Универзитет у Београду

Математички факултет

МАСТЕР РАД

ПРИНЦИП МАКСИМУМА МОДУЛА И ПРИМЕНЕ

Студент:
Бојана Јевтић
1074/2015

Професор:
проф. др Милош Арсеновић

У Београду, септембар 2016.

Садржај

Увод

Принцип максимума модула (у даљем тексту ПММ) је класичан резултат комплексне анализе са многобројним применама. У овом раду су приказане неке од њих. У првој глави је представљено како на више различитих начина можемо доћи до доказа принципа максимума модула. Прецизније, приказана су три доказа основног облика ПММ, најелементарнији који користи Кошијеву интегралну формулу, затим доказ који се добија као последица теореме о отвореном пресликавању и на крају доказ који користи Фуријеове редове. Након тога, следе прве примене ПММ, Шварцова лема и Основна теорема алгебре. На самом крају поглавља је још доказана варијанта истог принципа за субхармонијске функције, која има за последицу ПММ, што нам даје још један, четврти доказ. У другој глави овог рада се даје уопштење принципа максимума на неограничене области. Централне личности, које су дале велики допринос решавању проблема на неограниченим областима, су Фрагмен и Линделеф. Наведено је неколико тврђења до којих су они дошли. Најпре је дат општи резултат за произвољну област, затим су као последице тога наведена конкретна тврђења која се односе на секторе, а након тога и варијанта за хоризонталну траку. У другој глави је такође наведена и класична Адамарова теорема о три праве за вертикалну траку, која говори о понашању ограничене функције на произвољној правој, која се налази између две фиксиране праве и као њена последица теорема о три круга. У трећој глави дајемо примене Адамарове теореме на неке проблеме анализе, тачније, користимо је да бисмо доказали Хауздорф-Јунгову теорему. Последња, четврта глава, је посвећена још неким специјалним применама. Доказана је Јенсенова неједнакост помоћу ПММ и она је послужила као мотивација за уопштавање и прецизније одређивање везе између нула и полова мероморфне функције и средње вредности логаритма те функције на кружници. Тако је добијена Јенсенова формула, која је кључна у наредном одељку за Борелов доказ Мале Пикарове теореме. За крај, поново помоћу ПММ је доказана Борел-Каратеодоријева теорема, која тврди да је у суштини аналитичка функција ограничена својим реалним делом.

1 Основни облик принципа максимума модула

Принцип максимума модула представља један од основних принципа комплексне анализе. Тврди да не постоји неконстантна холоморфна функција у области Ω тако да њен модул достиже локални максимум у некој тачки унутар Ω. Следи прецизна формулација тог тврђења и његове последице, примена на ограничену област и принцип минимума модула, а затим и неколико доказа тог тврђења.

Теорема 1. *(Принцип максимума модула - ПММ)*
Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област (отворен, повезан и непразан скуп) и нека је f холоморфна на Ω. Ако $|f|$ достиже локални максимум у некој тачки $a \in \Omega$, тада је f константна функција.

Последица 1. *(ПММ за ограничене области) Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ограничена област и нека је f непрекидна на $\overline{\Omega}$ и холоморфна на Ω. Тада је* $\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$.

Доказ. Функција $|f|$ је непрекидна, а скупови $\overline{\Omega}$ и $\partial\Omega$ су компактни, па постоје $\max_{\overline{\Omega}} |f|$ и $\max_{\partial\Omega} |f|$. Ако се $\max_{\overline{\Omega}} |f|$ достиже у Ω тада је то и локални максимум у Ω, па на основу претходне теореме f мора бити константна функција на Ω. Пошто је f непрекидна на $\overline{\Omega}$, добијамо да је f константна и на $\overline{\Omega}$, што нам даје да важи $\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$. Са друге стране, ако се максимум не достиже у Ω, тада се достиже на $\partial\Omega$, што нам опет даје да важи $\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$. □

Последица 2. *(Принцип минимума модула)*
Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област, f холоморфна на Ω и $f(z) \neq 0$ за свако $z \in \Omega$. Ако $|f|$ достиже локални минимум у некој тачки $a \in \Omega$, тада је f константна функција.

Доказ. Пошто је $f \neq 0$ у Ω то је функција $\frac{1}{f}$ холоморфна на Ω, па на њу можемо применити ПММ, одакле директно следи тврђење. □

Закључујемо да ако се достиже локални минимум модула холоморфне функције, тада је или функција константна или је у некој тачки једнака нули.

1.1 Докази ПММ

Ово поглавље ћемо посветити доказивању теореме 1. Приступањем проблему на више начина, добићемо неколико различитих доказа.

У даљем тексту означавамо са $D(a, R)$ отворен диск са центром у a и полупречником R у комплексној равни, тј. $D(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$. Специјално, $\mathbb{D} = D(0, 1)$.

Кренимо од доказа који користи Кошијеву[1] интегралну формулу.

Доказ 1. Нека је $a \in \Omega$ тачка у којој $|f|$ достиже локални максимум. Тада постоји диск $D = D(a, r) \subseteq \Omega$, тако да важи $|f(z)| \leq |f(a)|, \forall z \in D$. Нека је $0 < \rho < r$ и нека је γ_ρ кружница $|z - a| = \rho$, $\gamma_\rho \subseteq D$. На основу Кошијеве интегралне формуле имамо да је

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Параметризацијом кружнице γ_ρ са $z = a + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, добијамо

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i\rho e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) dt.$$

Стога је

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + \rho e^{it})| dt.$$

Пошто је $|f(a)| \geq |f(z)|$, за свако $z \in D$, то је $|f(a)| \geq |f(a + \rho e^{it})|$, за свако $t \in [0, 2\pi]$, па добијамо

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + \rho e^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)| dt \leq |f(a)|.$$

Из добијеног следи да мора бити

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + \rho e^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)| dt,$$

па је

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)| dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(a)| - |f(a+\rho e^{it})|) dt.$$

[1] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Функција $g(t) = |f(a)| - |f(a+\rho e^{it})|$ је непрекидна по t и важи $g(t) = |f(a)| - |f(a+\rho e^{it})| \geq 0$, за свако $t \in [0, 2\pi]$, па је $g(t) = 0$, тј. $|f(a)| = |f(a+\rho e^{it})|$, за све $t \in [0, 2\pi]$, па је $|f(a)| = |f(z)|$, за све $z \in \gamma_\rho$. Пошто је ρ било произвољно између 0 и r, следи да за све $z \in D$ важи $|f(z)| = |f(a)|$. Означимо $|f(a)| = C$. Функција f је холоморфна у D и има константан модул. Нека је $f(z) = u(z) + iv(z)$, где су u и v реалне функције. Тада је $|f(z)|^2 = u^2(z) + v^2(z) = C^2$ за свако $z = x + iy \in D$. Ако је $C = 0$, тада је $u = v = 0$, па је $f = 0$ на D. Ако је $C \neq 0$, тада диференцирањем по променљивим x и y добијамо

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0.$$

Применом Коши-Римановых[2] услова, тј. заменом $v_y = u_x$ и $u_y = -v_x$, добијамо

$$uu_x + vv_x = 0, \tag{1}$$

$$-uv_x + vu_x = 0. \tag{2}$$

Множењем једначине (1) функцијом u и једначине (2) функцијом v и сабирањем добијених једначина налазимо да је

$$(u^2 + v^2)u_x = 0,$$

па је $u_x = 0$ на D, а тиме и $v_y = 0$ на D. Затим, множењем једначине (1) функцијом v и једначине (2) функцијом $-u$ и сабирањем добијених једначина налазимо да је

$$(u^2 + v^2)v_x = 0,$$

па је $v_x = 0$, а тиме и $u_y = 0$. Дакле, добијамо да су u и v константне функције на D, што нам даје да је и f константна на D. Сада на основу теореме о јединости аналитичке функције следи да је f константна на целом Ω. □

Наредни доказ је елегантнији и користи познату теорему о отвореном пресликавању. Следи формулација те теореме, а након тога као једноставна последица се добија и доказ принципа максимума модула.

[2] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Теорема 2. *Нека је Ω област и f неконстантна функција холоморфна на Ω. Тада је f отворено пресликавање, тј. ако је $V \subseteq \Omega$ отворен скуп, тада је и $f(V) \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп у $\mathbb{C}$. Специјално, $f(\Omega)$ је област.*

Доказ 2 - последица теореме 2. Пошто f достиже локални максимум у $a \in \Omega$, постоји диск $D(a, r)$ тако да за свако $z \in D(a, r)$ важи $|f(a)| \geq |f(z)|$. Из тога следи да је $f(D(a, r)) \subseteq D[0, |f(a)|]$. Претпоставимо да функција f није константна. Тада, на основу претходне теореме следи да је $f(D(a, r))$ отворен скуп у $\mathbb{C}$, па постоји $\varepsilon > 0$ тако да је $D(f(a), \varepsilon) \subseteq f(D(a, r)) \subseteq D[0, |f(a)|]$, што је немогуће. Дакле, функција f мора бити константна функција. □

Сада ћемо навести доказ који користи чињеницу да се Тејлоров[3] ред на неком диску може видети као тригонометријски ред.

Доказ 3. Нека $|f|$ достиже локални максимум у $a \in \Omega$, тј. постоји $B(a, R) \subset \Omega$ тако да је

$$|f(z)| \leq |f(a)|, \ \forall z \in D(a, R). \tag{3}$$

Пошто је f аналитичка у Ω, може се представити Тејлоровим редом у $D(a, R)$. Дакле,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \ \forall z \in D(a, R).$$

Нека је $f_r(\theta) = f(a + re^{i\theta}), \theta \in [-\pi, \pi]$, за фиксирано $r < R$. Тада је

$$f_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}.$$

Овај ред конвергира униформно на $[-\pi, \pi]$. Простор $L^2[-\pi, \pi]$ је Хилбертов[4] простор и скуп $\{e^{in\theta} | n = 0, 1, 2...\}$ је његова ОНБ. Скаларни производ на $L^2[-\pi, \pi]$ је дат са

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta,$$

па су Фуријеови[5] коефицијенти функције f_r једнаки

$$\langle f_r, e^{in\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta = c_n r^n, \ (n = 0, 1, 2...).$$

[3]Brook Taylor (1685-1731)
[4]David Hilbert (1862-1943)
[5]Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Дакле, f_r је једнака свом Фуријеовом реду, па пошто је $L^2[-\pi,\pi]$ Хилбертов, важи Парсевалова[6] формула

$$\|f_r\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f_r, e^{in\theta}\rangle|^2,$$

тј.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_r(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n|^2.$$

Сада из (3) имамо да је $|f_r(\theta)| \le |f(a)|$, па важи:

$$|c_0|^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_r(\theta)|^2 d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(a)|^2 d\theta = |f(a)|^2 = |c_0|^2.$$

Видимо да мора важити једнакост свуда у претходној неједнакости, па добијамо да је $c_n = 0$, за свако $n \ge 1$, тј. функција f_r је константна и једнака је $f(a)$. Пошто је r било произвољно, добијамо да је на целом $D(a,R)$ функција f константна и једнака $f(a)$. Сада на основу теореме о јединости аналитичке функције добијамо да је f константна на целом Ω. $\square$

Пре него што пређемо на озбиљније примене ПММ, прикажимо је кроз два интересантна задатка.

Задатак 1. *Нека је у комплексној равни дат затворен једнакостраничан троугао $\triangle$ са теменима a, b и c. Одредити*

$$\max_{z\in\triangle}(|z-a||z-b||z-c|).$$

Решење: Нека је $f(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$. Та функција је холоморфна на целом $\mathbb{C}$, специјално и на унутрашњости $\triangle$ и непрекидна на $\triangle$, па пошто је $\triangle$ ограничен, важи последица 1 принципа максимума модула, па је

$$\max_{\triangle} |f(z)| = \max_{\partial\triangle} |f(z)|,$$

тј. тражени максимум се достиже на рубу троугла, тј. на некој од његових страница. Не достиже се ни у једном темену, јер би тада био 0, а то очигледно није максимум. Пошто је троугао једнакостраничан, без умањења општости можемо фиксирати страницу на

[6] Marc-Antoine Parseval (1755-1836)

којој се налази тачка максимума. Нека је рецимо на дужи која спаја темена a и b. Тада је тражена функција, чији максимум треба наћи, производ одређене три дужи чије дужине зависе само од димензија троугла, а не од положаја, па зато можемо претпоставити да је троугао смештен у комплексну раван тако да је средиште странице која спаја a и b координатни почетак, $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ и c на позитивном делу имагинарне осе. Тада је $b = -a$ и $c = ia\sqrt{3}$. За $z \in (b, a)$, тј. $z = ka + (1-k)b$, $k \in [0, 1]$, добијамо да је

$$|f(z)| = 8a^3 k(1-k)\sqrt{k^2 - k + 1} =: F(k).$$

Једноставним рачуном се добија да је $F'(\frac{1}{2}) = 0$, и да F' у $\frac{1}{2}$ мења знак, расте, па опада, па се за $k = \frac{1}{2}$ добија локални, а он ће бити и глобални максимум функције F. Дакле, тачка у којој $|f|$ достиже максимум је $z = \frac{1}{2}(a + b) = 0$, тј. на половини странице која спаја тачке a и b. Вредност функције је

$$|f(z)| = F\left(\frac{1}{2}\right) = a^3\sqrt{3},$$

и то је управо тражену максимум. У новоуведеним терминима је a у ствари половина дужине странице, па коначно заменом a са $\frac{|b-a|}{2}$ добијамо

$$\max_{z \in \triangle}(|z-a||z-b||z-c|) = \frac{|b-a|^3}{8}\sqrt{3}.$$

$\square$

Задатак 2. *Нека је Ω област, $\mathbb{D}$ јединични диск тако да $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \Omega$ и нека је функција f холоморфна и неконстантна на Ω. Претпоставимо још да је $|f(z)| = r$ за $z \in \partial\mathbb{D}$. Доказати да тада функција f има бар једну нулу у $\mathbb{D}$.*

Решење: Ако је $r = 0$, на основу последице 1 добијамо да је $|f| = 0$ на целом $\mathbb{D}$, па је на основу теореме о јединости аналитичке функције $f = 0$ на Ω, што је контрадикција са условом да је f неконстантна. Дакле, мора бити $r > 0$. На основу последице 1 максимум од $|f|$ је r. Претпоставимо сада супротно, да f нема нула у $\mathbb{D}$. Тада је функција $\frac{1}{f}$ аналитичка на $\mathbb{D}$, па за њу важи последица 1, тј. максимум модула те функције се достиже за $|z| = 1$ и једнак је $\frac{1}{r}$, тј. минимум функције $|f|$ је такође r. Добијамо да је $|f(z)| = r$ за свако $z \in \mathbb{D}$. Једноставним рачуном уз помоћ Коши-Римановихуслова (као у доказу 1, ал може и уз помоћ теореме о отвореном пресликавању) се сада добија да је и f константна на $\mathbb{D}$. На основу теореме јединости аналитичке функције је тада f константна и на Ω. То је у контрадикцији са претпоставком, па добијамо да f има бар једну нулу у $\mathbb{D}$. $\square$

1.2 Шварцова лема

Једна од многобројних последица ПММ је Шварцова[7] лема, која гласи:

Теорема 3. *Нека је* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *холоморфна функција, где је* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *таква да је* $|f(z)| \leq 1$*, за свако* $z \in \mathbb{D}$ *и* $f(0) = 0$*. Тада је*

(1) $|f(z)| \leq |z|, \ \forall z \in \mathbb{D}$

(2) $|f'(0)| \leq 1$.

