda < 1$ *онда* $a = \theta$;

7° *Ако је* $\theta \preceq x$ *и* $\lambda \leq \mu$ *онда је* $\lambda x \preceq \mu x$;

8° *За свако* $\lambda > 0$ *је* $\lambda(\operatorname{int} P) \subseteq \operatorname{int} P$;

9° $\theta \notin \operatorname{int} P$.

Доказ. За доказе 1°-6° видети [39].

7° $\mu - \lambda \geq 0$ и $x \in P \Rightarrow (\mu - \lambda)x \in P$ (Дефиниција 5.1 (p_2)) $\Leftrightarrow \mu x - \lambda x \in P \Leftrightarrow \lambda x \preceq \mu x$ (релација (1)).

8° Претпоставимо да исказ 8° није тачан већ

$$\neg(\forall c)(\forall \lambda)(c \in \operatorname{int} P \wedge \lambda > 0 \Rightarrow \lambda c \in \operatorname{int} P)$$
$$\Leftrightarrow (\exists c_0)(\exists \lambda_0)(c_0 \in \operatorname{int} P \wedge \lambda_0 > 0 \wedge \lambda_0 c_0 \notin \operatorname{int} P).$$

Пошто $c_0 \in \operatorname{int} P$ и $\lambda_0 > 0$ следи $\lambda_0 c_0 \in P$ (Дефиниција 5.1 (p_2)).

Како је $P = \overline{P} = (\operatorname{int} P) \cup \partial P$ и $\lambda_0 c_0 \in P, \lambda_0 c_0 \notin \operatorname{int} P$ то значи да

$$\lambda_0 c_0 \in \partial P,$$

а тада за сваки нула низ $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}, \varepsilon_n \to 0+ \, (n \to \infty)$ важи

$$K(\lambda_0 c_0, \varepsilon_n) \cap P^c \neq \emptyset$$

што значи да постоји низ $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у E тако да

$$y_n \in K(\lambda_0 c_0, \varepsilon_n) \cap P^c \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Тада је

$$y_n = \lambda_0 c_0 + \lambda_n x_n, \text{ где је } |\lambda_n| \leq \varepsilon_n \text{ и } \|x_n\| < 1,$$

а одатле је $\dfrac{1}{\lambda_0} y_n = c_0 + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_0} x_n$, односно

$$\left\| \frac{1}{\lambda_0} y_n - c_0 \right\| = \frac{|\lambda_n|}{\lambda_0} \|x_n\| < \frac{\varepsilon_n}{\lambda_0} \to 0 + (n \to \infty)$$

па

$$\frac{1}{\lambda_0} y_n \to c_0 \in \operatorname{int} P (n \to \infty)$$

што значи да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_0} y_0 \in \operatorname{int} P,$$

а пошто је

$$\lambda_0 \operatorname{int} P \subseteq \lambda_0 P \subseteq P \quad (\text{Дефиниција } 5.1\ (p_2))$$

следи да

$$y_n \in \operatorname{int} P \subseteq P \text{ за } n \geq n_0$$

што је у контрадикцији са релацијом (3).

9° Ако $\theta \in \operatorname{int} P$ тада постоји $\varepsilon > 0$ тако да је $K(\theta, \varepsilon) \subset P$, што значи да постоји $x \in E$, $x \neq \theta$ тако да је $x \in K(\theta, \varepsilon) \subset P$, али тада и $-x \in K(\theta, \varepsilon) \subset P$ па $x \in P \cap (-P) = \{\theta\}$ (Дефиниција 5.1 (p_3)) па је $x = \theta$, што је контрадикција услову $x \neq \theta$. □

Напомена. Као последице тачке 8° претходне леме добијамо:

10° Ако је $x \ll y$ и $\lambda > 0$ онда је $\lambda x \ll \lambda y$

11° Ако је $x \gg \theta \wedge \lambda < \mu$ онда је $\lambda x \ll \mu x$.

Да бисмо строго доказали нека тврђења у вези са конвергенцијом у конус-ном метричком простору потребна нам је следећа лема.

Лема 5.2. *Ако је A конвексан скуп у нормираном простору $\big(X, \|.\|\big)$ и $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ тада је*

$$\overline{A} = \overline{(\operatorname{int} A)}. \tag{4}$$

Доказ. Приметимо да је $K(x, r) = x + rK(\theta, 1)$ и докажимо тврђење

$$A \text{ конвексан скуп } \Leftrightarrow tA + sA = (t+s)A, \text{ за свако } t, s > 0 \tag{4'}$$

(⇒:)

$$\begin{aligned} x \in (t+s)A &\Leftrightarrow x = (t+s)y, y \in A \\ &\Leftrightarrow x = ty + sy \\ &\Rightarrow x \in tA + sA \end{aligned}$$

тј. доказали смо

$$(t+s)A \subseteq tA + sA.$$

Нека

$$\begin{aligned} x \in tA + sA \Leftrightarrow\ & x = ty + sz, \quad y, z \in A \\ \Leftrightarrow\ & x = (t+s)\underbrace{\left(\frac{t}{t+s}y + \frac{s}{t+s}z\right)}_{\in A} \quad \text{јер је } A \text{ конвексан скуп} \\ \Rightarrow\ & x \in (t+s)A \end{aligned}$$

тј. доказали смо

$$tA + sA \subseteq (t+s)A$$

па имамо да је $tA + sA = (t+s)A$.

($\Leftarrow$:) Нека $x, y \in A$ и $\lambda \in [0,1]$, тада је

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda A + (1-\lambda)A &= \big(\lambda + (1-\lambda)\big)A, \quad \text{на основу претпоставке} \\ &= A. \end{aligned}$$

па је A конвексан скуп.

Прелазимо сада на доказ једнакости (4).

Нека су $x \in \overline{A}$ и $y \in \operatorname{int} A$ две произвољне тачке. Тада пошто $y \in \operatorname{int} A$ постоји $r > 0$ тако да је $K(y,r) \subset A$. За произвољно $\lambda \in [0,1)$, али фиксирано и тако одређено r, за $\varepsilon = \dfrac{\lambda r}{1-\lambda}$, пошто $x \in \overline{A}$ постоји $x_0 \in A \cap K(x,\varepsilon)$. За тако одређено x_0 ставимо $z_0 = (1-\lambda)x_0 + \lambda y$. Тада имамо

$$\begin{aligned} K(z_0, \lambda r) &= z_0 + \lambda r K(\theta, 1) \\ &= (1-\lambda)x_0 + \lambda y + \lambda r K(\theta, 1) \\ &= (1-\lambda)x_0 + \lambda\big(y + rK(\theta,1)\big) \\ &= (1-\lambda)x_0 + \lambda K(y, r) \\ &\subset (1-\lambda)A + \lambda A, \quad \text{јер } (1-\lambda)x_0 \in (1-\lambda)A \text{ и } K(y,r) \subset A \\ &= \big((1-\lambda) + \lambda\big)A \quad \text{(на основу (4'))} \\ &= A \end{aligned}$$

стога $z_0 \in \operatorname{int} A$.

Нека је

$$z = (1-\lambda)x + \lambda y \tag{5}$$

тада је

$$\|z - z_0\| = (1-\lambda)\|x - x_0\| < (1-\lambda)\varepsilon = \lambda r$$

што значи да $z \in K(z_0, \lambda r)$, а како $K(z_0, \lambda r) \subset A$ следи $z \in \operatorname{int} A$.

Пошто смо за λ изабрали произвољни елемент из $[0, 1)$ и за такво λ одредили z помоћу (5), то за $\lambda_n = \dfrac{1}{1+n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ постоји низ $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у $\operatorname{int} A$ тако да

$$z_n = \left(1 - \frac{1}{1+n}\right)x + \frac{1}{1+n}y \to x \quad (n \to \infty)$$

а одатле $x \in \overline{(\operatorname{int} A)}$. Према томе, доказали смо импликацију

$$x \in \overline{A} \Rightarrow x \in \overline{(\operatorname{int} A)}$$

односно $\overline{A} \subset \overline{(\operatorname{int} A)}$. Како је $\overline{(\operatorname{int} A)} \subset \overline{A}$, тиме смо доказали једнакост (4). $\square$

У наставку овог одељка разматрамо врсте конуса и њихове међусобне односе.

