МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Мирјана Танасић

УВОЂЕЊЕ ЦЕЛИХ И РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

–Мастер рад–

Децембар, 2016.

Ментор: др Драгана Тодорић

Чланови комисије: проф. др Мирјана Ђорић

др Биљана Вујошевић

Садржај

Увод

Појам броја, у мањој или већој мери, прожима све математичке садржаје које човек усваја током свог школовања од најранијих школских дана. То у потпуности одговара улози броја као фундаменталног појма у математици. Број није само појам који се изучава у школама, већ представља и средство за спознавање реалног света и средство за функционисање човека у том свету. У процесу изучавања разних бројевних система долази до математичког развоја појединца, обогаћују се његове представе, не само о функционисању математичких принципа, већ и о вези математике и свакодневног живота и развија се представа о томе да је математика део свакодневног живота сваког од нас.

Вишевековно проучавање бројева довело је до нагомилавања знања о њиховим својствима и операцијама са бројевима. Човек постепено усваја та знања о бројевима у току свог школовања, тако што прво упознаје природне бројеве и њихове особине, затим, целе бројеве, па рационалне, реалне и на крају комплексне бројеве. Природни бројеви представљају основу из које се могу добити сви други скупови бројева. Помоћу природних бројева постепено се дефинишу цели, рационални, реални и комплексни бројеви. Сваки од наведених скупова бројева садржи претходни.

О томе како се на основу скупа природних бројева уводе скупови целих и рационалних бројева биће речи у овом раду. Показаћемо како се ти скупови уводе у основним школама, а како касније, на факултету. Видећемо колико се приступи у ова два нивоа школовања разликују.

Поглавље1. Цели и рационални бројеви у основним школама

У основним школама ученици се од 1. до 4. разреда упознају са природним бројевима и са основним рачунским операцијама: сабирањем, одузимањем, множењем и дељењем које примењују на скуп природних бројева, односно уче да рачунају. Увођење рачунских операција је поступно, креће се од сабирања, затим одузимање, па онда и друге две рачунске операције, исто тако бројеви на којима ученици примењују операције из разреда у разред све су већи. Креће се од десетица, затим се уводе стотине, и на крају милиони и милијарде.

Од петог разреда ученици сазнају да поред скупа природних бројева постоје и други скупови бројева, и да се на те новонаучене бројеве може применити све оно што важи и за природне бројеве, а што су до тада научили. Поред тога ученици се упознају и са особинама тих нових бројева које природни бројеви нису имали, нпр. да број не мора представљати целину (не мора бити цео), или да број може бити негативан, имати апсолутну вредност, може се представити у децималном облику, његов приказ може бити бесконачан итд. Све те новине везане за бројеве се усвајају у периоду од петог до седмог разреда основе школе. У овом поглављу биће илустровано на који начин се деци у основним школама представљају појмови целих и рационалних бројева и њихове особине.

1.1 Пети разред

У петом разреду обнавља се научено о природним бројевима, затим, обнавља се појам скупа $\mathbb{N}$ и скупа $\mathbb{N}_0$ и уводе се разломци и децимални бројеви. Пошто се уз помоћ природних бројева граде разломци и на разломке се примењују рачунске операције које важе и за природне бројеве, све то се обнавља у петом разреду, пре него што се дефинишу разломци и децимални бројеви.

1.1.1 Скуп природних бројева

На почетку петог разреда ученици најпре обнављају своја до тада стечена знања о скупу природних бројева. У овом одељку навешћемо како се скуп природних бројева обележава, који бројеви припадају скупу природних бројева и неке основне појмове који се односе на бројеве: шта су парни и непарани бројеви, појам претходника и следбеника Навешћемо рачунске операције које се примењују на бројеве и особине рачунских операција.

Природни бројеви су сви цели бројеви већи од нуле. Сви цели бројеви чине скуп природних бројева и њега означавамо са $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$$

Најмањи природан број је 1, а највећи природан број не може да се одреди јер је скуп природних бројева бесконачан.

Природне бројеве делимо на ПАРНЕ и НЕПАРНЕ.

Парни (облика $2k$): 2, 4, 6, 8, 10, 12...

Непарни (облика $2k + 1$): 1, 3, 5, 7, 9, 11...

Уређење скупа природних бројева

За уређење скупа $\mathbb{N}$ користимо релације: $<$ (мање), $>$ (веће), $\leq$ (мање или једнако), $\geq$ (веће или једнако).

За два различита природна броја a и b могу да важе следеће релације:

$a < b$ (читамо a је мање од b)

ако постоји $\exists c$ тако да је $b = a + c$;

$a > b$ (читамо a је веће од b)

ако постоји $\exists c$ тако да је $a = b + c$;

$a \leq b$ (читамо a је мање или једнако од b)

ако и само ако је $a = b$ или $a < b$;

$a \geq b$ (читамо a је веће или једнако од b)

ако и само ако је $a = b$ или $a > b$.

Због постојања ових правила у скупу кажемо да је скуп $\mathbb{N}$ потпуно уређен.

За природне бројеве важи и следеће:

1. $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (исто важи и за релацију $<$)
2. $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$.

Сви природни бројеви (осим броја 1) имају по два суседна природна броја: ПРЕТХОДНИКА (за 1 мањи од посматраног броја) и СЛЕДБЕНИКА (за 1 већи од посматраног броја). Број 1 нема природног претходника, његов претходник је број 0 који није природан број.

Ако скупу природних бројева придружимо нулу добијамо скуп

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots\}.$$

Пример. Скуп A чији су елементи природни бројеви мањи или једнаки од 2341, математичком формулом записујемо на следећи начин:

$$\mathrm{A} = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 2341\}.$$

Операције у скупу $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0$) и њихове особине

Операције у скупу природних бројева су: САБИРАЊЕ, ОДУЗИМАЊЕ, МНОЖЕЊЕ и ДЕЉЕЊЕ.

Сабирање: $\boldsymbol{a + b = c}$ (a –први сабирак, b –други сабирак c-збир)

Одузимање: $\boldsymbol{a - b = c}$ (a-умањеник, b-умањилац, c-разлика)

Множење: $\boldsymbol{a \cdot b = c}$ (a-први чинилац, b-други чинилац, c-производ)

Дељење: $\boldsymbol{a : b = c}$ (a-дељеник, b-делилац, c-количник)

Операције множења и дељења нису увек изводљиве у скупу $\mathbb{N}_0$, оне су у овом скупу условно изводљиве:

Да би одузимање било могуће, односно, да би разлика бројева a и b била из $\mathbb{N}_0$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$, важи да је $a \geq b$.

Да би количник два броја био из скупа $\mathbb{N}_0$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$ постоји $\exists c$ тако да је $a = b \cdot c$.

У петом разреду ученици се први пут срећу са појмовима комутативност, асоцијативност и дистрибутивност, раније су ове особине називали другачијим именима, па се сада повезује оно што знају од раније са новим што треба да се научи, а то ново су термини:

КОМУТАТИВНОСТ САБИРАЊА – Заменом места сабирака резултат остаје исти.

$$a + b = b + a$$

КОМУТАТИВНОСТ МНОЖЕЊА – Заменом места чинилаца резултат остаје исти.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

АСОЦИЈАТИВНОСТ САБИРАЊА – Када се сабирају три броја, ако се здружи први и други сабирак добије се исти резултат као и ако се здружи други и трећи сабирак.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

АСОЦИЈАТИВНОСТ МНОЖЕЊА – Код множења три броја, ако здружимо први и други чинилац добије се исти резултат као и ако здружимо други и трећи чинилац.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Комутативност и асоцијативност код неких рачунских операција важе, а код неких не.У табели је дат преглед ових операција и њихових особина:

	комутативна	асоцијативна
сабирање	јесте $a+b=b+a$	јесте $(a+b)+c=a+(b+c)$
одузимање	није јер је $24 - 6 \neq 6 - 24$	није јер је $(24 - 4) - 2 \neq 24 - (4 - 2)$
множење	јесте $a \cdot b = b \cdot a$	јесте $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
дељење	није јер је $24:6 \neq 6:24$	није јер је $(24:4):2 \neq 24:(4:2)$

За операције множења и сабирања важи:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot c + b \cdot c.$$

Ово својство називамо ДИСТРИБУТИВНОСТ множења у односу на сабирање. Исто својство важи и за операције множења и одузимања:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot c - b \cdot c.$$

Примери. Користећи својство дистрибутивности множења у односу на сабирање и одузимање, неки изрази се једноставније и брже израчунавају.

$134 \cdot 47 + 134 \cdot 53 =$

$134 \cdot (47 + 53) =$

$268 \cdot 678 - 268 \cdot 578 =$

$268 \cdot (678 - 578) =$

$134 \cdot 100 = 13\,400$ $\qquad$ $268 \cdot 100 = 26\,800$

За број који не утиче на резултат рачунске операције кажемо да је НЕУТРАЛНИ ЕЛЕМЕНТ за ту операцију.

Неутрални елемент за сабирање је нула: $a + 0 = a$.

Неутрални елемент за множење је 1: $a \cdot 1 = a$.

Нулом није могуће делити!

1.1.2 Дељивост

У овом одељку навешћемо неколико нових појмова са којима се ученици срећу први пут у петом разреду. Дефинисаћемо појам дељивости, затим ћемо описати својства дељивости, дефинисаћемо појам простог и сложеног броја, појам највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца.

Кажемо да је број a дељив бројем b ако је $a = b \cdot c$ за неко $c \in \mathbb{N}_0$. Може да се каже и другачије, да број b дели број a и пишемо $b \mid a$.

ДЕЛИЛАЦ неког броја јесте природан број којим је тај број дељив, тј. којим се може поделити без остатка.

Пример. Сви делиоци броја 20 чине скуп $D_{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$.
САДРЖАЛАЦ датог броја јесте сваки природан број који је дељив тим бројем.

Пример. Садржаоци броја 2 чине скуп $S_2 = \{2, 4, 6, 8 \dots\}$.

Скуп свих делилаца неког броја има коначан број елемената, док је скуп садржалаца неког броја бесконачан.

Својства дељивости

Ако су сабирци дељиви неким бројем онда је и збир дељив тим бројем, тј.

$$c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c \mid (a + b).$$

Ако су умањеник и умањилац дељиви неким бројем онда је и разлика дељива тим бројем:

$$c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c \mid (a - b).$$

Ако је један чинилац производа дељив неким бројем, онда је и производ дељив тим бројем:

$$c \mid a \vee c \mid b \Rightarrow c \mid a \cdot b.$$

Све ово написано за збир, разлику и производ може се видети на примерима.

Примери.

Не израчунавајући збир, разлику, производ имамо:

Како $5 \mid 70 \wedge 5 \mid 55$ онда $5 \mid (70 + 55)$.

Како $3 \mid 126 \wedge 3 \mid 30$ онда $3 \mid (126 - 30)$.

Пошто је довољно да један чинилац буде дељив неким бројем да би цео производ био дељив закључујемо из: $2 \mid 18$ следи да $2 \mid 123 \cdot 21 \cdot 18$.

Како $2 \mid 16$ онда $2 \mid 16 \cdot 25$ и како $2 \mid 90$ онда $2 \mid 31 \cdot 90$. Па пошто 2 дели оба производа онда 2 дели и њихов збир: $2 \mid (16 \cdot 25 + 31 \cdot 90)$.

Да сви ови искази јесу тачни може се лако проверити њиховим израчунавањем.

Дељивост декадним јединицама и бројевима 2, 3, 4, 5, 9, 25

Навешћемо правила по којима препознајемо да ли је посматрани број дељив са неким од горе наведених бројева.

Број је дељив ДЕКАДНОМ ЈЕДИНИЦОМ ако на крају има онолико нула колико их има та декадна јединица.

Брје је дељив СА 2 ако му је последња цифра 0, 2, 4, 6 или 8.

Број је дељив СА 3 ако му је збир цифара дељив са 3 (збир цифара броја 126 је $1 + 2 + 6 = 9$) .

Број је дељив СА 4 ако му је двоцифрени завршетак дељив са 4 (двоцифрени завршетак броја 2 3**64** је **64**).

Број је дељив СА 5 ако му је задња цифра 0 или 5.

Број је дељив СА 9 ако му је збир цифара дељив са 9.

Број је дељив СА 25 ако му је двоцифрени завршетак дељив са 25, тј. ако му је двоцифрени завршетак 00, 25, 50 или 75.

Ово су примери задатака кроз које ученици петог разреда усвајају и утврђују своје знање о дељивости бројева.

Примери. Испитати тачност следећих тврђења:

а) $10 \mid 40$, б) $100 \mid 550$, в) $1000 \mid 55\,000$, г) $10 \mid 7000$, д) $1000 \mid 4\,300$.

Знајући правило о дељивости декадним јединицама закључујемо да су тачна тврђења а), в), г).

Примери. Који су од следећих бројева дељиви са 2:

32, 48, 61, 250, 1234, 5 252, 300 003?

Такође, морамо знати правила о дењивости да бисмо одговорили и на ово питање: дељиви су 32, 48, 250, 1234, 5252.

Примери. Које цифре могу заменити слово тако да важи:

а) $3 \mid 45b$, б) $4 \mid b64$, в) $9 \mid 97b0$, г) $25 \mid 1b45$?

Одговори: а) 0, 3, 6, 9, б) цифре од 1 до 9, в) 2, г) ниједна цифра.

Пример. Из скупа $S = \{12, 42, 54, 80, 306, 554, 2\,007, 7\,002\}$ издвој бројеве који су дељиви са 2 и са 3.
Одговор:12, 42, 54, 306, 7 002.

Пример. Напиши све троцифрене бројеве дељиве са 5 у којима се јављају само цифре 0, 1 и 2, при чему се цифре могу понављати.
Одговор: 100, 110, 120, 200, 210, 220.

Прости и сложени бројеви

Природни бројеви већи од 1 који имају тачно два делиоца, број 1 и самог себе, називају се ПРОСТИ БРОЈЕВИ. Прости бројеви су: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31...

Природни бројеви већи од 1 који имају више од два делиоца називају се СЛОЖЕНИ БРОЈЕВИ. Сложени бројеви су: 4, 6, 8, 9, 10,12, 14, 15, 16...

Број 1 има само једног делиоца и то је број 1. Број 1 није ни прост ни сложен.

Број 2 је једини паран број који је прост.

Два броја су УЗАЈАМНО ПРОСТА ако немају више заједничких делилаца осим броја 1. Узајамо прости бројеви су: 3 и 7, 13 и 47, 5 и 29...

Бројеви 15 и 8 нису прости, али јесу узајамно прости:
$D_{15} = \{1,3,5,15\}$ и $D_8 = \{1,2,4,8\}$, али $D_{15} \cap D_8 = \{1\}$, што значи да 15 и 8 јесу узајамно прости.

Растављање на чиниоце

Раставити број на чиниоце значи представити сложен број у облику производа простих чинилаца. Раставићемо неколико бројева на чиниоце:

65 = 5 · 13,
105 = 3 · 5 ·7,
48 = 2 · 2 · 2 · 2 · 3.

Највећи заједнички делилац (НЗД)

Највећи од свих заједничких делилаца бројева a и b називамо НАЈВЕЋИ ЗАЈЕДНИЧКИ ДЕЛИЛАЦ бројева a и b и означавамо га са $D(a, b)$.

Постоји поступак за одређивање највећег заједничког делиоца за два или више бројева. Посматране бројеве растављамо на просте чиниоце и када се заврши тај поступак НЗД представља производ тих простих чинилаца.

Пример.

$$\begin{array}{r|l} 24,\ 36 & 2 \\ 12,\ 18 & 2 \\ 6,\ \ 9 & 3 \\ 2,\ \ 3 & \end{array}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 = \text{НЗД}(24{,}36)$$

Поступак је следећи: Делимо задате бројеве простим бројевима, који могу да поделе оба задата броја. Дељење завршавамо када резултат тих дељења буду узајамно прости бројеви.

