СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА I—XIII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 1—13

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

I—XIII КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1957

ЕУКЛИДОВИ
ЕЛЕМЕНТИ

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГЕ I—XIII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГЕ 1—13

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ТРИНАЕСТ КЊИГА
СА ДОДАТКОМ ТАКОЗВАНЕ
ЧЕТРНАЕСТЕ И ПЕТНАЕСТЕ КЊИГЕ

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1957

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА I

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 1

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ПРВА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

Научна Књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД
1949

ЈУГОСЛОВЕНСКО ШТАМПАРСКО ПРЕДУЗЕЋЕ — БЕОГРАД

ПРЕДГОВОР

Еуклидови елементи (τὰ στοιχεῖα) показали су у току више од двадесет два столећа огромну научну и опште културну вредност. Они су преведени и коментарисани готово код свих културних народа. До 1900 године библиографи су нашли више од 1700 издања те књиге. У XX столећу је због дубљег проучавања основа геометрије интерес за Еуклидове елементе нарочито порастао. Како не постоји превод ове књиге на српски језик, решио сам да својим скромним снагама израдим тај превод. Засад дајем у штампу само прву књигу Елемената. Књига је допуњена историским и библиографским примедбама и коментаром.

Целокупни коментар најбољег, Heiberg'ова, текста Еуклидових елемената, којим сам се и ја служио, доста је разрађен од стране низа писаца, а нарочито од стране Heath'а. Према томе сваки читалац, који би желео дубље да уђе у проучавање Елемената, може се послужити тим писцима. У свом коментару заустављам се само на оном материјалу, који је везан, прво, нарочито за српски превод и, друго, за она места текста, где се мој коментар разликује од познатих коментара, при чему дајем образложење свог гледишта.

Академик Б. Петронијевић, сматрајући да је издање Еуклидових Елемената у српском преводу врло пожељно, био је добар и пажљиво прегледао превод, упоредио га са грчким текстом и учинио ми низ примедаба које сам при изради дефинитивног текста и узео у обзир.

Стил превода прво је прегледао проф. Т. Анђелић, а затим, у коректури, проф. В. Мишковић, као редактор од стране Академије. Проф. В. Мишковић је учинио више језичких измена у преводу од којих неке нису уобичајене у српској математичкој литератури, на пр. једнакостран место равностран троугао и др.

Б. Петронијевићу, В. Мишковићу и Т. Анђелићу који су ми помогли у остварењу овог посла изјављујем најдубљу благодарност.

А. Б.

I.

Дефиниције[1]

1. Тачка је оно што нема делова[2].

2. Линија је дужина без ширине[3].

3. Крајеви линије су тачке[4].

4. Права линија је она, која за тачке на њој подједнако лежи[5].

5. Површина је оно што има само дужину и ширину.

6. Крајеви површине су линије[6].

7. Раван је површина која за праве на њој подједнако лежи.

8. Угао у равни је узајамни нагиб двеју линија у равни, које се стичу и које не леже у истој правој[7].

9. Ако су линије које образују угао праве, угао се зове праволиниски.

10. Ако права, која стоји на другој правој, образује са овом два суседна једнака угла, сваки од њих је прав, а подигнута права зове се нормала на оној на којој стоји.

11. Туп угао је онај, који је већи од правог.

12. Оштар је онај, који је мањи од правог.

13. Граница је оно што је крај ма чега[8].

14. Фигура је оно што је омеђено или једном или са више граница[9].

15. Круг је равна фигура омеђена таквом јединим линијом (која се зове периферија), да су све праве повучене од једне тачке, која се налази у самој фигури, према тој линији (према периферији круга) међусобно једнаке[10].

16. Ова тачка зове се средиште круга[11].

17. Пречник круга је свака права што пролази кроз средиште круга а ограничена је са сваке стране периферијом круга; он полови круг[12].

18. Полукруг је фигура ограничена пречником и њиме одвојеном периферијом круга; средиште полукруга је исто као и средиште круга[13].

19. Праволиниске фигуре су оне које су ограничене правама; тростране су ограничене са три, четворостране са четири, многостране са више од четири праве[14].

20. Од тространих фигура једнакострани троугао има три једнаке стране, једнакокраки има само две једнаке стране а разнострани има три неједнаке стране[15].

21. Даље, од тространих фигура је правоугли троугао онај који има прав угао, тупоугли који има туп угао, а оштроугли који има три оштра угла[16].

22. Од четвоространих фигура квадрат је једнакостран и са правим угловима; правоугаоник је са правим угловима, но није са једнаким странама; ромб са једнаким странама, но није са правим угловима; ромбоид са једнаким наспрамним странама и једнаким наспрамним угловима, но није ни једнакостран ни са правим угловима. Остале четворостране фигуре нека се зову трапези[17].

23. Паралелне су оне праве, које се налазе у истој равни и које се, продужене у бескрајност на обе стране, не секу једна са другом[18].

Постулати[19]

Нека се претпостави

1. Да се може повући од сваке тачке ка свакој другој тачки права линија[20].

2. И да ограничена права може бити продужена у свом правцу непрекидно[21].

3. И да се може описати из сваког средишта сваким растојањем круг[22].

4. И да су сви прави углови једнаки међусобно[23].

5. И да ће се, ако једна права у пресеку са другим двема образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве, бескрајно продужене, сећи и то са оне стране са које су ови углови мањи од два права[24].

Аксиоме[25]

1. Они (објекти) који су једнаки истом (објекту) једнаки су међусобно[26].

2. И ако се једнаким (објектима) додају једнаки (објекти) целине су једнаке[27].

3. И ако се од једнаких (објеката) одузму једнаки (објекти) остаци су једнаки[28].

4. И ако се неједнаким (објектима) додају једнаки (објекти) целине су неједнаке[29].

5. И удвостручени једнаки (објекти) једнаки су међусобно[30].

6. И половине од једнаких (објеката) једнаке су међусобно[31].

7. И они (геометриски објекти) који се могу поклопити једнаки су међусобно.

8. И целина је већа од дела[32].

9. И две праве не ограничавају област[33].

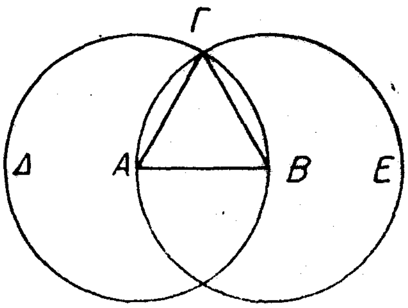
1[34].

На датој дужи (ограниченој правој) конструисати једнакостран троугао.

Нека је дата дуж АВ.

Треба на дужи АВ конструисати једнакостран троугао.

Са средиштем у А и са отстојањем АВ нацрта се круг ВГΔ, па се са средиштем у В и отстојањем ВА нацрта круг АГЕ и из тачке Г, пресека оба круга, повуку праве ГА и ГВ.



Пошто је тачка А средиште круга ГΔВ, АГ је једнако АВ. Даље, пошто је тачка В средиште круга ГАЕ, ВГ је једнако ВА. Како је горе показано да је ГА једнако АВ, то су дужи ГА и ГВ једнаке АВ, а оне које су једнаке једној истој, једнаке су и међусобно, па је према томе ГА једнако ГВ; дакле су три дужи ГА, АВ, ВГ једнаке међусобно.

И тако је троугао АВГ једнакостран и конструисан је на датој дужи АВ.

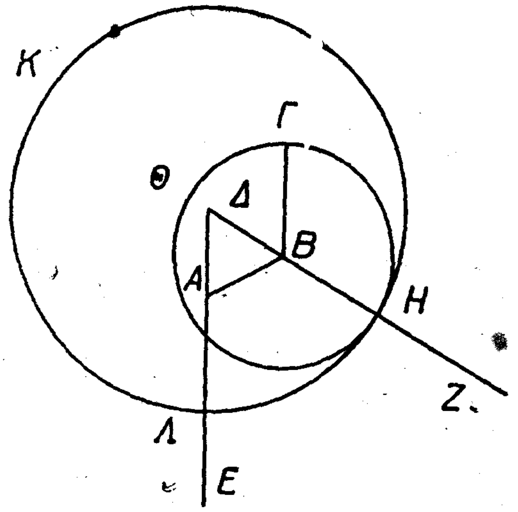
(На датој дужи, дакле конструисан троугао), а то је требало извести.[35]

2.

Из дате тачке повући дуж једнаку датој дужи.

Нека је А дата тачка и ВГ дата дуж; треба из тачке А повући дуж једнаку датој дужи ВГ.

Повуче се из тачке А до тачке В дуж АВ и конструише на њој једнакостран троугао ΔАВ, затим се продуже дужи ΔА и ΔВ правама АЕ и ВZ и нацрта са средиштем В и растојањем ВГ круг ГНΘ, а са средиштем Δ и растојањем ΔН круг НКΛ.



Пошто је тачка В средиште круга ГНΘ, то је ВГ једнако ВН; затим, пошто је тачка Δ средиште круга НКΛ, ΔΛ је једнако ΔН; но како је ΔА једнако ΔВ, остатак АΛ биће једнак остатку ВН. Међутим показано је да су дужи ВГ и ВН једнаке. Према томе су дужи АΛ и ВГ једнаке ВН, а оне које су једнаке једној истој дужи, једнаке су и међусобно; значи и АΛ је једнако ВГ.

Тако је из дате тачке А повучена дуж АΛ једнака датој дужи ВГ, а то је требало извести[36].

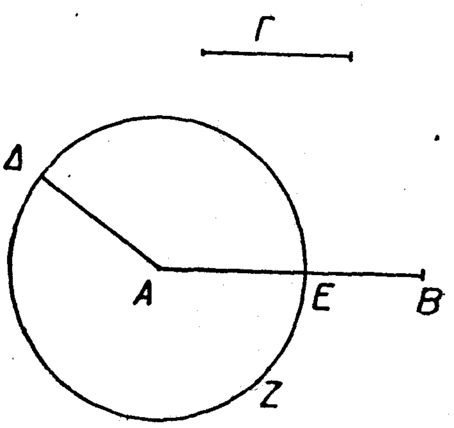
3.

Ако су дате две неједнаке дужи, на већу пренети дуж једнаку мањој.

Нека су дате две неједнаке дужи АВ и Г, од којих је АВ већа. Треба на већу АВ пренети дуж једнаку мањој Г.

Из тачке А повуче се дуж АΔ једнака дужи Г и нацрта са средиштем А и растојањем АΔ круг ΔЕZ.

Пошто је тачка А средиште круга ΔEZ, AE је једнако АΔ; али је и Г једнако АΔ. Према томе су дужи AE и Г једнаке АΔ, па дакле, значи, и AE једнако Г.

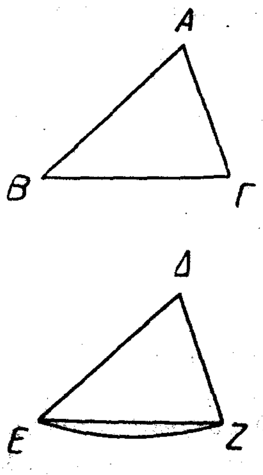


И тако, кад су дате две неједнаке дужи АВ и Г, на већу АВ је пренета АЕ једнака мањој Г, а то је требало извести.

4.

Ако су код два троугла две стране једног једнаке одговарајућим двема странама другог и ако су једнаки углови које образују једнаке стране, мора и основица бити једнака основици, један троугао мора бити једнак другом троуглу и остали углови морају бити једнаки осталим угловима и то одговарајући, наиме они који леже спрам једнаких страна.

Нека су код два троугла АВГ и ΔEZ две стране, АВ и АГ, једнаке странама ΔЕ, ΔZ и то одговарајуће, тј. АВ једнака ΔЕ и АГ једнака ΔZ и нека је угао ВАГ једнак углу ЕΔZ. Тврдим да је основица ВГ једнака основици EZ, троугао АВГ једнак троуглу ΔEZ и остали углови једнаки осталим угловима, и то одговарајући, тј. они који се налазе спрам једнаких страна, тј. угао АВГ једнак углу ΔEZ и угао АГВ углу ΔZE.



Ако се троугао АВГ положи на троугао ΔEZ тако да тачка А падне у тачку Δ, а да дуж АВ иде по дужи ΔЕ, тада ће се тачка В поклопити са тачком Е због једнакости АВ и ΔЕ. Пошто се АВ поклапа са ΔЕ, мора права АГ ићи у правцу

ΔZ због једнакости углова BAΓ и EΔZ. Такође ће се поклопити тачке Γ и Z, због једнакости AΓ ΔZ. Али се и B поклапа са E. Отуда следи да ће се основица BΓ поклопити са основицом EZ, јер ако би се B поклапало са E, и Γ са Z, а основица BΓ не би поклапала са EZ, тада би две праве ограничавале област, а то је немогуће. Према томе и основица BΓ поклопиће се са основицом EZ и биће са њом једнака. A и цео троугао ABΓ ће се поклопити и бити једнак целом троуглу ΔEZ и остали углови ће се поклопити и бити једнаки осталим угловима, наиме угао ABΓ једнак углу ΔEZ и угао AΓB углу ΔZE.

На овај начин, ако су код два троугла две стране једног једнаке одговарајућим двема странама другог и једнаки углови које образују једнаке стране, мора и основица бити једнака основици, један троугао мора бити једнак другом троуглу и остали углови морају бити једнаки осталим угловима и то одговарајући, наиме они које леже спрам једнаких страна. A то је требало доказати.

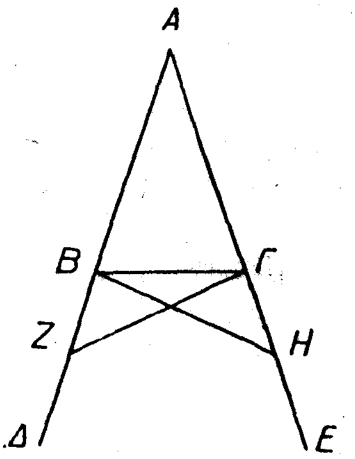
5.

Код једнакокраких троуглова углови су на основици једнаки међусобно, а у случају продужења једнаких страна углови под основицом такође морају бити једнаки међусобно.

Нека је ABΓ једнакокраки троугао са краком AB једнаким краку AΓ и нека су праве BΔ и ΓE продужења кракова AB и AΓ. Тврдим да је угао ABΓ једнак углу AΓB и угао ΓBΔ углу BΓE.

Нека се на правој BΔ узме произвољна тачка Z и пренесе на већу дуж AE дуж AH једнака мањој AZ, па затим повуку праве ZΓ и HB.

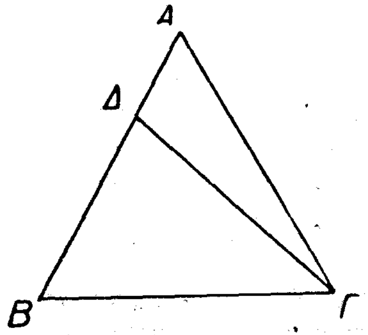
Пошто је AZ једнако AH и AB једнако AΓ, тј. пошто су две стране ZA, AΓ једнаке одговарајућим двема странама HA, AB и чине заједнички угао ZAH, то је основица ZΓ једнака основици HB, и троугао AZΓ једнак троуглу AHB, и остали углови једнаки одговарајућим осталим угловима, који леже спрам једнаких страна, наиме угао AΓZ углу ABH и угао AZΓ углу AHB. И пошто је цела дуж AZ једнака целој дужи AH, а дуж AB је једнака дужи АГ, биће и остатак, тј. дуж ВZ, једнак остатку — дужи ГН. А раније је показано, да је ZГ једнако НВ. Према томе две стране ВZ, ZГ једнаке су одговарајућим двема странама ГН, НВ и угао ВZГ једнак је углу ГНВ, а основица је иста ВГ; троугао ВZГ биће једнак троуглу ГНВ, и остали углови биће једнаки одговарајућим угловима што леже спрам једнаких страна; угао ZВГ биће према томе једнак углу НГВ и угао ВГZ углу ГВН. А пошто је, како је показано, цео угао АВН једнак целом углу АГZ, а угао ГВН једнак углу ВГZ, то ће и остатак — угао АВГ, бити једнак остатку — углу АГВ; а ови углови леже на основици троугла АВГ. А раније је показано, да је угао ZВГ једнак углу НГВ, а ови се налазе под основицом.



Тако су код једнакокраких троуглова углови на основици једнаки међусобно, а у случају продужења једнаких страна углови под основицом такође морају бити једнаки међусобно. А то је требало доказати.

6.

Ако су у троуглу међусобно једнака два угла, онда морају бити међусобно једнаке и стране које леже спрам једнаких углова.



Нека је у троуглу АВГ угао АВГ једнак углу АГВ. Тврдим да је и страна АВ једнака страни АГ.

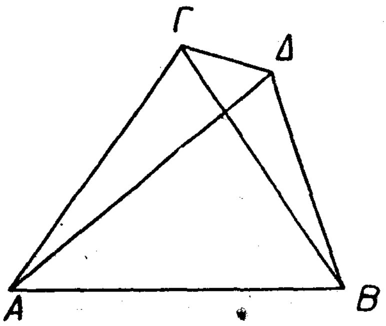
Јер, ако АВ није једнако АГ, биће једна од њих већа од друге. Нека је АВ већа; тада треба пренети на већу АВ, дуж ΔВ једнаку мањој АГ и повући ΔГ.

Пошто је ΔВ једнако АГ, а ВГ је заједничка страна, то су две стране ΔВ и ВГ једнаке одговарајућим странама АГ и ГВ, и угао ΔВГ једнак углу АГВ. Према томе биће основица ΔГ једнака основици АВ и троугао ΔВГ једнак троуглу АГВ, тј. мање је једнако већем, а то је немогуће; значи да АВ није неједнака АГ, већ једнака са њом.

Тако, ако су у троуглу међусобно једнака два угла, морају бити међусобно једнаке и стране што леже спрам једнаких углова. А то је требало доказати.

7.

Немогуће је из две различите тачке, које се налазе са исте стране дате дужи, повући ка крајњим тачкама те дужи по две дужи тако да дужи са истим крајевима буду међусобно једнаке.



Претпоставимо да је могуће повући ка истој дужи АВ две праве АГ и ГВ и две друге праве АΔ и ΔВ једнаке одговарајућим првим правама из различитих тачака, из Г и Δ, са исте стране, са истим крајевима, наиме ГА и ΔА са истим крајем А, а ГВ и ΔВ са истим крајем В; па повуцимо дуж ГΔ.

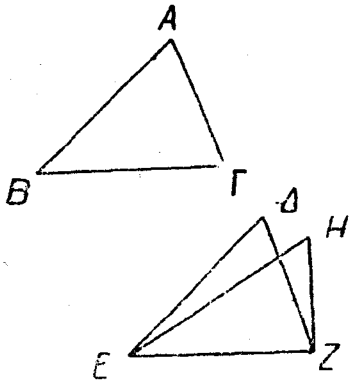
Пошто је АГ једнако АΔ, углови АГΔ и АΔГ су једнаки; тада је угао АΔГ већи од ВГΔ, а тим пре је угао ГΔВ већи од ΔГВ. Али ГВ је једнако ΔВ и због тога је угао ГΔВ једнак углу ΔГВ. Али у исто време он мора бити и већи од њега, а то је немогуће.

Дакле немогуће је из две различите тачке, које се налазе са исте стране дате дужи, повући ка крајњим тачкама те дужи по две дужи тако да дужи са истим крајевима буду међусобно једнаке. А то је требало доказати.

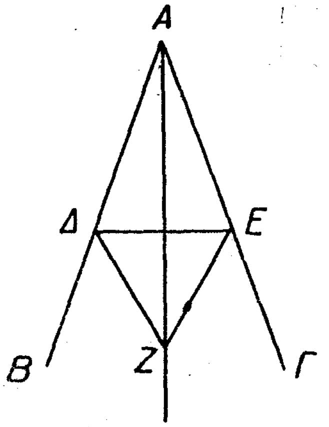
8.

Ако су у два троугла две стране једнаке двема одговарајућим странама другог, и основице им једнаке, морају бити једнаки и углови које образују једнаке стране.

Нека АВГ и ΔEZ буду два троугла, код којих су две стране АВ и АГ једнаке двема одговарајућим странама ΔE и ΔZ, наиме АВ страни ΔE и АГ страни ΔZ, и основица ВГ једнака основици EZ. Тврдим да је тада угао ВАГ једнак углу EΔZ.



Ако се троугао АВГ положи на троугао ΔEZ, тачка В ће се поклопити са тачком Е, права ВГ пасти на праву EZ и тачка Г поклопити са Z због једнакости ВГ и EZ. А кад се дуж ВГ поклопи са EZ, онда ће се поклопити и ВА, ГА са EΔ, ΔZ. Јер, ако се основица ВГ поклопи са основицом EZ, а стране ВА, АГ се не би поклопиле са странама EΔ, ΔZ већ би отступале од њих као EH, HZ, онда би биле повучене из сваке од две различите тачке, које се налазе са исте стране дате дужи ка њеним крајевима по две дужи, тако да дужи са истим крајевима буду међусобно једнаке. А то је немогуће. Немогуће је према томе да се основице ВГ и EZ поклапају а да се стране ВА, АГ не поклапају са странама EΔ, ΔZ. Значи оне се поклапају, а тада се угао ВАГ поклапа са углом EΔZ и њему је једнак.



На овај начин, ако су у два троугла две стране једног једнаке двема одговарајућим странама другог, а и основице им једнаке, морају бити једнаки и углови које образују једнаке стране. А то је требало доказати.

9.

Преполовити дати праволиниски угао.

Нека буде дат праволиниски угао ВАГ и треба га преполовити.

Треба на АВ узети произвољну тачку Δ, пренети на АГ дуж АЕ једнаку АΔ, повући ΔЕ, конструисати на ΔЕ једнакострани троугао ΔЕZ и повући АZ. Тврдим да је угао ВАГ преполовљен правом АZ.

Пошто је АΔ једнако АЕ, а АZ је заједничко, то су две стране ΔА, АZ једнаке двема странама АЕ, АZ, и то одговарајућим, и основица ΔZ једнака је основици ЕZ, па ће угао ΔАZ бити једнак углу ЕАZ.

Тако је дати праволиниски угао ВАГ преполовљен правом АZ. А то је требало извести.

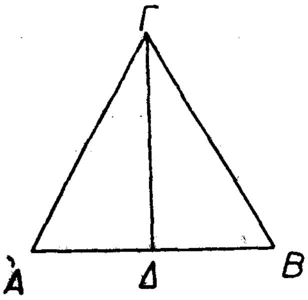
10.

Преполовити дату дуж.

Нека је дата дуж АВ; треба ту дуж преполовити.

На њој се конструише једнакострани троугао АГВ и преполови се угао АГВ правом ГΔ. Тврдим да тачка Δ полови дуж АВ.

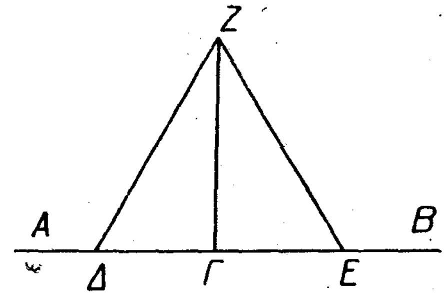
Пошто је АГ једнако ГВ, а ГΔ је заједничко, то су две стране АГ, ГΔ једнаке двема странама ВГ, ГΔ, и то одговарајућим, и сем тога је угао АГΔ једнак углу ВГΔ, па ће и основица АΔ бити једнака основици ВΔ.



Тако је дата дуж АВ преполовљена тачком Δ. А то је требало извести.

11.

Из дате тачке на датој правој повући праву под правим углом према датој правој.



Нека је дата права линија АВ и на њој дата тачка Г. Треба из тачке Г повући праву под правим углом према правој АВ.

Узима се на АГ произвољна тачка Δ, па се пренесе ГЕ једнако ГΔ, конструише се на ΔЕ једнакостран троугао

ZΔE и повуче се ZΓ. Тврдим да је ZΓ права линија, која је под правим углом према датој правој AB и пролази кроз тачку Γ дату на њој.

Пошто је ΔΓ једнако ΓE, а ΓZ је заједничка страна, то су две стране ΔΓ, ΓZ једнаке двема странама EΓ, ΓZ, и то одговарајућим, и основица ΔZ једнака је основици ZE, те је угао ΔΓZ једнак углу EΓZ и при томе су они упоредни. Ако пак права, која стоји на датој правој тако да образује упоредне углове једнаке један другоме, тада је сваки од њих прав. Према томе је прав сваки од углова ΔΓZ и ZΓE.

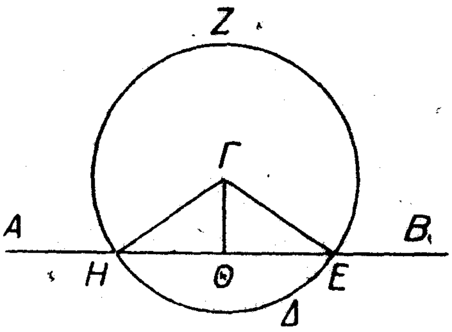
На овај начин из дате тачке Γ на датој правој AB повучена је права под правим углом према датој правој. А то је требало извести.

12.

Повући праву линију нормално на дату бескрајну праву из дате тачке која не припада датој правој.

Нека је дата бескрајна права AB и дата тачка Γ која не припада тој правој; треба повући праву линију нормално на дату бескрајну праву AB из дате тачке Γ, која не припада датој правој.

Узме се са друге стране праве AB произвољна тачка Δ, и са средиштем у Γ и растојањем ΓΔ нацрта круг EZH, па се преполови дуж EH тачком Θ и повуку праве ΓH, ΓΘ, ΓE. Тврдим да је ΓΘ нормала на датој бескрајној правој AB из дате тачке Γ, која не припада њој.



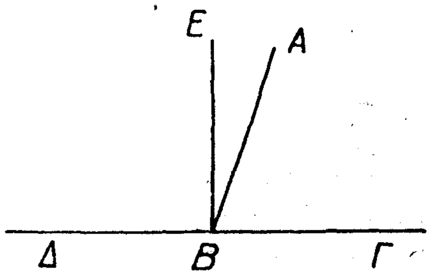
Пошто је HΘ једнако ΘE, а ΘΓ је заједничко, две стране HΘ, ΘΓ једнаке странама EΘ, ΘΓ, и то одговарајућим, и основица ΓH једнака основици ΓE, то је угао ΓΘH једнак углу EΘΓ, и они су при томе упоредни. Па ако права подигнута на другој правој образује са њом међусобно једнаке упоредне углове, сваки од тих углова је прав, а подигнута права се зове нормала на оној на којој је подигнута.

Дакле права ГΘ је нормала на датој бескрајној правој АВ из дате тачке Г, која не припада датој правој. А то је требало извести.

13.

Ако права повучена над правом образује углове, морају ти углови бити или оба прави или образовати заједно два права угла.

Ако је већ угао ГВА једнак углу АВΔ, они су два права угла. Ако није, повуче се из тачке В права ВЕ под правим углом према ГΔ; тада су ГВЕ, ЕВΔ два права угла; и пошто је угао ГВЕ једнак двама угловима ГВА и АВЕ, онда, ако се дода исти угао ЕВΔ, два угла ГВЕ, ЕВΔ су једнаки трима угловима ГВА, АВЕ, ЕВΔ. С друге стране, пошто је угао ΔВА једнак угловима ΔВЕ, ЕВА, то, ако се дода исти угао АВГ, два угла ΔВА, АВГ једнаки су трима угловима ΔВЕ, ЕВА, АВГ. Како је раније показано углови ГВЕ, ЕВΔ једнаки су истим трима угловима, а оно што је једнако истом, једнако је међусобно; значи углови ГВЕ, ЕВΔ су једнаки угловима ΔВА, АВГ. Али су углови ГВЕ, ЕВΔ два права угла, то онда и углови ΔВА, АВГ заједно сачињавају два права угла.



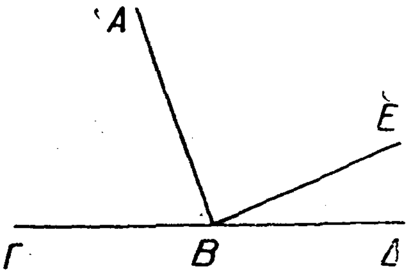
Дакле, ако права подигнута над правом образује углове, ти углови морају бити или оба прави или образовати заједно два права угла. А то је требало доказати.

14.

Ако ма са којом правом, у истој тачки на њој, две друге праве са различитих страна прве праве граде суседне углове, који заједно образују два права угла, те две праве морају се налазити у истој правој.

Нека ма код које праве АВ две друге праве ВГ, ВΔ, повучене из исте тачке В, но не са исте стране праве АВ, граде суседне углове АВГ, АВΔ који заједно образују два права угла. Тврдим да су ГВ и ВΔ у истој правој.

Ако се права ВΔ не налази у правој ВГ, нека се права ВЕ налази у правој ГВ.



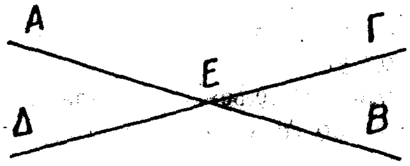
Пошто је тада права АВ подигнута над правом ГВЕ, углови АВГ, АВЕ образују заједно два права угла; али и углови АВГ, АВΔ сачињавају два права угла. Према томе су углови ГВА, АВЕ једнаки угловима ГВА, АВΔ. Ако се пак одузме заједнички угао ГВА биће остатак АВЕ једнак остатку АВΔ, мањи – већем, а то је немогуће. Дакле ВЕ не припада правој ГВ Слично се може доказати да не постоји никаква друга права сем ВΔ. Према томе су ГВ и ВΔ у истој правој.

Тако, ако ма код које праве, код исте тачке на њој, две праве са различитих страна прве праве граде суседне углове, који заједно образују два права угла, онда се морају те две праве налазити у истој правој. А то је требало доказати.

15.

Ако се две праве секу, оне образују унакрсне углове, који су једнаки један другоме.

Нека се две праве АВ, ГΔ секу у тачки Е. Тврдим да је угао АЕГ једнак углу ΔЕВ и угао ГЕВ једнак углу АЕΔ.



Пошто права АЕ, подигнута над правом ГΔ. гради углове ГЕА, АЕΔ, ти су углови заједно једнаки двама правим угловима. С друге стране, пошто права ΔЕ подигнута над правом АВ гради углове АЕΔ, ΔЕВ, ти су углови заједно једнаки двама правим угловима Како је раније показано и углови ГЕА, АЕΔ су заједно једнаки двама правим угловима, па су према томе углови ГЕА, АЕΔ једнаки угловима АЕΔ, ΔЕВ. Кад се одузме заједнички угао АЕΔ, биће остатак — угао ГЕА — једнак остатку — углу ВЕΔ. На сличан начин се доказује да су и углови ГЕВ, ΔЕА једнаки.

Тако, ако се две праве секу, оне образују унакрсне углове, који су једнаки један другоме. А то је требало доказати.

(Закључак.

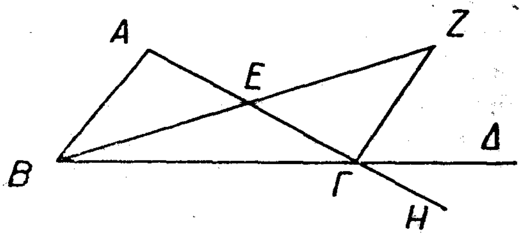
Из претходног је јасно да, ако се две праве секу, оне граде код тачке пресека углове, који заједно образују четири права угла.)

16.

У сваком троуглу је спољашњи угао, образован продужењем једне стране, већи од сваког од два унутрашња несуседна угла.

Нека је АВГ троугао; продужи се једна његова страна ВГ до Δ. Тврдим да је спољашњи угао АГΔ већи од сваког од два унутрашња несуседна угла ГВА и ВАГ

Преполови се АГ тачком Е, па се повучена права ВЕ продужи праволиниски до Z, пренесе се ЕZ једнако ВЕ, и повуче ZГ, па се продужи АГ до Н.



Пошто је АЕ једнако ЕГ, а ВЕ једнако ЕZ, то су две стране АЕ, ЕВ једнаке двема странама ГЕ, ЕZ, и то одговарајућим; и угао АЕВ једнак је углу ZЕГ, као унакрсни. Стога је основица АВ једнака основици ZГ, и троугао АВЕ једнак је троуглу ZЕГ, и остали углови су једнаки осталим угловима, и то одговарајућим, који су спрам једнаких страна. Према томе је угао ВАЕ једнак углу ЕГZ.

Али угао ЕГΔ је већи од угла ЕГZ, те је и угао АГΔ већи од угла ВАЕ. Слично се, половљењем ВГ, доказује да је угао ВГН, а то значи и угао АГΔ, већи од угла АВГ.

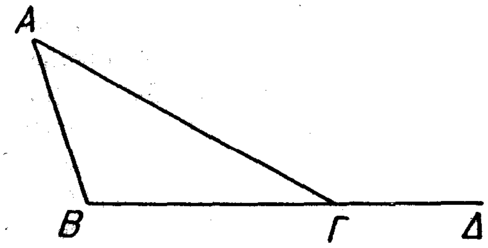
Дакле, у сваком троуглу је спољашњи угао, образован продужењем једне стране, већи од сваког од два унутрашња несуседна угла. А то је требало доказати.

17.

У сваком троуглу је збир двају углова, произвољно изабраних, мањи од два права угла.

Нека троугао буде АВГ. Тврдим да је у троуглу АВГ збир двају углова, произвољно изабраних, мањи од два права угла.

Нека се продужи ВГ према Δ.



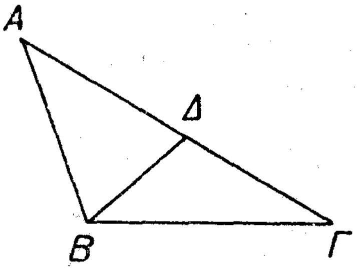
Пошто је у троуглу АВГ угао АГΔ спољашњи, он је већи од унутрашњег несуседног угла АВГ. Додајмо сваком исти угао АГВ. Тада су углови АГΔ, АГВ већи од углова АВГ, ВГА. Али су углови АГΔ, АГВ једнаки двама правим, и према томе су углови АВГ, ВГА мањи од два права угла. На сличан начин се доказује да су и углови ВАГ, АГВ мањи од два права угла, а такође и ГАВ, АВГ.

Тако, у сваком троуглу је збир два угла, произвољно изабраних, мањи од два права угла. А то је требало доказати·

18.

У сваком троуглу спрам веће стране лежи већи угао.

Нека је у троуглу АВГ страна АГ већа од стране АВ. Тврдим да је угао АВГ већи од угла ВГА.



Пошто је АГ веће од АВ, нацрта се АΔ једнако АВ и повуче се ВΔ.

А пошто је у троуглу ВГΔ угао АΔВ спољашњи, он је већи од унутрашњег несуседног угла ΔГВ. Али угао АΔВ једнак је углу АВΔ, пошто је страна АВ једнака АΔ. Због тога је и угао АВΔ већи од угла АГВ. Тим пре је и угао АВГ већи од угла АГВ.

Дакле, у сваком троуглу спрам веће стране лежи већи угао. А то је требало доказати.

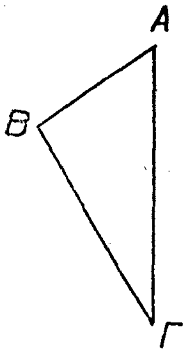
19.

У сваком троуглу спрам већег угла лежи већа страна.

Нека је у троуглу АВГ угао АВГ већи од угла ВГА. Тврдим да је страна АГ већа од стране АВ.

Ако то није, онда или је АГ једнако АВ или је мање. Али АГ није једнако АВ, јер тада би био и угао АВГ једнак углу АГВ, а то није. Према томе АГ није једнако АВ. А такође АГ није ни мање од АВ, јер тада би и угао АВГ био мањи од угла АГВ, а то није; према томе АГ није ни мање од АВ. А показано је да нису ни једнаки. Дакле АГ је веће од АВ.

Дакле, у сваком троуглу спрам већег угла лежи већа страна. А то је требало доказати.



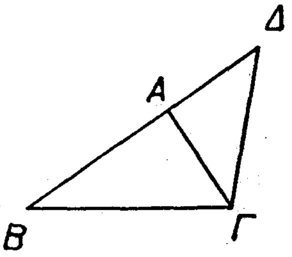
20.

У сваком троуглу збир двеју страна, произвољно изабраних, већи је од треће стране.

Нека је АВГ троугао. Тврдим да је у троуглу АВГ збир двеју страна, произвољно изабраних, већи од треће, наиме ВА, АГ од ВГ и АВ, ВГ од АГ и ВГ, ГА од АВ.

Нека се продужи ВА до тачке Δ, пренесе се АΔ једнако ГА и повуче се ΔГ.

Пошто је ΔА једнако АГ, угао АΔГ је једнак углу АГΔ. Тада је угао ВГΔ већи од угла АΔГ; и пошто је ΔГВ троугао, који има угао ВГΔ већи од угла ВΔГ, спрам већег угла лежаће већа страна, и због тога је ΔВ веће од ВГ. Али ΔА је једнако АГ, па према томе су ВА, АГ веће од ВГ. Слично се доказује да су АВ, ВГ веће од ГА, а ВГ, ГА од АВ.

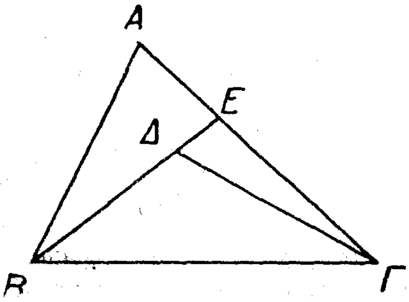


У сваком троуглу збир двеју страна, произвољно изабраних, већи је од треће стране. А то је требало доказати.

21.

Ако се у унутрашњости троугла из крајњих тачака једне његове стране повуку две праве које се секу, збир повучених правих биће мањи од двеју осталих страна троугла, а угао, који оне граде, већи.

У троуглу АВГ су на једној страни ВГ из њених крајева В, Г повучене две праве ВΔ, ΔГ, које се секу. Тврдим да је збир ВΔ и ΔГ мањи од збира двеју осталих страна троугла ВА и АГ, а угао ВΔГ је већи од угла ВАГ.



Продужимо ВΔ до Е. И пошто је у сваком троуглу збир двеју страна већи од треће, то је и у троуглу АВЕ збир двеју страна АВ и АЕ већи од треће. Ако се дода иста дуж ЕГ, збир ВА и АГ биће већи од збира ВЕ и ЕГ. С друге стране, пошто је у троуглу ГЕΔ збир двеју страна ГЕ и ЕΔ већи од треће ГΔ, то је, после додавања исте дужине ΔВ, збир ГЕ и ЕВ већи од збира ГΔ и ΔВ. А доказано је да је збир ВА и АГ већи од збира ВЕ и ЕГ, тим пре је збир ВА и АГ већи од збира ВΔ и ΔГ.

Даље, пошто је у сваком троуглу спољашњи угао већи од несуседног унутрашњег, то је и у троуглу ГΔЕ спољашњи угао ВΔГ већи од ГЕΔ. Због тога је и у троуглу АВЕ спољашњи угао ГЕВ већи од угла ВАГ. Али је доказано да је угао ВΔГ већи од угла ГЕВ. Тим пре је угао ВΔГ већи од угла ВАГ.

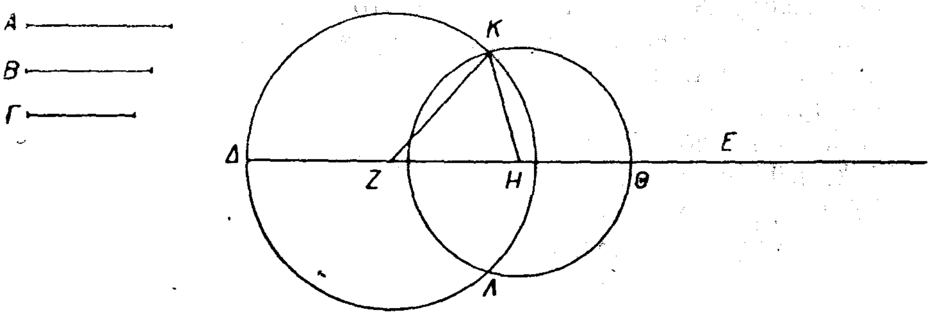
Дакле, ако се у унутрашњости троугла из крајњих тачака једне његове стране повуку две праве које се секу, збир повучених правих биће мањи од две остале стране троугла, а угао, који оне граде, је већи. А то је требало доказати.

22.

Од три праве, које су једнаке трима датим правама, начинити троугао; при томе збир двеју, произвољно узетих, мора бити већи од треће, јер је у сваком троуглу збир двеју, произвољно узетих, страна већи од преостале стране.

Нека су A, B, Г три дате праве, од којих је збир двеју, произвољно узетих, већи од треће, наиме A и B од Г, A и Г од B и B и Г од A. Треба од правих, које су једнаке A, B, Г, начинити троугао

Повуче се права ΔE ограничена тачком Δ и неограничена према E, пренесе се на њу ΔZ једнако A, ZH једнако B и HΘ једнако Г. Са средиштем у Z и отстојањем ZΔ опише



се круг ΔKΛ; с друге стране, са средиштем у H и са отстојањем HΘ опише се круг KΛΘ и повуку се KZ и KH. Тврдим да је троугао KZH начињен од три праве, које су једнаке A, B, Г.

Пошто је тачка Z средиште круга ΔKΛ, то је ZΔ једнако ZK. Али је ZΔ једнако A, према томе је KZ једнако A. С друге стране, пошто је тачка H средиште круга ΛKΘ, то је HΘ једнако HK; али HΘ једнако је Г, па стога и KH једнако Г. А ZH је једнако B. Према томе су три праве KZ, ZH, HK једнаке A, B, Г.

На овај начин је од три праве KZ, ZH, HK, које су једнаке трима датим правама A, B, Г начињен троугао KZH. А то је требало извести.

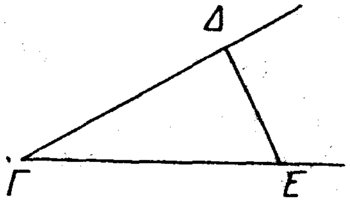
23.

Конструисати на датој правој у датој тачки на њој праволиниски угао једнак датом праволиниском углу.

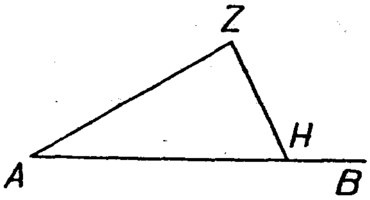
Нека је AB дата права и на њој тачка A, а ΔΓE дати праволиниски угао. Треба на датој правој AB код дате тачке

А на њој конструисати праволиниски угао једнак датом праволиниском углу ΔΓE.

Узму се на свакој од правих ΓΔ, ΓE произвољне тачке[87] Δ, E и повуче ΔE. Начини се од три праве, које су једнаке ΓΔ, ΔE, ΓE троугао AZH тако да је ΓΔ једнако AZ, ΓE једнако AH и ΔE једнако ZH.



Пошто су две стране ΔΓ, ΓE једнаке странама ZA, AH, и то одговарајућим, и основица ΔE једнака основици ZH, то је угао ΔΓE једнак углу ZAH.

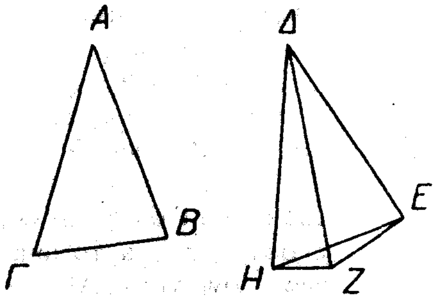


На овај начин је на датој правој AB, у датој тачки на њој A, конструисан праволиниски угао ZAH једнак датом праволиниском углу ΔΓE. А то је требало извести.

24.

Ако су код два троугла две стране једног једнаке двема странама другог, и то одговарајућим, и угао првог, који образују стране једнаке странама другог, већи од таквог угла другог троугла, онда је основица првог већа од основице другог.

Нека су ABΓ и ΔEZ два троугла са две стране AB, AΓ, које су једнаке странама ΔE и ΔZ, и то одговарајућим, наиме AB једнако ΔE и AΓ једнако ΔZ, а угао код A је већи од угла код Δ. Тврдим да је основица BΓ већа од основице EZ.



Пошто је угао BAΓ већи од угла EΔZ, конструише се на правој ΔE у датој тачки Δ на њој угао EΔH једнак углу BAΓ и пренесе се ΔH једнако AΓ или ΔZ, и повуку се EH и ZH

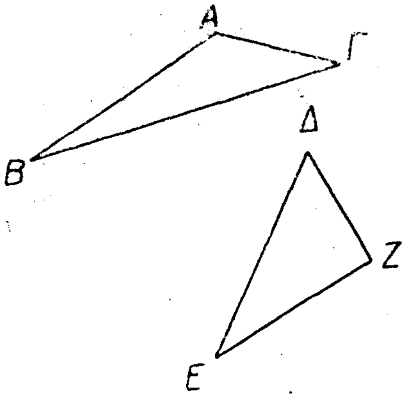
Пошто је АВ једнако ΔЕ, а АГ једнако ΔН, а то значи да су две стране ВА, АГ једнаке двема странама ЕΔ, ΔН, и то одговарајућим, и угао ВАГ једнак углу ЕΔН, то је основица ВГ једнака основици ЕН. С друге стране, пошто је ΔZ једнако ΔН, угао ΔНZ једнак је углу ΔZН. Стога је угао ΔZН већи од угла ЕНZ, а тим пре угао ЕZН већи од угла ЕНZ. И пошто је у троуглу ЕZН угао ЕZН већи од угла ЕНZ, а спрам већег угла налази се већа страна, то ће страна ЕН бити већа од ЕZ. Али је ЕН једнако ВГ, па ће и ВГ бити веће од ЕZ.

Дакле, ако су код два троугла две стране једног једнаке двема странама другог, и то одговарајућим, и угао првог, који образују стране једнаке странама другог, већи од таквог угла другог троугла, онда је основица првог већа од основице другог. А то је требало доказати.

25.

Ако су код два троугла две стране једног једнаке двема странама другог, и то одговарајућим, а основица првог је већа од основице другог, онда је и угао првог, који образују стране једнаке странама другог, већи од таквог угла другог троугла.

Нека су АВГ и ΔЕZ два троугла са две стране АВ, АГ, које су једнаке странама ΔЕ и ΔZ, и то одговарајућим, наиме АВ једнако ΔЕ и АГ једнако ΔZ, а основица ВГ већа од основице ЕZ. Тврдим да је угао ВАГ већи од угла ЕΔZ.



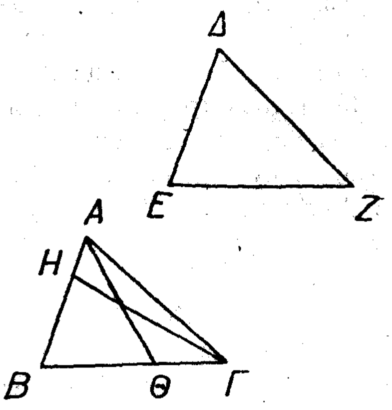
Ако то није, онда је он или једнак или мањи. Али угао ВАГ није једнак углу ЕΔZ, јер би тада и основица ВГ била једнака основици ЕZ, а то није. Према томе угао ВАГ није једнак углу ЕΔZ. Угао ВАГ није ни мањи од угла ЕΔZ, јер би тада и основица ВГ била мања од основице EZ, а то није. Према томе угао ВАГ није ни мањи од угла ЕΔZ. А показано је да нису једнаки, дакле угао ВАГ је већи од угла ЕΔZ.

Дакле, ако су код два троугла две стране једног једнаке двема странама другог, и то одговарајућим, а основица првог је већа од основице другог, онда је и угао првог, који образују стране једнаке странама другог, већи од таквог угла другог троугла. А то је требало доказати.

26.

Ако су код два троугла два угла једног једнаки двама угловима другог, и то одговарајућим, и једна страна једног једнака једној страни другог или она на којој су једнаки углови или она што је спрам једног од једнаких углова, онда су и остале стране једнаке осталим странама, и то одговарајућим, а преостали угао једнак је преосталом углу.

Нека су код два троугла АВГ, ΔEZ два угла АВГ, ВГА једнаки двама угловима ΔEZ, EZΔ, и то одговарајућим, наиме угао АВГ углу ΔEZ и угао ВГА углу EZΔ, и нека је једна страна једног једнака једној страни другог, прво страна ВГ страни EZ, на којима су дати једнаки углови. Тврдим да су тада и остале стране једнаке осталим странама, и то одговарајућим, наиме страна АВ страни ΔЕ, страна АГ страни ΔZ, а преостали угао преосталом углу, наиме угао ВАГ углу ЕΔZ.



Ако пак АВ није једнако ΔЕ, онда је једно од њих веће. Нека је веће АВ; тада се пренесе ВН једнако ΔЕ и повуче се НГ.

Пошто је ВН једнако ΔЕ и ВГ једнако EZ, значи да су две стране ВН, ВГ једнаке двема странама ΔЕ, EZ, и то одговарајућим, и угао НВГ једнак углу ΔEZ, дакле и основица НГ једнака је основици ΔZ, и троугао НВГ једнак троуглу ΔEZ и остали углови су једнаки осталим угловима, који се налазе спрам једнаких страна. Према томе је угао НГВ једнак углу ΔZE. Али је по претпоставци угао ΔZE једнак углу ВГА. Према томе би угао ВГН био једнак углу ВГΔ, мањи већем, а то је немогуће. На овај начин АВ није неједнако ΔE, дакле једнако је. Али и ВГ је једнако EZ. Према томе су две стране АВ, ВГ једнаке двема странама ΔE, EZ, и то одговарајућим, и угао АВГ једнак је углу ΔEZ, услед чега је и основица АГ једнака основици ΔZ и преостали угао ВАГ једнак преосталом углу EΔZ.

Нека су сад једнаке стране, које су спрам једнаких углова, наиме АВ једнака страни ΔE. Тврдим да су и остале стране једног једнаке осталим странама другог, и то одговарајућим, наиме страна АГ страни ΔZ, страна ВГ страни EZ и преостали угао ВАГ једнак је преосталом углу EΔZ.

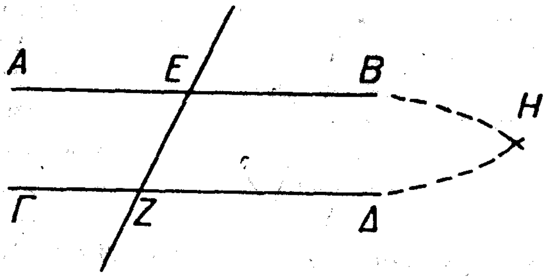
Ако пак ВГ није једнако EZ, онда је једна од њих већа. Нека је веће, ако је могуће, ВГ; тада се на ВГ пренесе ВΘ једнако EZ и повуче АΘ. Пошто је ВΘ једнако EZ, а АВ једнако ΔE, то су две стране АВ, ВΘ једнаке двема странама ΔE, EZ, и то одговарајућим, а чине једнаке углове. Па према томе је основица АΘ једнака основици ΔZ, и троугао АВΘ једнак троуглу ΔEZ, и остали углови једнаки осталим угловима, који су спрам једнаких страна. Према томе је угао ВΘА једнак углу EZΔ. Али је угао EZΔ једнак углу ВГА. Услед тога би у троуглу АΘГ спољашњи угао ВΘА био једнак унутрашњем несуседном ВГА, а то је немогуће. На овај начин ВГ није неједнако EZ, значи да је једнако EZ. Али је и АВ једнако ΔZ. Према томе су две стране АВ, ВГ једнаке двема странама ΔE, EZ, и то одговарајућим, и оне граде једнаке углове, и основица АГ једнака је основици ΔZ, и троугао АВГ једнак троуглу ΔEZ и преостали угао ВАГ једнак преосталом углу EΔZ.

На овај начин, ако су код два троугла два угла једног једнаки двама угловима другог, и то одговарајућим, и једна страна једног једнака једној страни другог или она на којој су једнаки углови или она што је спрам једног од једнаких углова, онда су и остале стране једнаке осталим странама, и то одговарајућим, и преостали угао преосталом углу. А то је требало доказати.

27.

Ако права која сече друге две праве гради са њима једнаке унутрашње наизменичне углове, ове две праве су паралелне.

Нека права EZ која сече две праве АВ, ГΔ гради са њима један другоме једнаке унутрашње наизменичне углове AEZ и EZΔ. Тврдим да је права АВ паралелна правој ГΔ.



Ако пак није, онда се АВ и ГΔ секу продужене или ка В, Δ или ка А, Г. Нека се оне продужене ка В, Δ секу у тачки Н. Тада је у троуглу НЕZ спољашњи угао AEZ једнак унутрашњем несуседном EZH, а то је немогуће. Према томе се праве АВ и ГΔ продужене ка В, Δ не секу. Слично се доказује да се оне не секу ни са стране А, Г. А праве које се не секу ни са једне стране паралелне су. Према томе је права АВ паралелна правој ГΔ.

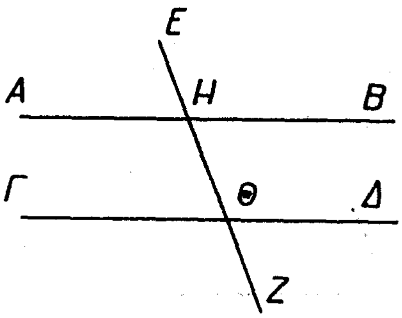
На овај начин, ако права која сече две праве гради са њима једнаке унутрашње наизменичне углове, ове две праве паралелне су. А то је требало доказати.

28.

Ако права која сече друге две праве гради са исте своје стране спољашњи угао једнак одговарајућем унутрашњем углу или два унутрашња угла са исте стране једнака двама правим угловима, ове две праве паралелне су.

Нека права EZ, која сече две праве АВ, ГΔ, гради са исте своје стране спољашњи угао ЕНВ једнак одговарајућем унутрашњем углу НΘΔ или два унутрашња угла са исте стране ВНΘ и НΘΔ једнака двама правим угловима. Тврдим да је АВ паралелно ГΔ.

Пошто је угао ЕНВ једнак углу НΘΔ, а угао ЕНВ једнак углу АНΘ, то је и угао АНΘ једнак углу НΘΔ, а они су унутрашњи наизменични, због чега је права АВ паралелна правој ГΔ.

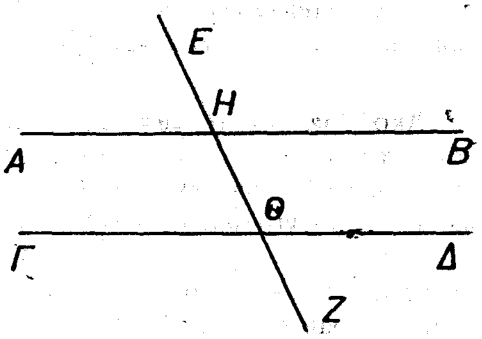


С друге стране, пошто су углови ВНΘ, НΘΔ једнаки са два права, а углови АНΘ, ВНΘ такође једнаки са два права, то су углови АНΘ, ВНΘ једнаки угловима ВНΘ, НΘΔ. Ако се одузме заједнички угао ВНΘ, биће остатак, угао АНΘ, једнак остатку, углу НΘΔ. А они су унутрашњи наизменични, па због тога је права АВ паралелна правој ГΔ.

На тај начин, ако права која сече друге две праве гради са исте своје стране спољашњи угао једнак одговарајућем унутрашњем или два унутрашња угла са исте стране једнака двама правим угловима, ове две праве паралелне су. А то је требало доказати.

29.

Ако права сече две паралелне праве, она гради унутрашње наизменичне углове једнаке, спољашњи угао једнак одговарајућем унутрашњем углу и два унутрашња угла са исте стране једнака двама правим угловима.



Нека права EZ сече две паралелне праве АВ и ГΔ. Тврдим да она гради унутрашње наизменичне углове АНΘ, НΘΔ једнаке и са исте стране од ње спољашњи угао ЕНВ једнак одговарајућем унутрашњем углу НΘΔ, и два унутрашња ВНΘ и НΘΔ једнака двама правим угловима.

Ако пак угао AHΘ није једнак углу HΘΔ, онда је један од њих већи. Нека је већи AHΘ. Ако се дода сваком исти угао BHΘ, биће углови AHΘ, BHΘ већи од углова BHΘ, HΘΔ. Али углови AHΘ, BHΘ једнаки су са два права. Према томе су углови BHΘ, HΘΔ мањи од два права угла. Али се са угловима мањим од два права угла праве, продужене бескрајно, секу. Па према томе AB, ΓΔ, продужене бескрајно, морају да се секу. Али оне се не секу јер су по претпоставци паралелне. Према томе није угао AHΘ неједнак углу HΘΔ; значи да је једнак. Но угао AHΘ једнак је углу EHB, па према томе је угао EHB једнак углу HΘΔ. Ако се дода сваком од ових угао BHΘ, биће углови EHB, BHΘ једнаки угловима BHΘ, HΘΔ. Али углови EHB, BHΘ једнаки су двама правим угловима, па према томе су и углови BHΘ, HΘΔ једнаки двама правима угловима.

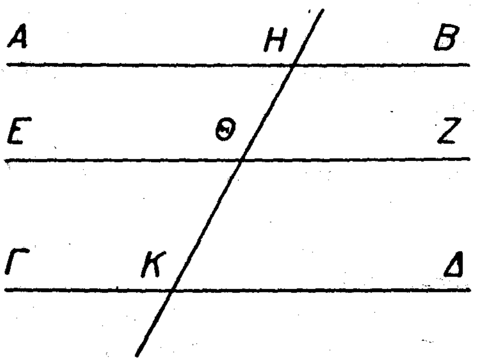
На овај начин, ако права сече две паралелне праве, она гради унутрашње наизменичне углове једнаке, спољашњи угао једнак одговарајућем унутрашњем углу и два унутрашња угла са исте стране једнака двама правим угловима. А то је требало доказати.

30.

Праве које су паралелне истој правој паралелне су међусобно.

Нека је свака од AB, ΓΔ паралелна EZ. Тврдим да је и AB паралелно ΓΔ.

Нека их сече права HK.



Пошто је за паралелне праве AB, EZ права HK трансверзала, то је угао AHK једнак углу HΘZ. Исто тако, пошто је и за паралелне праве EZ, ΓΔ права HK трансверзала, то је угао HΘZ једнак углу HKΔ. Раније је показано да је угао AHK једнак углу HΘZ. И због тога је угао AHK једнак углу HKΔ. А они су унутрашњи наизменични. Па према томе је AB паралелна ΓΔ.

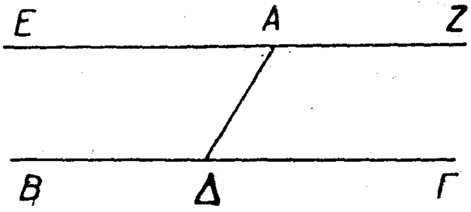
На овај начин, праве које су паралелне истој правој паралелне су и међусобно. А то је требало доказати.

31.

Кроз дату тачку повући праву линију паралелну датој правој.

Нека су А дата тачка и ВГ дата права. Треба кроз тачку А повући праву линију паралелну правој ВГ.

Узме се на правој ВГ произвољна тачка Δ и повуче АΔ; затим се конструише на правој ΔА код тачке А угао ΔАЕ једнак углу АΔГ, па се продужи права ЕА правом АZ.



Како права АΔ, која сече две праве ВГ, ЕZ, чини са овима једнаке унутрашње наизменичне углове ЕАΔ, АΔГ, то је права ЕАZ паралелна правој ВГ.

На овај начин, кроз дату тачку повучена је права линија паралелна датој правој. А то је требало извести.

32.

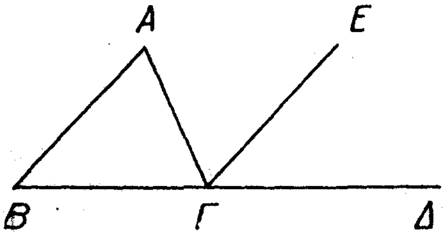
У сваком троуглу спољашњи угао образован продужењем једне стране једнак је двама несуседним унутрашњим угловима, а три унутрашња угла троугла једнаки су двама правим угловима.

Нека је АВГ троугао и нека се продужи једна његова страна ВГ до Δ. Тврдим да је спољашњи угао АГΔ једнак двама несуседним унутрашњим угловима ГАВ, АВГ, и да су три унутрашња угла АВГ, ВГА, ГАВ једнаки двама правим угловима.

Нека се повуче кроз тачку Г права ГЕ паралелна правој АВ.

Пошто је АВ паралелно ГЕ а права АГ њихова трансверзала, то су унутрашњи наизменични углови ВАГ, АГЕ једнаки међусобно. Исто тако, пошто је АВ паралелна ГЕ и ВΔ је њихова трансверзала, биће спољашњи угао ЕГΔ једнак унутрашњем сагласном АВГ. Раније је показано да је угао АГЕ једнак углу ВАГ. Према томе је цео угао АГΔ једнак двама унутрашњим несуседним угловима ВАГ, АВГ.

Кад се сваком од њих дода исти угао АГВ, биће углови АГΔ, АГВ једнаки трима угловима АВГ, ВГА, ГАВ. Али су АГΔ, АГВ једнаки двама правим угловима, па према томе су и три угла АВГ, ВГА, ГАВ једнаки двама правим угловима.



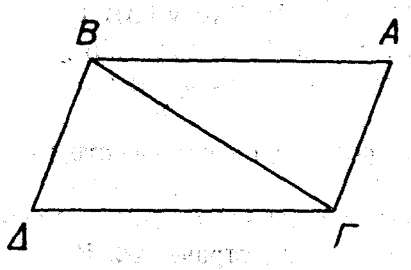
На овај начин, у сваком троуглу спољашњи угао образован продужењем једне стране једнак је двама несуседним унутрашњим угловима, а три унутрашња угла троугла једнаки су двама правим угловима. А то је требало доказати.

33.

Праве што спајају са истих страна крајеве једнаких и паралелних дужи саме су једнаке и паралелне.

Нека су АВ, ГΔ једнаке и паралелне дужи и АГ, ВΔ праве које спајају са истих страна њихове крајеве. Тврдим да су АГ, ВΔ такође једнаке и паралелне.

Повуче се ВГ. Пошто је АВ паралелно ГΔ, а ВГ је њихова трансверзала, унутрашњи наизменични углови АВГ, ВГΔ једнаки су; и пошто је АВ једнако ГΔ, а ВГ је заједничко, то су две стране АВ, ВГ једнаке двема странама ВГ, ГΔ, а такође и угао АВГ једнак углу ВГΔ, због чега је и основица АГ једнака основици ВΔ, и троугао АВГ једнак троуглу ВГΔ, па и остали углови једнаки осталим угловима, и то одговарајући, који леже спрам једнаких страна. Зато је и угао АГВ једнак углу ГВΔ. И пошто трансверзала ВГ са две праве АГ, ВΔ чини једнаке унутрашње наизменичне углове, то је АГ паралелна ВΔ. А раније је показано да су оне и једнаке.



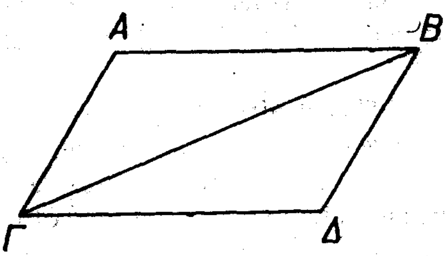
На овај начин, праве што спајају са истих страна крајеве једнаких и паралелних дужи саме су једнаке и паралелне. А то је требало доказати.

34.

Код паралелограма[38] су наспрамне стране и углови једнаки међусобно и дијагонала га полови.

Нека је АГΔВ паралелограм и ВГ његова дијагонала. Тврдим да су код паралелограма АГΔВ наспрамне стране и углови једнаки међусобно и да га дијагонала ВГ полови.

Пошто је АВ паралелно ГΔ и ВГ њихова трансверзала, то су унутрашњи наизменични углови АВГ, ВГΔ једнаки међусобно. Исто тако, пошто је АГ паралелно ВΔ и ВГ је њихова трансверзала, унутрашњи наизменични углови АГВ, ГВΔ једнаки су међу собом. Према томе су АВГ, ВГΔ два троугла, који имају два угла АВГ, ВГА једнака са два угла ВГΔ, ГВΔ и једну страну једнаку једној страни и то спрам једнаких углова, наиме заједничку страну ВГ. Због тога морају бити једнаке и остале стране осталим странама, и то одговарајућим, и преостали угао преосталом углу. Према томе је страна АВ једнака страни ГΔ, страна АГ страни ВΔ и угао ВАГ углу ГΔВ. Пошто је угао АВГ једнак углу ВГΔ, а угао ГВΔ углу АГВ, то је цео угао АВΔ једнак целом углу АГΔ. А раније је доказано да је и угао ВАГ једнак углу ГΔВ.



Према томе су код паралелограма наспрамне стране и наспрамни углови једнаки међусобно.

Још тврдим да га дијагонала полови. Пошто је АВ једнако ГΔ, а ВГ је заједничко, то су две стране АВ, ВГ једнаке двема странама ГΔ, ВГ, и то одговарајућим, и угао АВГ је једнак углу ВГΔ. Због тога је основица АГ једнака основици ΔВ и троугао АВГ једнак троуглу ВГΔ.

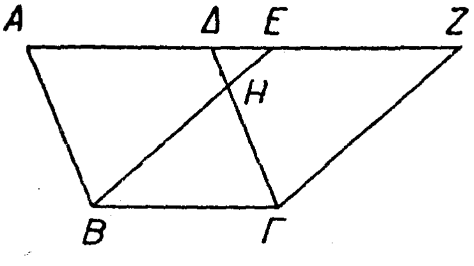
На овај начин дијагонала ВГ полови паралелограм АГΔВ. А то је требало доказати.

35.

Паралелограми са истом основицом између истих паралелних једнаки су један другом.

Нека су АВГΔ, ЕВГZ паралелограми са истом основицом ВГ између истих паралелних АZ, ВГ. Тврдим да је паралелограм АВГΔ једнак паралелограму ЕВГZ.

Пошто је АВГΔ паралелограм, АΔ је једнако ВГ. Из истог разлога је ЕZ једнако ВГ; а и АΔ једнако ЕZ, а ΔЕ је заједничко. Према томе је цела дуж АЕ једнака целој дужи ΔZ. И АВ је једнако ΔГ. На овај начин су две стране ЕА, АВ једнаке двема странама ZΔ, ΔГ, и то одговарајућим; и угао ZΔГ је једнак углу ЕАВ, спољашњи унутрашњем. Због тога је основица ЕВ једнака основици ZГ и троугао ЕАВ троуглу ΔZГ. Кад се одузме заједнички троугао ΔНЕ, биће остатак, трапез АВНΔ, једнак остатку, трапезу ЕНГZ. Ако се заједнички троугао НВГ дода, биће цео паралелограм АВГΔ једнак целом паралелограму ЕВГZ.



На овај начин, паралелограми са истом основицом између истих паралелних једнаки су један другом. А то је требало доказати.

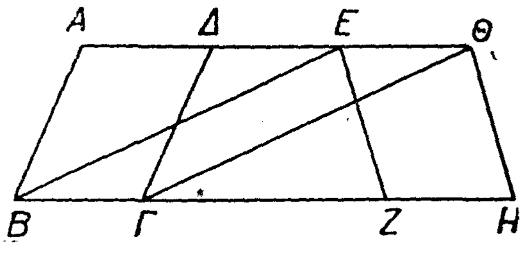
36.

Паралелограми са једнаким основицама између истих паралелних једнаки су један другом.

Нека су АВГΔ, ЕZНΘ паралелограми са једнаким основицама ВГ, ZН између истих паралелних АΘ, ВН. Тврдим да је паралелограм АВГΔ једнак паралелограму ЕZНΘ.

Нека се повуку ВЕ, ГΘ. Пошто је ВГ једнако ZН, а ZН је једнако ЕΘ, то је и ВГ једнако ЕΘ; а оне су и паралелне; а како су дужи које спајају са истих страна једнаке и паралелне дужи једнаке и паралелне (дакле, дуж ЕВ једнака и паралелна дужи ΘГ), биће ЕВГΘ паралелограм. И он је једнак паралелограму АВГΔ, пошто имају исту основицу

ВГ, а налазе се између истих паралелних ВГ, АΘ. Из истог разлога је паралелограм ЕZНΘ једнак паралелограму ЕВГΘ.



Па према томе је паралелограм АВГΔ једнак паралелограму ЕZНΘ.

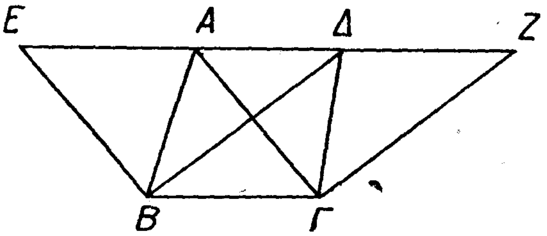
На овај начин, паралелограми са једнаким основицама између истих паралелних једнаки су један другом. А то је требало доказати.

37.

Троуглови са истом основицом између истих паралелних једнаки су један другом.

Нека су троуглови АВГ, ΔВГ над истом основицом ВГ и између истих паралелних АΔ, ВГ. Тврдим да је троугао АВГ једнак троуглу ΔВГ.

Нека се продужи АΔ са сваке стране до Е и Z и повуче кроз В права паралелна ГА и кроз Г права ГZ паралелна ВΔ. Тада су и ЕВГА и ΔВГZ паралелограми; и они су једнаки, пошто су са истом основицом ВГ и између истих паралелних ВГ, ЕZ; а троугао АВГ је половина паралелограма ЕВГА, пошто је АВ дијагонала, која га полови; и троугао ΔВГ је половина паралелограма ΔВГZ, пошто је ΔГ дијагонала, која га полови. (А и половине од једнаког су једнаке међу собом). Према томе је троугао АВГ једнак троуглу ΔВГ.



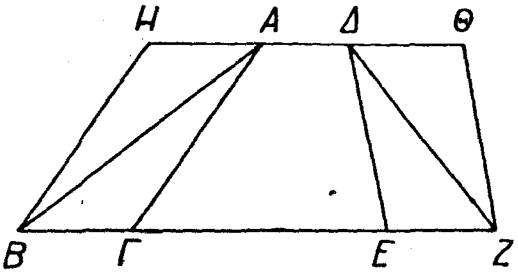
На овај начин, троуглови са истом основицом између истих паралелних једнаки су један другом. А то је требало доказати.

38.

Троуглови са једнаким основицама између истих паралелних једнаки су један другом.

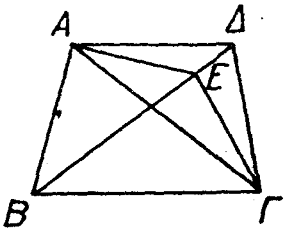
Нека су АВГ, ΔΕΖ троуглови са једнаким основицама ВГ, ΕΖ и између истих паралелних ΒΖ, ΑΔ. Тврдим да је троугао АВГ једнак троуглу ΔΕΖ.

Продужи се ΑΔ са сваке стране до Η и Θ и повуку се кроз В права ВН паралелна ГА и кроз Ζ права ΖΘ паралелна ΔΕ. Тада су НВГА и ΔΕΖΘ паралелограми и НВГА једнак је ΔΕΖΘ, пошто су они са једнаким основицама ВГ, ΕΖ и између истих паралелних ΒΖ, ΗΘ; при томе је троугао АВГ половина паралелограма НВГА, јер га дијагонала АВ полови. И троугао ΖΕΔ је половина паралелограма ΔΕΖΘ, јер га дијагонала ΔΖ полови (А и половине од једнаког су једнаке међусобно). Према томе је троугао АВГ једнак троуглу ΔΕΖ.



На овај начин, троуглови са једнаким основицама између истих паралелних једнаки су један другом. А то је требало доказати.

39.



Једнаки троуглови са истом основицом и са исте њене стране леже између истих паралелних.

Нека су АВГ, ΔВГ једнаки троуглови са истом основицом ВГ и са исте њене стране. Тврдим да они леже између истих паралелних.

Повуче се ΑΔ. Тврдим да је ΑΔ паралелна ВГ.

Ако није, нека се повуче кроз тачку А права АЕ паралелна са ВГ, и нацрта ЕГ. Тада је троугао АВГ једнак троуглу ЕВГ, пошто су на истој основици ВГ и између истих паралелних. Али троугао АВГ једнак је троуглу ΔВГ, према томе је троугао ΔВГ једнак троуглу ЕВГ, већи мањем. А то је немогуће. Права АЕ није према томе паралелна правој ВГ. Слично се може доказати да не постоји никаква друга паралелна права сем праве АΔ. Према томе је АΔ паралелна ВГ.

На овај начин, једнаки троуглови са истом основицом и са исте њене стране леже између истих паралелних. А то је требало доказати.

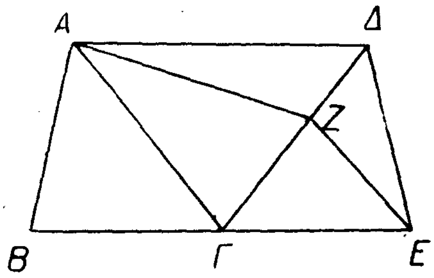
40.

Једнаки троуглови са једнаким основицама са исте стране од њих леже између истих паралелних.

Нека су АВГ, ГΔЕ једнаки троуглови са једнаким основицама ВГ, ГЕ са исте стране ових. Тврдим да они леже између истих паралелних.

Нека се споји А са Δ; тврдим, да је АΔ паралелно ВЕ.

Ако није, повуче се кроз тачку А права AZ паралелна ВЕ и нацрта се права ZЕ. Тада је троугао АВГ једнак троуглу ZГЕ, јер су они са једнаким основицама ВГ, ГЕ и између истих паралелних ВЕ, AZ. Али троугао АВГ је једнак и троуглу ΔГЕ; и према томе троугао ΔГЕ био би једнак троуглу ZГЕ; већи мањем; а то је немогуће. Због тога AZ није паралелно са ВЕ. Слично се може доказати да не постоји никаква друга паралелна права сем АΔ. Према томе је АΔ паралелна ВЕ.



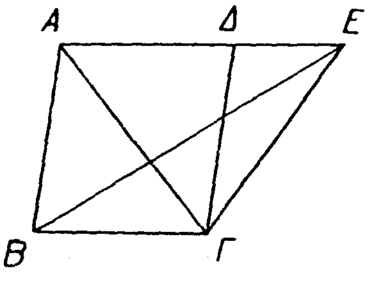
На овај начин, једнаки троуглови са једнаким основицама са исте стране ових леже између истих паралелних. А то је требало доказати.

41.

Ако паралелограм има исту основицу са неким троуглом и ако леже између истих паралелних, онда је паралелограм двапут већи од троугла.

Нека паралелограм АВГΔ и троугао ЕВГ имају исту основицу ВГ и нека леже између истих паралелних ВГ, АЕ. Тврдим да је паралелограм АВГΔ двапут већи од троугла ВЕГ.

Нацрта се АГ. Тада је троугао АВГ једнак троуглу ЕВГ, јер су они са истом основицом ВГ и између истих паралелних ВГ, АЕ. Али паралелограм АВГΔ је двапут већи од троугла АВГ, јер је АГ дијагонала која га полови. Према томе је паралелограм АВГΔ двапут већи од троугла ЕВГ.



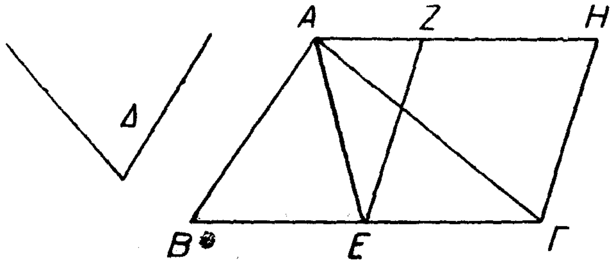
Дакле, ако паралелограм има исту основицу са неким троуглом и ако леже између истих паралелних, онда је паралелограм двапут већи од троугла. А то је требало доказати.

42.

У датом праволиниском углу конструисати паралелограм једнак датом троуглу.

Нека је АВГ дати троугао и Δ дати праволиниски угао. Треба у датом праволиниском углу Δ конструисати паралелограм једнак троуглу АВГ.

Нека се преполови ВГ тачком Е и нацрта АЕ, затим конструише на правој ЕГ код саме тачке Е угао ГЕΖ једнак углу Δ, повуче кроз тачку А права АН паралелна правој ЕГ, а кроз тачку Г права ГН паралелна правој ЕΖ. Тада је ΖЕГН паралелограм. Пошто је ВЕ једнако ЕГ, троугао АВЕ је једнак троуглу АЕГ, јер су са једнаким основицама ВЕ, ЕГ и између



истих паралелних ВГ, АН. Према томе је троугао АВГ двапут већи од троугла АЕГ. Али паралелограм ZЕГН је двапут већи од троугла АЕГ, јер имају исту основицу и између истих су паралелних. Према томе је паралелограм ZЕГН једнак троуглу АВГ и има угао ГЕZ једнак датом углу Δ.

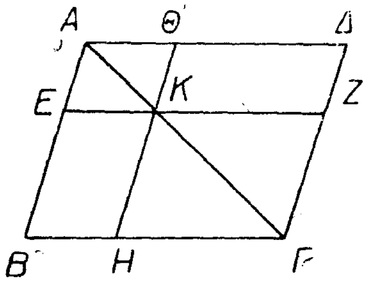
На овај начин је у углу ГЕZ, који је једнак углу Δ, конструисан паралелограм ZЕГН једнак датом троуглу АВГ. А то је требало извести.

43.

У сваком паралелограму допуне паралелограмима на дијагонали једнаке су.

Нека је АВГΔ паралелограм и АГ његова дијагонала; нека су ЕΘ, ZН паралелограми на њој и ВК, КΔ њихове такозване допуне. Тврдим да је допуна ВК једнака допуни КΔ.

Пошто је АВГΔ паралелограм и АГ његова дијагонала, троугао АВГ једнак је троуглу АГΔ. Исто тако, пошто је ЕΘ паралелограм и АК његова дијагонала, троугао АЕК једнак је троуглу АΘК. Из истог разлога троугао КZГ је једнак троуглу КНГ. Пошто је троугао АЕК једнак троуглу АΘК и КZГ троуглу КНГ, то је збир троуглова АЕК и КНГ једнак збиру троуглова АΘК и КZГ; а како је цео троугао АВГ једнак целом АΔГ, биће и остатак, допуна ВК, једнак остатку, допуни КΔ.



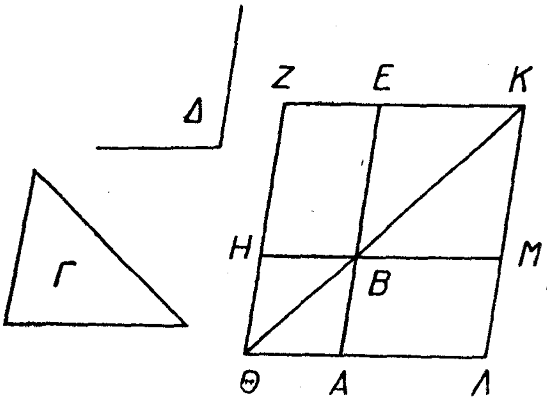
Дакле, у сваком паралелограму допуне паралелограмима на дијагонали једнаке су. А то је требало доказати.

44.

На датој дужи конструисати у датом праволиниском углу паралелограм једнак датом троуглу.

Нека је АВ дата права, Г дати троугао, и Δ дати праволиниски угао. Треба на датој дужи АВ конструисати у датом праволиниском углу Δ паралелограм једнак датом троуглу Г.

У углу EBH, који је једнак углу Δ, конструише се паралелограм BEZH једнак троуглу Γ; и намести се тако да су BE и AB у истој правој, и продужи се ZH до Θ, па затим се повуче кроз A права AΘ паралелна правама BH, EZ и спојница ΘB. Пошто је права ΘZ трансверзала за паралелне



праве AΘ, EZ, то су углови AΘZ, ΘZE једнаки двама правим угловима. А тада су углови BΘH, HZE мањи од два права угла. Али због углова који су мањи од два права угла, праве бескрајно продужене секу се. Према томе праве ΘB, ZE, продужене, морају да се секу. Нека се продуже и секу у K; кроз K повуче се права KΛ паралелна једној од паралелних EA, ZΘ; и нека се продуже ΘA и HB до тачака Λ и M. Према томе је ΘΛKZ паралелограм, ΘK је његова дијагонала, а паралелограмима AH, ME на ΘK таковване допуне су ΛB, BZ. Према томе, је ΛB једнака BZ. Али BZ је једнак троуглу Γ, па стога и ΛB једнак Γ. И пошто је угао HBE једнак углу ABM, а угао HBE једнак углу Δ, то је и угао ABM једнак углу Δ.

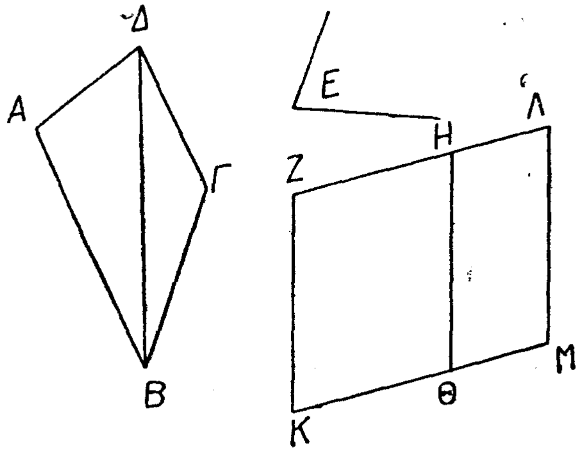
На овај начин је на датој дужи AB у праволиниском углу ABM, који је једнак Δ, конструисан паралелограм ΛB, једнак датом троуглу Γ. А то је требало извести.

45.

У датом праволиниском углу конструисати паралелограм једнак датој праволиниској слици.

Нека је ABΓΔ дата праволиниска слика и E дати праволиниски угао. Треба у датом праволиниском углу E конструисати паралелограм једнак датој праволиниској слици·

Повуче се ΔВ и конструише се у углу ΘKZ, који је једнак Е, паралелограм ZΘ једнак троуглу АВΔ; и дода се у углу НΘМ, који је једнак углу Е, на правој НΘ паралелограм НМ једнак троуглу ΔВГ. Пошто је угао Е једнак



сваком од углова ΘKZ, НΘМ, онда је угао ΘKZ једнак углу НΘМ. Ако се сваком од ових дода угао КΘН, биће углови ZKΘ, КΘН једнаки угловима КΘН, НΘМ. Али како су углови ZKΘ, КΘН једнаки двама правим угловима, то су и углови КΘН, НΘМ једнаки двама правим угловима. Пошто две праве КΘ, ΘМ са правом НΘ и у истој тачки Θ, но не са исте стране ове праве, чине два суседна угла једнака двама правим угловима, то ће КΘ и ΘМ лежати у истој правој. И пошто је ΘН трансверзала за паралелне КМ, ZН, то су унутрашњи наизменични углови МΘН, ΘНZ једнаки међусобно. Ако се сваком од ових дода угао ΘНΛ, биће углови МΘН, ΘНΛ једнаки угловима ΘНZ, ΘНΛ. Али како су углови МΘН, ΘНΛ једнаки двама правим угловима, то су и углови ΘНZ, ΘНΛ једнаки двама правим угловима; према томе су и праве ZН и НΛ у истој правој. И пошто је ZК једнако и паралелно ΘН, а ΘН исто тако правој МΛ, то је и KZ једнако и паралелно МΛ. Нека праве КМ, ZΛ спајају те праве, тада су КМ, ZΛ једнаке и паралелне, а KZΛМ је паралелограм. И пошто је троугао АВΔ једнак паралелограму ZΘ, а ΔВГ паралелограму НМ, то је цела праволиниска слика АВГΔ једнака целом паралелограму KZΛМ.

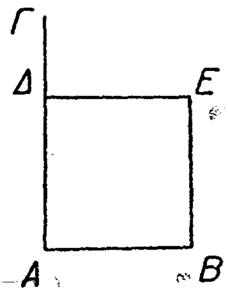
На овај начин је у праволиниском углу ZKM, који је једнак датом праволиниском углу Е, конструисан паралелограм KZΛM једнак датој праволиниској слици АВГΔ. А то је требало извести.

46.

На датој дужи конструисати квадрат.

Нека је дата дуж АВ. Треба на дужи АВ конструисати квадрат.

Повуче се под правим углом над АВ кроз тачку А права АГ и пренесе се АΔ једнако АВ; затим се кроз тачку Δ повуче права ΔЕ паралелна АВ, а кроз тачку В повуче права ВЕ паралелна АΔ. Тада је АΔЕВ паралелограм. Пошто је АВ једнако ΔЕ и АΔ једнако ВЕ, то су све четири дужи ВА, АΔ, ΔЕ, ЕВ једнаке међусобно и паралелограм АΔЕВ је једнакостран. Тврдим да је он и правоугли. Пошто је наиме права АΔ трансверзала паралелних АВ, ΔЕ, то су углови ВАΔ, АΔЕ једнаки двама правим угловима. А како је угао ВАΔ прав, то је и угао АΔЕ прав. Пошто су код паралелограма наспрамне стране и углови једнаки међусобно, онда је прав и сваки од супротних углова АВЕ, ВЕΔ. Дакле је АΔЕВ и правоугли. А раније је доказано да је он једнакостран.



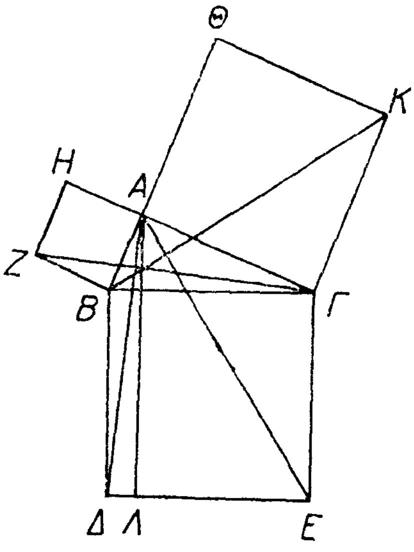
Према томе је то квадрат конструисан на дужи АВ. А то је требало извести.

47.

Код правоуглих троуглова је квадрат на страни спрам правог угла (на хипотенузи) једнак квадратима на странама које образују прав угао (на катетама).

Нека је АВГ правоугли троугао са правим углом ВАГ. Тврдим да је квадрат на ВГ једнак квадратима на ВА и на АГ.

Нека се на ВГ конструише квадрат ВΔЕГ, а на ВА, АГ квадрати НВ, ΘГ, кроз тачку А повуче права АΛ паралелна свакој од правих ВΔ, ГЕ, а затим повуку праве АΔ, ZГ. Пошто је сваки од углова ВАГ, ВАН прав, то праве АГ, АН повучене над правом ВА, кроз исту њену тачку А, а са разних страна, чине суседне углове једнаке двама правим угловима, па су стога праве ГА и АН у истој правој. Из истог разлога су и праве ВА и АΘ у истој правој. Угао ΔВГ једнак је углу ZВА, јер је сваки од њих прав. А кад се дода сваком од њих угао АВГ, биће цео угао ΔВА једнак целом углу ZВГ. Пошто је страна ΔВ једнака страни ВГ, а ZВ страни ВА, то су две стране ΔВ, ВА једнаке странама ZВ, ВГ, и то одговарајућим, и угао ΔВА једнак углу ZВГ, а тада је и основица АΔ једнака основици ZГ, и троугао АВΔ једнак троуглу ZВГ. А паралелограм ВΛ је двапут већи од троугла АВΔ, јер имају исту основицу ВΔ и између истих су паралелних ВΔ, АΛ. И квадрат НВ је двапут већи од троугла ZВГ, јер и они имају исту основицу ZВ и између истих су паралела ZВ, НГ. (А двоструко од једнаког једнако је). Према томе је паралелограм ВΛ једнак квадрату НВ. На сличан начин се, помоћу повучених правих АЕ, ВК, може доказати да је паралелограм ГΛ једнак квадрату ΘГ. Према томе је цео квадрат ВΔЕГ једнак двама квадратима НВ, ΘГ. А квадрат ВΔЕГ је конструисан на ВГ, а квадрати НВ, ΘГ на ВА, АГ. Према томе је квадрат на страни ВГ једнак квадратима на странама ВА, АГ.



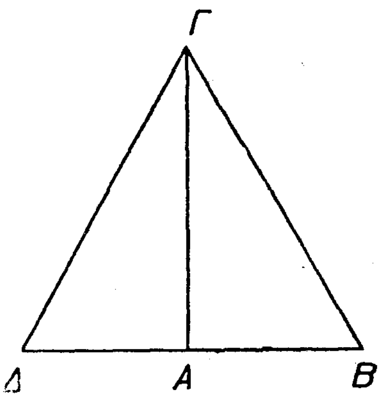
Дакле, код правоуглих троуглова је квадрат на страни спрам правог угла (на хипотенузи) једнак квадратима на странама које образују прав угао (на катетама). А то је требало доказати.

48.

Ако је код троугла квадрат на једној страни једнак квадратима на осталим двема странама, онда је угао који образују ове две стране прав.

У троуглу АВГ квадрат на једној његовој страни ВГ једнак је квадратима на странама ВА, АГ. Тврдим да је угао ВАГ прав.

Нека се повуче кроз тачку А права АΔ управна на АГ, пренесе АΔ једнако АВ и споје тачке Δ и Г. Пошто је ΔА једнако АВ, онда је квадрат на ΔА једнак квадрату на АВ. Ако се сваком од њих дода квадрат на АГ, биће квадрати на ΔА, АГ једнаки квадратима на ВА, АГ. Али квадратима на ΔА, АГ једнак је квадрат на ΔГ, јер је угао ΔАГ прав. И квадратима на ВА, АГ једнак је квадрат на ВГ, јер је то претпостављено. Према томе је квадрат на ΔГ једнак квадрату на ВГ; а стога и страна ΔГ једнака страни ВГ. Пошто је страна ΔА једнака страни АВ, а АГ је заједничка страна, то су две стране ΔА, АГ једнаке двема странама ВА, АГ, а и основица ΔГ једнака основици ВГ. Одатле је угао ΔАГ једнак углу ВАГ. Али угао ΔАГ је прав, па је и угао ВАГ прав.



Дакле, ако је код троугла квадрат на једној страни једнак квадратима на осталим двема странама, онда је угао који образују ове две стране прав. А то је требало доказати

КОМЕНТАР

I.

[1] Еуклидове дефиниције имају само историски значај. Савремена логика захтева да се у темељ строге дедуктивне конструкције једне дисциплине поставе основни, полазни појмови без дефинисања помоћу других појмова, јер би тада ови други били полазни. Покушај да се основни појмови дефинишу мора довести до circulus viciosus-а. Неоспорна и врло важна идеја савремене научне методологије, да у основе дедуктивне науке треба ставити појмове без дефиниције и да у даљем излагању треба утврдити само основне везе између тих појмова помоћу основних ставова, који се зову аксиомама односно постулатима, ушла је у научни живот тек у XIX столећу; она је разрађена у аксиоматици аритметике и геометрије и служи као база метаматематике, која се бави логичко-филозофским проучавањем математике и баш се родила у вези са прелазом од Еуклидове геометрије на геометрије других типова.

Ако Еуклидове дефиниције не одговарају захтевима строго логичке конструкције, а Еуклидови Елементи се базирају на тим дефиницијама, онда је природно поставити питање: имају ли тада и сами Елементи логичку вредност? За одговор на ово питање потребно је прво разјаснити природу Еуклидових дефиниција, а затим показати да дефиниције и са таквом природом не могу сметати даљим, потпуно логичким извођењима дедуктивне конструкције.

Дедуктивном излагању сваке дисциплине мора да претходи индуктивни период. У том периоду се стварају општи, па и основни појмови. Пошто се створе, ма и у делимичном систему, ти основни појмови, почиње да се развија дедуктивни део науке. Усавршавање науке обухвата сва три елемента: индуктивни део, основне појмове и дедуктивни део. Индуктивни део геометрије, који је почео са првим свесним корацима homo sapiens'a, није напуштен ни сада. Раније углавном земљомерство и зидарство, а сада интуиција математичара-геометра обогаћује индуктивни део геометрије новим геометриским облицима и везама. Издвајање основних појмова и основних ставова — аксиома — претставља, како то показује историја аритметике, геометрије и механике, врло тежак посао. Оно што је формулисано у Еуклидовим дефиницијама, то је резултат издвајања геометриских елемената у индуктивном периоду. Главно средство у постављању тих дефиниција било је непосредно посматрање и затим опис појма ма на који начин, на пример и сликом са напоменом „гледај“. Еуклидове дефиниције, нарочито основних појмова тачке, праве и равни, треба сматрати не као дефиниције у савременом строгом логичном смислу, већ као опис потребних елементарних геометриских појмова, који су већ јасни из претходних индуктивних посматрања и закључака. Те дефиниције претстављају само погодну номенклатуру за ствари, које су већ познате и јасне. Са таквог, више психолошког, гледишта сасвим друкчије се оцењује логички значај тих дефиниција за целокупну дедуктивну конструкцију Еуклидових Елемената. Дефиниције основних појмова у Еуклидовим Елементима могли бисмо и да уклонимо па да тиме ништа не буде измењено у логичкој конструкцији самих Елемената. Прави логички дедуктивни материјал тих Елемената састоји се само из оних дефиниција, које уводе нове појмове помоћу већ дефинисаних или основних, из аксиома, које између појмова постављају везе, чији је доказ немогућ, и из теорема, ставова са доказима. Нарочито је важан распоред самих теорема, њихова узастопност и развијање различитих метода доказа тих теорема. Све ово претставља огромну логичку вредност без обзира на индуктивну подлогу која лежи у основи неких Еуклидових дефиниција, нелогичних са гледишта чисте дедукције.

[2] Ова прва реченица у грчком тексту код I. L. Heiberg'a гласи:

α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

Њен латински превод код самог I. L. Heiberg'a гласи:

I. Punctum est, cuius pars nulla est,

Она се и на друге језике обично преводи овако: Тачка је оно што нема делова (Основе логике. Б. Петронијевић. 1932). A point is that which has no pars (The thirteen books of Euclid's elements. By T. L. Heath. 1908). Ein Punkt ist, was keine Theile hat (Euklids Elemente. Von J. Hauff. 1797). Der Punkt ist das, dessen Teil nichts ist (Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Von M. Simon. 1901).

У свој текст сам ставио превод Б. Петронијевића, но сматрам да би, ако се отступи мало од обичног тумачења форме ове реченице, а више се приђе тумачењу њена садржаја, нарочито упоредно са каснијим реченицама текста, превод могао да гласи:

Тачка је оно што нема протезања.

За такав превод наводим ове разлоге.

Реч „τό μέρος“ има више значења. 1. Главно јој је значење pars, део, Teil. Али са тим значењем она се употребљује у више смислова: 1. das Teil, gebührender Anteil, partio, Aufgabe, Plicht, Amt, Stelle, Rolle, Eigenschaft, Hinsicht, Rücksicht, Beziehung, ... 2. Друго значење — die Reihe, Reihenfolge, der Rang, ... 3. Треће — der Teil eines Ganzen, das Stück, ... (N. T. μέρη — Bezirke, Gegenden). 4. sp. Akt (eines Schauspiels). (Грчко-немачки речник).

У истој првој књизи Еуклид употребљава исту реч — цитирам по Heath'у — овако:

μέρη, parts (= direction) 190, 308, 323; (= side) 271.

Ова места одговарају Heiberg'ову тексту овако: 190 — Definitiones XXIII, стр. 8; 308 — Propositio XXVIII, стр. 68; 323 — Propositio XXXIII, стр. 78; 271 — Propositio XII, стр. 34.

Ни у једној од тих реченица наша реч нема значења „део“, већ трипут „правац“, а једанпут „страна“.

Из овог набрајања значења те речи непосредно следује да преводилац није везан неотступно за значење „део“ у преводу речи μέρος, која има исти корен са нашом речју мера. У грчком језику ова реч се употребљава, а нарочито и код Еуклида, и са много других исто тако важних значења.

Какво значење има μέρος у нашој реченици?

За одговор на ово питање изведимо заједничку анализу ове три реченице из почетка Елемената:

α′. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
β′. Γρομμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
ε′. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστιν, ὃ μῆκος και πλάτος μόνον ἔχει.

Преносећи јасан смисао Еуклидових дефиниција β′ и ε на прву дефиницију, а ове су дефиниције најтешње међу собом повезане, треба непосредно закључити да је, одричући μέρος тачки, Еуклид мислио да јој одрече дужину и ширину. Према томе μέρος треба да одговара општем појму, општој особини, која обухвата дужину и ширину и која се одриче у првој реченици. У савременом језику та особина се карактерише појмом димензије у смислу протезања. Овај појам је тесно везан са појмом мере. Према томе савременим језиком смисао прве Еуклидове реченице треба превести овако:

Тачка је оно што нема димензије.

Но можда би тај превод био исувише слободан са формалне стране, према томе треба изабрати такву форму која би, чувајући прави смисао те реченице, у исто време задовољила услове формалног превода. У овом циљу могли бисмо изнети и овај предлог превода:

Тачка је оно што нема протезања.

Замерци да се дефинише простији облик — тачке — помоћу много компликованијег појма — мере, димензије или протезања — нема места, јер, како је то било наведено у примедби[1], ове Еуклидове дефиниције нису праве логичке дефиниције већ описи, објашњења одговарајућих раније познатих појмова. Такву исту замерку могли бисмо тада навести и за дефиницију линије и површине помоћу дужине и ширине.

[3] И ова дефиниција је јасан пример алогичности Еуклидових дефиниција, јер се линија дефинише помоћу геометриских појмова дужине и ширине, који још нису били уведени. Лако је разумети ову дефиницију са гледишта индуктивног објашњења као опис апстрактног појма линије помоћу већ израђених конкретних појмова дужине и ширине, који су познати из свакодневног живота, али, разуме се, не у строгом математичком смислу.

[4] Ова дефиниција стоји у вези са дефиницијом тачке као краја линије. Такву, обрнуту, дефиницију поставио је Аристотел. И Аристотелову дефиницију тачке треба сматрати

као опис основног појма помоћу појмова који су се одомаћили у претходном индуктивном излагању геометрије.

[5] Ова Еуклидова дефиниција, дефиниција праве, једна је од најмагловитијих реченица Елемената не у филолошком смислу, већ у погледу садржаја. Ниједан коментатор није могао тачно да каже шта је уствари Еуклид хтео да каже у тој реченици. Понеки од њих чак мисле да ова дефиниција није ни тачна, јер се за кружну линију може са истим правом казати да подједнако лежи према свакој својој тачки; исту особину има и линија хелиса, завојница. Ова дефиниција не задовољава ни услов доброг конкретног описа праве, јер онај ко раније није знао шта је то права не би могао на основу те дефиниције створити себи никакву претставу о геометриском облику праве. Директно задивљује баш то, како је толико дубоки логиста, као што је Еуклид, могао да не примети сву дефектност своје дефиниције праве и да на том примеру не дође до закључка да нешто у почетку дедуктивне науке мора да остане без дефиниције. Као извињење може Еуклиду послужити то, што је прошло више од двадесет векова, док је ова, сад очигледна истина, најзад загосподарила код тачних дедуктивних наука.

У реченици ове дефиниције Еуклид употребљава израз *права линија* (εὐθεῖα γραμμή); даље он углавном задржава само реч *права* (εὐθεῖα) и даје јој смисао именице Исто је прешло и у друге језике. У српском језику имамо и права линија и права као именица.

Под првом (εὐθεῖα) Еуклид разуме сва три геометриска облика: бесконачну праву, полуправу и дуж. Тако, на пример, у дефиницији круга (деф. 15) дужи повучене од центра према тачкама кружне линије он такође означава као праве (εὐθεῖα).

[6] Употреба речи „крајеви“ место речи „границе“ у овој реченици је неопходна, јер стоји у тексту πέρατα, а појам границе (ὅρος) је уведен нарочитом дефиницијом.

[7] Еуклидова дефиниција угла претставља са логичког гледишта таутологију. Појам нагиба (κλίσις) не даје ни конкретну претставу о углу, узимајући нарочито у обзир да је у овој реченици угао састављен од линија које нису обавезно праве. Историјату појма угла посвећена је доста велика

литература. Појам угла, простијег, праволиниског, треба да буде рашчлањен на појам геометриске слике угла — то су две полуправе са заједничким крајем — и на методу, која омогућује да се слика доведе у везу са бројем, тј. на метрику угла. Приметимо да Еуклид узима у обзир само углове који нису већи од два права угла.

[8] Аристотел употребљава речи крај (πέρας) и граница (ὅρος) као синониме. Ова реченица нарочито показује онај печат који оставља геометрија у индуктивном смислу као наука о мерењу земљишта (границе — међе једног поља) на геометрији као апстрактној науци о геометриским облицима и њиховим уопштавањима.

[9] Савремена геометрија и овде се разилази са уским Еуклидовим појмом геометриске фигуре као ограниченог дела једне површине, нарочито равни. У савременој геометрији геометриска фигура је скуп тачака сматраних као целина. Ове тачке могу бити одвојене или чинити линије, површине и тела. Равне фигуре су, на пример, и углови, и права са тачком ван ње и две паралелне праве; на тим фигурама нема ограниченог дела равни.

[10] У српској терминологији два појма — део равни, омеђен кружном линијом — периферијом по Еуклиду — и сама кружна линија нису довољно раздвојени. У руском језику та два појма имају сасвим засебне речи – круг и окружност, тако да се каже: површина круга и дужина окружности. И у изради српске математичке номенклатуре треба увести две засебне речи — круг за површину и, рецимо, кружница за кружну линију.

Интересантно је приметити да код Еуклида нема нарочите речи за полупречник (радиус), већ се употребљује или реч права (εὐθεῖα) у смислу дужи или реч растојање (διάστημα).

[11] Општији појам средишта једне линије, као тачке, која полови све тетиве што пролазе кроз ту тачку, још се не појављује код Еуклида.

[12] Наведена особина пречника, да он полови круг, не би требало да стоји у дефиницији, јер ова истина може бити доказана.

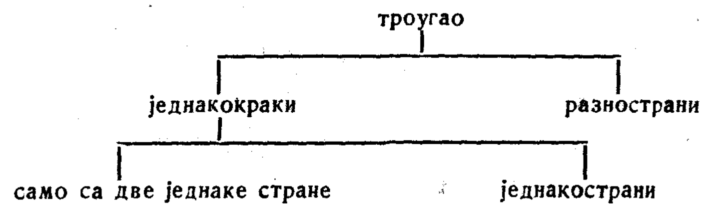
[13] Са гледишта савремене геометрије полукруг, као самостална слика, нема средишта. Средина пречника круга за

полукруг се јавља као тачка на периферији слике, она не може бити узета за средиште. Узимање ове тачке за средиште јасно показује да Еуклид још није имао појма средишта различита од средишта круга. Ова тачка остаје код њега средиште и за све слике добијене од круга, без обзира на то што оне више немају средишта, као тачке која задовољава ма коју општу дефиницију средишта.

[14] Дефиниција је формулисана тако да су искључени називи петостране, шестостране итд., тј. називи са навођењем броја страна већег од четири. Мислим да то није био циљ ни Еуклиду. Он је хтео да каже само то да за случај броја страна већег од четири можемо већ употребити појам многостране фигуре.

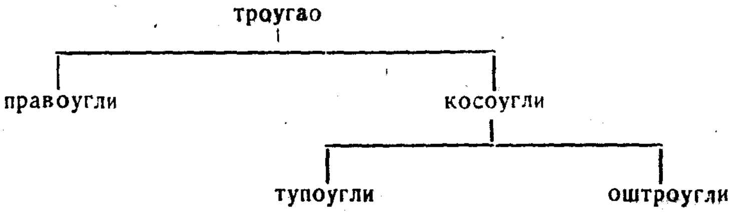
[15] У овој дефиницији Еуклид уводи за тространу правolиниску фигуру (τρίπλευρον — тространик) нову реч — троугао (τὸ τρίγωνον) и према релативној величини страна дели троуглове на једнакостране (ἰσόπλευρον), једнакокраке (ἰσοσκελὲς) и разностране, при чему за последње има нарочиту реч τὸ σκαληνὸν, која је везана, према Проклу, или за реч σκάζω — храмљем, или за реч σκολιός — кос, како мисле други коментатори. Важно је обратити пажњу на једну особину ове класификације, како је она приказана у дефиницији. Ова особина се протеже и на многе друге класификације код Еуклида. Шема је његове класификације ова

и према томе једнакострани троугао не може бити сматран као једнакокраки, јер је наведено у тексту „само са две једнаке стране“. Међутим, обично се узима ова класификација

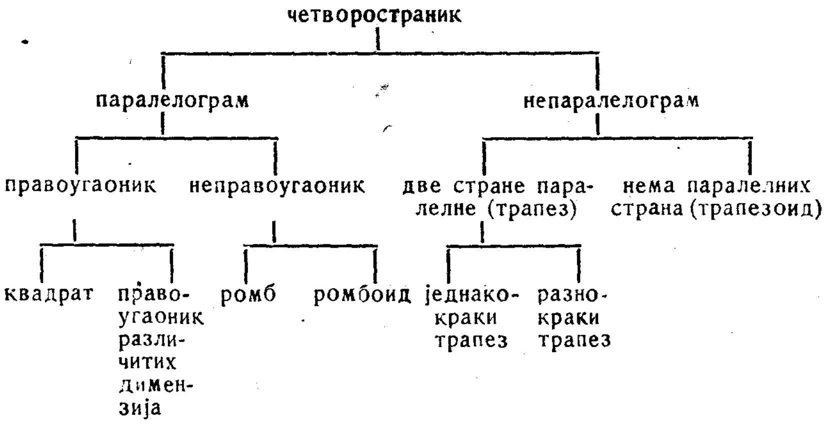


Ова разлика у конструкцији класификације врло је важна у извођењу различитих доказа. Према првој шеми особину, која важи за једнакокраки троугао треба нарочито доказивати за једнакостран троугао, јер последњи не спада у категорију првих, а према другој шеми особина, која припада сваком једнакокраком троуглу, припада и једнакостраном троуглу, уколико, разуме се, та особина не стоји у вези нарочито са тим да је трећа страна различита од остале две једнаке стране.

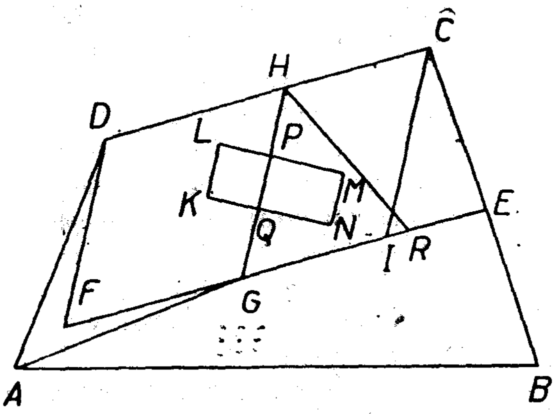
[16] И овде упоредо са Еуклидовом поделом може се навести подела, која садржи косоугли троугао, општи појам за тупоугле и оштроугле троугле. Шема те поделе изгледа овако:



[17] Према овим дефиницијама квадрат не може бити сматран ни као правоугаоник ни као ромб, међутим особине које припадају свима правоугаоницима припадају и квадрату, а исто то важи и за ромбове. Према томе и овде постоји класификација четворострaних фигура, која је друкчије конструисана него што је Еуклидова. У ту класификацију треба ставити појам паралелограма, који се први пут појављује код Еуклида у теореми 34, а није био дефинисан. Наведимо такозвану Heron'ову класификацију овом шемом



Heron'ова класификација има особине сличне особинама Еуклидове класификације у том смислу, што се, рецимо квадрат не може сматрати као ромб или правоугаоник као трапез. Ја сам предложио класификацију четвороуглова помоћу слике 1). Према овој слици, ако површина неког нацртаног четвороугла припада површини другога у целости, онда он има све опште особине овог последњег. На слици су: ABCD — четвоространик општег типа, CDFE — трапез, AGHD — такозвани делтоид, IFDC — паралелограм, FGHD — ромб, KLMN — правоугаоник, KLPQ — квадрат, HDFR — једнакокраки трапез.



У овој Еуклидовој дефиницији се појам ромбоида поклапа са појмом косог паралелограма различитих страна. Појам трапеза у савременом смислу, као четвороугла са две паралелне стране, овде није уведен. Реч трапез код Еуклида означава уопште четворострану фигуру.

18 Овом дефиницијом почиње код Еуклида теорија паралелних линија, која игра толико велику улогу у историји геометрије и уопште у методологији дедуктивних наука. Само тој дефиницији посвећена је доста велика литература коментатора. Различите дефиниције паралелних могућно је поделити у три групе. Главне су идеје дефиниција тих група ове: 1. да паралелне линије немају заједничке

---

1) *Билимовић — Анђелић.* Геометрија за II разред средњих школа 1937.

тачке; 2. да паралелне линије имају исти правац и 3. да је растојање између паралелних линија свуда исто. На тај начин било је постављено више теорија паралелних линија.

[19] У издању Heiberg'ову имамо пет постулата (αἰτήματα) и девет аксиома, при чему се аксиоме зову κοιναὶ ἔννοιαι, а у латинском преводу стоји communes animi conceptiones, тј. ставови општег карактера. Код Прокла место κοιναὶ ἔννοιαι стоји ἀξιώματα и та реч је усвојена од већине писаца, при чему је у модерној литератури тај назив обухватио и постулате. Каква је разлика код Еуклида између постулата и аксиома? Изгледа да су постулати основне истине геометриског карактера, а аксиоме општег карактера, али су различити преписивачи помешали постулате са аксиомама и, на пример, аксиома 9. чисто геометриског карактера ушла је у аксиоме, а могла би да стоји у постулатима. Треба напоменути да се пети постулат о паралелним линијама често зове 11. аксиома, јер је тако био постављен у неким рукописима и код многих коментатора. У модерној литератури између постулата и аксиома не прави се разлика, све се то зове аксиомама.

[20] Први постулат претставља апстракцију оног што се може урадити помоћу лењира.

[21] Овај други постулат отстрањује оно ограничење за цртање правих, које је било везано за коначне димензије табле за цртање.

[22] Овај постулат одговара оној апстракцији, која стоји у вези са употребом шестара.

[23] Можда је и овај постулат имао везу са преношењем правог угла помоћу угаоника или било које друге цртачке справе. Сада ова истина може бити доказана. Види, на пример, D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. 1930. стр. 23.

[24] Овај постулат је најважније место у Елементима. Он је послужио као полазна тачка за стварање нееуклидових геометрија, а затим уопште за логички преглед свих дедуктивних система и за формирање аксиоматике. Из тог разлога наводимо грчки текст тог постулата.

ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

[25] Коментатори тврде, не без основа, да овде аксиоме не одговарају захтевима ни самог Еуклидова излагања. Неке су од тих аксиома преписивачи додавали, оне што стоје у загради, неке изостављали. На пример, ако стоји аксиома 4 о додавању, онда треба ставити и случај са одузимањем. Исто тако, нема важне аксиоме транзитивности за неједнакости, тј. аксиоме: ако је $A < B$ и $B < C$, онда је и $A < C$.

[26] Ова аксиома је аксиома транзитивности за једнакост; она се сада овако изражава: ако је $B = A$ и $C = A$, онда је и $B = C$.

Превод (Б. Петронијевић) ове аксиоме у форми: Што је с истим једнако, једнако је и једно са другим, незгодан је, јер „Што" у почетку реченице не одговара по форми множини оригинала (Τὰ). Употреба речи „Dinge" у немачким преводима, место „Was", а у енглеском „Things" (T. L. Heath), а код нас „објекти" више, по нашем мишљењу, изражава садржај оригинала.

[27] Алгебарски израз ове аксиоме је: ако је $A = B$ и $a = b$, онда је и $A + a = B + b$.

[28] За ову аксиому имамо: ако је $A = B$ и $a = b$, онда је и $A - a = B - b$.

[29] Ако је $A \neq B$, а $a = b$, онда је $A + a \neq B + b$.

[30] Ако је $A = B$, онда је $2A = 2B$.

[31] Ако је $A = B$, онда је $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B$.

[32] Са овом аксиомом је везан познати парадокс да целина може бити једнака свом делу и да та особина може служити као дефиниција бесконачности као објекта (актуална бесконачност). Заиста, део бесконачности може бити једнак самој бесконачности. Узмимо класичан пример: узмимо као целину све целе, рецимо, позитивне бројеве, а као део тог објекта — све парне бројеве, опет позитивне. Лако је видети да тај део тог објекта има исти број елемената као и целина, јер парне бројеве можемо избројати овако:

0, 2, 4, 6, 8, ... $2 \cdot 0$, $2 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 4$, ..., а то и потврђује наш став.

[33] Употребили смо за превод грчке речи τό χωρίον реч „област“ са значењем дела површине.

[34] Код Еуклида се излагање свих теорема односно проблема увек врши по истој шеми. Потпуна Еуклидова шема има ове делове:

1. ἡ πρότασις — формулисање теореме или задатка у општем облику;
2. ἡ ἔκθεσις — засебно издвајање оног што је дато и што се примењује у каснијем истраживању;
3. ὁ διορισμός — дефиниција или спецификација оног што се тражи са допунским условима могућности или ограничења;
4. ἡ κατασκευή — конструкција; у конструктивним проблемима као решење проблема, у понеким теоремама као припремни конструктивни рад за доказ теореме;
5. ἡ ἀπόδειξις — доказ;
6. τό συμπέρασμα — закључак.

Поједини од набројаних делова могу изостати, али увек постоје три основна дела и то: 1. — формулисање, 5. — доказ и 6. — закључак.

Поновимо и овде у предговору наведену општу примедбу о нашем коментару. Готово сваки Еуклидов став може и треба да буде коментарисан по форми, садржају и значењу тог става у општем систему Еуклидове геометрије. Пошто је то већ опширно урађено код низа писаца и са многим детаљима скупљено и код T. L. Heath'a, због ограничености времена и могућности штампања, ми у такав коментар не улазимо. Навешћемо само оно што је неопходно, нарочито у вези са нашим преводом.

[35] Изведена конструкција доводи до два једнакострана троугла: АВГ и њему симетричног у односу на праву АВ. Еуклид не наводи тај други троугао и не даје анализу зашто је изабрао баш троугао АВГ. Тврђење да круг са средиштем у В сече круг са средиштем у А у тачки Г недовољно је. С друге стране, оно није ни образложено, јер не следује из аксиома досад узетих код Еуклида. Неки коментатори мисле да је узимање у обзир образложења постојања тог пресека,

тј. одговарајућег става тополошког карактера, био први корак у прелазу од дедуктивне геометрије доаксиоматичког периода, који је већ узимао у обзир и радове Н. И. Лобачевског, на аксиоматичку геометрију.

[86] Са гледишта савремене школске геометрије овај став је сувишан. За решење задатка довољно је узети шестар са отвором ВГ и затим преносом тог шестара можемо конструисати тражену дуж са једним крајем у тачки А. Такав поступак био је познат и у Еуклидово време. Увођење тог става од стране Еуклида претставља једну његову, за оно време, логичку финоћу: Еуклид је себи поставио задатак да избегне у излагању геометрије кретање геометриских објеката. Он је то и постигао, али са неколико изузетака, на пример теореме 4 и 8 ове књиге.

[87] У практичном извођењу обично се узима ГΔ = ГЕ, другим речима кружни лук се црта са средиштем у Г и полупречником ГΔ = ГЕ. Истим полупречником се конструише лук са средиштем у А.

[88] У овој теореми први пут се употребљује реч паралелограм без претходне дефиниције, што треба сматрати као логички недостатак. Тај изостанак можемо објаснити само тиме што је у грчком језику тако састављена реч, као што је паралелограм, потпуно јасна већ из своје граматичке форме.

ИСТОРИСКЕ
И
БИБЛИОГРАФСКЕ
ПРИМЕДБЕ

После смрти Александра Великог Македонског (356—23 пре н. е.), његова огромна империја распала се. У Египту, у Александрији, на владу је ступила династија Птолемеја, грчког порекла. Египат и специјално Александрија постали су центар тадашње културе. Из Индије, Вавилона, Сирије, Палестине и других области долазила је у Александрију источна култура. Са друге стране, са запада, радо су прелазили у Александрију грчки научници, јер у самој Грчкој тешко се подносило македонско господство. Под таквим условима, а и због благонаклоности Птолемејеве династије, развио се чувени такозвани Александриски период процвата науке и уметности, који је трајао отприлике два столећа. У самој Александрији научни центар је био везан за Александриски музеј, који треба сматрати као академију, као универзитет.

Еуклид је био наставник у александриској школи. О личности Еуклидовој готово нема никаквих података. Прокл, Еуклидов коментатор, који је живео око 450 г. после Хр., тврди да је Еуклид био млађи од Филипоса, Платонова ђака и да је он живео за време првог Птолемеја (Птолемеј I Лаги: 323—285). Прокл наводи и познату причу о Еуклиду. Једног дана Птолемеј је запитао Еуклида: „Да ли постоји пут ка геометрији бољи него што је пут његових Елемената?“ Еуклид је одговорио: „Ка геометрији не постоји нарочити пут за краљеве!“ С друге стране, Архимед (287—212) је већ употребљавао Еуклидове елементе. Према томе већина писаца тврди да Еуклидову делатност треба везати за време око 300 г. пре н. е. И Еуклид је био ђак Платонове Академије, коју је Платон (427—347 пре н. е.) основао 387 године.

Место Еуклидова рођења такође није утврђено. Неки писци, али доста произвољно, наводе дорски град Гелу у јужној Сицилији, у близини садашње вароши Terranova;

други указују на сасвим друго место, наиме варош Tyros, близу Сидона, сада Саида.

Други Еуклидов коментатор, Папос (крај IV столећа) описује Еуклида по карактеру као тиха и врло скромна човека, који је био расположен према сваком који је тежио математичком знању. У излагању истина својих претходника он је вршио колико је могао мање промена.

За карактеристику Еуклида, као човека дубоко одана својој науци, наведимо још једно место из Стобајоса, које наводи Heiberg. Један почетник, који је учио геометрију код Еуклида, када је научио прву теорему, запитао је Еуклида: „Шта имам од тога што сам ово научио?“ Еуклид је позвао свог роба и казао: „Донеси му три обола, јер он учи за то да има од тога користи!“

Главно дело Еуклидово су његови Елементи — Στοιχεῖα. Они обухватају 13 књига (Heiberg, Bd. 1—4). Математичар Хипсикл, из другог века пре н. е., додао је 14 књигу о додекаедру и икосаедру. Најзад, у VIII столећу била је припојена и 15 књига о правилним телима. Heiberg сматра да ова књига припада једном ученику Исидора из Милета, и да је немогуће претпоставити да је писац и ове књиге био Хипсикл. 14 и 15 књига сачињавају засебни 5 том у Хајбергову издању.

По садржају 13 књига Елемената треба поделити у три дела.

Првих шест књига сачињавају планиметрију, при чему је у петој књизи протумачена на дужима теорија пропорција. Наредне четири књиге су аритметичког садржаја, са теоријом несамерљивих величина у X књизи. Књиге XI, XII и XIII посвећене су стереометрији.

Елементи су били први пут штампани 1482 г., у Венецији, у латинском преводу Кампануса са арапског текста. До тог времена били су познати само рукописни примерци тог дела. Најбољи рукопис, Codex P, налази се у библиотеци Ватикана. Прво грчко издање изашло је 1533 године у Базелу. Сад се сматра као најбоље издање Холанђанина Хајберга (I. L. Heiberg. Euclides elementa. Bibliotheca Teubneriana) на грчком језику са латинским преводом. Од превода на модерне језике на првом месту стоји класичан рад T. L. Heath'a — The thirteen books of Euclid's Elements, који је изашао већ и у другом издању (1926). Заслужује да буде споменуто издање познатог италијанског геометра Fed. Enriques'a — Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, Roma, Bologna, 1925. Имао сам могућност да видим само прву књигу тог издања.

У Русији је било свега пет издања Еуклидових елемената. Прво издање „Начал“ изашло је 1739 године у преводу „хирургуса“ Ивана Сатарова са латинског језика. 1769 године се појавило друго издање у преводу наставника математике Николаја Курганова са француског издања проф. Koenig'a, штампана 1762 године. Затим се појавило треће издање у преводу са грчког језика од магистара Оксфордског универзитета В. Н. Никитина и И. И. Суворова. Оно је изашло 1784 године и било је поновљено 1789 године. Четврто издање 1819 године припада О. Петрушевском. Ово је, изгледа, најбоље руско издање. Последње, пето издање, 1880 године штампао је професор Кијевског универзитета М. Е. Ващенко-Захарченко, који је био и мој наставник. При изради ове књиге узео је велико учешће син професоров, М. М. Ващенко—Захарченко, универзитетски библиотекар и добар лингвиста. Уколико знам из совјетских извора, у Совјетском Савезу већ се 9 година спрема ново руско издање, али оно још није изашло.

Еуклид није написао само Елементе. Њему припада више радова. Сачувани су ови радови: 1. Δεδομένα (Data) — Оно што је дато. Рад садржи 95 ставова, који изражавају да кад су дати извесни геометриски облици, онда су дати и други облици. То је у неком смислу проучавање геометриских функционалних веза. На пример, став 2 гласи: Ако се дата величина налази у датом односу према другој величини, онда је и ова друга величина дата. 2. Φαινόμενα (Phaenomena) је рад посвећен основама геометрије сфере и астрономији. 3. 'Οπτικα (Optica) даје основе преспективе. 4. Aἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις — елементи музике; тај рад садржи два дела — κατατομὴ κανόνος — теорију музичких интервала и εἰσαγωγὴ ἁρμονική — увод у хармонију. Сем ових сачуваних радова. Еуклид је написао још и друге радове о којима знамо из других извора, углавном од његових првих коментатора. Такви су радови: 5. Ψευδάρια — о погрешним закључцима. Према мишљењу Прокла овај рад је служио за логичку гимнастику ђака. 6. Περὶ διαρέσεων βιβλίον — о подели слика. Према подацима наведеним код истог Прокла и према арапском преводу, у том раду било је третирано, на пример, ово питање: Поделити површину троугла правом дата правца у датом односу. Исто тако су дељене површине четвороугла, круга и слика омеђених кружним луцима и правим линијама: 7. Πορίσματα — то је рад који је, према подацима Папосовим, садржао три књиге. Чувени француски математичар Шал (Chasles) је успоставио тај рад према оном што је дао Папос: То је збирка математичких закључака и помоћних теорема. Поризме садрже такође елементе за пројективно проучавање конусних пресека. 8. Τόποι πρός ἐπιφανεία — о геометриским местима на површини. Углавном се проучавају особине површина: цилиндра, конуса и сфере. 9. Κωνικά — четири књиге посвећене теорији конусних пресека.

Елементи, заједно са наведеним другим радовима, оцртавају Еуклида не само као изванредна професора тадашње највеће научне институције — Александриске академије-музеја, већ и као научника са богатим стваралачким даром. Ученик Платонов и Еудоксов у Атини, он је пренео грчку математику у Александрију и тамо је, између осталих, васпитао и два генијална грчка математичара — Архимеда и Аполонија. Еуклид, Архимед, Аполоније сачињавају сјајно сазвежђе најславнијег периода развитка античке математике.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА II

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 2

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ДРУГА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1950

Научна књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

Штампа „Вук Караџић“, погон „Искра“ — Београд — Таковска 32 — Тел. 21-211

САДРЖАЈ ДРУГЕ КЊИГЕ

ПРЕДГОВОР

Ова друга књига Еуклидових елемената је од нарочитог интереса како са историског гледишта, тако и са гледишта савремене математичке наставе.

Са историског гледишта она заслужује особиту пажњу, јер се у њој развија античка форма алгебре и то у примени на геометрију. Преовлађивање геометриске форме над аналитичком формом, та важна особина грчке математике, у пуној мери се испољава у овој књизи Еуклидових елемената.

Са гледишта математичке наставе ова књига, прво, може да послужи као извор вежбања за изражавање односа између величина алгебарским језиком, а, друго, она даје богати материјал за борбу са формализмом у настави математике: основне алгебарске операције добијају конкретну, живу форму, кад се протумаче на геометриским облицима, како су протумачене у овој књизи.

Пошто преводу Еуклидових елемената могу посветити само време слободно од рада у области моје уже струке, а редиговање српског текста и техничка страна одузима много времена, нисам ову другу књигу могао дати у штампу непосредно после изласка из штампе прве књиге.

При изради и ове књиге су ми помогли Б. Петронијевић, В. Мишковић и Т. Анђелић па им изјављујем захвалност.

А. Б.

Грешке примећене у првој књизи

Стр.	22,	врста	9 одозго	стоји:	опиеш	треба:	опише
„	43,	„	4 одоздо	„	ВЛГ	„	ВАГ
„	64,	„	3 „	„	Холанђанина	„	Данца

ТЕКСТ

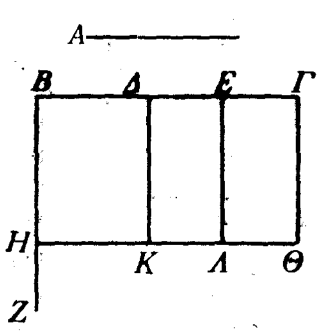
Дефиниције

1. За сваки правоугли паралелограм се каже да је обухваћен двема дужима које образују прав угао.[1]

2. Нека се у сваком паралелограму ма који од паралелограма на његовој дијагонали заједно са обема допунама назове *гномон*.[2]

1.

Ако су дате две дужи па је једна од њих неподељена а друга подељена на колико било отсечака, правоугаоник обухваћен овим двема дужима једнак је збиру правоугаоника обухваћених неподељеном дужи и сваким од отсечака.[3]



Нека су А и ВГ две дужи; нека се ВГ подели произвољно тачкама Δ и Е. Тврдим да је правоугаоник обухваћен дужима А и ВГ једнак збиру правоугаоника обухваћених дужима А и ВΔ, А и ΔЕ и А и ЕГ.

Повуче се под правим углом на ВГ кроз тачку В права ВZ и пренесе се ВН једнако А, повуче се кроз тачку Н права НΘ паралелно ВГ, и кроз тачке Δ, Е, Г повуку се праве ΔК, ЕΛ, ГΘ паралелно правој ВН.

Правоугаоник ВΘ је једнак збиру правоугаоника ВК, ΔΛ, ЕΘ. Међутим ВΘ је правоугаоник са странама А и ВГ, јер је обухваћен дужима ВН и ВГ, а ВН је једнако А. Исто тако је ВК правоугаоник обухваћен дужима А и ВΔ, јер је обухваћен дужима НВ и ВΔ, а НВ је једнако А. Тако исто је и правоугаоник ΔΛ обухваћен дужима А и ΔЕ, јер је ΔК, као и ВН, једнако А. Слично и ЕΘ је са странама А и ЕГ.

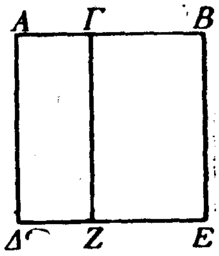
Према томе је правоугаоник са странама А и ВГ једнак збиру правоугаоника са странама А и ВΔ, А и ΔЕ и А и ЕГ.

На овај начин, ако су дате две дужи па је једна од њих неподељена а друга подељена на колико било отсечака, правоугаоник обухваћен овим двема дужима једнак је збиру правоугаоника обухваћених неподељеном дужи и сваким од отсечака. А то је требало доказати.

2.

Ако се дата дуж произвољно подели, збир правоугаоника обухваћених целом дужи и сваким од обају отсечака једнак је квадрату на целој дужи.[4]

Нека се дуж АВ произвољно подели тачком Г. Тврдим да је правоугаоник обухваћен дужима ВА и ВГ заједно са правоугаоником обухваћеним дужима ВА и АГ једнак квадрату на АВ.



Нека се нацрта на АВ квадрат АΔЕВ и повуче кроз Г права ГZ паралелна ма којој од правих АΔ и ВЕ.

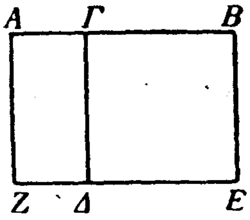
Правоугаоник АЕ једнак је збиру правоугаоника АZ и ГЕ. Међутим правоугаоник АЕ је квадрат на АВ, затим је АZ правоугаоник на ВА и АГ, јер је обухваћен дужима ΔА и АГ, а ΔА је једнако АВ, најзад је ГЕ правоугаоник са странама АВ и ВГ, јер је ВЕ једнако АВ. Према томе је правоугаоник обухваћен дужима ВА и АГ заједно са правоугаоником обухваћеним дужима АВ и ВГ једнак квадрату на АВ.

