MATEMATIČKI FAKULTET UNIVERZITETA U BEOGRADU

MASTER STUDIJE

-Master rad-
Tema: Pitagorejska geometrija

Mentor:Dr. Zoran S. Luičić
Student: Jelena Novaković 1107/2015.

Beograd, 2016. godine

Predgovor

Ovaj master rad sastoji se iz četiri dela i to:
Prvi deo: u kom će biti reči o kratkoj istoriji Grčke i etape kroz koje je prolazila.
Drugi deo: obuhvata biografiju osnivača Pitagorejskog bratstva tj. Pitagore i osnovnu istoriju ove škole od njenog osnivanja do tragičnog kraja, obuhvatajui njihov način života i rada.
Treći deo: koji je i glavni deo ovog rada sadrži zapravo geometrijske rezultate do kojih su dolazili Pitagorejci. Zbir uglova trougla i proizvoljnog mnogougla, nezaobilazna Pitagorina teorema, zlatni presek, njegova konstrukcija, Platovova tela, pentagram, geometrizacija algebre, aplikacija površine i drevni problem duplikacija kocke su jedan deo Pitagorejskog dostignuća koji se nalaze u ovom radu. Geometrizacija algebre je veoma interesenatna tema koju su Pitagorejci obradili, te se u radu nalazi nekoliko osnovnih algebarskih zakona (distributivnost množenja prema sabiranju, kvadrat binoma i razlika kvadrata) obrađen na novi, nestandardni način.
Četvrti deo: u radu su ranije spomenuti neki Pitagorejci i njihovi doprinosi nauci, a u ovom, poslednjem, delu stoji biografija još tri značajna Pitagorejca Teano, Teatetus i Hipokrat zbog njohovog uticaja za matematiku.

Značaj Pitagorejskih dela iz oblasti geometrije ogleda se u tome što su je povezivali sa nekim drugim delovima matematike koje naizgled deluju toliko različito, ostvarujući posebne konekcije i sagradivši mostove između ovih oblasti. Veliki uticaj su ostvarili i u razvoju ostalih oblasti matematike i astronomije, no geometriji su se prilično posvetili jer je za razliku od drugih apstraktnih oblasti matematike bila opipljiva i mogli su lako da sagledaju njenu lepotu, razvijajući je i dajući joj čvrste temelje i podstrek za dalji razvitak.

Sadržaj

Uvod

Matematika kakvom je danas poznajemo rezultat je procesa i delatnosti stotina generacija ljudi, koji je započeo verovatno, pre oko dvadesetak hiljada godina kada je čovek počeo da koristi svoj razum. Pretpostavlja se da je matematika nastala kao praktična delatnost jer je bila potrebna u snalaženju sa većim količinama predmeta. Sasvim je jasno da su ljudi u prapočetcima imali potrebu za brojem i brojanjem, pa su prva matematička znanja morala su biti povezana sa brojevima. Veštinu brojanja imaju čak i neke razvijenije životinje, (posebno se po tome u životinjskom svetu ističu majmuni), pa zašto ne bi i ljudi? Merenje težine, dužine i površine, pa kasnije i zapremine, nastalo je, sasvim sigurno, posle brojanja, kada su se razvili trgovina i zanatstvo. U tom smislu je nastanak matematike više antropološka nego istorijsko matematička činjenica jer ljude koji čine bilo kakvu, makar i najprimitivniju plemensku zajednicu, danas ne možemo ni zamisliti bez nekih osnovnih matematičkih znanja i ideja. Naravno, malo kasnije nastala je i geometrija. U početku ona je bila samo primena nekih svakodnevnih aktivnosti, a kasnije se razvila u posebnu nauku. Reč geometrija potiče od staro grčkog geo metros, što znači merenje zemlje. Kao što i sama etimologija ove reči kazuje, geometrija imala veoma veliki udeo u svakodnevnom životu starih naroda. (Predviđanja izlivanja reka, utvrđivanja međa i sl.). Ali geometrija nije samo puko merenje zemlje već jedna od najlepših oblasti matematike koja nas uči da gledamo probleme na drugi način, izlazimo iz okvira klasičnog razmišljanja, daje nove ideje, razvija preciznost, kreativnost i pomera granice našeg viđenja sveta. Kroz ovaj Master rad želim da ukažem na značaj geometrije u svetu matematike ali i da pritom obuhvatim istoriju Pitagorejaca, grčkih matematičara koji su najzaslužniji za postavljanje temelja različitih oblasti matematike, pa tako su zaslužni u velikoj meri i za razvoj geometrije. Naravno uključujući i čoveka bez koga bez koga ovo se ne bi bilo moguće - osnivača i prvog profesora ove škole tj. Pitagore. Značaj i cilj ovog rada jeste upoznavanje sa istorijom razvoja Pitagorejske škole, preciznije njihovog rada u polju geometrije i njenog kasnijeg uticaja na buduće generacije matematičara u ovoj oblasti, uključujući i kratku biografiju osnvača ove škole jednog od najpoznatijih Grčkih ali i svetskih matematičara - Pitagore. Naravno, njihov uticaj u ovoj oblasti seže veoma duboko jer su oni postavili čvrste temelje za geometriju i samim tim dali joj veliki podstrek za dalji razvoj.

1 Kratka istorija Grčke

Civilizacija starih Grka se razvila širom područja istočnog Mediterana i danas se smatra uglavnom kao najvažnija civilizacija staroga veka. Istorija antičke Grčke, hronološki može se podelili u nekoliko istorijskih etapa: [1]

- **Prelazno doba** (oko 1000 800. godine pre nove ere) u kome se oblikuju tri vea plemena Dorani, Jonjani i Eoljani oni u svojim kolonijama osnivaju gradove tvrđave, koji prerastaju u gradove države, tako zvane *polise* , od kojih je najpoznatiji Milet u Joniji.
- **Ahajsko doba** (oko 800 480. godine pre nove ere) u kome se nastavlja kolonizacija (Sicilija, južna Italija, deo južne Francuske, Mramorno more, Crno more) i naglašenije se uspostavlja veza sa narodima Srednjeg Istoka. Nastaju gradovi države: Sparta, Argos (na Peloponezu) i Atina, ukidaju se kraljevstva, raste vladavina Arhonta (vladara), demokratije, aristokratije ali i tirana.
- **Klasično doba** (oko 480 336. godine pre nove ere) svi Grci se okupljaju oko Atine u interesu uspešne odbrane od Persije za vreme Grčko-Persijskih ratova. Peloponeski rat, slabi moć Grka na Siciliji, Makedonija na čelu sa Filipom II jača.
- **Helensko doba ili helenistiko doba**(oko 336 146. godine pre nove ere) samo ime helinizam potiče od grčkog praoca Helena (gr. Hellen).
- **Rimsko doba**(oko 146. godine pre nove ere 529. godine nove ere) Rimljani su fizički osvojili Grčku ali je Grčka duhovno osvojila Rim i Evropu.
- Grčka postaje deo Vizantije, sve do upada Turaka 1460. godine na ove prostore. Poslednji period grčkog podaništva je vreme Osmanlija (1460 1821. godine).

Nakon propasti Mikenske civilizacije u 12. i 11. veku pre nove ere u Grčkoj je usledio period poznat kao Mračni vek. Taj naziv je korišćen iz razloga zato što su istorijski i arheološki podaci o tom periodu veoma oskudni. Tokom početka Mračnog veka na prostoru kontinentalne Grčke usledila je velika migracija helenskih plemena. Glavna helenska plemena iz tog doba su bila Dorci, Eolci, Jonci i Ahajci. Posle propasti mikenskih centara usledila je velika seoba grčkog plemena Doraca na jugu Grčke što je izazvalo velike pometnje u stanovništvu Grčke. Tokom 10. i 9. veka pre nove ere. usledila je prva velika kolonizacija Helena. Tada su helenska plemena Eolaca, Jonjana i Doraca naselila zapadne obale Male Azije. Krajem Mračnog veka, tačnije tokom 8. veka pre nove ere. usledilo je formiranje institucije grada drčzave, na helenskim prostorima što će obeležiti potonji tok helenske istorije. Krajem 8. i tokom 7. veka pre nove ere usledila

[1] Slavko V. Nedović,*Matematičko-istorijski mozaik* , Arhimedes Beograd 2004. str. 8-11.

je druga helenska kolonizacija. U to doba Heleni su kolonizovali područja širom Mediterana, uključujući južnu Italiju i Siciliju, koja će ostati poznata kao Velika Grčka . [2] Nakon neuspešnog pokušaja Persije da pokori Grčku, početkom 5. veka pre nove ere Helenska civilizacija e doživeti svoj vrhunac sredinom 5. veka pre nove ere. To će se naročito izjasniti u Atini, koja će postati kulturni centar helenskog sveta. Narastajuće suparništvo između Atine i Sparte doveśće do Peloponeskog rata koji će podeliti i oslabiti helenski svet. Tokom 4. veka pre nove ere grčki gradovi države pašće pod uticaj Makedonije, koja e nešto kasnije pokoriti veliko Persijsko carstvo. Osvajanje Persijkog carstva omogućiće irenje helenske kulture čak do Indije. Nakon makedonskog osvajanja Persije, na prostoru Bliskog istoka i severne Afrike procvetaće helenistika kultura koja će biti dominantna sledećih vekova. Nakon rimskog osvajanja grčke doći će do uskog povezivanja grčke i rimske kulture koja će ostati poznata kao grčko rimska.[3]
Danas Antička Grčka se smatra kolevkom Zapadne civilizacije i civilizacijom sa prema večini procena najznačanijim doprinosom u istoriji čovečanstva. Grčka civilizacija je dala odsudan doprinos modernom svetu u gotovo svim aspektima života. Stari Grci se smatraju zaslužnim za otkrića u poljima filozofije, literature, matematike, fizike, biologije, astronomije, arhitekture, istorije kao i za ispostavljanje osnovnih normi modernog društva. Dodatno Stari Grci su bili zaslužni i za uspostavljanje demokratije i slobode govora. Uticaj helenske civilizacije je imao naročit uticaj u doba Renesanse i Prosvetiteljstva. U moderno doba uticaj helenske civilizacije se izračava naročito kroz kulturnu struju Neoklasicizma tokom 18. i 19. veka, a nauke koje se bave izuavanjem Antičke Grčke se zovu Klasične nauke.

[2] Na staro-črčkom *Magna Graecia* , bio je naziv za grčke kolonije na jugu Italije i ostrvu Sicilija.
[3] Izvor: www.arheo-amateri.rs/2012/03/anticka-grcka.

2 Pitagora

Ponekad se može čuti, da najveće zasluge za razvoj matematike kakvu danas poznajemo dugujemo staro-Grčkom misliocu Pitagori, za koga se takođe može čuti da je pravi matematičar. Međutim, ne može se nikako zanemariti činjenica da je njegov doprinos za razvoj matematike itekako velik, sam on ipak ostaje i dan danas kontraverzna ličnost. Sa sobom nije ostavio nikakave pisane dokumente i ono što danas znamo o njemu, znamo zahvaljujući Filolaju i njegovim delima kao i radovima Plutarha, ali i kasnijim pitagorejskim učenjacima. Zaista, danas nije jasno da li su teoreme koje se njemu pripisuju uopšte i njegove ili su delo nekog od njegovih učenika tj. Pitagorejaca. Ono što je izvesno je da je Pitagora razvio ideju numeričke logike i da mu pripadaju zasluge za prvo zlatno doba matematike. Proučavao je osobine pojedinih brojeva, odnose među njima, kao i pravila koja oni formiraju. Shvatio je da brojevi postoje nezavisno od opipljivog sveta, te da zbog toga njihovo proučavanje ostaje nezaprljano greškama percepcije. Ovo je značilo da je bio u stanju da otkrije istine koje su bile nezavisne od mišljenja ili predubeđenja i koje su bile apsolutnije od bilo kakvog predhodnog znanja i nezavisne od ubeđenja. [4]

Pitagora (571 496. godine pre nove ere) je rođen na ostrvu Samos, nedaleko od Mileta na Egejskom moru a umro u Krotonu na jugu Italije. Imao osamnaest godina kada je učestvovao na Olimpisjkim igrama i pri tom uspeo da odnese sve nagrade u pesničanju, sport koji je preteča boksa. U obližnjoj Joniji, proveo je nekoliko godina kod Talesa i Anaksimandera, njegovog učenika. Zatim je neko vreme boravio i u Siriji kod Feničanskih mudraca. Odatle je zaplovio za Egipat i tamo ostao oko dvadeset godina. U hramovima na obalama Nila bilo mu je dato vreme da stekne znanje egipatskih sveštenika. Međutim, kada su Persijanci osvojili Egipat biva zatočen i odveden u Vavilon. Tokom ovih dugih godina putovanja, koje je zapravo predstavljalo učenje, Pitagora je asimilovao sva matematička pravila i znanja koja su postojala u poznatom svetu antike. Pa se sa novim iskustvima i znanjem, vraća na Samos koje je napustio četrdeset godina ranije.[5]

Oko 520. godine pre nove ere u Samosu na Egejskom moru, otvara ali na kratko, svoju prvu školu posvećenu studiranju filozofije sa posebnim interesom za istraživanje upravo prikupljenim matematičkih znanja, koja se zvala Polukrug. Na Samosu u to vreme je vladao tiranin, Polikrat koji je pretvorio nekada liberalni Samos u netolerantno i konzervativno društvo. Pitagora koji je mrzeo tiranine ponovo odlazi. Ovog puta prema zapadu na obale Velike Grčke. Iskrcava se na Sibarisu na jugu Italije,jednom od najpoznatijih gradova antičkog sveta. Međutim, Pitagora odlazi i konano se skrasi u susednom mestu Krotonu. Svoju školu osnovao u Krotonu 518. godine pre nove ere, u mestu gde su mnogi Grci izbegli pred naletima Persijanaca. [6]

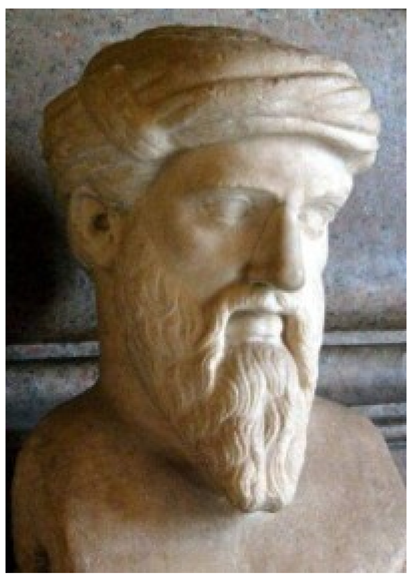
Tu radi sve do svoje nasilne smrti, kada su posle većih političkih prepiranja i ratova sa susednim gradovima, narodne mase pod vostvom izvesnog Silona

[4] Izvor: www.storyofmathematics.com/greek pythagoras.html

[5] Deni Geđ, *Papagajeva teorema* , Geopoetika, Beograd 2008. str. 102.

[6] Franka M. Bruckler, *Matematički dvoboj* , Školska knjiga Zagreb, 2011. str.12.

zapalile ovu školu, pri čemu je Pitagora nastradao sa mnogim njegovim sledbenicima.
Matematika je izgubila svog prvog velikog heroja, ali pitagorejski duh je nastavio da živi i da se razvija. Pitagora je pokazao da je matematika, više nego bilo koja disciplina, tema koja nije subjektivna i ne zavisi ni od čijih ubeđenja. Njegovim sledbenicima nije bio potreban njihov učitelj da bi odlučili o ispravnosti neke određene teoreme. Istinitost teoreme je bila nezavisna od bilo čijeg mišljenja i predstavlja apsolutnu istinu. Ovo je bio Pitagorin najveći doprinos civilizaciji način dostizanja istine koji je izvan nepouzdanosti ljudkse procene. Posle smrti svog osnivača i Silonovog napada, bratsvto je napustilo Kroton i pošlo u druge gradove Velike Grčke, ali proganjanje je nastavljeno, pa su na kraju veći deo njih morali da se nastane u stranim zemljama. Međutim, ova nasila migracija je ohrabrila pitagorejce da šire svoje matematičko učenje kroz ceo antički svet. Pitagorini sledbenici su osnovali škole i učili svoje učenike metodi logičkog dokaza. [7]



Slika 1: Pitagora

[7]Sajmon Sing,*Fermaova poslednja teorema* , DN Centar, beograd 2004. str. 26.

2.1 Pitagorejska škola

Pitagorejska škola nije predstavljala samo mesto izučavanja filozofije i matematike, nego i zajednicu koja je posebnim pravilima uređivala čitav ž[vot njenih članova. Pitagorejska škola trajala je oko 150 godina i brojala je ukupno 218 sledbenika pitagorejaca. U početku je to bila grupa filozofa, koji su postepeno sticali matematička znanja ali su vremenom poeli ličili i na religioznu sektu. Poštovali su stroga pravila o načinu života, ishrani i odevanju, govorili su u stihovima, nisu jeli meso, grašak i pasulj, nosili su samo bele haljine, a svoja znanja su sebično čuvali. U školi su imali obavezu da proučavaju geometriju, aritmetiku, muziku i astronomiju (kvadrivijum). Čtavih pet godina trajala je proba. Pitagora je stajao iza zavese, usmeno izlažući svoja učenja, dok su članovi učili isključivo slušajući. Ti članovi koji su prolazeći testiranje stajali iza zavese zvali su se egzoterici (van zavese). Smatra se da se zabranom zapisivanja postizala maksimalna pažnja slušanja i sprečavala zloupotreba naučenog. Oni koji su bili uspešni posle probe mogli su da pređu u višu kategoriju tj. da budu u Pitagorinom delu prostora, ispred zavese (ezoterici primljeni).[8]
Pitagorejci su bili politička, religijska i intelektualna zajednica. Sam Pitagora bio je neprikosnoven autoritet među svojim učenicima, tiliki da su se čak prenosile legende o njegovoj polubožanskoj prirodi. Religiju pitagorejaca karakterisalo je verovanje u reinkarnaciju. Pitagorejci su impresionirali ljude svog vremena svojom uverenošću u vlastite principe, sprovodeći svoja pravila, međusobnim prijateljstvom i sposobnošću da deluju kao zajednica, kao i znanjem koje su ljubomorno krili, o čemu govori i činjenica da Pitagora nije ništa napisao.[9]
Pitagorejcima dugujemo i prvo izvođenje pravog matematičkog dokaza u istoriji. Oni su prvi u istoriji matematike (koliko je poznato) postavili pravilo da se matematičke tvrdnje moraju biti dokazane logičkim postupkom. Služeći se ovim pravilom oni su dokazali, da je broj koren iz dva iracionalan (ne moče se prikazati u obliku razlomka),zatim da je zbir uglova u bilo kom trouglu 180 stepeni. Pitagorejci su takođe i postavili osnove za teorije brojeva (bavili su se parnim i neparnim brojevima, savršenim brojevima, figurativnim brojevima...), uključujući i detaljan opis svih pet pravilnih poliedara. Dali su takođe velike doprinose i u astronomiji (utvrdili su da Zemlja ima sferni oblik). Poznati su i po raznim mističnim učenjima; danas prilično popularna numerologija ima (ne samo) pitagorejske korene. Kako su pripadnici ove škole Pitagori pridavali božanska obeležja, sva nova otkrića bila su pripisivanja njemu, tako da danas zapravo i nije poznato koja su tačno pitagorejska otkrića, naravno ako ih je i bilo,a koja su zapravo bila Pitagorina.[10]
Pitagorina filozofija je posebna po tome što ulogu počela dodeljuje brojevima, a ne nekoj materiji. Po njihovom shvatanju poznavanje matematike i brojeva je ključ za saznanje sveta. Brojeve treba shvatiti i kao materiju sveta i kao način da se on opiše. Materija se u osnovi sastoji od tačaka, pravih, ravni i

[8] Izvor: www.planeta.rs/53/16matematika.htm
[9] Kit Devlin,*Matematički gen,* Plato, Beograd 2001.
[10] Franka Miriam Bruckler,*Matematički dvoboj* , Školska knjiga. Zagreb 2011. godine. Str. 12-13.