Најмањи заједнички садржалац (НЗС)

Најмањи од свих заједничких садржалаца бројева a и b називамо НАЈМАЊИ ЗАЈЕДНИЧКИ САДРЖАЛАЦ бројева a и b и означавамо га са $S(a,b)$.

Постоји поступак и за одређивање НЗС-а, он се такође своди на то да се задати бројеви деле простим делиоцима, али овде је довољно да један од задатих бројева буде дељив са простим делиоцем да би се дељење извршило. Поступак се понавља све док се од задатих бројева, дељењем, не дође до јединица. НЗС је производ тих простих бројева (којима смо делили).

Пример:

$$\begin{array}{r|l} 54,\ 90 & 2 \\ 27,\ 45 & 3 \\ 9,\ 15 & 3 \\ 3,\ \ 5 & 3 \\ 1,\ \ 5 & 5 \\ 1,\ \ 1 & \end{array}$$

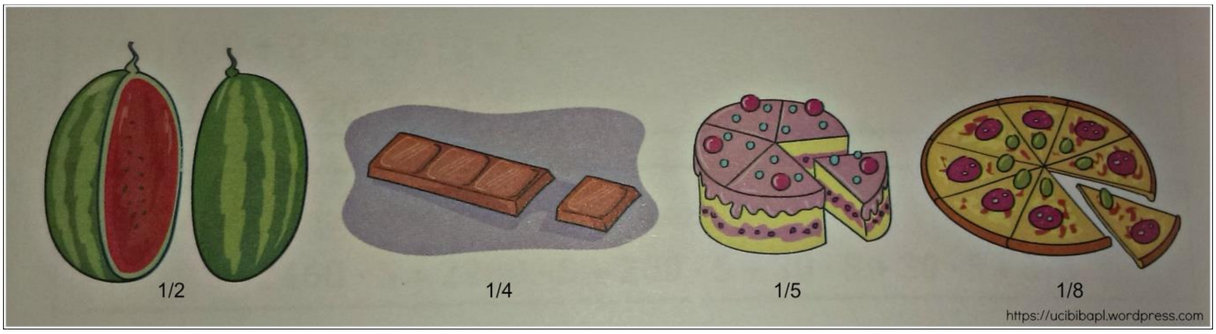
$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 270 = \text{НЗС}(54, 90)$$

Пошто се, на почетку петог разреда, обнови стечено знање о природним бројевима и науче неки нови термини и операције са бројевима које ће бити примењиване и код разломака, на ред долази упознавање са појмом разломка и његовим особинама.

1.1.3 Разломак

При увођењу појма разломка потребно је дефинисати и његове особине и рачунске операције које се на њега примењују. О томе ће бити речи у овом одељку. Увешћемо разломак на начин како се то ради у петом разреду, навести врсте разломака, навести особине разломака, применићемо рачунске операције на разломке, дефинисати децималне бројеве и приказаћемо разломке на бројевној правој.

Када се уводе разломци у петом разреду, прво је потребно ученицима приближити појам разломка. Један од начина је да им се постави питање шта добију када поделе са неким неку целину (пицу, јабуку и сл.). Они треба да закључе да добију део те целине и тај део који су добили је, заправо, разломак. У зависности од тога са колико особа деле целину, „разломак који добијају“ се разликује. Могу добити једну половину (ако деле само двоје), једну четвртину (ако деле четворо), једну десетину (ако дели десет особа) итд. Такође, уз ово објашњење корисно је користити слику целине која је подељена.

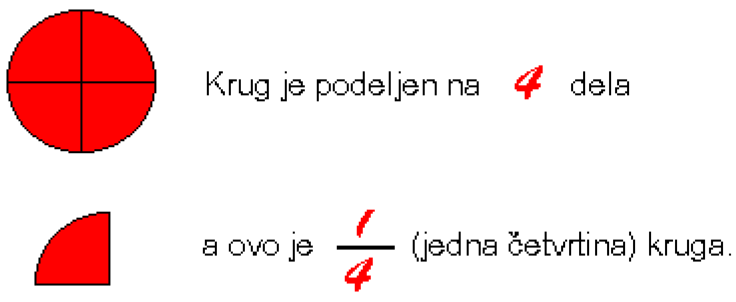


На овој слици се види да, ако је целина подељена на два дела појединац добија једну половину, ако на четири дела добија једну четвртину, ако на пет делова добија једну петину, а ако је целина подељена на осам делова појединац добија једну осмину.
Када ученици стекну појам о томе шта је то разломак, уводи се правилан запис разломка и уводе се термини који су везани за разломке.

Разломак записујемо помоћу два природна броја и разломачке црте која се налази између тих бројева:

$$\frac{a}{b}.$$

Број a који се налази изнад разломачке црте назива се БРОЈИЛАЦ, а број b, испод разломачке црте назива се ИМЕНИЛАЦ.



На слици видимо целину која је подељена на четвртине и закључујемо да се једна целина састоји из четири четвртине, ако је целина подељена на половине састоји се из две половине, ако на трећине састоји се из три трећине, ако на петине састоји се из пет петина, па следи:

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5}.$$

Разломак је, заправо количник два природна броја. Разломачка црта је симбол за дељење, односно:

$$\boxed{\frac{a}{b} = a : b}$$

за $a, b \in \mathbb{N}$.

За природне бројеве a и b и за 0 важе следеће особине:

1. Ако је $a = b$, тада је $\frac{a}{b} = 1$ (нпр. ако је $a = 2, b = 2$ онда је $\frac{a}{b} = \frac{2}{2} = 1$).
2. Ако је a дељиво са b, тада је разломак $\frac{a}{b}$ природан број (нпр, ако је $a = 4, b = 2$ онда је $\frac{a}{b} = \frac{4}{2} = 2$).
3. Сваки природан број n можемо записати у облику $\frac{n}{1}$, јер је $\frac{n}{1} = n : 1 = n$.
4. Број 0 се, такође, може записати у облику разломка чији је именилац било који природан број n, јер је $\frac{0}{n} = 0 : n = 0$.

Врсте разломака

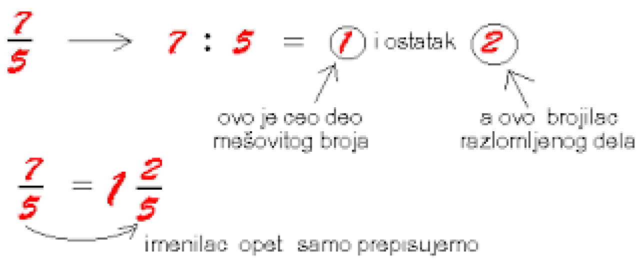
Разломци могу бити ПРАВИ и НЕПРАВИ. Прави разломци су они који су мањи од 1, а остали су неправи тј:
-Ако је $a < b$ тада је разломак $\frac{a}{b}$ прави.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{5}{14}, \frac{32}{45} \ldots$

-Ако је $a \geq b$ тада је разломак $\frac{a}{b}$ неправи.

Пример. $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{15}{11} \ldots$

Сваки неправи разломак се може записати у облику МЕШОВИТОГ БРОЈА. Мешовити број се састоји од целог дела и разломљеног дела. Постоји поступак за претварање неправог разломка у мешовити број:



Навешћемо још неколико примера мешовитог броја:

$\frac{5}{2} = 5:2 = 2\frac{1}{2}$ (читамо два цела и једна половина),

$\frac{34}{7} = 34:7 = 4\frac{6}{7}$ (четири цела и шест седмина).

Такође, мешовити број можемо представити у облику разломка, и овако изгледа формула за тај поступак:

$$2\frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{11}{5}.$$

Проширивање и скраћивање разломака

Када бројилац и именилац неког разломка помножимо истим природним бројем $n > 1$ кажемо да смо ПРОШИРИЛИ тај разломак бројем *n*.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

Сваки разломак може да се прошири било којим природним бројем $n > 1$.

Пример. Проширићемо разломке $\frac{2}{3}, \frac{17}{24}$ са 2 и са 11.

$\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$, после проширивања добијамо разломак $\frac{4}{6}$.

$\frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 11} = \frac{22}{33}$, после проширивања добијамо разломак $\frac{22}{33}$.

$\frac{17 \cdot 2}{24 \cdot 2} = \frac{34}{48}$, после проширивања добијамо разломак $\frac{34}{48}$.

$\frac{17 \cdot 11}{34 \cdot 11} = \frac{187}{374}$, после проширивања добијамо разломак $\frac{187}{374}$.

Када бројилац и именилац неког разломка поделимо истим природним бројем $n > 1$ кажемо да смо СКРАТИЛИ тај разломак са *n*.

$$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$$

Разломак $\frac{a}{b}$ може се скратити само бројем који је заједнички делилац бројева a и b (бројем који може да подели и број a и број b). Највећи заједнички делилац бројева a и b највећи је број којим се разломак $\frac{a}{b}$ може скратити.

Пример. Скратићемо разломак $\frac{16}{20}$:

$\frac{16}{20} = \frac{16:4}{20:4} = \frac{4}{5}$, после скраћивања добили смо разломак $\frac{4}{5}$.

Разломак чији су бројилац и именилац узајамно прости, не може се даље скраћивати и такве разломке називамо НЕСВОДЉИВИМ. Несводљиви разломци су: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{2} \dots$

Упоређивање разломака

1. Ако разломци ИМАЈУ ЈЕДНАКЕ ИМЕНИОЦЕ они се упоређују тако што им посматрамо бројиоце. Већи је онај разломак чији је бројилац већи.

Пример. Упоредити разломке $\frac{2}{5}$ и $\frac{4}{5}$.
Посматрамо бројиоце, већи је бројилац 4 па је и тај разломак већи: $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$.

Пример. Поређати разломке по величини од најмањег до највећег: $\frac{10}{11}, \frac{6}{11}, \frac{8}{11}$.
Одговор: $\frac{6}{11} < \frac{8}{11} < \frac{10}{11}$.

2. Ако разломци које треба упоредити НЕМАЈУ ЈЕДНАКЕ ИМЕНИОЦЕ није их могуће одмах упоредити (у том облику). Прво треба разломке проширити тако да имају једнаке имениоце па их је онда могуће упоређивати. Разломци се своде на разломке са једнаким имениоцима тако што се прво за задате имениоце одреди НЗС, а онда се до НЗС-а имениоци проширују. Са истим бројем са којим се проширује именилац, проширује се и бројилац.

Пример Упоредити разломке $\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{12}$.

Разломци немају исте имениоце па се прво за њих одређујуе НЗС: НЗС(8,3) = 24. Затим, се разломци проширују тако да им имениоци буду број 24:
$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$ и $\frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{14}{24}$. Ове добијене разломке је могуће упоредити: $\frac{15}{24} > \frac{14}{24}$, па закључујемо да је $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$.

Мешовите бројеве није могуће упоређивати у задатом облику, него је потребно прво их претворити у неправе разломке па се онда врши упоређивање.

Примери. Упоредити а) $2\frac{1}{5}$ и $4\frac{3}{7}$, б) $1\frac{5}{9}$ и $1\frac{3}{4}$.
а) Без рачунања видимо да је већи онај број који има више целих:

$$2\frac{1}{5} < 4\frac{3}{7}.$$

б) $1\frac{5}{9} = \frac{14}{9} = \frac{14 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{56}{36}$ и $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{63}{36}$, следи $\frac{56}{36} < \frac{63}{36}$ и добијамо да је $1\frac{5}{9} < 1\frac{3}{4}$.

Сабирање и одузимање разломака

Разломци са ЈЕДНАКИМ ИМЕНИОЦИМА СЕ САБИРАЈУ тако што им се бројиоци саберу, а именилац препише:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Разломци са ЈЕДНАКИМ ИМЕНИОЦИМА СЕ ОДУЗИМАЈУ тако што се од бројиоца умањеника одузме бројилац умањиоца, а именилац са препише:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Навешћемо неколико примера.

Примери.

а) $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}$,

б) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$,

в) $4\frac{3}{4} + 12\frac{1}{4} = 16\frac{3+1}{4} = 16\frac{4}{4} = 17$ (сабира се цео део са целим делом, а разломак са разломком),

г) $8\frac{2}{5} - 5\frac{4}{5} = 7\frac{7}{5} - 5\frac{4}{5} = 2\frac{3}{5}$ (ако је разломљени део умањиоца већи од разломљеног дела умањеника пре одузимања се од целог дела умањеника узима 1 цео, претвара у разломак и додаје на разломљени део који већ постоји у умањенику),

д) $\frac{2}{11} + \frac{5}{11} + \frac{9}{11} = \frac{2+5+9}{11} = \frac{16}{11} = 1\frac{5}{11}$.

Разломке РАЗЛИЧИТИХ ИМЕНИЛАЦА САБИРАМО тако што их, проширивањем, доводимо на разломке једнаких именилаца, а онда их саберемо као разломке једнаких именилаца.

Пример.

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, одређујемо НЗС(3,4) = 12,

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 4} + \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$.

Разломке РАЗЛИЧИТИХ ИМЕНИЛАЦА ОДУЗИМАМО тако што их, проширивањем, доводимо на разломке једнаких именилаца, а онда их одузимамо као разломке једнаких именилаца.

Пример.

$5\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, НЗС(4, 2) = 4,

$5\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{23}{4} - \frac{1\cdot 2}{2\cdot 2} = \frac{23}{4} - \frac{2}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.

Својства сабирања

За свака три разломка $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}$ важи:

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ (комутативност сабирања),
2. $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$ (асоцијативност сабирања).

Нула је неутрални елемент за сабирање разломака. Нула има посебно место у сабирању и одузимању разломака:

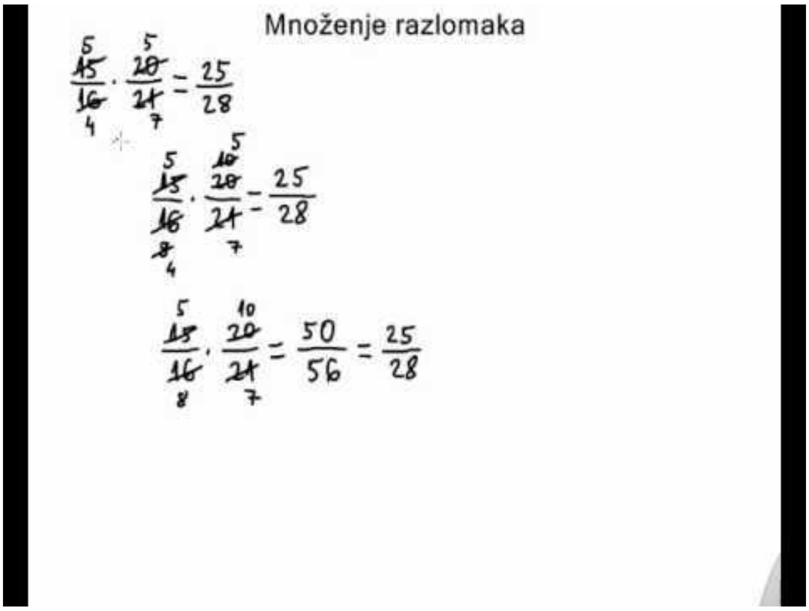
1) $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$,
2) $\frac{a}{b} - 0 = \frac{a}{b}$,
3) $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$.

Множење разломака

Разломци се множе тако што се помноже бројилац једног разломка са бројиоцем другог и именилац једног са имениоцем другог разломка:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

При множењу два разломка можемо скраћивати бројилац једног и именилац другог разломка на неколико начина који су приказани на слици.



Примери.

а) $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35}$,
б) $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{7} = \frac{5}{4} \cdot \frac{23}{7} = \frac{115}{28} = 4\frac{3}{28}$.