Ако једнакост важи у (1) *за неко* $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$*, или ако важи у* (2)*, онда је* $f(z) = e^{i\alpha}z$ *за неко* $\alpha \in \mathbb{R}$*, тј.* f *је ротација.*

Доказ. Пошто је f холоморфна на $\mathbb{D}$, може се развити у Тејлоров ред у $\mathbb{D}$, тј.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

Пошто је $f(0) = 0$, функција $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ има отклоњив сингуларитет у 0, прецизније, функција

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ c_1, & z = 0 \end{cases}$$

је холоморфна функција на $\mathbb{D}$. Применимо ПММ на функцију g. Нека је $z \in \mathbb{D}$ таква да је $|z| < r < 1$. Тада је

$$|g(z)| \leq \max_{\theta} \frac{|f(re^{i\theta})|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Када пустимо да $r \to 1$, добијамо да је $|g(z)| \leq 1$, за свако $z \in \mathbb{D}$. Тиме је доказано (1). Пошто је $|f'(0)| = |c_1| = |g(0)|$, добијамо и (2). Ако је $|g(z)| = 1$ за неко $z \in \mathbb{D}$, онда g достиже локални максимум у $\mathbb{D}$, па је на основу ПММ функција g константна, тј. $g(z) = e^{i\alpha}$, за неко $\alpha \in \mathbb{R}$, чиме је теорема у потпуности доказана. $\square$

[7] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

Геометријски гледано, Шварцова лема тврди да ако имамо пресликавање диска у диск такво да чува центар диска, онда је то пресликавање или ротација, или је слика сваке тачке ближа центру него што је сама та тачка.

Шта се дешава ако изоставимо претпоставку $f(0) = 0$ из Шварцове леме? Ако нам је дато произвољно $a \in \mathbb{D}$, колики максимални модул може имати извод функције f у тачки a у зависности од a и $f(a)$?

Пре него што одговоримо на постављено питање, уведимо помоћну функцију и докажимо теорему која ће нам бити од значаја.

Нека је, за фиксирано $a \in \mathbb{D}$,

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

и нека је $\mathbb{K} = \partial\mathbb{D}$. Тада важи:

Теорема 4. *Функција φ_a је $1-1$ пресликавање које слика диск $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$, слика $\mathbb{K}$ на $\mathbb{K}$ и a слика у 0. Инверз функције φ_a је функција φ_{-a} и важи:*

$$\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2, \quad \varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

Доказ. Функција φ_a је холоморфна у $\mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{\overline{a}}\}$, али $\frac{1}{\overline{a}}$ се налази ван $\overline{\mathbb{D}}$. Директном провером добијамо да је $\varphi_{-a}(\varphi_a(z)) = z$, што нам даје да је φ_a $1-1$ и да је φ_{-a} њен инверз.
Нека је $t \in \mathbb{R}$, $z = e^{it} \in \mathbb{K}$. Тада је:

$$|\varphi_a(z)| = \left|\frac{e^{it}-a}{1-\overline{a}e^{it}}\right| = \frac{|e^{it}-a|}{|e^{-it}-\overline{a}|} = 1$$

(јер је $|z| = |\overline{z}|$, за свако $z \in \mathbb{C}$), тј. $\varphi_a(z) \in \mathbb{K}$, па важи да φ_a слика $\mathbb{K}$ у $\mathbb{K}$. Исто важи и за φ_{-a}, па је $\varphi_a(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.
Сада, на основу ПММ добијамо да је $\varphi_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, а исто важи и за φ_{-a}, па је $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Директним рачунањем се добијају једнакости за изводе у нули и a. Тиме је тврђење доказано. $\square$

Уз помоћ наведене теореме и Шварцове леме долазимо до решења проблема који нас занима. Даје нам га теорема која следи.

Теорема 5 (*Шварц-Пикова*[8] *лема*)**.** *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање и $a \in \mathbb{D}$ произвољна. Тада важи:*

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}.$$

Једнакост се достиже акко је $f(z) = \varphi_{-f(a)}(e^{i\alpha}\varphi_a(z))$, за неко $\alpha \in \mathbb{R}$ и за све $z \in \mathbb{D}$.
Додатно, за произвољне $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ важи

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(z_1)}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2}z_1}\right|.$$

Једнакост се достиже акко је $f(z) = \varphi_{-f(z_2)}(e^{i\alpha}\varphi_{z_2}(z))$, за неко $\alpha \in \mathbb{R}$ и за све $z \in \mathbb{D}$

Доказ. Обележимо $f(a) = b$. Посматрајмо пресликавање $F(z) = \varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a}$. Пошто је $\varphi_{-a}(0) = a$ и $\varphi_b(b) = 0$, добијамо да је $F(0) = 0$. Даље, функција F је холоморфна као композиција холоморфних, и пошто φ_b и φ_{-a} сликају $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$, то F слика $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$. На основу свега тога, на функцију F можемо применити Шварцову лему, па добијамо да важи $|F'(0)| \leq 1$. Из правила за извод композиције добијамо да је

$$F'(0) = \varphi_b'(b)f'(a)\varphi_{-a}'(0).$$

Када искористимо формуле за изводе добијене у теореми 4, добија се

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2},$$

што је и требало доказати. Једнакост се достиже када се достиже у Шварцовој леми, тј. када је F ротација, тј. $F(z) = e^{i\alpha}z$, за неко $\alpha \in \mathbb{R}$, одакле следи директно да је $f(z) = \varphi_{-f(a)}(e^{i\alpha}\varphi_a(z))$ $(z \in \mathbb{D})$, што је требало и показати.

Додатно, из Шварцове леме примењене на аналитичку функцију F добијамо и да је $|F(z)| \leq |z|$, за свако $z \in \mathbb{D}$. Узмимо да је $a = z_2$ и убацимо $z = \varphi_a(z_1)$ у неједнакост $|F(z)| \leq |z|$. Добијамо

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(z_1)}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2}z_1}\right|,$$

што је и требало доказати. Једнакост се достиже када се достиже у Шварцовој леми, тј. када је $F(z) = e^{i\alpha}z$, дакле за $f(z) = \varphi_{-f(z_2)}(e^{i\alpha}\varphi_{z_2}(z))$. □

[8]Georg Alexander Pick (1859-1942)

Последица 3. *Нека је* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *холоморфно пресликавање и* $z \in \mathbb{D}$. *Тада је*

$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|}.$$

Доказ. Уочимо прво да за произвољне $a, b \in \mathbb{D}$ важи

$$\begin{aligned} \left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|^2 = \frac{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})}{|1-\bar{b}a|^2} &= \frac{|a|^2+|b|^2-a\bar{b}-b\bar{a}}{|1-\bar{b}a|^2} \\ &= 1 - \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|1-\bar{b}a|^2} \\ &\geq 1 - \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(1-|a||b|)^2} \\ &= \frac{(|a|-|b|)^2}{(1-|a||b|)^2}, \end{aligned}$$

па је

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right| \geq \left|\frac{|a|-|b|}{1-|a||b|}\right|.$$

Применом Шварц-Пикове леме на f и $z_1 = z$, $z_2 = 0$ добијамо

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(z)}f(0)}\right| \leq |z|.$$

Сада применом добијене неједнакости на $a = f(z)$ и $b = f(0)$ добијамо

$$\left|\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(z)||f(0)|}\right| \leq \left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(z)}f(0)}\right| \leq |z|,$$

па одатле следи да је $|f(z)| - |f(0)| \leq |z| - |z||f(z)||f(0)|$ и $|f(0)| - |f(z)| \leq |z| - |z||f(z)||f(0)|$. Сређивањем последње две неједнакости једноставно следи тражена неједнакост. $\square$

За крај наводимо задатак који карактерише холоморфне функције које имају константан модул (овде једнак 1) на рубу диска.

Задатак 3. 1) *Одредити све функције* f *непрекидне на* $\overline{\mathbb{D}}$ *и холоморфне на* $\mathbb{D}$ *са својством* $|f(z)| = 1$ *за* $z \in \partial\mathbb{D}$.
2) *Одредити све целе функције са својством* $|f(z)| = 1$ *за* $z \in \partial\mathbb{D}$.

Решење: 1) Тривијално решење је константна функција $f(z) = a$, за $|a| = 1$. Претпоставимо сада да f није константна, па на исти начин као у примеру 2 добијамо да f има бар једну нулу у $\mathbb{D}$. Нека су $z_1, z_2, \dots, z_n$ све нуле функције f, $n \geq 1$. Посматрајмо сада функцију

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{n} \frac{z-z_i}{1-\overline{z_i}z}}.$$

Функција g је холоморфна на $\mathbb{D}$ и нема нула у $\mathbb{D}$. Користећи теорему 4 добијамо да је $|g(z)| = 1$ за $|z| = 1$. Поново као у задатку 2, ако бисмо претпоставили да је g неконстантна, добили бисмо да има бар једну нулу у $\mathbb{D}$, што није тачно, па добијамо да је g константна, тј. $g(z) = C$ за свако $z \in \mathbb{D}$. Приметимо да мора бити $|C| = 1$, због услова на рубу. Дакле, добили смо да важи

$$f(z) = C \prod_{i=1}^{n} \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i}z},$$

где су z_i нуле функције f, а C константа таква да је $|C| = 1$.
2) Аналогно као у делу 1), добија се исти облик за f, али пошто f треба да буде цела, мора да важи $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$, па f добија облик

$$f(z) = Cz^n,$$

где је C константа таква да је $|C| = 1$. □

За крај, напоменимо да постоји Шварцова лема и за хармонијске функције. Следи њена формулација, а доказ ћемо изоставити.

Теорема 6. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ хармонијска функција тако да је $f(0) = 0$. Тада је*

$$|f(z)| \leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |z|.$$

1.3 Основна теорема алгебре

Основна теорема алгебре тврди да сваки неконстантан полином једне променљиве, са коефицијентима у $\mathbb{C}$, има бар један комплексан корен, а тиме и тачно n корена, где је n степен полинома. Пошто је $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ исто важи и за полином са реалним коефицијентима, с тим што опет тврдимо да постоји комплексан корен. Следи формулација и доказ овог тврђења коришћењем ПММ, што нам још говори о његовим многобројним применама у разним областима математике.

Теорема 7. *Нека је* $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *полином степена* $n \geq 1$*, тако да је* $a_k \in \mathbb{C}$ *за свако* $0 \leq k \leq n$ *и* $a_n \neq 0$*. Тада једначина* $p(z) = 0$ *има бар једно решење у* $\mathbb{C}$*.*

Доказ. Без умањења општости можемо претпоставити да је $a_n = 1$, тј. да је полином моничан. Тада је

$$p(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k, \quad (n \geq 1).$$

Нека је $R_0 = \max(1, 2\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$. За $|z| = R \geq R_0$, $R \geq 1$, важи

$$\begin{aligned}
|p(z)| &\geq |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \\
&= R^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k \\
&\geq R^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^{n-1} \\
&= R^n - R^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \\
&\geq R^{n-1}(R - \frac{R_0}{2}) \\
&\geq R^{n-1}\frac{R}{2} = \frac{R^n}{2} = \frac{|z|^n}{2}.
\end{aligned}$$

Претпоставимо супротно, да p нема нула у $\mathbb{C}$. Тада је функција $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ цела и важи да је за $|z| = R \geq R_0$ испуњено

$$|f(z)| \leq \frac{2}{R^n}.$$

Нека је $D = D(0, R)$. На основу ПММ имамо да је $\max_{\overline{D}} |f| = \max_{|z|=R} |f|$, па добијамо да је

$$\max_{\overline{D}} |f(z)| \leq \frac{2}{R^n},$$

за свако $R > R_0$. Сада, када пустимо да $R \to +\infty$, добијамо да је $|f| = 0$ на целом $\mathbb{C}$, а то је немогуће. Дакле, претпоставка није тачна, тј. постоји решење једначине $p(z) = 0$ у $\mathbb{C}$, што је и требало доказати. $\square$

1.4 Принцип максимума за субхармонијске функције

У овом делу ћемо увести појам субхармонијске функције и доказати принцип максимума за такве функције, који ће као последицу имати ПММ.

Означимо са d стандардну Еуклидску метрику на $\mathbb{R}^n$. Ако је $a \in \mathbb{R}^n$, означимо са $B(a,r)$ лопту са центром у a и полупречником r, тј. $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) < r\}$.

Дефиниција 1. *Нека је u непрекидна реално вредносна функција на Ω, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Функција u је субхармонијска функција на Ω ако за сваку лопту $\overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$ важи*

$$u(a) \leq \frac{1}{|\partial B(a,r)|} \int_{\partial B(a,r)} u d\sigma.$$

Напоменимо да се појам субхармонијске функције може проширити и на функције које нису непрекидне.

Теорема 8. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ област и нека је u субхармонијска функција на Ω. Ако је $u(a) = \max_\Omega u$ за неко $a \in \Omega$, тада је u константна функција на Ω.*

Доказ. Нека је F скуп свих тачака у којима функција u достиже максимум, тј $F = \{x \in \Omega | u(x) = u(a)\}$. Пошто је $F = u^{-1}(\{u(a)\})$, а једночлан скуп је затворен, u непрекидна, добијамо да је F затворен скуп. Докажимо да је F и отворен.