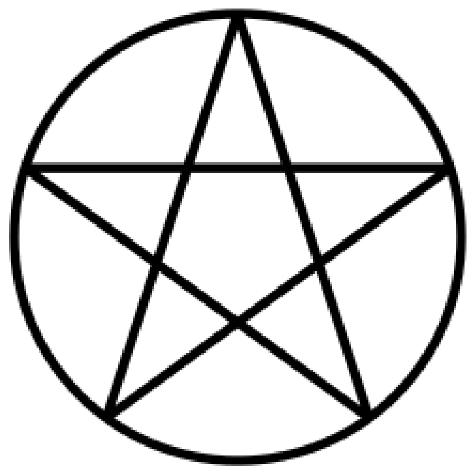
geometrijskih tela, koji simbolično odgovaraju brojevima 1, 2, 3, i 4. Zbir tih brojeva 10 (dekada), po pitagorejcima je savršen broj (prikazuje se figurom tetraktis), u kome se krije tajna kosmosa i kome se teži da bi se dosegao vrhunac fantastičnost. Ovaj odnos brojeva i omogućuje nam da stvarima dajemo drugu dimenziju. Pitagora je shvatao da su brojevi skriveni u svemu, od harmonija u muzici do orbita planeta i ovo ga je navelo da objavi svoji čuvenu rečenicu: Sve je broj. Istražujući smisao matematike, Pitagora je razvijao jezik koji bi omoguio njemu samom, a i drugim Pitagorejcima da opišu prirodu univerzuma.[11] Muzika se npr. može razumeti ako se otkriju odnosi brojeva koji objašnjavaju njene harmonije, a pravilno poređani brojevi će otkriti tajnu harmonije sfera koja čini strukturu kosmosa.

Brojevi su, kod pitagorejaca, osim egzaktne, imali i simboličku stranu. Tako je broj jedan (monada) mogao da simbolizuje jedinstvo sveta, a broj dva (dijada) njegove suprotnosti. Od ovih veza nastala je logika, pomoću koje je trebalo uskladiti ove simboličke veze brojeva i sveta. Pitagora je prvi shvatio da brojevi i geometrijska tela postoje na drugačiji način od materijalnih objekata i usmerio pažnju na taj poseban oblik postojanja. Naime, pitagorejci su uvideli da se u matematici izvedeni stavovi ili teoreme dokazuju na osnovu očiglednijih stavova ili aksioma, što je otvorilo mogunost da po ugledu na aksiome matematike postoje i aksiome prirode. Potraga za tim aksiomama nastavila se kroz kasniju antičku matematiku. [12]

Mistični simbol pitagorejskog kulta, je bio oblik-broj: pentagram, petokraka zvezda. Koji su takođe koristili i kao znak prepoznavanja između članova ove škole. Koliko je ovo bio značajno obeležje govori legenda da je jedan Pitagorejac, koji je u stranoj zemlji bio na samrtnoj postelji i bez novca rekao stanodavcu da stavi znak pentegram na vrata, pa kad neki Pitagorejac bude prolazio tuda platiće njegove račune, a to se zaista i desilo,jer su oni cenili svoje bratstvo.

Ma koliko interesantno bilo, za Pitagorejce najvažnija osobina pentragrama nije bilo njegovo samoponavljanje, već je bila skrivena u linijama zvezde. Sadržala je broj-oblik koji je bio konačni simbol savršenosti pitagorejskog viđenja vasione: Zlatni presek. Važnost zlatnog preseka potiče od pitagorejskog otkrića koji danas jedva ko pamti. U savremenim školama deca uče Pitagoru zahvaljujui njegovoj čuvenoj teoremi: Kvadrat nad hipotenuzeom jednak je zbiru kvadrata nad obe katete. Međutim, ovo ni tada nije bila nikakva novost, već je bila poznata bar hiljadu godina pre Pitragorinog vremena. U doba Antičke Grčke, Pitagoru su pamtili po jednom sasvim drugačijem otkriću: muzičkoj lestvici. Pitagora se prema legendi jednog dana igrao sa monokordom, kutija na kojoj je zategnuta jedna žica. Pomeranjem mosta koji je klizio po monokordu, Pitagora je menjao zvuke koje je proizvodio. Brzo je ustanovio da se žice čudno, ali predvidljivo, ponašaju. Kada trzne žicu bez mosta, dobija čist zvuk, takozvani osnovni ton. Pošto je stavio most na monokord tako da dodiruje žicu, trzanjem žice proizvodio je drugačiji zvuk. Ali kada je stavio most tačno na polovinu monokorda, da dodiruje centar žice, svaka polovina je proizvodila identičan zvuk

[11] Sajmon Sing, *Fermaova poslednja teorema* , DN Centar, beograd 2004. str. 16.
[12] Izvor: http://kif.filozofijainfo.com/pitagora/



Slika 2: Pentagram

koji je bio za oktavu viši od osnovnog. Laganim pomeranjem je mogao podeliti žicu tako da sa jedne strane budu tri petine a sa druge strane dve petine. Na ovaj način, primetio je da trzanjem žice oba dela stvaraju dva različita zvuka, koja zajedno čine čistu kvintu, za koju kažu da čini najmoćniju i najuzbudljiviju muzičku vezu. Razllličita razmera proizvodio je različite zvukove koji su umirivali ili uzbuivali. Ali kada bi Pitagora postavio most na mesto koje ne deli žicu u jednostavnoj razmeri, trzanjem se ne bi dobijali tonovi koji se lepo slažu. Zvuk je uglavnom bio disonantan, a neki put i gori. Za Pitagoru je sviranje bilo matematički čin. Poput kvadrata i trouglova, linije su bile broj oblik, tako da je deljenje žice na dva dela bilo isto što i posmatranje odnosa dva broja. Harmonija monokorda bila je harmonija brojeva i matematike i čitavog univerzuma. Pitagora je zaključio da razmere vladaju ne samo muzikom, već i svim drugim tipovima lepote. Prema pitagorejskom učenju, razmere i proporcije kontrolisale su lepotu muzike, fizičku lepotu i lepotu u arhitekturi i drugim oblicima svakodnevnog života. Razumeti prirodu je bilo jednako lako kao razumevanje matematičkih proporcija.[13]

[13]Čarls Sife,*Nula − Istorija opasnih ideja* , STYLOS Beograd 2007. str. 31-33.

3 Pitagorejska geometrija

živeći u šestom veku pre nove ere Pitagora je stekao svoje matematičko umeće na putovanjima kroz antički svet, jer je tada putovanje bilo izjednačeno sa sticanjem znanja. Pojedine priče govore da je putovao čak do Indije i Britanije, ali ono što je više verovatno je da je sakupio puno matematičkih tehnika i ideja od drevnih Egipćana i Vavilonaca. Oba ova matematička naroda su otišla preko granica prostog brojanja i bili su sposobni da izvode složenije račune, koji su im omogućavali da kreiraju sofisticirani sistem knjigovodstva i da grade moćne građevine. U stvari oni su videli matematiku samo kao alat za rešavanje praktičnih problema, na primer motiv za otkriće nekih od bazičnih pravila geometrije je bio da se omogući rekonstrukcija međa između njiva koje su gubile svake godine zbog poplava usled izlivanja Nila, kako bi mogli da određuju granice svog zemljištva, podižu građevine i opisuju zvezde, za potrebe plovidbe.[14]
I sama reč geometrija potiče od grčkog geo zemlja i metros merenje, što bi smo mogli prevesti kao meriti zemlju.[15]
Pitagora je primetio da Egipćani Vavilonci obavljaju račun u obliku recepta koji se mogao slepo slediti. Ove thnike rešavanja praktičnih problema, koji su se prenosili sa koleno na koleno, uvek su davali tačan rezultat tako da se niko nije zamarao razmišljanjem o njima ili istraživanje logike koja stoji iza toga. Ono što je bilo važno za ove civilizacije je to da je račun funkcionisao, a kako, bilo je nevažno. Egipćani koji su geometriju prvi počeli koristiti, znali su veoma malo o njoj. Za njih je ona bila tek sredstvo da se izmere parcele i izbroje dani u godini. Grci su imali daleko drugačiji stav i pogled na geometriju, pa i na celu matematiku. Za njih su brojevi i filozofija bili neodvoljivi i oba su veoma ozbiljno shvatali.[16]
U suštini, geometrija proučava zakonitosti koji se odnose na oblike. Ne baš bilo kakve oblike, već na pravilne oblike, kao što su trouglovi, kvadrati, pravougaonici, paralelogrami, petouglovi, krugovi, kocke, sfere, elipsoidi i slično. Primere ovih oblika vidimo svuda u svetu koji nas okružuje kružna pojava Sunca i Meseca, okrugli satovi i točkovi, trouglaste, kvadratne i šestougaone podne pločice, kockaste i kvadarne kutije, sferne loptice itd. Geometrija proučava ove oblike apstraktno, ne vezujui ih za odgovarajuće primere u stvarnom svetu. Kada odluče koju će vrstu oblika da proučavati, matematičari otkrivaju opšte činjenice koje važe za sve primere tog oblika. Jedna od najpoznatijih pitagorejskih dokaza je svakako dokaz Pitagorine teoreme kaže: da je kod svakog pravouglog trougla kvadrat nad hipotenuzom jednak zbiru kvadrata nad katetama.[17] Naravno, pored ovog rezultata, koji je verovatno i najčuveniji, postoji još veliki broj njihovih geometrijskih otkrića. Možda, ne toliko otkrića koliko strogih matematičkih dokaza, kao što su dokaz za zbir uglova trougla, Pitagorine teoreme, dokazi vezani za aplikaciju površine kao i konstrukcije kojesu veoma cenili. Smatrali su ih

[14] Sajmon Sing, *Fermaova poslednja teorema*, DN Centar, Beograd 2004. str. 7

[15] Mr Mirko Dejić, Branka Dejić, *Zanimljivi svet matematike* , NIRO Tehniička knjiga Beograd. 1987. str. 14.

[16] Čarls Sife, *Nula Istorija opasnih ideja* , STYLOS Beograd 2007. str. 30.

[17] Kit Devlin, *Matematički gen* , Plato, Beograd 2001. str. 94-95.

veoma moćnim oružijem. Veliki broj kostrukcija i dokaza za koje se smatra da su Pitagorejski nalaze se u Euklidovim Elementima, poput nekih koje su bile osnova za dalje napredovanje geometrije. Neke od konstrukcija su: konstrukcija pravilnih mnogouglova i poliedara, konstruktivna podela duži u nekoj razmeri, naročito u njihovoj omiljenoj zlatnom preseku, konstrukcija pentagrama, kao i konstrukcije duži dužine nekog iracionalnog broja.

3.1 Zbir uglova trougla

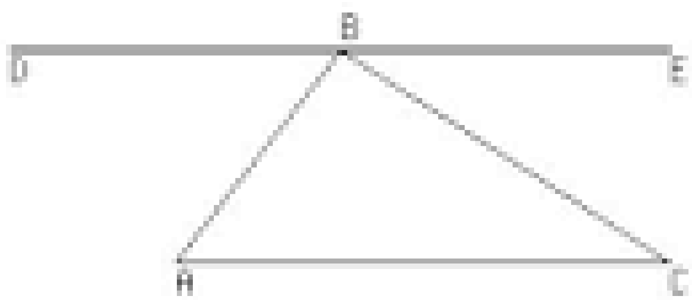
Činjenica da je zbir uglova u trouglu jednak 180 stepeni ili kako bi to stari Grci iskazali kao dva prava ugla, poznata je od davnina. U spisima grčkog istoričara Eudeliusa može se pronađi podatak da su ovu teoremu Pitagorejci otkrili i on daje opis kako su je oni dokazali. Neka je dat proizvoljan trougao ABC i kroz tačku B kao što je prikazano na slici (Slika: 3) povučena je paralelna prava p stranici AC. Obeležimo tačke D i E na pravoj p tako da se nalaze na različitim stranama tačke B. Posmatrajmo uglove DBA i BAC. Oni su jednaki jer su suprotni. Takođe uglovi EBC i BCA su suprotni i jednaki su. Sabirajući uglove dobijamo jednakost:[18]

$$DBA + EBC = BAC + BCA$$

Dodajući ugao ABC i jednoj i drugoj strani dobijamo:

$$DBA + EBC + ABC = BAC + BCA + ABC$$

Što nam sa leve strane daje veličinu ugla od 180 stepeni, a sa desne strane zbir uglova trougla ABC. Na ovaj način su Pitagorejci dokazali ovu čuvenu teoremu za koju danas zna svaki đak osnovne škole. Ovaj dokaz se prezentuje u ovoj formi i dan danas u ovoj formi u šestom razredu.



Slika 3: Zbir unutrašnjih uglova trougla

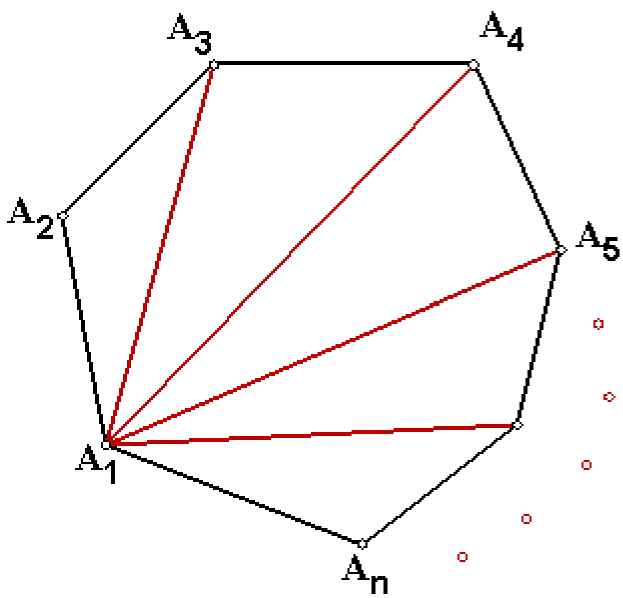
[18]Thomas Heath, *A history of Greek Mathematics* , Oxford at the Clarendon Press 1921. str. 143.

3.2 Zbir uglova mnogougla

Posledica prethodne teoreme je sledeća: Proizvoljan mnogougao sa brojem stranica n ima zbir uglova 2n - 4 prava ugla. Ovaj stav se takođe prepisuje Pitagorejcima. Oni su je dokazali na sledeći način:[19]
Neka je dat proizvoljan n-tougao, podelimo ga na n - 2 trougla, kao na slici (Slika: 4) povlačeći n - 3 dijagonala iz jednog proizvoljnog temena (kako se to proizvoljno izabrano teme ne moe spojiti samo sa sobom ni sa dva susedna temena, to za drugu tačku postoji n - 3 mogućnosti). Kako su Pitagorejci dokazali zbir unutrašnjih uglova bilo kog trougla je dva prava ugla (180 stepeni) i počto smo taj n-tougao podelimo na n - 2 trougla, dobijamo da je zbir svih uglova n-tougla jednak:

$$2(n - 2) \text{ prava ugla tj. } 2n - 4 \text{ prava ugla}$$

Pitagorejskoj školi pripisujemo da su dokazali da je zbir spoljašnjih uglova mnogougla četiri prava ugla (360 stepeni).

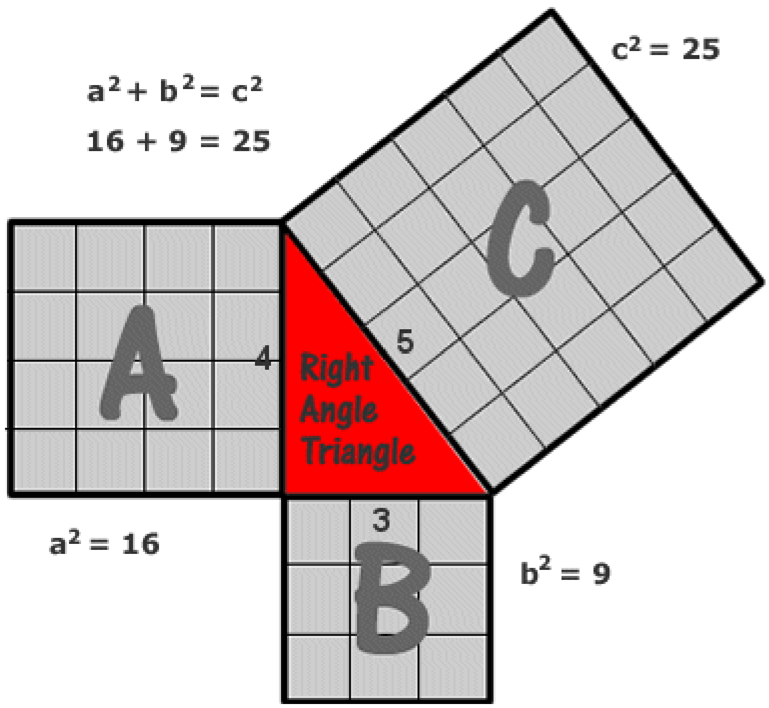


Slika 4: Triangulacija proizvoljnog n-tougla

[19]Sir Thomas Heath, *A history of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press 1921. str. 144.