Реципрочна вредност разломка

Реципрочна вредност разломка $\frac{a}{b}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ јесте разломак $\frac{b}{a}$, јер је $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Примери.

Разломку $\frac{2}{5}$ реципрочна вредност је $\frac{5}{2}$.

Разломку $\frac{1}{4}$ реципрочна вредност је $\frac{4}{1} = 4$.

Броју $2 = \frac{2}{1}$ реципрочна вредност је $\frac{1}{2}$.

Мешовитом броју $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ реципрочна вредност је $\frac{3}{8}$.

Дељење разломака

Два разломка се деле тако што се дељеник множи са реципрочном вредношћу делиоца:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Примери.

а) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$,

б) $2\frac{1}{4} : 3\frac{2}{5} = \frac{9}{4} : \frac{17}{5} = \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{17} = \frac{45}{68}$.

Израз $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ називамо ДВОЈНИ РАЗЛОМАК и решавамо га на следећи начин:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

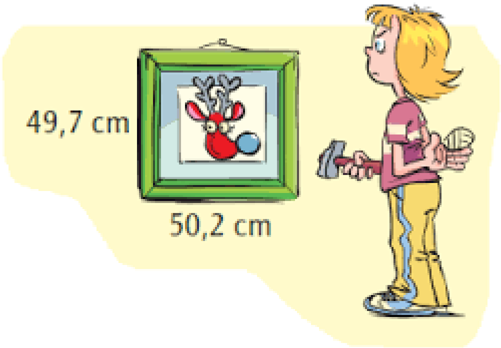
Својства множења и дељења разломака

За свака три разломка $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}$ важи:

1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ (комутативност множења),
2. $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$ (асоцијативност множења),
3. $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$ (дистрибутивност множења у односу на сабирање),
4. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) : \frac{e}{f} = \frac{a}{b} : \frac{e}{f} + \frac{c}{d} : \frac{e}{f}$ (дистрибутивност дељења у односу на сабирање).

Децимални запис разломка

Разломци се могу записати и у другачијем облику, у облику ДЕЦИМАЛНИХ БРОЈЕВА. Децимални бројеви су они у чијем запису се осим цифара налази и зарез. Децималне бројеве најчешће срећемо у свакодневном животу, цене многих артикала у продавницама су дате у децималним бројевима (нпр. нешто кошта 69,32 дин.), количина намирница се исказује у децималним бројевима (нпр. 1,5 kg), дужина, ширина, површина могу бити исказане у децималном облику итд.



Запис децималног броја изгледа овако:

$$6{,}325$$

6 – број који се налази испред зареза представља број целих и назива се ЦЕО ДЕО**,** а цифре иза зареза називају се ДЕЦИМАЛЕ. Овај број има три децимале, а оне представљају: 3 - број десетих; 2 – број стотих; 5 – број хиљадитих. Зарез се назива ДЕЦИМАЛНИ ЗАРЕЗ (запета). Па број 6,325 читамо: шест целих и три десета, два стота и пет хиљадитих или шест целих и триста двадесет пет хиљадитих.
Сваки разломак се може представити у облику децималног броја и сваки децимални број се може представити у облику разломка.

Претварање разломака у децималне бројеве

Разломак се може претворити у децимални број на неколико начина. Ако је разломак такав да му је именилац декадни број (нпр. 10, 100, 1000, 10 000,...), од њега добијен децимални број има онолико места иза зареза (децимала) колико декадни именилац има нула, односно:

$\frac{1}{10} = 0{,}1$ (један десети),
$\frac{1}{100} = 0{,}01$ (један стоти),
$\frac{9}{1000} = 0{,}009$ (девет хиљадитих),
$3\frac{23}{1000} = 3{,}023$ (три цела и двадесет три хиљадита),
$\frac{31}{10} = 3\frac{1}{10} = 3{,}1$ (три цела и један десети).

Ако разломак нема декадни именилац онда се претвара у децимални број дељењем имениоца са бројиоцем. Дели се са потписивањем све док остатак не буде једнак нули. Ако у току дељења, у поступку, буду искоришћене све цифре из дељеника и остатак је и даље различит од нуле на сваки остатак се додаје нула све док у неком од корака и сам остатак не буде једнак нули. Када се први пут на остатак допише нула која није у дељенику, у количник се уписује зарез. Количник тог дељења је децимални број који је једнак разломку од ког се кренуло.

Пример. Претворићемо разломак $\frac{3}{20}$ у децимални број:

$$\begin{array}{l} 3:20=0,15. \\ -\ 0 \\ \hline \ \ 30 \\ -\ 20 \\ \hline \ \ 100 \\ -\ 100 \\ \hline \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Постоје и разломци код којих када се поделе бројилац и именилац, у поступку дељења никако не може остатак да буде 0. Остатак се понавља, као и цифре које се појављују у количнику, и тај поступак дељења је бесконачан. Резултат дељења је децимални број за који се каже да је периодичан децимални број.

Пример. Претворићемо разломак $\frac{4}{3}$ у децимални број:

$$\begin{array}{l} 4:3=1,3333... \\ -\ 3 \\ \hline \ \ 10 \\ -\ \ 9 \\ \hline \ \ \ \ 10 \\ \ \ -\ \ 9 \\ \hline \ \ \ \ \ 1 \end{array}$$

Пошто су периодични бројеви бесконачни (имају бесконачан број децимала) да би се лакше записали врши се заокруживање децималних бројева. Постоје правила о заокруживању децималних бројева које наводимо у наставку.

Приближна вредност броја

Децимални број који има више децималних цифара него што нам је потребно (ту спадају и периодични бројеви) замењујемо бројем чији запис има одговарајући број децимала, и то тако да се новодобијени број што мање разликује од почетног. Тај поступак се назива ЗАОКРУЖИВЊЕ.

Заокруживањем броја увек правимо неку грешку и циљ нам је да она буде што мања. Да бисмо то постигли треба да поштујемо следећа правила:

1. Ако је прва цифра коју одбацујемо 0, 1, 2, 3 или 4 цифре испред ње остају непромењене.
2. Ако је прва цифра коју одбацујемо 6, 7, 8 или 9 последња цифра коју задржавамо повећава се за 1.
3. Ако је прва цифра коју одбацујемо 5, а иза ње има још позитивних цифара, последња цифра коју задржавамо повећава се за 1.
4. Ако је прва цифра коју одбацујемо 5 и иза ње нема других цифара, разликујемо два случаја:

   а) ако је цифра испред парна она остаје непромењена,

   б) ако је цифра испред непарна она се повећава за 1.

Ако је број b добијен заокруживањем броја a, пишемо $\boldsymbol{a \approx b}$.

Примери.

$3{,}764 \approx 3{,}76$ (1. правило)
$45{,}129 \approx 45{,}13$ (2. правило)
$8{,}885 \approx 8{,}88$ (4.а правило)
$8{,}875 \approx 8{,}88$ (4.б правило)
$0{,}1051 \ldots \approx 0{,}11$ (3. правило)
$0{,}666 \ldots \approx 0{,}67$ (2. правило)

Претварање децималних бројева у разломке

Примери.
$0{,}1 = \frac{1}{10}$ (један десети), $0{,}11 = \frac{11}{100}$ (једанаест стотих),
$2{,}001 = 2\frac{1}{1000}$ (два цела и један хиљадити),
$3{,}25 = 3\frac{25}{100} = 3\frac{25:25}{100:25} = 3\frac{1}{4}$ (три цела и двадесет пет стотих, добијени разломак скраћујемо до несводљивог разломка уколико је то могуће као у овом примеру).

Претварање периодичног децималног записа у разломак

Извешћемо поступак којим се периодичан децимални број претвара у разломак.

Пример. Записаћемо број 1,3333...= 1,(3) у облику разломка.
Обележићемо 1,333... са x:
$x = 1{,}333 \ldots$
$10 \cdot x = 10 \cdot 1{,}333 \ldots = 13{,}333 \ldots$, па је
$10 \cdot x - x = 13{,}333 \ldots - 1{,}333 \ldots$
$9 \cdot x = 12$
$x = \frac{12}{9} = \frac{12:3}{9:3} = \frac{4}{3}$
$x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
$1{,}33 \ldots = 1\frac{1}{3}$.

Упоређивање децималних бројева

Децимални бројеви се упоређују тако што им се упоређују одговарајуће цифре: прво се упоређују цифре целих, ако су оне једнаке , упоређујемо цифре десетих и чија је цифра десетих већа тај број је већи. Ако су и оне једнаке упоређујемо даље цифре стотих све док не дођемо до места када је једна цифре већа. Навешћемо неколико различитих примера.

Примери.
а) $\underline{\mathbf{2}},21 < \underline{\mathbf{3}},42$; б) $0{,}0\underline{\mathbf{7}} > 0{,}0\underline{\mathbf{4}}$; в) $0,\underline{\mathbf{4}} > 0,\underline{\mathbf{0}}4$;

г) 2,4 и 2,45:

Треба упоредити ове бројеве у којима су цифре целих и цифре десетих једнаке. Бројеве треба да упоредимо преко цифара стотих, али ту цифру у броју 2,4 немамо па на њено место уписујемо нулу: 2,4 = 2,40. Онда добијамо:

$$2{,}4\underline{\mathbf{0}} < 2{,}4\underline{\mathbf{5}}.$$

Сабирање и одузимање децималних бројева

Децимални бројеви се сабирају (одузимају) тако што се, најпре, правилно потпишу, водећи рачуна о томе да децимални зарез сабирака (умањеника и умањиоца) буде један испод другог, а затим се сабирају (одузимају) као природни бројеви, с тим што на крају децимални зарез збира (разлике) мора бити испод децималног зареза сабирака (умањеника и умањиоца).

Примери.

2,67 +3,41	11,2 - 5,35	34,245 + 4,4562
6,08	5,85	38,7012

Множење децималних бројева

Два разломка дата у децималном запису множе се као природни бројеви, а затим се у производу издваја онолико децимала колико их има у оба чиниоца заједно.

Примери.

а)

$$\begin{array}{r} 3{,}9\cdot 1{,}7 \\ \hline 273 \\ +\ 39 \\ \hline 6{,}63 \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{r} 9{,}26\cdot 10 \\ \hline 92{,}60 \end{array}$$

Дељење децималних бројева

Разломак дат у децималном запису делимо ПРИРОДНИМ БРОЈЕМ тако што вршимо дељење као у случају природних бројева, с тим што када дођемо до децималног зареза у дељенику, напишемо и децимални зарез у количнику.

Пример.

34,6:4 = 8,65
-32
26
-24
20
-20
0

Дељење ДВА РАЗЛОМКА ДАТА У ДЕЦИМАЛНОМ ЗАПИСУ увек се своди на дељење разломка природним бројем, множењем и дељеника и делиоца одговарајућом декадном јединицом (оном која има онолико нула колико делилац има децимала).

Пример.

18,06:0,7 = 180,6:7 = 25,8
- 14
40
-35
56
- 56
0

Једначине са разломцима и децималним бројевима

Код једначина се непознати члан израза проналази на исти начин као што су ученици научили до четвртог разреда:

-Непознати сабирак проналазимо када од збира одузмемо познати сабирак.
-Непознати умањеник се добија када се саберу умањилац и разлика.
-Непознати умањилац се добија када се од умањеника одузме разлика.
-Непознати чинилац се добија када се се производ подели познатим чиниоцем.
-Непознати дељеник се добија када се помноже делилац и количник.
-Непознати делилац се добија када се дељеник подели са количником.

Навешћемо неколико примера једначина.

Примери.

а) $\frac{4}{5} \cdot x = \frac{8}{15}$

$x = \frac{8}{15} : \frac{4}{5}$

$x = \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{4}$

$x = \frac{40}{60}$

$x = \frac{2}{3}$;

б) $16{,}985 : x = 7{,}9$

$x = 16{,}985 : 7{,}9$

$x = 169{,}85 : 79$

$x = 2{,}15$;

в) $\frac{8}{25} : \left(x - \frac{3}{4}\right) = 0{,}4$

$x - \frac{3}{4} = \frac{8}{25} : 0{,}4$

$x - \frac{3}{4} = 0{,}32 : 0{,}4$

$x - \frac{3}{4} = 3{,}2 : 4$

$x - \frac{3}{4} = 0{,}8$

$x = 0{,}8 + \frac{3}{4}$

$x = 0{,}8 + 0{,}75$

$x = 1{,}55.$

Неједначине са разломцима и децималним бројевима

За неједначине важе она иста правила која су научена до краја четвртог разреда (као и код једначина). До решења непознате се долази на исти начин као и код једначина (горе наведено). Разлика између једначина и неједначина је у томе што је решење једначине тачно једна вредност (један број), док неједначина има скуп решења (постоји скуп бројева који задовољавају неједначину). У неједначинама постоји још једна отежавајућа околност на коју мора да се пази, а то је знак неједнакости који може да се промени у току задатка. Ако је непознат умањилац или дељеник у неједначини знак неједнакости се мења тако што знак веће замењујемо са мање, или ако је знак у нејдначини мање или једнако замењујемо са веће или једнако и слично.

Навешћемо неколико примера неједначина.

Примери.

а) $3{,}7 - x \leq 1{,}4$ (непознат умањилац па се знак неједнакости мења)

$x \geq 3{,}7 - 1{,}4$

$x \geq 2{,}3.$

У овој неједначини постоји и услов пошто је x умањилац он не сме бити већи од умањеника па $x \leq 3{,}7$. Када објединимо ова два добијена услова добијамо и коначни скуп решења ове неједначине:

$$2{,}3 \leq x \leq 3{,}7.$$

б) $x \cdot \frac{2}{9} + 0{,}7 > \frac{77}{90}$

$x \cdot \frac{2}{9} > \frac{77}{90} - 0{,}7$

$x \cdot \frac{2}{9} > \frac{77}{90} - \frac{7}{10}$

$x \cdot \frac{2}{9} > \frac{77}{90} - \frac{63}{90}$

$x \cdot \frac{2}{9} > \frac{14}{90}$

$x > \frac{14}{90} : \frac{2}{9}$

$x > \frac{14}{90} \cdot \frac{9}{2}$

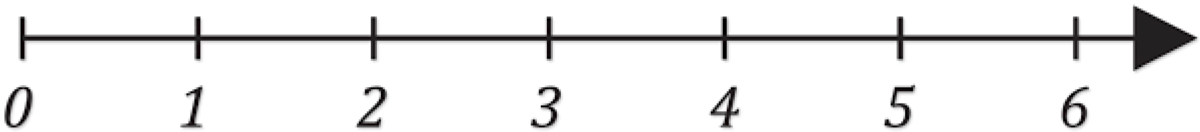
$x > \frac{7}{10}.$

Решења неједначине су сви бројеви већи од $\frac{7}{10}$.

Бројевна полуправа

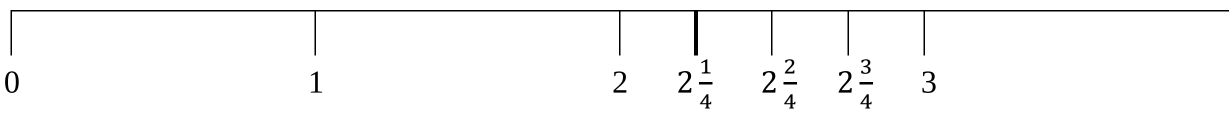
Сви бројеви који су до сада спомињани: природни бројеви, разломци, цели бројеви могу се посматрати на једној зајеничкој бројевној полуправој на којој је тачно одређен положај сваког броја и зна се поредак свих бројева.

До петог резреда и учења разломака ученици су се упознали са бројевном полуправом на којој су били представљени само природни бројеви. Почетак полуправе је био положај нуле, а остали природни бројеви су били представљени десно од нуле и налазили су се на једнаким растојањима.