На овај начин, ако се дата дуж произвољно подели, збир правоугаоника обухваћених целом дужи и сваким од обају отсечака једнак је квадрату на целој дужи. А то је требало доказати.

3.

Ако се дата дуж произвољно подели на два отсечка, правоугаоник обухваћен целом дужи и једним од отсечака једнак је збиру правоугаоника обухваћена обама отсечцима и квадрата на првом отсечку.[5]

Нека се дуж АВ произвољно подели тачком Г. Тврдим да је правоугаоник обухваћен дужима АВ и ВГ једнак збиру правоугаоника обухваћеног дужима АГ и ГВ и квадрата на ВГ.

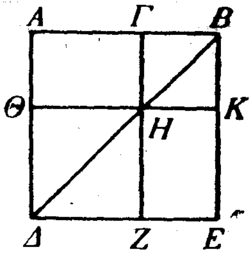


Нека се нацрта на ГВ квадрат ГΔЕВ, ЕΔ се продужи до Z и повуче се кроз А права паралелна ма којој од правих ГΔ и ВЕ. Правоугаоник АЕ једнак је збиру правоугаоника АΔ и ГЕ Међутим правоугаоник АЕ је обухваћен дужима АВ и ВГ, јер је обухваћен дужима АВ и ВЕ, а ВЕ је једнако ВГ; правоугаоник АΔ је обухваћен дужима АГ и ГВ, јер је ΔГ једнако ГВ, а ΔВ је квадрат на ГВ. Према томе правоугаоник обухваћен дужима АВ и ВГ једнак је правоугаонику обухваћену дужима АГ и ГВ и квадрату на ВГ.

На овај начин, ако се дата дуж произвољно подели на два отсечка, правоугаоник обухваћен целом дужи и једним отсечком једнак је збиру правоугаоника обухваћена обама отсечцима и квадрата на првом отсечку. А то је требало доказати.

4.

Ако се дата дуж произвољно подели, квадрат на целој дужи једнак је збиру квадрата на отсечцима и двоструког правоугаоника обухваћена отсечцима.[6]



Нека се дуж АВ произвољно подели тачком Г. Тврдим да је квадрат на АВ једнак збиру квадрата на АГ и ГВ и двоструког правоугаоника обухваћена дужима АГ и ГВ.

Нека се нацрта на АВ квадрат АΔЕВ и повуче ВΔ, па кроз Г права ГZ паралелна ма којој од правих АΔ и ЕВ, а кроз Н права ΘК паралелна ма којој од правих АВ и ΔЕ. Пошто је ГZ паралелно АΔ и права ВΔ сече сваку од њих, биће спољашњи угао ГНВ једнак унутрашњем сагласном углу АΔВ. Али угао АΔВ једнак је углу АВΔ, јер је страна ВА једнака АΔ; дакле угао ГНВ једнак је НВГ, па према томе страна ВГ једнака страни ГН; међутим ГВ је једнако НК и ГН једнако КВ; дакле ГНКВ је једнакостран четвороугао. Тврдим, сем тога, да је он правоугли; пошто је ГН паралелно ВК (а сваку од њих сече права ГВ), то збир углова КВГ и НГВ износи два права угла. Али КВГ је прав угао, па је и ВГН прав; на тај начин су и унутрашњи сагласни углови ГНК и НКВ прави. Према томе је ГНКВ правоугли четвороугао, а и једнакостран, дакле он је квадрат и то на ГВ. Из истих разлога и ΘZ је квадрат и то на ΘН, а то значи и на АГ; дакле ΘZ и КГ су квадрати на АГ односно на ГВ. Затим, пошто је правоугаоник АН једнак правоугаонику НЕ, а АН је правоугаоник обухваћен дужима АГ и ГВ, јер је НГ једнако ГВ, биће и НЕ једнак правоугаонику обухваћену дужима АГ и ГВ. Према томе су АН и НЕ заједно једнаки двоструком правоугаонику од АГ и ГВ. А при томе су ΘZ и ГК квадрати на АГ односно на ГВ. На тај начин четири правоугаоника ΘZ, ГК, АН, НЕ једнаки су квадратима на АГ и ГВ и двоструком правоугаонику обухваћену дужима АГ и ГВ. Али ΘZ, ГК, АН, НЕ сачињавају цео АΔЕВ, квадрат на АВ. Према томе је квадрат на АВ једнак збиру квадрата на АГ и ГВ и двоструког правоугаоника обухваћена дужима АГ и ГВ.

На овај начин, ако се дата дуж произвољно подели, квадрат на целој дужи једнак је збиру квадрата на отсечцима и двоструког правоугаоника обухваћена отсечцима. А то је требало доказати.

(Последица

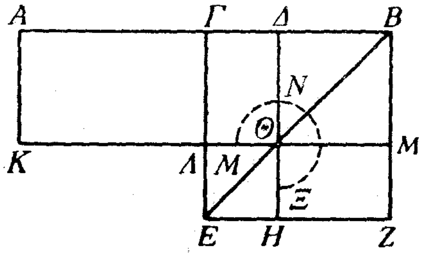
Из тог је јасно да су код квадрата паралелограми на дијагонали квадрати.)

5.

Ако се дата дуж подели двема тачкама и на једнаке и на неједнаке делове, биће збир правоугаоника обухваћена неједнаким деловима целе дужи и квадрата на дужи између деоних тачака једнак квадрату на половини дужи.[7]

Нака се дуж АВ подели на једнаке делове тачком Г и на неједнаке делове тачком Δ. Тврдим да је збир правоугаоника обухваћена дужима АΔ и ΔВ и квадрата на ГΔ једнак квадрату на ГВ.

Нека се нацрта на ГВ квадрат ГЕZВ и повуку: права ВЕ, кроз тачку Δ права ΔН паралелно ма којој од правих ГЕ и ВZ, кроз тачку Θ права КМ паралелно ма којој од правих АВ и ЕZ и још кроз тачку А права АК паралелно ма којој од правих ГΛ и ВМ. Пошто је допуна ГΘ једника допуни ΘZ, биће, ако свакој додамо ΔМ, цела површина ГМ једнака целој површини ΔZ. Али правоугаоник ГМ једнак је правоугаонику АΛ, јер је АГ једнако ГВ, и на тај начин правоугаоник АΛ једнак је правоугаонику ΔZ. Ако сваком од њих додамо правоугаоник ГΘ, биће цео правоугаоник АΘ једнак гномону MNΞ.[8] Међутим правоугаоник АΘ је обухваћен дужима АΔ и ΔВ, јер је ΔΘ једнако ΔВ, па према томе је и гномон MNΞ једнак правоугаонику обухваћену дужима АΔ и ΔВ. Свакој од тих површина додајмо површину ΛН, која је једнака квадрату на ГΔ. На тај начин, збир гномона MNΞ и квадрата ΛН једнак је збиру правоугаоника обухваћена дужима АΔ и ΔВ и квадрата на ГΔ. На тај начин, збир гномона MNΞ и квадрата ΛН једнак је збиру правоугаоника обухваћена дужима АΔ и ΔВ и квадрата на ГΔ. Али гномон MNΞ и квадрат ΛН заједно сачињавају квадрат ГЕZВ на ГВ. На тај начин збир правоугаоника обухваћена дужима АΔ и ΔВ и квадрата на ГΔ једнак је квадрату на ГВ.

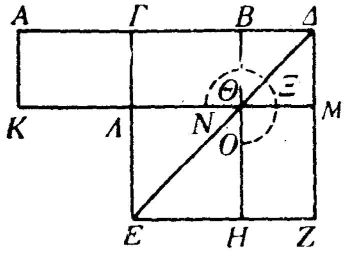


На овај начин, ако се дата дуж подели двема тачкама и на једнаке и на неједнаке делове, биће збир правоугаоника обухваћена неједнаким деловима целе дужи и квадрата на дужи између деоних тачака једнак квадрату на половини дужи. А то је требало доказати.

6.

Ако се дата дуж преполови и продужи за извесну дуж, биће збир правоугаоника обухваћена целом дужи са продужењем и тим продужењем и квадрата на половини дате дужи једнак квадрату на дужи састављеној од половине прве дужи и додате друге дужи.[9]

Нека је права АВ преполовљена тачком Г и у њеном правцу додата дуж ВΔ. Тврдим да је збир правоугаоника обухваћена дужима АΔ и ΔВ и квадрата на ГВ једнак квадрату на ГΔ.



Нека се нацрта на ГΔ квадрат ГЕZΔ и повуку: права ΔЕ, кроз тачку В права ВН паралелно ма којој од правих ЕГ и ΔZ, кроз Θ права КМ паралелно ма којој од правих АВ и ЕZ и још кроз тачку А права АК паралелно ма којој од правих ГΛ и ΔМ.

Пошто је АГ и ГВ једнако, једнако је и АΛ и ГΘ. Међутим правоугаоник ГΘ је једнак правоугаонику ΘZ. И на тај начин је правоугаоник АΛ једнак правоугаонику ΘZ. Ако свакоме додамо правоугаоник ГМ, биће цео правоугаоник АМ једнак гномону NΞО. Међутим правоугаоник АМ обухваћен је дужима АΔ и ΔВ, јер је дуж ΔМ једнака дужи ΔВ; према томе је и гномом NΞО једнак правоугаонику обухваћену дужима АΔ и ΔВ. Ако се сваком од ових дода ΛН, који је једнак квадрату на ГВ, биће правоугаоник обухваћен дужима АΔ и ΔВ са квадратом на ГВ једнак гномону NΞО и квадрату ΛН. Но гномон NΞО са квадратом ΛН је цео квадрат ГЕZΔ на ГΔ; на тај начин је збир правоугаоника обухваћена дужима АΔ и ΔВ и квадрата на ГВ једнак квадрату на ГΔ.

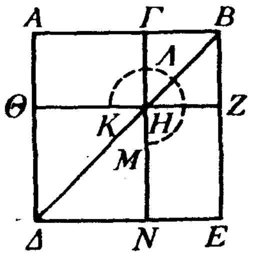
На овај начин, ако се дата дуж преполови и продужи за извесну дуж, биће збир правоугаоника обухваћена целом дужи са продужењем и тим продужењем и квадрата на половини дате дужи једнак квадрату на дужи састављеној од половине прве дужи и додате друге дужи. А то је требало доказати.

7.

Ако се дата дуж произвољно подели на два отсечка, онда је збир квадрата на целој дужи и на једном од отсечака једнак збиру двоструког правоугаоника обухваћена целом дужи и тим отсечком и квадрата на другом отсечку.[10]

Нека је, наиме, дуж АВ произвољно подељена тачком Г. Тврдим да су квадрати на АВ и ВГ заједно једнаки двоструком правоугаонику обухваћену дужима АВ и ВГ и квадрату на ГА.

Нека се нацрта на АВ квадрат АΔЕВ и допуни слика.



Како је правоугаоник АН једнак правоугаонику НЕ, биће, ако се сваком дода квадрат ГZ, цели правоугаоник АZ једнак целом правоугаонику ГЕ, и према томе је збир правоугаоника̂ АZ и ГЕ једнак двоструком правоугаонику АZ. Али правоугаоник АZ са правоугаоником ГЕ чине заједно гномон КΛМ и квадрат ГZ; према томе је гномон КΛМ и квадрат ГZ двоструки правоугаоник АZ. Али тај двоструки правоугаоник је у исто време и двоструки правоугаоник од АВ и ВГ, јер је ВZ једнако ВГ. На тај начин гномон КΛМ и квадрат ГZ заједно једнаки су двоструком правоугаонику од АВ и ВГ. Ако се сваком од ових дода ΔН, квадрат на АГ, биће збир гномона и квадрата ВН и НΔ једнак збиру двоструког правоугаоника обухваћена дужима АВ и ВГ и квадрата на АГ. На тај начин су гномон КΛМ и квадрати ВН и НΔ цео квадрат АΔЕВ и квадрат ГZ, а то су квадрати на АВ и ВГ. Према томе је збир квадрата на АВ и на ВГ једнак збиру двоструког правоугаоника обухваћена дужима АВ и ВГ и квадрата на АГ.

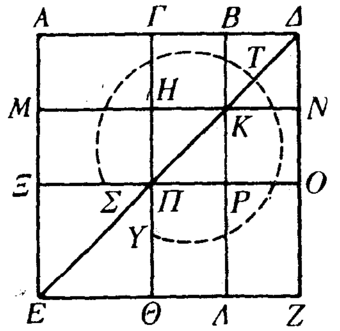
На овај начин, ако се дата дуж произвољно подели на два отсечка, онда је збир квадрата на целој дужи и на једном од отсечака, једнак збиру двоструког правоугаоника обухваћена целом дужи и тим отсечком и квадрата на другом отсечку. А то је требало доказати.

8.

Ако се дата дуж произвољно подели на два отсечка, биће збир четвороструког правоугаоника обухваћена целом дужи и једним отсечком и квадрата на другом отсечку једнак квадрату нацртаном на дужи састављеној од дате дужи и првог отсечка.[11]

Нека је, наиме, дуж АВ произвољно подељена тачком Г. Тврдим да је збир четвороструког правоугаоника обухваћена дужима АВ и ВГ и квадрата на АГ једнак квадрату на АВ и ВГ, као једној дужи.

Нека је права ВΔ продужење праве АВ и нека је ВΔ једнако ГВ. Затим нека се нацрта на АΔ квадрат АЕZΔ и уз то нацрта двострука слика.[12]



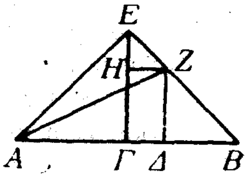
Пошто је ГВ једнако ВΔ, а ГВ једнако НК и ВΔ једнако KN, биће и НК једнако KN. Из истих разлога је и ПР једнако РО. А пошто је ВГ једнако ВΔ, а НК једнако KN, биће и квадрат ГК једнак квадрату КΔ, а квадрат НР квадрату РN. Али квадрат ГК једнак је квадрату РN, пошто су то допуне паралелограма ГО; стога је и квадрат КΔ једнак квадрату НР. На тај начин површине сва четири квадрата ΔК, ГК, НР, РN једнаке су међу собом и све заједно једнаке четвороструком паралелограму ГК. Затим, пошто је дуж ГВ једнака дужи ВΔ, а ВΔ дужи ВК, тј. ГН, и ГВ једнака дужи НК, тј. НП, биће и дуж ГН једнака дужи НП. И пошто је ГН једнако НП, и ПР једнако РО, биће и правоугаоник АН једнак правоугаонику МП, а ПΛ правоугаонику РZ. Али правоугаоник МП једнак је правоугаонику ПΛ, јер су допуне паралелограма МΛ, па према томе је правоугаоник АН једнак правоугаонику РZ. На тај начин четири правоугаоника АН, МП, ПΛ, РZ једнаки су међу собом, а сва четири заједно једнаки су четвороструком правоугаонику АН. Раније је показано да су четири квадрата ГК, КΔ, НР, РN једнаки четвороструком квадрату ГК; на тај начин осам паралелограма, који образују гномон ΣТΥ, сачињавају четвороструки правоугаоник АК. А пошто је паралелограм АК обухваћен од АВ и ВΔ, јер је ВК једнако ВΔ, биће и четири правоугаоника обухваћена од АВ и ВΔ, једнака четвороструком правоугаонику АК. Како је показано да је четвороструки правоугаоник АК једнак гномону ΣΤΥ, биће и четвороструки правоугаоник од АВ и ВΔ једнак гномону ΣΤΥ. Ако се дода сваком од ових ΞΘ, који је једнак квадрату на АГ, биће и четвороструки правоугаоник обухваћен од АВ и ВΔ заједно са квадратом на АГ једнак гномону ΣΤΥ и квадрату ΞΘ. Али гномон ΣΤΥ са квадратом ΞΘ заједно сачињавају квадрат АЕΖΔ на АΔ. Према томе је четвороструки правоугаоник од АВ и ВΔ заједно са квадратом на АГ једнак квадрату на АΔ; али ВΔ је једнако ВГ. Према томе је збир четвороструког правоугаоника обухваћена дужима АВ и ВГ и квадрата на АГ једнак квадрату на АΔ, тј. квадрату нацртаном ва АВ и ВГ као једној дужи.

На овај начин, ако се дата дуж произвољно подели на два отсечка, биће збир четвороструког правоугаоника обухваћена целом дужи и једним отсечком и квадрата на другом отсечку једнак квадрату нацртаном на дужи састављеној од дате дужи и првог отсечка. А то је требало доказати.

9.

Ако се нека дуж подели двема тачкама на једнаке и на неједнаке отсечке, збир квадрата на неједнаким отсечцима целе дужи једнак је двоструком збиру квадрата на половини целе дужи и квадрата на отсечку између деоних тачака.[13]

Нека је, наиме, дуж АВ подељена тачком Г на једнаке делове и тачком Δ на неједнаке делове. Тврдим да је збир квадрата на АΔ и на ΔВ једнак двоструком збиру квадрата на АГ и на ГΔ.



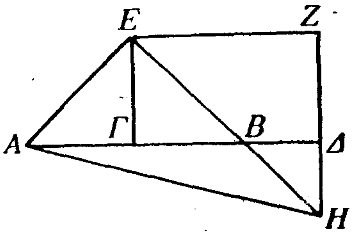
Повуче се кроз Г дуж ГЕ нормално на АВ, и начини једнаком ма којој од дужи АГ и ГВ; повуку се ЕА и ЕВ, и повуче кроз тачку Δ права ΔΖ паралелно ЕГ, кроз тачку Ζ права ΖΗ паралелно АВ, и повуче права АΖ. Пошто је АГ једнако ГЕ, угао ЕАГ једнак је углу АЕГ. И пошто је угао код тачке Г прав, биће остали углови ЕАГ и АЕГ заједно једнаки правом углу, а како су и једнаки, биће сваки од углова ГЕА и ГАЕ једнак половини правог. Из истих разлога је и сваки од углова ГЕВ и ЕВГ једнак половини правог. Према томе је цео угао АЕВ прав. Пошто је угао ΗΕΖ половина, а угао ΕΗΖ је прав, јер је једнак одговарајућем унутрашњем углу ЕГВ, биће и преостали угао ΕΖΗ једнак половини правог; на тај начин је угао ΗΕΖ једнак углу ΕΖΗ, па према томе је и страна ΕΗ једнака страни ΗΖ. Затим, пошто је угао код тачке В половина правог, а угао ΖΔΒ прав, јер је једнак одговарајућем унутрашњем углу ЕГВ, биће и угао ΒΖΔ једнак половини правог; на тај начин је угао код тачке В једнак углу ΔΖΒ, па према томе је и страна ΖΔ једнака страни ΔΒ. Пошто је АГ једнако ГЕ, биће и квадрат на АГ једнак квадрату на ГЕ; на тај начин квадрати на ВГ и на ГЕ заједно једнаки су двоструком квадрату на АГ. Међутим збир квадрата на АГ и на ГЕ једнак је квадрату на ЕА, јер је угао АГЕ прав. На тај начин је квадрат на ЕА једнак двоструком квадрату на АГ. Даље, пошто је ΕΗ једнако ΗΖ, квадрат на ΕΗ једнак је квадрату на ΗΖ, па према томе су квадрати на ΕΗ и на ΗΖ заједно једнаки двоструком квадрату на ΗΖ. Али збир квадрата на ΕΗ и на ΗΖ једнак је квадрату на ΕΖ; стога је квадрат на ΕΖ једнак двоструком квадрату на ΗΖ. Међутим, ΗΖ једнако је ΓΔ, према томе је квадрат на ΕΖ једнак двоструком квадрату на ΓΔ. Стога је квадрат на ЕА једнак двоструком квадрату на АГ, па према томе је збир квадрата на АЕ и на ΕΖ једнак двоструком збиру квадрата на АГ и на ΓΔ. Али збир квадрата на АЕ и на ΕΖ једнак је квадрату на ΑΖ, јер је угао ΑΕΖ прав. На тај начин је квадрат на ΑΖ двоструки збир квадрата на АГ и ΓΔ. Али квадрат на ΑΖ једнак је збиру квадрата на ΑΔ и на ΔΖ, јер је угао код тачке Δ прав. На тај начин збир квадрата на ΑΔ и на ΔΖ је двоструки збир квадрата на АГ и на ΓΔ. Али ΔΖ једнако је ΔΒ. Према томе збир квадрата на ΑΔ и на ΔΒ једнак је двоструком збиру квадрата на АГ и на ΓΔ.

На овај начин, ако се нека дуж подели двема тачкама на једнаке и на неједнаке отсечке, збир квадрата на неједнаким отсечцима целе дужи једнак је двоструком збиру квадрата на половини целе дужи и квадрата на отсечку између деоних тачака. А то је требало доказати.

10.

Ако се дата дуж преполови и продужи за извесну дуж, биће збир квадрата на целој дужи заједно са продужењем и квадрата на продужењу дужи једнак двоструком збиру квадрата на половини прве дужи и квадрата нацртана на дужи састављеној од половине дате дужи и продужења као једној дужи.[14]

Нека је дуж АВ преполовљена тачком Г и нека је ВΔ њено продужење. Тврдим да је збир квадрата на АΔ и на ΔВ једнак двоструком збиру квадрата на АГ и на ГΔ.

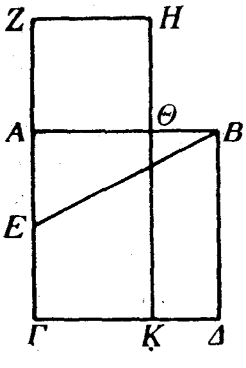


Повуче се кроз тачку Г права ГЕ управно на АВ и једнака свакој дужи АГ, ГВ, и повуку се ЕА и ЕВ; па се повуче кроз Е права ЕZ паралелно АΔ и кроз Δ права ZΔ паралелно ГЕ. Тада, пошто права ЕZ сече две паралелне праве ЕГ и ZΔ, углови ГЕZ и ЕZΔ чине заједно два права угла, а два угла ZЕВ и ЕZΔ према томе су мања од два права, а две праве продужене од углова, који су мањи од два права, секу се; према томе праве ЕВ и ZΔ, продужене преко В и Δ, морају се сећи. Нека се продуже и секу у тачки Н и нека се повуче АН. Сад, пошто је АГ једнако ГЕ, једнак је угао ЕАГ углу АЕГ, а како је угао код тачке Г прав, биће сваки од углова ЕАГ и АЕГ једнак половини правог. Из истих разлога и сваки од углова ГЕВ и ЕВГ једнак је половини правог; према томе је угао АЕВ прав. Даље, пошто је угао ЕВГ једнак половини правог, биће половина правог и угао ΔВН. И угао ВΔН биће прав, јер је једнак унутрашњем наизменичном ΔГЕ; па према томе је и угао ΔНВ једнак половини правог; на тај начин угао ΔНВ једнак је углу ΔВН, а тада је и страна ВΔ једнака страни НΔ. Даље, пошто је угао ЕНZ једнак половини правог, а угао код тачке Z једнак правом углу, јер је једнак супротном углу код тачке Г, биће и угао ZЕН једнак половини правог, па према томе је угао ЕНZ једнак углу ZЕН, а тада је и страна НZ једнака страни ЕZ. Пошто је, даље, (ЕГ једнако је ГА), квадрат на ЕГ једнак квадрату на ГА, биће квадрати на ЕГ и на ГА једнаки двоструком квадрату на ГА. Међутим, квадрати на ЕГ и на ГА једнаки су квадрату на ЕА, па према томе квадрат на ЕА једнак је двоструком квадрату на АГ. Затим, како је ZH једнако EZ, квадрат на ZH једнак је квадрату на ZE, биће стога квадрати на HZ и на ZE једнаки двоструком квадрату на EZ. Али квадрати на HZ и на ZE једнаки су квадрату на EH, и према томе квадрат на EH једнак је двоструком квадрату на EZ. Али је EZ једнако ГΔ, па је стога квадрат на EH једнак двоструком квадрату на ГΔ. Раније је доказано да је квадрат на EA једнак двоструком квадрату на АГ. Стога су квадрати на AE и EH једнаки двоструком збиру квадрата на АГ и на ГΔ. Но збир квадрата на AE и EH једнак је квадрату на AH. На тај начин квадрат на AH једнак је двоструком збиру квадрата на АГ и ГΔ. Али квадрат на AH једнак је збиру квадрата на AΔ и на ΔH. Према томе квадрати на AΔ и на ΔH једнаки су двоструком збиру квадрата на АГ и на ГΔ. Али ΔH је једнако ΔB, па према томе збир квадрата на AΔ и на ΔB једнак је двоструком збиру квадрата на АГ и на ГΔ.

На овај начин, ако се дата дуж преполови и продужи за извесну дуж, биће збир квадрата на целој дужи заједно са продужењем и квадрата на продужењу дужи једнак двоструком збиру квадрата на половини прве дужи и квадрата нацртана на дужи састављеној од половине дате дужи и продужења као једној дужи. А то је требало доказати.

11.

Дату дуж поделити тако да правоугаоник обухваћен целом дужи и једним отсечком буде једнак квадрату на другом отсечку.



Нека је AB дата дуж. Треба AB поделити тако да правоугаоник обухваћен целом дужи и једним отсечком буде једнак квадрату на другом отсечку.

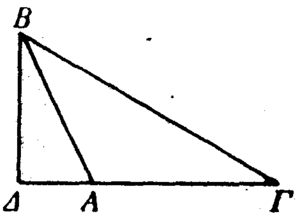
Нацрта се квадрат ABΔГ на AB, и преполови се АГ тачком E, повуче се BE, продужи се ГА до Z, и одмери се EZ једнако BE; нацрта се квадрат ZΘ на AZ, и продужи се HΘ до K. Тврдим да је AB подељено тачком Θ тако да је правоугаоник обухваћен дужима AB и BΘ једнак квадрату на AΘ.

Пошто је дуж АГ преполовљена тачком Е, а права AZ њено продужење, правоугаоник обухваћен дужима ГZ и ZA заједно са квадратом на АЕ једнак је квадрату на EZ. Али EZ је једнако дужи ЕВ, због тога је правоугаоник обухваћен дужима ГZ и ZA заједно са квадратом на АЕ једнак квадрату на ЕВ. Но квадрат на ЕВ једнак је квадратима на ВА и на АЕ, јер је угао код тачке А прав. На тај начин правоугаоник од ГZ и ZA заједно са квадратом на АЕ једнак је квадратима на ВА и на АЕ. Ако се одузме заједнички квадрат на АЕ, онда је правоугаоник од ГZ и ZA једнак квадрату на АВ. Како је правоугаоник обухваћен дужима ГZ и ZA правоугаоник ZK, јер је AZ једнако ZH, а квадрат на АВ је АΔ, биће правоугаоник ZK једнак квадрату АΔ. Ако се одузме заједнички правоугаоник АК, остатак ZΘ биће једнак правоугаонику ΘΔ. Како је ΘΔ правоугаоник обухваћен дужима АВ и ВΘ, јер је дуж АВ једнака дужи ВΔ, а ZΘ је квадрат на АΘ, биће правоугаоник обухваћен дужима АВ и ВΘ једнак квадрату на ΘА.

На овај начин је дата дуж АВ тако подељена тачком Θ да је правоугаоник обухваћен дужима АВ и ВΘ једнак квадрату на ΘА. А то је требало извести.[15]

12.

У сваком тупоуглом троуглу квадрат на страни спрам тупог угла је већи од збира квадрата на странама што образују туп угао за двоструки правоугаоник обухваћен од једне стране тупог угла, наиме оне на чије продужење пада спуштена нормала, и од растојања те нормале од темена тупог угла.[16]



Нека је АВГ тупоугли троугао са тупим углом ВАГ и нека се повуче кроз тачку В нормала ВΔ на продужење ГА. Тврдим да је квадрат на ГВ већи од збира квадрата на ВА и на АГ за двоструки правоугаоник обухваћен дужима ГА и АΔ.

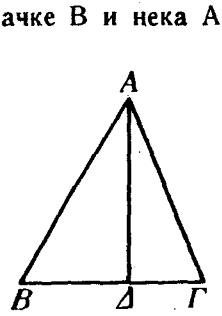
Пошто је дуж ГΔ произвољно подељена тачком А, биће квадрат на ΔГ једнак квадратима на ГА и АΔ и двоструком правоугаонику обухваћену дужима ГА и АΔ. Нека се сваком од њих дода по квадрат ΔВ, тада су квадрати на ГΔ и на ΔВ једнаки квадратима на ГА, на АΔ, на ΔВ и правоугаонику обухваћену дужима ГА и АΔ. Међутим квадрати на ГΔ и на ΔВ једнаки су квадрату на ГВ, јер је угао код тачке Δ прав. Исто тако, квадрати на АΔ и на ΔВ једнаки су квадрату на АВ. Стога је квадрат на ГВ једнак квадратима на ГА и на АВ и двоструком правоугаонику обухваћену дужима ГА и АΔ. Према томе квадрат на ГВ је већи од збира квадрата на ГА и на АВ за двоструки правоугаоник обухваћен дужима ГА и АΔ.

На овај начин, у сваком тупоуглом троуглу квадрат на страни спрам тупог угла је већи од збира квадрата на странама што образују туп угао за двоструки правоугаоник обухваћен од једне стране тупог угла, наиме оне на чије продужење пада спуштена нормала, и од растојања те нормале од темена тупог угла. А то је требало доказати.

13.

У сваком оштроуглом троуглу квадрат на страни спрам оштрог угла мањи је од збира квадрата на странама које образују оштар угао за двоструки правоугаоник обухваћен једном страном оштрог угла, наиме оном на коју је спуштена нормала, и растојањем те нормале од темена оштрог угла.

Нека је АВГ оштроугли троугао са оштрим углом код тачке В и нека АΔ буде нормала спуштена из тачке А на страну ВГ. Тврдим да је квадрат на АГ мањи од збира квадрата на ГВ и ВА за правоугаоник обухваћен дужима ГВ и ВΔ. Пошто је права ГВ произвољно подељена тачком Δ, биће збир квадрата на ГВ и на ВΔ једнак збиру двоструког правоугаоника обухваћена дужима ГВ и ВΔ и квадрата на ΔГ. Нека се дода једном и другом збиру квадрат на ΔА, тада ће квадрати на ГВ, на ВΔ, на ΔА бити једнаки двоструком правоугаонику обухваћену дужима ГВ и ВΔ и квадратима на АΔ и на ΔГ. Али квадрати на ВΔ и на ΔА једнаки су квадрату на АВ, јер је угао код тачке Δ прав. Исто тако, квадрати на



АΔ и на ΔΓ једнаки су квадрату на АΓ. На тај начин су квадрати на ΓВ и на ΔΓ једнаки квадрату на АΓ и двоструком правоугаонику обухваћену дужима ΓВ и ВΔ. Према томе биће квадрат на АΓ за двоструки правоугаоник обухваћен дужима ΓВ и ВΔ мањи од збира квадрата на ΓВ и на ВА.

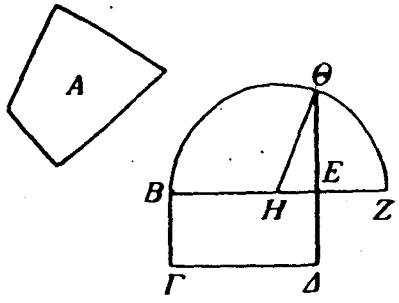
На овај начин, у сваком оштроуглом троуглу квадрат на страни спрам оштрог угла мањи је од збира квадрата на странама које образују оштар угао за двоструки правоугаоник обухваћен једном страном оштрог угла, наиме оном на коју је спуштена нормала, и растојањем те нормале од темена оштрог угла. А то је требало доказати.

14.

Конструисати квадрат једнак датој праволиниској слици.[17]

Нека је дата праволиниска слика А. Треба конструисати квадрат једнак тој праволиниској слици А.

Нека буде конструисан правоугаоник ВΔ једнак праволиниској слици А. Ако при томе буде ВЕ једнако ЕΔ, задатак је решен, јер је конструисан квадрат ВΔ једнак праволиниској слици А. Ако то није случај, биће једна од дужи ВЕ и ЕΔ већа. Нека је већа ВЕ, и нека се она продужи до Z и одмери ЕZ једнако ЕΔ. Затим нека се преполови ВZ тачком Н, нацрта полукруг ВΘZ са средиштем у Н и полупречником НВ односно НZ, ΔЕ продужи до Θ и повуче НΘ.



Пошто је дуж ВZ подељена тачком Н на једнаке а тачком Е на неједнаке делове, биће правоугаоник обухваћен од ВЕ и ЕZ заједно са квадратом на ЕН једнак квадрату на ВZ. Али НZ је једнако НΘ, према томе је правоугаоник обухваћен дужима ВЕ и ЕZ заједно са квадратом на НЕ једнак квадрату на НΘ. Али квадрат на НΘ је једнак квадратима на ΘЕ и на ЕН. Према томе је збир правоугаоника обухваћена дужима ВЕ и ЕZ и квадрата на НЕ једнак збиру квадрата на ΘЕ и на

ЕН. Нека се одузме од једног и другог збира квадрат на НЕ. На тај начин биће правоугаоник обухваћен дужима ВЕ и EZ једнак квадрату на ЕΘ, и правоугаоник обухваћен дужима ВЕ и EZ једнак правоугаонику ВΔ, јер је EZ једнако ЕΔ. Према томе биће паралелограм ВΔ једнак квадрату на ΘЕ. Како је паралелограм ВΔ једнак праволиниској слици А, биће и праволиниска слика А једнака квадрату нацртаном на ΘЕ.

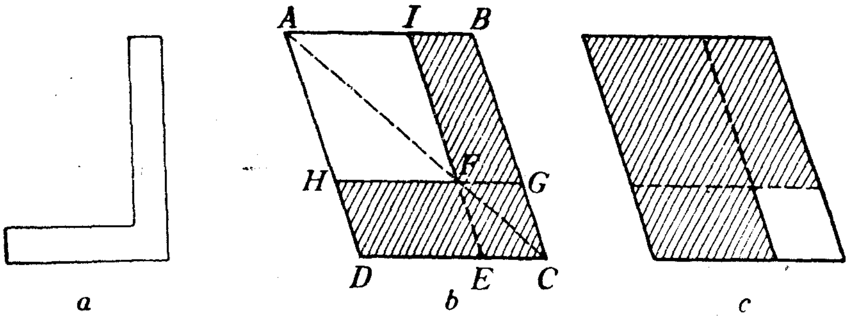
На овај начин је на ΘЕ конструисан квадрат једнак праволиниској слици А. А то је требало извести.

КОМЕНТАР

II.

[1] Тачан значај речи „περιέχεσθαι“ за стране правоугаоника и „περιεχουσῶν“ за краке угла не одговара само појмовима „обухваћен“, или појму садржавања у себи, за правоугаоник односно „заклапају“ за краке угла; те речи се исто тако могу превести са „образован“ за правоугаоник односно „образују за“ за угао.

[2] Овом дефиницијом Еуклид искоришћава још од давних времена познату астрономску справу за одређивање времена помоћу сенке вертикалне шипке и ствара одговарајући геометриски појам (сл. 1 *a*). Еуклидов гномон се не односи само на правоугаоник већ и на паралелограм општег облика. На слици 1 *b*, ABCD је основни паралелограм, AC је његова дијагонала, FGCE је један од паралелограма конструисаних на дијагонали AC, AIFH је други такав паралелограм. Паралелограми HFED и IBGF су допуне. Слика IBCDHFI је гномон са паралелограмом FGCE. Други паралелограм са истим допунама ствара други гномон (сл. 1 *c*). У савременој геометрији појам гномона није се задржао.



a *b* *c*

Сл. 1

[3] Овим ставом се почиње излагање поглавља које се сад назива *геометриска алгебра*. Наведеној теореми одговара алгебарски став

$$a(b+c+d) = ab + ac + ad.$$

Пошто Грци нису у својим геометриским расуђивањима примењивали алгебарска па чак ни аритметичка правила, за свако такво правило потребан је био геометриски доказ.

[4] Овој теореми одговара алгебарска једнакост

$$a(b+c) = a^2$$

под условом $b+c=a$.

У наредним примедбама алгебарске једнакости одговарају доказаним теоремама.

[5] $$(a+b)a = ab + a^2.$$

[6] $$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

[7] $$ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

[8] У Хајбергову тексту слово Μ је употребљено, према слици, са различитим значењима: једанпут на дужини ΒΖ и другипут на страни ΛΞ квадрата ΛΗ ради ознаке гномона. Та особина текста је задржана и у преводу; јасности излагања то не смета. Може се претпоставити да је ту ознаку увео један од преписивача Еуклидова текста.

[9] $$(2a+b)b + a^2 = (a+b)^2.$$

[10] $$(a+b)^2 + a^2 = 2(a+b)a + b^2.$$

[11] $$4(a+b)a + b^2 = [(a+b)+a]^2.$$

[12] Ову слику Еуклид сматра као двоструку, и то после упоређивања са претходним сликама, у овом смислу. На претходним сликама била је повучена само једна права паралелно једном пару страна квадрата, а друга права паралелно другом пару, а овде су повучене две праве: у једном правцу ΓΘ и ΒΛ, а у другом правцу ΜΝ и ΞΟ.

[13] $$a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right].$$

[14] $$(2a+b)^2+b^2=2[a^2+(a+b)^2].$$

[15] Наведена Еуклидова конструкција одговара такозваној непрекидној подели (sectio aurea — златни пресек) дужи. Заиста, ако дуж AB означимо са a, а дуж AΘ са x, Еуклидов услов задатка се може изразити

$$a(a-x)=x^2,$$

одакле се добија пропорција

$$a:x=x:(a-x),$$

која и одговара непрекидној подели.

[16] Стављајући Питагорину теорему на завршетак прве књиге а ову теорему о квадрату стране спрам тупог угла и наредну теорему о квадрату стране спрам оштрог угла на завршетак друге књиге, Еуклид је, очевидно, хтео да истакне важност ових теорема у свом систему излагања геометрије. Та његова тенденција се показала у пуној мери оправдана у току историског развитка излагања геометрије, јер се толико важна Еуклидова метрика оснива на тим теоремама.

[17] Овој конструкцији одговара једначина $x^2=ab$, при чему се правоугаоник добија из праволиниске слике помоћу конструкције изведене у првој књизи (I, 45).

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА III

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 3

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ТРЕЋА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1953

Уредник
дописник Р. КАШАНИН
Управник Математичког института САН

Приказано на I скупу
Одељења природно-математичких наука
од 8-I-1953 г.

Штампарија и књиговезница Српске академије наука — Космајска 28

САДРЖАЈ ТРЕЋЕ КЊИГЕ

ПРЕДГОВОР

Садржај ове, треће, књиге Еуклидових елемената посвећен је кружној линији и праволиниским елементима везаним за круг. Ова књига је изазвала врло много примедаба од стране коментатора, пошто се у њеном излагању јављају и логички недостаци и докази који могу бити изведени друкчије, једноставније.

Превод ове књиге завршио сам још 13. VIII. 1950, али жеља да за коментар искористим и нову литературу, коју сам тек пре кратког времена могао добити, задржала је предају ове књиге у штампу.

При изради и ове књиге су ми помогли В. В. Мишковић и Т. П. Анђелић, па им изјављујем захвалност.

А. Б.

Грешка примећена у другој књизи

Стр. 12. Врсте 6. и 7. стоји: са-гласни треба: су-протни

ТЕКСТ

Дефиниције

1. Једнаки су они кругови код којих су једнаки пречници или полупречници.[1]

2. Тврди се да права додирује круг, ако сусреће круг и, продужена, не сече круг.[2]

3. Тврди се да кругови додирују један другог, ако се сусрећу но не секу.

4. Тврди се да су тетиве[3] круга на истом растојању од центра, ако су нормале спуштене из центра на тетиве једнаке.

5. Тврди се да је више удаљена она (тетива), на коју је спуштена нормала већа.[4]

6. Отсечак (сегмент) круга је слика ограничена тетивом и луком.[5]

7. Угао отсечка је онај који је обухваћен тетивом и луком.[6]

8. Угао уписан у отсечак[7] је угао образован од правих повучених из неке тачке узете на луку отсечка ка крајевима тетиве, која је база отсечка.[8]

9. Ако праве, које образују угао, захватају неки лук, за угао се тврди да се ослања на тај лук.[9]

10. Исечак круга је слика ограничена полупречницима круга, који при центру образују угао, и њима захваћеним луком.[10]

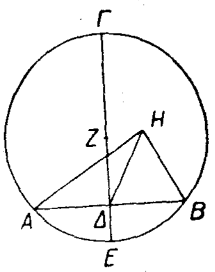
11. Слични су они отсечци кругова, који имају једнаке углове или су им уписани углови једнаки.[11]

1.

Наћи центар датог круга.

Нека је дат круг АВГ. Треба наћи центар круга АВГ.

Повуче се у њему нека тетива АВ и преполови се тачком Δ; кроз Δ, под правим углом ка АВ, повуче се права ΔГ и продужи до Е, па се преполови ГЕ тачком Z; тврдим да је Z центар круга АВГ.



Претпоставимо да то није тако; нека тада, ако је то могуће, то буде тачка Н (као центар); повуцимо праве НА, НΔ, НВ. Пошто су АΔ и ΔВ једнаке, а ΔН је заједничка, биће две стране АΔ, ΔН једнаке двема односним странама ВΔ, ΔН,[12] а како су једнаке и основице НА и НВ, јер су полупречници, биће угао АΔН једнак углу НΔВ. Али, ако једна права постављена према другој чини са њом једнаке упоредне углове, сваки од једнаких углова је прав; према томе је угао НΔВ прав. Но и угао ZΔВ је прав. На тај начин је угао ZΔВ једнак углу НΔВ, већи мањем, а то је немогуће. Према томе тачка Н није центар круга АВГ. На сличан начин се доказује да то не може бити ниједна друга тачка сем тачке Z.

На овај начин, тачка Z је центар круга АВГ.[13]

Последица

Одавде је јасно, да ако тетива полови неку другу тетиву и сече је под правим углом, на оној која сече лежи центар круга. — А то је требало извести.[14]

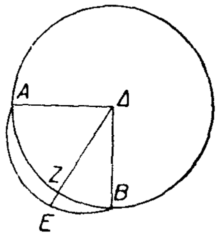
2.

Ако су на периферији круга узете две произвољне тачке, дуж која спаја те тачке пада у круг.[15]

Нека АВГ буде круг и А и В две произвољне тачке узете на његовој периферији. Тврдим да дуж од А до В пада у круг.

Ако то није тако, онда нека, ако је то могуће, она падне ван (круга) као АЕВ; узмимо центар круга АВГ, наиме тачку Δ, повуцимо ΔА и ΔВ и продужимо ΔZЕ.

Пошто је сад ΔА једнако ΔВ, биће једнаки и углови ΔАЕ и ΔВЕ. А како је у троуглу ΔАЕ АЕВ једна страна продужена, биће угао ΔЕВ већи од угла ΔАЕ. Али је угао ΔАЕ једнак углу ΔВЕ. На тај начин је угао ΔЕВ већи од угла ΔВЕ. А како је спрам већег угла већа страна, то је ΔВ веће од ΔЕ. Али ΔВ је једнако ΔZ. Према томе је ΔZ веће од ΔЕ, тј. мање је веће од већег, а то је немогуће. На тај начин дуж, која спаја тачке А и В, не пада ван круга. Слично се доказује да она не може бити на периферији, а то значи да је унутра.



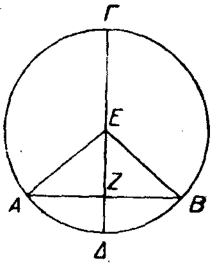
На овај начин, ако су на периферији круга узете две произвољне тачке, дуж која спаја те тачке пада у круг. А то је требало доказати.

3.

Ако права у кругу, која пролази кроз центар (пречник), полови неку другу праву, која не пролази кроз центар (тетиву), онда она сече ту другу под правим угловима; и ако сече под правим угловима, она је полови.

Нека је АВГ круг и у њему права ГΔ, која пролази кроз центар, полови неку праву АВ, која не пролази кроз центар, у тачки Z. Тврдим да прва сече другу под правим угловима.

Узмимо центар круга АВГ, нека то буде тачка Е, и повуцимо ЕА, ЕВ.



Тада, пошто је АZ једнако ZВ, а ZЕ заједничко, биће две (стране) једнаке двема (странама); па и основица ЕА једнака основици ЕВ. Због тога је угао АZЕ једнак углу ВZЕ. А ако права која стоји на другој правој образује међусобно једнаке упоредне углове, биће сваки од њих једнак правом углу. Дакле сваки од углова АZЕ, ВZЕ је прав. Према томе права ГΔ, која пролази кроз центар, а полови праву АВ, која не пролази кроз центар, сече ту праву под правим угловима.

Нека сад права ГΔ сече праву АВ под правим угловима. Тврдим да је она полови, тј. да је АZ једнако ZВ.

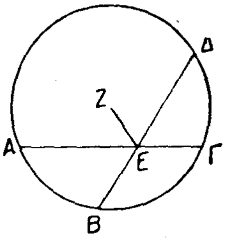
Пошто је, при истој конструкцији, ЕА једнако ЕВ, угао ЕАZ је једнак углу ЕВZ. И прави угао АZЕ је једнак правом углу ВZЕ. На тај начин троуглови ЕАZ, ЕZВ имају два угла једнака двама угловима и једну страну једнаку једној страни, наиме заједничку за њих ЕZ која лежи спрам једнаких углова. Стога ће и преостала страна бити једнака преосталој страни. Према томе је АZ једнако ZВ.

На овај начин, ако права у кругу, која пролази кроз центар (пречник), полови неку другу праву, која не пролази кроз центар (тетиву), онда она сече ту другу под правим угловима; и ако сече под правим угловима, она је полови. А то је требало доказати.[16]

4.

Ако у кругу две праве секу једна другу, но не пролазе кроз центар, оне не полове једна другу.

Нека је АВГΔ круг и у њему АГ, ВΔ две праве (тетиве), које секу једна другу у тачки Е, но не пролазе кроз центар. Тврдим, да оне не полове једна другу.



Кад би било могуће да оне полове једна другу, онда би АЕ било једнако ЕГ и ВЕ једнако ЕΔ; узмимо центар круга АВГΔ и нека то буде тачка Z и повуцимо ZЕ.

Пошто сад права ZЕ, која пролази кроз центар, полови праву АГ, која не пролази кроз центар, она сече ту праву под правим угловима. Према томе је угао ZЕА прав. На исти начин, пошто права ZЕ полови праву ВΔ и она ће је сећи под правим угловима. Према томе је и угао ZЕВ прав. А, доказали смо да је и угао ZЕА прав. Одавде следи да је угао ZЕА једнак углу ZЕВ, мањи већем, а то је немогуће. Према томе АГ и ВΔ не полове једна другу.

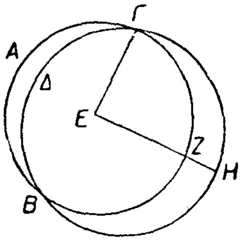
На овај начин, ако у кругу две праве секу једна другу, но не пролазе кроз центар, оне не полове једна другу. А то је требало доказати.

5.

Ако се два круга секу, они немају исти центар.

Два се круга АВГ и ГΔН секу у тачкама В и Г. Тврдим, да они немају исти центар.

Ако би ово било могуће, нека то буде тачка Е. Повуцимо ЕГ и ма како ЕZН. Како је Е центар круга АВГ, биће ЕГ једнако ЕZ. Исто тако, пошто је Е центар круга ГΔН, биће ЕГ једнако ЕН. А раније је доказано да је ЕГ једнако ЕZ. Према томе је ЕZ једнако ЕН, мање већем, а то је немогуће. На тај начин тачка Е није центар кругова АВГ и ГΔН.



На овај начин, ако се два круга секу, они немају исти центар. А то је требало доказати.[17]

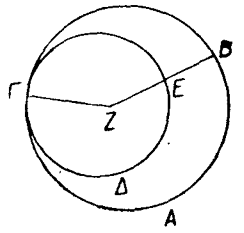
6.

Ако се два круга додирују, они немају исти центар.

Два се круга АВГ и ГΔЕ додирују у тачки Г. Тврдим, да они немају исти центар.

Ако би ово било могуће, нека то буде тачка Z. Повуцимо ZГ и ма како ZЕВ.

Пошто је тачка Z центар круга АВГ, биће ZГ једнако ZВ. Исто тако, пошто је тачка Z центар круга ГΔЕ, биће ZГ једнако ZЕ. А раније је доказано да је ZГ једнако ZВ. Према томе је ZЕ једнако ZВ, мање већем, а то је немогуће. Дакле тачка Z није центар кругова АВГ и ГΔЕ.

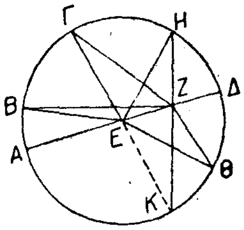


На овај начин, ако се два круга додирују, они немају исти центар. А то је требало доказати.

7.

Ако на пречнику круга узмемо неку тачку, која није центар круга, и кроз ту тачку повучемо ка кругу неке праве линије, биће највећа она на којој је центар, најмања је њен остатак; од других је увек она, која је ближа правој што пролази кроз центар, већа од оне, која је удаљенија; и само две једнаке праве се могу повући из тачке ка кругу и то по једна са сваке стране од најмање.

Нека АВГΔ буде круг и АΔ његов пречник, и на АΔ је узета нека тачка Z, која се не поклапа са центром, а центар круга нека буде Е, и нека су из тачке Z повучене ка кругу праве ZB, ZΓ, ZH. Тврдим, да је највећа ZA, најмања ZΔ, од осталих је ZB већа од ZΓ, а ZΓ од ZH.



Повуцимо праве BE, ΓE, HE. Пошто је у сваком троуглу збир двеју страна већи од преостале стране, биће збир EB и EZ већи од BZ. Али AE је једнако BE (према томе је збир BE и EZ једнак AZ). Стога је AZ веће од BZ. Исто тако, пошто је BE једнако ΓE, а ZE је заједничко, збир BE и EZ је једнак збиру ΓE и EZ. Али угао BEZ је већи од угла ΓEZ; па је према томе основица BZ већа од основице ΓZ. Из истих разлога је ΓZ веће од ZH.

Исто тако, пошто је збир HZ и ZE већи од EH, а EH је једнако EΔ, биће збир HZ и ZE већи од EΔ. Одузмимо заједничко EZ. Тада је остатак HZ већи од остатка ZΔ. Стога је ZA највеће, ZΔ најмање, ZB је веће од ZΓ, а ZΓ од ZH.

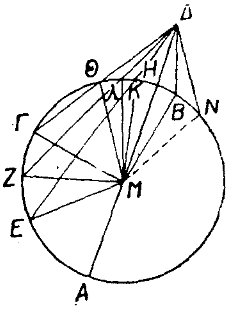
Тврдим, да се из тачке Z могу повући ка кругу ABΓΔ само две једнаке праве и то по једна са сваке стране од најмање ZΔ. Конструишимо, наиме, на правој EZ код тачке E те праве угао ZEΘ једнак углу HEZ, и повуцимо ZΘ. Пошто је сад HE једнако EΘ, а EZ је заједничко, две стране HE и EZ једнаке су двема странама ΘE и EZ; и угао HEZ једнак је углу ΘEZ. Због тога је и основица ZH једнака основици ZΘ. Сад тврдим да не постоји никаква друга права из тачке Z ка кругу, која је једнака ZH. Ако је ово могуће, нека то буде нека права ZK. Пошто је ZK једнако ZH, а ZΘ је једнако ZH, биће ZK једнако ZΘ, ближа ка правој што пролази кроз центар једнака је удаљенијој, а то је немогуће. Према томе не постоји још нека права једнака HZ повучена из тачке Z ка кругу. Дакле постоји само једна.

На овај начин, око на пречнику круга узмемо неку тачку, која није центар круга, и кроз ту тачку повучемо ка кругу неке праве линије, биће највећа она на којој је центар, најмања је њен остатак; од других је увек она, која је ближа правој што пролази кроз центар, већа од оне, која је удаљенија; и само две једнаке праве се могу повући из тачке ка кругу и то по једна са сваке стране од најмање. А то је требало доказати.[18, 19].

8.

Ако је из неке тачке, узете ван круга, повучено ка кругу неколико правих, од којих једна кроз центар, а остале ма како, биће од правих које су повучене према удубљеној периферији највећа она која пролази кроз центар, а од осталих биће увек она која је ближа правој што пролази кроз центар веће од удаљенијих; а од правих, које су повучене према испупченој периферији, најмања је између тачке и пречника, од осталих је увек она која је ближа најмањој правој мање од удаљенијих; и само се две једнаке праве могу повући из тачке ка кругу и то по једна са сваке стране од најмање.

Нека ABΓ буде круг и Δ тачка узета ван круга, и из те тачке повучене праве ΔA, ΔE, ΔZ, ΔΓ, при чему ΔA кроз центар. Тврдим, да је од правих које су повучене према удубљеној периферији AEZΓ највећа ΔA која пролази кроз центар, већа је ΔE од ΔZ, а ΔZ од ΔΓ; а од правих повучених према испупченој периферији ΘΛKH најмања је ΔH, која је између тачке и пречника AH и увек је ближа најкраћој ΔH мања од удаљеније, ΔK од ΔΛ и ΔΛ од ΔΘ.



Одредимо центар круга ABΓ и нека то буде тачка M; и повуцимо праве ME, MZ, MΓ, MK, MΛ, MΘ.

Пошто је AM једнако EM, а MΔ је заједничко, биће AΔ једнако збиру EM и MΔ. Али збир EM и MΔ је већи од EΔ, па према томе је AΔ веће од EΔ. Исто тако, пошто је ME једнако MZ, а MΔ је заједничко, биће збир EM и MΔ једнак збиру ZM и MΔ, али угао EMΔ је већи од угла ZMΔ. Због тога је основица EΔ већа од основице ZΔ. Слично се доказује да је ZΔ веће од ΓΔ. Према томе је највеће ΔA, и ΔE је веће од ΔZ, а ΔZ је од ΔΓ.

И пошто је збир MK и KΔ већи од MΔ, а MH је једнако MK, биће остатак KΔ већи од остатка HΔ; према томе је HΔ мање од KΔ. И пошто су у троуглу MΛΔ над једном страном МΔ повучене унутра дужи МК и КΔ, биће збир МК и КΔ мањи од збира МΛ и ΛΔ. Међутим МК је једнако МΛ, па према томе је остатак ΔК мањи од остатка ΔΛ. Слично се доказује да је ΔΛ мање од ΔΘ. На тај начин је ΔН најмање, док је ΔК мање од ΔΛ, а ΔΛ од ΔΘ.

Тврдим да се само две једнаке праве могу повући из тачке Δ ка кругу и то по једна са сваке стране од најмање ΔН. Конструише се на правој МΔ код тачке М угао ΔМВ једнак углу КМΔ и повуче ΔВ. Пошто је МК једнако МВ, а МΔ је заједничко, онда су две праве КМ и МΔ једнаке двема односним правама ВМ и МΔ, и угао КМΔ једнак је углу ВМΔ, због тога је основица ΔК једнака основици ΔВ. При томе тврдим да је немогуће повући из тачке Δ ка кругу још неку праву једнаку правој ΔК. Ако је ово могуће, нека се повуче и нека то буде ΔN. Пошто је на тај начин ΔК једнако ΔN, ΔК је једнако ΔВ биће према томе ΔВ једнако ΔN, тј. ближа најмањој ΔН једнака је удаљенијој, а доказали смо да је то немогуће. Стога је немогуће повући из тачке Δ ка кругу АВГ више од две једнаке праве и то са обе стране од најмање ΔН.

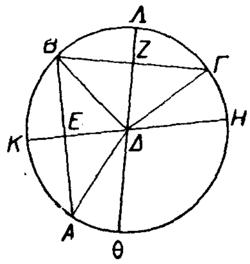
На овај начин, ако је из неке тачке, узете ван круга, повучене ка кругу неколико правих, од којих једна кроз центар, а остале ма како, биће од правих које су повучене према удубљеној периферији највећа она која пролази кроз центар, а од осталих биће увек она која је ближа правој што пролази кроз центар веће од удаљенијих; а од правих, које су повучене према испупченој периферији, најмања је између тачке и пречника, од осталих је увек она која је ближа најмањој правој мање од удаљенијих; и само се две једнаке праве могу повући из тачке ка кругу и то по једна са сваке стране од најмање. А то је требало доказати.

9.

Ако је у кругу узета тачка и из те тачке повучено ка кругу више од две једнаке праве, узета тачка је центар круга.

Нека АВГ буде круг и Δ тачка у том кругу, и из те тачке Δ је ка кругу АВГ повучено више од две једнаке праве, наиме ΔА, ΔВ, ΔГ. Тврдим да је Δ центар круга АВГ.

Нека се повуку АВ и ВГ и преполове тачкама Е и Z па повуку ЕΔ и ZΔ, и продуже до тачака Н, К, Θ, Λ.



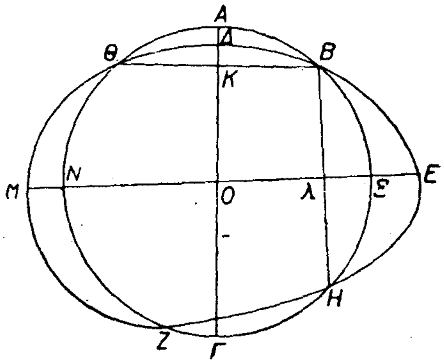
Пошто је АЕ једнако ЕВ, а ЕΔ је заједничко, две стране АЕ и ЕΔ једнаке су двема странама ВЕ и ЕΔ, па је и основица ΔА једнака основици ΔВ; због тога је угао АЕΔ једнак углу ВЕΔ и према томе је сваки од углова АЕΔ, ВЕΔ прав. Стога НК полови АВ и сече је под правим угловима. А пошто се, ако у кругу права полови другу праву и сече је под правим угловима, на тој правој налази центар круга, онда се на правој НК налази центар круга. Из истих разлога се центар круга АВГ налази и на правој ΘΛ. А пошто две праве НК и ΘΛ немају друге заједничке тачке сем тачке Δ, тачка Δ је центар круга АВГ.

На овај начин, ако је у кругу узета тачка и из те тачке повучено ка кругу више од две једнаке праве, узета тачка је центар круга. А то је требало доказати.

10.

Круг не сече круг у више од две тачке.

Нека буде могуће да круг АВГ сече круг ΔЕZ у тачкама којих је више од две и то у В, Н, Z, Θ и нека буду повучене праве ВΘ и ВН, преполовљене тачкама К и Λ; и нека се праве КГ, ΛМ повучене кроз тачке К и Λ управно на ΘВ и ВН, продуже до тачака А и Е.



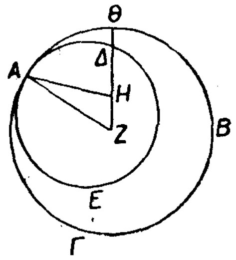
Пошто у кругу АВГ права АГ полови праву ВΘ и сече је под правим угловима, биће центар круга АВГ на правој АГ. Исто тако, пошто у истом кругу АВГ права NΞ полови праву ВН и сече је под правим угловима, биће центар круга АВГ и на правој NΞ. А доказано је да је он на правој АГ.

Али праве АГ и NΞ не секу се ни у којој другој тачки сем у тачки О. Према томе је тачка О центар круга АВГ. На исти начин се доказује да је тачка О центар и круга ΔЕZ. Према томе два круга АВГ и ΔЕZ, који се секу имају исти центар О, а то је немогуће.

На овај начин, круг не сече круг у више од две тачке. А то је требало доказати.

11.

Ако се два круга додирују изнутра и узети су њихови центри, права, која пролази кроз те центре, продужена, пролази кроз тачку додира кругова.



Нека се два круга АВГ и АΔЕ додирују у тачки А и узет је центар круга АВГ тачка Z, а круга АΔЕ тачка Н. Тврдим да права која пролази кроз тачке Н и Z, продужена, пролази кроз тачку А.

Ако није тако, онда је могуће да то буде права ZНΘ; па повуцимо АZ и АН.

Пошто је збир АН и НZ већи од ZА, а то значи и од ZΘ, биће после одузимања заједничког ZН остатак АН већи од НΘ; али АН је једнако НΔ. Према томе је НΔ веће од НΘ, мање је веће од већег, а то је немогуће. Према томе права, која пролази кроз тачке Z и Н, не пролази мимо (тачку А); она, стога, пролази кроз тачку додира А.

На овај начин, ако се два круга додирују изнутра и узети су њихови центри, права, која пролази кроз те центре, продужена, пролази кроз тачку додира кругова. А то је требало доказати.

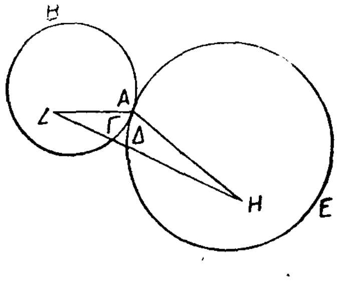
12.

Ако се два круга додирују споља, права, која спаја њихове центре, пролази и кроз тачку додира.

Нека АВГ и АΔЕ буду два круга који се додирују у тачки А и нека је узета тачка Z, центар круга АВГ, и тачка Н, центар круга АΔЕ. Тврдим да права која спаја тачке Z и Н пролази и кроз тачку додира А.

Ако није тако, онда је могућа права ZГΔН, па конструишимо праве АZ и АН.

Пошто је тачка Z центар круга АВГ, биће ZA једнако ZГ. Исто тако, пошто је тачка H центар круга АΔЕ, HА је једнако НΔ. А доказано је да је ZA једнако ZГ. Према томе је збир ZA и AH једнак збиру ZГ и HΔ. Према томе је цела дуж ZH већа од ZA и AH, а при томе и мања; а то је немогуће. Према томе права која иде од тачке Z ка тачки H не пролази мимо тачку додира А, већ кроз ту тачку.



На овај начин, ако се два круга додирују споља, права, која спаја њихове центре, пролази и кроз тачку додира. А то је требало доказати.

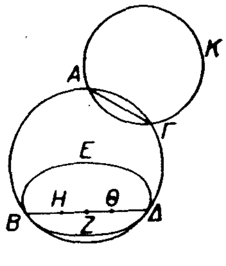
13.

Круг не додирује други круг у више тачака сем у једној било да се додирују изнутра било споља.

Нека буде могуће да круг АВΔГ додирује круг ЕВZΔ, који се налази у првом, не у једној већ у више тачака Δ, В.

Узмимо центар H круга АВΔГ и центар Θ круга ЕВZΔ.

На тај начин, права која пролази кроз H и Θ пролази и кроз В и Δ. Добија се права ВНΘΔ. Пошто је тачка H центар круга АВΔГ, биће ВН једнако НΔ; према томе је ВН веће од ΘΔ. А ВΘ је још много веће од ΘΔ. Исто тако, пошто је тачка Θ центар круга ЕВZΔ, биће ВΘ једнако ΘΔ. Али смо доказали да је она много већа; а то је немогуће. Према томе круг не додирује други круг изнутра у више тачака сем у једној.



Тврдим да то не постоји ни при спољашњем додиру.

Узмимо да је ипак могуће да круг АГК додирује споља круг АВΔГ у више тачака сем у једној наиме у А и Г; повуцимо тада АГ.

Ако су на периферији сваког од кругова АВΔГ и АГК узете две тачке А и Г, биће права која спаја те тачке у унутрашњости сваког од њих. Међутим, она лежи у кругу

АВΔГ и ван круга АГК, то је противуречно. Према томе не додирује један круг други споља у више тачака сем у једној а доказано је и за случај унутрашњег додира.

На овај начин, круг не додирује други круг у више тачака сем у једној било да се додирују изнутра било споља. А то је требало доказати.

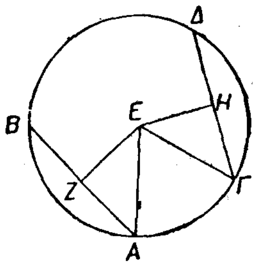
14.

У кругу су једнаке тетиве подједнако удаљене од центра и тетиве, подједнако удаљене од центра, једнаке су.

Нека АВГΔ буде круг и у њему једнаке тетиве АВ, ГΔ. Тврдим да су АВ и ГΔ подједнако удаљене од центра.

Узмимо у кругу АВΔГ центар и нека то буде тачка Е и из Е повуцимо на АВ и ГΔ нормале ЕZ и ЕН и нацртајмо ЕА и ЕГ.

Пошто права ЕZ, која пролази кроз центар, сече праву АВ, која не пролази кроз центар, под правим угловима, она полови ту праву. Стога је АZ једнако ZВ. Према томе је АВ двоструко АZ. Из истих разлога је ГΔ двоструко ГН. А пошто је АВ једнако ГΔ, биће и АZ једнако ГН. Пошто је АЕ једнако ЕГ, биће и квадрат на АЕ једнак квадрату на ЕГ. Али квадрат на АЕ једнак је збиру квадрата на АZ и на ЕZ, јер је угао код Z прав. Исто тако, квадрат на ЕГ је једнак збиру квадрата на ЕН и на НГ, јер је угао код Н прав. Према томе је збир квадрата на АZ и на ZЕ једнак збиру квадвата на ГН и на НЕ; али квадрат на АZ једнак је квадрату на ГН, јер је АZ једнако ГН, па према томе је преостали квадрат на ZЕ једнак преосталом квадрату на ЕН, а због тога је и ЕZ једнако ЕН. Како се за тетиве, за које су једнаке нормале спуштене на њих из центра, каже да су подједнако удаљене од центра, биће АВ и ГΔ подједнако удаљене од центра.



Сад нека АВ и ГΔ буду тетиве подједнако удаљене од центра, тј. нека је ЕZ једнако ЕН. Тврдим да је АВ једнако ГΔ.

Заиста, из исте конструкције се на сличан начин доказује да је АВ двоструко АZ, а ГΔ је двоструко ГН; и пошто је АЕ једнако ГЕ, биће и квадрат на АЕ једнак квадрату на

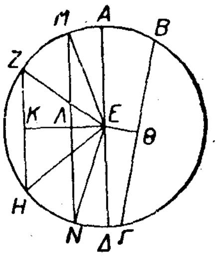
ГЕ. Но квадрат на АЕ је једнак збиру квадрата на ЕZ и на ZА, а квадрат на ГЕ једнак збиру квадрата на ЕН и на НГ. Према томе је збир квадрата на ЕZ и на ZА једнак збиру квадрата на ЕН и на НГ; али квадрат на ЕZ је једнак квадрату на ЕН, јер је ЕZ једнако ЕН. Према томе је преостали квадрат на АZ једнак квадрату на ГН, а због тога и АZ једнако ГН. А пошто је двоструко АZ једнако АВ, а двоструко ГН једнако ГΔ, биће стога и АВ једнако ГΔ.

На овај начин, у кругу су једнаке тетиве подједнако удаљене од центра, и тетиве, подједнако удаљене од центра, једнаке су. А то је требало извести.

15.

Пречник је највећа тетива у кругу; од осталих тетива је она, која је ближа центру, увек већа од удаљенијих.

Нека АВГΔ буде круг, АΔ његов пречник, тачка Е центар, ВГ је ближа пречиику АΔ, а ZН удаљенија. Тврдим да је највећа АΔ и да је ВГ веће од ZН.



Спустимо из центра Е на ВГ и на ZН нормале ЕΘ и ЕК. Пошто је ВГ ближа центру, а ZН удаљенија, биће ЕК веће од ЕΘ. Пренесимо ЕΛ једнако ЕΘ и праву ΛМ, повучену кроз Λ нормално на КЕ, продужимо до N, па повуцимо МЕ, ЕN, ZЕ, ЕН.

Пошто је ЕΘ једнако ЕΛ, биће ВГ једнако МN. Даље, пошто је АЕ једнако ЕМ, а ЕΔ једнако ЕN, биће АΔ једнако збиру МЕ и ЕN. Али збир МЕ и ЕN је већи од МN (и АΔ је веће од МN), а МN је једнако ВГ, па је АΔ веће од ВГ. И пошто су две стране МЕ, ЕN једнаке двема странама ZЕ, ЕН, а угао МЕN већи од угла ZЕН, биће и основица МN већа од основице ZН. Али доказано је да је МN једнако ВГ и према томе је ВГ веће од ZН. На овај начин је пречник АΔ највећи, а ВГ је веће од ZН.

На овај начин, пречник је највећа тетива у кругу; од осталих тетива је она, која је ближа центру, увек већа од удаљенијих. А то је требало доказати.

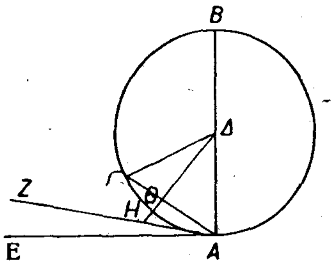
16.

Нормала на пречник круга на његовом крају лежи ван круга; у области између те нормале и круга не налази се никаква друга права и угао полукруга је већи од сваког праволиниског оштрог угла, а његов остатак мањи од таквог угла.

Нека АВГ буде круг око центра Δ и АВ његов пречник. Тврдим да нормала на АВ кроз крај А лежи ван круга.

Ако то није тако, онда је могуће да она лежи у кругу као АГ и тада повуцимо ΔГ.

Пошто је ΔА једнако ΔГ, биће угао ΔАГ једнак углу АГΔ. Али угао ΔАГ је прав, према томе је прав и угао АГΔ. На тај начин је у троуглу АГΔ збир два угла ΔАГ и АГΔ једнак двама правим угловима. А то је немогуће. Према томе нормала на ВА у тачки А не лежи у кругу. Слично се доказује да она не лежи ни на периферији. Према томе је она ван круга.



Нека она (нормала) има положај праве АЕ. Тврдим да се у области између праве АЕ и периферије круга ГΘА не налази никаква друга права.

Ако је то могуће, постоји права у положају ZА; повуцимо из тачке Δ нормалу ΔН на праву ZА. Пошто је угао АНΔ прав, а угао ΔАН мањи од правог, биће ΔА веће од ΔН. Али ΔА је једнако ΔΘ. Према томе је ΔΘ веће од ΔН, мање од већег, а то је немогуће. Дакле, у области између праве и периферије не налази се никаква друга права.

Тврдим да је угао полукруга, обухваћен правом ВА и периферијом ГΘА, већи од сваког праволиниског оштрог угла, а његов остатак, обухваћен периферијом ГΘА и правом АЕ, мањи је од сваког праволиниског оштрог угла.

Заиста, ако постоји праволиниски угао већи од угла обухваћеног од праве ВА и периферије ГΘА и угао мањи од угла обухваћеног од периферије ГΘА и праве АЕ, онда се у области између периферије ГΘА и праве АЕ налази права, која образује угао, и то обухваћен од правих, већи од угла обухваћеног правом ВА и периферијом ГΘА, и угао мањи од угла обухваћеног периферијом ΓΘΑ и правом ΑΕ. Али таква права не постоји; па према томе не постоји угао обухваћен од праве ΒΑ и периферије ΓΘΑ већи од оштрог, обухваћеног од правих, а такође ни угао мањи од обухваћеног периферијом ΓΘΑ и правом ΑΕ.

На овај начин, нормала на пречник круга на његовом крају лежи ван круга; у области између те нормале и круга не налази се никаква друга права и угао полукруга је већи од сваког праволиниског оштрог угла, а његов остатак мањи од таквог угла. А то је требало доказати.[21]

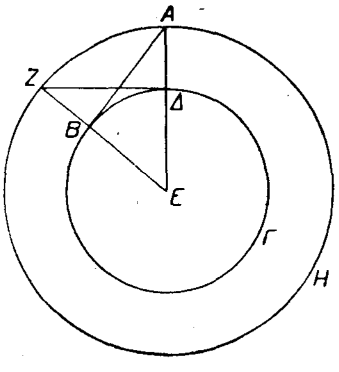
Последица

Одавде је јасно да права повучена нормално на пречник у крају тог пречника додирује круг (и да права додирује круг само у једној тачки и да се доказује да се права која има са кругом две заједничке тачке налази у кругу). А то је требало доказати.

17.

Из дате тачке повући додирну праву на дати круг.

Нека буде дата тачка Α и круг ΒΓΔ. Треба из тачке Α повући праву линију која додирује круг ΒΓΔ.



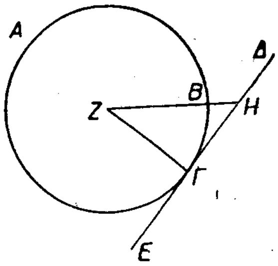
Узмимо центар круга тачку Ε, повуцимо ΑΕ и из тачке Ε као центра са полупречником ΕΑ опишимо круг ΑΖΗ, па кроз тачку Δ повуцимо праву ΔΖ управно на ΕΑ, па нацртајмо ΕΖ и ΑΒ. Тврдим да ће права ΑΒ бити тангента из тачке Α на круг ΒΓΔ.

Пошто је Ε центар кругова ΒΓΔ и ΑΖΗ, биће ΕΑ једнако ΕΖ и ΕΔ једнако ΕΒ; према томе су две стране ΑΕ и ΕΒ једнаке двема странама ΖΕ и ΕΔ, а угао код тачке Ε је заједнички. Због тога је основица ΔΖ једнака основици ΑΒ, троугао ΔΕΖ једнак троуглу ΕΒΑ и остали углови једнаки осталим угловима. Према томе је угао ΕΔΖ једнак углу ΕΒΑ, а угао ΕΔΖ је прав, па на тај начин и угао ΕΒΑ прав; а при томе је права ΕΒ из центра круга. Али права повучена из краја пречника под правим углом према пречнику додирује круг. Стога права АВ додирује круг ВГΔ.

На овај начин је из дате тачке А на дати круг ВГΔ повучена додирна права АВ. А то је требало извести.[22]

18.

Ако права додирује круг и из центра је повучена права до тачке додира, онда та права стоји управно на тангенти.



Нека права ΔЕ додирује круг АВГ у тачки Г; узмимо за центар круга АВГ тачку Z и повуцимо од Z до Г праву ZГ. Тврдим да права ZГ стоји управно на правој ΔЕ.

Ако то није тако, онда нека права ZH буде нормала из тачке Z на праву ΔЕ.

Пошто је тада угао ZHГ прав, биће угао ZГH оштар. Али спрам већег угла лежи већа страна; према томе је ZГ веће од ZH. Но ZГ је једнако ZВ и на тај начин и ZВ је веће од ZH, мање од већег; а то је немогуће. Према томе ZH није нормала на ΔЕ. На сличан начин се доказује да не постоји никаква друга права сем ZГ. Према томе је ZГ нормала на ΔЕ.

На овај начин, ако права додирује круг и из центра је повучена права до тачке додира, онда та права стоји управно на тангенти. А то је требало доказати.

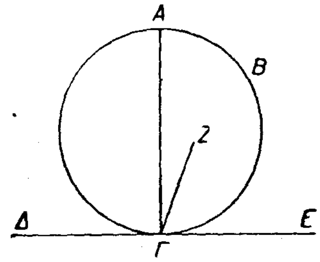
19.

Ако права додирује круг и кроз тачку додира је повучена права нормално на тангенту, онда се на повученој правој налази центар круга.

Нека права ΔЕ додирује круг АВГ у тачки Г и кроз тачку Г је повучена права ГА нормално на ΔЕ. Тврдим да се центар круга налази на правој АГ.

Ако није тако, нека буде, ако је то могуће, центар тачка Z; повуцимо тада праву ГZ.

Пошто права ΔЕ додирује круг, а права ZГ је повучена из центра до тачке додира, биће ZГ нормала на ΔЕ. Према томе је угао ZГЕ прав, а прав је и угао АГЕ; на тај начин је угао ZГЕ једнак углу АГЕ, мањи већем, а то је немогуће. Стога тачка Z није центар круга АВГ. Слично се доказује да не постоји никаква друга права сем АГ.



На овај начин, ако права додирује круг и кроз тачку додира је повучена права нормално на тангенту, онда се на повученој правој налази центар круга. А то је требало доказати.

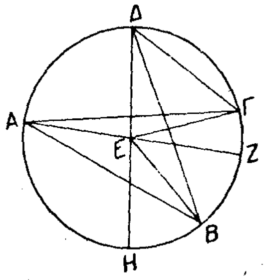
20.

У кругу је угао са теменом у центру (централни угао) једнак двоструком углу са теменом на периферији (перифериском углу), ако се ти углови ослањају на исти лук.

Нека је АВГ круг и ВЕГ угао са теменом у центру, а ВАГ са теменом на периферији, при чему се они ослањају на исти лук ВГ. Тврдим да је угао ВЕГ једнак двоструком углу ВАГ.

Нека продужена АЕ сече круг у тачки Z.

Пошто је ЕА једнако ЕВ, биће и угао ЕАВ једнак углу ЕВА. Према томе је збир углова ЕАВ и ЕВА једнак двоструком углу ЕАВ. Међутим, угао ВЕZ је једнак збиру углова ЕАВ и ЕВА, па је према томе угао ВЕZ двоструки угао ЕАВ. Из истих разлога је и угао ZЕГ једнак двоструком углу ЕАГ. Према томе је и цео угао ВЕГ једнак двоструком целом углу ВАГ.



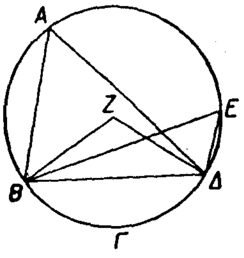
Повуцимо сад другу изломљену линију и нека други угао буде ВΔГ; дуж што спаја Δ и Е продужимо до Н. На сличан начин се доказује да је угао НЕГ двоструки угао ЕΔГ, а угао НЕВ двоструки угао ЕΔВ. Према томе је угао ВЕГ двоструки угао ВΔГ.

На овај начин у кругу је угао са теменом у центру (централни угао) једнак двоструком углу са теменом на периферији (перифериском углу), ако се ти углови ослањају на исти лук. А то је требало доказати.

21.

У кругу су углови, уписани у исти отсечак, међусобно једнаки.

Нека је АВГΔ круг и углови ВАΔ и ВЕΔ су углови уписани у исти отсечак ВАЕΔ. Тврдим да су углови ВАΔ и ВЕΔ међусобно једнаки.



Узмимо центар круга АВГΔ, нека то буде тачка Z; повуцимо ВZ и ZΔ.

Пошто је угао ВZΔ централни, а ВАΔ периферски над истим луком ВГΔ, биће угао ВZΔ једнак двоструком углу ВАΔ. Из истих разлога је угао ВZΔ једнак и двоструком углу ВЕΔ. Према томе је угао ВАΔ једнак углу ВЕΔ.

На овај начин, у кругу су углови, уписани у исти отсечак, међусобно једнаки. А то је требало доказати.

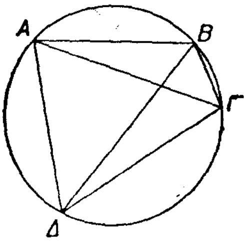
22.

У четвороугловима уписаним у неки круг збир наспрамних углова је једнак двама правим угловима.

Нека је АВГΔ круг и АВГΔ у њега уписани четвороугао. Тврдим да је збир наспрамних углова једнак двама правим угловима.

Повуцимо АГ и ВΔ.

Пошто је у сваком троуглу збир три угла једнак двама правим, биће у троуглу АВГ збир три угла ГАВ, АВГ, ВГА једнак двама правим. Али угао ГАВ је једнак углу ВΔГ, јер су у истом отсечку ВАΔГ и угао АГВ је једнак углу АΔВ, јер су у истом отсечку АΔГВ. Према томе је цео угао АΔГ једнак збиру углова ВАГ и АГВ. Додајмо им заједнички угао АВГ. Стога је збир углова АВГ, ВАГ, АГВ једнак збиру АВГ и АΔГ. Међутим, збир углова АВГ, ВАГ, АГВ једнак је двама правим, па је и



збир АВГ и АΔГ једнак двама правим. На сличан начин се доказује да је и збир углова ВАΔ и ΔГВ једнак двама правим.

На овај начин је у четвороугловима уписаним у неки круг збир наспрамних углова је једнак двама правим угловима. А то је требало доказати.

23.

Над истом дужи са исте стране немогуће конструисати два кружна отсечка слична и неједнака.

Узмимо ипак да је могуће над истом дужи АВ са исте стране конструисати два слична и неједнака кружна отсечка АГВ и АΔВ. Пресецимо их правом АГΔ и повуцимо ГВ и ΔВ.

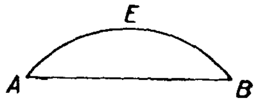
Пошто је отсечак АГВ сличан отсечку АΔВ, а слични кружни отсечци садрже једнаке углове, биће угао АГВ једнак углу АΔВ, спољашњи унутрашњем, а то је немогуће.

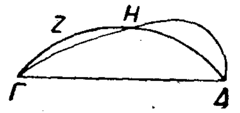
На овај начин, над истом дужи са исте стране немогуће је конструисати два кружна отсечка слична и неједнака. А то је требало доказати.

24.

Слични кружни отсечци (сегменти) над једнаким дужима међусобно су једнаки.

Нека су АЕВ и ГZΔ слични кружни отсечци над једнаким дужима АВ и ГΔ. Тврдим да је отсечак АЕВ једнак отсечку ГZΔ.





Пренесимо отсечак АЕВ на отсечак ГZΔ, при томе сместимо тачку А у тачку Г и праву АВ на праву ГΔ; тада ће тачка В пасти у тачку Δ, јер је АВ једнако ГΔ. А ако се права АВ поклопи са правом ГΔ поклопиће се и отсечак АЕВ са отсечком ГZΔ. Јер, ако се права АВ поклопи са правом ГΔ, а отсечак АЕВ се не поклопи са отсечком ГZΔ, већ се налази или унутра или ван или је померен у страну као ГНΔ, онда један круг сече други у више од две тачке, а то је немогуће. Према томе је немогуће, ако се АВ поклопи са

ГΔ, да се отсечак АЕВ не поклопи са ГZΔ; они се према томе поклапају, па значи да су једнаки међусобно.

На овај начин су слични кружни отсечци (сегменти) над једнаким дужима међусобно једнаки. А то је требало доказати.

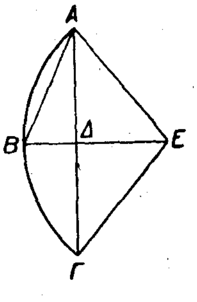
25.

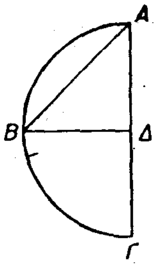
Дати кружни отсечак допунити кругом, чији је то отсечак.

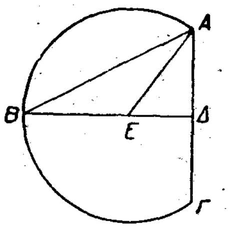
Нека је дат кружни отсечак АВГ. Треба тај отсечак АВГ допунити кругом, чији је то отсечак.

Преполовимо АГ тачком Δ и повуцимо кроз тачку Δ праву ΔВ управну на АГ и затим повуцимо праву АВ. Тада угао АВΔ може бити већи, једнак или мањи од угла ВАΔ.

Нека, прво, буде већи; тада конструишимо на правој ВА код тачке А угао ВАЕ једнак углу АВΔ и продужимо ВΔ до тачке Е па нацртајмо ЕГ. Пошто је сад угао АВЕ, једнак углу ВАЕ, биће и права ЕВ једнака правој ЕА, а како је АΔ једнако ΔГ, а ΔЕ је заједничка, биће две стране АΔ и ΔЕ једнаке двема односним странама, ГΔ и ΔЕ, и угао АΔЕ је једнак углу ГΔЕ, јер је сваки прав, па је стога и основица АЕ једнака основици ГЕ. А доказали смо да је АЕ једнако ВЕ; према томе је ВЕ једнако ГЕ. На тај начин су три дужи ЕА, ЕВ, ЕГ међусобно једнаке. Према томе круг нацртан из центра Е са полупречником једнаким једној од дужи ЕА, ЕВ, ЕГ пролази и кроз остале тачке и допуна је кружног отсечка. На тај начин то је круг који допуњује дати кружни отсечак. При томе је јасно да је отсечак АВГ мањи од полукруга, јер центар Е лежи ван њега.







Слично се показује да ако је угао АВΔ једнак углу ВАΔ, биће свака од ВΔ и ΔГ једнака АΔ и при томе три дужи, наиме ΔА, ΔВ, ΔГ, међусобно једнаке и тачка Δ је центар потпуног круга, а отсечак АВГ је полукруг.

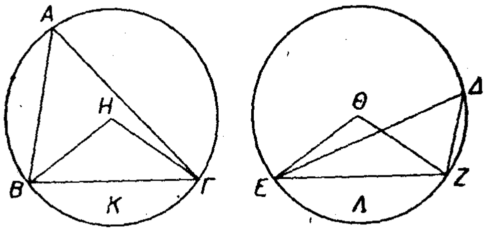
Најзад, ако је АВΔ мање од угла ВАΔ и конструишемо на правој ВА код тачке А угао једнак углу АВΔ, онда ће центар круга пасти унутра кружног отсечка на ΔВ, а сам отсечак АВГ биће већи од полукруга.

На овај начин је дати кружни отсечак допуњен кругом. А то је требало извести.

26.

У једнаким круговима међусобно су једнаки луци, ако су над њима било централни било перифериски углови једнаки.

Нека су АВГ и ΔЕГ једнаки кругови и нека су једнаки било централни углови ВНГ и ЕΘZ, било перифериски ВАГ и ЕΔZ. Тврдим да је лук ВКГ једнак луку ЕΛZ.



Повуцимо ВГ и ЕZ.

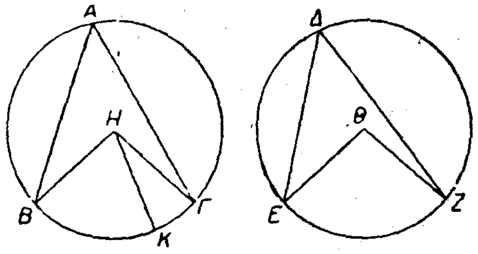
Пошто су кругови АВГ и ΔЕZ једнаки, једнаки су и њихови полупречници. Како су две стране ВН и ГН једнаке двема странама ЕΘ и ΘZ и угао при Н једнак углу при Θ, биће и основица ВГ једнака основици ЕZ. А пошто је угао код А једнак углу код Δ, биће отсечак ВАГ сличан отсечку ЕΔZ, а при томе су на једнаким дужима (ВГ, ЕZ). Како су на једнаким дужима слични кружни отсечци међусобно једнаки, биће ВАГ једнако ЕΔZ. И пошто је цѐо круг АВГ једнак целом кругу ΔЕZ, биће и остатак лук ВКГ једнак луку ЕΛZ.

На овај начин, у једнаким круговима међусобно су једнаки луци, ако су над њима било централни било перифериски углови једнаки. А то је требало доказати.

27.

У једнаким круговима међусобно су једнаки углови, ако су они било централни било перифериски над једнаким луцима.

У једнаким круговима ΑΒΓ и ΔΕΖ над једнаким луцима ΒΓ, ΕΖ налазе се код центара Η и Θ централни углови ΒΗΓ и ΕΘΖ, а код периферије углови ΒΑΓ и ΕΔΖ. Тврдим да је угао ΒΗΓ једнак углу ΕΘΖ и да је угао ΒΑΓ једнак углу ΕΔΖ.



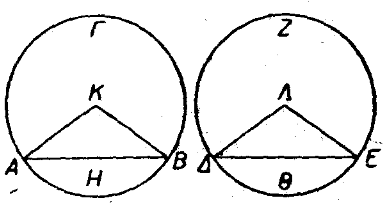
Ако ипак ΒΗΓ није једнако ΕΘΖ, биће један већи од другог. Нека већи буде ΒΗΓ; тада конструишимо на правој ΒΗ у њеној тачки Η угао ΒΗΚ једнак углу ΕΘΖ. Како су једнаки углови над једнаким луцима, ако су им центри исти, биће лук ΒΚ једнак луку ΕΖ. Али ΕΖ је једнако ΒΓ, па према томе је и ΒΚ једнако ΒΓ, мање већем, а то је немогуће. Није према томе угао ΒΗΓ неједнак углу ΕΘΖ, па значи да су они једнаки. Затим, како је угао код Α половина угла ΒΗΓ, а угао код Δ половина угла ΕΘΖ, биће и угао код Α једнак углу код Δ.

На овај начин, у једнаким круговима међусобно су једнаки углови, ако су они било централни било периферски над једнаким луцима. А то је требало доказати.

28.

У једнаким круговима једнаке тетиве отсецају једнаке лукове, већи једнак је већем, мањи — мањем.

Нека су ΑΒΓ, ΔΕΖ једнаки кругови и нека једнаке праве (тетиве) ΑΒ и ΔΕ отсецају веће лукове ΑΓΒ, ΔΖΕ и мање ΑΗΒ и ΔΘΕ. Тврдим да је већи лук ΑΓΒ једнак већем луку ΔΖΕ и мањи лук ΑΗΒ једнак мањем луку ΔΘΕ.



Узмимо центре Κ и Λ кругова и нацртајмо ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Пошто су кругови једнаки, једнаки су и њихови полупречници. Две стране ΑΚ, ΚΒ једнаке су двема странама ΔΛ, ΛΕ и основица ΑΒ једнака је основици ΔΕ. Према томе је и угао ΑΚΒ једнак углу ΔΛΕ, а једнаки углови су над једнаким луцима, ако су истих центара. Стога је лук ΑΗΒ једнак луку ΔΘΕ. Али је цео круг ΑΒΓ једнак целом кругу ΔΕΖ, па према томе је и преостали лук ΑΓΒ једнак преосталом луку ΔΖΕ.

На овај начин, у једнаким круговима једнаке тетиве отсецају једнаке лукове, већи једнак је већем, мањи — мањем. А то је требало доказати.

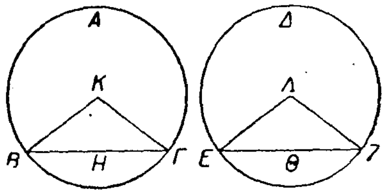
29.

У једнаким круговима једнаке лукове стежу једнаке тетиве.

Нека су ΑΒΓ, ΔΕΖ једнаки кругови и у њима једнаки лукови ΒΗΓ, ΕΘΖ, а стежу их тетиве ΒΓ, ΕΖ. Тврдим да је ΒΓ једнако ΕΖ.

Узмимо центре кругова, тачке Κ, Λ, и повуцимо ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Пошто је лук ΒΗΓ једнак луку ΕΘΖ, биће угао ΒΚΓ једнак углу ΕΛΖ, а како су кругови ΑΒΓ, ΔΕΖ једнаки, биће једнаки и њихови полупречници. Две стране ΒΚ, ΚΓ једнаке су двема странама ΕΛ, ΛΖ и углови, које они захватају, једнаки су, па је и основица ΒΓ једнака основици ΕΖ.



На овај начин, у једнаким круговима једнаке лукове стежу једнаке тетиве. А то је требало доказати.

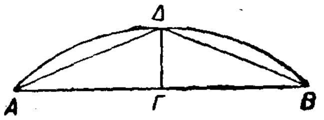
30.

Преполовити дати лук.

Нека је дат лук ΑΔΒ. Треба тај лук преполовити.

Повуцимо дуж ΑΒ и преполовимо је тачком Γ и кроз ту тачку Γ повуцимо праву ΓΔ управно на ΑΒ па повуцимо ΑΔ и ΔΒ.

Пошто је ΑΓ једнако ΓΒ, а ΓΔ је заједничко, две стране ΑΓ, ΓΔ једнаке двема странама ΒΓ, ΓΔ и угао ΑΓΔ једнак је углу ΒΓΔ, јер је сваки прав, биће и основица ΑΔ једнака основици ΔΒ. Али једнаке тетиве отсецају једнаке лукове, већи је једнак већем, мањи — мањем. Но сваки од ΑΔ, ΔΒ мањи је од полукруга. Према томе је лук ΑΔ једнак луку ΔΒ.

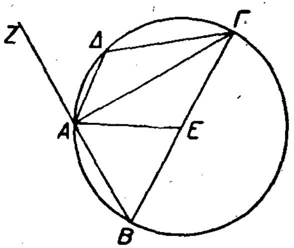


На овај начин је дати лук тачком Δ преполовљен. А то је требало извести.

31.

У кругу је угао у полукругу прав, угао у кружном отсечку већем од полукруга мањи од правог, а у отсечку мањем од полукруга већи од правог; и угао отсечка већег од полукруга је већи од правог, а угао отсечка мањег од полукруга мањи од правог.

Нека АВГΔ буде круг, ВГ је његов пречник, тачка Е центар, па повуцимо ВА, АГ, АΔ, ΔГ. Тврдим да је угао ВАГ у полукругу ВАГ прав, да је угао АВГ у кружном отсечку АВГ, већем од полукруга, мањи од правог угла, а угао АΔГ у кружном отсечку АΔГ, мањем од полукруга, већи од правог.



Повуцимо АЕ и продужимо ВА до Z. Пошто је ВЕ једнако ЕА, биће угао АВЕ једнак углу ВАЕ. Даље, пошто је ГЕ једнако ЕА, угао АГЕ је једнак углу ГАЕ. Одавде је цео угао ВАГ једнак збиру двају углова АВГ и АГВ. Међутим и угао ZАГ, као спољашњи угао троугла АВГ, једнак је збиру двају углова АВГ и АГВ. Према томе је угао ВАГ једнак углу ZАГ, што значи да је сваки од њих прав. На тај начин је угао ВАГ у полукругу ВАГ прав.

Пошто је у троуглу АВГ збир двају углова АВГ и ВАГ мањи од два права угла, а један је ВАГ прав, биће угао АВГ мањи од правог, а он је у кружном отсечку већем од полукруга.

Пошто је АВГΔ четвороугао у кругу, а код четвороуглова у круговима збир наспрамних углова једнак двама правим (због тога је збир углова АВГ и АΔГ једнак двама правим), а угао АВГ је мањи од правог, биће преостали угао АΔГ већи од правог, а при томе је кружни отсечак АΔГ мањи од полукруга.

Тврдим да је и угао већег кружног отсечка захваћеног луком АВГ и тетивом АГ већи од правог, а угао мањег кружног отсечка захваћеног луком АΔ (Г) и тетивом АГ мањи од правог. То је само по себи јасно. Наиме, пошто је угао између правих ВА и АГ прав, биће угао захваћен луком АВГ и тетивом АГ већи од правог. Исто тако, пошто је угао између правих АГ и АZ прав, биће угао захваћен правом ГА и луком АΔ (Г) мањи од правог.

На овај начин, у кругу је угао у полукругу прав, угао у кружном отсечку већем од полукруга мањи од правог, а у отсечку мањем од полукруга већи од правог; и угао отсечка већег од полукруга је већи од правог угла, а угао отсечка мањег од полукруга мањи од правог. А то је требало доказати.

(Последица.

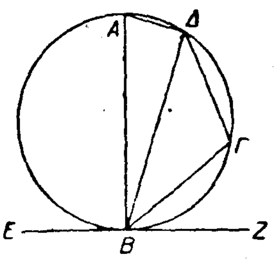
Отуда је јасно да ако је у троуглу један угао једнак збиру двају осталих, тај угао је прав, јер је и његов упоредни угао исто тако једнак том збиру. А кад су упоредни углови једнаки, они су прави.)

32.

Ако права додирује круг и кроз тачку додира је повучена права која пресеца круг, онда су углови између те праве и тангенте једнаки угловима у наизменичним кружним отсечцима.

Нека права ЕZ додирује круг АВГΔ у тачки В и нека је права повучена кроз тачку В сече круг АВГΔ по ВΔ. Тврдим да су углови између праве ВΔ и тангенте ЕZ једнаки угловима у наизменичним кружним отсечцима, тј. да је угао ZВΔ једнак углу у отсечку ВАΔ и угао ЕВΔ једнак углу у отсечку ΔГВ.

Повуцимо кроз тачку В праву ВА управну на праву ЕZ и узмимо на луку ВΔ неку тачку Г и повуцимо АΔ, ΔГ, ГВ.



Пошто права ЕZ додирује круг АВГΔ у тачки В и кроз тачку додира В је повучена права ВА управно на тангенту, биће центар круга АВГΔ на ВА. Према томе је ВА пречник круга АВГΔ. Стога је угао АΔВ, као угао у полукругу, једнак правом углу. Дакле и збир осталих углова ВАΔ и АВΔ једнак је једном правом углу. Међутим, и угао АВZ је прав. Због тога је угао АВZ једнак збиру углова ВАΔ и АВΔ. Одузмимо заједнички угао АВΔ. Тада је остатак угао ΔВZ једнак углу ВАΔ, углу у наизменичном кружном отсечку.

Затим, пошто је АВГΔ четвороугао у кругу, биће збир његових наспрамних углова једнак двама правим. А и збир углова ΔВZ и ΔВЕ једнак је двама правим. Стога је збир углова ΔВZ и ΔВЕ једнак збиру углова ВАΔ и ΔГВ; међутим доказано је да је угао ВАΔ једнак углу ΔВZ, па је према томе преостали угао ΔВЕ једнак углу ΔГВ, углу у наизменичном кружном отсечку ΔГВ.

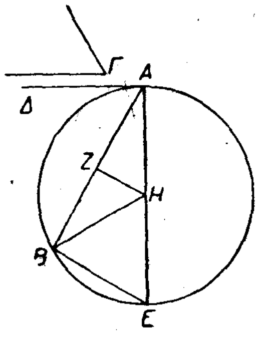
На овај начин, ако права додирује круг и кроз тачку додира је повучена права која пресеца круг, онда су углови између те праве и тангенте једнаки угловима у наизменичним кружним отсечцима. А то је требало доказати.

33.

На датој дужи конструисати кружни отсечак у коме је уписани угао једнак датом праволиниском углу.

Нека буде дата дуж АВ и праволиниски угао код тачке Г. Треба на дужи АВ конструисати кружни отсечак у коме је уписани угао једнак углу код тачке Г.

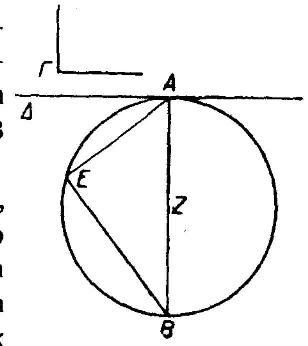
Угао код тачке Г је или оштар, или прав или туп. Нека је прво оштар; тада конструишимо на правој АВ код тачке А (као на првој слици) угао ВАΔ једнак углу Г. Тада ће бити и угао ВАΔ оштар. Повуцимо АЕ управно на ΔА и преполовимо АВ тачком Z, па повуцимо кроз тачку Z праву ZН управно на АВ и повуцимо НВ.



Пошто је АZ једнако ZВ, а ZН је заједничко, две стране АZ и ZН једнаке двема странама ВZ и ZН и угао АZН једнак углу ВZН, биће због тога и основица АН једнака основици ВН. Стога ће круг нацртан из центра Н са растојањем НА проћи и кроз тачку В. Нацртајмо га и нека то буде АВЕ, па нацртајмо ЕВ. Пошто је сад права АΔ кроз крај пречника АЕ, кроз тачку А, управна на АЕ, биће АΔ тангента на круг АВЕ. Пошто сад права АΔ додирује круг АВЕ а права АВ кроз тачку А пресеца круг АВЕ по правој АВ, биће угао ΔАВ једнак углу у наизменичном кружном отсечку АЕВ. Али угао ΔАВ једнак је углу Г, па значи да је углу Г једнак и угао АЕВ.

На овај начин, на датој дужи AB конструисан је кружни отсечак AEB са углом AEB који је једнак датом углу Г.

Нека буде сад угао Г прав, па треба конструисати на AB кружни отсечак у коме је уписани угао једнак правом углу. Поново конструишимо угао BAΔ једнак правом углу Г, како је то конструисано на другој слици, и преполовимо AB тачком Z, и из Z као центра са једним од растојања ZA или ZB нацртајмо круг AEB.

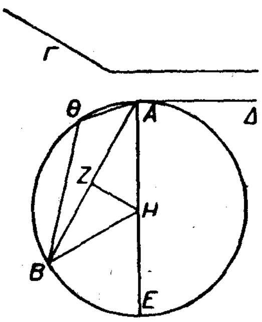


Тада је права AΔ тангента круга, јер су углови код A прави, и угао BAΔ једнак је углу кружног отсечка AEB, јер је овај као угао полукруга исто тако прав. Али угао BAΔ једнак је углу Г, па је према томе и угао у AEB једнак углу Г.

На овај начин је поново на дужи AB конструисан кружни отсечак AEB, у коме је уписани угао једнак углу Г.

Нека, најзад, угао Г буде туп. Конструишимо на правој AB код тачке A, као што је то нацртано на трећој слици, угао BAΔ једнак углу Г и повуцимо праву AE управно на AΔ, па затим преполовимо AB тачком Z, и повуцимо праву ZH управно на AB, па нацртајмо HB.

Како је опет AZ једнако ZB, а ZH је заједничко, две стране AZ и ZH једнаке двема странама BZ и ZH и угао AZH је једнак углу BZH, биће и основица AH једнака основици BH. Па ће према томе круг нацртан са центром у H и полупречником HA проћи кроз тачку B. Нека он тако прође као AEB. Пошто AΔ пролази кроз крај управно на пречник AE, права AΔ додирује круг AEB. А пошто права AB из тачке додира пресеца круг, биће угао BAΔ једнак углу у наизменичном кружном отсечку, углу AΘB. Али угао BAΔ је једнак углу Г, па је и угао AΘB уписан у кружни отсечак једнак углу Г.

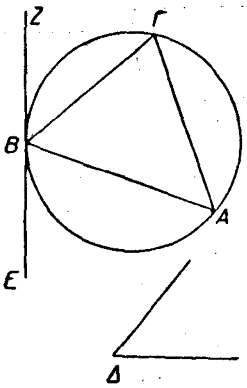


На овај начин је на датој дужи AB конструисан кружни отсечак AΘB у коме је уписани угао једнак углу Г. А то је требало извести.

34.

Од датог круга отсећи сегмент са уписаним углом једнаким датом праволиниском углу.

Нека АВГ буде дати круг и Δ дати праволиниски угао. Треба од круга АВГ отсећи сегмент са уписаним углом једнаким датом праволиниском углу Δ.



Повуцимо кроз тачку В тангенту EZ на круг АВГ и конструишимо на правој ZB код исте тачке В угао ZBГ једнак углу Δ.

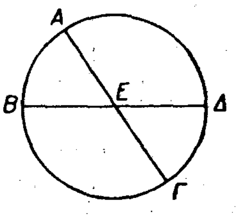
Пошто права EZ додирује круг АВГ и кроз тачку додира В пролази права ВГ, биће угао ZBГ једнак углу у наизменичном кружном отсечку ВАГ. Али угао ZBГ је једнак углу Δ, па према томе је и угао уписан у отсечак ВАГ једнак улгу Δ.

На овај начин је од датог круга АВГ отсечен сегмент са уписаним углом једнаким датом праволиниском углу Δ. А то је требало извести.

35.

Ако се у кругу две тетиве међусобно секу, биће правоугаоник обухваћен отсечцима једне тетиве једнак правоугаонику обухваћеном отсечцима друге.

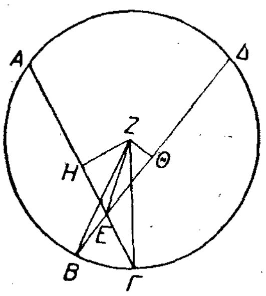
Нека се у кругу АВГΔ две тетиве АГ и ВΔ међусобно секу у тачки Е. Тврдим да је правоугаоник обухваћен од АЕ и ЕГ једнак правоугаонику обухваћеном од ΔЕ и ЕВ.



Ако тетиве АГ, ВΔ пролазе кроз центар и тачка Е је центар круга, онда је јасно да су дужи АЕ, ЕГ, ΔЕ, ЕВ једнаке и да је правоугаоник обухваћен од АЕ и ЕГ једнак правоугаонику обухваћеном ΔЕ и ЕВ.

Нека сад АГ и ΔВ не пролазе кроз центар; узмимо центар круга АВГΔ, нека то буде тачка Z; спустимо из тачке Z нормале ZH и ZΘ на праве АГ и ΔВ и повуцимо ZB, ZГ, ZE.

Како права HZ, која пролази кроз центар, сече праву АГ, која не пролази кроз центар, под правим угловима, онда она полови ту праву, па ће АН бити једнако НГ. Пошто тачка Н полови дуж АГ, а тачка Е је дели на неједнаке делове, биће правоугаоник обухваћен од АЕ и ЕГ са квадратом на ЕН једнак квадрату на НГ. Додајмо им квадрат на HZ. Тада је правоугаоник од АЕ и ЕГ заједно са квадратима на НЕ и на HZ једнак збиру квадрата на ГН и на HZ. Али збир квадрата на ЕН и на HZ једнак је квадрату на ZE и збир квадрата на ГН и на HZ једнак је квадрату на ZГ. Према томе правоугаоник од АЕ и ЕГ са квадратом на ZE једнак је квадрату на ZГ. Али ZГ је једнако ZB. Стога је правоугаоник од АЕ и ЕГ са квадратом на ZE једнак квадрату на ZB. Из истих разлога је правоугаоник од ΔЕ и ЕВ заједно са квадратом на ZE једнак квадрату на ZB. А доказали смо да је правоугаоник од АЕ и ЕГ са квадратом на ZE једнак квадрату на ZB. Одавде следује да је правоугаоник од АЕ и ЕГ са квадратом на ZE једнак правоугаонику од ΔЕ и ЕВ са квадратом на ZE. Одузмимо заједнички квадрат на ZE. Тада је остатак, правоугаоник од АЕ и ЕГ, једнак правоугаонику од ΔЕ и ЕВ.



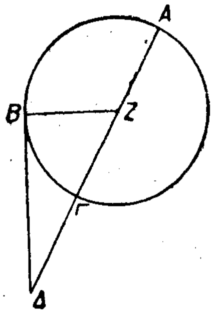
На овај начин, ако се у кругу две тетиве међусобно секу, биће правоугаоник обухваћен отсечцима једне тетиве једнак правоугаонику обухваћеном отсечцима друге. А то је требало доказати.

36.

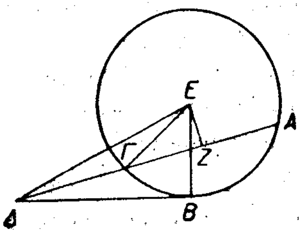
Ако је ван круга узета нека тачка и из те тачке су повучене ка кругу две праве, од којих једна сече круг, а друга га додирује, онда је правоугаоник од целе сечице и њеног отсечка између узете тачке и испупченог лука једнак квадрату на тангенти.

Узмимо тачку Δ ван круга АВГ и из тачке Δ повуцимо ка кругу АВГ две праве ΔГ(А) и ΔВ, при чему права ΔГА сече круг, а ВΔ га додирује. Тврдим, да је правоугаоник обухваћен од АΔ и ΔГ једнак квадрату на ΔВ.

Права (Δ)ГА или пролази кроз центар или не пролази Нека, прво, пролази кроз центар и нека Z буде центар круга АВГ, па повуцимо ZВ. Тада је угао ZВΔ прав. Пошто тачка Z полови дуж АГ, а ГΔ је њено продужење, биће правоугаоник од АΔ и ΔГ са квадратом на ZГ једнак квадрату на ZΔ. Али ZГ је једнако ZВ. Према томе, правоугаоник од АΔ и ΔГ са квадратом на ZВ једнак је квадрату на ZΔ. Међутим, квадрат на ZΔ једнак је збиру квадрата на ZВ и на ВΔ. То значи да је правоугаоник од АΔ и ΔГ са квадратом на ZВ једнак збиру квадрата на ZВ и на ВΔ. Одузмимо заједнички квадрат на ZВ. Тада је остатак, правоугаоник на АΔ и ΔГ, једнак квадрату на тангенти ΔВ.



Нека сад ΔГА не пролази кроз центар круга АВГ; узмимо центар Е и из тачке Е спустимо нормалу ЕZ на праву АГ, и повуцимо ЕВ, ЕГ, ЕΔ. Тада је угао ЕВΔ прав. Како права ЕZ, која пролази кроз центар, сече праву АГ, која не пролази кроз центар, и полови је, биће АZ једнако ZГ. И пошто је права АГ преполовљена тачком Z, а ГΔ је њено продужење, биће правоугаоник од АΔ и ΔГ са квадратом на ZГ једнак квадрату на ZΔ. Додајмо им квадрат на ZЕ. Тада је правоугаоник од АΔ и ΔГ са квадратима на ГZ и на ZЕ једнак збиру квадрата на ZΔ и на ZЕ. Али збир квадрата на ГZ и на ZЕ једнак је квадрату на ЕГ, јер је угао ЕZГ прав. И збир квадрата на ΔZ и на ZА је једнак квадрату на ЕΔ. Стога је правоугаоник од АΔ и ΔГ са квадратом на ЕГ једнак квадрату на ЕΔ. Али ЕГ је једнако ЕВ. Према томе је правоугаоник од АΔ и ΔГ са квадратом на ЕВ једнак квадрату на ЕΔ. Али квадрат на ЕΔ је једнак збиру квадрата на ЕВ и на ВΔ, јер је угао ЕВΔ прав. Стога је правоугаоник од АΔ и ΔГ са квадратом на ЕВ једнак збиру квадрата на ЕВ и на ВΔ. Одузмимо сад заједнички квадрат на ЕВ. Тада је остатак, правоугаоник на АΔ и ΔГ једнак квадрату на ΔВ.

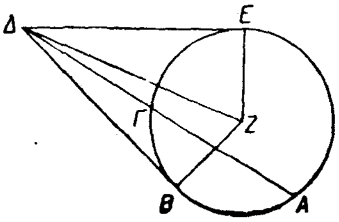


На овај начин, ако је ван круга узета нека тачка и из те тачке су повучене ка кругу две праве, од којих једна сече круг, а друга га додирује, онда је правоугаоник од целе сечице и њеног отсечка између узете тачке и испупченог лука једнак квадрату на тангенти. А то је требало доказати.

37.

Ако је ван круга узета нека тачка и из те тачке су повучене ка кругу две праве, од којих једна сече круг а друга само стиже до њега, и ако је при томе правоугаоник од целе сечице и њеног отсечка између узете тачке и испупченог лука једнак квадрату на оној правој што стиже до круга, онда последња права додирује круг.

Узмимо тачку Δ ван круга АВГ и нека су из тачке Δ ка кругу АВГ повучене две праве ΔГА, ΔВ и нека ΔГА сече круг а ΔВ придолази му и при томе је правоугаоник од АΔ и ΔГ једнак квадрату на ΔВ. Тврдим да права ΔВ додирује круг АВГ.



Повуцимо праву ΔЕ, тангенту на кругу АВГ, и узмимо центар круга АВГ, нека то буде тачка Z, и повуцимо ZE, ZB, ZΔ. Тада је угао ZEΔ прав. Пошто ΔЕ додирује круг, а права ΔГА га сече, биће правоугаоник од АΔ и ΔГ једнак квадрату на ΔЕ. Али тај правоугаоник на АΔ и ΔГ једнак је квадрату на ΔВ. Према томе је квадрат на ΔЕ једнак квадрату на ΔВ. Значи и ΔЕ је једнако ΔВ. А и ZE је једнако ZB. На тај начин две стране ΔЕ и EZ су једнаке двема странама ΔВ и BZ, а њихова основица је заједничка ZΔ. Одавде следује да је угао ΔEZ једнак углу ΔBZ; али угао ΔEZ је прав, па према томе је и угао ΔBZ прав. И дуж ZB, продужена, је пречник. А права повучена кроз крај пречника управно на пречник додирује круг. Према томе, права ΔВ додирује круг АВГ. Слично се доказује, ако би се центар налазио на правој АГ.

На овај начин, ако је ван круга узета нека тачка и из те тачке су повучене две праве, од којих једна сече круг а друга само стиже до њега и ако је при томе правоугаоник од целе сечице и њеног отсечка између узете тачке и испупченог лука једнак квадрату на оној правој што стиже до круга, онда последња права додирује круг. А то је требало доказати.

КОМЕНТАР

III

[1] Логичка природа ове прве дефиниције је компликована. Неки коментатори сматрају ову дефиницију за аксиому, а други доказују њен садржај и према томе узимају је за теорему. Ипак при доказу искоришћавају друге истине, које у њиховом систему излагања геометрије имају аксиоматички карактер (Hilbert).

Код Еуклида не постоји специјалан назив за полупречник; он употребљава израз „права из центра“, изостављајући при томе и реч права, а задржавајући од те речи само члан: ἡ ἐκ τοῦ κέντρου (εὐθεῖα). У трећем постулату прве књиге тај исти појам је изражен са διάστημα; ова реч изражава растојање, али као геометриски облик, без допунског метричког значења; за круг тај појам изражава и појам „отвор шестара“.

[2] Појам тангенте има код Еуклида узак карактер, тангенте на круг. Савремена дефиниција тангенте као граничног положаја, ако он постоји, сечице, која пролази кроз дату тачку на кривој и другу тачку која тежи првој, не поставља никакве услове о томе да ли та права сече при свом продужењу криву или не. Међутим код Еуклида тај услов је нарочито наглашен.

[3] Савремена реч „тетива“ у потпуној мери одговара Еуклидовој „правој у кругу“, при чему реч „права“ треба разумети у смислу отсечка праве, тј. у смислу дужи. Исто то се односи и на појам нормале („катете“) као дужи.

[4] Овом дефиницијом Еуклид не поставља метричке особине тетиве и нормале, већ говори само о томе које изразе треба употребити за опис одговарајућих геометриских односа.

[5] За отсечак круга се употребљује и реч сегмент. Еуклидовим речима „периферија круга“ одговара како кружна линија у целини, тако и један део кружне линије, тј. лук. У тексту ове дефиниције реч је о луку.

[6] Савремени појам угла између криве и праве односно између две криве претпоставља конструкцију тангената на те криве у тачки пресека. Код Еуклида појам угла кружног сегмента је самосталан геометриски облик састављен од праве и криве, тетиве и лука, без допунске конструкције тангенте на лук у крају тетиве. Тај Еуклидов појам у току историског развитка геометрије, кроз тежњу да се поставе што тачнији и простији основни појмови, изгубио је своју примену и сад се више не употребљује.

[7] Код Еуклида кратко „угао у отсечку".

[8] У овој дефиницији се наводи да положај темена угла уписаног у отсечак може бити произвољно изабран на луку отсечка. Да су сви такви углови датог отсечка једнаки то следује тек после доказа теореме 21. ове књиге. На ову логичку недоследност скрећу пажњу како стари тако и савремени коментатори.

[9] Израз „ослања се на лук" ближи је Еуклидовом тексту, него израз „над луком", који се обично употребљује. Према стилској потреби употребљаваћемо и један и други израз.

[10] За исечак круга се употребљује и реч сектор.

[11] Недостатак ове дефиниције, као и дефиниције 8., у томе је што се претпоставља једнакост свих углова уписаних у дати отсечак.

[12] У Heiberg'-овом тексту стоји ΗΔ, ΔΒ. Сматрам да је згодније ове стране ставити у оном реду који одговара реду одговарајућих страна првог троугла.

[13] При доказу тачности извршене конструкције употребљена је метода довођења супротног тврђење до апсурда. То је такозвана апагогична метода доказивања, која се врло често примењује у Еуклидовим елементима.

[14] Реченицу: „А то је требало извести", супротно Heiberg' овој редакцији текста, према којој је стављена ова реченица и у нашем тексту, као пример евентуалне грешке преписивача, треба ставити пре последице.

[15] Речи „пада у круг" могу се заменити речима „налази се у кругу", али на овом месту задржавамо, ради примера, реч „пада", јер она боље одговара Еуклидову тексту. Тај исти појам задржавају и други преводиоци: cadet (Heiberg), wil fall (Heath), попадёт (Мордухай-Болтовской).

[16] Речи стављене у загради припадају преводиоцу. Ако то није случај, ставићемо нарочиту примедбу.

[17] Без непосредне везе само са овом теоремом навешћу једну примедбу општег карактера о оним Еуклидовим теоремама које се односе на релативни положај праве према кругу и једног круга према другом. У тим теоремама нарочито јасно се испољава врло карактеристична особина Еуклидовог излагања геометриског материјала. Еуклид оперише само са фиксираним, сталним, смрзнутим геометриским облицима. Елемент променљивости, а нарочито функционалне променљивости геометриских облика код Еуклида не постоје. Једино што понекад код Еуклида можемо приметити то су различити случајеви положаја или односа геометриских облика једне исте категорије, али увек у дискретној форми и никад у еволутивној, променљивој, функционалној форми. Савремена Елементарна геометрија чак и у школској форми уноси тај елемент и баш на положају тачке односно праве према кругу, односно једног круга према другом показује како се ствара систематизација на основу функционалног принципа (Гл. на пр. А. Билимовић - Т. Анђелић. Планиметрија. 1940. Стр. 67—69).

[18] Формулисање дела 7. теореме: „да се само две једнаке праве могу повући из тачке ка кругу и то по једна са сваке стране од *најмање*“ допушта извести закључак, на њега наводи и слика, да је могуће говорити само о положају у односу на најмањи део пречника. Међутим, једнаке праве можемо повући у односу и на највећи део пречника. Јасно је да је у суштини ствари симетричност у односу на пречник. Појам симетричности ма у ком облику код Еуклида не постоји.

[19] Heiberg у свом издању за теореме 7, 8, 9, 10, 11 и 31 даје варијанте доказа. Ове варијанте доказују да основни Еуклидов текст није задовољавао било самог Еуклида било његове преписиваче и коментаторе. Логичким недостацима доказа ових теорема многи коментатори посвећују велику пажњу.

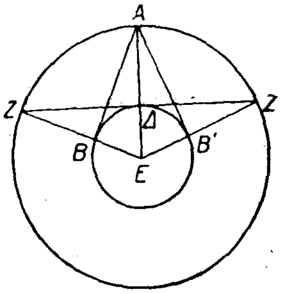
[20] Теорему о једнакости правоуглих троуглова са једнаким хипотенузама и, по једној, катетама, која веома упрошћава доказ теореме 14., Еуклид уопште није извео и према томе није ни примењивао.

[21] У вези са тангентом на круг стоји појам угла између тангенте и круга, такозвани „угао додира“. Тај угао је био предмет опширних дискусија у XVI и XVII столећу. У вези баш са тим углом добила је нарочити значај Архимедова аксиома о величинама. Према тој аксиоми за сваке две величине *a* и *b* увек мора да постоји такав природан број *n* да буде задовољена неједнакост:

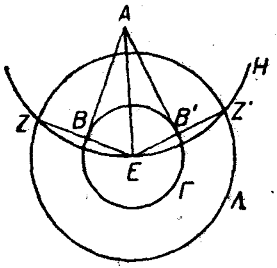
$$na > b.$$

Угао додира не задовољава ту аксиому и према томе се не може сматрати као величина.

[22] Интересантно је приметити да Еуклидово решење овог конструктивног задатка наводи само једну тангенту на круг. Јасно је до продужење праве ZΔ (сл. 1) до пресека Z са кружном линијом даје другу тангенту AB′ на дати круг из тачке A.



Сл. 1



Сл. 2

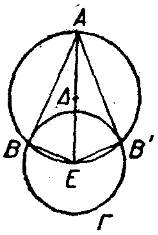
Наведимо ради упоређења још неколико познатих начина за конструкцију тангената на круг из тачке ван круга.

1. Нека је Г дати круг и A дата тачка (сл. 2). Из тачке A, као центра, са полупречником AE нацртајмо круг H, а затим из центра E са полупречником једнаким пречнику датог круга нацртајмо круг Λ и узмимо у обзир тачке Z и Z′ пресека круга Λ са кругом H. Тачке B и B′ пресека правих EZ и EZ′ и круга Г одређују положај тангената.

2. На AE (сл. 3), као на пречнику, нацртајмо круг. Тачке B и B′ пресека тог круга са кругом Г одређују тангенте AB и AB′.

3. Најзад наведимо конструкцију која се може извести само помоћу ленира и која се обично доказује у Пројективној геометрији.

Из тачке А (сл. 4) повуцимо две секанте АВГ и АΔЕ. Тачку Н, пресек страна ВΔ и ГЕ, спојимо са тачком Z, пресеком дијагонала ВЕ и ГΔ. Пресеци Θ и I праве НZ са датим кругом су тачке додира тангената АΘ и АI.

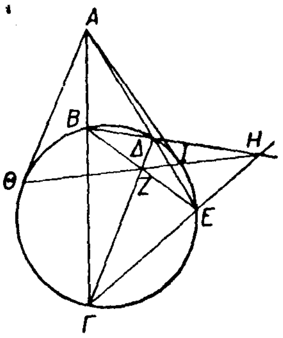


Сл. 3

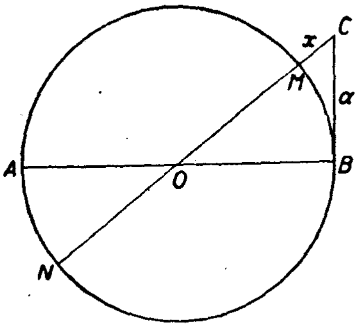
[23] Приметимо да излагање теорема 35, 36 и 37 на неким местима може се знатно скратити, ако се употреби апарат савремене елементарне алгебре. У нашем преводу задржавамо углавном Еуклидов текст.

[24] На садржају ове теореме се оснива геометриска метода решавања квадратне једначине, која припада Марину Гeталдићу1). Наведимо ту методу. Нека је дата квадратна једначина

$$(1) \qquad x^2+bx=a^2,$$



Сл. 4



Сл. 5

написана у хомогеном облику, где су a и b означавају дате дужи. На $AB=b$, као на пречнику, конструишимо круг (сл. 5) и од тачке B на тангенти BC одмеримо дужину $BC=a$. На основу теореме 36 тада можемо написати.

$$CB^2=CM \times CN$$

или

$$a^2=x\,(x+b),$$

одакле закључујемо да је x тражено једно решење квадратне једначине. Са друге стране, непосредно из слике можемо написати:

$$x=CM=CO-MO=$$

$$=\sqrt{OB^2+BC^2}-OB$$

и према томе имамо:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{b}{2}.$$

Поновили смо савременим математичким језиком Геталдићево решење једначине (1). Негативно решење износи негативну дуж CN са вредношћу

$$-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{b}{2}.$$

Геометриска решења других типова квадратне једначине остављамо по страни.

---

[1] Marinus Ghetaldus. De resolutione et compositione mathematica, Romae, 1640.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА IV

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 4

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ЧЕТВРТА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1953

Уредник
дописник Р. КАШАНИН
Управник Математичког института САН

Приказано на I скупу
Одељења природно-математичких наука
од 8-I-1953 г.

Штампарија и књиговезница Српске академије наука — Космајска 28

САДРЖАЈ ЧЕТВРТЕ КЊИГЕ

ПРЕДГОВОР

Ова четврта књига Еуклидових елемената је посвећена конструктивним задацима који су у вези са троуглом и правилним многоугловима и то: квадратом, петоуглом, шестоуглом и петнаестоуглом. За сваки од тих многоуглова Еуклид проучава четири задатка: у круг уписати многоугао, око круга описати многоугао, око многоугла описати круг и у многоугао уписати круг.

У математичкој настави књига може послужити као збирка елементарних конструктивних задатака, који се односе на исту тему. Карактеристична је она класична систематичност са којом Еуклид разрађује одговарајућа четири проблема.

При изради и ове књиге су ми помогли В. В. Мишковић и Т. П. Анђелић па им изјављујем захвалност.

А. Б.

ТЕКСТ

Дефиниције

1. Каже се да се праволиниска слика уписује у праволиниску слику, ако сваки од углова оне која се уписује додирује[1] страну оне у коју се уписује.

2. Исто тако каже се да се слика описује око слике, ако свака страна оне која се описује додирује[2] сваки угао оне око које се описује.

3. Каже се да се праволиниска слика уписује у круг, ако сваки угао оне која се уписује додирује[3] периферију круга.

4. Каже се да се праволиниска слика описује око круга, ако свака страна оне која се описује додирује периферију круга.

5. Исто тако каже се да се круг уписује у слику, ако периферија круга додирује сваку страну оне у коју се он уписује.

6. Каже се да се круг описује око слике, ако периферија круга додирује[4] сваки угао оне око које се описује.

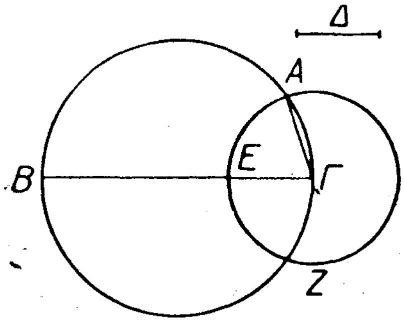
7. Каже се да је права уписана[5] у круг, ако јој се крајеви налазе на периферији круга.

1.

У дати круг уписати праву једнаку датој правој која није већа од пречника круга.

Нека је АВГ дати круг и Δ дата права која није већа од пречника круга. Треба у круг АВГ уписати праву једнаку датој правој Δ.

Повуцимо ВГ, пречник круга АВГ. Ако је сад ВГ једнако Δ, постигнуто је оно што се тражи, јер је у круг АВГ уписана права ВГ једнака правој Δ. А ако је ВГ веће од Δ, повуцимо ГЕ. једнако Δ, па из Г као центра са полупречником ГЕ нацртајмо круг ЕАZ и повуцимо ГА.



Како је сад тачка Г центар круга ЕАZ, биће ГА једнако ГЕ. Но ГЕ је једнако Δ, па значи и ГА је једнако Δ.

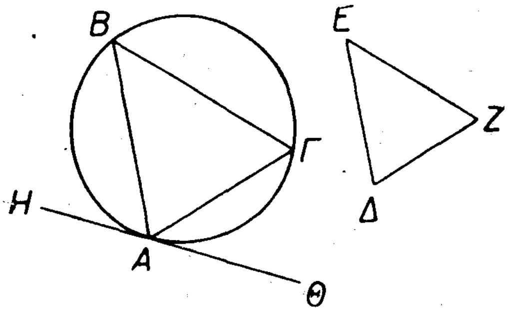
На овај начин је у дати круг АВГ уписана права ГА једнака датој правој Δ. А то је требало извести.

2.

У дати круг уписати троугао са угловима једнаким[6] угловима датог троугла.

Нека је АВГ дати круг и ΔЕZ дати троугао. Треба у круг АВГ уписати троугао са угловима једнаким угловима троугла ΔЕZ.

Повуцимо кроз тачку А тангенту НΘ на круг АВГ и на правој АΘ конструишимо код тачке А угао ΘАГ једнак углу ΔЕZ, а на правој АН опет код тачке А угао НАВ једнак углу ΔZЕ, па повуцимо ВГ.



Како сад права АΘ додирује круг АВГ и из тачке додира, тачке А, повучена је у кругу права АГ, угао ΘАГ биће једнак углу АВГ, уписаном у супротни отсечак круга. Но угао ΘАГ је једнак углу ΔЕZ, те је и угао АВГ једнак углу ΔЕZ. Из истих разлога и угао АГВ је једнак углу ΔZЕ. Тада је и преостали угао ВАГ једнак преосталом углу ЕΔZ. (Према томе троугао АВГ има углове једнаке угловима троугла ΔЕZ, а уписан је у круг АВГ).

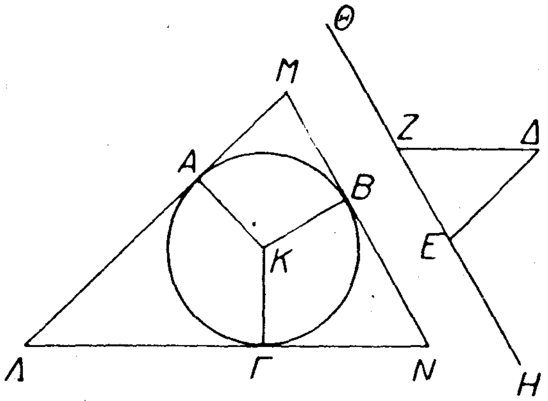
На овај начин, у дати круг је уписан троугао са угловима једнаким угловима датог троугла. А то је требало извести.

3.

Око датог круга описати троугао са угловима једнаким угловима датог троугла.

Нека је АВГ дати круг и ΔΕΖ дати троугао; треба око круга АВГ описати троугао са угловима једнаким угловима троугла ΔΕΖ.

Продужимо ΕΖ са обе стране ка тачкама Η и Θ и узмимо центар К круга АВГ. Повуцимо произвољно праву



КВ и конструишимо на тој правој КВ код тачке К угао ВКА једнак углу ΔΕΗ, угао ВКГ једнак углу ΔΖΘ, и кроз тачке А, В, Г повуцимо на круг АВГ тангенте ΛАМ, МВΝ, ΝГΛ.