3.3 Pitagorina teorema

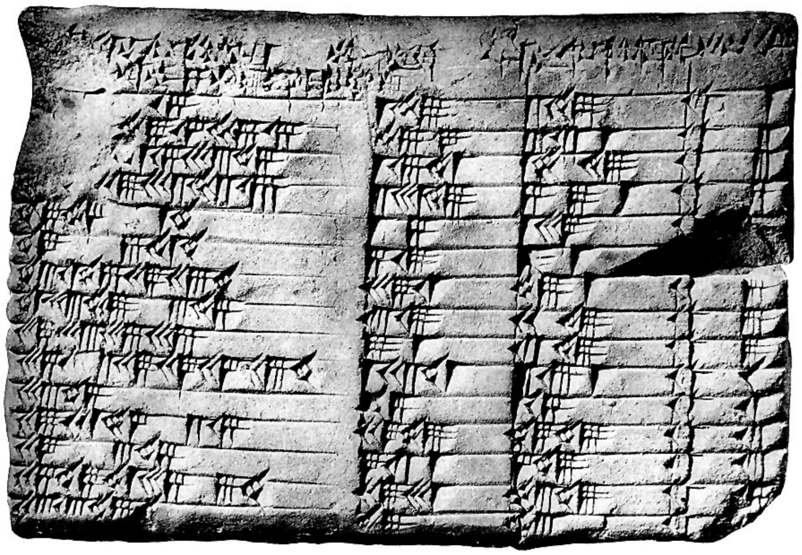
Pitagora je ostao upamćen najviše po teoremi koja nosi ime po njemu tj. teoremi, koja glasi kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata na katetama, a kad bi se zapisala dobija svoj poznati oblik, kao $a^2 + b^2 = c^2$ Najjednostavniji i najčešće korišćen primer Pitagorine trojke je 3, 4 i 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$, kao na slici 5), ali takođe postoji beskonačan broj Pitagorinih trojki, počevši od (5, 12, 13), (6, 8, 10), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41) itd. Međutim potrebno je naglasiti da u slučaju ove Pitagorine trojke (6, 8, 10) govorimo o primeru koji nije primitivan, jer je on zapravo umnožak primitivne Pitagorine trojke (3, 4, 5).



Slika 5: Pitagorina Teorema

Pitagorina teorema i svojstva pravouglih trouglova prestavljaju najstariji i najrasprostranjeniji matematički razvoj posle osnovne aritmetike i geometrije. Naime, ideja Pitagorine teoreme je bila poznata još kod strarih Vavilonaca u Egipćana, skoro hiljadu godina ranije.
Najpoznatiji preživeli tekstovi sa matematičkim sadržajem poznat je kao Plimpton tabla 322. Ova tabla sadrži listu Pitagorina trojki, otkrivajući pri tom neka znanja o Pitagorinoj teoremi. Ova tabla procenjuje se da datira negde izmeu

1900. i 1600. godine pre nove ere.[20]



Slika 6: Tabla Plimpton 322

Ve u 8. veku pre nove ere, mnogo pre Pitagore, tekst poznat kao Sulba Sutra (ili Sulva Sutras) navodi nekoliko prostih Pitagorinih trojki, kao i pojednostavljenu verziju Pitagorine teoreme primenjene na kvadrat i pravougaonik (postoji velika verovatnoča, da je Pitagora stekao svoja osnovna znanja iz geometrije, upravo koristeči bas ove tekstove). Ovi radovi sadrže geometrijska rešenja linearnih i kvadratnih jednačina sa jednom nepoznatom i daju izuzetno preciznu aproksimaciju za kvadratni koren iz 2, dobijen dodavanjem $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{(3x4)} - \frac{1}{(3x4x34)}$, kojom se dobija vrednost 1.4142156 ispravan do 5 decimala.[21]
Jedan od najprostijih dokaza za ovu teoremu dolazi iz Stare Kine i verovatno datira od pre rođenja Pitagore. Međutim Pitagori se prepisuje ova teorema zato što je on dao definitivan oblik ovoj čuvenojtvrdnji, odnosno prvi koji je dao matematički dokaz za istinitost ove teoreme. Međutim, ne može se sa sigurnošću tvrditi da je Pitagora sam dokazao ili je samo opisao ili je to uradio neko od njegovih učenika a razlog zašto se u tom slučaju prepisuje njemu, možemo uvideti u činjenici da su ga oni obožavali kao božanstvo i sva njihova otkrića su automatski pripisivali njemu. Bilo kako bilo, ovo je postala jedna od najpoznatijih matematičkih tvrđenja u svetu, pritom danas postoji preko 400 različitih dokaza za istinitost ove teoreme, neke od kojih su geometrijske, neke su algebarske a neke ipak podrazumevaju uključivanje naprednih diferencijalnih jednačina itd.

[20]Izvor: faculty.etsu.edu/gardnerr/Geometry-History/before-euclid.htm
[21]Izvor: www.storyofmathematics.com/indian.html

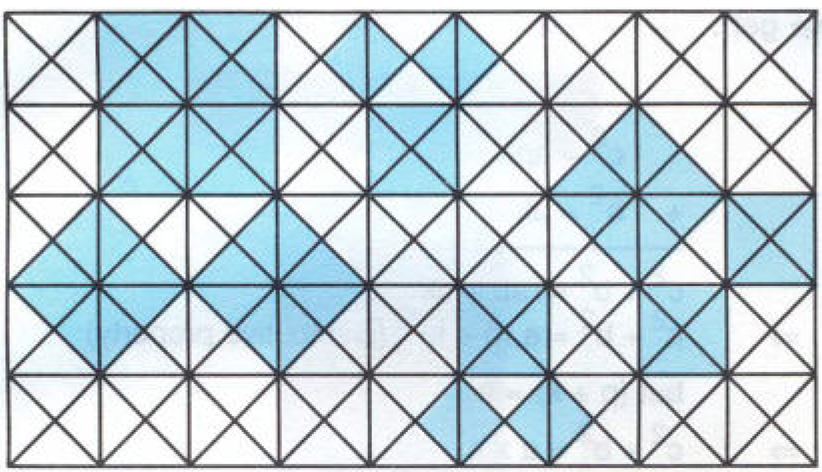
[22]

Pitagorina teorema daje jednakost koja se odnosi na sve pravougle trouglove bez izuzetaka. Stari Vavilonci i Egipćani su primetili da za pojedine pravougle trouglove važi navedena relacija, međutim nisu znali razlog zašto to važi niti su znali da li to pravilo važi za sve pravougle trouglove, već su samo otkrili nekoliko primera na kojima je ovaj recept mogao da se primeni. Oni nisu imali sredstva da dokažu da je ova tvrdnja istinita za sve pravougle trouglove koje nisu testirali, mada ih nije to ni preterano interesovalo. Bilo je bitno jedino to da u situacijama koje su ispitali ovaj rezultat daje ono što im je potrebno.
Pitagoru (ili nekog drugog njegovog učenika, pošto nema konkretnih pisanih dokaza da je on lično dokazao) intrigirala je ova tvrdnja. Želeo je da pokaže da se ova teorema odnosi na proizvoljan pravougli trougao bez obzira na dužine njegovih stranica. Naravno nije mogao da testira beskonačno mnogo vrsta (u zavisnosti od dužina stranica) pravouglih trouglova, a još uvek nije bio ni siguran da je ta teorema apsolutno istinita. Oružije koje je on koristio je matematički dokaz. Ovo je veoma moćno sretstvo da se dostigne apsolutna istina i to je ono što je pokretalo i pokreće velike matematičke umove poslednjih dve i po hiljade godina.
Matematički dokaz je sredstvo kojim se dolazi do apsolutnih istina koje ne poznaju vremensku, prostornu, kulturnu ili bilo koju distancu. Naravno, Pitagorina teorema, u istom svom obliku i veličini kako je važila u njegovo doba važi i danas.

[22]Izvor: http://www.storyofmathematics.com/greek-pythagoras.html

3.4 Dokaz Pitagorine teoreme

Danas ceo svet je uglavnom zna za Pitagoru, po navodno njegovoj, teoremi o odnosu kvadrata stranica kod pravouglog trougla, iako postoje jake indikacije i dokazi koji pokazu da se za nju znalo puno ranije. Međutim, smatra se da je Pitagora (ili neko od njegovih učenika) ovu teoremu dokazao, što je poseban naučni rezultat i značaj. Postoji legenda, (po Plutarhu), koja kaže da kada je Pitagora doazao ovu teoremu žrtvovao sto volova (mada tačan broj varira od izvora koji se koristi).[23] No, postoje i tvrdnje koje govore o tome da je malo verovatno da je bilo koja životinja nastradala jer je vera Pitagorecima zabranjivala prolivanje krvi radi žrtvovanja. Bilo kako bilo, Plutarh je dodao jednu šaljivu rečenicu da od tog momenta, volovi ne vole geometriju.
Pre Pitagore, teorema se uglavnom posmatrala geometrijski preko površina kvadrata i praktično u primeni. Njena šira artimetizacija i algebrizacija, nastupiće nešto kasnije. Inače, predanje se uplelo i u dokaz teoreme, koji je navodno izvršio Pitagora, gde je primarna površina kvadrata.



Slika 7: Plocnik sa skicom za Pitagorinu teoremu

Nauci danas nije poznato kako je tačno Pitagora dokazao teoremu o odnosu kvadrata stranica kod pravouglog trougla, iz prostog razloga što su Pitagorejci bili protiv bilo kakvog zapisivanja znanja i otkrića. Po jednoj priči vezanoj za ovu tvrdnju, Pitagora je u jednom trenutku uočio na pločniku staze u parku prilikom šetnje, da je kvadrat nad hipotenuzom sastavljen od četiri podudarna trougla, koliko ih ima i nad katetama (2+2), što je bilo dovoljno za pravougli jednakokraki trougao, za početak. Naravno, kasnije je generalizovao ovu istinu na proizvoljan pravougli trougao. Nameće se pitanje kako i na koji način je Pitagora ili neko od njegovih učenika dokazao ovu teoremu. Postoje dva pravca

[23]Slavko V. Nedović,*Matematičko-istorijski mozaik*, Arhimedes Beograd 2004. str. 54.

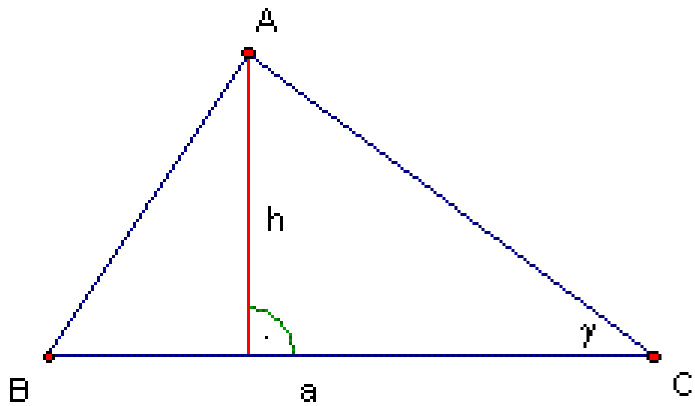
u kojima se kreće originalan dokaz ove teoreme. Jedan se može pronaći u Euklidovoj drugoj knjizi. [24] Drugi dokaz koji se smatra da je lično Pitagorin jeste dokaz preko proporcija, jer je Pitagora razvijao teoriju proporcija, no postoje indicije Bretšnajdera i Hankela sugerišu da je originalan Pitagorin dokaz preko aplikacije površine. Dati su sledeći dokazi:[25]
Prvi Pitagorin dokaz;
Drugi Pitagorin dokaz;
Euklidov dokaz.

[24]Euklid (365 275. godine pre nove ere) živeo je i radio u Atini i Aleksandriji, a najviše je poznat po sakupljanju geometrijskog znanja i koji će izložiti u svojih trinaest knjiga nazvanih Elementi. Izlaganja u Elementima napisana su na osnovu definicija pojmova i na osnovu polaznih i izvedenih stavova, aksioma i teorema. Mada se Euklid očito interesovao za teoriju brojeva, to nije bio njegov najveći doprinos matematici. Euklidova prava strast je bila geometrija i od trinaest tomova koji sačinjavaju Elemente, knjige od I do IV u koncentrisane na geometriju ravni (dvodimenzionalnu), a knjige XI do XIII odrađuju geometriju čvrstih tela (trodimenzionalnu).

[25]Sir Thomas Heath,*A history of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press 1921. str. 144-149. i Anton Bilimović,*prevod Euklidovih Elemenata* , Srpska akademija nauka, Beograd 1957. str. 41-42.

3.4.1 Dokaz Pitagorine teoreme preko proporcija

Neka je ABC bilo kaji pravougli trougao sa pravim uglom kod temena A i neka je tačka D podnožje visine na stranicu BC iz temena A.



Slika 8: Pravougli trougao sa visinom koja odgovara hipotenuzi

Trouglovi ABC i DBA su slični jer su uglovi DBA i ABC jednaki kao i uglovi ADB i CAB. Zbog toga važi sledeća proporcija.

$$BD : AB = AB : BC \qquad ili \qquad \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

Odatle sledi:

$$AB^2 = BD \cdot BC$$

Pa je

$$(\frac{AB}{BC})^2 = (\frac{BD}{AB})^2 = \frac{BD^2}{AB^2} = \frac{BD^2}{BD \cdot BC} = \frac{BD}{BC}$$

Primenom analogne metode na trouglove DCA i ACB dobijamo slično predhodnom.

$$\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{CD}{BC}$$

Sabirajući leve i desne strane kod krajnih dobijenih jednakosti, dobijamo:

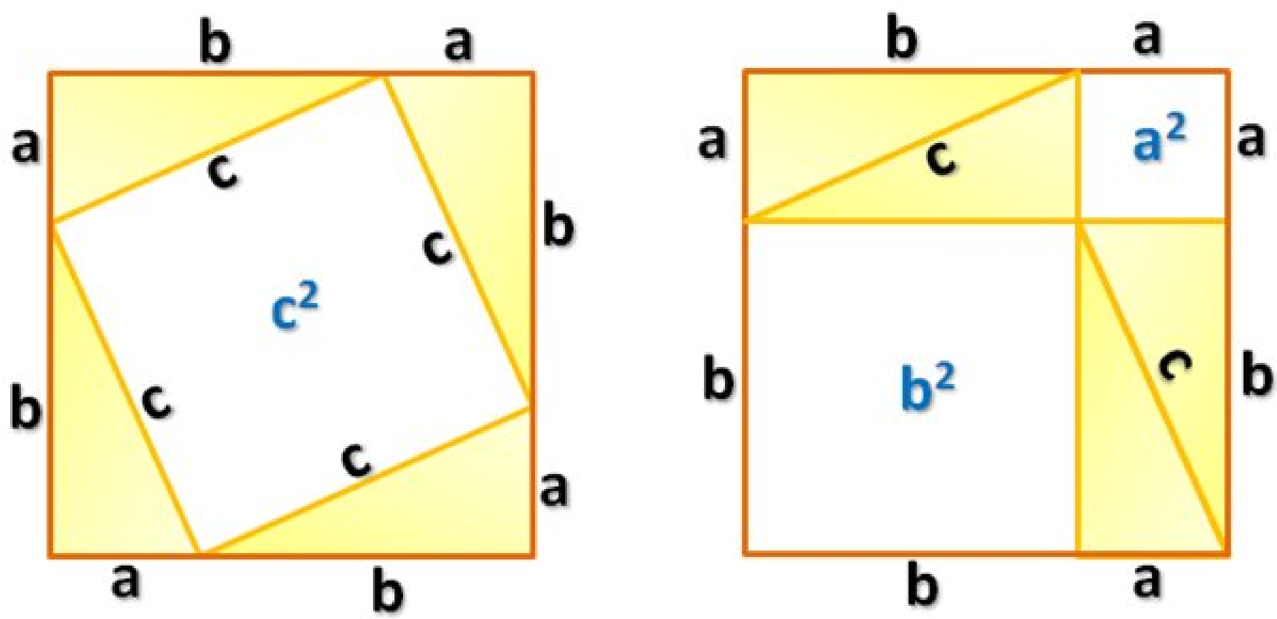
$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC} + \frac{CD}{BC} = \frac{BD + CD}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$$

Odnosno dobijamo sledeće:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

3.4.2 Drugi Pitagorin dokaz

Bretšnajder i Hankel sugerišu da je originalan Pitagorin dokaz sledeći:



Slika 9: Drugi dokaz Pitagorine teoreme

Zamislimo kvadrat stranice a + b, gde je a veća, a b manja kateta bilo kog pravouglog trougla, i neka je c njegova hipotenuza. Podelimo ovaj kvadrat (Slika 9: kvadrat desno) dvema dužima tako da dobijemo kvadrat ivice a, kvadrat ivice b i dva pravougaonika ivica a i b. Sada podelimo isti kvadrat (Slika 9: kvadrat levo) stranice a + b, ovaj put uz pomoć četiri duži, na kvadrat ivice c i četiri pravougla trougla ivica a, b i c, koji su podudarni trouglu za koji dokazujemo Pitagorinu teoremu. Očigledno je da svaki par ovih trouglova čini pravougaonik koji je podudaran jednom od dva pravougaonika iz prve podele početnog kvadrata. Pošto oni zajedno sa kvadratom ivice c čine polazni kvadrat, zaključujemo da je zbir kvadrata sa ivicom a i kvadrata sa ivicom b jednak kvadratu sa ivicom c tj. dobijamo jo jedan lep dokaz Pitagorine teoreme. Naravno, nije sigurno koji je tačno orilginalan Pitagorin, jer on nije ostavio pisane tragove. Podjednako je verovatno da su ova dva dokaza njegova, jer se koristi matematičko oružje za koje su Pitagorejci znali, i koja su podjednako cenili, geometriju i proporcije. Ali znanja za koja se danas misle da potiču od Pitagorejaca, uglavnom se nalaze u Euklidovim Elementima, te dokaz koji sledi je preuzet iz prve knjige 47. teoreme, čuveniji je po imenu tvoca osnova matematike - Pitagori.