Дефиниција 5.2. ([11]) P је нормалан конус ако постоји константа $M > 0$ тако да за свако $x, y \in P$ важи

$$\theta \preceq x \preceq y \Rightarrow \|x\| \le M\|y\|. \tag{6}$$

Најмањи позитивни број M који задовољава (6) назива се нормална константа конуса P. Једноставно се доказује да је нормална константа ≥ 1 ([42]).

Теорема 5.1. ([11]) *P је нормалан конус ако и само ако је*

$$\inf\left\{\|x+y\| : x, y \in P \wedge \|x\| = \|y\| = 1\right\} > 0. \tag{7}$$

Доказ. Претпоставимо да је P нормалан конус и $x, y \in P, \|x\| = \|y\| = 1$. Тада је

$$\begin{aligned}\theta \preceq x \preceq x + y &\Rightarrow \|x\| \le M\|x+y\| \\ &\Rightarrow 1 \le M\|x+y\|, \quad \text{јер је } \|x\| = 1 \\ &\Leftrightarrow \|x+y\| \ge \frac{1}{M}, \quad \text{за свако } x, y \in P, \|x\| = \|y\| = 1,\end{aligned}$$

а одатле је

$$\inf\left\{\|x+y\| : x, y \in P \wedge \|x\| = \|y\| = 1\right\} \ge \frac{1}{M} > 0.$$

Докажимо сада да ако је испуњен услов (7) да је тада конус P нормалан. Претпоставимо супротно, тада за свако $n \in \mathbb{N}$ постоје низови $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у конусу P такви да је

$$\theta \preceq x_n \preceq y_n \text{ и } n\|y_n\| \le \|x_n\|, \tag{8}$$

а тада је $x_n \neq \theta$ и $y_n \neq \theta$ $(n \in \mathbb{N})$, јер у супротном следило би $x_n = \theta$ или $y_n = \theta$ за неко $n \in \mathbb{N}$ што је немогуће с обзиром на услове (8).

Посматрајмо низове

$$u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|},\ v_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Приметимо да је $u_n, v_n \in P$ (Дефиниција 5.1 (p_2)) и $\|u_n\| = \|v_n\| = 1$.
Пошто из (8) имамо $\dfrac{\|x_n\|}{n\|y_n\|} > 1$, то је $y_n \prec \dfrac{\|x_n\|}{n\|y_n\|}y_n$, стога из прве релације из (8) налазимо

$$\theta \prec x_n \prec \frac{\|x_n\|}{n\|y_n\|}y_n \Rightarrow \theta \prec \frac{x_n}{\|x_n\|} \prec \frac{1}{n}\frac{y_n}{\|y_n\|}$$

тј. $\theta \prec u_n \prec \dfrac{1}{n}v_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

На основу дефиниције релације $\preceq$ имамо

$$\frac{1}{n}v_n - u_n \in P \text{ и } \frac{1}{n}v_n - u_n \neq \theta \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ако уочимо низ

$$z_n = \frac{\frac{1}{n}v_n - u_n}{\left\|\frac{1}{n}v_n - u_n\right\|} \in P \text{ и } \|z_n\| = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тада је

$$\begin{aligned}
\|u_n + z_n\| &= \left\|u_n + \frac{\frac{1}{n}v_n - u_n}{\left\|\frac{1}{n}v_n - u_n\right\|}\right\| = \left\|\left(1 - \frac{1}{\left\|\frac{1}{n}v_n - u_n\right\|}\right)u_n + \frac{\frac{1}{n}}{\left\|\frac{1}{n}v_n - u_n\right\|}v_n\right\| \\
&\le \left|1 - \frac{1}{\left\|\frac{1}{n}v_n - u_n\right\|}\right|\|u_n\| + \frac{\frac{1}{n}}{\left\|\frac{1}{n}v_n - u_n\right\|}\|v_n\| \\
&\le \left|1 - \frac{1}{\left\|\frac{1}{n}v_n - u_n\right\|}\right| + \frac{\frac{1}{n}}{\left\|\frac{1}{n}v_n - u_n\right\|},
\end{aligned} \tag{9}$$

пошто је $\|u_n\| = \|v_n\| = 1$.

Међутим, како је

$$-\frac{1}{n}\|v_n\| + \|u_n\| \leq \left\|\frac{1}{n}v_n - u_n\right\| \leq \frac{1}{n}\|v_n\| + \|u_n\|,$$

тј.

$$1 - \frac{1}{n} \leq \left\|\frac{1}{n}v_n - u_n\right\| \leq 1 + \frac{1}{n},$$

а одатле је $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}v_n - u_n\right\| = 1$.

Ако у неједнакости (9) пустимо да $n \to \infty$ добијамо

$$\limsup_{n\to\infty} \|u_n + z_n\| \leq 0, \text{ тј. } \lim_{n\to\infty} \|u_n + z_n\| = 0.$$

Како је $\|u_n\| = \|z_n\| = 1$ и $u_n, z_n \in P$ $(n = 1, 2, \ldots)$, добијамо контрадикцију услову (7). □

Да постоје конуси који нису нормални показују следећи примери.

Пример 5.4. ([39]) Нека је $E = C_{\mathbb{R}}^{(1)}[0,1]$ са нормом

$$\|x\| = \max_{0\leq t\leq 1} \left|x(t)\right| + \max_{0\leq t\leq 1} \left|x'(t)\right|$$

и конус $P = \left\{x \in E : x(t) \geq 0, t \in [0,1]\right\}$.

Доказ. Ако уочимо низове

$$x_n(t) = \frac{1 - \sin nt}{n+2}, \quad y_n(t) = \frac{1 + \sin nt}{n+2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

тада $x_n, y_n \in P$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \ \|x_n + y_n\| = \frac{1}{n+2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

па на основу Теореме 5.1 следи закључак. □

Следећа теорема илустративније пружа интуитивну представу о својствима нормалног конуса.

Теорема 5.2. *P је нормалан конус у* Banach-*овом простору ако и само ако из $x_n \preceq z_n \preceq y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $x_n \to x$, $y_n \to x$ $(n \to \infty)$ следи $z_n \to x$ $(n \to \infty)$, где су (x_n), (y_n) и (z_n) произвољни низови у E.*

Доказ. Нека је P нормалан конус. Тада из услова $x_n \preceq z_n \preceq y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ следи

$$\theta \preceq z_n - x_n \preceq y_n - x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

а одатле

$$\|z_n - x_n\| \leq M\|y_n - x_n\|, \tag{10}$$

пошто је P нормалан конус. Сада је

$$\begin{aligned}
\|z_n - x\| &\leq \|z_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\
&\leq M\|y_n - x_n\| + \|x_n - x\| \quad \text{користимо (10)} \\
&\leq M\big(\|y_n - x\| + \|x - x_n\|\big) + \|x_n - x\| \\
&= (M+1)\|x_n - x\| + M\|y_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Стога смо доказали да $z_n \to x$ $(n \to \infty)$.

Претпоставимо да конус P није нормалан, тада је на основу Теореме 5.1

$$\inf\big\{\|z+u\| : z, u \in P \wedge \|z\| = \|u\| = 1\big\} = 0,$$

па за свако $n \in \mathbb{N}$ постоје тачке $z_n, u_n \in P$ тако да је $\|z_n\| = \|u_n\| = 1$ и $\|z_n + u_n\| < \dfrac{1}{n}$. Међутим, ако ставимо $x_n = \theta, y_n = z_n + u_n$ тада је

$$x_n \preceq z_n \preceq y_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

и $x_n \to \theta$, $y_n \to \theta$ $(n \to \infty)$, али $z_n \nrightarrow \theta$ $(n \to \infty)$ пошто је $\|z_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тиме је Теорема доказана. □

Из претходне теореме следи закључак да је нормалност конуса P еквивалентна теореми ,,два жандара" у простору E.

Дефиниција 5.3. Конус P је регуларан ако је сваки монотоно опадајући низ који је ограничен одозго конвергентан, тј. ако је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ у P такав да је

$$\theta \preceq x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq y, \quad y \in E$$

онда постоји $x \in E$ тако да је $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Може се дати еквивалентна дефиниција да је конус P регуларан ако сваки монотоно опадајући низ који је одоздо ограничен конвергентан.