Како праве ΛМ, МΝ, ΝΑ додирују круг АВГ у тачкама А, В, Г, а праве, што спајају центар К са тачкама А, В, Г, су КА, КВ, КГ, углови код тачака А, В, Г су прави. Како је сад у четвороуглу АМВК збир четири угла једнак четвороструком правом углу, јер се четвороугао састоји из два троугла, а два угла КАМ и КВМ су права, онда је и збир двају осталих углова АКВ и АМВ једнак двоструком правом углу. А и збир углова ΔΕΗ и ΔΕΖ једнак је двоструком правом углу. Према томе је збир углова АКВ и АМВ једнак збиру углова ΔΕΗ и ΔΕΖ, но како је угао АКВ једнак углу

ΔEH, и преостали угао AMB једнак преосталом углу ΔEZ. На сличан начин се доказује да је угао ΛNB једнак углу ΔZE, па је и преостали угао MΛN једнак преосталом углу EΔZ. Значи троугао ΛMN има углове једнаке угловима троугла ΔEZ, а при томе је описан око круга ABΓ.

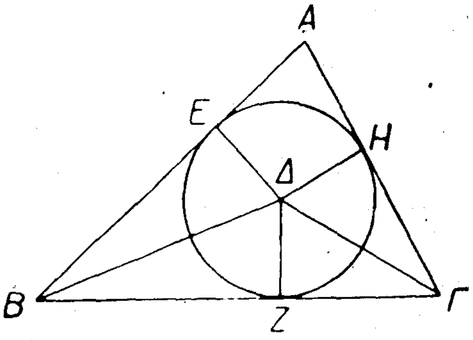
На овај начин, око датог круга описан је троугао са угловима једнаким угловима датог троугла. А то је требало извести.

4.

У дати троугао уписати круг.

Нека је дат троугао ABΓ. Треба у дати троугао ABΓ уписати круг.

Преполовимо углове ABΓ и AΓB правима BΔ и ΓΔ и нека се те праве секу у тачки Δ, па повуцимо из тачке Δ на праве AB, BΓ, ΓA нормале ΔE, ΔZ, ΔH.



Како је угао ABΔ једнак углу ΓBΔ, а прави угао BEΔ једнак правом углу BZΔ, два троугла EBΔ и ZBΔ имаће по два угла једнака и по једну страну једнаку, и то спрам једнаких углова, наиме заједничку страну BΔ; према томе ће и остале стране једног бити једнаке осталим странама другог; биће дакле ΔE једнако ΔZ. На основу истих разлога је и ΔH једнако ΔZ. Значи да су три праве ΔE, ΔZ, ΔH међусобно једнаке. Према томе ће круг са центром у Δ описан са растојањем до једне од тачака E, Z, H као полупречником проћи и кроз остале тачке и у тачкама E, Z, H додиривати праве AB, BΓ, ΓA, јер су углови у тим тачкама прави. Заиста, кад би он секао те праве, онда би нормала на пречник, што пролази кроз његов крај, била у кругу, а то је, као што је доказано, немогуће. Према томе круг са центром у Δ описан са растојањем до које било од тачака E, Z, H не сече праве AB, ВГ, ГА. Дакле он их додирује и биће круг уписан у троугао АВГ. Нека је он уписан као ZHE.

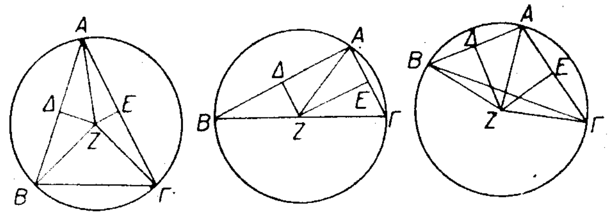
На овај начин је у дати троугао АВГ уписан круг EZH. А то је требало извести.

5.

Око датог троугла описати круг.

Нека је дат троугао АВГ. Треба око датог троугла описати круг.

Преполовимо праве АВ, АГ тачкама Δ, Е и кроз тачке Δ, Е повуцимо праве ΔZ, EZ под правим угловима према правим АВ и АГ. Оне се секу или у троуглу АВГ, или на правој ВГ или с друге стране праве ВГ, ван троугла.



Нека се, прво, секу у троуглу у Z, па повуцимо ZB, ZГ, ZA. Тада је, пошто је АΔ једнако ΔВ, а ΔZ заједничко и под правим угловима, основица AZ једнака основици ZB. На сличан начин се доказује да је ГZ једнако AZ, па је према томе и ZB једнако ZГ. Дакле три праве ZA, ZB, ZГ су међусобно једнаке. Према томе ће круг са центром у Z описан са растојањем до једне од тачака А, В, Г проћи и кроз остале тачке и биће круг описан око троугла АВГ. Нека је он описан као АВГ.

Узмимо сад да се ΔZ и EZ секу на правој ВГ у Z, као што је то случај на другој слици, па повуцимо AZ. На сличан начин се доказује да ће тачка Z бити центар круга описан око троугла АВГ.

Најзад, нека се ΔZ и EZ секу у тачки Z ван троугла АВГ, као што је то нацртано на трећој слици, па повуцимо AZ, BZ, ГZ. Како је опет АΔ једнако ΔВ, а ΔZ је заједничка страна под правим угловима, основица AZ једнака је основици BZ. На сличан начин доказује се да је ΓZ једнако AZ, према томе је и BZ једнако ZΓ. Према томе ће опет круг са центром у Z описан са растојањем до једне од тачака A, B, Γ проћи и кроз остале тачке и бити описан око троугла ABΓ.

На овај начин око датог троугла је описан круг. А то је требало извести.

(Последица)

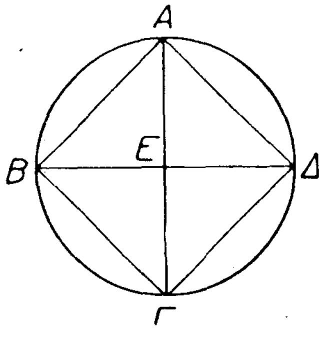
И јасно је, да ће, кад је центар круга у троуглу, угао BAΓ, као угао у отсечку већем од полукруга, бити мањи од правог; кад је центар круга на правој BΓ, угао BAΓ, као угао у полукругу, бити прав; а кад је центар круга ван троугла, угао BAΓ, као угао у отсечку мањем од полукруга бити већи од правог. (На овај начин, ако се деси да је дати угао мањи од правог, праве се ΔZ, EZ секу у троуглу, ако је он прав, секу се на правој BΓ, а ако је већи од правог, секу се ван троугла, с друге стране праве BΓ. А то је требало извести).

6.

У дати круг уписати квадрат[7].

Нека је дат круг ABΓΔ; треба у круг ABΓΔ уписати квадрат.

Повуцимо у кругу ABΓΔ два пречника AΓ, BΔ управна један на други и спојимо AB, BΓ, ΓΔ, ΔA.



Како је BE једнако EΔ, јер је E центар, а EA је заједничко и под правим угловима, биће основица AB једнака основици AΔ. Из истих разлога је и свака од BΓ и ΓΔ једнака свакој од AB, AΔ. Према томе је четвороугао ABΓΔ једнакостран. Тврдим да је и правоугаоник. Заиста, пошто је права BΔ пречник круга ABΓΔ, BAΔ је полукруг. Према томе је угао BAΔ прав. Из истих разлога је сваки од углова ABΓ, BΓΔ, ΓΔA прав. Због тога је четвороугао ABΓΔ правоугаоник. А доказано је да је он и једнакостран. Према томе он је квадрат, а уписан је у круг АВГΔ.

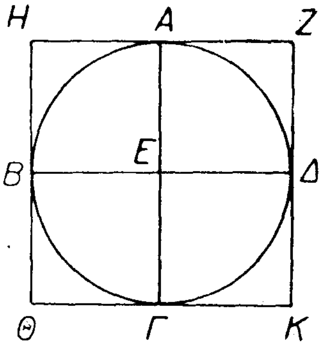
На овај начин је у дати круг уписан квадрат АВГΔ. А то је требало извести.

7.

Око датог круга описати квадрат.

Нека је дат круг АВГΔ. Треба око круга АВГΔ описати квадрат.

Повуцимо у кругу АВГΔ два пречника АГ и ВΔ под правим угловима, и кроз тачке А, В, Г, Δ повуцимо праве ZH, HΘ, ΘK, KZ, тангенте на круг АВГΔ.



Пошто је права ZH тангента на круг АВГΔ, а права ЕА повучена из центра Е ка тачки додира А, углови код тачке А су прави. Из истих разлога су углови и код тачака В, Г, Δ прави. Како је угао АЕВ прав, а прав и угао ЕВН, биће права НΘ паралелна правој АГ. Из истих разлога је и права АГ паралелна правој ZK. Стога је права НΘ паралелна правој ZK. На сличан начин се доказује да је свака од правих HZ и ΘK паралелна правој ВЕΔ. Према томе су НК, НГ, АК, ZB, ВК[8] паралелограми, што значи да је HZ једнако ΘK, а НΘ једнако ZK. А како је АГ једнако ВΔ, а и АГ једнако и НΘ и ZK, и ВΔ једнако и HZ и ΘK (па према томе је и свака од НΘ и ZK једнака свакој од HZ и ΘK), четвороугао ZHΘK је једнакостран. А тврдим да је он и правоугли. Заиста, пошто је НВЕА паралелограм, а угао АЕВ прав, биће прав и угао АНВ. На сличан начин се доксује да су углови и код тачака Θ, К, Z прави. Према томе је ZHΘK правоугаоник, а доказано је да је он и једнакостран, значи да је он квадрат, а описан је око круга АВГΔ.

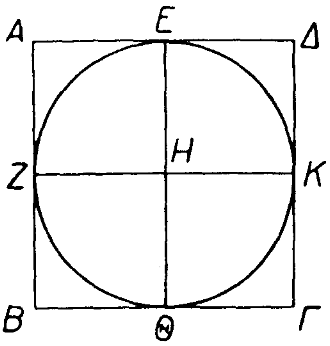
На овај начин, око датог круга је описан квадрат. А то је требало извести.

8.

У дати квадрат уписати круг.

Нека је дат квадрат АВГΔ, треба у квадрат АВГД уписати круг.

Преполовимо сваку од правих АΔ и АВ тачкама Е и Z и кроз тачку Е повуцимо праву ЕΘ паралелну свакој од правих АВ и ΔГ, а кроз тачку Z праву ZК паралелну свакој од правих АΔ и ВГ. Тада је свака од слика АК, КВ, АΘ, ΘΔ, АН, НГ, ВН, НΔ паралелограм и њихове супротне стране, очевидно, су једнаке. Како је АΔ једнако АВ и АЕ половина од АΔ, а АZ половина од АВ, биће и АЕ једнако АZ, а како су једнаке и њима супротне стране, биће и ZН једнако НЕ. На сличан начин се доказује да је свака од НΘ и НК једнака свакој од ZН и НЕ. Према томе су четири праве НЕ, НZ, НΘ, НК међусобно једнаке. Због тога ће круг нацртан са центром у Н једним од растојања до тачака Е, Z, Θ, К проћи и кроз остале тачке и додирнути праве АВ, ВГ, ГΔ, ΔА, јер су углови код тачака Е, Z, Θ, К прави. Заиста, кад би круг секао праве АВ, ВГ, ГΔ, ΔА, тангента круга на крају пречника била би у кругу, а доказано је да је то безсмислено. Према томе круг описан са центром у Н са једним од растојања до тачака Е, Z, Θ, К не сече праве АВ, ВГ, ГΔ, ΔА. Значи он их додирује и уписан је у квадрат АВГΔ.



На овај начин је у дати квадрат уписан круг. А то је требало извести.

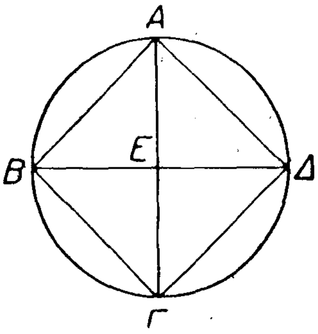
9.

Око датог квадрата описати круг.

Нека је дат квадрат АВГΔ. Треба око квадрата АВГΔ описати круг.

Нека се праве, што спајају[9], АГ и ВΔ секу у тачки Е.

Како је ΔА једнако АВ, а АГ заједничко, онда су две стране ΔА и АГ једнаке двема странама ВА и АГ, а и основица ΔГ једнака је основици ВГ, тада биће и угао ΔАГ једнак углу ВАГ, па према томе угао ΔАВ полови права АГ. На сличан начин се доказује да сваки од углова АВГ, ВГΔ, ГΔА полове праве АГ и ΔВ. А како је угао ΔАВ једнак углу АВГ, а угао ЕАВ је половина угла ΔАВ и угао ЕВА је половина угла АВГ, онда је и угао ЕАВ једнак углу ЕВА, па је тада и страна ЕА једнака страни ЕВ. На сличан начин се доказује да је свака од правих ЕА, ЕВ једнака свакој од ЕГ, ЕΔ. Према томе су четири праве ЕА, ЕВ, ЕГ, ЕΔ међусобно једнаке. Тада ће круг нацртан са центром у Е једним од растојања до тачака А, В, Г, Δ проћи и кроз остале тачке и биће описан око квадрата АВГΔ. Нека је овај нацртан као АВГΔ.

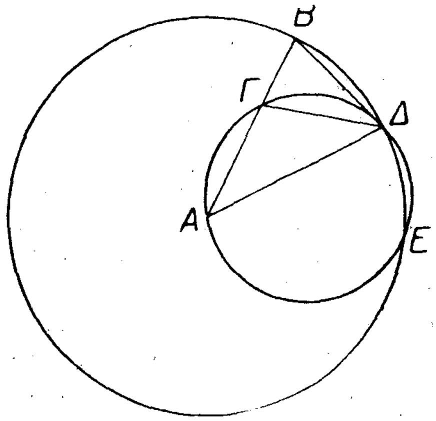


На овај начин је око датог квадрата описан круг. А то је требало извести.

10.

Нацртати равнокраки троугао, чији је сваки угао на основици двапут већи од трећег угла.

Одмеримо неку праву АВ и поделимо је тачком Г тако да правоугаоник обухваћен од АВ и ВГ буде једнак квадрату на АГ. И нацртајмо круг ВΔЕ са центром у А а са растојањем АВ, па упишимо у круг ВΔЕ праву ВΔ једнаку правој АГ, која није већа од пречника круга ВΔЕ. Спојимо АΔ и ΔГ, и око троугла АГΔ опишимо круг АГΔ.



Како је правоугаоник од АВ и ВГ једнак квадрату на АГ, а АГ је једнако ВΔ, биће правоугаоник од АВ и ВГ једнак квадрату на ВΔ. А како је ван круга АГΔ узета тачка В, и из тачке В ка кругу АГΔ су повучене две праве ВА и ВΔ једна од њих сече круг, а друга допире до њега, и при томе је правоугаоник од АВ и ВГ једнак квадрату на ВΔ, онда права ВΔ додириваће круг АГΔ. Како је сад права ВΔ тангента и кроз тачку додира Δ је повучена права ΔГ, биће угао ВΔГ једнак углу ΔАГ уписаном у супротни отсечак круга. Како је сад угао ВΔГ једнак углу ΔАГ, додајмо заједнички угао ГΔА. Тада је цео угао ВΔА једнак збиру углова ГΔА и ΔАГ. Али је збиру углова ГΔА и ΔАГ једнак спољашњи угао ВГΔ. Па према томе је и угао ВΔА једнак углу ВГΔ. Но угаоВΔА једнак је углу ГВΔ, а како је и страна АΔ једнака страни АВ, биће и угао ΔВА једнак углу ВГΔ. Према томе су три угла ВΔА, ΔВА, ВГΔ међусобно једнака. А како је угао ΔВГ једнак углу ВГΔ, биће страна ВΔ једнака страни ΔГ. Али је ВΔ по претпоставци једнако ГА; па је, значи, ГА једнако ГΔ, дакле и угао ГΔА једнак углу ΔАГ. На тај начин је збир углова ГΔА и ΔАГ једнак двоструком углу ΔАГ. А угао ВГΔ је једнак збиру углова ГΔА и ΔАГ, тј. угао ВГΔ је двоструки угао ГАΔ. Али је угао ВГΔ једнак сваком од углова ВΔА и ΔВА, па је према томе сваки од углова ВΔА и ΔВА једнак двоструком углу ΔАВ.

На овај начин је нацртан равнокраки троугао АВΔ чији је сваки угао на основици ΔВ двапут већи од трећег угла. А то је требало извести.

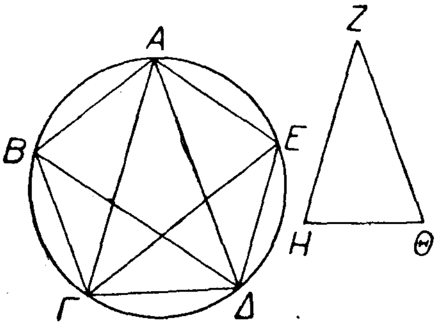
11.

У дати круг уписати петоугао са једнаким странама и једнаким угловима.[10]

Нека је дат круг АВГΔЕ. Треба у круг АВГΔЕ уписати петоугао са једнаким странама и једнаким угловима.

Узмимо равнокраки троугао ZНΘ са сваким од углова код Н и Θ двапут већим од угла код Z и упишемо у круг АВГΔЕ троугао АГΔ са угловима једнаким угловима троугла ZНΘ тако да угао ГАΔ буде једнак углу код Z, а сваки од углова АГΔ и ГΔА буде једнак сваком од углова код тачака Н и Θ; тада је сваки од углова АГΔ и ГΔА двапут већи од угла ГАΔ. Преполовимо сваки од углова АГΔ и ГΔА правим линијама ГЕ и ΔВ и спојимо АВ, ВГ, (ГΔ), ΔЕ, ЕА.

Како је сваки од углова АГΔ и ГΔА двапут већи од угла ГАΔ, а праве ГЕ и ΔВ полове их, биће пет углова ΔАГ, АГЕ, ЕГΔ, ГΔВ, ВΔА међусобно једнаки. Али се једнаки углови ослањају на једнаке лукове, према томе су пет лукова АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ, ЕА међусобно једнаки. Како сад једнаке лукове стежу једнаке праве (тетиве), биће пет правих АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ, ЕА међусобно једнаке. Према томе је петоугао АВГΔЕ са једнаким странама. Тврдим да има и једнаке углове. Како је, наиме лук АВ једнак луку ΔЕ, додајмо заједнички лук ВГΔ, тада је цео лук АВГΔ једнак целом луку ЕΔГВ. А на лук АВГΔ се ослања угао АЕΔ, а на лук ЕΔГВ — угао ВАЕ, па је према томе и угао ВАЕ једнак углу АЕΔ. Из истих разлога је сваки од углова АВГ, ВГΔ, ГΔЕ једнак сваком од углова ВАЕ и АЕΔ. Петоугао АВГΔЕ је према томе са једнаким угловима. А доказано је да је он и са једнаким странама.



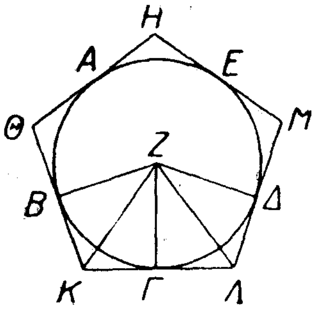
На овај начин је у дати круг уписан петоугао са једнаким странама и једнаким угловима. А то је требало извести.

12.

Око датог круга описати петоугао са једнаким странама и једнаким угловима.

Нека је дат круг АВГΔЕ. Треба око круга АВГΔЕ описати петоугао са једнаким странама и једнаким угловима.

Замислимо да се у тачкама А, В, Г, Δ, Е налазе темена уписаног петоугла, тада су луци АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ, ЕА једнаки. Кроз тачке А, В, Г, Δ, Е повуцимо тангенте НΘ, ΘК, КΛ, ΛМ, МН на круг, и узмимо круг АВГΔЕ са центром у Z и повуцимо ZВ, ZК, ZГ, ZΛ, ZΔ.



Како права КΛ додирује круг АВГΔЕ у тачки Г, а ZГ је права повучена из центра Z кроз тачку додира Г, биће

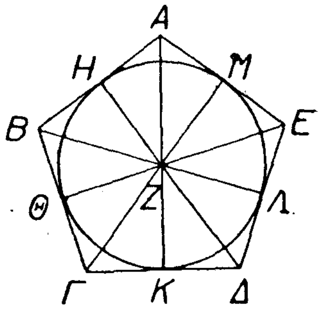
ZГ нормално на КΛ. Према томе је сваки од углова код тачке Г прав. Из истих разлога су углови и код тачака В и Δ прави. А како је угао ZГК прав, биће квадрат на ZК једнак збиру квадрата на ZГ и на ГК. Из истих разлога је збир квадрата на ZВ и на ВК једнак квадрату на ZК. Према томе је збир квадрата на ZГ и на ГК једнак збиру квадрата на ZВ и ВК, а како је квадрат на ZГ једнак квадрату на ZВ, биће и преостали квадрат на ГК једнак преосталом квадрату на ВК. Одавде је и ВК једнако ГК. А како је ZВ једнако ZГ, а ZК је заједничко, две стране ВZ и ZК једнаке су двема странама ГZ и ZК, а и основица ВК је једнака основици ГК, стога је и угао ВZК једнак углу КZГ и угао ВКZ једнак углу ZКГ. Значи угао ВZГ је двапут већи од угла КZГ, а угао ВКГ је двапут већи од угла ZКГ. Из истих разлога је угао ГZΔ двапут већи од угла ГZΛ, а и угао ΔΛГ од угла ZΛГ. А како је лук ВГ једнак луку ГΔ, биће и угао ВZГ једнак углу ГZΔ. Но како је и угао ВZГ двапут већи од угла КZГ, а ΔZГ од угла ΛZГ, биће угао КZГ једнак углу ΛZГ, а једнак је и угао ZГК углу ZГΛ. Два троугла ZКГ и ZΛГ имају дакле по два угла једнака и по једну страну једнаку, наиме заједничку страну ZГ. Значи и остале стране једног троугла једнаке су осталим странама другог, и преостали угао једног једнак преосталом углу другог. Према томе је права КГ једнака правој ГΛ и угао ZКГ једнак углу ZΛГ. Како је КГ једнако ГΛ, КΛ ће бити једнако двапут КГ. На исти начин се доказује да је и ΘК двапут ВК. А како је ВК једнако КГ, биће и ΘК једнако КΛ. На сличан начин се доказује да је свака од правих ΘН, НМ, МΛ једнака свакој од ΘК и КΛ. Петоугао НΘКΛМ је према томе са једнаким странама. Тврдим да је он и са једнаким угловима. Заиста, како је угао ZКГ једнак углу ZΛГ, а доказано је да угао је ΘКΛ двапут већи од угла ZКГ, и угао КΛМ двапут већи од угла ZΛГ, биће и угао ΘКΛ једнак углу КΛМ. На сличан начин се доказује да је и сваки од углова КΘН, ΘНМ, НМΛ једнак сваком од ΘКΛ и КΛМ. Према томе су пет углова НΘК, ΘКΛ, КΛМ, ΛМН, МНΘ међусобно једнаки. Петоугао НΘКΛМ је према томе са једнаким угловима. А доказано је да и са једнаким странама, и да је описан око круга АВГΔЕ.

На овај начин је око датог круга описан петоугао са једнаким странама и једнаким угловима. А то је требало извести.

13.

У дати петоугао, са једнаким странама и једнаким угловима, уписати круг.

Нека је дат петоугао АВГΔЕ са једнаким странама и једнаким угловима. Треба у петоугао АВГΔЕ уписати круг.



Преполовимо сваки од углова ВГΔ и ГΔЕ правим линијама[11] ГZ и ΔZ. И из тачке Z, у којој праве ГZ и ΔZ секу једна другу, повуцимо праве ZВ, ZА, ZЕ. Како је ВГ једнако ГΔ, а ГZ заједничко, две стране ВГ и ГZ су једнаке двема странама ΔГ и ГZ, а и угао ВГZ једнак углу ΔГZ, биће и основица ВZ једнака основици ΔZ, троугао ВГZ једнак троуглу ΔГZ, и остали углови једнаки угловима, који су наспрам једнаких страна. Према томе је угао ГВZ једнак углу ГΔZ. Како је угао ГΔЕ двапут већи од угла ГΔZ, а угао ГΔЕ једнак углу АВГ, и угао ГΔZ једнак углу ГВZ, биће и угао ГВА двапут већи од угла ГВZ. Значи и угао АВZ је једнак углу ZВГ, те према томе и права ВZ полови угао АВГ. На сличан начин се доказује да је сваки од углова ВАЕ и АЕΔ преполовљен правама ZА и ZЕ. Повуцимо из тачке Z праве ZН, ZΘ, ZК, ZΛ, ZМ нормалне на праве АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ, ЕА. Како је угао ΘГZ једнак углу КГZ, и прави угао ZΘГ једнак правом углу ZКГ, троугли ZΘГ и ZКГ имају по два угла једнака и по једну страну једнаку, наиме заједничку ZГ, која је наспрам једнаких углова. Због тога ће они имати и остале стране једнаке осталим странама. Према томе је нормала ZΘ једнака нормали ZК. На сличан начин се доказује да је свака од правих ZΛ, ZМ, ZН једнака свакој од ZΘ и ZК. Према томе су пет правих ZН, ZΘ, ZК, ZΛ, ZМ међусобно једнаке. Значи круг описан са центром у Z растојањем до једне од тачака Н, Θ, К, Λ, М проћи и кроз остале тачке и додиривати праве АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ, ЕА у тачкама Н, Θ, К, Λ, М, јер су углови у тим тачкама прави. Заиста кад их не би додиривао, већ секао, онда би права повучена нормално на крају пречника налазила у кругу, а доказано да је то безсмислено. Према томе круг нацртан са центром у Z и са растојањем до једне од тачака Н, Θ, К, Λ, М неће сећи праве АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ, ЕА, већ ће их додиривати. Нека је нацртан као НΘКΛМ.

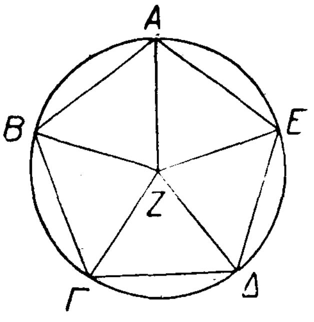
На овај начин је у дати петоугао са једнаким странама и једнаким угловима уписан круг. А то је требало извести.

14.

Око датог петоугла, са једнаким странама и једнаким угловима, описати круг.

Нека је дат петоугао АВГΔЕ са једнаким странама и једнаким угловима. Треба око петоугла АВГΔЕ описати круг.

Преполовимо сваки од углова ВГΔ и ГΔЕ правом ГZ односно ΔZ и кроз тачку Z, која је пресек правих, повуцимо ка тачкама В, А, Е праве ZВ, ZА, ZЕ. На сличан начин, као и раније, доказује се, да и сваки од углова ГВА, ВАЕ, АЕΔ полове права ZВ, односно, ZА, односно ZЕ. Како је угао ВГΔ једнак углу ГΔЕ, а и половина угла ВГΔ, угао ZГΔ, једнака половини угла ГΔЕ, углу ГΔZ, биће и угао ZГΔ једнак углу ZΔГ. Значи да је и страна ZГ једнака страни ZΔ. На сличан начин се доказује да је и свака од правих ZВ, ZА, ZЕ једнака свакој од страна ZГ и ZΔ. Према томе су пет правих ZА, ZВ, ZГ, ZΔ, ZЕ међусобно једнаке. Тада ће круг нацртан са центром у Z са једним од растојања ZА, ZВ, ZГ, ZΔ, ZЕ проћи и кроз остале тачке и бити описан. Нека је описан као АВГΔЕ.



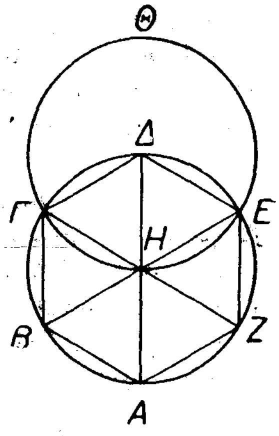
На овај начин је око датог петоугла, са једнаким странама и једнаким угловима, описан круг. А то је требало извести.

15.

У дати круг уписати шестоугао са једнаким странама и једнаким угловима.

Нека је дат круг АВГΔЕZ. Треба у круг АВГΔЕZ уписати шестоугао са једнаким странама и једнаким угловима.

Повуцимо у кругу АВГΔЕZ пречник АΔ и узмимо тачку Н, центар круга, и нацртајмо круг ЕНГΘ са центром у Δ са растојањем (полупречником) ΔН, па праве што спајају Е и Н односно Г и Н, продужимо до тачака В и Z и спојимо АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ, ЕZ, ZА. Тврдим да је шестоугао АВГΔЕZ са једнаким странама и једнаким угловима.



Како је тачка Н центар круга АВГΔЕZ, НЕ једнако је НΔ. А како је тачка Δ центар круга НГΘ, ΔЕ једнако је ΔН. А доказано је већ да је НЕ једнако НΔ. Према томе је и НЕ једнако ЕΔ. Значи троугао ЕНΔ је равностран, а то значи да су му сва три угла ЕНΔ, НΔЕ, ΔЕН међусобно једнаки, јер су углови на основици равнокраког троугла међусобно једнаки. А како је збир три угла у троуглу једнак двема правим угловима, биће угао ЕНΔ једнак двема трећинама правог угла. На сличан начин се доказује да је и угао ΔНГ једнак двема трећинама правог угла. А како права ГН стоји према правој ЕВ тако да образује два суседна угла ЕНГ и ГНВ чији је збир једнак двама правим угловима, биће и преостали угао ГНВ једнак двема трећинама правог угла. Према томе су три угла ЕНΔ, ΔНГ, ГНВ међусобно једнаки, па су једнаки и унакрсни углови ВНА, АНZ, ZНЕ (угловима ЕНΔ, ΔНГ, ГНВ). Према томе су шест углова ЕНΔ, ΔНГ, ГНВ, ВНА, АНZ, ZНЕ међусобно једнаки. А једнаки углови се ослањају на једнаке лукове, па због тога су и шест лукова АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ, ЕZ, ZА међусобно једнаки. Међутим једнаке лукове стежу једнаке праве (тетиве), и према томе су и тих шест правих међусобно једнаке. Шестоугао АВГΔЕZ је према томе са једнаким странама. Тврдим да је он и са једнаким угловима. Заиста, како је лук ZА једнак луку ЕΔ, додајмо му заједнички лук АВГΔ, тада је цео лук ZАВГΔ једнак луку ЕΔГВА, а како се на лук ZАВГΔ ослања угао ZЕΔ, и на лук ЕΔГВА угао АZЕ, биће угао АZЕ једнак углу ΔЕZ. На сличан начин се доказује, да су и остали углови шестоугла АВГΔЕZ посебице једнаки сваком од углова АZЕ, ZЕΔ. Према томе је шестоугао АВГΔЕZ са једнаким угловима. А доказано је да је он и са једнаким странама, и уписан у круг АВГΔЕZ.

На овај начин је у дати круг уписан шестоугао са једнаким странама и једнаким угловима. А то је требало извести.

Последица

Из овога је јасно да је страна шестоугла једнака правој из центра (полупречнику).

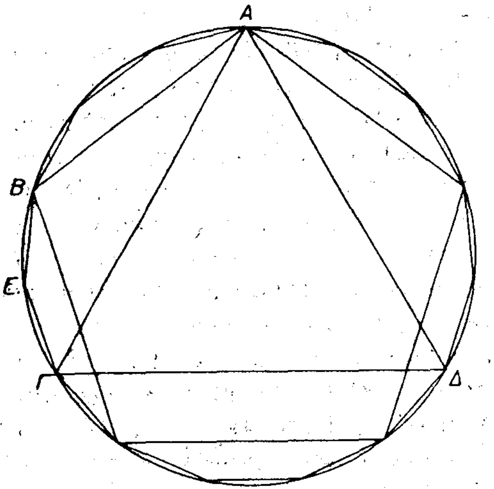
На сличан начин као и у случају петоугла, кад се повуку тангенте на подељени круг, конструише се и око круга описани шестоугао са једнаким странама и једнаким угловима, а у сагласности са оним што је наведено за петоугао. И слично ономе, што је наведено за петоугао, у дати шестоугао се уписује и око њега се описује круг. А то је требало извести.

16.

У дати круг уписати петнаестоугао са једнаким странама и једнаким угловима.

Дат је круг АВГΔ. Треба у круг АВГΔ уписати петнаестоугао са једнаким странама и једнаким угловима.

Упишимо у круг АВГΔ страну АГ равностраног троугла уписаног у тај круг и страну АВ петоугла са једнаким странама. Поделимо ли сад круг на петнаест једнаких делова, онда ће у луку АВГ, који је трећина круга, таквих делова бити пет, а у луку АВ, који је петина круга, бити три, а у остатку ВГ два таква једнака дела. Преполовимо ВГ тачком Е. Сваки од лукова ВЕ и ЕГ је онда петнаести део круга АВГΔ.



Према томе, ако после спајања В са Е правом ВЕ и Е са Г правом ЕГ упишемо у круг АВГΔ (Е) овима једнаке праве, добићемо уписани у круг петнаестоугао са једнаким странама и једнаким угловима. А то је требало извести.

На сличан начин, као и у случају петоугла, ако се кроз тачке поделе повуку тангенте на круг, добићемо петнаестоугао са једнаким странама и једнаким угловима описан око круга. И слично томе, што је наведено за петоугао, у дати петнаестоугао се уписује и око њега описује круг. А то је требало извести.[12]

КОМЕНТАР

[1] Помоћу савремених израза треба казати: Ако се теме сваког од углова оне која се уписује налази на страни оне у коју се уписује.

[2] И овде треба казати: Пролази кроз теме сваког угла.

[3] А овде: Теме лежи на периферији круга.

[4] А овде: Пролази кроз теме сваког угла.

[5] У својству тетиве.

[6] Код Еуклида стоји: троугао „изогоналан“ датом троуглу. Тај се термин није задржао у савременој Елементарној геометрији.

[7] Код Еуклида у излагању ове конструкције употребљени су термини: τετράγωνον у преводу четворугао, код Еуклида значи квадрат. ἰσόπλευρον — једнакостраник, τετράπλευρον — четвоространик ὀρθογώυιον — правоугаоник.

[8] Овде су паралелограми означени са два супротна темена.

[9] Као савремени израз треба употребити „дијагонале“.

[10] Термин „правилни многоугао“ Еуклид не употребљује, већ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον што увек преводимо: „са једнаким странама и једнаким угловима“.

[11] Код Еуклидових реченица, као што је ова, са једне стране се набројавају једни елементи (углови, дужи), а са друге стране, други одговарајући елементи (праве, тачке) и при томе се супротставља једно ἑκατέρα са другим ἑκατέρα у надлежним падежима. У већини случајева то значи да сваком елементу прве групе одговара само један, и то редом, елемент друге групе. У преводу употребљавамо реченице у различитим формама са циљем да изабрана форма што блаже одговара смислу Еуклидове реченице.

[12] На основу Еуклидових расуђивања се могу извршити одговарајуће конструкције за многоуглове чији је број страна n, који има вредности:

$$(1) \qquad 2.2^k, \quad 3.2^k, \quad 5.2^k, \quad 15.2^k,$$

где је $k=0, 1, 2, 3, \ldots$ Урачунали смо при томе и многоугао са две стране, то је дуж двапут поновљена.

Дуго се мислило да, сем наведених, нема више правилних многоуглова, које би могло конструисати помоћу шестара и лењира. Тек 1801 године Гаус је показао (K. F. Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae, 1801) да је могуће са истим средствима конструисати правилан седамнаестоугао, и уопште правилан многоугао са бројем страна N, који задовољава у исто време два услова: 1. да је прост број и 2. да има облик

$$N=2^{2^m}+1,$$

где је m цео број. За $m=1$, $N=5$; за $m=2$, $N=17$; за $m=3$, $N=257$; за $m=4$, $N=65537$. За $m=5$, $m=6$, $m=7$ број N не одговара првом услову, јер није прост број.

Према томе низ бројева (1) можемо преиначити и додати 17.2^k и уопште $N.2^k$, ако је N прост број наведеног облика. Дакле место (1) можемо једноставно написати овај низ:

$$2.2^k, (2^{2^m}+1).2^k$$

са $m=0, 1, 2, \ldots$; $k=0, 1, 2, \ldots$, под условом да је заграђени број прост.

Сем тога, ако су N_1 и N_2 два узајамно проста броја за које посебице можемо конструисати правилан многоугао, а при томе сваки од њих може да и не буде прост број, онда се може конструисати многоугао и са бројем страна

$$n=N_1 N_2.2^k,$$

где је $k=0, 1, 2, \ldots$ Ово следује непосредно из могућности решити линеарну једначину

$$\frac{x}{N_1}+\frac{y}{N_2}=\frac{1}{N_1 N_2}$$

или

$$N_2 x+N_1 y=1$$

у области целих бројева, ако су N_1 и N_2 узајамно прости бројеви, при чему се може за решавање применити алгоритам верижних разломка. Тако, напр., ако је $N_1=3$, $N_2=5$, можемо конструисати и петнаестоугао са $n=N_1 N_2=15$, јер једначина $x/3+y/5=1$ има решење $x=2$, $y=-3$. Ово решење у суштини одговара Еуклидовој конструкцији правилног петнаестоугла. Исто тако, ако је $N_1=51$ и $N_2=5$ (први број није прост, али је узајамно прост са другим бројем), многоугао са $n=51.5=255$ страна можемо конструисати, јер је $1/5-10/51=1/255$.

Можемо навести да, рецимо, испод броја 300 имамо само ових 38 различитих правилних многоуглова са овим бројевима страна: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА V

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 5

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ПЕТА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1953

Уредник
дописник Р. КАШАНИН
Управник Математичког института САН

Приказано на IX скупу
Одељења природно-математичких наука
од 3-VII-1953 г.

Штампарија и књиговезница Српске академије наука — Космајска ул. 28

САДРЖАЈ ПЕТЕ КЊИГЕ

ПРЕДГОВОР

Ова пета књига Еуклидових елемената садржи теорију размере, пропорције и пропорционалности више самерљивих величина. У почетку коментара дајемо кратку анализу значаја садржаја ове књиге, која се по карактеру излагања разликује од претходне четири књиге. За правилно оцењивање значаја ове књиге, па и за савремену математику, довољно је навести да је класична Еуклидова дефиниција једнакости двеју размера послужила не само Еуклиду за излагање његове теорије пропорционалности величина, већ и Дедекинду као основа за његову теорију ирационалних бројева.

Превод ове књиге био је скопчан, због нарочите природе текста, са гледишта избора термина, са већим тешкоћама, него што је то био случај са преводом претходних књига; тежио сам, понекад и отступајући од дословног текста, да што једноставније, али у исто време и што тачније, изразим српским математичким језиком прави садржај Еуклидовог излагања.

У савлађивању поменутих тешкоћа у преводу ове књиге много су ми и овог пута помогли В. В. Мишковић и Т. П. Анђелић па им за то изјављујем овде особиту захвалност.

А. Б.

Грешка примећена у трећој књизи

Стр. 11. На слици теореме 2. недостаје на кругу слово Г.

ТЕКСТ

Дефиниције

1. Једна величина је део друге величине, мања од веће, ако мања мери већу.[1]

2. Већа величина је мултиплум од мање, ако се мери мањом.[2]

3. Размера је узајамни количински однос који имају две величине исте природе.[3]

4. Каже се да су две величине у размери једна према другој ако неки мултиплум ма које од њих може бити већи од друге.[4]

5. Каже се да су величине у истој размери, прва према другој као трећа према четвртој, ако су било који једнакоструки мултиплуми прве и треће у исто време или већи, или једнаки, или мањи од било којих мултиплума друге четврте, сваки према сваком узети у одговарајућем поретку.[5]

6. Величине се зову пропорционалне, ако су у истој размери.[6]

7. Али, ако је од једнакоструких мултиплума мултиплум прве величине већи од мултиплума друге, а мултиплум треће није већи од мултиплума четврте, каже се да је размера прве величине према другој већа од размере треће према четвртој.[7]

8*. Пропорција је једнакост двеју размера.[8]

8. Пропорција се може образовати од најмање три члана.[9]

9. Ако су три величине (непрекидно) пропорционалне, каже се да је размера прве величине према трећој двапут виша од размере прве величине према другој.[10]

10. Ако су четири величине (непрекидно) пропорционалне, каже се да је размера прве величине према четвртој трипут виша од размере прве величине према другој; и тако увек, на сличан начин, док постоји пропорционалност.[11]

11. Каже се да су претходни чланови хомологни са претходнима, а наредни — са наредним.[12]

12. Пермутована размера је она у којој се узме размера претходног (члана) према претходном и наредног према наредном.[13]

13. Обрнута размера је она у којој се узме размера наредног као претходног према претходном као наредном.[14]

14. Састављена размера је она у којој се узме размера збира претходног и наредног, као једног (члана), према самом наредном.[15]

15. Растављена размера је она у којој се узме размера разлике претходног и наредног према самом наредном.[16]

16. Превpнута размера је она у којој се узме размера претходног према разлици претходног и наредног.[17]

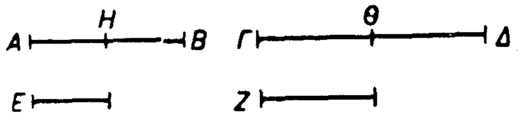
17. Ако постоји низ од више величина и други низ од исто толиког броја величина, па су оне, узете у одговарајућим паровима, у истим размерима, размера једнако удаљених је размера прве величине према последњој из првог низа, као и размера прве величине према последњој из другог низа. Или друкчије: размера крајњих без унутарњих.[18]

18*. Пропорција је редовна (ordinata) ако се од три дате величине и других величина, у истом броју, од првих узме размера претходне величине према наредној, и од других размера претходне величине према наредној, па од првих размера наредне величине према преосталој, и од других размера наредне величине према преосталој.[19]

18. Пропорција је поремећена (perturbata) ако се од три дате величине и других величина, у истом броју, од првих узме размера претходне (прве) величине према наредној (другој), а од других размера ма које (друге), као претходне, према наредној (трећој), па од првих размера наредне (друге) величине према преосталој (трећој), а од других размера преостале (прве) величине према претходној (другој).[20]

1.

Ако су дате неке величине, од којих је свака једнакоструки мултиплум одговарајуће величине низа других величина у истом броју, биће и збир свих првих величина исто толики мултиплум збира свих других величина колики је и свака од првих величина мултиплум одговарајуће друге величине.



Нека су дате величине AB, ΓΔ, од којих је свака једнакоструки мултиплум одговарајуће величине низа других величина у истом броју, E, Z. Тврдим да је збир AB и ΓΔ исто толики мултиплум збира E и Z, колики је и AB од E.

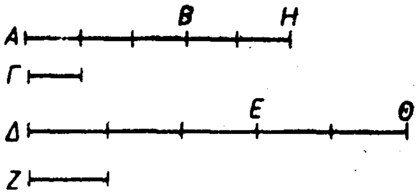
Заиста, пошто је AB једнакоструки мултиплум од E, колики је и ΓΔ од Z, онда AB садржи величину E исто онолико пута колико ΓΔ садржи величину Z. Поделимо AB на величине AH и HB, једнаке величини E, и ΓΔ на величине ΓΘ и ΘΔ, једнаке величини Z; број величина AH, HB биће истоветан са бројем величина ΓΘ, ΘΔ. И пошто је AH једнако E, а ΓΘ величини Z, ако је још и AH једнако E, онда је збир AH и ΓΘ једнак збиру E и Z. Из истих разлога је HB једнако E, и збир HB и ΘΔ једнак збиру E и Z. Према томе колико пута AB садржи E, исто толико пута збир AB и ΓΔ садржи збир E и Z. Дакле AB је исто толики мултиплум величине E, колики је мултиплум збир AB и ΓΔ од збира E и Z.

На овај начин, ако су дате неке величине, од којих је свака једнакоструки мултиплум одговарајуће величине низа других величина у истом броју, биће и збир свих првих величина исто толики мултиплум збира свих других величина колики је и свака од првих величина мултиплум одговарајуће друге величине. А то је требало доказати.[21]

2.

Ако је прва величина исто толики мултиплум друге величине колики је трећа величина мултиплум четврте, а пета величина исто толики мултиплум друге колики је мултиплум шеста од четврте, онда је збир прве и пете исто толики мултиплум друге колики је и збир треће и шесте мултиплум четврте.

Нека је прва величина AB исто толики мултиплум од друге Γ колики је трећа ΔE од четврте Z, а пета BH исто толики мултиплум од друге Γ колики је шеста EΘ од Z. Тврдим да је збир прве и пете AH исто толики мултиплум друге Γ колики је збир треће и шесте ΔΘ мултиплум четврте Z.



Заиста, пошто је AB исто толики мултиплум од Γ, колики је и ΔE од Z, значи AB садржи исто онолико пута једнаких величина Γ, колико ΔE садржи једнаких величина Z. Из истих разлога, колико пута BH садржи једнаких Γ, исто толико и EΘ садржи једнаких Z. Па, према томе, колико пута цела величина AH садржи Γ, исто толико пута и цела величина ΔΘ садржи Z. А то значи да је AH исто онолики мултиплум од Γ, колики је и ΔΘ мултиплум од Z. Према томе је збир прве и пете величине AH исто онолики мултиплум од Γ колики је и збир треће и шесте ΔΘ мултиплум од Z.

На овај начин, ако је прва величина исто толики мултиплум друге величине колики је трећа величина мултиплум четврте, а пета величина исто толики мултиплум друге колики је мултиплум шеста од четврте, онда је збир прве и пете исто толики мултиплум друге колики је и збир треће и шесте мултиплум четврте. А то је требало доказати.[22]

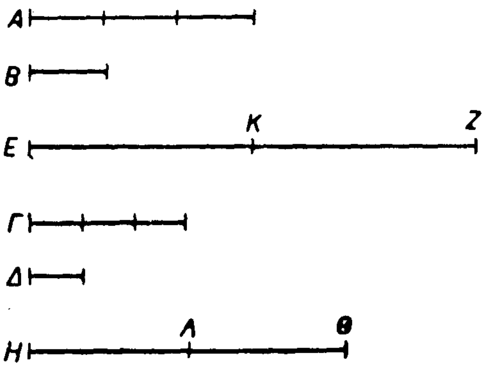
3.

Ако је прва величина исто онолики мултиплум друге колики је трећа од четврте, и образују се једнакоструки мултиплуми прве и треће величине, онда нове величине морају бити одговарајући мултиплуми — и то: прва од друге величине и друга од четврте.

Нека је прва величина A исто онолики мултиплум од B колики је трећа Γ од четврте Δ, и нека су образовани од A и Γ једнакоструки мултиплуми EZ, HΘ. Тврдим да је EZ исто онолики мултиплум од B колики и HΘ од Δ.

Пошто је EZ исто онолики мултиплум од A, колики је HΘ од Γ, то значи да колико EZ садржи једнаких A, толико и

HΘ садржи једнаких Г. Поделимо ли EZ на величине EK и KZ, једнаке A, а HΘ на величине HΛ и ΛΘ, једнаке Г, биће број величина EK и KZ једнак броју величина HΛ и ΛΘ. А пошто



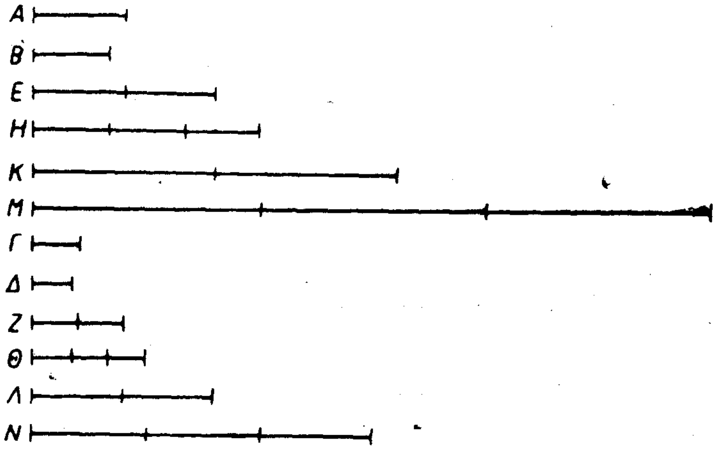
је A исто онолики мултиплум од B колики је Г од Δ, а EK је једнако A и HΛ једнако Г, биће и EK исто онолики мултиплум од B, колики је HΛ од Δ. Из истих разлога и KZ биће исто онолики мултиплум од B, колики је ΛΘ од Δ. Пошто је сад прва величина EK исто онолики мултиплум друге величине B, колики је трећа величина HΛ од четврте Δ, а и пета величина KZ је исто онолики мултиплум од B, колики је и шеста величина ΛΘ од четврте Δ, биће и збир прве и пете величине EZ исто онолики мултиплум од B, колики је и збир треће и шесте HΘ мултиплум од Δ.

На овај начин, ако је прва величина исто онолики мултиплум друге колики је трећа од четврте, и образују се једнакоструки мултиплуми прве и треће величине, онда нове величине морају бити одговарајући мултиплуми — и то: прва од друге величине и друга од четврте. А то је требало доказати.[23]

4

Ако је прва (величина) према другој у истој размери као што је трећа према четвртој, онда су произвољни једнакоструки мултиплуми прве и треће величине и једнакоструки мултиплуми друге и четврте величине у истој размери, ако су узети у одговарајућем поретку.

Нека је прва величина A у истој размери према другој B, као трећа Г према четвртој Δ и нека су од A и Г образовани произвољни једнакоструки мултиплуми E и Z, а од B и Δ други произвољни једнакоструки мултиплуми H и Θ. Тврдим, да је E према H као Z према Θ.



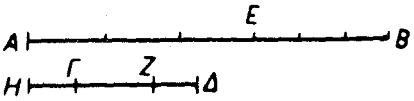
Заиста, образујемо од E и Z произвољне једнакоструке мултиплуме K и Λ, а од H и Θ друге произвољне једнакоструке мултиплуме M и N.

Како су E од A и Z од Г једнакоструки мултиплуми, а од E и Z су образовани једнакоструки мултиплуми K и Λ, биће и K од A и Λ од Г једнакоструки мултиплуми. Из истих разлога су M од B и N од Δ једнакоструки мултиплуми. И пошто је A према B као Г према Δ, а од A и Г су образовани произвољни једнакоструки мултиплуми K и Λ, а од B и Δ други произвољни једнакоструки мултиплуми M и N, биће, ако је K веће од M, Λ веће од N, а ако је једнако, биће једнако, а ако је мање — мање. И пошто су K и Λ произвољни једнакоструки мултиплуми од E и Z, а M и N други произвољни једнакоструки мултиплуми, биће и Z према Θ као E према H.

На овај начин, ако је прва (величина) према другој у истој размери као што је трећа према четвртој, онда су произвољни једнакоструки мултиплуми прве и треће величине и једнакоструки мултиплуми друге и четврте величине у истој размери, ако су узети у одговарајућем поретку. А то је требало доказати.[24]

5.

Ако је нека величина исто онолики мултиплум од друге величине колики је мултиплум умањилац (прве величине) од умањиоца (друге величине), биће и остатак (од прве величине) исто толики мултиплум остатка (од друге величине), колики је мултиплум прва цела величина од друге целе.



Нека је величина АВ исто толики мултиплум величине ГΔ, колики је умањилац АЕ мултиплум умањиоца ГZ. Тврдим, да је остатак ЕВ исто онолики мултиплум од остатка ZΔ, колики је мултиплум цело АВ од целог ГΔ.

Заиста, начинимо да ЕВ буде онолики мултиплум од ГН колики је АЕ од ГZ.

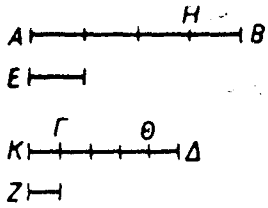
Како је АЕ исто толики мултиплум од ГZ, колики је ЕВ од НГ, биће АЕ од ГZ исто толики мултиплум колики је АВ од НZ. Али по претпоставци је АЕ исто толики мултиплум од ГZ, колики је АВ од ГΔ, према томе је АВ исто толики мултиплум од НZ и ГΔ; значи да је НZ једнако ГΔ. Од сваког од ових одузмимо ГZ. Тада је остатак НГ једнак остатку ZΔ. И пошто су АЕ од ГZ и ЕВ од НГ једнакоструки мултиплуми, а НГ је једнако ZΔ, биће и мултиплуми АЕ од ГZ и ЕВ од ZΔ једнакоструки. Али по претпоставци су мултиплуми АЕ од ГZ и АВ од ГΔ једнакоструки, па ће бити једнакоструки и мултиплуми ЕВ од ZΔ и АВ од ГΔ. Значи да је остатак ЕВ исто онолики мултиплум од ZΔ, колики је цело АВ мултиплум од целог ГΔ.

На овај начин, ако је нека величина исто онолики мултиплум од друге величине колики је мултиплум умањилац (прве величине) од умањиоца (друге величине), биће и остатак (од прве величине) исто толики мултиплум остатка (од друге величине), колики је мултиплум прва цела величина од друге целе. А то је требало доказати.[25]

6.

Ако су две величине једнакоструки мултиплуми од других величина и умањиоци првих величина неки други једнакоструки мултиплуми од тих других величина, биће и остаци или једнаки овим другим величинама или њихови једнакоструки мултиплуми.

Нека су две величине АВ и ГΔ једнакоструки мултиплуми од величина Е и Z, и умањиоци првих величина АН и ГΘ други једнакоструки мултиплуми од Е и Z. Тврдим да су остаци НВ и ΘΔ или једнаки Е и Z или њихови једнакоструки мултиплуми.



Нека, је прво, НВ једнако Е. Тврдим да је и ΘΔ једнако Z.

Заиста, ставимо ГК једнако Z. Пошто су АН од Е и ГΘ од Z једнакоструки мултиплуми, а НВ је једнако Е и КГ једнако Z, биће и АВ од Е и КΘ од Z једнакоструки мултиплуми. Али по претпоставци су АВ од Е и ГΔ од Z једнакоструки мултиплуми, према томе су КΘ од Z и ГΔ од Z једнакоструки мултиплуми. Пошто су и КΘ и ГΔ једнакоструки мултиплуми од Z, биће КΘ једнако ГΔ. Одузмимо од сваког од ових ГΘ. Тада је остатак КГ једнак остатку ΘΔ. Али Z је једнако КГ, па је према томе и ΘΔ једнако Z. Дакле, ако је НВ једнако Е, биће и ΘΔ једнако Z.

На сличан начин се доказује да ће ако је НВ мултиплум од Е, бити и ΘΔ мултиплум исте вишеструкости од Z.

На овај начин, ако су две величине једнакоструки мултиплуми од других величина и умањиоци првих величина неки други једнакоструки мултиплуми од тих других величина, биће и остаци или једнаки овим другим величинама или њихови једнакоструки мултиплуми. А то је требало доказати.[26]

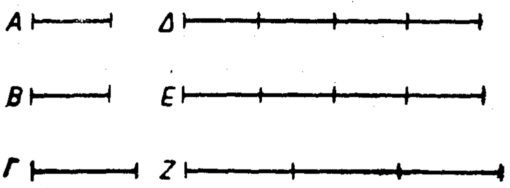
7.

Једнаке величине су према истој величини у истој размери и иста величина је према једнаким величинама у истој размери.

Нека су А и В једнаке величине, а Г друга нека произвољна величина. Тврдим, да је свака од величина А и В према Г у истој размери, а и Г према свакој од А и В.

Заиста, узмимо од А и В једнакоструке мултиплуме Δ и Е, а од Г други произвољни мултиплум Z.

Како су Δ од А и Е од В једнакоструки мултиплуми, а А је једнако В, биће и Δ једнако Е. Но Z је друга, произвољна величина. Ако је Δ веће од Z, биће и Е веће од Z,



ако је једнако, биће једнако, а ако је мање, мање. Како су Δ и Е једнакоструки мултиплуми од А и В, а Z други произвољни мултиплум, односиће се А према Г као В према Г.

Тврдим још да је Г и према А и према В у истој размери.

Заиста, помоћу истих конструкција доказујемо на сличан начин да је Δ једнако Е, а Z је нека произвољна величина. Онда ће Z, ако је веће од Δ, бити веће и од Е, ако је једнако, бити једнако, а ако је мање, бити мање. И Z је мултиплум од Г, а Δ и Е су неки други произвољни једнакоструки мултиплуми од А и В. Према томе је Г према А, као Г према В.

На овај начин, једнаке величине су према истој величини у истој размери и иста величина је према једнаким величинама у истој размери.[27]

Последица

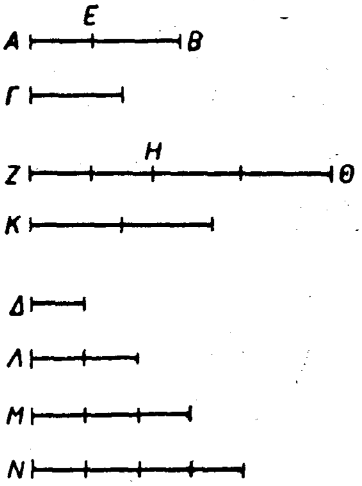
Одавде је јасно, да ако су величине пропорционалне, оне су пропорционалне и у обрнутим размерама. А то је требало доказати.[28]

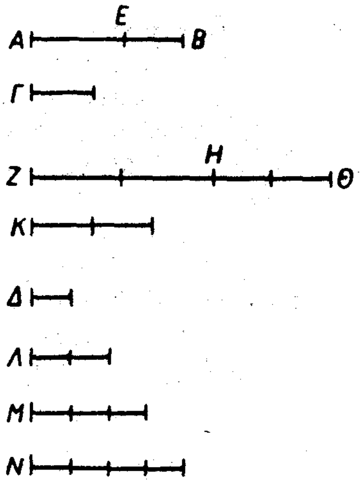
8.

Од неједнаких величина већа је у већој размери према једној истој величини него мања, а иста величина у већој размери према мањој него према већој.

Нека су АВ и Г неједнаке величине и АВ већа, а Δ нека произвољна величина. Тврдим, да је АВ у већој размери према Δ, него што је Г према Δ и да је Δ у већој размери према Г, него према АВ.

Заиста, како је АВ веће од Г, конструишимо ВЕ једнако Г; величина, мања од величина АЕ и ЕВ, настављена више пута даје најзад мултиплум већи од Δ. Нека је, прво, AE мање од EB; наставимо AE више пута и нека је њен мултиплум ZH већи од Δ; начинимо исто толике мултиплуме HΘ од EB и K од Γ, колики је ZH мултиплум од AE; и узмимо Λ двоструко од Δ, M троструко и тако даље, повећавајући за јединицу, до првог мултиплума од Δ већег од K. Нека, први већи од K, буде четвороструки мултиплум N од Δ.





Ако је сад K мање од тог првог већег мултиплума N, онда K није мање од M. И колики су ZH од AE и HΘ од EB једнакоструки мултиплуми, биће исто толики једнакоструки мултиплуми ZH од AE и ZΘ од AB. Једнакоструки су мултиплуми и ZH од AE и K од Γ. Према томе су једнакоструки мултиплуми и ZΘ од AB и K од Γ. На тај начин су и ZΘ и K једнакоструки мултиплуми од AB и Γ. А како су HΘ од EB и K од Γ једнакоструки мултиплуми, а EB је једнако Γ, биће и HΘ једнако K. Но K није мање од M, значи ни HΘ није мање од M. Али је ZH веће од Δ, што значи да је ZΘ веће од Δ и M узетих заједно. Међутим су Δ и M, заједно узети, једнаки N, јер је M троструко Δ, па M и Δ заједно чине четвороструко Δ, а и N четвороструко Δ, те су према томе M и Δ заједно једнаки N. Али је ZΘ веће од збира M и Δ, те је ZΘ веће од N, но K није веће од N. И ZΘ и K су једнакоструки мултиплуми од AB и Γ, а N од Δ је други произвољни мултиплум. Према томе је AB према Δ у већој размери него Γ према Δ.

Тврдим још да је Δ у већој размери према Γ него Δ према AB.

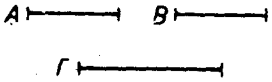
Заиста, помоћу истих конструкција и на сличан начин доказујемо да је N веће од K, но N није веће од ZΘ. Али N је мултиплум од Δ, а ZΘ и K су други произвољни мултиплуми од AB и Γ. Према томе је размера Δ према Γ већа од размере Δ према AB.

Нека буде сад AE веће од EB. Мања од ових EB настављена више пута даје најзад мултиплум већи од Δ. Наставимо EB више пута и нека буде HΘ мултиплум од EB већи од Δ. Начинимо исто толике мултиплуме ZH од AE и K од Γ, колики је HΘ мултиплум од EB. Исто тако доказујемо и да су ZΘ и K једнакоструки мултиплуми од AB и Γ. На сличан начин узмимо N мултиплум од Δ, први већи од ZH. На тај начин опет ZH није мање од M. Међутим је HΘ веће од Δ, те је према томе цело ZΘ веће од збира Δ и M, тј. од N. Но K није веће од N, јер ни ZH, које је веће од HΘ, а ово је једнако K, није веће од N. И на сличан начин, као и горе, доводимо доказ до краја.

На овај начин, од неједнаких величина већа је у већој размери према једној истој величини него мања, а иста величина у већој размери према мањој него према већој. А то је требало доказати.[29]

9.

Величине, које су према истој величини у истој размери, једнаке су међу собом, и величине према којим је иста величина у истој размери једнаке су.



Нека је свака од величина A и B у истој размери према величини Γ. Тврдим да је A једнако B.

Заиста, ако то није тако, онда A и B не би биле у истој размери према Γ, међутим јесу, што значи да је A једнако B.

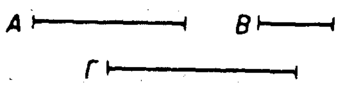
Нека је, даље, величина Γ према свакој од величина A и B у истој размери. Тврдим, да је A једнако B.

Заиста, ако не би било тако, онда Γ не би било у истој размери према A и B, а оно јесте, што значи да је A једнако B.

На овај начин, величине, које су према истој величини у истој размери, једнаке су међу собом, и величине према којим је иста величина у истој размери једнаке су. А то је требало доказати.[30]

10.

Од две величине, које су у размерама према истој величини, она је већа чија је размера већа; и она величина према којој је иста величина у већој размери мања је.



Нека је А према Г у већој размери него В према Г. Тврдим да је А веће од В.

Ако то није тако, онда је или А једнако В или мање од В. Но А, разуме се, није једнако В, јер би свака од величина А и В била у истој размери према Г, а оне нису. Према томе А није једнако В. Али А није ни мање од В, јер би тада А било у мањој размери према Г, него што је В према Г, а оно није; према томе А није мање од В. А доказали смо да оно није ни једнако. Дакле А је веће од В.

Нека сад размера Г према В буде већа од размере Г према А. Тврдим да је В мање од А.

Ако то није тако, онда је оно или једнако или веће. Но В, разуме се, није једнако А, јер би тада Г било у истој размери према А и В, а оно није. Према томе А није једнако В. Но В није ни веће од А, јер би тада Г било према В у мањој размери него према А, што није; према томе В није веће од А. А доказали смо да оно није ни једнако. Дакле В је мање од А.

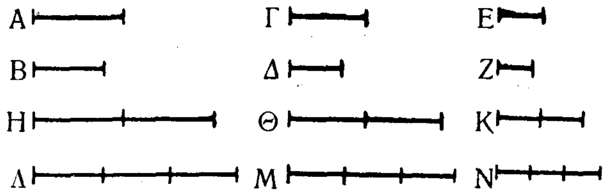
На овај начин, од две величине, које су у размерама према истој величини, она је већа чија је размера већа; и она величина према којој је иста величина у већој размери мања је. А то је требало доказати.[31]

11.

Две размере једнаке једној истој размери једнаке су међу собом.

Нека је А према В, као Г према Δ, и Г према Δ, као Е према Z. Тврдим, да је А према В као Е према Z.

Заиста, узмимо од A, Γ, E једнакоструке мултиплуме H, Θ, K, а од B, Δ, Z друге, произвољне, једнакоструке мултиплуме Λ, M, N.



Како је међутим A према B, као Γ према Δ, а од A и Γ су једнакоструки мултиплуми H и Θ, од B и Δ опет други, произвољни, једнакоструки мултиплуми Λ и M, биће, ако је H веће од Λ, и Θ веће од M, ако је једнако — једнако, а ако је мање — мање. Даље, како је Γ према Δ, као E према Z, а од Γ и E су једнакоструки мултиплуми Θ и K, а од Δ и Z опет други, произвољни, једнакоструки мултиплуми M и N, биће, ако је Θ веће од M, и K веће од N, ако је једнако — једнако, а ако је мање — мање. Али, ако је Θ веће од M, веће је и H од Λ, ако је једнако — једнако, ако је мање — мање. Значи, ако је H веће од Λ, онда је и K веће од N, ако је једнако — једнако, ако је мање — мање. Но H и K су једнакоструки мултиплуми од A и E, а Λ и N су други, произвољни, једнакоструки мултиплуми од B и Z. Према томе A према B је као E према Z.

На овај начин, две размере једнаке једној истој размери једнаке су међу собом. А то је требало доказати.[32]

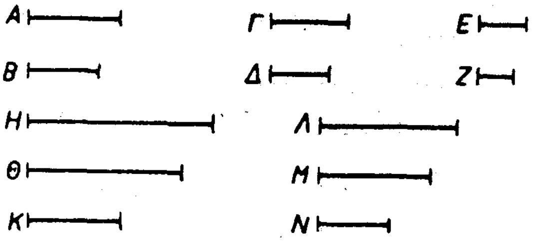
12.

Ако је неколико пропорционалних величина, онда је једна од претходних према једној (одговарајућој) од наредних, као збир свих претходних према збиру свих наредних.

Нека су A, B, Γ, Δ, E, Z неколико пропорционалних величина; и нека је A према B, као Γ према Δ и као E према Z. Тврдим да је A према B, као и збир од A, Γ, E према збиру од B, Δ, Z.

Заиста, начинимо од A, Γ, E једнакоструке мултиплуме H, Θ, K, а од B, Δ, Z друге, произвољне, једнакоструке мултиплуме Λ, M, N.

Како је А према В, као Г према Δ, и као Е према Z, а од А, Г, Е су једнакоструки мултиплуми Н, Θ, К и од В, Δ, Z су други, произвољни, једнакоструки мултиплуми Λ, М, N, онда ће, ако је Н веће од Λ, бити и Θ веће од М, и К од N, ако је једнако — једнако, ако је мање — мање. Исто тако, ако је Н веће од Λ, биће и збир Н, Θ и К већи од збира Λ, М и N, ако је једнак, биће једнак, ако је мањи — мањи. Дакле, Н од А и збир Н, Θ и К од збира А, Г и Е су једнакоструки мултиплуми, јер ако су неколико величина једнакоструки мултиплуми од исто толико других неких величина, и то свака од одговарајуће, биће и збир првих величина исте вишеструкости мултиплум збира других величина. Из истих разлога су како Λ, тако и збир Λ, М и N једнакоструки мултиплуми од В односно од збира В, Λ и Z. Према томе, А према В је, као збир А, Г и Е према збиру В, Δ и Z.



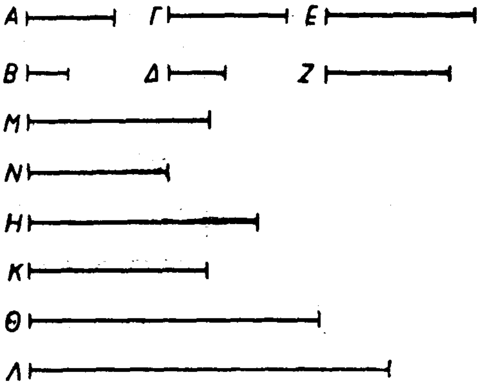
На овај начин, ако је неколико пропорционалних величина, онда је једна од претходних према једној (одговарајућој) од наредних, као збир свих претходних према збиру свих наредних. А то је требало доказати.[33]

13.

Ако је прва (величина) према другој у истој размери, као трећа према четвртој, а размера треће према четвртој већа од размере пете према шестој, биће и размера прве према другој већа од размере пете према шестој.

Нека прва А буде према другој В у истој размери као трећа Г према четвртој Δ, а размера треће Г према четвртој Δ нека буде већа од размере пете Е према шестој Z. Тврдим, да је размера прве А према другој В већа од размере пете Е према шестој Z.

Заиста, уколико постоје једнакоструки мултиплуми од Г и Е, и други, произвољни, једнакоструки мултиплуми од Δ и Z, онолики да мултиплум од Г буде већи него мултиплум од



Δ, а мултиплум од Е да не буде већи од мултиплума од Z узмимо их; затим нека су Н и Θ једнакоструки мултиплуми од Г и Е, а К и Λ други, произвољни мултиплуми од Δ и Z, и нека је Н веће од К, а Θ да није веће од Λ; и даље, нека мултиплум М од А буде онолики, колики је мултиплум Н од Г и мултиплум N од В онолики, колики је мултиплум К од Δ.

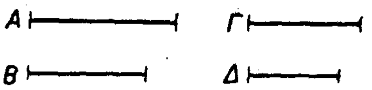
Како је онда А према В, као Г према Δ, а од А и Г су једнакоструки мултиплуми М и Н, а од В и Δ опет други, произвољни, једнакоструки мултиплуми N и К, биће, ако је М веће од N, и Н веће од К, ако је једнако, биће једнако, ако је мање — мање. Међутим је Н веће од К, те је према томе и М веће од N. Но Θ није већа од Λ. Како су М и Θ једнакоструки мултиплуми од А и Е, а N и Λ други, произвољни, једнакоструки мултиплуми од В и Z, биће према томе размера А према В већа од размере Е према Z.

На овај начин, ако је прва (величина) према другој у истој размери, као трећа према четвртој, а размера треће према четвртој већа од размере пете према шестој, биће и размера прве према другој већа од размере пете према шестој. А то је требало доказати.[34]

14.

Ако је размера прве (величине) према другој једнака размери треће према четвртој, а прва (величина) је већа од треће, биће и друга већа од четврте, а ако је једнака, биће једнака, ако је мања — мања.

Нека размера прве А према другој В буде једнака размери треће Г према четвртој Δ, и А веће од Г. Тврдим, да је и В веће од Δ.



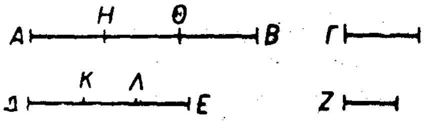
Заиста, пошто је А веће од Г, а В је нека друга величина, биће размера А према В већа од размере Г према В. Но размера А према В је иста као и размера Г према Δ. Зато је и размера Г према Δ већа од размере Г према В. Иста величина је у већој размери према мањој величини. На тај начин је Δ мање од В, а то значи да је В веће од Δ.

На сличан начин доказује се да ће, ако је А једнако Г, и В бити једнако Δ, и ако је А мање од Г, бити и В мање од Δ.

На овај начин, ако је размера прве (величине) према другој једнака размери треће према четвртој, а прва (величина) је већа од треће, биће и друга већа од четврте, а ако је једнака, биће једнака, ако је мања — мања. А то је требало доказати.[35]

15.

Делови стоје према својим једнакоструким мултиплумима у истој размери, ако се узму одговарајућим редом.



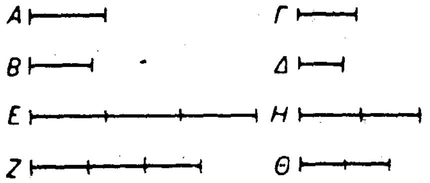
Нека су АВ од Г и ΔЕ од Z једнакоструки мултиплуми. Тврдим, да је размера Г према Z једнака размери АВ према ΔЕ.

Заиста, ако су АВ од Г и ΔЕ од Z једнакоструки мултиплуми, онда колико се пута Г буде садржало у АВ, толико ће се пута и Z садржати у ΔЕ. Поделимо АВ на делове АН, НΘ, ΘВ једнаке Г и ΔЕ на делове ΔК, КΛ, ΛЕ једнаке Z. Број делова АН, НΘ, ΘВ једнак је броју делова ΔК, КΛ, ΛЕ. И пошто су АН, НΘ, ΘВ међусобно једнаки, а и ΔК, КΛ, ΛЕ међусобно једнаки, биће и АН према ΔК, као НΘ према КΛ, и ΘВ према ΛЕ. А пошто, као што је један од претходних према једном од наредних, и збир свих претходних је према збиру свих наредних, значи да ће и АН према ΔК бити као и АВ према ΔЕ. Но АН је једнако Г, а ΔК једнако Z, па је, према томе, Г према Z као АВ према ΔЕ.

На овај начин, делови стоје према својим једнакоструким мултиплумима у истој размери, ако се узму одговарајућим редом. А то је требало доказати.[86]

16.

Ако су четири величине пропорционалне, оне ће бити и пермутоване пропорционалне.



Нека су А, В, Г, Δ четири пропорционалне величине: А према В, као Г према Δ. Тврдим да су оне и пермутоване пропорционалне: А према Г, као В према Δ.

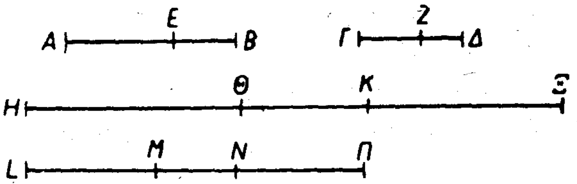
Заиста, начинимо од А и В једнакоструке мултиплуме Е и Z, а од Г и Δ друге, произвољне, једнакоструке мултиплуме Н и Θ.

И пошто су Е од А и Z од В једнакоструки мултиплуми, а делови су према својим једнакоструким мултиплумима у истој размери, биће А према В, као Е према Z. Али како је А према В, као Г према Δ, биће и Г према Δ, као Е према Z. Даље, пошто су Н и Θ једнакоструки мултиплуми од Г и Δ, биће Г према Δ, као Н према Θ. А како је Г према Δ, као Е према Z, биће и Е према Z, као Н према Θ. Но, ако су четири величине пропорционалне, а прва већа од треће, биће и друга већа од четврте, а ако је једнака, биће једнака, а ако је мања — мања. Према томе, ако је Е веће од Н, биће и Z веће од Θ, а ако је једнако, биће једнако, а ако је мање — мање. А како су Е и Z једнакоструки мултиплими од А и В, а Н и Θ од Г и Δ други, произвољни мултиплуми, биће А према Г, као В према Δ.

На овај начин, ако су четири величине пропорционалне, оне ће бити и пермутоване пропорционалне. А то је требало доказати.[37]

17.

Ако су величине, узете заједно, пропорционалне, оне су пропорционалне и одвојено узете.



Нека су величине AB, BE, ΓΔ, ΔZ, узете заједно, пропорционалне, наиме AB је према BE, као ΓΔ према ΔZ. Тврдим, да су оне пропорционалне и одвојено узете, наиме AE је према EB, као ΓZ према ΔZ.

Заиста, образујмо од AE, EB, ΓZ, ZΔ једнакоструке мултиплуме HΘ, ΘK, ΛM, MN а од EB и ZΔ друге, произвољне мултиплуме KΞ и NΠ.

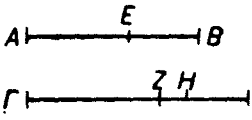
И пошто су HΘ од AE, а ΘK од EB једнакоструки мултиплуми, биће HΘ од AE и HK од AB једнакоструки мултиплуми. И пошто су HΘ од AE и ΛM од ΓZ једнакоструки мултиплуми, биће и HK од AB и ΛM од ΓZ једнакоструки мултиплуми. Даље, пошто су ΛM од ΓZ и MN од ZΔ једнакоструки мултиплуми, биће и ΛM од ΓZ и ΛN од ΓΔ једнакоструки мултиплуми, а опет ΛM од ΓZ и HK од AB су једнакоструки мултиплуми, па ће према томе бити и HK од AB и ΛN од ΓΔ једнакоструки мултиплуми. Према томе су HK и ΛN једнакоструки мултиплуми од AB и ΓΔ. Даље, пошто су ΘK од EB и MN од ZΔ једнакоструки мултиплуми, а KΞ једнакоструки мултиплум од EB као и NΠ од ZΔ, биће и збирови ΘΞ и MΠ једнакоструки мултиплуми од EB и од ZΔ. Но како је AB према BE, као ΓΔ према ΔZ а од AB и ΓΔ су образовани једнакоструки мултиплуми HK и ΛN, а од EB и ZΔ опет једнакоструки мултиплуми ΘΞ и MΠ, биће, ако је HK веће од ΘΞ, и ΛN веће од MΠ, ако је једнако — једнако, ако је мање — мање. Нека HK буде веће од ΘΞ, биће, после одузимања заједничког ΘK, и HK веће од KΞ.

Али, ако је HK веће од ΘΞ, биће и ΛN веће од MΠ. Према томе је и ΛN веће од MΠ, те ће, после одузимања заједничког MN, бити и ΛM веће од NΠ. Али ако је HΘ веће од KΞ, биће и ΛM веће од NΠ. На сличан начин доказује се, да ће, ако је HΘ једнако KΞ, бити једнако и ΛM величини NΠ, а ако је мање, биће мање. HΘ и ΛM су једнакоструки мултиплуми од AE и ΓZ, а KΞ и NΠ други, произвољни једнакоструки мултиплуми од EB и ZΔ. Према томе је AE према EB као ΓZ према ZΔ.

На овај начин, ако су величине, узете заједно, пропорционалне, оне су пропорционалне и одвојено узете. А то је требало доказати.[38]

18.

Ако су величине, узете одвојено, пропорционалне, оне су пропорционалне и заједно узете.



Нека су одвојене величине AE, EB, ΓZ, ZΔ пропорционалне, наиме AE је према EB, као ΓZ према ZΔ. Тврдим, да су и заједно узете величине пропорционалне, наиме AB је према BE, као ΓΔ према ZΔ.

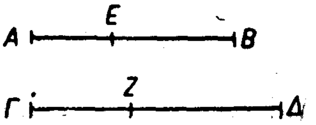
Ако AB није према BE као ΓΔ према ΔZ, већ је AB према BE као ΓΔ према некој величини, која је било мања било већа од ΔZ.

Нека буде, прво, према мањој ΔH. Али тада је AB према BE као ΓΔ према ΔH, то значи пропорционалне су величине узете заједно; према претходној теореми пропорционалне су и величине узете одвојено. На тај начин је AE према EB као ΓH према HΔ. Међутим, по претпоставци је AE према EB, као ΓZ према ZΔ. Значи ΓH је према HΔ, као ΓZ према ZΔ. Прва величина ΓH је већа од треће величине ΓZ. Према томе је и друга величина HΔ већа од четврте величине ZΔ. Али је и мања. А то је немогуће. Дакле AB није према BE, као ΓΔ према величини мањој од ZΔ. На сличан начин се доказује да није ни према већој. Значи да је према њој самој.

На овај начин, ако су величине, узете одвојено, пропорционалне, оне су пропорционалне и заједно узете. А то је требало доказати.[39]

19.

Ако је цело према целом, као умањилац према умањиоцу, онда је и остатак према остатку, као цело према целом. Нека је цело AB према целом ΓΔ, као умањилац AE према умањиоцу ΓZ. Тврдим, да је и остатак EB према остатку ZΔ, као цело AB према целом ΓΔ.



Пошто је AB према ΓΔ, као AE према ΓZ, онда важи и пермутована пропорција, наиме: BA је према AE, као ΔΓ према ΓZ. И пошто, ако су величине, узете заједно, пропорционалне, оне су пропорционалне и одвојено узете, биће BE према EA, као ΔZ према ΓZ, и пермутовано: BE је према ΔZ, као EA према ZΓ. Али по претпоставци AE је према ΓZ, као цело AB према целом ΓΔ. На тај начин остатак EB је према остатку ZΔ, као цело AB према целом ΓΔ.

На овај начин, ако је цело према целом, као умањилац према умањиоцу, онда је и остатак према остатку, као цело према целом. [А то је требало доказати].

[И пошто је доказано, да је AB према ΓΔ, као EB према ZΔ, и, пермутовано, AB је према BE, као ΓΔ према ZΔ, значи да су пропорционалне величине, узете заједно, а доказали смо да је BA према AE, као ΔΓ према ΓZ, а то је превртање (претходне пропозиције)].

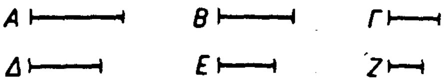
Последица.

Из овог је јасно, да ако су пропорционалне величине узете заједно, онда важи и преврнута пропорција. А то је требало доказати.[40]

20.

Ако су три величине и друге, у истом броју, узете по две, у истој размери и од једнако удаљених прва је већа од треће, биће и четврта већа од шесте, а ако је једнака, биће једнака, а ако мања — мања.

Нека су дате три величине A, B, Γ и друге, у истом броју, Δ, E, Z, узете по две, и истој размери, наиме, A је према В, као Δ према Е, и В према Г, као Е према Z и од једнако удаљених нека је А веће од Г. Тврдим, да ће и Δ бити веће од Z, а ако је једнако, биће једнако, а ако мање — мање.

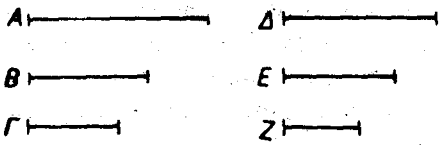


Заиста, нека је А веће од Г, а В је нека друга величина (иста за две размере), тада је од неједнаких величина већа у већој размери према једној истој величини него мања, и према томе је размера А према В већа од размере Г према В. Али А је према В, као Δ према Е, и, после узимања обрнутих размера, Г је према В, као Z према Е. Према томе је размера Δ према Е већа од размере Z према Е. Али величина (Δ), која је у већој размери према истој величини (Е), већа је и према томе је Δ веће од Z. На сличан начин доказује се да ако је А једнако Г, биће и Δ једнако Z, а ако је мање — мање.

На овај начин, ако су три величине и друге, у истом броју, узете по две, у истој размери и од једнако удаљених прва је већа од треће, биће и четврта већа од шесте, а ако је једнака, биће једнака, а ако мања — мања. А то је требало доказати.[41]

21.

Ако су три величине и друге, у истом броју, у истој размери, али у поремећеној пропорцији и од једнако удаљених прва величина је већа од треће, биће и четврта већа од шесте, ако је једнака, биће једнака, а ако мања — мања.



Нека су три величине А, В, Г и друге, у истом броју, узете по две, у истој размери, али у поремећеној пропорцији, наиме, А је према В, као Е према Z, и В према Г, као Δ према

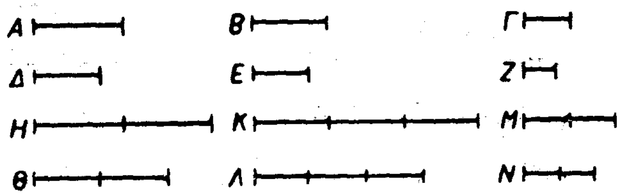
Е и од једнако удаљених А је веће од Г. Тврдим, да ће и Δ бити веће од Z, ако је једнако, бити једнако, а ако мање — мање.

Заиста, пошто је А веће од Г, а В је нека друга величина (иста за две размере), биће размера А према В већа од размере Г према В. Али А је према В, као Е према Z, и, после узимања обрнутих размера, Г је према В, као Е према Δ. На тај начин размера Е према Z је већа од размере Е према Δ. Али величина, према којој је иста величина у већој размери, мања је. Према томе је Z мање од Δ, па значи Δ је веће од Z. На сличан начин доказује се да ако је А једнако Г, биће и Δ једнако Z, а ако је мање — мање.

На овај начин, ако су три величине и друге, у истом броју, у истој размери, али у поремећеној пропорцији и од једнако удаљених прва величина је већа од треће, биће и четврта већа од шесте, ако је једнака, биће једнака, а ако мања — мања. А то је требало доказати.[42]

22.

Ако су дате неке величине у произвољном броју и друге у истом броју, које су, узете по две, у истој размери, онда су и једнако удаљене у истој размери.



Нека су А, В, Г неке величине, а Δ, Е, Z друге у истом броју и, узете по две, су у истој размери, наиме А је према В као Δ према Е, и В према Г, као Е према Z. Тврдим, да су и једнако удаљене у истој размери.

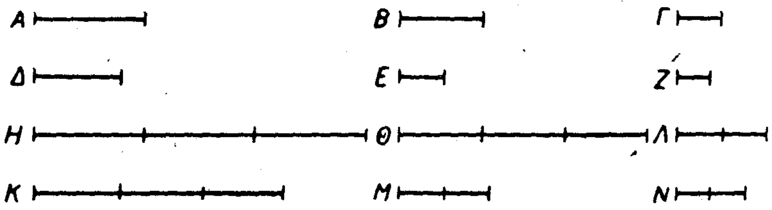
Заиста, начинимо од А и Δ једнакоструке мултиплуме Н и Θ, а од В и Е друге, произвољне једнакоструке мултиплуме К и Λ, и од Г и Z друге, произвољне једнакостуке мултиплуме М и N.

И пошто је А према В, као Δ према Е, а од А и Δ су образовани једнакоструки мултиплуми Н и Θ, а од В и Е други, произвољни једнакоструки мултиплуми К и Л, онда је Н према К, као Θ према Λ. Из истих разлога следује да је К према М, као Λ према N. На тај начин, пошто постоје три величине Н, К, М и друге Θ, Λ, N, у истом броју, а узете по две су у истој размери, онда, ако је Н веће од М, биће, као једнако удаљени, и Θ веће од N, ако је једнако, биће једнако, а ако мање — мање. И пошто су Н и Θ једнакоструки мултиплуми од А и Δ, а М и N други, произвољни једнакоструки мултиплуми од Г и Z, биће А према Г, као Δ према Z.

На овај начин, ако су дате неке величине у произвољном броју и друге у истом броју, које су, узете по две, у истој размери, онда су и једнако удаљене у истој размери. А то је требало доказати.[48]

23.

Ако су дате три величине и друге у истом броју, које су, узете по две, у истој размери, а за њих важи поремећена пропорција, биће и једнако удаљене у истој размери.



Нека су А, В, Г три величине и Δ, Е, Z друге, у истом броју, које су, узете по две, у истој размери, а за њих важи поремећена пропорција, наиме, А је према В, као Е према Z, и В према Г, као Δ према Е. Тврдим, да је А према Г, као Δ према Z.

Образујмо од А, В, Δ једнакоструке мултиплуме Н, Θ. К, а од Г, Е, Z друге, прозвољне једнакоструке мултиплуме Λ, М, N.

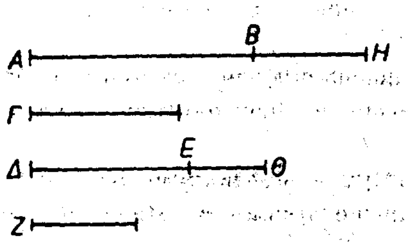
Пошто су Н и Θ једнакоструки мултиплуми од А и В, а делови су према својим једнакоструким мултиплумима у истој размери, биће А према В, као Н према Θ. Из истих разлога је и Е према Z, као М према N. Међутим, А је према В, као Е према Z. И према томе Н је према Θ, као

М према N. И пошто је В према Г, као Δ према Е, биће и, пермутовано, В према Δ, као Г према Е. А пошто су Θ и К једнакоструки мултиплуми од В и Δ, а делови су према својим једнакоструким мултиплумима у истој размери, биће В према Δ, као Θ према К. Али В је према Δ, као Г према Е. И према томе Θ је према К, као Г према Е. Даље, пошто су Λ и М једнакоструки мултиплуми од Г и Е, Г је према Е, као Λ према М. Али Г је према Е, као Θ према К. Према томе је Θ према К, као Λ према М, и, пермутовано, Θ је према Λ, као К према М. А доказали смо да је Н према Θ, као М према N. На тај начин, пошто су Н, Θ, Λ три величине и К, М, N друге, у истом броју, које су, узете по две, у истој размери, а за њих важи поремећена пропорција, биће и за једнако удаљене, ако је Н веће од Λ, и К веће од N, ако је једнако, биће једнако и ако мање — мање. А Н и К су једнакоструки мултиплуми од А и Δ, а Λ и N од Г и Z. Према томе, А је према Г, као Δ према Z.

На овај начин, ако су дате три величине и друге у истом броју, које су, узете по две, у истој размери, а за њих важи поремећена пропорција, биће и једнако удаљене у истој размери. А то је требало доказати.“

24.

Ако је прва (величина) према другој у истој размери као трећа према четвртој, а пета је према другој у истој размери као шеста према четвртој, биће и збир прве и пете према другој у истој размери као збир треће и шесте према четвртој.



Нека је прва АВ према другој Г, као трећа ΔЕ према четвртој Z, а пета ВН према другој Г као шеста ЕΘ према четвртој Z. Тврдим, да је збир прве и пете, АН, према другој Г, као збир треће и шесте, ΔΘ, према четвртој Z.

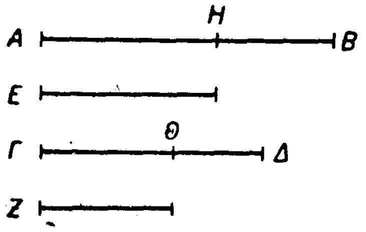
Заиста, пошто је ВН према Г, као ЕΘ према Z, биће, обрнуто, Г према ВН као Z према ЕΘ. На тај начин, пошто је АВ према Г, као ΔЕ према Z и Г према ВН, као Z према ЕΘ, биће и за једнако удаљене: АВ према ВН, као ΔЕ према ЕΘ. А пошто, ако су величине, узете одвојено, пропорционалне, оне су пропорционалне и заједно узете, биће АН према НВ, као ΔΘ према ΘЕ. Међутим, ВН је према Г, као ЕΘ према Z. Према томе и за једнако удаљене имамо: АН је према Г као ΔΘ према Z.

На овај начин, ако је прва (величина) према другој у истој размери као трећа према четвртој, а пета је према другој у истој размери као шеста према четвртој, биће и збир прве и пете према другој у истој размери као збир треће и шесте према четвртој. А то је требало доказати.[45]

25.

Ако су пропорционалне четири величине, онда је збир највеће и најмање већи од збира две остале.

Нека су четири величине АВ, ГΔ, Е, Z пропорционалне, наиме, АВ је према ГΔ, као Е према Z, и нека је АВ највећа од њих, а најмања Z. Тврдим да је збир АВ и Z већи од збира ГΔ и Е.



Заиста, нека буде АН једнако Е и ГΘ једнако Z.

Пошто је АВ према ГΔ, као Е према Z, а Е је једнако АН, и Z једнако ГΘ, биће АВ према ГΔ као АН према ГΘ. И пошто је цело АВ према целом ГΔ, као умањилац АН према умањиоцу ГΘ, биће и остатак НВ према остатку ΘΔ, као цело АВ према целом ГΔ. Али АВ је веће од ГΔ, према томе и НВ је веће од ΘΔ. А пошто је АН једнако Е, а ГΘ једнако Z, биће и збир АН и Z једнак збиру ГΘ и Е. И стога, ако се [неједнаким додате једнаке, онда су и целе неједнаке, дакле, ако се] неједнаким НВ и ΘΔ, при већем НВ, првој дода збир АН и Z, а другој збир ГΘ и Е, онда ће и збир АВ и Z бити већи од збира ГΔ и Е.

На овај начин, ако су пропорционалне четири величине, онда је збир највеће и најмање већи од збира две остале. А то је требало доказати.[46]

КОМЕНТАР

Пета књига Еуклидових елемената посвећена је, као што смо навели у предговору, теорији размере, пропорције и пропорционалности више самерљивих величина. Садржај ове књиге битно се разликује од садржаја претходне четири књиге. Претходне књиге су имале чисто геометриски карактер, пета књига је аритметичка, у њој се тумачи однос величина и то у случају пропорционалности. Ипак облик излагања и у тој књизи је геометриски, јер се све величине и везе између њих тумаче на дужима.

У историји теорије пропорционалности могу се истаћи ове фазе: доеуклидски период, затим Еуклид, Еуклидови коментатори, који су довели до аритметизације нарочито теорије пропорције. У последњој, савременој фази, треба нагласити поновни интерес за Еуклидову теорију.

Појам пропорције, односно пропорционалности, у вези са сличношћу био је познат, без сумње, још у давној прошлости у вези са архитектуром. Он се јасно испољио у старом Египту. Примере размера са целим бројевима можемо видети на споменицима, на пирамидама и гробницама, например владара прве династије Менеса (Мена), који је живео око 3200 г. пре наше ере и у чије време је било примљено хијероглифско писмо. Према томе за то доба треба везати индуктивни период теорије пропорционалних величина и сличних слика.

Прелаз од индуктивног периода на научни, дедуктивни период, у почетку још доста магловит, припада углавном Питагори, коме се приписује и проналазак размере несамерљивих величина, затим Еудоксу са Книдоса (око 370 г. пре наше ере), ученику Платонове школе.

Еуклид је у петој књизи формулисао теорију пропорционалних величина за случај самерљивих величина, а затим је у десетој књизи извео теорију и за случај несамерљивих величина. Еуклидова теорија, нарочито за несамерљиве величине, разуме се, не може се сматрати за правилно логички изведену дедуктивну теорију пропорционалних величина, јер, његовим дефиницијама размере можемо ставити исте замерке, као и дефиницијама тачке, линије, површине праве, равни и др. у првој књизи. Но, као што истине изнесене у првој књизи остају на снази и у данашње време, нису ни истине пете књиге изгубиле своју вредност.

Еуклидова теорија размера и пропорција развијена је на потпуно геометриској основи. На савременог читаоца, неупућеног у историски развитак геометриске и аритметичке теорије самерљивих и несамерљивих величина, садржај пете књиге чини чудноват утисак. Зашто Еуклид, може запитати такав читалац, доказује и то понекад на доста компликован начин оне истине, које лако може потврдити ученик, рецимо, петог разреда гимназије? Одговор на ово питање је у томе што је његова теорија чисто геометриског карактера. За Еуклида је размера, рецимо, две дужи $AB:CD$ чисто геометриски објект који нема никакве везе са размером бројева, рецимо, $m:n$. У овој књизи Еуклид не уводи ни „бројне вредности размере“, ни операције са члановима пропорције као са бројевима. То је битни карактер Еуклидове теорије.

У тој теорији пета дефиниција, о једнакости размера, игра основну улогу и већина доказа теорема ове књиге састоји се у утврђивању пропорционалности величина на основу оног поступка који за такво утврђивање прописује та дефиниција. Треба стати на ту логичку основу и видети са каквом доследношћу Еуклид развија своју теорију.

Еуклидова теорија је ипак компликована и гломазна, а при томе се заснива на дефиницијама размере, које у суштини немају тачан логички садржај. Исправљању ових логичких недостатака, углавном, био је посвећен рад Еуклидових коментатора, који су тежили да израде „исправљеног Еуклида“. Рад коментатора углавном је завршен радом француске школе¹),

---

[1] L, Bertrand — Développement sur la partie élémentaire de géométrie. Paris, 1767.

A. M. Legendre — Éléments de géometrie avec des notes. Paris, 1794.

S. F. Lacroix — Éléments de géometrie de l'École Centrale des Quatres Nations. Paris, 1814.

која је поставила дефинитивну базу теорије пропорционалности у облику „аритметизације“ те теорије.

Аритметизацијом теорије пропорције била су решена многа питања те теорије, нарочито са гледишта наставе тог дела елементарне геометрије, али је логичка структура те теорије имала још многа несавршена места. Са логичког гледишта ту теорију много је пречистио D. Hilbert и његова школа. Ипак је Hilbert-ово излагање теорије пропорционалности помоћу Pascal-ове теореме, са гледишта природе ствари, мало вештачког карактера. Савремена математика, нарочито у теорији ирационалних бројева и ирационалних размера тражи простије и природније решење у излагању теорије пропорционалности и поново се враћа на дубље тумачење Еуклидова поступка наведана у чувеној петој дефиницији ове пете књиге.

---

[1] Због нарочитих тешкоћа при читању и разумевању и нарочито због доказа теорема ове књиге служићемо се, ради јасности, при тумачењу како дефиниција тако и ставова са доказима, савременим аритметичко-алгебарским језиком.

Прва дефиниција се односи на везу између величина a и b у облику

$$b=ma, \tag{1}$$

где је m цео број већи од јединице. Величина a је „део“ величине b.

У овој дефиницији реч „τό μέρος“ одговара, не само по својој етимолошкој форми већ и по свом садржају, у потпуности појму „мера“, но није у противречности ни са појмом „део“. Оно мишљење о смислу ове речи, које смо изнели у коментару прве књиге, у вези са тумачењем прве Еуклидове дефиниције те књиге, дефиниције тачке, потврђује се у потпуности и овде.

[2] У једначини (1) претходне примедбе величина b зове се мултиплум (од) величине a или, кратко, мултиплум од a. Реч „πολλαπλάσιον“, која се преводи са multiple, Vielfaches, multiple, кратное, višekratnik, преводимо са „мултиплум“. Употребили смо латинску реч, која је усвојена и у српском језику било у облику „мултиплум“ било у скраћеном облику „мул-

типл“ (Вујаклија). За страну реч „мултиплум“ одлучили смо се из ових разлога. Прво, такав термин следује непосредно из саме грчке речи и из оних превода што смо навели. Друго, може се још говорити само о српској речи „садржалац“. Та реч, међутим, није прави еквивалент грчке речи, јер она означава већ унапред постојање неке величине која садржи друге величине, док је „πολλαπλάσιον“ уствари резултат умножавања, нешто што се тек добија. Стога је јасно да се реч „садржалац“ није могла употребити, а другог еквивалентног термина није било. Основно у разлици појма „садржалац“ и „мултиплум“ истог броја a је у томе што је садржалац дат, од њега се полази и рачунском радњом дељења утврђује је ли садржалац, док је мултиплум — вишекратник нешто што није дато већ се добија као резултат рачунске радње множења. У реченици „b је садржалац од a“ примарно је b а секундарно a. У реченици „b је мултиплум од a“ примарно је a а секундарно b. Свакако се не може рећи „образовати једнакоструке садржаоце од a и b“, већ „једнакоструке мултиплуме од a и b“ и такво изражавање је основа Еуклидовог излагања.

Еуклид, без нарочите дефиниције, често употребљава израз *τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια*. Тај израз преводимо са „једнакоструки мултиплуми“. Два мултиплума b_1 и b_2 са вредностима

$$b_1 = m_1 a_1, \qquad b_2 = m_2 a_2$$

су једнакоструки мултиплуми од a_1 односно a_2, ако је $m_1 = m_2$.

[3] „Ὁ λόγος“ је реч која се у грчком језику употребљује, можда, за највећи број разних појмова. У овој реченици она значи размера, однос. У класичној математици појам односа је био врло компликован и магловит. У овој, првој, дефиницији наглашен је само смисао упоређивања једнородних (хомогених) величина и то по количини.

[4] Ова, друга, дефиниција размере има више математичког карактера; она наглашава линеарну везу односа са величинама из којих је размера састављена. Савременим математичким језиком могли бисмо то овако формулисати: величине a_1 и a_2 су у размери, ако се увек могу навести таква два цела броја m_1 и m_2 да буде

$$m_1 a_1 > a_2, \quad \text{ако је } a_1 < a_2$$

и

$$a_1 < m_2 a_2, \quad \text{ако је } a_1 > a_2$$

У савременој логичкој структури математике сматра се да је у овој дефиницији постављен услов да величине a_1 и a_2 Еуклидове размере морају задовољавати Архимедову аксиому. Навођењем ове особине размере Еуклид се, можда несвесно, ограђује од односа оних величина, које поновљене произвољан број пута не могу дати величину већу од унапред утврђене величине. Као пример таквих величина служио је код Грка угао између тангенте и, рецимо, лука кружне линије, такозвани „угао додира“ (упор. Коментар III књ., примедба [21]).

[5] Ова дефиниција једнакости размера је чувена по свом дубоком садржају и по улози коју је она одиграла, а и сад још игра, у логичком образложењу основа математике. Савременим математичким језиком ту дефиницију можемо изразити овако:

Две размере $a_1 : a_2$ и $a_3 : a_4$ су једнаке, ако

1. из неједнакости $ma_1 > na_2$ следује неједнакост $ma_3 > na_4$

и 2. из неједнакости $ma_1 < na_2$ следује неједнакост $ma_3 < na_4$

и 3. из једнакости $ma_1 = na_2$ следује једнакост $ma_3 = na_4$

и то, сва три услова, ма за које вредности целих бројева m и n.

Кратко формулисано: ако ма за које целе бројеве m и n из услова

$$ma_1 \underset{<}{\overset{>}{=}} na_2$$

следују услови

$$ma_3 \underset{<}{\overset{>}{=}} na_4,$$

тада имамо једнакост размера

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4.$$

Треба обратити пажњу на то да код Еуклида размера две једнородне величине још не претставља број. Тек је код Лежандра (1752—1834) била извршена дефинитивна аритметизације геометрије. Свакој размери сад одговара један број, рационалан или ирационалан, и тек пошто је теорија ирационалних бројева постављена на чврсту основу добило је и формулисање једнакости размера правилно логично образложење.

[6] Интересантно је да је реч ἀνάλογος (одговарајући, аналоган) општег садржаја употребљена код Еуклида са специјалним значењем „пропорционалан“, а реч ἡ ἀναλογία са значењем математичког техничког термина „пропорција“. Термини пропорција и пропорционалан су латинског порекла и уведени су много доцније.

[7] Ова дефиниција кратко се овако формулише: ако је ма за који цео број m

$$ma_1 > ma_2, \qquad \text{а} \qquad ma_3 \leqslant ma_4$$

биће

$$a_1 : a_2 > a_3 : a_4.$$

[8] У Heiberg-ову тексту ове дефиниције нема, док је други коментатори стављају, јер, изгледа, стоји у другим рукописима и одговара Еуклидову реду излагања. Да не бисмо отступали од Еуклидове нумерације, увели смо ову дефиницију под поновљеним бројем са звездицом. Савремена елементарна математика има две пропорције: аритметичку, у облику $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$, и геометриску, у облику $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$. Код Еуклида се говори само о геометриској пропорцији.

[9] Пропорције, како аритметичка тако и геометриска, могу бити *дискретне:* $a_1 - a_2 = a_3 - a_4$ и $a_1 : a_2 = a_3 : a_4$ са по четири различита члана, и *непрекидне:* $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$ и $a_1 : a_2 = a_2 : a_3$ са по три члана. У овој Еуклидовој дефиницији, где се говори о пропорционалности три величине, реч је о непрекидној геометриској пропорцији. Из непрекидне аритметичке пропорције следује да је $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$, тј. имамо *аритметичку средину* крајњих чланова, а из непрекидне геометриске — *геометриску средину*: $a_2 = \sqrt{a_1 a_3}$.

[10] Заиста, ако је $a_1 : a_2 = a_2 : a_3$, биће

$$a_1 : a_3 = a_1 : \frac{a_2^2}{a_1} = (a_1 : a_2)^2.$$

Ову особину, која се сад лако изводи аритметичким путем из дате непрекидне пропорције, Еуклид ставља као особину која карактерише непрекидну геометриску пропорцију.

У Еуклидову тексту за ову дефиницију употребљена је реч „διπλάσιος", што значи двоструки. У примени на размеру го би дословно значило да имамо једнакост

$$a_1 : a_3 = 2\,(a_1 : a_2);$$

међутим овакво тумачење те речи је у овом конкретном случају погрешно, јер треба да стоји $(a_1 : a_3) = (a_1 : a_2)^2$. Овде смо отступили од буквалног превода и употребили смо израз „двапут виша", који тачно одговарају садржају текста, а у исто време не уноси аритметички појам квадрата, који је туђ Еуклидову духу теорије пропорције.

[11] У овој дефиницији се говори о продуженој геометриској пропорцији од три размере

$$a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = a_3 : a_4$$

са четири величине a_1, a_2, a_3, a_4. Из тих једнакости следује да је

$$a_1 : a_4 = (a_1 : a_2)^3 ;$$

за ту кубну везу употребили смо у преводу израз „трипут виша".

И на ову дефиницију треба проширити примедбу наведену у вези са претходном дефиницијом. Реч „τριπλάσιος" нисмо превели са троструки, већ смо употребили, како смо казали, специјални израз: трипут виша (размера).

У општем случају, ако имамо низ једнаких непрекидних пропорција

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

можемо извести ову везу

$$a_1 : a_n = (a_1 : a_2)^{n-1}.$$

Заиста, после изједначавања сваке размере са првом добивамо низ једначина

$$\frac{1}{a_3} = \frac{a_1}{a_2^2},\ \frac{1}{a_4} = \frac{a_1}{a_2 a_3},\ \ldots,\ \frac{1}{a_n} = \frac{a_1}{a_2 a_{n-1}},$$

од којих после множења и скраћивања, долазимо до наведеног резултата. О том резултату Еуклид каже: και ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως — и увек на сличан начин.

[12] Еуклид употребљава за одговарајуће чланове пропорције реч „Ὁμόλογος", коју остављам и у преводу, но мислим да је згодније задржати овај термин за неке специфичне ствари чисто геометриске природе, а за чланове пропорције употребити само неку реч изведену од глагола „одговарати".

[13] У дефиницијама од 12 до 16 Еуклид говори о оним размерама које се могу поставити са четири величине a_1, a_2, a_3, a_4 од којих су величине a_1 и a_3 *претходне*, а a_2 и a_4 *наредне;* према томе две размере $a_1:a_2$ и $a_3:a_4$ треба сматрати као основне. У овим дефиницијама још нема говора о томе да се формирају такозване изведене пропорције. Постојање тих пропорција се утврђује нарочитим ставовима у овој књизи, а у дефиницијама се поставља само номенклатура одговарајућих комбинација.

Према томе од четири величине a_1, a_2, a_3, a_4 можемо саставити две основне или редовне размере

$$a_1:a_2 \text{ и } a_3:a_4$$

Затим према и осталим дефиницијама ове размере

	Пермутоване	$a_1:a_3$	и	$a_2:a_4$
[14]	Обрнуте	$a_2:a_1$	и	$a_4:a_3$
[15]	Састављене	$(a_1+a_2):a_2$	и	$(a_3+a_4):a_4$
[16]	Растављене	$(a_1-a_2):a_2$	и	$(a_3-a_4):a_4$
[17]	Преврнуте	$a_1:(a_1-a_2)$	и	$a_3:(a_3-a_4)$

[18] Ову дефиницију би савременим језиком требало овако формулисати.

Ако имамо два низа величина

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

и

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

и при томе су размере одговарајућих величина једнаке, тј.

$$a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3=\ldots=a_n:b_n,$$

онда је размера једнакоудаљених из првог низа $a_1:a_n$, из другог $b_1:b_n$.

У почетку ове дефиниције стоји: Δι'Ἴσου λόγος. Израз Δι'Ἴσου познат је као специфички грчки израз који значи „на истом отстојању", те, према томе не може бити преведен ни са: Verhältniss aus der Gleichheit (Hauff), ни са: „По равенству отношение“ (Мордухај-Болтовскои). Исто тако је без садржаја и латински (Heiberg), и италијански (F. Enriques—M. T. Zapelloni) израз „ex aequo“.

[19] У Heiberg-ову тексту, којим сам се служио, ове дефиниције нема. Узео сам је из Hauff-ова немачког превода (1797) који се служио грчким текстом, у издању Dov. Gregorii-a 1703 г., и у упоређивао га са текстом Базелског издања Jo. Hervagium-a 1533 г. Очигледно је оправдано присуство ове дефиниције: како се у наредној дефиницији говори о поремећеној пропорцији, треба прво објаснити каква је непоремећена, редовна пропорција.

Дате су величине a_1, a_2, a_3 и друге три величине b_1, b_2, b_3. Према дефиницији имамо ове две редовне пропорције:

$$a_1:a_2=b_1:b_2 \quad \text{и} \quad a_2:a_3=b_2:b_3.$$

[20] Ова дефиниција сама по себи није јасна; она добија потпуно одређен садржај тек у вези са претходном дефиницијом и са теоремом 21 ове књиге, где се она примењује. Од шест величина наведених у претходној дефиницији имамо ове две поремећене пропорције:

$$a_1:a_2=b_2:b_3 \quad \text{и} \quad a_2:a_3=b_1:b_2.$$

У тој Еуклидовиј дефиницији величине a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 имају ове називе:

a_1 – претходна,	b_1 – преостала,
a_2 – наредна,	b_2 – претходна,
a_3 – преостала;	b_3 – наредна,

На основу правила по коме се образују наведене пропорције неки преводиоци преводе грчку реч „Τεταραγμένος“ (неуредан, поремећен) са „унакрсни“ (Eine überkreuzte Proportion — в., напр., C. Thaer).

У коментару ставова прво дајемо садржај става, савременим математичким језиком, а затим доказ теореме са, углавном, Еуклидовим начином расуђивања, но опет изражен савременом симболиком. Излагање вршимо кратко, без сувишних речи са применом ознаке $\therefore$, која значи: следује.

[21] Садржај 1. теореме:

$$a_1 = mb_1, \quad a_2 = mb_2$$

$$\therefore \qquad a_1 + a_2 = m(b_1 + b_2).$$

Ову теорему можемо сматрати као тумачење дистрибутивног закона помоћу операција са дужима.

Доказ. $a_1 = mb_1, \quad a_2 = mb_2$ за $m = 2$

$$\therefore \qquad a_1 = 2b_1, \quad a_2 = 2b_2$$

$$\therefore \qquad a_1 = b_1 + b_1, \quad a_2 = b_2 + b_2$$

$$\therefore \qquad a_1 + a_2 = (b_1 + b_2) + (b_1 + b_2)$$

$$\therefore \qquad a_1 + a_2 = 2(b_1 + b_2) = m(b_1 + b_2).$$

[22] Садржај 2. теореме

$$a_1 = ma_2, \quad a_5 = na_2$$

$$a_3 = ma_4, \quad a_6 = na_4$$

$$\therefore \qquad a_1 + a_5 = ka_2, \quad a_3 + a_6 = ka_4.$$

Доказ. За $m = 3$ и $n = 2$ имамо

$$a_1 = 3a_2, \quad a_5 = 2a_2; \quad a_3 = 3a_4, \quad a_6 = 2a_4$$

$$\therefore \qquad a_1 + a_5 = a_2 + a_2 + a_2 + a_2 + a_2 = 5a_2,$$

$$a_3 + a_6 = a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 = 5a_4$$

$$\therefore \qquad a_1 + a_5 = ka_2, \quad a_3 + a_6 = ka_4.$$

[23] Садржај 3. теореме

$$a_1 = ma_2, \quad a_3 = ma_4$$

$$\therefore \qquad na_1 = ka_2, \quad na_3 = ka_4$$

Доказ. За $m = 3, \ n = 2$

$$a_1 = 3a_2, \quad a_3 = 3a_4$$

$$\therefore \qquad 2a_1 = a_1 + a_1 = 3a_2 + 3a_2 = 6a_2,$$

$$2a_3 = a_3 + a_3 = 3a_4 + 3a_4 = 6a_4$$

$$\therefore \qquad na_1 = ka_2, \quad na_3 = ka_4$$

[24] Садржај 4. теореме. Из

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

$$\therefore \qquad b_1 : c_1 = b_2 : c_2,$$

где су $b_1 = ma_1,\ b_2 = ma_3;\ c_1 = na_2,\ c_2 = na_4.$

Доказ. Од чланова дате пропорције

$$(+) \qquad a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

образујемо ове мултиплуме:

$$b_1 = ma_1 = 2a_1,\ c_1 = na_2 = 3a_2,$$

$$b_2 = ma_3 = 2a_2,\ c_2 = na_4 = 3a_4.$$

Од величина b_1, b_2, c_1, c_2 образујемо нове мултиплуме:

$$pb_1 = 2b_1,\ pb_2 = 2b_2;\ qc_1 = 3c_1,\ qc_2 = 3c_2,$$

који имају вредности

$$pb_1 = pma_1 = 4a_1,\ pb_2 = pma_3 = 4a_3,$$

$$qc_1 = qna_2 = 9a_2,\ qc_2 = qna_4 = 9a_4.$$

Како су то мултиплуми чланова основне пропорције (+), за њих вреде услови

$$pma_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} qna_2,\ pma_3 \overset{>}{\underset{<}{=}} qna_4,$$

а пошто те услове можемо написати и овако

$$pb_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} qc_1,\quad pb_2 \overset{>}{\underset{>}{=}} qc_2,$$

видимо да, према 5. дефиницији, долазимо до пропорције

$$b_1 : c_1 = b_2 : c_2.$$

25 Садржај 5. теореме. Из

$$a_1 = mb_1,\ a_2 = mb_2$$

$$\therefore \qquad a_1 - a_2 = m(b_1 - b_2) \text{ или } mb_1 - mb_2 = m(b_1 - b_2)$$

и према томе одговара дистрибутивном закону за одузимање.

Доказ. Ставимо

$$a_1 - a_2 = mx;$$

одакле, после додавања чланова једначине

$$a_2 = mb_2,$$

добијамо

$$a_1 = m(b_2 + x).$$

Упоређивањем ове једначине са једначином

$$a_1 = mb_1$$

долазимо до једначине

$$b_2 + x = b_1,$$

из које следује

$$x = b_1 - b_2,$$

те, према томе, и једначина

$$a_1 - a_2 = mb_1 - mb_2 = m(b_1 - b_2).$$

[26] Садржај 6. теореме.

Ако је

$$a_1 = mb_1,\ a_2 = mb_2;\ c_1 = nb_1,\ c_2 = nb_2,$$

онда из

$$a_1 - c_1 = kb_1$$

∴ $$a_2 - c_2 = kb_2$$

где је k природни број који може бити и једнак јединици.

Доказ

I. Претпоставимо, прво, да је $k = 1$, дакле

$$a_1 - c_1 = b_1;$$

треба доказати да је и

$$a_2 - c_2 = b_2.$$

Ставимо

$$a_2 - c_2 = x$$

па ћемо имати:

$$c_1 = nb_1,\ c_2 = nb_2,$$

∴ $$c_1 + b_1 = kb_1,\ c_2 + b_2 = kb_2,$$

∴ $$c_2 + b_2 = kb_2,\ c_2 + x = kb_2,$$

∴ $$c_2 + b_2 = c_2 + x,$$

∴ $$x = b_2,$$

∴ $$a_2 - c_2 = b_2.$$

II. Слично се доказује кад је k различито од јединице.

[27] Садржај 7. теореме

Ако је

$$a_1 = a_2,$$

биће

1. $$a_1 : b = a_2 : b,$$

2. $$b : a_1 = b : a_2.$$

1. Из

$$a_1 = a_2$$

∴ $$ma_1 = ma_2.$$

Нека је nb произвољни мултиплум од b, тада из

$$\begin{matrix} > \\ ma_1 = nb \\ < \end{matrix}$$

∴ $$\begin{matrix} > \\ ma_2 = nb, \\ < \end{matrix}$$

па, према 5. дефиницији, имамо

$$a_1 : b = a_2 : b.$$

Слично се доказује и други део теореме.

[28] У вези са последицом треба учинити ову примедбу. У наведеном облику последица има овај садржај: из пропорције

$$a : b = c : d$$

следује пропорција

$$b : a = d : c.$$

Међутим из доказане теореме следују ове пропорције:

$$a_1 : b = a_2 : b,$$
$$b : a_1 = b : a_2,$$

које се односе на специјалну пропорцију са једнаким наредним односно претходним члановима.

Последица је тачна и у својој општој форми, али из доказане теореме следује њена тачност само за наведени специјални случај.

[29] Садржај 8. теореме. Из

$$a > b$$

∴ $$a : c > b : c \text{ и } c : b > c : a.$$

Доказ. У доказу Еуклид разликује два случаја, према вредности разлике $a - b$.

I. $a - b < b$

У овом случају се конструише мултиплум, рецимо,

$$2(a - b) > c.$$

И, после непосредних расуђивања, која кратко можемо формулисати овако: $2(a - b) > c$, $2a - 2b > c$, $2a > 2b + c$, $2a > 2b$, долазимо до закључка

$$2a > 2b.$$

Ако још додамо једнакост

$$4c = 4c,$$

онда на основу дефиниције 7. неједнаких размера, изводимо неједнакост:

$$a : c > b : c.$$

На сличан начин доказује се како други део теореме за овај случај, тако и случај II. кад је $a - b > b$.

[30] Садржај 9. теореме

1. Из $a_1 : b = a_2 : b$ $\therefore$ $a_1 = a_2$,

2. Из $b : a_1 = b : a_2$ $\therefore$ $a_1 = a_2$.

Доказ. Лако је разумљив из Еуклидова текста.

[31] Садржај 10. теореме

1. Из $a_1 : b > a_2 : b$ $\therefore$ $a_1 > a_2$

2. Из $b : a_1 > b : a_2$ $\therefore$ $a_1 < a_2$

Доказ. На основу претходних теорема Еуклид искључује у сваком од наведених случајева две претпоставке: у првом претпоставке $a_1 = a_2$ и $a_1 < a_2$, а у другом $a_1 = a_2$ и $a_1 > a_2$.

[32] Садржај 11. теореме. Из

$$a_1 : a_2 = c_1 : c_2 \text{ и } b_1 : b_2 = c_1 : c_2$$

$$\therefore \quad a_1 : a_2 = b_1 : b_2.$$

Ова теорема јасно показује да Еуклид није сматрао размеру ни за величину, ни за неки објект, јер би тада истинитост теореме непосредно проистицала из прве аксиоме прве књиге: Они (објекти) који су једнаки истом (објекту) једнаки су међусобно.

Доказ. Еуклид искоришћује дефиницију једнакости сваког датог пара размера, наиме

$$ma_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} na_2, \qquad mc_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} nc_2$$

и
$$mb_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} nb_2, \qquad mc_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} nc_2$$

и из тих услова изводи услове

$$ma_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} na_2, \qquad mb_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} nb_2,$$

који доводе до једнакости размера

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2.$$

[33] Садржај 12. теореме. Из

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots, = a_n : b_n$$

$$\therefore \; (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = a_i : b_i,$$

где i може имати вредности 1, 2, ..., n.

Доказ. И ову теорему Еуклид доказује непосредном применом 5. дефиниције, образовањем једнакоструких мултиплума. На овој теореми сасвим јасно се види колико теорија пропорције постаје једноставнија кад размеру сматрамо као количник два броја. У савременом доказу имамо: из

$$a_i : b_i = k$$

$$\therefore \qquad a_i = kb_i$$

$$\therefore \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k \;(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

$$\therefore \qquad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = k = \frac{a_i}{b_i}$$

[34] Садржај 13. теореме. Из

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4, \qquad a_3 : a_4 > a_5 : a_6$$

$$\therefore \qquad a_1 : a_2 > a_5 : a_6$$

Доказ. И при доказу ове теореме Еуклид образује једнакоструке мултиплуме и, применом 5. и 7. дефиниције, доказује теорему; међутим, сматрајући размеру као број, истинитост теореме постаје очигледна.

[35] Садржај 14. теореме. Ако је

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

онда 1. из $a_1 > a_3$ $\therefore$ $a_2 > a_4$

2. из $a_1 = a_3$ $\therefore$ $a_2 = a_4$

3. из $a_1 < a_3$ $\therefore$ $a_2 < a_4$

Доказ. Из

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4 \text{ и } a_1 > a_3$$

$$\therefore \qquad a_1 : a_2 > a_3 : a_2;$$

према томе и

$$a_3 : a_4 > a_3 : a_2$$

$$\therefore \qquad a_4 < a_2 \text{ или } a_2 > a_4.$$

Слично се доказују и остала два случаја.

[36] Садржај 15. теореме. Из

$$a = ma_1 \text{ и } b = mb_1$$

$$\therefore \qquad a_1 : b_1 = a : b.$$

Доказ. Еуклид дели a на m једнаких делова a_1:

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \qquad \text{са } \alpha_i = a_1$$

и

$$b = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m \qquad \text{са } \beta_i = b_1$$

После тога примена 12. теореме доводи до резултата.

[37] Садржај 16. теореме. Из

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

$$\therefore \qquad a_1 : a_3 = a_2 : a_4$$

Грчку реч ἐναλλάξ у тексту теореме превели смо са „пермутоване". Из доказа следује да се ради о размени места унутрашњих чланова пропорције.

Доказ. Од чланова пропорције

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

образујемо мултиплуме

$$A_1 = ma_1, \qquad A_2 = ma_2,$$

$$A_3 = na_3, \qquad A_4 = na_4.$$

Тада је

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{a_1}{a_2} \qquad \frac{A_3}{A_4}=\frac{a_3}{a_4}$$

и према томе имамо

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_3}{A_4}$$

Одатле можемо закључити:

$$\begin{cases} \text{из} & A_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} A_3 \\ \therefore & A_2 \overset{>}{\underset{<}{=}} A_4 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \text{из} & ma_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} na_3 \\ \therefore & ma_2 \overset{>}{\underset{<}{=}} na_3 \end{cases}$$

Ови услови, према 5. дефиницији, доводе до пропорције:

$$a_1 : a_3 = a_2 : a_4$$

[38] Садржај 17. теореме. Из

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

$$\therefore \qquad (a_1 - a_2) : a_2 = (a_3 - a_4) : a_4.$$

Иста теорема алгебарски се може изразити и овако: из

$$(a_1 + a_2) : a_2 = (a_3 + a_4) : a_4$$

$$\therefore \qquad a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

Доказ. Извешћемо доказ теореме у другом облику, који је ближи тексту, а и једноставнији је за расуђивање.

Еуклид оперише са овим мултиплумима:

$$m\ (a_1 + a_2),\ na_2;\ m\ (a_3 + a_4),\ na_4,\ (m+n)\ a_2,\ (m+n)\ a_4$$

Према 5. дефиницији из дате пропорције следује:

$$m(a_1 + a_2) \overset{>}{\underset{<}{=}} (m+n)\ a_2, \qquad m\ (a_3 + a_4) \overset{>}{\underset{<}{=}} (m+n)\ a_4$$

или

$$ma_1 + ma_2 \overset{>}{\underset{<}{=}} ma_2 + na_2, \qquad ma_3 + ma_4 \overset{>}{\underset{<}{=}} ma_4 + na_4$$

одакле, после одузимања ma_2 односно ma_4, добијамо

$$ma_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} na_2, \quad ma_3 \overset{>}{\underset{<}{=}} na_4,$$

а из ових услова увек према 5. дефиницији следује пропорција

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4,$$

што смо хтели да докажемо.

[39] Садржај 18. теореме. Из

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

$$\therefore \quad (a_1 + a_2) : a_2 = (a_3 + a_4) : a_4.$$

Доказ. Ако пропорција коју треба доказати није тачна, онда тачку Z са $Z\Delta = a_4$ (в. слику у тексту) треба заменити другом, тачком десно или леве од ње. Нека, прво, то буде тачка H са $H\Delta < Z\Delta$. Означимо $H\Delta$ са x; тада је $x < a_4$. Тада треба да вреди пропорција:

$$(a_1 + a_2) : a_2 = (a_3 + a_4) : x.$$

Из ове пропорције, на основу претходне теореме, следује

$$a_1 : a_2 = (a_3 + a_4 - x) : x;$$

но имамо и пропорцију

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

одакле, после упоређивања са претходном пропорцијом, имамо

$$(a_3 + a_4 - x) : x = a_3 : a_4.$$

Пошто је први члан $a_3 + a_4 - x$ већи од трећег a_3, јер је $x < a_4$, мора и други члан бити већи од четвртог, тј. $x > a_4$, а то је супротно претпоставци, дакле немогуће.

Теорема се слично доказује и за случај кад се тачка H налази лево од тачке Z.

[40] Садржај 19. теореме. Из

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

$$\therefore \quad (a_1 - a_3) : (a_2 - a_4) = a_1 : a_2.$$

Доказ. Из дате пропорције изводимо пермутовану пропорцију

$$a_1 : a_3 = a_2 : a_4.$$

После тога примењујемо теорему 17. и добијамо

$$(a_1 - a_3) : a_3 = (a_2 - a_4) : a_4.$$

Одавде пермутацијом добивамо

$$(a_1 - a_3):(a_2 - a_4) = a_3 : a_4,$$

а после замене последње размере размером $a_1 : a_2$ долазимо до тражене пропорције.

У последици ове теореме се тврди да из пропорције

$$(a_1 + a_2): a_2 = (a_3 + a_4): a_4$$

следује пропорција

$$a_1 : (a_1 - a_2) = a_3 : (a_3 - a_4),$$

која се зове (деф. 16) преврнута у односу према пропорцији

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4.$$

Еуклидово потврђивање ове последице није непосредно. Инстинитост ове последице лако се потврђује артиметичком методом.

[41] Садржај 20. теореме. Ако имамо шест величина

$$a_1,\ a_2,\ a_3; \qquad b_1,\ b_2,\ b_3$$

и

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2, \qquad a_2 : a_3 = b_2 : b_3$$

онда претпоставкама за једнако удаљене a_1 и a_3 првог низа

$$a_1 > a_3,\ a_1 = a_3,\ a_1 < a_3$$

одговарају претпоставке за једнако удаљене b_1 и b_3 другог низа, и то:

$$b_1 > b_3,\ b_1 = b_3,\ b_1 < b_3.$$

Пре свега приметимо да услове пропорционалности можемо формулисати једноставније, ако искористимо пермутоване пропорције

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Доказ. Из горње две једначине пишемо пропорцију за једнако удаљене чланове

$$a_1 : b_1 = a_3 : b_3$$

или, у пермутованом облику,

$$a_1 : a_3 = b_1 : b_3.$$

Одавде се непосредно закључује да услову, рецимо, $a_1 > a_3$ одговара услов $b_1 > b_3$, па слично и за друге услове.

[42] Садржај 21. теореме. Ако имамо шест величина

$$a_1,\ a_2,\ a_3; \qquad b_1,\ b_2,\ b_3,$$

које су у поремећеној пропорцији, наиме

$$a_1 : a_2 = b_2 : b_3; \qquad a_2 : a_3 = b_1 : b_2,$$

онда претпоставкама за једнако удаљене a_1 и a_3 првог низа

$$a_1 > a_3, \quad a_1 = a_3, \quad a_1 < a_3$$

одговарају претпоставке за једнако удаљене b_1 и b_2 другог низа, и то:

$$b_1 > b_3, \quad b_1 = b_3, \quad b_1 < b_3.$$

Доказ. Узмимо први услов $a_1 > a_3$; тада је и

$$\frac{a_1}{a_2} > \frac{a_3}{a_2}$$

али како је

$$a_1 : a_2 = b_2 : b_3 \qquad \text{и} \qquad a_3 : a_2 = b_2 : b_1$$

биће и

$$\frac{b_2}{b_3} > \frac{b_2}{b_1}$$

Одавде следује да је $b_3 < b_1$ или $b_1 > b_3$, а то је требало потврдити; слично се потврђују и остали услови.

[43] Садржај 22. теореме. Ако имамо неколико величина a_1, a_2, a_3 и других b_1, b_2, b_3 у истом броју и то по две пропорционалне

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \qquad \text{и} \qquad a_2 : a_3 = b_2 : b_3$$

биће и

$$a_1 : a_3 = b_1 : b_3.$$

Доказ. За доказ Еуклид образује мултиплуме

$$ma_1,\ mb_1;\ na_2,\ nb_2;\ ka_3,\ kb_3$$

и поставља према датим пропорцијама ове пропорције

$$ma_1 : na_2 = mb_1 : nb_2, \qquad na_2 : ka_3 = nb_2 : kb_3.$$

Затим, на основу теореме о једнако удаљеним члановима, закључује да из

$$ma_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} ka_3$$

следују услови

$$mb_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} kb_3,$$

а из тих услова, према 5. дефиницији, следује пропорција

$$a_1 : a_3 = b_1 : b_3$$

коју доказујемо.

[44] Садржај 23. теореме. Ако имамо неколико величина a_1, a_2, a_3 и других b_1, b_2, b_3 у истом броју и то по две пропорционалне, али у поремећеној пропорцији

$$a_1 : a_2 = b_2 : b_3, \qquad a_2 : a_3 = b_1 : b_2$$

биће и

$$a_1 : a_3 = b_1 : b_3.$$

Доказ. И за доказ ове теореме Еуклид образује мултиплуме

$$ma_1,\ ma_2,\ mb_1;\ na_3,\ nb_2,\ nb_3,$$

па на основу датих пропорција поставља ове пропорције:

$$ma_1 : ma_2 = nb_2 : nb_3, \qquad ma_2 : na_3 = mb_1 : nb_2$$

и помоћу њих утврђује услове

$$ma_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} na_3, \qquad mb_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} nb_3,$$

а из тих услова следује пропорција коју доказујемо.

[45] Садржај 24. теореме. Из

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4, \qquad a_5 : a_2 = a_6 : a_4$$

$$\therefore \qquad (a_1 + a_5) : a_2 = (a_3 + a_6) : a_4$$

Доказ. Из

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4 \qquad a_5 : a_2 = a_6 : a_4$$

$\therefore$ $a_1 : a_2 = a_3 : a_4$, $a_2 : a_5 = a_4 : a_6$ (обрнута другој)

$\therefore$ $a_1 : a_5 = a_3 : a_6$ (према теореми о једнако удаљеним)

$\therefore$ $(a_1 + a_5) : a_5 = (a_3 + a_6) : a_6$ (према теореми о заједно узетим)

$\therefore$ $(a_1 + a_5) : a_2 = (a_3 + a_6) : a_6$ (према другој пропорцији).