Нека је $b \in F$ произвољна. Постоји $r > 0$ тако да је $\overline{B(b,r)} \subseteq \Omega$. Пошто је u субхармонијска, важи

$$u(b) \leq \frac{1}{|\partial B(b,r)|} \int_{\partial B(b,r)} u(x) d\sigma(x).$$

Из $u(x) \leq u(a)$ за свако $x \in \Omega$ добијамо

$$u(a) = u(b) \leq \frac{1}{|\partial B(b,r)|} \int_{\partial B(b,r)} u(x) d\sigma(x) \leq u(a).$$

Закључујемо да мора свуда да важи једнакост, па је

$$u(a) = \frac{1}{|\partial B(b,r)|} \int_{\partial B(b,r)} u(x) d\sigma(x),$$

тј.

$$\int_{\partial B(b,r)} (u(x) - u(a)) d\sigma(x) = 0.$$

Пошто је $u(x) - u(a)$ непозитивна непрекидна функција чији је интеграл једнак 0, то поменута функција мора бити идентички једнака 0, тј. $u(x) = u(a)$ за свако $x \in \partial B(b, r)$. Аналогно важи и за све $x \in \partial B(b, \rho)$, применом истог поступка на $B(b, \rho)$ за све $0 < \rho < r$. Тиме добијамо да је $u(x) = u(a)$ за све $x \in B(b, r)$, тј. $B(b, r) \subseteq F$. Тиме смо показали да је F отворен скуп.

Коначно, пошто је Ω повезан, а $F \subseteq \Omega$ отворен, затворен и непразан подскуп од Ω, то је $F = \Omega$, тј. функција u је константна на целом Ω и има вредност $u(a)$.

□

Последица 4. *Нека је Ω ограничена област у $\mathbb{R}^n$, функција u непрекидна на $\overline{\Omega}$ и субхармонијска на Ω. Тада је $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.*

Последица 5. *Нека је Ω ограничена област у $\mathbb{R}^n$, функција u непрекидна на $\overline{\Omega}$ и хармонијска на Ω. Тада је $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ и $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.*

Доказ. Тврђење следи применом претходне последице на функције u и $-u$, јер су оне субхармонијске када је u хармонијска. □

Став 1. *Ако је f аналитичка функција на $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, тада је $|f|$ субхармонијска функција у Ω.*

Доказ. Нека је $a \in \Omega$ произвољна. Уочимо диск $D = D(a, r) \subseteq \Omega$. Нека је $0 < \rho < r$ и нека је γ_ρ кружница $|z - a| = \rho$, $\gamma_\rho \subseteq D$. На основу Кошијеве интегралне формуле имамо да је

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Параметризацијом кружнице γ_ρ са $z = a + \rho e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, добијамо

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i\rho e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + \rho e^{it}) dt.$$

Стога је

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + \rho e^{it})| dt,$$

што нам управо даје да је функција $u = |f|$ субхармонијска, на основу дефиниције 1. □

Сада је јасно да директно из става 1 следи још један доказ ПММ. Заиста, применом теореме о принципу максимума за субхармонијске функције на $|f|$, где је Ω кугла са центром у неком локалном максимуму, добијамо да је $|f|$ константна функција на Ω, па даље аналогно као у доказу 1.

2 Принцип максимума модула на неограниченим областима

У последици 1 смо видели да за ограничену област Ω и функцију f која је холоморфна на Ω и непрекидна на $\overline{\Omega}$, важи $\max_{\overline{\Omega}}|f| = \max_{\partial\Omega}|f|$. Али ако је област Ω неограничена, то не важи. Покажимо то на примеру.

Пример 1. Нека је $\Omega = \{z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$ отворена трака. Тада је $\partial\Omega = \{z = x + iy : y = \pm\frac{\pi}{2}\}$. Посматрајмо функцију $f(z) = \exp(\exp(z))$. Та функција је холоморфна на целом $\mathbb{C}$, па тиме и на Ω, и непрекидна је на $\overline{\Omega}$. За $x \in \mathbb{R}$ је $f(x \pm \frac{i\pi}{2}) = \exp(\pm ie^x)$, па је $|f(z)| = 1$ за $z \in \partial\Omega$. Али кад $x \to \infty$ тада $f(x) \to \infty$, што нам даје да не важи $\max_{\overline{\Omega}}|f| = \max_{\partial\Omega}|f|$ за дату област Ω и холоморфну функцију f.

За одређену класу функција на одређеној неограниченој области ће ипак да важи као у последици 1. Функција посматрана у претходном пример веома брзо тежи ка ∞ кад реални део z тежи ∞. Испоставиће се да ће последица 1 или неке њене варијације на одређеним неограниченим областима важити за функције које у одређеном смислу (видећемо каквом) спорије теже ка бесконачно или су ограничене.

Погледајмо прво шта се дешава када је функција ограничена у некој области.

Теорема 9. *Нека је f холоморфна функција у области Ω и непрекидна на $\overline{\Omega}$. Ако постоје две константе M и B такве да је*

$$|f(z)| \leq B, \text{ за све } z \in \partial\Omega$$

$$|f(z)| \leq M, \text{ за све } z \in \Omega,$$

тада за свако $z \in \overline{\Omega}$ важи

$$|f(z)| \leq B.$$

Доказ. Без умањења општости, претпоставимо да је $B = 1$. Желимо да докажемо да је $|f(z)| \leq 1$ за свако $z \in \Omega$. За произвољно фиксирано $a \in \Omega$ посматрајмо функцију

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z \neq a \\ f'(a), & z = a. \end{cases}$$

која је холоморфна на Ω. Пошто је f ограничена важи да $g(z) \to 0$ када $z \to \infty$, што повлачи да је $|g(z)| \leq K$, за све $z \in \overline{\Omega}$.

Уочимо $D_R = \{z \in \Omega : |z| < R\}$ и нека је

$$h(z) = f^n(z)g(z).$$

Пошто је $g(z) \to 0$ када $z \to \infty$ можемо узети R довољно велико да важи $|h(z)| \leq K$ на граници од D_R и ван D_R. Сада на основу ПММ добијамо да је

$$|h(z)| \leq K,$$

за свако $z \in \Omega$. Фиксирајмо $z_0 \in \Omega$ и претпоставимо да је $g(z_0) \neq 0$, па можемо писати

$$|f(z_0)| \leq \left| \frac{K}{g(z_0)} \right|^{\frac{1}{n}},$$

и када пустимо да $n \to \infty$, добијамо да је $|f(z_0)| \leq 1$. Пошто је $z_0 \in \Omega$ било произвољно, добијамо да је $|f(z)| \leq 1$ за свако $z \in \Omega$. Приметимо сада да осим ако је f константна, нуле функције g формирају дискретан скуп, па због непрекидности важи

$$|f(z)| \leq 1,$$

за свако $z \in \Omega$. Тиме је доказ завршен.

□

За оно што следи ће нам бити неопходни следећи појмови.

Дефиниција 2. *Нека је $f : \Omega \to \mathbb{R}$ и $a \in \overline{\Omega}$ или $a = \infty$. Тада горњи лимес функције f кад z тежи a у ознаци $\limsup_{z \to a} f(z)$ дефинишемо са*

$$\limsup_{z \to a} f(z) = \lim_{r \to 0^+} \sup\{f(z) : z \in \Omega \cap B(a, r)\}.$$

(Ако је $a = \infty$, тада је $B(a, r)$ лопта у метрици од $\mathbb{C}_\infty$.) Аналогно се дефинише и доњи лимес у ознаци $\liminf_{z \to a} f(z)$ са

$$\liminf_{z \to a} f(z) = \lim_{r \to 0^+} \inf\{f(z) : z \in \Omega \cap B(a, r)\}.$$

За $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, означимо са $\partial_\infty \Omega$ границу од Ω у $\mathbb{C}_\infty$.

Једноставно се види да $\lim_{z \to a} f$ постоји и једнак је α акко је $\alpha = \limsup_{z \to a} f = \liminf_{z \to a} f$. Такође, једноставно се види да је $\partial_\infty \Omega = \partial \Omega$ ако је Ω ограничена, и да је $\partial_\infty \Omega = \partial \Omega \cup \{\infty\}$ за неограничене области Ω. Сада следи теорема, која је последица теореме о ПММ.

Теорема 10. *Нека је* Ω *област,* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *и нека је* f *аналитичка функција у* Ω*. Претпоставимо да постоји константа* M *таква да је*

$$\limsup_{z \to a} |f(z)| \leq M$$

за све $a \in \partial_\infty \Omega$*. Тада је* $|f(z)| \leq M$*, за све* $z \in \Omega$*.*

Доказ. Нека је $\delta > 0$ произвољно и нека је

$$H = \{z \in \Omega : |f(z)| > M + \delta\}.$$

Ако докажемо да је $H = \emptyset$, добићемо да важи тврђење.

Пошто је $|f|$ непрекидна на Ω, то је скуп H отворен. Докажимо да је $\overline{H} \subseteq \Omega$. Претпоставимо супротно, постоји $a \in \overline{H} \setminus \Omega$. Пошто је $\overline{H} \subseteq \overline{\Omega}$, то је $a \in \partial\Omega$. Зато је

$$\limsup_{z \to a} |f(z)| \leq M,$$

па постоји лопта $B(a, r)$ таква да је

$$|f(z)| < M + \delta, \text{ за свако } z \in \Omega \cap B(a, r). \tag{4}$$

По дефиницији затворења скупа, постоји $h \in B(a, r) \cap H$, па за њега важи

$$|f(h)| > M + \delta,$$

што је у контрадикцији са (4). Стога је $\overline{H} \subseteq \Omega$. Пошто услов $\limsup_{z \to a} |f(z)| \leq M$ важи и за $a = \infty$ кад је Ω неограничен, добијамо да је H ограничен.

Дакле, добили смо да је $\overline{H}$ компактан подскуп од Ω. Сада применимо последицу 1 на H и добијамо да је максимум модула функције $|f|$ достигнут на ∂H, а то је немогуће јер на ∂H важи $|f| = M + \delta$, а на H су веће вредности. Тиме добијамо да је или $H = \emptyset$ или је f константна. Али, ако је f константна, она узима вредности које су мање или једнаке са M, па опет следи да је $H = \emptyset$. Тиме је тврђење доказано. $\square$

Приметимо да је у примеру 1 испуњено $\limsup_{n \to \infty} |f(z)| \leq 1$ за све $a \in \partial\Omega$, али није испуњено за $a = \infty$, па се теорема не може применити.

2.1 Адамарова теорема

Теорема 11 (*Адамарова*[9] *теорема о три праве*). *Нека је*

$$\Omega = \{z = x + iy : a < x < b\}, \quad \overline{\Omega} = \{z = x + iy : a \le x \le b\}.$$

Претпоставимо да је функција f непрекидна на $\overline{\Omega}$, холоморфна на Ω и да је $|f(z)| < B$ за све $z \in \Omega$ и неко фиксирано $B < \infty$.
Ако је

$$M(x) = \sup\{|f(x+iy)| : -\infty < y < \infty\}, \; a \le x \le b \tag{5}$$

тада важи

$$M(x)^{b-a} \le M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}, \quad a < x < b. \tag{6}$$

Приметимо да нам овде (6) даје да је $|f(z)| \le \max(M(a), M(b))$, тј. да модул функције f није већи од вредности на граници. До истог закључка можемо доћи и применом теореме 9.

Доказ. Посматрајмо прво упрошћен проблем, претпоставимо да је $M(a) = M(b) = 1$. У том случају треба доказати да је $|f(z)| \le 1$ за свако $z \in \Omega$.
За произвољно $\varepsilon > 0$ дефинишимо помоћну функцију

$$h_\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + \varepsilon(z-a)}, \; z \in \overline{\Omega}.$$

Пошто је $Re\{1 + \varepsilon(z-a)\} = 1 + \varepsilon(x-a) \ge 1$ у $\overline{\Omega}$, добијамо да је $|1+\varepsilon(z-a)| \ge 1$, па је $|h_\varepsilon| \le 1$ у $\overline{\Omega}$. Због $M(a) = M(b) = 1$ сада имамо да је

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \le 1, \; z \in \partial\Omega. \tag{7}$$

Сада је због $|w| \ge |Imw|$ испуњено $|1 + \varepsilon(z-a)| \ge \varepsilon|y|$, где је $z = x + iy \in \overline{\Omega}$, одакле следи да је

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \le \frac{B}{\varepsilon|y|}, \; z = x + iy \in \overline{\Omega}. \tag{8}$$

Нека је

$$R = \{z = x + iy \in \overline{\Omega} : -\frac{B}{\varepsilon} \le y \le \frac{B}{\varepsilon}\}.$$

[9] Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Из (7) и (8) следи да је $|fh_\varepsilon| \leq 1$ на ∂R, па је на основу ПММ $|fh_\varepsilon| \leq 1$ на целом R.
Из (8) следи да је $|fh_\varepsilon| \leq 1$ и на $\overline{\Omega} \backslash R$, па је за свако $z \in \overline{\Omega}$ испуњено

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1,$$

за свако $\varepsilon > 0$. Кад фиксирамо $z \in \Omega$ и пустимо да $\varepsilon \to 0$, добијамо тражено, да је $|f(z)| \leq 1$, за свако $z \in \Omega$.

Посматрајмо сада случај $M(a), M(b) > 0$. Нека је

$$g(z) = M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} M(b)^{\frac{z-a}{b-a}},$$

где за $M > 0$ и $w \in \mathbb{C}$ дефинишемо $M^w = \exp(w \log M)$ и $\log M \in \mathbb{R}$. Тада је g цела функција, нема нула, $\frac{1}{g}$ је ограничена функција на $\overline{\Omega}$ и важи

$$|g(a+iy)| = M(a), \quad |g(b+iy)| = M(b),$$

па стога функција $\frac{f}{g}$ задовољава услове као и функција f и за њу важи претпоставка из првог дела доказа, па је $|\frac{f}{g}| \leq 1$ у Ω и то нам даје (6), што је и требало доказати.