Теорема 5.3 ([11, 42]). *Сваки регуларан конус је нормалан.*

Доказ. Претпоставимо да постоји регуларан конус P који није нормалан. Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ постоје тачке $x_n, y_n \in P$ тако да је

$$\theta \preceq x_n \preceq y_n \text{ и } n^2\|y_n\| < \|x_n\|, \ (n = 1, 2, \ldots).$$

У том случају $\theta \prec y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ па можемо посматрати низове

$$u_n = \frac{x_n}{\|y_n\|}, \quad v_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

па је онда

$$u_n, v_n \in P, \ \theta \prec u_n \preceq v_n, \ \|u_n\| > n^2, \ \|v_n\| = 1. \tag{11}$$

Пошто је ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} v_n$ апсолутно конвергентан у Banach-овом простору E, тада су конвергентне и његове парцијалне суме

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} v_k \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

које припадају конусу P. Како је P затворен скуп то

$$s_n \to s \ (n \to \infty) \text{ и } s \in P.$$

Сада имамо

$$\theta \preceq s_1 \preceq s_2 \preceq \cdots \preceq s.$$

Међутим, пошто је

$$\theta \preceq u_1 \preceq u_1 + \frac{1}{2^2} u_2 \preceq u_1 + \frac{1}{2^2} u_2 + \frac{1}{3^2} u_3 \preceq \cdots,$$

и како је

$$t_n = u_1 + \frac{1}{2^2} u_2 + \cdots + \frac{1}{n^2} u_n \preceq s_n, t_n \in P \ (n = 1, 2, \ldots)$$

то је

$$\theta \preceq t_1 \preceq t_2 \preceq \cdots \preceq s.$$

P је регуларан простор, па постоји $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, $t \in P$ тј. ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} u_n$ је конвергентан, што повлачи да $\frac{1}{n^2} u_n \to \theta$ $(n \to \infty)$ што је немогуће с обзиром да је $\|u_n\| > n^2$ (релација (11)). $\square$

Напомена. Приметимо да смо тек у Теореми 5.3 експлицитно користили да је E Banach-ов простор тако да све теореме и дефиниције до Теореме 5.3 важе ако је E само нормиран простор.

Да постоје нормални конуси који нису регуларни показује следећи пример.

Пример 5.5. Нека је $E = C_{\mathbb{R}}[0,1]$ са нормом $\|x\| = \max\limits_{0 \le t \le 1} \big|x(t)\big|$ и $P = \big\{x \in E : x(t) \geq 0, t \in [0,1]\big\}$.

Доказ. Пошто је

$$\theta \preceq x \preceq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|,$$

дакле P је нормалан конус.

Ако уочимо низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у P тако да је

$$x_n(t) = 1 - t^n \geq 0, t \in [0,1], n = 1, 2, \dots,$$

тада је

$$\theta \preceq x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq y$$

где је $y(t) = 1, t \in [0,1]$.

Међутим, ако постоји $x \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ тако да $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$, тада

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t = 1 \end{cases}$$

али онда $x \notin C_{\mathbb{R}}[0,1]$, контрадикција. $\square$

Следећим примерима испитујемо однос између нормалности конуса и његове унутрашњости.

Да постоје конуси који су регуларни и имају празну унутрашњост показује следећи пример.

Пример 5.6. Нека је c_0 простор реалних нула-низова и

$$P = \big\{x = (\xi_\nu) \in c_0 : \xi_\nu \geq 0,\ \nu = 1, 2, \dots\big\}$$

Доказ. Да је $P \subset c_0$ конус једноставно се доказује проверавањем аксиома Дефиниције 5.1. Посматрајмо низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у c_0 где је $x_n = (\xi_\nu^n)_{\nu=1,2,\dots}$ тако да је

$$\theta \preceq x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq \cdots \preceq y = (\eta_\nu) \in P$$

што повлачи

$$0 \leq \xi_\nu^1 \leq \xi_\nu^2 \leq \cdots \leq \xi_\nu^n \leq \cdots \leq \eta_\nu,\ \text{за свако } \nu = 1, 2, \dots \tag{12}$$

па постоји

$$\lim_{n\to\infty} \xi_\nu^n = \xi_\nu \le \eta_\nu, \quad \nu = 1,2,\ldots \tag{13}$$

Нека је $x = (\xi_\nu)_{\nu=1,2,\ldots}$. Докажимо да $x \in P$. Заиста, из (12) и (13) следи

$$\xi_\nu \le \eta_\nu \ (\nu = 1,2,\ldots) \Rightarrow \limsup_{\nu\to\infty} \xi_\nu \le \limsup_{\nu\to\infty} \eta_\nu = 0$$

а пошто је $\xi_\nu \ge 0 \Rightarrow \liminf_{\nu\to\infty} \xi_\nu \ge 0$, стога је $\lim_{\nu\to\infty} \xi_\nu = 0$, $\xi_\nu \ge 0$, па $x \in P$.

Докажимо да $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Нека је $\varepsilon > 0$. Пошто је $x = (\xi_\nu) \in P \subset c_0$ следи да постоји $\nu_0 \in \mathbb{N}$ тако да

$$\nu > \nu_0 \Rightarrow \xi_\nu < \varepsilon$$

односно

$$\nu > \nu_0 \Rightarrow \xi_\nu - \xi_\nu^n < \varepsilon, \text{ за } n = 1,2,\ldots. \tag{14}$$

Пошто

$$\lim_{n\to\infty} \xi_\nu^n = \xi_\nu \text{ за } \nu = 1,2,\ldots,\nu_0$$

то за дато $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за

$$n > n_0 \Rightarrow \xi_\nu - \xi_\nu^n < \varepsilon, \text{ за } \nu = 1,2,\ldots,\nu_0 \tag{15}$$

односно

$$\sup_{\nu\ge 1}(\xi_\nu - \xi_\nu^n) < \varepsilon, \text{ за } n > n_0$$

тј. $\|x - x_n\| < \varepsilon$, за $n > n_0$, а одатле $\|x - x_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Докажимо да је $\operatorname{int} P = \emptyset$.

За произвољан елемент $x = (\xi_\nu) \in P$ имамо $\xi_\nu \ge 0, \nu = 1,2,\ldots$ и $\xi_\nu \to 0$ $(\nu \to \infty)$.

Зато за $\varepsilon > 0$ постоји $\nu_0 \in \mathbb{N}$ тако да

$$\nu > \nu_0 \Rightarrow \xi_\nu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Елементу $x = (\xi_\nu)$ придружимо елемент

$$y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu_0}, -\xi_{\nu_0+1}, -\xi_{\nu_0+2}, \ldots)$$

тада је

$$\|x-y\| = \sup_{\nu>\nu_0} |2\xi_\nu| = 2\sup_{\nu>\nu_0} |\xi_\nu| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Међутим, $y \notin P$, што значи да је $K(x,\varepsilon) \cap P^c \neq \emptyset$, па је $\operatorname{int} P = \emptyset$.

На основу Теореме 5.3 закључујемо да је конус P из претходног примера нормалан који има празну унутрашњост.

Напомена. Да је конус из претходног примера нормалан може се једноставније доказати. Заиста, ако су $x = (\xi_\nu)$ и $y = (\eta_\nu)$ елементи c_0, тада је

$$\theta \preceq x \preceq y \Leftrightarrow 0 \le \xi_\nu \le \eta_\nu \text{ за } \nu = 1, 2, \ldots$$

па из последње неједнакости следи

$$0 \le \xi_\nu \le \sup_{\nu \ge 1} |\eta_\nu| \text{ за свако } \nu = 1, 2, \ldots$$

а одатле

$$\sup_{\nu\ge 1} |\xi_\nu| \le \sup_{\nu \ge 1} |\eta_\nu|\,, \text{ тј. } \|x\| \le \|y\|\,.$$

Примећујемо да је константа нормалности конуса P једнака 1.

Конус из Примера 5.4 није нормалан и има непразну унутрашњост (видети [42], [3]).

Конус из Примера 5.1 је регуларан и има непразну унутрашњост.

5.2. Конусни метрички простори

У наставку свуда под E подразумевамо Banach-ов простор који садржи конус P и сходно томе парцијално уређење $\preceq$ у простору E.