[46] Садржај 25 теореме. Ако је

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

и од ове четири величине a_1 је највећа, а a_4 најмања, онда је

$$(a_1 + a_4) > (a_2 + a_3)$$

Доказ. Из дате пропорције следује пропорција

$$(a_1 - a_3) : (a_2 - a_4) = a_1 : a_2,$$

из које, за $a_1 > a_2$, закључујемо да је и

$$a_1 - a_3 > a_2 - a_4$$

Ако сад тим неједнаким величинама додамо једнаке

$$a_3 + a_4 = a_3 + a_4$$

добићемо неједнакост

$$a_2 + a_4 > a_2 + a_3,$$

коју доказујемо.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА VI

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 6

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ШЕСТА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1955

Уредник
дописник Р. КАШАНИН
Управник Математичког института САН

Приказано на IX скупу
Одељења природно-математичких наука
од 3-VII-1953 г.

Штампа Графичко предузеће „Академија“ — Београд, Космајска ул. 28

САДРЖАЈ ШЕСТЕ КЊИГЕ

ПРЕДГОВОР

Шеста књига Еуклидових елемената претставља развитак теорије пропорционалности у применама на дужи и површине праволиниских слика. Решен је и низ важних конструктивних задатака. Материјал ове књиге је толико важан да знатан део тог материјала још и сад улази и у најкраће средњошколске уџбенике елементарне геометрије.

Овом књигом се завршава планиметриски део Еуклидових елемената. Књиге од седме до десете посвећене су аритметици и теорији ирационалних бројева. Књиге XI—XIII садрже Еуклидову стереометрију. Врло кратке четрнаеста и петнаеста стереометриска књига, које се обично стављају као додатак, не припадају Еуклиду, како је то било показано већ у XVI столећу.

При изради и ове књиге су ми помогли В. В. Мишковић и Т. П. Анђелић па им изјављујем захвалност.

А. Б.

ТЕКСТ

Дефиниције

1. Праволиниске слике су сличне, ако су им углови појединачно[1] једнаки и краци једнаких углова пропорционални.[2]

(2. Слике су реципрочне, ако код сваке две слике има како претходних тако и наредних размера.)[3]

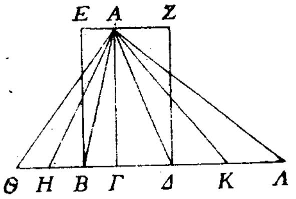
3. Каже се да је права (дуж) подељена у крајњој и средњој размери (непрекидно) ако цела права (дуж) стоји према већем делу као већи део према мањем.[4]

4. Висина сваке слике је нормала спуштена из врха слике на основицу.[5]

(5. Каже се да је размера састављена од размера ако после међусобног множења вредности тих размера добивамо нешто.)[6]

1.

Троугли и паралелограми исте висине[7] се односе један према другом као основице.



Нека троугли АВГ, АГΔ и паралелограми ЕГ, ГZ имају исту висину АГ. Тврдим да је основица ВГ према основици ГΔ као троугао АВГ према троуглу АГΔ и паралелограм ЕГ према паралелограму ГZ.

Заиста, нека се ВΔ продужи на обе стране ка тачкама Θ и Λ, одмери колико се хоће дужи ВН, НΘ једнаких основици ВГ и колико се хоће дужи ΔК, КΛ једнаких основици ГΔ, па повуку АН, АΘ, АК, АΛ.

Пошто су дужи ГВ, ВН, НΘ, међусобно једнаке, једнаки су међусобно и троугли АΘН, АНВ, АВГ. Према томе колики је основица ΘГ мултиплум основице ВГ, толики ће бити троугао АΘГ мултиплум троугла АВГ. Из истих разлога, колики је мултиплум основица ΛГ основице ГД, толики је мултиплум и троугао АΛГ троугла АГΔ. И ако је основица ΘГ једнака основици ГΛ, онда је и троугао АΘГ једнак троуглу АГΛ, а ако је основица ΘГ већа од основице ГΛ, онда је троугао АΘГ већи од троугла АГΛ, а ако је мања, онда је мањи. Према томе од четири величине, које имамо, две основице ВГ, ГΔ и два троугла АВГ, АГΔ, узети су исти мултиплуми и од основице ВГ и од троугла АВГ, и то основица ΘГ и троугао АΘГ, а од основице ВГ и од троугла АΔГ произвољни једнаки мултиплуми основица ΛГ и троугао АΛГ. А доказано је да ако је основица ΘГ већа од основице ГΛ, онда је троугао АΘГ већи од троугла АΛГ, ако је једнака, једнак, а ако је мања, мањи. И тако је основица ВГ према основици ГΔ као троугао АВГ према троуглу АГΔ.

И пошто је паралелограм ЕГ двоструки троугао АВГ, а паралелограм ZГ двоструки троугао АГΔ, истоструки мултиплуми су у истој размери као и делови им, то се паралелограм ЕГ односи према паралелограму ZГ као троугао АВГ према троуглу АГΔ. А доказано је да се основица ВГ односи према ГΔ, као троугао АВГ према троуглу АГΔ, као и да се троугао АВГ односи према троуглу АГΔ, као паралелограм ЕГ према паралелограму ГZ, па према томе се и основица ВГ односи према основици ГΔ, као паралелограм ЕГ према паралелоргаму ZГ.

На овај начин, троугли и паралелограми исте висине се односе један према другом као основице. А то је требало доказати[8].

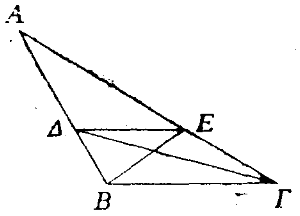
2.

Ако је у троуглу повучена нека права паралелно једној од страна, та права сече остале стране пропорционално; и ако су стране троугла пресечене пропорционално, права што спаја пресечене тачке паралелна је преосталој страни троугла.

Заиста, нека је у троуглу АВГ повучена права ΔЕ паралелно ВГ, једној од страна троугла. Тврдим да је ВΔ према ΔА као ГЕ према ЕА.

Повуку се ВЕ, ГΔ.

Троугао ВДЕ је једнак троуглу ГΔЕ јер они имају исте основице ΔЕ и између истих су паралелних ΔЕ, ВГ. А троугао АΔЕ је нешто друго. Како су сад једнаке величине према истој величини у истој размери, и троугао ВΔЕ је према троуглу АΔЕ као троугао ГΔЕ према троуглу АΔЕ. Али троугао ВΔЕ је према троуглу АΔЕ као ВΔ према ΔА, пошто имају исту висину, нормалу спуштену из Е на АВ, и односе се као основице. Из истих разлога троугао ГΔЕ је према троуглу АΔЕ као ГЕ према ЕА. И тако је ВΔ према ΔА, као што је ГЕ према ЕА.



Нека су сад стране АВ и АГ троугла АВГ пресечене пропорционално, тј. да је ВΔ према ΔА као ГЕ према ЕА, и нека је повучено ΔЕ. Тврдим да је права ΔЕ паралелна правој ВГ.

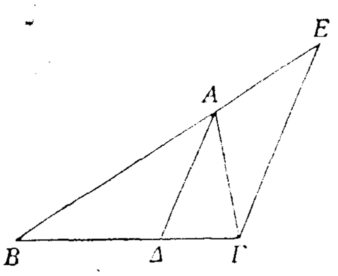
Заиста, на основу исте конструкције, пошто је ВΔ према ΔА као ГЕ према ЕА, а ВΔ према ΔА као што троугао ВΔЕ према троуглу АΔЕ, и ГЕ је према ЕА као троугао ГΔЕ према троуглу АΔЕ, закључујемо да је троугао ВΔЕ према троуглу АΔЕ као троугао ГΔЕ према троуглу АΔЕ. Према томе сваки од троуглова ВΔЕ и ГΔЕ је у истој размери према АΔЕ. Значи, дакле, троугао ВΔЕ једнак је троуглу ГΔЕ. А при томе имају исту основицу ΔЕ. Како једнаки троугли са истом основицом леже између истих паралелних, закључујемо да је ΔЕ паралелно ВГ.

На овај начин, ако је у троуглу повучена нека права паралелно једној од страна, та права сече остале стране пропорционално; и ако су стране троугла пресечене пропорционално, права што спаја пресечне тачке паралелна је преосталој страни троугла. А то је требало доказати.[9]

3.

Ако располовимо угао троугла и права што полови угао пресече и основицу, онда су отсечци основице у истој размери као и две остале троуглове стране. И ако су отсечци основице у истој размери као и две остале троуглове стране, онда права повучена из темена ка деоној тачки полови угао троугла.

Нека троугао буде ΑΒΓ и нека права ΑΔ полови угао ΒΑΓ. Тврдим, да је ΒΔ према ΓΔ као ΒΑ према ΑΓ.



Заиста, повуцимо кроз Γ праву ΓΕ паралелно са ΔΑ и нека се продужење ΒΑ са њом сретне у тачки Ε.

Пошто су праве ΑΔ, ΕΓ паралелне, а права ΑΓ је трансверзала, угао ΑΓΕ једнак је углу ΓΑΔ. Али по претпоставци је угао ΓΑΔ једнак углу ΒΑΔ. И на тај начин је угао ΒΑΔ једнак углу ΑΓΕ. Даље, пошто су праве ΑΔ, ΕΓ паралелне, а права ΒΑΕ трансверзала, спољашњи угао ΒΑΔ једнак је унутрашњем углу ΑΕΓ. А доказано је да је угао ΑΓΕ једнак углу ΒΑΔ. Па према томе је и угао ΑΓΕ једнак углу ΑΕΓ; а тада је и страна ΑΕ једнака страни ΑΓ. И пошто је у троуглу ΒΓΕ паралелно једној од страна ΕΓ повучена права ΑΔ, постоји пропорција: ΒΔ се односи према ΔΓ као ΒΑ према ΑΕ, али је ΑΕ једнако ΑΓ, па према томе је ΒΔ према ΔΓ као ΒΑ према ΑΓ.

Нека је сад ΒΔ према ΔΓ као ΒΑ према ΑΓ и нека је повучена права ΑΔ. Тврдим, да права ΑΔ полови угао ΒΑΓ.

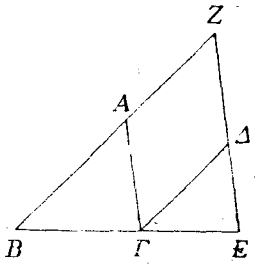
Заиста, на основу исте конструкције, пошто је ΒΔ према ΔΓ као ΒΑ према ΑΓ, а ΒΔ према ΔΓ као што ΒΑ према ΑΕ, а на основу тога што је у троуглу ΒΓΕ повучена права ΑΔ паралелно ΕΓ и према томе је ΒΑ према ΑΓ као ΒΑ према ΑΕ, закључујемо да је ΑΓ једнако ΑΕ, те је и угао ΑΕΓ једнак углу ΑΓΕ. Али угао ΑΕΓ је једнак спољашњем углу ΒΑΔ, а угао ΑΓΕ једнак је унакрсном углу ΓΑΔ, те је према томе угао ΒΑΔ једнак углу ΓΑΔ; значи да права ΑΔ полови угао ΒΑΓ.

На овај начин, ако располовимо угао троугла и права што полови угао пресече и основицу, онда су отсечци основице у истој размери као и две остале троуглове стране. И ако су отсечци основице у истој размери као и две остале троуглове стране, онда права повучена из темена ка деоној тачки полови угао троугла. А то је требало доказати.[10]

4.

Код троуглова са једнаким угловима су стране које образују једнаке углове пропорционалне, и одговарају једна другој оне стране што леже наспрам једнаких углова.

Нека су троугли АВГ и ΔГЕ са једнаким угловима, угао АВГ једнак углу ΔГЕ, угао ВАГ углу ГΔЕ и угао АГВ углу ГЕΔ. Тврдим, да су код троуглова АВГ и ΔГЕ стране које образују једнаке углове пропорционалне и да једна друго одговарају баш оне стране што леже наспрам једнаких углова.



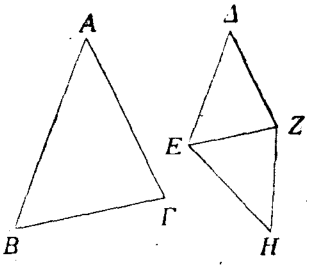
Ставимо ВГ на исту праву са ГЕ. Пошто је збир углова АВГ и АГВ мањи од два права угла, а угао АГВ једнак углу ΔЕГ, биће и збир углова АВГ и ΔЕГ мањи од два права угла; па се тада ВА и ЕΔ, продужене, сусрећу. Нека оне буду продужене и нека се сусрећу у Z.

И пошто је угао ΔГЕ једнак углу АЕГ, ВZ и ГΔ су паралелне. Даље, пошто је угао АГВ једнак углу ΔЕГ, паралелне су и АГ и ZЕ. Према томе је ZАГΔ паралелограм. Због тога је ZА једнако ΔГ, а АГ једнако ZΔ. И пошто је АГ права повучена у троуглу ZВЕ паралено страни ZЕ, односиће се ВА према АZ као ВГ према ГЕ, а како је АZ једнако ГΔ, то је ВА према ГΔ као ВГ према ГЕ и, после промене реда, АВ према ВГ као ΔГ према ГЕ. Даље, пошто су праве ГΔ и ВZ паралелне, односиће се ВГ према ГЕ као ZΔ према ΔЕ, али ZΔ је једнако АГ, те је ВГ према ГЕ као АГ према ΔЕ и, после промене реда, ВГ према ГА као ГЕ према ЕΔ. Према томе је доказано да је АВ према ВГ као ΔГ према ГЕ, и да је ВГ према ГА као ГЕ према ЕΔ, па према размери једнако удаљених ВА је према АГ као ГΔ према ΔЕ.

На овај начин, код троуглова са једнаким угловима су стране које образују једнаке углове пропорционалне, и одговарају једна другој оне стране што леже наспрам једнаких углова. А то је требало доказати.[11]

5.

Ако два троугла имају пропорционалне стране, они имају и једнаке углове и једнаки углови леже наспрам одговарајућих страна.



Нека два троугла АВГ и ΔЕZ имају пропорционалне стране, да је АВ према ВГ као ΔЕ према ЕZ, и ВГ према ГА као ЕZ према ZΔ и усто је ВА према АГ као ЕΔ према ΔZ. Тврдим, да троугао АВГ има углове једнаке угловима троугла ΔЕZ и да троугли имају једнаке оне углове који се налазе наспрам одговарајућих страна, угао АВГ углу ΔЕZ, угао ВГА углу ЕZΔ и угао ВАГ углу ЕΔZ.

Заиста, конструишимо на правој ЕZ у њеним тачкама Е и Z угао ZЕН једнак углу АВГ и угао ЕZН једнак углу АГВ; тада је и преостали угао код Н једнак преосталом углу код А.

Према томе троугли ЕНZ и АВГ имају једнаке углове. Значи да су стране које образују једнаке углове троуглова АВГ и ЕНZ пропорционалне и одговарају једне другој баш оне стране које леже наспрам једнаких углова. На тај начин је АВ према ВГ као НЕ према ЕZ. Али по претпоставци АВ је према ВГ као ΔЕ према ЕZ, па на основу тога је ΔЕ према ЕZ као НЕ према ЕZ. Значи свака од дужи ΔЕ и НЕ је у истој размери према ЕZ, те је према томе ΔЕ једнако НЕ. Из истих разлога је и ΔZ једнако НZ. На тај начин пошто је ΔЕ једнако ЕН, а ЕZ је заједничко биће две дужи ΔЕ и ЕZ једнаке двема дужима НЕ, ЕZ. А основица ΔZ једнака је основици ZН. Те закључујемо да је угао ΔЕZ једнак углу НЕZ, троугао ΔЕZ једнак троуглу НЕZ, па и остали углови једнаки су осталим угловима, баш они што леже наспрам једнаких страна. На овај начин је угао ΔZЕ једнак углу НZЕ и угао ЕΔZ углу ЕНZ. А пошто је угао ZЕΔ једнак углу НЕZ, а угао НЕZ једнак углу АВГ, биће и угао АВГ једнак углу

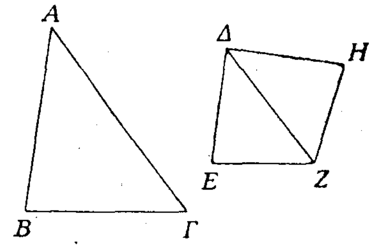
ΔΕΖ. Из истих разлога је и угао ΑΓΒ једнак углу ΔΕΖ и угао код Α једнак углу код Δ. Дакле, троугли ΑΒΓ и ΔΕΖ имају једнаке углове.

На овај начин, око два троугла имају пропорционалне стране, они имају и једнаке углове и једнаки углови леже наспрам одговарајућих страна. А то је требало доказати.[12]

6.

Ако два троугла имају по један угао једнак и стране које образују једнаке углове пропорционалне, троугли имају једнаке углове и једнаки су баш они углови који леже наспрам одговарајућих страна.

Нека два троугла ΑΒΓ и ΔΕΖ имају по један угао једнак, угао ΒΑΓ једнак углу ΕΔΖ и стране које образују тај угао пропорционалне, дакле ΒΑ се односи према ΑΓ као ΕΔ према ΔΖ. Тврдим да троугли ΑΒΓ и ΔΕΖ имају једнаке углове и угао ΑΒΓ једнак је углу ΔΕΖ, па и угао ΑΓΒ углу ΔΖΕ.



Заиста, конструишимо на правој ΔΖ у њеним тачкама Δ и Ζ угао ΖΔΗ, једнак сваком од углова ΒΑΓ и ΕΔΖ и угао ΔΖΗ једнак углу ΑΓΒ. Тада је и преостали угао код Β једнак преосталом углу код Η.

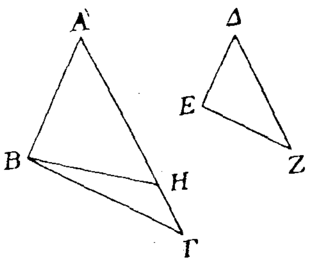
На овај начин троугли ΑΒΓ и ΔΗΖ имају једнаке углове. Због тога је ΒΑ према ΑΓ као ΗΔ према ΔΖ. А по претпоставци је ΒΑ према ΑΓ као ΕΔ према ΔΖ. Те према томе је ΕΔ према ΔΖ као ΗΔ према ΔΖ. На тај начин је ΕΔ једнако ΔΗ, а ΔΖ је заједничко. Две дужи ΕΔ и ΔΖ су једнаке двема дужима ΗΔ и ΔΖ. И угао ΕΔΖ је једнак углу ΗΔΖ. Према томе је и основица ΕΖ једнака основици ΗΖ, и троугао ΔΕΖ је једнак троуглу ΗΔΖ, и остали углови једнаки су осталим угловима, што леже наспрам једнаких страна. Према томе је угао ΔΖΗ једнак углу ΔΖΕ и угао ΔΗΖ углу ΔΕΖ. Али угао ΔΖΗ је једнак углу ΑΓΒ; и према томе је угао ΑΓΒ једнак углу ΔΖΕ. А по претпоставци је угао ΒΑΓ једнак углу

ΕΔΖ; па према томе је и преостали угао код В једнак преосталом углу код Е. И тако троугли АВГ и ΔΕΖ имају једнаке углове.

На овај начин, ако два троугла имају по један угао једнак и стране које образују једнаке углове пропорционалне, троугли имају једнаке углове и једнаки су баш они углови који леже наспрам одговарајућих страна. А то је требало доказати.[18]

7.

Ако два троугла имају по један угао једнак и стране које образују друге углове пропорционалне, а сваки од преосталих углова је или мањи или не мањи од правог, троугли имају једнаке углове и то баш оне углове, чији су краци пропорционални.



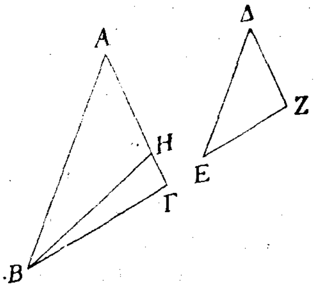
Нека два троугла АВГ и ΔΕΖ имају по један угао једнак, угао ВАГ једнак углу ΕΔΖ и стране које образују друге углове АВГ и ΔΕΖ пропорционалне, АВ је према ВГ као ΔΕ према ΕΖ, а од осталих углова при Г и Ζ нека, прво, сваки буде мањи од правог. Тврдим, да троугли АВГ и ΔΕΖ имају једнаке углове, наиме угао АВГ једнак је углу ΔΕΖ и преостали угао код Г једнак је преосталом углу код Ζ.

Заиста, ако углови АВГ и ΔΕΖ нису једнаки, један је од њих већи. Нека буде већи угао АВГ, па конструишимо на правој АВ и то код њене тачке В угао АВН једнак углу ΔΕΖ.

Пошто је угао код А једнак углу код Δ, а и углови АВН и ΔΕΖ су једнаки, и преостали угао АНВ једнак је преосталом углу ΔΖΕ. Према томе троугли АВН и ΔΕΖ имају једнаке углове. На тај начин АВ је према ВН као што ΔΕ према ΕΖ. А по претпоставци ΔΕ је према ΕΖ као АВ према ВГ. Према томе је АВ у истој размери према свакој од страна ВГ и ВН, што значи да је ВГ једнако ВН. Па и угао код Г једнак је углу ВНГ. Али, по претпоставци је, угао код Г мањи од правог, те значи и угао ВНГ је мањи од правог, па према томе је суседни му угао АНВ већи од правог. А доказано је да је он једнак углу код Z, те је према томе и угао Z већи од правог. А по претпоставци је он мањи од правог, што је апсурдно. Према томе угао АВГ није неједнак углу ΔЕZ. Значи, он је једнак. Угао код А је такође једнак углу код Δ, па према томе и преостали угао код Г једнак је углу код Z. На овај начин троугли АВГ и ΔЕZ имају једнаке углове.

Претпоставимо даље да ниједан од углова код Г и Z није мањи од правог. Тврдим поново, да и тада троугли АВГ и ΔЕZ имају једнаке углове.

Заиста, помоћу исте конструкције и на сличан начин се доказује да је ВГ једнако ВН. На тај начин је угао код Г једнак углу ВНГ. Угао код Г није мањи од правог; па према томе није мањи од правог ни угао ВНГ. На тај начин троугао ВНГ има два угла који нису мањи од правог, а то је немогуће. Значи угао ВНГ није неједнак углу ΔЕZ, он је једнак. А угао код А је једнак углу код Δ. Па према томе је и преостали угао код Г једнак углу код Z, те тако троугли АВГ и ΔЕZ имају једнаке углове.

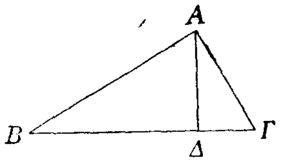


На овај начин, ако два троугла имају по један угао једнак и стране које образују друге углове пропорционалне, а сваки од преосталих углова је или мањи или не мањи од правог, троугли имају једнаке углове и то баш оне углове чији су краци пропорционални. А то је требало доказати.[14]

8.

Ако је у правоуглом троуглу из правог угла повучена нормала на основицу, троугли уз нормалу слични су целом троуглу и међу собом.

Заиста, пошто су углови ВАГ и АΔВ једнаки, јер је сваки прав, а углови АВГ и АВΔ код В заједнички за оба троугла, и преостали угао АГВ једнак је преосталом углу ВАΔ. Због тога се ВГ, наспрам правог угла троугла АВГ, односи према ВА, што лежи наспрам правог угла троугла АВΔ, као АВ, наспрам угла код Г троугла АВГ, према ВΔ, што лежи наспрам једнаког угла ВАΔ троугла АВΔ, а и као што је АГ према АΔ, што лежи наспрам угла код В, који је заједнички за оба троугла. Према томе троугли АВГ и АВΔ имају једнаке углове и стране које образују једнаке углове пропорционалне. А то значи до је троугао АВГ сличан троуглу АВΔ. Исто тако се доказује да је троугао АΔГ сличан троуглу АВГ. Према томе је сваки од троуглова АВΔ и АΔГ сличан целом троуглу АВГ.



А тврдим још и да су троугли АВΔ и АΔГ слични и међу собом.

Заиста, пошто је прав угао ВΔА једнак правом углу АΔГ, а доказано је да је угао ВАΔ једнак углу код Г, према томе и преостали угао код В је једнак углу ΔАГ, троугли АВΔ, и АΔГ имају једнаке углове. Због тога се страна ВΔ троугла АВΔ, наспрам угла ВАΔ, односи према страни ΔА троугла АΔГ, наспрам угла код Г, који је једнак углу ВАΔ, као иста страна АΔ троугла АВΔ, наспрам угла код В, према ΔГ, наспрам угла ΔАГ троугла АΔГ, једнаког углу код В, и још као ВА према АГ наспрам правих углова. Тако је троугао АВΔ сличан троуглу АΔГ.

На овај начин, ако је у правоуглом троуглу из правог угла повучена нормала на основицу, троугли уз нормалу слични су целом троуглу и међу собом. [А то је требало доказати.][15]

Последица

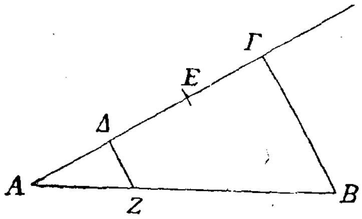
Из овог је јасно, да ако је у правоуглом троуглу из правог угла повучена нормала на основицу, онда је повучена (нормала) средња пропорционала отсечака основице. А то је требало доказати. [Сем тога је страна, што лежи уз један отсечак основице, средња пропорционала основице и тог отсечка.]

9.

Од дате дужи отсећи тражени део.

Нека је дата дуж АВ. Треба од АВ отсећи тражени део.

Нека се тражи трећи део. Повуцимо кроз тачку А праву АГ под произвољним углом према АВ, узмимо на АГ произвољну тачку Δ, конструишимо ΔЕ и ЕГ једнаке АΔ, спојимо В са Г и кроз Δ повуцимо праву ΔZ паралелну са ВГ.



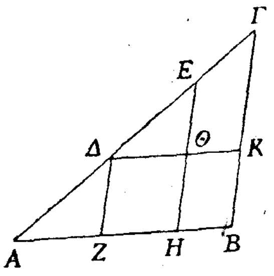
Пошто је сад у троуглу АВГ повучена права ZΔ паралелно једној од његових страна ВГ, постоји пропорција: ГΔ према ΔА, као ВZ према ZА. Али ГΔ је двоструко ΔА, па је и ВZ двоструко ZА, а ВА је троструко АZ.

На овај начин је од дате дужи АВ отсечен трећи део АZ. А то је требало извести.

10.

Дату неподељену дуж поделити слично датој подељеној дужи.

Нека је АВ дата неподељена дуж, а дуж АГ подељена тачкама Δ и Е; поставимо их тако да образују произвољан угао и спојимо Г са В, па кроз тачке Δ и Е повуцимо ΔZ и ЕН паралелно ВГ, а кроз Δ праву ΔΘК паралелно АВ.

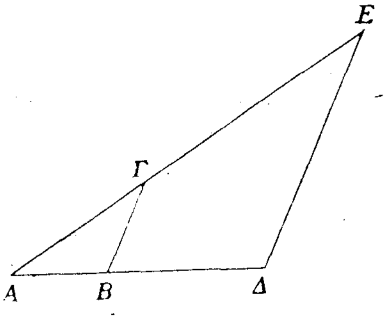


Како је свака од слика ZΘ и ΘВ паралелограм, па је ΔΘ једнако ZН и ΘК једнако НВ. А пошто је у троуглу ΔКГ права ΘЕ повучена паралелно страни КГ, биће ГЕ према ЕΔ као КΘ према ΘΔ. Али је КΘ једнако ВН, а ΘΔ једнако НZ. Према томе се ГЕ односи према ЕΔ као ВН према НZ. Даље, пошто је у троуглу АНЕ права ZΔ повучена паралелно страни НЕ, то је ЕΔ према ΔА као НZ према ZА. А доказано је да је ГЕ према ЕΔ као ВН према НZ. Према томе је ГЕ према ЕΔ као ВН према НZ, те и ЕΔ према ΔА, као НZ према ZА.

На овај начин, дата неподељена дуж АВ је подељена слично датој подељеној дужи. А то је требало извести.

11.

За две дате дужи наћи трећу пропорционалу.



Нека ВГ и АГ буду две дате дужи; конструишимо од њих произвољан угао. Треба наћи за ВА и АГ трећу пропорционалу. Продужимо их ка тачкама Δ и Е и конструишимо ВΔ једнако АГ, па спојимо тачке В и Г и кроз Δ повуцимо праву ΔЕ паралелно ВГ.

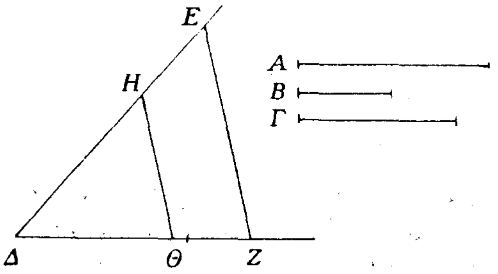
Пошто је сад у троуглу АΔЕ права ВГ повучена паралелно једној од страна ΔЕ, постоји пропорција: АВ према ВΔ као АГ према ГЕ. А ВΔ је једнако АГ. Па је према томе АВ према АГ као АГ према ГЕ.

На овај начин је за две дате дужи АВ и АГ одређена трећа пропорционала ГЕ. А то је требало извести.[16]

12.

За три дате дужи наћи четврту пропорционалу.

Нека су дате три дужи А, В, Г. Треба за А, В, Г наћи четврту пропорционалу.



Конструишимо две праве, ΔЕ и ΔZ, тако да образују произвољан угао ЕΔZ. Одмеримо ΔН једнако А, НЕ једнако В и још ΔΘ једнако Г. Спојимо Н са Θ и кроз Е повуцимо ЕZ паралелно НΘ.

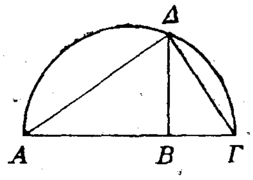
Пошто је сад у троуглу ΔEZ права HΘ повучена паралелно EZ, односиће се ΔH према HE као ΔΘ према ΘZ. Али је ΔH једнако A, HE једнако B и ΔΘ једнако Г, те је A према B као Г према ΘZ.

На овај начин је за три дужи A, B, Г конструисана четврта пропорционала ΘZ. А то је требало извести.

13.

За две дате дужи наћи средњу пропорционалу.

Нека су дате две дужи AB и BГ. Треба за AB и BГ наћи средњу пропорционалу.



Поставимо их (узастопце) на правој, нацртајмо над AГ полукруг AΔГ, повуцимо кроз тачку B праву BΔ управно на AГ и спојимо Δ са A и са Г.

Пошто је угао AΔГ у полукругу, он је прав. А како је у правоуглом троуглу AΔГ из правог угла повучена нормала ΔB на основици, ΔB је средња пропорционала између отсечака основице AB и BГ.

На овај начин је за две дате праве AB и BГ конструисана средња пропорционала ΔB. А то је требало извести.

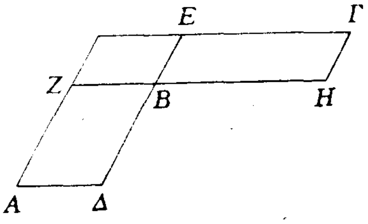
14.

Код једнаких паралелограма са једнаким угловима стране које образују једнаке углове су обрнуто пропорционалне; а и паралелограми са једнаким угловима и обрнуто пропорционалним странама које образују једнаке углове једнаки су.

Нека су AB и BГ једнаки паралелограми са једнаким угловима код B; конструишимо на истој правој ΔB и BE, па ће и ZB, BH бити на истој правој. Тврдим да су код паралелограма AB и BГ стране које образују једнаке углове обрнуто пропорционалне, наиме да се ΔB односи према BE као HB према BZ.

Заиста допунимо слику паралелограмом ZE. Пошто је сад паралелограм AB једнак паралелограму BГ, а ZE је неки други (паралелограм), односиће се AB према ZE као BГ према ZE.

Али је АВ према ZЕ као ΔВ према ВЕ, а ВГ према ZЕ као НВ према ВZ. Према томе је и ΔВ према ВЕ као НВ према ВZ. На тај начин стране паралелограма АВ и ВГ које образују једнаке углове су обрнуто пропорционалне.



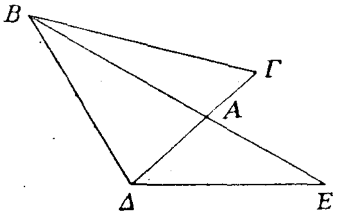
Нека је сад ΔВ према ВЕ као НВ према ВZ. Тврдим да је паралелограм АВ једнак паралелограму ВГ.

Заиста, пошто се ΔВ односи према ВЕ као НВ према ВZ, а ΔВ је према ВЕ као паралелограм АВ према паралелограму ZЕ, и НВ је према ВZ као паралелограм ВГ према паралелограму ZЕ, па је стога и АВ према ZЕ као ВГ према ZЕ. Одавде следује да је паралелограм АВ једнак паралелограму ВГ.

На овај начин, код једнаких паралелограма са једнаким угловима стране које образују једнаке углове су обрнуто пропорционалне; а и паралелограми са једнаким угловима и обрнуто пропорционалним странама које образују једнаке углове једнаки су. А то је требало доказати.

15.

Код једнаких троуглова са по једним једнаким углом стране које образују једнаке углове су обрнуто пропорционалне; и троугли са по једним једнаким углом са обрнуто пропорционалним странама које образују те углове једнаки су.



Нека су АВГ, АΔЕ два троугла са једнаким угловима ВАГ и ΔАЕ. Тврдим да су стране које образују једнаке углове троуглова АВГ и АΔЕ обрнуто пропорционалне, тј. ГА се односи према АΔ као ЕА према АВ.

Заиста, конструишимо на истој правој ГА и АΔ, тада ће и права ЕА бити на истој правој са АВ; и спојимо В са Δ.

Пошто је сада троугао АВГ једнак троуглу АΔЕ, а ВАΔ неки други (троугао), онда се троугао ГАВ односи према троуглу ВАΔ као троугао ЕАΔ према троуглу ВАΔ. Али је ГАВ према ВАΔ као ГА према АΔ, и ЕАΔ према ВАΔ као ЕА према АВ. Према томе је и ГА према АΔ као ЕА према АВ. На тај начин стране троуглова АВГ и АΔЕ које образују једнаке углове обрнуто су пропорционалне.

Нека сад стране троуглова АВГ и АΔЕ буду обрнуто пропорционалне, тј. нека се ГА односи према АΔ као ЕА према АВ. Тврдим да је троугао АВГ једнак троуглу АΔЕ.

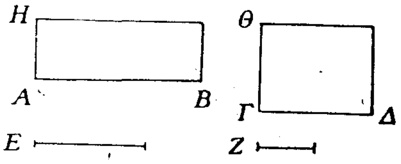
Заиста, спојимо поново В са Δ, па како се ГА односи према АΔ као ЕА према АВ, а ГА је према АΔ као што троугао АВГ према троуглу ВАΔ, то је троугао АВГ према троуглу ВАΔ као троугао ЕАΔ према троуглу ВАΔ. Према томе је сваки од АВГ и ЕАΔ према истом ВАΔ у истој размери, што значи да је троугао АВГ једнак троуглу ЕАΔ.

На овај начин, код једнаких троуглова са по једним једнаким углом стране које образују једнаке углове су обрнуто пропорционалне; и троугли са по једним једнаким углом са обрнуто пропорционалним странама које образују те углове једнаки су. А то је требало доказати.[17]

16.

Ако су четири дужи пропорционалне, правоугаоник обухваћен крајњим (дужима) једнак је правоугаонику обухваћеном средњима (дужима); и ако је правоугаоник, обухваћен крајњим, једнак правоугаонику обухваћеном средњим, те четири дужи су пропорционалне.

Нека су четири дужи АВ, ГΔ, Е, Z пропорционалне, односиће се АВ према ГΔ као Е према Z. Тврдим, да је правоуганоик обухваћен дужима АВ и Z једнак правоугаонику обухваћеном дужима ГΔ и Е.



Заиста, повуцимо кроз тачке А и Г праве АН и ГΘ управно на праве АВ и ГΔ и одмеримо АН једнако Z, ГΘ једнако Е и допунимо паралелограме ВН и ΔΘ.

Како је AB према ГΔ као E према Z, а E је једнако ГΘ и Z једнако AH, то је и AB према ГΔ као ГΘ према AH. Према томе су код паралелограма BH и ΔΘ стране које образују једнаке углове обрнуто пропорционалне. Али паралелограми са једнаким угловима, чије су стране које образују једнаке углове обрнуто пропорционалне, једнаки су. Према томе паралелограм BH једнак је паралелограму ΔΘ. Али је BH правоугаоник обухваћен дужима AB и Z, јер је AH једнако Z, а ΔΘ је правоугаоник обухваћен дужима ГΔ и E, јер је ГΘ једнако E. Према томе је правоугаоник са AB и Z једнак правоугаонику са ГΔ и E.

Нека је сад правоугаоник са AB и Z једнак правоугаонику са ГΔ и E. Тврдим да су ове четири дужи пропорционалне, то јест AB према ГΔ као E према Z.

Заиста, на основу исте конструкције, пошто је (правоугаоник) са AB и Z једнак (правоугаонику) са ГΔ и E, а (правоугаоник) са AB и Z је BH, јер је AH једнако Z, и (правоугаоник) са ГΔ и E је ΔΘ, јер је ГΘ једнако E, то је (правоугаоник) BH једнак (правоугаонику) ΔΘ; а имају и једнаке углове. А код једнаких паралелограма са једнаким угловима су стране које образују једнаке углове обрнуто пропорционалне. Према томе је AB према ГΔ као ГΘ према AH; али је ГΘ једнако E и AH једнако Z, што значи да је AB према ГΔ као E према Z.

На овај начин, ако су четири дужи пропорционалне, правоугаоник обухваћен крајњим (дужима) једнак је правоугаонику обухваћеном средњим (дужима); и ако је правоугаоник, обухваћен крајњим, једнак правоугаонику обухваћеном средњим, те четири дужи су пропорционалне. А то је требало доказати.[18]

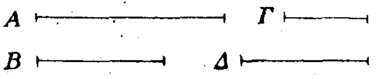
17.

Ако су пропорционалне три дужи, правоугаоник обухваћен крајњим једнак је квадрату над средњом дужи; и ако је правоугаоник обухваћен крајњим једнак квадрату над средњом дужи, три дужи су пропорционалне.

Нека су три дужи A, B, Г пропорционалне, дакле се A односи према B као B према Г. Тврдим да је правоугаоник обухваћен са A и Г једнак квадрату над B.

Одмеримо Δ једнако В.

Пошто је А према В као В према Г, а В је једнако Δ, то је и А према В као Δ према Г. Али ако су четири дужи пропорционалне, биће правоугаоник обухваћен крајњима једнак правоугаонику са средњима. Па је према томе правоугаоник са А и Г једнак правоугаонику са В и Δ. Али правоугаоник са В и Δ је квадрат над В, јер је В једнако Δ. На тај начин је правоугаоник са А и Г једнак квадрату над В.



Нека је сад правоугаоник са А и Г једнак квадрату над В. Тврдим да се А односи према В као В према Г.

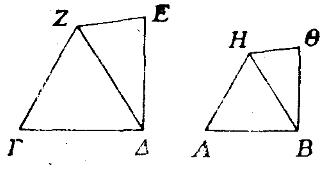
Заиста, на основу исте конструкције, пошто је правоугаоник са А и Г једнак квадрату над В, а квадрат над В је једнак правоугаонику са В и Δ, јер је В једнако Δ, биће правоугаоник са А и Г једнак правоугаонику са В и Δ. Али ако је правоугаоник обухваћен крајњим једнак правоугаонику обухваћеном средњим, четири дужи су пропорционалне. Према томе је А према В као Δ према Г; како је В једнако Δ, то је А према В као В према Г.

На овај начин, ако су пропорционалне три дужи, правоугаоник обухваћен крајњим једнак је квадрату над средњом дужи; и ако је правоугаоник обухваћен крајњим једнак квадрату над средњом дужи, три дужи су пропорционалне. А то је требало доказати[19].

18.

На датој дужи нацртати праволиниску слику сличну датој праволиниској слици и у сличном положају.[20]

Нека је дата дуж АВ, а дата праволиниска слика ГЕ. Треба на дужи АВ нацртати праволиниску слику сличну праволиниској слици ГЕ и у сличном положају.

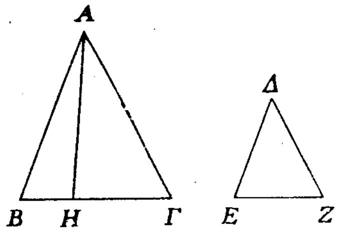


Спојимо Δ са Z и конструишимо на дужи АВ, и то код њених тачака А и В угао НАВ једнак углу Г и угао АВН једнак углу ГΔZ; онда је и преостали угао АНВ једнак углу ГZΔ. Према томе троугли ZГΔ и НАВ имају једнаке углове. Значи да је ZΔ према НВ као ZГ према НА и ГΔ према АВ. Конструишимо затим на дужи ВН, и то код њених тачака В и Н угао ВНΘ једнак углу ΔZЕ и угао НВΘ једнак углу ZΔЕ; тада је преостали угао код Θ једнак преосталом углу код Е. Према томе троугли ZΔЕ и НΘВ имају једнаке углове. Значи да је ZΔ према НВ као ZЕ према НΘ и ЕΔ према ΘВ. А доказано је да је ZΔ према НВ као ZГ према НА и ГΔ према АВ, и да је ZГ према АН као ГΔ према АВ и ZЕ према НΘ и још ЕΔ према ΘВ. А како је угао ГZΔ једнак углу АНВ и угао ΔZЕ углу ВНΘ, то је и цео угао ГZЕ једнак целом углу код АНΘ. Из истих разлога је и угао ГΔЕ једнак углу АВΘ. Па и угао код Г једнак је углу код А, а такође и угао код Е углу код Θ. Према томе слике АΘ и ГЕ имају једнаке углове; оне имају и стране које образују једнаке углове пропорционалне. Значи праволиниска слика АΘ је слична праволиниској слици ГЕ.

На овај начин је датој дужи АВ конструисана праволиниска слика АΘ слична датој праволиниској слици ГЕ и у сличном положају. А то је требало извести.[21]

19.

Слични троугли су један према другом у двапут вишој размери одговарајућих страна.



Нека су АВГ и ΔЕZ слични троугли са једнаким угловима код В и Е, и нека се АВ стоји према ВГ као ΔЕ према ЕZ, при чему ВГ одговара ЕZ. Тврдим, да је троугао АВГ према троуглу ΔЕZ у двапут вишој размери ВГ према ЕZ.

Заиста, узмимо за ВГ и ЕZ трећу пропорционалу ВН, тако да је ВГ према ЕZ као ЕZ према ВН. И спојимо Н са А.

Сад, како је АВ према ВГ као ΔЕ према ЕZ, то се, после пермутовања, АВ односи према ΔЕ као ВГ према ЕZ. Али ВГ је према ЕZ као ЕZ према ВН; те је према томе АВ према ΔЕ као ЕZ према ВН. Значи у троуглима АВН и ΔЕZ стране које образују једнаке углове су обрнуто пропорционалне. Али троугли који имају по један угао једнак и чије су стране које образују једнаке углове обрнуто пропорционалне, једнаки су један другом. Према томе је троугао ABH једнак троуглу ΔEZ. И пошто се BΓ односи према EZ као EZ према BH, то, ако су три дужи пропорционалне, размера прве према трећој је двапут виша од размере прве према другој, па према томе је и размера BΓ према BH једнака двапут вишој размери од размере ΓB према EZ. А пошто је ΓB према BH као троугао ABΓ према троуглу ABH, то је размера троугла ABΓ према троуглу ABH једнака двапут вишој размери од размере BΓ према EZ. Али је троугао ABH једнак троуглу ΔEZ. Те тако је троугао ABΓ према ΔEZ у двапут вишој размери BΓ према EZ.

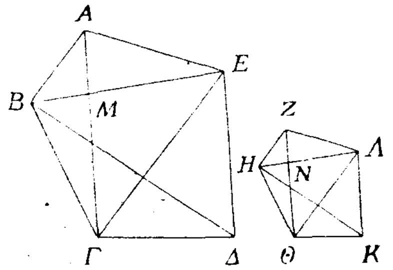
На овај начин, слични троугли су један према другом у двапут вишој размери одговарајућих страна. А то је требало доказати.[22]

Последица.

Одавде је јасно, да ако су три дужи пропорционалне, онда је прва према трећој као и слика над првом према сличној и у сличном положају слици над другом. [Пошто је доказано да је ΓB према BH као троугао ABΓ према ABH, тј. ΔEZ]. А то је требало доказати.

20.

Слични многоугли се могу раставити на сличне троугле у истом броју и у истим односима према нерастављеним (целим многоуглима), и многоугао је према многоуглу у двапут вишој размери одговарајућих страна.



Нека су ABΓΔE и ZHΘKΛ слични многоугли и нека страна AB одговара страни ZH. Тврдим да се многоугли ABΓΔE и ZHΘKΛ могу раставити на сличне троугле у истом броју и у истим односима према нерастављеним, и многоугао ABΓΔE је према многоуглу ZHΘKΛ у двапут вишој размери од размере AB према ZH.

Повуцимо BE, EГ HΛ, ΛΘ.

Пошто је многоугао ABГΔE сличан многоуглу ZHΘKΛ, угао BAE је једнак углу HZΛ и BA се према AE односи као HZ према ZΛ. Пошто сад два троугла ABE и ZHΛ имају по један угао једнак и стране које образују једнаке углове су пропорционалне, то троугли ABE и ZHΛ имају једнаке углове, па према томе су слични; и тада је угао ABE једнак углу ZHΛ. Али је једнак и цео угао ABГ целом углу ZHΘ због сличности многоуглова, те је и преостали угао EBГ једнак углу ΛHΘ. А пошто се, због сличности троуглова ABE и ZHΛ, EB односи према BA као ΛH према HZ, а због сличности многоуглова AB је према BГ као ZH према HΘ, то, као једнако удаљени, EB је према BГ као ΛH према HΘ и стране које образују једнаке углове EBГ и ΛHΘ су пропорционалне. Према томе троугли EBГ и ΛHΘ имају једнаке углове, што значи да је троугао EBГ сличан троуглу ΛHΘ. Из истих разлога је троугао EГΔ сличан троуглу ΛΘK. На овај начин су многоугли ABГΔE и ZHΘKΛ растављени на сличне троугле и то у истом броју.

Тврдим да су они у истим односима према нерастављеним (целим многоуглима), тј. да су троугли пропорционални, и да су ABE, EBГ, EГΔ претходни, а ZHΛ, ΛHΘ, ΛΘK наредни и да је многоугао ABГΔE према многоуглу ZHΘKΛ у двапут вишој размери одговарајуће стране према одговарајућој страни, тј. страна AB према ZH.

Заиста, повуцимо AГ и ZΘ. Пошто су многоугли слични, угао ABГ је једнак углу ZHΘ и AB је према BГ као ZH према HΘ, то троугли ABГ и ZHΘ имају једнаке углове; на тај начин је угао BAГ једнак углу HZΘ, а и угао BГA једнак углу HΘZ. И пошто је угао HAM једнак углу HZN, а и угао ABM једнак углу ZHN, то је и преостали угао AMB једнак преосталом углу ZNH. Према томе троугли ABM и ZHN имају једнаке углове. На сличан начин се доказује да и троугли BMГ и HNΘ имају једнаке углове. Према томе се AB односи према MB као ZN према MH и BM према MГ као HN према NΘ и према једнакоудаљености AM према MГ као

ZN према NΘ. Али AM се односи према MΓ као троугао ABM према троуглу MBΓ и троугао AME према троуглу EMΓ, пошто се они односе као основице. Међутим један од претходних се односи према једном од наредних као и сви претходни према свима наредним, према томе, троугао AMB се односи према BMΓ као ABE према ΓBE. Али је AMB према BMΓ као AM према MΓ, те је према томе AM према MΓ као троугао ABE према троуглу EBΓ. Из истих разлога је ZN према NΘ као троугао ZHΛ према троуглу HΛΘ. А пошто је AM према MΓ као ZN према NΘ то је и троугао ABE према троуглу BEΓ као троугао ZHΛ према троуглу HΛΘ, а после пермутовања, троугао ABE је према троуглу ZHΛ као троугао BEΓ према троуглу HΛΘ. На сличан начин се доказује, ако повучемо BΔ и HK, да се троугао BEΓ односи према троуглу ΛHΘ као троугао EΓΔ према троуглу ΛΘK. И пошто је троугао ABE према троуглу ZHΛ као троугао EBΓ према ΛHΘ, и EΓΔ према ΛΘK, а један од претходних је према једном од наредних као сви претходни према свима наредним, то се троугао ABE односи према троуглу ZHΛ као многоугао ABΓΔE према многоуглу ZHΘKΛ. Али троугао ABE се односи према троуглу ZHΛ у размери двапут вишој од размере стране AB према одговарајућој страни ZH, јер су слични троуглови у двапут вишој размери одговарајућих страна. Према томе су и многоуглови ABΓΔE и ZHΘKΛ у двапут вишој размери стране AB према одговарајућој страни ZH.

На овај начин, слични многоуглови се могу раставити на сличне троуглове у истом броју и у истим односима према нерастављеним (целим многоуглима), и многоугао је према многоуглу у двапут вишој размери одговарајућих страна. [А то је требало доказати].[23]

I Последица

На исти начин се може показати да су и слични четвороуглови у размери двапут вишој од размере одговарајућих страна. А то је доказано и за троугле. Према томе су уопште сличне праволиниске слике у размери двапут вишој од размере одговарајућих страна. А то је требало доказати.

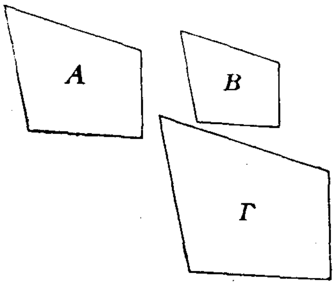
II Последица

Ако за AB и ZH узмемо трећу пропорционалу Ξ, онда је размера BA према Ξ двапут виша од размере AB према ZH. А и многоугао према многоуглу или четвороугао према четвороуглу су у размери двапут вишој од размере одговарајућих страна, тј. размере AB према ZH. А ово је било доказано и за троуглове. Према томе је јасно, да, уопште, ако су три величине пропорционалне, онда је прва према трећој као слична и у сличном односу слика конструисана над првом према одговарајућој слици над другом.]

21.

Праволиниске слике сличне истој слици сличне су и међу собом.

Нека је свака од праволиниских слика А и В слична слици Г. Тврдим да је А слична В.



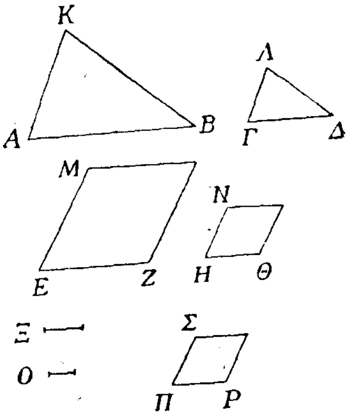
Заиста, пошто је А слична Г, она има једнаке углове са Г и пропорционалне стране које образују једнаке углове. Даље, пошто је и В слична Г, има и она једнаке углове са Г и пропорционалне стране које образују једнаке углове. Према томе је свака од А и В има једнаке углове са Г и пропорционалне стране које образују једнаке углове [значи и А и В имају једнаке углове и пропорционалне стране које образују једнаке углове]. Према томе је А слична В. А то је требало доказати.

22.

Ако су четири дужи пропорционалне, онда су и на њима конструисане сличне и у сличном положају праволиниске слике пропорционале; и ако су на њима конструисане сличне и у сличном положају праволиниске слике пропорционалне, пропорционалне су и дужи.

Нека су АВ, ГΔ, ЕΖ, НΘ четири пропорционалне дужи, тако да је АВ према ГΔ као ЕΖ према НΘ, и нека су над АВ и ГΔ нацртане сличне и у сличном положају праволиниске слике КАВ и ΛГΔ, а над ЕΖ и НΘ сличне и у сличном положају праволиниске слике МΖ и NΘ. Тврдим да се КАВ односи према ΛГΔ као МΖ према NΘ.

Заиста, узмимо за ВА и ГΔ трећу пропорционалу Ξ, а за ЕΖ и НΘ трећу пропорционалу О. Пошто је АВ према ГΔ као ЕΖ према НΘ, а ГΔ према Ξ као НΘ према О, онда је по једнакоудаљености АВ према Ξ као ЕΖ према О. Међутим АВ се односи према Ξ као КАВ према ΛГΔ, и ЕΖ према О као МΖ према NΘ, те је и КАВ према ΛГΔ као МΖ према NΘ.



Сад нека је КАВ према ΛГΔ као МΖ према NΘ. Тврдим, да је АВ према ГΔ као ЕΖ према НΘ. Заиста, нека не буде тако, да се АВ односи према ГΔ као ЕΖ према НΘ, већ нека се АВ односи према ГΔ као ЕΖ према ПР; коструишимо над ПР праволиниску слику ΣР сличну и у сличном положају свакој од МΖ, NΘ.

Пошто се сад АВ односи према ГΔ као ЕΖ према ПР и над АВ и ГΔ су конструисане сличне и у сличном положају слике КАВ и ΛГΔ, а над ЕΖ и ПР сличне и у сличном положају слике МΖ и ΣР, то је КАВ према ΛГΔ као МΖ према ΣР. А претпоставља се да се КАВ односи према ΛГΔ као МΖ према NΘ. Те је према томе МΖ према ΣР као МΖ према NΘ. Дакле је МΖ у истој размери према и НΘ и ΣР, те је NΘ једнако ΣР, а и слична је и у сличном положају. Па према томе је НΘ једнако ПР. И пошто се АВ односи према ГΔ као ЕΖ према ПР, а ПР је једнако НΘ, то је АВ према ГΔ као ЕΖ према НΘ.

На овај начин, ако су четири дужи пропорционалне, онда су и на њима конструисане сличне и у сличном положају праволиниске слике пропорционалне; и ако су на њима конструисане сличне и у сличном положају праволиниске слике пропорционалне, онда су пропорционалне и дужи. А то је тробало доказати.[24]

[Лема]

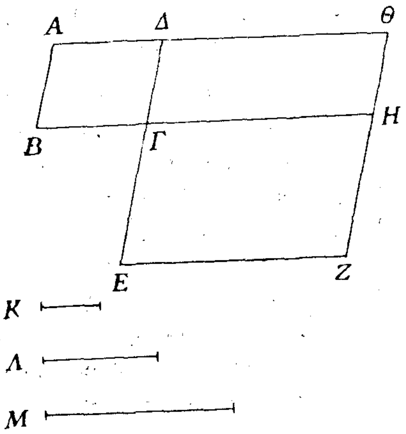
[Ако су праволиниске слике једнаке и сличне, онда су и њихове стране једне другим једнаке. То докажимо овако.

Нека су праволиниске слике NΘ и ΣР једнаке и сличне и нека је ΘН према HN као РП према ΠΣ. Тврдим да је РП једнако ΘН.

Нека стране нису једнаке, онда је једна од њих већа. Нека буде РП већа од ΘН. Пошто се РП односи према ΠΣ као ΘН према HN и, после пермутовања, РП је према ΘН као ΠΣ према HN, а ПР је веће од ΘН, биће веће и ΠΣ од HN. Према томе је и слика РΣ већа од ΘN, али је и једнака, а то је немогуће. Значи ПР није неједнако НΘ, па је према томе једнако. А то је требало доказати.]

23.

Паралелограми са једнаким угловима су један према другом у размери сложеној од размера страна.[25]



Нека су АГ и ГZ, чији су углови ВГΔ и ЕГН једнаки, паралелограми са једнаким угловима. Тврдим да су паралелограми АГ и ГZ у размери сложеној од размера страна.

Заиста, поставимо их тако да ВГ буде продужење ГН; тада ће и ГΔ бити на продужењу ГЕ. И допунимо слику паралелограмом ΔН; узмимо неку дуж К и начинимо да се ВГ односи према ГН као К према Λ и ΔГ према ГЕ као Λ према М.

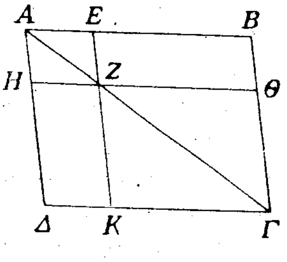
На тај начин ће размере К према Λ и Λ према М бити исте са размерама страна: ВГ према ГН и ΔГ према ГЕ. Али размера К према М је сложена из размера К према Λ и Λ према М. На тај начин је размера К према М сложена од размера страна. Пошто је ВГ према ГН као паралелограм АГ према ГΘ, а ВГ је према ГН као К према Λ, те према томе је К према Λ као паралелограм АГ према ГΘ. Даље, пошто је ΔГ према ГЕ као паралелограм ГΘ према ГZ, а ΔГ према ГЕ као Λ према М, те се, према томе, Λ односи према М као паралелограм ГΘ према паралелограму ГZ. Пошто је сад доказано да је К према Λ као паралелограм АГ према паралелограму ГΘ, и Λ према М као паралелограм ГΘ према паралелограму ГZ, онда је по једнакоудаљености К према М као АГ према паралелограму ГZ. Али размера К према М је сложена од размера страна. Према томе је и размера АГ према ГZ сложена од размера страна.

На овај начин, паралелограми са једнаким угловима су један према другом у размери сложеној од размера страна. А то је требало доказати.[26]

24.

У сваком паралелограму су паралелограми конструисани на дијагонали слични и целом (паралелограму) и међу собом.

Нека је АВГΔ паралелограм и АГ његова дијагонала, ЕН и ΘК паралелограми на АГ. Тврдим да је сваки од паралелограма ЕН и ΘК сличан целом паралелограму АВГΔ и да су они слични међу собом.



Заиста, пошто је троугао АВГ пресечен правом ЕZ паралелно страни ВГ, то се ВЕ односи према ЕА као ГZ према ZА. Даље, пошто је троугао АГΔ пресечен правом ZН паралелно страни ГΔ, то је ГZ према ZА као ΔН према НА. А доказано је да је ГZ према ZА као ВЕ према ЕА. Према томе је и ВЕ према ЕА као ΔН према НА. И зато је, после састављања, ВА према АЕ као ΔА према АН, а после пермутовања ВА је према АΔ као ЕА према АН. Дакле код паралелограма АВГΔ и ЕН стране које образују заједнички угао ВАΔ пропорционалне су. А како су НZ и ΔГ паралелне, угао АZН једнак је углу ΔГА; а угао ΔАГ је заједнички код троугла АΔГ и АНГ, према томе троугли АΔГ и АНZ имају једнаке углове. Из истих разлога и троуглови АГВ и АZЕ имају једнаке углове; па тако и цео паралелограм АВГΔ и паралелограм ЕН имају једнаке углове. Зато је АΔ према ΔГ као АН према НZ, и ΔГ према ГА као НZ према ZА, и АГ према ГВ као АZ према ZЕ, и ГВ према ВА као ZЕ према ЕА. А како је доказано да је ΔГ према ГА као НZ према ZА, и АГ према ГВ као АZ према ZЕ, онда је, према једнакоудаљености, ΔГ према ГВ као НZ према ZЕ. Према томе су стране које образују једнаке углове код паралелограма АВГΔ и ЕН пропорционалне, па су на тај начин паралелограми АВГΔ и ЕН слични. Из истих разлога је паралелограм АВГΔ сличан паралелограму КΘ; значи сваки од паралелограма ЕН и ΘК је сличан паралелограму АВГΔ. А слике сличне једној истој праволиниској слици сличне су и међу собом. Те према томе је и паралелограм ЕН сличан паралелограму ΘК.

На овај начин, у сваком паралелограму су паралелограми конструисани на дијагонали слични и целом (паралелограму) и међу собом. А то је требало доказати.

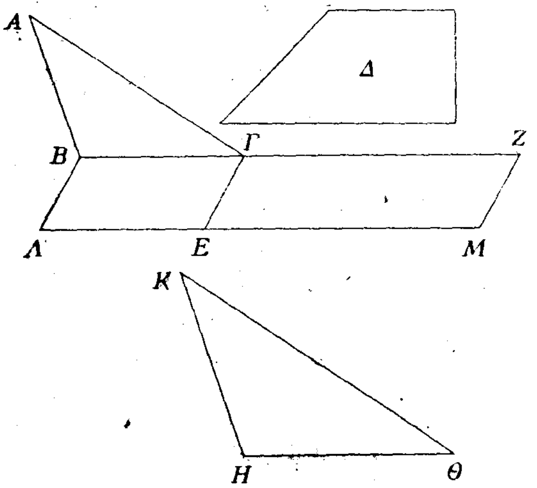
25.

Конструисати праволиниску слику која је слична датој праволиниској слици и једнака другој датој праволиниској слици.

Нека је АВГ дата праволиниска слика, којој тражена слика треба да буде слична, а Δ слика, којој тражена слика треба да буде једнака. Треба конструисати слику сличну слици АВГ а једнаку слици Δ.

Доцртајмо над ВГ паралелограм ВЕ једнак троуглу АВГ, а над ГЕ паралелограм ГМ једнак Δ са углом ZГЕ једнаким углу ГВΛ. Тада је ВГ на дужи ГZ и ΛЕ на дужи ЕМ. И нека НΘ буде средња пропорционала за ВГ и ГZ, па над НΘ конструишимо троугао КНΘ сличан и у сличном положају са троуглом АВГ.

Пошто се ВГ односи према НΘ као НΘ према ГZ, а ако су три дужи пропорционалне, онда је прва према трећој као и слика конструисана над првом према сличној и у сличном положају слици конструисаној над другом, значи ВГ је према ГZ као троугао АВГ према троуглу КНΘ. Али ВГ се односи према ГZ као и паралелограми ВЕ према паралелограму ЕZ. Значи троугао АВГ је према троуглу КНΘ као паралелограм ВЕ према паралелограму ЕZ. Или, после пермутовања, троугао



АВГ је према паралелограму ВЕ као троугао КНΘ према паралелограму ЕZ. Како је троугао АВГ једнак паралелограму ВЕ, то је троугао КНΘ једнак паралелограму ЕZ. Али паралелограм ЕZ је једнак (слици) Δ, па је и троугао КНΘ једнак слици Δ, а при томе је троугао КНΘ и сличан троуглу АВГ

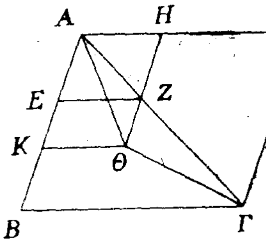
На овај начин је конструисана слика КНΘ слична датој праволиниској слици АВГ и једнака датој слици Δ. А то је требало доказати.[27]

26.

Ако од паралелограма отсечемо паралелограм сличан и у сличном положају са целим који са овим има и заједнички угао, тај паралелограм је на истој дијагонали са целим.

Нека је од паралелограма АВГΔ отсечен паралелограм АΖ сличан АВГΔ и у сличном положају, а који има са њим заједнички угао ΔАВ. Тврдим да је АВГΔ на истој дијагонали као и АZ.

Заиста, нека то није тако, па ако је могуће, нека буде АΘГ дијагонала; па продужимо НZ до Θ и повуцимо кроз Θ праву ΘК паралелну свакој од правих АΔ и ВГ.

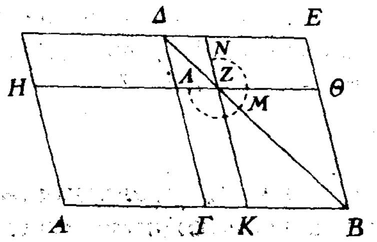


Пошто су сад АВГΔ и КН на истој дијагонали, то се ΔА односи према АВ као НА према АК; а због сличности АВГΔ и ЕН дуж ΔА је према АВ такође као и НА према АЕ. Дакле НА је према АК као НА према АЕ. Дуж НА је према томе у истој размери према свакој од АК и АЕ. Значи АЕ је једнако АК, мања већој, а то је немогуће. Дакле АВГΔ и АZ не могу не бити на истој дијагонали. Па према томе је паралелограм АВГΔ на истој дијагонали са паралелограмом АZ.

На овај начин, ако од паралелограма отсечемо паралелограм сличан и у сличном положају са целим који са овим има и заједнички угао, тај паралелограм је на истој дијагонали са целим. А то је требало доказати.

27.

Од свих паралелограма тако конструисаних на датој дужи да им недостају паралелограми слични и у сличном положају са паралелограмом конструисаном на другој половини дужи онај је највећи који је конструисан на првој половини дужи и сличан паралелограму који му недостаје.[28]



Нека је АВ дуж и нека је она располовљена тачком Г и нека је на дужи АВ конструисан паралелограм АΔ, чији је допунски паралелограм ΔВ конструисан на половини АВ, тј. на ГВ. Тврдим да је од свих на

АВ тако конструисаних паралелограма да им недостају паралелограми слични и у сличном положају са паралелограмом ΔВ највећи паралелограм АΔ. Конструишимо на дужи АВ паралелограм AZ тако, да је паралелограм ZB сличан и у сличном положају са паралелограмом ΔB. Тврдим да је паралелограм АΔ већи од паралелограма AZ.

Заиста, пошто је паралелограм ΔB сличан паралелограму ZB, они су на истој дијагонали. Повуцимо њихову дијагоналу ΔB и допунимо слику.

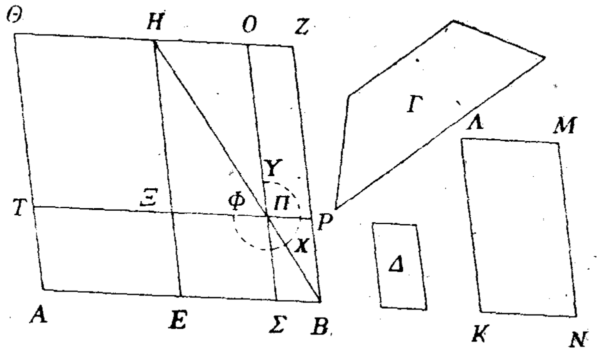
Пошто је сад ΓZ једнако ZE, а ZB је заједничко, то је цео паралелограм ΓΘ једнак целом паралелограму КЕ. Али је ΓΘ једнак ΓН, јер је АΓ једнако ΓВ. Према томе је НΓ једнак ЕК. Додајмо заједнички (паралелограм) ΓZ. Тада је паралелограм AZ једнак гномону ΛMN. Па према томе је паралелограм ΔВ, а то ће рећи и паралелограм АΔ, већи од паралелограма AZ.

На овај начин, од свих паралелограма тако конструисаних на датој дужи да им недостају паралелограми слични и у сличном положају са паралелограмом конструисаном на другој половини дужи онај је највећи који је конструисан на првој половини дужи и сличан паралелограму који му недостаје. А то је требало доказати.[29]

28.

На датој дужи конструисати такав паралелограм, једнак датој праволиниској слици, да паралелограм који му недостаје буде сличан датом паралелограму; при томе је неопходно да дата праволиниска слика (којој треба конструисати једнаки паралелограм) не буде већа од паралелограма конструисаног на половини и сличног паралелограму који му недостаје [од паралелограма на половини а да слични му недостаје].

Нека је АВ дата дуж, а праволиниска слика Γ, којој једнаки паралелограм треба конструисати на АВ, није већа од паралелограма конструисаног на половини АВ и сличног паралелограму који му недостаје и који је сличан паралелограму Δ. Треба на датој дужи АВ конструисати паралелограм једнак праволиниској слици Γ а да паралелограм који му недостаје буде сличан датом паралелограму Δ.



Располовимо АВ тачком Е и над ЕВ нацртајмо слику ЕВZН сличну и у сличном положају са Δ; и као допуну конструишимо паралелограм АН.

Ако је сад АН једнако Γ, тражено би било изведено, јер је на датој дужи АВ конструисани паралелограм АН једнак датој праволиниској слици Γ, а паралелограм, који му недостаје, је сличан паралелограму Δ.

Ако то није случај онда нека ΘЕ буде веће од Γ· А како је ΘЕ једнако НВ, биће и НВ од Γ. Тада конструишемо слику ΚΛΜΝ сличну и у сличном положају са Δ, која је једнака сувишку НВ над Γ. Како је Δ слично НВ, то је и КМ слично НВ. Нека сад ΚΛ одговара НЕ, а ΛΜ дужи НZ. Пошто је НВ једнако збиру Γ и КМ, то је НВ веће од КМ. Тада је и НЕ веће од ΚΛ, а НZ од ΛΜ. Конструишемо НΞ једнако ΚΛ и НО једнако ΛΜ и допунимо паралелограм ΞНОП; према томе је НП слично и једнако КМ (а КМ је слично НВ). Значи НП је слично НВ. Према томе су НП и НВ на истој дијагонали. Нека је та дијагонала НПВ, па допунимо слику.

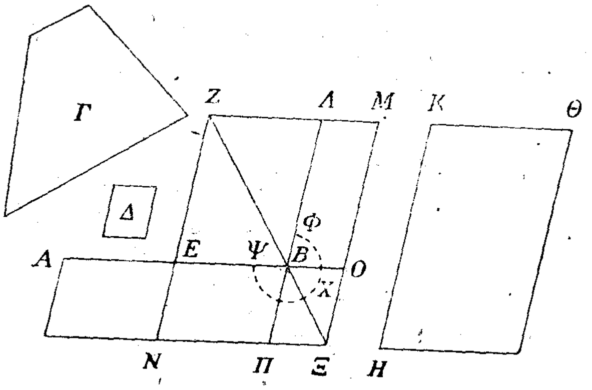
Пошто је сад ВН једнако збиру Γ и КМ, а НП је једнако КМ, то је преостали гномон ΥΧΦ једнак остатку Γ. И пошто је ОР једнако ΞΣ, то је, ако додамо заједничко ПВ, целокупно ОВ једнако целом ΞВ. Али је ΞВ једнако ТЕ, јер је страна АЕ једнака страни ЕВ, па према томе је и ТЕ једнако ОВ. Додајмо ΞΣ, тада је и цело ΤΣ једнако целом гномону ΦΧΥ. Међутим је доказано да је гномон ΦΧΥ једнак Г, па је према томе и ΤΣ једнако Г.

На овај начин, на датој дужи АВ је конструисан, и то једнак датој праволиниској слици Г, паралелограм ΣΤ а при томе паралелограм ΠΒ, који му недостаје, сличан је датом паралелограму Δ [пошто је ΠΒ слично ΗΠ]. А то је требало извести.

29.

На датој дужи конструисати паралелограм са сувишком сличним датом паралелограму, а једнак датој праволиниској слици.

Нека је АВ дата дуж, а праволиниска слика, којој једнаки паралелограм треба конструисати на АВ, нека буде Г. Треба на датој дужи АВ конструисати паралелограм једнак праволиниској слици Г са сувишком сличним датом паралелограму Δ.



Располовимо АВ тачком Е и над ЕВ нацртајмо паралелограм ΒΖ сличан и у сличном положају са Δ, и конструишимо паралелограм ΗΘ, сличан и у сличном положају са Δ, једнак збиру ΒΖ и Г, и то да одговарају: ΚΘ дужи ΖΛ и ΚΗ дужи ΖΕ. Пошто је ΗΘ веће од ΖΒ, и ΚΘ је веће од ΖΛ, а ΚΗ од ΖΕ. Продужимо ΖΛ и ΖΕ тако да буде ΖΛΜ једнако ΚΘ, а ΖΕΝ једнако ΚΗ, и допунимо паралелограм ΜΝ; тада је ΜΝ једнако и слично ΗΘ. Али је ΗΘ сличан ΕΛ, те је и ΜΝ сличан ΕΛ, а при томе су ΕΔ и ΜΝ на истој дијагонали. Повуцимо њихову дијагоналу ΖΞ и допунимо слику.

Пошто је НΘ једнако збиру ЕΛ и Г, а НΘ једнако MN, и MN је једнако збиру ЕΛ и Г. Одузмимо заједничко ЕΛ. Тада је преостали гномон ΨХΦ једнак Г. И пошто је АЕ једнако ЕВ, једнако је и AN паралелограму NB, тј. ΛО. Додајмо заједничко ЕΞ. Тада је цело АΞ једнако целом гномону. Али гномон ΦХΨ једнак је Г, те према томе је и АΞ једнако Г.

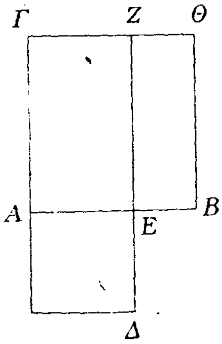
На овај начин је на датој дужи АВ конструисан паралелограм АΞ, једнак датој праволиниској слици Г, са сувишком паралелограмом ПО сличним паралелограму Δ, јер је ЕΛ слично ОП. А то је требало извести.

30.

Дату ограничену праву (дуж) поделити у крајњој и средњој размери.

Нека је АВ дата дуж. Треба дуж АВ поделити у крајњој и средњој размери.

Конструишимо над АВ квадрат ВГ и на АГ конструишимо паралелограм ГΔ једнак ВГ са сувишком АΔ сличним ВГ.



ВГ је квадрат, према томе је и АΔ квадрат. А пошто је ВГ једнако ГΔ, то је, после одузимања заједничког ГЕ, и остатак ВZ једнак остатку АΔ. А они су и са једнаким угловима. Према томе су стране у ВZ и АΔ код једнаких углова обрнуто пропорционалне. Дакле ZЕ се односи према ЕΔ као АЕ према ЕВ. Али ZЕ је једнако АВ, а ЕΔ једнако АЕ, те је према томе ВА према АЕ као АЕ према ЕВ. АВ је веће од АЕ, па је и АЕ веће од ЕВ.

На овај начин је дуж АВ подељена у крајњој и средњој размери тачком Е и већи део је АЕ. А то је требало извести.[30]

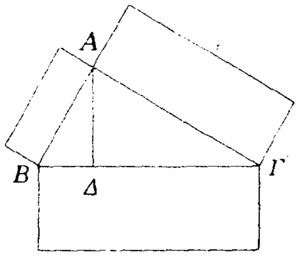
31.

Код правоуглих троуглова слика конструисана на страни наспрам правог угла једнака је збиру сличних и слично конструисаних слика над странама које образују прав угао.

Нека је АВГ правоугли троугао са правим углом ВАГ.

Тврдим да је слика конструисана над ВГ једнака збиру сличних и слично конструисаних слика над ВА и над АГ.

Повуцимо нормалу АΔ.



Пошто је сад у правоуглом троуглу АВГ из правог угла код А повучена на основицу ВГ нормала АΔ, троугли АВΔ и АΔГ уз нормалу су слични целом троуглу АВГ а и међу собом. И пошто је АВГ сличан АВΔ, то се ГВ односи према ВА као АВ према ВΔ. Пошто су сад три дужи пропорционалне, онда је прва према трећој као слика над првом према сличној и у сличном положају слици над другом. На тај начин се ГВ односи према ВΔ као слика над ГВ према сличној и у сличном положају слици над ВА. Из истих равлога и ЕГ је према ГΔ као слика над ВГ према слици над ГА. Према томе је и ВГ према збиру ВΔ и ΔГ као слика над ВГ према збиру сличних и у сличном положају слика над ВА и .АГ. Али је ВГ из ВΔ и ΔГ. Према томе је слика над ВГ једнака збиру сличних и у сличном положају конструисаних слика над ВА и над АГ.

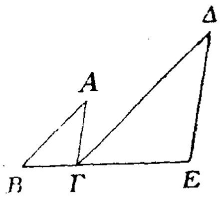
На овај начин је код правоуглих троуглова слика конструисана на страни наспрам правог угла једнака збиру сличних и слично конструисаних слика над странама које образују прав угао. А то је требало доказати.[31]

32.

Ако саставимо темена двају троуглова код којих су две стране једног пропорционалне двема странама другог и при томе те стране на одговарајући начин паралелне, онда су остале стране троуглова на истој правој.

Нека су АВГ и ΔГЕ два троугла код којих су две стране ВА, АГ једног пропорционалне двема странама ΔГ, ΔЕ другог, наиме АВ се односи према АГ као ΔГ према ΔЕ и страна АВ је паралелна ΔГ, а АГ страни ΔЕ. Тврдим да су ВГ и ГЕ на истој правој.

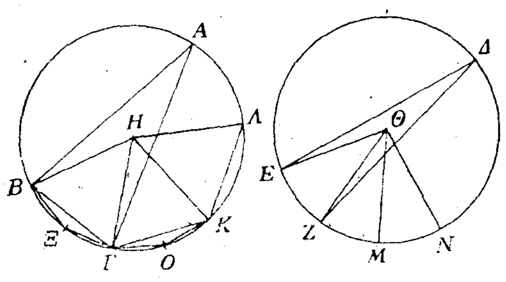
Заиста, пошто је права АВ паралелна правој ΔГ, а права АГ је њихова трансверзала, то су углови ВАГ и АГΔ једнаки као наизменични. Из истих разлога је угао ГΔЕ једнак углу АГΔ. Према томе је угао ВАГ једнак углу ГΔЕ. Пошто два троугла АВГ и ΔГЕ имају угао код А једнак углу код Δ, а стране које образују те углове су пропорционалне, тј. ВА се односи према АГ ако ГΔ према ΔЕ, то троугли АВГ и ΔГЕ имају једнаке одговарајуће углове. Према томе је угао АВГ једнак углу ΔГЕ. А доказано је да је угао АГΔ једнак углу ВАГ. Према томе е цео угао АГЕ једнак збиру углова АВГ и ВАГ. Додајемо заједнички угао АГВ, тада је збир углова АГЕ и АГВ једнак збиру углова ВАГ, АГВ, ГВА. Али је збир ВАГ, АВГ, АГВ једнак двоструком правом углу, па је према томе и збир АГЕ, АГВ једнак двоструком правом углу. На правој АГ код исте тачке Г две праве ВГ и ГЕ, које нису са исте стране, чине два суседна угла АГЕ и АГВ чији је збир два права угла, па услед тога су две праве ВГ и ГЕ на истој правој.



На овај начин, ако саставима темена двају троуглова код којих су две стране једног пропорционалне двема странама другог и при томе те стране на одговарајући начин паралелне, онда су остале стране троуглова на истој правој. А то је требало доказати.[32]

33.

Код једнаких кругова углови се налазе у размери захваћених лукова било у случају централних било у случају перифериских углова.



Нека су АВГ и ΔΕΖ једнаки кругови и углови ВНГ и ΕΘΖ централни за центре Η и Θ, а углови ВАГ и ΕΔΖ периферски. Тврдим да се лук ВГ односи према луку EZ као угао ВНГ према углу EΘZ и угао ВАГ према углу EΔZ.

Заиста, надовежимо на лук ВГ колико хоћемо том луку једнаких лукова ГК, КЛ, а на лук EZ исти број овом луку једнаких лукова ZM, MN, и повуцимо НК, НΛ, ΘM, θN.

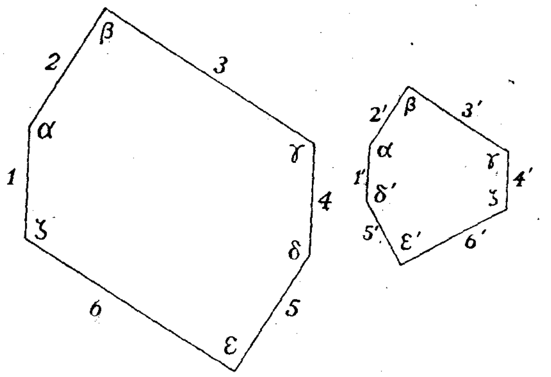
Пошто су сад луци ВГ, ГК, КΛ међу собом једнаки, једнаки су међу собом и углови ВНГ, ГНК, КНΛ. Према томе колики је лук ВΛ мултиплум лука ВГ, толики је и угао ВНΛ, мултиплум угла ВНГ. Из истих разлога, колики је лук NE мултиплум лука EZ, толики је и угао NθE мултиплум угла EΘE. Значи, ако је лук ВΛ једнак луку EN, једнак је и угао ВНΛ углу EθН, ако је лук ВΛ већи од лука EN, онда је већи и угао ВНΛ од угла EθN, а ако је мањи, онда мањи. Од четири дате величине, два лука ВГ и EZ и два угла ВНГ и EθZ, узети су подједнаки мултиплуми лука ВГ и угла ВНГ, лук ВΛ и угао ВНΛ, а од лука EZ и од угла EΘZ лук EN и угао EΘN. И доказано је да, ако је лук ВΛ већи од лука EN, онда је угао ВНΛ већи од угла EΘN, ако је једнак онда једнак, а ако је мањи, мањи. Према томе се лук ВГ односи према луку EZ као угао ВНГ према углу EΘZ. Али угао ВНГ је према углу EΘZ као угао ВАГ према EΔZ, јер је сваки двапут већи од другог. Према томе, лук ВГ се односи према луку EZ као угао ВНГ према углу EΘZ и угао ВАГ према углу EΔZ.

На овај начин, код једнаких кругова углови се налазе у размери захваћених лукова било у случају централних било у случају перифериских углова. А то је требало доказати.[28]

КОМЕНТАР

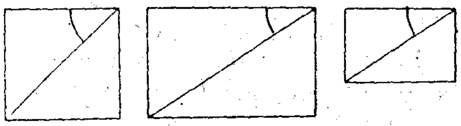
[1] Грчке речи „$\varkappa\alpha\tau\grave{\alpha}$ $\mu\acute{\iota}\alpha\nu$“ ове дефиниције преводимо са „појединачно“ подразумевајући да сваком појединoм углу прве слике одговара једнаки угао друге слике. Овај Еуклидов додатак искључује могућност тумачења дефиниције да су *сви* углови прве слике, једнаки међусобно, једнаки угловима друге слике.

[2] У вези са првом дефиницијом имамо две примедбе. 1. У дефиницији није истакнуто да ред којим следују стране односно углови једне слике треба да буде исти као и код друге слике, другим речима, да елементи слика треба да



Сл. 1

буду распоређени на исти начин. Ако тај услов није задовољен, слике могу и са појединачно једнаким угловима и пропорционалним крацима тих углова ипак да не буду сличне (сл. 1). 2. Друга примедба се односи на навођење два услова о једнакости углова и пропорционалности кракова у дефиницији. Та два услова обично се оба сматрају као неопходна и у том облику се дефиниција појављује у свима уџбеницима геометрије без примедбе. Међутим може се дефиниција сличности праволиниских слика формулисати помоћу само једног од тих углова - или једнакошћу углова или пропорционалношћу линиских елемената, само треба сваки од тих услова допунити додатком: *свих* углова односно *свих* праправолиниских елемената. Тако, квадрат и правоугаоник различитих димензија (сл. 2) нису сличне слике, јер незадовољавају услов једнакости *свих* углова, односно порпорционалоости *свих* праволиниских елемената. Заиста, ако повучемо одговарајуће дијагонале тих слика, *сви* углови тих слика убрајајући ту и углове између страна и дијагонала неће бити једнаки. Међутим, рецимо, за два правоугаоника, чији су сви углови између одговарајућих праволиниских елемената једнаки, можемо тврдити да су слични. Исто тако, можемо тврдити да је услов само пропорционалности али свих праволиниских елемената довољан за сличност одговарајућих слика. Јасно је да Еуклидова редакција дефиниције остаје на снази ако се мисли само на углове и стране полигона.



Сл. 2

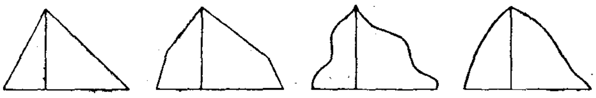
[3] У Heiberg'ову издању ова дефиниција стоји у загради а има и таквих Еуклидових издања у којима је ова дефиниција изостављена. Понеки коментатори сматрају да ова дефиниција не припада Еуклиду и то из два разлога: 1. она је изложена толико нејасно, таквим стилом да ни мало не одговара Еуклидову духу излагања и 2. у својим расуђивањима ни на једном месту Еуклид не користи ову дефиницију. Да би ова дефиниција добила нешто јаснији смисао, понеки коментатори предлажу овако допуњену редакцију те дефиниције: Две слике су реципрочне, ако код сваке од тих двеју слика постоји размера претходног (елемента) према наредном, као и наредног према претходном. Другим речима, ако са прве слике узмемо два елемента *a* и *b*, којима на другој слици одговарају елементи *a'* и *b'*, онда за реципрочне

слике важи пропорција: a : b = a′ : b′. Такво тумачење ове дефиниције од стране неких коментатора ипак остаје проблематично, јер не следује непосредно из текста дефиниције. Из наведених разлога изостављање ове дефиниције заиста не умањује ни систематичност а ни потпуност неопходних појмова у Еуклидову излагању.

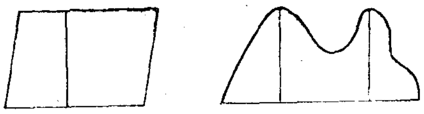
[4] Таква подела дужи зове се такође непрекидна подела или златан пресек.

Како смо већ наводили, код Еуклида се не употребљује реч, која би одговарала појму дужи као ограниченој правој; код њега се употребљује реч „εὐθεῖα“, права. Кад је потребно нагласити да је права „ограничена“, Еуклид употребљује израз, ἡ εὐθεῖα πεπερασμένη. У нашем преводу за што јасније формулисање, нарочито у овој књизи, често употребљујемо реч „дуж” и то тамо, где излагање може да буде тачније, краће и јасније.

[5] Код Еуклида појам висине није ограничен обликом оних линија које спајају врх са основицом — то могу да буду не само дужи (троугао), већ и изломљене линије (полигони) односно криве линије (сл. 3). Ако слика има више тачака на истом највећем отстојању од основице, нормала из сваке од тих тачака је висина слике према датој основици (сл. 4).



Сл. 3



Сл. 4

[6] У Heiberg’ову издању је оваде финиција стављена у заграду. T. L. Heath ову дефиницију наводи само у примедбама. Разлови су за то ови: 1. Дефиниција нема јасног

одређеног смисла; њен стил не одговара Еуклидову стилу. 2. По садржају свом дефиниција је погрешно стављена у VI књигу. Она се односи на теорију размере и пропорције и према томе треба да се налази у V књизи. 3. Еуклид уопште не сматра размеру, рецимо, двеју дужина, као величину, односно број и никад не врши операције са размерама као са бројевима. Према томе готово *са* сигурношћу може се тврдити да је ова дефиниција додатак познијег времена.

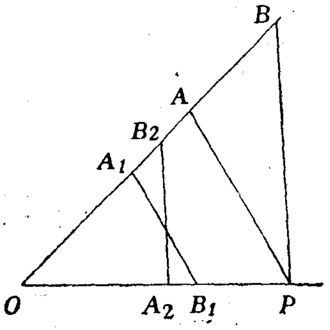
Савременим математичким језиком ову дефиницију можемо овако протумачити. Из две размере $a_1 : b_1$ и $a_2 : b_2$ саставља се трећа $a : b$ са вредношћу

$$(*) \qquad \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1\, a_2}{b_1\, b_2}.$$

Мало заобилазним путем ову дефиницију можемо извести и у Еуклидову смислу, не уводећи операције са размерама као са бројевима. Нека су дате две размере: $a_1 : b_1$ и $a_2 : b_2$. Саставимо помоћу њих две помоћне пропорције

$$a_1 : b_1 = a : p,$$
$$a_2 : b_2 = p : b,$$

где је p по жељи изабрана дужина. Тврдимо, према дефиницији, да је размера $a : b$ састављена од размере $a_1 : b_1$ и $a_2 : b_2$. Лако је проверити, елиминишући дужину p да је при томе задовољена једначина (*). На слици (сл. 5) је наведена одговарајућа конструкција за одређивање дужина a и b, ако су дате дужине a_1, b_1, a_2, b_2. На слици су: $OA_1 = a_1$, $OB_1 = b_1$, $OA_2 = a_2$, $OB_2 = b_2$, $OA = a$, $OB = b$; $PA \parallel A_1B_1$, $PB \parallel A_2B_2$.



Сл. 5

[7] Од интереса је грчки израз „ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος“, који се буквално преводи „под истом висином“. Предлог „ὑπὸ“ носи у себи просторни елемент.

[8] Доказ ове теореме је класичан пример примене чувене Еуклидове дефиниције пропорционалности величина (дефи-

ниција 5,V књиге). На супрот савременим доказима у доказу се не помиња случај несамерљивих величина. Методичка нализаа ваљаности Еуклидова доказа према другим доказима претставља и данас још питање о коме расправљају методичари.

[9] Еуклид се зауставља само на случају унутрашње подела страна троугла, а изоставља случај кад права паралелна страни троугла сече друге стране на продужењима. При томе је формулисао своју поделу појмом „ἀνάλογον" — пропорционално.

[10] Еуклид се зауставља само на симетрали унутрашњег угла троугла без обзира на то што је још Аристотелу (384—322 пре наше ере) била позната особина и симетрале спољашњег угла. Особине симетрала, унутрашњег и спољашњег угла, стоје у вези са такозваним Аполонијевим кругом као геометриским местом тачака чија су растојања од две сталне тачке у датом сталном односу. Крајеви пречника тог круга деле дуж што спаја две сталне тачке *хармониски*. Ако су A и B крајеви те дужи, а P (унутрашња) и Q (спољашња) тачке поделе, онда за хармониску поделу имамо

$$AP:PB=AQ:BQ,$$

одакле можемо извести вредност такозване *хармониске средине*:

$$\frac{1}{PQ}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AQ}+\frac{1}{BQ}\right)$$

[11] Ова теорема одговара тзв. првом случају сличности троуглова. Еуклид поставља као услов једнакост свих одговарајућих углова троуглова; међутим то није потребно — — довољно је навести једнакост само двају углова, јер су тада и трећи углови једнаки.

[12] Како у доказу ове теореме, тако и у доказима других теорема ове књиге Еуклид се користи особином размера једнако удаљених. Напоменимо да о размерама једнако удаљених било је речи у претходној, петој књизи и то у 17. дефиницији и у 22. теореми. Кад се позивамо на ову теорему кратко наводимо „једнакоудаљеност".

Као тзв. други случај сличности троуглова Еуклид ставља случај са условом пропорцисналности одговарајућих страна. У савременом систему Елементарне геометрије теореме о сличности троуглова се доказују много једноставније.

[13] Теорема наводи случај сличности троуглова, кад су две стране једног пропорционалне хомологним странама другог, а овима захваћени углови једнаки. Еуклидов доказ и ове теореме компликованији је од савременог доказа.

[14] У овој теореми је формулисан четврти и последњи случај сличности троуглова. Интересантно је да се истакне да су код Еуклида, у првој књизи (I, 8, 24, 26), наведена само три случаја подударности троуглова, а недостаје овај, четврти став: Два су троугла подударна, ако имају по две стране једнаке и ако су углови наспрам једне од њих једнаки, а наспрам друге оба или оштра, или тупа или права.

[15] Доказ ове теореме, по мишљењу коментатора, развучен је непотребно од стране арапских преписивача. Заиста, довољно је утврдити једнакост одговарајућих углова, јер, на основу става 4. ове књиге, следује сличност троуглова.

[16] У Heiberg'ову издању слике на стр. 109 нису добро распоређене: три дужи са ознакама А, В, Г треба да стоје уз доњу слику на тој истој страни.

[17] У Heiberg'ову издању слика ове теореме очигледно не одговара садржају теореме. Троугао АВГ треба да има исту површину са троуглом АΔЕ.

[18] У овој теореми доказује се геометриски позната особина пропорције, која се аналитички формулише овако: ако је

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4,$$

онда је

$$a_1 \, a_4 = a_2 \, a_3 ;$$

и обрнуто, из последње особине четири величине следује наведена пропорција. Ова Еуклидова теорема и њен доказ показују и овде да Еуклид није користио ни најпростије аритметичке особине пропорције.

[19] Ова Еуклидова теорема служи као пример строгости излагања, кога се придржавала његова школа. Претходна теорема доказана за четири произвољне пропорционалне дужи Еуклиду није била довољна за случај кад су две од тих дужи једнаке.

[20] Како већина коментатора тумачи, смисао речи „у сличном положају" је да у задатку треба да буде наведена она страна дате праволиниске слике која треба да одговара датој дужи.

[21] Теорема је доказана само за случај кад је дата праволиниска слика подељена само на два троугла. Еуклид не ставља никакве примедбе за случајеве кад се слика дели на више троуглова; конструкције и у тим случајевима не задају тешкоће.

[22] Кратко ову теорему можемо овако алгебарски доказати.

Уведимо ознаке:

$AB=a,\ B\Gamma=b,\ \Delta E=a_1,\ EZ=b_1,\ BH=c.$

Површ. $AB\Gamma=Q$, Површ. $\Delta EZ=q$, Површ. $ABH=Q'$.

И можемо писати:

$$\begin{aligned} & a:a_1=b:b_1\,, \\ & b:b_1=b_1:c, \\ \therefore\quad & a:a_1=b_1:c \\ & Q'=q, \\ \therefore\quad & Q:Q'=b:c \\ \therefore\quad & Q:q=b:c=b:\frac{b_1^2}{b}=b^2:b_1^2. \end{aligned}$$

[23] Ова теорема се већ и у неким старим рукописима доказује једноставније, разлагањем слике на троуглове дијагоналама из истог темена. У овом облику она је ушла и у школску литературу.

[24] Наведимо доказ и ове теореме, рецимо, њеног првог дела, у алгебарском облику.

Уведимо ознаке:

$AB=a_1,\quad \Gamma\Delta=a_2,\ EZ=a_3,\ H\Theta=a_4,$

$AKB=Q_1,\ \Lambda\Gamma\Delta=Q_2,$ Површ. $MZ=Q_3$, Површ. $N\Theta=Q_4$.

Дато је: $a_1:a_2=a_3:a_4$.

$Q_1:Q_2=a_1^2:a_2^2,\quad Q_3:Q_4=a_3^2:a_4^2$ (из сличности).

Докавати:

$$Q_1 : Q_2 = Q_3 : Q_4 .$$

Уведимо c_1 и c_2:

$$a_1 : a_2 = a_2 : c_1 = k$$

$$a_3 : a_4 = a_4 : c_2 = k$$

па примећујемо да је тада

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_3}{c_2} = k^2,$$

јер је

$$a_1 = k\, a_2 ,\quad c_1 = a_2\, k^{-1} \quad \text{и} \quad a_3 = k\, a_4 ,\ c_2 = a_4\, k^{-1}.$$

Према томе имамо

$$Q_1 : Q_2 = a_1^2 : a_2^2 = a_1^2 : a_1 c_1 = a_1 : c_1 = k^2 ;$$

$$Q_3 : Q_4 = a_3^2 : a_4^2 = a_3^2 : a_3 c_2 = a_3 : c_2 = k^2,$$

и на тај начин

$$Q_1 : Q_2 = Q_3 : Q_4 .$$

[25] Сложена размера од две размере a_1/a_2 и b_1/b_2 је размера

$$\frac{a_1}{a_2} \times \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1\, b_1}{a_2\, b_2} .$$

[26] Докажимо и ову теорему.

Ставимо

$$a_1 = B\Gamma ,\quad \Gamma H = a_2 ,\quad \Gamma\Delta = b_1 ,\quad \Gamma E = b_2 ,$$

Површ. $A\Gamma = Q_1$, Површ. $\Gamma Z = Q_2$, Површ. $\Gamma\Theta = Q$.

Уведимо дужине K, L, M према условима

$$a_1 : a_2 = K : L, \qquad b_1 : b_2 = L : M.$$

Тада је

$$\frac{a_1}{a_2}\,\frac{b_1}{b_2} = \frac{K}{L} \cdot \frac{L}{M} = \frac{K}{M} .$$

С друге стране имамо

$$Q_1 : Q = a_1 : a_2 = K : L,$$

$$Q : Q_2 = b_1 : b_2 = L : M.$$

Одакле је

$$\frac{Q_1}{K}=\frac{Q}{L}=\frac{Q_2}{M}$$

и за једнакоудаљене имамо

$$\frac{Q_1}{K}=\frac{Q_2}{M}$$

што значи

$$Q_1 : Q_2 = K : M = a_1 b_1 : a_2 b_2 .$$

[27] Како наводи Плутарх решење овог задатка било је познато још Питагори. Еуклидово решење заснива се углавном на решењима ових претходних задатака: а) 44, I књиге: На датој дужи конструисати у датом праволиниском углу паралелограм једнак датом троуглу, b) 45, I књиге: У датом праволиниском углу конструисати паралелограм једнак датој праволиниској слици. Сем тога су искоришћене конструкције 13. и 18. ове књиге.

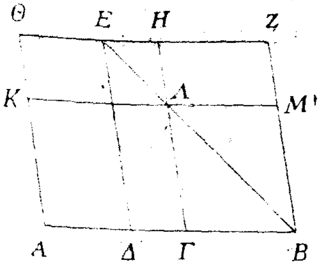
[28] У овој и у неколико наредних теорема ове књиге реч је о конструкцији паралелограма у вези са датом дужи, рецимо, AB. Могу се разликовати три случаја: 1. Основом паралелограма може бити цела дуж AB. 2. Основом паралелограма може бити дуж AC < AB, један део дужи AB. Тада се паралелограм на преосталом делу дужи, на CB, код Еуклида зове ἐλλείπον, што значи „мањак“, може се превести и са „допуна“. То је оно што недостаје паралелограму на AC до паралелограма на целој дужи AB. 3. Основом паралелограма дуж AD > AB, тј. дуж AB са додатком BD. Паралелограм на BD је код Еуклида ὑπερβάλλον, што значи „сувишак“.

Опширније, у другом облику, ову теорему можемо формулисати:

Од свих паралелограма конструисаних на једном делу одређене дужи тако да њихови допуне (паралелограми конструисани на преосталом делу те дужи) буду паралелограми слични и у сличном положају са паралелограмом конструисаном на другој половини дате дужи, онај је паралелограм највећи који је конструисан на првој половини дате дужи и сличан својој допуни.

У вези са наведеним у овој примедби приметимо да израз „конструисати, рецимо, паралелограм на датој дужи“, који употребљујемо ради краткоће, не значи код Еуклида да дата дуж служи обавезно целом страном паралелограма; страна паралелограма може бити једнака и већа и мања од дате дужи; важно је да дуж и страна припадају истој правој и и имају један заједнички крај.

[29] У своме издању Еуклидових елемената I. L. Heiberg штампа и други део доказа ове теореме, посматрајући наиме случај кад је први део АΔ дужи АВ, на коме је конструисан паралелограм мањи од половине АГ (сл. 6). Доказ је сличан доказу првог случаја. Ова Еуклидова теорема, сматрана као решење задатка на max. - min., била је предмет анализе многих коментатора, нарочито у време проналаска инфинитезималног рачуна.



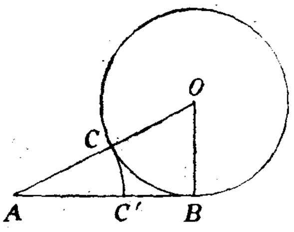
Сл. 6

[30] Овај задатак је у вези са геометриским решавањем квадратне једначине

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Заиста, из те једначине следује пропорција

$$a : x = x : (a - x).$$



Сл. 7

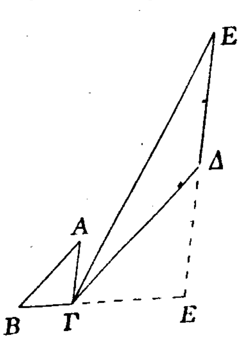
За решавање тог задатка обично се сад употребљује ова конструкција. На крају у B дужи $AB = a$ конструише се тангентни круг пречника a и повуче секанта AO кроз центар O (сл. 7). Спољашњи део $AC = x = AC'$ те секанте је тражени већи део дужи AB подељене у крајњој и средњој размери. Конструкција се проверава једначином

$$a^2 = x(a + x),$$

која изражава познату особину тангентне дужи и отсечака секанте.

[31] Познато је да ова теорема вреди не само у случају праволиниских сличних слика већ и у случају сличних криволиниских слика. Са том теоремом је у вези и уопштена Питагорина теорема: $Q_a+Q_b=Q_c$, где су Q_a, Q_b, Q_c површине сличних слика конструисаних над катетама (*a*, *b*) и над хипотенузом (*c*). Ова теорема доводи и до чувене Хипократове теореме о једнакости збира површина месечастих рубова ограничених полукруговима над хипотенузом и над катетама и површине правоуглог троугла. Ова теорема, која је показала могућност једнакости површине омеђене кривом линијом и површине праволиниске слике имала је огроман значај у историји математике; она је служила као потстрек за покушаје да се нађу такве коначно-одређене праволиниске слике, чија је површина једнака површини круга (квадратура круга).

[32] Формулисању ове теореме чињена је од стране коментатора (према T. L. Heath'у код Clavins'a, Lardner'a и Todhunter'a) замерка да је недовољно. Заиста, недовољно је навести, без обзира на пропорционалност, да су стране *АВ*, *АГ* паралелне странама *ΔГ*, *ΔЕ*. Ако је страна *ΔЕ* паралелна страни *АГ*, но супротно усмерена, као што показује слика, која одговара слици текста, стране *ВГ* и *ГЕ'* (сл. 8) неће бити на истој правој.



Сл. 8

[33] I. L. Heiberg у Appendix'у даје допуну ове теореме наводећи да су луци пропорционални одговарајућим кружним исечцима кругова. Ова допуна, према Heiberg'ову мишљењу, припада Теону из Александрије (око 350 г. пре н. е.). У Appendix'у је наведен и текст доказа овог додатка.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА VII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 7

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

СЕДМА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1955

САДРЖАЈ СЕДМЕ КЊИГЕ

ПРЕДГОВОР

Седма књига Еуклидових елемената је прва књига Еуклидове теорије бројева, којој су посвећене VII—X књиге Елемената. У седмој књизи су дати основни појмови који се односе на састав бројева и на њихову дељивост. Садржај књиге је релативно једноставан, али је форма у којој се тај садржај износи за савременог читаоца необична, често је сувише развучена и, могло би се рећи, далеко заостаје за формом у којој су геометриске истине биле у претходним књигама изложене. Да би излагање било савременом читаоцу што приступачније при преводу смо себи допуштали више отступања од буквалног текста, али смо притом ипак тежили да садржај остане неизмењен.

При изради и ове књиге су ми помогли В. В. Мишковић и Т. П. Анђелић, на чему им овде изјављујем захвалност.

А. Б.

ТЕКСТ

Дефиниције[1]

1. Јединица је оно помоћу чега се сваки предмет који постоји назива један (једно).[2]

2. Број је множина састављена од јединица.[3]

3. Један број чини део другог броја, мањи од већег, ако мери већи.[4]

4. А делове ако не мери.[5]

5. Већи број је мултиплум од мањег, ако се мери мањим.[6]

6. Паран је онај број који је дељив на два једнака дела.[7]

7. Непаран је онај број који није дељив на два једнака дела или који се разликује за јединицу од парног.[8]

8. Парно-паран број је онај који се мери парним бројем паран број пута.[9]

9. Непарно-паран број је онај који се мери парним бројем непаран број пута.[10]

[10. Парно-непаран број је онај који се мери непарним бројем паран број пута.][11]

11. Непарно-непаран број је онај који се мери непарним бројем непаран број пута.[12]

12. Прост број је онај који се мери само јединицом.[13]

13. Међусобно прости бројеви су они који имају као заједничку меру само јединицу.[14]

14. Сложен број је онај који се мери неким бројем.[15]

15. Међусобно сложени бројеви су они који се мере неким бројем као заједничком мером.[16]

16. Каже се да се један број множи другим бројем кад се први број узима као сабирак онолико пута колико је јединица у другом броју; и тада се добива неки број.[17]

17. Ако се као резултат множења два броја добије неки број, овај се зове површински, а два броја, који су множени, зову се њихове стране.

18. Ако се као резултат множења три броја добије неки број, овај се зове запремински, а три броја, који су множени, зову се његове ивице.

19. Квадратни број је исти број пута узет исти број или површински број једнаких страна.

20. Кубни број пак је исти број пута узет исти број и још узет исто толико пута или запремински број једнаких ивица.[18]

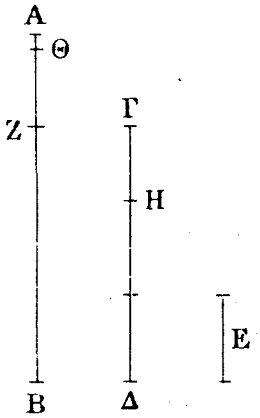
21. Бројеви су пропорционални ако је први број истоструки мултиплум, или исти део, или исти делови од другог, као што је трећи од четвртог.[19]

22. Слични површински или запремински бројеви су они чије су стране односно ивице пропорционалне.[20]

23. Савршен (перфектан) је онај број који је једнак збиру свих својих делова (који га мере).[21]

1

Ако су дата два неједнака броја па при узастопном одузимању мањег од већег остатак не бива мера претходног, који смо одузимали, док тај остатак не постане једнак јединици, та су два броја међусобно прости.



Нека за два дата броја AB и ΓΔ при узастопном одузимању мањег од већег остатак не бива мера претходног, који смо одузимали, док тај остатак не постане једнак јединици. Тврдим да су бројеви AB и ΓΔ међусобно прости, тј. заједничка мера бројева AB и ΓΔ је само јединица.

Заиста, ако AB и ΓΔ не би били међусобно прости, онда би њихова заједничка мера била неки број. Нека их, дакле, мери неки број и нека то буде E. Нека ΔΓ при мерењу BA буде BZ и од АВ остави још ZА, мањи број од ΔГ; ZА при мерењу ΔГ остави НГ, мањи број од ZА, а НГ при мерењу ZА остави број θА који је једнак јединици.

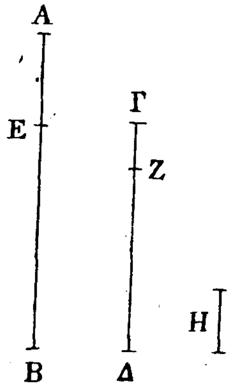
Како сад број Е мери број ГΔ, а ВZ је једнак броју ГΔ, то ће Е мерити и ВZ; али Е мери и цео број АВ, што значи да ће Е мерити и остатак АZ. Међутим, АZ мери ΔН, значи Е мери и ΔН. Али Е мери и цео број ΔГ, значи он ће мерити и остатак ГН. Даље, ГН мери Zθ, те према томе Е мери и Zθ. Али Е мери и цео број ZА, те тако Е мери и остатак, јединицу. То би значило да постоји број који мери јединицу, а то је немогуће. Према томе не постоји никакав број који би мерио бројеве АВ и ГΔ. Бројеви АВ и ГΔ су на тај начин међусобно прости. А то је требало доказати.[22]

2.

За два броја који нису међусобно прости наћи њихову највећу заједничку меру.

Нека су дата два броја, који нису међусобно прости, АВ и ГΔ. Треба наћи за бројеве АВ и ГΔ највећу заједничку меру.

Ако ГΔ мери АВ, а ГΔ мери и сам себе, биће ГΔ заједничка мера ГΔ и АВ. И јасно је да је она и највећа, јер никакав број већи од ГΔ не мери ГΔ.



Ако пак ГΔ не мери АВ онда ће за бројеве АВ и ГΔ при узастопном одузимању мањег од већег остати неки број, који мери и њему претходни број. Јединица не може бити тај остатак јер би тада бројеви АВ и ГΔ били међусобно прости, а то се не претпоставља. Значи остаће неки број који мери и њему претходни број. Нека ГΔ после одмеравања ВЕ остави ЕА, мањи од ΔГ; ЕА после одмеравања ΔZ остави ZГ мањи од ЕА; а ГZ нека мери АЕ. Како сад ГZ мери АЕ, а АЕ мери ΔZ, то ГZ мери и ΔZ, а мери и самог себе, те према томе ГZ мери и цео број ГΔ.

Како ГΔ мери ВЕ, то ГZ мери и ВЕ, али ГZ мери и ЕА, значи ГZ мери и цео број ВА. Али ГZ мери ГΔ. Значи да је ГZ заједничка мера оба броја АВ и ГΔ. Тврдим још да је она и највећа. Заиста, ако ГZ није највећа заједничка мера бројева АВ и ГΔ, онда ће бројеве АВ и ГΔ мерити неки број већи од ГZ. Нека их, дакле, мери такав неки број и нека то буде Н. Како тада Н мери ГΔ, а ГΔ мери ВЕ, то ће Н мерити и ВЕ. Али тај број мери и цео број ВА, те према томе он мери и остатак АЕ. Али АЕ мери ΔZ, те на тај начин Н мери и ΔZ, али Н мери и цео број ΔГ, значи он мери и остатак ГZ, тј. већи број мери мањи, а то је немогуће. Према томе за два броја АВ и ГΔ не постоји број већи од ГZ који би их мерио. На тај начин је ГZ највећа заједничка мера бројева АВ и ГΔ, а то је требало доказати.[23]

Последица

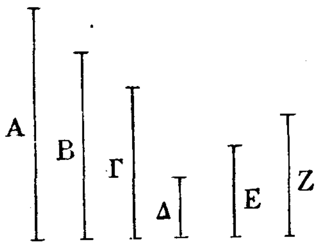
Одавде је јасно да ако број мери два броја, он мери и њихову заједничку највећу меру. А то је требало доказати.

3.

За три дата броја који нису међусобно прости наћи њихову највећу заједничку меру.

Нека су дата три броја А, В, Г који нису међусобно прости. Треба за А, В, Г, наћи највећу заједничку меру.

Узмимо највећу заједничку меру Δ за два броја А и В. та мера или је мера и броја Г или није. Нека прво она буде мера. Али она је мера и бројева А и В. На тај начин она мери А, В, Г, те је Δ заједничка мера за А, В, Г. Тврдим да је она и највећа. Заиста, ако Δ није највећа заједничка мера за А, В, Г, онда бројеве А, В, Г мери број већи од Δ. Нека постоји такав број и нека то буде Е. Како Е мери А, В, Г, мериће и А и В. Дакле мериће и њихову највећу заједничку меру. Али највећа заједничка мера А и В је Δ.



Према томе Е мери Δ, већи број — мањи, а то је немогуће Према томе не постоји број већи од Δ који би мерио бројеве А, В, Г. На тај начин је Δ највећа заједничка мера бројева А, В, Г.

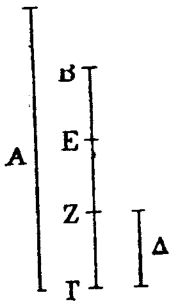
Нека сад Δ не мери Г. Прво тврдим да бројеви Г и Δ неће бити међусобно прости, мери их неки број. Број који мери бројеве А, В, Г мери и бројеве А, В и њихову највећу заједничку меру Δ. Али он мери и број Г. Према томе за бројеве Δ, Г постоји број који их мери, бројеви Δ и Г нису према томе међусобно прости. Узмимо њихову највећу заједничку меру Е. Пошто Е мери Δ, а Δ мери А и В, то Е мери А и В. Али Е мери и Г. На овај начин Е мери А, В, Г, те је Е заједничка мера за А, В, Г. Тврдим да је она и највећа. Заиста, ако Е није највећа заједничка мера А, В, Г, онда ће бројеве А, В, Г мерити неки број већи од Е. Нека такав број постоји и нека то буде Z. Како Z мери А, В, Г, он мери и А, В. А како је највећа заједничка мера А и В број Δ, онда Z мери и Δ. Али Z мери и број Г, према томе Z мери Δ и Г, и највећу заједничку меру бројева Δ и Г. А како је Е највећа заједничка мера бројева Δ, Г, то Z мери Е, већи мери мањи, а то је немогуће. Према томе не постоји за бројеве А, В, Г број већи од Е који мери те бројеве. На овај начин Е је највећа заједничка мера за А, В, Г. А то је требало доказати.[24]

4.

Сваки број је или део или делови од сваког другог броја, мањи од већег.

Нека су А и ВГ два броја и ВГ је мањи. Тврдим да је ВГ или део или делови броја А.

Заиста, бројеви А и ВГ или су међусобно прости или нису. Нека су, прво, бројеви А и ВГ међусобно прости. Тада при подели ВГ на његове јединице, свака од јединица ВГ је део броја А, а ВГ је делови броја А.



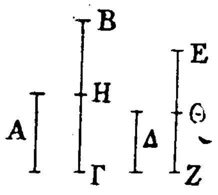
Нека сад бројеви А и ВГ нису међусобно прости. Тада је ВГ или мера за А или није. Ако је ВГ мера за А, онда је ВГ део од А. Ако није, узмимо највећу заједничку меру Δ бројева А и ВГ и поделимо ВГ на ВЕ, ЕZ, ZГ који су једнаки Δ. Међутим, како Δ мери А, биће Δ део од А. Али сваки од бројева ВЕ, ЕZ, ZГ једнак је Δ, те је према томе сваки од ВЕ, ЕZ, ZГ део од А. Према томе је број ВГ једнак деловима од А.

На овај начин, сваки број је или део или делови од сваког другог броја, мањи од већег.[25]

5.

Ако један број чини део другог броја и неки други број чини исти део неког другог броја, онда и збир првих бројева чини исти део збира других бројева, као поједини број појединог.

Нека је број А део броја ВГ, и неки други број Δ исти део, као и А од ВГ, неког другог броја ЕZ. Тврдим да је збир А и Δ исти део од збира ВГ и ЕZ као и А од ВГ.



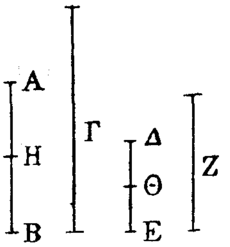
Заиста, пошто колики део А буде био од ВГ, толики ће део и Δ бити од ЕZ, то ће ВГ садржати исто толико пута А, колико пута ЕZ садржати Δ. Поделимо сад ВГ на делове ВН, НВ једнаке А, а ЕZ на Еθ, θZ једнаке Δ. Тада је делова ВН, НГ исто толико, колико је делова Еθ, θZ. И како је ВН једнако А, а Еθ једнако Δ, биће и збир ВН и Еθ једнак збиру А и Δ. Из истих разлога је и збир НГ и θZ једнак збиру А и Δ. Према томе колико је у ВГ бројева једнаких А, толико је у збиру бројева ВГ и ЕZ збирова бројева А и Δ. Према томе колики је ВГ мултиплум од А, исто толики мултиплум је збир ВГ и ЕZ од збира А и Δ. На овај начин, колики је део А од ВГ, исто толики ће део бити збир А и Δ од збира ВГ и ЕZ. А то је требало доказати.[26]

6.

Ако један број чини делове другог броја и неки други број чини исте делове неког другог броја, онда и збир првих бројева чини исте делове збира других бројева, као поједини број од појединог.

Нека број АВ чини делове броја Г и са друге стране, ΔЕ чини исте делове броја Z као и АВ од Г. Тврдим да и збир АВ и ΔЕ чини исте делове од збира Г и Z као и АВ од Г.

Заиста, пошто колике делове АВ чини од Г, толике ће делове чинити и ΔЕ делова од Z, а то значи да је у АВ исто толико делова од Г, колико ΔЕ делова од Z. Поделимо АВ на АН и НВ, делове од Г, а ΔЕ на Δθ и θЕ делове од Z; тада ће бити толико делова АН, НВ колико делова Δθ, θЕ. И пошто колики АН буде био део од Г, толики ће и Δθ бити од Z, то ће колики АН буде био део од Г, толики део и збир АН и Δθ бити од збира Г и Z. Из истих разлога, колики је део НВ од Г, толики је део и збир НВ и θЕ од збира Г и Z. Према томе колики су делови АВ од Г исто толики су делови збир АВ и ΔЕ од збира Г и Z. А то је требало доказати.[27]

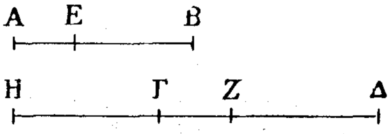


7.

Ако је један број исти део другог броја какав је и умањилац првог броја део умањиоца другог броја, онда, је и остатак првог броја исти део остатка другог броја.

Нека је број АВ исти део броја ГΔ какав је и умањилац АЕ део умањиоца ГZ. Тврдим, да је и остатак ЕВ исти део остатка ZΔ какав је и цео број АВ целог броја ГΔ.

Заиста, нека је ЕВ исти део од ГН какав је и АЕ део од ГZ, биће и АЕ исти део од ГZ какав и АВ од НZ. Али се претпоставља да је АВ онолики део од ГΔ колики је АЕ део од ГZ. Значи да је АВ онолики део од НZ, колики је исти тај број део од ГΔ. Према томе је број НZ једнак броју ГΔ. Одузмимо заједнички број ГZ; тада је остатак НГ једнак остатку ZΔ. А како је АЕ исти део од ГZ, као и ЕВ од НГ, а НГ је једнак ZΔ, биће

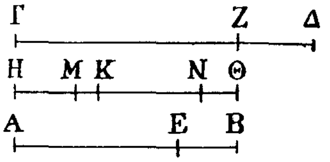


АЕ онолики део од ΓZ, колики је ЕВ део од ZΔ. Али колики АЕ буде био део од ΓZ, толики ће и АВ бити део од ΓΔ. На овај начин је остатак ЕВ онолики део од остатка ZΔ, колики је цео број АВ део целог броја ΓΔ. А то је требало доказати.[28]

8.

Ако један број чини исте делове другог броја као што умањилац првог броја чини делове умањиоца другог броја, онда и остатак првог броја чини исте делове остатка другог броја.

Нека број АВ чини исте делове броја ΓΔ као што умањилац АЕ чини делове умањиоца ΓZ. Тврдим да и остатак ЕВ чини исте делове остатка ZΔ као и цео број АВ целог броја ΓΔ.



Заиста, узмимо НΘ једнако АВ. Тада колике делове НΘ чини од ΓΔ, толике делове и АЕ чини од ΓZ. Поделимо НΘ према деловима ΓΔ на делове НК и КΘ, а АЕ на делове АΛ и ΛЕ према деловима ΓZ[1]). Тада је број поделака НК, КΘ једнак броју поделака АΛ, ΛЕ. И пошто колики НК буде био део од ΓΔ, толики ће и АΛ бити део од ΓZ; а како је ΓΔ веће од ΓZ, биће и НК веће од АΛ. Конструишимо НМ једнако АΛ. Онда, колики НК буде био део од ΓΔ, толики ће и НМ бити део од ΓZ. Према томе остатак МК ће бити онолики део од остатка ZΔ колики је цео број НК део целог броја ΓΔ. А, опет, колики КΘ буде био део од ΓΔ, толики ће и ЕΛ бити део од ΓZ; а како је ΓΔ веће од ΓZ, биће ΘК веће од ЕΛ. Конструишимо КN једнако ЕΛ. Онда колики КΘ буде био део од ΓΔ, толики ће и КN бити део од ΓZ. Према томе ће и остатак NΘ бити онолики део од остатка ZΔ, колики је цео број КΘ део целог броја ΓΔ. А доказали смо да је и остатак МК онолики део од остатка ZΔ, колики је цео број НК део целог броја ΓΔ. Те према томе је и збир МК и NΘ онолики део од ΔZ, колики је цео број ΘН део целог броја ΓΔ. Но збир МК и NΘ једнак је ЕВ, а ΘН је једнако ВА. На овај

---

[1]) На слици недостаје тачка Λ између А и Е.

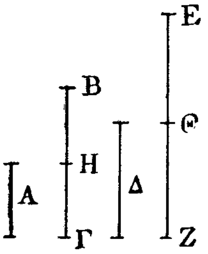
начин, остатак ЕВ чини исте делове од остатка ZΔ, као и цео број АВ од целог броја ГΔ. А то је требало доказати.[29]

9.

Ако је један број део другог броја, а трећи број исти део четвртог броја, онда је и, после пермутације, први број исти део или исти делови трећег броја као и други број четвртог.

Нека је број А онолики део броја ВГ, колики је део број Δ неког броја ЕZ. Тврдим да је, после пермутације, А онолики део или делови броја Δ, колики је део или делови број ВГ броја ЕZ.

Заиста, како је А онолики део ВГ колики је Δ део ЕZ, то ће и број ЕZ садржати онолико бројева једнаких Δ колико број ВГ садржи бројева једнаких А. Поделимо ВГ на делове ВН и НГ једнаке А, а ЕZ на делове Еθ, θZ једнаке Δ. На тај начин је број поделака ВН, НГ једнак броју поделака Еθ, θZ.

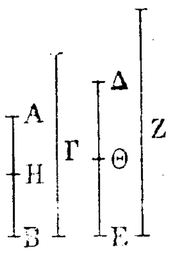


И, ако су бројеви ВН, НГ међусобно једнаки, биће и бројеви Еθ и θZ међусобно једнаки, а и број поделака ВН, НГ једнак броју поделака Еθ, θZ, те тако колики део или колике делове буде ВН сачињавао од Еθ, исто толики део или делове ће сачињавати и НГ од θZ. Према томе, колики део или колике делове буде ВН сачињавао од Еθ, исто толики део или толике делове ће сачињавати и збир ВГ од збира ЕZ. Но ВН је једнако А, а Еθ једнако Δ. Те тако, колики део или колике делове буде А сачињавао од Δ, исто толики део или делове сачињаваће и ВГ од ЕZ. А то је требало доказати.[30]

10.

Ако један број чини делове другог броја, а трећи број чини исте делове четвртог броја, онда ће после пермутације, делови или део првог од трећег броја бити једнаки деловима или делу другог од четвртог броја.

Нека број АВ чини делове броја Г, а други неки број ΔЕ исте делове неког броја Z. Тврдим да ће, после пермутације, АВ сачињавати од ΔЕ исте делове или исти део, као што ће Г сачињавати делове или део од Z.



Заиста, колико делова АВ чини од Г, толико делова чини и ΔЕ од Z, а то значи колико делова од Г садржи АВ, толико делова од Z садржи ΔЕ. Поделимо АВ на делове АН, НВ једнаке деловима броја Г, а ΔЕ на делове Δθ, θЕ једнаке деловима броја Z. Број поделака АН, НВ биће једнак броју поделака Δθ, θЕ. И пошто колики део АН чини од Г, исто толики део Δθ чини од Z, то ће, после пермутације, и Г чинити онолики део или делове од Z колики део или делове буде чинио НВ од θЕ. Према томе, [колики део или делове АН чини од Δθ, толики део или делове чини и НВ од θЕ. Значи, колики део или делове АН чини од Δθ, толики део или делове чини АВ од ΔЕ; но доказано је да колики део или делове АН чини од Δθ, толики део или делове Г чини од Z, и] колико делова или део АВ чини од ΔЕ, толико делова или део чини и Г од Z. А то је требало доказати.[31]

11.

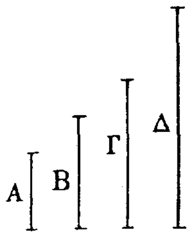
Ако је цео број према другом целом броју као умањилац првог броја према умањиоцу другог броја, онда је и остатак првог броја према остатку другог као цео број према целом броју.

Нека је цео број АВ према целом броју ГΔ, као умањилац АЕ према умањиоцу ГZ. Тврдим, да је и остатак ЕВ према остатку ZΔ као цело АВ према целом ГΔ.

Пошто је АВ према ГΔ као АЕ према ГZ, то ће АВ од ГΔ чинити исти део или делове као и АЕ од ГZ. А онда и остатак ЕВ чини исти део или исте делове од остатка ZΔ као и АВ од ГΔ. На овај начин се ЕВ односи према ZΔ, као АВ према ГΔ. А то је требало доказати.[32]

12.

Ако имамо произвољан број пропорционалних бројева, који се сви односе као један претходни према једном наредном, биће у истој размери и збир свих претходних према збиру свих наредних.

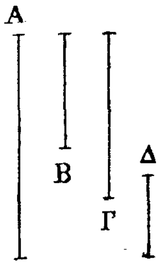


Нека је неколико бројева А, В, Г, Δ пропорционално, тј. таквих да је А према В, као Г према Δ. Тврдим да ће А према В бити као и збир А и Г према збиру В и Δ.

Заиста, пошто је А према В као Г према Δ, биће А од В исти део или исти делови као што је и Г од Δ. И збир од А и Г је исти део или исти делови од збира В и Δ као што је и А од В. На овај начин се А односи према В као и збир А и Г према збиру В и Δ. А то је требало доказати.[33].

13.

Ако су четири броја пропорционални, они ће бити пропорционални и пермутовани.



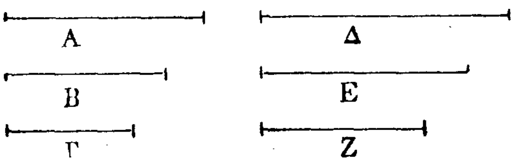
Нека су четири броја А, В, Г, Δ пропорционални, дакле А је према В, као Г према Δ. Тврдим да су они пропорционални и пермутовани, тј. А је према Г, као В према Δ.

Заиста, пошто је А према В као Г према Δ, биће А од В исти део или исти делови као што је и Г од Δ. Али, после пермутације, А је од Г исти део или исти делови као и В од Δ. Стога је А према Г као В према Δ. А то је требало доказати.[38]

14.

Ако се бројеви, узети по пар, од једне произвољне множине бројева и од друге исто толике множине бројева, налазе у истој размери, биће и подједнако удаљени бројеви у истој размери.

Нека се бројеви, узети по пар, од једне произвољне множине бројева А, В, Г и од друге исто толике множине бројева Δ, Е, Z налазе у истој сразмери, тј. А према В, као Δ према Е и В према Г као Е према Z. Тврдим да су и подједнако удаљени бројеви у истом односу, тј. А према Г, као Δ према Z.



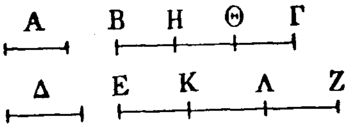
Заиста, пошто је А према В као Δ према Е, биће, после пермутације, А према Δ као В према Е. Даље, пошто је В према Г као Е према Z. И В је према Е као А према Δ, те се стога А односи према Δ као Г према Z. На овај начин, после пермутације, А је према Г као Δ према Z. А то је требало доказати.[34]

15.

Ако јединица мери други неки број, а трећи број мери исти број пута четврти број, онда, после пермутације, јединица мери исти број пута трећи број као што други број мери четврти број.

Нека јединица А мери број ВГ и то исти број пута као што други број Δ мери број ЕZ. Тврдим да и, после пермутације, А мери исти број пута број Δ као што број ЕГ мери ЕZ.

Заиста, пошто јединица А мери број ВГ исти број пута као и Δ број ЕZ, то ће ЕZ садржати онолико пута број Δ колико је у ВГ јединица. Поделимо ВГ на једнаке јединице ВН, Нθ, θГ, а ЕZ на делове ЕК, КΛ, ΛZ једнаке броју Δ. Тада је број поделака ВН, Нθ, θГ једнак броју поделака ЕК, КΛ, ΛZ. И пошто су јединице ВН, Нθ, θГ једнаке међусобом, а и бројеви ЕК, КΛ, ΛZ су једнаки међусобом, и множина јединица ВН, Нθ, θГ је истог броја као и множина ЕК, КΛ, ΛZ, то се јединица ВН односи према броју ЕК, као што се јединица Нθ односи према



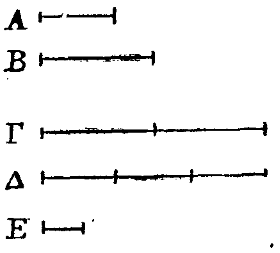
броју КΛ и јединица θГ према броју ΛZ. Али један од претходних се односи према једном од наредних, као што се збир свих претходних односа према збиру свих наредних. Према томе јединица ВН се тако односи према броју ЕК као ВГ према EZ. Али јединица ВН је једнака јединици А, а број ЕК једнак броју Δ. Према томе јединица А се односи према броју Δ као број ВГ према броју EZ. На овај начин јединица А мери број Δ исти број пута као што број ВГ мери EZ. А то је требало доказати.[35]

16.

Ако се два броја множе један другим, биће тако добијени бројеви једнаки један другом.

Нека су А и В два броја и нека А множећи В производи Г, а В множећи А производи Δ. Тврдим да је Г једнако Δ.

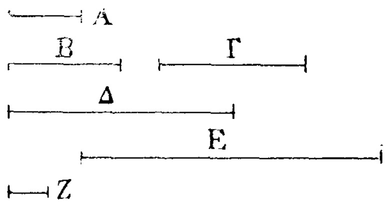
Заиста, ако А множећи В производи Г, онда В мери Г и то онолико пута колико је јединица у самом А. А јединица Е мери број А и то онолико пута колико је јединица у самом А. Исто онолико пута колико се Е садржи у А толико се пута В садржи у Г. После пермутације, јединица Е мери број В исто онолико пута колико пута А мери Г. И даље, пошто В множећи А производи Δ, онда А мери Δ и то онолико пута колико је јединица у самом В. Исто онолико пута колико се Е садржи у В толико пута се А садржи у Δ. Јединица Е онолико пута мери број В колико пута број А мери Г. Према томе А мери исти број пута и Г и Δ. На овај начин је Г једнако Δ. А то је требало доказати.[36]



17.

Ако један број множећи два броја производи два броја, онда се добијена два броја налазе у истој размери као и бројеви који се множе.