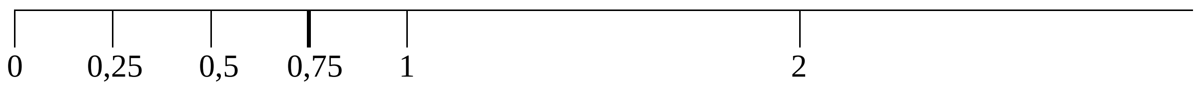
Сада ученици уче да представе на овој бројевној правој и остале научене бројеве. Ако треба да прикажемо разломак $\frac{1}{2}$, прво одређујемо између којих природних бројева се он налази. Пошто је разломак мањи од једног целог наћи ће се између 0 и 1. Ту дуж делимо на два једнака дела, а тачка која раздваја те делове је положај $\frac{1}{2}$.

Ако би нам требао положај мешовитог броја $2\frac{1}{4}$ (односно разломка $\frac{9}{4}$), одређујемо између којих природних бројева се налази: између 2 и 3. Ту дуж делимо на четири једнака дела, сваки од тих делова представља по једну четвртину, избројимо колико нам је потребно четвртина и одредили смо положај мешовитог броја.



На бројевној полуправој може се одредити и положај децималних бројева али, да би се постигла прецизност, децимални број претворимо у разломак када хоћемо да га прикажемо на бројевној правој и тада знамо на колико делова је потребно поделити растојања између целих бројева.

Одредићемо положај децималног броја $0{,}75 = \frac{3}{4}$:



У овој глави описано је на који начин се ученици упознају са разломцима и свим њиховим особинама. Даље, у каснијим разредима знање се продубљује, разломци се обрађују у неким ширим скуповима бројева, који доносе неке нове особине и о томе ће бити речи у наставку.

1.2 Шести разред

До шестог разреда ученици су се упознали са природним бројевима, нулом и разломцима. Међутим, у свакодневном животу они наилазе и на бројеве који не спадају ни у једну од ових категорија: гледајући временску прогнозу (нпр. темература $-3℃$), температуре у замрзивачима, фрижидерима, банковни рачуни родитеља (када дугују банци, затим, могу бити у минусу) итд... Закључујемо да су потребни и бројеви мањи од нуле.

Природни бројеви су настали из човекове потребе да преброји разне објекте из свог окружења, разломци из потребе да се представе и запишу делови целог, а бројеви мањи од нуле (негативни бројеви) из потребе да се искаже недостатак нечега, рачунање растојања када се крећемо у супротним смеровима по неком путу, итд.

Са негативним бројевима (целим и разломцима) ученици се упознају у шестом разреду и уче да постоје и шири скупови бројева од скупа природних бројева (скуп целих и скуп рационалних бројева). Како се буду уводили нови бројеви, представљаће се и нови скупови бројева.

1.2.1 Цели бројеви

Скуп целих бројева представља проширење скупа природних бројева. У овом одељку дефинисаћемо целе бројеве, увешћемо појам бројевне праве (до сад смо природне бројеве приказивали на бројевној полуправој), описати особине целих бројева и применити рачунске операције на целе бројеве.

Решавање једначине $a + x = b$, где су a и b дати природни бројеви, а x непознат природан број захтева примену рачунске операције – одузимање. Ако постоји природан број x који задовољава услов једначине, онда је $x = b - a$. Али ова једначина не мора обавезно да има решење у скупу природних бројева, зато је потребно проширити скуп природних бројева решењима ове једначине, што води скупу целих бројева.

Увођење целих бројева

Скупу природних бројева додајемо бројеве који су мањи од нуле: $-1, -2, -3, \ldots$ Ови бројеви се уводе из потребе да се нађу решења једначина: $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$,...

Када тражимо решења ових једначина размишљамо шта то треба додати броју 1, или броју 2, или броју 3, да би се као резултат сабирања добила нула (проналазимо непознати сабирак једначине: $x = 0 - 1$, $x = 0 - 2$, $x = 0 - 3$). Можемо закључити да треба додати неки број који је мањи од нуле за 1, односно, мањи од нуле за 2, за 3... Бројеви који имају те особине су бројеви: $-1, -2, -3, \ldots$. То су бројеви који представљају разлику бројева 0 и 1, 0 и 2, 0 и 3, то јест, бројеви за које важи:

$$-1 + 1 = 0 = 1 + (-1)$$
$$-2 + 2 = 0 = 2 + (-2)$$

$$-3+3=0=3+(-3)$$
$$\vdots$$

Овакви бројеви називају се НЕГАТИВНИ ЦЕЛИ БРОЈЕВИ и њихов скуп се означава са $\mathbb{Z}^-$.

$$\mathbb{Z}^- = \{\ldots -4, -3, -2, -1\}$$

Природне бројеве називамо још и ПОЗИТИВНИ ЦЕЛИ БРОЈЕВИ и њихов скуп можемо обележити и са $\mathbb{Z}^+$:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Њих сада можемо записати на два начина: са знаком испред (позитивни бројеви се препознају по знаку +), али и без њега (као што смо их и досад писали): $+1 = 1$, $+2 = 2$, $+3 = 3$ итд.

Бројеви већи од нуле су ПОЗИТИВНИ, а бројеви мањи од 0 нуле су НЕГАТИВНИ. Број 0 није ни позитиван ни негативан.

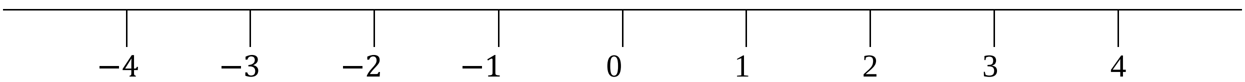
Скуп који чине позитивни цели бројеви, нула и негативни цели бројеви називамо СКУПОМ ЦЕЛИХ БРОЈЕВА и означавамо га са $\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}}$$

Највећи негативан број је -1, а најмањи негативан не можемо одредити, док је најмањи позитиван број 1, а највећи позитиван не можемо одредити.

Бројевна права

Бројевна права представља проширење бројеве полуправе. У петом разреду је савладана полуправа са природним бројевима (позитивни цели), сада се лево од нуле додају и негативни цели бројеви и добија се права са целим бројевима на којој су подеоци симетрични у односу на нулу.
Бројевна права са целим бројевима:



На бројевној правој видимо и поредак негативних целих бројева и видимо да су бројеви ближи нули већи, што се више удаљавамо од нуле бројеви су мањи, па закључујемо да је број -1 већи од -2, -1 већи од -3 и -4, број -2 већи од -3 и -4 итд. Највећи негативан број је -1.

Супротан број

Супротни бројеви су они који су симетрични у односу на нулу на бројевној правој. Супротан број целог броја a означавамо са $-a$. Супротан број целог броја $-a$ је број $-(-a) = a$.

Примери.

a	3	-2	524	-151
$-a$	-3	2	-524	151

Апсолутна вредност броја

Апсолутна вредност броја a, заправо, представља удаљеност броја a од нуле на бројевној правој. И удаљеност броја $-a$ је иста као и удаљеност броја a, па закључујемо да је апсолутна вредност супротних бројева једнака. Ознака за апсолутну вредност је $|a|$. Важи:

$$|a| = |-a| = a.$$

Апсолутна вредност не може бити негативна, то јест: $|a| \geq 0,$ за свако $a \in \mathbb{Z}$.

Број $|a|$ једнак је броју a ако је $a \geq 0$, а броју $-a$ ако је $a < 0$, то јест:

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0; \\ -a, a < 0. \end{cases}$$

Примери.

a	7	-7	0	-25
$\lvert a \rvert$	7	7	0	25

Упоређивање целих бројева

Када се упоређују два цела броја потребно је знати:

1. Сваки позитиван број је већи од сваког негативног броја.
2. Нула је већа од сваког негативног броја, а мања од сваког позитивног броја.
3. Од два позитивна броја већи је онај чија је апсолутна вредност већа.
4. Од два негативна броја већи је онај чија је апсолутна вредност мања.

Примери.

а) $-5 < 10$, б) $0 > -9$, в) $0 < 14$, г) $5 < 32$, д) $-16 > -21$.

Сабирање и одузимање целих бројева

Збир два позитивна цела броја је позитиван број, знак задржавамо и апсолутне вредности бројева сабирамо.

$$7 + 3 = +10 = 10.$$

Збир два негативна цела броја је негативан број, знак задржавамо, а апсолутне вредности бројева сабирамо.

$$-7 + (-3) = -10.$$

Ако треба израчунати збир два броја различитог знака, резултат сабирања добија знак сабирка који је већи по апсолутној врености и одузимају се апсолутне вредности сабирака.

$$-9 + 7 = -2,$$
$$-3 + 6 = +3 = 3,$$
$$5 + (-6) = -1,$$
$$12 + (-5) = +7 = 7.$$

Збир супротних бројева је једнак нули.

$$5 + (-5) = 0,$$
$$-5 + 5 = 0.$$

Збир целог броја a и нуле једнак је том броју a.

$$5 + 0 = 5,$$
$$0 + (-6) = -6.$$

Одузимање целих бројева се своди на сабирање целих бројева.

Од броја a одузети број b значи исто што и сабрати a са супротним бројем броја b:

$$a - b = a + (-b).$$

Примери.

а) $3 - 7 = 3 + (-7) = -4$,

б) $15 - 3 = 15 + (-3) = 12$,

в) $-23 - 2 = -23 + (-2) = -25$,

г) $2 - 19 = 2 + (-19) = -17$,

д) $34 - 107 = 34 + (-107) = -73$,

ђ) $-44 - 17 = -44 + (-17) = -61$,

е) $-109 - 497 = -109 + (-497) = -606$,

ж) $-5 - (-2) = -5 + 2 = -3$,

з) $27 - (-33) = 27 + 33 = 60$.

Својства сабирања целих бројева

-Сабирање целих бројева је комутативно: $a + b = b + a,\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
-Сабирање је асоцијативно: $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.
-Нула је неутрални елемент сабирања: $a + 0 = 0 + a = a$.
-Збир целог броја и њему супротног броја је једнак нули: $a + (-a) = -a + a = 0$.
-За свако $c \in \mathbb{Z}$, из $a \leq b$, следи $a + c \leq b + c$.

Множење целих бројева

Када треба помножити два цела броја истог знака (два позитивна или два негативна броја), прво се одређује знак производа, у оба случаја је производ позитиван и множимо апсолутне вредности чинилаца.

$$5 \cdot 2 = 10,$$
$$-7 \cdot (-3) = 21.$$

Када се множе два цела броја различитог знака производ је негативан и бројеве множимо по апсолутној вредности.

$$6 \cdot (-2) = -12,$$
$$-15 \cdot 3 = -45.$$

Када у производу имамо више од два чиниоца разликујемо два случаја:

1. Ако је број негативних чинилаца паран тада је производ позитиван и множе се чиниоци по апсолутној вредности.

$$-1 \cdot 4 \cdot (-8) \cdot (-3) \cdot 2 \cdot (-5) = 960.$$

2. Ако је број негативних чинилаца непаран тада је производ негативан и множе се чиниоци по апсолутној вредности.

$$-1 \cdot 4 \cdot (-8) \cdot (-3) \cdot 2 \cdot 5 = -960.$$

Производ целог броја a и броја 1 једнак је том целом броју a.

$$1 \cdot 7 = 7,$$
$$-9 \cdot 1 = -9.$$

Производ целог броја a и броја -1 једнак је броју $-a$.

$$5 \cdot (-1) = -5,$$
$$-1 \cdot (-3) = 3.$$

Производ нуле и целог броја различитог од нуле једнак је нули.

$$0 \cdot 5 = 0,$$
$$-8 \cdot 0 = 0.$$

Својства множења целих бројева

-Множење целих бројева је комутативно: $a \cdot b = b \cdot a,\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
-Множење целих бројева је асоцијативно: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),\ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.
-Множење целих бројева је дистрибутивно у односу на сабирање:

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b,\ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

-Производ броја 1 и целог броја a једнак је том целом броју a:

$$1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{Z}.$$

-Производ броја -1 и целог броја a једнак његовом супротном броју $-a$:

$$-1 \cdot a = -a, \forall a \in \mathbb{Z}.$$

-Ако је c из $\mathbb{Z}^+$ и за целе бројеве a и b важи $a \leq b$, тада је $a \cdot c \leq b \cdot c$. Знак неједнакости остаје непромењен.
-Ако је c из $\mathbb{Z}^-$ и за целе бројеве a и b важи $a \leq b$, тада је $a \cdot c \geq b \cdot c$. Знак неједнакости се мења.

Дељење целих бројева

Када треба да се израчуна количник два цела броја истог знака (оба позитвна или оба негативна броја), прво се одређује знак количника, у оба случаја је количник позитиван, и дели се апсолутна вредност дељеника и делиоца.

$$-24 : (-6) = 4; \qquad 15 : 3 = 5.$$

Ако треба да се поделе цели бројеви различитог знака, количник је негативан, и треба поделити апсолутне вредности дељеника и делиоца.

$$50 : (-10) = -5,$$
$$-60 : 6 = -10.$$

Количнк нуле и неког целог броја различитог од нуле је нула.

$$0 : 5 = 0,$$
$$0 : (-3) = 0.$$

Нулом се не дели!
Количник неког целог броја a и броја 1 је тај број a.

$$5 : 1 = 5,$$
$$-3 : 1 = -3.$$

Количник неког целог броја a и броја -1 је број $-a$.

$$17 : (-1) = -17,$$
$$-91 : (-1) = 91.$$

Ако је цео број a дељив целим бројем b , онда је дељив и са $-b$.

Ако $25:5 = 5$ онда $25:(-5) = -5$.
Ако $30:(-10) = -3$ онда $30:10 = 3$.

Једначине са целим бројевима

Једначине са целим бројевима могу да се решавају истом методом као што је речено у петом разреду, али у шестом разреду уводи се и нови поступак за решавање једначина.

Ако исти број додамо или одузмемо обема странама задате једначине добија се нова једначина која има иста решења као и полазна једначина. Takoђe, важи да ако обе стране неке једначине помножимо или поделимо истим бројем, нова једначина има иста решења као полазна. Ови искази се користе када се решавају једначине.

Примери.

а) $x - 7 = -1 \;\; / + 7$
$x - 7 + 7 = -1 + 7$
$x = 6,$

б) $5 - x = 13 \;\; / - 5$
$5 - x - 5 = 13 - 5$
$-x = 8 \; / \cdot (-1)$
$-x \cdot (-1) = 8 \cdot (-1)$
$x = -8,$

в) $9 \cdot x = -36 \;\; /: 9$
$(9 \cdot x): 9 = -36: 9$
$\frac{9 \cdot x}{9} = -\frac{36}{9}$
$x = -4,$

г) $x: (-5) = -5 \; / \cdot (-5)$
$\big(x: (-5)\big) \cdot (-5) = -5 \cdot (-5)$
$\frac{x}{-5} \cdot (-5) = 25$
$x = 25,$

д) $-16: x = -2$
$\frac{-16}{x} = -2 \; / \cdot x$
$\frac{-16}{x} \cdot x = -2 \cdot x$
$-16 = -2 \cdot x \;\; /: (-2)$
$8 = x$
$x = 8,$

ђ) $5 \cdot x + 9 = -16 \;\; / - 9$
$5 \cdot x = -25 \; /: 5$
$x = -5.$

Неједначине са целим бројевима

Неједначине се решавају истим поступком као и једначине, само још мора да се води рачуна о знаку неједнакости јер се он мења у два случаја: када се цела неједначина множи или дели негативним бројем. Навешћемо неколико примера како се решавају неједначине.

Примери.