Дефиниција 5.4. ([61]) Нека је X непразан скуп и нека $d : X^2 \to E$ задовољава аксиоме

(d_1) $\theta \preceq d(x,y)$, $\quad d(x,y) = \theta \Leftrightarrow x = y$, за свако $x, y \in X$;

(d_2) $d(x,y) = d(y,x)$, за свако $x, y \in X$;

(d_3) $d(x,y) \preceq d(x,z) + d(z,y)$,за свако $x, y, z \in X$.

Тада d називамо конусна метрика на скупу X, а (X,d) конусни метрички простор.

Пример 5.7. ([61]) Нека је $E = \mathbb{R}^2, P = \{(x, y) \in E : x \geq 0, y \geq 0\}, X = \mathbb{R}$ и $d : X^2 \to E$ дефинисано помоћу $d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$, где је $\alpha > 0$ константа. Онда је (X, d) конусни метрички простор.

Пример 5.8. ([39]) Ако је $X \neq \emptyset$ и $E = \mathbb{R}, P = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Тада је конусни метрички простор (X, d) обичан метрички простор.

Пример 5.9. Нека је $E = c_0, P = \{x = (\xi_\nu) \in c_0 : \xi_\nu \geq 0, \nu = 1, 2, \ldots\}$ и $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ фиксиран позитиван нула низ, тј. $\alpha_\nu > 0, \alpha_\nu \to 0 (\nu \to \infty)$, (X, ρ) метрички простор и $d : X^2 \to \mathbb{R}$ дефинисано помоћу $d(x, y) = \big(\alpha_\nu \rho(x, y)\big)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Онда је (X, d) конусни метрички простор.

Претходни пример показује да је категорија конусних метричких простора већа од категорије обичних метричких простора.

У наставку претпостављамо, ако другачије није речено, да је конус P телесни, тј. $\operatorname{int} P \neq \emptyset$.

Дефиниција 5.5. ([61]) Нека је (X, d) конусни метрички простор, $x \in X$, и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ у X. Тада

1° $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка x ако и само ако за свако $c \gg \theta$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да важи

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) \ll c.$$

Ово означавамо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ или $x_n \to x \ (n \to \infty)$.

2° $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је Cauchy-јев низ ако и само ако за свако $c \gg \theta$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да важи

$$m > n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) \ll c;$$

3° (X, d) је комплетан конусни метрички простор ако је сваки Cauchy-јев низ у њему конвергентан.

У наставку одељка користимо следеће леме.

Лема 5.3. 1° *Ако* $c \in \operatorname{int} P, \theta \preceq a_n$ *и* $a_n \to \theta \ (n \to \infty)$ *онда постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *тако да важи*

$$n > n_0 \Rightarrow a_n \ll c.$$

2° *Ако* $\theta \preceq d(x_n, x) \preceq b_n$ *и* $b_n \to \theta$ $(n \to \infty)$, *онда* $d(x_n, x) \ll c$, *где су* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* x *низ и дата тачка у* X *респективно.*

3° *Ако* $\theta \preceq a_n \preceq b_n$ *и* $a_n \to a, b_n \to b$ $(n \to \infty)$ *онда* $\theta \preceq a \preceq b$.

Доказ. Видети ([39]). □

Лема 5.4. ([61]) *Нека је* (X, d) *конусни метрички простор и* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ у* X, *онда ако*

$$d(x_n, x) \to \theta \ (n \to \infty) \text{ у } E \Rightarrow x_n \to x \ (n \to \infty) \text{ у } (X, d).$$

Ако је P *нормалан конус тада имамо обрнуту импликацију, тј.*

$$x_n \to x \ (n \to \infty) \text{ у } (X, d) \Rightarrow d(x_n, x) \to \theta \ (n \to \infty) \text{ у } E.$$

Доказ. Нека је $c \gg \theta$ произвољан елемент. Тада

$$c - d(x_n, x) \to c \in \operatorname{int} P \ (n \to \infty)$$

у Banach-овом простору E, па за околину $\operatorname{int} P$ тачке c постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да важи

$$n > n_0 \Rightarrow c - d(x_n, x) \in \operatorname{int} P$$

односно $d(x_n, x) \ll c$, за $n > n_0$, а одатле на основу Дефиниције 5.5 (1°) следи $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

Нека је P нормалан конус са нормалном константом K $(K \geq 1)$. Из Дефиниције 5.1 (p_2) закључујемо да је P затворен конвексан скуп и $\operatorname{int} P \neq \emptyset$, то на основу Леме 5.2 имамо

$$P = \overline{(\operatorname{int} P)}. \tag{16}$$

Пошто $\theta \in P$ (Дефиниција 5.1 (p_2)) тада на основу (16) за свако $\varepsilon > 0$ је $K(\theta, \varepsilon) \cap \operatorname{int} P \neq \emptyset$, међутим $\theta \notin \operatorname{int} P$ (Лема 5.1 (9°)) па постоји c тако да је

$$0 < \|c\| < \varepsilon \text{ и } c \in \operatorname{int} P \tag{17}$$

За тако нађен елемент c (Дефиниција 5.5 (1°)) постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ да

$$n > n_0 \Rightarrow \theta \preceq d(x_n, x) \ll c.$$

Како је P нормалан конус, то из претходне релације добијамо да

$$\begin{aligned} n > n_0 \Rightarrow \big\|d(x_n, x)\big\| &\leq K\|c\| \\ &< K\varepsilon \quad \text{(користимо (17))}, \end{aligned}$$

што значи да $d(x_n, x) \to \theta$ $(n \to \infty)$. $\square$

Лема 5.5. *Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ у конусном метричком простору (X, d). Тада*

$$x_n \to x \wedge x_n \to y \Rightarrow x = y.$$

Доказ. Нека је $c \gg \theta$ произвољан елемент, тада постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да

$$n > n_0 \Rightarrow d(x, x_n) \ll \frac{1}{2}\,c \wedge d(x_n, y) \ll \frac{1}{2}\,c,$$

па је

$$\begin{aligned} d(x, y) &\preceq d(x, x_n) + d(x_n, y) \\ &\ll \frac{1}{2}\,c + \frac{1}{2}\,c = c. \end{aligned}$$

Пошто је $c \gg \theta$ произвољан елемент, то на основу Леме 5.1 (4°) следи $d(x, y) = \theta$, а одатле је $x = y$ (Дефиниција 5.4 (d_1)). $\square$

Лема 5.6. ([61]) *Нека је (X, d) је конусни метрички простор и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ у X, ако*

$$d(x_m, x_n) \to \theta \ (m, n \to \infty) \text{ у } E \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ је Cauchy-јев низ у } (X, d).$$

Ако је P нормалан конус тада имамо обрнуту импликацију, тј.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ је Cauchy-јев низ у } (X, d) \Rightarrow d(x_m, x_n) \to \theta \ (m, n \to \infty) \text{ у } E.$$

Доказ. Нека је $c \gg \theta$ произвољан елемент. Тада

$$c - d(x_m, x_n) \to c \in \operatorname{int} P \ (m, n \to \infty)$$

у Banach-овом простору E, па за околину $\operatorname{int} P$ тачке c постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да важи

$$m > n > n_0 \Rightarrow c - d(x_m, x_n) \in \operatorname{int} P$$

тј. $d(x_m, x_n) \ll c$, за $m > n > n_0$, а према Дефиницији 5.5 (2°) следи да је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-јев низ.