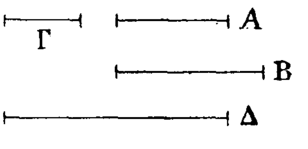
Нека број А множи два броја В и Г и производи бројеве Δ и Е. Тврдим да је В према Г као Δ према Е.



Заиста, пошто А множећи В производи Δ, онда В мери и Δ и то онолико пута колико је јединица у А. Исто тако и јединица Z мери број А и то онолико пута колико је јединица у самом А. Према томе јединица Z мери исти број пута број А колико и В мери Δ. Значи јединица Z се односи према броју А као В према Δ. Из истих разлога јединица Z се односи према броју А као Г према Е, што значи да се В односи према Δ као Г према Е. После пермутације, В ће се односити према Г као Δ према Е. А то је требало доказати.[37]

18.

Ако два броја множећи један број производе два броја, онда добијени бројеви стоје у истој размери као и бројеви множиоци.



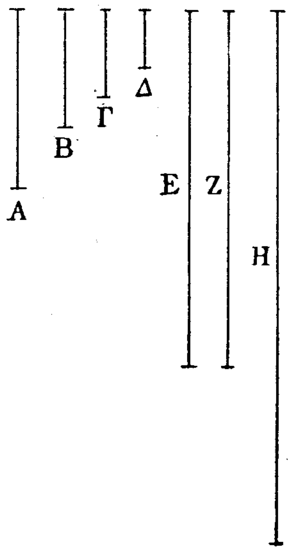
Нека два броја А и В множе број Г и нека се добију бројеви Δ и Е. Тврдим да се А односи према В као Δ према Е.

Заиста, пошто А множећи Г производи Δ, то и Г множећи А производи Δ. Из истог разлога број Г множећи В производи Е. Према томе број Г множећи два броја, А и В, производи два броја Δ и Е. А тада се А односи према В као Δ према Е. А то је требало доказати.[38]

19.

Ако су четири броја пропорционална, онда је број-производ првог и четвртог броја једнак броју-производу другог и трећег броја. И ако је производ првог и четвртог броја једнак броју-производу другог и трећег броја, та четири броја су пропорционална.

Нека су дата четири пропорционална броја A, B, Г, Δ, тако да се A односи према B као Г као Δ и нека је E производ множења Δ са A, Z производ множења Г са B. Тврдим да је E једнако Z.



Заиста, нека A множећи Г производи H. Пошто, према томе, A множећи Г производи H, а множећи Δ производи E, онда исти број A множећи два броја Г и Δ производи два броја H и E. Због тога се Г односи према Δ, као H према E. Али Г се односи према Δ као A према B. И на тај начин A се односи према B као H према E. Даље, пошто A множећи Г производи H, а B множећи Г производи Z, то два броја A и B множећи Г производе бројеве H и Z. Стога се A односи према B као H према Z. Али A се односи према B као H према E. И на тај начин се H односи према E као H према Z. Те тако и H према сваком од бројева E и Z стоји у истој размери, значи да је E једнако Z.

Нека је сад E једнако Z. Тврдим да се A односи према B као Г према Δ.

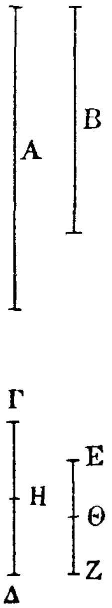
Заиста на основу истих расуђивања, пошто је E једнако Z, H ће се односити према E, као H према Z. Али H стоји према E, као Г према Δ, и H стоји према Z као A према B. И на тај начин A се односи према B као Г према Δ. A то је требало доказати.[39]

20.

Најмањи међу бројевима који су у истој размери мере остале исти број пута и то већи мери веће и мањи — мање.

Нека су ГΔ и EZ најмањи бројеви од бројева A и B, који стоје у истој размери. Тврдим да број ГΔ мери број A, а број EZ број B исти број пута.

Број ΓΔ не чини делове броја А. Но, ако је то могуће, узмимо да чини. Тада и ЕΖ чини исте делове од В као и ΓΔ од А. Према томе колико је у ΓΔ делова од А, исто толико ће бити и у ЕΖ делова В. Поделимо ΓΔ на делове ΓΗ и ΗΔ једнаке деловима А и ЕΖ на делове Еθ и θΖ једнаке деловима В. Тада је број поделака ΓΗ, ΗΔ једнак броју поделака Еθ, θΖ. И пошто су делови ΓΗ и ΗΔ међусобно једнаки бројеви, а Еθ и θΖ исто тако међусобно једнаки бројеви, и број поделака ΓΗ, ΗΔ једнак је броју поделака Еθ, θΖ, биће ΓΗ према Еθ као ΗΔ према θΖ. А како је један од претходних према једном од наредних као збир свих претходних према збиру свих наредних, то је ΓΗ према Еθ као ΓΔ према ЕΖ. На овај начин ΓΗ и Еθ се налазе у истој размери као и ΓΔ и ЕΖ и први су мањи од других. А то је немогуће, јер се претпоставља да су ΓΔ и ЕΖ најмањи од свих бројева који се налазе у истој размери са њима. Према томе број ΓΔ не чини делове броја А. Тај број је део. И ЕΖ је исти део од В као што је ΓΔ део од А. На овај начин број ΓΔ мери број А исто онолико пута, колико и број ЕΖ мери број В. А то је требало доказати.[40]

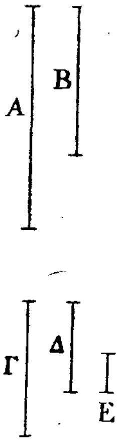


21.

Међусобно прости бројеви су најмањи од оних који су са њима у истој размери.

Нека су А и В међусобно прости бројеви. Тврдим да су они и најмањи од оних који су са њима у истој размери.

Ако није тако, онда постоје бројеви мањи од А и В који су са А и В у истој размери. Нека то буду бројеви Γ и Δ. Пошто тада најмањи бројеви мере исти број пута бројеве који су са њима у истој размери, и то већи број мери већи и мањи број — мањи, претходни мери претходни и наредни — наредни, значи да Γ мери исти број пута А као што Δ мери В. А Γ мери А онолико пута колико



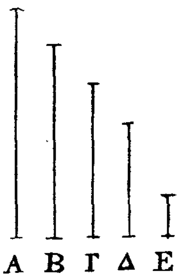
је јединица у Е. Па према томе и Δ мери В онолико пута колико је јединица у Е. И како Г мери А према броју јединица у Е, то и Е мери А према броју јединица у Г. Из истих равлога и Е мери В према броју јединица у Δ. Према томе Е мери бројеве А и В који су међусобно прости, а то је немогуће. Дакле, не постоје бројеви мањи од А и В који су у истој размери са њима. На овај начин бројеви А и В су најмањи од оних који су у истој размери са њима. А то је требало доказати.[41]

22.

Бројеви, који су најмањи међу онима који су у истој размери са њима, узајамно су прости.

Нека су А и В најмањи бројеви међу онима који су у истој размери са њима. Тврдим да су бројеви А и В међу собом прости..

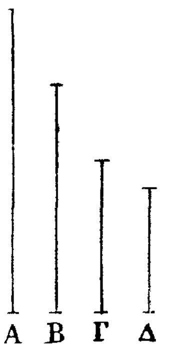
Ако они нису узајамно прости, онда их мери исти број. Нека та мера постоји и нека то буде Г. И колико пута број Г мери број А, нека толико јединица буде у Δ. И колико пута број Г мери број В, нека толико буде јединица у Е.



Пошто Г мери А према броју јединица у Δ, то Г помножено са Δ даје А. Из истих разлога Г помножено са Е даје В. Према томе број Г множећи два броја, Δ и Е, даје бројеве А и В. Одавде следује да се Δ односи према Е као А према В. Према томе у којој размери буде било А према В у истој тој размери ће бити и број Δ према Е, који су мањи од А и В, а то је немогуће. Не постоји према томе никакав број који мери А и В. На овај начин су бројеви А и В међу собом прости. А то је требало доказати.[42]

23.

Ако су два броја узајамно прости, онда је број који мери један од њих са другим узајамно прост.



Нека су два броја А и В узајамно прости, а број Г мери број А. Тврдим да су бројеви Г и В узајамно прости.

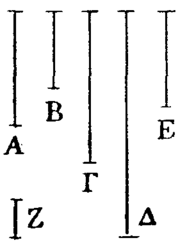
Ако бројеви Г и В нису узајамно прости, онда постоји број који мери Г и В. Нека постоји таква мера и нека то буде број Δ. Пошто Δ мери Г, а Г мери А, онда број Δ мери и А. Али број Δ мери и В. Према томе број Δ мери бројеве А и В који су узајамно прости, а то је немогуће. Не постоји, према томе, број који мери бројеве Г и В. На овај начин су бројеви Г, В узајамно прости. А то је требало доказати.[43]

24.

Ако су два броја прости у односу на неки број, онда је и њихов производ прост у односу на тај број.

Нека су два броја А и В прости у односу на неки број Г и нека је Δ производ бројева А и В. Тврдим да су бројеви Г и Δ узајамно прости.

Заиста ако бројеви Г и Δ нису узајамно прости, онда постоји број који мери бројеве Г и Δ. Нека постоји мера и нека је то број Е. Како су бројеви Г, А узајамно прости, а број Г мери број Е, то су бројеви А и Е узајамно прости. И колико пута број Е мери број Δ, нека је толико јединица у Z. Значи Z мери Δ према броју јединица у Е и Е множећи Z производи Δ. Али и А множећи В производи Δ. И према томе је производ од Е и Z једнак производу од А и В. Али, ако је производ крајњих једнак производу средњих, онда су та четири броја пропорционална. Према томе се Е односи према А као В према Z. Али прости бројеви А и Е, прости и најмањи, а најмањи од бројева који су у истој размери са њима мере све бројеве који су у истој размери са њима исти број пута и то већи мери већи и мањи — мањи, тј. претходни мери претходни и наредни —

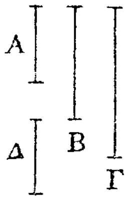


наредни. Према томе Е мери В. А мери Е и Г. Према томе Е мери бројеве В и Г који су узајамно прости, а то је немогуће. Не постоји, према томе, број који мери бројеве Г и Δ. На овај начин су бројеви Г и Δ узајамно прости. А то је требало доказати.[44]

25.

Ако су два броја узајамно проста, онда је производ једног самим собом узајамно прост са другим бројем.

Нека су А и В два узајамно проста броја и нека број А, множећи сам себе, даје производ Г. Тврдим да су В и Г узајамно прости.

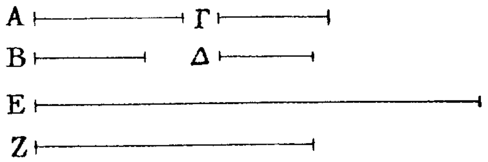


Узмимо број Δ једнак броју А. Пошто су А и В узајамно прости, а А је једнако Δ, биће Δ и В узајамно прости. Дакле сваки од бројева Δ и А је прост према В. Значи, да је и производ од Δ и А прост према В. Али производ од Δ и А је број Г. На овај начин, и бројеви Г и В су узајамно прости. А то је требало доказати.[45]

26.

Ако су два броја прости у односу на два друга броја, оба према сваком од ових, онда су и њихови производи узајамно прости.

Ако су бројеви А и В у односу на два броја Г и Δ, оба према сваком, прости, и нека А множећи В производи Е, а Г множећи Δ производи Z. Тврдим да су Е и Z узајамно прости.

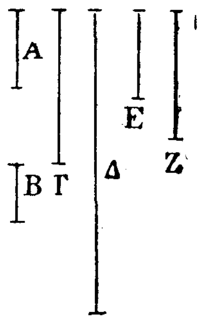


Заиста, пошто је сваки од бројева А и В прост према Г, биће и производ од А и В прост према Г. А како је производ од А и В број Е, биће и Е и Г узајамно прости. Из истих разлога су узајамно прости и Е и Δ. Према томе је сваки од Г и Δ прост према Е. То значи и производ од Г и Δ је прост према Е. Али производ од Г и Δ је Z. На овај начин су Е и Z узајамно прости. А то је требало доказати.[46]

27.

Ако су два броја узајамно прости и сваки помножи сам себе, онда су и њихови производи узајамно прости; и ако се првобитни бројеви помноже добијеним производима, онда су и нови производи узајамно прости [а то исто се добија и даље].

Нека су А и В два узајамно проста броја, и нека број А помножен сам собом производи Г, а помножен бројем Г производи број Δ, па број В помножен сам собом производи Е, а помножен бројем Е производи Z. Тврдим да су бројеви Г, Е и Δ, Z узајамно прости.

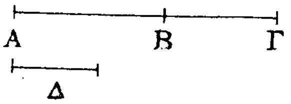


Заиста, пошто су А и В узајамно прости, а број помножен сам собом производи Г, онда су и Г, В узајамно прости. Пошто су сад Г, В узајамно прости, а В помножен сам собом производи Е, онда су и Г, Е узајамно прости. Даље, пошто су А и В узајамно прости, а број В помножен сам собом даје Е, онда су и бројеви А, Е узајамно прости. Пошто су сад два броја А и Г оба узајамно проста према сваком од бројева В, Е, биће и производ од А и Г узајамно прост са производом од В и Е. А како је производ од А и Г број Δ, а производ од В и Е је број Z, онда су бројеви Δ и Z узајамно прости А то је требало доказати.[47]

28.

Ако су два броја узајамно проста, онда је и њихов збир узајамно прост према сваком од њих; и ако су збир и један од бројева узајамно прости, онда су и првобитни бројеви узајамно прости.

Нека су АВ и ВГ два узајамно проста броја. Тврдим да је и збир АГ узајамно прост према сваком од бројева АВ и ВГ.



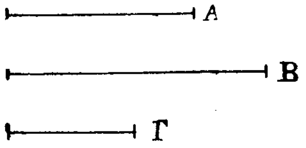
Заиста, ако бројеви ГА и АВ нису узајамно прости, онда постоји број који мери бројеве ГА и АВ. Нека та мера постоји и нека то буде број Δ. Пошто сад број Δ мери бројеве ГА и АВ, онда он мери и остатак ВГ. Али он мери и ВА. Према томе број Δ мери бројеве АВ и ВГ који су узајамно прости, а то је немогуће. Према томе не постоји број који мери бројеве ГА и АВ. Дакле бројеви ГА и АВ су узајамно прости. Из истих разлога и бројеви АГ и ГВ су узајамно прости. На овај начин број ГА је узајамно прост према сваком од бројева АВ и ВГ.

Даље, нека су бројеви ГА и АВ узајамно прости. Тврдим да су узајамно прости и бројеви АВ и ВГ.

Заиста, ако бројеви АВ и ВГ нису узајамно прости, онда постоји број који мери бројеве АВ и ВГ. Нека мера постоји и нека то буде број Δ. Пошто сад број Δ мери сваки од бројева АВ и ВГ, онда он мери и цело, број ГА. А мери он и АВ. Број Δ мери према томе бројеве ГА и АВ, који су узајамно прости, а то је немогуће. Према томе не постоји број који мери бројеве АВ и ВГ. На овај начин су бројеви АВ, ВГ узајамно прости. А то је требало доказати.[48]

29.

Сваки прост број и сваки други број, који тај прост број не мери, узајамно су прости.



Нека је А прост број и нека он не мери број В. Тврдим да су бројеви В и А узајамно прости.

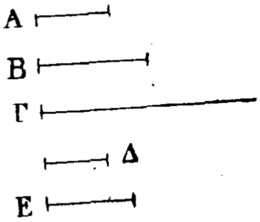
Заиста, ако бројеви В и А нису узајамно прости, онда их мери исти број. Нека их мери број Г. Пошто Г мери број В, а А не мери В, Г неће бити исто са А. Пошто Г мери В и А, мериће број Г и број А, који је узајамно прост са њим и није тај исти број. А то је немогуће. Према томе не постоји број који мери бројеве В и А. Бројеви А и В су узајамно прости. А то је требало доказати.[49]

30.

Ако два броја после множења дају производ који се мери неким простим бројем, онда се тим простим бројем мери и један од првобитних бројева.

Нека два броја А и В после множења дају број Г и нека се тај број мери бројем Δ. Тврдим да број Δ мери један од бројева А, В.

Заиста, нека он не мери А, а Δ је прост број. Тада су бројеви А и Δ узајамно прости. И онолико пута колико Δ мери Г, нека толико јединица буде у Е. Пошто сад Δ мери Г онолико пута колико је јединица у Е, то Δ помножено са Е даје Г. Али и А помножено са В даје Г. Према томе је производ од Δ и Е једнак производу од А и В. То значи, Δ се односи према А као В према Е. Али Δ и А су прости, прости и најмањи, а најмањи мери исти број пута бројеве који су у истој размери са њима, и то већи број већи и мањи — мањи, тј. претходни — претходни, а наредни — наредни. Према томе Δ мери В. На сличан начин се доказује да ако он мери В, онда ће мерити А. На овај начин, Δ мери један од бројева. А то је требало доказати.[50]

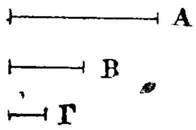


31.

Сваки сложени број се мери неким простим бројем.

Нека је А сложен број. Тврдим да се он мери неким простим бројем.

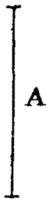
Заиста, ако је А сложен број њега мери неки број. Нека постоји мера и нека то буде број В. Ако је В прост број, биће тиме оно што се тражи испуњено. Ако је он сложен, њега мери неки број. Нека постоји мера и нека то буде број Г. Пошто тада Г мери В, а В мери А, онда Г мери и број А. И ако је Г прост број, онда је тиме оно што се тражи испуњено. А ако је он сложен број, њега мери неки број. После примене овог поступка остаће неки прост број који ће мерити број А. Јер, ако не остаје такав број, онда ће број А бити мерен бескрајним низом бројева, од којих је сваки мањи од другог, а то је немогуће за бројеве. Према томе наћи ће се неки прост број, који ће мерити претходни број а тиме мерити и број А.



На овај начин, сваки сложен број се мери неким простим бројем. А то је требало доказати.

32.

Сваки је број или прост или се мери неким простим бројем.



Нека је А неки број. Тврдим да је А или прост број или се мери неким простим бројем.

Ако је А прост број, онда је тиме оно што се тражи испуњено. Ако је он сложен, онда га мери неки прост број.

На овај начин, сваки број је или прост или се мери неким простим бројем. А то је требало доказати.

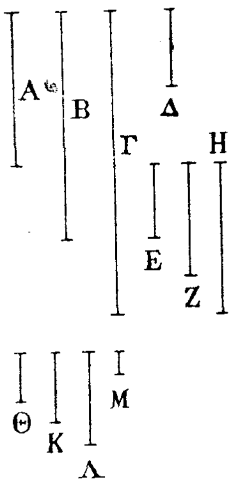
33.

За дату произвољну множину бројева наћи најмање бројеве који су у истим размерама као и дати.

Нека су А, В, Г дати бројеви у произвољном броју. Наћи најмање бројеве који су у истим размерама са датим бројевима А, В, Г.

Заиста, бројеви А, В, Г су или узајамно прости или нису. Ако су бројеви А, В, Г узајамно прости, они су најмањи од оних који стоје у истим размерама са њима.

Ако нису, онда узмимо највећу заједничку меру Δ бројева А, В, Г. И нека се колико пута Δ мери А, В, Г, исто толико јединица налазе у Е, Z, Н. Тада сваки од Е, Z, Н мери сваки од A, B, Г према броју јединица у Δ. Према томе E, Z, H мере исти број пута бројеве A, B, Г. Бројеви E, Z, H су у истим размерама са бројевима A, B, Г. Тврдим да су они и најмањи. Заиста, ако E, Z, H нису најмањи од бројева који су са A, B, Г у истим размерама, онда постоје бројеви који су са A, B, Г у истим размерама, а који су мањи од E, Z, H. Нека су то бројеви θ, K, Λ. Тада θ мери број A исти број пута као што и сваки од K, Λ мери бројеве B, Г. Нека у M буде онолико јединица колико се пута θ садржи у A. Тада и сваки од бројева K, Λ мери бројеве B, Г према броју јединица у M. И пошто θ мери A према броју јединица у M, то и M мери A према броју јединица у θ. Из истих разлога M мери сваки од бројева B, Г према броју јединица у сваком од бројева K, Λ. Према томе M мери бројеве A, B, Г. И пошто θ мери A према броју јединица у M, то θ помножено са M производи A. Из истих разлога E помножено са Δ производи A. А тада је производ E, Δ једнак производу θ, M, те је, према томе, E према θ као M према Δ. Међутим број E је већи од броја θ, што значи да је и M већи број од Δ и мери A, B, Г. А то је немогуће, пошто је Δ највећа заједничка мера бројева A, B, Г. Према томе не постоје бројеви који су у истој размери са бројевима A, B, Г, и који су мањи од бројева E, Z, H. На овај начин бројеви E, Z, H су најмањи од бројева који у истој размери са бројевима A, B, Г. А то је требало доказати.[52]

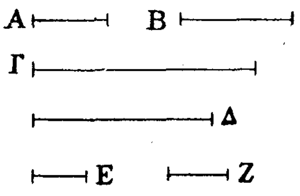


34.

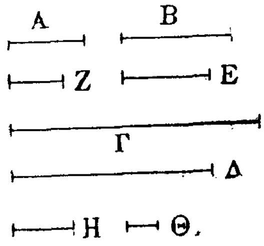
За два дата броја наћи најмањи број који они мере.

Нека су дата два броја A, B. Треба наћи најмањи број који они мере.

Заиста, два броја A и B или су узајамно прости или нису. Нека, прво, они буду узајамно прости и нека A множећи В производи Г. Тада и В множећи А производи Г. Значи А и В мере број Г. Тврдим да је Г и најмањи број који они мере. Ако није, тада А и В мере неки број који је мањи од Г. Нека они мере број Δ. И колико пута А мери Δ, толико нека буде јединица у Е, а колико пута В мери Δ, толико нека буде јединица у Z. Према томе А помножено са Е производи Δ, а В помножено са Z производи Δ. Значи да је производ од А и Е једнак производу од В и Z. А то значи да А стоји према В као што Z стоји према Е. Међутим А и В су прости, прости и најмањи, али најмањи мере бројеве који су са њима у истој размери исти број пута, већи мери већи и мањи — мањи. Према томе В мери Е као што наредни мери наредни. И пошто А после множења В и Е производи Г и Δ, биће В према Е као Г према Δ. И В мери Е. Па према томе Г мери Δ, већи број мери мањи, а то је немогуће. Према томе не постоји број мањи од Г, који мере бројеви А и В. На овај начин број Г је најмањи који се мери бројевима А и В.



Нека сад бројеви А и В нису узајамно прости и нека су Z и Е најмањи бројеви који су у истој размери са бројевима А и В. Тада је производ А и Е једнак производу В и Z. И нека А помножено са Е производи Г. Али тада и В помножено са Z производи Г. Према томе А и В мере Г. Тврдим да је број Г најмањи број који они мере. Ако није, онда А и В мере неки број који је мањи од Г. Нека они мере број Δ. И, колико пута А мери Δ, нека онолико буде јединица у Н, а колико пута В мери Δ нека буде јединица у θ. Значи А помножено са Н производи Δ, а и В помножено са θ производи Δ. Према томе је производ од А и Н једнак производу од В и θ. Значи А се односи према В као θ према Н. Али А се односи према В као Z према Е, па и Z према Е као θ према Н. И Z и Е су најмањи, а најмањи



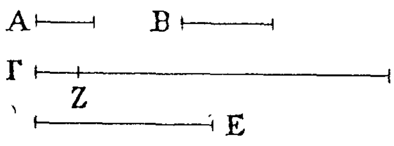
мере исти број пута бројеве који су са њима у истој размери, већи мери већи и мањи — мањи. Према томе Е мери Н. И пошто А множећи Е и Н производи Г и Δ, биће Е према Н као Г према Δ. Али Е мери Н, па према томе и Г мери Δ, већи број мери мањи, а то је немогуће. Дакле А и В не мере број који је мањи од Г. На овај начин Г је најмањи број који мере бројеви А и В. А то је требало доказати.[53]

35.

Ако два броја мере неки број, онда и најмањи број који они мере мери тај број.

Нека два броја А и В мере неки ГΔ, а мере и најмањи Е. Тврдим да и Е мери број ГΔ.

Заиста, ако Е не мери ГΔ, онда нека Е, после одмеравања ΔZ, даје остатак ГZ мањи од Е. Пошто сад А и В мере Е, а Е мери ΔZ, то и А и В мере ΔZ, а мере и цео број ГΔ, према томе они мере и остатак ГZ, мањи од Е. А то је немогуће. Значи Е не може не мерити ГΔ. Значи, мери. А то је требало доказати.[54]

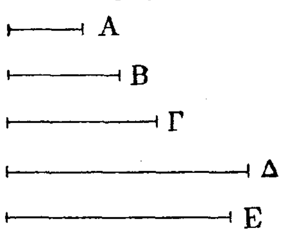


36.

За три дата броја наћи најмањи број који они мере.

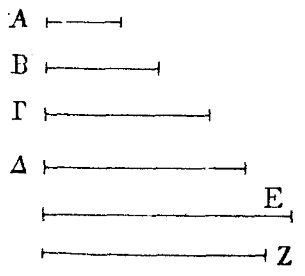
Нека су дата три броја А, В, Г. Треба наћи најмањи број који они мере.

Узмимо најмањи број Δ који мере два броја А и В. Број Г или мери број Δ или не мери. Нека, прво, мери. Али и бројеви А и В мере број Δ; према томе бројеви А, В, Г мере број Δ. Тврдим да је он и најмањи број који они мере. Ако није, онда А, В, Г мере неки број мањи од Δ. Нека мере број Е. Пошто бројеви А, В, Г мере број Е, онда А и В мере број Е. Па тада и најмањи број који се мери бројевима А и В је број Δ.



Према томе број Δ мери број Е, већи мери мањи. А то је немогуће. Дакле не мере бројеви А, В, Г неки број ко мањи од Δ. На овај начин, Δ је најмањи број који мере бројеви А, В, Г.

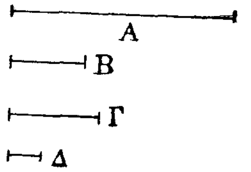
Нека сад број Г не мери број Δ. Узмимо тада најмањи број Е који се мери бројевима Г и Δ. Пошто бројеви А и В мере Δ, а Δ мери Е, то бројеви А и В мере и број Е. А мери га (број Е) и број Г, те бројеви А, В, Г мере број Е. Тврдим да је он најмањи број који они мере. Ако није, онда бројеви А, В, Г мере неки број који је мањи од Е. Нека мере број Z. Пошто бројеви А, В, Г мере број Z, то и бројеви А, В мере број Z. Тада и најмањи број који се мери бројевима А и В је број Δ. Значи Δ мери Z, а и Г мери Z. Дакле Δ и Г мере број Z. А и најмањи број који се мери бројевима Δ и Г мери број Z. Али најмањи број који се мери бројевима Г и Δ је број Е. Према томе Е мери Z, већи број мери мањи, а то је немогуће. Не постоји, према томе, број који се мери бројевима А, В, Г и који је мањи од Е. На овај начин број Е је најмањи који се мери бројевима А, В, Г. А то је требало доказати.[55]



37.

Ако је неки број мерен другим бројем, онда мерени број има део истог назива као и број који мери.

Нека број А буде мерен бројем В. Тврдим да број А има део истог назива као и број В.

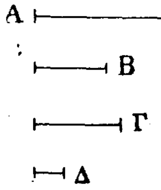


Заиста, нека у броју Г буде онолико јединица колико пута В мери А. Пошто В мери А према броју јединица у Г, онда и јединица Δ мери број Г према броју јединица у њему, према томе јединица Δ мери број Г исто онолико пута колико број В мери А. А после пермутације јединица Δ исто толико пута мери број В колико број Г мери А. И колики је део јединица од броја В, исто толики је део Г од А. А како је јединица Δ део броја В истог назива са самим бројем, биће и број В део броја А истог назива са бројем В. На овај начин, број А има део истог назива као и број В. А то је требало доказати.[56]

38.

Ако неки број има ма какав део, онда је тај број мерен бројем истог назива са тим делом.

Нека број А има неки део В и нека број Г има исти назив као и део В. Тврдим да број Г мери број А.



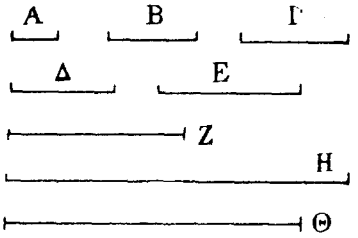
Заиста, ако је В део броја А истог назива са бројем Г, а јединица Δ је део броја Г истог назива са њим, онда колики је део јединица Δ броја Г, толики је део и В од А. Према томе Δ мери Г исти број пута колико и В мери А. А, после пермутације, јединица Δ мери број В исти број пута колико и Г мери А. На овај начин Г мери број А. А то је требало доказати.[57]

39.

Наћи најмањи број који има дате делове.

Нека су А, В, Г дати делови. Треба наћи најмањи број који има делове А, В, Г.

Нека су Δ, Е, Z бројеви истог назива са деловима А, В, Г; узмимо најмањи број Н који је мерен бројевима Δ, Е, Z.



На овај начин број Н има делове истог назива са Δ, Е, Z. Али су Δ, Е, Z делови истих назива са А, В, Г. Значи број Н има делове А, В, Г. Тврдим да је тај број и најмањи. Ако није, онда постоји број мањи од Н који има делове А, В, Г. Нека је то број θ. Пошто θ има делове А, В, Г, онда је број θ мерен бројевима истог назива са А, В, Г. А бројеви истог назива са деловима А, В, Г су Δ, Е, Z. Дакле број θ је мерен бројевима Δ, Е, Z и при томе је мањи од Н. А то је немогуће. На овај начин не постоји број мањи од Н који би имао делове А, В, Г. А то је требало доказати.

КОМЕНТАР

Пре но што пређемо на коментаре појединих дефиниција и ставова навешћемо неколико општих примедаба о овој, седмој књизи, која се по свом садржају разликује од претходних геометриских књига Еуклидових елемената.

Седма књига је посвећена елементима такозване теориске аритметике, која се у некој мери супротставља практичној аритметици, у ужем смислу рачуници, било елементарној, школској, било вишој, која се понекад зове и логистика. По суштини, у теориску аритметику спада и теорија бројева, али у току времена је теорија бројева заузела доминантни самосталан положај. Теориској аритметици у ужем смислу је остало проучавање основних појмова везаних за бројеве и операције са њима.

У својим геометриским књигама Еуклид не решава ниједан практични задатак; код њега чак ниједна дужина, површина или запремина нису наведене у оним конкретним мерама које су у његово време биле усвојене у Египту или у Грчкој. Отсуство те конкретизације доказује Еуклидову тежњу ка апстрактизацији.

Сличну тежњу ка апстрактизацији показао је Еуклид и у својој аритметици: ниједан број код њега није у вези ни са новцем, ни са мерама тежине, ни другим величинама мереним бројем. Али га та тежња ипак није довела до потпуно апстрактног, нашег кардиналног броја. Сваки број је код њега везан било за одређену величину, у главном за дужину, било за „број пута“, и то исто тако у конкретној форми кад тај број одговара оном броју који показује колико се пута јединица, као дужина, садржи у другој дужини.

Ако применимо савремену терминологију, можемо казати да је Еуклид „геометривовао“ своју аритметику насупрот савремености која „аритметизује“ геометрију (D. Hilbert), јер је савремена аритметика конструисана са највећом логичком доследношћу.

Проучавање броја као основног елемента нашег сазнања служило је, а служи и данас, као важан предмет за читав низ научних дисциплина: за историју културе, за теорију сазнања, за логику, за математику са њеном филозофијом и за филозофију уопште. У свакој од тих дисциплина основним појмом броја бавили су се врло високи умови и покушавали да унесу у ту основну област људског знања што више светлости. Са математичког гледишта је од великог интереса еволуција појма броја од конкретних бројева прве петице са најпростијим именовањем — прста, дрвета, коња итд. до савременог броја, који прелази у најопштији објект теорије скупова и губи у апстракцији не само конкретну своју било коју природу, већ се све више и више ослобађа и од оних закона којима се покоравају наши природни кардинални бројеви. У тој историји Еуклидови бројеви заузимају потпуно одређено место: они су већ изгубили своју наивно конкретну форму — прста, коња итд., али су задржали конкретне претставе у вези са њима и то у геометриском облику. Еуклидова геометризација аритметике имала је и своју добру страну: она потпуно искључује ону мистику бројева која је била везана са Питагорином школом и чији је мрачни траг допро и наших времена (број 13, број 7 и др.).

Коментарисање седме књиге задаје специјалне тешкоће; уколико се геометрија и може још предавати „по Еуклиду“, аритметику не само што не можете „по Еуклиду“ предавати, већ ни саму транскрипцију Еуклидових ставова у савременој форми не можемо извршити, ако се придржавамо садржаја математичких речи који оне имају данас. Сваки Еуклидов став из ове књиге може се врло једноставно доказати помоћу савремене алгебре, али навођење само таквог доказа, који за понеке ставове дајем у коментару, не би дао ни приближну претставу о току Еуклидова расуђивања. За проучавање ових расуђивања ипак треба имати стрпљења и читати сâм Еуклидов текст.

Тешка форма излагања Еуклидове аритметике и велико отступање тог излагања од савременог имали су за последицу да је Еуклидова аритметика сачувала још само историски значај и ни у ком случају не може служити савременом читаоцу као прва књига аритметике.

---

[1] О дефиницијама ове књиге може се поновити готово све оно што је било речено о основним дефиницијама прве геометриске књиге. И овде треба подвући нелогичност дефиниција основних појмова једне дисциплине која треба да има дедуктивну конструкцију. Дефиниције основних појмова могу се сматрати само као тумачења тих појмова помоћу других уобичајених речи, које исто тако остају без дефиниција. Таква тумачења не могу имати научне вредности у савременом разумевању дедуктивног система излагања истина било које области. Ипак и овде треба истаћи да навођење дефиниција и основних појмова не смањује логичку вредност осталих Еуклидових излагања, било геометрије било аритметике.

[2] Прва дефиниција прве књиге тумачила је појам „тачке" (σημειόν) помоћу другог појма, који исто тако још није био дефинисан, помоћу „део" (μέρος) односно „мера". Али су у тој дефиницији биле ипак искоришћене не само две различите речи, већ и два појма различитог садржаја повезана помоћу негације. Према томе ту дефиницију можемо сматрати као неко садржајно објашњење једног појма помоћу другог.

Прва дефиниција ове седме књиге нема ту особину. Грчки она гласи: „Μονάς ἐστιν, καθ'ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται," и, према томе, у грчком оригиналу се упоређују две етимолошки заиста различите речи μοράς и ἓν, ма да су оне готово исте, што се нарочито види у преводима. Тако у латинском преводу (Heiberg) дефиниција гласи:

Unitas est ea, secundum quam unaquaeque res *una* nominatur.

У италијанском (G. Rietti — F. Enriques):

Unità è ciò per cui ogni singola cosa è detta *uno*.

У енглеском (Heath):

An *unit* is that by virtue of which each of the things that exist is called *one*.

У руском (Мордухай Болтовской):

Единица есть (то), через что каждое из сушествующих считается *единим*.

Француске и немачке преводе седме књиге нисам имао при руци.

Наведени преводи показују сву не само логичку већ чак и етимолошку таутологију ове Еуклидове дефиниције.

[3] У вези са првом и другом дефиницијом треба и ово још да наведемо. На питање: „Да ли је код Еуклида јединица број или није?“ Већина коментатора одговара: „Није“. Разлог је то што буквално тумачење појма састављене множине (τὸ συγκείμενον πλῆθος) искључује јединку. Мордухай-Болтовской наводи: „Можно сказать, что только средние века дали единице право гражданства. Орезм (Oresmus) определенно говорит, что *единица — истинно число* (курзив М. Б.)“. Код Еуклида нема директног одговора на постављено питање, али се може наћи индиректан, и то потпуно убедљив доказ, да је Еуклид и јединицу сматрао за број. Тај доказ пружа став 15. ове књиге који гласи: „’Εὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσακις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον,“ чији је превод дат на страни 20. Подробније протумачен можемо тај превод у овом облику изложити:

Ако јединица (као први број) мери неки други број, а трећи број мери исти број пута четврти број, онда, после пермутације, јединица мери исти број пута трећи број као што други број мери четврти број.

И у тексту доказа налазимо четири броја

$$\begin{tikzcd}
A\ (\mathrm{I}) \arrow[r, dash] \arrow[d] & B\Gamma\ (\mathrm{II}) \arrow[d] \\
\Delta\ (\mathrm{III}) \arrow[r, dash] & BZ\ (\mathrm{IV})
\end{tikzcd}$$

при чему је са А означена јединица. Како, према тексту, имамо свега четири броја, а међу њима и јединицу А, то је и јединица број. Ово је свакако несумњив доказ да је Еуклид и јединицу сматрао за број. Према томе можемо закључити да су Еуклидови бројеви — природни бројеви укључно са јединицом. Но Еуклидов број још није елемент *низа* узастопних бројева. Слично томе као што су Еуклидови геометриски облици дискретни облици, без узастопности и променљивости, тако су и његови бројеви дискретни бројеви. Према O. Stolz'у и A. Gmeiner'у тек је код Helmholtz'а и Kronecker'а, а нарочито код Dedekind'а, јасно формулисана важна особина бројева да су и природни бројеви елементи узастопног низа. Ни нула ни разломци, као бројеви, код Еуклида се не појављују. Разломци, као елемент теориске аритметике, појављују се тек код Диофанта (у другој половини IV века после н. е.). Али то се односи на теорију разломака; у пракси, нарочито у трговини, разломци су били у употреби од врло давнашњих времена, и то, прво, са јединичним бројиоцем.

[4] У овој дефиницији реч „μέρος" преводимо, као и остали преводиоци, са „део". Али и на овом месту можемо ту реч превести и са „мера". Према терминологији аритметике ту реч требало би превести са делилац. Овој дефиницији одговара наредни аритметички образац

$$a = nb,$$

где су a, b, n цели бројеви. Број b је део броја a; тај број мери n-пута број a. Број a је дељив бројем b.

[5] У овој дефиницији која гласи: „Μέρη δέ, ὅταν μὴ καταμετρῇ" реч „Μέρη", преведену као „делови", треба разумети као договорно усвојен назив за број који не дели дати број. Поједини преводиоци тај карактер ове речи означавају на тај начин што у преводу стављају ту реч између знака навода. Унутрашњи смисао тог термина код Еуклида није објашњен, а можда је и свесно избегнут с циљем да теориска расуђивања буду изражена само помоћу целих бројева. Пошто је Еуклид знао за дељење и дужи и броја на једнаке делове, шта више знао да се и прост број може поделити на онолико делова колико је јединица у њему, то је могуће помоћу тих делова изразити сваки други број.

У том смислу је Еуклид крстио број који није део другог броја. Образац који одговара овој дефиницији изгледа овако

$$b = m\left(\frac{a}{n}\right),$$

где су наведени бројеви цели бројеви. Број m показује број делова, а број b је „делови“.

[6] Ова дефиниција је јасна и одговара обрасцу: $a = mb$, где су a, b, m цели бројеви.

[7] Ову дефиницију можемо изразити: $a = 2b$.

[8] Ова дефиниција садржи две мисли: 1. $a \neq 2b$, 2. $a = 2b + 1$.

[9] Образац за парно-паран број можемо изразити: $a = m.\ 2b$, где је m паран број, рецимо, $m = 2c$.

[10] За $m \neq 2c$ имамо непарно-паран број. Тако, на пример, 14 је непарно-паран број јер је $14 = 7.2$.

[11] Ову дефиницију Heiberg задржава, али ставља у заграде. Два броја: непарно-паран и парно-непаран могу се по садржају разликовати само кад на различити начин изражавају резултат мерења. Даћемо за ово пример: кад се нека дужина мери 3 пута мотком дужине од 4 метра имамо $12 = 3.4$ непарно-паран број, а кад се иста дужина мери 4 пута мотком дужине 3 метра имамо парно-непаран број. Јасно је да се та разлика изражава поступком, а не резултатом.

[12] Образац за непарно непаран број: $a = (2b + 1) \times (2c + 1)$. Пример: $15 = 3.5$.

[13] Поводом простих бројева можемо приметити да је као скоро савременик Еуклидов (чије тачне године живота нису познате) живео у Александрији чувени грчки научник, енциклопедиста Ератостен (275—195 до н. е.), библиотекар Александриске библиотеке. Он је написао више рукописа, бавио се удвостручењем куба и предложио једноставан поступак за издвајање простих бројева из низа природних бројева. Тај поступак се обавља помоћу познате Ератостенове решетке.

[14] Пример: 16 и 15.

[16] Примери: $21 = 7 \times 3$, $24 = 12 \times 2 = 6 \times 4 = 3 \times 8$.

[16] Пример: 21 и 15, јер је $21=7\times 3$ и $15=5\times 3$.

[17] Код Еуклида у производу $a\times b$ два множиоца играју различите улоге: први број показује шта са узима, а други колико пута се узима. Ова дефиниција множења јасно показује да Еуклидови бројеви још носе на себи жиг конкретног смисла тих бројева.

[18] Дефиниције 17—20 јасно одају геометриски карактер Еуклидовог излагања аритметике. Шта више, Еуклид мисли о бројевима као о геометриским облицима. У савременој аритметици наведени бројеви се изражавају обрасцима: површински – $m=ab$, запремински – $n=abc$, квадратни – $p=a^2$, кубни – $q=a^3$.

[19] Дефиниција пропорционалности бројева, у сваком случају по форми, разликује се од чувене 5 дефиниције у петој књизи пропорционалности величина. Дефиниција за бројеве је краћа, једноставнија и јаснија од дефиниције за геометриске величине. Њихов садржај је исти. Оне се разликују само по оним поступцима које треба применити за доказивање пропорционалности. Такозвана пета дефиниција тачније и одређеније приказује методу доказивања и стварно је послужила Еуклиду за доказ читавог низа теорема о пропорционалности величина.

Аналитички се за пропорционалност четири броја, $a_1:a_2=a_3:a_4$ поставља један од ових услова:

$$\text{I.}\ a_1=ma_2,\qquad a_3=ma_4,$$

$$\text{II.}\ a_1=\frac{a_2}{n},\qquad a_3=\frac{a_4}{n},$$

$$\text{III.}\ a_1=m\left(\frac{a_2}{n}\right),\qquad a_3=m\left(\frac{a_4}{n}\right),$$

[20] Садржај дефиниције сличних површинских и запреминских бројева аналитички се овако изражава. Два површинска броја $P_1=a_1b_1$ и $P_2=a_2b_2$ су слична, означимо то, рецимо, са $P_1\sim P_2$, ако је $a_1:a_2=b_1:b_2$. Исто тако за два слична запреминска броја $V_1=a_1b_1c_1$ и $V_2=a_2b_2c_2$, дакле за $V_1\sim V_2$, имамо услове: $a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$.

[21] Као пример савршеног (перфектног) броја може послужити, рецимо, број 28, за које имамо $28=14+7+4+2+$

$+1=28$. Сваки број n према збиру s својих делилаца, без самог тог броја, припада једној од ових категорија:

a. $n=s$. Перфектан. Пример: $n=28$, $s=14+7+4+2+1=28=n$.

b. $n<s$. Дефектан или субперфектан. Пример: $n=12$, $s=6+$ $+4+3+2+1=16>n$.

c. $n>s$. Суперперфектан. Пример: $n=8$, $s=4+2+1=7<n$.

Присуство појма савршеног броја у Еуклидовим дефиницијама показује да и без обзира што је систем Еуклидове териске аритметике био на сасвим другим начелима конструисан, ипак ни Еуклид није могао избећи утицаја Питагорине школе, у којој су више биле култивисане териско-бројне, музичке и мистичке комбинације са бројевима, него логичка структура читавог система науке о бројевима.

---

[22] Ова прва теорема уводи читаоца у чувени Еуклидов алгоритам узастопног дељења или, како се види из Еуклидовог текста, узастопног мерења.

Прву теорему можемо аналитички овако формулисати. Ако два броја a и b $(a>b)$ при узастопном дељењу дају

$$(1)\quad a=mb+r,\qquad r<b$$

$$(2)\quad b=m_1r+r_1,\qquad r_1<r$$

$$(3)\quad p=m_1r_1+1,$$

где сва слова означавају целе бројеве, што у даљем тексту нећемо више наводити, онда су a и b међусобно или узајамно прости бројеви.

Еуклидов доказ је индиректан (reductio ad absurdum). Претпоставимо да, обратно, бројеви a и b имају заједничку меру, број e, који је, према томе, већи од јединице $(e>1)$. И ставимо:

$$a=n_1e,\quad b=n_2e$$

онда из (1) закључујемо да је и

$$r=n_3e.$$

Затим једначина (2) доводи до резултата да је и

$$r_1=n_4e,$$

и најзад једначина (3) захтева да буде и

$$1 = n_5 e,$$

што је, према условима $e > 1$ и n_5 — цео број, немогуће, те према томе a и b не могу имати заједничку меру; они су узајамно прости бројеви.

[23] Ова теорема садржи поступак и даје доказ Еуклидова алгоритма за одређивање највећег заједничког чиниоца (скраћено: н. з. ч.) два броја.

Ако су дата два броја a и b $(a > b)$ и

1. $a = m b$, онда је b највећа заједничка мера: она је, прво, мера и, друго, и највећа пошто нема броја већег од b који би мерио сам тај број.

А ако је

2. $a \neq mb$, онда при узастопном мерењу имамо према Еуклиду

$$\begin{aligned} a &= m b + r, \quad && r < b \\ b &= m_1 r + e, && e < r \\ r &= m_2 e. \end{aligned}$$

Даље се доказује да је e не само заједничка мера, већ и највећа заједничка мера. Доказ је, као и у претходној теореми, индиректан. Ако постоји заједничка мера H већа од e, тј. $H > e$, онда се долази до закључка да H мери e, а то је немогуће.

Еуклидов алгоритам се овако примењује на два броја, рецимо, 54 и 38:

	1	2	2	1	2
54	38	16	6	4	2
38	32	12	4	4	
16	6	4	2	0	

Последњи остатак 2 је највећи заједнички чинилац.

[24] Наћи за три броја a, b, c највећу заједничку меру (односно н. з. ч.).

Задатак се решава на основу претходног задатка. Наиме, одређује се н. з. ч. e_1 два броја a и b. Ако је e_1 мера и броја c, задатак је решен. Ако e_1 не мери број c, у теореми се прво доказује да e_1 и c нису узајамно прости бројеви, ако нису узајамно прости бројеви a, b, c. После тога се одређује највећа заједничка мера e_2 за бројеве e_1 и c и показује да је та мера мера и за бројеве a, b, c, а затим се, индиректним начином, показује да је e_2 и највећа заједничка мера датих бројева a, b, c.

[25] Нека су a и b два броја $a > b$. Треба доказати да могу бити само два случаја:

(1) $a = m\,b$, (b је део броја a)

(2) $b = \kappa\left(\frac{a}{n}\right)$, ($b$ чини делове броја a)

I. Ако су бројеви a и b узајамно прости тада треба у (2) ставити $n = a$, где је n број јединица у a и $k = b$, где је k број јединица у b.

II. Ако бројеви a и b нису узајамно прости, тада могу бити само два случаја;

α) b је мера од a и тада вреди једначина (1).

β) највећа заједничка мера a и b је број e, тј. $a = m_1 e$, $b = m_2 e$, при чему је $m_1 > m_2$.

Из ових једначина следује да је

$$b = m_2\left(\frac{a}{m_1}\right),$$

при чему је a/m_1 део броја a, а $m_2\left(\frac{a}{m_1}\right)$ чини делове броја a.

[26] Ова теорема аналитички се изражава врло једноставно,

Из два једнакости: $a = mb$ и $a_1 = m\,b_1$ следује једнакост

$$a + a_1 = m\,(b + b_1).$$

[27] Ова теорема је аналогна претходној, али је термин „део" замењен са „делови".

Из две једнакости

$$b = m\left(\frac{a}{n}\right), \quad b_1 = m\left(\frac{a_1}{n}\right)$$

следује једнакост

$$b + b_1 = m\left(\frac{a + a_1}{n}\right).$$

[28] И у овој теореми имамо закључак: из две једнакости $a = mb$ и $a_1 = mb_1$ следује једнакост $a - a_1 = m(b - b_1)$.

[29] За ову теорему имамо: из две једнакости

$$b = m\left(\frac{a}{n}\right), \quad b_1 = m\left(\frac{a_1}{n}\right)$$

следује једнакост

$$b - b_1 = m\left(\frac{a - a_1}{n}\right).$$

[30] При доказу појединих теорема Еуклид разликује два односа између два цела броја; наиме број a_1 је или део броја a_2, што се изражава једнакошћу $a_2 = m a_1$, где је m цео број, или тај број чини „делове“ броја a_1 кад је

$$a_2 = m\left(\frac{a_1}{n}\right),$$

где је n или број јединица у a_1, ако су бројеви a_1 и a_2 узајамно прости, или број који показује колико се пута н. з. ч. бројева a_1 и a_2 садржи у a_1. Тиме, са савременог гледишта, Еуклид избегава увођење разломака као броја. Међутим увођење разломака спаја оба ова случаја и знатно упрошћава постављање односа између бројева. Тако се у доказу ове девете теореме можемо послужити разломцима и скратити доказ.

Нека је дато:

$$a_2 = m a_1, \quad a_4 = m a_3;$$

треба доказати да је

$$a_3 = n a_1 \quad a_4 = n a_2.$$

Увек можемо ставити

$$a_3 = a n_1,$$

где је n или цео број или разломак („делови“). Тада из $a_4 = m a_3$ изводимо

$$a_4 = m a_3 = m(n a_1) = n(m a_1) = n a_2,$$

а тиме је теорема доказана.

[31] Ова теорема је понављање претходне теореме са том само разликом што је „део“ замењен са „делови“. Јасно је да се и саме теореме и њихови докази сливају уједно после увођења разломака.

[32] Аналитички садржај теореме гласи: из

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4$$

следује

$$(a_1 - a_3) : (a_2 - a_4) = a_1 : a_2 .$$

Садржај ове теореме се поклапа са садржајем теореме 19. пете књиге, која се односила на дужи. Таквих теорема има више, али су докази различити. Дубока разлика доказа је у томе што се они оснивају на различитим дефиницијама пропорционалности. Докази за Еуклидове бројеве су много једноставнији, јер се односе на бројеве као самерљиве величине, чија заједничка мера увек може бити јединица.

[33] Ова теорема за бројеве понавља теорему 12, V за геометриске величине.

[34] Ова теорема за бројеве понавља теорему 22, V за величине.

[35] 15. теорема је аналогна 9. теореми ове књиге. Заиста, кратко формулисана, 9. теорема се састоји из закључка.

Из $\quad a_2 = m a_1 , \quad a_4 = m a_3 ,$

следује $\quad a_3 = k a_1 , \quad a_4 = k a_2 ,$

а 15. теорему можемо овако написати: из

$$a_2 = m . 1 , \quad a_4 = m . a_3 ,$$

следује $\quad a_3 = k . 1 , \quad a_4 = k . a_2 .$

Дакле 9. теорема прелази у 15., ако ставимо $a_1 = 1$. Према томе за произвољан број Еуклид даје једну теорему са доказом, а за 1 даје другу теорему са посебним доказом. Из тога, на пр. коментатор Мордухай-Болтовской, закључује да јединицу Еуклид не сматра за број. Међутим навели смо под бројем [3] коментара да се у теореми 15. говори о четвртом броју, а један од тих бројева је јединица, те према томе је јединица број. Али Еуклид сматра јединицу за нарочити број, који, по његову мишљењу, захтева специјалан доказ. У којој мери је то оправдано, то је друго питање, али то може бити разлог за издвајање многих теорема у посебан облик кад у текст тих теорема улази јединица. Да је јединица нарочити број то следује, напр. из њене особине да једини број који је заједнички чинилац свих бројева, то је јединица. Да је Еуклид сматрао теореме са јединицом као нарочито важне то, изгледа, потиче отуда што Еуклид користи те теореме за доказ врло важних особина бројева. Тако, напр., ова теорема је искоришћена у доказу наредне теореме, која се односи на основно својство операције множења.

[36] Пре свега треба приметити да сам текст ове теореме изазива недоумицу, јер ништа није речено о реду множења или, са Еуклидова гледишта, о различитој улози првог и другог броја у производу два броја.

Ова теорема изражава комутативни закон множења два броја. Сад се тај закон сматра као основна особина операције множења и укључује се у дефиницију те операције.

Поновимо у скраћеном облику Еуклидов доказ.

Нека је $a \times b = c$ и $b \times a = d$. Треба доказати да је $c = d$.

Према дефиницији 21, VII имамо

$$1 : a = b : ab$$

а на основу теореме 13, VII (пермутација)

$$(1) \qquad 1 : b = a : ab$$

С друге стране, према истој дефиницији 21, VII имамо

$$(2) \qquad 1 : b = a : ba.$$

Из (1) и (2)

$$a : ab = a : ba$$

и према томе је

$$ab = ba \quad \text{или} \quad c = d.$$

Раније су коментатори давали своје доказе ове теореме. Један од популарних доказа, који се задржао у школској аритметици састоји се у овом.

Ставимо

$$c = a \times b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a\ \text{пута}}$$

али је $a=\underbrace{e+e+\ldots+e}_{a\text{ пута}}$, где смо са e означили јединицу, и $b=\underbrace{e+e+\ldots e}_{b\text{ пута}}$, према томе имамо

$$c=\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\text{ пута}}=\left.\begin{matrix}\overbrace{e+e+\ldots+e}^{a\text{ пута}}\\ e+e+\ldots+e\\ \cdot\quad\cdot\qquad\cdot\\ \cdot\quad\cdot\qquad\cdot\\ \cdot\quad\cdot\qquad\cdot\\ e+e+\ldots+e\end{matrix}\right\}b\text{ пута}\quad\begin{matrix}=a\\ a\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a\end{matrix}=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\text{ пута}}.$$

С друге стране, непосредно је

$$d=b\times a=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\text{ пута}},$$

те према томе, после упоређивања претходног израза за c са овим изразом, имамо

$$c=d.$$

Овај доказ се оснива на примени комутативног закона за сабирање. Међутим тај закон, који важи за обичне бројеве и обично множење, не важи за све величине, на пример за коначне углове векторски претстављене.

[37] Садржај ове теореме изражава једнакост

$$a\,b_1:a\,b_2=b_1:b_2.$$

[38] Овој теореми одговара једнакост

$$a_1\,b:a_2\,b=a_1:a_2,$$

[39] Овде имамо две теореме: основну

$$a_1:a_2=a_3:a_4$$

$$\therefore\qquad a_1\,a_4=a_2\,a_3.$$

и обрнуту

$$a_1\,a_4=a_2\,a_3$$

$$\therefore\qquad a_1:a_2=a_3:a_4.$$

[40] Теорема гласи: ако су a_1 и b_1 најмањи бројеви међу бројевима a и b који задовољавају пропорцију

$$(1)\qquad a_1:b_1=a:b,$$

онда је

$$(2) \qquad a = m\, a_1, \quad b = m\, b_1,$$

где је m цео број, тј. бројеви a_1 и b_1 су истоструки „део“ бројева a и b.

Доказ је индиректан. Ако (2) није тачно, онда су бројеви a_1 и b_1 „делови“ броја a и b, тј.

$$(3) \qquad a = \frac{p}{r} a_1, \quad b = \frac{p}{r} b_1.$$

Ако уведемо бројеве

$$a_2 = \frac{a_1}{r}, \quad b_2 = \frac{b_1}{r},$$

из (3) имамо

$$a = p\, a_2, \quad b = p\, b_2.$$

Према томе добићемо пропорцију

$$a_2 : b_2 = a : b,$$

при чему су a_2 и b_2 мањи од a_1 и b_1. А то је по претпоставци немогуће.

[41] Теорему 21 можемо овако формулисати: ако су a_1 и b_1 узајамно прости бројеви, а задовољавају пропорцију

$$a_1 : b_1 = a : b,$$

они су и најмањи од бројева a и b.

Доказ ове теореме је исте логичке конструкције као и доказ претходне теореме, па и читавог низа наредних теорема. И овде се употребљује метода reductio ad absurdum.

[42] Садржај 22. теореме можемо изразити: ако је

$$a_1 : b_1 = a : b$$

и бројеви a_1 и b_1 најмањи, онда су они и узајамно прости.

Доказ и ове теореме је исте логичке конструкције као и претходне теореме.

[43] Садржај 23. теореме гласи: ако су a и b узајамно прости, онда је број c, који мери један од бројева a и b напр. број a, узајамно прост са бројем b.

Пример: 8 и 27 су два узајамно проста броја. Број 4, који дели број 8 је узајамно прост са бројем 27.

Доказ је поново индиректан.

[44] Садржај 24. теореме. Ако су два броја a и b узајамно прости са бројем c, онда је и производ ab узајамно прост са бројем c.

Навешћемо и доказ ове теореме.

Претпоставимо обратно да производ ab није узајамно прост са бројем c, тада два броја ab и c имају заједничку меру односно чинилац, означимо га са e, те је

$$(1) \qquad ab = me,$$

$$(2) \qquad c = ne.$$

Из (1) имамо према 19. теореми

$$\frac{e}{a} = \frac{b}{m},$$

а како су a и e узајамно прости, биће на основу 23. теореме

$$(3) \qquad b = ke,$$

$$m = ka.$$

Према (2) и (3) бројеви b и c нису узајамно прости, а то је супротно услову да је c узајамно прост број са b. На овај начин је првобитна претпоставка немогућа.

[45] Ова 25. теорема, која тврди да су a^2 и c узајамно прости, ако су узајамно прости бројеви a и c, претставља непосредни закључак из претходне теореме, ако у њој ставимо $b = a$.

[46] Ако је сваки од бројева a_1 и a_2 узајамно прост у односу на сваки од бројева b_1 и b_2, онда су и производи $a_1\ a_2$ и $b_1\ b_2$ узајамно прости бројеви.

И ова теорема се лако изводи као закључак теореме 24.

[47] Садржај ове 27. теореме: ако су a и b узајамно прости, онда су узајамно прости и a^2, b^2 односно a^3, b^3, може бити проширен и на све целе степене узајамно простих бројева.

[48] Теорему 28. можемо овако формулисати.

Нека је $a + b = s$. Тада теорема гласи: ако су a и b узајамно прости, онда су узајамно прости s и a, односно

s и b. И обрнуто, ако су s и a као и s и b узајамно прости, онда су узајамно прости a и b.

Доказ и ове теореме је у првом и у другом делу индиректан.

Изведимо први део. Ако s и a нису узајамно прости› онда постоји њихова заједничка мера, и означимо је са e; тада је

$$s = m\,e, \quad a = n\,e,$$

а одавде следује да

$$b = s - a = (m - n)\,e$$

има заједничку меру са a, а то је супротно услову да су a и b узајамно прости бројеви. Према томе је полазна претпоставка немогућа. Доказ другог дела је сличан доказу првог.

[49] 29. теорема гласи: ако је p прост број, онда су бројеви p и a, који задовољавају услов

$$a \neq m\,p$$

узајамно прости.

Еуклидов индиректни доказ се може заменити овим простим расуђивањем.

Пошто број p, као прост број, има само два делиоца и то: 1 и p, а p, према услову, није делилац броја a, онда a и p имају заједнички само један делилац јединицу, па према томе су они узајамно прости.

[50] Теорему 30. формулишемо овако:

Нека су a и b два било која броја, а p прост број. Ако је

$$(1) \qquad a\,b = m\,p$$

где је m неки број, онда је или $a = n_1 p$ или $b = n_2 p$, где су n_1 и n_2 неки, разуме се, увек цели бројеви.

Доказ се једноставније изводи овако. Ако је $a = n_1 p$, онда је теорема истинита. Ако су бројеви a и p узајамно прости, тада из пропорције

$$\frac{a}{p} = \frac{m}{b}$$

која следује из (1), закључујемо на основу теореме 20. да је

$$b = n_2\,p,$$

а то и доказује теорему.

[51] Теореме 31. и 32. посвећене су саставу сложеног броја. Према дефиницији 14. сложен број је онај који се мери односно дели неким бројем. Теорема 31. доказује да сваки сложени број обавезно треба да има као меру неки прост број.

Теоремом 32. се завршава група теорема (20 – 32) ове седме књиге које се односе на теорију простих, узајамно простих и сложених бројева. Нарочита вредност, код Еуклида, те теорије је у једноставнијој претстави количника односно размере два броја, а то је важно и за што једноставније изражавање разломка чији бројилац и именилац имају заједнички множилац.

Треба исто тако приметити да „прост“ број у грчком тексту (као и сад у другим језицима) значи „први“ број (πρῶτος) и према томе су и код Еуклида, без обзира што није било код њега идеје низа узастопних бројева, при посматрању вишеструких бројева важну улогу морали играти „први“ односно прости бројеви.

[52] Последњих седам (33—39) теорема ове књиге су посвећене теорији најмањег заједничкој садржаоца два и више бројева.

Први став ове групе, 33. став, можемо формулисати у облику овог задатка.

Дати су бројеви a, b, c. Наћи такве најмање бројеве да је

$$a:b=a_1:b_1,$$

$$b:c=b_1:c_1.$$

Решење. Ако су a, b, c узајамно прости бројеви, онда су они и најмањи. И задатак је решен.

Ако нису узајамно прости, нека e буде њихова највећа заједничка мера (одређивање према теореми 3.) и нека је

$$a=m_1 e,\quad b=m_2 e,\quad c=m_3 e.$$

Тада су

$$a_1=m_1,\quad b_1=m_2,\quad c_1=m_3.$$

Доказ. Прво, заиста, имамо:

$$a:b=m_1:m_2,\quad b:c=m_2:m_3.$$

Затим, бројеви m_1, m_2, m_3 су и најмањи бројеви, јер ако постоје још мањи, рецимо, n_1, n_2, n_3, онда имамо $a:b=n_1:n_2$ и тада је

$$a=n_1 e_1,\quad b=n_2 e_1.$$

Према томе из $a=m_1 e=n_1 e$ и услова $n_1<m_1$ треба закључити да је $e_1>e$. а то је у противречности са претпоставком да је e највећа заједничка мера. Тиме је наведени поступак утврђен.

[53] Став је формулисан у облику задатка о одређивању најмањег заједничког садржаоца за два дата броја.

Нека су a и b два броја за које треба наћи највећи заједнички садржалац, број c.

Ако су a и b узајамно прости бројеви, онда је $c=ab$.

Ако a и b нису узајамно прости бројеви и $a=m_1 e$, $b=m_2 e$, где је e највећа заједничка мера тих бројева, онда је

$$c=a m_2=b m_1=a b/e.$$

Доказ тог поступка је основан на претходном задатку.

[54] Теорему 35. можемо овако формулисати: ако је c_1 најмањи заједнички садржалац бројева a и b, а c макоји други садржалац истих бројева, онда је c мерен бројем c_1 или c је дељиво са c_1.

Претпоставимо да није. Тада је

$$c=k c_1+\delta$$

где је $\delta<c_1$. Пошто су у овој једначини c и c_1 дељиви и са a и са b, мора бити дељив са тим бројевима и број δ. Излази да постоји број δ дељив са a и b који је мањи од c_1, а то је немогуће. Према томе је c дељиво са c_1.

[55] Став 36. је задатак о одређивању најмањег заједничког садржаоца за три броја, рецимо, a_1, a_2, a_3.

Решење и доказ се оснива на одређивању н. з. с. за два броја. Ако је н. з. с. c_1 два броја a_1 и a_2 дељив и са бројем a_3, број c_1 је н. з. с. и за сва три броја. Ако није, треба наћи н. з. с. бројева c_1 и a_3. Доказ је аналоган доказу у задатку 34.

[56] Објаснимо пре свега теорему 37. на неком бројном примеру, рецимо:

$$15=3\times 5.$$

Број 15, који се мери, има, с једне стране, део, петину (то је 3) са називом везаним за број *пет*, са друге стране, број 5, који мери број 15, има назив *пет*.

Према томе је део, тако рећи, истог назива, према називу бројева, као и број који мери.

У општем случају из једначине

$$a = m \times b$$

следује да *b'ти* део броја *a* има исти назив са бројем *b*.

[57] На истој једначини $15 = 3 \times 5$ можемо објаснити и теорему 38. У примени на ту једнакост она би гласила: ако број 15 има *пети* део (то је три), он је мерен бројем *пет* (или дељив је са 5).

У данашње време обе теореме звуче као неки анахронизам.

[58] У последњем 39. ставу тражи се број који би имао дате делове, а био би најмањи.

Бројни пример. Наћи број који би имао једну половину, једну трећину и једну петину (као целе бројеве), а био би најмањи од таквих бројева. Пошто је н. з. с. бројева 2, 3, 5 број 30, можемо тврдити, да је такав број 30. Његови су делови:

$$\frac{1}{2} \cdot 30 = 15, \quad \frac{1}{3} \cdot 30 = 10, \quad \frac{1}{5} \cdot 30 = 6.$$

У теореми се изводи одређени поступак и доказује да је тако одређени број заиста најмањи.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА VIII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 8

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ОСМА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1955

Штампа Графичко предузеће „Академија“, Београд, Космајска ул. 28

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Осма књига Еуклидових елемената је друга књига Еуклидове теорије бројева, којој су посвећене VII—X књиге Елемената. У осмој књизи се развија теорија непрекидних пропорција, специјално теорија пропорционалности површинских и запреминских бројева, нарочито квадрата и куба.

При изради и ове књиге су ми помогли В. В. Мишковић и Т. П. Анђелић, на чему им овде изјављујем захвалност.

А. Б.

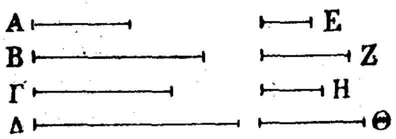
ТЕКСТ

1

Ако су неки бројеви, у произвољном броју, непрекидно пропорционални и крајњи од њих узајамно прости, они су најмањи од бројева који су у истој размери са њима.

Нека су А, В, Г, Δ неки непрекидно пропорционални бројеви и крајњи А и Δ узајамно прости, тврдим, да су бројеви А, В, Г, Δ најмањи од бројева који су у истој размери са њима.

Заиста, ако то није тако, онда постоје неки бројеви Е, Z, Н, θ који су мањи од бројева А, В, Г, Δ, а са њима су у истој размери. И пошто се А, В, Г, Δ налазе у истој размери са Е, Z, Н, θ, а и множина бројева А, В, Г, Δ је иста са множином бројева Е, Z, Н, θ, онда је, према једнакоудаљености, А према Δ као Е према θ. Али су А и Δ узајамно прости и, као узајамно прости, они су и најмањи. А најмањи бројеви мере бројеве који су са њима у истој размери и то већи мери већи и мањи мери мањи, тј. претходни број мери претходни и наредни мери наредни. Према томе А мери Е, већи број мери мањи, а то је немогуће. Значи Е, Z, Н, θ, који су мањи од А, В, Г, Δ, ннсу у истој размери са њима. На овај начин су А, В, Г, Δ најмањи од бројева који су у истој размери са њима, а то је требало доказати.[1]



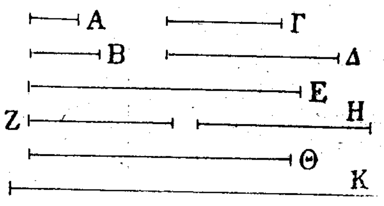
2.

Наћи онолико колико се тражи најмањих непрекидно пропорционалних бројева који су у датој размери.

Нека је А према В дата размера изражена помоћу најмањих бројева. Треба наћи онолико колико се тражи најмањих непрекидно пропорционалних бројева, који су у размери А према В.

Нека се траже четири броја и нека А помножено само собом даје Г, а помножено бројем В производи Δ. И нека В помножено само собом даје Е, а А помножено бројевима Г, Δ, Е даје Z, Н, θ и В помножено бројем Е даје К.

Пошто А помножено само собом даје Г, а помножено бројем В даје Δ, биће А према В као Г према Δ. Даље, пошто А помножено бројем В производи Δ, а В помножено само собом производи Е, то значи да бројеви А и В помножени бројем В производе бројеве Δ односно Е. Па према томе је А према В као Δ према Е. Али је А према В као и Г према Δ, значи Г према Δ је као Δ према Е. И пошто А множећи Г и Δ производи Z и Н, биће Г према Δ као Z према Н. А како је Г према Δ као А према В, биће и Z према Н као А према В. Затим, пошто број А множећи Δ и Е производи Н и θ, биће Δ према Е као Н према θ. Али и Δ је према Е као А према В. То је према томе и А према В као Н према θ. А пошто А и В помножени са Е производе θ и К, биће А према В као и θ према К. Али је А према В као Z према Н и као Н према θ. И на тај начин се Z односи према Н као Н према θ и као θ према К. Значи Г, Δ, Е и Z, Н, θ, К су пропорционални у односу А према В. Тврдим још да су они и најмањи. Заиста, пошто су А и В најмањи од бројева који су у истој размери са њима, а најмањи од бројева који су у истој размери са њима узајамно су прости, биће и бројеви А и В узајамно прости. И како бројеви А и В помножени сами собом производе одговарајуће бројеве Г и Е, а помножени на одговарајући начин бројевима Г и Е производе Z и К, онда су према томе Г, Е и Z, К узајамно прости. А ако су неки бројеви, у произвољном броју, непрекидно пропорционални и крајњи од њих узајамно прости, онда су то најмањи од бројева који су у истој размери са њима. На овај начин, бројеви Г, Δ, Е и Z, Н, θ, К су најмањи од бројева који су у истој размери А према В. А то је требало доказати.[2]



Последица

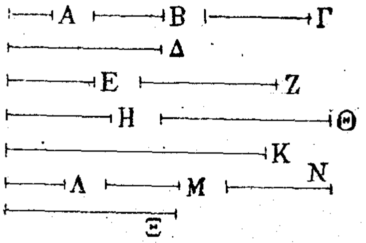
Из овог је јасно да ако имамо три броја у непрекидној пропорцији најмања од бројева који су у истој размери, онда су крајњи бројеви квадрати, а ако имамо четири броја — крајњи бројеви су кубови.[3]

3.

Ако су неки бројеви, у произвољном броју, непрекидно пропорционални и они су најмањи од бројева који су у истој размери са њима, онда су крајњи од њих узајамно прости.

Нека су А, В, Г, Δ неки непрекидно пропорционални бројеви, и то најмањи од бројева који су у истој размери са њима. Тврдим, да су крајњи од њих А и Δ узајамно прости.

Заиста, узмимо два најмања броја Е, Z који су у истој размери са бројевима А, В, Г, Δ; затим узмимо три броја Н, θ, К, и тако даље док узета количина бројева не буде једнака количина бројева А, В, Г, Δ. Нека су они узети и нека то буду бројеви Λ, М, N, Ξ.



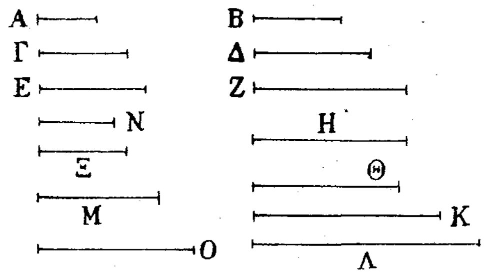
Пошто су Е и Z најмањи од бројева који су у истој размери са њима, они су узајамно прости. А како сваки од бројева Е и Z множећи сам себе производи Н и К, а множећи Н и К производи Λ, Ξ, то су Н и К, па и Λ и Ξ, узајамно прости. Но пошто су А, В, Г, Δ најмањи од бројева који су у истој размери са њима, а и Λ, М, N, Ξ исто тако најмањи од бројева који су у истој размери са њима, и количина бројева А, В, Г, Δ је једнака количина бројева Λ, М, N, Ξ, то је сваки од бројева А, В, Г, Δ једнак одговарајућем броју од Λ, М, N, Ξ. Па према томе је А једнако Λ а Δ једнако Ξ. Но Λ и Ξ су узајамно прости, па су и А и Δ узајамно прости. А то је требало доказати.[4]

4.

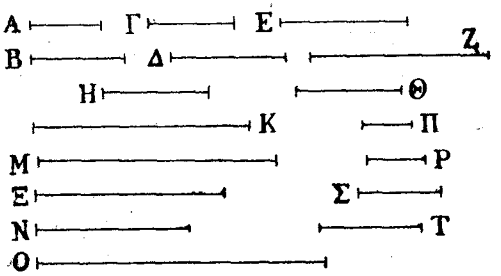
За произвољан број размера датих у најмањим бројевима наћи најмање непрекидно пропорционалне бројеве у датим размерама.

Нека су дате размере изражене најмањим бројевима: А према В, Г према Δ, и Е према Z. Треба наћи најмање бројеве у непрекидној пропорцији[5] у размерама А према В, Г према Δ, и Е према Z.

Узмимо да је број Н најмањи заједнички мултиплум бројева В и Г. И колико пута В мери Н, нека исто толико пута и А мери θ; и колико пута Г мери Н, нека исто толико пута и̂ Δ мери К. Тада Е или мери К или не мери. Нека прво Е мери број К. И колико пута Е мери К, нека исто толико пута и Z мери број Λ. И пошто А мери θ исто толико пута колико В мери Н, биће А према В као θ према Н. Из истих разлога је и Г према Δ, као Н према К, а и Е према Z као К према Λ. Према томе су бројеви θ, Н, К, Λ непрекидно пропорционални и у размери као А према В, као Г према Δ, и као Е према Z. Тврдим да су они и најмањи. Заиста, ако су бројеви θ, Н, К, Λ непрекидно пропорционални и у размерама А према В, Г према Δ и Е према Z, али не и најмањи, нека то онда буду бројеви N, Ξ, М, О. Пошто је А према В као N према Ξ, а А и В су најмањи, и најмањи мере исти број пута бројеве који су у истој размери са њима, већи број мери већи, а мањи мери мањи, тј. претходни мери претходни, а наредни — наредни, то В мери Ξ. Из истих разлога и Г мери Ξ. Према томе В и Г мере Ξ, значи и најмањи мултиплум бројева В и Г мери Ξ. Међутим најмањи мултиплум бројева В и Г је Н; значи и Н мери Ξ, већи број мери мањи, а то је немогуће. На тај начин не постоје неки бројеви мањи од θ, Н, К, Λ који би били у размерама А према В, Г према Δ и Е према Z.



Нека сада Е не мери К. И нека је М најмањи мултиплум бројева Е и К. И колико пута К мери М, нека исто толико пута сваки од бројева Θ, Н мери сваки од бројева N, Ξ; а колико пута Е мери М, нека толико пута и Z мери О. Пошто θ мери N исто онолико пута колико Н мери Ξ, биће θ према Η као N према Ξ. А како је θ према Η као А према В, биће А према В као N према Ξ. Из истих разлога и Γ је према Δ као Ξ према М. Сем тога, пошто Е мери М исти број пута као што Ζ мери О, биће Е према Ζ као М према О. На овај начин су бројеви N, Ξ, М, О непрекидно пропорционални и у размерама: А према В, Γ према Δ и Е према Ζ. Тврдим да су они при томе и најмањи у размерама А : В, Γ : Δ, Е : Ζ. Ако нису, онда постоје неки непрекидно пропорционални бројеви у размерама А:В, Γ:Δ. Е : Ζ, мањи од бројева N, Ξ, М, О. Нека то буду бројеви Π, Ρ, Σ, Τ. И пошто је Π према Ρ као А према В, а А и В су најмањи, а најмањи мере бројеве који су са њима у истој размери исти број пута и то претходни мери претходни и наредни мери наредни, онда В мери Ρ. Из истих разлога и Γ мери Ρ. Према томе В и Γ мере Ρ, значи и најмањи мултиплум бројева В и Γ мери Ρ. Али најмањи мултиплум бројева В и Γ јесте Η, значи и Η мери Ρ. А пошто је Η према Ρ као К према Σ, то и К мери Σ. Но и Е мери Σ, значи Е и К мере Σ. Међутим тада и најмањи мултиплум бројева Е и К мери Σ. Али најмањи мултиплум бројева Е и К је М, те према томе и М мери Σ, већи мери мањи, а то је немогуће. Према томе не постоје непрекидно пропорционални бројеви у размерама А према В, Γ према Δ и Е према Ζ који би били мањи од бројева N, Ξ, М, О. На овај начин су бројеви N, Ξ, М, О најмањи непрекидно пропорционални бројеви који су у размерама А:В, Γ:Δ, Е:Ζ. А то је требало доказати.[6]

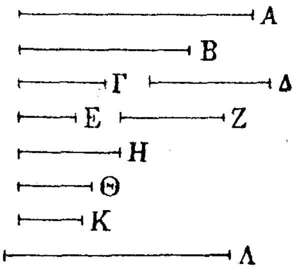


5.

Површински бројеви су један према другом у размери састављеној од размера страна.

Нека А и В буду површински бројеви и нека су стране А бројеви Γ и Δ, а стране В бројеви Е и Ζ. Тврдим да се бројеви А, В налазе у размери састављеној од страна.

Заиста, за дате размере страна Г према Е и Δ према Z узмимо најмање непрекидно пропорционалне бројеве Н, Θ, К са размерама Г:Е и Δ:Z, тако да је Г према Е као Н према Θ и Δ према Z као Θ према К. И нека Δ помножено са Е даје Λ.



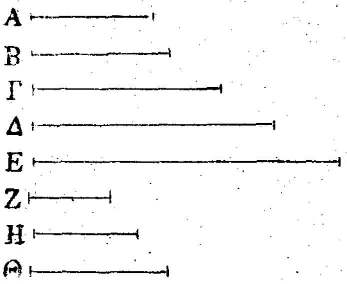
Пошто Δ помножено са Г даје А, а помножено са Е даје Λ, биће Г према Е као А према Λ. Али је Г према Е као Н према Θ, па према томе је Н према Θ као А према Λ. Затим, пошто Е помножено са Δ производи Λ, а помножено са Z производи В, биће Δ према Z као Λ према В. Али је Δ према Z као Θ према К, значи Θ се односи према К као Λ према В. А доказали смо да је и Н према Θ као А према Λ. Стога према једнакоудаљености и Н се односи према К као А према В. Али размера Н према К је састављена од страна. На овај начин и размера А према В је састављена од страна, а то је требало доказати.[7]

6.

Ако у низу произвољног броја непрекидно пропорционалних бројева први не мери други, онда ни један од осталих неће мерити ниједан други.

Нека у низу неколико непрекидно пропорционалних бројева А, В, Г, Δ, Е број А не мери В. Тврдим да ниједан од њих не мери ниједан други.

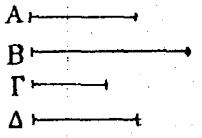
Да бројеви А, В, Г, Δ, Е не мере узастопце један други, то је очевидно, јер А не мери В. Тврдим да ниједан од њих не мери ниједан други. Заиста, ако је то могуће, нека А мери Г. И колико постоји бројева А, В, Г, толико узмимо најмањих бројева Z, Н, Θ који су у истим размерама као и бројеви А, В, Г. И пошто су бројеви Z, Н, Θ у истим размерама као и бројеви А, В, Г, а и у истом броју као и бројева А, В, Г, биће, према једнакоудаљености, А према Г као и Z према Θ. И како је А према В као Z



према Н, а А не мери В, онда ни Z не мери Н. Према томе Z није ни јединица, јер јединица мери сваки број. На овај начин су бројеви Z и θ узајамно прости [то значи Z не мери θ]. А како је Z према θ као и А према Г, онда ни А не мери Г. На сличан начин се доказује да ниједан од бројева не мери ниједан други. А то је требало доказати.[8]

7.

Ако у низу непрекидно пропорционалних бројева први мери крајњи, онда он мери и други.



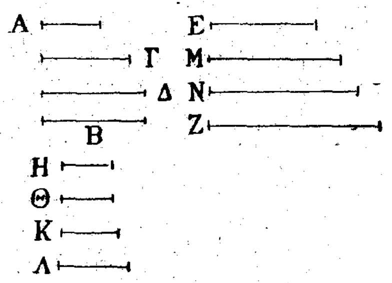
Нека у низу непрекидно пропорционалних бројева А, В, Г, Δ број А мери број Δ. Тврдим да број А мери и В.

Заиста, ако А не мери В, ниједан број не мери други неки. Међутим број А мери Δ. Па према томе и А мери В. А то је требало доказати.[9]

8.

Ако су између два броја уметнути бројеви, који су у непрекидној пропорцији са њима, онда ће се између два друга броја, који су у истој размери са првима, моћи уметнути исти толики број непрекидно пропорционалних бројева.

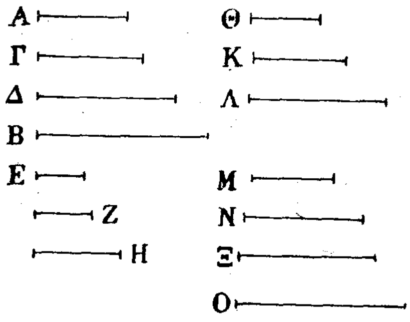
Нека су између два броја А и В уметнути бројеви Г и Δ који су у непрекидној пропорцији са њима, и нека је А према В као Е према Z. Тврдим, да ће се исто онолико бројева колико је у непрекидној пропорцији уметнуто између бројева А и В, моћи уметнути непрекидно пропорционалних бројева и између Е и Z.



Заиста, колико је по количини бројева А, В, Г, Δ, узмимо толико најмањих бројева Н, θ, К, Λ који су у истој размери са бројевима А, В, Г, Δ. Тада су крајњи Н и Λ узајамно прости. И пошто су бројеви А, В, Г, Δ у истој размери са бројевима Н, θ, К, Λ, а и количина бројева А, В, Г, Δ једнака је количини бројева Н, θ, К, Λ, биће, према једнакоудаљености, А према В као Н према Λ. Али је А према В као Е према Z, те је и Н према Λ као Е према Z. Но Н и Λ су узајамно прости, а узајамно прости су и најмањи; према томе најмањи бројеви мере исти број пута бројеве, који су са њима у истој размери, већи мери већи и мањи мери мањи, тј. претходни мери претходни, а наредни — наредни. Према томе Н мери Е исти број пута као што и Λ мери Z. А колико пута Н мери Е толико пута ће и сваки од θ и К мерити М и N. Значи бројеви Н, θ, К, Λ мере исти број пута бројеве Е, М, N, Z. И према томе су бројеви Н, θ, К, Λ у истој размери са бројевима Е, М, N, Z. Али Н, θ, К, Λ су у истој размери са бројевима А, Г, Δ, В, па према томе су и бројеви А, Г, Δ, В у истој размери са бројевима Е, М, N, Z. Али бројеви А, Г, Δ, В су непрекидно пропорционални, онда су и бројеви Е, М, N, Z непрекидно пропорционални. Те тако, колико је бројева у непрекидној пропорцији уметнуто између бројева А и В, исто толики број непрекидно пропорционалних бројева може се уметнути и између Е и Z. А то је требало доказати.[10]

9.

Ако су између два узајамно проста броја уметнути са њима непрекидно пропорционални бројеви, моћи ће се исти толики број непрекидно пропорционалних бројева уметнути и између сваког од тих бројева и јединице.



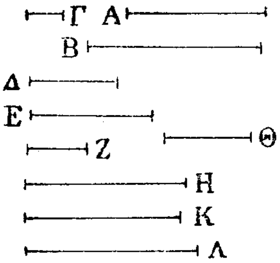
Нека су А и В два узајамно проста броја и нека су између њих уметнути са њима непрекидно пропорционални бројеви Г и Δ; и нека је Е јединица. Тврдим да ће се исти толики број непрекидно пропорционалних бројева, колико их је у непрекидној пропорцији уметнуто између бројева А и В, моћи уметнути између сваког од бројева А и В и јединице.

Заиста, узмимо два најмања броја Z и H, који су у истој размери са бројевима A, Γ, Δ B; затим узмимо три најмања броја Θ, K, Λ и тако даље, за појединачно више док њихова количине не буде једнака количини бројева A, Γ, Δ, B. Узмимо их и нека то буду бројеви M, N, Ξ, O. Очевидно да Z помножено самим собом даје Θ, а помножено са Θ производи M, и да H помножено само собом даје Λ, а помножено са Λ производи O. И пошто су M, N, Ξ, O најмањи и у истој размери као што је и Z према H, то су и A, Γ, Δ, B најмањи од оних бројева који су у истој размери као Z према H; а пошто је и количина бројева M, N, Ξ, O једнака количини бројева A, Γ, Δ, B, биће и сваки број од M, N, Ξ, O једнак сваком одговарајућем броју од A, Γ, Δ, B. Према томе је M једнако A, а O једнако B. И пошто Z помножено само собом производи Θ, онда Z мери Θ према броју јединица у Z. Значи исти број пута јединица E мери број Z и број Z мери број Θ. Према томе се јединица E односи према броју Z као и Z према Θ. Затим, пошто Z помножено са Θ производи M, број Θ мери M према броју јединица у Z. A и јединица E мери број Z према броју јединица у њему самом. На овај начин исти број пута јединица E мери број Z и број Θ мери M. Према томе јединица E стоји према броју Z као Θ према M. A доказано је да је јединица E према броју Z као Z према Θ. Значи да је јединица E према броју Z, као Z према Θ и као Θ према M. Али M је једнако A, па се стога јединица E односи према Z као Z према Θ и као Θ према A. Из истих разлога је и јединица E према броју H, као и H према Λ и као Λ према B. Дакле, колико је уметнуто непрекидно пропорционалних бројева између A и B, исто толико непрекидно пропорционалних бројева моћи ће се уметнути између сваког од бројева A и B и јединице. A то је требало доказати.[11]

10.

Ако су између сваког од два броја и јединице уметнути непрекидно пропорционални бројеви, онда, колико буде непрекидно пропорционалних бројева уметнуто између сваког од њих и јединице, исто толико ће се моћи уметнути непрекидно пропорционалних бројева и између самих тих бројева.

Нека су између сваког од бројева А и В и јединице Г уметнути непрекидно пропорционални бројеви Δ, Е и Z, Н. Тврдим, да колико је између сваког од бројева А, В и јединице Г уметнуто непрекидно пропорционалних бројева, исто толико ће се моћи уметнути непрекидно пропорционалних бројева и између самих бројева А и В.



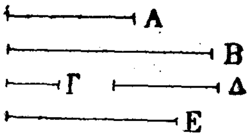
Заиста, нека Δ помножено са Z производи θ, а Δ и Z, помножено са θ, производи К односно Λ.

Пошто се јединица Г односи према броју Δ као Δ према Е, то значи да јединица Г исто толико пута мери број Δ колико број Δ мери Е. Али јединица Г мери број Δ према броју јединица у Δ, па стога Δ помножено само собом производи Е. Даље, пошто се јединица Г односи према броју Δ, као Е према А, значи да јединица Г исто толико пута мери број Δ колико број Е мери А. Али јединица Г мери број Δ према броју јединица у Δ, значи и Е мери А према броју јединица у Δ; према томе Δ помножено са Е производи А. Из истих разлога и Z помножено самом собом даје Н, а помножено са Н производи В. Како опет Δ помножено само собом даје Е, а помножено са Z производи θ, биће Δ према Z као Е према θ. Из истих разлога ће бити и Δ према Z као θ према Н. И према томе је Е према θ као θ према Н. Даље, пошто Δ помножено са Е и θ производи А односно К, биће Е према θ као А према К. Али је Е према θ као Δ према Z. И према томе је Δ према Z као А према К. Заиста, пошто свако од Δ и Z помножено са θ производи К, односно Λ, биће Δ према Z као К према Λ. Али је Δ према Z као А према К, што значи да је А према К као К према Λ. Осим тога, пошто Z помножено сваким од θ и Н производи Λ односно В, биће θ према Н као Λ према В. А како је θ према Н, као Δ према Z, биће Δ према Z као Δ према В. А доказано је да је и Δ према Z као А према К и као К према Λ. И услед тога је А према К као К према Λ и као Λ према В. На овај начин су бројеви А, К, Λ, В непрекидно пропорционални. И онолико колико је између сваког од бројева А, В и јединице Г уметнуто непрекидно пропорционалних бројева, исто толико је уметнуто непрекидно пропорционалних бројева и између самих бројева А и В. А то је требало доказати.[12]

11.

За два квадратна броја постоји један средње пропорционалан број и размера квадратног броја према квадратном је двапут виша од размере стране према страни.

Нека су А и В два квадратна броја и страна А је Г, а страна В је Δ. Тврдим, да за бројеве А и В постоји један средње пропорционалан број и да је размера А према В двапут виша од размере Г према Δ.

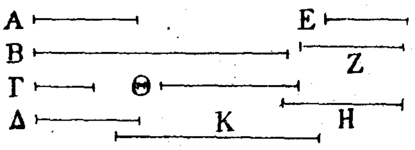


Нека Г, помножено са Δ, производи Е. Пошто је А квадрат, а Г је његова страна, Г помножено само собом даје А. Из истих разлога Δ помножено само собом даје В. Пошто сад Г помножено сваким од бројева Г и Δ даје А односно Е, биће Г према Δ као А према Е. Из истих разлога је и Г према Δ као Е према В. И према томе је А према Е као Е према В. На овај начин за два броја А и В постоји средње пропорционалан број.

И тврдим да је размера А према В двапут виша од размере Г према Δ. Заиста, пошто су три броја А, Е, В непрекидно пропорционални, биће размера А према В двапут виша од размере А према Е. А како се А односи према Е као Г према Δ, биће размера А према В двапут виша од размере стране Г према страни Δ. А то је требало доказати.[13]

12.

За два кубна броја постоје два средње пропорционална броја и размера куба према кубу је трипут виша од размере стране према страни.



Нека су А и В два кубна броја и страна А је Г, а страна В је Δ. Тврдим да за А и В постоје два средње пропорционална броја и размера А према В је трипут виша од размере Г према Δ.

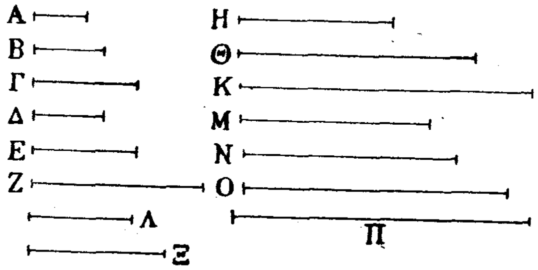
Заиста, нека Г помножено само са собом даје Е, помножено са Δ даје Z, а Δ помножено само собом даје Н, и Z, помножено сваким од Г и Δ, производи θ и К.

Пошто је А куб, чија је страна Г, и Г помножено само собом даје Е, онда Г помножено само собом даје Е, а помножено са Е даје А. Из истих разлога Δ помножено само собом даје Н, а помножено са Н даје В. И пошто Г помножено сваким од Г и Δ даје Е, односно Z, биће Г према Δ као Е према Z. Из истих разлога је и Г према Δ као Z према Н. Затим, пошто Г помножено сваким од Е и Z даје А, односно θ, биће Е према Z као А према θ. А како је Е према Z као Г према Δ, биће Г према Δ и као А према θ. Даље, пошто свако од Г, Δ, помножено са Z, производи θ односно К, биће Г према Δ као θ према К. Затим, пошто Δ помножено сваким од Z, Н производи К односно В, биће Z према Н као К према В. А Z је према Н и као Г према Δ. На овај начин, пошто је Г према Δ као А према θ и као θ према К и као К према В, то значи да за два броја А и В постоје два средње пропорционална броја θ и К.

Тврдим још и да је размера А према В трипут виша од размере Г према Δ. Заиста, пошто су А, θ, К, В четири непрекидно пропорционална броја, биће размера А према В трипут виша од размере А према θ. А како је А према θ као Г према Δ, то је и размера А према В трипут виша од размере Г према Δ. А то је требало доказати.[14]

13.

Ако постоји произвољан број непрекидно пропорционалних бројева и сваки такав број помножен самим собом



производи нешто (неки број), онда су и добивени бројеви (квадрати) непрекидно пропорционални. И ако полазни бројеви, помножени добивеним, производе нешто (неке бројеве), онда су и тако добивени бројеви (кубови) пропорционални [то се исто продужује и даље].

Нека су А, В, Г неки произвољни непрекидно пропорционални бројеви, то значи да је А према В као В према Г, и нека се од А, В, Г помножених самим собом добивају бројеви Δ, Е, Z, а од помножених са Δ, Е, Z добивају бројеви Н, θ, К. Тврдим, да су бројеви Δ, Е, Z и бројеви Н, θ, К непрекидно пропорционални.

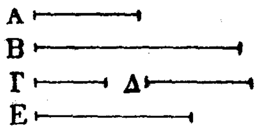
Заиста, нека А помножено са В производи Λ, а свако од А и В помножено са Λ производи М односно N. Затим В помножено са Г производи Ξ, а свако од В и Г помножено са Ξ производи О односно П.

Слично горе наведеном доказује се да су бројеви Δ, Λ, Е и Н, М, N, θ непрекидно пропорционални са размером А према В и да су још и бројеви Е, Ξ, Z и θ, О, П, К непрекидно пропорционални са размером В према Г. И даље, да је А према В као В према Г, те према томе су и бројеви Δ, Λ, Е у истој размери као и бројеви Е, Ξ, Z и још као и бројеви Н, М, N, θ према бројевима θ, О, П, К. И количина бројева Δ, Λ Е једнака је количини бројева Е, Ξ, Z, а и количина бројева Н, М, N, θ једнака количини бројева θ, О, П, К, те је тада, према једнакоудаљености, Δ према Е, као Е према Z и Н је према θ као θ према К. А то је требало доказати.[15]

14.

Ако квадрат мери квадрат, онда и страна мери страну; и ако страна мери страну, онда и квадрат мери квадрат.

Нека су А и В квадратни бројеви, а Г и Δ су њихове стране и нека А мери В. Тврдим да и Г мери Δ.



Заиста, нека Г помножено са Δ производи Е, тада су А, Е, В непрекидно пропорционални са размером Г према Δ. Пошто су А, Е, В непрекидно пропорционални, и А мери В, онда и А мери Е, а како је А према Е као Г према Δ, онда и Г мери Δ.

Затим, нека Г мери Δ. Тврдим да и А мери В.

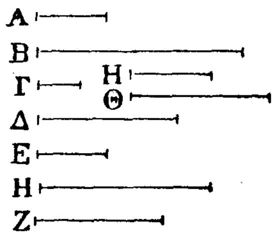
Заиста, на основу истих расуђивања на сличан начин се доказује да су A, E, B непрекидно пропорционални у размери Γ према Δ. И пошто је Γ према Δ као A према E, а Γ мери Δ, онда и A мери E. Међутим A, E, B су непрекидно пропорционални, а то значи и A мери B.

На овај начин, ако квадрат мери квадрат, онда и страна мери страну; и ако страна мери страну, онда и квадрат мери квадрат. А то је требало доказати.[16]

15.

Ако кубни број мери кубни број, онда и ивица мери ивицу; и ако ивица мери ивицу, онда и куб мери куб.

Неки кубни број A мери кубни број B, и ивица броја A је Γ, и броја B је Δ. Тврдим да Γ мери Δ.



Заиста, нека Γ помножено само собом даје E, а Δ помножено само собом даје H, и још Γ помножено са Δ даје Z, а свако од Γ и Δ помножено са Z даје Θ односно K. Јасно је да су E, Z, H и A, Θ, K, B непрекидно пропорционални са размером Γ према Δ. И пошто су A, Θ, K, B непрекидно пропорционални, а A мери B, онда A мери и Θ. А како је A према Θ као Γ према Δ, онда и Γ мери Δ.

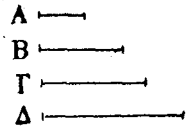
Нека сад Γ мери Δ. Тврдим да и A мери B.

Заиста, на основу истих расуђивања на сличан начин се доказује да су A, Θ, K, B непрекидно пропорционални са размером Γ према Δ. И пошто Γ мери Δ, а Γ је према Δ као A према Θ, онда и A мери Θ. На овај начин A мери и B. А то је требало доказати.[17]

16.

Ако квадратни број не мери квадратни број, онда ни страна не мери страну; и ако страна не мери страну, онда ни квадрат не мери квадрат.

Нека су А и В квадратни бројеви, а Г и Δ су њихове стране и нека А не мери В. Тврдим да ни Г не мери Δ.



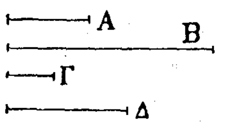
Заиста, ако Г мери Δ, онда и А мери В. Али А не мери В, значи и Г не мери Δ.

Затим, нека Г не мери Δ. Тврдим да ни А не мери В.

Заиста, ако А мери В, онда и Г мери Δ. Али Г не мери Δ, значи ни А не мери В. А то је требало доказати.[18]

17.

Ако кубни број не мери кубни број, онда ни ивица не мери ивицу; и ако ивица не мери ивицу, онда ни куб не мери куб.



Нека кубни број А не мери кубни број В и ивица А је Г, а ивица В је Δ. Тврдим да ни Г не мери Δ.

Заиста, ако Г мери Δ, онда и А мери В. Али А не мери В, значи ни Г не мери Δ.

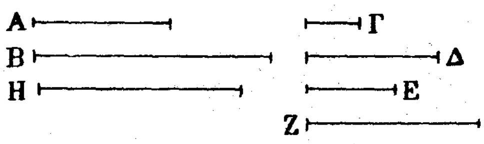
Затим, нека Г не мери Δ. Тврдим да ни А не мери В.

Заиста, ако А мери В, онда и Г мери Δ. Али Г не мери Δ, значи ни А не мери В. А то је требало доказати.

18.

За два слична површинска броја постоји средње пропорционалан број; и размера површинског броја према сличном површинском броју је двапут виша од размере хомологних страна.

Нека су А и В два слична површинска броја и нека су бројеви Г и Δ стране броја А, а Е и Z броја В. И пошто слични површински бројеви имају сличне стране, биће Г према Δ као Е према Z. Сад тврдим, да за бројеве А и В постоји средње пропорционалан број и да је



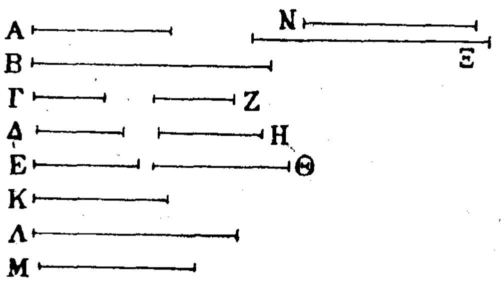
размера А према В двапут виша од размере Г према Е или од размере Δ према Z, тј. хомологне стране према хомологној (страни).

Пошто је Г према Δ као Е према Z, биће, после пермутовања, Г према Е као Δ према Z. И пошто су Г и Δ стране површинског броја А, онда Δ помножено са Г даје А. Из истих разлога и Е помножено са Z даје В. Нека сад Δ помножено са Е производи Н. И пошто Δ помножено са Г производи А, а помножено са Е производи Н, биће Г према Е као А према Н. Али како је Г према Е као Δ према Z, биће и Δ према Z као А према Н. Затим, пошто Е помножене са Δ производи Н, а помножено са Z производи В, биће Δ према Z као Н према В. А доказано је да је Δ према Z као А према Н. И према томе је А према Н као Н према В. Значи, бројеви А, Н, В су непрекидно пропорционални. На овај начин за бројеве А и В постоји средње пропорционални број.

Тврдим, да је размера А према В двапут виша од размере хомологне стране према хомологној страни, тј. од размере Г према Е или размере Δ према Z. Заиста, пошто су А, Н, В непрекидно пропорционални, размера А према В двапут је виша од размере А према Н. И А је према Н као Г према Е, и као Δ према Z. На овај начин је размера А према В двапут виша од размере Г према Е или размере Δ према Z. А то је требало доказати.[19]

19.

За два слична запреминска броја постоје два средње пропорционална броја; и размера запреминског броја према сличном запреминском је трипут виша од размера хомологне ивице према хомологној ивици.



Нека су А и В два запреминска броја и ивице броја А: Г, Δ, Е, а ивице броја В — Z, Н, Θ. И пошто слични запремински бројеви имају сличне ивице, биће Г према Δ као Z према Н, и Δ према Е као Н према Θ. Тврдим, да за бројеве Α и Β постоје два средња пропорционална броја и да је размера Α према Β трипут виша од размере Γ према Ζ и Ζ према Η и Ε према θ.

Заиста, нека Γ помножено са Δ производи Κ, а Ζ помножено са Η производи Λ. Пошто су Γ и Δ у истој размери са Ζ и Η, и од Γ и Δ образовано Κ, а од Ζ и Η образовано Λ, то су Κ и Λ слични површински бројеви, па према томе за Κ и Λ постоји један средње пропорционалан број. Нека то буде број Μ. И нека је Μ производ Δ и Ζ, како је то доказано у претходној теореми. И пошто Δ помножено са Γ производи Κ, а помножено са Ζ производи Μ, биће Γ према Ζ као Κ према Μ. Али Κ је према Μ као Μ према Λ. Према томе су бројеви Κ, Μ, Λ непрекидно пропорционални у размери Γ према Ζ. И пошто је Γ према Δ као Ζ према Η, биће после пермутовања, Γ према Ζ као Δ према Η. Из истих разлога је и Δ према Η као Ε према θ. На тај начин су бројеви Κ, Μ, Λ непрекидно пропорционални у размери Γ према Ζ, и Δ према Η и још Ε према θ. Па нека свако од Ε, θ помножено са Μ производи Ν, односно Ξ. А пошто је Α запремински број са ивицама Γ, Δ, Ε, то Ε помножено производом Γ и Δ производи Α. Али је производ Γ и Δ једнак Κ, значи Ε помножено са Κ производи Α. Из истих разлога и θ помножено са Λ производи Β. И пошто Ε помножено са Κ производи Α, а помножено са Μ производи Ν, биће Κ према Μ као Α прома Ν. А како је Κ према Μ као Γ према Ζ и као Δ према Η и још као Ε према θ, биће и Γ према Ζ и Δ према Η и Ε према θ као Α према Ν. Затим, пошто свако од Ε и θ помножено са Μ производи Ν, односно Ξ, биће Ε према θ као Ν према Ξ. Али је Ε према θ као Γ према Ζ и као Δ према Η. И према томе је и Γ према Ζ и Δ према Η и Ε према θ као Α према Ν и као Ν према Ξ. Затим, пошто θ помножено са Μ производи Ξ, али и помножено са Λ производи Β, биће Μ према Λ као Ξ према Β. Али Μ је према Λ као Γ према Ζ и као Δ према Η и као Ε према θ. И према томе као што се односи Γ према Ζ и Δ према Η и Ε према θ, односи се не само Ξ према Β, већ и Α према Ν и Ν према Ξ. На овај начин су бројеви Α, Ν, Ξ, Β непрекидно пропорционални у размери наведених ивица.

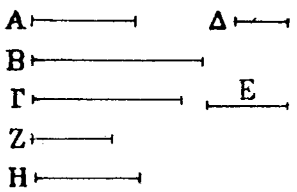
Тврдим да је и размера А према В трипут виша од размере хомологне ивице према хомологној ивици, тј. од размере броја Г према броју Z или Δ према Н или још Е према Θ. Заиста, пошто су бројеви А, N, Ξ, В четири непрекидно пропорционална броја, биће размера А према В трипут виша од размере А према N. Али, како је доказано, А се односи према N као Г према Z и као Δ према Н и још као Е према Θ. И на овај начин, размера А према В је трипут виша од размере хомологних ивица, тј. од размере броја Г према броју Z и Δ према Н и још Е према Θ. А то је требало доказати.[20]

20.

Ако за два броја постоји средње пропорционалан број, они су слични површински бројеви.

Нека за два броја А и В постоји средње пропорционални број Г. Тврдим, да су А и В слични површински бројеви.

Заиста, узмимо најмање бројеве Δ и Е који су у истој размери са бројевима А и Г. Тада Δ мери А исто онолико пута колико и Е мери Г. Нека Δ онолико пута мери А, колико је јединица у Z; значи Z помножено са Δ производи А. На овај начин је А површински број, а његове стране су Δ и Z. Затим, пошто су Δ и Е најмањи од оних који су у истој размери са Г и В, онда колико пута Δ мери Г, толико пута и Е мери В. И колико пута Е мери В, нека је толико јединица у Н. Према томе Е мери В према броју јединица у Н и Н помножено са Е производи В. На овај начин је В површински број, а његове стране су Е и Н. Према томе су А и В површински бројеви. Тврдим да су они и слични. Заиста, пошто Z помножено са Δ производи А, а помножено са Е производи Г, биће Δ према Е као А према Г, тј. и као Г према В. Затим, пошто Е помножено сваким од Z и Н производи Г односно В, биће Z према Н као Г према В; али Г је према В као Δ према Е и према томе је Δ према Е као

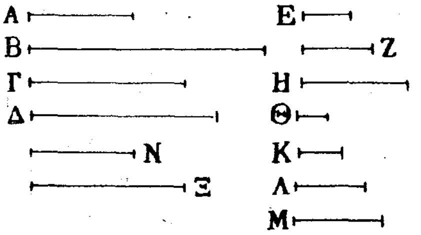


Z према Н. А, после пермутације, Δ је према Z као Е према Н. На овај начин су А и В слични површински бројеви и њихове стране су пропорционалне. А то је требало доказати.[21]

21.

Ако за два броја постоје два средње пропорционална броја, они су слични запремински бројеви.

Нека за два броја А и В постоје два средње пропорционална броја Г и Δ. Тврдим да су А и В слични запремински бројеви.



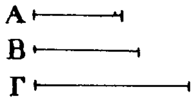
Заиста, узмимо три најмања броја Е, Z, Н, који су у истој размери са бројевима А, Г, Δ. Тада су крајњи Е и Н узајамно прости. Пошто за бројеве Е и Н постоји један средње пропорционалан број Z, биће Е и Н слични површински бројеви. Нека су Θ и К стране броја Е, а Λ и М стране Н. Тада је јасно да су бројеви Е, Z, Н непрекидно пропорционални са размером Θ према Λ и К према М. И пошто су бројеви Е, Z, Н најмањи од оних који имају са бројевима А, Г, Δ исте размере, и у истој су количини бројеви Е, Z, Н са бројевима А, Г, Δ, биће према једнакоудаљености Е према Н као А према Δ. Бројеви Е и Н су узајамно прости, прости и најмањи, а најмањи мере бројеве који су са њима у истој размери исти број пута и то већи мере веће и мањи мере мање, тј. претходни — претходне и наредни — наредне. Према томе Е мери А исти број пута као што и Н мери Δ. Нека у N буде онолико јединица колико пута Е мери А. Тада N помножено са Е производи А. Али Е је производ од Θ и К. Према томе N помножено производом Θ и К даје А. На овај начин број А је запремински број, а његове ивице су Θ, К, N. Затим, пошто су Е, Z, Н најмањи од бројева који су у размери бројева Г, Δ, В, онда Е мери исти онолики број пута број Г као што Н мери В. Нека у Ξ буде онолико јединица колико пута Е мери Г. Према томе Н мери В према броју јединица у Ξ и на овај начин Ξ помножено са Н производи В. Али Н је производ од Λ и М, па према томе Ξ помножено са производом Λ и М даје В. На овај начин и В је запремински број, а ивице су му Λ, М, Ξ. Тако су А и В запремински бројеви.

Тврдим да су они и слични. Заиста, пошто бројеви N и Ξ помножени са Е производе А односно Г, биће N према Ξ као А према Г, тј. као Е према Z. Али Е према Z је као θ према Λ и као К према М. И према томе је θ према Λ као К према М и као N према Ξ. А како су θ, К, N ивице броја А, а Ξ, Λ, М ивице броја В, онда су А и В слични запремински бројеви. А то је требало доказати.[22]

22.

Ако су три броја непрекидно пропорционална и први је квадрат, онда је и трећи квадрат.

Нека су три броја А, В, Г непрекидно пропорционална и први А је квадрат. Тврдим да је и трећи Г квадрат.

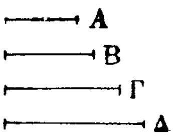


Заиста, пошто је за бројеве А и Г број В средње пропорционални број, онда су А и Г слични површински бројеви. Али А је квадрат, онда је квадрат и број Г. А то је требало доказати.[23]

23.

Ако су четири броја непрекидно пропорционална и први је куб, онда је и четврти куб.

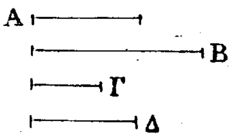
Нека су четири броја А, В, Г, Δ непрекидно пропорционална, и А је куб. Тврдим да је и четврти Δ куб.



Заиста, пошто за бројеве А и Δ постоје два непрекидно пропорционална броја В и Г биће А и Δ слични запремински бројеви. Али А је куб, онда је куб и број Δ. А то је требало доказати.

24.

Ако су два броја један према другом у размери квадратног броја према квадратном и први број је квадрат, онда је и други квадрат.



Нека су два броја А и В један према другом у размери квадратног броја Г према квадратном броју Δ и број А је квадрат. Тврдим да је и В квадрат.

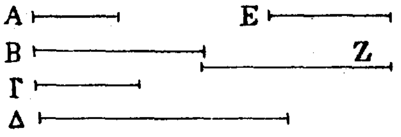
Заиста, пошто су Г и Δ квадрати, онда су Г и Δ слични површински бројеви. Према томе за бројеве Г и Δ постоји средње пропорционалан број. И број Г је према Δ као А према В. Према томе и за бројеве А и В постоји средње пропорционалан број. А пошто је А квадрат, то је и В квадрат. А то је требало доказати.

25.

Ако су два броја један према другом у размери кубног броја према кубном и први број је куб, онда је и други куб.

Нека су два броја А и В један према другом у размери кубног броја Г према кубном броју Δ и број А је куб. Тврдим да је и В куб.

Заиста, пошто су Г и Δ кубови, Г и Δ су слични запремински бројеви. Према томе за Г и Δ постоје два средње пропорционална броја. Али онолико колико средње пропорционалних бројева постоји између Г и Δ, исто толико постоји и између бројева који су у истој размери са њима. На тај начин и за бројеве А и В постоје два средње пропорционална броја. Нека су уметнути бројеви Е и Z. Сад пошто су четири броја А, Е, Z, В непрекидно пропорционални и А је куб, онда је и В куб. А то је требало доказати.

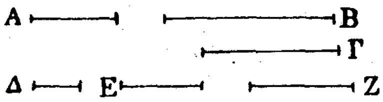


26.

Слични површински бројеви су један према другом у размери квадратног броја према квадратном.

Нека су А и В слични површински бројеви. Тврдим да је размера А према В као размера квадратног броја према квадратном броју.

Заиста, пошто су А и В слични површински бројеви, онда за бројеве А и В постоји један средње пропорционалан број. Нека он постоји и нека то буде број Г. Узмимо најмање бројеве Δ, Е, Z који су у истој размери са бројевима А, Г, В. Тада су крајњи бројеви Δ и Z квадрати. А пошто је Δ према Z као А према В, а Δ и Z су квадрати,



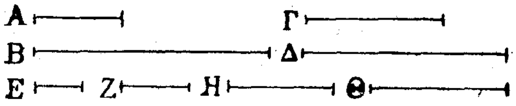
биће и размера А према В размера квадратног броја према квадратном броју. А то је требало доказати.

27.

Слични запремински бројеви су један према другом у размери кубног броја према кубном броју.

Нека су А и В слични запремински бројеви. Тврдим да је размера А према В као кубног броја према кубном.

Заиста, пошто су А и В слични запремински бројеви, за А и В постоје два средње пропорционална броја. Нека постоје и нека то буду бројеви Г и Δ. Узмимо најмање бројеве Е, Z, Н, Θ који су у истој размери и у истој количини са бројевима А, Г, Δ, В. Пошто су крајњи од њих Е и Θ кубови и пошто је Е према Θ као А према В, биће и размера А према В као кубног броја према кубном броју. А то је требало доказати



КОМЕНТАР

[1] Бројеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ су непрекидно пропорционални или у непрекидној пропорцији, ако су испуњени услови

$$a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = \dots = a_{n-1} : a_n .$$

Ако однос наредног броја према претходном означимо са q видимо да је

$$a_{i+1} : a_i = q,$$

где је q иста величина за све бројеве, и према томе тај низ образује геометриску прогресију. Проучавајући непрекидне пропорције, Еуклид ипак не проучава посебно чланове тих пропорција као чланове геометриске прогресије. Навешћемо примере за непрекидне прогресије, које задовољавају услов да су крајњи бројеви узајамно прости:

$$\frac{27}{18} = \frac{18}{12} = \frac{12}{8},$$

$$\frac{1296}{1080} = \frac{1080}{900} = \frac{900}{750} = \frac{750}{625};$$

бројеви 27 и 8, па 1296 и 625 су узајамно прости. Примењена на дате примере, ова Еуклидова теорема тврди да не постоје четири, односно пет бројева мањих од 27, 18, 12, 8, односно мањих од 1296, 1080, 900, 750, 625 који би имали исту размеру са њима; тј. не постоји број који би делио све бројеве првог односно другог низа без остатка.

За доказ теореме примењен је метод reductio ad absurdum, дакле индиректан начин. Ако три броја a, b, c, који задовољавају услов

$$a : b = b : c,$$

где су a и c узајамно прости бројеви, нису најмањи, онда постоје мањи бројеви a', b', c' са условом

$$a' : b' = b' : c',$$

при чему нови бројеви треба да буду пропорционални првима, тј.

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

Ако су сад у пропорцији

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$$

бројеви a и c узајамно прости, они су по теореми 21, VII и најмањи. А као најмањи мере бројеве a' и c'. Како су по претпоставци a' и c' мањи, а a и c су већи од њих, излази да већи бројеви мере мање, а то је немогуће. Тиме је теорема доказана.

[2] За решење Еуклидова задатка постављена у овом ставу можемо овако поступити.

Пођимо од идентитета

$$\frac{A}{B}\equiv\frac{A}{B}$$

и претворимо га у тражену пропорцију. Ради тога леви разломак проширимо множиоцем A, а десни множиоцем B; добићемо

$$\frac{A^2}{AB}=\frac{AB}{B^2}.$$

Ако ставимо $A^2=\Gamma$, $AB=\Delta$, $B^2=E$, имамо три броја Г, Δ, Е који образују три непрекидно пропорционална броја. Како су Г и Е узајамно прости, бројеви Г, Δ, Е су према претходној теореми и најмањи, а при томе су и у датој размери А : В.

За четири броја можемо искористити два идентитета

$$\frac{A}{B}\equiv\frac{A}{B}\equiv\frac{A}{B},$$

и проширити одговарајуће разломке са A^2, AB, B^2; добићемо непрекидне пропорције

$$\frac{A^3}{A^2B}=\frac{A^2B}{AB^2}=\frac{AB^2}{B^3}$$

или

$$\frac{Z}{H} = \frac{H}{\theta} = \frac{\theta}{K},$$

ако ставимо

$$Z = A^3,\ H = A^2B,\ \theta = AB^2,\ K = B^3.$$

Лако је показати да су у случају, кад су бројеви A и B узајамно прости, бројеви Z, H, θ, K најмањи, а размера између њих је увек A : B.

[3] Из претходног излагања непосредно следује да су за три броја крајњи бројеви квадрати, а за четири — кубови.

[4] Ова теорема је супротна првој теореми ове књиге. Еуклид проучава низ непрекидно пропорционалних бројева и анализира ове две особине тог низа:

1. Крајњи бројеви низа су узајамно прости.
2. Бројеви су најмањи.

У првој теореми је показано да из прве особине следује друга особина, а у овој теореми се показује да из друге особине следује прва особина.

[5] Да читалац не би био у недоумици треба што пре да наведемо ову примедбу. На овом месту Еуклидов израз ἑξῆς ἀνάλογον треба разумети у друкчијем, мало општијем смислу, него што је то било употребљено раније. Овде се за четири броја a, b, c, d говори да су они непрекидно пропорционални, ако су од њих састављене размере

$$\frac{d}{b},\ \frac{b}{c},\ \frac{c}{a},$$

но да те размере могу да и не буду једнаке, а да имају, како се тражи у Еуклидовом задатку, вредности датих размера.

[6] Показаћемо скраћеним алгебарским путем Еуклидов поступак. Нека су дате три размере

$$\frac{a_1}{a_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{b_3}{b_3}.$$

Треба од њих начинити три нове размере истих вредности, али са непрекидно пропорционалним члановима.

Нађимо најмањи заједнички мултиплум бројева b_1 и a_2. Нека то буде број В и нека је $B = m_1b_1 = n_1a_2$. Тада се добивају две размере са непрекидно пропорционалним члановима

$$\frac{A}{B}, \frac{B}{C},$$

где је $A = m_1a_1$ и $C = n_1b_2$.

1. Ако је С дељиво са a_3 и $C = ka_3$, имамо размере са непрекидно пропорционалним члановима

$$\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D},$$

где је $B = kb_3$.

2. Ако С није дељиво са a_3, нађимо њихов најмањи заједнички мултиплум. Нека то буде C_1 и $C_1 = pa_3 = qC$. Саставимо размере

$$\frac{Aq}{Bq}, \frac{Bq}{Cq}, \frac{a_3p}{b_3p}.$$

Ако ставимо $Aq = A_1$, $Bq = B_1$, $b_3p = D_1$, добићемо размере

$$\frac{A_1}{B_1}, \frac{B_1}{C_1}, \frac{C_1}{D_1}$$

које одговарају постављеним условима.

[7] Алгебарски садржај ове теореме је у једнакости

$$\frac{a_1a_2}{b_1b_2} = \frac{a_1}{b_1}\ \frac{a_2}{b_2},$$

где су $a_1a_2 = a$, $b_1b_2 = b$ два површинска броја. Пошто у Еуклидовој математици размери није одговарао разломак, операције са размерама, како смо то видели и раније, биле су много компликованије од данашњих.

Интересантно је приметити да речи συγκείμενος λόγος (састављена размера) етимолошки више одговарају сабирању, а не множењу. О томе смо већ говорили тумачећи διπλάσιος и τριπλάσιος λόγος не као двојну и тројну размеру, већ као квадрат и куб размере. Неки коментатори (напр. И. Веселовски у коментару превода Д. Мордухај-Болтовског) увођење сабирања место множења објашњавају утицајем музике:

У музици се каже да се интервал октаве (2 : 1) добива сабирањем интервала кварте (4 : 3) и квинте (3 : 2), међутим ту нема сабирања већ је множење

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}.$$

[8] За тумачење ове теореме навешћемо два примера. Као први пример узмимо низ из наше прве примедбе

8, 12, 18, 27,

а други нека буде низ

2, 6, 18, 54.

То су два низа непрекидно пропорционалних бројева. У првом низу први број не мери други, јер $12 \neq k\,8$, где је k цео број и тада никакав други број низа, напр. 12, не мери било који други број низа, у датом случају 12 и 18 или 18 и 27. У другом низу први број 2 мери други број 6, јер је $6=k\cdot 2$ за $k=3$. Тада и сваки мањи број низа мери већи: $18=3.6$, $54=9.6=3.18$.

Кратак Еуклидов доказ лако се да транскрибовати алгебарским језиком.

Упоредо са овом теоремом може се поставити и ова теорема: Ако први број у низу непрекидно пропорционалних бројева мери други број, онда и сваки број тог низа мери сваки други број тог низа већи од њега (Упореди теорему 7).

Обе теореме стоје у вези са низом бројева у облику геометриске прогресије. Ако је количник геометриске прогресије разломак, имамо случај прве теореме, а ако је тај количник цео број, важи друга теорема.

[9] Ова теорема би задржала своју истинитост и у редакцији кад крајњи (ἔσχατος) број заменимо било којим другим бројем, различитим од другог. У новој редакцији ова теорема би била обрнута теореми, коју смо навели у претходној примедби.

[10] Објаснимо ову теорему на једном бројном примеру. На том примеру се види и суштина Еуклидовог поступка и доказа.

Нека је дат низ непрекидних пропорција

(*) $$\frac{2592}{2160}=\frac{2160}{1800}=\frac{1800}{1500}=\frac{1500}{1250}$$

и два броја

3888 и 1875,

који су пропорционални бројевима 2592 и 1250, јер је

$$\frac{3888}{1875}=\frac{2592}{1250}.$$

Заменимо бројеве из пропорција (*) најмањим бројевима у истој размери; тада ћемо добити низ бројева из прве примедбе

$$\frac{1296}{1080}=\frac{1080}{900}=\frac{900}{750}=\frac{750}{625}.$$

Пошто је сад $3888=3\cdot 1296$ и $1875=3\cdot 625$, множећи све бројеве са 3 имамо низ размера

$$\frac{3888}{3240}=\frac{3240}{2700}=\frac{2700}{2250}=\frac{2250}{1875},$$

који решава питање.

Тај се поступак може изложити у општем облику алгебарски, а речима он је изражен код Еуклида.

[11] И ову теорему објаснићемо прво на бројном примеру. Нека су, као у примеру прве примедбе, између бројева 8 и 27 уметнути непрекидно пропорционални бројеви, тако да имамо низ

8, 12, 18, 27.

Тада можемо написати и ове низове

8, 4, 2, 1,

1, 3, 9, 27.

Множење одговарајућих бројева тих низова доводи до полазног низа.

Доказана особина непрекидно пропорционалних бројева непосредно следује из ове претставе чланова геометриске прогресије, рецимо за четири члана

$$a,\ \frac{m}{n}\,a,\ \left(\frac{m}{n}\right)^2 a,\ \left(\frac{m}{n}\right)^3 a=b,$$

где се a дели са n^3, ако желимо да имамо низ целих бројева. Према томе место претходног низа можемо написати овај

$$n^3,\ mn^2,\ m^2n,\ m^3.$$

Ако ставимо $m=1$, имамо низ $n^3=a,\ n^2,\ n,\ 1$, а за $n=1$ имамо други низ $1,\ m,\ m^2,\ m^3=b$.

[12] Пре свега приметимо да је у почетку доказа у грчком тексту наведено, као и у нашем преводу, да су, рецимо, између броја А и јединице Г уметнути бројеви Δ и Е. Према томе одатле следује овај поредак непрекидно пропорционалних бројева

А, Δ, Е, Г.

Међутим из даљег текста доказа следује да поредак мора бити овај

А, Е, Δ, Г,

или, још боље,

Г, Δ, Е, А.

Чинимо ову примедбу пошто то није једино место у Еуклидову тексту које не одговара нашим данашњим формама математичког излагања.

Пратити доказ ове теореме, изложен речима, је доста тешко. Показаћемо на овом примеру предност алгебарског изражавања истих Еуклидових расуђивања.

Дато је (са $\Gamma=1$):

(1) $$\frac{I}{\Delta}=\frac{\Delta}{E}=\frac{E}{A},$$ (2) $$\frac{\Gamma}{Z}=\frac{Z}{H}=\frac{H}{B},$$

а треба извести:

$$\frac{A}{X}=\frac{X}{Y}=\frac{Y}{B}.$$

Ставимо (3) $\theta=\Delta.Z$, (4) $K=\Delta.\theta$, (5) $\Lambda=Z.\theta$

Из (1) $\therefore$ (6) $\Delta^2=E$, (7) $\Delta.E=A$,

Из (2) $\therefore$ (8) $Z^2=H$, (9) $Z.H=B$.

Из (6) и (3) $\therefore$ (10) $\frac{\Delta}{Z}=\frac{E}{\theta}$,

из (8) и (9) $\therefore$ (11) $\frac{\Delta}{Z}=\frac{\theta}{H}$,

Из (10) и (11) $\therefore$ (12) $\frac{E}{\theta}=\frac{\theta}{H}$,

из (7) и (4) $\therefore$ (13) $\frac{E}{\theta}=\frac{A}{K}$.

Из (10), (12), (13) и (4) и (5) $\therefore$ (14) $\frac{\Delta}{Z}=\frac{E}{\theta}=\frac{A}{K}=\frac{K}{\Lambda}$

Из (5) и (9) $\therefore$ (15) $\frac{\theta}{H}=\frac{\Lambda}{B}$,

Из (7) и (8) $\therefore$ (16) $\frac{\theta}{H}=\frac{\Delta}{Z}$

Из (14), (15), (16) $\therefore$ $\frac{A}{K}=\frac{K}{\Lambda}=\frac{\Lambda}{B}$;

тиме је доказ извршен и према (3), (4) и (5) имамо

$$X = K = \Delta^2 Z, \qquad Y = \Lambda = \Delta Z^2$$

и

$$A = \Delta^3, \qquad B = Z^3.$$

[13] У алгебарској форми тај Еуклидов доказ изгледа овако.

Дато је: $A = \Gamma^2$, $B = \Delta^2$, треба доказати:

(I) да постоји број E, који задовољава услов $A:E=E:B$; сад се тај број зове геометриска средина.

И (II) да је

$$\frac{A}{B}=\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2.$$

Еуклид непосредно уводи производ $E=\Gamma\cdot\Delta$ и затим из две пропорције

$$\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{A}{E} \quad \text{и} \quad \frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{E}{B}$$

изводи пропорцију $A:E=E:B$.

Што се тиче другог дела, пре свега се може написати

$$\frac{A}{B}=\left(\frac{A}{E}\right)^2,$$

а како је

$$\frac{A}{E}=\frac{\Gamma}{\Delta}$$

добива се тражени резултат

$$\frac{A}{B}=\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2.$$

[14] Алгебарски се ова теорема лако може извести на овај начин. Препишимо ова два идентитета

$$\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\Gamma}{\Delta}$$

у облику

$$\frac{\Gamma\cdot\Gamma^2}{\Delta\cdot\Gamma^2}=\frac{\Gamma\cdot\Gamma\cdot\Delta}{\Delta\cdot\Gamma\cdot\Delta}=\frac{\Gamma\Delta^2}{\Delta\Delta^2},$$

што са ознакама $\Gamma^3=A$, $\Delta\Gamma^2=\theta$, $\Delta^2\Gamma=K$, $\Delta^3=B$ даје тражене резултате:

$$\frac{\Delta}{\theta}=\frac{\theta}{K}=\frac{K}{B},\qquad \frac{A}{B}=\frac{\Gamma^3}{\Delta^3}=\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^3.$$

[15] Теорема гласи: Ако су А, В, Г непрекидно пропорционални, онда су непрекидно пропорционални како бројеви A^2, B^2, Γ^2 тако и бројеви A^3, B^3, Γ^3. Ако формулишемо Еуклидов доказ без његових ознака, видимо да је у доказу наведено четири низа

$$A^2,\ AB,\ B^2;$$
$$A^3,\ A^2B,\ AB^2,\ B^3;$$
$$B^2,\ B\Gamma,\ \Gamma^2;$$
$$B^3,\ B^2\Gamma,\ B\Gamma^2,\ \Gamma^3;$$

и показано је да су сви бројеви тих низова у истој размери, јер је $A:B=B:\Gamma$. Тада, бирајући чланове „према једнакоудаљености“, непосредно долазимо до пропорција

$$A^2:B^2=B^2:\Gamma^2 \quad \text{и} \quad A^3:B^3=B^3:\Gamma^3,$$

које су еквивалентне са Еуклидовим пропорцијама у његовим ознакама.

[16] Како Еуклид поставља пропорцију

$$\mathrm{A} : \mathrm{E} = \mathrm{E} : \mathrm{B},$$

а према теореми 7, ако А мери В (крајњи), онда А мери и Е (други), можемо тврдити да је размера А : Е рационална. Пошто је $\mathrm{A} = \Gamma^2$ и $\mathrm{E} = \Gamma\Delta$, биће $\mathrm{A} : \mathrm{E} = \Gamma : \Delta$; значи и размера $\Gamma : \Delta$ је рационална и Г мери Δ. Није тешко на сличан начин доказати и обрнути став, који чини другу половину ове теореме.

[17] Доказ ове теореме је потпуно сличан доказу претходне теореме.

[18] Докази ове и наредне теореме могу послужити као узор узастопности и краткоће излагања доказа у случају reductio ad absurdum. Може се тврдити да је такво Еуклидово излагање играло огромну улогу при формирању математичког језика код културних народа.

[19] Алгебарски ова теорема се доказује врло једноставно. Ако је $A = a_1 a_2$ и $B = b_1 b_2$ и због сличности

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

проширењем првог количника са a_2 а другог са b_1 добићемо

$$\frac{a_1 a_2}{b_1 a_2} = \frac{a_2 b_1}{b_1 b_2}$$

или

$$A : H = H : B,$$

где је $H = a_2 b_1 = a_1 b_2$. За други део теореме закључујемо:

$$\frac{A}{B} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(\frac{a_1}{b_1}\right) = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 = \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2.$$

[20] Слично претходној, ова теорема се алгебарски овако доказује.