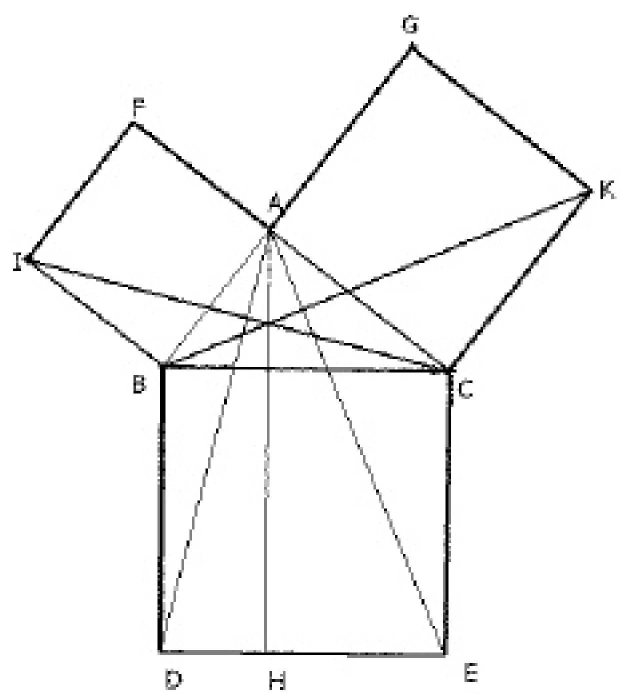
3.4.3 Euklidov dokaz

Osnovni stavovi koji se koriste za dokazivanje Pitagorine teoreme su sledeća pravila: Stavovi podudarnosti trouglova:
1. Stav (SUS) - Dva trougla su podudarna ako imaju jednake po dve odgovarajuće stranice i njima zahvaćene uglove;
2. Stav (SSS) - Ako su sve tri stranice jednog trougla jednake odgovarajućim stranicama drugog trougla,tada su oni podudarni;
3. Stav (SSU) - Ako su dve stranice i ugao naspram veće od njih jednog trougla jednaki odgovarajućim stranicama i uglu tog trougla,tada su ovi trouglovi podudarni.
4. Stav (USU) - Trouglovi koji imaju po jednu stranicu i na njima nalegle jednakeodgovarajue uglove jednake su podudarni.
Koristimo i osnovna svojstva sledećih izometrijskih transformacija osne simetrije i rotacije
Teorema : U ravanskoj geometriji figura osno simetrična nekoj figuri F je njoj podudarna figura F.
Teorema : Rotacija primenjena na figuru F daje podudarnu figuru F'.
Najsadržajniji prikaz Pitagorine teoreme dao je Euklid u svojim Elementima (I knjiga), stavivši je na posebno mesto u geometriji. U prvoj knjizi, 47. stav glasi: Kod pravouglih trouglova je kvadrat na strani naspram pravog ugla (na hipotenuzi), jednak kvadratima na stranama koje obrazuju prav ugao (na katetama). No, za dokaz ove tvrdnje potrebna je još jedna teorema iz te knjige, broj 14.

Ako ma sa kojom pravom, u istoj tački, dve druge prave sa rzličitih strana prave. Prave grade susedne uglove, koji zajedno obrazuju dva prava ugla, te dve prave moraju se nalaziti na istoj pravoj.

Euklid je svoje dokaze uglavnom počinjao na sledeći način.
Neka je ABC pravougli trougao sa pravim uglom BAC. Tvrdim da je kvadrat na BC jednak kvadratima na BA i AC.
Na osnovu 46. stava iste knjige, na stranici BC konstruišimo kvadrat BDEC, a na BA i AC kvadrate kojima su dijagonale FB i GC. Kroz taku A povući ćemo pravu AH paralelnu svakoj od pravih BD i CE , a zatim povući prave AD i IC. Pošto su uglovi BAC i BAF pravi, primenom 14. stava ove knjige, znamo da prave AC, AF povučene nad pravom BA, kroz istu njenu tačku A, a sa raznih strana, čine susedne uglove jednake dvema pravim uglovima, pa su prave CA i AF u istoj pravoj. Iz istog razloga su i prave BA i AG u istoj pravoj. Ugao DBC jednak je uglu IBA, jer su oba prava. A kad dodamo svakom od njih ugao ABC , biće ceo ugao DBA jednak celom uglu IBC, to se vidi iz 2. aksiome navedene knjige (ako se jednakim objektima dodaju jednaki objekti, celine ostaju jednake.
Pošto je strana DB jednaka strani BC, a IB stranici BA, to su dve strane DB i BA jednake stranama IB i BC i to odgovarajućim, a ugao DBA jednak uglu IBC, a tada je i osnovica AD jednaka osnovici IC, i trougao ABD jednak trouglu

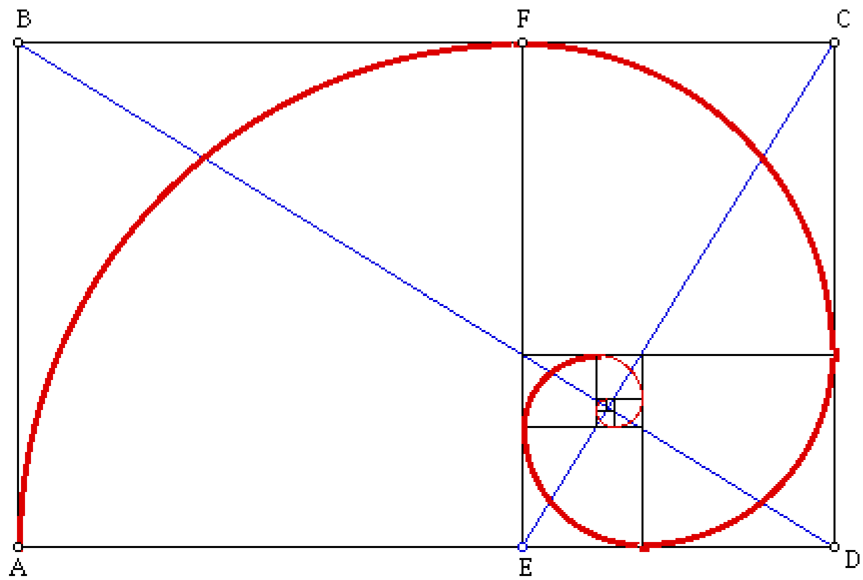
IBC, a prema stavu o dve jednake stranice i uglu između njih. Ako uzmemo u obzir stav 41. ove knjige, paralelogram čija je dijagonala BH je dva puta veći od trougla ABD, jer imaju istu osnovicu BD i između su istih paralelnih BD i AH. I kvadrat FB (u Elementima uobičajeno je da se četvorougao obeležava dijagonalom) je dva puta veći od trougla IBC, jer i oni imaju istu osnovicu IB i izmeu istih su paralela IB i FC.Prema tome je paralelogram BH jednak kvadratu FB. Na sličan način se, pomoću povučenih pravih AE i BK može dokazati da je paralelogram CH jednak kdratu GC.Prema tome je ceo kvadrat BDEC jednak dvama kvadratima FB i GC. Kvadrat BDEC jekonstruisan na BC, a kvadrati FB, GC na BA i AC. Prema tome je kvadrat na strani BC jednak kvadratima na stranama BA i AC.
Dakle, kod pravouglih trouglova je kvadrat na strani naspram pravog ugla (na hipotenuzi) jednak kvadratima na stranama koje obrazuju prav ugao (na katetama). A to je trebalo dokazati.
U suštini se ovaj dokaz zasniva na tome da se iz podudarnosti trouglova IBC i ABD, injihove jednakosti sa polovinama kvadrata FB i paralelograma BH, zaključuje da je kvadrat FB jednak paralelogramu BH.



Slika 10: Euklidov Dokaz Pitagorine teoreme

3.5 Zlatni presek

Sa obzirom da su razmere ključ za razumevanje prirode, Pitagorejci ali i kasniji grčki matematičari trošili su dosta vremena i energije na istraživanje njihovih osobina. Vremenom, uspeli su da svrstaju proporcije u deset različitih klasa, sa posebnim imenama kao na primer *harmonijska sredina*. Jedna od tih sredina dala je najlepši odnos na svetu tj. zlatni presek.



Slika 11: Zlatni presek

Postići ovaj odnos znači podeliti duž na poseban način: Podeliti je na dva dela tako da razmera manjeg i većeg dela bude jednaka razmeri većeg dela i cele duži. Pojednostavljeno govoreći, recimo da je manji prvi jednu stopu dugačak. Ako je manji deo dug jednu stopu, a veći je x stopa dugačak, onda je dužina cele duži očigledno 1 + x stopa. Ako uz pomoć algebre izrazimo ovu vezu, onda dobijamo da je razmer manjeg dela u odnosu na veći sledeći:

$$\frac{1}{x}$$

dok je razmera većeg dela u odnosu na celu duž

$$\frac{x}{1+x}$$

budući da je razmera manjeg odnosu na veći deo jednaka razmeri većeg dela u odnosu na celu duž, možemo izjednačiti ove dve razmere, iz čega proizilazi sledeća jednačina

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{x}$$

želimo da rešimo jednačinu po x, što je zlatni presek. Prvi korak bi bio da pomnožimo obe strane sa x što daje

$$\frac{x^2}{1+x} = 1$$

potom pomnožimo sa (1 + x), iz čega sledi

$$x^2 = 1 + x$$

a oduzimanje 1 + x od obe strane dobijamo

$$x^2 - x - 1 = 0$$

sada možemo da rešimo kvadratnu jednačinu. Dobijamo dva reenja:

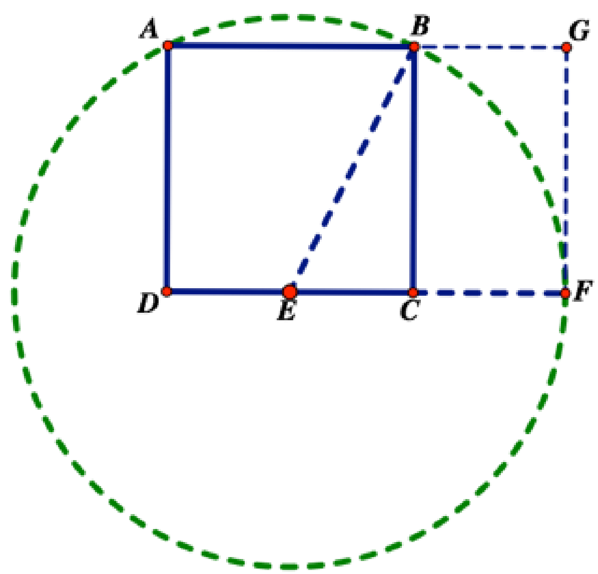
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad i \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Samo prvo rešenje, čija je vrednost oko 1,618, pozitivno, te je tako jedino ono po Grcima imalo smisla. Odatle sledi da zlatni presek aproksiativno iznosi 1,618.[26]
Ovako iskazano rečima, baš i ne zvuči kao nešto posebno. Međutim, objekti u kojima se sadrži zlatni presek, prestavljaju najlepše predmete. Čak i danas arhitekte i umetnici intuitivno znaju da objekti koji imaju ovakav odnos dužine i širine jesu u estetskom smislu savršeni i da zlatni presek vlada proporcijom mnogih njihovih značajnih dela.
Istoričari i matematičari tvrde da je Partenon odličan primer gde se zlatni presek ugnezdio u svaki aspekt njegove konstrukcije pa i sama priroda primenjuje presek u svojim kreacijama. Uporedili se razmera veličine bilo koje dve uzastopne ćelije u zavojima morskog puža nautilusa ili pri određivanju odnosa ureza na ananasu onih u smeru kazaljke na satu prema onim u suprotnom smeru, vidi se odnos koji su bliski zlatnom preseku.[27]

[26]Čarls Sife,*Nula Istorija opasnih ideja*, STYLOS, Beograd 2007. str 213-214.
[27]Čarls Sife,*Nula Istorija opasnih ideja*, STYLOS, Beograd 2007. str 35-56.

3.5.1 Konstrukcija zlatnog preseka

Kako je Pitagorejskoj školi samo geometrijska konstrukcija bila prihvatljiva, moralo se doći do konstruktivne podele duži u odnosu koji je opisan zlatnim presekom. Neka je dat kvadrat ABCD i dužina njegove stranice je a. Konstruiše se sredina njegove stranice (na Slici: stranica CD je podeljena na dva jednaka dela tačkom E). Povlačeći duž BE i produžavajući stranicu CD dobija se zlatni presek. Naime ako se opiše kružnica sa centrom u E i polu prečnika EB, kružcnica seče produžetak stranice DC u tački F. Tada je duž DF tačkom E podeljena u odnosu koji prestavlja zlatni presek.
Kako je dužina$EC = \frac{a}{2}$, primenom Pitagorine teoreme na trougao ECB dobijamo $(\frac{a}{2})^2 = EB^2$. Sređujući ovu jednakost dobija se da je dužina $EB = \sqrt{5} \cdot \frac{a}{2}$. Dužina duži DF je$\frac{a \cdot (1+\sqrt{5})}{2}$. Tako dobijen odnos DE : EF je podelio duž DF u odgovarajućoj razmeri koja prestavlja savršenstvo zlatnog preseka.[28]



Slika 12: Konstrukcija zlatnog preseka

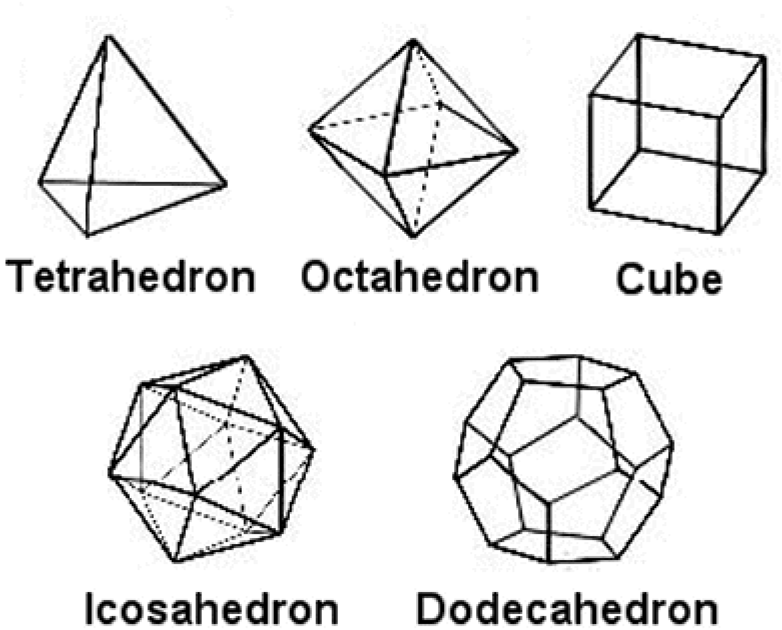
[28]Wilbur Richard Knorr,*The Evulution of The Euclidead Ellements*, D. Reidel Publishing Company, USA 1975. Str. 195.

3.6 Pet regularnih tela

Pitagora i Pitagorejci su, da bi došli do velikog broja prirodnih i društvenih zakonitosti, posebno su bili fascinirani kvadratijumom (artitmetika, geometrija, astronomija i muzika),što je bilo prateće svojstvo nauke klasčne Grčke. Nisu izostavili ni proučavanje osobina pravilnih poligona, a primetilisuda ravan može u potpunosti popločana sistemom pravilnih trouglova, kvadrata ili šestouglova, a prostor sistemom kocki. Pored kocke (heksaedar) otkrili su se i drugi pravilni poliedri tetraedar (ograničen sa četiri pravilna trougla), oktaedar (ograničen sa osam pravilnih trouglova), ikosaedar ograničen sa dvateset pravilnih trouglova i dodekaedar (ograničen sa dvanaest pravilnih trouglova pentagonalni dodekaedar). Pravilni poliedri bili su poznati puno ranije pre Grka, naime pronađen je uzorak ikosaedra koji potiče iz Starog Egipta, ali i bronzani model dodekaedra iz doba drevnih Kelta. [29]
Kocka, tetraedar i dodekaedar su vrlo verovatno ranije bili poznati ranim Pitagorejcima a oktaedar i ikosaedar su otkriveni od strane Pitagorejca Teateta (ili Teatetusa) koji je živeo u isto vreme kada i poznati filozof i matematičar Platon koji se takođe bavio ovom temom.[30] Međutim, danas su ova tela poznatija pod nazivom Platonova tela. Bilo kako bilo, ostaje činjenica da je Teatetus pisao nešto više o oktaedru i ikosaedru. On je prvi koji je konstruisao svih pet tela istraživao relacije jednog tela prema drugom kao i odnose ovih tela sa sferom. [31]

Dokaz da su se Pitagorejci divili savršenstvu ovih pet tela, nalazi se u tome što su svakom od njih dodelili po jedan element za koje su smatrali da ine osnovu sveta. Tako su kocki dodelili zemlju, tetraedru vatru, oktaedru vazduh, ikosaedru vodu i dodekaedru sferu, koja je zapravo peti element. Mala je verovatnoća da su Pitagorejci ili barem rani Pitagorejci mogli da konstruišu svih pet tela u smslu kompletne teorijske konstrukcije, poput one koja se nalazi u XIII-toj knjizi Euklidovih Elemenata, već je velika mogućnost da je Teatetus bio prvi koji je konstruisao ova tela, ali nema razloga verovati da Pitagorejci nisu mogli da sklope ove figure u istom maniru kao Platon[32] svom delu Timaeus (Timaj). Naime, skupljajući u jednom temenu određeni broj uglova trougla, četvorougla ili petougla iskombinovali bi i sastavili neko telo.
Tako su rani Pitagorejci probali da otkriju pet regularnih tela u elementarnom smislu, stavili bi uglove određenih pravilnih mnogouglova oko jedne tačke (zajedničko teme) i pakazali su da postoje samo tri vrste pravilnih mnogouglova, tako da mogu popuniti prostor oko jedne takve tačke. Kako je elementarna konstrukcija još uvek bila u Platonovim rukama, može se naslutiti iz činjenice kako je na primer objasnio nastanak heksaedra (kocke):
Pošto su rođena ova tela jedan od ovih elemenata (osnovnih trouglova) je završio

[29] Slavko V. Nedović, *Matematičko-istorijski mozaik*, Arhimedes Beograd 2004. str. 60-61.
[30] Izvor: www.storyofmathematics.com/greek
[31] Sir Thomas Heath,*A history of Greek Mathematics* , Oxford at the Clarendon Press 1921. str. 162.
[32] Platon (427. 347. godine pre nove ere) Jedan od najpoznatijih Grčkih filozova i matematičara, koji je inspirisan Pitagorejcima osnovao svoju Akademiju 387. godine pre nove ere



Slika 13: Pet regularnih tela (Platonova tela)

svoje dok je ravnokraki trougao rodio prirodu četvrtog blika. On je sastavljen tako što su po četiri takva trougla, sa svojim pravim uglovima spojena u centru obrazujući tako jednakostranični četvorougao (kvadrat). Šest kvadrata spoljeno je tako da obrazuju osam prostrornih uglova, svaki ograničen sa po tri ravna ugla. Oblik takvog sastavljenog tela je kocka, koja ima šest četvorouglih ravnostranih osnova.[33]

On je primetio da se samo tri elementa mogu transformisati u druga tela zato šcto se samo tri od ovih pet tela sastoji iz jednakostraničnih trouglova (četvto se sastoji iz kvadrata a peto iz pravilnih petouglova).[34]

Osnovne karakteristike ovih tela mogu se jasno uočiti u sledećoj tabeli:[35]

[33] Platon, *Timaj* , Eidos, Vrnjačka Banja, 1995.