Нека је P нормалан конус са нормалном константом K ($K \geq 1$) и нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-јев низ у (X, d). Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $c \in \operatorname{int} P$ тако да је $0 < \|c\| < \varepsilon$ (видети доказ Леме 5.4). За тако нађено c, пошто је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-јев низ у (X, d) постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да

$$m > n > n_0 \Rightarrow \theta \preceq d(x_m, x_n) \ll c.$$

Како је P нормалан конус, из претходне релације имамо

$$\begin{aligned} m > n > n_0 \Rightarrow \big\|d(x_m, x_n)\big\| &\leq K\|c\| \\ &< K\varepsilon, \end{aligned}$$

а одатле је $d(x_m, x_n) \to \theta$ $(m, n \to \infty)$. $\square$

Лема 5.7. *Ако* Cauchy-*јев низ* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *у конусном метричком простору* (X, d) *има конвергентан подниз* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *тако да* $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$ *тада* $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

Доказ. Нека је $c \gg \theta$ произвољан елемент. Тада постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да

$$m > n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) \ll \frac{1}{2}\,c,$$

а пошто $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$ то постоји $n_k \in \mathbb{N}$ тако да

$$n_k > n_0 \Rightarrow d(x_{n_k} x) \ll \frac{1}{2}\,c.$$

За $n > n_0$, имамо

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\preceq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \\ &\ll \frac{1}{2}\,c + \frac{1}{2}\,c = c, \end{aligned}$$

а одатле $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

Дефиниција 5.6. ([1]) Нека је (X, d) конусни метрички простор. Ако је $A \subset X$ $(A \neq \emptyset)$ онда се секвенцијална адхеренција $\overline{A}$ скупа A дефинише са

$$\overline{A} = \big\{x \in X : \text{ постоји низ } (x_n) \text{ у } A \text{ тако да } x_n \to x \ (n \to \infty)\big\}.$$

Дефиниција 5.7. ([1]) Непразан скуп A у конусном метричком простору је затворен ако и само ако је $A = \overline{A}$.

Лема 5.8. *Скуп* $K[x_0, c] = \{x : d(x, x_0) \preceq c\}$ *је затворен у конусном метричком простору* (X, d) *са нормалним конусом.*

Доказ. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ у $K[x_0, c]$ такав да $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Тада је

$$d(x, x_0) \preceq d(x, x_n) + d(x_n, x_0) \preceq d(x, x_n) + c. \tag{18}$$

Пошто је (X, d) са нормалним конусом из Леме 5.4, имамо да

$$x_n \to x \ (n \to \infty) \Rightarrow d(x_n, x) \to \theta \ (n \to \infty) \tag{19}$$

па ако у (18) пустимо да $n \to \infty$ и користећи (19) и Лему 5.3 (3°) добијамо $d(x, x_0) \preceq c$, тј. $x \in K[x_0, c]$. □

По аналогији са метричким простором скуп $K[x_0, c]$ је затворена кугла са центром у тачки $x_0 \in X$ и полупречника $c \in E$.

Теорема 5.4. *Конусни метрички простор* (X, d) *са нормалним конусом је комплетан ако и само ако пресек сваког монотоно опадајућег низа затворених кугли* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *у* X *чији низ полупречника тежи* θ *када* $n \to \infty$ *садржи једну тачку простора* X.

Доказ. Претпоставимо да је (X, d) комплетан конусни метрички простор са нормалним конусом P и нормалном константом K $(K \geq 1)$. Нека низ $K_n = K[x_n, c_n]$ $(n = 1, 2, \dots)$ задовољава услове $K_{n+1} \subseteq K_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $c_n \to \theta$ $(n \to \infty)$. Докажимо да је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-јев низ. Тада за $m > n$ имамо

$$x_m \in K_m \subseteq K_n \Rightarrow d(x_m, x_n) \preceq c_n.$$

Пошто је конус P нормалан следи

$$\big\|d(x_m, x_n)\big\| \leq K\|c_n\| \to 0 \ (n \to \infty),$$

јер $c_n \to \theta$ $(n \to \infty)$, па имамо да $d(x_m, x_n) \to \theta$ $(m, n \to \infty)$, а према Леми 5.5 следи да је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-јев низ. Како је (X, d) комплетан то $x_n \to x$

$(n \to \infty)$. С обзиром да $x_m \in K_n$ $(m \geq n)$, а K_n је затворен скуп, применом Леме 5.8 следи

$$x \in K_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

односно $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

Ако постоји $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, $y \neq x$, тада је

$$d(x, y) \preceq d(x, x_n) + d(x_n, y) \preceq 2c_n,$$

а одатле због нормалности конуса P

$$\big\|d(x, y)\big\| \leq 2K\|c_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

па је $x = y$. Контрадикција. Према томе, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$.

Ако (X, d) није комплетан конусни метрички простор са нормалним конусом тада је могуће конструисати низ затворених кугли $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ тако да је $K_{i+1} \subseteq K_i$, чији низ полупречника $c_i \to \theta$ $(i \to \infty)$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} K_i = \emptyset$.

Заиста, ако (X, d) није комплетан конусни метрички простор у њему постоји бар један Cauchy-јев низ (x_n) који не конвергира ни једној тачки у X. Полазећи од тог низа (x_n) одредићемо строго растући низ $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ природних бројева на следећи начин:

Ако је $c_1 \gg \theta$ тада постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ тако да

$$m > n_1 \Rightarrow d(x_m, x_{n_1}) \ll c_1.$$

Сада за $c_2 = \dfrac{1}{2}c_1$ постоји $n_2 > n_1$ тако да

$$m > n_2 \Rightarrow d(x_m, x_{n_2}) \ll c_2.$$

Ако је одређен број n_{i-1} за $c_i = \dfrac{1}{2}c_{i-1}$ постоји $n_i > n_{i-1}$ тако да

$$m > n_i \Rightarrow d(x_m, x_{n_i}) \ll c_i.$$

Посматрајмо низ

$$K_i = K[x_{n_i}, 2c_i], \text{ где } c_i = \frac{1}{2^{i-1}}c_1 \to \theta \ (i \to \infty).$$

Докажимо да је $K_{i+1} \subseteq K_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Ако $y \in K_{i+1}$ тада $d(y, x_{n_{i+1}}) \preceq 2c_{i+1}$ па је

$$\begin{aligned} d(y, x_{n_i}) &\preceq d(y, x_{n_{i+1}}) + d(x_{n_{i+1}}, x_{n_i}) \\ &\preceq 2c_{i+1} + c_i = 2 \cdot \frac{1}{2} c_i + c_i = 2c_i \end{aligned}$$

па $y \in K[x_{n_i}, 2c_i]$, тј. $y \in K_i$.

Доказаћемо да је $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} K_i = \emptyset$. Заиста, ако би постојала тачка $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} K_i$, тада имамо

$$x \in K_i \Rightarrow d(x, x_i) \preceq 2c_i \ (i = 1, 2, \ldots)$$

па за $m > n_i$ налазимо

$$\begin{aligned} d(x, x_m) &\preceq d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_m) \\ &\preceq 2c_i + c_i = 3c_i, \end{aligned}$$

а одатле

$$\big\| d(x, x_m) \big\| \leq 3K \|c_i\| = \frac{3K}{2^{i-1}} \|c_1\| \to 0 \ (i \to \infty),$$

па на основу Леме 5.4 следи да $x_m \to x$ $(m \to \infty)$, а то је у контрадикцији са претпоставком да Cauchy-јев низ (x_n) не конвергира. $\square$

Дефиниција 5.8. Низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у конусном метричком простору (X, d) је ограничене варијације ако је ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d(x_n, x_{n+1})$$

конвергентан.

Теорема 5.5. *Да би конусни метрички простор (X, d) са нормалним конусом био комплетан потребно је и довољно да сваки низ ограничене варијације конвергира.*

Доказ. Услов је потребан. Нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ ограничене варијације у конусном метричком простору (X, d) са нормалним конусом P и нормалном константом K $(K \geq 1)$. Тада је ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d(x_n, x_{n+1})$ конвергентан у Banach-овом простору, па за $\varepsilon > 0$ постоји $N \in \mathbb{N}$ тако да је

$$\left\| \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \right\| < \varepsilon, \ \text{за свако } m > n > N.$$

За $m > n > N$ имамо

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \Rightarrow \big\|d(x_m, x_n)\big\| \leq K \Bigg\| \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \Bigg\| < K\varepsilon,$$

а одатле $d(x_m, x_n) \to \theta$ $(m, n \to \infty)$, па на основу Леме 5.6 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је CAUCHY-јев низ, а како је (X, d) комплетан то $x_n \to x$ $(n \to \infty), x \in X$.