Ставимо

$$A = a_1 a_2 a_3, \qquad B = b_1 b_2 b_3$$

и пођимо од дате пропорције

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

Извршимо проширење ових количника редом помоћу производа $a_2 a_3$, $b_1 a_3$, $b_1 b_2$, па добивамо размере

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 a_2 a_3}=\frac{a_2 b_1 a_3}{b_1 b_2 a_3}=\frac{a_3 b_1 b_2}{b_1 b_2 b_3},$$

које са Еуклидовим ознакама доводе до резултата

$$\frac{A}{N}=\frac{N}{\Xi}=\frac{\Xi}{B}.$$

За други део теореме имамо

$$\frac{A}{B}=\frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2 b_3}=\left(\frac{a_1}{b_1}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{b_2}\right)\cdot\left(\frac{a_3}{b_3}\right)=\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^3.$$

Интересантно је приметити да у тексту доказа ове теореме Еуклид први пут употребљује реч τὸ θεώρημα.

[21] Краће можемо доказ ове теореме овако извести. Дато је

$$\frac{A}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{B}.$$

Ако ставимо

$$\frac{A}{\Gamma}=\frac{\Delta}{E}=\frac{\Gamma}{B},$$

где су Δ и Е најмањи бројеви у истој размери, онда је, прво, А дељиво са Δ и Г са Е и то исти број пута, рецимо, Z. Тада је

$$A=Z\Delta,\qquad \Gamma=ZE.$$

И, друго, при дељивости броја Г са Δ и броја В са Е и то исти број пута Н имамо

$$B=HE,\qquad \Gamma=H\Delta.$$

I. Према томе, као производи, А и В су површински бројеви.

II. Из две вредности за Г имамо

$$ZE = H\Delta,$$

одакле долазимо до тражене пропорције

$$\frac{\Delta}{Z} = \frac{E}{H}.$$

[22] Садржај теореме можемо овако формулисати: Ако постоје две непрекидне пропорције

$$\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Delta}{B},$$

онда су

$$A = a_1\, a_2\, a_3,$$
$$B = b_1\, b_2\, b_3$$

и

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Доказ се заснива на доказу претходне теореме и сличан му је.

[23] Садржај и доказ свих осталих теорема не претставља никаквих тешкоћа и не захтева нарочити коментар.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА IX

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 9

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ДЕВЕТА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1956

Штампа Графичко предузеће „Академија“, Београд, Космајска ул. 28

САДРЖАЈ ДЕВЕТЕ КЊИГЕ

ПРЕДГОВОР

Главни садржај ове, девете, књиге Еуклидових елемената је проучавање особина низа бројева одређених по правилу геометриске прогресије и примена тих особина на разна питања дељивости бројева. Упоређивање Еуклидових расуђивања са савременим излагањем тих истих ставова показује нарочито убедљиво колико је снажно средство савремени алгебарски апарат у поређењу са геометриско-аритметичким којим се служи Еуклид. У овој књизи се завршава теорија рационалних односа између целих бројева. У последњем ставу Еуклид изводи поступак за одређивање такозваних савршених бројева.

При изради и ове књиге су ми помогли В. В. Мишковић и Т. П. Анђелић, на чему им овде изјављујем захвалност.

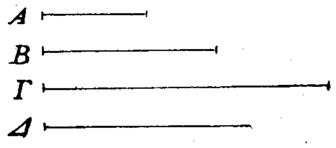
А. Б.

ТЕКСТ

1.

Ако два слична површинска броја помножена један другим производе нешто, добивени број је квадрат.

Нека су А и В два слична површинска броја и А помножено са В производи Г. Тврдим да је Г квадрат.

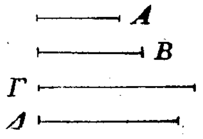


Заиста, нека А помножено само собом производи Δ, тада је Δ квадрат. Уколико А помножено само собом производи Δ, а помножено са В производи Г, биће А према В као Δ према Г. И пошто су А и В слични површински бројеви може се уметнути између А и В један средње пропорционалан број. А ако су између два броја уметнути бројеви у непрекидној пропорцији са њима, онда колико је уметнуто тих бројева, исто толико се може уметнути и између бројева који су у истој размери са њима. Према томе се и између Δ и Г може уметнути један средње пропорционалан број. А како је Δ квадрат, биће квадрат и број Г. А то је требало доказати.[1]

2.

Ако два броја помножена један другим производе квадрат, они су слични површински бројеви.

Нека су А и В два броја и А помножено са В производи квадрат Г. Тврдим да су А и В слични површински бројеви.



Заиста, нека А помножено само собом производи Δ, тада је Δ квадрат. Уколико А помножено само собом производи Δ, а помножено са В производи Г, биће А према В као Δ према Г. А како је Δ, а такође и Г, квадрат, биће А и В слични површински бројеви. Тада се између бројева Δ и Г може уметнути један средње пропорционалан број.

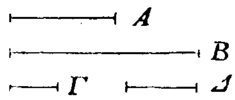
А пошто се Δ односи према Г као А према В, може се уметнути један средње пропорционалан број и између бројева А и В. Ако је сад између два броја уметнут један средње пропорционалан број, они су слични површински бројеви. На овај начин су А и В слични површински бројеви. А то је требало доказати.[2]

3.

Ако кубни број помножен сам собом производи нешто, добивени број је куб.

Нека кубни број А помножен сам собом производи В. Тврдим, да је В куб.

Заиста, узмимо ивицу Г куба А и нека Г помножено само собом производи Δ. Тада је јасно да Г помножено са Δ производи А. И пошто Г помножено само собом производи Δ, Г мери број Δ према броју јединица у Г. Али и јединица мери број Г према броју јединица у Г. Према томе се јединица односи према Г као Г према Δ. Даље, пошто Г помножено са Δ производи А, Δ мери А према броју јединица у Г. Али и јединица мери Г према броју јединица у том броју. Према томе јединица се односи према Г као Δ према А. Међутим, јединица се односи према Г као Г према Δ. И према томе је јединица према Г као Г према Δ и као Δ према А. На овај начин су између јединице и А уметнута два средње пропорционална броја Г и Δ у непрекидној пропорцији. Затим, пошто А помножено само собом производи В, А мери В према броју јединица у А. Али и јединица мери А према броју јединица у самом себи. Па према томе се јединица односи према А као А према В. Међутим између јединице и А уметнута су два средње пропорционална броја, па се, значи, могу уметнути и између јединице и В два средње пропорционална броја. А ако су између два броја уметнута два средње пропорционална броја и први број је куб, онда је и други куб. А како је А куб, биће и В куб. А то је требало доказати.[3]

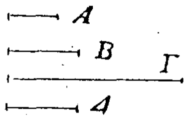


4.

Ако кубни број помножен кубним бројем производи нешто, добивени број је куб.

Нека кубни број А помножен кубним бројем В производи број Г. Тврдим да је Г куб.

Заиста, нека А помножено само собом производи Δ. Тада је Δ куб. Пошто А помножено само собом производи Δ, а помножено са В производи Г, биће А према В као Δ према Г. Али А и В су кубови, значи А и В су слични запремински бројеви. Према томе се између А и В могу уметнути два средње пропорционална броја. А тада се и између Δ и Г могу уметнути два средње пропорционална броја. А како је Δ куб, биће и Г куб. А то је требало доказати.[4]

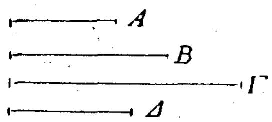


5.

Ако неки број множи кубни број и производи куб, биће и тај ~~неки~~ број куб.

Нека неки број В множи кубни број А и производи куб Г. Тврдим да је и В куб.

Заиста, нека А помножено само собом производи Δ. Тада је и Δ куб. И пошто А помножено само собом производи Δ, а помножено са В производи Г, биће А према В као Δ према Г. Пошто су Δ и Г кубови, они су слични запремински бројеви. Значи, између Δ и Г могу се уметнути два средње пропорционална броја. А како је Δ према Г као А према В, то се и између А и В могу уметнути два средње пропорционална броја. Али А је куб, па је тада и В куб. А то је требало доказати.[5]

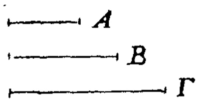


6.

Ако број помножен сам собом производи куб, биће и сам тај број куб.

Нека број А помножен сам собом производи кубни број В. Тврдим да је и А куб.

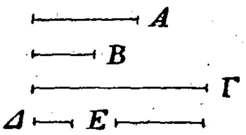
Заиста, нека А множећи В производи Г. Уколико број А помножен сам собом производи В, а помножен бројем В производи Г, онда је Г куб. И пошто А помножено само собом производи В, онда А мери В према броју својих јединица. Али и јединица мери А према броју јединица у А. Према томе се јединица односи према А као А према В. И пошто А помножено са В производи Г, онда В мери Г према броју јединица у А. Али и јединица мери број А према броју јединица у А. Према томе се јединица односи према А као В према Г. Али је јединица према А као А према В, те је А према В као В према Г. А пошто су В и Г кубови, они су слични запремински бројеви. На овај начин су између В и Г уметнута два средње пропорционална броја. Али В се односи према Г као А према В. Значи, и за А и В постоје два средње пропорционална броја. А како је В куб, биће и А куб. А то је требало доказати.[6]



7.

Ако сложен број множећи неки број производи нешто, добивени број је запремински.

Нека сложен број А помножен неким бројем В производи Г. Тврдим да је Г запремински број.

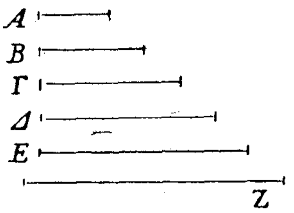


Заиста, пошто је А сложен број, он се мери неким бројем. Нека се мери бројем Δ, и нека се колико пута Δ мери А, исто толико јединица налази у Е. Пошто сад Δ мери број А према броју јединица у Е, Е помножено са Δ производи А. Како А помножено са В производи Г, а А је производ од Δ и Е, значи производ од Δ и Е помножен са В производи Г. На овај начин Г је запремински број са ивицама Δ, Е, В. А то је требало доказати.[7]

8.

Ако постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева, са јединицом на првом месту, биће број на трећем месту и сваки други иза њега квадрат, на четвртом месту и сваки трећи иза њега куб, на седмом месту и сваки шести иза њега у исти мах и куб и квадрат.

Нека постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева A, B, Г, Δ, E, Z са јединицом на првом месту. Тврдим да је број на трећем месту, број B, и сваки други иза њега квадрат, на четвртом месту, број Г, и сваки трећи иза њега куб, на седмом месту, број Z, и сваки шести иза њега у исти мах и куб и квадрат.



Заиста, пошто се јединица односи према A као A према B, јединица мери исти број пута A као што A мера број B. Али јединица мери број A према броју јединица у њему. И A мери B према броју јединица у A. Према томе A помножено само собом производи B. Значи, B је квадрат. Пошто су и B, Г, Δ непрекидно пропорционални, а B је квадрат, биће и Δ квадрат. Из истих разлога је и Z квадрат. Слично се доказује да је и сваки други иза њега квадрат.

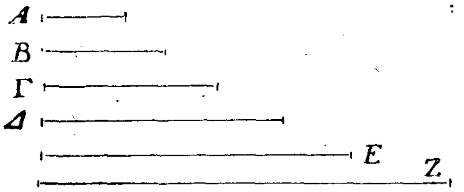
Даље тврдим да је број на четвртом месту, број Г, и сваки трећи број иза њега куб. Заиста, пошто се јединица односи према A као B према Г, јединица мери исто онолико пута A, колико B мери Г. Али јединица мери број A према броју јединица у A. И B мери Г према броју јединица у A. Стога A помножено са B производи Г. Пошто A помножено само собом производи B, а помножено са B производи Г, биће Г куб. А како су Г, Δ, E, Z непрекидно пропорционални, и Г је куб, биће и Z куб. А доказано је да је Z и квадрат. На овај начин је број на седмом месту у исти мах и куб и квадрат. Слично се доказује да је и сваки шести иза њега у исти мах и куб и квадрат. А то је требало доказати.[8]

9.

Ако постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева, са јединицом на првом месту, и први број иза јединице је квадрат, биће и сви остали квадрати, а ако је први иза јединице куб, биће и сви остали кубови.

Нека постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева A, B, Г, Δ, E, Z са јединицом на првом месту и нека је број иза јединице, број A, квадрат. Тврдим да су и сви остали бројеви квадрати.

Да је број на трећем месту, број B, и сваки други иза њега квадрат, то је већ доказано. Али тврдим да су и сви остали квадрати. Заиста, пошто су A, B, Г непрекидно пропорционални, а A је квадрат, биће и Г квадрат. Затим, пошто су B, Г, Δ непрекидно пропорционални и B је квадрат, биће и Δ квадрат. Слично се доказује да су и сви остали квадрати.



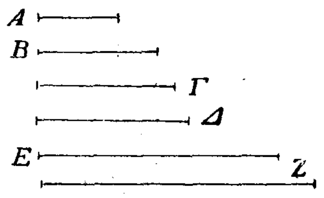
Сад, нека A буде куб. Тврдим да су и остали бројеви кубови.

Да је број на четвртом месту, број Г, и сваки трећи иза њега куб, то је доказано. Тврдим да су и сви остали кубови. Заиста, пошто се јединица односи према A као A према B, јединица мери исти број пута A као што A мери B. Али јединица мери A према броју јединица у њему. И A мери B према броју јединица у A. Према томе A помножено само собом производи B. И A је куб. Али ако кубни број помножен сам собом производи нешто, и добивени број биће куб. И према томе B је куб. А пошто су четири броја A, B, Г, Δ непрекидно пропорционална и A је куб, биће и Δ куб. Из истих разлога је и E куб и сви остали — кубови. А то је требало доказати.[9]

10.

Ако постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева, са јединицом на првом месту, и први број иза јединице није квадрат, онда ниједан од осталих бројева неће бити квадрат сем броја на трећем месту и сваког другог иза њега. И ако први број иза јединице није куб, онда ниједан од осталих бројева неће бити куб сем броја на четвртом месту и сваког трећег иза њега.

Нека постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева A, B, Г, Δ, E, Z са јединицом на првом месту и нека број иза јединице, број А, није квадрат. Тврдим да ниједан од осталих бројева неће бити квадрат сем броја на трећем месту и сваког другог иза њега.



Заиста, ако је могуће, нека Г буде квадрат. Исто тако је и В квадрат. Према томе су бројеви В и Г у истој размери као и квадратни број према квадратном. А пошто је В према Г као А према В, биће и бројеви А и В у истој размери као квадратни број према квадратном. Према томе су А и В слични површински бројеви. Али В је квадрат, значи и А је квадрат. А то није претпостављено. Значи Г није квадрат. Слично се доказује и да ниједан од осталих бројева неће бити квадрат сем броја на трећем месту и сваког другог иза њега.

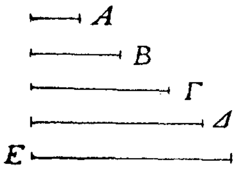
Нека сад А не буде куб. Тврдим да ниједан од осталих бројева неће бити куб сем броја на четвртом месту и сваког трећег иза њега.

Заиста, ако је могуће, нека је Δ куб. А и Г је куб, пошто је то број на четвртом месту. А пошто се Г односи према Δ као В према Г, значи и размера В према Г је размера куба према кубу. Али Г је куб, па према томе је и В куб. Пошто се сад јединица односи према А као А према В, а како јединица мери број А према броју јединица у њему, то и А мери В према броју јединица у А. Према томе је А помножено само собом произвело куб В. Али ако број помножен сам собом производи куб, онда је и сам тај број куб. Значи А је куб. А то није претпостављено. Значи Δ није куб. Слично се доказује и да ниједан од осталих бројева неће бити куб сем броја на четвртом месту и сваког трећег иза њега. А то је требало доказати.[10]

11.

Ако постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева, са јединицом на првом месту, онда мањи мери већи према једном од бројева који се налази међу пропорционалним бројевима.

Нека постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева В, Г, Δ, Е са јединицом А на првом месту. Тврдим да од бројева В, Г, Δ, Е мањи број В мери број Е према једном од бројева Г и Δ.



Заиста, пошто се јединица А односи према В као Δ према Е, јединица А мери број В исто онолико пута колико број Δ мери број Е. Тада, после пермутовања, јединица А мери број Δ исто онолико пута колико број В мери број Е. Али јединица А мери Δ према броју јединица у њему самом, па, према томе, и В мери број Е према броју јединица у Δ. На овај начин мањи број В мери већи Е према једном од бројева међу пропорционалним бројевима.

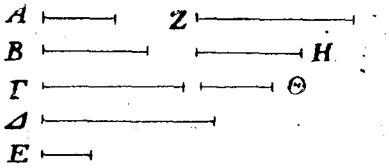
Последица.

И јасно је да је број према којем мањи број мери већи исто толико удаљен од већег на страну мањег колико је мањи број удаљен иза јединице.[11]

12.

Ако постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева, са јединицом на првом месту, и последњи број се мери неким простим бројевима, онда се тим истим простим бројевима мери и први број иза јединице.

Нека постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева А, В, Г, Δ са јединицом на првом месту. Тврдим да се оним простим бројевима којим се мери број Δ, истим тим простим бројевима мери и А.

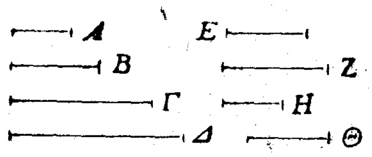


Нека се Δ мери неким простим бројем Е. Тврдим да се и А мери са Е. Заиста, нека се не мери, и Е је прост број. А сваки прост број је прост са сваким бројем којег не мери. Значи бројеви Е и А су међусобно прости. Пошто број Е мери број Δ, нека га мери према броју Z и тада Е помножено са Z производи Δ. Затим, пошто А мери број Δ према броју јединица у Г, то А помножено са Г производи Δ. Али и Е помножено са Z производи Δ. Значи производ А и Г је једнак производу Е и Z. И тада се А односи према Е као Z према Г. Но А и Е су прости, прости и најмањи, а најмањи бројеви мере исти број пута бројеве који су у истој размери са њима, и то претходни мери претходни и наредни мери наредни. Дакле Е мери Г. Нека мери према броју Н. Тада Е помножено са Н производи Г. Али на основу горе наведеног и А помножено са В производи Г. Значи производ од А и В једнак је производу од Е и Н. И тада се А односи према Е као Н према В. Али, А и Е су прости, прости и најмањи, а најмањи бројеви мере исти број пута бројеве који су у истој размери са њима, и то претходни мери претходни и наредни — наредни. Дакле Е мери В. Нека мери према броју Θ. Тада Е помножено са Θ производи В. Али и А помножено само собом производи В. Значи производ од Е и Θ једнак је квадрату над А. И тада се Е односи према А као А према Θ. Међутим, А и Е су прости, прости и најмањи, а најмањи бројеви мере исти број пута бројеве који су у истој размери са њима и то претходни мери претходни и наредни — наредни. Значи Е мери А како претходни мери претходни. Али оно и не мери, а то је немогуће. Значи Е и А нису међусобно прости. Они су сложени. Али сложени бројеви се мере неким простим бројем. И како се претпоставља да је Е прост број, а прост број се не мери другим бројем сем самим собом, то Е мери А и Е, па према томе Е мери А. Али Е мери и Δ. Дакле Е мери А и Δ. На сличан начин се доказује да којим било простим бројевима се мери Δ, тим истим бројевима се мери и А, а то је требало доказати.[12]

13

Ако постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева са јединицом на првом месту, и број, први иза јединице, је прост, онда се највећи број неће никаквим другим бројевима мерити сем оних који су међу пропорционалним бројевима.

Нека постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева А, В, Г, Δ, са јединицом на првом месту, и нека је први иза јединице, број А, прост број. Тврдим да се највећи број Δ неће мерити никаквим другим бројевима сем А, В, Г.



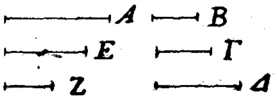
Заиста, ако је могуће, нека се он мери бројем Е и нека Е не буде ниједан од бројева А, В, Г. Јасно је да Е није прост број. Јер, ако је Е прост број и мери Δ, он мора мерити и прост број А, који са њим није исти, а то је немогуће. Значи Е није прост број. Он је сложен. Али се сваки сложен број мери неким простим бројем. Према томе број Е се мери неким простим бројем. Тврдим да се он не мери никаквим простим бројем сем броја А. Заиста, ако се Е мери неким другим бројем, а Е мери Δ, онда тај други број мери и Δ. А тада тај број мери и А, који је прост број и није исти са њим. А то је немогуће. Дакле, А мери Е. И пошто Е мери Δ, нека га мери према броју Z. Тврдим да број Z није исти ни са једним од бројева А, В, Г. Јер, ако је Z исти са једним од А, В, Г и мери Δ према броју Е, тада и један од бројева А, В, Г мери Δ према броју Е. Али један од бројева А, В, Г мери Δ према неком од А, В, Г. И према томе је Е један од бројева А, В, Г. А то се не претпоставља. Значи Z није исти ни са једним од бројева А, В, Г. Слично се доказује да се Z мери бројем А, па се поново доказује да Z није прост број. Заиста, ако је тако и он мери Δ, мериће и А, прост број, са којим он није исти. А то је немогуће. Према томе Z није прост број. Он је сложен. Али се сваки сложен број мери неким простим бројем. Према томе се број Z мери неким простим бројем. Тврдим да се он не мери никаквим простим бројем сем броја А. Заиста, ако неки други прост број мери Z, а Z мери Δ, онда тај други број мери и Δ. А тада тај број мери и А, који је прост број и није исти са њим. А то је немогуће. Значи, А мери Z. И пошто Е мери Δ према Z, онда Е помножено Z производи Δ. Али, исто тако и А помножено са Г производи Δ. Према томе је производ А и Г једнак производу Е и Z. На тај начин имамо пропорцију: А је према Е као Z према Г. Али А мери Е, па и Z мери Г. Нека мери према броју Н. Слично се доказује да Н није исти број ни са једним од А и В и да се тај број мери бројем А. И пошто Z мери Г према броју Н, то Z помножено са Н производи Г. Али и А помножено са В производи Г. Према томе је производ А и В једнак производу Z и Н. На тај начин имамо пропорцију: А се односи према Z као Н према В. Али А мери Z, па и Н мери В. Нека мери према броју Θ. Слично се доказује да број Θ није исти са А. И пошто Н мери В према броју Θ, Н помножено са Θ производи В. Али и А помножено само собом производи В. Према томе производ од Θ и Н једнак је квадрату на А. На овај начин Θ је према А као А према Н. Али А мери Н, значи и Θ мери А, мери прост број који није исти са њим. А то је бесмислено. Према томе, највећи број Δ неће се мерити никаквим другим бројевима сем броја А, В, Г. А то је требало доказати.[13]

14.

Најмањи од бројева који се мере датим простим бројевима неће се мерити никаквим другим простим бројем сем датих.

Нека је А најмањи број који се мери простим бројевима В, Г, Δ. Тврдим, да се А неће мерити никаквим простим бројем сем бројева В, Г, Δ.

Заиста, ако је могуће, нека се број А мери простим бројем Е који није исти ни са једним од бројева В, Г, Δ. Пошто Е мери А, нека га мери према броју Z. Тада Е помножено са Z производи А. И А се мери простим бројевима В, Г, Δ. Ако сад два броја помножена један другим производе нешто, и то добивено се мери неким простим бројем, онда тај прост број мери и један од полазна два броја. Према томе В, Г, Δ мере један од бројева Е и Z. Али они не мере број Е, јер је Е прост број и није исти ни са једним од В, Г, Δ. Значи они мере број Z, мањи од А. А то је немогуће, јер се претпоставља

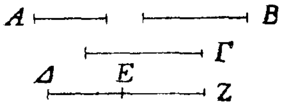


да је А најмањи број који се мери бројевима В, Г, Δ. На овај начин се број А неће мерити никаквим другим простим бројем сем В, Г, Δ. А то је требало доказати.[14]

15.

Ако су три непрекидно пропорционална броја најмања од оних који су са њима у истој размери, биће збир ма која два од њих узајамно прост са осталим.

Нека су три непрекидно пропорционална броја А, В, Г најмања од оних који су са њима у истој размери. Тврдим, да је збир два од А, В, Г узајамно прост са осталим, тј. збир А и В са Г, збир В и Г са А и збир А и Г са В.



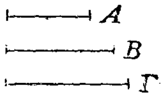
Заиста, узмимо два најмања броја ΔЕ и ЕZ који су у истој размери са бројевима А, В, Г. Јасно је да ΔЕ помножено само собом производи А, помножено са ЕZ производи В и ЕZ помножено само собом производи Г. И пошто су ΔЕ и ЕZ најмањи, они су узајамно прости. Међутим, ако су два броја узајамно проста, биће и њихов збир узајамно прост у односу на сваки од њих. Према томе је ΔZ узајамно прост са сваким од ΔЕ и ЕZ. Али и ΔЕ је узајамно прост са ЕZ. Значи ΔZ и ΔЕ су узајамно прости са ЕZ. Али, ако су два броја сваки посебно узајамно прости са неким трећим бројем, онда је и производ састављен од њих узајамно прост са тим бројем. Према томе је производ од ZΔ и ΔЕ узајамно прост са ЕZ, а такође и производ од ZΔ и ΔЕ узајамно прост са квадратом на ЕZ. [Заиста, ако су два броја узајамно проста, биће и квадрат добивен од једног узајамно прост са другим]. Али производ од ZΔ и ΔЕ је квадрат на ΔЕ заједно са производом ΔЕ и ЕZ. Значи, квадрат на ΔЕ више производ ΔВ и ЕZ је узајамно прост према квадрату на ЕZ. А како је квадрат на Δ број А, производ ΔЕ и ЕZ број В и квадрат на ЕZ—Г, биће збир састављен од А и В узајамно прост са Г. Слично се доказује да је и збир састављен од В и Г узајамно прост са А. Тврдим још да је и збир А и Г узајамно прост са В. Заиста, пошто је ΔZ узајамно прост према сваком од ΔЕ и ЕZ, биће и квадрат на ΔZ узајамно прост са производом од ΔE и EZ. Али квадрат на ΔZ је једнак квадратима на ΔE и EZ више двоструки производ ΔE и EZ. Према томе је збир квадрата на ΔE и EZ заједно са двоструким производом ΔE и EZ узајамно прост са производом ΔE и EZ. После раздвајања добивамо да је збир квадрата на ΔE и EZ заједно са једним производом ΔE и EZ узајамно прост са производом ΔE и EZ. После још једног раздвајања добивамо да је збир квадрата на ΔE и EZ узајамно прост са производом ΔE и EZ. А како је квадрат на ΔE број Δ, производ ΔE и EZ број B и квадрат на EZ број Γ, биће збир састављен од A и Γ узајамно прост са B. А то је требало доказати.[15]

16.

Ако су два броја узајамно проста, онда први број према другом неће бити као други према неком трећем.

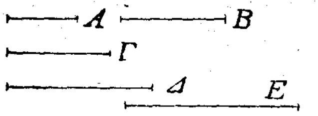
Нека су два броја A и B узајамно проста. Тврдим да неће бити A према B као B према неком трећем.

Заиста, нека буде могуће да је A према B као B према Γ. Али A и B су узајамно прости, а узајамно прости бројеви су и најмањи, а како најмањи бројеви мере исти број пута бројеве који су са њима у истој размери, претходни — претходни, а наредни — наредни, значи A ће мерити B како претходни мери претходни. Али, A мери и само себе, према томе A мери A и B, који су узајамно прости. А то је бесмислено. Значи, не стоји A према B као B према Γ. А то је требало доказати.[16]



17.

Ако постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева и крајњи су узајамно прости, онда се не може први односити према другом као последњи према ма ком другом броју.



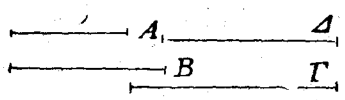
Нека постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева A, B, Γ, Δ и крајњи од њих A и Δ су узајамно прости. Тврдим да се не може A односити према B као Δ према ма ком другом броју.

Заиста, ако је могуће, нека буде А према В као Δ према Е. Тада је, после пермутовања, А према Δ као В према Е. Међутим, А и Δ су прости, прости и најмањи, а како најмањи бројеви мере бројеве који су са њима у истој размери исти број пута, и то претходни мери претходни и наредни — наредни, значи, А мери В. А пошто је А према В као В према Г, В мери Г. На овај начин и А мери Г. А пошто је В према Г као Г према Δ, а В мери Г, Г мери Δ. Али, А мери Г. Према томе А мери и Δ, а мери и само себе. Дакле А мери А и Δ, који су прости, а то је немогуће. Значи, не може бити А према В као Δ према ма ком другом броју. А то је требало доказати.[17]

18.

За два дата броја испитати, може ли се наћи за њих трећи пропорционални број.

Нека су дата два броја А и В и нека треба испитати, да ли се може наћи за њих трећи пропорционални број.



Бројеви А и В или су узајамно прости или нису. Доказано је већ да се не може наћи неки трећи пропорционални број ако су они узајамно прости.

Нека сад А и В нису узајамно прости. И нека В помножено само собом производи Г. Тада А или мери Г или не мери. Нека прво мери и то према броју Δ. На овај начин А помножено са Δ производи Г. Али и В помножено само собом производи Г. Значи, производ А и Δ једнак је квадрату на В. На овај начин је А према В као В према Δ и значи да је Δ трећи пропорционалан број за бројеве А и В.

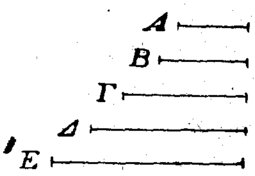
Нека сад А не мери Г. Тврдим да је тада немогуће наћи неки трећи број пропорционалан бројевима А и В. Заиста, ако је то могуће, нека Δ буде тај нађени број. Тада је производ од А и Δ једнак квадрату на В. Али квадрат на В је Г, значи производ од А и Δ једнак је Г. А како А помножено са Δ производи Г, А мери Г према броју Δ. Али се претпоставља да га оно и не мери. А то је бесмислено. Дакле немогуће је да за А и В постоји трећи пропорционални број ако А не мери Г. А то је требало доказати.[18]

19.

За три дата броја испитати кад се може наћи за њих четврти пропорционални број.

Нека су дата три броја А, В, Г и нека треба испитати кад се за њих може наћи четврти пропорционални број.

Тада или они нису непрекидно пропорционални и њихови крајњи су узајамно прости, или су они непрекидно пропорционални и њихови крајњи нису узајамно прости, или они нису непрекидно пропорционални и њихови крајњи нису узајамно прости, или они су непрекидно пропорционални и њихови крајњи су узајамно прости.



Сад, ако су А, В, Г непрекидно пропорционални и њихови крајњи А и Г су узајамно прости, доказано је да је немогуће наћи четврти пропорционални број.

Даље, нека А, В, Г нису непрекидно пропорционални, а крајњи су опет узајамно прости. Тврдим, да је и тада немогуће наћи за њих четврти пропорционални број. Заиста, ако је то могуће, нека буде одређено Δ, па према томе нека буде А према В као Г према Δ и подешено да В према Г буде као Δ према Е. И пошто је А према В као Г према Δ, а В је према Г као Δ према Е, онда је, према једнакоудаљености, А према Г као Г према Е. Али су А и Г узајамно прости, прости и најмањи, а најмањи мере оне који су у истој размери са њима, претходни мери претходни и наредни — наредни. Према томе, А мери Г као претходни што мери претходни. Али мери А и само себе. Дакле А мери А и Г, који су узајамно прости. А то је немогуће. Значи немогуће је наћи четврти пропорционални број за бројеве А, В, Г.

Нека су поново А, В, Г непрекидно пропорционални, али А и Г нису узајамно прости. Тврдим да је тада могуће наћи за њих четврти пропорционални број. Заиста, нека В помножено са Г производи Δ. И тада А или мери Δ или не мери. Нека га прво мери према броју Е. Значи, А помножено са Е производи Δ. Али и В помножено са Г производи Δ. А тада је производ од А и Е једнак производу од В и Г. Према томе постоји пропорција: А према В као Г према Е. Одређен је, дакле, за А, В, Г четврти пропорционални број Е.

Нека сад А не мери Δ. Тврдим, да је тада немогуће наћи за бројеве А, В, Г четврти пропорционални број. Заиста, ако је могуће, нека то буде број Е. Тада је производ А и Е једнак производу В и Г. Али је производ В и Г једнак Δ, па је, дакле, и производ А и Е једнак Δ. Према томе А помножено са Е производи Δ. Дакле, А мери Δ према броју Е. Значи, А мери Δ, али оно га и не мери. А то је бесмислено. Дакле немогуће је за три броја А, В, Г наћи четврти пропорционални број, ако А не мери Δ.

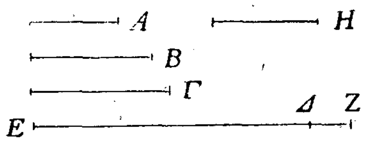
Нека сад А, В, Г нису непрекидно пропорционални и њихови крајњи нису узајамно прости. И нека В помножено са Г производи Δ. Слично се доказује да је, ако А мери Δ, могуће наћи четврти пропорционални број, а ако не мери — немогуће. А то је потребно доказати.[19]

20.

Простих бројева је више од сваке одређене множине простих бројева.

Нека су А, В, Г одређени прости бројеви. Тврдим, да постоји простих бројева више од А, В, Г.

Заиста, узмимо најмањи мултиплум од А, В, Г. Нека то буде број ΔЕ; додајмо броју ΔЕ јединицу ΔZ. Тада је ЕZ или прост број или није. Нека прво буде прост. Тада је нађено простих бројева А, В, Г, ЕZ више од бројева А, В, Г.



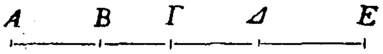
Нека сад број ЕZ није прост број. Тада се он мери неким простим бројем. Нека то буде прост број Н. Тврдим, да Н неће бити исти ни са једним од бројева А, В, Г. Заиста, нека је то могуће. Али А, В, Г мере ΔЕ, па и Н мери ΔЕ, а мери и ЕZ, значи, и преосталу јединицу ΔZ мери број Н, а то је бесмислено. Према томе, Н неће бити исти ни са једним од бројева А, В, Г. А претпостављено је да је Н прост број. Значи нађено је простих бројева А, В, Г, Н више од множине А, В, Г. А то је требало доказати.[20]

21.

Ако се сабере ма колико парних бројева, биће и збир паран број.

Нека се сабере ма колико парних бројева АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ. Тврдим да је и збир АЕ паран број.

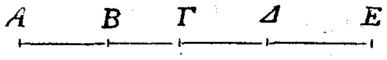
Заиста, пошто је сваки од АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ паран број, сваки ће имати за део половину. Па тада и АЕ има за део половину. А паран број је онај који је дељив на два једнака дела. На овај начин број АЕ је паран. А то је требало доказати.[21]



22.

Ако се сабере ма колико непарних бројева, али паран број сабирака, биће и збир паран број.

Нека се сабере ма колико непарних бројева, али паран број сабирака АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ. Тврдим да је збир АЕ паран број.

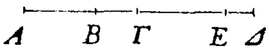


Заиста, пошто је сваки од бројева АВ, ВГ, ГΔ, ΔЕ непаран, биће, после одузимања јединице од сваког, остатак паран број, а тада ће и цело састављено од њих бити парно. А и број састављен од јединица биће паран. Према томе је и цело АЕ паран број. А то је требало доказати.

23.

Ако се сабере ма колико непарних бројева али непаран број сабирака, биће и цело непаран број.

Нека се сабере ма колико непарних бројева али непаран број сабирака АВ, ВГ, ГΔ. Тврдим да је цело АΔ непаран број.

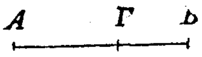


Заиста, одузмимо од ГΔ јединицу. Тада је остатак ГЕ паран број. Али, и АГ је паран број, а према томе је и цело АЕ паран број. Али имамо још јединицу ΔЕ. А тада је АΔ непаран број. А то је требало доказати.

24.

Ако се од парног броја одузме паран број, биће остатак паран број.

Нека се од парног броја АВ одузме паран број ВГ. Тврдим, да је и остатак ГА паран број.

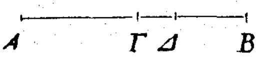


Заиста, ако је АВ паран број, оно има половину као део. Из истих разлога и ВГ има половину као део. Према томе и остатак има половину као део па је стога АГ паран број. А то је требало доказати.

25.

Ако се од парног броја одузме непаран број, биће остатак непаран број.

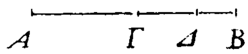
Нека се од парног броја АВ одузме непаран број ВГ. Тврдим да је остатак ГА непаран број.



Заиста, одузмимо од ВГ јединицу ГΔ. Тада је ΔВ паран број. Али и АВ је паран број. Према томе је и остатак АΔ паран број. Али ГΔ је јединица, па значи да је ГА непаран број. А то је требало доказати.

26.

Ако се од непарног броја одузме непаран, биће остатак паран број.

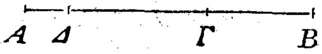


Нека се од непарног броја АВ одузме непаран број ВГ. Тврдим, да је остатак паран број.

Заиста, пошто је АВ непаран број одузмимо јединицу ВΔ. Тада је остатак АΔ паран број. Из истих разлога и ГΔ је паран број. Стога је и остатак ГА паран број. А то је требало доказати.

27.

Ако се од непарног броја одузме паран број, биће остатак непаран број.



Нека се од непарног броја АВ одузме паран број ВГ. Тврдим да је остатак ГА непаран број.

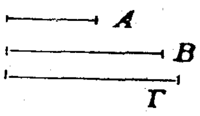
Заиста, одузмимо јединицу АΔ. Тада је ΔВ паран број. А и ВГ је паран број. Према томе је и остатак ГΔ паран број. Дакле, и ГА је непаран број. А то је требало доказати.

28.

Ако непаран број помножен парним бројем производи нешто, добивени број је паран.

Нека непаран број А помножен парним бројем В производи број Г. Тврдим да је Г паран број.

Заиста, пошто А помножен са В производи Г, то је Г састављено од онолико сабирака, једнаких В, колико је јединица у А. А како је В паран број, Г је састављено од парних бројева. Али, ако се сабере ма колико парних бројева, цело је паран број. Према томе, Г је паран број. А то је требало доказати.

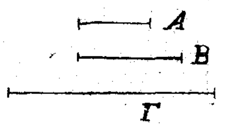


29.

Ако непаран број помножен непарним бројем производи нешто, добивени број је непаран.

Нека непаран број А помножен непарним бројем В производи број Г. Тврдим да је Г непаран број.

Заиста, пошто А помножен са В производи Г, Г је састављено од онолико сабирака, једнаких В, колико је јединица у А. Али сваки од А и В је непаран. Значи, Г је састављено од непарних бројева, чији је број непаран. Према томе је и Г непаран број. А то је требало доказати.

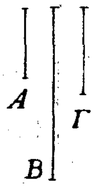


30.

Ако непаран број мери паран, он ће мерити и његову половину.

Нека непаран број А мери паран број В. Тврдим да ће он мерити и његову половину.

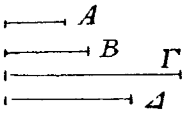
Заиста, нека А мери В и нека га мери према броју јединица у Г. Тврдим, да Г неће бити непаран број. Заиста, ако је то могуће, нека буде. Пошто А мери В према броју јединица у Г, А помножено са Г производиће В. На тај начин В је састављено од непарних бројева у непарном броју. Дакле,



В је непаран број. А то је бесмислено, јер по претпоставци, то је паран број. Према томе Г није непаран број; дакле Г је паран број. Значи А мери В паран број пута. Из тог разлога он мери и његову половину. А то је требало доказати.

31.

Ако је непаран број са неким бројем узајамно прост, биће он узајамно прост и са двоструким тим бројем.

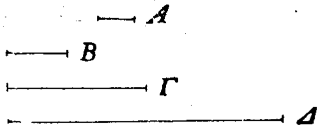


Нека је непаран број А узајамно прост са неким бројем В и Г је двоструки број В. Тврдим да је А узајамно прост са Г.

Заиста, ако они (А и В) нису узајамно прости, тада их мери исти број. Нека их мери и нека то буде број Δ. Али, А је непаран број, па је тада и Δ непаран број. И пошто Δ, непаран број мери Г, а Г је паран број, онда Δ мери и половину Г. Али половина Г је В, па, значи, Δ мери В. А Δ мери и А. Према томе Δ мери А и В који су узајамно прости, а то је немогуће. Значи, А и Г нису узајамно сложени. Дакле А и Г су узајамно прости. А то је требало доказати.

32.

Сваки од бројева, који се добивају од двојке непрекидним удвостручавањем, је само парно-паран број.



Нека се од двојке А непрекидним удвостручавањем добивају бројеви В, Г, Δ. Тврдим да су бројеви В, Г, Δ само парно-парни.

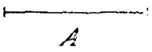
Да је сваки од бројева В, Г, Δ парно-паран број, то је јасно, јер се он добива од двојке удвостручањем. Тврдим да су они само такви. Заиста, одмеримо јединицу. Пошто сад постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева, са јединицом на првом месту, и први број после јединице, број А, прост је број, онда се највећи од бројева А, В, Г, Δ, број Δ, мери сваким од бројева А, В, Г. И како је сваки од бројева А, В, Г паран број, биће Δ само парно-паран број. Слично се доказује да је и сваки од В, Г само парно-паран број. А то је требало доказати.

33.

Ако број има непарну половину, он је само парно-непаран.

Нека број А има непарну половину. Тврдим да је А само парно-непаран број.

Да је он парно-непаран број, то је јасно, јер га његова половина, као непаран број, мери паран број пута. Тврдим да су они само такви. Заиста, ако је А парно-паран број, он сѐ мери парним бројем паран број пута, па и његова половина, непаран број, мери се парним бројем. А то је бесмислено. Значи А је само парно-непаран број. А то је требало доказати.

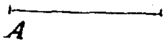


34.

Ако број не припада ни бројевима који се добивају од двојке непрекидним удвостручавањем, ни бројевима који имају непарну половину, он је или парно-паран или парно-непаран.

Нека број А не припада ни бројевима који се добивају од двојке непрекидним удвостручавањем ни бројевима који имају непарну половину. Тврдим да је А или парно-паран или парно-непаран.

Да је А парно-паран број то је јасно, јер његова половина није непаран број. Али тврдим да је он и парно-непаран. Заиста, ако број А преполовимо, па ту половину поново преполовимо и тако поступимо даље, доћи ћемо до неког непарног броја, који ће мерити број А према броју јединица у парном броју. Заиста, ако не, онда ћемо доћи до двојке и А ће бити састављен од двојке непрекидним удвостручавањем. А то се не претпоставља. Према томе је А парно-непаран број. А доказано је да је он и парно-паран. Према томе, А је парно-паран и парно-непаран број. А то је требало доказати.

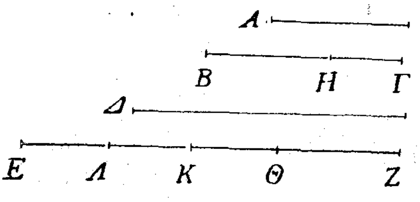


35.

Ако постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева па се од другог и последњег одузме исти број једнак првом броју, остатак од другог односи се према првом броју као остатак од последњег према збиру свих испред њега.

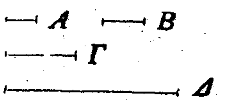
Нека постоји ма колико непрекидно пропорционалних бројева А, ВГ, Δ, ЕZ, почев од најмањег А и нека се од ВГ и ЕZ одузме ВН, односно ZΘ, свако једнако А. Тврдим да је НГ према А као ЕΘ према збиру од А, ВГ, Δ.

Заиста, одмеримо ZК једнако ВГ и ZΛ једнако Δ. Пошто је ZК једнако ВГ, а ZΘ једнако ВН, биће и остатак ΘК једнак остатку НГ. И пошто је ЕZ према Δ као Δ према ВГ и као ВГ према А, а Δ је једнако ZΛ, и ВГ броју ZК, и А броју ZΘ. После раздвајања ЕΛ ће се односити према ΛZ као ΛК према ZК и као КΘ према ZΘ. Али је један од претходних према једном од наредних као збир свих претходних према збиру свих наредних. Дакле, КΘ је према ZΘ, као збир од ЕΛ, ΛК, КΘ према збиру ΛZ, ZК, ΘZ. Али, КΘ је једнако ГН, ZΘ једнако А, збир ΛZ, ZК, ΘZ збиру Δ, ВГ, А. Према томе је ГН према А као ЕΘ према збиру Δ, ВГ, А. На овај начин, остатак од другог после одузимања првог се односи према првом као остатак од последњег после одузимања првог према збиру свих испред последњег. А то је требало доказати.[22]



36.

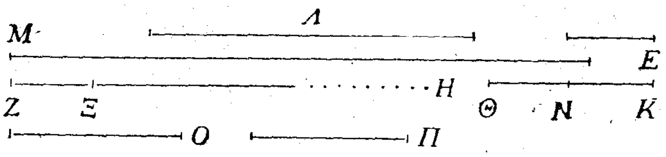
Ако се узме ма колико пропорционалних бројева са јединицом на првом месту у размери један према два и то дотле док збир свих тих бројева не постане прост број и ако тај збир помножен последњим бројем производи нешто, биће добивени број савршен.



Узмимо са јединицом на првом месту ма колико пропорционалних бројева А, В, Г, Δ са размером један према два и нека њихов збир, број Е, буде прост и Е помножено са Δ производи број ZН. Тврдим да је ZН савршен број.

Заиста, ма колика била множина бројева А, В, Г, Δ, толико узмимо бројева Е, ΘК, Λ, М који су у непрекидној размери један према два. Тада на основу једнакоудаљености имамо да је А према Δ као Е према М. Дакле, производ од

Е и Δ једнак је производу од А и М. А ако је производ од Е и Δ једнак ZН, биће и производ од А и М једнак ZН. Дакле, А помножено са М производи НZ. Према томе М мери ZН према броју јединица у А. Али А је двојка, па је, значи, ZН удвостручен број М. Међутим, и сваки од М, Λ, ΘК, Е је двапут већи од наредног. На тај начин су бројеви Е, ΘК, Λ, М, ZН непрекидно пропорционални у размери један према два. Одузмимо сад од другог ΘК и од последњег ZН бројеве ΘN, односно ZΞ, сваки једнак првом Е. Тада, пошто се разлика другог и првог односи према првом као разлика последњег и првог према збиру свих испред њега,



број NК је према Е као ΞН према збиру М, Λ, КΘ, Е. Али NК је једнако Е, па, значи, ΞН је једнако збиру М, Λ, ΘК, Е. Али и ZΞ је једнако Е, а Е је једнако збиру А, В, Г, Δ и јединице. На тај начин цело ZН је једнако збиру Е, ΘК, Λ, М са збиром А, В, Г, Δ и јединицом. И оно се мери тим бројевима. Тврдим да се ZН не мери никаквим другим бројевима сем А, В, Г, Δ, Е, ΘК, Λ, М и јединицом. Заиста, нека се ZН мери, ако је могуће, бројем О и број О није исти ни са једним од бројева А, В, Г, Δ, Е, ΘК, Λ, М. И нека колико пута О мери ZН, толико буде јединица у П, тј. П помножено са О производи ZН. Али и Е помножено са Δ производи ZН. Дакле, и Е је према П као О према Δ. И пошто су, почев од јединице, бројеви А, В, Г, Δ непрекидно пропорционални, Δ се неће мерити никаквим другим бројем сем бројева А, В, Г. Али претпостављено је да О није исти број ни са једним од бројева А, В, Г. Значи О не мери Δ. Али је О према Δ као Е према П, значи, и Е не мери П. И при томе је Е прост број. А сваки прост број је са сваким бројем, којег не мери, узајамно прост. Значи, бројеви Е и П су узајамно прости. Али прости бројеви су и најмањи, а најмањи бројеви мере исти број пута бројеве који су са њима у истој размери и то претходни мери претходни и наредни — наредни. И пошто се Е према П односи као О према Δ, онда ће Е мерити исти број пута О као што и П мери Δ. Али Δ се не мери никаквим другим бројем сем А, В, Г. Значи, број П је исти са једним од бројева А, В, Г. Нека то буде број В. И ма колика била множина бројева В, Г, Δ исто толико бројева узмимо почев од Е, наиме Е, ΘК, Λ. И нека ти бројеви Е, ΘК, Λ буду у истој размери са бројевима В, Г, Δ. Тада ће по једнакоудаљености В бити према Δ као Е према Λ. Међутим, производ од Δ и Е је једнак производу од П и О. Али производ од П и О једнак је производу од В и Λ. Значи, производ од В и Λ једнак је производу од Δ и Δ. Значи, П је према В као Λ према О. И П је исто што и В, па значи и Λ је исто што је О. А то је немогуће, јер се претпоставља да О није исто ни са једним од узетих бројева. Значи ΖН се не мери ниједним од бројева А, В, Г, Δ, Е, ΘК, Λ, М и јединице. А доказано је да је број ΖН једнак збиру бројева А, В, Г, Δ, Е, ΘК, Λ, М и јединице. А савршен је онај број који је једнак збиру свих својих делова (који га мере). На овај начин ΖН је савршен број. А то је требало доказати.[28]

КОМЕНТАР

[1] Аналитички се ова теорема овако једноставно доказује.

Дато је: $A=a_1 a_2$, $B=b_1 b_2$, $\Gamma=AB$ и $a_1:b_1=a_2:b_2$.

Треба доказати да је $\Gamma=c^2$.

Како из дате пропорције следује $a_1 b_2=a_2 b_1$, непосредно добивамо:

$$\Gamma=AB=a_1 a_2 b_1 b_2=a_1 b_2 \times a_2 b_1=(a_1 b_2)^2=c^2,$$

где је

$$c=a_1 b_2=a_2 b_1.$$

Еуклид у свом доказу утврђује прво, на основу теореме 17. књ. VII, пропорцију $A:B=\Delta:\Gamma$, где је $\Delta=A^2$ и $\Gamma=AB$. Затим, на основу теореме 18. књ. VIII, тврди да постоји средње пропорционалан број између бројева A и B, тј. да можемо написати пропорцију

$$A:X=X:B,$$

где је X неки број, чија вредност не игра улогу у доказу. После тога, на основу теореме 8 књ. VIII, поставља нову пропорцију

$$\Delta:Y=Y:\Gamma,$$

где је Y неки нови број, чија вредност исто тако не игра улогу у доказу. Најзад, на основу теореме 22. књ. VIII, Еуклид је закључио да је Γ квадрат, ако је Δ квадрат.

Еуклидов доказ ове теореме, у ком се узимају у обзир четири теореме из претходне теорије, нарочито јасно показује колико је огромно упрошћење постигнуто увођењем алгебарског апарата у савремену аритметику. С друге стране тај доказ има и своју позитивну страну која је у приказу оне узастопности и строгости расуђивања којима је Еуклид изводио свој логични систем.

[2] Аналитички доказ теореме.

Дато је $AB=C^2$, а треба доказати да је $A=a_1 a_2$, $B=b_1 b_2$, при чему је $a_1:a_2=b_1:b_2$.

Како из датог услова $AB = C^2$ можемо написати пропорцију

$$\frac{A}{C} = \frac{C}{B},$$

можемо у ту пропорцију укључити размеру $a_1 : b_1$ најмањих бројева који са бројевима A и C имају исту размеру, тј. написати

$$\frac{A}{C} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{C}{B}.$$

Из тих пропорција следује

$$A = a_1 a_2, \tag{1}$$

$$C = b_1 a_2 = a_1 b_2, \tag{2}$$

$$B = b_1 b_2. \tag{3}$$

Једначине (1) и (3) тврде да су A и B површински бројеви, а једначина (2) доказује њихову сличност, јер из те једначине следује пропорција

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

[3] Са гледишта савремене аритметике теорема се изражава обрасцем

$$a^3 \times a^3 = (a^2)^3.$$

Еуклидов доказ се скраћено може извести овако.

Нека је Γ ивица куба A и нека је $\Gamma \cdot \Gamma = \Delta$. Тада је $\Gamma \cdot \Delta = A$. Из те две једнакости следују ове две пропорције

$$1 : \Gamma = \Gamma : \Delta, \qquad 1 : \Gamma = \Delta : A,$$

тј. ова непрекидна

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Delta}{A}. \tag{*}$$

С друге стране, из односа $A^2 = B$, датог у теореми, проистиче ова пропорција

$$\frac{1}{A} = \frac{A}{B}. \tag{**}$$

Како су сад, према (*), између 1 и A уметнута два средње пропорционална броја, могу се, према теореми 8. VIII, и између бројева A и B, који су према (**) пропорционални бројевима 1 и A, уметнути такође два средње пропорционална броја. А тада ће, према теореми 23. VIII, ако је A куб, и B бити куб.

[4] Аналитички је теорема еквивалентна обрасцу

$$a^3 \times b^3 = (ab)^3.$$

Навешћемо и Еуклидов доказ помоћу алгебарских операција. Из $A^2 = \Delta$, $AB = \Gamma$ следује

$$\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{\Gamma}.$$

Према теореми 19. VIII, између A и B, као сличних запреминских бројева, могу се уметнути два средње пропорционална броја. А затим поново закључујемо, према теореми 8. VIII, да и између бројева Δ и Γ можемо уметнути исто тако два средње пропорционална броја. Најзад, на основу теореме 23. VIII, тврдимо да ће, ако је Δ куб, бити и Γ куб.

[5] Савременим алгебарским језиком теореми одговарају ови обрасци: ако је $a^3 \cdot B = c^3$, онда је

$$B = \frac{c^3}{a^3} = \left(\frac{c}{a}\right)^3.$$

Еуклидов доказ личи на доказе претходних теорема.

[6] Даћемо Еуклидов доказ још на један начин, наводећи узастопно само неопходне једначине за доказ.

$A \cdot A = B$ (куб по услову)

$A \cdot B = \Gamma$ (куб, јер је $\Gamma = A \cdot A \cdot A$).

Следују две пропорције

$$\frac{1}{A} = \frac{A}{B} \quad \text{и} \quad \frac{1}{A} = \frac{B}{\Gamma},$$

одакле је

$$\frac{A}{B} = \frac{B\ (\text{куб})}{\Gamma\ (\text{куб})}.$$

Између B и Γ се могу уметнути два средње пропорционална броја, па се, значи, и између A и B могу уметнути исто тако два средње пропорционална броја. B је куб, значи и A је куб.

[7] Овај елементарни став заснива се на примени појмова: сложеног броја A као производа два броја, $A=ab$, и запреминског броја као производа три броја. Аналитички став се изражава овако

$$(ab)c=abc.$$

[8] Низ непрекидно пропорционалних бројева образује геометриску прогресију. Заиста ако са a_{n-2}, a_{n-1}, a_n означимо три броја у непрекидној пропорцији

$$a_{n-2}:a_{n-1}=a_{n-1}:a_n,$$

онда из

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=q$$

добивамо изразе

$$\begin{aligned}a_{n-1}&=q\,a_{n-2},\\ a_n&=q\,a_{n-1},\end{aligned}$$

који показују да су заиста свака три непрекидно пропорционална броја у геометриској прогресији. Такву прогресију, са јединицом на првом месту, можемо написати овако

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ q^5,\ q^6,\ldots$$

или

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ldots$$

Приметимо да Еуклид нумерисање овог низа врши и на овај начин

$$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ldots$$

и према томе 1. јединицу сматра за први број и 2. место сваког броја одређује бројећи од јединице.

Непосредно одређивање вредности чланова горњег низа и доњег, нумерисаног, доводи до доказа наведене Еуклидове теореме. И на овом примеру се огледа моћ савременог алгебарског апарата. Тиме се не смањује историска вредност Еуклидова доказа изведеног на основу особина пропорција.

[9] Ова теорема, као и претходна, изражава елементарне особине геометриске прогресије са јединицом као почетним чланом и количником било квадратним, било кубним бројем.

[10] Помоћу геометриске прогресије теорема се изражава овако.

Ако количник q геометриске прогресије

$$a_1=1,\ a_2=q,\ a_3=q^2,\ a_4=q^3,\ a_5=q^4,\ a_6=q^5,\ a_7=q^6,\ldots$$

није квадрат, чланови те прогресије неће бити квадрати сем броја на трећем месту и сваког другог иза њега. А ако тај количник није куб, чланови те прогресије неће бити кубови сем броја на четвртом месту и сваког трећег иза њега.

Еуклидов доказ је индиректан. Еуклид претпоставља да је $a_4=\Gamma$ квадрат и изводи да је тада и $a_2=A$ квадрат, а то је супротно претпоставци. Слично се доказује и онај део теореме кад A није куб.

[11] Аналитички, помоћу геометриске прогресије, теорема се доказује овако. Ако у прогресији

$$a_0=1,\ a_1=q,\ a_2=q^2,\ldots,\ a_m=q^m,\ldots$$

имамо два броја, један мањи од другог,

$$a_m=q^m, \qquad a_{m+n}=q^{m+n},$$

онда из

$$q^{m+n}=q^m\times q^n$$

следује

$$a_{m+n}=a_m\times a_n,$$

тј. број $E=a_{m+n}$ се мери бројем $B=a_m$ према броју јединица у $\Delta=a_n$, једном броју од бројева Γ и Δ.

Према томе Еуклид проучава теорему само за случај кад је $m<n$. Међутим могу се испитати три случаја:

1. Еуклидов случај: $m<n$. Пример: $m=2$, $n=3$,

$$q^5=q^2\times q^3.$$

У овом случају број a_n се налази између бројева a_2 и a_5.

2. Случај $m=n$. Пример: $m=2$, $n=2$,

$$q^4=q^2\times q^2.$$

У овом случају број $a_m=a_n$ и сваки од њих је средња пропорционала између јединице и a_4.

3. Случај $m>n$. Пример: $m=3$, $n=2$,

$$q^5=q^3\times q^2.$$

Број $a_m = q^3$ је мањи од броја $a_{m+n} = q^5$ који се мери; број $a_1 = a_2$ према чијем броју јединица мањи број $a_m = a_3 = q^3$ мери већи број $a_{m+n} = q^5$ у овом случају се налази између мањег и већег броја, већ се налази изван тих бројева са стране јединице, али и тај број је један од свих датих пропорционалних бројева.

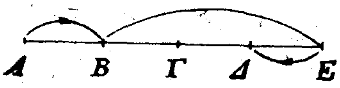
Текст Еуклидове теореме је тачан, јер речи „κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς“ ништа не говоре о томе које место заузима потребан број у низу свих датих пропорционалних бројева.

Али Еуклидова специјализација теореме, после текста саме теореме, не одговара општем случају, јер Еуклид за мањи број узима први број иза јединице и тада се заиста број према којем мањи број мери већи налази између мањег и већег броја. Међутим, када би за мањи број узео, рецимо, број Δ, онда би, обратно, број према којем се мери број *B*, ближи јединици. Најзад, када би узео број *Г* за мањи бро добио би за број према којем се мери исто тако број *Г*

Навешћемо кратко Еукидово извођење доказа ове теореме.

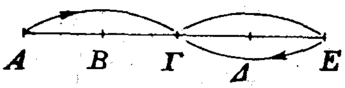
Из пропорционалности бројева Еуклид утврђује пропорцију

$$A : B = \Delta : E,$$

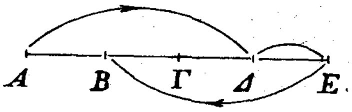
1.


одакле, за $A = 1$, следује

$$E = B \cdot \Delta,$$

2.


а та једнакост и доказује да се већи број *E* мери мањим *B* према броју јединица у броју Δ.

3.


Најзад за тумачење последице наведимо ову схематску графичку претставу, која одговара стварној претстави веза између логаритама наведених бројева. На слици имамо три случаја: 1. Еуклидов случај, $m < n$. 2. Случај средње пропорционале, $m = n$. 3. Случај $m > n$.

[12] Скраћено Еуклидов индиректан доказ можемо извести на овај начин.

Имамо низ пропорционалних бројева

$$a_0 = 1,\ a_1 = q,\ a_2 = qa_1,\ \ldots,\ a_n = qa_{n-1}$$

и

$$a_n = m \cdot p.$$

где је p прост број. Треба доказати да број p мери и број a_1.

Претпоставимо да p не мери a_1, тада су бројеви p и $a_1 = q$ узајамно прости, јер је p прост број.

Како је

$$a_n = m \cdot p$$

и

$$a_n = qa_{n-1}$$

имамо пропорцију

$$q : p = m : a_{n-1}.$$

Како су q и p узајамно прости то је размера $q : p$ састављена од најмањих бројева, те значи да број p мери број a_{n-1}. Понављајући исти поступак долазимо до закључка да p мери a_{n-2} итд. и, на крају да p мери број a_1. Дошли смо до закључка супротног претпоставци, а то је немогуће. Значи p мери и број a_1.

[13] За прогресију

$$a_0 = 1,\ a_1 = q,\ a_2 = q^2,\ \ldots,\ a_n = qa_{n-1} = q^n$$

ова теорема тврди да се последњи број $a_n = q^n$, ако је број q прост, мери само бројевима од q до q^{n-1}, Аналитички је то очевидно, јер је

$$q^n = q^{n-k} \cdot q^k$$

где је k природни број мањи од n. Ако је q прост број никакво друго разлагање броја q^n није могуће.

Еуклидов индиректан доказ ове теорије је врло дуг, но не садржи у себи ништа принципски ново.

[14] У овој теореми се, другим речима, доказује да сваки број може да се растави на просте чиниоце само на један начин. При томе се Еуклид зауставља само на случају кад сваки прост чинилац улази само на првом степену.

Еуклидов доказ је конструисан овако. Нека је A најмањи број дељив простим бројевима p_1, p_2, p_3. Претпоставимо да је тај исти број дељив и простим бројем p различитим од p_1, p_2, p_3. Тада је

$$A = p \cdot m,$$

при чему је $m < A$. Али како p није дељиво са p_1, p_2, p_3, мора бити дељив тим бројевима број m, мањи од броја A, а то је супротно претпоставци, јер је A најмањи.

Не би било тешко Еуклидов доказ проширити и на случај већег броја чинилаца од три и на случај када прости чиниоци улазе на степенима већим од првог.

[15] Поновимо схематски доказ ове теореме.

Пошто су три непрекидно пропорционална броја A, B, $Г$ најмањи од оних који су у истој размери са њима, они се по теореми 2. књ. VIII могу изразити овако

$$A = p^2,\ B = pq,\ Г = q^2,$$

где су p и q два узајамно проста броја.

После тога вршимо узастопно ове закључке:

$p+q$	узајамно	прост	са p и q	(28. VII)
$p+q$ и p	„	„	„ q	
$(p+q)\ p$	„	„	„ q	(24. VII)
$(p+q)\ p$	„	„	„ q^2	(25. VII)
p^2+pq	„	„	„ q^2	
$A+B$	„	„	„ $Г$	
Исто тако $B+Г$	„	„	„ A	
За трећи случај:				
$p+q$	„	„	„ p и q	
$(p+q)^2$	„	„	„ pq	(24, 25. VII)
p^2+q^2+2pq	„	„	„ pq	
p^2+q_2	„	„	„ pq	
$A+Г$	„	„	„ B.	

Скрећемо пажњу да се од тврђења да је

p^2+q^2+2pq узајамно просто са pq

прво прелази на тврђење да је

$$p^2+q^2+pq \text{ узајамно просто са } pq,$$

па затим, коначно, на тврђење да је

$$p^2+q^2 \text{ узајамно просто са } pq.$$

Еуклид се строго придржава садржаја 28. теореме књ. VII и то другог њена дела: „ и ако су збир (у нашем случају p^2+q^2+2pq) и један од бројева (pq) узајамно прости, онда су и првобитни бројеви (p^2+q^2+pq и pq) узајамно прости.”

[16] Доказ ове теореме се заснива на теореми 21. VII (међусобно прости су најмањи) и на теореми 20. VII (најмањи бројеви који су у истој размери мере остале исти број пута итд.).

[17] У овој теореми Еуклид посматра геометриску прогресију без јединице у почетку

$$a_1,\ a_2=qa_1,\ a_3=qa_2,\ \ldots,\ a_n.$$

Треба доказати да је немогућа пропорција

$$a_1:a_2=a_n:x,$$

ако су a_1 и a_n узајамно прости. Број x треба одредити као цео број. Ако тај број заиста постоји, онда имамо

$$a_1:a_n=a_2:x,$$

и значи, према 20, 21 књ. VII,

$$a_2=ma_1.$$

А из услова непрекидне пропорционалности добивамо да је тада и

$$a_n=pa_1.$$

Према томе два броја a_1 и a_n нису узајамно прости, а то је супротно претпоставци.

[18] Објаснимо ову теорему на примерима.

1. $$2:3=3:x$$

x не постоји, јер су 2 и 3 међусобно прости бројеви.

2. $$8:6=6:x$$

x не постоји, јер, без обзира на то што 8 и 6 нису узајамно прости бројеви, $6^2 = 36$ није дељиво са 8.

3. $$4:6 = 6:x$$

$x = 36 : 4 = 9.$

Није тешко ову анализу спровести и у општем случају.

[19] у савременој аритметици одређивање четвртог пропорциналног броја x за три дата броја a, b, c из пропорције

$$a : b = c : x$$

изводи се на основу обрасца

$$x = \frac{bc}{a},$$

и према томе x може бити цео број само под неопходним и довољним условима де је производ bc дељив са a.

Еуклид рашчлањује проучавање тог услова, не наводећи га у општем случају, и издваја, прво услов кад су три броја a, b, c непрекидно пропорционална или нису и, друго, кад су c и a узајамно прости или нису. Ако испуњавање или неиспуњавање сваког од тих услова означимо са + или —, можемо саставити ову таблицу Еуклидових резултата.

		Непрекидно пропорционални $a : b = b : c$	Узајамно прости a и c	Еуклидов резултат	Тачан резултат
1	II	—	+	Не постоји	Зависи од bc *) Може постојати
2	III	+	—	Постоји **) постоји не постоји	Зависи од bc
3	IV	—	+	Слично као у претходном случају	Зависи од bc
4	I	+	—	Не постоји	Не постоји

Арапске цифре означавају ред којим је Еуклид прво побројио те случајеве, а римске ред којим је био изведен доказ.

Већ ова разноликост распореда показује да текст ове теореме не одговара изванредној Еуклидовој систематичности.

Примедбе.

*) У анализи 1. односно II. случаја Еуклид је допустио грешку. Показаћемо то на примеру. Три броја $a=4$, $b=20$, $c=25$ одговарају условима тог случаја, али 1. пропорција

$$4:20=20:25$$

није тачна и 2. бројеви 4 и 25 су узајамно прости. Према томе, по Еуклиду, не би требало да постоји четврти пропорционални број за 4, 20, 25. Међутим, тај број је 125, јер је

$$4:20=25:125.$$

У другом примеру (4, 15, 25) и један и други услов такође су задовољени, јер $4:15=15:25$ и 4 и 25 опет су узајамно прости, али четвртог пропорционалног целог броја нема као решења пропорције

$$4:15=25:x.$$

У првом примеру, $b \cdot c=20 \cdot 25$ је дељиво са $a=4$, а у другом $b \cdot c=15 \cdot 25$ није дељиво са $a=4$.

Ова Еуклидова грешка је била предмет проучавања и исправљања од стране више коментатора. У Еуклидову извођењу тог погрешног резултата учињена је једна претпоставка, која у ствари није на месту.

**) Приметимо у вези са таблицом и ово. У формулисању тог резултата Еуклид прво наводи да је одређивање четвртог пропорционалног броја у том случају могуће. И тек после, у току самог извођења, специфицује услов за могућност и немогућност. И ово место у излагању наводи на мисао да, можда, неко од преписивача није добро разумео Еуклидов текст и почео је излагати прави садржај овог става „својим речима“. У прилог томе говори и то што у другим рукописима има важних уметака баш у тексту овог става.

[20] Садржај ове теореме је еквивалентан са тврђењем да је број простих бројева бескрајно велики. Има више доказа овог става у вези са састављањем формуле за просте бројеве. За свој доказ Еуклид користи израз

$$1+2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots . p_n,$$

где је p_n n'ти прост број, и закључује да, ако је тај број прост, имамо тим бројем повећани број простих бројева, а ако је он сложен број, он се дели неким простим бројем, који је различит од претходних. Тиме се теорема доказује.

При томе Еуклид не улази у решавање питања да ли су могући и један и други случај. За доказ да су могућа оба случаја навешћемо два броја:

$$1+2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=2311,$$
$$1+2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13=30031.$$

Први број је прост, други сложен, јер је

$$30031=59\cdot 509.$$

[21] Почев од ове па до теореме 34. имамо врло једноставне теореме с особинама парних, непарних, парно-парних, непарно-парних, (парно-непарних) и непарно-непарних бројева.

[22] Ако чланове геометриске прогресије означимо овако

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},$$

ова теорема гласи

$$(a_2-a_1):a_1=(a_{n+1}-a_1):(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Интересантан Еуклидов доказ полази од пропорције

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\ldots=\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

одакле се изводе пропорције

$$\frac{a_2-a_1}{a_1}=\frac{a_3-a_2}{a_2}=\ldots=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}.$$

После примене познате особине о односу збира претходних према збиру наредних као сваког претходног према одговарајућем наредном добивамо пропорцију

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{a_2-a_1}{a_1}$$

која се тражи.

Приметимо да се из горњег обрасца лако добива познати образац за збир чланова геометриске прогресије. Заиста, ако означимо

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,$$

имамо

$$S_n = \frac{a_1(a_{n+1} - a_1)}{a_2 - a_1},$$

или

$$S_n = \frac{uq - a}{q - 1},$$

где су: a — први члан, u — последњи и q количник прогресије,

[23] Према Еуклидовој теореми број изражен обрасцем

$$n = p \cdot 2^{\nu-1},$$

где је p прост број који претставља збир

$$p = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{\nu-1},$$

је савршен број. Број ν треба да буде такав да наведени збир буде прост број.

Аналитички се може лако доказати да је наведени број n заиста савршен број. Заиста, пошто је p прост број, број n има само ове делиоце:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{\nu-2},\ 2^{\nu-1}$$
$$p,\ 2p,\ 2^2p,\ \ldots,\ 2^{\nu-2}p,$$

ако не рачунамо сам број који, по Еуклиду, није део тог броја.

Покажимо да је збир σ свих тих делилаца једнак самом броју. Заиста,

$$\sigma = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{\nu-1} + p(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{\nu-2}) =$$
$$= p + p(2^{\nu-1} - 1),$$

јер збир геометриске прогресије

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{\nu-2}$$

износи $2^{\nu-1} - 1$. Тако имамо да је

$$\sigma = p \cdot 2^{\nu-1} = n.$$

Доказали смо да је Еуклидов број савршен број, а да ли је сваки савршен број Еуклидов број — то питање остаје отворено. Доказано је само да се сваки *паран* савршен број образује према Еуклидовом обрасцу. Што се тиче непарних бројева, још није пронађен ниједан непаран савршен број. Међутим, није ни доказано, бар колико је нама познато, да је такав број немогућ. Доказано је само да ако такав број постоји, он је облика

$$n = a^{4a+1} P^2,$$

где a означава прост број облика $(4q+1)$, а P непаран број, већи од јединице, који није дељив са a.

Пошто је

$$1+2+2^2+\ldots+2^{\nu-1}=2^\nu-1,$$

Еуклидов образац за савршен број се може написати и овако

$$n=2^{\nu-1}(2^\nu-1).$$

Колико је нама познато, данас су познати ови савршени бројеви:

1. $2\ (2^2-1)=6$,
2. $2^2\ (2^3-1)=28$,
3. $2^4\ (2^5-1)=496$,
4. $2^6\ (2^7-1)=8128$,
5. $2^{12}\ (2^{13}-1)=33550336$,
6. $2^{16}\ (2^{17}-1)=8589869056$,
7. $2^{18}\ (2^{19}-1)=137438691328$,
8. $2^{30}\ (2^{31}-1)=2305843008139952128$,
9. $2^{60}\ (2^{61}-1)$
10. $2^{88}\ (2^{89}-1)$
11. $2^{106}(2^{107}-1)$
12. $2^{126}(2^{127}-1)$ са 77 цифара.

Код свих ових бројева број ν је прост број. Али за сваки прост број ν Еуклидов образац не доводи до савршеног броја. Тако за $\nu=11$ број

$$2^{10}(2^{11}-1)=2096128,$$

није савршен број, јер збир

$$1+2+2^2+\ldots+2^{10}=2^{11}-1=2047=23\cdot 89$$

није прост број.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА X

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 10

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ДЕСЕТА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1956

Штампа Графичко предузеће „Академија", Београд, Космајска ул. 28

САДРЖАЈ ДЕСЕТЕ КЊИГЕ

ПРЕДГОВОР

Ова десета књига Еуклидових елемената је последња од четири аритметичке књиге. Остале књиге су посвећене стереометрији. У десетој књизи је изложена Еуклидова теорија ирационалних величина, углавном оних што зависе од корена квадратне односно биквадратне једначине. Насупрот свим осталим књигама Еуклидових елемената, које су и до данас сачувале своју улогу у науци, па чак и у настави, садржај десете књиге има сад само историски значај. Разлога за то има више. Пре свега Еуклид је у основу своје теорије ставио појам ирационалности, различит од савременог, који се показао као незгодан и сада је одбачен. Код Еуклида је, например, израз $\sqrt{2}$ рационалан, несамерљив по дужини са јединицом, али самерљив са њом у степену, квадратно. Без обзира што је то више формална ствар, ипак је она јако утицала на неприхватљивост Еуклидове теорије. Затим, Еуклидово геометриско излагање, исувише компликовано, морало је уступити место алгебарском излагању, које је и једноставније и куд и камо општије. Најзад, садржај десете књиге није био толико у вези са праксом као што је то случај садржаја претходних књига. Десета књига је сачувана углавном због тога што је била у истом комплексу са другим књигама бесмртне вредности. Овакав положај садржаја десете књиге ипак јој не умањује значај изванредног историског споменика врло високе старогрчке математичке културе.

Како Еуклидово геометриско излагање постаје много јасније у вези са алгебарским тумачењем одговарајућих ставова, дајемо и у нашем коментару, како то ради већина коментатора, алгебарске изразе многих ставова и доказа.

Без обзира на своју застарелост, Еуклидова теорија рационалних и ирационалних израза садржи још многа отворена питања, како са гледишта историског развитка те теорије пре и после Еуклида, тако и са гледишта проучавања оних основа на које је Еуклид стао при извођењу своје класификације ирационалних израза.

При изради и ове књиге су ми помогли В. В. Мишковић и Т. П. Анђелић, на чему им овде изјављујем захвалност.

А. Б.

ТЕКСТ

Дефиниције[1]

1. Каже се да су величине самерљиве, ако имају заједничку меру и да су несамерљиве, ако се не може одредити никаква њихова заједничка мера.[2]

2. И да су дужи самерљиве у степену (квадратно), ако се на њима конструисани квадрати мере истом површином, а несамерљиве кад се не може за квадрате на њима конструисане одредити никаква површина, као њихова заједничка мера.[3]

3. Под таквим претпоставкама се доказује да за неку дату дуж постоји бескрајно много како самерљивих тако и несамерљивих дужи било само по дужини било и у степену. И тада ћемо звати дату дуж рационалном, а дужи самерљиве са њом како и по дужини и у степену, тако и само у степену рационалним а несамерљиве са њом — ирационалним.[4]

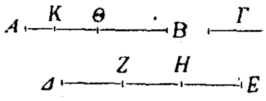
4. И зваћемо квадрат на датој дужи рационалним и са њим самерљиве површине рационалним а несамерљиве — ирационалним и дужи на којима су ови квадрати — ирационалним, при чему, ако су то заиста квадрати, дужи су стране квадрата, а ако су то друге неке праволиниске слике, онда су то стране њима једнаких квадрата.[5]

1.

Нека су дате две неједнаке величине. Ако од веће одузмемо величину већу од половине, а од остатка — већу од његове половине и тако поступамо непрекидно, остаће нека величина која је мања од дате мање величине.

Нека су дате две неједнаке величине АВ и Г, од којих је АВ већа. Тврдим да ће, ако од АВ одузмемо величину већу од половине и од остатка — већу од његове половине и тако поступамо непрекидно, остати нека величина мања од Г.

Заиста, величина Г поновљена више пута даје једном величину већу од AB. Извршимо то понављање, и нека је ΔE мултиплум од Г већи од AB. Поделимо ΔE на делове ΔZ, ZH, HE једнаке величине Г и одузмимо од AB величину AΘ већу од половине AB, а од AΘ величину ΘK већу од половине AΘ и тако поступимо непрекидно, док број поделака на AB не буде једнак броју поделака на ΔE.

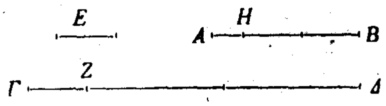


Нека је сад број поделака AK, KΘ, ΘB једнак броју поделака ΔZ, ZH, HE. Пошто је ΔE веће од AB, и од ΔE се одузима величина EH мања од половине ΔE, а од AB величина BΘ већа од половине AB, биће остатак HΔ већи од остатка ΘA. И пошто је HΔ веће од ΘA и од HΔ се одузима половина HZ, а од ΘA величина ΘK већа од половине, биће и остатак ΔZ већи од остатка AK. Али ΔZ је једнако Г. Значи и Г је веће од AK. Па према томе је AK мање од Г.

На тај начин остаје од AB величина AK мања од дате мање величине Г. А то је требало доказати. — Слично се доказује, кад се одузимају половине.[6]

2.

Две дате неједнаке величине су несамерљиве, ако при непрекидном одузимању мање величине од веће ниједан остатак не мери претходни остатак.



Нека су AB и ГΔ две неједнаке величине и AB мања, и нека при непрекидном одузимању мање величине од веће ниједан остатак не мери претходни остатак, тврдим да су величине AB и ГΔ несамерљиве.

Заиста, ако су оне самерљиве, мери их иста величина. Нека их мери, ако је то могуће, и нека то буде величина E. И нека AB после одмеравања ZΔ даје остатак ГZ мањи од AB, и ГZ после одмеравања BH даје остатак AH мањи од ГZ, и тако поступамо непрекидно док не остане величина мања од E. Нека је то извршено и нека је преостала величина AH мања од E. Сад, пошто E мери AB, а AB мери ΔZ, значи E мери ΔZ. Но E мери и целу дуж ГΔ, значи E мери и остатак ГZ. А како ГZ мери HB, E мери и HB, а мери и целу дуж AB, па према томе E мери и остатак AH, — већа величина мери мању, а то је немогуће. Значи никаква величина не мери AB и ГΔ. Дакле величине AB и ГΔ су несамерљиве.

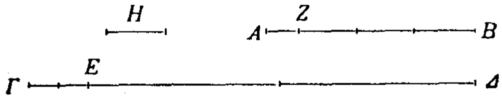
На овај начин, две дате неједнаке величине, итд.[7]

3.

Наћи за две дате самерљиве величине њихову највећу заједничку меру.

Нека су дате две самерљиве величине AB и ГΔ, од којих је AB мања. Треба наћи за AB и ГΔ највећу заједничку меру.

Величина AB може или да мери ГΔ или не. Ако она мери, а мери и сама себе, биће AB заједничка мера за AB и ГΔ. Јасно је да је она и највећа, јер не постоји величина већа од AB која мери AB.



Нека сад AB не мери ГΔ. Тада ће при непрекидном одузимању мање од веће неки остатак мерити једном претходни остатак, јер AB и ГΔ нису несамерљиве. И нека AB после одмеравања EΔ остави мању од себе величину EГ, и EГ после одмеравања ZB остави мању од себе величину AZ, а AZ нека мери ГE.

Пошто сад AZ мери ГE, а ГE мери ZB, мериће AZ и ZB. А оно мери ΔE, значи AZ мери и ΔE. А мери и ГE, те значи мери и цело ГΔ. Према томе је AZ заједничка мера за AB и ГΔ. Тврдим да је она и највећа. Ако није, постоји мера већа од AZ која мери AB и ГΔ. Нека то буде H. Пошто сад H мери AB, а AB мери EΔ, мериће H и EΔ. А оно мери и цело ГΔ, па према томе H мери и остатак ГE. Али ГE мери ZB, па значи H мери и ZB. А оно мери и цело AB, значи мери и остатак AZ; веће мери мање, а то је немогуће. Према томе не мери величина већа од AZ величине AB и ГΔ. На овај начин је AZ највећа заједничка мера за AB и ГΔ.

Према томе је за две дате самерљиве величине АВ и ГΔ нађена највећа заједничка мере. А то је требало доказати.

Последица

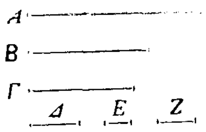
Из овог је јасно да, ако нека величина мери две величине, она мери и њихову највећу заједничку меру.[8]

4.

Наћи за три дате самерљиве величине њихову највећу заједничку меру.

Нека су дате три самерљиве величине А, В, Г. Треба наћи за А, В, Г највећу заједничку меру.

Одредимо највећу заједничку меру за две величине А и В. Нека то буде Δ. Тада Δ или мери Г или не мери. Нека прво мери. Пошто сад Δ мери Г, а оно мери и А и В, значи Δ мери А, В, Г. Према томе је Δ заједничка мера А, В, Г. И јасно је да је највећа, јер не постоји величина већа од Δ која мери А и В.



Нека сад Δ не мери Г. Тврдим, прво, да су Г и Δ самерљиве. Заиста, пошто су А, В, Г самерљиве, мери их нека величина, која, разуме се, мери А и В, па према томе она мери и највећу заједничку меру Δ величина А и В. А она мери и Г. Према томе наведена величина мери Г и Δ, а то значи да су Г и Δ самерљиве. Одредимо сад њихову највећу заједничку меру, нека то буде Е. Пошто сад Е мери Δ, а Δ мери А и В, мериће Е и А и В. Али Е мери и Г, па према томе Е мери А, В, Г. На овај начин Е је заједничка мера за А, В, Г. Тврдим да је она и највећа. Заиста, ако је могуће, нека постоји величина Z, већа од Е, која мери А, В, Г. Пошто Z мери А, В, Г, оно мери како А, В тако и највећу заједничку меру за А и В. Али највећа заједничка мера А и В је Δ, па према томе Z мери Δ. А оно мери и Г. Према томе Z мери Г и Δ, те значи Z мери и највећу заједничку меру Г и Δ. А та мера је Е, значи Z мери Е, већа величина мери мању, а то је немогуће.

Према томе не постоји величина већа од Е која мери А, В, Г. На овај начин Е је највећа заједничка мера за А, В, Г, ако Δ не мери Г, а ако мери, онда само Δ.

И тако је нађена највећа заједничка мера за три дате самерљиве величине. [А то је требало доказати].

Последица

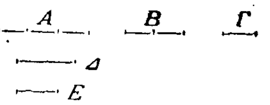
Из овог је јасно да, ако нека величина мери три величине, она мери и њихову највећу заједничку меру.

На сличан начин се одређује највећа заједничка мера и за већи број величина, а и последица се проширује.[9]

5.

Самерљиве величине су у размери једна према другој као број према броју.

Нека су А и В самерљиве величине. Тврдим, да је А према В у размери као број према броју.



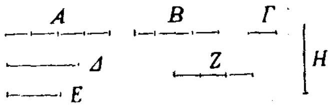
Заиста, пошто су А и В самерљиве, њих мери нека величина. Нека их мери и нека то буде величина Г. И колико пута се Г садржи у А, исто толико јединица нека буде у броју Δ, и колико пута се Г садржи у В, исто толико јединица нека буде у броју Е.

Пошто сад Г мери А према броју јединица у Δ, а јединица мери Δ према броју јединица у њему самом, то једининица мери број Δ исти број пута колико и Г мери величину А. Дакле Г стоји према А као јединица према Δ. Или, у обрнутој размери, А је према Г као Δ према јединици. Даље, пошто Г мери В према броју јединица у Е, а јединица мери Е према броју јединица у њему самом, то јединица мери број Е исти број пута колико и Г мери величину В. Дакле Г се односи према В као јединица према Е. А доказали смо да је и А према Г као Δ према јединици. Према томе се, због једнакоудаљености, А односи према В као број Δ према броју Е.

На овај начин су самерљиве величине А и В у истој размери једна према другој као број Δ према броју Е. А то је требало доказати.[10]

6.

Ако су две величине у размери једна према другој као број према броју, оне су самерљиве.



Нека су две величине А и В у размери једна према другој као број Δ према броју Е. Тврдим, да су А и В самерљиве величине.

Заиста, поделимо А на онолико једнаких делова колико је јединица у Δ и нека је један од тих делова Г. Па затим колико је јединица у Е, из толико делова, једнаких Г, саставимо величину Z.

На тај начин, колико је јединица у Δ, толико пута величина А садржи једнаких величина Г, тј. колики део јединица чини од Δ, толики и Г чини од А. Према томе је Г према А као јединица према Δ. Али јединица мери број Δ, па значи и Г мери А. И пошто је Г према А као јединица према броју Δ, онда, у обрнутој размери, А је према Г као број Δ према јединици. Затим, пошто онолико колико је јединица у Е, толико је у Z једнаких величина Г, биће Г према Z као јединица према броју Е. А доказали смо да је А према Г као Δ према јединици. На тај начин, због једнакоудаљености, А је према Z као Δ према Е. Али Δ је према Е као А према В. Али А је према В као и према Z. Значи А је према сваком од В и Z у истој размери, па према томе је В једнако Z. Али Г мери Z, значи оно мери и В, а мери оно и А. Према томе Г мери А и В. На овај начин је А самерљиво са В.

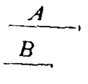
И тако, ако су две величине у размери једна према другој итд.

Последица

Из овог је јасно да, ако постоје два броја, рецимо, Δ и Е и дуж, напр. А, онда се може начинити тако да буде број Δ према број Е као дуж према дужи. А ако узмемо средњу пропорционалу, напр. В, од А и Z, онда је А према Z као квадрат на А према квадрату на В, тј. прва стоји према трећој као слика на првој према сличној и слично конструисаној слици на другој. Али А је према Z као број Δ према броју Е. На овај начин смо добили да је број Δ према броју Е као квадрат на А према квадрату на В. А то је требало доказати.[11]

7.

Несамерљиве величине се не налази у размери једна према другој као број према броју.



Нека су А и В несамерљиве величине. Тврдим да А према В не стоји у размери броја према броју.

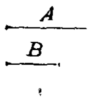
Заиста, ако је А према В у размери броја према броју, тада је А самерљиво са В. Но то није тако. Према томе А не стоји према В у размери броја према броју.

На овај начин, несамерљиве величине се не налазе итд.

8.

Ако се две величине не налазе у размери једна према другој као број према броју, те величине су несамерљиве.

Нека се две величине А и В не налазе у размери једна према другој као број према броју. Тврдим да су величине А и В несамерљиве.



Заиста, ако су оне самерљиве, биће размера А према В као број према броју. Но то није тако. Према томе су величине А у В несамерљиве.

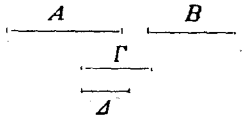
На овај начин, ако се две величине не налазе у размери итд.

9.

Квадрати на самерљивим дужима се налазе у размери квадратног броја према квадратном броју. И квадрати који се налазе у размери квадратног броја према квадратном броју имају за стране самерљиве дужи. — А квадрати на несамерљивим дужима се не налазе у размери један према другом као квадратни број према квадратном броју. И квадрати који се не налазе у размери један према другом као квадратни број према квадратном броју немају за стране самерљиве дужи.

Нека су А и В самерљиве дужи. Тврдим, да је размера квадрата на А према квадрату на В као квадратног броја према квадратном броју.

Заиста, пошто је А самерљиво са В као једна дуж са другом, А се налази у размери према В као број према броју. Нека се налазе и то као Γ према Δ. Пошто је А према В као Γ према Δ, онда је квадрат на А према квадрату на В у двапут вишој размери А према В, јер се сличне слике налазе у двапут вишој размери хомологних страна. А двапут виша размера броја Γ према броју Δ је размера квадрата на Γ према квадрату на Δ. Јер за два квадрата постоји један средње пропорционалан број, а квадратни број је према квадратном броју у двапут вишој размери стране према страни. На тај начин је квадрат на А према квадрату на В као квадрат на Γ (број) према квадрату на Δ (број).



Нека се сад квадрат на А односи према квадрату на В као квадрат на Γ према квадрату на Δ. Тврдим да је дуж А самерљива са дужи В.

Заиста, пошто је квадрат на А према квадрату на В као квадрат на Γ према квадрату на Δ, али квадрат на А је према квадрату на В у двапут вишој размери од размере А према В, а квадрат (број) на (броју) Γ према квадрату (броју) на (броју) Δ. Према томе је и А према В као (број) Γ према (броју) Δ. Значи, дуж А је у размери према В као број Γ према броју Δ. На овај начин дуж А је самерљива са дужи В.

Нека, даље, дуж А није самерљива са дужи В. Тврдим, да се квадрат на А не налази у размери према квадрату на В као квадратни број према квадратном броју.

Заиста, ако се квадрат на А према квадрату на В налази у размери квадратног броја према квадратном броју, биће дуж А самерљива са дужи В. А то није тако. Према томе се квадрат на А према квадрату на В не налази у размери квадратног броја према квадратном броју.

Најзад, нека се квадрат на А према квадрату на В не налази у размери квадратног броја према квадратном броју. Тврдим, да је дуж А несамерљива са дужи В.

Заиста, ако је A самерљиво са B, биће размера квадрата на A према квадрату на B као квадратни број према квадратном броју. А то није тако. Према томе неће бити дуж A самерљива са дужи B.

На овај начин, квадрати на самерљивим дужима, итд.

Последица

Из доказаног је јасно да су величине самерљиве по дужини увек самерљиве и у степену, а да величине самерљиве само у степену нису увек самерљиве и по дужини, [пошто се квадрати конструисани на самерљивим (по дужини) дужима налазе у размери квадратног броја према квадратном броју, тј. у размери броја према броју, они су према томе самерљиве. На овај начин дужи самерљиве по дужини, самерљиве су не само по дужини већ и у степену.

Даље, ако су неки квадрати један према другом у размери квадратног броја према квадратном броју, биће они, према доказаном, самерљиви и по дужини и у степену из разлога што су квадрати у размери броја према броју. И да су они квадрати, који нису у размери квадратног броја према квадратном броју већ једноставно у размери броја према броју, самерљиви у степену, али не по дужини. Према томе величине самерљиве по дужини самерљиве су увек и у степену, а оне самерљиве у степену нису увек самерљиве и по дужини, ако нису у размери квадратног броја према квадратном броју.

Тврдим, даље, да величине несамерљиве по дужини неће бити увек несамерљиве и у степену, пошто самерљиве у степену могу и да не буду у размери квадратног броја према квадратном броју, па због тога величине самерљиве у степену мегу бити и несамерљиве по дужини. Према томе несамерљиве по дужини нису увек несамерљиве и у степену, већ несамерљиве по дужини могу у степену бити и самерљиве и несамерљиве.

А несамерљиве у степену увек су несамерљиве и по дужини. Заиста, ако су оне самерљиве по дужини, биће самерљиве и у степену. Но претпостављено је да су оне несамерљиве. А то је апсурдно. Значи несамерљиве у степену увек су несамерљиве и по дужини].[12]

Лема

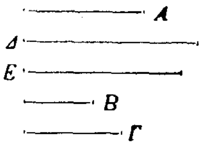
У аритметикама се доказује да су слични површински бројеви у размери један према другом као квадратни број према квадратном броју и да, ако су два броја у размери квадратног броја према квадратном броју, они су слични површински бројеви. Из овог је очигледно, да површински бројеви, који нису слични, тј. немају пропорционалних страна, нису у размери квадратног броја према квадратном броју. Заиста, ако би они били у таквој размери, они би били слични површински, а то се не претпоставља. На овај начин површински бројеви који нису слични нису у размери један према другом као квадратни број према квадратном броју.

10.

За дату дуж наћи две несамерљиве дужи, једну несамерљиву само по дужини, а другу несамерљиву и у степену.

Нека је дата дуж А. Треба наћи за А две несамерљиве дужи, — једну само по дужини а другу и у степену.

Заиста, узмимо два броја В и Г који нису у размери један према другом као квадратни број према квадратном броју, тј. који нису слични површински бројеви, и начинимо да буде В према Г као квадрат на А према квадрату на Δ, а то смо научили. На тај начин је квадрат на А самерљив са квадратом на Δ. И пошто В према Г није у размери као квадратни број према квадратном броју, неће бити ни квадрат на А према квадрату на Δ у размери као квадратни број према квадратном броју. Према томе ће А бити несамерљиво са Δ по дужини. Узмимо за А и Δ средњу пропорционалу Е. Тада је А према Δ као квадрат на А према квадрату на Е. Али А је несамерљиво са Δ по дужини, па ће тада и квадрат на А бити несамерљив са квадратом на Е. Према томе су А и Е несамерљиве у степену.



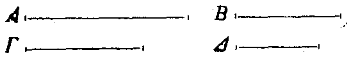
На овај начин су за дату дуж А пронађене две несамерљиве дужи Δ и Е, несамерљива само по дужини Δ, и несамерљива у степену, а очевидно и по дужини, Е. [А то је требало доказати].[13]

11.

Ако су четири величине пропорционалне, и прва самерљива са другом, биће и трећа самерљива са четвртом, а ако је права несамерљива са другом, биће и трећа несамерљива са четвртом.

Нека су четири величине А, В, Г, Δ пропорционалне и то: А према В као Г према Δ и нека је А самерљиво са В. Тврдим да је и Г самерљиво са Δ.

Заиста, ако је А самерљиво са В, биће А према В у размери броја према броју. А како је А према В као Г према Δ, биће и Г према Δ у размери броја према броју, а тада је Г самерљиво са Δ.



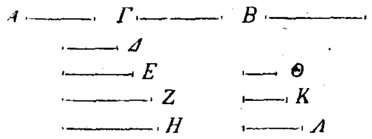
Нека је сад А несамерљиво са В. Тврдим да је тада и Г несамерљиво са Δ. Заиста, пошто је А несамерљиво са В, размера А према В није једнака размери броја према броју. А како је А према В као Г према Δ, неће бити ни Г према Δ у размери броја према броју, а тада је Г несамерљиво са Δ.

На овај начин, ако су четири величине, итд.[14]

12.

Величине самерљиве са истом величином самерљиве су и међу собом.

Нека је свака од величина А и В самерљива са величином Г. Тврдим да је и А самерљиво са В.



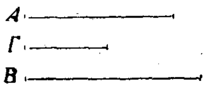
Заиста, пошто је А самерљиво са Г, размера А према Г је као број према броју. Нека то буде, и то као Δ према Е. Даље, пошто је Г самерљиво са В, размера Г према В је као број према броју. Нека и то буде, и то као Z према Н. И за произвољно дате размере као што је Δ према Е и Ζ према Η, одредимо узастопне бројеве који су у датим размерама, наиме Θ, К, Λ и то тако да је Δ према Е као Θ према К и Ζ према Η као К према Λ.

Пошто је сад А према Г као Δ према Е, а Δ је према Е као Θ према К, биће и А према Г као Θ према К. Даље, пошто је Г према В као Ζ према Η, а Ζ је према Η као К према Λ, биће и Г према В као К према Λ. А и А је према Г као Θ према К. Одатле је, због једнакоудаљености, А према В као Θ према Λ. Према томе размера А према В је размера броја Θ према броју Λ. Значи А је самерљиво са В.

На овај начин, величине самерљиве са истом величином самерљиве су и међу собом. А то је требамо доказати.[15]

13.

Ако су две величине самерљиве, а једна од њих несамерљива ма са којом другом величином, биће и друга несамерљива са том величином.



Нека су А и В две самерљиве величине, а једна од њих А несамерљива са неком величином Г. Тврдим да је и друга величина В несамерљива са Г.

Заиста, ако је В самерљиво са Г, а и А самерљиво са В, биће и А самерљиво са Г, али оно је несамерљиво. А то је немогуће. Према томе В није самерљиво са Г. Оно је несамерљиво.

На овај начин, ако су две величине, итд.

Лема

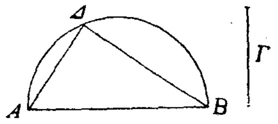
За две дате неједнаке дужи наћи дуж за чији квадрат ће квадрат веће дужи бити већи од квадрата мање.

Нека су дате две неједнаке дужи АВ и Г и нека је АВ већа. Треба наћи дуж за чији квадрат ће квадрат на АВ бити већи од квадрата на Г.

Нацртајмо на АВ полукруг АΔВ и у њега уцртајмо АΔ једнако Г, па спојмо В и Δ. Јасно је да је угао АΔВ прав и да је квадрат на АВ већи од квадрата на АΔ, тј. од квадрата на Г, за квадрат на ΔВ.

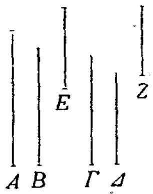
Слично се одређује и дуж чији је квадрат једнак збиру квадрата две дате дужи.

Нека су дате две дужи AΔ и ΔB, па треба наћи дуж чији је квадрат једнак збиру крадрата на AΔ и на ΔB. Заиста, узмимо за краке правог угла AΔ и ΔB и спојмо A и B. Јасно је да је квадрат на AΔ са квадратом на ΔB једнак квадрату на AB. А то је требало доказати[16].



14.

Ако су дате четири пропорционалне дужи и квадрат прве је већи од квадрата друге за квадрат дужи самерљиве по дужини са првом дужи, биће и квадрат треће већи од квадрата четврте за квадрат дужи самерљиве по дужини са трећом. И ако је квадрат прве већи од квадрата друге за квадрат дужи несамерљиве по дужини са првом дужи, биће и квадрат треће већи од квадрата четврте за квадрат дужи несамерљиве по дужини са трећом.



Нека су четири дужи A, B, Г, Δ пропорционалне и то нека буде A према B као Г према Δ и нека квадрат A буде већи од квадрата B за квадрат E, а квадрат Г већи од квадрата Δ за квадрат Z. Тврдим да ће, ако је A самерљиво са E, бити и Г самерљиво са Z, а ако је A несамерљиво са E, бити и Г несамерљиво за Z.

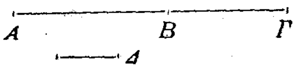
Заиста, пошто је A према B као Г према Δ, биће и квадрат на A према квадрату на B као квадрат на Г према квадрату на Δ. Но квадрат на A је збир квадрата на E и на B, а квадрат на Г је збир квадрата на Δ и на Z. Према томе је збир квадрата на E и на B према квадрату на B као збир квадрата на Δ и на Z према квадрату на Δ. Стога, после одвајања, квадрат на E је према квадрату на B као квадрат на Z према квадрату на Δ. Значи и E је према B као Z према Δ или, после пермутовања, B је према E као Δ према Z. Али и A је према B као Г према Δ. Па према томе, због једнакоудаљености, А је према Е као Г према Z. Ако је сад А самерљиво са Е, биће и Г самерљиво са Z, а ако је Г несамерљиво са Е, несамерљиво је и Г са Z.

На овај начин, ако итд.[17]

15.

Ако се саберу две самерљиве величине, биће и збир самерљив са сваком од њих, а ако је збир самерљив са једном од њих (са једним сабирком), биће и полазне величине (сабирци) самерљиве.

Образујмо збир од две самерљиве величине АВ и ВГ. Тврдим да је цело АГ самерљиво са сваком од величина АВ и ВГ.



Заиста, пошто су АВ и ВГ самерљиве, мери их нека величина. Нека их мери и нека је то Δ. Пошто сад величина Δ мери АВ и ВГ, мериће и цело АГ, а она мери АВ и ВГ. Према томе Δ мери АВ, ВГ и АГ. На овај начин је АГ самерљиво и са АВ и са ВГ.

Нека је сад АГ самерљиво са АВ. Тврдим, да су самерљиве АВ и ВГ.

Заиста, пошто су АГ и АВ самерљиве, мери их нека величина. Нека их мери и нека је то Δ. Пошто сад величина Δ мери ГА и АВ, она мери и остатак ВГ. А она мери и АВ. Према томе Δ мери АВ и ВГ. Према томе су АВ и ВГ самерљиве.

На овај начин, ако се саберу два самерљиве величине итд.[18]

16.

Ако се саберу две несамерљиве величине, биће и збир несамерљив са сваком од њих, а ако је збир несамерљив са једном од њих (са једним сабирком), биће и полазне величине (сабирци) несамерљиве.

Образујмо збир од две несамерљиве величине АВ и ВГ. Тврдим, да је цело АГ несамерљиво и са АВ и са ВГ.

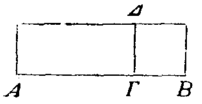
Заиста, ако ГА и АВ нису несамерљиве, мери их нека иста величина. Нека их мери, ако је то могуће, и нека је то величина Δ. Пошто сад Δ мери ГА и АВ, мери она и остатак ВГ. А она мери и АВ. Значи Δ мери АВ и ВГ. Одатле излази да су АВ и ВГ самерљиве, али је претпостављено да су оне несамерљиве. А то је немогуће. На тај начин не постоји величина која мери ГА и АВ. И према томе су ГА и АВ несамерљиве. Слично се доказује да су и АГ и ГВ несамерљиве. На овај начин АГ је несамерљиво са сваком од величина АВ и ВГ.

Нека је сад АГ несамерљиво са једном од АВ и ВГ. Нека то прво буде са АВ. Тврдим да је несамерљиво и АВ са ВГ. Заиста, ако су самерљиве, мери их нека величина. Нека их мери и нека је то величина Δ. Пошто сад Δ мери АВ и ВГ, мериће и цело АГ. А она мери и АВ. На тај начин Δ мери ГА и АВ. Одавде излази да су ГА и АВ самерљиве, али је претпостављено да су оне несамерљиве. А то је немогуће. На тај начин не постоји величина која мери АВ и ВГ. И према томе су АВ и ВГ несамерљиве.

На овај начин, ако се саберу итд.

Лема

Ако се на дужи конструише паралелограм са квадратном допуном, конструисани (паралелограм) је једнак правоугаонику чији су стране они делови дужи који су настали услед контрукције.



Нека је на дужи АВ конструисан паралелограм АΔ са квадратном допуном ΔВ. Тврдим да је (паралелограм) АΔ једнак правоугаонику са странама АГ и ГВ.

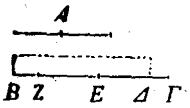
То је само по себи јасно. Заиста, пошто је ΔВ квадрат, ΔГ је једнако ГВ, а како је АΔ правоугаоник од АГ и ГΔ, биће и од АГ и ГВ.

На овај начин, ако се на дужи, итд.[19]

17.

Ако постоје две неједнаке дужи и ако је на већој конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једнак четвртини квадрата на мањој, и дели ту дуж на делове самерљиве по дужини, биће квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат дужи која је самерљива по дужини са већом дужи. — И ако је квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат дужи која је самерљив по дужини са већом дужи, и на већој је конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једнак четвртини квадрата на мањој, он (паралелограм) ће делити већу дуж на делове самерљиве по дужини.

Нека су А и ВГ две неједнаке дужи и ВГ је већа. И нека је на ВГ конструисан са квадратном допуном паралелограм једнак четвртини квадрата на А, тј. квадрату на половини А, а са странама ВΔ и ΔГ и нека је ВΔ самерљиво по дужини са ΔГ. Тврдим да је квадрат на ВГ већи од квадрата на А за квадрат на дужи самерљивој са ВГ.



Заиста, преполовимо ВГ тачком Е, и одмеримо ΔЕ једнако EZ. Тада је остатак ΔГ једнак BZ. И пошто је дуж ВГ подељена тачком Е на једнаке делове, а тачком Δ на неједнаке, биће правоугаоник са странама ВΔ и ΔГ, са квадратом на ЕΔ, једнак квадрату на ЕГ. А и учетворостручени, наиме: четвороструки правоугаоник са странама ВΔ и ΔГ, са четвороструким квадратом на ЕΔ, једнак је четвороструком квадрату на ЕГ. Али четвороструки правоугаоник са странама ВΔ и ΔГ једнак је квадрату на А, четвороструки квадрат на ΔЕ једнак је квадрату на ΔZ, јер је ΔZ двоструко ΔЕ. И четвороструки квадрат на ЕГ једнак је квадрату на ВГ, јер је поново ВГ двоструко ГЕ. И на тај начин збир квадрата на А и на ΔZ једнак је квадрату на ВГ. Дакле, квадрат на ВГ већи је од квадрата на А за квадрат на ΔZ. Треба доказати да је ВГ самерљиво са ΔZ. Заиста, пошто је ВΔ самерљиво по дужини са ΔГ, биће самерљиво по дужини и ВГ са ГΔ. Али ГΔ је самерљиво по дужини са ГΔ и BZ, јер је ГΔ једнако BZ. Према томе је ВГ самерљиво по дужини са BZ и ГΔ. На овај начин ВГ је самерљиво по дужини и са остатком ZΔ. И тако је квадрат на ВГ већи од квадрата на А за квадрат на самерљивој дужи са ВГ.

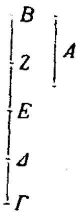
Нека је сад квадрат на ВГ већи од квадрата на А за квадрат на дужи самерљивој са ВГ, и нека је на ВГ конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једнак четвртини квадрата на А, а са странама ВΔ и ΔГ. Треба доказати да је ВΔ самерљиво са ΔГ.

Заиста, после исте припреме, на сличан начин се доказује да је квадрат на ВГ већи од квадрата на А за квадрат на ZΔ. Но квадрат на ВГ је већи од квадрата на А за квадрат на дужи самерљивој са ВГ. Значи ВГ је самерљиво по дужини и са остатком, збиром ВZ са ΔГ. Но збир ВZ са ΔГ је самерљив по дужини са ΔГ. Премо томе је и ВГ самерљиво по дужини са ГΔ. И на тај начин, после растављања, ВΔ је самерљиво по дужини са ΔГ.

На овај начин, ако постоје две неједнаке дужи, итд.[20]

18.

Ако постоје две неједнаке дужи и ако је на већој конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једнак четвртини квадрата на мањој, и дели ту дуж на делове несамерљиве по дужини, биће квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са већом дужи. — И ако је квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са већом дужи, и ако је на већој конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једнак четвртини квадрата на мањој, он (паралелограм) ће делити већу дуж на делове несамерљиве по дужини.



Нека су А и ВΔ две неједнаке дужи и ВГ већа. И нека је на ВГ конструисан са квадратном допуном паралелограм једнак четвртини квадрата на А, и са странама ВΔ и ΔГ, а ВΔ је несамерљиво по дужини са ΔГ. Тврдим, да је квадрат на ВГ већи од квадрата на А за квадрат на дужи несамерљивој са ВГ.

Заиста, ако урадимо оно исто што и раније, доказаћемо на сличан начин да је квадрат на ВГ већи од квадрата на А за квадрат на ZΔ. Докажимо сад да је BΓ несамерљиво по дужини са ΔZ. Заиста, пошто је BΔ несамерљиво по дужини са ΔΓ, биће несамерљиво по дужини и BΓ са ΓΔ. Али ΔΓ је самерљиво са збиром BZ и ΔΓ, према томе BΓ је несамерљиво са збиром BZ и ΔΓ. Биће на тај начин BΓ несамерљиво по дужини и са остатком ZΔ. Али квадрат на BΓ већи је од квадрата на A за квадрат на ZΔ. На овај начин је квадрат на BΓ већи од квадрата на A за квадрат на дужи ZΔ која је несамерљива са BΓ.

Даље, нека је квадрат на BΓ већи од квадрата на A за квадрат на дужи несамерљивој са BΓ, и нека је на BΓ конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једнак четвртини квадрата на A, а са странама BΔ и ΔΓ. Треба доказати да је BΔ несамерљиво по дужини са ΔΓ.

Заиста, после исте припреме, доказује се на сличан начин да је квадрат на BΓ већи од квадрата на A за квадрат на ZΔ. Али квадрат на BΓ је већи од квадрата на A за квадрат на дужи несамерљивој са BΓ. Према томе BΓ је несамерљиво по дужини са ZΔ. Значи BΓ је несамерљиво и са остатком од збира BZ и ΔΓ. Међутим збир BZ и ΔΓ је самерљив по дужини са ΔΓ. Па према томе је BΓ несамерљиво по дужини са ΔΓ. А после растављања и BΔ је несамерљиво по дужини са ΔΓ.

На овај начин, ако постоје две неједнаке дужи, итд.[21]

Лема

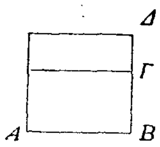
Пошто је доказано да су дужи самерљиве по дужини увек самерљиве и у степену, а самерљиве у степену нису увек самерљиве и по дужини, већ могу бити и самерљиве и несамерљиве по дужини, јасно је да, ако је нека дуж самерљива по дужини са датом рационалном дужи, она се зове рационална и самерљива не само по дужини већ и у степену, јер су самерљиве по дужини увек самерљиве и у степену. А ако је нека дуж, самерљива у степену са датом рационалном дужи, у исто време самерљива и по дужини, она се зове рационална и самерљива с њом како по дужини тако и у степену. Међутим, ако је нека дуж самерљива са датом рационалном дужи у степену, али несамерљива по дужини, она се тада зове рационална али самерљива само у степену.

19.

Правоугаоник са рационалним странама које су самерљиве по дужини према једном или другом од наведених начина рационалан је.

Нека је АГ правоугаоник са странама АВ и ВГ, које су самерљиве по дужини. Тврдим да ја правоугаоник АГ рационалан.

Заиста, конструишимо на АВ квадрат АΔ. Квадрат АΔ је рационалан. Пошто је АВ самерљиво по дужини са ВГ, а АВ је једнако ВΔ, биће и ВΔ самерљиво са ВГ. И тада је ВΔ према ВГ као квадрат ΔА према правоугаонику АГ. Па према томе је квадрат ΔА самерљив са правоугаоником АГ. А како је квадрат ΔА рационалан, биће и правоугаоник АГ рационалан.

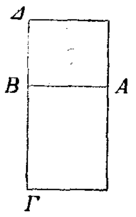


На овај начин, правоугаоник са рационалним странама итд.[22]

20.

Рационална површина конструисана на рационалној дужи има рационалну ширину, самерљиву по дужини са оном дужи, на којој је конструисана површина.

Нека рационална површина АГ, конструисана на дужи АВ, рационалној у раније протумаченом смислу, има ширину ВГ. Тврдим, да је ВГ рационално и самерљиво по дужини са ВА.



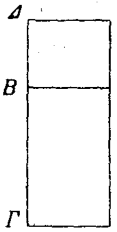
Заиста, конструишимо на АВ квадрат АΔ; према томе је АΔ рационално. А рационално је и АГ. Према томе је ΔА самерљиво са АГ. И ΔА је према АГ као ΔВ према ВГ. Значи и ΔВ је самерљиво са ВГ. А како је ΔВ једнако ВА, биће и АВ самерљиво са ВГ. Али АВ је рационално, према томе је рационално и ВГ и самерљиво по дужини са АВ.

На овај начин, рационална површина итд.[23]

21.

Правоугаоник са рационалним странама самерљивим само у степену ирационалан је, а ирационална је и страна квадрата једнаког површини правоугаоника. Нека се таква страна зове медијала.

Нака је АГ правоугаоник са рационалним странама АВ и ВГ самерљивим само у степену. Тврдим, да је АГ ирационалан и страна њему једнаког квадрата ирационална. Нека се она зове медијала.

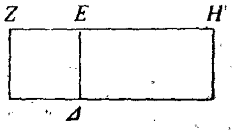


Заиста, конструишимо на АВ квадрат АΔ. На овај начин је АΔ рационално. И пошто су АВ и ВГ несамерљиве по дужини, јер су самерљиве, по претпоставци, само у степену, и АВ је једнако ВΔ, биће и ΔВ несамерљиво по дужини са ВГ. И ΔВ је према ВГ као АΔ према АГ. Биће на тај начин и ΔА несамерљиво са АГ. А како је ΔА рационално, онда је АГ ирационално. А биће и АГ, страна квадрата једнаког површини правоугаоника, ирационална. И она се зове медијала. А то је требало доказати.[24]

Лема.

Ако постоје две дужи, биће једна према другој као квадрат на првој према правоугаонику са двема овим дужима као странама.

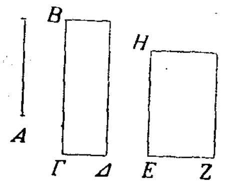
Нека су ZЕ и ЕН две дужи. Тврдим да је ZЕ према ЕН као квадрат на ZЕ према правоугаонику са странама ZЕ и ЕН.



Заиста, конструишимо на ZЕ квадрат ΔZ и допунимо га са НΔ. И пошто је сад ZЕ према ЕН као ZΔ према ΔН, и ZΔ је квадрат на ZЕ, а ΔН правоугаоник са странама ΔЕ и ЕН, тј. са ZЕ и ЕН, биће ZЕ према ЕН као квадрат на ZЕ према правоугаонику са странама ZЕ и ЕН. Исто тако је и правоугаоник са страна НЕ и ЕZ према квадрату на ЕZ, тј. НΔ према ZΔ као НЕ према ЕZ. А то је требало доказати.[25]

22.

Правоугаоник, једнак квадрату на медијали, конструисан на рационалној дужи има рационалну ширину несамерљиву по дужини са дужи на којој је конструисан.



Нека је А медијала, ГВ рационална дуж, и нека правоугаоник ВΔ, са површином једнаком површини квадрата на А и конструисан на ВГ, има ширину ГΔ. Тврдим да је ГΔ рационално и самерљиво са ГВ по дужини.

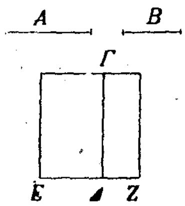
Заиста, пошто је А медијала, биће правоугаоник, чија је површина једнака површини квадрата на А, обухваћен рационалним дужима, које су самерљиве само у степену. Нека је НZ такав правоугаоник једнак квадрату. Али и ВΔ је правоугаоник једнак истом квадрату. Значи ВΔ је једнако НZ. А они су и са једнаким угловима. А како су код једнаких паралелограма са једнаким угловима краци једнаких углова обрнуто пропорционални, биће пропорција: ВГ је према ЕН као ЕZ према ГΔ. Према томе и пропорција: квадрат на ВГ је према квадрату на ЕН као квадрат на ЕZ према квадрату на ГΔ. Али квадрат на ГВ је самерљив са квадратом на ЕН, пошто је свака од ових дужи рационална. Значи и квадрат на ЕZ је самерљив са квадратом на ГΔ. А како је квадрат на ЕZ рационалан, биће рационалан и квадрат на ГΔ, те према томе је рационална и дуж ГΔ. А пошто је ЕZ несамерљиво са ЕН по дужини, јер су оне самерљиве само у степену, и ЕZ је према ЕН као квадрат на ЕZ према правоугаонику са странама ZЕ и ЕН, биће квадрат на ЕZ несамерљив са правоугаоником са странама ZЕ и ЕН. Али са квадратом на ЕZ је самерљив квадрат на ГΔ, јер су они рационални у степену. И правоугаоник са странама ΔГ и ГВ је самерљив са правоугаоником са странама ZЕ и ЕН, јер су оба једнаки квадрату на А. Према томе је и квадрат на ГΔ несамерљив са правоугаоником са странама ΔГ и ГВ. Али квадрат на ГΔ је према правоугаонику са странама ΔГ и ГВ као ΔГ према ГВ. Тако је ΔГ несамерљиво по дужини са ГВ. На овај начин дуж ГΔ је рационална и несамерљива по дужини са ГВ. А то је требало доказати.[26]

23.

Величина самерљива са медијалом је медијала.

Нека је А медијала и нека је В самерљиво са А. Тврдим да је и В медијала.

Заиста, одмеримо рационалну дуж ГΔ и конструишимо на ГΔ правоугаоник ГЕ са површином једнаком квадрату на А, који има ширину ЕΔ. Тада ће ЕΔ бити рационално и несамерљиво са ГΔ по дужини. Конструишимо на ГΔ правоугаоник ГZ са површином једнаком квадрату на В, који има ширину ΔZ. Пошто је сад А самерљиво са В, самерљив је и квадрат на А са квадратом на В. Али квадрат на А једнак је ЕГ и квадрат на В — ГZ, значи ЕГ је самерљиво са ГZ. И ЕГ је према ГZ као ЕΔ према ΔZ. Према томе је ЕΔ самерљиво по дужини са ΔZ. Али ЕΔ је рационално и несамерљиво по дужини са ΔГ. Према томе су ГΔ и ΔZ рационални и самерљиви само у степену. Али страна квадрата површине једнаке површини правоугаоника са странама рационалним но самерљивим само у степену је медијала. А како је В страна квадрата једнаког површини правоугаоника са странама ГΔ и ΔZ биће В медијала.[27]



Последица

Из овог је јасно да је површина самерљива са медијалном површином и сама медијална [јер су стране квадрата једнаких тим површинама самерљиве само у степену, и ако је једна медијала и друга је медијала].

Лема

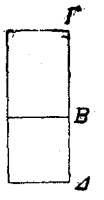
Што је било речено о рационалним дужима, следује и за медијале, наиме: величина самерљива са медијалом по дужини зове се медијала и она је самерљива са њом не само по дужини већ и у степену, јер су величине, које су самерљиве по дужини, самерљиве и у степену. А ако је нека величина самерљива са медијалом у степену, а самерљива и по дужини, тада се обе величине зову медијале, и то самерљиве по дужини и у степену, а ако су самерљиве само у степену, тада се зову медијале самерљиве само у степену.

24.

Ако су стране правоугаоника медијале, самерљиве по дужини са раније наведеним тумачењем, правоугаоник је медијалан.

Нека су стране АВ и ВГ правоугаоника АГ медијале, а самерљиве по дужини. Тврдим да је (правоугаоник) АГ медијалан.

Заиста, конструишимо на АВ квадрат АΔ. Тада је АΔ медијалан. А пошто је АВ самерљиво по дужини са ВГ и АВ једнако са ВΔ, биће и ΔВ самерљиво по дужини са ВГ, те према томе је и ΔА самерљиво са АГ. Али ΔА је медијалан, на овај начин и АГ је медијалан. А то је требало доказати.[28].

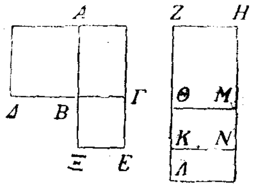


25.

Ако су стране правоугаоника медијале, самерљиве само у степену, биће правоугаоник или рационалан или медијалан.

Нека су стране АВ и ВГ правоугаоника АГ медијале, а самерљиве само у степену. Тврдим, да је АГ или рационалан или медијалан.

Заиста, конструишимо на АВ и ВГ квадрате АΔ и ВЕ. Тада је сваки од АΔ, ВЕ медијалан. Одмеримо рационалну дуж ZН и конструишимо на ZН правоугаоник НΘ, једнак квадрату АΔ, са ширином ZΘ, а на ΘМ правоугаоник МК, једнак правоугаонику АГ, са ширином ΘК и, слично, на КN конструишимо правоугаоник NΛ, једнак квадрату ВЕ, са ширином КΛ, једнак квадрату ВЕ, са ширином КΛ. Тада су ZΘ, ΘК, КΛ на правој. Пошто је сваки од квадрата АΔ и ВЕ медијалан, а квадрат АΔ једнак је правоугаонику НΘ и квадрат ВЕ једнак правоугаонику NΛ, биће и сваки од правоугаоника НΘ и NΛ медијалан. А како су они конструисани на рационалној дужи ZН, биће и свака од дужи ZΘ и КΛ



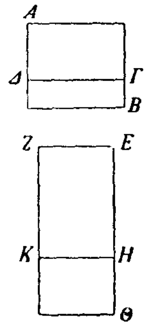
рационална и несамерљива по дужини са ZH. Али како је AΔ самерљиво са BE, биће самерљиво и HΘ са NΛ. Али HΘ је према NΛ као ZΘ према KΛ. Па према томе биће и ZΘ самерљиво по дужини са KΛ. На овај начин су ZΘ и KΛ рационалне и самерљиве по дужини, значи и правоугаоник обухваћен дужима ZΘ и KΛ је рационалан. И пошто је дуж ΔB једнака BA, а ΞB дужи BΓ, то је ΔB према BΓ као AB према BΞ. Међутим ΔB је према BΓ као ΔA према AΓ, па према томе биће и AB према BΞ као AΓ према ΓΞ. Према томе је ΔA према AΓ као AΓ према ΓΞ. Али квадрат AΔ једнак је правоугаонику HΘ, а правоугаоник AΓ правоугаонику MK и квадрат ΓΞ правоугаонику NΛ. На овај начин HΘ је према MK као MK према NΛ. Те, према томе, и ZΘ је према ΘK као ΘK према KΛ. Значи правоугаоник са странама ZΘ и KΛ једнак је квадрату на ΘK. Али правоугаоник са странама ZΘ и KΛ је рационалан, па ће онда и квадрат на ΘK бити рационалан, а то значи и дуж ΘK рационална. И ако је она самерљива по дужини са ZH, биће и правоугаоник ΘN рационалан. А ако је она несамерљива по дужини са ZH биће KΘ и ΘM рационалне, али самерљиве само у степену. На овај начин је правоугаоник ΘN или рационалан или медијалан. А како је ΘN једнако AΓ, биће и правоугаоник AΓ или рационалан или медијалан.

На овај начин, ако су стране правоугаоника медијале, итд.[29]

26.

Медијална површина не може бити већа од друге медијалне површине за неку рационалну површину.

Заиста, нека буде, ако је то могуће, медијална површина AB већа од медијалне површине AΓ за рационалну површину ΔB, и нека је EZ рационална дуж и на дужи EZ са ширином EΘ конструисан правоугаоник ZΘ са површином једнаком површини AB, па одузмимо правоугаоник ZH једнак правоугаонику AΓ. Тада је остатак BΔ једнак остатку KΘ. А како је ΔB рационална површина, биће рационална и површина KΘ. Пошто је свака од површина AB и AΓ медијална, и AB једнака ZΘ, а AΓ једнака ZH, значи и свака од површина ZΘ и ZH је медијална, а конструисана на рационалној дужи EZ. Према томе је свака од ΘE и EH рационална и несамерљива по дужини са EZ. А пошто је ΔB рационална и једнака KΘ, биће и KΘ рационална, а конструисана је на рационалној дужи EZ. Према томе је HΘ рационална и самерљива по дужини са EZ. Али и EH је рационална и несамерљива по дужини са EZ. На тај начин EH је несамерљива по дужини са HΘ. Међутим EH је према HΘ као квадрат на EH према правоугаонику са странама EH и HΘ. Па према томе је квадрат на EH несамерљив са правоугаоником коме су стране EH и HΘ. Али са квадратом на EH самерљиви су квадрати на EH и на HΘ, јер су они рационални. Међутим са правоугаоником коме су стране EH и HΘ је самерљив и двоструки правоугаоник са странама EH и HΘ, јер је он двапут већи од њега. Према томе су квадрати на EH и на HΘ несамерљиви са двоструким правоугаоником са странама EH и HΘ. А то значи да су заједно узети квадрати на EH и на HΘ са двапут узетим правоугаоником коме су стране EH и HΘ — а то је квадрат на EΘ — несамерљиви са квадратима на EH и на HΘ. Али квадрати на EH и на HΘ су рационални, па према томе је квадрат на EΘ ирационалан, значи ирационална и дуж EΘ, а она је и рационална. А то је немогуће.



На овај начин, медијална површина не може бити већа од друге медијалне површине за неку рационалну површину. А то је требало доказати.[30]

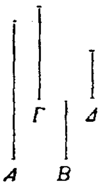
27.

Наћи медијале, самерљиве само у степену, које су стране рационалног правоугаоника.

Узмимо две рационалне, само у степену самерљиве дужи A и B, конструишимо за њих средње пропорционалну дуж Γ, и начинимо тако да се A односи према B као Γ према Δ.

И тада, пошто су дужи A и B рационалне и самерљиве само у степену, биће правоугаоник са странама A и B, једнак квадрату на Γ, медијалан. И пошто је A према B као Γ према

Δ, а А и В су самерљиве само у степену, биће и Г самерљиво са Δ само у степену. Али Г је медијала, значи и Δ је медијала. Према томе су Г и Δ медијале, самерљиве само у степену. Тврдим да оне обухватају рационалан правоугаоник. Заиста, пошто је А према В као Г према Δ, биће, после пермутовања, А према Г као В према Δ. Међутим А је према Г као Г према В. Па према томе је Г према В као В према Δ. Одавде следује да је правоугаоник обухваћен дужима Г и Δ једнак квадрату на В. А како је квадрат на В рационалан, биће и правоугаоник обухваћен дужима Г и Δ рационалан.

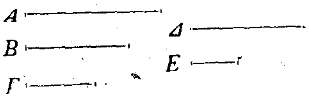


На овај начин су нађене медијале, самерљиве само у степену, стране рационалног правоугаоника. А то је требало доказати.[31]

28.

Наћи медијале, самерљиве само у степену, које су стране медијалног правоугаоника.

Узмимо три рационалне, само у степену самерљиве, дужи А, В, Г, конструишимо за А и В средње пропорционалну дуж Δ и начинимо да буде В према Г као Δ према Е.



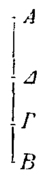
Пошто су А и В рационалне дужи самерљиве само у степену, биће правоугаоник у коме су стране А и В, једнак квадрату на Δ, медијалан. На овај начин Δ је медијала. И пошто су В и Г самерљиве само у степену, и В је према Г као Δ према Е, биће према томе и Δ и Е самерљиве само у степену. А како је Δ медијала, биће и Е медијала. На тај начин су Δ и Е медијале самерљиве само у степену. Тврдим да је и правоугаоник, коме су оне стране, медијалан. Заиста, пошто је В према Г као Δ према Е, биће, после пермутовања, В према Δ као Г према Е. Али В је према Δ и као Δ према А. Значи Δ је према А као Г према Е. Према томе је правоугаоник са странама А и Г једнак правоугаонику са странама Δ и Е. Али правоугаоник са странама А и Г је медијалан, па ће тада и правоугаоник са странама Δ и Е бити медијалан.

На овај начин су нађене медијале, самерљиве само у степену, стране медијалног правоугаоника. А то је требало доказати.[32]

Лема I

Нађи таква два квадратна броја да и њихов збир буде квадратни број.

Узмимо два броја АВ и ВГ, оба или парна или непарна. Пошто је остатак, кад се било од парног броја одузме паран број било од непарног броја одузме непаран број, паран број, остатак АГ је паран број. Преполовимо АГ тачком Δ. Нека бројеви АВ и ВГ буду или слични површински или квадратни, који су исто тако слични површински бројеви. Тада је производ од АВ и ВГ заједно са квадратом броја ГΔ једнак квадрату броја ВΔ. Али производ од АВ и ВГ је квадрат, пошто је доказано да ако два слична површинска броја помножена један другим, производе нешто, оно што се добива биће квадрат. На овај начин су нађена два квадратна броја, наиме производ од АВ и ВГ и квадрат броја ГΔ, који, после сабирања, производе квадрат броја ВΔ.



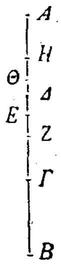
И јасно је да су такође нађена два квадрата, квадрат броја ВΔ и квадрат броја ГΔ, од којих је један већи од другог за производ АВ и ВГ, и да је тај производ исто тако квадрат ако су АВ и ВГ слични површински бројеви. Ако они нису слични површински бројеви, онда су нађена два квадрата, броја ВΔ и броја ΔГ, чија је разлика квадрата једнака производу АВ и ВГ, који није квадрат. А то је требало доказати.

Лема II

Нађи два квадратна броја чији збир није квадратни број.

Заиста, нека је производ од АВ и ВГ, како смо навели, квадрат и нека је број ГА паран, па преполовимо ГА тачком Δ.

Јасно је да је тада производ од АВ и ВГ, као квадрат, заједно са квадратом броја ГΔ једнак квадрату броја ВΔ. Одузмимо јединицу ΔЕ. После тога је производ од АВ и ВГ заједно са квадратом броја ГЕ мањи од квадрата броја ВΔ. Сад тврдим да производ АВ и ВГ, као квадрат, заједно са квадратом броја ГЕ није квадрат.

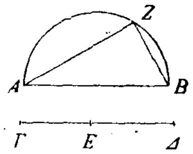


Заиста, ако је квадрат, онда је или једнак квадрату броја ВЕ или мањи од квадрата броја ВЕ, но ни у ком случају није већи, сем ако се јединица дели. Нека је, прво, ако је то могуће, производ од АВ и ВГ са квадратом броја ГЕ једнак квадрату броја ВЕ и неке је НА двострука јединица ΔЕ. Пошто је цео број АГ удвостручен број ГΔ и АН удвостручен број ΔЕ, биће и остатак НГ удвостручен остатак ЕГ. И према томе тачка Е полови НГ. Тада је производ од НВ и ВГ са квадратом броја ГЕ једнак квадрату броја ВЕ. Но и производ од АВ и ВГ са квадратом броја ГЕ једнак је, по претпоставци, квадрату броја ВЕ. Значи производ од НВ и ВГ са квадратом броја ГЕ једнак је производу од АВ и ВГ са квадратом броја ГЕ. После одузимања заједничког квадрата броја ГЕ закључујемо да је АВ једнако НВ, а то је бесмислено. Значи производ од АВ и ВГ заједно са квадратом броја ГΔ није једнак квадрату броја ВЕ. Тврдим да није ни мањи од квадрата броја ВЕ. Заиста, нека је, ако је то могуће, једнак квадрату ВZ и нека је ΘА удвостручен број ΔZ. Тада излази да је ΘГ удвостручен број ГZ. Значи тачка Z полови ГΘ и из истих разлога је производ од ΘВ и ВГ заједно са квадратом броја ZГ једнак квадрату броја ВZ. А претпоставили смо да је производ од АВ и ВГ заједно са квадратом броја ГЕ једнак квадрату ВZ. Према томе је производ од ΘВ и ВГ заједно са квадратом броја ГZ једнак производу од АВ и ВГ заједно са квадратом броја ГZ, а то је бесмислено. На овај начин производ од АВ и ВГ заједно са квадратом броја ГЕ неће бити мањи од квадрата броја ВЕ. А доказано је да није ни једнак са квадратом броја ВЕ. Према томе производ од АВ и ВГ заједно са квадратом броја ГЕ неће бити квадрат. [Без обзира на то што се и многим другим путевима могу пронаћи бројеви поменутих особина, зауставимо се на наведеном да не бисмо продужили расправу која је већ и без тога дуга]. А то је требало доказати.[34]

29.