Остаје још да се испита случај када је $M(a) = 0$ или $M(b) = 0$. Претпоставимо да је $M(a) = 0$. То нам даје да је

$$\sup\{|f(a+iy)| : -\infty < y < \infty\} = 0,$$

тј. да је $f(a+iy) = 0$, за свако $y \in \mathbb{R}$. На основу Шварцовог принципа рефлексије, можемо додефинисати функцију f на траци симетричној Ω у односу на праву $x = a$, тако да је нова функција холоморфна на новој траци

$$\Omega' = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 2a - b < x < b\}.$$

Пошто је $f = 0$ на правој $x = a$, на основу теореме јединости аналитичке функције добијамо да је $f(z) = 0$ на Ω, па важи тврђење. $\square$

Последица 6. *Под претпоставкама претходне теореме и ако функција f није идентички једнака нула, функција $\log M$ је конвексна функција на (a, b).*

Доказ. Ако за неко $x \in \mathbb{R}$ важи $M(x) = 0$ то значи да је $f(x+iy) = 0$, за све $y \in \mathbb{R}$ и фиксирано x, тј.да је f која је аналитичка једнака 0 на правој. На основу теореме о јединости аналитичке функције је тада $f = 0$ на целом Ω. Пошто смо претпоставили да није f идентички једнака 0, добијамо да је $M(x) \neq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Дакле, функција $\log M$ је добро дефинисана.

Применом претходне теореме на траку ограничену линијама $x = \alpha$ и $y = \beta$, где су $\alpha > a$, $\beta < b$, добијамо

$$M(x)^{\beta-\alpha} \leq M(\alpha)^{\beta-x} M(\beta)^{x-\alpha}, \quad \alpha < x < \beta.$$

Затим применом функције log добијена једнакост постаје

$$(\beta - \alpha) \log M(x) \leq (\beta - x) \log M(\alpha) + (x - \alpha) \log M(\beta),$$

па кад поделимо са $\beta - \alpha$ добијамо управо једнакост која показује конвексност. □

Последица 7 (*Адамарова теорема о три круга*)**.** *За* $0 < R_1 < R_2 < \infty$ *нека је* $A(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$ *прстен и нека је* $f \in H(A(R_1, R_2))$.
Ако је

$$M_f(r) = \max_\theta |f(re^{i\theta})|, \ R_1 < r < R_2,$$

и ако су a *и* b *такви да је* $R_1 < a < r < b < R_2$, *тада је*

$$\log M_f(r) \leq \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \log M_f(a) + \frac{\log \frac{r}{a}}{\log \frac{b}{a}} \log M_f(b). \tag{9}$$

Доказ. Уочимо да постоји вертикална трака

$$\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \log R_1 < x < \log R_2\}$$

која се функцијом $h(z) = \exp z = e^z$ слика на $A(R_1, R_2)$. Можемо је посматрати и као пресликавање из $\overline{\Omega}$ на $\overline{A(R_1, R_2)}$, граница се слика на границу. (Пресликавање h је сурјективно, али није инјективно.) Тада је $g = f \circ h$ тј. $g(z) = f(e^z)$ функција која слика Ω у $\mathbb{C}$. Функција f је непрекидна и домен јој је компактан скуп $\overline{A(R_1, R_2)}$, па је кодомен компактан, па тиме и ограничен као подскуп од $\mathbb{C}$, тј. постоји $B \in \mathbb{R}$ тако да је $|f| < B$ на $\overline{A(R_1, R_2)}$. Одатле следи да је и $|g| < B$ на Ω. Функција g је непрекидна на $\overline{\Omega}$ и холоморфна на Ω, па задовољава услове теореме 11, с тим што за $\log R_1 < x < \log R_2$ важи

$$\begin{aligned} M_g(x) &= \sup\{|g(x + iy)| : -\infty < y < \infty\} \\ &= \sup\{|f(e^x e^{iy})| : -\infty < y < \infty\} \\ &= M_f(e^x). \end{aligned}$$

Сада применом последице 6 закључујемо да је $\log M_g$ конвексна, што значи да за $\log R_1 < \alpha < x < \beta < \log R_2$ важи

$$(\beta - \alpha)\log M_g(x) \leq (\beta - x)\log M_g(\alpha) + (x - \alpha)\log M_g(\beta). \tag{10}$$

Ако узмемо $x = \log r$, $\alpha = \log a$, $\beta = \log b$, тада због $R_1 < a < r < b < R_2$, важи $\log R_1 < \alpha < x < \beta < \log R_2$, па важи (10). Заменом вредности r, a и b добијамо

$$(\log b - \log a)M_f(r) \leq (\log b - \log r)\log M_f(a) + (\log r - \log a)\log M_f(b),$$

па је

$$M_f(r) \leq \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}}\log M_f(a) + \frac{\log \frac{r}{a}}{\log \frac{b}{a}}\log M_f(b),$$

што је и требало доказати. □

2.2 Фрагмен-Линделефова теорема

Познато нам је тврђење Лиувилове теореме, да свака цела функција која је ограничена по модулу мора бити константна. До истог закључка се долази и при мало ослабљеном услову, то видимо кроз наредни задатак.

Задатак 4. *Ако је f цела функција и за свако $z \in \mathbb{C}$ важи*

$$|f(z)| < 1 + |z|^{\frac{1}{2}},$$

тада је f константна функција.

Решење: Приметимо прво да пошто је f цела, може се развити у Тејлоров ред на $\mathbb{C}$, тј. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, за свако $z \in \mathbb{C}$. На основу Кошијеве интегралне формуле важи

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw,$$

где је γ_r кружница са центром 0 и полупречником r, а $r > 0$ је произвољан. Проласком модула кроз горњу једнакост и применом основне интегралне неједнакости добијамо да је

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_r}\frac{|f(w)|}{|w|^{n+1}}dw < \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_r}\frac{1 + |w|^{\frac{1}{2}}}{|w|^{n+1}}dw = \frac{1 + r^{\frac{1}{2}}}{r^n},$$

па када пустимо да $r \to \infty$ добијамо да је $c_n = 0$ за свако $n \geq 1$, што нам даје да је $f(z) = c_0$, за свако $z \in \mathbb{C}$, тј. f је константна функција. □

Поставља се питање да ли се могу на сличан начин ослабити услови последице 1 ПММ, па да се добије исти закључак као тамо. Наредна теорема даје одговор на то питање за просто повезану област.

Теорема 12 (*Фрагмен*[10]*-Линделефова*[11] *теорема*)**.** *Нека је Ω просто повезана област и нека је f холоморфна функција на Ω. Претпоставимо да постоји холоморфна функција $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ која није нигде нула у Ω и која је ограничена на Ω. Ако је M константа и $\partial_\infty \Omega = A \cup B$ тако да важи:*

1) *за свако $a \in A$ је $\limsup_{z\to a} |f(z)| \leq M$;*

2) *за свако $b \in B$ и $\eta > 0$ је $\limsup_{z\to b} |f(z)||\varphi(z)|^\eta \leq M$;*

тада је $|f(z)| \leq M$ за свако $z \in \Omega$.

Доказ. Пошто је φ ограничена постоји $K > 0$ да је $|\varphi(z)| \leq K$ за све $z \in \Omega$. Такође, пошто је Ω просто повезана и φ нема нула у Ω, постоји аналитичка грана функције $\log \varphi(z)$ на Ω. Одатле следи да је $g(z) = \exp(\eta \log \varphi(z))$ аналитичка грана функције $\varphi^\eta(z)$ за $\eta > 0$ и важи $|g(z)| = |\varphi(z)|^\eta$.

Дефинишимо функцију $F : \Omega \to \mathbb{C}$ са $F(z) = f(z)g(z)K^{-\eta}$. Тада је F аналитичка на Ω и важи $|F(z)| \leq |f(z)|$, пошто је $|\varphi(z)| \leq K$ за све $z \in \Omega$. На основу услова 1) и 2) добијамо да F задовољава услове теореме 10, па је

$$|F(z)| \leq \max\{M, K^{-\eta}M\},$$

за све $z \in \Omega$. Одатле добијамо да је

$$|f(z)| \leq |\varphi(z)|^{-\eta} \max\{K^\eta M, M\},$$

за све $z \in \Omega$ и све $\eta > 0$. Када пустимо да $\eta \to 0^+$ добијамо да је $|f(z)| \leq M$ за све $z \in \Omega$, што је и требало доказати. □

Уз помоћ претходне теореме добијамо наредна два тврђења за секторе.

Последица 8. *Нека је $a \geq \frac{1}{2}$ и нека је*

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2a} \right\}.$$

[10]Lars Edvard Phragmén (1863-1937)
[11]Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946)

Претпоставимо да је f аналитичка на Ω и да постоји константа M тако да је

$$\limsup_{z\to w} |f(z)| \leq M$$

за све $w \in \partial\Omega$. Ако постоји позитивна константа P и $b < a$ тако да је

$$|f(z)| \leq P \exp(|z|^b),$$

за све z за које је $|z|$ довољно велики, тада је $|f(z)| \leq M$, за све $z \in \Omega$.

Доказ. Нека је $b < c < a$ и нека је $\varphi(z) = \exp(-z^c)$ за све $z \in \Omega$. Покажимо најпре да је φ ограничена.

Ако је $z = re^{i\theta} \in \Omega$, тј. $|\theta| < \frac{\pi}{2a}$, тада је $Rez^c = r^c \cos c\theta$, па је

$$|\varphi(z)| = \exp(-r^c \cos c\theta).$$

Пошто је $c < a$ имамо да је $c|\theta| < a|\theta| < \frac{\pi}{2}$, па је $\cos c\theta \geq \rho > 0$, за све $z \in \Omega$. Одатле закључујемо да је заиста φ ограничена.

Нека је сада $\eta > 0$ произвољно и $z = re^{i\theta}$ тако да је r довољно велико да важи $|f(z)| \leq P\exp(|z|^b)$. Одатле је

$$|f(z)||\varphi(z)|^\eta \leq P\exp(r^b - \eta r^c \cos c\theta) \leq P\exp(r^b - \eta r^c \rho).$$

Када $r \to \infty$, пошто је $b < c$ важи $r^{b-c} \to 0^+$, па $r^b - \eta r^c \rho = r^c(r^{b-c} - \eta\rho)$ тежи $-\infty$. Због тога је

$$\limsup_{z\to\infty} |f(z)||\varphi(z)|^\eta = 0. \tag{11}$$

Стога функције f и φ задовољавају услове Фрагмен - Линделефове теореме, где узимамо да је $A = \partial\Omega$, а $B = \{\infty\}$. Услов 1) важи одмах из претпоставке теореме, а услов 2) следи из (11). Применом теореме, добијамо тражени резултат, да је $|f(z)| \leq M$, за свако $z \in \Omega$. $\square$

Приметимо да је у претходној последици битна само величина угла датог сектора Ω (угао $\frac{\pi}{a}$), није битан положај. Исто тврђење важи и када Ω није симетричан у односу на реалну осу.

Кроз задатак који следи ћемо видети примену последице на још конкретнији случај, када је Ω полураван.

Задатак 5. *Нека је Π отворена десна полураван, тј.*

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} : Rez > 0\}.$$

Претпоставимо да је f непрекидна на затворењу Π и холоморфна на Π и постоје константе $A < \infty$ и $\alpha < 1$ тако да је

$$|f(z)| < A \exp(|z|^{\alpha}),$$

за све $z \in \Pi$. Ако још важи $|f(iy)| \leq 1$ за све $y \in \mathbb{R}$, тада за свако $z \in \Pi$ важи

$$|f(z)| \leq 1.$$

Решење: Ако у последици 8 ставимо $a = 1$ добићемо $\Pi = \Omega$. Узимајући $M = 1$, $b = \alpha$ и $P = A$, на основу претпоставки овде испуњене су претпоставке последице 8, па добијамо да је заиста $|f(z)| \leq M$, тј. $|f(z)| \leq 1$ за свако $z \in \Pi$. □

Последица 9. *Нека је $a \geq \frac{1}{2}$ и нека је*

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2a} \right\}.$$

Претпоставимо да је f аналитичка на Ω и да постоји константа M тако да је

$$\limsup_{z \to w} |f(z)| \leq M$$

за све $w \in \partial\Omega$. Ако за свако $\delta > 0$ постоји позитивна константа P тако да је

$$|f(z)| \leq P \exp(\delta |z|^a), \tag{12}$$

за све z за које је $|z|$ довољно велики, тада је $|f(z)| \leq M$, за све $z \in \Omega$.

Доказ. Дефинишимо функцију $F : \Omega \to \mathbb{C}$ са $F(z) = f(z) \exp(-\varepsilon z^a)$, где је $\varepsilon > 0$ произвољно. Ако је $x > 0$ и δ такав да је $0 < \delta < \varepsilon$ тада постоји константа P таква да је

$$|F(x)| \leq P \exp[(\delta - \varepsilon) x^a].$$

Одатле добијамо да ако $x \to \infty$ у $\mathbb{R}$, онда $|F(x)| \to 0$, па је $M_1 = \sup\{|F(x)| : 0 < x < \infty\} < \infty$. Дефинишимо $M_2 = \max\{M_1, M\}$ и

$$H_+ = \{z \in \Omega : 0 < \arg z < \frac{\pi}{2a}\},$$

$$H_- = \{z \in \Omega : 0 > \arg z > -\frac{\pi}{2a}\}.$$

Тада је $\limsup_{z\to w}|f(z)| \le M_2$ за све $w \in \partial H_+ \cup \partial H_-$. На основу услова (12), узимајући да је $\delta = 1$ добјамо да функција F на секторима H_+ и H_- задовољава услове претходне последице, па добијамо да је $|F(z)| \le M_2$ за све $z \in H_+ \cup H_-$, па тиме и за свако $z \in \Omega$ (на граници то већ важи).

Остаје да се покаже да је $M_2 = M$. Ако би било $M_2 = M_1 > M$ тада $|F|$ достиже свој максимум у тачки x за коју је $0 < x < \infty$ (јер је $\limsup_{x\to 0}|f(x)| = \limsup_{x\to 0}|F(x)| \le M < M_1$ и $\lim_{x\to\infty}|F(x)| = 0$). Пошто је та тачка у Ω, на основу ПММ добијамо да је функција F константна на Ω, па је $M = M_1$. Дакле, тада је $|F(z)| \le M$, за свако $z \in \Omega$, тј.

$$|f(z)| \le M\exp(\varepsilon Rez^a),$$

за све $z \in \Omega$. Пошто M не зависи од ε, када пустимо да $\varepsilon \to 0$, добијамо $|f(z)| \le M$, за свако $z \in \Omega$. $\square$

Поставља се питање да ли се у претходној последици услов (12) може ослабити, а да тврђење и даље важи? Посматрајмо следећи пример.