Услов је довољан. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CAUCHY-јев низ, према Леми 5.6 следи да $d(x_m, x_n) \to \theta$ $(m, n \to \infty)$. Тада постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ тако да

$$m > n_1 \Rightarrow \big\|d(x_m, x_{n_1})\big\| < \frac{1}{2}.$$

Ако је одређен $n_{k-1} \in \mathbb{N}$ одаберимо $n_k \in \mathbb{N}$ тако да је $n_k > n_{k-1}$ и

$$m > n_k \Rightarrow \big\|d(x_m, x_{n_k})\big\| < \frac{1}{2^k}.$$

Дакле, можемо издвојити подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Докажимо да је низ $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ограничене варијације. Пошто ред

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \tag{20}$$

апсолутно конвергира у BANACH-овом простору, јер је

$$\big\|d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})\big\| < \frac{1}{2^k} \ (k = 1, 2, \ldots)$$

то је и ред (20) конвергентан, односно низ (x_{n_k}) је ограничене варијације, па постоји $x \in X$ тако да $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$, а према Леми 5.7. $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. $\square$

4.3. Уопштења неких теорема о фиксним тачкама у конусним метричким просторима

За исказе следећих теорема потребна нам је следећа дефиниција.

Дефиниција 5.9. ([16]) За пресликавање $T : X \to X$, где је (X, d) конусни метрички простор, кажемо да је непрекидно у тачки $a \in X$ ако за низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ важи

$$x_n \to a \ (n \to \infty) \Rightarrow Tx_n \to Ta \ (n \to \infty)^{(\mathbf{3})}. \tag{21}$$

Пресликавање T је непрекидно на простору X ако је непрекидно у свакој тачки простора X.

У случају нормалности конуса релација (21) еквивалентна је са

$$d(x_n, a) \to \theta \ (n \to \infty) \Rightarrow d(Tx_n, Ta) \to \theta \ (n \to \infty).$$

Теорема 5.6. *Нека је (X, d) комплетан конусни метрички простор и $T, S : X \to X$ непрекидна пресликавања таква да је*

1° $T(X) \subseteq S(X)$;

2° (S, T) *слабо семикомпатибилна пресликавања*;

3° $Tu = Su \Rightarrow STu = TSu$, *за* $u \in X^{(\mathbf{4})}$ *и важи*

$$ad(Tx, Ty) + bd(Tx, Sx) + cd(Ty, Sy) \preceq d(Sx, Sy) \text{ за свако } x, y \in X \tag{22}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$ тако да је $a > 1, b < 1, a + b + c > 1$. Тада пресликавања S и T имају заједничку фиксну тачку.

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ произвољна тачка. Из услова 1° следи да постоји тачка $x_1 \in X$ тако да је $Tx_0 = Sx_1$, па индуктивним поступком можемо издвојити низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ тако да је

$$y_n = Tx_n = Sx_{n+1} \ (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

Из релације (22) стављајући $x = x_n$ и $y = x_{n+1}$ добијамо

$$ad(Tx_n, Tx_{n+1}) + bd(Tx_n, Sx_n) + cd(Tx_{n+1}, Sx_{n+1}) \preceq d(Sx_n, Sx_n),$$

а с обзиром на (23) имамо

$$ad(y_n, y_{n+1}) + bd(y_{n-1}, y_n) + cd(y_n, y_{n+1}) \preceq d(y_{n-1}, y_n),$$

а одатле је

$$d(y_n, y_{n+1}) \preceq \frac{1-b}{a+c} d(y_{n-1}, y_n) \ (n = 1, 2, \ldots).$$

(3) У ствари ово је тзв. секвенцијална непрекидност пресликавања T у тачки $a \in X$.

(4) Пар (S, T) су слабо компатибилна пресликавања дефинисана на простору X.

Ако ставимо $\lambda = \dfrac{1-b}{a+c}$, тада $\lambda \in (0,1)$ па је

$$d(y_n, y_{n+1}) \preceq \lambda d(y_{n-1}, y_n) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

а одатле је

$$d(y_n, y_{n+1}) \preceq \lambda d(y_{n-1}, y_n) \preceq \cdots \preceq \lambda^n d(y_0, y_1) \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Ако је $m > n$ вишеструком применом релације троугла (Дефиниција 5.4 (d_3)) налазимо

$$\begin{aligned} d(y_m, y_n) &\preceq \sum_{k=n}^{m-1} d(y_k, y_{k+1}) \\ &\preceq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k d(y_0, y_1) \\ &= \lambda^n \frac{1-\lambda^{m-n}}{1-\lambda} d(y_0, y_1) \\ &\preceq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(y_0, y_1). \end{aligned} \tag{25}$$

Пошто $\dfrac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d(y_0, y_1) \to \theta \ (n \to \infty)$, јер је

$$\left\| \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(y_0, y_1) \right\| = \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \left\| d(y_0, y_1) \right\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

Применом Леме 5.3 (1°) за $c \gg \theta$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(y_0, y_1) \ll c \tag{26}$$

па из (25) и (26) следи

$$m > n > n_0 \Rightarrow d(y_m, y_n) \ll c,$$

тј. $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је Cauchy-јев низ у комплетном конусном метричком простору (X, d), стога постоји

$$\lim_{n \to \infty} y_n = u, u \in X,$$

односно

$$\lim_{n \to \infty} Sx_n = \lim_{n \to \infty} Tx_n = u.$$

Пошто су пресликавања (S, T) слабо семикомпатибилна, имамо да је

$$\lim_{n \to \infty} STx_n = Tu \text{ или } \lim_{n \to \infty} TSx_n = Su.$$

Видети Дефиницију 2.2.

Претпоставимо да је $\lim\limits_{n\to\infty} STx_n = Tu$. Пошто је пресликавање S непрекидно следи $\lim\limits_{n\to\infty} STx_n = Su$, па према Леми 5.5, $Su = Tu$. Аналогно изводимо доказ да је $Su = Tu$ ако је $\lim\limits_{n\to\infty} TSx_n = Su$. Користећи 3° у исказу Теореме имамо $TSu = STu$, односно $Tz = Sz$, где је $Su = Tu = z$. Ако претпоставимо да је $Sz \neq z$, тј. $Sz \neq Su$ применом релације (22) следи

$$\begin{aligned} d(Su, Sz) &\succeq ad(Tu, Tz) + b\,\underbrace{d(Su, Tu)}_{=\theta} + c\,\underbrace{d(Tz, Sz)}_{=\theta} \\ &= ad(Su, Sz), \end{aligned}$$

а сада применом Леме 5.1 (6°) добијамо $Su = Sz$. Контрадикција. Дакле, имамо $Tz = Sz = z$.

Докажимо јединост тачке z.

Ако постоји тачка $v \in X$ тако да је $Sv = Tv$, тада истим поступком као горе доказујемо да је $Sw = Tw = w$, где је $w = Sv$. Сада, ако је $w \neq z$ имамо

$$\begin{aligned} d(z, w) = d(Sz, Sw) &\succeq ad(Tz, Tw) + bd(Tz, Sz) + cd(Tw, Sw) \\ &= ad(z, w) + b\,\underbrace{d(z, z)}_{=\theta} + c\,\underbrace{d(w, w)}_{=\theta} \\ &= ad(z, w). \end{aligned}$$

Пошто је $a > 1$ ($\Leftrightarrow 0 < 1/a < 1$) применом Леме 5.1 (6°) добијамо $z = w$. Контрадикција. $\square$

Последица 5.1. ([42]) *За $b = c = 0$ и $a > 1$, $S = i_X$ (идентичко пресликавање простора X) добијамо* Banach*-ову теорему*

$$d(Tx, Ty) \preceq \lambda d(x, y) \ (\lambda = 1/a < 1) \tag{27}$$

у конусним метричким просторима.

Доказ. Испуњени су услови претходне теореме, само још треба доказати да је пресликавање T које задовољава услов (27) непрекидно. Заиста, ако $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ тада на основу Дефиниције 5.5 (1°) за свако $c \gg \theta$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) \ll \frac{1}{\lambda}\, c,$$

па због услова (27) имамо

$$n > n_0 \Rightarrow d(Tx_n, Ta) \preceq \lambda d(x_n, a)$$
$$\ll \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} c = c,$$

тј. $Tx_n \to Ta$ $(n \to \infty)$. $\square$

У вези са овом теоремом видети [61] (Theorem 1).

Напомена. Приметимо да се у исказу Теореме 5.6 не захтева нормалност конуса.

Дефиниција 5.10. ([61]) Ако сваки низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у конусном метричком простору (X, d) има конвергентан подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ у X тада (X, d) називамо секвенцијално компактним конусним метричким простором.