[34] Sir Thomas Heath, *A history of Greek Mathematics* , Oxford at the Clarendon Press 1921. str. 58-61.

[35] Izvor: http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid

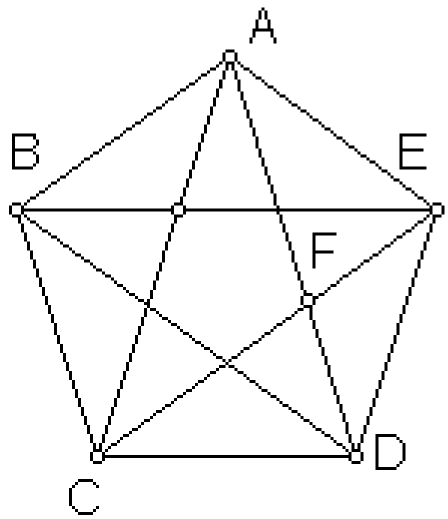
Naziv:	Vrsta pljosni	Broj temena	Broj ivica	Broj pljosni	Broj pljosni koji se susreće
Tetraedar	Trougao	4	6	4	3
Heksaedar	Kvadrat	8	12	6	3
Oktaedar	Trougao	6	12	8	4
Dodekaedar	Petougao	20	30	12	3
Ikosaedar	Trougao	12	30	20	5

Da bi konstruisali dodekaedar bio im je potreban petougao, jer Pitagora i Pitagorejci su zahtevali teorijsku konstrukciju ovih tela. Šta je dokaz da su rani Pitagorejci mogli i da jesu konstruisali pravilan petougao? Da su to uradili zna se na osnovu priče o Hipasusu koji je bio poznat Pitagorejac, jedan od retkih koji je obljavjivao i zapisivao radove o konstrukciji sfere sa dvanaest petouglova dodekaedra. Hipasus je dobio zasluge za ovo otkriće i ako nije najsigurnije da li je on došao prvi do te konstrukcije. Konekcija njegovog imena sa ovom temom teško može biti izmišljena i ova priča ukazuje na pozitivnu stranu njegovih otkrića, dok iz drugog ugla Pitagorejci su ga se odrekli zbog izdaje njihovih osnovnih načela i ideala kao što su zabrana pisanja i objavljivanja njihovih radova spoljnom svetu, smatrajuči ga nemoralnim čovekom.
Pored toga postoje dokazi za ranu egzistenciju dodekaedra jer se prema arheološkim istraživanjima iz 1885. godine na obroncima planine Monte Lofa pronađen je regularan dodekaedar Etrurskog porekla (narod koji je živeo na severu Apeninskog poluostrva) koji datira negde oko prve polovine prvog milenijuma pre nove ere. Takođe, izgleda da postoji preko dvateset i šest oblika dodekaedra Keltskog porekla. Na osnovu toga moe se zaključiti da su Pitagorejci znali i videli figure slične njemu ali njihova zasluga jer a čto su ga tretirali kao matematički objekat i ubacili su ga pod okrilje teorijske geometrije. [36]

[36]Sir Thomas Heath, *A history of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press 1921. str. 58-61.

3.6.1 Konstrukcija pravilnog petougla

Nameće se pitanje da li su Pitagorejci umeli da konstruišu pravilan petougao. Odgovor je potvrdan. Dakle ako je ABCDE pravilan petougao (Slika 14.), povlačeći dijagonale AC, AD i CE iz Pitagorejskog ugla nije bilo teško pokazati da je svaki od uglova BAC, DAE i ECD 2/5 pravog ugla.



Slika 14: Pravilan petougao

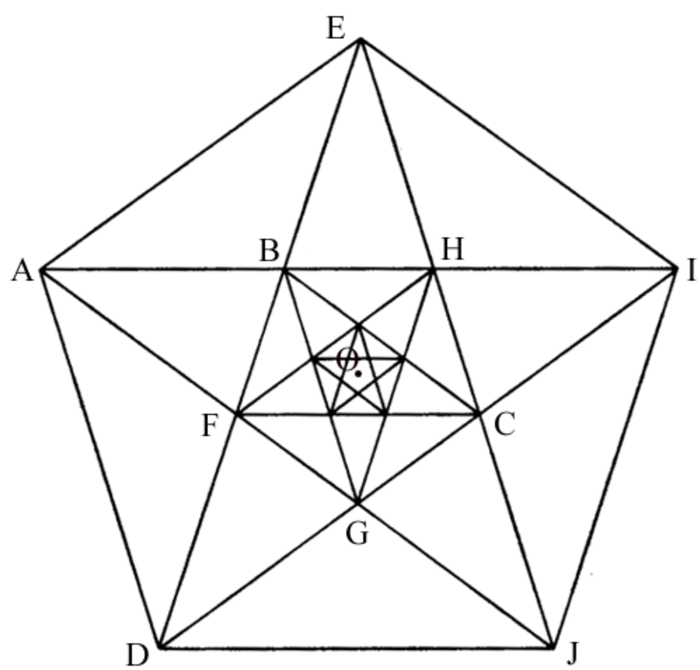
Naime, znali su da izračunaju zbir uglova petougla. To je detaljnije opisano na 15. strani ovog rada. Dakle, zbir uglova petougla je tri zbira uglova trougla ili u današnjim merama $6 \cdot \pi$. (540^0). Dalje, kako se radi o pravilnog petouglu svi njegovi uglovi su jednaki pa jedan iznosi 1/5 ukupnog zbira tj. $\frac{6 \cdot \pi}{5}(108^0)$. Posmatrajući trougao AED zbir uglova ovog trougla je 2π a kako je poznato da je jedan $\frac{6 \cdot \pi}{5}$ i da je to jednakokraki trougao jer su mu dve stranice zapravo stranice petougla, dobija se da je ugao DAE zapravo $\frac{2 \cdot \pi}{5}$. Analogno se dobijaju i ostali uglovi. Dalje se dobija da veličine uglova ACD i ADC iznose $\frac{4 \cdot \pi}{5}$.
Na osnovu ovih podataka sledi da se CE i AD seku u tački F. Naime, ugao CAD je $\frac{2 \cdot \pi}{5}$, ugao AEF je $\frac{4 \cdot \pi}{5}$ kao i AFE. Ugao AFE je unakrsni uglu CFD pa su jednaki, te je trougao CDF jednakokraki. Takođe trougao ACD je jednakokraki i ovi trouglovi imaju jednake uglove, te su slučni. Iz toga se dobija:

$$AC : CD = CD : DF$$
$$AD : AF = AF : FD$$

Ili ako je data AD, AF i CD se nalaze deleći AD u tački F. Ovo možemo pronaći zapisano u Euklidovoj IV-toj knjizi teoreme 10 i 11. Ovaj problem prestavlja specijalan slučaj aplikacije površine i zato je sugurno da su Pitagorejci mogli da ga razumeju.

3.7 Pentagram

U potrazi za dodatnim dokazima u vezi pravilnog petougla ranih Pitagorejaca, treba biti svestan činjenice da je vezan za pentragram odnosno zvezdani petougao (Zvezdani pentagon), kome su oni posvećivali veliku pažnju. Korišćen je od strane Pitagorejaca kao simbol raspoznavanja članova ove škole kao Higija što u prevodu znači zdravlje. [37]
Pentragram je postao sveti simbol Pitagorejskog bratstva zato što su linije zvezde podeljene na ovaj način pentagram je u suštini prepun zlatnog preseka a za Pitagoru zlatni presek je bio gospodar među brojevima. Umetnici su, poput prirode, favorizovali zlatani presek i čini se opravdali Pitagorejsku tvrdnju da postoji u muzici, lepoti, arhitekturi, prirodi i samoj suštini kosmosa, da je sve povezano i nerazdvojivo.
Ova jednostavna figura je zapravo pogled u beskonačnost. Unutar linija zvezde, ugnezdio se petougao. Kada se temena petougla povežu linijama nastaje jedna manja obrnuta zvezda petokraka, koja je, u svojim proporcijama, istovetna kao i polazna. Ovj novonastali pentagram, opet, u svom sreduštu sadrži jedan manji petougao, koji ima sićušnu zvezdu sa svojim petouglom i tako dalje.[38]



Slika 15: Pentagram

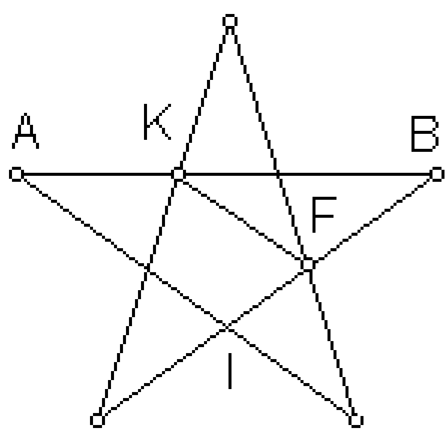
[37]Sir Thomas Heath, *A history of Greek Mathematics,* Oxford at the Clarendon Press 1921. str. 161-162.
[38]Čarls Sife, *Nula Istorija opasnih ideja* , STYLOS, Beograd 2007. str. 29-31.

3.7.1 Konstrukcija pentagrama

Za konstrukciju pentagrama, Pitagorejci su mogli koristiti činjenicu da svaka od pet duži deli drugu u odnosu koji prestavlja zlatni presek, a njega su znali da konstruišu. Naime, neka je $AK = ax$ (Slika 16) prestavlja manji deo a veći segment prestavlja duž KB koja je jednaka sa xa veliki deo odnosno ceo segment je$AB = a$. Tačnost ove izjave sledi direktno iz sličnosti trouglova AIB i KFB. Proporcije koje slede iz njihove sličnosti su:

$$BF : BK = BI : BA(ax) : x = x : a$$

Vodi do kvadratne jednačine$x^2 = a \cdot (ax)$. Danas ne postoje konkretni dokazi da su Pitagorejci konstruisali pentagram, ali je sigurno da su posedovali dovoljno znanja da to svakako urade. Pentagram i pentagon (pravilan petougao) su pronađeni na starim Vavilonskim crtežima, što prestavlja još jednu zajedničku dodirnu tačku Vavilonske i Pitagorejske matematike.[39]



Slika 16: Konstrukcija pentagrama

Drugi način konstrukcije pentagrama jeste preko aplikacije površine koja će dalje biti detaljnije objašnjena. A naravno da su mogli konsrtujisati jedan pravilan petougao, pa zatim produžiti stranice do njihovih samopreseka, te dobiti ovu prelepu figuru kojojsu se toliko divili.

[39]B.L: Van der Waereden,*Science Awakening*, Oxford university press, New York 1961. str. 101.

3.8 Geometrizacija algebre

Prirodno se nameće pitanje zašto Grci nisu koristili Vavilonsku algebru u toj formi kakva je bila? Zašto su morali da jo daju geometrijski oblik? Da li su više uživali u lepoti opipljivog i vidljivog i šta ih je to udaljavalo od apstraktnih brojeva, pa su se zato približili geometrijskim figurama? Njihov beg od algebre i njeno prebacivanje u geometriju iz bojaznosti od zamišljenog i težnja ka slikovitom prikazivanju nije dovoljno veliki razlog da se objasni totalna eliminacija algebre. Prema pouzdanim izvorima koji su Euklidova zaostavštvina, to je bilo velikim delom zasluga Pitagorejaca koji su postavili čvrste temelje geometrijske algebre. Ali za Pitagorejce brojevi su bili osnova univerzuma suština svega, za njih pretstavljao harmoniju brojeva.

Kako Aristotel navodi u svojim delima, oni su stekli ovo viđnje sveta jer su se potpuno prepustili matematici. Da li bi ovi pobožnici brojeva uspeli da reše kvadratnu jednačinu da nije bilo celih brojeva, razlomaka i površine geometrijskih likova. U ovo je teško poverovati. Morao je postojati drugi pravac ka geometrizaciji algebre. Pravi primer za to je otkriće iracionalnog što kako Papus navodi sledi direktno iz teoreme koja nosi ime tvorca ovog bratstva. Čim se uoi kvadrat iz njega izbija iracionalno.

Naime, dužina dijagonala kvadrata nije merljiva sa dužinom stranicom kvadrata tj. odnos dužina ovih duži ne može se izraziti kao ceo broj niti njegov deo. Iako su Pitagorejci smatrani superiornijim u znanju matematike tog doba nisu umeli da koriste iracionalne brojeve njihov odnos niti su uspevali da ih razumeju. Međutim, to što iracionalne brojeve nisu smatrali pravim brojevima nije rezultat neznanja već poricanja definicije broja. Njihova stroga logika nije im dozvoljavala da private ni razlomke kao brojeve, već su ih videli kao razmeru celih brojeva. Za razliku od Grka, Vavilonci su svaki segment površine figura prestavljali kao brojeve, nisu se ustručavali da zaokružuju brojeve kada nisu mogli tačno da odrede njihovu tačnu vrednost i nisu se plašili da u situaciji kada nisu mogli tano da utvrde kvadratni koren oni bi jednostavno prihvatili aproksimaciju.

U domenu celih brojeva jednačina $x^2 = 2$ ne može biti rešena, čak ni u slučaju racionalnih brojeva. Ali ovo je rešivo na domenenu segmenata (geometrijski), tj. dijagonala jediničnog kvadrata je rešenje ove jednačine. Da bi dobili tačno rešenje kvadratne jednačine Grci su iz polja brojeva prelazili u geometriju. Geometrijska algebra je validno oružije za borbu protiv iracionalnih duži i pretvara egzaktne iracionalne brojeve u vidljive i manje opasne. Dakle, Pitagorejce je logičko razmišljanje guralo napred i prisiljavalo da algebri daju geometrijsku formu.[40]

Kako je pronalazak iracionalnih brojeva srušio Pitagorejsku savršenu filozofiju o tome da je suština svemira u harmoniji brojeva, smatra se da je Pitagora nauku obavio velom tajne, plašeći se novih promašaja.

Posle poraza ove ideje javlja se druga: Mudri Pitagorejci shvataju da ako se ne samerljive duži ne mogu izraziti racionalnim brojevima, ali da se one svakako

[40]B.L: Van der Waereden,*Science Awakening*, Oxford university press, New York 1961. str. 125-126.

mogu konstruisati. Shvatanje broja kao skupa jedinica (monada) pokazalo se manje egzaktnim u ukupnom poimanju brojevnog sistema. Dok nisu došli do iracionalnih brojeva iz jednakosti razmera celih brojeva implicirane su sledeće proporcije:

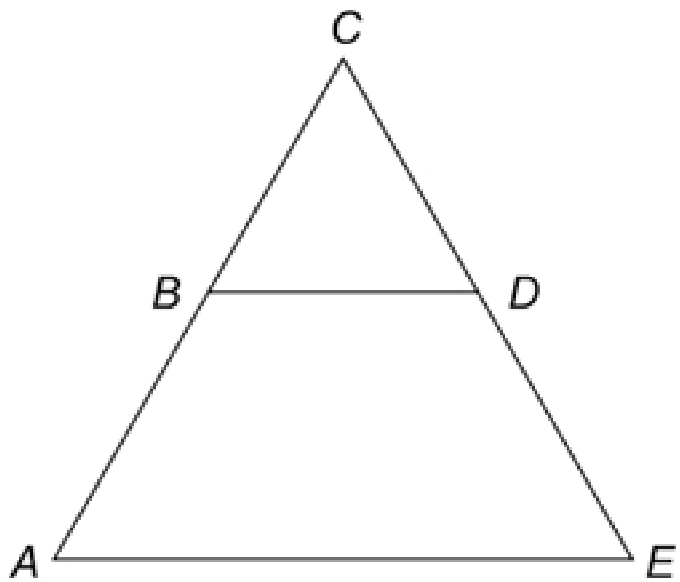
1. Aritmetička ($2 \cdot b = a + c$),
2. Geometrijska ($b^2 = a \cdot c$),
3. Harmonijska ($\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$).

Kod kojih su tragali ne samo za matematičkim već i za filozofskim svojstvima. Znali su da za svake dve duži postoji harmonijska sredina, iz čega su zakljičili da ne može svaka duž biti izražena racionalnim brojem. Sa druge strane, neprekidnost duži imala je veću logičku prihvatljivost od neprekidnosti brojeva što je i dovelo do geometrijske interpretacije aritmetike i algebre.
Dalje u ovom tekstu nekim poznatim algebarskim operacijama daje se geometrijski oblik:
- Umesto proizvoda a i$b$koristi se termin pravougaonik sa stranicama a ib. Geometrijska interpretacija se o ogleda u tome što je površina pravougaonika stranica a ib zapravo prestavlja njihov proizvod.
- Analogno, umesto a^2 koristi se izraz kvadrat stranice a (ovo je takođe izraženo zbog površine kvadrata).
x^3 je interpretiran kao zapremnina kocke stranice x, dok x^4 nema svoju geomtetrijsku vizuelizaciju. U grčkoj matematici često se nalaze ovakve primene algebre jer su Pitagorejci razmišljali algebarski ali je formulacija bila geometrijskog tipa. Veliki deo teorema vezanih za poligone i poliedre bazirana je na ovoj metodi kao i cela teorija konusnih preseka.
Ova geometizovana algebra prestavlja zapravo nastavak Vavilonske algebre, ali sa tom razlikom da su Vavilonci kada bi naišli na nesamerljive duži (koren) prosto su aproksimirali vrednosti i nisu se plašili zaokruživanja, dok su Grci, sa druge strane, izbegavali da koriste ovaj metod (naravno samo uz izetak upotrebe prirodnih brojeva koji su veoma očigledni). [41]

[41]B.L: Van der Waereden, *Science Awakening*, Oxford university press, New York 1961. str. 125-126.