Пример 2. Нека је $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |argz| < \frac{\pi}{2a}\}$, $a \ge \frac{1}{2}$ и нека је $f(z) = \exp(z^a)$ за $z \in \Omega$. Тада је $|f(z)| = \exp(|z|^a \cos a\theta)$, где је $\theta = \arg z$. За $z \in \partial\Omega$ је $\theta = \pm\frac{\pi}{2a}$, па је $\cos a\theta = 0$, одакле је $|f(z)| = 1$ на $\partial\Omega$, али јасно је да је овако дефинисана f неограничена на Ω. Штавише, ова функција f тежи бесконачно на свакој полуправој са почетком у 0 у Ω.

Дакле, пример 2 нам показује да се услов (12) не може ослабити.

Наведимо сада још једну теорему истог типа, коју такође приписујемо Фрагмену и Линделефу, овога пута за хоризонталну траку.

Теорема 13 (*Фрагмен-Линделеф*)**.** *Нека је*

$$\Omega = \{z = x + iy : |y| < \frac{\pi}{2}\}, \quad \overline{\Omega} = \{z = x + iy : |y| \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Претпоставимо да је функција f непрекидна на $\overline{\Omega}$, холоморфна на Ω и постоје константе $\alpha < 1$ и $A < \infty$ такве да је

$$|f(z)| < \exp\{A\exp(\alpha|x|)\},\ z = x + iy \in \Omega$$

и

$$\left|f\left(x \pm i\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1,\ -\infty < x < +\infty.$$

Тада је $|f(z)| \le 1$ за свако $z \in \Omega$.

Приметимо да за $\alpha = 1$ не важи теорема, то смо видели у примеру 1.

Доказ. Изаберимо $\beta > 0$ тако да је $\alpha < \beta < 1$. За $\varepsilon > 0$ дефинишемо

$$h_\varepsilon(z) = \exp\{-\varepsilon(e^{\beta z} + e^{-\beta z})\}.$$

За $z \in \overline{\Omega}$ је

$$Re[e^{\beta z} + e^{-\beta z}] = (e^{\beta x} + e^{-\beta x})\cos \beta y \geq \delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x}),$$

где је $\delta = \cos \beta \frac{\pi}{2} > 0$, јер је $0 < \beta < 1$. Одатле је

$$|h_\varepsilon(z)| \leq \exp\{-\varepsilon\delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})\} < 1, \; z \in \overline{\Omega}.$$

Следи да је $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$ на $\partial\Omega$ и

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \exp\{Ae^{\alpha|x|} - \varepsilon\delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})\}, \; z \in \overline{\Omega}. \tag{13}$$

Фиксирајмо $\varepsilon > 0$. Пошто је $\varepsilon\delta > 0$ и $\beta > \alpha$, експонент у (13) тежи $-\infty$ кад $x \to \pm\infty$. Стога постоји x_0 тако да је десна страна (13) мања од 1 за $x > x_0$. Посматрајмо правоугаоник

$$R = \{z = x + iy \in \overline{\Omega} : -x_0 \leq x \leq x_0\}.$$

Из (13) и претходног следи да је $|fh_\varepsilon| \leq 1$ на ∂R. На основу ПММ је тада $|fh_\varepsilon| \leq 1$ и на целом R. Према томе, важи $|fh_\varepsilon| \leq 1$ на целом Ω, за све $\varepsilon > 0$. Када пустимо да $\varepsilon \to 0$, добијамо да је $|f(z)| \leq 1$, за свако $z \in \Omega$, што је и требало доказати. □

3 Теорема интерполације

У овом поглављу ћемо навести примене ван комплексне аналзие. Наиме, уз помоћ Адамарове теореме ћемо извести доказ Хауздорф-Јунгове теореме.

Нека је X простор са позитивном мером μ и претпоставимо да је $\{\psi_n\}$ ортонормиран скуп функција у $L^2(\mu)$ тј.

$$\int_X \psi_n \overline{\psi_m} d\mu = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \tag{14}$$

Претпоставимо да је $\{\psi_n\}$ ограничен низ у $L^\infty(\mu)$: Постоји $M < \infty$ тако да је

$$|\psi_n(x)| \leq M \tag{15}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$.

Нека је $f \in L^p(\mu)$ произвољна, где је $1 \leq p \leq 2$. Тада за одговарајуће q, за које је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q > 2$, важи

$$\|\psi_n\|_q^q = \int_X |\psi_n|^q d\mu = \int_X |\psi_n|^2 |\psi_n|^{q-2} d\mu \leq \int_X |\psi_n|^2 M^{q-2} d\mu = M^{q-2},$$

па је $\psi_n \in L^q(\mu)$. На основу Хелдерове[12] неједнакости тада интеграл

$$\widehat{f}(n) = \int_X f\psi_n d\mu, \ n \in \mathbb{N} \tag{16}$$

постоји и дефинише функцију $\widehat{f}$ на скупу $\mathbb{N}$.

Напоменимо да су норме дефинисане на стандардан начин:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty \\ \|\widehat{f}\|_q &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\widehat{f}(n)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \ 1 \leq q < \infty \\ \|\widehat{f}\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\widehat{f}(n)| \end{aligned}$$

Став 2. 1) *Ако је $f \in L^1(\mu)$, тада је $\|\widehat{f}\|_\infty \leq M\|f\|_1$.*

2) *Ако је $f \in L^2(\mu)$, тада је $\|\widehat{f}\|_2 \leq \|f\|_2$.*

Доказ. **1)** Из (15) добијамо да је $\|\widehat{f}\|_\infty \leq M \int_X |f| d\mu$, што је управо оно што је требало доказати.

2) Уочимо да је $\widehat{f}(n) = \langle f, \psi_n \rangle$ и да је $L^2(\mu)$ Хилбертов простор у коме је $\{\psi_n\}$ ортонормиран скуп функција. Тада на основу Беселове[13] неједнакости важи

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, \psi_n \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

тј.добијамо

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

одакле се кореновањем добија тражена неједнакост.

□

[12] Otto Ludwig Hölder (1859-1937)

[13] Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

Испостави се да и за неко p које је између 1 и 2 важи аналогно тврђење. То ће нам дати наредна теорема, која се доказује методом интерполације.

Теорема 14 (*Хауздорф*[14]*-Јунгова*[15] *теорема*)**.** *Под горе наведеним претпоставкама важи неједнакост*

$$\|\widehat{f}\|_q \leq M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_p,$$

за $1 \leq p \leq 2$ *и* $f \in L^p(\mu)$*, где је* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказ. Став 2 нам даје да тврђење важи за $p = 1$ и $p = 2$. Претпоставимо $1 < p < 2$.
Приметимо да је

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |\widehat{f}(n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p = 1} \left\{ \left| \sum_{n=1}^{N} b_n \widehat{f}(n) \right| \right\},$$

пошто је L^q норма било које функције на мерљивом простору једнака норми те функције посматране као линеарног функционала на дуалном простору L^p. Биће довољно показати да је за свако $N \in \mathbb{N}$ и сваки $\{b_n \in \mathbb{C} : 1 \leq n \leq N\}$ такав да је је $\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p = 1$, испуњено

$$\left| \sum_{n=1}^{N} b_n \widehat{f}(n) \right| \leq M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|^p. \tag{17}$$

Покажимо најпре за случај просте комплексне функције f за коју је $\|f\|_p = 1$. Нека су $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{C}$ произвољни такви да је $\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p = 1$. Нака је $F = |f|^p$ и $B_n = |b_n|^p$. Тада постоје функција φ и $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{C}$ такви да је

$$f = F^{\frac{1}{p}} \varphi, \ |\varphi| = 1, \ \int_X F d\mu = 1 \tag{18}$$

и

$$b_n = B_n^{\frac{1}{p}} \beta_n, \ |\beta_n| = 1, \ \sum_{n=1}^{N} B_n = 1. \tag{19}$$

Тада је

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \widehat{f}(n) = \sum_{n=1}^{N} B_n^{\frac{1}{p}} \beta_n \int_X F^{\frac{1}{p}} \varphi \overline{\psi_n} d\mu. \tag{20}$$

[14]Felix Hausdorff (1868-1942)
[15]Heinrich Wilhelm Ewald Jung (1876-1953)

Дефинишимо сада функцију

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{N} B_n^z \beta_n \int_X F^z \varphi \overline{\psi_n} d\mu, \ \ z \in \mathbb{C}. \tag{21}$$

У једнакости (21) подразумевамо да је $A^z = \exp(z \log A)$ за $A > 0$ и $A^z = 0$ за $A = 0$. Сада је десна страна једнакости (20) заправо $\phi(\frac{1}{p})$, па се наш проблем своди на ограничавање одозго функције ϕ у тачки $\frac{1}{p}$.

Пошто је функција F проста, $F \geq 0$ и $B_n \geq 0$ добијамо да је ϕ коначна линеарна комбинација експоненцијалних функција, па је ϕ цела функција која је ограничена на $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : a \leq Rez \leq b\}$ за сваке коначне a и b. Узмимо да је $a = \frac{1}{2}$ и $b = 1$. Функција ϕ сада заовољава услове Адамарове теореме о три праве на области Ω. Да бисмо то искористили у процени $\phi\left(\frac{1}{p}\right)$, проценимо вредности функције M у тачкама a и b.

Дефинишимо за $-\infty < y < \infty$ функцију

$$c_n(y) = \langle F^{\frac{1}{2}+iy}\varphi, \psi_n \rangle = \int_X F^{\frac{1}{2}} F^{iy} \varphi \overline{\psi_n} d\mu.$$

Беселова неједнакост нам даје

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(y)|^2 \leq \int_X |F^{\frac{1}{2}} F^{iy} \varphi|^2 d\mu = \int_X |F| d\mu = 1.$$

Затим применом Коши-Шварцове неједнакости добијамо

$$\left|\phi(\frac{1}{2} + iy)\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} B_n^{\frac{1}{2}} B_n^{iy} \beta_n c_n\right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N} (B_n^{\frac{1}{2}})^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2} \leq 1.$$

Одавде добијамо да је $M(\frac{1}{2}) \leq 1$.

Остаје да се процени $M(1)$. Посматрајмо

$$\phi(1 + iy) = \sum_{n=1}^{N} B_n B_n^{iy} \beta_n \int_X F F^{iy} \varphi \overline{\psi_n} d\mu.$$

Важи

$$|\phi(1 + iy)| \leq \sum_{n=1}^{N} |b_n|^p \int_X |f|^p |\overline{\psi_n}| d\mu \leq \sum_{n=1}^{N} |b_n|^p \cdot M \cdot \int_X |f|^p d\mu = M,$$

јер је $\|\psi_n\|_\infty \leq M$, за свако n. Дакле, $M(1) \leq M$.

Сада на основу Адамарове теореме о три праве добијамо да је

$$|\phi(x+iy)|^{1-\frac{1}{2}} \leq M(\frac{1}{2})^{1-x} M(1)^{x-\frac{1}{2}} \leq M^{x-\frac{1}{2}},$$

тј.

$$|\phi(x+iy)| \leq M^{2x-1}$$

за фиксирано x и свако $y \in \mathbb{R}$. Заменом $x = \frac{1}{p}$ и $y = 0$ добијамо да је

$$\phi\left(\frac{1}{p}\right) \leq M^{\frac{2-p}{p}}.$$

Пошто је $\|f\|_p = 1$, важи

$$\phi\left(\frac{1}{p}\right) \leq M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_p,$$

па из једначине (20) следи да је испуњено (17), за све просте комплексне функције f норме 1.

Нека је сада $f \in L^p(\mu)$ прозвољна. Постоји низ простих функција (f_j) таквих да је

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_p = 0. \tag{22}$$

На основу већ доказаног за просте функције важи

$$\left|\sum_{n=1}^{N} b_n \widehat{f_j}(n)\right| \leq M^{\frac{2-p}{p}} \|f_j\|^p, \tag{23}$$

за свако $j \in \mathbb{N}$.

Приметимо да је

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(n) - \widehat{f_j}(n)| &= \left|\int_X (f - f_j)\overline{\psi_n} d\mu\right| \\
&\leq \int_X |f - f_j||\overline{\psi_n}| d\mu \\
&\leq \left(\int_X |f - f_j|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |\overline{\psi_n}|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

на основу основне интегралне и Хелдерове неједнакости. Из наведене неједнакости због $\psi_n \in L^q(\mu)$ и (22) добијамо да кад $j \to \infty$, тада и $\widehat{f}_j(n) \to \widehat{f}(n)$. Стога, ако у једначини (23) пустимо лимес кад $j \to \infty$ добијамо да важи (17) и за произвољну $f \in L^p(\mu)$. Пошто је N било произвољно, та неједнакост важи за свако N, па и када $N \to \infty$, тј. добијамо да је

$$\|\widehat{f}\|_q \leq M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_p,$$

што је и требало доказати. □

4 Још неке примене принципа максимума модула

4.1 Јенсенова формула

Дефиниција 3. *Нека је f непрекидна функција на $\overline{D(0,r)}$ и нека је $R \leq r$. Максимум функције $|f|$ на кружници полупречника R обележавамо са $\|f\|_R$, тј.*

$$\|f\|_R = \max\{|f(z)| : |z| = R\}.$$

Теорема 15. *Нека је f холоморфна функција на $D(0,R)$, непрекидна на $\overline{D(0,R)}$ и $f(0) \neq 0$. Нека су нуле функције f у $D(0,R)$ поређане растуће по модулу*

$$z_1, z_2, \ldots, z_N,$$

где се свака нула појављује онолико пута колики јој је мултиплицитет. Тада је

$$|f(0)| \leq \frac{\|f\|_R}{R^n} |z_1 z_2 \cdots z_N|.$$

Доказ. Нека су

$$g_n(z) = \frac{R(z_n - z)}{R^2 - \overline{z_n} z}, \; n = 1, 2, \ldots, N$$

пресликавања из $\overline{D(0,R)}$ на $\overline{B(0,1)}$.