Наћи две, само у степену самерљиве, такве рационалне дужи да квадрат на већој буде већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи која је самерљива по дужини са већом.

Узмимо неку рационалну дуж АВ и два таква квадратна броја, ГΔ и ΔЕ, да њихова разлика ГЕ не буде квадрат; и нацртајмо на АВ полукруг АZВ. Па начинимо тако да ΔГ буде према ГЕ као квадрат на ВА према квадрату на АZ и спојмо Z са В.



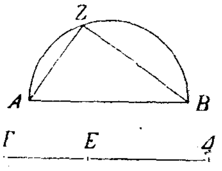
Пошто је сад квадрат на АВ према квадрату на АZ као ΔГ према ГЕ, значи да је размера квадрата на ВА према квадрату на АZ једнака размери броја ΔГ према броју ГЕ. Према томе је квадрат на АВ самерљив са квадратом на АZ. Но квадрат на АВ је рационалан, па према томе је рационалан и квадрат на АZ, значи рационална и дуж АZ. Пошто ΔГ према ГЕ није у размери квадратног броја према квадратном броју, нѝ размера квадрата на ВА према квадрату на АZ није једнака размери квадратног броја према квадратном броју. А то значи да АВ и АZ нису самерљиве по дужини. На овај начин АВ и АZ су рационалне али самерљиве само у степену. И пошто је ΔГ према ГЕ као квадрат на ВА према квадрату на АZ, биће, после замене једног дела другим, ГΔ према ΔЕ као квадрат на АВ према квадрату на ВZ. Но ГΔ је према ΔЕ у размери квадратног броја према квадратном броју. Значи и квадрат на АВ је према квадрату на ВZ у размери квадратног броја према квадратном броју. Биће према томе АВ самерљиво по дужини са ВZ. Но квадрат на АВ једнак је збиру квадрата на АZ и ZВ. На овај начин квадрат на АВ је већи од квадрата на АZ за квадрат на дужи ВZ, која је самерљива са АВ.

На овај начин су нађене две, само у степену самерљиве, такве рационалне дужи ВА и АZ да квадрат на већој АВ буде већи од квадрата на мањој AZ за квадрат на дужи BZ која је самерљива са AB. А то је требало доказати.[35]

30.

Наћи две, само у степену самерљиве, такве рационалне дужи да квадрат на већој буде већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са већом.

Узмимо неку рационалну дуж АВ и два таква квадратна броја, ГЕ и ГΔ, да њихов збир ГΔ не буде квадрат; и нацртајмо на АВ полукруг АZВ. Па начинимо тако да буде ΔГ према ГЕ као квадрат на ВА према квадрату на АZ и спојмо Z са В.



Слично претходном доказује се да су ВА и АZ рационалне и самерљиве само у степену. И пошто је ΔГ према ГЕ као квадрат на ВА према квадрату на АZ, биће после замене једног дела другим ГΔ према ΔЕ као квадрат на АВ према квадрату на ВZ. Но ГΔ према ΔЕ није у размери као квадратни број према квадратном броју. Значи ни квадрат на АВ према квадрату на ВZ није у размери као квадратни број према квадратном броју. На овај начин АВ је несамерљиво по дужини са ВZ. И према томе квадрат на АВ је већи од квадрата на АZ за квадрат на дужи ZВ несамерљивој са АВ.

На овај начин су АВ и АZ рационалне дужи, самерљиве само у степену, и квадрат на АВ је већи од квадрата на АZ за квадрат на дужи ZВ, која је несамерљива са АВ. А то је требало доказати[36].

31.

Наћи две, само у степену самерљиве, медијале тако да буду стране рационалног правоугаоника и да квадрат на већој буде већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи самерљивој са већом.

Узмимо две рационалне дужи А и В, самерљиве само у степену, тако да квадрат на већој А буде већи од квадрата на мањој В за квадрат на дужи, која је самерљива по дужини са већом. И нека је правоугаоник са странама А и В једнак квадрату на Г. Но правоугаоник коме су стране А и В је медијалан, те значи медијалан и квадрат на Г, а сама дуж Г је медијала. Нека је, даље, квадрат на В једнак правоугаонику са странама Г и Δ. Али квадрат на В је рационалан, значи и правоугаоник са странама Г и Δ рационалан. И пошто је А према В као правоугаоник са странама А и В према квадрату на В, а правоугаоник са странама А и В једнак квадрату на Г, усто квадрат на В једнак је правоугаонику са странама Г и Δ, биће А према В као квадрат на Г према правоугаонику са странама Г и Δ. Но квадрат на Г је према правоугаонику са станама Г и Δ као Г према Δ. И на овај начин А је према В као Г према Δ. Но А је самерљиво са В само у степену, па је према томе и Г самерљиво са Δ само у степену. И Г је медијала, значи и Δ је медијала. И пошто је А према В као Г према Δ, и квадрат на А је већи од квадрата на В за квадрат дужи која је самерљива са А, биће и квадрат на Г већи од квадрата на Δ за квадрат дужи која је самерљива са Г.

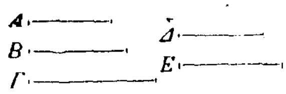
На овај начин су нађене две медијале Г и Δ, самерљиве само у степену, које су стране рационалног правоугаоника и квадрат на Г је већи од квадрата на Δ за квадрат на дужи самерљивој по дужини са Г.

Слично се доказује и за дуж несамерљиву са Г, ако је квадрат на А већи од квадрата на В за квадрат на дужи несамерљивој са А.[37]

32.

Наћи две медијале самерљиве само у степену тако да буду стране медијалног правоугаоника и да квадрат на већој буде већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи самерљивој са већом.

Узмимо три рационалне дужи А, В, Г самерљиве само у степену и то такве да је квадрат на А већи од квадрата на Г за квадрат на дужи самерљивој са А. И нека је правоугаоник са странама А и В једнак квадрату на Δ. Према томе је квадрат на Δ медијалан, а сама дуж Δ је медијала. Нека је правоугаоник са странама В и Г једнак правоугаонику са странама Δ и Е. И пошто је правоугаоник са странама А и В према правоугаонику са странама В и Г као А према Г, а правоугаоник са странама А и В једнак је квадрату на Δ, сем тога правоугаоник са странама В и Г једнак је правоугаонику са странама Δ и Е, биће А према Г као квадрат на Δ према правоугаонику са странама Δ и Е. Но квадрат на Δ према правоугаонику са странама Δ и Е је као Δ према Е. И на овај начин је А према Г као Δ према Е. Али А је самерљиво са Г само у степену, те значи и Δ је самерљиво са Е само у степену. И Δ је медијала, те је према томе и Е медијала. И пошто је А према Г као Δ према Е, а квадрат на А је већи од квадрата на Г за квадрат на дужи самерљивој са А, биће и квадрат на Δ већи од квадрата на Е за квадрат на дужи самерљивој са Δ. И тврдим, да је правоугаоник обухваћен дужима Δ и Е медијалан. Заиста, пошто је правоугаоник коме су стране В и Г једнак правоугаонику са странама Δ и Е, а правоугаоник са странама В и Г медијалан [јер су В и Г рационалне и самерљиве само у степену], биће и правоугаоник са странама Δ и Е медијалан.



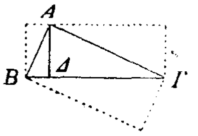
На овај начин су нађене две медијале Δ и Е, самерљиве само у степену, које су стране медијалног правоугаоника и квадрат на већој је већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи самерљивој са Δ.

Слично се затим доказује и за несамерљиву дуж, ако је квадрат на А већи од квадрата на Г за квадрат на дужи несамерљивој са А.[88]

Лема

Нека је АВГ правоугли троугао са правим углом А и нека је АΔ нормала. Тврдим, да је правоугаоник са странама ГВ и ВΔ једнак квадрату на ВА, правоугаоник са странама

ВГ и ГΔ једнак квадрату на ГА, и правоугаоник са странама ВΔ и ΔГ једнак квадрату на АΔ, и још правоугаоник са странама ВГ и АΔ једнак је правоугаонику са странама ВА и АГ.



Прво, правоугаоник са странама ГВ и ВΔ једнак је квадрату на ВА.

Заиста, пошто је АΔ повучено у правоуглом троуглу из правог угла нормално на основу, биће троуглови АВΔ и АΔГ слични и целом троуглу АВГ и међу собом. И како је троугао АВГ сличан троуглу АВΔ, биће ГВ према ВА као ВА према ВΔ. Према томе је правоугаоник са странама ГВ и ВΔ једнак квадрату на АВ.

Из истих разлога је и правоугаоник са странама ВГ и ГΔ једнак квадрату на АГ.

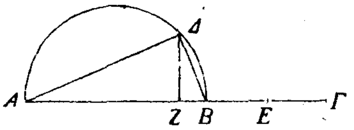
И пошто је у правоуглом троуглу из правог угла спуштена нормала на основу средња пропорционала отсечака основе, биће ВΔ према ΔА као АΔ према ΔГ. Па је на тај начин правоугаоник коме су стране ВΔ и ΔГ једнак квадрату на ΔА.

Тврдим још и да је правоугаоник са странама ВГ и АΔ једнак правоугаонику са странама ВА и АГ. Заиста, пошто је, како смо навели, троугао АВГ сличан троуглу АВΔ, биће ВГ према ГА као ВА према АΔ [а ако су четири дужи пропорционалне, правоугаоник на средњима је једнак правоугаонику на крајњима]. На овај начин је правоугаоник од ВГ и АΔ једнак правоугаонику од ВА и АГ. А то је требало доказати.[89]

33.

Наћи такве две дужи, несамерљиве у степену, да површина састављена од квадратâ на њима буде рационална, а правоугаоник обухваћен тим дужима медијалан.

Узмимо две рационалне дужи АВ и ВГ, самерљиве само у степену, и то такве да је квадрат на већој АВ већи од квадрата на мањој ВГ за квадрат на дужи несамерљивој са већом, преполовимо ВГ тачком Δ, и конструишимо на АВ паралелограм, једнак квадрату на



свакој од BΔ и ΔГ, тако да њихова допуна буде у облику квадрата; нека то буде правоугаоник са странама AE и EB, нацртајмо на AB полукруг AZB и повуцимо EZ нормално на AB и спојимо Z са A и са B.

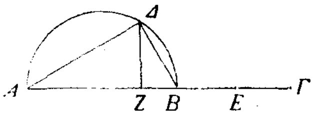
Пошто су AB и BГ две неједнаке дужи и квадрат на AB је већи од квадрата на BГ за квадрат на дужи несамерљивој са AB, и на AB је конструисан паралелограм са допуном у облику квадрата, једнак четвртини квадрата на BГ, тј. једнак квадрату на половини BГ, и то је правоугаоник са странама AE и EB, — биће AE несамерљиво са EB. И како је AE према EB као правоугаоник са странама BA и AE према правоугаонику са странама AB и BE, а правоугаоник са странама BA и AE једнак је квадрату на AZ, и правоугаоник са странама AB и BE једнак је квадрату на BZ, биће квадрат на AZ несамерљив са квадратом на ZB, а AZ и ZB су несамерљиве у степену. И пошто је дуж AB рационална, биће рационалан и квадрат на дужи AB. Па према томе је рационалан и збир квадрата на AZ и на ZB. И пошто је, даље, правоугаоник са странама AE и EB једнак квадрату на EZ а, према претпоставци, тај правоугаоник једнак је и квадрату на BΔ, биће према томе ZE једнако BΔ. Значи BГ је двострука дуж ZE. Према томе биће правоугаоник са странама AB и BГ самерљив са правоугаоником са странама AB и EZ. Но правоугаоник са странама AB и BГ је медијалан, па ће бити медијалан и правоугаоник са странама AB и EZ. Али правоугаоник са странама AB и EZ једнак је правоугаонику са странама AZ и ZB. А доказано је да је рационална и површина од квадрата на њима.

На овај начин су нађене ове дужи, AZ и ZB, такве да површина састављена од квадратâ на њима буде рационална, а правоугаоник обухваћен тим дужима медијалан. А то је требало доказати.[40]

34.

Наћи две дужи, несамерљиве у степену, такве да површина састављена од квадратâ на њима буде медијална, а правоугаоник обухваћен тим дужима рационалан.

Узмимо две медијале AB и BΓ, самерљиве само у степену, и то такве да обухватају рационалан правоугаоник и да је квадрат на AB већи од квадрата на BΓ за квадрат на дужи несамерљивој са AB, нацртајмо на AB полукруг AΔB, преполовимо BΓ тачком E и конструишимо на AB паралелограм једнак квадрату на BE са допуном у облику квадрата, наиме паралелограм са странама AZ и ZB. Тада је AZ несамерљиво по дужини са ZB. Повуцимо из Z нормалу ZΔ према AB и спојмо Δ са A и са B.



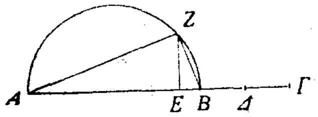
Пошто је AZ несамерљиво са BZ, биће и правоугаоник са странама BA и AZ несамерљив са правоугаоником коме су стране AB, BZ. Но правоугаоник са странама BA и AZ једнак је квадрату на AΔ, а правоугаоник са странама AB и BZ једнак је квадрату на AB, па је, услед тога, квадрат на AΔ несамерљив са квадратом на ΔB. И пошто је квадрат на AB медијалан, биће медијалан и збир квадрата на AΔ и на ΔB. И пошто је BΓ удвостручено ΔZ, биће правоугаоник са странама AB и BΓ двапут већи од правоугаоника са странама AB и ZΔ. Но правоугаоник са странама AB и BΓ је рационалан, значи и правоугаоник са странама AB и ZΔ рационалан. А како је правоугаоник са странама AB и ZΔ једнак правоугаонику са странама AΔ и ΔB, биће и правоугаоник са странама AΔ и ΔB рационалан.

На овај начин су нађене две такве дужи AΔ и ΔB, несамерљиве у степену, да је површина састављена од квадрата на њима медијална, а правоугаоник обухваћен тим дужима рационалан. А то је требало доказати.[41]

35.

Наћи две дужи, несамерљиве у степену, такве да површина састављена од квадрата на њима буде медијална и правоугаоник обухваћен тим дужима медијалан и, при томе, несамерљив са површином састављеном од квадрата на њима.

Узмимо две медијале АВ и ВГ, самерљиве само у степену и то тако да обухватају медијалан правоугаоник и да квадрат на АВ буде већи од квадрата на ВГ за квадрат на дужи несамерљивој са АВ, нацртајмо на АВ полукруг АΔВ и учинимо и све остало као у претходном случају.



Пошто је АZ несамерљиво по дужини са ZВ, биће АΔ несамерљиво са ΔВ у степену. И пошто је квадрат на АВ медијалан, биће медијалан и збир квадрата на АΔ и на ΔВ. И пошто је правоугаоник са странама АZ и ZВ једнак квадрату на свакој од дужи ВЕ и ΔЕ, биће ВЕ једнако ΔZ; значи ВГ је удвостручена дуж ZΔ, а правоугаоник са странама АВ и ВГ двапут већи од правоугаоника са странама АВ и ZΔ. Но правоугаоник са странама АВ и ВГ је медијалан, па је, према томе, и правоугаоник са странама АВ и ZΔ медијалан. Али он је једнак правоугаонику са странама АΔ и ΔВ, па, према томе, медијалан је и правоугаоник са странама АΔ и ΔВ. И пошто је АВ несамерљиво по дужини са ВГ, а ВГ је самерљиво са ВЕ, биће АВ несамерљиво по дужини са ВЕ. На тај начин и квадрат на АВ несамерљив је са правоугаоником са странама АВ и ВЕ. Но квадрат на АВ једнак је збиру квадрата на АΔ и на ZΔ, тј. правоугаонику са странама АΔ и ΔВ. На овај начин је несамерљива површина збира квадрата на АΔ и на ΔВ са површином правоугаоника са странама АΔ и ΔВ.

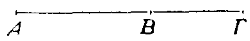
На овај начин су нађене дужи АΔ и ΔВ, несамерљиве у степену, такве да површина састављена од квадрата на њима буде медијална, правоугаоник обухваћен тим дужима буде медијалан и, при томе, несамерљив са површином састављеном од квадрата на њима.[42]

36.

Ако се саберу две рационалне дужи, самерљиве само у степену, биће цела дуж ирационална: нека се зове биномијала.

Саберимо две рационалне дужи АВ и ВГ самерљиве само у степену. Тврдим да је цела дуж АГ ирационална.

Заиста, пошто је АВ несамерљива са ВГ по дужини, јер су оне самерљиве само у степену, биће АВ према ВГ као правоугаоник са странама АВ и ВГ према квадрату на ВГ, па је, према томе, правоугаоник несамерљив са квадратом на ВГ. Но са правоугаоником са странама АВ и ВГ је самерљив двоструки правоугаоник са странама АВ и ВГ, а са квадратом на ВГ самерљиви су квадрати на АВ и на ВГ заједно, јер су АВ и ВГ рационалне дужи самерљиве само у степену. Према томе је двоструки правоугаоник са странама АВ и ВГ несамерљив са квадратима на АВ и на ВГ. И, после састављања, двоструки правоугаоник са странама АВ и ВГ са збиром квадрата на АВ и на ВГ, тј. квадрат на АГ је несамерљив са површином састављеном од квадрата на АВ и на ВГ. Но површина састављена од квадрата на АВ и на ВГ је рационална, те је према томе квадрат на АГ ирационалан; значи и дуж АГ је ирационална. Нека се она зове биномијала. А то је требало доказати[43].



37.

Ако се саберу две дужи-медијале, самерљиве само у степену, које обухватају рационалан правоугаоник, биће цела дуж ирационална. Нека се она зове прва бимедијала.

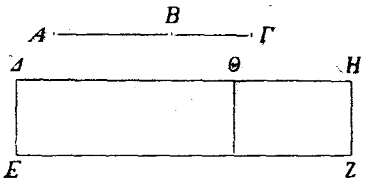
Саберимо две медијале АВ и ВГ, самерљиве само у степену, које обухватају рационалан правоугаоник. Тврдим да је цела дуж АГ ирационална.

Заиста, пошто је АВ несамерљива са ВГ по дужини биће и збир квадрата на АВ и ВГ несамерљив са удвостручeним правоугаоником са странама АВ и ВГ. И после састављања квадрата на АВ и на ВГ са удвостручeним правоугаоником са странама АВ и ВГ, а то је баш квадрат на АГ, биће тај квадрат несамерљив са правоугаоником са странама АВ и ВГ. Но правоугаоник са странама АВ и ВГ је рационалан, јер се претпоставља да АВ и ВГ обухватају рационалан правоугаоник. Значи квадрат на АГ је ирационалан, те је, према томе, и дуж АГ ирационална. Нека се она зове прва бимедијала. А то је требало доказати.[44]

38.

Ако се саберу две дужи-медијале, самерљиве само у степену, које обухватају медијалан правоугаоник, биће цела дуж ирационална. Нека се зове *друга бимедијала*.

Саберимо две медијале АВ и ВГ, самерљиве само у степену, које обухватају медијалан правоугаоник. Тврдим да је дуж АГ ирационална.



Заиста, узмимо рационалну дуж ΔЕ и конструишимо на ΔЕ правоугаоник ΔZ ширине ΔН једнак квадрату на АГ. Пошто је квадрат на АГ једнак збиру квадрата на АВ и на ВГ са удвострученим правоугаоником коме су стране АВ и ВГ, конструишимо на ΔЕ правоугаоник ЕΘ једнак збиру квадрата на АВ и на ВГ. Остатак ΘZ биће једнак удвострученом правоугаонику са странама АВ и ВГ. И пошто је свака од АВ и ВГ медијала, биће медијални и квадрати на АВ и на ВГ. А по претпоставци је медијалан и удвостручени правоугаоник са странама АВ и ВГ. Но збир квадрата на АВ и на ВГ једнак је правоугаонику ЕΘ, а удвостручени правоугаоник са странама АВ и ВГ једнак правоугаонику ZΘ. Према томе је сваки од правоугаоника ЕΘ и ΘZ медијалан. А конструисани су на рационалној дужи ΔЕ. Значи свака од дужи ΔΘ и ΘН рационална је и несамерљива по дужини са ΔЕ. Пошто је сад АВ несамерљиво по дужини са ВГ и АВ је према ВГ као квадрат на АВ према правоугаонику са странама АВ и ВГ, биће квадрат на АВ несамерљив са правоугаоником са странама АВ и ВГ. Али са квадратом на АВ је самерљива површина састављена од квадрата на АВ и на ВГ, а са правоугаоником са странама АВ и ВГ самерљив је удвостручени правоугаоник са странама АВ и ВГ. Према томе је површина састављена од квадрата на АВ и на ВГ несамерљива са удвострученим правоугаоником коме су стране АВ и ВГ. Но збир квадрата на АВ и на ВГ једнак је правоугаонику ЕΘ, а двоструки правоугаоник са странама АВ и

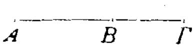
ВГ једнак је правоугаонику ΘZ. На овај начин је ЕΘ правоугаоник несамерљив са ΘZ, те је, према томе, дуж ΔΘ несамерљива са ΘН по дужини. Дакле, ΔΘ и ΘН су рационалне дужи самерљиве само у степену. Стога је ΔН ирационална дуж. Али ΔЕ је рационална дуж. Но правоугаоник обухваћен са рационалном и ирационалном дужи је ирационалан. Према томе је и површина ΔZ ирационална, а ирационална је и страна њој једнаког квадрата. Но страна квадрата једнаког површини ΔЗ је АГ, па је према томе ирационална и дуж АГ. Нека се она зове друга бимедијала.[45]

39.

Ако се саберу две дужи, несамерљиве у степену, за које је збир квадрата на њима рационалан, а правоугаоник обухваћен њима медијалан, биће цела дуж ирационална. Нека се она зове већа.

Саберимо две дужи АВ и ВГ, несамерљиве у степену, под наведеним условима. Тврдим да је дуж АГ ирационална.

Заиста, пошто је правоугаоник са странама АВ и ВГ медијалан, биће и двоструки правоугаоник са странама АВ и ВГ медијалан. Но збир квадрата на АВ и на ВГ је рационалан. Значи удвостручени правоугаоник коме су стране АВ и ВГ је несамерљив са збиром квадрата на АВ и на ВГ. Према томе је и збир квадрата на АВ и на ВГ заједно са удвостученим правоугаником коме су стране АВ и ВГ, а то је квадрат на АГ, несамерљив са збиром квадрата на АВ и на ВГ, [а збир квадрата на АВ и на ВГ је рационалан]. На овај начин је квадрат на АГ ирационалан, те је, према томе, ирационална и дуж АГ. Нека се она зове „већа“.[46]



40.

Ако се саберу две дужи, несамерљиве у степену, за које је збир квадрата на њима медијалан, а правоугаоник обухваћен њима рационалан, биће цела дуж ирационална. Нека се она зове „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“.

Нека се саберу две дужи АВ и ВГ, несамерљиве у степену, под наведеним условима. Тврдим да је дуж АГ ирационална.

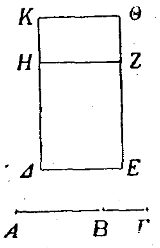
Заиста, пошто је површина састављена од квадрата на АВ и на ВГ медијална, а удвостручен правоугаоник са странама АВ и ВГ је рационалан, биће збир квадрата на АВ и на ВГ несамерљив са удвострученим правоугаоником са странама АВ и ВГ. Па ће и квадрат на АГ бити несамерљив са удвострученим правоугаоником коме су стране АВ и ВГ. Но удвостручени правоугаоник са странама АВ и ВГ је рационалан, па је квадрат на АГ ирационалан. Дакле, и дуж АГ је ирационална. Нека се она зове „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“. А то је требало доказати.[47]

41.

Ако се саберу две дужи, несамерљиве у степену, за које је збир квадрата на њима медијалан и правоугаоник обухваћен њима медијалан, и при томе је правоугаоник несамерљив са збиром квадрата, биће цела дуж ирационална. Нека се она зове „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“.

Саберимо две дужи АВ и ВГ, несамерљиве у степену, под наведеним условима. Тврдим да је дуж АГ ирационална.

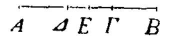
Заиста, узмимо рационалну дуж ΔЕ и конструишимо на ΔЕ правоугаоник ΔZ, једнак збиру квадрата на АВ и на ВГ, и правоугаоник НΘ једнак удвостручeном правоугаонику са странама АВ и ВГ. Цео правоугаоник ΔΘ је тада једнак квадрату на АГ. Пошто је површина једнака збиру квадрата на АВ и на ВГ медијална и једнака правоугаонику ΔZ, биће, према томе, и правоугаоник ΔZ медијалан. А он је конструисан на рационалној дужи ΔЕ, те је, према томе, рационална и дуж ΔН и несамерљива по дужини са ΔЕ. Из истих разлога је рационална и дуж НК и несамерљива по дужини са



HZ, тј. са ΔЕ. А пошто је збир квадрата на АВ и на ВГ несамерљив са удвострученим правоугаоником коме су стране АВ и ВГ, биће несамерљив и правоугаоник ΔZ са правоугаоником НΘ. Према томе је несамерљива и дуж ΔН са НК. Но оне су рационалне. Према томе су ΔН и НК рационалне и самерљиве само у степену. На овај начин је ΔК ирационална и такозвана биномијала. Но ΔЕ је рационална, па је, према томе, ΔΘ ирационалан правоугаоник и страна једнаког му квадрата такође ирационална. Али страна квадрата једнаког правоугаонику ΘΔ је дуж АГ. Према томе је ирационална и дуж АГ. Нека се зове „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине". А то је требало доказати.[48]

Лема

Да се наведене ирационалне дужи само на један начин деле на дужи, од којих се, као од сабирака, образују изнесени типови ирационалности, доказаћемо после ове мале леме.



Узмимо дуж АВ и поделимо је на неједнаке делове тачкама Г и Δ, претпостављајући да је АГ веће од ΔВ. Тврдим да је збир квадрата на АГ и на ГВ већи од збира квадрата на АΔ и на ΔВ.

Заиста, преполовимо АВ тачком Е. Пошто је АГ веће од ΔВ, биће, после одузимања заједничког дела ΔГ, остатак АΔ већи од остатка ГВ. Но АЕ једнако је ЕВ, па је према ΔЕ мање од ЕГ. И на тај начин тачке Г и Δ нису подједнако удаљене од средине Е. И пошто је правоугаоник са странама АГ и ГВ заједно са квадратом на ЕГ једнак квадрату аа ЕВ, а и правоугаоник са странама АΔ и ΔВ заједно са квадратом на ΔЕ једнак квадрату на ЕВ, биће правоугаоник са странама АГ и ГВ заједно са квадратом на ЕГ једнак правоугаонику са странама АΔ и ΔВ заједно са квадратом на ΔЕ. Од ових је квадрат на ΔЕ мањи од квадрата на ЕГ. Према томе је и остатак, правоугаоник са странама АГ и ГВ, мањи од правоугаоника са странама АΔ и ΔВ. А и удвостручени правоугаоник са странама АГ и ГВ мањи је од удвостученог правоугаоника са странама АΔ и ΔВ. И на тај начин остатак, збир квадрата на АГ и на ГВ, биће већи од збира квадрата на АΔ и на ΔВ. А то је требало доказати.[49]

42.

Биномијала се дели на своје делове само једном тачком.[50]

Нека се биномијала АВ дели тачком Г на своје делове, при чему су АГ и ГВ две рационалне дужи самерљиве само у степену. Тврдим да се АВ не дели никаквом другом тачком на рационалне делове самерљиве само у степену.

Заиста, ако је то могуће, нека се дели и тачком Δ и то тако да АΔ и ΔВ буду рационалне дужи самерљиве само у степену. Јасно је да АГ неће бити иста дуж као што је ΔВ. Заиста, ако је то могуће, нека буде иста. Тада је и АΔ иста дуж што је и АВ. И АГ је према ГВ као ВΔ према ΔА, те је, према томе, АВ подељено тачком Г на исти начин као и тачком Δ, а то се не претпоставља. Значи, АГ није исто што је ΔВ. Због тога тачке Г и Δ неће бити подједнако удаљене од средине. На овај начин се оним чиме се разликује збир квадрата на АГ и на ГВ од збира квадрата на АΔ и на ΔВ, тиме разликује и удвостручени правоугаоник са странама АΔ и ΔВ од удвостученог правоугаоника са странама АГ и ГВ, и то из разлога што је збир квадрата на АГ и на ГВ заједно са двоструким правоугаоником са странама АГ и ГВ и збир квадрата на АΔ и ΔВ заједно са двоструким правоугаоником коме су стране АΔ и ΔВ једнак квадрату на АВ. Но збир квадрата на АГ и на ГВ се разликује од збира квадрата на АΔ и на ΔВ за рационалну величину, јер су оба збира рационална. И двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ се разликује од двоструког правоугаоника са странама АГ и ГВ за рационалну величину, но они су оба медијални. А то је бесмислено, јер медијална величина није већа од медијалне величине за рационалну величину.

На овај начин се биномијала не дели једном и другом тачком на своје делове. Према томе она се дели само једном тачком. А то је требало доказати.[51]

43.

Прва бимедијала се дели само једном тачком.

Нека је АВ прва бимедијала, подељена тачком Г тако да АГ и ГВ буду медијале самерљиве само у степену и да обухватају рационалан правоугаоник. Тврдим да се АВ не дели другом тачком.

Заиста, ако је то могуће, нека се дели и тачком Δ и то тако да су АΔ и ΔВ медијале самерљиве само у степену и обухватају рационалан правоугаоник.

Пошто се сад, оним чиме се разликује двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ од двоструког правоугаоника са странама АΓ и ΓВ, тиме разликује и збир квадрата на АΓ и на ΓВ од збира квадрата на АΔ и на ΔВ, док се двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ разликује од двоструког правоугаоника на странама АΓ и ΓВ за рационалну величину, јер су оба рационална. Према томе се разликује за рационалну величину и збир квадрата на АΓ и на ΓВ од збира квадрата на АΔ и на ΔВ, а они су оба медијални. А то је бесмислено.

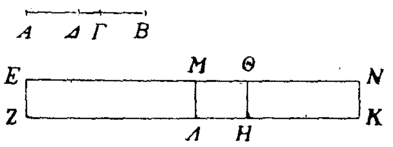
На овај начин прва бимедијала се не дели и једном и другом тачком на своје делове. Према томе она се дели само једном тачком. А то је требало доказати.[52]

44.

Друга бимедијала се дели само једном тачком.

Нека је АВ друга бимедијала, подељена тачком Γ тако да АΓ и ΓВ буду медијале самерљиве само у степену и да обухватају медијалан правоугаоник. При томе је јасно да Γ није средина, јер делови нису самерљиви по дужини. Тврдим да се АВ не дели другом тачком.

Заиста, ако је то могуће, нека се дели и другом тачком Δ и то тако да АΓ није исто што и ΔВ и да је АΓ, по претпоставци, веће. Очевидно је, како смо раније доказали, да је збир квадрата на АΔ и на ΔВ мањи од збира квадрата на АΓ и на ΓВ, и да су АΔ и ΔВ медијале, самерљиве само у степену, које обухватају медијалан правоугаоник. Узмимо рационалну дуж EZ и конструишимо на EZ правоугли паралелограм EK једнак квадрату на АВ, и одузмимо правоуга-



оник ЕН једнак збиру квадрата на АГ и на ГВ. Тада је остатак ΘК једнак двоструком правоугаонику са странама АГ и ГВ. Затим одузмимо правоугаоник ЕΛ једнак збиру квадрата на АΔ и на ΔВ, који је, како смо доказали, мањи од збира квадрата на АГ и ГВ. Тада је и остатак МК једнак двоструком правоугаонику са странама АΔ и ΔВ. И пошто су квадрати на АГ и на ГВ медијални, биће медијалан и правоугаоник ЕН. И он се конструише на рационалној дужи ЕZ, значи да је рационална и дуж ЕΘ и несамерљива по дужини са ЕZ. Из истих разлога је и дуж ΘN рационална и несамерљива по дужини са ЕZ. И пошто су АГ и ГВ медијале, самерљиве само по дужини, биће АГ несамерљиво по дужини са ГВ. Но АГ је према ГВ као квадрат на АГ према правоугаонику са странама АГ и ГВ. Па према томе је квадрат на АГ несамерљив са правоугаоником коме су стране АГ и ГВ. Значи квадрат на АГ је самерљив са збиром квадрата на АГ и на ГВ, јер су АГ и ГВ самерљиве у степену. Но двоструки правоугаоник са странама АГ и ГВ је самерљив са правоугаоником коме су стране АГ и ГВ. Према томе је збир квадрата на АГ и на ГВ несамерљив са двоструким правоугаоником коме су стране АГ и ГВ. Но збир квадрата на АГ и на ГВ једнак је правоугаонику ЕН, а двоструком правоугаонику са странама АГ и ГВ једнак је правоугаоник ΘК. Према томе је ЕН несамерљиво са ΘК, па и ЕΘ несамерљиво по дужини са ΘN. А оне су рационалне. На овај начин су ЕΘ и ΘN рационалне дужи самерљиве само у степену. Али, ако се саберу две рационалне дужи самерљиве само у степену, биће целина (збир) ирационална, такозвана биномијала. Према томе је ЕN биномијала која се дели тачком Θ. На исти начин се доказује да су и ЕМ, МN рационалне дужи самерљиве само у степену. И ЕN је биномијала, која се дели и у једној и у другој тачки, наиме у Θ и у М, а при томе ЕΘ није исто што је МN, пошто је збир квадрата на АГ и на ГВ већи од збира квадрата на АΔ и на ΔВ. Но збир квадрата на АΔ и на ΔВ је већи од двоструког правоугаоника са странама АΔ и ΔВ. У толико пре је и збир квадрата на АГ и на ГВ, тј. правоугаоник ЕН, већи од двоструког правоугаоника са странама АΔ и ΔВ, тј. правоугаоника МК. Значи ЕΘ је већи од МN.

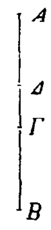
И према томе ЕΘ неће бити исто што и MN. А то је требало доказати.[53]

45.

„Већа" се дели само једном тачком.

Нека је АВ „већа" ирационалност, подељена тачком Г тако да АГ и ВГ буду дужи несамерљиве у степену и да је збир квадрата на АГ и на ГВ рационалан, а правоугаоник са странама АГ и ГВ медијалан. Тврдим да се АВ не дели другом тачком.

Заиста, ако је то могуће, нека се дели и другом тачком Δ и то тако да су АΔ и ΔВ несамерљиве у степену и да је збир квадрата на АΔ и ΔВ рационалан, а правоугаоник са странама АΔ и ΔВ медијалан. И чиме се разликује збир квадрата на АГ и на ГВ од збира квадрата на АΔ и на ΔВ, тиме се разликује и двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ од двоструког правоугаоника са странама АВ и ГВ. А како је збир квадрата на АГ и на ГВ већи од збира квадрата на АΔ и ΔВ за рационалну величину, јер су оба збира рационална, биће и двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ већи од двоструког правоугаоника са странама АГ и ГВ за рационалну величину, а они су медијални. А то је немогуће. На овај начин „већа" ирационалност се не дели и једном и другом тачком на своје делове. Према томе она се дели само једном тачком. А то је требало доказати.[54]

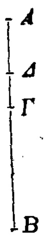


46.

„Страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине" дели се само једном тачком.

Нека је АВ „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине", коју тачка Г дели тако да АГ и ГВ буду дужи несамерљиве у степену и да је збир квадрата на АГ и на ГВ медијалан, а правоугаоник са странама АГ и ГВ рационалан. Тврдим да се АВ не дели другом тачком.

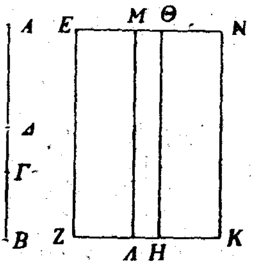
Заиста, ако је то могуће, нека се дели и тачком Δ и то тако да су дужи АΔ и ΔВ несамерљиве у степену и да је збир квадрата на АΔ и на ΔВ медијалан, а двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ рационалан. Како се сад оним, чиме се разликује двоструки правоугаоник са странама АГ и ГВ од двоструког правоугаоника са странама АΔ и ΔВ, тиме разликује и збир квадрата на АΔ и на ΔВ од збира квадрата на АГ и на ВГ, а двоструки правоугаоник са странама АГ и ГВ је већи од двоструког правоугаоника са странама АΔ и ΔВ за рационалну величину, биће и збир квадрата на АΔ и на ΔВ већи од збира квадрата на АГ и на ГВ за рационалну величину, а они су медијални. А то је немогуће. На овај начин се „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“ не дели једном и другом тачком. Према томе она се дели само једном тачком. А то је требало доказати.[55]



47.

„Страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“ дели се само једном тачком.

Нека је АВ „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“, која се дели тачком Г тако да су АГ и ГВ несамерљиве у степену и да је збир квадрата на АГ и на ГВ медијалан и правоугаоник са странама АГ и ГВ медијалан и несамерљив са збиром квадрата на њима. Тврдим да се АВ не дели другом тачком под наведеним условима.



Заиста, ако је то могуће, нека се дели и тачком Δ и то тако, разуме се, да дуж АГ не буде једнака са ΔВ, већ претпостављамо да АГ буде већа. Узмимо рационалну дуж EZ и конструишимо на EZ правоугаоник EH једнак збиру квадрата на АГ и на ГВ. Тада је цео правоугаоник ЕК једнак квадрату на АВ. Затим конструишимо на EZ правоугаоник EΛ једнак збиру квадрата на АΔ и на ΔВ. Тада је двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ, као остатак, једнак остатку, правоугаонику МК. И пошто се претпоставља да је збир квадрата на АГ и на ГВ медијалан, биће медијалан и правоугаоник ЕН. А он је конструисан на рационалној дужи EZ. Биће према томе рационална и дуж ΘЕ и несамерљива по дужини са EZ. Из истих разлога је рационална и дуж ΘN и несамерљива по дужини са EZ. И пошто је збир квадрата на АГ и на ГВ несамерљив са двоструким правоугаоником коме су стране АГ и ГВ, биће и правоугаоник EH несамерљив са правоугаоником HN. Па према томе је и дуж EΘ несамерљива са дужи ΘN. А оне су рационалне. На овај начин су дужи EΘ и ΘN рационалне и самерљиве само у степену. Значи EN је биномијала, која се дели тачком Θ. На сличан начин се доказује да се она дели и тачком M. А при томе EΘ није исто што и MN. На овај начин се биномијала дели и једном и другом тачком. А то је бесмислено. Према томе се „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“ не дели и једном и другом тачком. На овај начин она се дели само једном тачком.[56]

Друге дефиниције

1. Дата је рационална дуж и биномијала подељена на два дела тако да је квадрат на већем делу већи од квадрата на мањем за квадрат на дужи која је самерљива по дужини са већим делом. Ако је тај већи део самерљив по дужини са датом рационалном дужи, цела дуж се зове прва биномијала.

2. Ако је мањи део самерљив по дужини са датом рационалном дужи, нека се зове друга биномијала.

3. Ако ниједан део није самерљив по дужини са датом рационалном дужи, нека се зове трећа биномијали.

4. Затим, ако квадрат на већем делу буде већи од квадрата на мањем за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са већим делом, тада се, ако је већи део самерљив по дужини са датом рационалном дужи, цела дуж зове четврта биномијала.

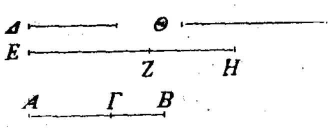
5. А ако је мањи део — пета биномијала.

6. А ако није ниједан — шеста биномијала.[57]

48.

Наћи прву биномијалу.

Узмимо два броја АГ и ГВ и то тако да је размера њиховог збира АВ према ВГ као квадратног броја према квадратном броју, а да размера према ГА није као квадратног броја према квадратном броју, и узмемо неку дуж Δ за рационалну и нека је EZ самерљиво по дужини са Δ. На тај начин и EZ је рационално. И урадимо тако да се број ВА односи према броју АГ као квадрат на EZ према квадрату на ZH. Како је размера АВ према АГ размера броја према броју, биће и размера квадрата на EZ према квадрату на ZH размера броја према броју. Према томе ја квадрат на EZ самерљив са квадратом на ZH. А како је EZ рационално, биће рационално и ZH. И пошто ВА не стоји према АГ у размери квадратног броја према квадратном броју, неће бити ни квадрат на EZ према квадрату на ZH у размери квадратног броја према квадратном броју. Значи EZ је несамерљиво по дужини са ZH. На овај начин EZ и ZH су рационалне, али самерљиве само у степену. Значи EH је биномијала.



Тврдим да је прва.

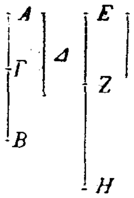
Заиста, пошто је број ВА према АГ као квадрат на EZ према квадрату на ZH, а ВА је веће од АГ, биће и квадрат на EZ већи од квадрата на ZH. Нека сад квадрат на EZ буде једнак збиру квадрата на ZH и на Θ. И пошто је ВА према АГ као квадрат на EZ према квадрату на ZH, биће после пермутовања АВ према ВГ као квадрат на EZ према квадрату на Θ. Али АВ је у размери према В као квадратни број према квадратном броју. Према томе и квадрат на EZ стоји у размери према Θ као квадратни број према квадратном броју. На овај начин EZ је самерљиво по дужини са Θ. И према томе је квадрат на EZ већи од квадрата на ZH за квадрат на дужи која је самерљива са већим делом. Дужи EZ и ZH су рационалне и EZ је самерљиво по дужини са Δ

На овај начин EH је прва биномијала. А то је требало доказати.[58]

49.

Наћи другу биномијалу.

Узмимо два броја АГ и ГВ и то тако да је размера њиховог збира АВ према ВГ као квадратног броја према квадратном броју а да размера према АГ није као квадратном броју, и нека буде дата рационална дуж Δ и нека је EZ самерљиво по дужини са Δ. На овај начин и EZ је рационално. И урадимо тако да се број ГА односи према броју АВ као квадрат на EZ према квадрату на ZH. Тада је квадрат на EZ самерљив са квадратом на ZH. Значи и ZH је рационално. И пошто број ГА не стоји према броју АВ у размери квадратног броја према квадратном броју, неће бити ни квадрат на EZ према квадрату на ZH у размери квадратног броја према квадратном броју. Значи EZ је насамерљиво по дужини са ZH. На овај начин су дужи EZ и ZH рационалне, али самерљиве само у степену. Дакле, EH је биномијала.



Треба доказати да је друга.

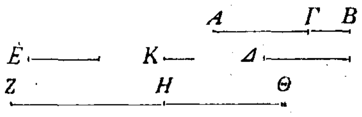
Заиста, пошто се, обрнуто, број ВА односи према броју АГ као квадрат на HZ према квадрату на ZE, а ВА је веће од АГ, биће и квадрат на HZ већи од квадрата на ZE. Нека сад квадрат на HZ буде једнак збиру квадрата на EZ и на Θ. На овај начин, после пермутовања, АВ је према ВГ као квадрат на ZH према квадрату на Θ. Али АВ је у размери према ВГ као квадратни број према квадратном броју. Према томе и квадрат на ZH стоји у размери према квадрату на Θ као квадратни број према квадратном броју. На овај начин ZH је самерљиво по дужини са Θ. И према томе је квадрат на ZH већи од квадрата на ZE за квадрат на дужи која је самерљива са већим делом. Дужи ZH и ZE су рационалне и самерљиве по дужини са Δ.

На овај начин EH је друга биномијала. А то је требало доказати.[59]

50.

Наћи трећу биномијалу.

Узмимо два броја АГ и ГВ и то тако да је размера њиховог збира АВ према ВГ као квадратног броја према квадратном броју, и да размера према АГ није као квадратног броја према квадратном броју и узмимо неки други, не квадратни, број Δ и нека се он не налази ни према једном од бројева ВА и АГ у размери као квадратни број према квадратном броју, и нека буде дата рационална дуж Δ и урадимо тако да је Δ према АВ као квадрат на Е према квадрату на ZН. На овај начин квадрат на Е је самерљив са квадратом на ZН. А Е је рационално, па према томе је рационално и ZН. И пошто Δ не стоји према броју АВ у размери квадратног броја према квадратном броју, неће бити ни квадрат на Е према квадрату на ZН у размери квадратног броја према квадратном броју. На овај начин Е је несамерљиво по дужини са ZН. Затим урадимо тако да је број ВА према броју АГ као квадрат на ZН према квадрату на НΘ. Тада је квадрат на ZН самерљив са квадратом на НΘ. А кад је ZН рационално, биће рационално и НΘ. И пошто ВА не стоји у размери према АГ као квадратни број према квадратном броју, неће бити ни квадрат на ZН према квадрату на ΘН у размери квадратног броја према квадратном броју. Значи ZН је несамерљиво по дужини са НΘ. На овај начин су ZН и НΘ рационалне, али самерљиве само у степену. Дакле, ZΘ је биномијала.



Тврдим да је трећа.

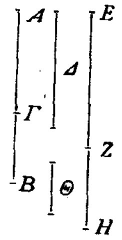
Заиста, пошто је Δ према АВ као квадрат на Е према квадрату на ZН, а ВА је према АГ као квадрат на ZН према квадрату на НΘ, биће, због једнакоудаљености, Δ према АГ као квадрат на Е према квадрату на НΘ. Али Δ према АГ није у размери квадратног броја према квадратном броју, па неће бити ни квадрат на Е према квадрату на НΘ у размери квадратног броја према квадратном броја. На овај начин Е је несамерљиво по дужини са НΘ. И пошто је ВА према АГ као квадрат на ZH према квадрату на HΘ, биће квадрат на ZH већи од квадрата на HΘ. Нека је сад квадрат на ZH једнак збиру квадрата на HΘ и на К. Значи, после пермутовања, АВ је према ВΓ као квадрат на ZH према квадрату на К. Али АВ је у размери према ВΓ као квадратни број према квадратном броју. Тада је и квадрат на ZH у размери према квадрату на К као квадратни број према квадратном броју. На овај начин ZH је несамерљиво по дужини са К. И према томе је квадрат на ZH већи од квадрата на HΘ за квадрат на дужи која је самерљива са већим делом. Дужи ZH и HΘ су рационалне самерљиве само у степену и ниједна од њих није самерљива по дужини са Е.

На овај начин, ZΘ је трећа биномијала. А то је требало доказати.[60]

51.

Наћи четврту биномијалу.

Узмимо два броја АΓ и ΓВ и то тако да размера АВ ни према ВΓ ни према АΓ није размера квадратног броја према квадратном броју, и нека буде дата рационална дуж Δ и нека је EZ самерљива по дужини са Δ. На тај начин је и EZ рационално. И урадимо тако да се број ВА тако односи према броју АΓ као квадрат на EZ према квадрату на ZH. Тада је квадрат на EZ самерљив са квадратом на ZH. Значи и ZH је рационално. И пошто број ВА не стоји према АΓ у размери квадратног броја према квадратном броју, неће бити ни квадрат на EZ према квадрату на ZH у размери квадратног броја према квадратном броју. И значи EZ је несамерљиво по дужини са ZH. На овај начин су EZ и ZH рационалне, али самерљиве само у степену. Значи EZ је биномијала.



Тврдим да је четврта.

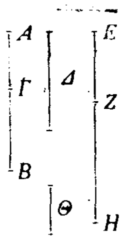
Заиста, пошто је ВА према АΓ као квадрат на EZ према квадрату на ZH (ВА је веће од АΓ), квадрат на EZ је већи од квадрата на ZH. Нека је сад квадрат на EZ једнак збиру квадрата на ZH и на Θ. На овај начин после пермутовања, број АВ је према ВΓ као квадрат на EZ према квадрату на

Θ. Али АВ није у размери према ВГ као квадратни број према квадратном броју, неће бити ни квадрат на EZ према квадрату на Θ у размери квадратног броја према квадратном броју. Па значи EZ је несамерљиво по дужини са Θ. И према томе је квадрат на EZ већи од квадрата на HZ за квадрат на дужи која је несамерљива са већим делом. Дужи EZ и ZH су рационалне и самерљиве само у степену, и EZ је самерљиво по дужини са Δ.

На овај начин, ЕН је четврта биномијала. А то је требало доказати[61] .

52.

Наћи пету биномијалу.



Узмимо два броја АГ и ГВ и то тако да размера АВ према сваком од њих није размера квадратног броја према квадратном броју, и нека буде дата рационална дуж Δ и нека је EZ самерљиво (по дужини) са Δ. На тај начин и EZ рационално. И урадимо тако да се број ГА односи према АВ као квадрат на EZ према квадрату на ZH. Како број ГА није у размери према броју АВ као квадратни број према квадратном броју, неће бити ни квадрат на EZ према квадрату на ZH у размери квадратног броја према квадратном броју. На овај начин су EZ и ZH рационалне, али самерљиве само у степену. Значи ЕН је биномијала.

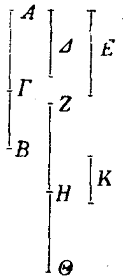
Тврдим да је пета.

Заиста, пошто је ГА према АВ као квадрат на EZ према квадрату на ZH, биће, обрнуто, ВА према АГ као квадрат на ZH према квадрату на ZE. Према томе је квадрат на HZ већи од квадрата на ZE. Нека је сад квадрат на HZ једнак збиру квадрата на EZ и на Θ. Значи, после пермутовања, број АВ је према ВГ као квадрат на HZ према квадрату на Θ. Али АВ није у размери према ВГ као квадратни број према квадратном броју. Неће бити ни квадрат на ZH према квадрату на Θ у размери квадратног броја према квадратном броју. Значи ZH је несамерљиво по дужини са Θ. Према томе је квадрат на ZH већи од квадрата на ZE за квадрат на дужи која је несамерљива са већим делом. Дужи HZ и ZE су рационалне и самерљиве само у степену и мањи део EZ је самерљив по дужини са датом рационалном дужи Δ.

На овај начин, EH је пета биномијала. А то је требало доказати.[62]

53

Наћи шесту биномијалу.



Узмимо два броја AΓ и ΓB и то тако да размера AB према сваком од њих није размера квадратног броја према квадратном броју. Нека Δ буде неки број који није квадратан и који се не налази ни према једном од бројева BA и AΓ у размери квадратног броја према квадратном броју, и нека буде дата рационална дуж E, и урадимо тако да је Δ према AB као квадрат на E према квадрату на ZH. Према томе је квадрат на E самерљив са квадратом на ZH. А како је E рационално, биће и ZH рационално. И пошто се Δ према AB не налази у размери квадратног броја према квадратном броју, неће бити ни квадрат на E према квадрату на ZH у размери квадратног броја према квадратном броју. На овај начин E је несамерљиво по дужини са ZH. Урадимо затим тако да BA буде према AΓ као квадрат на ZH према квадрату на HΘ. Тада је квадрат на ZH самерљив са квадратом на ΘH. Значи квадрат на ΘH је рационалан, а према томе је рационално и ΘH. И пошто се BA према AΓ не налази у размери квадратног броја према квадратном броју, неће бити ни квадрат на ZH према квадрату на HΘ у размери квадратног броја према квадратном броју. На овај начин ZH је самерљиво по дужини са HΘ. Дужи ZH и HΘ су рационалне, али самерљиве само у степену. Значи ZΘ је биномијала.

Треба доказати да је шеста.

Заиста, пошто је Δ према AB као квадрат на E према квадрату на ZH и BA према AΓ као квадрат на ZH према квадрату на HΘ, биће, због једнакоудаљености, Δ према AΓ као квадрат на E према квадрату на HΘ. Али Δ према AΓ се не налази у размери квадратног броја према квадратном броју, те неће бити ни квадрат на E према квадрату на HΘ у размери квадратног броја према квадратном броју. Према томе је E несамерљиво по дужини са HΘ. А доказано је да је оно несамерљиво по дужини и са ZH. На овај начин је свака од ZH и HΘ несамерљива по дужини са E. И пошто је BA према AΓ као квадрат на ZH према квадрату на HΘ, биће квадрат на ZH већи од квадрата на HΘ. Нека сад квадрат на ZH буде једнак збиру квадрата на HΘ и на K. Значи, после пермутовања, AB према BΓ биће као квадрат на ZH према квадрату на K. Али AB према BΓ није у размери квадратног броја према квадратном броју. Дакле, неће бити ни квадрат на ZH према квадрату на K у размери квадратног броја према квадратном броју. Значи ZH је несамерљиво по дужини са K. И према томе је квадрат на ZH већи од квадрата на HΘ за квадрат на дужи која је несамерљива са већим делом. Дужи ZH и HΘ су рационалне и самерљиве само у степену, и ниједна од њих није самерљива по дужини са датом рационалном дужи E.

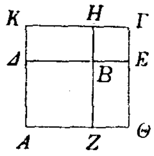
На овај начин, ZH је шеста биномијала. А то је требало доказати.[68]

Лема

Нека су AB и BΓ два квадрата. Поставимо их тако да ΔB и BE буду у истој правој. Биће тада и ZB у истој правој са BH. Па допунимо паралелограм AΓ. Тврдим да је AΓ квадрат, и да је правоугаоник ΔH средња пропорционала за квадрате AB и BΓ и правоугаоник ΔΓ средња пропорционала за квадрате AΓ и ΓB.

Заиста, пошто је ΔB једнака BZ и BE једнака BH, биће и цела ΔE једнака целој ZH. Но ΔE једнако је свакој од AΘ и KΓ, а ZH једнако свакој од AK и ΘΓ. Значи свака од AΘ и KΓ једнака свакој од AK и ΘΓ. Према томе је AΓ једнакострани паралелограм, а он је и правоугли. Значи AΓ је квадрат.

Пошто је ZB према BH као ΔB према BE, али ZB је према BH као AB према ΔH, а ΔB је према BE као ΔH према BГ и на тај начин је AB према ΔH као ΔH према BГ. Значи ΔH је средња пропорционала за AB и BГ.



Тврдим још да је и ΔГ средња пропорционала за AГ и BГ.

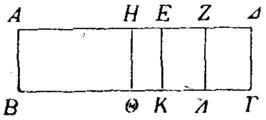
Заиста, пошто је AΔ према ΔK као KH према HГ, јер је свака једнака свакој, биће, после додавања, AK према KΔ као KГ према ГH, али AK је према KΔ као AГ према ГΔ, а KГ је према ГH као ΔГ према ГB и, на тај начин, је AГ према ΔГ као ΔГ према BГ. Значи ΔГ је средња пропорционала за AГ и ГB. А то је требало и доказати.[64]

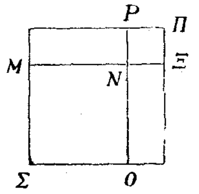
54.

Ако су рационална дуж и прва биномијала стране неког правоугаоника биће страна квадрата са површином једнаком том правоугаонику ирационална, и то биномијала.

Нека је површина AГ обухваћена рационалном дужи AB и првом биномијалом AΔ. Тврдим да је страна квадрата са површином једнаком AГ ирационална, и то биномијала.

Заиста, пошто је AΔ прва биномијала, поделимо је тачком E на два рационална дела и нека AE буде већи део. Јасно је да су AE и EΔ рационалне и самерљиве само у степену и да је квадрат на AE већи од квадрата на EΔ за квадрат на дужи која је самерљива по дужини са AE и да је AE самерљиво по дужини са AB коју смо изабрали као рационалну.





Преполовимо EΔ тачком Z. И пошто је квадрат на AE већи од квадрата на EΔ за квадрат на дужи која је самерљива по дужини са AE, онда, ако се на већој AE конструиши правоугаоник, са квадратном допуном, једнак четвртини квадрата на мањој, тј. квадрату на EZ, тај правоугаоник ће делити дуж AE на делове самерљиве са њом. Конструишимо сад на AE правоугаоник једнак квадрату на EZ са странама једнаким AH и HE. Биће тада AH самерљиво по дужини са EH. И повуцимо из тачака H, E, Z паралелно свакој од AB и ΓΔ праве HΘ, EK, ZΛ. Даље, конструишимо квадрат ΣN једнак правоугаонику AΘ и квадрат NΠ једнак правоугаонику HK и то тако да стране MN и NΞ буду на истој правој. Тада су на истој правој и стране PN и NO. И допунимо паралелограм ΣΠ. Биће тада ΣΠ квадрат. И пошто је правоугаоник са странама AH и HE једнак квадрату на EZ, онда је AH према EZ као ZE према EH. И на тај начин AΘ је према EΛ као EΛ према KH. Према томе је EΛ средња пропорционала за AΘ и HK. Али AΘ је једнако ΣN, а HK једнако NΠ. Због тога је EΛ средња пропорционала за ΣN и NΠ. Али средња пропорционала за ΣN и NΠ је такође и MP. На овај начин је EΛ једнако MP, а једнако и OΞ. Једнак је и збир AΘ и HK збиру ΣN и NΠ. Дакле цело AΓ једнако је целом ΣΠ, тј. квадрату на MΞ. Значи MΞ је страна квадрата једнаког површини AΓ.

Тврдим да је MΞ биномијала.

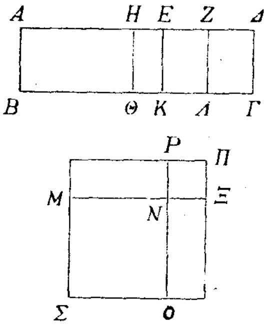
Заиста, пошто је AH самерљиво са HE, биће AE самерљиво са сваким од AH и HE. А претпостављено је да је и AE самерљиво са AB. Према томе AH и HE су самерљиви са AB. А како је AB рационално, биће рационално и свако од AH и HE, а рационално је и свако од AΘ и HK, и AΘ је самерљиво са HK. Али AΘ је једнако ΣN, а HK — NΠ, па су према томе, ΣN и NΠ, тј. квадрат на MN и квадрат на NΞ, рационални и самерљиви. И пошто је AE несамерљиво по дужини са EΔ, али AE је самерљиво са AH и ΔE самерљиво са EZ, биће AH самерљиво са EZ, па значи и AΘ несамерљиво са EΛ. Али је AΘ једнако ΣN, а EΛ једнако MP, па је због тога и ΣN несамерљиво са MP. Но ΣN је према MP као ON према NP. Значи и ON је несамерљиво са NP. Али ON је једнако MN и NΠ једнако NΞ, па према томе је и MN несамерљиво с NΞ. И квадрат на MN је самерљив са квадратом на NΞ и сваки је рационалан. Значи MN и MΞ су рационални и самерљиви само у степену.

На овај начин је MΞ биномијала и једнака страни квадрата једнаког површини AΓ. А то је требало доказати.[65]

55.

Ако су рационална дуж и друга биномијала стране неког правоугаоника, биће страна квадрата са површином једнаком том правоугаонику ирационална и то прва бимедијала.

Нека је површина АВГΔ обухваћена рационалном дужи АВ и другом биномијалом АΔ. Тврдим, да је страна квадрата са површином једнаком АВГΔ прва бимедијала.



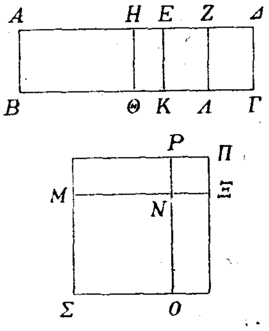
Пошто је АΔ друга биномијала, поделимо је тачком Е на делове и нека већи део буде АЕ. На овај начин су дужи АЕ и ЕΔ рационалне и самерљиве само у степену и квадрат на АЕ већи од квадрата на ЕΔ за квадрат на дужи која је самерљива са АЕ и да је мањи део ЕΔ самерљив по дужини са АВ. Преполовимо ЕΔ тачком Z и конструишимо на АЕ правоугаоник, са квадратном допуном, једнак квадрату на ЕZ са странама АН и НЕ. Биће тада АН самерљиво по дужини са НЕ. И повуцимо из тачака Н, Е, Z праве НΘ, ЕК ZΛ паралелне са АВ и ГΔ. Даље, конструишимо квадрат ΣN једнак правоугаонику АΘ и квадрат NП једнак правоугаонику НК и то тако да стране МN и NΞ буду на истој правој. Тада ће на истој правој бити и стране РN и NО. И допунимо квадрат ΞП. Јасно је из раније доказаног да је МР средња пропорционала за ΣN и NП и да је једнака површини ЕΛ и да је АГ једнако површини квадрата на МΞ. Треба доказати да је МΞ прва бимедијала. Пошто је АЕ несамерљиво по дужини са ЕΔ, а ЕΔ самерљиво са АВ, биће АЕ несамерљиво са АВ. И пошто је АН самерљиво са АВ, биће и АЕ самерљиво са сваким од АН и НЕ. Но АЕ је несамерљиво по дужини са АВ. Према томе су АН и НЕ несамерљиве са АВ. На овај начин су ВА, АН, НЕ рационалне самерљиве само у степену. Због тога је свака од површина АΘ и НК медијална, а према томе и сваки од квадрата је медијалан, а њихове стране МN и NΞ медијалне. И пошто је АН самерљиво по дужини са НЕ, самерљиво је и АΘ са НК, тј. ΣN са NП, тј. квадрат на MN са квадратом на NΞ [па према томе је МН самрљиво са NΞ у степену]. И пошто је АЕ несамерљиво по дужини са ЕΔ, а АЕ је самерљиво са АН, и ЕΔ самерљиво са EZ, биће АН несамерљиво са EZ. А према томе и АΘ несамерљиво са ЕΛ, тј. ΣN са МР, тј. ON са NP, тј. MN несамерљиво по дужини са НΞ. А доказали смо да су MN и NΞ и медијале и самерљиве у степену. На овај начин су MN и NΞ медијале самерљиве само у степену. Тврдим да оне обухватају рационалну површину. Заиста, пошто се претпоставља да је ΔЕ самерљиво са сваком од АВ и EZ, биће самерљива и EZ са ЕК. И свака од њих је рационална. На овај начин је рационална и површина ЕΛ, тј. МР. Али МР је површина са странама MN и NΞ. А ако се саберу две медијала, самерљиве само у степену, које обухватају рационалну површину, биће и цела дуж ирационална и то прва бимедијала.

На овај начин је МΞ прва бимедијала.[66]

56.

Ако су рационална дуж и трећа биномијала стране неког правоугаоника, биће страна квадрата са површином једнаком том правоугаонику ирационална и то друга бимедијала.

Нека је површина АВГΔ обухваћена рационалном дужи АВ и трећом биномијалом АΔ подељеном на делове тачком Е, при чему је већи део АЕ. Тврдим, да је страна квадрата са површином једнаком АВГΔ ирационална и то друга бимедијала.



Заиста, извршимо исте конструкције као и раније. Пошто је АΔ трећа биномијала, биће АЕ и ЕΔ рационалне дужи самерљиве само у степену, и квадрат на АЕ већи од квадрата на ЕΔ за квадрат на дужи која је самерљива са АЕ и ниједан део од АЕ и ЕΔ није самерљив по дужини са АВ. Тада се, слично претходном, доказује да је МΞ страна квадрата са површином једнаком површини АГ и да су MN и NΞ медијале самерљиве само у степену. Па према томе је MΞ бимедијала.

Треба доказати да је она друга бимедијала.

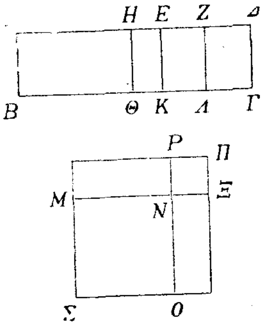
Пошто је ΔE несамерљиво по дужини са AB, тј. са EK, а ΔE је самерљиво са EZ, биће EZ несамерљиво по дужини са EK. Но оне су рационалне. Значи, дужи ZE и EK су рационалне самерљиве само у степену. Према томе је медијална површина EΛ, а и MP. Али правоугаоник MP има стране једнаке MN и NΞ. Према томе је медијалан и правоугаоник са странама MN и NΞ.

На овај начин је MΞ друга бимедијала. А то је требало доказати.[67]

57.

Ако су рационална дуж и четврта биномијала стране неког правоугаоника, биће страна квадрата са површином једнаком том правоугаонику ирационална и то такозвана „већа".

Нека је површина АГ обухваћена рационалном дужи AB и четвртом биномијалом AΔ, подељеном на делове тачком E, при чему је већи део AE. Тврдим, да је страна квадрата са површином једнаком АГ ирационална и то такозвана „већа".



Заиста, пошто је AΔ четврта биномијала, биће AE, EΔ рационалне дужи самерљиве само у степену и квадрат на AE већи од квадрата на EΔ за квадрат на дужи, која је несамерљива са AE, и AE самерљива по дужини са AB. Преполовимо ΔE тачком Z и конструишимо на AE паралелограм са странама AH и HE једнак површини квадрата на EZ; тада је AH несамерљиво по дужини са HE. Повуцимо паралелно са AB праве HΘ, EK и ZΛ и урадимо и све остало као и раније. Јасно је да је MΞ страна квадрата једнаког површини АГ. Треба доказати да је MΞ ирационална дуж, такозвана „већа". Пошто је AH несамерљива по дужини са EH, биће и површина AΘ несамерљива са HK, тј. ΣN са NП. Према томе су MN и NΞ несамерљиве у степену. И пошто је AE самерљиво по дужини са AB, биће AK рационална површина. А како је она једнака збору квадрата на MN и NΞ, рационалан је према томе и збир квадрата на MN и NΞ. И пошто је ΔE несамерљиво по дужини са AB, тј. са EK, али ΔE је самерљиво са EZ, биће EZ несамерљиво по дужини са EK. На овај начин су EK и EZ рационалне и самерљиве само у степену. Према томе је површина ΛE, тј. MP, медијална. А обухваћена је она са MN и NΞ, па због тога је медијална и површина правоугаоника са странама MN и NΞ. И збир квадрата на MN и NΞ је рационалан, MN и NΞ су несамерљиве у степену. Но ако се саберу две дужи, несамерљиве у степену, а збир квадрата на њима је рационалан, а правоугаоник обухваћен њима медијалан, биће цела дуж ирационална, такозвана „већа".

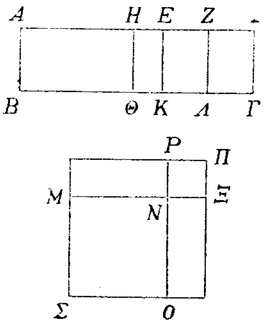
На овај начин, MΞ је рационална, такозвана „већа"; квадрат на њој је једнак површини AГ. А то је требало доказати.[68]

58.

Ако су рационална дуж и пета биномијала стране неког правоугаоника, биће страна квадрата са површином једнаком том правоугаонику такозвана „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине".

Нека је површина AГ обухваћена рационалном дужи AB и петом биномијалом AΔ, подељеном на делове тачком E, при чему је већи део AE. Тврдим, да је страна квадрата са површином једнаком AГ ирацаонална и такозвана „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине".

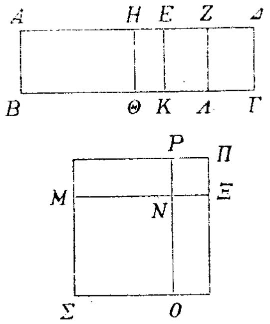
Заиста, извршимо исте конструкције као и раније. Јасно је да је MΞ страна квадрата са површином једнаком AГ. Треба доказати да је то „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине". Заиста, пошто је AH несамерљиво са HE, биће и AΘ несамерљиво са ΘE, тј. квадрат на MN са квадратом на NΞ, а MN и NΞ биће дужи несамерљиве у степену. А пошто је AΔ пета биномијала и њен мањи део је ЕΔ, биће ЕΔ самерљиво по дужини са АВ. Но АЕ је несамерљиво са ЕΔ. Према томе је и АВ несамерљиво по дужини са АЕ [ВА и АЕ су рационалне и самерљиве само у степену]. Значи површина АК, збир квадрата на МN и на NΞ, медијална је. И пошто је ΔЕ самерљиво по дужини са АВ, тј. са ЕК, а ΔЕ је самерљиво са ЕZ, биће и ЕZ самерљиво са ЕК, а ЕК и рационално. Према томе је рационална и површина ЕΛ, тј. МР, тј. површина са странама МN и NΞ. На овај начин су МN и NΞ несамерљиве у степену, збир квадрата на њима медијалан, а правоугаоник обухваћен њима рационалан.



На овај начин дуж МΞ је страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине и страна квадрата једнаког површини АГ. А то је требало доказати.[69]

59.

Ако су рационална дуж и шеста биномијала стране неког правоугаоника, биће страна квадрата са површином једнаком том правоугаонику такозвана „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“.



Нека је површина АВГΔ обухваћена рационалном дужи АВ и шестом биномијалом АΔ подељеном на делове тачком Е, при чему је већи део АЕ. Тврдим да је страна квадрата са површином једнаком АГ такозвана „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“.

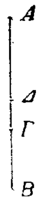
Заиста, извршимо исте конструкције као и раније. Тада је јасно да је МΞ страна квадрата са површином једнаком АГ и да су МN и NΞ несамерљиве у степену. И пошто је ЕА несамерљива по дужини са АВ, биће ЕА и АВ рационалне и несамерљиве само у степену. Према томе је медијална површина АК, збир квадрата на MN и на NΞ. Даље, пошто је ЕΔ несамерљива по дужини са АВ, биће несамерљива и дуж ZЕ са ЕК. На тај начин су ZЕ и ЕК рационалне и самерљиве само у степену. Према томе је површина ЕΛ медијална, а то значи да је медијална и површина МР, правоугаоника са странама MN и NΞ. А пошто је АЕ несамерљиво са ЕZ, биће несамерљива и површина АК са површином ЕΛ. Но АК је збир квадрата на MN и на NΞ, а ЕΛ је правоугаоник са странама MN и NΞ. Према томе су несамерљиви збир квадрата на MN и на NΞ и правоугаоник са странама MN и NΞ. И сваки од њих је медијалан. И дужи MN и NΞ су несамерљиве у степену.

На овај начин, MΞ је страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине и страна квадрата једнаког површини АΓ. А то је требало доказати.[70]

[Лема

Ако је нека дуж подељена на неједнаке делове, збир квадрата на тим деловима је већи од двоструког правоугаоника обухваћеног тим неједнаким деловима.

Нека је АВ дуж подељена на неједнаке делове тачком Γ и нека је АΓ већи део. Тврдим да је збир квадрата на АΓ и на ΓВ већи од двоструког правоугаоника коме су АΓ и ΓВ стране.

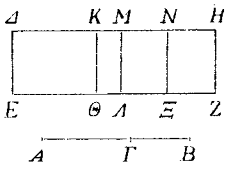


Преполовимо АВ тачком Δ. Пошто је сад дуж подељена тачком Δ на једнаке делове, а тачком Γ на неједнаке, биће правоугаоник са странама АΓ и ΓВ са квадратом на ΓΔ једнак квадрату на АΔ. Према томе је правоугаоник са странама АΓ и ΓВ мањи од квадрата на АΔ. Па значи и двоструки тај исти правоугаоник је мањи од удвостученог квадрата на АΔ. Но збир квадрата на АΓ и на ΓВ једнак је удвостученом збиру квадрата на АΔ и на ΔΓ. На овај начин збир квадрата на АΓ и на ΓВ је већи од двоструког правоугаоника са странама АΓ и ΓВ. А то је требало доказати.[71]]

60.

Ако правоугаоник, конструисан на рационалној дужи, има површину једнаку површини квадрата на биномијали, његова ширина је прва биномијала.

Нека је АВ биномијала подељена тачком Г тако да је већи део АГ; одмеримо рационалну дуж ΔЕ и конструишимо на ΔЕ паралелограм ΔЕZН, коме је ширина ΔН, једнак квадрату на АВ. Тврдим, да је ΔН прва биномијала.



Заиста, конструишимо на ΔЕ правоугаоник ΔΘ једнак квадрату на АГ и правоугаоник КΛ једнак квадрату на ВГ. Тада је остатак МZ једнак двострукој површини правоугаоника са странама АГ и ГВ. Преполовимо МН тачком N и нека је NΞ паралелна свакој од МΛ и НZ. Тада је свака од површина МΞ и NZ једнака једанпут узетом правоугаонику са странама АГ и ГВ. И пошто је АВ биномијала подељена тачком Г, биће АГ и ГВ рационалне самерљиве само у степену. Према томе су и квадрати на АГ и на ГВ рационални и самерљиви међу собом. На тај начин и збир квадрата на АГ и на ГВ је самерљив са квадратима на АГ и на ГВ, па је, значи, збир квадрата на АГ и на ГВ рационалан. И једнак је тај збир правоугаонику ΔΛ. Према томе је рационалан и правоугаоник ΔΛ. А исти је конструисан на рационалној дужи ΔЕ, због тога је рационална и ΔМ и самерљива по дужини са ΔЕ. Затим, пошто су АГ и ГВ рационалне и самерљиве само у степену, биће двапут узети правоугаоник са странама АГ и ГВ, тј. правоугаоннк МZ, медијалан. И он се конструише на рационалној дужи МΛ, значи да је рационална и дуж МН и несамерљива по дужини са МΛ, тј. са ΔЕ. А и МΔ је рационална и самерљива по дужини са ΔЕ. Због тога је ΔМ несамерљива по дужини са МН. А оне су рационалне. На овај начин, ΔМ и МН су рационалне, самерљиве само у степену, и ΔН је, стога, биномијала.

Треба доказати да је прва.

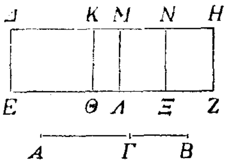
Пошто је за квадрат на АГ и на ГВ средња пропорционала правоугаоник коме су стране АГ и ГВ, биће и за ΔΘ и КΛ средња пропорционала МΞ. Но ΔΘ је према МΞ као МΞ према КΛ, тј. ΔК је према MN као MN према МК. Значи правоугаоник са странама ΔК и КМ једнак је квадрату на MN. И пошто је квадрат на АГ самерљив са квадратом на ГВ, биће самерљива и површина ΔΘ са површином КΛ. Тада је и дуж ΔК самерљива са КМ. И пошто је збир квадрата на АГ и на ГВ, већи од двоструког правоугаоника коме су стране АГ и ГВ, биће и ΔΛ веће од MZ. Због тога је и дуж ΔМ већа од МН. И правоугаоник са странама ΔК и КМ једнак је квадрату на MN, тј. четвртини квадрата на МН, и ΔК је самерљиво са КМ. Но постоје две неједнаке дужи и на већој је конструисан паралелограм са квадратном допуном једнаком четвртини квадрата на мањој и ако је он се дели на самерљиве делове, биће квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи, која је самерљива са већом. На овај начин, квадрат на ΔМ је већи од квадрата на мањој МН за квадрат на дужи самерљивој са ΔМ. И ΔМ и МН су рационалне дужи и ΔМ, већи део, биће самерљив по дужини са дужи ΔЕ, узетој за рационалну.

На ова начин ΔН је прва биномијала. А то је требало доказати.[72]

61.

Ако правоугаоник конструисан на рационалној дужи има површину једнаку површини квадрата на првој бимедијали, његова ширина је друга биномијала.

Нека је АВ прва бимедијала подељена тачком Г на две медијале тако да је већа АГ; одмеримо рационалну дуж ΔЕ и конструишимо на ΔЕ паралелограм ΔЕZН, коме је ширина ΔН, једнак квадрату на АВ. Тврдим да је ΔН друга биномијала.



Заиста, извршимо исте конструкције као и раније. И пошто је АВ прва бимедијала подељена тачком Г, биће АГ и ГВ две медијале, самерљиве само у степену, које обухватају рационалан правоугаоник. Биће према томе и квадрати на АГ и на ГВ медијални. Тада је и правоугаоник ΔΛ медијалан. А конструише се на рационалној дужи ΔЕ. Значи рационална је и дуж МΔ и несамерљива по дужини са ΔЕ. Затим, пошто је рационалан и двоструки правоугаоник са странама АГ и ГВ, биће рационална и површина MZ. А како је конструисана на рационалној дужи МΛ, биће рационална и МН и самерљива по дужини са МΛ, тј. са ΔЕ. Према томе је ΔМ несамерљива по дужини са МН. А оне су рационалне. На овај начин, ΔМ и МН су рационалне самерљиве само у степену, а то значи да је ΔН биномијала.

Треба доказати да је друга.

Заиста, пошто је збир квадрата на АГ и на ГВ већи од двоструког правоугаоника коме су стране АГ и ГВ, биће већа и површина ΔΛ од површине MZ. А то значи и дуж ΔМ већа од дужи МН. И пошто је квадрат на АГ самерљив са квадратом на ГВ, биће самерљива и површина ΔΘ са површином КΛ. Па према томе је самерљива и дуж ΔК са КМ. И правоугаоник са странама ΔК и КМ једнак је квадрату на MN. Значи квадрат на ΔМ је већи од квадрата на МН за квадрат на дужи која је самерљива са ΔМ. И дуж МН је самерљива по дужини са ΔЕ.

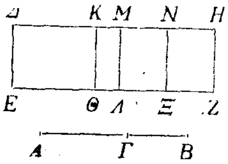
Према томе, ΔН је друга биномијала.[73]

62.

Ако правоугаоник, конструисан на рационалној дужи, има површину једнаку површини квадрата на другој бимедијали, његова ширина је трећа биномијала.

Нака је АВ друга бимедијала подељена тачком Г на две медијале тако да је већа АГ. Одмеримо рационалну дуж ΔЕ и конструишимо на ΔЕ паралелограм ΔZ, коме је ширина ΔН, јаднак квадрату на АВ. Тврдим да је ΔН трећа биномијала.

Заиста, извршимо исте конструкције као и раније. И пошто је АВ друга бимедијала подељена тачком Г, биће АГ и ГВ две медијале, самерљиве само у степену, које обухватају медијалан правоугаоник. Према томе је медијалан и збир квадрата на АГ и на ГВ; и једнак је површини ΔΛ. Значи и ова површина је медијална. А конструисана је на рационалној дужи ΔЕ. Према томе је рационална и дуж МΔ и неса-



мерљива по дужини са ΔЕ. Из истих разлога рационална је и дуж МН и несамерљива по дужини са МΛ, тј. са ΔЕ. Значи рационална је свака од дужи ΔМ и МН и несамерљива по дужини са ΔЕ. И пошто је АГ несамерљиво по дужини са ГВ, а АГ је према ГВ као квадрат на АГ према правоугаонику са странама АГ и ГВ, биће несамерљив и квадрат на АГ са правоугаоником коме су стране АГ и ГВ. Према томе и збир квадрата на АГ и на ГВ је несамерљив са двоструким правоугаоником на АГ и на ГВ, тј. површина ΔΛ са површином МZ. А тада су несамерљиве и дужи ΔМ и МН. А оне су рационалне. На овај начин, ΔН је биномијала.

Треба доказати да је трећа.

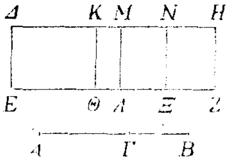
Слично претходном закључујемо да је ΔМ већа од МН, да је ΔК самерљива са КМ, и да је површина правоугаоника са странама ΔК и КМ једнака квадрату на МN. Значи, квадрат на ΔМ је већи од квадрата на МН за квадрат на дужи која је самерљива са ΔМ. И ниједна од ΔМ и МН неће бити самерљива по дужини са ΔЕ.

На овај начин, ΔН је трећа биномијала. А то је требало доказати.[74]

63.

Ако правоугаоник, конструисан на рационалној дужи, има површину једнаку површини квадрата на „већој“ бимедијали, његова ширина је четврта биномијала.

Нека је АВ „већа“ подељена тачком Г тако да је АГ већи део од ГВ, да је ΔЕ рационална и да паралелограм ΔZ једнак квадрату на АВ, конструисан на ΔЕ, има ширину ΔН. Тврдим да је ΔН четврта биномијала.



Заиста извршимо исте конструкције као и раније. И пошто је АВ „већа“ подељена тачком Г, биће АГ и ГВ несамерљиве у степену, збир квадрата на њима рационалан, а правоугаоник са таквим странама медијалан. Пошто је сад збир квадрата на АГ и на ГВ рационалан, због тога је рационална и површина ΔΛ, а услед тога је рационална и дуж ΔМ и самерљива по дужини са ΔЕ. Затим, пошто је медијалан двоструки правоугаоник са странама АГ и ГВ, тј. површина МZ, а конструисан је на рационалној дужи МΛ, биће рационална и МН и несамерљива по дужини са ΔЕ. А и ΔМ је несамерљива по дужини са МН. Према томе су ΔМ и МН рационалне самерљиве само у степену. На овај начин је ΔН биномијала.

Треба доказати да је четврта.

Слично претходном се доказује да је ΔМ веће од МН и да је правоугаоник са странама ΔК и КМ једнак квадрату на МN. И пошто је сад квадрат на АГ несамерљив са квадратом на ГВ, биће и површина ΔΘ несамерљива са КΛ. Због тога је и дуж ΔК несамерљива са КМ. Но ако постоје две неједнаке дужи и ако је на већој конструисан са квадратном допуном паралелограм, који је једнак четвртини квадрата на мањој, и дели ту дуж на делове несамерљиве по дужини, биће квадрат на већој дужи већи од квадрата на мањој за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са већом дужи. Према томе је квадрат на ΔМ већи од квадрата на МН за квадрат на дужи која је несамерљива са ΔМ. И дужи ΔМ и МН су рационалне и самерљиве само у степену. И ΔМ је самерљива са изабраном рационалном дужи ΔЕ.

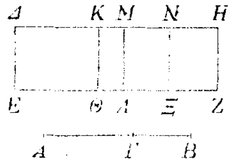
На овај начин, ΔН је четврта биномијала. А то је требало доказати.[75]

64.

Ако правоугаоник, конструисан на рационалној дужи, има површину једнаку квадрату на „страни квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“, његова ширина је пета биномијала.

Нека је АВ „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“, подељена тачком Г на дужи и нека је АГ већа дуж, и одмерена је рационална дуж ΔЕ, и нека паралелограм ΔZ, једнак квадрату на АВ, конструисан на ΔЕ, има ширину ΔН. Тврдим да је ΔН пета биномијала.

Извршимо исте конструкције као и раније. Пошто је сад АВ „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“, подељена тачком Г, биће АГ и ГВ несамерљиве у степену, али збир квадрата на њима медијалан, а правоугаоник са таквим странама рационалан. Пошто је сад збир квадрата на АГ и на ГВ медијалан, биће медијална и површина ΔΛ. Према томе је ΔМ рационална и несамерљива по дужина са ΔЕ. Затим, пошто је двоструки правоугаоник са странама АГ и ГВ, тј. површина МZ рационална, рационална је и дуж МН и несамерљива са ΔЕ. Према томе ΔМ је несамерљива са МН. На овај начин, дужи ΔМ и МН су рационалне, самерљиве само у степену. А то значи да је ΔН биномијала.



Тврдим да је пета.

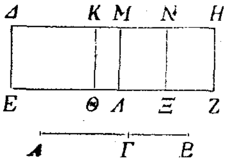
Заиста, слично се доказује да је правоугаоник са странама ΔК и КМ једнак квадрату на МN, и да је ΔК несамерљива по дужини са КМ. Значи квадрат на ΔМ је већи од квадрата на МН за квадрат на дужи, која је несамерљива са ΔМ. И дужи ΔМ и МН (рационалне) самерљиве су само у степену и мања, МН, самерљива је по дужини са ΔЕ.

На овај начин, ΔН је пета биномијала. А то је требало доказати.[76]

65.

Ако правоугаоник, конструисан на рационалној дужи, има површину једнаку квадрату на „страни квадрата једнаког збиру две медијалне површине“, његова ширина је шеста биномијала.

Нека је АВ, „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“, подељена тачком Г, ΔЕ је рационална дуж и на ΔЕ је конструисан паралелограм ΔZ, једнак квадрату на АВ са ширином ΔН. Тврдим, да је ΔН шеста биномијала.



Извршимо исте конструкције као и раније. Пошто је АВ, „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“, подељена тачком Г, биће АГ и ГВ несамерљиве у степену, збир квадрата на њима медијалан и правоугаоник са таквим странама медијалан, а збир квадрата на њима је несамерљив са наведеним правоугаоником. Према томе је на основу доказаног, свака од површина ΔΛ и MZ медијална. И оне су конструисане на рационалној дужи ΔЕ. Према томе је свака од ΔМ и МН рационална и самерљива са ΔЕ. И пошто је збир квадрата на АГ и на ГВ несамерљив са двоструким правоугаоником са странама АГ и ГВ, биће несамерљива и површина ΔΛ са MZ. Због тога је несамерљива и дуж ΔМ са МН. Значи ΔМ и МН су рационалне, самерљиве само у степену. На овај начин, ΔН је биномијала.

Тврдим да је шеста.

Поново се на сличан начин доказује да је правоугаоник са странама ΔК и КМ једнак квадрату на MN и да је ΔК несамерљива по дужини са КМ. И из истих разлога квадрат на ΔМ је већи од квадрата на МН за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са ΔМ. И ниједна од ΔМ и МН није самерљива по дужини са рационалном дужи ΔЕ.

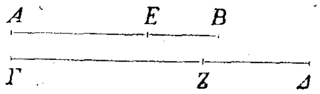
На овај начин, ΔН је шеста биномијала. А то је требало доказати.[78]

66.

Дуж самерљива по дужини са биномијалом и сама је биномијала и то истог реда.

Нека је АВ биномијала и нека је дуж ГΔ самерљива по дужини са АВ. Тврдим, да је и ГΔ биномијала и то истог реда као и АВ.

Заиста, пошто је АВ биномијала, поделимо је тачком Е на делове (рационалне) и нека већи део буде АЕ. Према томе су АЕ и ЕВ рационалне дужи, самерљиве само у степену. Урадимо сад тако да буде АВ према ГΔ као АЕ према ГZ. Биће тада и остатак ЕВ према остатку ZΔ као АВ према ГΔ. Но АВ је самерљиво по дужини са ГΔ, па ће и АЕ бити самерљиво са ГZ и ЕВ са ZΔ. А како су АЕ и ЕВ рационалне, биће рационалне и ГZ и ZΔ. И пошто је АЕ према ГZ као



ЕВ према ZΔ, биће, после пермутовања, АЕ према ЕВ као ГZ према ZΔ. Но ГZ и ZΔ су самерљиве само у степену, а при томе су рационалне. На овај начин, ГΔ је биномијала.

Тврдим да је она истог реда као и АВ.

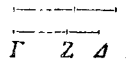
Заиста квадрат на АЕ је већи од квадрата на ЕВ за квадрат на дужи која је или самерљива са АЕ или несамерљива са њом. Нека је сад квадрат на АЕ већи од квадрата на ЕВ за квадрат на дужи која је самерљива са АЕ; биће и квадрат на ГZ већи од квадрата на ZΔ за квадрат на дужи која је самерљива са ГZ. И ако је АЕ самерљива са одмереном рационалном дужи, биће самерљива и ГZ са истом дужи, услед тога је свака од АВ и ГΔ прва биномијала, тј. истог су реда. А ако је ЕВ самерљива са одмереном рационалном дужи, биће самерљива ZΔ са истом дужи и услед тога су поново АВ и ГΔ истог реда, јер је свака од њих биномијала другог реда. А ако ниједна од АЕ и ЕВ није самерљива са одмереном рационалном дужи, неће бити ниједна од ГZ и ZΔ самерљива са том дужи и свака је трећа биномијала. Ако је квадрат на АЕ већи од квадрата на ЕВ за квадрат на дужи која је несамерљива са АЕ, биће и квадрат на ГZ већи од квадрата на ZΔ за квадрат на дужи која је несамерљива са ГZ. И ако је АЕ самерљива са одмереном рационалном дужи, биће и ГZ самерљива са њом, и свака је четврта биномијала. А ако су ЕВ и ZΔ самерљиве, свака је пета. Ако ниједна од АЕ и ЕВ није самерљива, а и од ГZ и ZΔ ниједна није самерљива са одмереном рационалном дужи, свака је шеста биномијала.

На овај начии, дуж самерљива по дужини са биномијалом и сама је биномијала и то истога реда.[78]

67.

Дуж самерљива по дужини са бимедијалом и сама је бимедијала и то истога реда.

Нека је АВ бимедијала и нека је дуж ГΔ самерљива са АВ. Тврдим, да је и ГΔ бимедијала и то истога реда као и АВ.



Заиста, пошто је AB бимедијала, поделимо је тачком E на медијале. Тада су AE и EB медијале самерљиве само у степену. Урадимо тако да AB буде према ΓΔ као AE према ΓZ. Тада је и остатак EB према остатку ZΔ као AB према ΓΔ. Но AB је самерљиво по дужини са ΓΔ. Због тога је свака од AE и EB самерљива са сваком од ΓZ и ZΔ. Но AE и EB су медијале, па према томе су медијале и ΓZ и ZΔ. И пошто је AE према EB као ΓZ према ZΔ, а AE и EB су самерљиве само у степену, биће ΓZ и ZΔ самерљиве само у степену. А доказано је да су оне медијале. На овај начин ΓΔ је медијала.

Тврдим па је она истог реда као и AB.

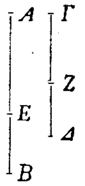
Заиста, пошто је AE према EB као ΓZ према ZΔ и према томе је квадрат на AE према правоугаонику са странама AE и EB као квадрат на ΓZ према правоугаонику са странама ΓZ и ZΔ, онда, после пермутовања, квадрат на AE биће према квадрату на ΓZ као правоугаоник са AE и EB према правоугаонику са ΓZ и ZΔ. Но квадрат на AE је самерљив са квадратом на ΓZ, па због тога је и правоугаоник са AE и EB самерљив са правоугаоником са ΓZ и ZΔ. Ако је сад правоугаоник са AE и EB рационалан, биће рационалан и правоугаоник са ΓZ и ZΔ [и услед тога је прва бимедијала]. А ако је медијалан први, биће медијалан и други и то оба другог реда.

И услед тога биће ΓΔ истог реда као и AB. А то је требало доказати.

68.

Дуж самерљива са „већом“ биће и сама „већа“.

Нека је AB „већа“ и ΓΔ је самерљива са AB. Тврдим, да је и Γ „већа“.



Поделимо AB тачком E. Тада су AE и EB несамерљиве у степену и збир квадрата на њима је рационалан, а правоугаоник од њих медијалан. И урадимо оно исто што и раније. И пошто је AB према ΓΔ као AE према ΓZ и као EB према ZΔ, и на тај начин како је AE према ΓZ тако и EB према ZΔ. Но AB је самерљиво са ΓΔ, па је и свака од AE и EB самерљива са сваком од ΓZ и ZΔ. И пошто је AE према ΓZ као ΓZ према ZΔ, значи, после сабирања, AB је према BE као ΓΔ према ΔZ. Према томе и квадрат на AB је према квадрату на BE као квадрат на ΓΔ према квадрату на ΔZ. На сличан начин се доказује да како се квадрат на AB односи према квадрату на AE тако се и квадрат на ΓΔ односи према квадрату на ΓZ. Дакле, квадрат на AB је према збиру квадрата на AE и на EB као квадрат на ΓΔ према збиру квадрата на ΓZ и на ZΔ. И на тај начин, после пермутовања, квадрат на AB је према квадрату на ΓΔ као збир квадрата на AE и на EB према збиру квадрата на ΓZ и на ZΔ. Но квадрат на AB је самерљив са квадратом на ΓΔ, па према томе је самерљив и збир квадрата на AE и на EB са збиром квадрата на ΓZ и на ZΔ. A збир квадрата на AE и на EB је рационалан, значи и збир квадрата на ΓZ и ZΔ је рационалан. На сличан начин и двоструки правоугаоник са странама AE и EB је самерљив са двоструким правоугаоником са странама ΓZ и ZΔ. A како је двоструки правоугаоник са AE и EB медијалан, биће медијалан и двоструки правоугаоник са ΓZ и ZΔ. На овај начин ΓZ и ZΔ, несамерљиве у степену, дају збир квадрата на њима рационалан, а двоструки правоугаоник обухваћен њима медијалан. Цела дуж ΓΔ је према томе ирационална, такозвана „већа“.

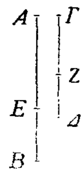
На овај начин, дуж самерљива са „већом“ и сама је „већа“. А то је требало доказати.

69.

Дуж самерљива са „страном квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“ и сама је „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“.

Нека је AB „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“ и ΓΔ дуж самерљива са AB. Треба доказати да је и ΓΔ „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“.

Поделимо AB на дужи тачком E. Тада су AE и EB несамерљиве у степену и збир квадрата на њима медијалан, а правоугаоник са таквим странама рационалан. Извршимо исте конструкције као и раније. Слично се доказује да су и ГZ и ZΔ несамерљиве у степену и да је збир квадрата на АЕ и на ЕВ самерљив са збиром квадрата на ГZ и на ZΔ и да је правоугаоник са странама АЕ и ЕВ самерљив са правоугаоником са странама ГZ и ZΔ. Према томе је и збир квадрата на ГZ и на ZΔ медијалан, а правоугаоник са странама ГZ и ZΔ рационалан.



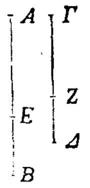
На овај начин ГΔ је „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“. А то је требало доказати.

70.

Дуж самерљива са „страном квадрата једнаког збиру две медијалне површине“ и сама је „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“.

Нека је АВ „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“ и ГΔ је дуж самерљива са АВ. Треба доказати, да је и ГΔ „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“.

Заиста, пошто је АВ ”страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине”, поделимо је тачком Е на дужи. Тада су АЕ и ЕВ несамерљиве у степену и збир квадрата на њима медијалан и правоугаоник са таквим странама медијалан и тај збир квадрата на АЕ и на ЕВ несамерљив са правоугаоником коме су стране АЕ и ЕВ. Извршимо исте конструкције као и раније. Слично се доказује, да су и ГZ и ZΔ несамерљиве у степену и да је несамерљив збир квадрата на АЕ и на ЕВ са збиром квадрата на ГZ и на ZΔ, а такође да је правоугаоник са странама АЕ и ЕВ самерљив са правоугаоником са странама ГZ и ZΔ. И према томе је збир квадрата на ГZ и на ZΔ медијалан и правоугаоник са странама ГZ и ZΔ медијалан и збир квадрата на ГZ и на ZΔ несамерљив са правоугаоником са странама ГZ и ZΔ.



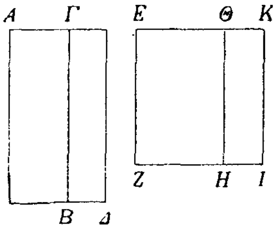
На овај начин ГΔ је „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“. А то је требало доказати.

71.

При сабирању рационалног и медијалног (рационалне и медијалне површине) могу се добити четири ирационалности: или биномијала, или прва бимедијала, или „већа“ или „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“.

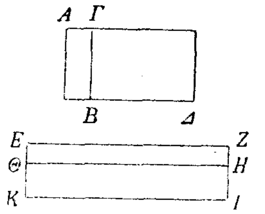
Нека је АВ рационална површина, а ГΔ — медијална. Тврдим да страна квадрата једнаког површини АΔ може бити: или биномијала, или прва бимедијала, или „већа“ или „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“.

Заиста, АВ је или веће од ГΔ или мање. Нека је, прво, веће. Одмеримо рационалну дуж ЕZ, и конструишимо на ЕZ правоугаоник ЕН једнак АВ, са ширином ΘК и на ЕZ правоугаоник ΘI једнак ΔГ, са ширином ΘК. Пошто је АВ рационално и једнако ЕН, биће рационално и ЕН. И пошто је конструисано на рационалној дужи ЕZ, а има ширину ЕΘ, биће рационално и ЕΘ и самерљиво по дужини са ЕZ. Затим, пошто је ГΔ медијално и једнако ΘI, медијална је и површина ΘI. А како је конструисана на рационалној дужи ЕZ и има ширину ΘК, биће рационална и ΘК и несамерљива по дужини са ЕZ. И пошто је ГΔ медијално, а АВ — рационално, биће АВ несамерљиво са ГΔ. Према томе је и ЕН несамерљиво са ΘI. Но ЕН је према ΘI као ЕΘ према ΘК, па због тога је и ЕΘ несамерљиво по дужини са ΘК. А обе те дужи су рационалне. На овај начин су ЕΘ и ΘК рационалне и самерљиве само у степену. Према томе је ЕК биномијала подељена тачком Θ. И пошто је АВ веће од ГΔ, а АВ једнако ЕН, и ГΔ једнако ΘI, биће ЕН веће од ΘI, а услед тога и ЕΘ веће од ΘК. Сад је квадрат на ЕΘ већи од квадрата на ΘК за квадрат на дужи која је или самерљива по дужини са ЕΘ или несамерљива. Нека је, прво, самерљива. И већа ΘЕ је самерљива са одмереном рационалном дужи ЕZ. Према томе је ЕК прва биномијала. Но ако



је површина обухваћена дужима рационалном и првом биномијалом, онда је страна квадрата једнаког тој површини биномијала. И према томе страна квадрата једнаког површини ЕI је биномијала. А тада је и страна квадрата једнаког површини АΔ биномијала. Но нека сад, као друго, квадрат на ЕΘ буде већи од квадрата на ΘК за квадрат на дужи, која је несамерљива са ЕΘ. И већа ЕΘ је самерљива по дужини са одмереном рационалном дужи ЕZ. А ЕК је тада четврта биномијала. И ЕZ је рационална. Но ако је површина обухваћена дужима — рационалном и четвртом биномијалом, биће страна квадрата једнаког тој површини ирационална, такозвана „већа“. Значи, страна квадрата једнаког површини ЕI је „већа“. На тај начин и страна квадрата једнаког површини АΔ је „већа“.

Нека је сад АВ мање од ГΔ. Биће тада и ЕН мање од ΘI. А због тога је и ЕΘ мање од ΘК. Но квадрат на ΘК је већи од квадрата на ЕΘ за квадрат на дужи која је или самерљива са ΘК или несамерљива. Нека је, прво, самерљива по дужини. И мања ЕΘ је самерљива по дужини са одмереном рационалном дужи ЕZ. Значи ЕК је друга биномијала. А ЕZ је рационална. Но ако је површина обухваћена дужима — рационалном и другом биномијалом, биће страна квадрата једнаког тој површини прва бимедијала. Значи страна квадрата једнаког површини ЕI је прва бимедијала. На тај начин и страна квадрата једнаког површини АΔ је прва бимедијала. Нека сад квадрат на ΘК буде већи од квадрата на ΘЕ за квадрат на дужи која није самерљива са ΘК. И мања ЕΘ је самерљива са одмереном рационалном дужи ЕZ. Значи ЕК је пета биномијала. А ЕZ је рационална. Но ако је површина обухваћена дужима — рационалном и петом биномијалом, биће страна квадрата једнаког тој површини „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине”. На тај начин страна квадрата једнаког површини ЕI је „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“. А према томе и страна квадрата једна-



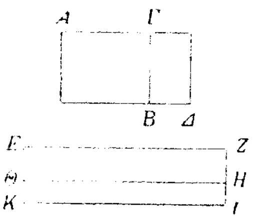
ког површини AΔ је „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“.

На овај начин, при сабирању рационалног и медијалног могу се добити четири ирационалности: или биномијала, или прва бимедијала, или „већа“ или „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“.[79]

72.

При сабирању две међу собом несамерљиве медијалне површине могу се добити две остале ирационалности: или друга бимедијала или „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“.

Нека се саберу две међу собом несамерљиве медијалне површине AB и ΓΔ. Тврдим да је страна квадрата једнаког површини AΔ или друга бимедијала или „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“.



Заиста, AB или је веће од ΓΔ или је мање. Нека, прво, ако је то случај, AB буде веће од ΓΔ. Одмеримо рационалну дуж EZ, и нека површина EH, једнака AB и конструисана на EZ, има ширину EΘ, а површина ΘI, једнака површини ΓΔ, има ширину ΘK. И пошто је свака од AB и ΓΔ медијална, биће и свака EH и ΘI медијална. И конструисане на рационалној дужи ZE имају ширине EΘ и ΘK. На тај начин свака од EΘ и ΘK је рационална и несамерљива по дужини са EZ. И пошто је AB несамерљиво са ΓΔ, а AB је једнако EH и ΓΔ једнако ΘI, биће несамерљиво и EH са ΘI. Но EH је према ΘI као EΘ према ΘK. Према томе је EΘ несамерљиво по дужини са ΘK. На овај начин су EΘ и ΘK рационалне, самерљиве само у степену. И према томе је EK биномијала. Квадрат на EΘ је већи од квадрата на ΘK за квадрат на дужи која је или самерљива са EΘ или несамерљива. Нека, прво, она буде самерљива. И ниједна од EΘ и ΘK није самерљива са одмереном рационалном дужи EZ. EK је тада трећа биномијала. А EZ је рационална. Но ако је површина обухваћена дужима — рационалном и трећом биномијалом, биће страна квадрата једнаког тој површини друга бимедијала. Према томе страна квадрата једнаког површини EI, тј. AΔ, биће друга бимедијала. Квадрат на EΘ је већи од квадрата на ΘK за квадрат на дужи која је несамерљива по дужини са EΘ. И несамерљива је свака од EΘ и ΘK са EZ. На овај начин је EK шеста биномијала. Но ако је површина обухваћена дужима — рационалном и шестом биномијалом, биће страна квадрата једнаког тој површини „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“. Због тога је и страна квадрата једнаког површини AΔ „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“.

[Слично се доказује да је, ако је AB мање од ΓΔ, страна квадрата једнаког површини AΔ или друга медијала или „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“.]

На овај начин, при сабирању две међу собом несамерљиве медијалне површине могу се добити две остале ирационалности — или друга бимедијала или „страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“.

Биномијала и наредне ирационалне дужи нису исте ни са медијалом ни међу собом. Заиста, квадрат на медијали конструисан на рационалној дужи производи ширину рационалну и несамерљиву по дужини са оном дужи на којој је конструисан. А квадрат на биномијали, конструисан на рационалној дужи, производи као ширину прву биномијалу. Квадрат на првој бимедијали, конструисан на рационалној дужи, производи као ширину другу биномијалу. Квадрат на другој бимедијали, конструисан на рационалној дужи, производи као ширину трећу биномијалу. Квадрат на „већој“, конструисан на рационалној дужи, производи као ширину четврту биномијалу. Квадрат на „страни квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“, конструисан на рационелној дужи, производи као ширину пету биномијалу. Квадрат на „страни квадрата једнаког збиру две медијалне површине“

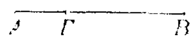
конструисан на рационалној дужи, производи као ширину шесту биномијалу. Наведене ширине се разликују како од прве тако и међу собом; од прве због тога што је она рационална, а међу собом због тога што нису истог реда. Према томе се и саме ирационалности разликују међу сомом.[80]

73.

Ако се од рационалне дужи одузме рационална дуж, која је самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан. Нека се он зове апотома.

Нека се од рационалне дужи АВ одузме рационална дуж ВГ самерљива са целом само у степену. Тврдим, да је остатак АГ ирационалан, тако звана апотома.

Заиста, пошто је АВ несамерљиво по дужини са ВГ а, АВ је према ВГ као квадрат на АВ према правоугаонику коме су стране АВ и ВГ, биће и квадрат на АВ несамерљив са правоугаоником коме су стране АВ и ВГ. Али са квадратом на АВ је самерљив збир квадрата на АВ и на ВГ, а са правоугаоником коме су стране АВ и ВГ самерљив је двоструки правоугаоник са истим странама. И пошто је збир квадрата на АВ и на ВГ једнак збиру двоструког правоугаоника са странама АВ и ВГ и квадрата на ГА, биће збир квадрата на АВ и на ВГ несамерљив са остатком, квадратом на АГ. Но квадрати на АВ и на ВГ су рационални, значи АГ је ирационална. И нека се зове апотома. А то је требало доказати.[81]

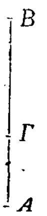


74.

Ако се од медијале одузме медијала, самерљива са целом само у степену, која обухвата се целом дужи рационалан правоугаоник, биће остатак ирационалан. Нека се он зове прва апотома медијале.

Нека се од медијале АВ одузме медијала ВГ самерљива са АВ само у степену, која са АВ обухвата рационалан правоугаоник коме су стране АВ и ВГ. Тврдим да је остатак АГ ирационалан. Нека се он зове прва апотома медијале.

Заиста, пошто су АВ и ВГ медијале, биће и квадрат на АВ и на ВГ медијални. Али двоструки правоугаоник са странама АВ и ВГ је рационалан. Према томе је збир квадрата на АВ и на ВГ несамерљив са двоструким правоугаоником са странама АВ и ВГ. И двоструки правоугаоник са странама АВ и ВГ је несамерљив са остатком, квадратом на АГ, јер ако је цело несамерљиво са једним делом, биће и првобитне величине несамерљиве. Но двоструки правоугаоник коме су стране АВ и ВГ рационалан је, па је ирационалан квадрат на АГ. А према томе је ирационална и дуж АГ. Нека се зове прва апотома медијале.

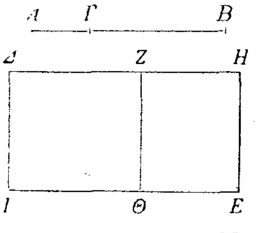


75.

Ако се од медијале одузме медијала, самерљива са целом само у степену, која са целом обухвата медијалан правоугаоник, биће остатак ирационалан. Нека се он зове *друга апотома медијале*.

Нека се од медијале АВ одузме медијала ГВ, самерљива са целом АВ само у степену, која са целом АВ обухвата медијалан правоугаоник са странама АВ и ВГ. Тврдим да је остатак АГ ирационалан. Нека се он зове друга апотома медијале.

Заиста, одмеримо рационалну дуж ΔI и конструишимо на ΔI правоугаоник једнак збиру квадрата на АВ и на ВГ ширине ΔН, затим на ΔI конструишимо правоугаоник ΔΘ ширине ΔZ. Биће тада остатак ZЕ једнак квадрату на АГ. И пошто су квадрати на АВ и на ВГ медијални и самерљиви, медијална је и површина ΔЕ. И конструисана је она на рационалној дужи са ширином ΔН. Према томе је рационална и ΔН, и самерљива по дужини са ΔI. Затим, пошто је правоугаоник коме су стране АВ и ВГ медијалан, биће и двоструки правоугаоник коме се стране АВ и ВГ медијалан. И он је једнак ΔΘ. Значи и ΔΘ је медијалан. А конструисан је на рационалној дужи ΔI са ширином



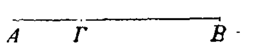
ΔZ. Према томе је рационална и дуж ΔZ и несамерљива по дужини са ΔI. И пошто су AB и BГ самерљиве само у степену, биће AB несамерљива са BГ по дужини. Значи и квадрат на AB несамерљив је са правоугаоником коме су стране AB и BГ. Али са квадратом на AB је самерљив збир квадрата на AB и на BГ, а са правоугаоником коме су стране AB и BГ двоструки правоугаоник са странама AB и BГ. А тада је двоструки правоугаоник коме су стране AB и BГ несамерљив са збиром квадрата на AB и на BГ. Али збиру квадрата на AB и на BГ једнака је површина ΔE, а двоструком правоугаонику коме су стране AB и BГ површина ΔΘ. Према томе је површина ΔE несамерљива са ΔΘ. Но ΔE је према ΔΘ као HΔ према ΔZ. Значи да је и HΔ несамерљива са ΔZ. И оне су ирационалне. Значи, HΔ и ΔZ су рационалне и самерљиве само у степену. Према томе је ZΔ апотома. А ΔI је рационална. Али површина обухваћена рационалном и ирационалном дужи је рационална и страна квадрата једнаког тој површини је ирационална. Страна квадрата једнаког ZE је AГ. Према томе је AГ ирационална. Нека се зове друга апотома медијале. А то је требало доказати.

76.

Ако се од дужи одузме дуж, несамерљива у степену са целом, а збир квадрата на њој и на целој је рационалан, и правоугаоник обухваћен истим дужима медијалан, биће остатак ирационалан. Нека се он зове „мањи“!

Нека се од дужи AB одузме дуж BГ, несамерљива у степену са целом, и нека испуњава наведене услове. Тврдим, да је остатак AГ ирационалност такозвана „мања“.

Заиста, пошто је збир квадрата на AB и BГ рационалан а двоструки правоугаоник са странама AB и BГ медијалан,



биће збир квадрата на AB и на BГ несамерљив са двоструким правоугаоником на AB и на BГ. И, после замене једног дела другим, збир квадрата на AB и на BГ је несамерљив са остатком, квадратом на AГ. Но збир квадрата на AB и на BГ је рационалан. Према томе је ирационалан квадрат на АГ. Значи да је дуж АГ ирационална. Нека се зове „мања“. А то је требало доказати.

77.

Ако се од дужи одузме дуж, несамерљива у степену са целом, а збир квадрата на њој и на целој је медијалан, и двоструки правоугаоник обухваћен истим дужима рационалан, биће остатак ирационалан. Нека се он зове „дуж која са рационалном образује цело медијално“.*)

Нека се од дужи АВ одузме дуж БГ, несамерљива у степену са АВ, и нека испуњава наведене услове. Тврдим, да је остатак горе наведена ирационалност.

Заиста, пошто је збир квадрата на АВ и на ВГ медијалан, а двоструки правоугаоник коме су стране АВ и ВГ рационалан, биће збир квадрата на АВ и на ВГ несамерљив са двоструким правоугаоником коме су стране АВ и ВГ. Значи и остатак, квадрат на АГ, несамерљив је са двоструким правоугаоником коме су стране АВ и ВГ. Но двоструки правоугаоник коме су стране АВ и ВГ је рационалан, па је квадрат на АГ ирационалан. Значи ирационална је и АГ. А она се зове „дуж која са рационалном образује цело медијално“. А то је требало доказати.

78.

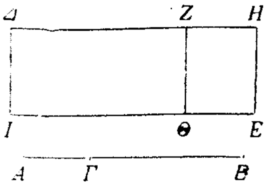
Ако се од дужи одузме дуж несамерљива у степену са целом, а збир квадрата на њој и на целој је медијалан и двоструки правоугаоник обухваћен истим дужима медијалан, а збир квадрата на тим дужима је несамерљив са двоструким правоугаоником истих страна, биће остатак ирационалан.

---

*) То је Еуклидово кратко изражавање дефиниције тог појма. Логички садржајније изражавање, аналогно, рецимо, дефиницији у ставу 40., било би ово: „страна квадрата једнаког разлици медијалне и рационалне површине“.

Нека се он зове „дуж која са медијалном образује цело медијално“.*)

Нека се од дужи АВ одузме дуж, несамерљива у степену са АВ и нека испуњава наведене услове. Тврдим, да је остатак АГ ирационалан и нека се зове „дуж која са медијалном образује цело медијално“.



Заиста, одмеримо рационалну дуж ΔI и нека површина ΔE, конструисана на ΔI, и једнака збиру квадрата на АВ и на ВГ образује ширину ΔH; одузмимо површину ΔΘ (са ширином ΔZ), једнаку двоструком правоугаонику коме су стране АВ и ВГ. Тада је остатак, правоугаоник ZE, једнак квадрату на АГ. Према томе АГ је страна квадрата једнаког површини ZE. И пошто је збир квадрата на АВ и на ВГ медијалан и једнак површини ΔE, биће и површина ΔE медијална. И она је конструисана на рационалној дужи ΔI и образује ширину ΔH. Због тога је ΔH рационална и несамерљива са ΔI по дужини. Затим, пошто је двоструки правоугаоник коме су стране АВ и ВГ медијалан, а он је једнак површини ΔΘ, медијална је и површина ΔΘ. И конструисана на ΔI она образује ширину ΔZ. Према томе је рационална и ΔZ и несамерљива по дужини са ΔI. И пошто је несамерљив збир квадрата на АВ и на ВГ са двоструким правоугаоником коме су стране АВ и ВГ, биће несамерљива и површина ΔE са ΔΘ. Но ΔE је према ΔΘ као ΔH према ΔZ. Значи, несамерљива је ΔH са ΔZ. А обе су рационалне. Према томе су HΔ и ΔZ рационалне и самерљиве само у степену. Дакле, ZH је апотома. А ZΘ је рационална. Правоугаоник обухваћен рационалном дужи и апотомом је ирационалан, и страна квадрата једнаког правоугаонику ирационална. Но страна квадрата једнаког правоугаонику ZE је АГ. На овај начин АГ је ирационална. Нека се зове „дуж

---

*) У вези са примедбом у претходној теореми наводимо и овде опширнији назив: „Страна квадрата једнаког разлици две медијалне површине“.

која са медијалном образује цело медијално“. А то је требало доказати.

79.

Апотоми се може додати једна јединa рационална дуж само у степену самерљива са целом дужи.

Нека је АВ апотома и ВГ њен додатак. Према томе су АГ и ГВ рационалне дужи самерљиве само у степену. Тврдим, да се дужи АВ не може додати никаква друга рационална дуж, самерљива само у степену са целом. И за колико је збир квадрата на АΔ и на ΔВ већи од двоструког правоугаоника коме су стране АΔ и ΔВ, за толико ће бити већи и збир квадрата на АГ и на ГВ од двоструког правоугаоника коме су стране АГ и ГВ, јер су они оба већи за једно исто, за квадрат на АВ. Значи, да ће, после пермутовања, за колико је збир квадрата на АΔ и на ΔВ већи од збира квадрата на АГ и на ГВ, за толико ће бити већи и двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ од двоструког правоугаоника са странама АГ и ГВ. Но збир квадрата на АΔ и на ΔВ је већи од збира квадрата на АГ и на ГВ за рационалну величину, јер су оба рационални. А тада је и двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ већи од двоструког правоугаоника са странама АГ и ГВ за рационалну величину, а то је немогуће, пошто су оба медијални, а медијална величина није већа од медијалне за рационалну. Према томе, дужи АВ не може се додати друга нека рационална дуж самерљива са целом дужи само у степену.

На овај начин, апотоми се може додати једна јединa рационална дуж само у степену самерљива са целом дужи. А то је требало доказати.[82]

80.

Првој медијалној апотоми се може додати једна јединa медијала, само у степену самерљива са целом дужи, и која, заједно са целом дужи, обухвата рационалан правоугаоник.

Нека је АВ прва медијална апотома и ВГ њој додата дуж. Значи, АГ и ГВ су медијале, самерљиве само у степену, које обухватају рационалан правоугаоник. Тврдим да се дужи АВ не може додати никаква друга медијала самерљива само у степену са целом која, заједно са целом, обухвата рационалан правоугаоник.

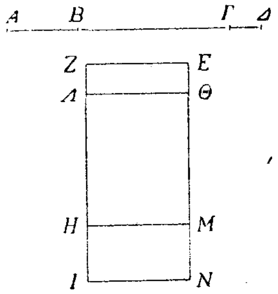
Заиста, ако може, нека се дода дуж ΔВ. Значи, АΔ и ΔВ су медијале самерљиве само у степену, које обухватају правоугаоник са странама АΔ и ΔВ. И за колико је збир квадрата на АΔ и на ΔВ већи од двоструког правоугаоника са странама АΔ и ΔВ, за толико је већи и збир квадрата на АГ и ГВ од двоструког правоугаоника са странама АГ и ГВ, јер су они поново већи за квадрат на АВ. Значи, после пермутовања, збир квадрата на АΔ и на ΔВ је за толико већи од збира квадрата на АГ и на ГВ, за колико је двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ већи од двоструког правоугаоника са странама АГ и ГВ. Но двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ је већи од двоструког правоугаоника са странама АГ и ГВ за рационалну велечину, јер су оба рационални. А због тога је и збир квадрата на АΔ и на ΔВ већи од збира квадрата на АГ и на ГВ за рационалну величину. А то је немогуће, јер су оба медијална, а медијално од медијалног не може да буде веће за рационалну величину.

На овај начин, првој медијалној апотом се може додати једна једина медијала, само у степену самерљива са целом дужи, и која, заједно са целом дужи, обухвата рационалан правоугаоник. А то је требало доказати.

81.

Другој медијалној апотоми се може додати једна једина медијала, само у степену самерљива са целом дужи, и која, заједно са целом дужи, обухвата медијалан правоугаоник.

Нека је АВ друга медијална апотома и ВГ њој додата дуж. Значи, АГ и ГВ су медијале самерљиве само у степену, које обухватају медијалан правоугаоник. Тврдим, да се не може додати дужи АВ никаква друга медијала самерљива само у степену са целом, која заједно са целом обухвата медијалан правоугаоник.



Заиста, ако може, нека се дода дуж ΔВ. Значи, АΔ и ΔВ су медијале самерљиве само у степену, које обухватају медијалан правоугаоник. Одмеримо рационалну дуж EZ и конструишимо на EZ правоугаоник EH са ширином EM једнак збиру квадрата на АГ и на ГВ и одузмимо површину ΘH, са ширином ΘM, једнаку двоструком правоугаонику коме су стране АГ и ГВ. Тада је остатак EΛ једнак квадрату на АВ. Према томе је АВ страна квадрата једнаког површини EΛ. Затим конструишимо на EZ површину EI са ширином EN једнаку збиру квадрата на АΔ и на ΔВ. Такође је и површина EΛ једнака квадрату на АВ. Значи остатак ΘI једнак је двоструком правоугаонику са странама АΔ и ΔВ. И пошто су АГ и ГВ медијале, па према томе је медијалан и збир квадрата на АГ и на ГВ. А он је једнак површини EH, значи и површина EH је медијална. А она је конструисана на рационалној дужи EZ са ширином EM. Због тога је EM рационална дуж несамерљива по дужини са EZ. Затим, пошто је правоугаоник коме су стране АГ и ГВ медијалан, биће медијалан и двоструки правоугаоник коме су стране АГ и ГВ. И он је једнак површини ΘH. Значи и ΘH је медијална. А ова је конструисана на рационалној дужи EZ са ширином ΘM. Према томе је рационална и дуж ΘH и несамерљива по дужини са EZ. И пошто су АГ и ГВ самерљиве само у степену, онда је АГ несамерљива по дужини са ГВ. Но како АГ стоји према ГВ тако и квадрат на АГ стоји према правоугаонику коме су стране АГ и ГВ. Значи квадрат на АГ је несамерљив са правоугаоником коме су стране АГ и ГВ. Но са квадратом на АГ самерљив је збир квадрата на АГ и на ГВ, а са правоугаоником коме су стране АГ и ГВ је самерљив двоструки правоугаоник са истим странама. Према томе је збир квадрата на АГ и на ГВ несамерљив са двоструким правоугаоником коме су стране АГ и ГВ. Но збир квадрата на АГ и на ГВ једнак је површини ЕН, а двоструки правоугаоник са странама АГ и ГВ једнак је НΘ. Дакле, ЕН је несамерљиво са ΘН. Али ЕН је према ΘН као што је ЕМ према ΘМ. Значи ЕМ је несамерљиво по дужини са МΘ. И обе те дужи су рационалне. Према томе су ЕМ и МΘ рационалне, самерљиве само у степену. На тај начин, ЕΘ је апотома а ΘМ је њој додата дуж. На сличан начин се доказује да јој се може додати и ΘN. Према томе се апотоми могу додати и једна и друга дуж, које су самерљиве са целом само у степену. А то је немогуће.

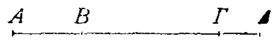
На тај начин, другој медијалној апотоми се може додати једна једина медијала, само у степен самерљива са целом дужи, и која, заједно са целом дужи, обухвата медијалан правоугаоник. А те је требало доказати.

82.

„Мањој“ се може додати једна једина дуж, у степену несамерљива са целом, која, заједно са целом, образује рационалан збир квадрата на тим дужима, и обухвата са њом медијалан правоугаоник.

Нека је АВ „мања“ (ирационалност) и ВГ додата јој дуж. Значи АГ и ГВ су несамерљиве у степену, које дају збир квадрата на њима рационалан и обухватају двоструки правоугаоник медијалан. Тврдим, да се не може додати дужи АВ никаква друга дуж која задовољава исте услове.

Заиста, ако може, нека се дода дуж ΔВ. Значи АΔ и ΔВ су дужи, несамерљиве у степену, које образују тражено. И за колико је збир квадрата на АΔ и на ΔВ већи од збира квадрата на АГ и на ГВ, за толико је већи и двоструки правоугаоник коме су стране АΔ и ΔВ од двоструког правоугаоника коме су стране АГ и ГВ. И збир квадрата на АΔ и на ΔВ већи је од збира квадрата на АГ и на ГВ за

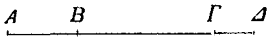


рационалну величину, јер су оба збира рационални. Онда је и двоструки правоугаоник са странама AΔ и ΔB већи од двоструког правоугаоника са странама AГ и ГB за рационалну величину, — а то је немогуће, јер су оба медијална.

На овај начин, „мањој" се може додати једна једина дуж, у степену несамерљива са целом, која, заједно са целом, образује рационалан збир квадрата ни тим дужима, и обухвата са њом медијалан правоугаоник. А то је требало доказати.

83.

„Дужи која са рационалном образује медијално" се може додати једна једина дуж, у степену несамерљива са целом, која, заједно са целом, образује збир квадрата на тим дужима медијалан, а обухвата са њом правоугаоник рационалан.



Нека је AB „дуж која са рационалном образује цело медијално" и BГ дуж која јој се додаје. Значи AГ и ГB су несамерљиве дужи, које задовољавају наведене услове. Тврдим да се не може додати дужи AB никаква друга дуж која задовољава исте услове.

Заиста, ако може, нека се дода дуж BΔ. Значи AΔ и ΔB су дужи, несамерљиве у степену, које образују тражено. И сад, за колико је збир квадрата на AΔ и на ΔB већи од збира квадрата на AГ и на ГB, за толико је већи двоструки правоугавник коме су стране AΔ и ΔB од двоструког правоугаоника коме су стране AГ и ГB, што одговара претходном; а двоструки правоугаоник са странама AΔ и ΔB је већи од двоструког правоугаоника са странама AГ и ГB за рационалну величину, јер су оба рационална. Према томе је збир квадрата на AΔ и на ΔB већи од збира квадрата на AГ и на ГB за рационалну величину, а то је немогуће, јер су оба медијална.

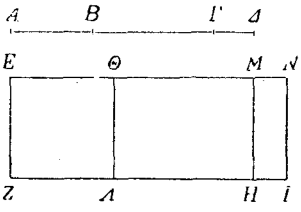
На овај начин, дужи AB се не може додати никаква друга дуж, несамерљива у степену са целом, која заједно са целом задовољава наведене услове. Према томе се може додати једна једина. А то је требало доказати.

84.

„Дужи која са медијалном образује цело медијално“ се може додати једна једина дуж, у степену несамерљива са целом, која, заједно са целом, образује збир квадрата на тим дужима медијалан, обухвата са њом медијалан двоструки правоугаоник и при томе је поменути збир квадрата несамерљив са тим двоструким правоугаоником.

Нека је АВ „дуж која са медијалном образује цело медијално“, и ВГ дуж која јој се додаје. Значи АГ и ГВ су дужи, несамерљиве у степену, које образују тражено. Тврдим, да се не може додати дужи АВ никаква друга дуж која задовољава исте услове.

Заиста, ако може, додајмо ВΔ. На тај начин су и дужи АΔ и ΔВ несамерљиве у степену, збир квадрата на АΔ и на ΔВ је медијалан, двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ је такође медијалан и збир квадрата на АΔ и на ΔВ је несамерљив са двоструким правоугаоником са странама АΔ и ΔВ. Одмеримо рационалну дуж ЕΖ и конструишимо на ЕΖ правоугаоник ЕН, ширине ЕМ, једнак збиру квадрата на АГ и на ГВ, а затим и на дужи ЕΖ конструишимо правоугаоник ΘН, ширине ΘМ, једнак двоструком правоугаонику коме су стране АГ и ГВ. Тада је остатак, квадрат на АВ, једнак правоугаонику ЕΛ. Према томе је АВ страна квадрата једнаког правоуганику ЕΛ. Затим, конструишимо на ЕΖ правоугаоник ЕI, ширине ЕN, једнак збиру квадрата на АΔ и на ΔВ. Тада је квадрат на АВ једнак површини ЕΛ. Значи остатак, двоструки правоугаоник са странама АΔ и ΔВ, једнак је правоугаонику ΘI. И како је збир квадрата на АГ и на ГВ медијалан и једнак површини ЕН, биће и та површина ЕН медијална. А како је она конструисана на рационалној дужи ЕΖ и има ширину ЕМ, биће и ЕМ рационална и несамерљива по дужини са ЕΖ. Затим, пошто је двоструки правоугаоник коме су стране АГ и ГВ медијалан и једнак површини ΘН, биће медијална и та површина ΘН. А пошто је конструисана



на рационалној дужи EZ и има ширину ΘМ, биће и ΘМ рационална дуж и несамерљива по дужини са EZ. И пошто је збир квадрата на АГ и на ГВ несамерљив са двоструким правоугаоником коме су стране АГ и ГВ, несамерљива је и површина ЕН са површином ΘН. Тада је дуж ЕМ несамерљива по дужини са МΘ. А обе су рационалне. Значи ЕМ и МΘ су рационалне, самерљиве само у степену. Према томе ЕΘ је апотома и ΘМ је њој додата дуж. Слично се доказује да је и ЕΘ апотома, а њој додата дуж ΘN. На овај начин апотоми се може додати и једна и друга дуж, свака самерљива само у степену са целом, а то је, на основу доказаног немогуће. Према томе се дужи АВ не може додати никаква друга дуж.

На овај начин, „дужи која са медијалном образује цело медијално“ се може додати једна једина дуж, у степену несамерљива са целом, која са целом образује збир квадрат на тим дужима медијалан, обухвата са њом медијалан двоструки правоугаоник и при томе је поменути збир квадрата несамерљив са тим двоструким правоугаоником. А то је требало доказати.

Треће дефиниције

1. Дате су рационална дуж и апотома. Ако је квадрат на целој дужи већи од квадрата на додатку за квадрат на дужи самерљивој по дужини са целом дужи и цела дуж је самерљива по дужини са датом рационалном дужи, апотома се зове прва.

2. А ако је додатак самерљив по дужини са датом рационалном дужи и квадрат на целој дужи већи од квадрата на додатку за квадрат дужи самерљиве са целом дужи, апотома се зове друга.

3. А ако ниједна дуж (ни цела дуж ни додатак) није самерљива по дужини са датом рационалном дужи и квадрат на целој дужи је већи од квадрата на додатку за квадрат дужи самерљиве са целом дужи, апотома се зове трећа.

4. Затим, ако је квадрат на целој дужи већи од квадрата на додатку за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са целом дужи и цела дуж је самерљива по дужини са датом рационалном дужи, апотома се зове четврта.

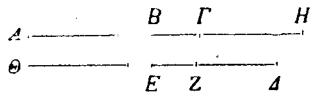
5. А ако је самерљив додатак, — пета.

6. А ако ниједна дуж није самерљива, — шеста[83].

85.

Наћи прву апотому.

Нека је А дата рационална дуж и ВН дуж самерљива по дужини са А. Стога је и ВН рационална. Узмимо два квадратна броја ΔЕ и ЕΖ, чија разлика ΖΔ није квадратни број. Онда ЕΔ не стоји у односу према ΔΖ као квадратни број према квадратном броју. Начинимо тако да ЕΔ према ΔΖ буде као квадрат на ВН према квадрату на НΓ. Биће тада квадрат на ВН самерљив са квадратом на НΓ. Али квадрат на ВН је рационалан, па ће и квадрат на НΓ бити рационалан; према томе је рационална и дуж НΓ. И пошто ЕΔ не стоји у односу према ΔΖ као квадратни број према квадратном, неће ни квадрат на ВН стојати у односу према квадрату на НΓ као квадратни број према квадратном броју. Према томе је дуж ВН несамерљива са дужи НΓ по дужини. А обе су рационалне. На овај начин ВН и НΓ су рационалне и самерљиве само у степену. Дакле ВΓ је апотома.



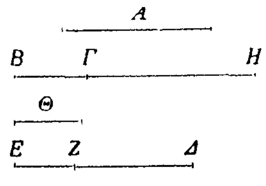
Тврдим да је баш прва.