3.8.1 Iracionalni brojevi

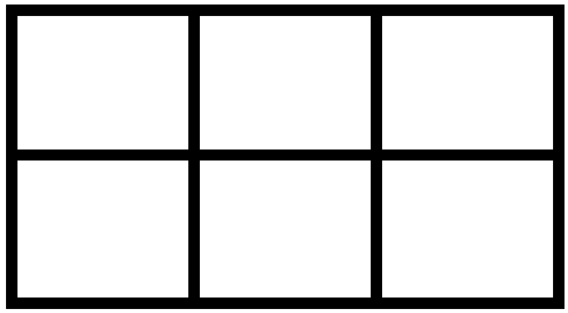
Osnovno učenje Pitagorejske škole bilo je da je suština svega prirodan broj. Po njihovom shvatanju jedine dopustive veličine bile su one koje su mogle opišu prirodnim brojevima ili njihovim razmerama, kako se to savremeno shvata, Pitagorejci su smatrali da su jedini brojevi koji postoje zapravo pozitivni razlomci. Baveći se geometrijom posmatrali su duži čije su dužine samerljive. Dužina duži a i dužina duži b su samerljive ako je razmera njihovih dužina a:b može se zapisati kao razlomak. Samerljivost nisu posmatrali samo u dužinama duži već i u samerljivosti površina.
Na primer:



Slika 17: Srednja linija trougla

Gornja slika (Slika 17) prikazuje da je odnos duži BD : AE = 1 : 2 i da se, (Slika 18) površine jednog delaovog pravougaonika prema celom pravougaoniku odnosi u razmeri 1 : 6.
Razmere i celobrojni odnosi među dužima bile su osnova njihove filozofije sve je broj. Težili su da sve u matematici, muzici, prirodi pa i u celom univerzumu prikažu kao odnos između brojeva. Da bi rezmera vladala svime u svemiru kao što su to Pitagorejci mislili, sve što se ovde nalazi moralo je biti u vezi sa proporcijama tj. sve bi mogli izraziti u formi A/B gde su A i B neki tačno određeni brojevi, tada bi sve bilo racionalno.[42]

[42]Reč razmera, srazmer, odnos potiče od grčke reči *Ratio*, što se može prevesti kao Um, Misao, Razum ili Smisao, ali u Antici je imala i ovo matematičko značenje gde se svi brojevi koji mogu stajati u proporciji, odnosno zapisati u obliku razlomka nazivaju se*Racionalni* brojevi, a oni koji ne mogu su *Iracionalni* brojevi (Nesrazmerni ili nerazumni ili pak nemogući brojevi).



Slika 18: Podela pravougaonika na est jednakih delova

Kvadrat je jedno od najjednostavnijih tela u geometriji sa mnoštvom lepih osobina, te su ga stoga Pitagorejci duboko poštovali. Ima četiri strane kao i četiri elementa, simbolizuje savršenstvo brojeva. Međutim iracionalnost se nastanila u samom središtu kvadrata. Čim se povuče dijagonala linija koja povezuje dva naspravna temena, pojavljuje se iracionalno.
To se lako moe uoiti u sledećem primeru: Neka je dat kvadrat stranice jedan i dijagonala u njemu. Oni koji su proporcijom opstednuti kao što su bili Pitagorejci, posmatrajući stranicu kvadrata i njegovu dijagonalu prirodno postavljaju pitanje, U kakvoj su oni razmeri?
Pokušavajući da dođu do tačne razmere, naišli su na prepreku. Na koliko god male segmente delili stranicu dijagonala nikada neće biti jednaka celom broju tih segmenata. Već će pored celih uvek imati i neki deo segmenta.
Dolazi se do zaključka da dijagonala i stranica kvadrata dužine 1 nisu srazmerne, dakle dijagonala je iracionalan broj. Kako su iracionalni brojevi ugrožavali osnovu filozofije Pitagore i Pitagorejaca, razmeru to su ih se oni plašili i trudili su se da ih sačuvaju kao tajnu daleko od videla sveta. Iako se ovde radi o brojevima i aritmetici ona je usko povezana sa geometrijom jer je za Pitagorejce broj bio vidljiv kada bi ga grafički prestavili. Broj koji prestavlja razmeru između dijagonale i stranice kvadrata dužine 1 danas je poznat kao koren iz 2 u dančnjoj oznaci $\sqrt{2}$ i to je iracionalan broj. Vrativši se na kvadrate stranice 1, poznato je da je površina ovog kvadrata jednaka kvadratu dužine njegove stranice odnosno 1.
Pitagorina teorema primenjena na ovaj primer daje

$$a^2 + a^2 = d^2.$$

$$2 \cdot a^2 = d^2.$$

poto je

$$a = 1$$

dobija se

$$2 = d^2$$

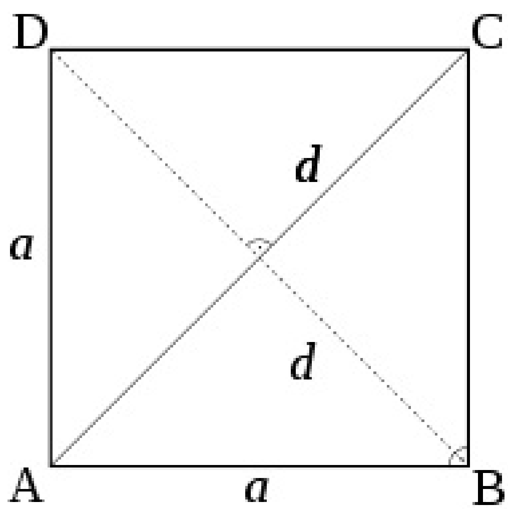
$$d = \sqrt{2}$$

Radei sa proizvoljnom dužinom stranice dobija se,

$$d = a \cdot \sqrt{2}$$

zatim sledi da je,

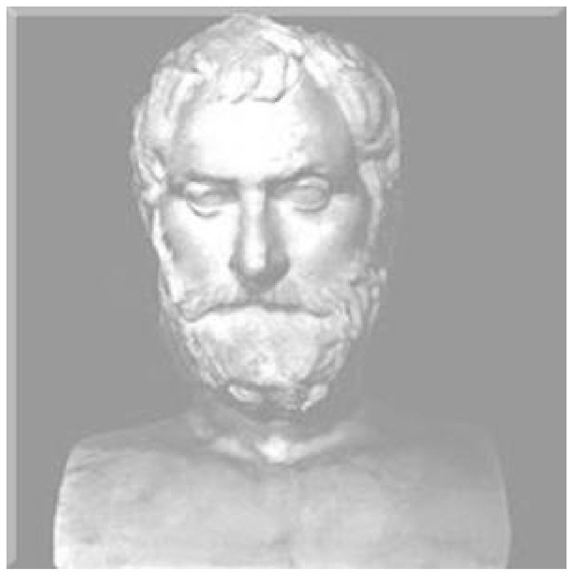
$$d : a = \sqrt{2}$$



Slika 19: Kvadrat sa dijagonalama

3.8.2 Hipasov dokaz

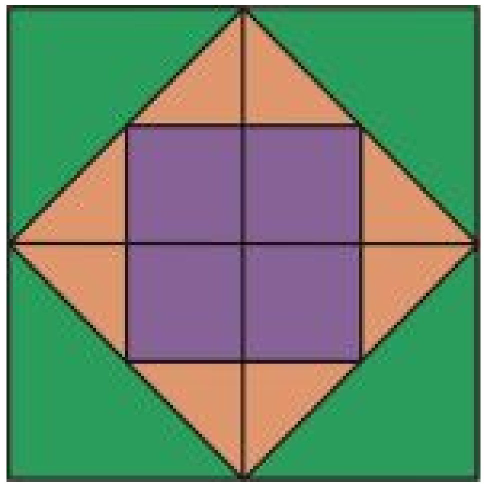
Hipas (Hipasus) sa Metaponta bio je član Pitagorejaca koji je živeo negde oko 5. veka pre nove ere i o čijem se životu malo šta zna. Ono što se sigurno zna, je to da je proučavao i dokazao postojanje iracionalnih brojeva, što ga je dovelo u konflikt sa Pitagorejskom školom i navodno koštalo života. Postoje legende koje su nejasne i pune kontradiktornih priča o izdaji i konačnoj sudbini Hipasa, član ovog bratstva koji je skupio hrabrost i izneo ovu tajnu na svetlost dana.



Slika 20: Hipas

Jedna od tih legendi tvrdi da su Pitagorejci bacili Hipasa u more, puštajući ga da se udavi da bi odslužio kaznu zato što je surovim činjenicama upropastio njihovu savršenu teoriju.
Antički izvori nude priču da je stradao na moru zbog bezbočnistva ili da ga je bratsvto izbacilo iz svojih redova i zazidali u grobnici. Kakva god sudbina ovog matematičara bila otkrivanjem ove tajne uzdrmalo je temelje Pitagorejskog učenja.[43]
Koji je to dokaz koji je Hipasa (ili Hipasus zavisno od izvora) koštao života? Svoje dokaze Pitagorejci su davali bez savremenog simboličkog zapisa, kombinujući geometriju sa teorijom parnih i neparnih brojeva. Uobičajeni današnji dokaz da nije racionalan u osnovi je Pitagorejski samo zapisan simbilički. Sledi Hipasov navodni dokaz uz minimalno korišćenje savremene matematičke simbolike, kakav bi ga Pitagorejci razumeli:

[43]—vCarls Sife,*Nula Istorija opasnih ideja*, STYLOS, Beograd 2007. str. 41.



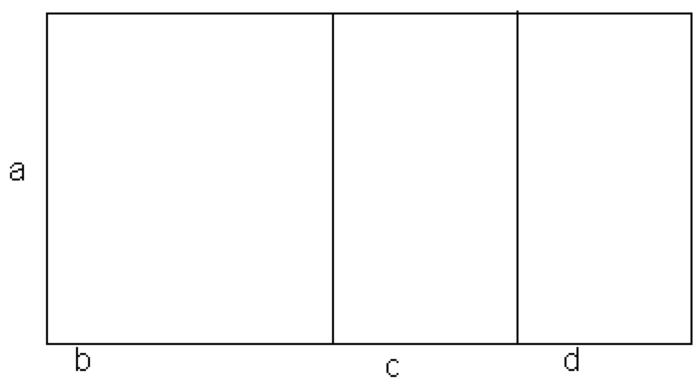
Slika 21: Slika uz dokaz nesamerljivost stranice i dijagonale kvadrata

Na slici (Slika 21) prikazana su tri kvadrata (obojeni različitim bojama) dijagonala srednjeg (narandčastog) kvadrata jednaka je stranici najvećeg (zelenog) kvadrata. Kada bi dijagonala i stranica srednjeg kvadrata bile samerljive tada bi razmera njihovih dužina bila razmera dva prirodna broja odnosno postojala bi dužina x kojom možemo izmeriti i stranicu i dijagonalu srednjeg kvadrata tako da odgovarajući merni brojevi stranice i kvadrata budu m i n prirodni brojevi. Možemo uzeti da ta dva merna broja m i n nisu oba parna. Kada bi na primer stranica bila recimo dužine četiri a dijagonala šest dučina$x$, mogli bi kao novu dužinu za merenje uzeti duž dužine $2x$ i s obzirom na to dužina stranice bi bila dva a dijagonale tri nove dužine.
Savremeno rečeno mžemo pretpostaviti da stranica i dijagonala imaju razmeru m : n gde m i n nisu oba parna broja jer bi smo u suprotnom oba mogli podeliti sa dva bez promene razmere.
Hipasus je, dakle, pretpostavio da je dužina stranice dijagonale nisu oba parna broja pomnožena dužinom$x$, kako je površina najvećeg kvadrata očigledna jednaka dvostrukoj površini srednjeg i kako su dužine njihovih stranica opisane prirodnim brojevima sledi da je površina najvećeg kvadrata paran umnožak jedinične površine x^2.
Napomena: kvadrate prirodnih brojeva Pitagorejci su nazivali kvadratnim brojevima i znali su da dokažu da ako je kvadratni broj paran onda je on kvadrat parnog broja (paran kvadratni broj je četvorostruki kvadratni broj).
Zbog toga se moče zaključiti da broj koji opisuje dužinu stranice najvećeg kvadrata odnosno n je paran broj. Primenjujući isti princip na srednji i mali kvadrat dobijemo da je i m koji prestavlja dužinu srednjeg kvadrata paran broj. Međutim to je u kontradikciji sa pretpostavkom da m i n nisu oba parna. Pa ne može biti ni početna pretpostavka tačna tj. stranica i dijagonala kvadrata nisu samerljive.[44]

[44] Franka Miriam Bruckler, *Matematički dvoboj*, Školska knjiga. Zagreb 2011. godine. Str. 16-18.

3.8.3 Distributivnost množenja prema sabiranju

U Eklidovoj II-goj knizi mogu se naći propozicije koje nisu ništa drugo nego geometrijska formulacija algebre koju su koristili Pitagorejci. Prva propozijaca iz te knjige glasi:[45]
Ako su date dve duži pa je jedna od njih nepodeljena a druga podeljena na proizvoljan broj otsečaka, pravougaonik obuhvaćen ovim dvema dužima jednak je zbiru pravougaonika obuhvaćenih nepodeljenom duži i svakim od tih otsečaka.



Slika 22: Geometrijski dokaz distributivnosti

Na slici (Slika 22) je prikazana podela stranice na tri dela, međutim ova propozicija važi za proizvoljnu podelu druge stanice. Ova teorema nije ništa drugo nego geometijski prikaz distributivnosti množenja prema sabiranju. Naime, kada bi se ova formulacija moderno (algerbarski) zapisala imali bi sledeći oblik:

$$a \cdot (b + c + d) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d$$

Naravno vai i generalizacija:

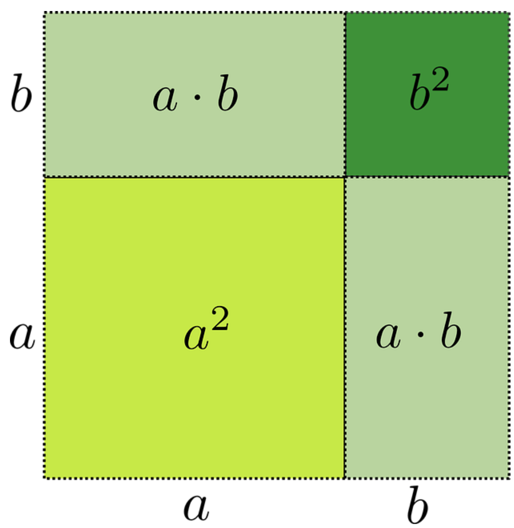
$$a \cdot (b + c + d + ...) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + ...$$

Ovo prestavlja Pitagorejsku interpretaciju distributivnog zakona jer su se oni bazirali na geometrijskoj prestavi. Naravno lako se vidi da je zbir površina pravougaonika sa stranicama$a$ i b, a i $c$kao i aid, i da je to jednako površini pravougaonika stranice a i$(b + c + d)$. [46]

[45]Anton Bilimović, *Euklidovi Elementi* , Srpska akademija naukai Beograd. 1957. str. 9. Knjiga II.
[46]B.L: Van der Waereden,*Science Awakening*, Oxford university press, New York 1961. str. 118.

3.8.4 Kvadrat binoma

Ovde se razlikuju dva slučaja:
1. Kvadrat zbira i
2. Kvadrat razlike.
Euklid je u svojoj drugoj knjizi, teoremi četiri naveo jednu algebarsku istinitos koja je danas poznata kao kvadrat zbira, za koju se veruje da su je dokazali Pitagorjci:[47]
Ako se data duž proizvoljno podeli, kvadrat na celoj duži jednak je zbiru kvadrata na otsečcima i dvostrukog pravougaonika obuhvaćenog otsečima.



Slika 23: Geometrijski dokaz kvadrata binoma

Naravno ovde je dokaz očigledan. Sa slike može se primetiti da je:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

A ta formula je danas poznata kao kvadrat zbira. Dalje, tvrđenje koje je danas opšte prihvaćeno kao kvadrat razlike je obrađeno u drugoj knjizi Elemenata kao sedmi segment i dat je u Pitagorejskom tj. geometrijskom obliku:[48]
Ako se data duž proivoljno podeli na dva otsečka, onda je zbir kvadrata na celoj duži i na jednom njenom otsečku jednak zbiru dvostrukog pravougaonika obuhvaćen na celom duži i tim otsečkom i kvadrata na drugom otsečku.

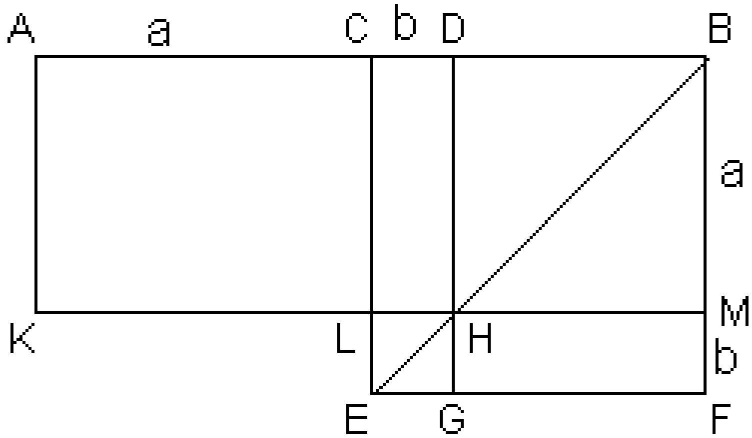
Formula koja je prestavljena ovom propozicijom moderno se zapisuje kao:

$$(ab)^2 = a^2 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

[47] Anton Bilimović, *Euklidovi Elementi* , Srpska akademija nauka Beograd. 1957. str. 11. Knjiga II.
[48] Izvor: Isto str. 14-15. Knjiga II.