а) $-11 + x \geq -4 \quad / + 11$

$-11 + x + 11 \geq -4 + 11$

$x \geq 7,$

б) $-6 \cdot x \boxed{\geq} 12$ /: (-6)

$\frac{-6 \cdot x}{-6} \boxed{\leq} \frac{12}{-6}$

$x \leq -2,$

в) $x : (-3) \boxed{>} 1$ / $\cdot (-3)$

$\frac{x}{-3} \cdot (-3) \boxed{<} 1 \cdot (-3)$

$x < -3.$

Са целим бројевима се усваја и чињеница да постоје бројеви мањи од нуле. Али, поред целих постоје и разломци и децимални бројеви који су мањи од нуле. У наставку, описаћемо увођење рационалих бројева у основним школама.

1.2.2 Рационални бројеви

У шестом разреду се по први пут појављује појам рационалог броја и скупа рационалних бројева, иако су неки рационални бројеви већ научени: позитивни разломци (у петом разреду) и цели бројеви (у шестом разреду). Дакле, рационални бројеви се уводе постепено током школовања, да би се у шестом разреду, коначно, скуп рационалних бројева објединио.

У петом разреду се уводе позитивни разломци, који представљају подскуп скупа рационалних бројева, и усвајају се њихове особине, учи се примена рачунских операција на разломке. Затим, у шестом разреду се уводи скуп целих бројева, који представља подскуп скупа рационалних бројева, и изучавају се особине целих бројева и примена рачунских операција на целе бројеве. На крају, у шестом разреду, се уводе и негативни разломци на којима се спаја знање о разломцимаи целим бројевима. Ученици већ познају појам разломка (научили су да је то део неке целине), познају појам целог броја (позитивног и негативног).

Рационални бројеви имају много особина, можемо рећи да су оне подељене у групе – особине које имају разломци, особине које имају негативни бројеви, а затим су те особине спојене на негативним разломцима. Потребно је да ученици школског узраста све те особине усвоје. Да би се то остварило што једноставније и успешније, рационални бројеви се предају ученицима прво преко подскупова, а затим се уводи, на крају, и скуп рационалних бројева.

У овом одељку увешћемо скуп рационалних бројева, приказати рационалне бројеве на бројевној правој и описаћемо њихове особине.

Увођење рационалних бројева

Када су уведени цели бројеви решен је проблем који се јављао код једначина облика $a + x = b$. У неким случајевима ове једначине нису имале решење у скупу природних бројева, али су зато могле да се реше у скупу целих бројева.

Међутим, постоје једначине које немају решење чак ни у скупу целих бројева и сада је потребно пронаћи и њихово решење.

Потребно је пронаћи решење за једначину $a \cdot x = b$, где су a и b дати цели бројеви, а x непознат број. И потребно је пронаћи решење за једначину $a \cdot x = 1$, где је a дати цео број, а x непознат број.

У сврху решавања ових једначина уводи се операција дељења. Решења ових једначина су: решење прве једначине је $x = b{:}a$ или $x = \frac{b}{a}$, а решење друге једначине је $x = \frac{1}{a}$. Поново се јавља проблем да решења $x = \frac{b}{a}$ и $x = \frac{1}{a}$ не припадају скупу целих бројева и потребно је проширити скуп са решењима једначина овог типа. Због тога је уведен скуп рационалних бројева Q чији су елементи $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Решење друге једначине $\frac{1}{a}$ представља инверзну вредност броја a и назива се реципрочан број броја a.

Негативни рационални бројеви су разломци мањи од нуле, а позитивни рационални бројеви су разломци већи од нуле.

Унију скупова позитивних, нуле и негативних рационалних бројева називамо скупом рационалних бројева и означавамо га са Q.

$$\boxed{Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+ = \left\{\frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\dots, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \dots\right\}}$$

Сваки цео број може се записати као разломак чији је бројилац тај цео број, а именилац број 1: $a = \frac{a}{1}, a \in \mathbb{Z}$, тако да је сваки цео број, заправо и рационалан. За рационалне бројеве важе следеће једнакости:

1. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$,
2. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Рационални бројеви се могу проширивати и скраћивати као разломци, што је научено у петом разреду.

Примери.

Проширивање:

$-\frac{2}{3} = -\frac{2\cdot4}{3\cdot4} = -\frac{8}{12}$, $\quad -3\frac{1}{2} = -\frac{7}{2} = -\frac{7\cdot3}{2\cdot3} = -\frac{21}{6}$.

Скраћивање:

$-\frac{5}{15} = -\frac{5:5}{15:5} = -\frac{1}{3}$, $\quad -1\frac{13}{26} = -\frac{39}{26} = -\frac{39:13}{26:13} = -\frac{3}{2}$.

Децимални запис рационалних бројева

Правила за претварање рационалних бројева у децимални облик и обрнуто су иста као и код превођења разломака, што је научено у петом разреду.

Примери.

а) $-\frac{1}{10}=-0{,}1$; б) $-3\frac{5}{100}=-3{,}05$; в) $-\frac{25}{10}=-2\frac{5}{10}=-2{,}5$; г) $-\frac{3}{8}=-0{,}375$ јер је

```
  3:8=0,375.
 - 0
 ----------
  30
 - 24
 ----------
   60
  -56
 ----------
    40
   - 40
 ----------
     0
```

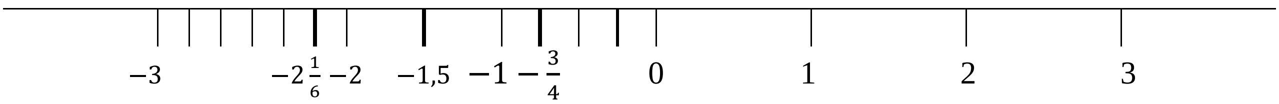
д) $-0{,}1=-\frac{1}{10}$; ђ) $-1{,}24=-1\frac{24}{100}=-1\frac{6}{25}$.

Периодични децимални број се преводи у разломак као што је научено у петом разреду: $-1{,}333\ldots=-1,(3)=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}$.

Бројевна права

На бројевној правој приказивани су цели бројеви и позитивни разломци, а сада се представљају и рационални бројеви, и то на исти начин као и позитивни разломци, што је уведено у петом разреду.

Представићемо бројеве $-\frac{3}{4}, -2\frac{1}{6}, -1{,}5$ на бројевној правој:



Супротан број и апсолутна вредност рационалног броја

Сваки рационалан број има свој супротан број и правило за његово одређивање је исто као и код целих бројева.

За сваки рационалан број може се одредити апсолутна вредност на исти начин на који се одређује апсолутна вредност целих бројева. Апсолутна вредност рационалног броја је увек позитиван број (као и код целих бројева).

Примери.

r	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$0{,}6$	$-\frac{7}{8}$	$-1\frac{17}{50}$	$-1{,}5$	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{5}$
$-r$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-0{,}6$	$\frac{7}{8}$	$1\frac{17}{50}$	$1{,}5$	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{5}$
$\lvert r\rvert$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$0{,}6$	$\frac{7}{8}$	$1\frac{17}{50}$	$1{,}5$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{5}$

Упоређивање рационалних бројева

Да би се упоредила два рационална броја морају се знати правила која важе када се упоређују разломци (и децимални запис разломака) и правила која важе за упоређивање целих бројева. Упоређивање рационалних бројева обједињује упоређивање разломака и упоређивање целих бројева.

Разломци се могу упоређивати само ако имају једнаке имениоце. Уколико разломци немају једнаке имениоце проширују се до једнаких именилаца помоћу НЗС-а. У децималном облику разломци се упоређују тако што им се упоређују цифре на одговарајућим позицијама. Ако су бројеви задати један у облику разломка, а други у децималном облику, претварањем се морају довести до тога да буду у истом облику: оба разломка или оба децимална броја.

Код целих бројева важи да је сваки позитиван број већи од сваког негативног броја, да је нула већа од сваког негативног броја и мања од сваког позитивног броја. Од два позитивна броја већи је онај чија је апсолутна вредност већа, а од два негативна броја већи је онај чија је апсолутна вредност мања.
Обједини́ћемо ова правила кроз следеће примере.

Примери.
а) $-\frac{3}{5} < \frac{1}{3}$, б) $0 > -\frac{5}{6}$, в) $0 < \frac{7}{12}$, г) $\frac{3}{4} > -0{,}32$, д) $-3{,}52 < -3{,}5$ (јер је цифра на позицији стотих нула у броју $-3{,}5 = -3{,}50$),
ђ) $-\frac{1}{2} > -\frac{3}{4}$ јер је $-\frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} = -\frac{6}{12} > -\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = -\frac{9}{12}$,
е) $-\frac{3}{5} < -0{,}3$ јер је $-\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = -\frac{6}{10} < -\frac{3}{10}$.

Сабирање и одузимање рационалних бројева

Правила за сабирање и одузимање су иста као и код целих бројева и ако су разломци са различитим имениоцима морају се довести на исти именилац пре извођења рачунске операције, а код децималних бројева сабирају се (одузимају) цифре на истим позицијама. Поново су правила за разломке и целе бројеве обједињена код рационалних бројева као и у случају упоређивања. То ћемо показати кроз следеће примере.

Примери.
а) $-\frac{2}{9} + \frac{7}{9} = \frac{5}{9}$,
б) $-\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \left(-\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4}\right) = -\frac{15}{20} + \left(-\frac{8}{20}\right) = -\frac{23}{20} = -1\frac{3}{20}$,
в) $\frac{7}{9} + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{7 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \left(-\frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 6}\right) = \frac{28}{36} + \left(-\frac{6}{36}\right) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$,
г) $-\frac{3}{4} + 1\frac{2}{7} = -\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} + \frac{9 \cdot 4}{7 \cdot 4} = -\frac{21}{28} + \frac{36}{28} = \frac{15}{28}$,
д) $5{,}74 - 6{,}82 = 5{,}74 + (-6{,}82) = -1{,}08$,
ђ) $0{,}76 - 2\frac{2}{5} = 0{,}76 + (-2{,}4) = -1{,}64$,
е) $-4\frac{1}{20} - 10{,}01 = -\frac{81 \cdot 5}{20 \cdot 5} + \left(-10\frac{1}{100}\right) = -\frac{405}{100} + \left(-\frac{1001}{100}\right) = -\frac{1406}{100} = -14\frac{6}{100} = -14\frac{3}{50}$,

ж) $-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=0$.

Својства сабирања рационалних бројева

-Сабирање рационалних бројева је комутативна операција: $a+b=b+a,\ \forall a,b\in Q$.
-Сабирање рационалних бројева је и асоцијативно: $(a+b)+c=a+(b+c)$, $\forall\, a,b,c\in Q$.
-Збир произвољног рационалног броја и нуле је једнак том рационалном броју: $a+0=0+a=a, \forall a\in Q$.
-Збир супротних рационалних бројева је једнак нули: $a+(-a)=0, \forall a\in Q$.

Множење рационалних бројева

Правила за множење рационалних бројева обједињују правила за множење разломака (децималних бројева) и правила за множење целих бројева.

Примери.

а) $-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{5}{18}$,
б) $1\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=-\frac{20}{27}$,
в) $\frac{8}{15}\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{9}$,
г) $-2{,}7\cdot(-0{,}3)=0{,}81$,
д) $-0{,}75\cdot\frac{5}{11}=-\frac{75:25}{100:25}\cdot\frac{5}{11}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{11}=-\frac{15}{44}$,
ђ) $-\frac{1}{2}\cdot 0=0$,
е) $1\cdot(-3{,}4)=-3{,}4$.

Својства множења рационалних бројева

-Операција множења рационалних бројева је комутативна:

$$a\cdot b=b\cdot a, \forall a,b\in Q.$$

-Множење рационалних бројева је и асоцијативно:

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c), \forall a,b,c\in Q.$$

-Множење је дистрибутивно према сабирању код рационалних бројева:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c, \forall a,b,c\in Q.$$

-Производ рационалног броја a и броја 1 једнак је том рационалном броју a:

$$1\cdot a=a, \forall a\in Q.$$

-Производ рационалног броја a и броја -1 једнак је броју $-a$:

$$a\cdot(-1)=-a, \forall a\in Q.$$

-Производ рационалног броја и нуле једнак је нули:

$$a\cdot 0=0, \forall a\in Q.$$

Дељење рационалних бројева

Дељење рационалних бројева се изводи обједињавањем правила за дељење разломака и правила за дељење целих бројева. То значи да се мора одредити реципрочна вредност делиоца. Навешћемо неколико примера рационалних бројева којима смо одредили реципрочне вредности.

Реципрочна вредност броја $-\frac{1}{4}$ је $-\frac{4}{1} = -4$.

Реципрочна вредност броја $-3 = -\frac{3}{1}$ је $-\frac{1}{3}$.

Реципрочна вредност броја $-2\frac{3}{5} = -\frac{13}{5}$ је $-\frac{5}{13}$.

Навешћемо неколико израза са дељењем.

Примери.

а) $-\frac{2}{3}:(-3) = -\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$;

б) $\frac{2}{5}:\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{15}$;

в) $-10\frac{2}{7}:\left(-1\frac{1}{7}\right) = -\frac{72}{70}:\left(-\frac{8}{7}\right) = -\frac{72}{70}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{9}{10}\cdot\left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{9}{10}$;

г) $-169{,}5:100 = -1{,}695$;

д) $-34{,}6:(-4) = 8{,}65$;

34,6:4 = 8,65
-32
26
-24
20
-20
0

ђ) $18{,}06:(-0{,}7) = -25{,}8$.

18,06:0,7 = 180,6:7 = 25,8
- 14
40
-35
56
- 56
0

Једначине са рационалним бројевима

Једначине се решавају истом методом коју смо увели код једнаначина са целим бројевима. Навешћемо неколико примера једначина са рационалним бројевима.

Примери.

а) $\frac{1}{3}+x=\frac{1}{2}\quad /-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}+x-\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}$

$x=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$

$x=\frac{1}{6};$

б) $-7{,}12-(-x)=6{,}72$

$-7{,}12+x=6{,}72\ \ /+7{,}12$

$-7{,}12+x+7{,}12=6{,}72+7{,}12$

$x=13{,}84;$

в) $x\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{9}{24}\ \ /\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)$

$x\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{24}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)$

$x=-\frac{1}{1}=-1;$

г) $14{,}4{:}\,x=-9{,}6\ /\cdot x$

$\frac{14{,}4}{x}\cdot x=-9{,}6\cdot x$

$14{,}4=-9{,}6\cdot x\ \ /{:}\,(-9{,}6)$

$14{,}4{:}\,(-9{,}6)=x$

$x=-1{,}5;$

д) $x{:}\,(-4{,}5)=9\frac{1}{11}$

$x{:}\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{100}{11}$

$x\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)=\frac{100}{11}\ \ /\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)$

$x=\frac{100}{11}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)$

$x=-\frac{450}{11}=-40\frac{10}{11}.$

Једначина в) се решава тако што се цела једначина помножи са реципрочном вредношћу познатог чиниоца и резултат тог множења је да непозната x остаје сама на левој страни једнакости, а то и јесте решење једначине.

Једначина д) се решава тако што се дељење сведе на множење реципочном вредношћу (делиоца) и добија се једначина која је истог облика као и једначина в).

Неједначине са рационалним бројевима

Неједначине се решавају слично као и једначине. Код неједначина, при решавању, мора да се води рачуна о промени знака неједнакости, а то се дешава када се цела неједначина множи или дели негативним бројем.

Примери.

а) $\frac{1}{3}+x<0{,}5\quad /-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}+x-\frac{1}{3}<\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}$

$x<\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$

$x<\frac{1}{6};$

б) $x\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\geq\frac{9}{24}\ \ /\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)$

$x\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)\leq\frac{9}{24}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)$

$x\leq-\frac{1}{1}$

$x\leq-1.$

До седмог разреда упознају се природни, цели и рационални бројеви. Може се закључити да сваки од наведених скупова представља проширење претходног скупа (скуп целих проширење скупа природних, скуп рационалних проширење скупа целих).