Дефинишимо

$$g(z) = \prod_{n=1}^{N} g_n(z),$$

и нека је

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Овако дефинисана функција F је холоморфна на $D(0,R)$ и непрекидна на $\overline{D(0,R)}$ и пошто је $|g(z)| = 1$ за $|z| = R$ добијамо да важи $|F(z)| = |f(z)|$ за $|z| = R$. Сада на основу ПММ закључујемо да је

$$|F(z)| \leq \|f\|_R,$$

за свако $|z| \leq R$. Убацивањем $z = 0$ добијамо да је

$$|F(0)| \leq \|f\|_R.$$

Заменом $F(0) = \frac{f(0)}{g(0)}$ добијамо да је

$$|f(0)| \leq \|f\|_R |g(0)|,$$

односно

$$|f(0)| \leq \|f\|_R \frac{|z_1 z_2 \cdots z_N|}{R^N},$$

што је и требало доказати. □

Неједнакост у претходној теореми се назива *Јенсенова*[16] *неједнакост.* Представићемо примену те неједнакости кроз наредна два задатка.

Задатак 6. *Нека је f холоморфна на јединичном диску $\mathbb{D}$ и непрекидна на његовом затворењу. Претпоставимо да је $|f(z)| \leq 1$, за свако $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Такође претпоставимо да је $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{i}{2}) = 0$. Доказати да је тада $|f(0)| \leq \frac{1}{4}$.*

Решење: Ако је $f(0) = 0$, неједнакост је тривијално испуњена, а ако је $f(0) \neq 0$, онда можемо применити претходну теорему. Добијамо да је

$$|f(0)| \leq \|f\|_R |z_1 z_2 \cdots z_n|,$$

где је $R = 1$. Због $|f(z)| \leq 1$, за свако $z \in \overline{\mathbb{D}}$, важи $\|f\|_R \leq 1$, а пошто је $z_i \in \mathbb{D}$, за свако $1 \leq i \leq N$, а већ су нам познате 2 нуле функције f, то је $|z_1 z_2 \cdots z_N| \leq |\frac{1}{2}||\frac{i}{2}| = \frac{1}{4}$. Дакле, добијамо да је $|f(0)| \leq \frac{1}{4}$. □

Задатак 7. *Нека је f холоморфна на диску $D(z_0, R)$ и непрекидна на његовом затворењу. Претпоставимо да f има најмање n нула у диску $D(z_0, r)$, $r < R$ (броји се и мултиплицитет) и нека је $f(z_0) \neq 0$. Тада важи*

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leq \frac{\|f\|_R}{|f(z_0)|},$$

где је $\|f\|_R$ максимум функције f на рубу диска $D(z_0, R)$.

[16] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925)

Решење: Посматрајмо функцију $g(z) = f(z + z_0)$, која је дефинисана и непрекидна на затворењу диска $D(0, R)$ и холоморфна је као композиција транслације и холоморфне функције f на $D(0, R)$. Због услова наметнутих за функцију f, важи да g има најмање n нула у диску $D(0, r)$, $r < R$ и да је $g(0) \neq 0$. Сада можемо применити теорему 15 на функцију g. Добијамо

$$|g(0)| \leq \frac{\|g\|_R}{R^N} |z_1 z_2 \cdots z_N|,$$

где је $N \geq n$. За свако $a \leq i \leq n$ важи $|z_i| < r$, а за остале $n < i \leq N$ важи $|z_i| < R$. Заменом $g(z) = f(z + z_0)$ и уочених неједнакости за модуле нула добијамо

$$|f(z_0)| \leq \frac{\|f\|_R}{R^N} |z_1 \cdots z_n z_{n+1} \cdots z_N| \leq \frac{\|f\|_R}{R^N} r^n R^{N-n},$$

тј.

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leq \frac{\|f\|_R}{|f(z_0)|},$$

што је требало и доказати. □

Означимо са $n(r)$ број нула функције f у диску $D(0, r)$. Тиме смо дефинисали функцију n која слика $(0, \infty)$ у скуп ненегативних целих бројева.

Последица 10. *Уз претпоставке и ознаке из претходне теореме важи*

$$\int_0^R \frac{n(x)}{x} dx \leq \log \|f\|_R - \log |f(0)|.$$

Доказ. Функција log је растућа, па се из Јенсенове неједнакости добија

$$\log \frac{R^N}{|z_1||z_2| \cdots |z_N|} \leq \log \frac{\|f\|_R}{|f(0)|} = \log \|f\|_R - \log |f(0)|.$$

Са друге стране је

$$\log \frac{R^N}{|z_1||z_2| \cdots |z_N|} = \sum_{n=1}^N \log\left(\frac{R}{|z_n|}\right) = \sum_{n=1}^N \int_{|z_n|}^R \frac{dx}{x} = \int_0^R \frac{n(x)}{x} dx.$$

Јасно је да из добијене једнакости и неједнакости следи тражено. □

Дакле, уз помоћ ПММ смо добили Јенсенову неједнакост која има многобројне примене. Али, од већег интереса је пронаћи тачну везу која постоји између нула аналитичке функције f и средње вредности на кружници. Претходна прича је послужила као мотивација за то, а видећемо у наставку да је показана Јенсенова неједнакост само једноставна последица такозване Јенсенове формуле.

Уведимо најпре потребне ознаке. За мероморфну функцију f на $D(0, R)$ дефинишемо ν_f за свако $a \in D(0, R)$ са:

1) Ако је a пол реда m функције f, онда је $\nu_f(a) = -m$.

2) Ако је a нула реда m функције f, онда је $\nu_f(a) = m$.

3) Ако a није ни нула ни пол функције f онда је $\nu_f(a) = 0$.

Дефинишемо такође c_f. Ако функција f има нулу или пол реда m у тачки 0, онда је c_f коефицијент уз z^m у развоју функције f, односно коефицијент уз z^{-m}. Ако f нема ни нулу ни пол у тачки 0 онда је $c_f = f(0)$.

Теорема 16 (*Јенсенова формула*)**.** *Нека је f мероморфна, неконстантна функција на $D_R = D(0, R)$ и непрекидна на $\overline{D_R}$. Тада је*

$$\int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} + \sum_{a \in D_R, a \neq 0} \nu_f(a) \log \frac{|a|}{R} + \nu_f(0) \log \frac{1}{R} = \log |c_f|. \tag{24}$$

Посебно, ако f нема нуле или полове у 0, тада је десна страна једнака $\log |f(0)|$.

Доказ. Претпоставимо да f нема ни нуле ни полове у $D(0, R)$, тј. $\nu_f = 0$ на том диску. Тада је функција $\log f(z)$ аналитичка на диску, па је на основу Кошијеве интегралне формуле

$$\log f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{\log f(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \log f(Re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi},$$

тј. важи

$$\log |f(0)| + iarg f(0) = \int_0^{2\pi} (\log |f(Re^{i\theta})| + iarg f(Re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Узимањем реалног дела обе стране једнакости добијамо тражену једнакост.

Даље, претпоставимо да је $f(z) = z$. Тада је

$$\log |f(Re^{i\theta})| = \log R$$

и важи $\nu_f(0) = 1$. Стога је лева страна израза (24) једнака 0. Пошто је тада $c_f = 1$ и десна страна је једнака 0, то је једнакост (24) испуњена.

Нека је сада $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Посматрајмо функцију

$$f(z) = z - \alpha,$$

где је $\alpha = ae^{i\varphi}$, за $0 < a \leq R$. Тада је $|c_f| = |f(0)| = |\alpha| = a$, $z = \alpha$ је нула реда 1 функције f, тј. $\nu_f(\alpha) = 1$, а вредности функције ν_f у осталим тачкама диска су 0, па формула (24) коју треба показати постаје

$$\log R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Re^{i\theta} - ae^{i\varphi}| d\theta,$$

тј.

$$\int_0^{2\pi} \log R = \int_0^{2\pi} \log |Re^{i\theta} - ae^{i\varphi}| d\theta,$$

што је еквивалентно са

$$\int_0^{2\pi} \log \left| e^{i\theta} - \frac{a}{R} e^{i\varphi} \right| d\theta = 0.$$

Ради прегледности, докажимо то кроз следећу лему.

Лема 1. *Ако је $0 < a \leq R$, тада је $\int_0^{2\pi} \log \left| e^{i\theta} - \frac{a}{R} e^{i\varphi} \right| d\theta = 0$.*

Доказ леме. Претпоставимо најпре да је $0 < a < R$. Тада је функција

$$g(z) = \frac{\log\left(1 - \frac{a}{R} z\right)}{z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{a}{R} z)^{n-1}}{n}$$

аналитичка за $|z| < \frac{R}{a}$. Стога је интеграл по затвореној кривој $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ датој са $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ једнак 0, тј.

$$\int_\gamma \frac{\log\left(1 - \frac{a}{R} z\right)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\log(1 - \frac{a}{R} e^{i\theta})}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = 0.$$

Узимањем имагинарног дела једнакости добијамо

$$\int_0^{2\pi} \log \left| 1 - \frac{a}{R} e^{i\theta} \right| d\theta = 0.$$

Сменом $t = \varphi - \theta$ се добија

$$\int_\varphi^{\varphi - 2\pi} \log \left| e^{it} - \frac{a}{R} e^{i\varphi} \right| dt = 0,$$

што је еквивалентно са оним што је требало доказати.

Преостаје још да се докаже случај $a = R$. Тада се једнакост коју треба доказати своди на

$$\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - e^{i\varphi}|d\theta = \int_0^{2\pi} \log\left(|-e^{i\varphi}||1 - e^{i(\theta-\varphi)}|\right)d\theta = 0$$

тј.

$$\int_0^{2\pi} \log|1 - e^{i(\theta-\varphi)}|d\theta = 0$$

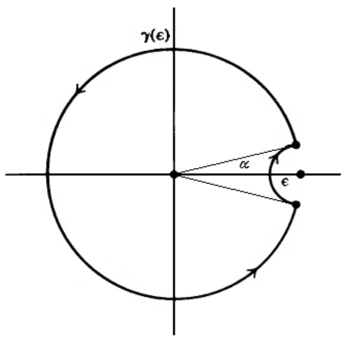
што је еквивалентно са

$$\int_0^{2\pi} \log|1 - e^{i\theta}|d\theta = 0. \tag{25}$$

Посматрајмо функцију

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\log(1-z)}{z}, & z \neq 0 \\ -1, & z = 0 \end{cases}$$

која је холоморфна за $Rez < 1$ ($\log(1-z)$ је грана логаритма која у нули узима вредност 0). Нека је γ позитивно оријентисана јединична кружница са центром у 0, тј. $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ за $\theta \in [0, 2\pi]$. Означимо са γ_α рестрикцију од γ на $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, где је $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ и означимо са γ_ε позитивно оријентисан део кружнице са центром 1 полупречника ε која спаја тачке $e^{i\alpha}$ и $e^{-i\alpha}$, тј. $\gamma_\varepsilon(\theta) = 1 + \varepsilon^{i\theta}$ за $\theta \in [\frac{\pi+\alpha}{2}, \frac{3\pi-\alpha}{2}]$ (веза између α и ε је $\varepsilon = 2\sin\frac{\alpha}{2}$). Нека је још $\gamma(\varepsilon)$ контура са слике. Њу чини позитивно оријентисана унија γ_α и γ_ε.



Функција g је холоморфна за $Rez < 1$, па је на основу Кошијеве интегралне формуле

$$\int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{\log(1-z)}{z}dz = 0,$$

на основу чега добијамо да је

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\log(1-z)}{z}dz = \int_{\gamma_\alpha} \frac{\log(1-z)}{z}dz. \tag{26}$$

Израчунајмо интеграл по γ_α. Заменом $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ добијамо да је

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\alpha} \frac{log(1-z)}{z}dz &= i\int_\alpha^{2\pi-\alpha} \log(1-e^{i\theta})d\theta \\ &= i\int_\alpha^{2\pi-\alpha} \log|1-e^{i\theta}|d\theta - \int_\alpha^{2\pi-\alpha} arg(1-e^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

Пошто је $arg(1-e^{i\theta}) = \frac{\theta-\pi}{2}$ и $\int_\alpha^{2\pi-\alpha} \frac{\theta-\pi}{2}d\theta = 0$ добијамо да је

$$\int_{\gamma_\alpha} \frac{log(1-z)}{z}dz = i\int_\alpha^{2\pi-\alpha} \log|1-e^{i\theta}|d\theta. \tag{27}$$

Даље, пошто је

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\log(1-z)}{z} = 0,$$

то на основу Жордановe леме добијамо да је

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\log(1-z)}{z}dz = 0,$$

па је на основу (26) и

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\gamma_\alpha} \frac{\log(1-z)}{z}dz = 0.$$

Сада на основу (27) добијамо да је

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{2\pi-\alpha} \log|1-e^{i\theta}|d\theta = 0,$$

тј.

$$\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|d\theta = 0.$$

Дакле, добили смо једнакост (25), што је и требало доказати. □

Доказали смо Јенсенову формулу за специјалне случајеве. Општи случај ћемо извести користећи специјалне.

Нека је

$$h(z) = f(z)\prod_{a\in D_R}(z-a)^{-\nu_f(a)}.$$

Помножили смо f са рационалном функцијом која поништава све нуле и полове функције f, па функција h нема ни нула ни полова у $D(0,R)$. Можемо записати

$$f(z) = h(z) \prod_{a \in D_R} (z-a)^{\nu_f(a)}.$$

Стога можемо доћи до f у коначном броју корака множењем или дељењем функцијама специјалног облика за које смо показали да важи Јенсенова формула. Биће довољно показати још да важи следећа лема.