Лема 5.9. *Нека је (X, d) конусни метрички простор са нормалним конусом P и нормалном константом K $(K \geq 1)$, тада ако су $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низови у X такви да $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ и $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ онда $d(x_n, y_n) \to d(x, y)(n \to \infty)$.*

За доказ видети у [61].

Теорема 5.7. *Нека је (X, d) секвенцијално компактан конусни метрички простор са регуларним конусом P. Ако је пресликавање $T : X \to X$ непрекидно и задовољава услов*

$$d(Tx, Ty) \prec \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \quad \text{за све } x, y \in X, x \neq y \tag{28}$$

тада T има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Потребно је доказати егзистенцију и јединост фиксне тачке.

1. Егзистенција фиксне тачке. Нека је $x_0 \in X$ произвољна тачка. Ставимо

$$x_1 = Tx_0, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Ако је за неко $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} = x_n$, тј. $Tx_n = x_n$, онда је x_n фиксна тачка, па је егистенција доказана.

Ако је за свако $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} \neq x_n$, тада имамо

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(Tx_n, Tx_{n+1}) &\prec \frac{d(x_n, Tx_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n)}{2} \\ &= \frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2} \\ &= \frac{1}{2}\, d(x_n, x_{n+2}) \\ &\preceq \frac{1}{2}\big(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})\big), \end{aligned}$$

па одатле следи

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \prec d(x_n, x_{n+1}) \ (n = 0, 1, \ldots).$$

Нека је $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Онда је (d_n) низ тачака у конусу P тако да је

$$d_1 \succ d_2 \succ \cdots \succ d_n \succ \cdots \succeq \theta,$$

а пошто је P регуларан конус то постоји $d^* \in P$ тако да је

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d^*.$$

Због секвенцијалне компактности простора X постоји подниз $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in N}$ и $x^* \in X$ тако да $x_{n_i} \to x^*$ $(i \to \infty)$. Како је T непрекидно пресликавање тада имао

$$Tx_{n_i} \to Tx^*, T^2x_{n_i} \to T^2x^* \ (i \to \infty)$$

а затим, користећи Лему 5.9, где смо искористили Теорему 5.3, налазимо

$$\begin{aligned} d_{n_i} = d(x_{n_i}, x_{n_i+1}) = d(x_{n_i}, Tx_{n_i}) \to d(x^*, Tx^*) \ (i \to \infty) \\ d_{n_i+1} = d(x_{n_i+1}, x_{n_i+2}) = d(Tx_{n_i}, T^2x_{n_i}) \to d(Tx^*, T^2x^*) \ (i \to \infty). \end{aligned}$$

Како су (d_{n_i}) и (d_{n_i+1}) поднизови конвергентног низа (d_n) то је

$$d(x^*, Tx^*) = d(Tx^*, T^2x^*). \tag{29}$$

Ако претпоставимо да је $Tx^* \neq x^*$ налазимо

$$\begin{aligned} d(Tx^*, T^2x^*) = d\big(Tx^*, T(Tx^*)\big) &\prec \frac{d(x^*, T(Tx^*)) + d(Tx^*, Tx^*)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\, d(x^*, T^2x^*) \\ &\preceq \frac{1}{2}\big(d(x^*, Tx^*) + d(Tx^*, T^2x^*)\big), \end{aligned}$$

а одатле је

$$d\left(Tx^*, T^2x^*\right) \prec d\left(x^*, Tx^*\right),$$

што је немогуће с обзиром на услов (29). Према томе $Tx^* = x^*$.

2. Јединост фиксне тачке.

Ако претпоставимо да постоје две фиксне тачке $u, v \in X, u \neq v, Tu = u, Tv = v$, ода је

$$\begin{aligned} d(u,v) = d(Tu,Tv) &\prec \frac{d(u,Tv)+d(v,Tu)}{2} \\ &= \frac{d(u,v)+d(u,v)}{2} \\ &= d(u,v), \end{aligned}$$

тј. добијамо контрадикцију. □

Примедба. Услов (28) у претходној теореми можемо заменити условом

$$d(Tx,Ty) \prec \frac{d(x,Tx)+d(y,Ty)}{2}, \quad x,y \in X, x \neq y.$$

Напомена. Ова теорема уопштава Fisher-ове резултате у [56].

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Aghajani, M. Abbas, J. R. Roshan: *Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces.* Math. Slovaca, **64** (2014), No. 4, 941–960.

[2] S. Aljančić: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* Beograd, 1968.

[3] I. Aranđelović, V. Mišić: *Contractive operators on topological vectors spaces.* Bulletin of IMVJ, **2** (2012), 167–171.

[4] D. F. Bailey: *Some theorems on contractive mappings.* J. London Math. Soc., **41** (1966), 101–106.

[5] I. A. Bakhtin: *The contraction principle in quasimetric spaces.* In: Functional Analysis, **30** (1989), 26–37.

[6] S. Banach: *Sur les opérations dans les ensembles et leur application aux équations intégrales.* Fund. Math., **3** (1922), 133–181.

[7] M. Boriceany, M. Bota, A. Petrusel: *Multivalued fractals in b-metric spaces.* Cent. Eur. J. Math., **8** (2010), 367–377.

[8] D. W. Boyd, J. S. Wong: *On nonlinear contractions.* Proc. Amer. Math. Soc., **20** (1969), 458–464.

[9] V. W. Bryant: *A remark on a fixed point theorem for iterated mappings.* Amer. Math. Monthly, **75** (1968), 399–400.

[10] K. M. Das, K. V. Naik: *Common fixed point for commuting maps on metric space.* Proc. Amer. Math. Soc., Vol. **77**, No. 3 (1979), 369–373.

[11] K. Deimling: *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1985.

[12] H.-S. Ding, Z. Kadelburg, E. Karapinar, S. Radenović: *Common fixed points of weak contractions in cone metric spaces.* Abstract and Appl. Analysis, **2012**, Article ID 793862, 18 pp.

[13] M. Edelstein: *On fixed and periodic point under contractive mappings.* J. London Math. Soc., **37** (1962), 74–79.

[14] T. Zamfirescu: *Fix point theorems in metric spaces.* Archiv der Mathematik, **23** (1972), 292–298.

[15] D. Ilić, V. Rakočević: *Kontraktivna preslikavanja u metričkim prostorima i uopštenja.* Univerzitet u Nišu, PMF, Niš, 2014.

[16] S. Janković, Z. Golubović, S. Radenović: *Compatible and weakly compatible mappings in cone metric spaces.* Math. Comput. Modelling, **52** (2010), 1728–1738.

[17] S. Janković, Z. Kadelburg, S. Radenović: *On cone metric spaces: A survey.* Nonlinear Analysis, **74** (2011), 2591–2601.

[18] M. Jovanović, Z. Kadelburg, S. Radenović: *Common fixed point results in metric type spaces.* Fixed Point Theory Appl., (2010) Article ID 978121, 15 pp.

[19] G. Jungck: *Common fixed points for non-continuous non-self maps on non metric spaces.* Far East J. Math. Sci., **4** (1996), No. 2, 199–215.

[20] Z. Kadelburg, S. Radenović: *A note on various types of cones and fixed point results in cone metric spaces.* Asian Journ. Math. and Appl. **2013**, Article ID amao104, 7 pages.

[21] Z. Kadelburg, S. Radenović, M. Rajović: *A note on fixed point theorems for rational Geraghty contractive mappings in ordered b-metric spaces.* Kragujevac Journal of Math., **39** (2015), No. 2, 187–195.

[22] W. Kirk, N. Shahzad: *Fixed Point Theory in Distance Spaces.* Springer International Publishing, Switzerland, 2014.

[23] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин: *Элементы теории функций и функционального анализа.* Наука, Москва, 1989.

[24] Đ. R. Kurepa: *Tableaux ramifies d'ensembles.* C. R. Acad. Sci. Paris, **198** (1934), 1563–1565.

[25] S. Kurepa: *Uvod u linearnu algebru.* Školska knjiga, Zagreb 1975.

[26] M. Maiti, J. Achari, T. K. Pal: *Remarks on some fixed points theorems.* Publ. Inst. Math. Beograd, **21** (1977), No. 35, 115–118.