3.8.5 Razlika kvadrata

Formula koja je danas opšte poznata kao razlika kvadrata, bila je poznata i ranim Pitagorejcima ali u nešto drugačijem obliku. U Euklidovoj drugoj knjizi, teoreme 5 i 6 prestavljaju baš ovo pravilo.]**II. 5**: *Ako se data duž podeli dvema tačkama i na jednake i na nejednake delove, biće zbir pravougaonika obuhvaćena nejednakim delovima cele duži i kvadrata na duži između deonih tačaka jednaka kvadratu na polovini duži.*



Slika 24: Slika uz II 5

Neka je duž AB data duž koja je podeljena na jednake delove tačkom C i na nejednake delove tačkom D. Obeležimo $AC = aiCD = b$, takođe $CB = a$. Formirajmo kvadrat CBFE stranice a i nacrtajmo pravougaonik ABMK stranice2a i$ab = AK$. Povucimo paralelu sa stranicom CE iz tačke D i presečna tačka sa FE je G i neka je tačka L presek duži KM i CE, kao na slici (Slika 24). Imamo da su pravougaonici CDLH i HMFG podudarni (jedna stranica im je b a druga je ab). Takođe imamo podudarnost pravougaonika AKLC i CLMB, a oni su takođe podudarni pravougaoniku DBFE (jedna stranica je$a$, druga ab).

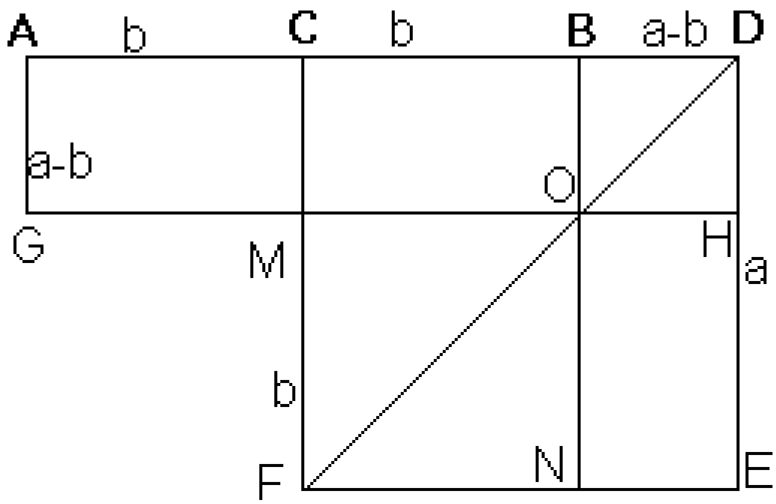
$$AKLC = DBFE$$

Dodajući svakom pravougaoniku pravougaonik CDHL sa leve strane se dobija pravougaonik ADHK a sa druge desne strane figura koja se zove gnomon. Sad dodajući levoj i desnoj strani kvadrat LHGE sa desne strane dobijamo kvadrat CBFE stranice a, dok sa druge strane imamo zbir kvadrata stranice b i pravougaonika ADHK (stranice $a + b$ i ab). To bi se algebarski formulisalo kao:

$$(a + b) \cdot (ab) + b^2 = a^2$$

$$(a + b) \cdot (ab) = a^2 b^2$$

II. 6 : *Ako se data duž prepolovi i produži za isvesnu dužinu, zbir pravougaonika obuhvaćen celom duži sa produžetjkom i kvadrata na polovini date duži jednak je kvadratu na duži sastavljenoj od polovine prve duži i dodate druge duži.*



Slika 25: Slika uz II 6

Neka je duž AB data duž koja je podeljena na jednake delove tačkom C i dodat joj je segment ograničin tačkom D. Obeležimo$AC = b i CB = b, CD = a$, takođe$CB = a - b$. Formirajmo kvadrat CDEF stranice a i nacrtajmo pravougaonik ABOG stranice $2b$ i$ab = AG$. Povucimo paralelu sa stranicom CF iz tačke B i presečna tačka sa FE je N i neka je tačka O presek duči GH i BN, kao na slici (Slika 25).
Imamo da su pravougaonici ACGM i CMBO podudarni, a takođe i pravougaonik OHEN je njima podudaran (jedna stranica im je ba druga jeab).

$$ACGM = OHEN$$

Dodajuđi svakom pravougaoniku pravougaonik CBOM sa leve strane se dobija pravougaonik ABOG a sa desne strane figura gnomon.
Sad dodajui levoj i desnoj strani kvadrat MONF sa desne strane dobijamo kvadrat CBFE stranice a, dok sa leve strane imamo zbir kvadrata stranice b i pravougaonika ADHK (stranice $a + b$ iab). To bi se algebarski formulisalo kao:

$$(a + b) \cdot (ab) + b^2 = a^2$$

$$(a + b) \cdot (ab) = a^2 b^2$$

Neka je u obe formule$x = a + b, y = ab$, odatle imamo da je a jednak poluzbiru x iy, dok je b jednak polurazlici x iy. Očigledno je da obe propozicije zapravo daju jednu istu formulu. Naravno, kada se propozicijama da geometrijski oblik uviđa se njihova razlika. Ali nemeće se pitanje, kakva je bila linija razmišljanja čoveka koji se formulisao ove teoreme. Odgovor na to pitanje možemo pronaći u Euklidovim Elementima. Osnovna razlika izmeu II.5 i II. 6 je sledeća: II. 5 zahteva konstrukciju dva segmenta x i $y$kada je data suma i proizvod, dok II. 6 se koristi da se nađe poluzbir ovih segmenata ako je data njihova razlika i proizvod.[49]

[49]B.L: Van der Waereden, *Science Awakening*, Oxford university press, New York 1961. str. 119-121.

3.9 Aplikacija površine

Generalni problem aplikacije površine može se najjednostavnije definisati ovako: Neka su data dva poligona. Treba konstruisati novi poligon koji je sličan pvrom poligonu a površine jednake površini drugog poligona.
Vei broj Pitagorejskih rezultata nalazi se u Euklidovim Elementima, pa tako i nekoliko dokazanih tvrđenja o ovoj temi. Zna se da su Pitagorejci voleli i cenili konstrukciju i dokaze ovog tipa, pa su probleme prenošenja površine jednog poligona u drugi poligon rešavali baš na ovaj način. Dokaz za to ostavlja Euklid u svom najpoznatijem delu.[50] U prvoj knjizi nalaze se sledeće propozicije:
I. 42.
U datom pravolinijskom uglu konstruisati paralelogram jednak datom trouglu.
Odnosno, ako je dat je proizvoljan trougao treba konstruisati paralelogram iste površine(koristeći proizvoljan ugao).
I. 44.
Na datoj duži konstruisati u datom pravolinijskom uglu paralelogram jednak datom trouglu.
Slično kao u slučaju prethodne teoreme 42 ako je dat je proizvoljan trougao treba konstruisati paralelogram iste površine.(koristeći proizvoljan ugao i stranicu koji su unapred dati)
I. 45.
U datom pravolinijskom uglu konstruisati paralelogram jednak datoj pravolinijskoj slici.
Dat je proizvoljan četvorougao treba konstruisati paralelogram iste površine.
A u knjizi II. 14. *Konstruisati kvadrat jednak datoj pravolinijskoj slici.*
U ovom slučaju treba za dati proizvoljan četvorougao konstruisati, kvadrat iste površine.[51]

[50] Anton Bilimović, *Euklidovi Elementi*, Srpska akademija nauka Beograd. 1957. str. 37-41. I. 42. 44. 45.
[51] Anton Bilimović, *Euklidovi Elementi*, Srpska akademija nauka Beograd. 1957. str. 23-24. II. 14.

3.10 Problem duplikacije kocke

Problem duplikacije kocke poznat je još od davnina. Najstariji izvor koji se odnosi na ovaj problem je sačuvan, zahvaljujući Eutokiju iz Askalona koji je u šestom veku komentarisao Arhimedovu raspravu O sferi i cilindru, te je u svom komentaru predočio sadržaj pisma koje je Eratosten uputio kralju Ptolemaju III Euergetu. Međutim ispostavilo se da ovo pismo nije autetično i da ga je Eutokije bez prethodne provere preuzeo od nekog od svojih prethodnika.
To pismo je sadržalo jedno interesantno predanje prema kojem je trebalo načiniti grob za Glauka (u Grčkoj mitologiji sina slavnog Kritskog kralja i njegove žene Persifaje). Kada je drevni tragički pesnik čuo da je grob dug sto stopa prokomentarisao je da je to premalo kraljevsko prebivalište i da treba načiniti dvaput veće. No kada se udvostruče dužine stranica zapremina groba oblika kocke uveća se osam puta. Tako je nastao problem nazvan udvostuenje kocke (ili duplikacija kocke) koji su izučavali poznati geometri tog doba a odnosio se na to kako da udvostruče dato telo ne menjajući mu oblik.
To nije jedini izvor koji govori o ovom problemu, postoji i predanje da su stanovnici ostrva Dela u Egejskom moru imali sličnu siuaciju kada su trebali udvostučiti oltar oblika kocke, te stoga ovaj zadat nazvan je Delskim problemom.
Jedno od prvih rešenja nudi Hipokrat sa Hiosa u drugoj polovini petog veka stare ere kada je utvrdio da za rešenje Delskog problema je dovoljno naći dve srednje proporcionale za dve zadate duži. Naime, ako su a i b dve zadate duži treba naći duži xi y, njihove dve srednje proporcionale, tako da zadovoljavaju sledeću relaciju:

$$a : x = x : y = y : b$$

ako su xi y srednje proporcionale za ai b, tada je:

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b}$$

pa, ako je a ivica kocke i ako je zadat odnos $a : b$, tada će i odnos zapremina kocki ivica aix biti jednak zadatom odnosu. Slično:

$$\frac{y^3}{b^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b}$$

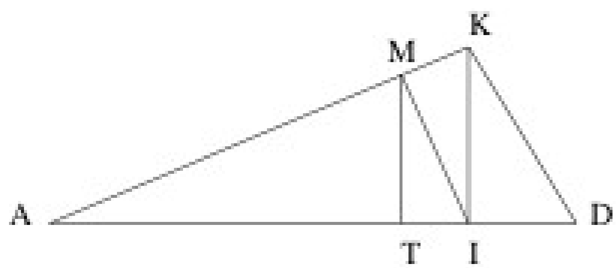
pa je i odnos zapremina kocki ivica$y$ ib jednak zadatom odnosu $a : b$. U specijalnom slučaju kada je duža dvostruko veća od duži b, zapremina kocke ivice$x$ je duplo manja od zapremine kocke sa zadatom ivicom$a$, a zapremina kocke sa ivicom y biće dvostruko veća od zapremine kocke sa zadatom ivicom b. Time se ovaj problem svodi na konstrukciju dveju srednjih proporcionala, tako je tvrdio Hipokrat sa Hiosa. Najstarija rešenja ovog problema dali su Arhita, Menehm i Arhitin učenik Eudokus.[52]
Iako je danas poznato da su tri drevna problema (kvadratura kruga, duplikacije kocke i trisekcija ugla) konstrukcijski nerešiva, Arhitino rešenje iako netačno

[52]Zoran Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd 2009. Str. 235-237.

pomera granice tadašnje geometrije izvodeći je iz okvira tradicionalnih stega shvatanja statike. U njegovoj veličanstvenoj konstrukciji sve je u pokretu, rotiraju se prave i krugovi pri čemu nastaju neobična tela, razmatra se njihov presek. Osnova ovog dokaza je zapravo kinematička, što ne treba da iznenađuje, jer se Arhita smatra ocem mehanike. Naravno ovi problemi se mogu rečiti aritmetički, odnosno problem duplikacije kocke svodi se na konstrukciju duži dužine $\sqrt[3]{2}$, a u savremeno doba poznato je da je to iracionalan broj kao i da je njegova konstrukcija uz pomoć šestara i lenjira nemoguća. Takođe problem kvadrature kruga se svodi na konstrukciju broja, a danas se naravno zna da je njegova konstrukcija nemoguća jer je to iracionalan broj.

3.10.1 Arhitino rešenje

Arhita iz Tarantuma, bio je Grčki matematičar, političar i filozof, koji je živeo negde oko prve polovine 4. veka pre nove ere (bio je Platonov savremenik ali se nagađa da su njih dvojica bili u lošim odnosima). Bio je jedan od poslednjih, poznatijih i viđenijih članova bratstva Pitagorejaca i dominantna politička figura u Tarentumu. Velika matematička dela se prepisuju ovom Pitagorejcu ali danas su sačuvana tek nekoliko njegovih dela. Ostaće upamćen po tome što je među prvim matematičarima dao približno rešenje jednog od najpoznatijeg matematičkog problema, tj. duplikacije kocke.[53]
Najdovitljivije i najinteresantnije od svih rešenja do danas sačuvanih jeste Arhitino rešenja. On je krenuo od pravouglog trougla ADK sa pravim uglom kod temena K, kome je tačka I podnožje normale na stranicu AD, a tačka M podnožje normale iz tačke I na AK. (Slika 26)



Slika 26: Srednje proporcionale

Iz sličnosti trouglova AKD, AKI i AMI (pravougli trouglovi čiji je jedan ugao ugao kod temena A), sledi:

$$AD : AK = AK : AI = AI : AM$$

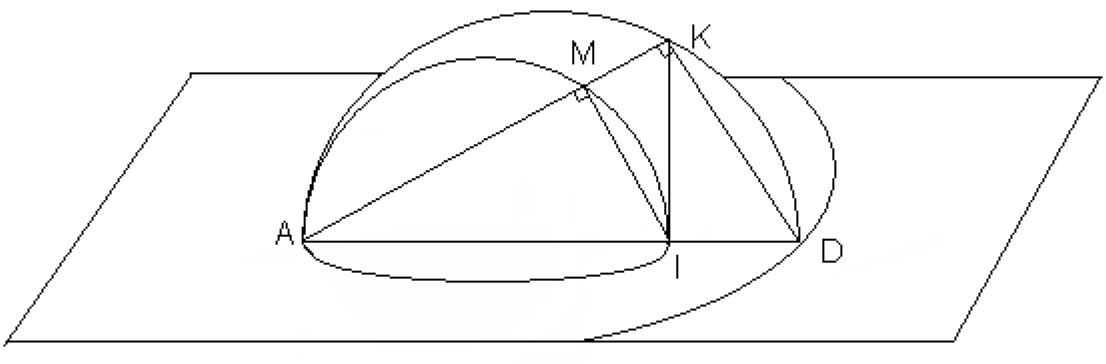
a odavde se izvodi,

$$AD : AM = AI^3 : AM^3$$

kako je utvrdio Hipokrat sa Hiosa.
Ako je AM ivica zadate kocke, tada će odnos zapremine kocki sa ivicama AI i AM biti jednak zadatom odnosu AD/AM. A u posebno slučaju kada je duž AD dva puta veća od AM, Zapremina kocke ivice AI je dva puta veća od zapremine kocke sa ivicom AM, time se problem udvostručenja kocke redukuje na konstrukciju tačke I na duži AD kada su zadate duži AD i AM.
Arhita je primetio da ako je zadata tačka A izbor tačke I na duži AD određuje položaj tačaka K i M. To je zbog toga što tačka K pripada polukrugu čiji je prečnik AD i pravoj koja je u tački I upravna na zadatu duž AD, a tačka m je

[53]Izvor: plato.stanford.edu/entries/archytas/

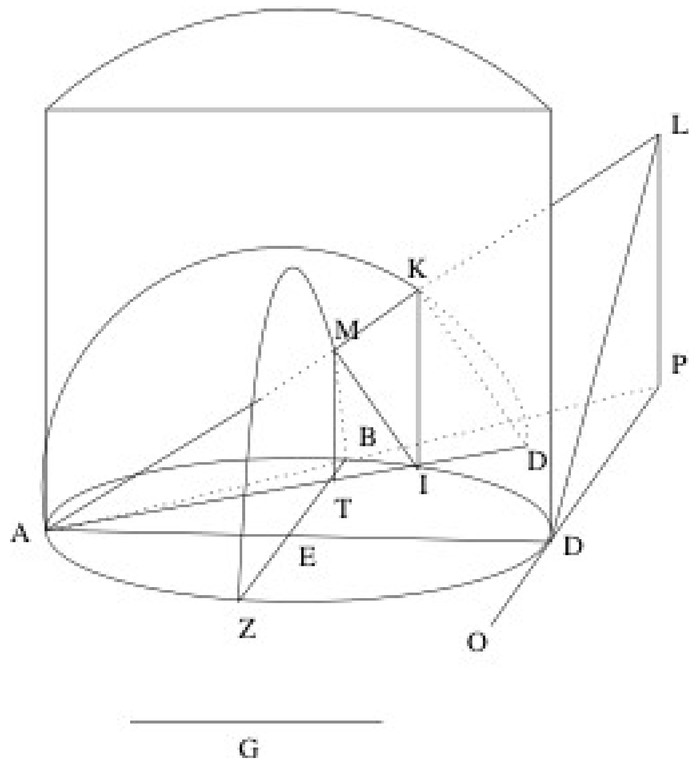
podnožje normale iz tačke I na pravu AK, poemrajući tačku I po dui AD tako da AI opada od AD do nule, tada i dužina duži AM opada od AK do nule. Te je stoga u jednom momentu AM podudarna nekoj unapred zadatoj duži g, manjoj od AD.
U nameri da odredi taj trenutak Arhita, ravan trugla ADK postavlja tako da bude normalna na ravan fiksiranog kruga k čiji je prečnik AD. Zatim trougao ADK rotira oko prave koja je u tački A normalna na horizontalnu ravan kruga k. (Slika 27)



Slika 27: Arhitin dokaz

Tada tačka D opisuje krug tačaka D^0 u horizontalnoj ravni na sledećoj slici (Slika 27) centar tog kruga je tačka A. Neka je L krug opisan oko trouglaAD^0K, Arhita je primetio da neprekidno rotacijom ovog kruga oko prave p normalne na horizontalnu ravan kroz tačku A dobija se površ torusa τ. Kako je p osa rotacije u tački A dodiruje krug L, svi meridijani ovog torusa sadrže tačku A pa je njegov unutrašnji poluprečnik nula.
Dopuštajući osnu rotaciju trougla ADK oko prave p i pretpostavljajući da je tačka I tačka preseka, rotirajuće dužiAD^0i horizontalnog kruga k, Arhita primećuje da tada tačka K pripada cilindru čije izvodnice sadrže tačke horizontalnog kruga i normalne su na ravan tog kruga. Dakle tačka K opisuje prostornu krivu s koja se dobija u preseku cilindra σ i torusa τ.
Kako je ugao AMI prav, a ravan trouga AD^0K normalna horizontalnoj ravni, tačka M pripada sferi kojoj je prečnik AD. Tako je AM ivica zadate kocke podudarna dui g, tačkama će pripadati sferi sa centrom u A poluprečnika g. Zbog toga ona pripada krugu k1 koji čini presek ove dve sfere. Kako je za rešavanje ovog problema neophodno pretpostaviti da je duž AD dvostruko veća od duži AM ove dve sfere biće međusobno podudarne i centar jedne pripadaće drugoj. Kako su tačke A, M i K podudarne one pripadaju konusu , sa temenom A kome je direktrisa krug k1. zbog toga je tačka K presek prostorne krive s i konusa , odnosno tačka K je presek konusa, cilindra i torusa. Odredivši tačku K Arhita je mogao da tačke I i M, tako da odredi srednje proporcionale i time reši problem

duplikacije kocke. [54] (Slika 28).