Лема 2. *Ако Јенсенова формула важи за холоморфне функције f и g, онда важи и за функције fg и $\frac{f}{g}$.*

Доказ. Нека је $LS(f)$ лева страна Јенсенове неједнакости за функцију f и нека је $RS(f) = \log|c_f|$ десна страна те неједнакости. Приметимо да је:

$$\log|fg| = \log|f| + \log|g|,$$
$$\nu_{fg}(a) = \nu_f(a) + \nu_g(a),$$
$$c_{fg} = c_f c_g.$$

Стога важи

$$LS(fg) = LS(f) + LS(g),\ \ RS(fg) = RS(f) + RS(g).$$

Такође, важи и да је

$$LS(\frac{1}{f}) = -LS(f),\ \ RS(\frac{1}{f}) = -RS(f).$$

Из ових једнакости следи тражено. □

Сада, као што смо и најавили, на основу претходне леме закључујемо да пошто Јенсенова неједнакост важи за h и за функције облика $(z-a)$, за све $a \in \mathbb{C}$, после коначног броја примена леме, добијамо да Јенсенова неједнакост важи и за f. □

Последица 11. *Нека је f холоморфна функција на $D_R = D(0,R)$, неконстантна и непрекидна на затворењу од D_R и нека је $f(0) \neq 0$. Тада је*

$$\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} + \sum_{a \in D_R, a \neq 0} \nu_f(a) \log\frac{|a|}{R} = \log|f(0)|.$$

Пошто је

$$\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \leq \log \|f\|_R,$$

из последице 11 добијамо Јенсенову неједнакост са почетка овог поглавља. Такође, пошто је

$$\sum_{a \in D_R, a \neq 0} \nu_f(a) \log \frac{|a|}{R} \leq 0,$$

добијамо да је

$$\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

У случају да функција f нема нула у D_R добијамо

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

4.2 Пикар-Борелова теорема

Мала Пикарова[17] теорема тврди да цела функција која не узима две различите комплексне вредности, мора бити константна. У овом поглављу ћемо представити Борелов[18] доказ те теореме, те стога ту теорему овде називамо Пикар-Борелова теорема. Тај доказ кроз помоћна тврђења користи Јенсенову формулу доказану у претходном одељку. Пре него што пређемо на њега, биће нам потребни још неки појмови и тврђења.

Дефиниција 4. *Нека је α позитиван реалан број. Тада је позитивни логаритам од α дат са*

$$\log^+(\alpha) = \max(0, \log\alpha).$$

Став 3. *Ако су $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ позитивни реални бројеви, тада је*

$$\log^+(\alpha_1\alpha_2) \leq \log^+(\alpha_1) + \log^+(\alpha_2),$$

и

$$\log^+(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+(\alpha_i) + \log n.$$

[17] Charles Émile Picard (1856-1941)

[18] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956)

Доказ. Прву неједнакост добијамо директно:

$$\begin{aligned} \log^+(\alpha_1\alpha_2) = \max(0, \log(\alpha_1\alpha_2)) &= \max(0, \log\alpha_1 + \log\alpha_2) \\ &\leq \max(0, \log\alpha_1) + \max(0, \log\alpha_2) \\ &\leq \log^+(\alpha_1) + \log^+(\alpha_2). \end{aligned}$$

Да бисмо доказали другу неједнакост уочимо да је

$$\log^+(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \leq \log^+(n \max_i \alpha_i) \leq \log^+(\max_i \alpha_i) + \log n.$$

Пошто је

$$\log^+(\max_i \alpha_i) \leq \sum_{i=0}^{n} \log^+ \alpha_i,$$

добијамо да важи тврђење. □

Став 4. *Ако је α позитиван реалан број, тада је*

$$\log^+ \alpha - \log^+ \frac{1}{\alpha} = \log \alpha,$$

и

$$|\log \alpha| = \log^+ \alpha + \log^+ \frac{1}{\alpha}.$$

Доказ. Из

$$\log \alpha > 0 \Leftrightarrow \log \frac{1}{\alpha} < 0,$$

и на основу основних особина логаритма следе тражене једнакости. □

Став 5. *Нека је $b \in \mathbb{C}$. Тада је*

$$\int_0^{2\pi} \log|b - e^{i\theta}| \frac{d\theta}{2\pi} = \log^+|b|.$$

Доказ. Ако је $|b| > 1$, тада је $\log^+|b| = \log|b|$. Даље, функција $g(z) = \log|b - z|$ је хармонијска за $|z| < 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, па за њу важи својство средње вредности, тј. важи

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|b - e^{i\theta}| d\theta = \log|b - 0| = \log|b| = \log^+|b|,$$

што је и требало доказати.
Ако је $|b| < 1$, тада је

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \log|b - e^{i\theta}|\frac{d\theta}{2\pi} &= \int_0^{2\pi} \log|be^{-i\theta} - 1|\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \log|-1| \\ &= 0 = \log^+|b|.\end{aligned}$$

Ако је $|b| = 1$, на основу леме 1 следи да важи тврђење. □

Дефиниција 5. *Нека је f мероморфна функција. За $r > 0$ нека је*

$$m_f(r) = \int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Приметимо да је функција m_f ненегативна, а интеграл преко кога се дефинише је несвојствени интеграл који конвергира. Ситуација је слична ситуацији у Јенсеновој формули.

Последица 12. *Ако су f и g мероморфне функције, тада је*

$$m_{fg} \leq m_f + m_g.$$

Ако су $f_1, \ldots, f_n$ мероморфне функције, тада је

$$m_{f_1+\cdots+f_n} \leq m_{f_1} + \cdots + m_{f_n} + \log n.$$

Доказ. Следи директно из става 3 и дефиниције функције m_f. □

Последица 13. *Нека је h цела функција без нула. Тада је*

$$m_h = m_{\frac{1}{h}} + \log|h(0)|.$$

Доказ. Из дефиниције 5 и на основу става 4 важи

$$m_h(r) - m_{\frac{1}{h}}(r) = \int_0^{2\pi} \log|h(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} = \log|h(0)|.$$

Последња једнакост следи из својства средње вредности за хармонијску функцију $\log|h(z)|$. □

Сада нам је циљ да пребројимо нуле функције укључујући и мултиплицитете. Претходно смо дефинисали функцију n, коју можемо означити и са n_f, ако желимо да нагласимо о којој се функцији ради. Прецизније, за аналитичку функцију f на $D(0, R)$ уводимо следеће ознаке:

$$n_f(0,r) = \textit{број нула функције } f \textit{ у отвореном}$$
$$\textit{диску полупречника } r \leq R, \textit{ рачунате са мултиплицитетом.}$$

Ако је $f(0) \neq 0$, онда дефинишемо:

$$N_f(0,r) = \int_0^r n_f(0,t)\frac{dt}{t} = \sum_{a\in D(0,r), a\neq 0} \nu_f(a) \log\left|\frac{r}{a}\right|,$$

За $b \in \mathbb{C}$ тако да је $f(0) - b \neq 0$ означавамо

$$N_f(b,r) = N_{f-b}(0,r).$$

Став 6 (*Картан*[19]**)**. *Нека је f цела функција. Тада је*

$$m_f(r) = \int_0^{2\pi} N_f(e^{i\theta}, r)\frac{d\theta}{2\pi} + \log^+|f(0)|. \tag{28}$$

Специјално, m_f је растућа функција по r.

Доказ. За свако θ такво да је $f(0) \neq e^{i\theta}$, применимо последицу 11 Јенсенове формулу на функцију $f(z) - e^{i\theta}$, која тада није нула у 0, па ће десна страна бити $\log|f(0) - e^{i\theta}|$. Добијамо

$$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}|\frac{d\varphi}{2\pi} = N_f(e^{i\theta}, r) + \log|f(0) - e^{i\theta}|.$$

Интегралимо обе стране добијене једнакости на сегменту $[0, 2\pi]$ по θ и поделимо са 2π. Добијамо

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}|\frac{d\varphi}{2\pi}\right)\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} N_f(e^{i\theta}, r)\frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \log|f(0) - e^{i\theta}|\frac{d\theta}{2\pi}.$$

На основу става 5, важи

$$\int_0^{2\pi} \log|f(0) - e^{i\theta}|\frac{d\theta}{2\pi} = \log^+|f(0)|,$$

и пошто са леве стране смемо да мењамо поредак интеграције (Фубинијева теорема), поново на основу става 5 добијамо да је

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}|\frac{d\varphi}{2\pi}\right)\frac{d\theta}{2\pi} &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}|\frac{d\theta}{2\pi}\right)\frac{d\varphi}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\varphi})|\frac{d\varphi}{2\pi} \\
&= m_f(r).
\end{aligned}$$

[19] Élie Joseph Cartan (1869-1951)

Сада се јасно види да важи

$$m_f(r) = \int_0^{2\pi} N_f(e^{i\theta}, r)\frac{d\theta}{2\pi} + \log^+|f(0)|,$$

што је и требало доказати.
Докажимо сада други део тврђења. За свако θ функција

$$r \longmapsto N_f(e^{i\theta}, r)$$

је растућа, па на основу једнакости (28) следи да је и m_f растућа функција. Овим је тврђење у потпуности доказано. $\square$

Дефиниција 6. *Нека је f цела функција. Са $M_f(R)$ означавамо логаритам максимума модула функције f на кружници полупречника R, тј.*

$$M_f(R) = \log \|f\|_R,$$

где је

$$\|f\|_R = \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

Приметимо да на основу дефиниције m_f важи

$$m_f \leq \max(M_f, 0).$$

Обратно ограничење нам даје следећа теорема.

Теорема 17. *Нека је f цела функција која нема нула. Тада за $r < R$ важи*

$$M_f(r) \leq \frac{R+r}{R-r} m_f(R),$$

и посебно

$$M_f(r) \leq 3m_f(r).$$

Доказ. Пошто f нема нула, функција $\log f(z)$ је цела функција по z. Тада је функција $g(z) = \log|f(z)|$ хармонијска, па можемо применити Пуасонову формулу на g стављајући да је $z = re^{i\varphi}$ и $\zeta = Re^{i\theta}$. Добијамо

$$\log|f(z)| = \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| Re\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Директним рачуном се добија

$$Re\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

Одатле следи да се максимум и минимум функције $Re\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$ достижу за $\cos(\theta-\varphi)=1$ односно за $\cos(\theta-\varphi)=-1$, па је

$$0<\frac{R-r}{R+r}\leq Re\frac{\zeta-z}{\zeta+z}\leq\frac{R+r}{R-r}.$$

Из тога добијамо да је

$$\log|f(z)|\leq\int_0^{2\pi}\log^+|f(Re^{i\theta})|\frac{R+r}{R-r}\frac{d\theta}{2\pi}=\frac{R+r}{R-r}m_f(R).$$

Сада узимањем максимума када је $|z|=r$ завршавамо доказ. Специјалан случај неједнакости се добија убацивањем $R=2r$ у прву неједнакост. $\square$

Последица 14. *Нека је f цела функција. Ако је m_f ограничена, тада је f константна. Ако постоји константа k тако да је*

$$m_f(R_j)\leq k\log R_j$$

за низ $(R_j)_{j=1}^{\infty}$ који тежи ∞, тада је f полином степена $\leq k$.

Доказ. Претпоставимо да је m_f ограничена. Тада из претходне теореме следи да је и M_f ограничена, па самим тим и f, па на основу Лиувилове теореме следи да је функција f константна.

Да бисмо доказали други део, изаберимо $A>0$ и нека је $R=Ar$. Цела функција f се може развити у Тејлоров ред, $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$, па на основу Кошијеве формуле добијамо да је

$$|a_n|\leq\frac{\|f\|_R}{R^n}.$$

Сада на основу теореме 17 за $R=R_j=Ar_j$ и неједнакости претпостављене у тврђењу, добијамо:

$$\log|a_n|\leq M_f(R)-n\log R\leq\frac{A+1}{A-1}k\log(Ar)-n\log(Ar).$$

Ако је $n>k$, тада за довољно велико A имамо

$$n>k\frac{A+1}{A-1}.$$

Пустимо да $R=R_j\to+\infty$, па добијамо да десна страна тежи $-\infty$, односно добијамо да је $a_n=0$. Дакле, f је полином степена $\leq k$. $\square$

Теорема 18. *Нека је h цела функција без нула. Тада је*

$$m_{\frac{h'}{h}}(r) = O(\log r + \log m_h(r)),$$

за све r који се налазе ван скупа коначне мере и кад $r \to \infty$.

Доказ. Да бисмо доказали ову теорему биће нам потребно неколико лема.

Лема 3. *Нека је h цела функција без нула и нека је $1 \le r < R$. Тада је*

$$m_{\frac{h'}{h}}(r) \le \log^+ R + 2\log^+ \frac{1}{R-r} + 2\log^+ m_h(R) + c,$$

где је c нека константа.

Доказ леме. Функција $\log h(z)$ је цела функција, па важи Пуасонова[20] формула

$$\log h(z) = \int_0^{2\pi} \log|h(Re^{i\theta})| \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\frac{d\theta}{2\pi} + iK,$$

за неку константу K. Диференцирајући по z за $|z| < R$ добијамо

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \int_0^{2\pi} \log|h(Re^{i\theta})| \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^2}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Стога важи

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \le \int_0^{2\pi} |\log|h(Re^{i\theta})|| \frac{2R}{|Re^{i\theta}-z|^2}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

На основу става 4 и дефиниције m_h добијамо да је

$$\int_0^{2\pi} |\log|h(Re^{i\theta})|| \frac{d\theta}{2\pi} = m_h(R) + m_{\frac{1}{h}}(R).$$

Пошто је

$$|Re^{i\theta} - z|^2 \ge |R-r|^2,$$

коначно добијамо процену

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \le \frac{2R}{(R-r)^2}(m_h(R) + m_{\frac{1}{h}}(R)).$$

Применом $\log^+$ и интеграцијом обе стране добијамо ограничење

$$m_{\frac{h'}{h}}(r) < \log^+ R + 2\log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ m_h(R) + \log^+ m_{\frac{1}{h}}(R) + \log 2.$$

Али као што смо видели у последици 13, важи $m_{\frac{1}{h}} = m_h - \log|h(0)|$, па следи тврђење леме. □

[20] Siméon Denis Poisson (1781-1840)

Лема 4. *Нека је* S *ненегативна, непрекидна, неконстантна, растућа функција по* $r > 0$. *Тада је*

$$S\left(r + \frac{1}{S(r)}\right) < 2S(r)$$

за све $r > 0$ *осим за* r *који се налазе у скупу коначне мере.*

Доказ. Нека је E скуп на коме не важи дата неједнакост, тј. E је скуп свих r за које је

$$S\left(r + \frac{1}{S(r)}\right) \geq 2S(r).$$

Претпоставимо да постоји $r_1 \in E$, $S(r_1) \neq 0$. Нека је

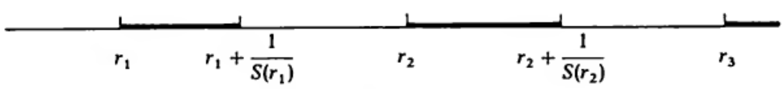
$$r_2 = \inf\left\{r \in E : r \geq r_1 + \frac{1}{S(r_1)}\right\}.$$

Тада је $r_2 \in E$ и $r_2 \geq r_1 + \frac{1}{S(r_1)}$. Нека је

$$r_3 = \inf\left\{r \in E : r \geq r_2 + \frac{1}{S(r_2)}\right\}.$$

Тада $r_3 \in E$ и $r_3 \geq r_2 + \frac{1}{S(r_2)}$. Понављамо овај поступак бесконачно пута, па или добијамо низ $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ или добијамо коначан број тачака (ако у неком моменту скуп чији инфимум тражимо постане празан).