За скуп природних бројева $\mathbb{N}$, скуп целих бројева $\mathbb{Z}$, и скуп рационалних бројева Q важи:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset Q.$$

1.3 Седми разред

Број је рационалан ако и само ако му је децимални запис периодичан. Они бројеви који нису рационални имају непериодичан запис. Бројеви који нису рационални чине нови скуп бројева. Да бисмо дефинисали тај скуп у седмом разреду мора се направити разлика између периодичних и непериодичних децималних записа. Зато је и потребно поновити како изгледа периодични запис децималног броја.

Периодичан запис децималног броја

Као што је наведено код разломака у петом разреду, код превођења разломака у децималне бројеве може да се добије децимални број који је периодичан, а то значи да се децимални део састоји из цифара које се понављају бесконачно много пута у истом редоследу. Примери таквих бројева су:
1,3333...= 1,(3); 0,67676767...= 0,(67); 3,45274527...= 3,(4527); 34, 02999....= 34,02(9).

Два рационална броја су једнака ако им одговарају исти децимални записи, то јест ако имају једнаке целе делове и ако су им на свим позицијама децимале једнаке.

Једини изузетак чине записи који се завршавају са бесконачно много деветки. На пример, важи:
0,999...= 0,(9) = 1; 1,6999... = 1,6(9)= 1,7; 34,0299...= 34,02(9) = 34,03.
Доказаћемо да је 0,999...= 0,(9) = 1.
Нека је $x = 0,(9)$, тада је $10 \cdot x = 9,(9)$, па је

$10 \cdot x - x = 9,(9) - 0,(9)$, односно,

$9 \cdot x = 9$

$x = \frac{9}{9}$

$x = 1.$

Доказ да $\sqrt{2}$ није рационалан број

Сваки рационалан број може се написати у облику разломка, то јест, сваки рационалан број $\frac{a}{b}$ је количник целих бројева a и b, где је $b \neq 0$. Ако неки број не може да се запише као количник целих бројева онда он није рационалан. Показаћемо да број $\sqrt{2}$ није рационалан, то јест, да се не може се представити као количник целих бројева.

Претпоставићемо супротно, $\sqrt{2}$ јесте рационалан број, може се представити као количник два узајамно проста цела броја a и b, то јест:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ и НЗД}(a, b) = 1.$$

Тада је $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$

односно $a^2 = 2b^2.$

Како је $2b^2$ паран број онда је и a^2паран број. Ако је a^2 паран број, онда је и a паран број. Значи, 2 дели a, па је број a производ броја 2 и неког целог броја $n.$ Онда је

$$(2n)^2 = a^2 = 2b^2$$

одакле добијамо $4n^2 = 2b^2,$

односно $2n^2 = b^2.$

Како је $2n^2$ паран број и b^2 је паран број. Ако је b^2 паран број, онда је и b паран број. Дакле, оба броја a и b су парна, па је НЗД$(a, b) \geq 2.$

Пошли смо од тога да су a и b узајамно прости бројеви, а то значи да је њихов НЗД$(a, b) = 1.$ Даље, кроз доказ смо закључили да је НЗД$(a, b) \geq 2$ па су ова два тврђења противречна и доводе до контрадикције. Закључујемо да почетно тврђење није тачно, па закључујемо да $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ **није рационалан број.**

Поглавље 2. Цели и рационални бројеви на факултету

Једном засновани природни бројеви чине темељ у изградњи осталих врста бројева. Први следећи ниво чине цели бројеви, а за њима следе и рационални бројеви. У овом поглављу врши се строго заснивање структура целих и рационалних бројева, које има за циљ да логички прецизно уведе ове структуре и омогући формално доказивање свих тврђења која описују својства тих структура.

2.1 Цели бројеви

Изградња структуре целих бројева заснива се на структури природних бројева. Заснивање целих бројева је једноставније од заснивања природних бројева. Основна идеја у изградњи целих бројева је да се уведе још једна операција – одузимање. Тако ће цели бројеви у основи бити представљени као разлика природних бројева. Док је у скупу природних бројева могуће изводити само рачунске операције сабирања и множења, у скупу целих бројева могуће је изводити сабирање, одузимање и множење.

2.1.1 Аксиоме целих бројева и својства целих бројева

Знамо да за природне бројеве важе следећи алгебарски закони:

$$\begin{gathered} x+(y+z)=(x+y)+z, \\ x+y=y+x, \\ x+0=x. \end{gathered} \tag{1}$$

Затим, важе и закони:

$$\begin{gathered} x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z, \\ x\cdot y=y\cdot x, \\ x\cdot 1=x. \end{gathered} \tag{2}$$

То значи да природни бројеви у односу на сабирање, али и у односу на множење чине комутативни моноид (комутативну семи-групу са неутралним елементом); а поред тога операција · је дистрибутивна у односу на операцију + :

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z. \quad (3)$$

Међутим, у структури природних бројева не важи формула:

$$(\forall x)(\exists y)\, x+y=0, \quad (4)$$

или простије речено, одузимање није рачунска операција која важи (постоји) у скупу природних бројева. Увођење ове операције постиже се увођењем целих бројева.
То значи да структура природних бројева $\mathbb{N}$ учествује у градњи шире структуре $\mathbb{Z}$ целих бројева и то на следећи начин: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, збир и производ природних бројева исти су у $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$.

Из свега до сада реченог закључујемо да би скуп целих бројева $\mathbb{Z}$ са операцијама $+$ и $\cdot$ требало да задовољава следеће услове (аксиоме):

1. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$,
2. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}$ важи:
   $x + (y + z) = (x + y) + z$ (асоцијативност сабирања),
   $x + y = y + x$ (комутативност сабирања),
   $x + 0 = x$ (0 је неутрал у сабирању);
   [Претходно наведе особине говоре да је ($\mathbb{Z}$,+,0) комутативни моноид.]
   $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (асоцијативност множења),
   $x \cdot y = y \cdot x$ (комутативност множења),
   $x \cdot 1 = x$ (1 је неутрал у множењу);
   [Претходно наведене особине говоре да је ($\mathbb{Z}$,·,1) комутативни моноид.]
   $x \cdot (y + z) = x \cdot z + y \cdot z$ (дистрибутивност сабирања према множењу);
3. $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ важи $x + (-x) = 0$.

Услов 3. се добија увођењем унарне операције $-$:

-Показаћемо да је y из (4) јединствено.

Претпоставимо супротно: Нека $(\forall x)(\exists y_1)\; x + y_1 = 0$ и $(\forall x)(\exists y_2)\; x + y_2 = 0$.

Тада добијамо:

$y_1 = y_1 + 0$ (јер је $x + 0 = x$)
$= y_1 + (x + y_2)$ (из претпоставке да је $x + y_2 = 0$)
$= (y_1 + x) + y_2$ (асоцијативност +)
$= (x + y_1) + y_2$ (комутативност +)
$= 0 + y_2$ (из претпоставке да је $x + y_1 = 0$)
$= y_2$ (јер је $x + 0 = x$).

Добили смо да је $y_1 = y_2$ и из тога следи да је y јединствено.

Пошто је y са овом особином, да када се сабере са x даје 0, јединствено у скупу $\mathbb{Z}$, тај број означаваћемо другачије у скупу $\mathbb{Z}$. Уводимо унарну операцију $-$ и уместо y у (4) уводимо ознаку $-x$ и тако добијамо својство $x + (-x) = 0$.

Бројеви x и $-x$ називају се **супротни бројеви**.

Мора се нагласити и услов да је $\mathbb{Z}$ најмањи скуп који задовољава услове 1, 2 и 3. У алгебри се структура која испуњава услове 2. и 3. назива комутативни прстен са јединицом, па из тог разлога кажемо: **$\mathbb{Z}$ је комутативни прстен са јединицом генерисан са $\mathbb{N}$** (генерисан са $\mathbb{N}$ јер је $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, и због услова минималности).

Тврђење 1. У комутативном прстену $\mathbb{Z}$ важе следеће једнакости:

(а) $-(-x) = x$,
(б) $-(x + y) = (-x) + (-y)$,
(в) $x \cdot 0 = 0$,
(г) $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$,
(д) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$,
(ђ) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$,

(е) $(x+y)+(-x)=y$,
(ж) $x+\big(-(x+y)\big)=-y$.

Доказ. Доказаћемо да наведене једнакости важе користећи се аксиомама 2. и 3. које важе за скуп $\mathbb{Z}$. Заиста,

(а) $x=x+0$ (јер је $x+0=x$)
$=x+((-x)+(-(-x)))$ (јер важи $x+(-x)=0$ за супротне бројеве)
$=\big(x+(-x)\big)+(-(-x))$ (асоцијативност +)
$=0+(-(-x))$ (јер је $x+(-x)=0$)
$=-(-x)+0$ (комутативност +)
$=-(-x)$ (јер важи $x+0=x$),

(б) $(-x)+(-y)=(-x)+(-y)+0$ (јер важи $x+0=x$ и за било коју вредност на месту x)
$(-x)+(-y)=(-x)+(-y)+((x+y)+(-(x+y)))$ (особина $x+(-x)=0$ примењена на $x+y$)
$(-x)+(-y)=(-x)+(-y)+x+y+(-(x+y))$ (склоњене заграде)
$(-x)+(-y)=x+(-x)+y+(-y)+(-(x+y))$ (комутативност +)
$(-x)+(-y)=0+0+(-(x+y))$ (примењена особина $x+(-x)=0$)
$(-x)+(-y)=-(x+y)$,

(в) $x\cdot 0=x\cdot 0+0$ (особина $x+0=x$ примењена на $x\cdot 0$)
$x\cdot 0=x\cdot 0+(x\cdot 0+(-(x\cdot 0)))$ (особина $x+(-x)=0$ примењена на $x\cdot 0$)
$x\cdot 0=(x\cdot 0+x\cdot 0)+(-(x\cdot 0))$ (асоцијативност +)
$x\cdot 0=x\cdot(0+0)+(-(x\cdot 0))$ (дистрибутивност)
$x\cdot 0=x\cdot 0+(-(x\cdot 0))$ (дистрибутивност)
$x\cdot 0=0$ (особина $x+(-x)=0$ примењена на $x\cdot 0$),

(г) $x\cdot(-y)=x\cdot(-y)+0$ (особина $x+0=x$ примењена на $x\cdot(-y)$)
$x\cdot(-y)=x\cdot(-y)+x\cdot y+(-(x\cdot y))$ (особина $x+(-x)=0$ примењена на $x\cdot y$)
$x\cdot(-y)=x\big((-y)+y\big)+(-(x\cdot y))$ (дистрибутивност)
$x\cdot(-y)=x\cdot 0+(-(x\cdot y))$ (особина $x+(-x)=0$ примењена на y)
$x\cdot(-y)=0+(-(x\cdot y))$ (једнакост (в))
$x\cdot(-y)=-(x\cdot y$ (особина $x+0=x$ примењена на $-(x\cdot y)$),

(д) $(-x)\cdot y=y\cdot(-x)$ (комутативност ·)
$(-x)\cdot y=-(y\cdot x)$ (једнакост (г))
$(-x)\cdot y=-(x\cdot y)$ (комутативност ·),

(ђ) $(-x)\cdot(-y)=-(x\cdot(-y))$ (једнакост (д) примењена на $(-x)\cdot(-y)$)
$(-x)\cdot(-y)=-(-(x\cdot y))$ (једнакост (г))
$(-x)\cdot(-y)=x\cdot y$ (једнакост (а)),

(е) $(x+y)+(-x)=(y+x)+(-x)$ (комутативност +)
$(x+y)+(-x)=y+(x+(-x))$ (асоцијативност +)
$(x+y)+(-x)=y+0$ (особина $x+(-x)=0$)
$(x+y)+(-x)=y$ (особина $x+0=x$),

(ж) $x+\big(-(x+y)\big)=x+(-x)+(-y)$ (једнакост (б))
$x+\big(-(x+y)\big)=0+(-y)$ (особина $x+(-x)=0$)
$x+\big(-(x+y)\big)=-y$ (особина $x+0=x$ примењена на $-y$).■

Тврђење 2. У скупу целих бројева $\mathbb{Z}$, за $\forall x \in \mathbb{Z}$ постоји $\exists!\, y \in \mathbb{N}$ такво да важи $x=y \vee x=-y$.

Доказ.

(1) Прво ћемо доказати јединственост броја y. Претпоставимо супротно, да за $x \in \mathbb{Z}$ постоје два броја y_1 , $y_2 \in \mathbb{N}$ таква да важи:

$$(x=y_1 \vee x=-y_1)\wedge(x=y_2 \vee x=-y_2).$$

Сређивањем добијамо могућности:

$$(x=y_1 \vee x=-y_1)\wedge(x=y_2 \vee x=-y_2) \Leftrightarrow$$
$$(x=y_1 \wedge x=y_2) \vee (x=y_1 \wedge x=-y_2) \vee (x=-y_1 \wedge x=y_2) \vee (x=-y_1 \wedge x=-y_2).$$

1° $x=y_1 \wedge x=y_2 \Rightarrow y_1=y_2$.

2° и 3° У случајевима $x=y_1 \wedge x=-y_2$ и $x=-y_1 \wedge x=y_2$ добијамо $y_1=-y_2$, односно,
$-y_1=y_2$. Због особине $x+(-x)=0$ добијамо да је $y_1+y_2=0$, а пошто y_1 , $y_2 \in \mathbb{N}$ закључујемо да је $y_1=y_2=0$.

4° $x=-y_1 \wedge x=-y_2 \Rightarrow -y_1=-y_2 \Rightarrow y_1=y_2$.

Из 1°, 2°, 3°, 4° следи да је $y_1=y_2$ па закључујемо да је $y \in \mathbb{N}$ јединствено.

(2) Сваки број $x \in \mathbb{Z}$ може бити представљен неким од следећих бројева или израза:

$x=0$ или
$x=1$ или
$x=a+b$ или
$x=a \cdot b$ или
$x=-a$ за $a,b \in \mathbb{Z}$.

-Ако је $x=0$ или $x=1$ очигледно је $y=0$ или $y=1$ и важи $y \in \mathbb{N}$ јер $x \in \mathbb{Z}$, тачније $x \in \mathbb{N}$, а по претпоставци $x=y$.

-Ако је $x=a+b$, $a,b \in \mathbb{Z}$, по претпоствци имамо да је $a=y_1 \vee a=-y_1$ и $b=y_2 \vee b=-y_2$; $y_1, y_2 \in \mathbb{N}$.

Добијамо следеће могућности:

$x=y_1+y_2 \vee x=y_1+(-y_2) \vee x=(-y_1)+y_2 \vee x=(-y_1)+(-y_2)$.

И нека је, на пример, $y_1 \geq y_2$ па y_1 можемо представити као $y_1=y_2+y_3, y_3 \in \mathbb{N}$.

У једнакости $x=y_1+y_2$, а притом важи да $y_1+y_2 \in \mathbb{N}$.

У једнакости $x=y_1+(-y_2)=y_2+y_3+(-y_2)=y_3$, а притом важи да $y_3 \in \mathbb{N}$.

У једнакости $x = (-y_1) + y_2 = -(y_2 + y_3) + y_2 = (-y_2) + (-y_3) + y_2 = -y_3$, а притом важи да $y_3 \in \mathbb{N}$.

У једнакости $x = (-y_1) + (-y_2) = -(y_1 + y_2)$, а притом важи да $y_1 + y_2 \in \mathbb{N}$.

Следи да $x = y_1 + y_2 \lor x = y_3 \lor x = -y_3 \lor x = -(y_1 + y_2)$ и сваки од ових бројева припада $\mathbb{N}$.

-Ако је $x = a \cdot b, a, b \in \mathbb{Z}$, разматра се слично као код сабирања.