Slika 28: Arhitina konstrukcija

[54] Zoran Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd 2009. Str. 237-240.

4 Poznati Pitagorejci i njihova dostignuća

Pitagorejska škola izrodila je mnogo matematičara, filozofa i astronoma među kojima su bili: Teano, Teatetus iz Atine i Hipokrat iz Hiosa.

4.1 Teano

Slika 29: Teano

Prva žena, za koju je poznato da je imala uticaj na razvoj matematike, bila je Teano, (rođena oko 550. godine pre nove ere). Koja je započela kao jedna od Pitagorinih učenica, pre nego što je postala jedan od njegovih najnaprednijih studenata, a na kraju i njegova žena. Pitagora je bio poznat kao filozof feminista, zato to je aktivno promovisao ženske studente, a Teano je bila samo jedna od dvadeset i osam sestara Pigagorejskog bratstva. Međutim iako se za nju kaže da je bila veoma poznat i cenjen matematičar, filozof i astronom o njenom životu i radu se zna veoma malo, jer ne postoje puno pisanih dokomenata o njenom životu.

Dodatni razlog je i taj što su Pitagorejci sva otkrića direktno pripisivali Pitagori i nisu previše verovali u pisanu reč. Pored ne pisanih dokaza, može se sa sigurnošću tvrditi da su njena najpoznatija dela bila Kosmologija i Konstrukcija univerzuma, ova dela govore o Univerzumu sastavljenom od brojeva i prostih proporcija ako je pored ovih radova imala još, do dan danas ni jedan od njih nije ostao sačuvan. [55]

[55] Gabriella Bernardi, *The unforgotten Sisters*, Praxis Publishing, Chichester UK 2016. str. 17.

4.2 Teatetus iz Atine

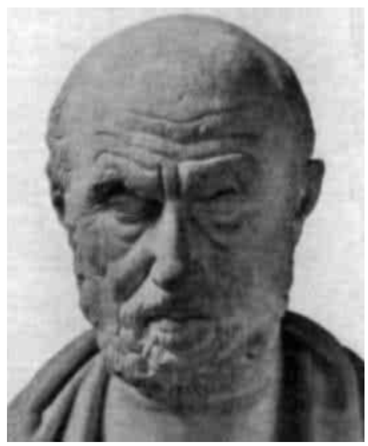
Slika 30: Teatetus

Teatetus (417. 369. godine pre nove ere.) ceo svoj život proveo je u Atini. On je imao veliki uticaj na razvoj Grčke geometrije. Pored svog ogromnog doprinosa osnovama matematike, bio je poznat i po tome što je bio veliki Platonov prijatelj. Učestvovao je u ratu između Atine i Korinta 369. godine pre nove ere, gde je bio ranjen i morao je da se vrati u Atinu gde je ubrzo i umro.
Iako nije ostalo sačuvano nijedno njegovo delo o njegovom doprinosu matematici zna se najviše zahvaljujui Euklidu i njegovom delu Elementi. Knjige X i XIII opisuju Teatetov rad u polju matematike, na osnovu toga moemo zaključiti da je on radio dosta na polju iracionalnih dužina koja su opisana u X-toj knjizi.[56] Naravno, kao što je već bilo reči, obogatio je geometriju time što je dao konstrukciju svih pet regularnih tela, koja danas ipak nose ime po Platonu.

[56]Izvor: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Theaetetus.

4.3 Hipokrat iz Hiosa

Posle krvavih Grčko-Perijskih ratova, za vreme vladavine Perikla, u Grčkoj dolazi period koji se danas naziva Zlatno doba Grčke. U tom dobu zlate Grčke istorije živeo je i radio, jedan od poznatijih učenika Pitagorejske škole. Radi se o Jonskom filozogu Hipokratu (živeo je negde oko 470 410. godine pre nove ere), Pitagorejcu, koji je pokušao da reši jedan od tri značajna problema kvadraturu kruga (takođe i udvostručavanje kocke). Njemu se prepisuju i prvi sistematski rad iz geometrije, što se smatra i prvim udžbenikom elementarne matematike.
Susretanje sa očiglednim, a nedokazivim istinama, poslužiže Hipokratu da

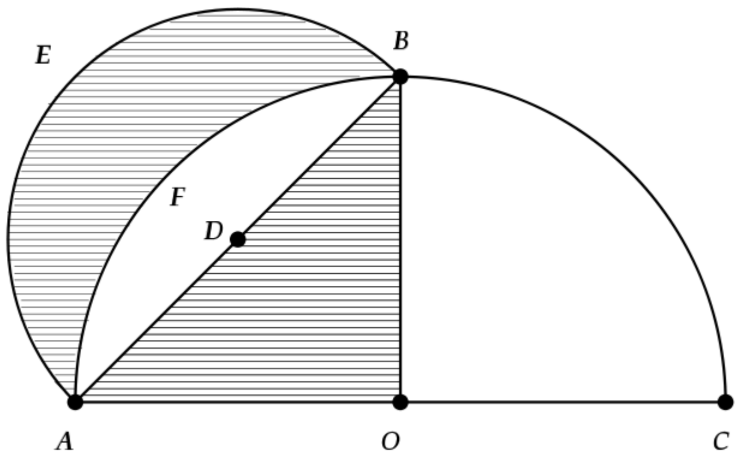


Slika 31: Hipokrat

izgradi potpuniji sistem deduktivnog dokazivanja, u kome će važnu ulogu igrati aksiomi, odnosno njihov sistem. Ostao je upamćen i po tome što je skoro vek ranije nego Euklid napisao prvo delo iz geometrije. O životu i radu Hipokrata ne zna se puno, ali ono što znamo potiče od Eudemusa (oko 320. godine pre nove ere) i njegovog dela Istorija geometrije u kojima se može pronaći puno informacija o Hipokratovom radu.[57] Za Hipokrata kažu da je bio isključen iz Pitagorejskog bratstva, jer je za novac podučavao druge, što je bio oblik moralne niskosti.

Ostaje zapamćeno sa je Hipokrat predavao geometriju u ranije osnovanoj školi u Atini, napisao sistematizovano delo iz ove oblasti, pod nazivom Elementi, koje na žalost, nije sačuvano do današnjih dana. Smatra se da je u delu sabrano sve što je do tad bilo poznato geometriji. Poznatiji autori koji su se pozivali na ovo delo, isticali su u njemu strogost u izlaganju gradiva, no ni jednom reči nisu spominjali pojmove i tvrđenja na kojima je Hipokrat zasnovao ovaj rad.
Kod Hipokrata nema bitne razlike između formulacije problema i formulacije te-

[57] Izvor: www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hippocrates.html



Slika 32: Kvadratura kruga

oreme, što će velikim delom biti prisutno i kod Euklida. Ako je reč o metodskom postupku, onda je strogost i doslednost primene dedukcije na strani Hipokrata, čime se ne baca senka na Euklida, koji dobro ekspoatiše moć intuicije.
Kao primer data je jedna od poznatijih Hipokratovih formulacija problema i demonstracije deduktivne metode: Naći površinu lunula (polumeseca) konstruisanog nad stranicom kvadrata koji je upisan u datoj kružnici.
Hipokratovo rešenje je sledeće: (Slika: 31). Neka je data polukružnica AC opisana nad duži AC. Iz tačke O povlačeći normalu na ovu duž, dobija se tačka B koja prestavlja presek ove normale i polukružnice i potrebno je spojiti AB. To je stranica kvadrata koji je upisan u kružnicu kojoj je AC polukružnica. Na AB opisati polukružnicu AEB. Sada, budući da je kvadrat nad AC dva puta veći od kvadrata nad AB iz Pitagorine teoreme dobija se $(2 \cdot r) = 2 \cdot (r \cdot \sqrt{2})^2$, a znajući da se kvadrati na prečnicima (dijametrima) odnose kao odgovarajući krugovi ili polukrugovi, polukrug AC je dva puta veći od polukruga AEB. Otuda je i kvadrant (četvrtina) ABO kruga jednak polukrugu AEB. Oduzme li se zajednički segment, preostali mesec AEB biće jednak trouglu AOB.
Slika 31: Polu Mesec
Pri ovoj dedukciji Hipokrat je koristio sledeće tvrdnje:
· Kvadrat AC je dva puta veći od kvadrata AB, · Kvadrati na različitim prečnicima odnose se kao njihovi krugovi ili polukrugovi. Ako bi se želele formulisati teoreme umesto problema, onda bi one mogle glasiti:
· Mesec nad stranicom upisanog kvadrata u zadanom krugu van njegove oblasti, površinski je jednak četvrtini tog kvadrata,
· Polukrug nad stranicom kvadrata upisanog u drugi krug, površinski je jednak kvadrantu kruga. Hipokrat je bio u uverenju da je ovim zadatkom rešio problem kvadrature kruga. Bez obzira na pogrešan zaključak, zadatak pokazuje visok stepen poznavanja geometrije ravni u čijem je rešavanju primenjen princip logičnog zaključivanja od jednog tvrđenja ka drugom. Sam naziv knjige

Elementi (Stoicheia) koji se prepisuje Hipokratu i Leonu (408. 355. godine pre nove ere), daje pravo da se u njoj ako ne postave, onda makar naslute temenji aksiomatematike. Inače naziv Elementi je kod grka uobičajan za sve traktate aksiomatske prirode.
Pored kvadrature kruga (čija je površina bila jednaka površini konstruisanog kvadrata), Grke su mučila još dva problema:
· Trisekcija ugla (konstruktivna podela bilo kog ugla na tri jednaka dela),
· Udvostručivanje kocke (konstruktivna podela bilo kog ugla na tri jednaka dela).
Ispostavilo se da su ovi problemi samo prilbližno mogu rešiti geometrijskim putem, konačnim brojem konstrukcija pomoću pravih i kružnica, o tačnom rešenju nema govora. Trisekcija ugla i udvostručavanje kocke najčešće su svođene na nalaženje dužix i$y$kod proporcije:

$$a : x = x : y = y : b$$

gde su ai$b$poznate duži, što je u suštini proširenje geometrijske sredine$a : x = x : b$, gde se javlja dvostruka geometrijska sredina, koja se ne može dobiti samo pomoću šestara i lenjira. Ta prepreka će inicirati pojavu i proučavanje konusnih preseka.[58]

[58]Slavko V. Nedović, *Matematičko-istorijski mozaik*, Arhimedes Beograd 2004. str. 63-65.

Zaključak

Kao što se vidi na početku ovog rada istorija antičke Grčke, hronološki može se podelili u nekoliko istorijskih etapa: prelazno, Ahajsko, klasično, Helenističko i Rimsko doba u kojima su se izdvojili pojedini matematičari svojim radom.
Upoznavajući se sa radom Pitagore sa Samosa, koji je putujui stekao velika znanja i osnovao školu u Krotonu 518. godine pre nove ere, uviđa se njegov ogroman uticaj na razvoj osnova matematike.
Pitagorejska škola trajala je oko 150 godina i brojala je ukupno 218 sledbenika Pitagorejaca.
Pitagorejcima dugujemo i prvo izvođenje matematičkog dokaza u istoriji. Pitagorina filozofija se temelji na brojevima. Poznavanje matematike i brojeva je ključ za saznanje i razumevanje sveta. Pitagora je bio fasciniran brojevima, njihovim odnosima i proporcionalnošću na čemu se temelji njegovo, tada, najpoznatije otkriće muzička lestvica. Bio je veoma razočaran kada je dokazano da je broj koren iz dva iracionalan, tj. da razmera bilo koja dva broja ne može dati odnos stranice i dijagonale kvadrata. Ovaj zaključak su čuvali kao strogu tajnu, jer je to iz temelja rušilo njegovu teoriju. Međutim, Pitagora nije ostavio ni jedan pisani trag o svom radu, te se, stoga, ne znaju svi njegovi rezultati. Naravno, kako su Pitagorejci smatrali svog vođu polubogom, to su se i svi njihovi rezultati automatski pripisivali Pitagori.
Naravno da bez dobre osnove nema daljeg napretka, tako geometrija mora biti zahvalna Pitagorejcima zato što su joj pružili dovoljno jake i zdrave početke. Kako se oni nisu bavili pisanjem svojih rezultata već su ih usmeno prenosili i brižljivo čuvali, a neke čak skrivali od javnosti jer su rušili njihove savršene teorije, tako danas ne postoji najsigurniji dokaz šta su zapravo Pitagorejska otkrića u ovoj oblasti. Naime ono što se danas zna o njihovim pronalascima zapravo potiče iz Plutarhovih rukopisa, koja su napisana pedesetak godina nakon propasti Pitagorejske škole. No, to nije jedini izvor koji je ostao. Veliki broj Pitagorejskih rezultata nalazi se u Euklidovim Elementima. Preteča ove značajne enciklopedije znanja smatra se da Hipokratovi Elementi geometrije u kojima je prvi put pokazana stroga aksiomatika geometrije, te pravila i njihovi dokazi.
Naravno, Pitagorejci su morali od nečega početi. Naime, Pitagora koji je u to vreme bio učen čovek, što je tada značilo da je mnogo putovao, znanja koja je stekao istražujući preneo je u Kroton gde je otvorio svoju školu sa velikim brojem sledbenika.
On je asimilovao matematička znanja drevnih Egipćana, Vavilonaca, Sumeraca, Feničana i dalje ih razvijao.
Pitagorejci su se bavili geometrijom i aritmetikom od matematičkih nauka, dok su algebru koju su preuzeli od Vavilonaca potpuno potisli i dali joj geometrijsku formu. Naravno, veliki je njihov uticaj u astronomiji, muzici i drugim sferama, no njima omiljeno sredstvo kojim su opisivali svet bio broj. No, kako su izbegavali apstrakciju, svemu su se trudili da dodele neku očiglednu formu, te su i brojevima dodeljivali neke geometrijske oblike (trougaoni, kvadratni, itd.). Nisu samo brojevima davali geometrisko odelo, već su u to uvukli i algebar-

ske formule, koje su danas poznate po posebnim imenima. Naravno, reč je o distributivnosti, razlici kvadrata, kvadratu binoma i mnogim drugim. Značaj njihovih dela ogleda se u tome što su mogli neke delove matematike sagledati na drugačiji način, ostvarujući posebne konekcije i mostove između naizgled potpuno različitih oblasti. Veliki uticaj su ostvarili i u razvoju algebre i aritmetike, otkrivajući da postoje duži koje nisu samerljive odnosno, egsistenciju iracionalnih brojeva, iako to nisu želeli da prihvate. Kako su oni veliki poštovaoci proporcije i celobrojnih odnosa, naišli na prepreku, rešili su da okrenu novu stranu gde se okreću konstrukciji iracionalnog.

Vidi se da su Pitagorejci veliki značaj pridavali konstrukciji i konstruktivnom dokazu. Znali su konstruisati veliki broj pravilnih (pa i nepravilnih) poligona, čak i neke poliedre, a naravno i zlatni presek kome su se toliko divili.

Literatura

1. Anton Bilimović,*Prevod Euklidovih Elemenata*, Srpska akademija nauka, Beograd 1957
2. B.L: Van der Waereden,*Science Awakening*, Oxford university press, New York 1961.
3. Platon,*Timaj* , Eidos, Vrnjačka Banja, 1995.
4. Deni Geđ,*Papagajeva teorema* , Geopoetika, Beograd 2008.
5. Ketri Regulir, *Najveće kulture sveta-Grčka*, Politika narodna knjiga Beograd 2007.
6. Slavko V. Nedović,*Matematičko-istorijski mozaik* , Arhimedes Beograd 2004.
7. Franka M. Bruckler,*Matematički dvoboj*, Školska knjiga Zagreb, 2011.
8. Mr. Mirko Dejić, Branka Dejić,*Zanimljivi svet matematike* , Niro Tehnička knjiga Beograd, 1987.
9. Sajmon Sing, *Fermaova poslednja teorema* , DN Centar, Beograd 2004.
10. Čarls Sife,*Nula Istorija opasnih ideja* , STYLOS, Beograd 2007.
11. Kit Devlin,*Matematički gen* , Plato, Beograd 2001.
12. Sir Thomas Heath,*A history of Greek Mathematics* , Oxford at the Clarendon Press 1921. Volume I.
13. V.I. Avdijev,*Istorija Starog Istoka* , Edicija Beograd 2009.
14. Gabriella Bernardi,*The unforgotten Sisters* , Praxis Publishing, Chichester UK 2016.
15. Wilbur Richard Knorr,*The Evulution of The Euclidead Ellements* . D. Reidel Publishing Company, USA 1975.
16. Zoran Lučić,*Ogledíiz istorije antićke geometrije* , Službeni glasnik, Beograd 2009. Str. 235-237.

Internet sajtovi

:

1. www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Plato.html
2. www.arheo-amateri.rs/2012/03/anticka-grcka.
3. kif.filozofijainfo.com/pitagora/
4. www.math.tamu.edu/
5. ucionicamatematike.wordpress.com/category/matematika/istorija-matematike/
6. www.izreke-citati.com/ne-dirajte-moje-krugove-arhimed/
7. www.svetnauke.org/3013-arhimedov-blistavi-um
8. www.planeta.rs/53/16matematika.htm
9. www.storyofmathematics.com/
10. faculty.etsu.edu/gardnerr/Geometry-History/before-euclid.htm
11. www.cut-the-knot.org/pythagoras/
12. http://plato.stanford.edu/entries/pythagoreanism
13. http://www.obkb.com/
14. Izvor: plato.stanford.edu/entries/archytas/
15. http://static.astronomija.org.rs/nauke/istorija/hronologija.htm