Ако смо претходним поступком добили коначан број тачака,



проблем је решен, јер је тада скуп E покривен коначном унијом интервала коначне дужине, тј. мера скупа на коме не важи тражена неједнакост је коначна, што је и требало доказати. А ако је добијен низ $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, тада приметимо да пошто је S растућа, на основу конструкције важи

$$S(r_{n+1}) \geq S\left(r_n + \frac{1}{S(r_n)}\right) \geq 2S(r_n) \geq 2^n S(r_1). \tag{29}$$

Стога је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S(r_n)} \leq \frac{2}{S(r_1)}.$$

Приметимо такође да низ $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ не може бити ограничен. Претпоставимо супротно, нека је $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничен низ. Тада он има граничну вредност r кад $n \to \infty$, јер је монотон. Пошто је S непрекидна функција, важи $\lim_{n\to\infty} S(r_n) = S(r)$. Али то је немогуће због (29), јер десна страна те неједнакости тежи бесконачно кад $n \to \infty$. Стога је E покривен унијом интервала

$$\bigcup \left[r_n, r_n + \frac{1}{S(r_n)} \right] \cup (0, r_1]$$

који има меру $\leq \frac{2}{S(r_1)} + r_1$, па је теорема доказана. $\square$

Функција m_h је растућа на основу теореме 6, па је и

$$S(r) = \log^+ m_h(r)$$

растућа. Пошто је m_h непрекидна под датим условима (h цела без нула), то је и S непрекидна функција. Дакле, S задовољава све услове претходне леме. Нека је

$$R = r + \frac{1}{\log^+ m_h(r)}.$$

Сада применом претходне леме добијамо

$$\log^+ m_h \left(r + \frac{1}{\log^+ m_h(r)} \right) < 2 \log^+ m_h(r),$$

тј.

$$\log^+ m_h(R) < \log^+ m_h(r),$$

за све $r > 0$ осим на скупу коначне мере. За горе изабрано R применимо лему 3 и искористимо добијену неједнакост. На тај начин и уз помоћ ставова 3 и 4 добијамо да за све $r > 0$ осим на скупу коначне мере важи

$$\begin{aligned}
m_{\frac{h'}{h}}(r) &\leq 4 \log^+ m_h(r) + \log^+ \left(r + \frac{1}{\log^+ m_h(r)} \right) + 2 \log^+(\log^+ m_h(r)) + c \\
&\leq 4 \log^+ m_h(r) + \log^+ r + \log^+ (\log^+ m_h(r))^{-1} \\
&\quad + \log 2 + 2 \log^+(\log^+ m_h(r)) + c \\
&\leq 4 \log^+ m_h(r) + \log^+ r + \log^+(\log^+ m_h(r)) \\
&\quad + |\log(\log^+ m_h(r))| + \log 2 + c \\
&\leq K \log m_h(r) + \log(r) + c_1
\end{aligned}$$

за довољно велико r, где су c_1 и K константе. Последња неједнакост се добија јер за довољно велико r, важи $\log^+(\log^+ m_h(r)) < \log m_h(r)$, с обзиром да је m_h растућа функција. Претпостављамо и да није ограничена, јер ако је ограничена на основу последице 14 бисмо добили да је h константна, а то је тривијалан случај. Дакле, заиста је

$$m_{\frac{h'}{h}}(r) = O(\log r + \log m_h(r)),$$

осим на скупу коначне мере, што је требало и доказати. □

Коначно, дошли смо и до Пикарове теореме.

Теорема 19 (*Пикар-Борелова теорема*)**.** *Нека је f цела функција и нека су a и b два различита комплексна броја таква да је $f(z) \neq a$ и $f(z) \neq b$ за све $z \in \mathbb{C}$. Тада је f константна.*

Доказ. Нека је

$$L(w) = \frac{w-a}{b-a}.$$

Тада L слика a, b у $0, 1$ редом. Стога после замене f за $L \circ f$, можемо претпоставити без умањења општости да је $a = 0$ и $b = 1$. Стога, нека је h функција која нема нула и нека је $1 - h$ такође функција која нема нула и треба да покажемо да је h константна. Нека је $h_1 = h$ и $h_2 = 1 - h$. Имамо да је

$$h_1 + h_2 = 1,$$

па диференцирајући добијамо

$$h_1' + h_2' = 0.$$

Запишимо $h_1' = \frac{h_1'}{h}h$ и $h_2' = \frac{h_2'}{h_2}h_2$. Решавањем по h_1 добијамо

$$h_1 = \frac{\frac{h_2'}{h_2}}{\frac{h_2'}{h_2} - \frac{h_1'}{h_1}}, \tag{30}$$

осим када је делилац једнак 0, тј. када је $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)' = 0$. Али тада је $\frac{h_2}{h_1}$ константна, па је и h константна, па је у том случају тврђење доказано. Претпоставимо сада да је делилац различит од нула.

Тада применом неједнакости за m_{fg} и m_{f+g} на једнакост (30), добијамо

$$\begin{aligned} m_{h_1}(r) &\leq m_{\frac{h_2'}{h_2}} + m_{\frac{h_2'}{h_2}-\frac{h_1'}{h_1}} - \log\left|\left(\frac{h_2'}{h_2}-\frac{h_1'}{h_1}\right)(0)\right| \\ &\leq 2m_{\frac{h_2'}{h_2}} + m_{\frac{h_1'}{h_1}} + \log 2 - \log\left|\left(\frac{h_2'}{h_2}-\frac{h_1'}{h_1}\right)(0)\right|, \end{aligned}$$

па на основу претходне теореме добијамо

$$m_{h_1}(r) = O(\log r + \log m_{h_1}(r) + \log m_{h_2}(r)),$$

за све r ван скупа коначне мере. Имамо сличну неједнакост за m_{h_2}. Стога добијамо да је

$$m_{h_1}(r) + m_{h_2}(r) = O(\log r + \log m_{h_1}(r) + \log m_{h_2}(r)),$$

тј.

$$m_{h_1}(r) + m_{h_2}(r) \leq K(\log r + \log m_{h_1}(r) + \log m_{h_2}(r)).$$

Претпоставимо да h није константна, па h_1 и h_2 нису константне, па су m_{h_1} и m_{h_2} растуће и неограничене. Стога, ако означимо $\varepsilon = \frac{1}{2K}$, за довољно велико r ће да важи $\log m_{h_1}(r) < \varepsilon m_{h_1}(r)$ и $\log m_{h_2}(r) < \varepsilon m_{h_2}(r)$, па добијамо да је

$$m_{h_1}(r) + m_{h_2}(r) \leq K(\log r + \frac{1}{2K} m_{h_1}(r) + \frac{1}{2K} m_{h_2}(r)).$$

Из последње неједнакости следи да је, за довољно велико r,

$$m_{h_1}(r) + m_{h_2}(r) \leq 2K \log r,$$

па је

$$m_{h_1}(r) = O(\log r),\ m_{h_2}(r) = O(\log r)$$

кад $r \to \infty$. На основу последице 14, закључујемо да су h_1 и h_2 полиноми, па пошто немају нула, морају бити константне функције. Овим је завршен Борелов доказ Мале Пикарове теореме. $\square$

Напоменимо да постоји и Велика Пикарова теорема која тврди да ако је $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ есенцијални сингуларитет и U његова околина таква да је функција f холоморфна на $U \setminus \{z_0\}$, онда f на U узима све вредности осим евентуално једне, и то бесконачно много пута. Велика Пикарова теорема је доста општија и Мала Пикарова теорема се из ње добија као једноставна последица.

4.3 Борел-Каратеодоријева теорема

У овом делу ћемо доказати да је аналитичка функција у суштини ограничена својим реалним делом.

Дефиниција 7. *Ако је u реална функција, дефинишемо*

$$\sup_R u = sup\{u(z) : |z| = R\}.$$

Теорема 20 (*Борел-Каратеодори*[21]). *Нека је f холоморфна функција на диску полупречника R, са центром у координатном почетку и нека је непрекидна на његовом затворењу. Нека је*

$$\|f\|_r = \max\{|f(z)| : |z| = r < R\}.$$

Тада је

$$\|f\|_r \leq \frac{2r}{R-r} \sup_R Ref + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

Доказ. Нека је $A = \sup_R Ref$. Претпоставимо прво да је $f(0) = 0$. Докажимо да тада мора да важи $A \geq 0$. Приметимо да пошто је f холоморфна, то је $u = Ref$ хармонијска функција, па за њу важи својство средње вредности. Дакле, важи

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it})dt.$$

Због $f(0) = 0$ имамо да је $u(0) = 0$ и пошто је $u(Re^{it}) \leq A$ добијамо

$$0 = u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it})dt \leq A,$$

што је и требало показати.

Посматрајмо сада функцију

$$g(z) = \frac{f(z)}{z(2A - f(z))}.$$

Пошто је $f(0) = 0$, то подразумевамо да је функција $\frac{f(z)}{z}$ у нули дефинисана као коефицијент уз z у Тејлоровом развоју функције f у околини 0. Приметимо да је функција $Re(2A - f(z))$ хармонијска и за $|z| = R$ важи $Re(2A - f(z)) \geq A$, па је на основу принципа минимума за хармонијску функцију на ограниченој области испуњено

[21] Constantin Carathéodory (1873-1950)

$Re(2A - f(z)) \geq A$ на целом $\overline{D(0,R)}$. Ако би било $A = 0$ тада неједнакост која треба да се докаже тривијално важи, а ако је $A > 0$ добијамо да је $Re(2A - f(z)) > 0$, дакле и $2A - f(z) \neq 0$, па је функција g добро дефинисана и холоморфна на $D(0,R)$.

Проценимо сада $\|g\|_R$. Нека је f представљена у облику $f(z) = u(z) + iv(z)$, где су u и v реалне функције. Тада је

$$\begin{aligned}
|2A - f(z)|^2 &= (2A - u(z))^2 + v(z) \\
&= 4A^2 + u(z)^2 + v(z)^2 - 4Au(z) \\
&\geq u^2(z) + v^2(z) = |f(z)|^2,
\end{aligned}$$

јер је $A = \sup\{u(z) : |z| = R\} \geq u(z),\ |z| = R$. Дакле, добили смо да за $|z| = R$ важи

$$|2A - f(z)| \geq |f(z)|,$$

па је $\|g\|_R \leq \frac{1}{R}$. На основу принципа максимума модула важи

$$\|g\|_r \leq \|g\|_R,$$

за $r < R$, па за $|w| = r$ важи

$$\frac{|f(w)|}{r|2A - f(w)|} \leq \frac{1}{R}.$$

На основу тога, користећи неједнакост троугла и сређивањем добијамо

$$|f(w)| \leq \frac{r}{R}(2A + |f(w)|),$$

па и

$$\|f\|_r \leq \frac{2r}{R - r}A,$$

што је и требало доказати.

Докажимо сада општи случај. Да бисмо свели на претходни, посматрајмо функцију

$$h(z) = f(z) - f(0).$$

Тада је

$$\sup_R Reh \leq \sup_R Ref + |f(0)|,$$

и ако је $|w| = r$ имамо

$$|f(w) - f(0)| \leq \frac{2r}{R - r}(A + |f(0)|),$$

па је

$$|f(w)| \leq \frac{2r}{R-r}(A + |f(0)|) + |f(0)|,$$

тј.

$$\|f\|_r \leq \frac{2r}{R-r} \sup_R Ref + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|,$$

што је управо тражена неједнакост. □

Последица 15. *Нека је h цела функција и нека је $\rho > 0$. Претпоставимо да постоји број $C \geq 0$ тако да за довољно велико R важи*

$$\sup_R Reh \leq CR^{\rho}.$$

Тада је h полином степена $\leq \rho$.

Доказ. У Борел-Каратеодоријевој теореми ставимо $R = 2r$. Тада имамо

$$\|h\|_r \leq 2C(2r)^{\rho} + 3|f(0)|,$$

за довољно велико r. Функција h је цела па је

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

На основу Кошијеве формуле имамо да је

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{h(z)}{z^{n+1}} dz,$$

где је γ кружница полупречника R са центром у 0. Сада је

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|h(z)|}{|z|^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|h(z)|}{R^{n+1}} dz,$$

па је

$$|a_n| \leq \frac{\|h\|_R}{R^n} \leq \frac{2C2^{\rho}R^{\rho} + 3|f(0)|}{R^n}$$

за све R, па кад $R \to +\infty$ за $n > \rho$ је $a_n = 0$, што је и требало доказати. □

Дакле, видели смо да ако је реалан део целе функције на некој кружници ограничен степеном полупречника кружнице, онда је та цела функција полином.

Последица 16 (*Адамар*)**.** *Нека је f цела функција која нема нула. Претпоставимо да постоји константа $C \geq 1$ таква да је*

$$\|f\|_R \leq C^{R^\rho},$$

за све R довољно велике. Тада је

$$f(z) = e^{h(z)},$$

где је h полином степена $\leq \rho$.

Доказ. Пошто је f цела функција без нула, имамо да је $h(z) = \log f(z)$ цела и важи $f(z) = e^{h(z)}$. Познато је да је

$$|f(z)| = |e^{h(z)}| = e^{Reh(z)},$$

па на основу претпоставке $\|f\|_R \leq C^{R^\rho}$, важи

$$\sup_R Reh \leq R^\rho \ln C.$$

За $C \geq 1$ је $\ln C \geq 0$, па су испуњени услови последице 15. Применом те последице добијамо да је заиста h полином степена $\leq \rho$. Тиме је тврђење доказано. $\square$

Литература

[1] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.

[2] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1973.

[3] Serge Lang, *Complex Analysis*, Springer, 1999.

[4] Joseph Back, Donald J. Newman, *Complex Analysis*, Springer, New York, 1991.

[5] М.Матељевић, *Комплексна анализа 1*, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[6] М.Матељевић, *Комплексна анализа 2*, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[7] S.Axler, P.Bourdon, W.Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[8] C.A.Berenstein, R. Gay, *Complex Variables*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[9] М.Матељевић, *Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic Maps*, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[10] Википедија, слободна енциклопедија *https://en.wikipedia.org*