-Ако је $x = -a$, $a \in \mathbb{Z}$, по претпоставци $a = y \lor a = -y$ за $y \in \mathbb{N}$. Из ових једнакости следи $-a = -y \lor -a = -(-y) = y$ и одавде следи $x = -y \lor x = y, y \in \mathbb{N}$. ■

2.1.2 Изградња структуре целих бројева

Има више различитих начина да се, полазећи од структуре природних бројева $\mathbb{N}$, изгради структура целих бројева $\mathbb{Z}$.У наставку ћемо приказати један од начина да се то оствари. Целе бројеве можемо посматрати као резултате одузимања природних бројева (на пример: $-6 = 10 - 16 = 12 - 18, -2 = 1 - 3 = 8 - 10$ итд.). Разлике можемо замислити као уређене парове природних бројева при чему парове који граде исти цео број изједначавамо (зато изједначавамо парове (10,16) и (12,18)).
Сада наводимо поступак изградње структуре $\mathbb{Z}$.

Дефиниција. Дефинишемо скуп $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\}$, а у скуп се уводе операције $+, \cdot, -$ на следећи начин:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \overset{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \overset{\text{def}}{=} (x_1x_2 + y_1y_2,\ x_1y_2 + y_1x_2),$$
$$-(x, y) \overset{\text{def}}{=} (y, x).$$

И релација $\sim$ се дефинише

$$(x, y) \sim (a, b) \overset{def}{\Longleftrightarrow} x + b = y + a.$$

Тврђење 3. Релација $\sim$ је конгруенција структуре

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, +, \cdot, -).$$

Доказ. Хоћемо да докажемо да $\sim$ јесте конгруенција наведене структуре.

(1) Свака релација конгруенције је релација еквиваленције, а то значи да она има следеће особине: рефлексивност, симетричност, транзитивност (РСТ), па ћемо то доказати и за ову релацију.

(2) Друго што треба доказати је да је релација сагласна са $+$, $-$ и $\cdot$ који су дефинисани у структури.

(1) Треба доказати да је $\sim$ релација еквиваленције.

1°Рефлексивност: $(x, y) \sim (y, x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} x + y = y + x$, а ова једнакост важи за природне бројеве, за њих важи комутативност.

2° Симетричност: $(x, y) \sim (a, b) \Rightarrow (a, b) \sim (x, y)$. Када се ово среди користећи дефиницију $\sim$ добијамо да мора да важи: $x + b = y + a \Rightarrow a + y = b + x$, и то је тачно за природне бројеве.

3° Транзитивност: $(x, y) \sim (a, b) \wedge (a, b) \sim (z, t) \Rightarrow (x, y) \sim (z, t)$. Ово се своди на следеће:

$x + b = y + a \wedge a + t = b + z \Rightarrow x + t = y + z$.

И показаћемо да то заиста важи: $x + t + b = x + b + t =$

$$= y + a + t =$$

$$= y + b + z =$$

$$= y + z + b.$$

Добијамо да је $x + t + b = y + z + b$ па можемо да склонимо број b са леве и десне стране једнакости и тиме добијамо да важи $x + t = y + z$, што је и требало показати.

(2) Треба доказати да је $\sim$ да је сагласна са $+, \cdot, -$.

4° Сагласност $\sim$ са $+$

(требало би доказати):

$(x_1, y_1) \sim (a_1, b_1) \wedge (x_2, y_2) \sim (a_2, b_2) \Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \sim (a_1, b_1) + (a_2, b_2)$.

Према дефиницији $\sim$ знамо да важи да је $x_1 + b_1 = y_1 + a_1$ и да важи

$$x_2 + b_2 = y_2 + a_2.$$

Онда је $(x_1 + x_2) + (b_1 + b_2) = (x_1 + b_1) + (x_2 + b_2)$

$$= (y_1 + a_1) + (y_2 + a_2)$$

$$= (y_1 + y_2) + (a_1 + a_2).$$

Ако сада ове $(x_1 + x_2) + (b_1 + b_2) = (y_1 + y_2) + (a_1 + a_2)$ елементе вратимо у дефиницију $\sim$ добијамо $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \sim (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, односно, (примењујемо дефиницију $+$) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \sim (a_1, b_1) + (a_2, b_2)$.

5° Сагласност $\sim$ са $-$

(требало би доказати):

$(x, y) \sim (a, b) \Rightarrow -(x, y) \sim -(a, b)$.

По дефиницији $(x, y) \sim (a, b) \Rightarrow x + b = y + a$

$$\Rightarrow y + a = x + b$$

$$\Rightarrow (y, x) \sim (b, a)$$

$$\Rightarrow -(x, y) \sim -(a, b).$$

6° Сагласност $\sim$ са $\cdot$

(требало би доказати):

$(x_1, y_1) \sim (a_1, b_1) \wedge (x_2, y_2) \sim (a_2, b_2) \Rightarrow (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \sim (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$.

Ако применимо дефиницију $\cdot$ на исказ $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \sim (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$, можемо га трансформисати у

$(x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \sim (a_1a_2 + b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$.

А када применимо дефиницију $\sim$ на овај исказ добијамо једнакост:

$x_1x_2 + y_1y_2 + a_1b_2 + b_1a_2 = x_1y_2 + y_1x_2 + a_1a_2 + b_1b_2$. (1)

Дакле, да бисмо доказали сагласност $\sim$ са $\cdot$ треба доказати, заправо, да једнакост (1) важи, а то ћемо постићи коришћењем полазне дефиниције $\sim$.

Пошто знамо да важи $(x_1, y_1) \sim (a_1, b_1) \Rightarrow x_1 + b_1 = y_1 + a_1$ (2) и
$(x_2, y_2) \sim (a_2, b_2) \Rightarrow x_2 + b_2 = y_2 + a_2$ (3)

полазимо од израза
$(x_1 + a_1)(x_2 + b_2) + (x_1 + b_1)(x_2 + b_2)$ и растављамо га на два начина користећи једнакости (2) и (3).

I начин:
$(x_1 + a_1)(x_2 + b_2) + (x_1 + b_1)(x_2 + b_2) =$
$= (x_1 + a_1)(y_2 + a_2) + x_2(x_1 + b_1) + b_2(x_1 + b_1)$
$= x_1(y_2 + a_2) + a_1(y_2 + a_2) + b_2(x_1 + b_1) + x_2(y_1 + a_1)$
$= x_1y_2 + x_1a_2 + a_1y_2 + a_1a_2 + b_2x_1 + b_1b_2 + y_1x_2 + x_2a_1.$ (4)

II начин:
$(x_1 + a_1)(x_2 + b_2) + (x_1 + b_1)(y_2 + a_2) =$
$= x_1(x_2 + b_2) + a_1(x_2 + b_2) + y_2(x_1 + b_1) + a_2(x_1 + b_1)$
$= x_1(x_2 + b_2) + a_1(x_2 + b_2) + a_2(x_1 + b_1) + y_2(y_1 + a_1)$
$= x_1x_2 + b_2x_1 + x_2a_1 + a_1b_2 + x_1a_2 + b_1a_2 + y_1y_2 + a_1y_2.$ (5)

Пошто смо исти израз раставили на два начина резултати тих растављања су једнаки, па ћемо изједначити (4) и (5) и скратити вредности које се појављују са леве и десне стране једнакости.

$$x_1y_2 + x_1a_2 + a_1y_2 + a_1a_2 + b_2x_1 + b_1b_2 + y_1x_2 + x_2a_1$$
$$= x_1x_2 + b_2x_1 + x_2a_1 + a_1b_2 + x_1a_2 + b_1a_2 + y_1y_2 + a_1y_2.$$

Скраћујемо $x_1a_2, a_1y_2, b_2x_1, x_2a_1$, после скраћивања остаје:
$x_1y_2 + a_1a_2 + b_1b_2 + y_1x_2 = x_1x_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + y_1y_2$ и када заменимо места сабирцима добјамо једнакост (1) и на тај начин смо је и доказали. ■

Дефиниција. Дефинишемо $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim, +, \cdot, -)$ са
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim \overset{\text{def}}{=} \{[(x, y)] | x, y \in \mathbb{N}\}$; $[(x, y)] = \{(a, b) | (x, y) \sim (a, b)\}$,
операције $+, \cdot, -$ дефинишу се:

$$[(x_1, y_1)] + [(x_2, y_2)] \overset{\text{def}}{=} [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)],$$
$$[(x_1, y_1)] \cdot [(x_2, y_2)] \overset{\text{def}}{=} [(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)],$$
$$-[(x, y)] \overset{\text{def}}{=} [-(x, y)].$$

Тврђење 4. $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim, +, \cdot, -)$ је структура целих бројева.

Доказ. Структура целих бројева (већ смо је дефинисали) је комутативни прстен са јединицом генерисан са $\mathbb{N}$. Морамо доказати да је такав комутативни прстен и структура $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim, +, \cdot, -)$. $\mathbb{Z}$ је генерисан $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0)$, а пошто $\mathbb{N}$ није подскуп $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim, +, \cdot, -)$ онда ова структура није генерисана са $\mathbb{N}$ већ својим подскупом $\overline{\mathbb{N}} = \{[(x, 0)] | x \in \mathbb{N}\}$. $\overline{\mathbb{N}}$ је добијен пресликавањем $f: \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{N}}$, $f(x) = [(x, 0)]$.

Треба показати још да за $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$ важе аксиоме комутативног прстена са јединицом. У $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$ јединица је $[(1,0)]$, а нула је $[(0,0)]$. Показаћемо да важе неке од аксиома.

Показаћемо да важи асоцијативност +, односно:

$$[(x,y)] + ([(z,t)] + [(u,v)]) = ([(x,y)] + [(z,t)]) + [(u,v)]$$

Лева страна једнакости:

$$\begin{aligned}[(x,y)] + ([(z,t)] + [(u,v)]) &= [(x,y)] + ([(z,t) + (u,v)]) \\ &= [(x,y)] + [(z+u,t+v)] \\ &= [(x,y) + (z+u,t+v)] \\ &= [(x+z+u,y+t+v)].\end{aligned}$$

Десна страна једнакости:

$$\begin{aligned}([(x,y)] + [(z,t)]) + [(u,v)] &= ([(x,y) + (z,t)]) + [(u,v)] \\ &= [(x+z,y+t)] + [(u,v)] \\ &= [(x+z,y+t) + (u,v)] \\ &= [(x+z+u,y+t+v)].\end{aligned}$$

Видимо да после срећивања леве и десне стране једнакости добијамо исте вредности тако да асоцијативност + важи.

Сада ћемо показати да је $[(0,0)]$ неутрал у сабирању, односно да је $[(x,y)] + [(0,0)] = [(x,y)]$:

$[(x,y)] + [(0,0)] = [(x,y) + (0,0)] = [(x+0,y+0)] = [(x,y)]$.

Показаћемо да је $[(1,0)]$ неутрал у множењу, односно да важи $[(x,y)] \cdot [(1,0)] = [(x,y)]$:

$$\begin{aligned}[(x,y)] \cdot [(1,0)] &= [(x,y) \cdot (1,0)] \\ &= [(x\cdot 1 + y\cdot 0, x\cdot 0 + y\cdot 1)] \\ &= [(x+0,0+y)] \\ &= [(x,y)].\end{aligned}$$

Остале аксиоме се доказују на сличан начин. ■

Тврђење 5. У структури целих бројева постоји линеарни поредак $\leq$ који је сагласан са операцијама на $\mathbb{Z}$:

1. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
2. $x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$.

Доказ. За релацију $\leq$ важи: $x \leq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists n \in \mathbb{N})\ y = x + n \ \ \Rightarrow y - x = n \in \mathbb{N}$.

Докажимо прво да је $\leq$ релација линеарног поретка.

Рефлексивност $x \leq x$ увек важи.

Антисиметричност, $x \leq y \ \wedge\ y \leq x \ \Rightarrow x = y$:

$y - x \in \mathbb{N} \wedge x - y \in \mathbb{N} \Rightarrow (y - x) + (x - y) = 0 \Rightarrow y - x = 0 \wedge x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

Транзитивност, $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$:

$y - x \in \mathbb{N} \wedge z - y \in \mathbb{N} \Rightarrow (y - x) + (z - y) \in \mathbb{N} \Rightarrow z - x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq z$.

Доказујемо, сада, да је релација $\leq$ линеарна.

За неко $n \in \mathbb{N}$ важи $x - y = n \ \vee x - y = -n$, односно, $x - y \in \mathbb{N} \ \vee y - x \in \mathbb{N}$, па је $y \leq x$ или $x \leq y$.

Доказујемо 1. и 2.

1.Нека је $x \leq y$, а то значи да $y = x + n$, а одавде је $y + z = x + n + z = x + z + n$, па по дефиницији добијамо $x + z \leq y + z$.

2. $x \leq y \wedge z \geq 0$, а то значи, пратећи дефиницију, $y = x + n, z = 0 + m$ за неке $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \neq 0$. Одавде је $yz = (x + n)z = xz + nm$, јер је $z = m$. Па ако је $m, n \neq 0 \ \Rightarrow mn \neq 0$, па по дефиницији добијамо $xz \leq yz$. ■

Тврђење 6. $(\mathbb{Z}, +, \cdot, -, 0, 1, \geq)$ је уређен прстен у коме је $1 > 0$.

Доказ.

(i) $x \geq 0 \vee x \leq 0 \Rightarrow (x > 0 \vee x = 0) \wedge (x < 0 \vee x = 0)$
$\Rightarrow x > 0 \vee x = 0 \vee x < 0$,

(ii) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > y \wedge y > 0$
$\Rightarrow x + y > 0$.

(iii) Нека је $x > 0$ онда је $-x > 0 \vee -x = 0 \vee -x < 0$ (због(i)).
Ако би било $-x = 0$, онда би важило и да је $x = 0$, али имамо да је $x > 0$, па се ова могућност одбацује.
Ако би било $-x > 0$, онда би важило (због (ii)) $x + (-x) > 0 \ \Rightarrow 0 > 0$, што није тачно, па закључујемо да важи $-x < 0$.
Нека је сада $x < 0$, тада због (i) $-x > 0 \ \vee \ -x = 0 \ \vee \ -x < 0$.
Могућност $-x = 0$ се одбацује као и у претходном примеру, па остаје могућност $-x < 0$, а знамо да важи $x + (-x) < 0 + x \Rightarrow 0 < x$, добијена је контрадикција, па остаје да важи да је $-x > 0$.

(iv) Нека је $x > 0$ и $y > 0$. Тада је $x \cdot y > 0 \cdot y$, али $0 \cdot y = 0$, па добијамо да важи $x \cdot y > 0$.

Показаћемо још и да је 1> 0. На основу (i) знамо да мора важити једна од могућности $1 > 0 \ \vee 1 = 0 \ \vee 1 < 0$. Пошто је $1 \neq 0$ остају могућности $1 > 0 \ \vee 1 < 0$.

Ако би било $1 < 0$ онда је због (iii) $-1 > 0$, па је $(-1) \cdot (-1) > 0 \cdot (-1) = 0$, а одавде добијамо $1 > 0$ и тако добијамо контрадикцију, па остаје само могућност $1 > 0$.■

2.1.3 Еуклидов алгоритам

Тврђење 7. (Теорема о остатку). Нека су $a, b \in \mathbb{N}, b > 0$. Тада постоје јединствени $q, r \in \mathbb{N}$ такви да $a = qb + r$ и $0 \leq r < b$ (q количник при дељењу бројева a и b, r остатак добијен при дељењу бројева a и b).

Доказ. Нека је $S = \{x \in \mathbb{N} | a \leq xb\}$. Пошто $a \in S, S$ је непразан, па постоји најмањи елемент скупа S, нека је m то и за њега важи $a \leq mb$. Разликујемо два случаја:

1. $a = mb$. Тада је $q = m, r = 0$.