[27] S. Mardešić: *Matematička analiza, Prvi dio.* Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[28] J. G. Mehta, M. L. Joshi: *On common fixed point theorem in compatible metric spaces.* Gen. Math. Notes, **2** (2011), No. 1, 55–63.

[29] D. S. Mitrinović, P. M. Vasić: *Analitičke nejednakosti.* Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[30] D. S. Mitrinović, J. D. Kečkić: *Jednačine matematičke fizike.* Beograd, 1972.

[31] В. В. Немыцкий: *Метод неподвизных точек в анализе.* УМН, **1** (1936), 141–174.

[32] R. P. Pant: *Common fixed points of noncommuting mappings.* Jour. Math. Anal. Appl., **188** (1994), 436–440.

[33] R. P. Pant: *Common fixed points of sequence of mappings.* Ganita, **47** (1992), No. 2, 43–49.

[34] R. P. Pant: *Common fixed points of four mappings.* Bull. Cal. Math. Soc., **90** (1998), 281–286.

[35] B. Prasad, B. Singh, R. Sahni: *Some approximate fixed point theorems.* Int. Journal of Math. Analysis, **3** (2009), No. 5, 203–210.

[36] S. Prus, A. Stachura: *Analiza funcjonalna w zadaniach.* Warszawa, 2007.

[37] S. Radenović: *Some remarks on mappings satisfying cyclical contractive conditions.* Afrika Matematika, DOI 10. 1007/s13370-015-0327-6.

[38] S. Radenović: *Coupled fixed point theorems for monotone mappings in partially ordered metric spaces.* Kragujevac Journal of Mathematics, **38** (2014), No. 2, 249–257.

[39] S. Radenović, Z. Kadelburg: *Quasi-contractions on symmetric and cone symmetric spaces.* Banach Journal of Mathematical Analysis, **5** (2011), no. 1, 38–50.

[40] S. Radenović, Z. Kadelburg, D. Jandrlić, A. Jandrlić: *Some results on weakly contractive maps.* Bull. Iranian Math. Soc., **38** (2012), No. 3, 625–645.

[41] B. K. Ray: *On fixed points in a compact topological space.* Bull. Calcutta Math. Soc., **74** (1982), No. 5, 287–289.

[42] Sh. Rezapour, R. Hamlbarani: *Some notes on the paper "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings".* J. Math. Anal. Appl., **345** (2008), 719–724.

[43] J. R. Roshan, V. Parvaneh, Z. Kadelburg: *Common fixed point theorems for weakly isotone increasing mappings in ordered b-metric spaces.* J. Nonlinear Sci. Appl., **7** (2014), 229–245.

[44] J. R. Roshan, V. Parvaneh, S. Sedghi, N. Shobkolaei, W. Shatanawi: *Common fixed points of almost generalized $(\psi, \varphi)_s$-contractive mappings in ordered b-metric spaces.* Fixed Point Theory Appl., **2013** (2013), 159. Available at `http://www/fixedpointtheoryandapplications.com/content/2013/1/159`

[45] J. R. Roshan, V. Parvaneh, S. Radenović, M. Rajović: *Some coincidence point results for generalized $(\psi, \varphi)-$weakly contractions in ordered b-metric spaces.* Fixed Point Theory Appl., **2015** (2015), 68.

[46] A. S. Saluja, M. K. Jain, R. K. Jhade: *Weak semi compatibility and fixed point theorems.* Bulletin of IMVJ, **2** (2012), 205–207.

[47] S. Sessa: *On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations.* Publ. Inst. Math. (Beograd), **46** (1982), 149–153.

[48] M. Tasković: *Nelinearna funkcionalna analiza, Prvi Deo.* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1993.

[49] M. Tasković, D. Aranđelović: *Teorija funkcija i funkcionalna analiza.* Teoreme, zadaci i problemi, Beograd, 1981.

[50] R. Tiwari, S. K. Shrisastava, V. K. Pathak: *Common fixed point result for weakly compatible mappings.* Bol. Asoc. Mat. Venezolana, **XIX** (2012), No. 1, 47–55.

[51] Lj. B. Ćirić: *Generalized contractions and fixed-point theorems.* Publ. Inst. Math., **12** (1971), No. 26, 19–26.

[52] Lj. B. Ćirić: *On a family of contractive maps and fixed point.* Publ. Inst. Math., **17** (1974), No. 31, 45–51.

[53] Lj. B. Ćirić: *On contraction type mappings.* Math. Balkanica, **1** (1971), 52–57.

[54] Lj. B. Ćirić: *Some recent results in metrical fixed point theory.* Beograd 2003.

[55] Lj. B. Ćirić: *Fixed-points for generalized multi-valued mappings.* Mat. Vesnik, **9** (1972), No. 24, 265–272.

[56] B. Fisher: *A fixed point mapping.* Bull. Calcutta Math. Soc., **68** (1976), No. 4, 265–266.

[57] B. Fisher: *A fixed point theorem for compact metric spaces.* Publ. Math. (Debrecen), **25** (1978), 193–194.

[58] B. Fisher: *Common fixed point of four mappings.* Bull. Inst. of Math. Academia Sinica, **11** (1983), 771–779.

[59] B. Fisher: *Quasi-contractions on metric spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., **75** (1979), No. 2, 321–325.

[60] O. Hadžić: *Osnovi teorije nepokretne tačke.* Inst. za mat. Novi Sad, 1978.

[61] L. G. Huang, X. Zhang: *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings.* J. Math. Anal. Appl., **332** (2007), 1468–1476.

[62] S. Czerwik: *Contraction mappings in b-metric spaces.* Acta Math. Inform. Univ. Ostrav, **1** (1993), 5–11.

[63] N. Van Dung, V. T. Le Hang: *On relaxation of contraction constants and Caristi's theorem in b-metric spaces.* J. Fixed Point Theory Appl.
DOI: 10.1007/s11784-015-0273-9.

Биографија

Мирко С. Јовановић рођен је у Јагодини, 31. октобра 1952. године, где је завршио основну школу и гимназију 1971. године.

Смер А Математичке групе на Природно-математичком факултету у Београду завршио је 1976. године.

Магистрирао је на Електротехничком факултету у Београду 1988. године, са темом из примењене математике: ,,Прилог теорији Fourier-ових редова“ и стекао назив магистра примењене математике.

Од 1978. до 1981. године био је запослен на Педагошкој академији у Јагодини где је предавао наставне предмете метематику и нацртну геометрију.

Године 1981. био је изабран за асистента-приправника за предмет Математика на Електротехничком факултету у Београду, Одељење у Јагодини.

Од 1986. године на Електротехничком факултету у Београду држао је вежбе из разних математичких предмета. Године 1990. изабран је за асистента за предмет Метематика на истом факултету, где и данас ради.

Списак најзначајнијих радова:

1. M. Jovanović, Z. Kadelburg, S. Radenović: *Common fixed point results in metric type spaces.* Fixed Point Theory Appl. (2010) Article ID 978121, 15 pp. /1,936 IF, 2010/

2. D. Hui-Sheng, M. Jovanović, Z. Kadelburg, S. Radenović: *Common fixed point results for generalized quasicontractions in tvs-cone metric spaces.* J. Comput. Anal. Appl., (2013) Vol. 15, No. 3, 463–470. /0,72 IF 2013/

3. V. Čuljak, M. Jovanović: *On a formula for the n-th derivative and its applications.* Math. Inequal. Appl., (2012), Vol. 15, No. 1, 211–216. /0,588 IF 2012/

4. M. Jovanović: *On Hua's inequality in strictly convex spaces.* Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 9, (1998), 47–49.

5. M. Jovanović: *On two convergence tests.* Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 16, (2005), 139–141.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-~~а~~ Мирко С. Јовановић

број индекса ______________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Прилог Теорији Апстрактних Метричких Простора

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 30.04.2016

М Јовановић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Мирко С. Јовановић

Број индекса

Студијски програм

Наслов рада Прилог Теорији Апстрактних Метричких Простора

Ментор др Зоран Каделбург, редован професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

Потписани/~~а~~ Мирко С. Јовановић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 30.04.2016.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Прилог Теорији Апстрактних Метричких Простора

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 30.04.2016.

М Јовановић