2. $a < mb$, тада, пошто је очигледно $m \neq 0$, постоји $q \in \mathbb{N}$ тако да је $m = q + 1$. Тада (због избора броја m), $qb < a < qb + b$, па је $a = qb + r$ јер је $0 < r < b$, па је $r = a - qb$.

Треба показати да је ово разлагање јединствено. Претпоставимо супротно нека је $a = q_1 b + r_{1,}\ 0 \leq r_1 < b$ и нека је $a = q_2 b + r_2, 0 \leq r_2 < b$. Тада

$$|q_1 - q_2|b = |r_1 - r_2| \qquad (1).$$

Ако је $q_1 \neq q_2$, онда је$|q_1 - q_2|b \geq b$, а с друге стране $|r_1 - r_2| < b$, што је контрадикција са (1). Закључујемо $q_1 = q_2$ и $r_1 = r_2$.■

Еуклидов алгоритам

Нека су a и b природни броеви, $a, b > 0$. Можемо конструисати низове q_i, r_i тако да је

$$\begin{aligned} &r_0 = a, \quad r_1 = b \\ &r_0 = q_1 r_1 + r_2 \\ &r_1 = q_2 r_2 + r_3 \\ &r_2 = q_3 r_3 + r_4, \quad 0 \leq r_{i+1} < r_i \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

Остаци при дељењу се у сваком кораку смањују и не могу бити негативни.

Остатак r_i у неком тренутку мора постати једнак нули и тада се алгоритам зауставља. Последњи остатак који је различит од нуле је највећи заједнички делилац (НЗД) бројева a и b.

Пример Еуклидовог алгоритма. Нека је a = 1071, b = 462. НЗД за ове бројеве се помоћу алгоритма одређује у k корака.

k=0	1071=2·462+147	$(r_0 = 1071, q_1 = 2, r_1 = 462, r_2 = 147)$
k=1	462=3· 147+21	$(r_1 = 462, q_2 = 3, r_2 = 147, r_3 = 21)$
k=2	147=7·21	$(r_2 = 147, q_3 = 7, r_3 = 21, r_4 = 0)$

Пошто је $r_4 = 0$ закључујемо да је последњи остатак различит од нуле, а то је 21, НЗД бројева 1071 и 462, НЗД(1071, 462) = 21.

2.2 Рационални бројеви

Изградња структуре рационалних бројева изводи се слично као изградња структуре целих бројева. Једино што се у овом случају полази од целих бројева, а операција коју желимо да уведемо је операција дељења. У структури рационалних бројева могуће је изводити све четири рачунске операције: сабирање, одузимање, множење и дељење.

2.2.1 Аксиоме и особине рационалних бројева

Рационални бројеви настају из потребе да се исправе недостаци целих бројева. Баш као што су цели бројеви изграђени да би се исправиле мане природних бројева, то јест, мане сабирања (то је постигнуто дефинисањем операција − у структури $\mathbb{Z}$) исто тако дефинишу се рационални бројеви да би се исправила мана операције множења која постоји у $\mathbb{Z}$. Тачније, не постоји инверзна операција операцији множења у скупу $\mathbb{Z}$ и она ће бити дефинисана у скупу рационалних бројева. Та инверзна операција операцији множења је дељење (:). Због тога се рационални бројеви представљају као количници, то јест, разломци два цела броја.

Структура рационалних бројева Q настаје утапањем прстена целих бројева у прстен у коме је дефинисана операција дељења, а који је генерисан целим бројевима. Увођење операције дељења, уствари, значи да мора важити:

$$(\forall x, x \neq 0)(\exists!\, y) \Rightarrow xy = 1.$$

Показаћемо да је такво y јединствено користећи аксиоме комутативног прстена са јединицом.

Претпоставимо да y није једниствено, тј. постоје y_1 и y_2 такви да важи да је $xy_1 = 1$ и $xy_2 = 1$.

Кренућемо од:

$y_1 = y_1 \cdot 1$ (јер је $x \cdot 1 = x$)

$= y_1 \cdot (xy_2)$ (из претпоставке)

$= (y_1 x) \cdot y_2$ (асоцијативност)

$= (xy_1) \cdot y_2$ (комутативност)

$= 1 \cdot y_2$

$= y_2$ (јер је $x \cdot 1 = x$).

Добили смо да је $y_1 = y_2$, то јест, y је јединствено.

У структури рационалних бројева важе све аксиоме комутативног прстена, поред тога, дефинише се и дељење, па из тога следи да је структура Q поље генерисано целим бројевима, односно, поље Q дефинишу следећа својства (аксиоме):

1. асоцијативност сабирања и асоцијативност множења

$x + (y + z) = (x + y) + z$ $\quad$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

2. комутативност сабирања и комутативност множења

$x + y = y + x$ $\quad$ $x \cdot y = y \cdot x$

3. постојање неутрала за сабирање и неутрала за множење

$x + 0 = x$ $\quad$ $x \cdot 1 = x$

4. постојање инверза код сабирања

$x + (-x) = 0$

5. дистрибутивност множења над сабирањем

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

6. операцију инвертовања дефинишемо тако да помоћу ове операције добијамо инверз код множења, односно, уводимо унарни операцијски знак „на -1“ тако да важи:

$$x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x^{-1} = 1.$$

У пољу Q се захваљујући инверзу дефинишу и разломци, $^{-1}$ и $\frac{1}{x}$ су равноправне операције:

$$\frac{1}{x} \overset{\text{def}}{=} x^{-1},$$
$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}.$$

Следеће тврђење описују како се разломци „понашају“ при рачунању.

Тврђење 8. У пољу Q разломци имају следеће особине:

a) $u, v \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{uv}$,
b) $u, v \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \frac{xy}{uv}$,
c) $u, v \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{xv+yu}{uv}$,
d) $u \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{-u} = -\frac{1}{u}$.

Доказ.

a) Прво треба показати да је $uv \neq 0$. Нека су $u, v \neq 0$, доказујемо и да је $uv \neq 0$. Претпоставимо супротно нека је $uv = 0$. Тада је:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 \cdot v^{-1} \\
&= (uv) \cdot v^{-1} && \text{(претпоставка } uv = 0) \\
&= u \cdot (vv^{-1}) && \text{(асоцијативност)} \\
&= u \cdot 1 && \text{(аксиома о постојању инверза код множења)} \\
&= u.
\end{aligned}$$

Добијена једнакост је противуречна са тим да је $u \neq 0$ и добијамо контрадикцију. Па важи да је $uv \neq 0$.

Сада доказујемо једнакост (a).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u} \cdot \frac{1}{v} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{v} \cdot 1 && \text{(аксиома } x \cdot 1 = x) \\
&= \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{v} \cdot (uv) \cdot \frac{1}{uv} && \text{(јер је } uv \neq 0 \text{ па важи } uv \cdot \frac{1}{uv} = 1) \\
&= \left(u \cdot \frac{1}{u}\right) \cdot \left(v \cdot \frac{1}{v}\right) \cdot \frac{1}{uv} && \text{(комутативност и асоцијативност)} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{uv} && \text{(јер је } u, v \neq 0 \text{ па је } u \cdot \frac{1}{u} = 1 \text{ и } v \cdot \frac{1}{v} = 1) \\
&= \frac{1}{uv}.
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} &= \left(x \cdot \frac{1}{u}\right) \cdot \left(y \cdot \frac{1}{v}\right) \\
&= xy \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{v} \\
&= xy \cdot \frac{1}{uv} \\
&= \frac{xy}{uv}.
\end{aligned}$$

У овом доказу користили смо дефиниције и тврђење а).

c) $\frac{x}{u}+\frac{y}{v}=x\cdot\frac{1}{u}+y\cdot\frac{1}{v}$

$=x\cdot\frac{1}{u}\cdot 1+y\cdot\frac{1}{v}\cdot 1$

$$=x\cdot\frac{1}{u}\cdot v\cdot\frac{1}{v}+y\cdot\frac{1}{v}\cdot u\cdot\frac{1}{u}$$

$$=xv\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{v}+yu\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{v}$$

$$=xv\cdot\frac{1}{uv}+yu\cdot\frac{1}{uv}$$

$$=(xv+yu)\cdot\frac{1}{uv}$$

$=\frac{xv+yu}{uv}$.

У доказу смо користили аксиоме поља и особине које смо претходно доказали у овом тврђењу.

d) Важи да је $\frac{1}{-1}=-1$. Ако то знамо можемо доказати и ово тврђење:

$\frac{1}{-u}=\frac{1}{(-1)u}=\frac{1}{(-1)}\cdot\frac{1}{u}=-1\cdot\frac{1}{u}=-\frac{1}{u}$.■

Тврђење 9. Ако $x\in Q$ онда постоје $m\in\mathbb{Z}$ и $n\in\mathbb{N}$ $(n\neq 0)$ такви да је $x=\frac{m}{n}$.

Доказ. Разликујемо неколико случајева.

1° Ако је

$x=0=\frac{0}{1}$ (на месту имениоца може бити и било који други број из $\mathbb{N}$) или

$x=1=\frac{1}{1}$ па је тврђење је задовољено.

2° Ако је $x=u+v$, нека је (по претпоставци) $u=\frac{m_1}{n_1}$ и $v=\frac{m_2}{n_2}$ тако да је $n_1,n_2\neq 0$.

Тада је

$$x=u+v=\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}\overset{\text{def}}{=}\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}$$

и тврђење је задовољено јер $m_1n_2, m_2n_1\in\mathbb{Z}$, а $n_1n_2\in\mathbb{N}$.

3° Ако је $x=uv$, нека је $u=\frac{m_1}{n_1}$ и $v=\frac{m_2}{n_2}$ тако да је $n_1,n_2\neq 0$. Тада је

$$x=uv=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}$$

и тврђење је задовољено и у овом случају јер је $m_1m_2\in\mathbb{Z}$, и $n_1n_2\in\mathbb{N}$.

4° Ако је $x=-u$ и $u=\frac{m}{n}$, онда је

$$x=-u=-\frac{m}{n}=-\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=(-m)\cdot\frac{1}{n}=\frac{-m}{n}$$

$-m\in\mathbb{Z}$, и $n\in\mathbb{N}$.

5° Ако је $x=u^{-1}$ и $0\neq u=\frac{m}{n}$. Пошто је $u\neq 0\Rightarrow m\neq 0$ па је

$$x=\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{m}{n}}=\frac{1}{m\cdot\frac{1}{n}}=\frac{1}{m}\frac{1}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{m}n=\frac{n}{m}.$$

Ако је $m \in \mathbb{N}$ тврђење је задовољено, а ако $m \notin \mathbb{N}$ тада је $m = -m_1, 0 \neq m_1 \in \mathbb{N}$ и ову једнакост убацујемо у претходно добијену формулу, па важи
$x = \frac{n}{-m_1} = n\frac{1}{-m_1} = n\left(-\frac{1}{m_1}\right) = (-n)\frac{1}{m_1} = \frac{-n}{m_1}$ па је тврђење задовољено.■

2.2.2 Изградња структуре рационалних бројева

Рационални бројеви су сви који се могу представити у облику разломка $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z},\ 0 \neq n \in \mathbb{N}$, па рационалне бројеве представљамо у облику уређених парова (m, n) при чему изједначавамо оне парове који представљају исти разломак. На пример: $\frac{-1}{2} = \frac{-3}{6} \Rightarrow (-1,2) = (-3,6)$. Полазећи од структуре целих и структуре природних бројева може се изградити структура рационалних бројева.
Прво се дефинише помоћна структура.

Дефиниција. Скуп $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) | x \in \mathbb{Z}, 0 \neq y \in \mathbb{N}\}$ и операције на њему су:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} x_1 y_2 = x_2 y_1,$$
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 y_2 + x_2 y_1, y_1 y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 x_2, y_1 y_2),$$
$$-(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (-x, y).$$

Дефинишемо и инверз уређеног пара (x, y) на следећи начин:

$$x \neq 0, \frac{1}{(x, y)} \stackrel{\text{def}}{=} (sgn(x) \cdot y, sgn(x) \cdot x)$$

где је
$$sgn(x) = \begin{cases} -1, x < 0; \\ 0, x = 0; \\ 1, x > 0. \end{cases}$$

Тврђење 10. Релација $\sim$ је конгруенција струкуре ($\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$, +, ·, −, $^{-1}$).

Тврђење 11. ($\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+ /\sim$, +, ·, −, $^{-1}$) је структура рационалних бројева.

Тврђења 10 и 11 се доказују на исти начин као и тврђења 3 и 4 која смо доказали за целе бројеве.

У пољу Q постоји линеарно уређење као и у прстену целих бројева.

Тврђење 12. Поље (Q, +, ·, −, $^{-1}$, 0, 1, ≥) је линеарно уређено тако да за свака два броја $x, y \in Q$ важи:

i) $x > 0 \vee x = 0 \vee x < 0$,
ii) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0$,
iii) $x > 0 \Rightarrow -x < 0,\ x < 0 \Rightarrow -x > 0$,
iv) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$.

Закључак

У првом поглављу уведени су скупови целих и рационалних бројева на начин како се то ради у основним школама. Може да се закључи да се ученици детаљно упознају са појмом разломка и свим његовим особина у петом разреду невезано за неки скуп бројева. Изучавање разломка, самостално, као резултат може дати опширно познавање његових особина, што ће представљати изузетно добру основу за увођење рационалних бројева у шестом разреду. Затим, у шестом разреду, се прво изучавају особине целих бројева, а потом се познавање разломака и целих бројева спаја на скупу рационалних бројева. Зато слободно можемо рећи да увођење скупа рационалних бројева, заправо, представља обнављање раније стечених знања, можемо рећи и да служи као добар терен за учење путем повезивања раније стеченог знања са неким новим и да служи за обнављање и продубљивање знања, а у сврху његовог дужег трајања.

У другом поглављу је приказано како се, полазећи од природних бројева изграђују цели и рационални бројеви. Можемо рећи и то да су они резултат примена једноставних рачунских операција (одузимања и дељења) на природне бројеве. Ове структуре су изграђене у коначном броју корака. Свака од структура решава проблем који се није могао решити у претходној (структура $\mathbb{Z}$ настала да би се дефинисало $-$, а структура Q да би се дефинисало :). Структуре се допуњују или, можемо рећи, „ исправљају мане“ и то: цели бројеви мане сабирања, а рационални бројеви мане множења.

Сада, на крају, када имамо два различита приступа истој теми можемо рећи да се у основним школама увођење скупова бројева врши постепено, прилагођено је узрасту у коме се врши и води се рачуна о томе да се обави на деци разумљив начин. Циљ таковог приступа је да деца овладају вештинама примене наученог. На факултету заснивање структура бројева се врши строго, уважавањем њихових алгебарских својстава, а својства структура се описују тврђењима и формалним доказима тих тврђења.

Литература

1. М. Божић..., Бројеви, Школска књига, Загреб, 1985.
2. Н. Икодиновић, С. Димитријевић, С. Милојевић, Н. Вуловић, Уџбеник Математика за 5. разред основне школе, Klett, Београд, 2013.
3. Н. Икодиновић, С. Димитријевић, С. Милојевић, Н. Вуловић, Збирка задатака Математика за 5. разред основне школе, Klett, Београд, 2013.
4. Н. Икодиновић, С. Димитријевић, Уџбеник Математика за 6. разред основне школе, Klett, Београд, 2013.
5. Н. Икодиновић, С. Димитријевић, Уџбеник Математика за 7. разред основне школе, Klett, Београд, 2013.
6. Ж. Мијајловић, Алгебра 1, MILGOR, 1993.
7. С. Милојевић, Н. Вуловић, Збирка задатака Математика за 6. разред основне школе, Klett, Београд, 2013.
8. Оперативни распоред наставног градива из математике за V разред основне школе школске 2016/2017.
9. Оперативни распоред наставног градива из математике за VI разред основне школе школске 2016/2017.
10. Оперативни распоред наставног градива из математике за VII разред основне школе школске 2016/2017.