Заиста, нека оно чиме се разликује квадрат на ВН од квадрата на ВΓ буде квадрат на Θ. И пошто је ЕΔ према ΖΔ као квадрат на ВН према квадрату на НΓ, биће, после замене једног члана другим, ΔЕ према ЕΖ као квадрат на НВ према квадрату на Θ. Али ΔЕ је у односу према ЕΖ као квадратни број према квадратном броју, јер је сваки квадрат. Према томе квадрат на НВ је у односу према квадрату на Θ као квадратни број према квадратном броју. На овај начин ВН је самерљиво по дужини са Θ. И квадрат на ВН је већи од квадрата на НΓ за квадрат на Θ. Дакле квадрат на ВН је већи од квадрата на НГ за квадрат на дужи самерљивој по дужини са ВН. И при томе је цела дуж ВН самерљива по дужини са датом рационалном дужи А. Дакле је ВГ прва апотома.

На овај начин је нађена прва апотома. А то је требало доказати.[84]

86.

Наћи другу апотому.



Узмимо рационалну дуж А и дуж НГ самерљиву по дужини са А. Тада је и дуж НГ рационална. Нека су ΔЕ и ЕZ два квадратна броја, чија разлика ΔZ није квадратни број. И начинимо тако да ZΔ према ΔЕ буде као квадрат на НГ према квадрату на НВ. Стога је квадрат на ГН самерљив са квадратом на НВ. Али квадрат на ГН је рационалан, па због тога је рационалан и квадрат на НВ. Значи и НВ је рационална дуж. И пошто квадрат на НГ није у односу према квадрату на НВ као квадратни број према квадратном броју, дуж ГН није самерљива по дужини са НВ. А обе су рационалне, па су према томе ГН и НВ рационалне самерљиве само у степену. На овај начин ВГ је апотома.

Тврдим да је баш друга.

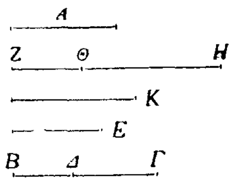
Заиста, нека квадрат на ВН буде већи од квадрата на НГ за квадрат на Θ. Пошто се сад квадрат на ВН односи према квадрату на НГ као број ЕΔ према броју ΔZ, биће, после замене једног члана другим, квадрат на ВН према квадрату на Θ као ΔЕ према ЕZ. А сваки од бројева ΔЕ и ЕZ је квадрат. Према томе је квадрат на ВН у односу према квадрату на Θ као квадратни број према квадратном броју. На овај начин је ВН самерљиво по дужини са Θ. И како је квадрат на ВН већи од квадрата на НГ за квадрат на Θ, значи квадрат на ВН већи је од квадрата на НГ за квадрат на дужи самерљивој по дужини са ВН. И додатак ГН је самерљив са датом рационалном дужи А. Према томе је ВГ друга апотома.

На овај начин је нађена друга апотома. А то је требало доказати[85].

87.

Наћи трећу апотому.

Узмимо рационалну дуж А и три броја Е, ВГ, ГΔ који нису међу собом у размери као квадратни број према квадратном броју, али нека размера ГВ према ВΔ буде као квадратног броја према квадратном броју. И начинимо тако да Е према ВГ буде као квадрат на А према квадрату на ZН и да ВГ буде према ГΔ као квадрат на ZН према квадрату на НΘ. Пошто је сад Е према ВГ као квадрат на А према квадрату на ZН, биће квадрат на А самерљив са квадратом на ZН. Но квадрат на А је рационалан, значи рационалан је и квадрат на ZН, а према томе је рационална и дуж ZН. И пошто Е не стоји према ВГ у односу квадратног броја према квадратном броју, ни квадрат на А неће бити према квадрату на ZН као квадратни број према квадратном броју. Према томе је А несамерљиво по дужини са ZН. Заиста, пошто је ВГ према ГΔ као квадрат на ZН према квадрату на НΘ, биће квадрат на ZН самерљив са квадратом на НΘ. Но квадрат на ZН је рационалан, значи рационалан је и квадрат на НΘ, те према томе је рационална и дуж НΘ. И пошто ВГ не стоји према ГΔ у односу квадратног броја према квадратном броју, неће ни квадрат на ZН према квадрату на НΘ бити као квадратни број према квадратном броју. Према томе је ZН несамерљиво по дужини са НΘ. И оба су рационални. Дакле рационалне дужи ZН и НΘ су самерљиве само у степену. На овај начин ZΘ је апотома.



Тврдим да је баш трећа.

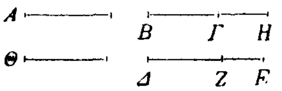
Заиста, пошто је Е према ВГ као квадрат на А према квадрату на ZН и ВГ је према ГΔ као квадрат на ZН према квадрату на ΘН, биће због једнакоудаљености Е према ГΔ као квадрат на А према квадрату на ΘН. Но Е не стоји у односу према ГΔ као квадратни број према квадратном броју, па ни квадрат на А према квадрату на HΘ није у односу квадратног броја према квадратном броју. Према томе А није самерљиво по дужини са HΘ. Дакле ниједна од дужи ZH и HΘ неће бити самерљива по дужини са датом рационалном дужи А. Нека сад оно чиме је квадрат на ZH већи од квадрата на HΘ буде квадрат на K. Пошто је сад BΓ према ΓΔ као квадрат на ZH према квадрату на HΘ, биће, после замене једног дела другим, BΓ према BΔ као квадрат на ZH према квадрату на K. Но BΓ је у односу према BΔ као квадратни број према квадратном броју. Значи и квадрат на ZH је према квадрату на K као квадратни број према квадратном броју. Према томе је ZH самерљиво по дужини са K. И квадрат на ZH је већи од квадрата на HΘ за квадрат на дужи самерљивој са ZH. И ниједна од дужи ZH и HΘ није самерљива по дужини са датом дужи А. Дакле ZΘ је трећа апотома.

На овај начин је нађена трећа апотома. А то је требало доказати.[86]

88.

Наћи четврту апотому.

Узмимо рационалну дуж А и дуж BH самерљиву по дужини са А. Тада је и дуж BH рационална. Узмимо два броја ΔZ, ZE и то тако да цео број ΔE не стоји у односу према сваком од бројева ΔZ и ZE као квадратни број према квадратном броју. И начинимо тако да ΔE према EZ буде као квадрат на BH према квадрату на HΓ. Стога ће квадрат на BH бити самерљив са квадратом на HΓ. Но квадрат на BH је рационалан, значи рационалан је и квадрат на HΓ. Па према томе је рационална и дуж HΓ. И пошто ΔE не стоји у односу према EZ као квадратни број према квадратном броју, ни квадрат на BH не стоји у односу према квадрату на HΓ као квадратни број према квадратном броју. Значи BH је несамерљиво по дужини са HΓ. А оба су рационална. Према томе BH и HΓ су раци-



оналне дужи самерљиве само у степену. На овај начин ВГ је апотома.

[Тврдим да је баш четврта.]

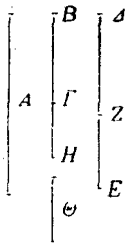
Нека оно чиме је квадрат на ВН већи од квадрата на НГ буде квадрат на Θ. Пошто је сад ΔΕ према ΕΖ као квадрат на ВН према квадрату на НГ, то је, после замене једног члана другим, ΕΔ према ΔΖ као квадрат на НВ према квадрату на Θ. Но ΕΔ не стоји према ΔΖ у односу квадратног броја према квадратном броју. Значи ни квадрат на НВ не стоји према квадрату на Θ као квадратни број према квадратном броју. Према томе је дуж ВН несамерљива по дужини са Θ. И квадрат на ВН је већи од квадрата на НГ за квадрат на Θ. Значи квадрат на ВН је већи од квадрата на НГ за квадрат на дужи несамерљивој са ВН. И цела дуж ВН је самерљива по дужини са датом рационалном дужи А. Према томе ВГ је четврта апотома.

На овај начин је нађена четврта апотома. А то је требало доказати.[87]

89.

Наћи пету апотому.

Узмимо рационалну дуж А и дуж ГН самерљиву по дужини са А. Тада је и дуж ГН рационална. Узмимо два броја ΔΖ и ΖΕ и то тако да се ΔΕ поново не односи према сваком од бројева ΔΖ и ΖΕ као квадратни број према квадратном броју. И начинимо тако да ΖΕ према ΕΔ буде као квадрат на ГН према квадрату на НВ. Значи да је рационалан и квадрат на НВ, те према томе је рационална и дуж ВН. И пошто је ΔΕ према ΕΖ као квадрат на ВН према квадрату НГ, а ΔΕ према ΕΖ није у односу квадратног броја према квадратном броју, ни квадрат на ВН неће бити према квадрату на НГ у односу квадратног броја према квадратном броју. Значи дуж ВН је несамерљива по дужини са НГ. А обе су рационалне. Према томе су ВН и НГ рационалне самерљиве само у степену. На овај начин ВГ је апотома.



Тврдим да је баш пета.

Заиста, нека оно чиме је квадрат на ВН већи од квадрата на НГ буде квадрат на Θ. Пошто је сад квадрат на ВН према квадрату на НГ као ΔЕ према ЕZ, биће, после замене једног члана другим, ЕΔ према ΛZ као квадрат на ВН према квадрату на Θ. Но ЕΔ не стоји у односу према ΔZ као квадратни број према квадратном броју, па ни квадрат на ВН не стоји у односу према квадрату на Θ као квадратни број према квадратном броју. Значи дуж ВН је несамерљива по дужини са Θ. А квадрат на ВН је већи од квадрата на НГ за квадрат на Θ. Према томе квадрат на НВ је већи од квадрата на НГ за квадрат на дужи која је несамерљива са НВ. И додатак ГН је самерљив по дужини са датом рационалном дужи А. Дакле ВГ је пета апотома.

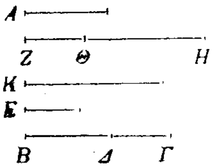
На овај начин је нађена пета апотома ВГ. А то је требало доказати.[88]

90.

Наћи шесту апотому.

Узмимо рационалну дуж А и три броја Е, ВГ, ГΔ који нису међу собом у односу као квадратни број према квадратном броју. Нека ни ГВ не буде према ВΔ као квадратни број према квадратном броју. И начинимо тако да Е према ВГ буде као квадрат на А према квадрату на ZН и ВГ према ГΔ као квадрат на ZН према квадрату на НΘ.

Пошто је сад Е према ВГ као квадрат на А према квадрату на ZН, биће квадрат на А самерљив са квадратом на ZН. Но квадрат на А је рационалан. Значи и квадрат на ZН је рационалан. Према томе је рационална и дуж ZН. И пошто



Е није према ВГ као квадратни број према квадратном броју, неће ни квадрат на А према квадрату на ZН бити у односу квадратног броја према квадратном броју. Према томе А није самерљиво по дужини са ZН. Затим, пошто је ВГ према ГΔ као квадрат на ZН према квадрату на НΘ, биће квадрат на ZН самерљив са квадратом на НΘ. Но квадрат на ZН је рационалан, па према томе је рационалан и квадрат на НΘ. Значи рационална је и дуж НΘ. И пошто ВГ не стоји у односу према ГΔ као квадратни број према квадратном броју, ни квадрат на ZН не стоји према квадрату на НΘ у односу квадратног броја према квадратном броју. Према томе ZН није самерљиво по дужини са НΘ. И оба су рационални. Дакле ZН и НΘ су рационални и самерљиви само у степену. На овај начин ZΘ је апотома.

Тврдим да је баш шеста.

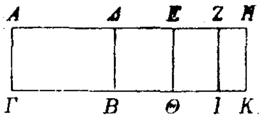
Заиста, пошто је Е према ВГ као квадрат на А према квадрату на ZН, а ВГ је према ГΔ као квадрат на ZН према квадрату на НΘ, биће, због једнакоудаљености, Е према ГΔ као квадрат на А према квадрату на НΘ. Но Е не стоји према ГΔ у односу квадратног броја према квадратном броју, па ни квадрат на А не стоји у односу према квадрату на НΘ у односу квадратног броја према квадратном броју. Према томе А није самерљиво по дужини са НΘ. Значи ниједна од ZН и НΘ није самерљива по дужини са рационалном дужи А. Нека сад оно чиме је квадрат на ZН већи од квадрата на НΘ буде квадрат на К. Пошто је сад ВГ према ГΔ као квадрат на ZН према квадрату на НΘ, биће, после замене једног дела другим, ГВ према ВΔ као квадрат на ZН према квадрату на К. Но ГВ не стоји према ВΔ као квадратни број према квадратном броју, па према томе ни квадрат на ZН није према К као квадратни број према квадратном броју Значи ZН није самерљиво по дужини са К. И квадрат на ZН је већи од квадрата на НΘ за квадрат на К. На овај начин квадрат на ZН је већи од квадрата на НΘ за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са ZН. И обе дужи ZН и НΘ несамерљиве су по дужини са датом рационалном дужи А. Према томе је ZΘ шеста апотома.

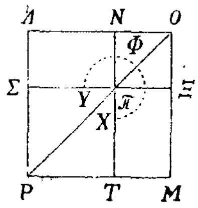
На овај начин је нађена шеста апотома ZΘ. А то је требало доказати.[89]

91.

Ако је површина обухваћена рационалном дужи и првом апотомом, онда квадрат, једнак тој површини, има за страну апотому.

Нека је површина АВ обухваћена рационалном дужи АГ и првом апотомом АΔ. Тврдим да квадрат једнак површини АВ има за страну апотому.





Заиста, пошто је АΔ прва апотома, нека ΔН буде њен додатак. Према томе су дужи АН и НΔ рационалне и самерљиве само у степену. И цела дуж АН је самерљива са датом рационалном дужи АГ, и квадрат на АН је већи од квадрата на НΔ за квадрат на дужи самерљивој по дужини са АН. Према томе, ако се конструише на АН паралелограм једнак четвртини квадрата на ΔН са квадратном допуном, он ће поделити АН на самерљиве делове. Преполовимо ΔН тачком Е и конструишимо на АН паралелограм једнак квадрату на ЕН са квадратном допуном и нека то буде паралелограм обухваћен са АZ и ZН. АZ биће самерљиво са ZН. И кроз тачке Е, Z, Н повуцимо праве ЕΘ, ZI, НК паралелне правој АГ.

И пошто је АZ самерљиво по дужини са ZН, биће и АН самерљиво по дужини са сваким од АZ и ZН. Но АН је самерљиво са АГ, према томе је самерљива по дужини и свака од дужи АZ и ZН са АГ. И АГ је рационално, значи и свако од АZ и ZН је рационално. На тај начин је рационална и свака од површина АI и ZК. А пошто је ΔЕ самерљиво по дужини са ЕН, биће и ΔН самерљиво по дужини са сваким од ΔЕ и ЕН. Али ΔН је рационално и несамерљиво по дужини са АГ. Значи и свако од ΔЕ и ЕН је рационално и несамерљиво по дужини са АГ. Према томе је свака од површина ΔΘ и ЕК медијална.

Конструишимо квадрат ΛМ једнак површини АI и одузмимо од њега квадрат NΞ, са истим углом ΛОМ, једнак површини ZК. Према томе су квадрати ΛМ и NΞ на истој дијагонали (дијаметру). Нека њихова дијагонала буде ОР па допунимо слику. Пошто је сад правоугаоник обухваћен са АZ и ZН једнак квадрату на ЕН, биће АZ према ЕН као ЕН према ZН. Но АZ је према ЕН као АI према ЕК, а ЕН је према ZH као ЕК према KZ. Према томе је ЕК средња пропорционала за AI и KZ. Исто тако за ΛΜ и ΝΞ средња пропорционала је MN, како је то раније доказано, и површина AI је једнака квадрату ΛΜ, а KZ — квадрату ΝΞ. Према томе је површина MN једнака површини ЕК. Но ЕК је једноко ΔΘ и MN једнако ΛΞ. Према томе је ΔΚ једнако гномону ΥΦΧ са ΝΞ. Али и АК је једнако квадратима ΛΜ и ΝΞ. Значи остатак AB једнак је ΣΤ. Но ΣΤ је квадрат на ΛΝ. На овај начин квадрат на ΛΝ једнак је површини AB. И према томе је ΛΝ страна квадрата једнаког површини AB.

Тврдим да је ΛΝ апотома.

Заиста, пошто је свака од површина AI и ZK рационална, а једнаке су ΛΜ и ΝΞ, биће и свака од површина ΛΜ и ΝΞ рационална, тј. сваки од квадрата на ΛΟ и на ΟΞ. Значи и свака од дужи ΛΟ и ΟΝ рационална је. Затим, пошто је површина ΔΘ медијална и једнака ΛΞ, биће медијална и површина ΛΞ. И пошто је сад ΛΞ медијална, а ΝΞ рационална, биће ΛΞ несамерљиво са ΝΞ. А како је ΛΞ према ΝΞ као ΛΟ према ΟΝ, биће несамерљиво по дужини и ΛΟ са ΟΝ. А оба су рационални. Значи, дужи ΛΟ и ΟΝ су рационалне и самерљиве само у степену. Дакле ΛΝ је апотома и квадрат на њој једнак је површини AB. На овај начин страна квадрата једнаког површини AB је апотома.

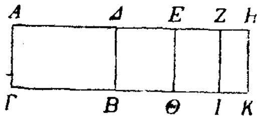
Према томе, ако је површина обухваћена рационалном дужи итд.[90]

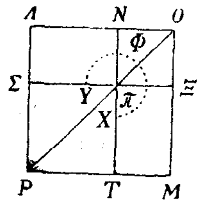
92.

Ако је површина обухваћена рационалном дужи и другом апотомом, онда квадрат, једнак тој површини, има за страну прву апотому медијале.

Нека је површина AB обухваћена рационалном дужи ΑΓ и другом апотомом ΑΔ. Тврдим да је страна квадрата, једнаког површини AB, прва апотома медијале.

Заиста, нека ΔΗ буде додатак за ΑΔ. Према томе су дужи ΑΗ и ΗΔ рационалне самерљиве само у степену и додатак ΔΗ је самерљив са датом рационалном дужи ΑΓ, и квадрат на целој дужи АН већи је од квадрата на НΔ за квадрат на дужи самерљивој по дужини са АН. Пошто је сад квадрат на АН већи од квадрата на НΔ за квадрат на дужи самерљивој са АН, онда, ако се конструише на АН паралелограм једнак четвртини квадрата на НΔ са квадратним допуном, он ће поделити АН на самерљиве делове. Преполовимо ΔН тачком Е и конструишимо на АН паралелограм једнак квадрату на ЕН са квадратном допуном и нека то буде паралелограм обухваћен са AZ и ZH. Стога ће AZ бити самерљиво по дужини са ZH. И према томе је АН самерљиво по дужини са сваким од AZ и ZH. Но АН је рационално и несамерљиво по дужини са АГ. Према томе је и свака од AZ и ZH рационална и несамерљива по дужини са АГ. А свака од површина AI и ZK је медијална. Затим, пошто је дуж ΔЕ самерљива са ЕН, онда је ΔН самерљива са сваком од ΔЕ и ЕН. Но ΔН је самерљиво по дужини са АГ [значи, и свака од ΔЕ и ЕН је рационална и самерљива по дужини са АГ]. Према томе је рационална и свака од површина ΔΘ и ЕК.





Конструишимо сад квадрат ΛМ једнак површини AI и одузмимо од њега квадрат NΞ, једнак површини ZK, са истим углом ΛОМ при ΛМ. Према томе су квадрати ΛМ и NΞ на истој дијагонали. Нека њихова дијагонала буде ОР и допунимо слику. Пошто су сад површине AI и ZK медијалне и једнаке одговарајућим квадратима ΛО и ОN, биће и квадрати ΛО и ОN медијални. Према томе су и дужи ΛО и ОN медијалне и самерљиве само у степену. И пошто је правоугаоник обухваћен од AZ и ZH једнак квадрату на ЕН, биће AZ према ЕН као ЕН према ZH. Но AZ је према ЕН као AI према ЕК, значи и ЕН је према ZH као ЕК према ZK. Према томе је ЕК средња пропорционала за AI и ZK. А за квадрате ΛМ и NΞ је средња пропорционала МN. И површина AI једнака је квадрату ΛМ, а површина ZK — квадрату NΞ. И према томе је површина МN једнака ЕК. Но ΔΘ је једнако ЕК, а

ΛΞ површини MN. Према томе је цела површина ΔK једнака гномону ΥΦΧ и квадрату NΞ. Пошто је сад цела површина ΔK једнака збиру површина ΛM и NΞ, од којих је ΔK једнако гномону и квадрату NΞ, биће остатак AB једнак ΤΣ. Но ΤΣ је квадрат на ΛN. Значи квадрат на ΛN једнак је површини AB. На овај начин је ΛN страна квадрата једнаког површини AB.

Тврдим да је ΛN прва апотома медијале.

Заиста, пошто је површина EK рационална и једнака ΛΞ, биће рационална и површина ΛΞ, тј. површина обухваћена са ΛO и ON. Али је доказано да је квадрат на NΞ медијалан. Према томе је ΛΞ несамерљиво са NΞ. Но ΛΞ је према NΞ као ΛO према ON. Због тога су дужи ΛO и ON несамерљиве по дужини. Значи ΛO и ON су медијале, самерљиве само у степену, које обухватају рационалну површину. Према томе је ΛN прва апотома медијале. И она је страна квадрата једнаког површини AB.

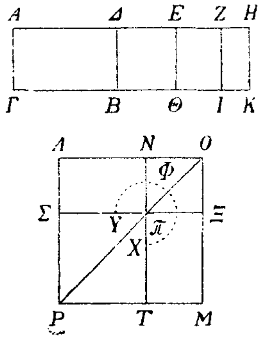
На овај начин је страна квадрата, једнаког површини AB, прва апотома медијале. А то је требало доказати.[91]

93.

Ако је површина обухваћена рационалном дужи и трећом апотомом, онда квадрат, једнак тој површини, има за страну другу апотому медијале.

Нека је површина AB обухваћена рационалном дужи AΓ и трећом апотомом AΔ. Тврдим да је страна квадрата, једнаког површини AB, друга апотома медијале.

Заиста, нека је ΔH додатак за AΔ. Према томе су дужи AH и HΔ рационалне и самерљиве само у степену, и ниједна од AH и HΔ није самерљива по дужини са датом рационалном дужи AΓ, и квадрат на целој дужи AH је већи од квадрата на дужи ΔH за квадрат на дужи самерљивој са AH. Пошто је сад квадрат на AH већи од квадрата на HΔ за квадрат на дужи самерљивој са AH, онда, ако се конструише на AH паралелограм једнак четвртини квадрата на HΔ са квадратном допуном, он ће поделити AH на самерљиве делове. Преполовимо сад ΔH тачком E и конструишимо на AH паралелограм једнак квадрату на EH са квадратном допуном, и нека то буде паралелограм обухваћен са AZ и ZH. И повуцимо кроз тачке E, Z, H праве EΘ, ZI, HK паралелне правој AΓ. Стога ће дужи AZ и ZH бити самерљиве. А тада су самерљиве и површине AI и ZK. И пошто су AZ и ZH самерљиве по дужини, биће и AH самерљиво по дужини са сваком од AZ и ZH. Но AH је рационална дуж и несамерљива по дужини са AΓ, те значи да су такве и AZ и ZH. Према томе је свака од површина AI и ZK медијална. Затим, пошто је ΔE самерљиво по дужини са EH, биће и ΔH самерљиво по дужини са сваким од ΔE и EH. Но дуж HΔ је рационална и несамерљива по дужини са AΓ. Према томе је рационална и свака од ΔE и EH и несамерљива по дужини са AΓ. А свака од површина ΔΘ и EK је медијална. И пошто су AH и HΔ самерљиве само у степену, биће AH несамерљиво по дужини са HΔ. Но AH је самерљиво по дужини са AZ, а ΔH са EH, због тога је AZ несамерљиво по дужини са EH. Како је AZ према EH као AI према EK, биће несамерљиво и AI са EK.



Конструишимо сад квадрат ΛM једнак површини AI и одузмимо од њега квадрат NΞ, једнак површини ZK, са истим углом при ΛM. Према томе су квадрати ΛM и NΞ на истој дијагонали. Нека њихова дијагонала буде OP и допунимо слику. Пошто је сад површина обухваћена од AZ и ZH једнака квадрату на EH, биће AZ према EH као EH према ZH. Но AZ је према EH као AI према EK, а EH је према ZH као EK према ZK; и према томе је AI према EK као EK према ZK. На овај начин је EK средња пропорционала за AI и ZK. А за квадрате ΛM и NΞ средња пропорционала је површина MN. И површина AI једнака је квадрату ΛM, а површина ZK квадрату NΞ, па према томе је површина EK једнака површини MN. Но MN је једнако ΛΞ, а EK једнако ΔΘ. Због тога је цела површина ΔK једнака гномону YΦX са квадратом NΞ. Исто тако и цела површина AK је једнака збиру квадрата ΛM и

NΞ. А тада је остатак AB једнак површини ΣТ, тј. квадрату на ΛN. На овај начин је ΛN страна квадрата једнаког површини AB.

Тврдим да је ΛN друга апотома медијале.

Заиста, пошто је доказано да су површине AI и ZK медијалне и једнаке квадратима на ΛO и ON, биће медијални и сваки од квадрата на ΛO и на ON; па према томе је медијала и свака од ΛO и ON. И пошто је AI самерљиво са ZK, биће и квадрат на ΛO самерљив са квадратом на ON. Затим, пошто је доказано да је AI несамерљиво са EK, биће несамерљиво и ΛM са MN, тј. квадрат на ΛO са правоугаоником обухваћеним са ΛO и ON. Због тога је и дуж ΛO несамерљива по дужини са ON. На тај начин су ΛO и ON медијалне самерљиве само у степену.

Тврдим да оне и обухватају медијалну површину.

Заиста, пошто је доказано да EK медијална површина и она је једнака површини обухваћеној са ΛO и ON, биће и та површина, обухваћена са ΛO и ON, медијална. Значи ΛO и ON су медијале самерљиве само у степену које обухватају медијалну површину. Према томе је ΛN друга апотома медијале. И она је страна квадрата једнаког површини AB.

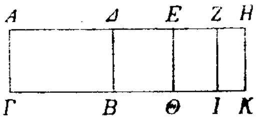
На овај начин је страна квадрата, једнаког површини AB, друга апотома медијале. А то је требало доказати.[92]

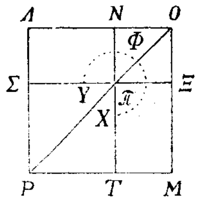
94.

Ако је површина обухваћена рационалном дужи и четвртом апотомом, онда квадрат, једнак тој површини, има за страну „мању" (ирационалност).

Нека је површина AB обухваћена рационалном дужи AΓ и четвртом апотомом AΔ. Тврдим, да је страна квадрата, једнаког површини AB, „мања".

Заиста, нека је ΔH додатак за AΔ. Према томе су дужи AH и HΔ рационалне самерљиве само у степену и AH је самерљиво по дужини са датом дужи AΓ, а квадрат на целој дужи AH већи од квадрата на додатку ΔH за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са AH. Пошто је сад квадрат на AH већи од квадрата на HΔ за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са AH, онда, ако се конструише на AH паралелограм једнак четвртини квадрата на ΔH са квадратном допуном, он ће поделити AH на несамерљиве делове. Преполовимо ΔH тачком E и конструишимо на AH паралелограм једнак квадрату на EH са квадратном допуном и нека то буде паралелограм обухваћен са AZ и ZH. Тада је AZ несамерљиво по дужини са ZH. Повуцимо сад кроз тачке E, Z, H праве EΘ, ZI, HK паралелне са AΓ и BΔ. Пошто је сад дуж AH рационална и самерљива по дужини са AΓ, рационална је и цела површина AK. Затим, пошто је дуж ΔH несамерљива по дужини са AΓ, а обе су рационалне, биће површина ΔK медијална. Даље, пошто је дуж AZ несамерљива по дужини са ZK, биће и површина AI несамерљива са површином ZK. Конструишимо сад квадрат ΛM једнак површини AI и одузмимо од њега квадрат NΞ једнак површини ZK, са истим углом ΛOM при NΞ. Према томе су квадрати ΛM и NΞ на истој дијагонали. Нека њихова дијагонала буде OP и допунимо слику. Пошто је сад површина обухваћена од AZ и ZH једнака квадрату на EH, биће пропорција: AZ према EH као EH према ZH. Но AZ је према EH као AI према EK, а EH према ZH као EK према ZK. Према томе је EK средња пропорционала за AI и ZK. Но и MN је средња пропорционала за квадрате ΛM и NΞ и при томе AI је једнако ΛM, а ZK једнако NΞ. На овај начин је површина EK једнака површини MN. Но EK је једнако ΔΘ, а површини MN је једнака површина ΛΞ. А цела површина ΔK једнака је гномону ΥΦΧ са NΞ. Пошто је цело AK једнако збиру квадрата ΛM и NΞ, а ΔK је једнако гномону ΥΦΧ са квадратом NΞ, биће остатак AB једнак ΣT, тј. квадрату на ΛN. На овај начин ΛN је страна квадрата једнаког површини AB.





Тврдим да је ΛN ирационала такозвана „мања".

Заиста, пошто је површина AK рационална и једнака збиру квадрата на ΛO и на ON, биће тај збир рационалан. Затим, пошто је површина ΔК медијална и једнака двострукој површини обухваћеној са ΛО и ОN, биће та двострука површина обухваћена са ΛО и ОN медијална. И пошто је доказано да је АI несамерљиво са ZК, биће несамерљив и квадрат на ΛО са квадратом на ОN. Дакле дужи ΛО и ОN су несамерљиве у степену, збир састављен од квадрата на њима рационалан, а двоструки правоугаоник обухваћен њима медијалан. На овај начин је дуж ΛN ирационална такозвана „мања". И једнака је страни квадрата једнаког површини АВ.

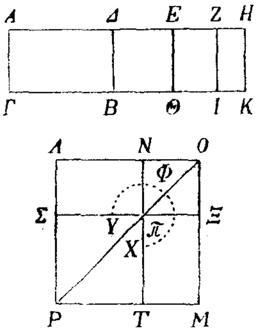
На овај начин је страна квадрата, једнаког површини АВ, „мања". А то је требало доказати.[93]

95.

Ако је површина обухваћена рационалном дужи и петом апотомом, онда квадрат, једнак тој површини, има за страну „дуж која са рационалном образује цело медијално".

Нека је површина АВ обухваћена рационалном дужи АГ и петом апотомом АΔ. Тврдим да је страна квадрата, једнаког површини АВ, „дуж која са рационалном образује цело медијално".

Заиста, нека је ΔН додатак за АΔ. Према томе су дужи АН и НΔ рационалне самерљиве само у степену и додатак НΔ је самерљив по дужини са датом рационалном дужи АГ, а квадрат на целој дужи АН је већи од квадрата на ΔН за квадрат на дужи несамерљивој са АН. Онда, ако се конструише на АН паралелограм једнак четвртини квадрата на НΔ са квадратном допуном, он ће поделити АН на несамерљиве делове. Преполовимо ΔН тачком Е и конструишимо на АН паралелограм једнак квадрату на ЕН са квадратном допуном и нека то буде паралелограм обухваћен са АZ и ZН. Стога ће АZ бити несамерљиво по дужини са ZН. И пошто је АН несамерљиво по дужини са ГА, а оба су рационални, биће АК



медијално. Затим, пошто је ΔΗ рационално и самерљиво по дужини са ΑΓ, биће и ΔΚ рационално. Конструишимо сад квадрат ΛΜ једнак ΑΙ и одузмимо од њега квадрат ΝΞ једнак ΖΚ са истим углом ΛΟΜ. Тада су квадрати ΛΜ и ΝΞ на истој дијагонали. Нека ΟΡ буде њихова дијагонала и допунимо слику. На сличан начин се доказује да је ΛΝ страна квадрата једнаког површини ΑΒ.

Тврдим да је ΛΝ „дуж која са рационалном образује цело медијално".

Заиста, пошто је доказано да је ΑΚ медијално и једнако збиру квадрата на ΛΟ и на ΟΝ, онда је тај збир квадрата на ΛΟ и на ΟΝ медијалан. Затим, пошто је ΔΚ рационално и једнако двоструком правоугаонику обухваћеном са ΛΟ и ΟΝ, биће и тај правоугаоник рационалан. А како је ΑΙ несамерљиво са ΖΚ, биће и квадрат на ΛΟ несамерљив са квадратом на ΟΝ. Према томе су ΛΟ и ΟΝ несамерљиви у степену, збир квадрата на њима је медијалан и двоструки правоугаоник од њих рационалан. На овај начин, остатак, дуж ΛΝ је ирационална и зове се „дуж која са рационалном образује цело медијално", а једнака је страни квадрата једнаког површини ΑΒ.

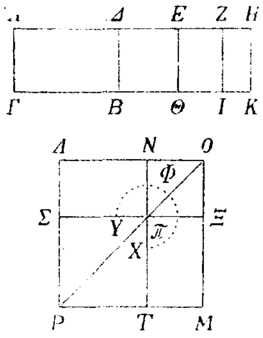
На овај начин је страна квадрата, једнаког површини ΑΒ, „дуж која са рационалном образује цело медијално". А то је требало доказати.[94]

96.

Ако је површина обухваћена рационалном дужи и шестом апотомом, онда квадрат, једнак тој површини, има за страну „дуж која са медијалном образује медијално".

Нека је површина ΑΒ обухваћена рационалном дужи ΑΓ и шестом апотомом ΑΔ. Тврдим да је страна квадрата, једнаког површини ΑΒ, „дуж која са медијалном образује цело медијално".

Заиста, нека је ΔΗ додатак за ΑΔ. Према томе су дужи ΑΗ и ΗΔ рационалне самерљиве само у степену, и ниједна од њих није самерљива по дужини са датом рационалном дужи ΑΓ, и квадрат на целом ΑΗ је већи од квадрата на ΔΗ за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са ΑΗ. Пошто је сад квадрат на АН већи од квадрата на НΔ за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са АН, онда, ако се конструише на АН паралелограм једнак четвртини квадрата на НΔ са квадратном допуном, он ће поделити АН на несамерљиве делове. Преполовимо сад ΔН тачком Е и конструишимо на АН паралелограм једнак квадрату на ЕН са квадратном допуном и нека то буде паралелограм обухваћен са AZ и ZH. AZ ће стога бити несамерљиво по дужини са ZH. Но AZ је према ZH као AI према ZK. Према томе је несамерљиво и AI са ZK. И пошто су АН и АГ рационални самерљиви само у степену, биће АК медијално. Затим, пошто су дужи АГ и ΔН рационалне и несамерљиве по дужини, медијално је и ΔК. Пошто су сад АН и НΔ самерљиви само у степену, биће АН несамерљиво по дужини са НΔ. И како је АН према НΔ као АК према КΔ, биће несамерљиво и АК са КΔ. Конструишимо сад квадрат ΛМ једнак површини AI и одузмимо квадрат NΞ, једнак ZK, са истим углом при NΞ. Тада су квадрати ΛМ и NΞ на истој дијагонали. Нека то буде дијагонала ОР, и допунимо слику. Слично, као раније, може се доказати да је квадрат ча ΛN једнак површини АВ.



Тврдим да је ΛN „дуж која са медијалном образује цело медијално“.

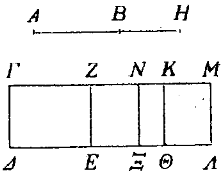
Заиста, пошто је доказано да је АК медијално и једнако збиру квадрата на ΛО и на ОN, онда је и тај збир квадрата на ΛО и на ОN медијалан. Затим, пошто је доказано да је ΔК медијално, а једнако је двоструком правоугаонику обухваћеном са ΛО и ОN, онда је и тај двоструки правоугаоник са странама ΛО и ОN медијалан. И пошто је доказано да је АК несамерљиво са ΔК, биће несамерљив и збир квадрата на ΛО и на ОN са двоструким правоугаоником обухваћеним од ΛО и ОN. И пошто је несамерљиво AI са ZK, несамерљив је и квадрат на ΛО са квадратом на ОN. Према томе су дужи ΛО и ОN несамерљиве у степену, збир квадрата на њима је медијалан и двострука површина правоугаоника састављена од њих медијална и збир квадрата на њима је несамерљив са двоструким правоугаоником од њих. Према томе је дуж ΛN ирационална, такозвана „дуж која са медијалном образује цело медијално“, и једнака је страни квадрата једнаког површини AB.

На овај начин је страна квадрата, једнаког површини обухваћеној рационалном дужи и шестом апотомом, „дуж која са медијалном образује цело медијално“. А то је требало доказати.[95]

97.

Правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на апотоми, има за ширину прву апотому.

Нека је AB апотома, ΓΔ рационална дуж и на ΓΔ конструисани правоугаоник ΓE, једнак квадрату на AB, коме је ширина ΓZ. Тврдим да је ΓZ прва апотома.



Заиста, нека је BH додатак за апотому AB. Тада су AH и HB рационалне дужи самерљиве само у степену. И конструишимо на ΓΔ правоугаоник ΓΘ, једнак квадрату на AH, и правоугаоник KΛ једнак квадрату на BH. Према томе је цела површина ΓΔ једнака збиру квадрата на AH и на HB. Преполовимо ZM тачком N и повуцимо кроз тачку N праву NΞ паралелну ΓΔ. Биће тада свака од површина ZΞ, ΛN једнака правоугаонику обухваћеном са AH и HB. Пошто је збир квадрата на AH и на HB рационалан, а тај збир је једнак површини ΔM, биће и површина ΔM рационална; а конструисана је на дужи ΓΔ са ширином ΓM. Према томе је дуж ΓM рационална и самерљива по дужини са ΓΔ. Затим, пошто је двоструки правоугаоник обухваћен са AH и HB медијалан, а тај двоструки правоугаоник једнак површини ZΛ, биће и површина ZΛ медијална. Али она је конструисана на рационалној дужи ΓΔ са ширином ZM. Према томе је рационална и ZM и несамерљива по дужини са ΓΔ. И пошто је збир квадрата на AH и на HB рационалан, а двоструки правоугаоник обухваћен са AH и HB медијалан, биће збир квадрата на АН и на НВ несамерљив са двоструким правоугаоником коме су стране АН и НВ. А како је збир квадрата на АН и на НВ једнак површини ГΔ, а двоструки правоугаоник са АН и НВ једнак површини ZΛ, биће несамерљива површина ГΛ са површином ZΛ. Но ΔМ је према ZΛ као ГМ према ZМ. Значи дуж ГМ је несамерљива по дужини са ZМ. А обе су рационалне. На овај начин су дужи ГМ и МZ рационалне и самерљиве само у степену. И према томе је ГZ апотома.

Тврдим да је прва.

Заиста, пошто је за квадрате на АН и на НВ средња пропорционала правоугаоник са странама АН и НВ, а квадрат на АН је једнак површини ГΘ, квадрат на ВН једнак површини КΛ и правоугаоник са странама АН и НВ површини NΛ, биће средња пропорционала за површине ГΘ и КΛ површина NΛ. И према томе је ГΘ према NΛ као NΛ према КΛ. Но ГΘ је према NΛ као ГК према NМ, а NΛ је према КΛ као NМ према КМ. Према томе је правоугаоник обухваћен са ГК и КМ једнак квадрату на NМ, тј. четвртини квадрата на ZМ. И пошто је квадрат на АН самерљив са квадратом на НВ, биће самерљива и површина ГΘ са површином КΛ. Но ГΘ је према КΛ као ГК према КМ. Према томе је самерљива и дуж ГК са дужи КМ. Сад, пошто су ГМ и МZ две неједнаке дужи и на ГМ је конструисан правоугаоник, једнак четвртини квадрата ан ZМ, са квадратном допуном, наиме правоугаоник обухваћен са ГК и КМ, а ГК је самерљиво са КМ, биће квадрат на ГМ већи од квадрата на МZ за квадрат на дужи која је самерљива по дужини са ГМ. И ГМ је дуж самерљива по дужини са датом рационалном дужи ГΔ. Према томе је ГZ прва апотома.

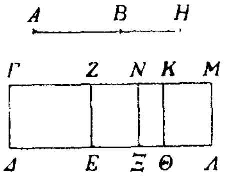
На овај начин, правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на апотоми, има за ширину прву апотому. А то је тебало доказати.[96]

98.

Правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на првој медијалној апотоми, има за ширину другу апотому.

Нека је AB прва медијална апотома, ГΔ рационална дуж и на ГΔ је конструисан правоугаоник ГЕ, једнак квадрату на AB, коме је ширина ГZ. Тврдим да је ГZ друга апотома.

Заиста, нека је BH додатак за AB. Тада су AH и HB медијале, самерљиве у степену, које обухватају рационалну површину. И конструишимо на ГΔ правоугаоник ГΘ, једнак квадрату на AH, са ширином КМ. Према томе је цела површина ГΛ једнака збиру квадрата на AH и на HB. Значи и ГΛ је медијална површина. И конструисана је на рационалној дужи ГΔ и има за ширину ГМ. На овај начин и ГМ је рационална дуж и несамерљива по дужини са ГΔ. И пошто је површина ГΛ једнака збиру квадрата на AH и на HB, а квадрат на AB једнак је површини ГЕ, биће остатак, двоструки правоугаоник са странама AH и HB, једнак површини ZΛ. Но двоструки правоугаоник са странама AH и HB је рационалан. Према томе је рационална и површина ZΛ. И конструисана је на рационалној дужи ZE и има за ширину ZM. На тај начин је рационална и дуж ZM и самерљива по дужини са ГΔ. Пошто је сад збир квадрата на AH и на HB, тј. површина ГΛ, медијална, а двоструки правоугаоник са странама AH и HB, тј. површина ZΛ, рационалан, биће површина ГΛ несамерљива са површином ZΛ. Но ГΛ је према ZΛ као ГМ према ZM, па према томе и дуж ГМ је несамерљива по дужини са ZM. А обе су рационалне. Значи дужи ГМ и MZ су рационалне и самерљиве само у степену. Дакле ГZ је апотома.



Тврдим да је друга.

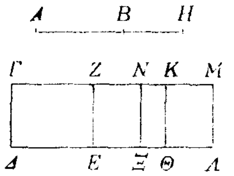
Заиста, преполовимо ZM тачком N и повуцимо кроз N праву NΞ паралелну правој ГΔ. Тада је свака од површина од ZΞ и NΛ једнака правоугаонику са странама AH и HB. И пошто је за квадрате на AH и на HB средња прапорционала правоугаоник са странама AH и HB, и квадрат на AH једнак је ГΘ, правоугаоник са странама AH и HB једнак NΛ и квадрат на BH једнак је КΛ, онда је средња прапорционала за ГΘ и КΛ површина NΛ. И према томе је ГΘ према NΛ као NΛ према КΛ. Но ГΘ је према NΛ као ГК према NM, а NΛ је према КΛ као NM према МК. Према томе је ГК према NM као NM према КМ, те значи да је правоугаоник обухваћен са ГК и КМ једнак квадрату на NM, тј. четвртини квадрата на ZM [и пошто је квадрат на АН самерљив са квадратом на ВН, самерљива је и површина ГΘ са површином КΛ, тј. дуж ГК са дужи КМ]. Сад, пошто су ГМ и МZ две неједнаке дужи и на већој ГМ је конструисан правоугаоник једнак четвртини квадрата на МZ, са квадратном допуном, наиме правоугаоник обухваћен странама ГК и КМ, а и ГК је самерљиво са КМ, биће квадрат на ГМ већи од квадрата на МZ за квадрат на дужи самерљивој са ГМ. И додатак ZМ је самерљив по дужини са датом рационалном дужи ГΔ. Према томе је ГZ друга апотома.

На овај начин, правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на првој медијалној апотоми, има за ширину другу апотому. А то је требало доказати.

99.

Правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на другој медијалној апотоми, има за ширину трећу апотому.

Нека је АВ друга медијална апотома, ГΔ рационална дуж и на ГΔ конструисан правоугаоник ГЕ једнак квадрату на АВ, са ширином ГZ. Тврдим да је ГZ трећа апотома.



Заиста, нека је ВН додатак за АВ. Тада су АН и НВ медијале, самерљиве у степену, које обухватају медијалну површину. И конструишимо на ГΔ правоугаоник ГΘ, једнак квадрату на АН, са ширином ГК, и на КΘ правоугаоник КΛ једнак квадрату на ВН, са ширином КМ. Према томе је цела површина ГΛ једнака збиру квадрата на АН и НВ [а квадрати на АН и на НВ су медијални]. Према томе је медијална и површина ГΛ. И она је конструисана на рационалној дужи ГΔ и има за ширину ГМ. На овај начин и ГМ је рационална дуж и несамерљива по дужини са ГΔ. И пошто је цела површина ГΛ једнака збиру квадрата на АН и на НВ, а површина ГЕ је једнака квадрату на АВ, биће остатак, површина ΛZ, једнака двоструком правоугаонику обухваћеном странама АМ и НВ. Преполовимо сад ZМ тачком N и повуцимо NΞ паралелно ΓΔ. Значи, свака од површина ZΞ и NΛ је једнака правоугаонику са странама AH и HB. Али тај правоугаоник је медијалан, значи да је медијална и површина ZΛ. А конструисана је на рационалној дужи EZ и има за ширину ZM. На тај начин је рационална и дуж ZM и несамерљива по дужини са ΓΔ. А пошто су AH и HB самерљиве само у степену, биће AH несамерљиво по дужини са HB. Па према томе је несамерљив и квадрат на AH са правоугаоником коме су стране AH и HB. Но са квадратом на AH су самерљиви квадрати на AH и на HB, а са правоугаоником са странама AH и HB двоструки правоугаоник са странама AH и HB. Значи квадрати на AH и HB несамерљиви су са двоструким правоугаоником коме су стране AH и HB. Но збир квадрата на AH и на HB једнак је површини ΓΛ, а двоструки правоугаоник са странама AH и HB једнак површини ZΛ. Отуда следује да је ΓΛ несамерљиво са ZΛ. Но ΓΛ је према ZΛ као ΓM према ZM. Према томе је дуж ΓM несамерљива по дужини са ZM. И обе су рационалне. Према томе су дужи ΓM и MZ рационалне, самерљиве само у степену. На овај начин је ΓZ апотома.

Тврдим да је трећа.

Заиста, пошто је квадрат на AH самерљив са квадратом на HB, самерљива је и површина ΓΘ са површином KΛ. Па према томе и ΓK са KM. И пошто је за квадрате на AH и на HB средња пропорционала правоугаоник са странама AH и HB, а квадрат на AH је једнак површини ΓΘ, квадрат на HB једнак површини KΛ, правоугаоник са AH и HB једнак површини NΛ, биће за површине ΓΘ и KΛ средња пропорционала површина NΛ, те је према томе ΓΘ према NΛ као NΛ према KΛ. Но ΓΘ је према NΛ као ΓK према MN, а NΛ је према KΛ као NM према KM; према томе је ΓK према MN као MN према KM. И на тај начин је правоугаоник са странама ΓK и KM једнак квадрату на MN, тј. четвртини квадрата на ZM. Пошто су сад ΓM и MZ две неједнаке дужи и на ΓM је конструисан правоугаоник једнак четвртини квадрата на ZM са квадратном допуном и он дели ΓM на самерљиве делове, биће квадрат на ΓM већи од квадрата на MZ за квадрат на дужи самерљивој са ГМ. И ниједна од дужи ГМ и МZ није самерљива по дужини са датом рационалном дужи ГΔ. Дакле, ГZ је трећа апотома.

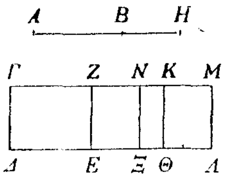
На овај начин, правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на другој медијалној апотоми, има за ширину трећу апотому. А то је требало доказати.

100.

Правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на „мањој" (ирационали), има за ширину четврту апотому.

Нека је АВ „мања" (ирационала), ГΔ рационална дуж и на ГΔ конструисани правоугаоник ГЕ једнак квадрату на АВ са ширином ГZ. Тврдим да је ГZ четврта апотома.

Заиста, нека је ВН додатак за АВ. Тада су АН и НВ несамерљиве у степену, збир квадрата на АН и НВ је рационалан, а двоструки правоугаоник обухваћен са АН и НВ је медијалан. И конструишимо на ГΔ правоугаоник ГΘ, једнак квадрату на АН, са ширином ГК, и правоугаоник КΛ, једнак квадрату на ВН, са ширином КМ. Значи цела површина ГΛ је једнака збиру квадрата на АН и на НВ. Но збир ових квадрата је рационалан, па је рационална и цела површина ГΛ. А она је конструисана на рационалној дужи ГΔ и има ширину ГМ. Значи да је рационална и ГМ и самерљива по дужини са ГΔ. И пошто је цела површина ГΛ једнака збиру квадрата на АН и на НВ, а површина ГЕ једнака квадрату на АВ, биће остатак ZΛ једнак двострукој површини правоугаоника са странама АН и НВ. Сад преполовимо ZМ тачком N и повуцимо кроз тачку N праву NΞ паралелну свакој од ГΔ и МΛ. Значи свака од површина ZΞ, NΛ једнака је правоугаонику са странама АН и НВ. И пошто је двоструки правоугаоник са странама АН и НВ медијалан и једнак површини ZΛ, медијална је и површина ZΛ. А конструисана је на рационалној дужи ZE са ширином ZМ. Према томе је рационална и ширина ZМ и несамерљива по дужини са ГΔ. И пошто је



збир квадрата на AH и на HB рационалан, а двоструки правоугаоник са странама AH и HB медијалан, биће збир квадрата на AH и на HB несамерљив са двоструким правоугаоником са странама AH и HB. Но збир квадрата на AH и на HB једнак је површини ΓΛ, а двоструки правоугаоник са странама AH и HB — површини ZΛ, према томе је несамерљива и површина ΓΛ са површином ZΛ. Но ΓΛ је преме ZΛ као ΓM према MZ, због тога је дуж ΓM несамерљива по дужини са MZ. И обе су оне рационалне; дакле дужи ΓM и MZ су рационалне, самерљиве само у степену. На овај начин ΓZ је апотома.

Тврдим да је четврта.

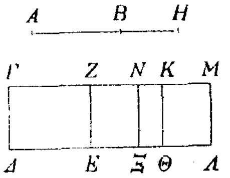
Заиста, пошто су дужи AH и HB несамерљиве у степену, биће несамерљив и квадрат на AH са квадратом на HB. И једнака је површина ΓΘ квадрату на AH, а површина KΛ квадрату на HB. Према томе је несамерљива и површина ΓΘ са површином KΛ. Но ΓΘ је према KΛ као ΓK према KM. Услед тога је дуж ΓK несамерљива по дужини са KM. И пошто је за квадрате на AH и на HB средња пропорционала правоугаоник са странама AH и HB, квадрат на AH једнак површини ΓΘ, квадрат на HB површини KΛ, а правоугаоник са странама AH и HB површини NΛ, биће за површине ΓΘ и KΛ средња пропорционала површина NΛ. Стога је ΓΘ према NΛ као NΛ према KΛ. Но ΓΘ је према NΛ као ΓK према NM, и NΛ према KΛ као NM према KM. Према томе је ΓK према MN као MN према KM. Значи правоугаоник са странама ΓK и KM једнак је квадрату на MN, тј. четвртини квадрата на ZM. Пошто су сад ΓM и MZ две неједнаке дужи и на ΓM је конструисан правоугаоник једнак четвртини квадрата на MZ са квадратном допуном, наиме правоугаоник са странама ΓK и KM, и он дели ΓM на несамерљиве делове, биће квадрат на ΓM већи од квадрата на MZ за квадрат на дужи која је несамерљива са ΓM. А цела дуж ΓM је самерљива по дужини са датом рационалном дужи ΓΔ. Према томе је ΓZ четврта апотома.

На овај начин, правоугаоник итд.

101.

Правоугаоник конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на „дужи која са рационалном образује цело медијално“ има за ширину пету апотому.

Нека је AB „дуж која са рационалом образује цело медијално”, ΓΔ рационална дуж и на ΓΔ је конструисан правоугаоник ΓΕ, једнак квадрату на AB, са ширином ΓZ. Тврдим да је ΓZ пета апотома.



Заиста, нека је BH додатак за AB. Тада су AH и HB дужи несамерљиве у степену, збир квадрата на њима медијалан, а двоструки правоугаоник образован од њих рационалан. И конструишимо на ΓΔ правоугаоник ΓΘ, једнак квадрату на AH, и правоугаоник KΛ једнак квадрату на HB. Према томе је цела површина ΓΛ једнака збиру квадрата на AH и на HB. Но збир квадрата на AH и на HB је медијалан, те је медијална и површина ΓΛ. И она је конструисана на рационалној дужи ΓΔ и има ширину ΓM, због тога је рационална и дуж ΓM и несамерљива са ΓΔ. И пошто је цела површина ΓΛ једнака збиру квадрата на AH и на HB, а површина ΓE једнака квадрату на AB, биће остатак ZΛ једнак двоструком правоугаонику са странама AH и HB. Преполовимо ZM тачком M и повуцимо кроз N праву NΞ паралелну свакој од ΓΔ и MΛ. Тада је свака од површина ZΞ, NΛ једнака правоугаонику са странама AH и HB. И пошто је двоструки правоугаоник са странама AH, HB рационалан и једнак површини ZΛ, рационална је и површина ZΛ. И конструисана је на рационалној дужи EZ а има ширину ZM. Према томе је рационална и дуж ZM и самерљива по дужини са ΓΔ. А како је ΓΛ медијално, а ZΛ рационално, биће ΓΛ несамерљиво са ZΛ. Но ΓΛ је према ZΛ као ΓM према MZ, према томе је дуж ΓM несамерљива по дужини са MZ. И обе су оне рационалне. Значи ΓM и MZ су рационалне самерљиве само у степену. На овај начин ΓZ је апотома.

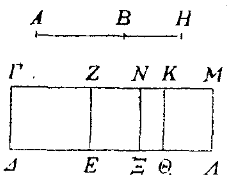
Тврдим да је пета.

Заиста, слично се доказује да је правоугаоник са странама ГК и КМ једнак квадрату на NМ, тј. четвртини квадрата на ZМ. И пошто је квадрат на АН несамерљив са квадратом на НВ, квадрат на АН једнак површини ГΘ, квадрат на НВ површини КΛ, биће и површина ГΘ несамерљива са површином КΛ. А како је ГΘ према КΛ као ГК према КМ, биће несамерљива по дужини и дуж ГК са дужи КМ. Пошто су сад ГМ и МZ две неједнаке дужи и на ГМ је конструисан правоугаоник једнак четвртини квадрата на ZМ, са квадратном допуном, а он дели ГМ на несамерљиве делове, биће квадрат на ГМ већи од квадрата на МZ за квадрат на дужи несамерљивој са ГМ. И додатак ZМ је несамерљив са датом рационалном дужи ГΔ. На овај начин је ГZ пета апотома. А то је требало доказати.

102.

Правоугаоник, конструисан на рационалној дужи и једнак квадрату на „дужи која са медијалном образује цело медијално”, има за ширину шесту апотому.

Нека је АВ „дуж која са медијалном образује цело медијално“, ГΔ рационална дуж, и на ГΔ конструисан правоугаоник ГЕ једнак квадрату на АВ, са ширином ГZ. Тврдим да је ГZ шеста апотома.



Заиста, нека је ВН додатак за АВ. Тада су АН и НВ дужи несамерљиве у степену, збир квадрата на њима је медијалан и двоструки правоугаоник са странама АН и НВ медијалан и збир квадрата на АН и на НВ несамерљив са двоструким правоугаоником коме су стране АН и НВ. И конструишимо на ГΔ површину ГΘ једнаку квадрату на АН са ширином ГК и површину КΛ једнаку квадрату на ВН. Према томе је цела површина ГΛ једнака збиру квадрата на АН и на НВ. Значи и ГΛ је медијална површина. И конструисана је на рационалној дужи ГΔ са ширином ГМ, због тога је рационална и дуж ГМ и несамерљива по дужини са ГΔ. И пошто је цела површина ГΛ једнака збиру квадрата на АН и на НВ, а површина ГЕ једнака квадрату на АВ, биће остатак ZΛ једнак двоструком правоугаонику са странама AH и HB. И двоструки правоугаоник са странама AH и HB је медијалан, значи и површина ZΛ је медијална. И конструисана је на ZE а има ширину ZM. Према томе је рационална и дуж ZM и несамерљива по дужини са ΓΔ. И пошто је збир квадрата на AH и на HB несамерљив са двоструким правоугаоником коме су странама AH и HB, и збиру квадрата на AH и HB је једнака површина ΓΛ, а двоструки правоугаоник са странама AH и HB једнак површини ZΛ, биће несамерљива и површина ΓΛ са површином ZΛ. Но ΓΛ је према ZΛ као ΓM према MZ, па према томе су несамерљиве по дужини и дужи ΓM и MZ. И обе су рационалне. На овај начин су дужи ΓM и MZ рационалне, самерљиве само у степену. А према томе је ΓZ апотома.

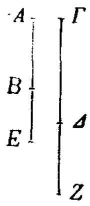
Тврдим да је шеста.

Заиста, пошто ZΛ једнако двоструком правоугаонику са странама AH и HB, преполовимо ZM тачком N и повуцимо кроз тачку N праву NΞ паралелну ΓΔ. Тада је свака од површина ZΞ и NΛ једнака правоугаонику са странама AH и HB. И пошто су дужи AH и HB несамерљиве у степену, биће и квадрат на AH несамерљив са квадратом на HB. Но квадрат на AH је једнак површини ΓΘ, а квадрат на HB једнак површини KΛ. На тај начин је и површина ΓΘ несамерљива са површином KΛ. Но ΓΘ је према KΛ као дуж ΓK према дужи KM. Значи и дуж ΓK је несамерљива са дужи KM. И пошто је за квадрате на AH и на HB средња пропорционала правоугаоник са странама AH и HB, квадрат на AH једнак је површини ΓΘ, квадрат на HB једнак површини KΛ и правоугаоник са странама AH и HB једнак површини NΛ, биће и за површине ΓΘ и KΛ средња пропорционала површина NΛ. Но ΓΘ је према NΛ као NΛ према KΛ. Из истих разлога квадрат на ΓM је већи од квадрата на MZ за квадрат на дужи несамерљивој са ΓM. И ниједна од њих није самерљива са датом рационалном дужи ΓΔ. На овај начин ΓZ је шеста апотома. А то је требало доказати.

103.

Дуж самерљива по дужини са апотомом је апотома и то истога реда.

Нека је AB апотома и ΓΔ дуж самерљива по дужини са AB. Тврдим да је ΓΔ апотома и истога реда као и AB.



Заиста, пошто је AB апотома, нека BE буде њен додатак. Тада су дужи AE и EB рационалне и самерљиве само у степену. И начинимо тако да AB буде према ΓΔ у истом односу као што је BE према ΔZ. Но део једног целог је према одговарајућем делу другог целог као прво цело према другом. И према томе је цела дуж AE према целој дужини ΓZ као AB према ΓΔ. Но дуж AB је самерљива по дужини са ΓΔ, па је према томе самерљива и дуж AE са ΓZ, а BE са ΔZ. И AE и EB су рационалне самерљиве само у степену, значи и дужи ΓZ и ZΔ рационалне и самерљиве само у степену. [На овај начин, ΓΔ је апотома.

Тврдим да је она истога реда као и AB]

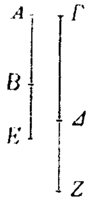
Пошто је сад AE према ΓZ као BE према ΔZ, биће, после измене реда средњих чланова, AE према EB као ΓZ према ZΔ. Тада је квадрат на AE већи од квадрата на EB за квадрат на дужи која је или самерљива са AE или несамерљива. Ако је квадрат на AE већи од квадрата на EB за квадрат на дужи самерљивој са AE, биће и квадрат на ΓZ већи од квадрата на ZΔ за квадрат на дужи самерљивој са ΓZ. И ако је дуж AE самерљива по дужини са датом рационалном дужи, биће самерљива и ΓZ, а ако је самерљива дуж BE, биће и ΔZ, а ако ниједна од AE и EB није самерљива, неће бити ниједна ни од ΓZ и ZΔ. А ако је квадрат на AE већи од квадрата на EB за квадрат на дужи несамерљивој са AE, биће и квадрат на ΓZ већи од квадрата на ZΔ за квадрат на дужи несамерљивој са ΓZ. И ако је AE самерљиво по дужини са датом рационалном дужи, биће самерљива и ΓZ, а ако је BE, биће и ΔZ, а ако ниједна од AE и EB, неће бити ниједна ни од ΓZ и ZΔ.

На овај начин ΓΔ је апотома и то истога реда као и AB. А то је требало доказати.[97]

104.

Дуж самерљива са медијалном апотомом је медијална апотома и то истога реда.

Нека је АВ медијална апотома и дуж ГΔ самерљива по дужини са АВ. Тврдим да је ГΔ медијална апотома и истога реда као и АВ.



Заиста, пошто је АВ медијална апотома, нека је ЕВ њен додатак. Према томе су АЕ и ЕВ медијале самерљиве само у степену. И начинимо тако да буде АВ према ГΔ као ВЕ према ΔZ. Значи и дуж АЕ самерљива је са ГZ, а дуж ВЕ са ΔZ. Но АЕ и ЕВ су медијале самерљиве само у степену. Значи и ГZ и ZΔ су медијале самерљиве само у степену. На овај начин ГΔ апотома.

Тврдим да је истога реда као и АВ.

Заиста, пошто је АЕ према ЕВ као ГZ према ZΔ [но АЕ је према ЕВ као квадрат на АЕ према правоугаонику са странама АЕ и ЕВ, а ГZ је према ZΔ као квадрат на ГZ према правоугаонику са странама ГZ и ZΔ], биће квадрат на АЕ према правоугаонику са странама АЕ и ЕВ као квадрат на ГZ према правоугаонику са странама ГZ и ZΔ [и, после пермутације, квадрат на АЕ према квадрату на ГZ као правоугаоник са странама АЕ и ЕВ према правоугаонику са странама ГZ и ZΔ]. Но квадрат на АЕ је самерљив са квадратом на ГZ. Значи самерљив је и правоугаоник са странама АЕ и ЕВ са правоугаоником са странама ГZ и ZΔ. Сад, ако је правоугаоник са странама АЕ и ЕВ рационалан, биће рационалан и правоугаоник са странама ГZ и ZΔ, а ако је правоугаоник са странама АЕ и ЕВ медијалан, биће медијалан и правоугаоник са странама ГZ и ZΔ.

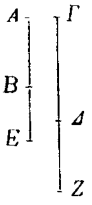
На овај начин, дуж самерљива са медијалном апотомом је медијална апотома и то истога реда. А то је требао доказати.

105.

Дуж самерљива са „мањом“ (ирационалом) је „мања“.

Нека је АВ „мања“ и ГΔ дуж самерљива са АВ. Тврдим да је и ГΔ „мања“.

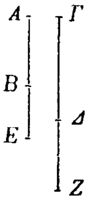
Заиста, урадимо исто што и раније. И пошто су дужи АЕ и ЕВ несамерљиве у степену, биће ГZ и ZΔ несамерљиве у степену. Сад, пошто је AE према EB као ΓZ према ZΔ, биће и квадрат на AE према квадрату на EB као квадрат на ΓZ према квадрату на ZΔ. И, после спајања, збир квадрата на AE и на EB је према квадрату на EB као збир квадрата на ΓZ и на ZΔ према квадрату на ZΔ [и са пермутацијом]. Но квадрат на BE је самерљив са квадратом на ΔZ. Значи и збир квадрата на AE и на EB самерљив је са збиром квадрата на ΓZ и на ZΔ. Но збир квадрата на AE и на EB је рационалан, због тога је и збир квадрата на ΓZ и на ZΔ рационалан. Затим, пошто је квадрат на AE према правоугаонику са странама AE и EB као квадрат на ΓZ према правоугаонику са странама ΓZ и ZΔ, а квадрат на AE је самерљив са квадратом на ΓZ, биће самерљив и правоугаоник коме су стране AE и EB са правоугаоником коме су стране ΓZ и ZΔ. Но правоугаоник са странама AE и EB је медијалан, значи медијалан је и правоугаоник са странама ΓZ и ZΔ. Према томе су дужи ΓZ и ZΔ несамерљиве у степену и збир квадрата образованих на њима је рационалан, а правоугаоник од њих медијалан.



На овај начин ΓΔ је „мања" (ирационала). А то је требало доказати.

106.

Дуж самерљива са „дужи која са рационалном образује цело медијално" је „дуж која са рационалном образује цело медијално".



Нека је AB „дуж која са рационалном образује медијално" и ΓΔ дуж самерљива са AB. Тврдим да ја ΓΔ „дуж која са рационалном образује цело медијално".

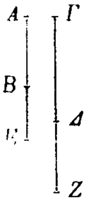
Заиста, нека је BE додатак за AB. Тада су AE и EB дужи несамерљиве у степену, оне образују медијалан збир квадрата на AE и на EB и рационалан правоугаоник са овим странама. И урадимо исто што и раније. Слично претходном се доказује да су ΓZ и ZΔ у истој размери као и AE и EB и да је збир квадрата на AE и на EB самерљив са збиром квадрата на ΓZ и на ZΔ, а правоугаоник коме су стране AE и EB самерљив са правоугаоником коме су стране ΓZ и ZΔ. Према томе су дужи ΓZ и ZΔ несамерљиве у степену и образују медијалан збир квадрата на ΓZ и на ZΔ и рационалан правоугаоник од њих.

На овај начин, ΓΔ је „дуж која са рационалном образује цело медијално“. А то је требало доказати.

107.

Дуж самерљива са „дужи која са медијалномо бразује цело медијално” и сама је „дуж која са медијалном образује цело медијално“.

Нека је AB „дуж која са медијалном образује цело медијално“ и ΓΔ дуж самерљива са AB. Тврдим да је ΓΔ „дуж која са медијалном образује цело медијално”.



Заиста, нека је BE додатак за AB. И урадимо исто што и раније. Тада су дужи AE и EB несамерљиве у степену, образују медијалан збир квадрата на њима и медијалан правоугаоник са тим странама и тај збир квадрата је несамерљив са тим правоугаоником. И тада су, како је доказано, дужи AE и EB самерљиве и са дужима ΓZ и ZΔ, и збир квадрата на AE и на EB је самерљив са збиром квадрата на ΓZ и ZΔ, и правоугаоник коме су стране AE и EB са правоугаоником коме су стране ΓZ и ZΔ. Према томе су дужи ΓZ и ZΔ несамерљиве у степену, образују медијалан збир квадрата на њима и медијалан правоугаоник од њих и тај збир квадрата је несамерљив са тим правоугаоником.

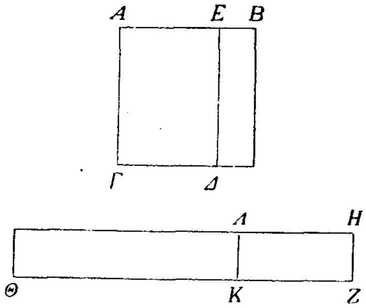
На овај начин, „дуж која са медијалном образује цело медијално“ и сама је „дуж која са медијалном образује цело медијално“. А то је требало доказати.

108.

При одузимању медијалне површине од рационалне појављују се две ирационалне дужи: апотома или „мања“.

Нека се од рационалне површине BΓ одузима медијална површина BΔ. Тврдим да је страна квадрата једнаког површини EΓ једна од две ирационалне — апотома или „мања”.

Заиста, узмимо рационалну дуж ZH, конструишимо на ZH правоугли паралелограм HΘ једнак површини ВГ и одузмимо НК, једнак површини ΔB. Тада је остатак ΛΘ једнак површини ЕГ. Сад, пошто је површина ВГ рационална, а ВΔ медијална, а ВГ је једнако НΘ, а ВΔ једнако НК, биће НΘ рационално, а НК медијално. И те површине су конструисане на рационалној дужи ZH. Значи да је рационална и дуж ZΘ и самерљива по дужини са ZH, а рационална је и дуж ZK и несамерљива по дужини са ZH. Према томе је дуж ZΘ несамерљива по дужини са ZK. Дакле дужи ZΘ и ZK су рационалне, самерљиве само у степену. На овај начин, КΘ је апотома, а KZ је њен додатак. И квадрат на ΘZ је већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи или самерљивој са ΘZ или несамерљивој.



Нека је прво за квадрат на дужи самерљивој. И цела дуж ΘZ је самерљива по дужини са датом рационалном дужи ZH. Тада је КΘ прва апотома. И страна квадрата, који је једнак правоугаонику обухваћеном рационалном дужи и првом апотомом, једнака је апотоми. Значи страна квадрата, који је једнак површини ΛΘ, тј. површини ЕГ, једнака је апотоми.

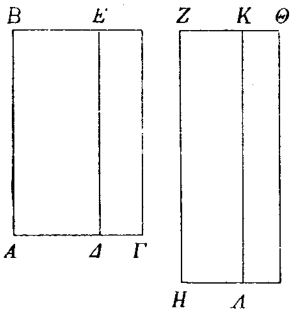
А ако је квадрат на ΘZ већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи незамерљивој са ΘZ, и цела дуж ZΘ је самерљива по дужини са узетом рационалном дужи ZH, биће КΘ четврта апотома. И страна квадрата једнаког површини обухваћеној рационалном дужи и четвртом апотомом, једнака је „мањој“, А то је требало доказати.[98]

109.

При одузимању рационалне површине од медијалне појављују се две ирационалне дужи: прва медијална апотома или „дуж која са рационалном образује цело медијално“.

Нека се од медијалне површине BΓ одузме рационална површина BΔ. Тврдим, да се као страна квадрата, једнаког површини остатка EΓ, појављује једна од две ирационалне: или прва медијална апотома, или „дуж која са рационалном образује цело медијално“.

Заиста, узмимо рационалну дуж ZH и слично претходном конструишимо површине. Тада следује да је дуж ZΘ рационална и несамерљива по дужини са ZH, а KZ је рационална и самерљива по дужини са ZH. Према томе су ZΘ и ZK рационалне и самерљиве само у степену. На тај начин, KΘ је апотома и ZK је њен додатак. И тада је квадрат на ΘZ већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи или самерљивој са ΘZ или несамерљивој са ΘZ.



Сад, ако је квадрат на ΘZ већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи самерљивој са ΘZ и додатак ZK је самерљив по дужини са датом рационалном дужи ZH, дуж KΘ је друга апотома. Но дуж ZH је рационална. Према томе страна квадрата једнаког површини ΛΘ, тј. површини EΓ, једнака је првој медијалној апотоми.

А ако је квадрат на ΘZ већи од квадрата на ZK за квадрат на дужи несамерљивој са ΘZ и додатак ZK је самерљив по дужини са узетом рационалном дужи ZH, биће KΘ пета апотома. И страна квадрата, једнаког површини EΓ, једнака је „дужи која са рационалном образује цело медијално“. А то је требало доказати.

110.

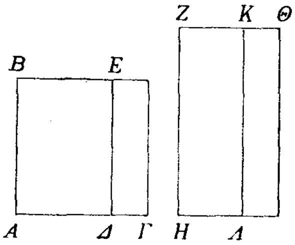
При одузимању од једне медијалне површине друге медијалне површине, несамерљиве са првом, појављују се две остале ирационале — друга медијална апотома или „дуж која са медијалном образује цело медијално“.

Одузмимо, слично као на претходним сликама, од медијалне површине BΓ медијалну површину BΔ несамерљиву са целом. Тврдим, да се као страна квадрата једнаког површини

ЕГ појављује једна од две ирационале: или друга медијална апотома или „дуж која са медијалном образује цело медијално".

Заиста, пошто је свака од површина ВГ и ВΔ медијална и ВГ је несамерљиво са ВΔ, биће свака од ZΘ и ZК рационална и несамерљива по дужини са ZН. И пошто је ВГ несамерљиво са ВΔ, тј. НΘ са НК, биће и ΘZ несамерљиво са ZК. Према томе су дужи ZΘ и ZК рационалне и самерљиве само у степену. Значи, КΘ је апотома [а ZК је додатак. И квадрат на ZΘ је већи од квадрата на ZК за квадрат на дужи, која је или самерљива са ZΘ или несамерљива].

Ако је квадрат на ZΘ већи од квадрата на ZК за квадрат на дужи самерљивој са ZΘ, и ниједна од ZΘ и ZК није самерљива по дужини са датом дужи ZН, биће КΘ трећа апотома. Но КΛ је рационална дуж, а правоугаоник обухваћен рационалном дужи и трећом апотомом је ирационалан, и страна једнаког му квадрата такође је ирационална и зове се друга медијална апотома. Према томе је страна квадрата једнаког површини ΛΘ, тј. површини ЕГ, једнака другој медијалној апотоми.



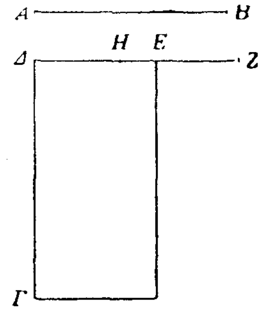
А ако је квадрат на ZΘ већи од квадрата на ZК за квадрат на дужи несамерљивој по дужини са ZΘ, и ниједна од дужи ΘZ и ZК није самерљива по дужини са ZН, КΘ је шеста апотома. Но страна квадрата, једнаког правоугаонику обухваћеном рационалном дужи и шестом апотомом, једнака је „дужи која са медијалном образује цело медијално". На овај начин, страна квадрата једнаког површини ΛΘ, тј. површини ЕГ, једнака је „дужи која са медијалном образује цело медијално". А то је требало доказати.

111.

Апотома није исто што и биномијала.

Нека је АВ апотома. Тврдим, да АВ није исто што и биномијала.

Заиста, ако је могуће, нека буде исто. Узмимо рационалну дуж ΔГ и конструишимо на ГΔ правоугаоник ГЕ једнак



квадрату на AB са ширином ΔE. Пошто је AB апотома, биће ΔE прва апотома, а EZ њен додатак. Према томе су ΔZ и ZE рационалне дужи самерљиве само у степену. И квадрат на ΔZ је већи од квадрата на ZE за квадрат на дужи самерљивој са ΔZ, и ΔZ је самерљиво по дужини са узетом рационалном дужи ΔΓ. Затим, пошто је AB биномијала, биће ΔE прва биномијала. Поделимо је на рационалне делове тачком H и нека је већи део ΔH. Тада су дужи ΔH и HE, рационалне, самерљиве само у степену. И квадрат на ΔH је већи од квадрата на HE за квадрат на дужи самерљивој са ΔH и већи део ΔH је самерљив по дужини са узетом рационалном дужи ΔΓ. Значи ΔZ је самерљиво по дужини са ΔH. Па према томе и остатак HZ је је самерљив по дужини са ΔZ. Пошто је сад ΔZ самерљиво са HZ, а ΔZ је рационално, биће рационално и HZ. Пошто је ΔZ самерљиво по дужини са HZ, несамерљиво је по дужини ΔZ са EZ. Према томе је несамерљиво по дужини и ZH са EZ. Дакле дужи HZ и ZE су рационале самерљиве само у степену. На овај начин EH је апотома. Али она је рационална. А то је немогуће.

На овај начин, апотома није исто што и биномијала. А то је требало доказати.

Последица.

Апотома и ирационале које јој следују нису исте ни са медијалом ни међу собом.

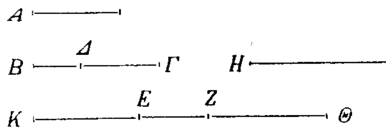
Заиста, правоугаоник, једнак квадрату на медијали, је конструисан на датој рационалној дужи, има за ширину рационалну дуж несамерљиву по дужини са дужи, на којој је конструисан правоугаоник, а правоугаоник, једнак квадрату на апотоми, конструисан на датој рационалној дужи, има за ширину прву апотому; једнак квадрату на првој медијалној апотоми има за ширину другу апотому; једнак квадрату на другој медијалној апотоми има за ширину трећу апотому; једнак квадрату на „мањој“ има за ширину четврту апотому; једнак квадрату на „дужи која са рационалном образује цело медијално“ има за ширину пету апотому; једнак квадрату на „дужи која са медијалном образује цело медијално“ има за ширину шесту апотому. Пошто се сад наведене ширине разликују како од прве, тако и једна од друге: од прве, јер је она рационална, а једна од друге, јер нису истог реда, јасно је да се и саме ирационале разликују једна од друге. И пошто је доказано да апотома није исто што и биномијала, и затим оне ирационале, које следују после апотоме, дају при конструкцији правоугаоника на рационалној дужи, као ширине, апотоме свака свог реда, а оне које следују после биномијале дају, као ширине, биномијале свога реда, онда су различите једне и друге ирационале. На овај начин према реду имамо свега 13 ових ирационала:

Медијала,
Биномијала,
Прва бимедијала,
Друга бимедијала,
„Већа“,
Страна квадрата једнаког збиру рационале и медијалне површине,
Страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине,
Апотома,
Прва медијална апотома,
Друга медијална апотота,
„Мања“,
„Дуж која са рационалном образује цело медијално“,
„Дуж која са медијалном образује цело медијално“.[99]

112.

Квадрат на рационалној дужи, конструисан на биномијали има за ширину апотому, чије су рационале самерљиве са рационалама биномијале и у истој размери; и тако добивена апотома је истога реда као и биномијала.

Нека је А рационална дуж, а ВГ биномијала, чија је већа рационала ΛΓ, и квадрат на А једнак правоугаонику са странама ВГ и EZ. Тврдим да је EZ апотома чији су делови самерљиви са ГΔ и ΔВ, и у истој размери и да је EZ истога реда као и ВГ.



Заиста, нека је поново квадрат на А једнак правоугаонику са странама ВΔ и Н. Пошто је сад правоугаоник са странама ВГ и EZ једнак правоугаонику са странама ВΔ и Н, биће ГВ према ВΔ као Н према EZ. Но ГВ је веће од ВΔ, према томе и Н је веће од EZ. Нека је EΘ једнако Н. Тада је ГВ према ВΔ као ΘЕ према EZ. И, после одвајања, ГΔ је према ВΔ као ΘZ према ZE. Начинимо тако да буде ΘZ према ZE ка ZK према KE. И цело ΘК је према целом KZ као ZK према KE, јер је један претходни према једном наредном као сви претходни према свима наредним. И ZK је према KE као ГΔ према ΔВ. Значи, ΘК је према KZ као ГΔ према ΔВ. Но квадрат на ГΔ је самерљив са квадратом на ΔВ. Па према томе је самерљив и квадрат на ΘК са квадратом на KZ. И квадрат на ΘК је према квадрату на KZ као ΘК према KE, уколико су три дужи ΘК, KZ и KE пропорционалне. Значи ΘК је самерљиво по дужини са KE. На тај начин и ΘЕ је самерљиво по дужини са ЕК. И пошто је квадрат на А једнак правоугаонику са странама EΘ и ВΔ, а квадрат на А рационалан, биће рационалан и правоугаоник са странама EΘ и ВΔ. И конструисан је на рационалној дужи ВΔ. Па према томе је рационална и дуж EΘ и самерљива по дужини са ВΔ. На тај начин и самерљива са њом ЕК је такође рационална и самерљива по дужини са ВΔ. Пошто је сад ГΔ према ΔВ као ZK према KE и ГΔ и ΔВ су самерљиве само у степену, биће и ZK и KE самерљиве само у степену. Но дуж KE је рационална. Значи да је рационална и дуж ZK. Према томе су дужи ZK и KE рационалне, самерљиве само у степену. На овај начин EZ је апотома.

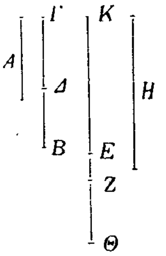
Но квадрат на ГΔ је већи од квадрата на ΔВ за квадрат на дужи која је или самерљива са ГΔ или несамерљива.

Ако је квадрат на ГΔ већи од квадрата на ΔВ за квадрат на дужи самерљивој са ГΔ, биће и квадрат на ZK већи од квадрата на KE за квадрат на дужи самерљивој са ZK. И ако је дуж ΓΔ самерљива по дужини са датом рационалном дужи, биће самерљива и ZK; ако је BΔ самерљива, биће самерљива и KE; ако није ниједна од ΓΔ и ΔB самерљива, неће бити ниједна ни од ZK и KE.

А ако је квадрат на ΓΔ већи од квадрата на ΔB за квадрат на дужи несамерљивој са ΓΔ, биће и квадрат на ZK већи од квадрата на KE за квадрат на дужи несамерљивој са ZK. И ако је дуж ΓΔ самерљива по дужини са датом рационалном дужи, биће самерљива и дуж ZK; ако је самерљива BΔ, самерљива је и KE; ако није ниједна од ΓΔ и ΔB самерљива, неће бити ниједна ни од ZK и KE. Према томе је ZE апотома, чије су рационале ZK и KE самерљиве са рационалама ΓΔ и ΔB биномијале, у истој су размери и истога реда као и BΓ. А то је требало доказати.[100]

113.

Квадрат на рационалној дужи, конструисан на апотоми има за ширину биномијалу, чије су рационале самерљиве са рационалама апотоме и у истој су размери; и тако добивена биномијала је истога реда као и апотома.



Нека је A рационална дуж, BΔ — апотома, и квадрат на A нека је једнак правоугаонику са странама BΔ и KΘ, тако да квадрат на рационалној дужи A, конструисан, као правоугаоник, на апотоми BΔ има за ширину дуж KΘ. Тврдим, да је KΘ биномијала, чије су рационале самерљиве са рационалама апотоме BΔ и у истој размери и да је KΘ истога реда као и BΔ.

Заиста, нека је ΔΓ додатак за BΔ. Тада су дужи BΓ и ΓΔ рационалне и самерљиве само у степену. И квадрат на A једнак је правоугаонику са странама BΓ и H. А како је квадрат на A рационалан, биће рационалан и правоугаоник са странама BΓ и H. И конструисан је на рационалној дужи BΓ. Због тога је рационална и дуж H и самерљива по дужини са BΓ. Пошто је сад правоугаоник са странама BΓ и H једнак правоугаонику са странама ВΔ и КΘ, постоји пропорција: ГВ је према ВΔ као КΘ према Н. Но ВГ је веће од ВΔ, па значи и КΘ је веће од Н. Узмимо КЕ једнако Н, значи КЕ је самерљиво по дужини са ВГ. И пошто је ГВ према ВΔ као ΘК према КЕ, биће, после замене једног дела другим, ВГ према ГΔ као КΘ према ΘЕ. Начинимо тако да КΘ буде према ΘЕ као ΘZ према ZЕ, па ће и остатак КZ бити према ZΘ као КΘ према ΘЕ, тј. као ВГ према ГΔ. Но дужи ВГ и ГΔ самерљиве само у степену, па према томе и дужи КZ и ZΘ биће самерљиве само у степену. И пошто је КΘ према ΘЕ као КZ према ZΘ, то је и КZ према ZΘ као ΘZ према ZЕ. А пошто је прво према трећем као квадрат на првом према квадрату на другом, то је и КZ према ZЕ као квадрат на КZ према квадрату на ZΘ. Но квадрат на КZ је самерљив са квадратом на ZΘ, јер су дужи КZ и ZΘ самерљиве у степену. Значи КZ и ZЕ су самерљиве по дужини, те је КZ самерљиво по дужини и са КЕ. Но дуж КZ је рационална и самерљива по дужини са ВГ. И пошто је ВГ према ГΔ као КZ према ZΘ, биће, после пермутовања, ВГ према КZ као ΔГ према ZΘ. Но ВГ је самерљиво са КZ, према томе и ZΘ је самерљиво по дужини са ГΔ. Но дужи ВГ и ГΔ су рационалне, самерљиве само у степену. Због тога су и дужи КZ и ZΘ рационалне, самерљиве само у степену. Дуж КΘ је према томе биномијала.

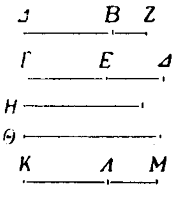
Ако је сад квадрат на ВГ већи од квадрата на ГΔ за квадрат на дужи самерљивој са ВГ, биће и квадрат на КZ већи од квадрата на ZΘ за квадрат на дужи самерљивој са КZ. И ако је ВГ самерљиво по дужини са узетом рационалном дужи, биће самерљиво и КZ, а ако је ГΔ самерљиво по дужини са узетом рационалном дужи, биће и ZΘ, а ако ниједна од ВГ и ГΔ није самерљива, неће бити самерљива ниједна од КZ и ZΘ.

А ако је квадрат на ВГ, већи од квадрата на ГΔ за квадрат на дужи несамерљивој са ВГ, биће и квадрат на КZ већи од квадрата на ZΘ за квадрат на дужи несамерљивој са КZ. И ако је ВГ самерљиво по дужини са узетом рационалном дужи, биће самерљиво и КZ, а ако је ГΔ самерљиво, биће и ZΘ, а ако ниједна од ВГ и ГΔ није самерљива, неће бити ниједна ни од КZ и ZΘ.

На овај начин, КΘ је биномијала, чије су две рационале КZ и ZΘ самерљиве са рационалама ВГ и ГΔ апотоме и у истој размери са њима. И КΘ има исти ред са ВГ. А то је требало доказати.

114.

Ако је површина (правоугаоника) обухваћена апотомом и биномијалом чије су рационале самерљиве са рационалама апотоме и у истој размери, биће страна квадрата једнаког тој површини рационална.



Нека је површина (правоугаоника) са странама АВ и ГΔ обухваћена апотомом АВ и биномијалом ГΔ и нека је ГЕ већа рационала биномијале; нека су рационале ГЕ и ЕΔ биномијале самерљиве са рационалама АZ и ZВ апотоме и у истој размери са њима, и нека је Н страна квадрата једнаког правоугаонику са странама АВ и ГΔ. Тврдим да је дуж Н рационална.

Заиста, узмимо рационалну дуж Θ и конструишимо на ГΔ правоугаоник, једнак квадрату на Θ, коме је ширина КΛ. Према томе је КΛ апотома, чије су рационале КМ и МΛ самерљиве са рационалама ГЕ и ЕΔ биномијале и у истој размери са њима. Према томе је АZ према ZВ као КМ према МΛ. И, после пермутовања, АZ је према КМ као ВZ према ΛМ. Значи и остатак АВ је према остатку КΛ као АZ према КМ. Но АZ је самерљиво са КМ, па значи и АВ је самерљиво са КΛ. И АВ је према КЛ као правоугаоник са странама ГΔ и АВ према правоугаонику са странама ГΔ и КΛ. Значи и правоугаоник са странама ГΔ и АВ је самерљив са правоугаоником са странама ГΔ и КΛ. Но правоугаоник са странама ГΔ и КΛ једнак је квадрату на Н. Због тога је правоугаоник са странама ГΔ и АВ самерљив са квадратом на Θ. Али правоугаоник са странама ГΔ и АВ једнак је квадрату на Н. Значи и квадрат на Н је самерљив са квадратом на Θ. А како је квадрат на Θ рационалан, биће рационалан и квадрат на Н. Значи рационална је и дуж Н. И квадрат на њој је једнак правоугаонику са странама ГΔ и АВ.

На овај начин, ако је површина обухваћена апотомом и биномијалом чије су рационале самерљиве са рационалама апотоме и у истој размери, биће страна квадрата једнаког тој површини рационална.

Последица.

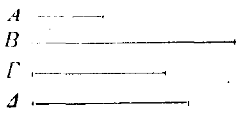
И услед тога постало нам је јасно да рационална површина може бити обухваћена ирационалним дужима. А то је требало доказати.

115.

Од медијале настаје бескрајно много ирационала и ниједна није иста ни са једном од претходних.

Нека је А медијала. Тврдим, да од А настаје бескрајно много ирационала и ниједна од њих није иста ни са једном од претходних.

Узмимо рационалну дуж В и нека је правоугаоник са странама В и А једнак квадрату на Г. Тада је дуж Г ирационална, јер је правоугаоник обухваћен ирационалном и рационалном дужи ирационалан. И она није иста ни са једном од претходних. Заиста, правоугаоник, једнак квадрату на некој од претходних, конструисан на рационалној дужи, нема за ширину медијалу. Затим, нека је правоугаоник са странама В и Г једнак квадрату на Δ. Тада је ирационалан квадрат на Δ. А ирационална је и дуж Δ. И она није иста ни са једном од претходних. Заиста, правоугаоник, једнак квадрату на некој од претходних, конструисан на рационалној дужи, нема за ширину Г. Јасно је да при продужењу сличног поступка до бесконачности, настају из медијале ирационале у бесконачној множини и ниједна није иста ни са једном од претходних. А то је требало доказати.[101]



КОМЕНТАР

[1] У претходним Еуклидовим књигама дефиниције су биле стављене само једанпут, у почетку књиге. Садржај ове, десете књиге развија се у три дела толико компликовано да је Еуклид нашао за згодно да подели и дефиниције у три групе. Прва група је стављена у почетку књиге, друга испред 48. става, а трећа испред 85. става. У првој групи се говори о величинама самерљивим и несамерљивим, рационалним и ирационалним. Сем тога у тексту овог првог дела дефинисане су још ирационалности које сачињавају такозвану прву „хексаду". У другој групи су дефинисане нове ирационалности према Еуклидовом систему. Најзад, као предмет дефиниција треће групе служи појам „апотоме" — исто тако од прве до шесте врсте. Анализа тих појмова биће изложена на одговарајућим местима.

[2] У првој дефиницији се уводе појмови самерљивих (σύμμετρος) и несамерљивих (ἀσύμμετρος) величина. Како ћемо видети из друге дефиниције, Еуклидов садржај појмова самерљивости и несамерљивости је шири од савременог садржаја. Ако се зауставимо, са Еуклидом, само на геометриској претстави величина, савремени појам самерљивости и несамерљивости односи се само на Еуклидову самерљивост и несамерљивост по дужини, тј. на самерљивост величина сматраних као величине једне димензије, тако рећи првог степена. Две величине a и b су самерљиве, ако постоји таква величина c да је $a=mc$, $b=nc$, при чему су m и n цели бројеви.

Приметимо да у другом делу ове дефиниције услов несамерљивости није формулисан у облику да не постоји заједничка мера, већ у облику да не може бити одређена. Таква мала разлика у изразима (неки преводиоци употребљују први, једноставнији израз, други се дословно придржавају Еуклидовог текста, где стоји μηδὲν ἐνδέχεται.... γενέσθαι) говори о конкретности Еуклидове мисли, наиме о немогућности добивања заједничке мере.

[3] У другој дефиницији се проширују појмови самерљивости и несамерљивости. Еуклид уводи, сем самерљивости по дужини (μήκει σύμμετρος) и самерљивост у степену (δυνάμει σύμμετρος), при чему се стварно зауставља само на квадратном степену. Ту квадратну самерљивост алгебарски можемо једноставно формулисати овако. Две величине a и b су квадратно самерљиве ако је

$$(*) \qquad a^2 = m\,c, \qquad b^2 = n\,c,$$

при чему су m и n цели бројеви.

Две величине могу бити самерљиве и по дужини и квадратно. Пример: $a = 2\,\mathrm{cm}$, $b = 3\,\mathrm{cm}$, јер је

$$a = 2 \times 1\,\mathrm{cm}, \qquad b = 3 \times 1\,\mathrm{cm}$$

$$a^2 = 4 \times 1\,\mathrm{cm}^2, \qquad b^2 = 9 \times 1\,\mathrm{cm}^2.$$

Али две величине могу бити самерљиве квадратно и несамерљиве по дужини. Пример: $a = \sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ — дијагонала квадрата са страном од једног центиметра и $b = \sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ — дијагонала правоугаоника са димензијама од $1\,\mathrm{cm}$ и $2\,\mathrm{cm}$ су несамерљиве по дужини, јер не постоји такво c за које бисмо у једначинама

$$\sqrt{2} = m\,c, \qquad \sqrt{5} = n\,c$$

могли наћи целе бројеве m и n. Али пошто је

$$a^2 = 2\,\mathrm{cm}^2, \qquad b^2 = 5\,\mathrm{cm}^2$$

према (*) имамо $c = 1\,\mathrm{cm}^2$ и $m = 2$ и $n = 5$. Према томе су две величине a^2 и b^2 самерљиве, са заједничком мером површином. Тада су величине a и b, по Еуклиду, такође самерљиве али самерљиве само квадратно или у степену.

Употребљујући уствари само квадратну самерљивост но не конкретизујући у својој дефиницији квадратни степен, Еуклид није искључио могућност за проширење појма самерљивости у степену и на више степене. Можемо казати да су a и b самерљиве у k’ том степену, ако су испуњени услови

$$(^{**}) \qquad a^k = mc\,, \quad b^k = nc\,,$$

где су опет m и n цели бројеви.

Еуклидово проширење појма самерљивости на величине несамерљиве у данашњем смислу стварно се односи на класификацију несамерљивих величина, односно ирационалних бројева. Ту Еуклидову класификацију треба сматрати као прве елементе савремене теорије алгебарских бројева (алгебарских тела), па чак и трансцендентних бројева, за које не постоји такво k за које важе једначине (**), односно не постоји алгебарска једначина са целим коефицијентима, чији је корен трансцендентни број. Према томе је већ у Еуклидово време, пре више од две хиљаде година, математичка мисао додиривала оне идеје које су се стварно почеле развијати тек у другој половини деветнаестог века.

Приметимо да Еуклидов појам самерљивости у степену не стоји у битној супротности са савременом класификацијом самерљивих и несамерљивих величина и бројева. Еуклид примењује реч самерљивост, са допуном — у степену, тамо, где сад почиње несамерљивост, али и данашња несамерљивост може бити у степену и почиње од квадратне несамерљивости. Према томе питање самерљивости и несамерљивости остаје само у области условне терминологије. Да не компликујемо наш коментар морамо следовати Еуклидовој терминологији. И, према теме, можемо тврдити да две величине могу бити према самерљивости и несамерљивости по дужини и квадратно у овим односима:

самерљиве по дужини — тада су — самерљиве и квадратно

несамерљиве и квадратно
↗
несамерљиве по дужини
↘
самерљиве само квадратно

[4] Доказ за тврђење којим почиње ова дефиниција изнесен је тек у ставу 10. ове књиге. Даље Еуклид узима као полазну неку произвољну дуж и сматра је као рационалну

(ρητός — обичан смисао те речи — изразив). У произвољности бирања те дужи је релативност одређивања рационалности и ирационалности других дужи. Друкчије стоји са рационалним и ирационалним бројевима, који се увек узимају у односу према јединици. Дуж која је самерљива са изабраном дужи у Еуклидову смислу, тј. по дужини и квадратно или само квадратно, зове се исто тако рационална, а несамерљива у истом смислу — ирационална (ἄλογος — неизразив, па чак и противан здравом смислу). Према томе, кад је

$$b = \frac{m}{n} a \quad \text{или} \quad b = \sqrt{\frac{m}{n}}\, a$$

величина a и b су рационалне и у случају кад m/n није потпуни квадрат.

[5] У овој дефиницији је за полазну величину узет произвољан квадрат, рецимо Q, и сматран као рационална величина. Тада је нека површина P рационална, ако је задовољен услов

$$P = \frac{m}{n} Q,$$

где су са m и n означени, као и увек, цели бројеви, и ирационална под условом

$$P \neq \frac{m}{n} Q.$$

При чему су, у последњем случају, ирационалне и дужи q и p, кад је q страна квадрата Q, а p је или страна квадрата P, ако је то квадрат, или страна оног квадрата чија је површина једнака површини праволиниске слике P.

Историја ирационалних величина и бројева а, у вези са тим, и историја одговарајуће терминологије сад је доста разрађена и претставља опширну главу у историји математике. У овом коментару не можемо улазити у ту историју. Од литературе се можемо пре свега позвати на познату књигу J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik. B. II. 1933.

[6] У доказу ове теореме Еуклид искоришћава један став: „... величина Г поновљена више пута даје једном вели-

чину већу од AB", чији садржај не износи као аксиому. Међутим тај став треба истаћи као аксиому; то је такозвана Архимедова аксиома, основа сваке метрике.

Први став ове Еуклидове књиге се може пропратити наредним аналитичким расуђивањем.

Нека је

$$a > b.$$

Претпоставимо да, на основу Архимедове аксиоме, имамо

$$a < 3b \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{3} a < b.$$

Узмимо сад величину већу за ε_1 од половине a

$$\frac{1}{2} a + \varepsilon_1$$

и израчунајмо први остатак

$$a_1 = a - \left(\frac{1}{2} a + \varepsilon_1 \right) = \frac{1}{2} a - \varepsilon_1 .$$

Затим израчунајмо други остатак

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} a - \varepsilon_1 \right) - \varepsilon_2 = \frac{1}{4} a - \frac{1}{2} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 .$$

Како је

$$\frac{1}{4} a - \frac{1}{2} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 < \frac{1}{3} a ,$$

јер је

$$\frac{1}{4} a < \frac{1}{3} a ,$$

а

$$\frac{1}{3} a < b ,$$

биће и

$$\frac{1}{4} a - \frac{1}{2} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 < b ,$$

а то је тражени резултат.

У општем случају, кад је

$$a < nb\,,$$

пре свега искључимо две претпоставке: 1. случај $n=1$ је супротан услову да је $a > b$; 2. За $n=2$ имамо непосредно из услова

$$a < 2\,b$$

да је

$$\frac{1}{2}a - \varepsilon_1 < b,$$

а то и тражи теорема.

Према томе треба анализирати само случајеве кад је

$$a < nb \quad \text{и} \quad n > 2.$$

За тај случај треба израчунати $(n-1)$' ви остатак

$$a_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}a - \varepsilon,$$

где је ε нека величина не мања од нуле.

Како је сад за $n > 2$

$$\frac{1}{2^{n-1}}a < \frac{1}{n}a < b$$

видимо да увек постоји такав цео број $n > 2$ за који ове неједначине вреде, а то и потврђује теорему.

И из наведеног аналитичког расуђивања је јасно да теорема остаје на снази кад одузимамо тачно половине, тј. под условом да су сви ε једнаки нули.

[7] Пре свега приметимо да грчку реч ἀνθυφαιρουμένου преводимо „наизменично“. Она је употребљена у смислу да се од прве величине одузима друга, па затим од друге одузима остатак прве, па даље од остатка прве одузима остатак друге итд. То је Еуклидов алгоритам о коме је већ било говора у почетку VII књиге, где је тај поступак био развијен у детаљима у примени на бројеве. Разлика је у томе што је за целе бројеве тај поступак коначан, а за несамерљиве величине он је бесконачан. У вези са тим поступком коментатори се много задржавају на самом појму бес-

коначности и на историском развитку тог појма. У наш задатак не улази ни анализа тих појмова ни њихов историски преглед.

Приметимо да ова теорема даје методу за испитивање самерљивости и несамерљивости величина, или још не утврђује стварно постојање несамерљивих величина у геометрији.

Напоменимо да се Еуклидов алгоритам аналитички изражава овим једначинама:

$$a = nb + r \,,$$

$$b = n_1 r + r_1 \,,$$

$$r = n_2 r_1 + r_2 \,,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{n-2} = n_n r_{n-1} + r_n \,,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Учинимо и једну формалну примедбу. У излагању теорема свих претходних књига, у Heiberg'овом издању, на крају текста се понављао текст теореме у потпуности. У овој књизи је овакво понављање понекад изостављено. Понавља се само почетак текста теореме и после прекида завршава реченицом: „καὶ τὰ ἑξῆς“ — шта се преводи „итд“.

[8] Решавање овог задатка је потпуно аналогно решавању задатака о одређивању н. з. ч. два броја; то решавање је било изложено у књ. VII, 2. Тамо је наведена и последица аналогна овој последици.

[9] И овај задатак има свој аналогон у књ. VII, 3.

[10] Поновимо Еуклидов доказ у скраћеној алгебарској форми.

Из

$$A = \Delta \cdot \Gamma, \qquad B = E \cdot \Gamma$$

следују две пропорције

$$\Gamma : A = 1 : \Delta, \qquad \Gamma : B = 1 : E \,;$$

прву претстављамо у обрнутом облику

$$A : \Gamma = \Delta : 1$$

и изражавамо, заједно са другом,

$$A:\Gamma:B=\Delta:1:E,$$

одакле, према „једнакоудаљености“, узимамо размере првог члана према трећем, тј.

$$A:B=\Delta:E,$$

а то и доказује теорему.

У савременом излагању истинитост теореме непосредно следује из једначина

$$\frac{A}{B}=\frac{\Delta\cdot\Gamma}{E\cdot\Gamma}=\frac{\Delta}{E}.$$

Еуклиду није била позната алгебра размере као количника.

[11] Поновимо кратко у алгебарском облику доказ и ове теореме.

Дато је:

$$\frac{A}{B}=\frac{m}{n}.$$

Уводимо Γ према једнакости $A=m\Gamma$ поделом A на m једнаких делова. Затим конструишимо $Z=n\Gamma$. Тада имамо пропорције

$$\frac{\Gamma}{A}=\frac{1}{m} \quad \text{или} \quad \frac{A}{\Gamma}=\frac{m}{1}$$

$$\frac{\Gamma}{Z}=\frac{1}{n};$$

из тих пропорција изводимо

$$A:\Gamma:Z=m:1:n,$$

одакле, на основу „једнакоудаљености“, добивамо пропорцију

$$\frac{A}{Z}=\frac{m}{n},$$

која, после упоређивања са датом пропорцијом, $A:B=m:n$, доводи до резултата $Z=B=n\Gamma$, па према томе су A и B самерљиве.

У последици прво имамо тврђење да се може конструисати дуж Z из услова

$$m:n=A:Z.$$

А затим се из пропорције

$$A:B=B:Z$$

изводи закључак да је

$$\frac{A}{Z}=\frac{A^2}{B^2}=\frac{m}{n},$$

а то и потврђује друго тврђење последице.

[12] Девета теорема има четири дела. Формулишимо алгебарски садржај тих делова. Велика слова су величине, мала — бројеви.

I. $A=m\Gamma, \quad B=n\Gamma \quad \longrightarrow \quad A^2:B^2=m^2:n^2.$

II. $A^2:B^2=m^2:n^2 \quad \longrightarrow \quad A=m\Gamma, \quad B=n\Gamma.$

III. $A\neq m\Gamma, \quad B\neq n\Gamma \quad \longrightarrow \quad A^2:B^2\neq m^2:n^2.$

IV. $A^2:B^2\neq m^2:n^2 \quad \longrightarrow \quad A\neq m\Gamma, \quad B\neq n\Gamma.$

Са гледишта савремене алгебре ови ставови су готово очигледни.

Што се тиче последице, први њен део је написан једноставно и јасно. Део после заграде [до краја написан је таквим стилом да је Heiberg ставио тај текст у заграду, сматрајући да он не припада Еуклиду, а неки преводиоци (Heath, Zapelloni у издању Enriques'a) тај део потпуно изостављају.

[13] Поновимо кратко решење овог проблема.

Дата је дуж A.

1. Узмимо таква ева броја b и c да буде

$$\frac{b}{c}=\frac{mn}{m_1 n_1}.$$

Тада можемо одредити дуж Δ тако да буде

$$\frac{A^2}{\Delta^2}=\frac{mn}{m_1 n_1},$$

али кад бројеви m и n нису пропорционални са бројевима m_1 и n_1, тада је

$$\frac{mn}{m_1 n_1}\neq\frac{k^2}{k_1^2}$$

и према томе

$$\frac{A^2}{\Delta^2} \neq \frac{k^2}{k_1^2}$$

и

$$\frac{A}{\Delta} \neq \frac{k}{k_1},$$

а то значи да Δ није самерљиво са A по дужини.

2. Одредимо средњу пропорционалу E за A и Δ, тј. ставимо

$$A:E = E:\Delta .$$

Тада је

$$A:\Delta = A^2:E^2 ,$$

а како је Δ несамерљиво са A по дужини, биће E несамерљиво са A у степену, те према томе несамерљиво и по дужини.

Овом теоремом, која се заснива на претходној леми и на теоремама о самерљивости и несамерљивости бројева, утврђује се постојање несамерљивих величина, несамерљивих како само по дужини, тако и у степену.

[14] Доказ можемо кратко овако изразити.

Дато је

$$(*) \qquad \frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} .$$

1. Ако су A и B самерљиви, имамо

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n},$$

а из (*) следује да је и

$$\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{m}{n},$$

а одавде излази самерљивост величина Γ и Δ.

2. Слично се изводи и други део теореме из неједнакости

$$\frac{A}{B} \neq \frac{m}{n}$$

за случај несамерљивости.

[15] Изразимо обрасцима доказ и ове теореме.

$$\frac{A}{\Gamma}=\frac{\Delta}{E}, \qquad \frac{\Gamma}{B}=\frac{Z}{H},$$

$$\frac{\Delta}{E}=\frac{\Theta}{K}, \qquad \frac{Z}{H}=\frac{K}{\Lambda},$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A}{\Gamma}=\dfrac{\Delta}{E}=\dfrac{\Theta}{K} \longrightarrow \dfrac{A}{\Gamma}=\dfrac{\Theta}{K}, \\ \dfrac{\Gamma}{B}=\dfrac{Z}{H}=\dfrac{K}{\Lambda} \longrightarrow \dfrac{\Gamma}{B}=\dfrac{K}{\Lambda}, \end{array}\right. \longrightarrow \frac{A}{B}=\frac{\Theta}{\Lambda}$$

[16] Врло кратак текст друге половине ове леме, који гласи „τίνι μεῖζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος,“ толико је кратак и стручан да постаје разумљив тек пошто се прочита доказ ове леме. Да бисмо га учинили разумљивим, проширили смо превод тог текста.

Садржај леме се односи на конструкције израза $x=\sqrt{a^2-b^2}$ и $y=\sqrt{a^2+b^2}$.

[17] Ту исту теорему ћемо пропратити и алгебарским језиком.

(*) $$A:B=\Gamma:\Delta,$$

$$\therefore \quad A^2:B^2=\Gamma^2:\Delta^2,$$

али су

$$A^2=E^2+B^2, \qquad \Gamma^2=\Delta^2+Z^2$$

и према томе је

$$\frac{E^2+B^2}{B^2}=\frac{\Delta^2+Z^2}{\Delta^2}$$

$$\therefore \quad \frac{E^2}{B^2}=\frac{Z^2}{\Delta^2},$$

$$\therefore \quad (**) \quad \frac{E}{B}=\frac{Z}{\Delta}.$$

Па из (*) и (**) следује

$$A:B:E=\Gamma:\Delta:Z,$$

$$\therefore \quad A:E=\Gamma Z.$$

А из ове пропорције непосредно следују особине самерљивости и несамерљивости.

[18] Наведимо алгебарски аналогон ове теореме.

1. Ако је $a = mc$ и $b = nc$, биће $s = a + b = (m+n)c = kc$ и према томе из самерљивости a и b следује самерљивост s са a и b.

2. Ако је $s = a + b = kc$ и $a = mc$, биће $b = s - a = (k-m)c = nc$ па, значи, из самерљивости s и a (односно s и b) следује самерљивост a и b (односно b и a).

[19] Релативно кратак и по садржају врло прост текст ове леме претсавља пример грчког стручног текста, који се знатно разликује по форми од нашег савременог текста истог садржаја. Према грчком тексту паралелограм је „приложен“ правој линији или „стављен“ на праву и то само на један део дужи; а да је он стављен само на један део следује тек посредно из чињенице што он има ἐλλεῖπον, тј. оно што недостаје, допуну. При томе се подразумева да је у овом случају паралелограм правоугаоник, јер је његова допуна квадрат.

[20] Пропратимо доказ ове теореме скраћеним алгебарским ознакама и наводима употребљених ставова.

Дато је: $a > b$, $a = a_1 + a_2$, при чему је a_1 самерљиво са a_2 и

(1) $$4\,a_1\,a_2 = b^2.$$

Доказати да је под таквим условима дуж k из једначине

(2) $$a^2 - b^2 = k^2$$

самерљива са a.

1. $$a_1 a_2 + \left(\frac{a}{2} - a_2\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$ Теорема 5. књ. II.

Са алгебарског гледишта то је идентитет за $a = a_1 + a_2$

2. $$4\,a_1\,a_2 + 4\left(\frac{a}{2} - a_2\right)^2 = 4\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

3. $$b^2 + (a - 2\,a_2)^2 = a^2$$

4. $$a^2 - b^2 = k^2 = (a - 2\,a_2)^2$$

5. $$k = a - 2a_2\,.$$

Даље се служимо теоремом 15. ове књиге и закључујемо:

6. $a_1 \frown a_2$, *)
7. $(a_1 + a_2) \frown a_2$,
8. $a \frown a_2$.
9. $a \frown 2a_2$,
10. $a \frown (a - 2a_2)$,
11. $a \frown k$.

Тиме је теорема доказана.

На сличан начин се доказује и обрнута теорема која тврди да, из услова $a \frown k$, следује $a_1 \frown a_2$.

Како ову тако и наредну, 18. теорему треба сматрати као врло важне критеријуме за одређивање рационалности и ирационалности корена квадратне једначине у Еуклидовој теорији ирационалних величина.

Ако ставимо $a_1 = x$ из (1) имамо

$$x(a - x) = \frac{b^2}{4}, \tag{3}$$

одакле је

$$x = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - b^2}).$$

Према томе рационалност односно самерљивост корена квадратне једначине (3) зависи од рационалности броја k у једначини (2). Пошто је $a_1 = x_1$ и $a_2 = x_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b^2})$, може се казати: ако су корени рационални, k је самерљиво са a, и обрнуто, ако је k самерљиво са a, корени су рационални.

---

*) Употребили смо, као и Heath, кратку Lorenz'ову ознаку $\frown$ самерљивости једне величине са другом по дужини. Знак $\smile$ одговара несамерљивости по дужини. Знаци $\frown\!\!-$ и $\smile\!\!-$ одговарају самерљивости и несамерљивости у степену, квадратној.

Сличној анализи се подвргавају решења како квадратних једначина другог облика, тако и система једначина са две непознате, који се своде на квадратну једначину.

[21] У вези са ознакама у коментару претходне теореме, резултат ове теореме се може овако изразити:

1. Из $a_1 \smile a_2$ следује $\sqrt{a^2-b^2} \smile a$,
2. Из $\sqrt{a^2-b^2} \smile a$ следује $a_1 \smile a_2$.

Како смо навели, ова теорема, заједно са претходном, поставља услове ирационалности корена квадратне једначине

$$x\,(a - x) = \frac{1}{4}\,b^2.$$

[22] Учинимо неколико примедаба. 1. Речи у загради [ ] могу се изоставити баш ради јаснијег формулисања садржаја теореме. 2. Појам рационалности једне једине величине без упоређивања са другом, рецимо, са јединичном, остаје код Еуклида нејасан. Претпоставља се да је таква величина самерљива са другом, у датом случају са квадратом, чија је величина узета за основну. 3. Алгебарски та теорема се доказује овим закључком: из $a:b = m:n$ следује $a^2:ab = m:n$, тј. правоугаоник ab је самерљив са квадратом a^2.

[23] Једноставније можемо текст ове теореме формулисати овако:

Рационалан правоугаоник на рационалној основи има и рационалну висину, самерљиву по дужини са основом.

[24] Ову теорему можемо алгебарски формулисати овако. Нека су a и b две, у Еуклидовом смислу, рационалне дужи, самерљиве само у степену. Тада можемо ставити:

$$a^2 = ms, \quad b^2 = ns,$$

где су m и n међусобно прости цели бројеви, који нису потпуни квадрати, и s највећа заједничка мера коју можемо узети за јединицу и после тога ставити

$$a = \sqrt{m}, \quad b = \sqrt{n}.$$

Тада је

$$ab = \sqrt{mn}$$

и, према томе, очевидно, ирационалан број.

Исто тако, страна μ квадрата са површином једнаком површини правоугаоника која износи

$$\mu = \sqrt{ab} = \sqrt{\sqrt{m}\ \sqrt{n}} = \sqrt[4]{mn}$$

ирационалан је број. Величина μ грчки се зове μέση — средња. Већина преводилаца, према преводиоцу Еуклидових елемената на латински језик — Gerhardt'у из Кремоне — преводи ту реч са медијала (medialis), јер је за ту средњу величину згодно употребити нарочити термин, како би се разликовао од назива других средњих величина.

[25] Лема изражава врло просту особину размере:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{b \cdot a} = \frac{a^2}{ab}.$$

Прочитана геометриски она даје садржај леме.

[26] Савременим алгебарским језиком теорема се овако тумачи.

Пошто медијалу μ можемо изразити овако

$$\mu = \sqrt{\sqrt{m}\ \sqrt{n}}\ c,$$

где су m и n међусобно прости бројеви, не потпуни квадрати, и c је нека дужина, која може бити и јединица, за правоугаоник са димензијама a и b, при чему је a рационално, тј. $a = \frac{p}{q}\ c$, имамо

$$a\,b = \mu^2 = \sqrt{m}\ \sqrt{n}\ c^2 = \sqrt{k}\ c^2,$$

где је $k = mn$. Одавде је

$$b = \frac{q\sqrt{k}}{p}\ c.$$

Тај образац показује да је b рационално у Еуклидовом смислу, али није самерљиво са c по дужини.

Текст Еуклидова доказа ове теореме доста је компликован и, да би се лакше читао, згодно је пратити одговарајуће операције и закључке у алгебарској форми.

[27] Алгебарски ова теорема се овако проверава.

Дато је: $\mu=\sqrt{\sqrt{k}}\;c$ и $x:\mu=p:q$, где су ознаке очигледне.

Тада је

$$x=\frac{\mu p}{q}=\sqrt{\sqrt{k}}\cdot\frac{cp}{q}=\sqrt{\sqrt{k}}\;c',$$

а овај израз и потврђује теорему.

[28] Ову теорему можемо овако протумачити.

Пошто су стране правоугаоника, као медијале, самерљиве по дужини, можемо их изразити на овај начин

$$\mu_1=\sqrt{\sqrt{m}\,\sqrt{n}\,p_1\,c}\,,\qquad \mu_2=\sqrt{\sqrt{m}\,\sqrt{n}\,p_2\,c}\,,$$

где су ознаке очигледне из претходног коментара, и за површину правоугаоника имамо

$$\mu_1\,\mu_2=\sqrt{m}\;\sqrt{n}\;p_1\,p_2\,c^2,$$

а, у услед тога, за страну квадрата једнаког површини правоугаоника добивамо

$$\mu=\sqrt{\mu_1\,\mu_2}=\sqrt{\sqrt{m}\;\sqrt{n}\,p_1\,p_2\,c}\,,$$

а тај израз и потврђује медијалност правоугаоника.

[29] Са ознакама сличним ознакама коментара претходне теореме ову теорему тумачимо овако.

Пошто су стране правоугаоника, као медијале, самерљиве само у степену, можемо изразити овако:

$$\mu_1=\sqrt{p_1\,\sqrt{m\,n}}\;c\,,\qquad \mu_2=\sqrt{p_2\,\sqrt{m\,n}}\;c\,,$$

за површину правоугаоника имамо

$$\mu_1\,\mu_2=\sqrt{p_1\,p_2}\,\sqrt{m\,n}\,c^2\,.$$

Сад треба разликовати два случаја:

1. Корени су самерљиви, тј. $\sqrt{p_1 p_2}=k\sqrt{m n}$; тада је

$$\mu_1 \mu_2=k\, m\, n\, c^2$$

и површина правоугаоника је рационална.

2. Корени су несамерљиви. Тада за страну μ квадрата који има површину једнаку површини правоугаоника добивамо

$$\mu=\sqrt{\mu_1 \mu_2}=\sqrt{\sqrt{p_1 p_2}\ \sqrt{m n}}\ c$$

а то потврђује медијалност правоугаоника.

[30] Поновимо Еуклидов доказ са кратким ознакама.

Дато је $P=\sqrt{m}\, c^2$, $Q=\sqrt{n}\, c^2$. Треба доказати да разлика $P-Q$ не може бити рационална. Претпоставимо супротно и ставимо

$$P=r\,x\,,\quad Q=r\,y\,,\quad P-Q=r\,z\,,$$

тј. сматрајмо да су x, y, z, према Еуклидовој дефиницији, рационални, али

$$x\smile r\,,\ y\smile r\,,\ z\frown r\,.$$

Тада имамо низ ових закључака:

$$y\smile z\,,$$

$$y^2\smile yz\,, \qquad \text{пошто је } y:z=y^2:yz$$

$$(y^2+z^2)\frown y^2\,,$$

$$2\,yz\frown yz\,,$$

$$(y^2+z^2)\smile 2\,yz\,,$$

$$(y^2+z^2+2\,yz)\smile y^2+z^2,$$

$$(y+z)^2\smile (y^2+z^2)\,,$$

$$x^2\smile (y^2+z^2)\,.$$

Како је y^2+z^2 рационално, и x^2 је ирационално, те је и x ирационално, а оно је по претпоставци рационално. Према томе ни $P-Q$ не може бити рационално.

[31] Поновимо кратко Еуклидову конструкцију са његовим ознакама.

Узимамо дужи A и B под условом самерљивости само у степену

$$A^2:B^2=m:n\,.$$

Одређујемо Γ:

$A:\Gamma=\Gamma:B$, као средњу пропорционалу, и затим Δ:

$$A:B=\Gamma:\Delta,\text{ као четврту пропорционалу}$$

У претходној пропорцији извршимо пермутацију

$$A:\Gamma=B:\Delta$$

и упоредимо две вредности размере $A:\Gamma$

$$\Gamma:B=B:\Delta,$$

одале добијемо

$$\Gamma\cdot\Delta=B^2.$$

Пошто је B рационално, биће и B^2 рационално, те је, према томе и $\Gamma\cdot\Delta$ рационално.

[32] Слично претходном коментару поновимо Еуклидову конструкцију и овог задатка.

Узмимо три дужи A, B, Γ под условом да је

(*) $$A^2:B^2:\Gamma^2=p:q:r.$$

За A и B конструишимо средњу пропорционалу Δ, тј.

(**) $$A:\Delta=\Delta:B,$$

а затим четврту пропорционалу E из пропорције

(^{0}) $$B:\Gamma=\Delta:E.$$

Из (*) и (**) следује да су $A\cdot B$ и Δ^2 медијалне површине, а Δ је медијала. Како су B и Γ самерљиве само у степену и Δ је медијала, из (^{0}) зањучујемо да је и E медијала.

Затим образујемо пропорције: из (^{0}) и (**)

$$B:\Delta=\Gamma:E,$$

$$B:\Delta=\Delta:A,$$

а од ових

$$\Delta:A=\Gamma:E.$$

Пошто је правоугаоник $A\cdot\Gamma$ медијалан, биће и правоугаоник $\Delta\cdot E$ медијалан, јер је

$$A\cdot\Gamma=\Delta\cdot E.$$

[33] У овој леми Еуклид даје поступак за одређивање три Питагорина броја, тј. бројева који задовољавају услов да је збир квадрата два броја једнак квадрату трећег броја.

Узмимо два броја a и b, оба, по Еуклиду, или парна или непарна, са вредностима сличних површинских бројева, тј.

$$a = p_1 \alpha \cdot p_2 \alpha = p_1 p_2 \alpha^2 = p \alpha^2,$$

$$b = p_1 \beta \cdot p_2 \beta = p_1 p_2 \beta^2 = p \beta^2.$$

Тада **имамо**

$$a b = p^2 \alpha^2 \beta^2 = (p \alpha \beta)^2 = m^2.$$

Други и трећи број, из Еуклидових геометриских услова, имају вредности

$$n = \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2} p (\alpha^2 - \beta^2),$$

$$s = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2} p (\alpha^2 + \beta^2),$$

при чему су, због истовремености парности или непарности бројева a и b, бројеви n и s цели бројеви.

Поступак, који наводи Еуклид, заснива се на идентитету:

$$(p \alpha \beta)^2 + \left[\frac{1}{2} p (\alpha^2 - \beta^2)\right]^2 \equiv \left[\frac{1}{2} p (\alpha^2 + \beta^2)\right]^2.$$

Међутим тај идентитет можемо заменити овим:

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2 \alpha \beta)^2 \equiv (\alpha^2 + \beta^2)^2$$

и добити ове Питагорине бројеве:

$$m = \alpha^2 - \beta^2, \quad n = 2 \alpha \beta, \quad s = \alpha^2 + \beta^2,$$

где су α и β цели бројеви, који у случају позитивних бројева задовољавају услов $\alpha > \beta$.

Ако α и β имају заједнички чинилац, можемо квадратом тог чиниоца поделити сваки од бројева m, n, s и добивени резултати ће остати Питагорини цели бројеви. Обратно, сваки од бројева m, n, s можемо помножити произвољним, а за целе бројеве целим бројем, — резултати множења биће поново Питагорини бројеви.

У вези са формирањем Питагориних целих бројева, од интереса је навести две врсте Питагориних целих бројева и то под овим условима.

1. Да је хипотенуза већа за јединицу од једне катете. Тај услов задовољавају ови бројеви

$$m = k, \quad n = \frac{1}{2}(k^2 - 1), \quad s = \frac{1}{2}(k^2 + 1),$$

при чему број k треба да буде непаран. За $k = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ имамо ове бројеве:

1	0	1
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61

2. Да се катете разликују за јединицу. За одређивање таквих бројева могу се добити рекурзивни обрасци, које ми је ставио на расположење Р. Бојанић. Пошто су то обрасци доста компликовани, наводимо само примере таквих бројева.

1	0	1
4	3	5
21	20	29
120	119	169
697	696	985
...	...	...
...	...	...
4060	4059	5741
23661	23660	33461
137904	137903	195025
803761	803760	1136689
4684660	4684659	6625109

[34] У овој леми Еуклид поставља задатак о одређивању два квадрата чији збир није квадрат. Како је тај задатак неодређен, Еуклид сужава своје излагање и зауставља се само

на једном начину добивања бројева који нису Питагорини. Његова метода своди се на то да се узму три Питагорина броја, један од њих (катета) смањи за јединицу, па онда покаже да је немогуће променити трећи број (хипотенузу) тако да се добију поново три Питагорина броја.

Узмимо три Питагорина броја са нашим ознакама у облику

$$(*)\qquad (p\,\alpha\,\beta)^2+\left[\frac{1}{2}\,p\,(\alpha^2-\beta^2)\right]^2=\left[\frac{1}{2}\,p\,(\alpha^2+\beta^2)\right]^2$$

па покажимо да збир квадрата два броја, од којих је један смањен за јединицу, тј. збир

$$(p\,\alpha\,\beta)^2+\left[\frac{1}{2}\,p\,(\alpha^2-\beta^2)-1\right]^2$$

више није квадрат целог броја.

Претпоставимо да такав цео број постоји и означимо га са σ, тј. ставимо

$$(p\,\alpha\,\beta)^2+\left[\frac{1}{2}\,p\,(\alpha^2-\beta^2)-1\right]^2=\sigma^2.$$

Пре свега приметимо да број σ треба да буде мањи од $\frac{1}{2}\,p\,(\alpha^2+\beta^2)$, јер, пошто се смањила лева страна једначина (*) треба да се смањи и десна страна. Дакле је

$$(**)\qquad \sigma<\frac{1}{2}\,(\alpha^2+\beta^2).$$

Покажимо сад за број σ да не може бити ни већи, ни једнак, ни мањи од броја

$$\sigma'=\frac{1}{2}\,p\,(\alpha^2+\beta^5)-1,$$

те, према томе, не постоји као цео број.

1. Нека је, прво, $\sigma > \sigma'$. Тада је

$$(\rho \alpha \beta)^2 + \left[\frac{1}{2} \rho (\alpha^2 - \beta^2) - 1\right]^2 > \left[\frac{1}{2} \rho (\alpha^2 + \beta^2) - 1\right]^2 .$$

Да из ове неједнакости добијемо тражену једнакост за σ треба повећати десну страну. А кад одређујемо само целе бројеве, треба ставити на десној први најближи већи цео број, а то је број

$$\frac{1}{2} \rho (\alpha^2 + \beta^2)$$

и тада је

$$\sigma \geqq \frac{1}{2} \rho (\alpha^2 + \beta^2).$$

Како је овај услов противуречан услову (**), наша прва хилотеза је немогућа.

Приметимо да смо у току расуђивања повећали број σ' за целу јединицу, јер се оперише само у области целих бројева. Ову нужност Еуклид подвлачи реченицом: „ἵνα μὴ τμηθῇ ἡ μονάς“ коју смо превели: „како се не би делила јединаца“. Смисао ове реченице која није непосредно везана логички са текстом постаје разумљив тек пошто се схвати смисао целог текста.

2. Нека сад буде $\sigma = \sigma'$.

Тада из једначине

$$(\rho \alpha \beta)^2 + \left[\frac{1}{2} \rho (\alpha^2 - \beta^2) - 1\right]^2 = \left[\frac{1}{2} \rho (\alpha^2 + \beta^2) - 1\right]^2$$

под условом (*) следује

$$2 \rho \beta^2 = 0,$$

н то је немогуће, јер ни ρ, ни β^2 не могу бити једнаки нули.

3. Најзад, нека је $\sigma < \sigma'$.

Тада можемо ставити

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho (\alpha^2 + \beta^2) - r,$$

где је r цео број већи од јединице.

Ако сад упоредо са једначином

$$(p\alpha\beta)^2 + \left[\frac{1}{2}p(\alpha^2 - \beta^2) - 1\right]^2 = \left[\frac{1}{2}p(\alpha^2 + \beta^2) - r\right]^2$$

узмемо у обзир и идентитет

$$(p\alpha\beta)^2 - 2rp\beta^2 + \left[\frac{1}{2}p(\alpha^2 - \beta^2) - r\right]^2 \equiv \left[\frac{1}{2}p(\alpha^2 + \beta^2) - r\right]^2$$

лако долазимо до немогуће једначине

$$(p\alpha\beta)^2 - 2rp\beta^2 + \left[\frac{1}{2}p(\alpha^2 - \beta^2) - r\right]^2 =$$
$$= (p\alpha\beta)^2 + \left[\frac{1}{2}p(\alpha^2 + \beta) - 1\right]^2,$$

јер се сваки члан десне стране замењује мањим величинама са леве стране.

[35] Протумачимо овај задатак кратко аналитички.

Треба одредити две дужи a и b $(a > b)$ тако да оне буду самерљиве само у степену, а разлика њихових квадрата да се изражава квадратом дужи која је самерљива по дужини са a.

Зато узмимо два квадратна броја m^2 и n^2 $(m^2 > n^2)$, чија разлика $m^2 - n^2$ није квадратни број.

Саставимо пропорцију

$$a^2 : b^2 = m^2 : (m^2 - n^2)$$

и одредимо

$$b^2 = a^2 \frac{m^2 - n^2}{m^2}, \qquad b = \frac{a}{m}\sqrt{m^2 - n^2}.$$

Бројеви a и b задовољавају ове услове:

1. $a > b$, 2. $a^2 : b^2 = m^2 : (m^2 - n^2)$, тј. $a \frown\!- b$; но $a : b = m : \sqrt{m^2 - n^2}$, или $a \smile b$. 3. $a^2 - b^2 = (na/m)^2$, при чему је $na/m \frown a$.

[36] Према претходном, овом задатку одговара наредно решење. Претпоставимо да за два квадратна броја m^2 и n^2 број $m^2 + n^2$ није квадрат. Тада имамо пропорцију

$$a^2 : b^2 = (m^2 + n^2) : m^2$$

и решење

$$b^2 = \frac{m^2 a^2}{m^2 + a^2}, \qquad b = \frac{m a}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Јасно је да је: 1. $a > b$, 2. $a \mathrel{\frown\!\!\!-} b$ и

3. $$a^2 - b^2 = \frac{n^2}{m^2 + n^2} a^2,$$

па значи

$$\frac{n a}{\sqrt{m^2 + n^2}} \smile a.$$

[37] Узмимо две дужи самерљиве само у степену. Нека то буду, према задатку 29., дужи a, $b = a\sqrt{1 - p^2}$, где је $p = n/m$. Оне су самерљиве у степену, јер је $a^2 : b^2 = 1 : (1 - p^2)$ и $a^2 - b^2 = (a p)^2$.

Производ тих бројева

$$a b = a^2 \sqrt{1 - p^2}$$

медијална је површина, а број

$$\mu_1 = a \sqrt[4]{1 - p^2}$$

је медијала.

Другу медијалу μ_2 можемо одредити из пропорције

$$\mu_1 : b = b : \mu_2$$

са вредношћу

$$\mu_2 = a \sqrt[4]{(1 - p^2)^3}.$$

Медијале μ_1 и μ_2 задовољавају услове задатка, наиме;

1. $\mu_1 \cdot \mu_2 = a^2(1 - p^2)$ (правугаоник рационалан)

2. $\mu_1^2 : \mu_2^2 = 1 : (1 - p^2)$ (медијале су самерљиве само у степену)

3. $\mu_1^2 - \mu_2^2 = (a\,p\sqrt[4]{1 - p^2}\,)^2$,

квадрат једне медијале је већи од квадрата друге за квадрат дужи

$$v = ap\sqrt[4]{1 - p^2}$$

која је самерљива по дужини са μ_1 , јер је

$$v = ap\sqrt[4]{1 - p^2} \frown a\sqrt[4]{1 - p^2} = \mu_1 .$$

[38] За одређивање тих медијала узмимо три броја самерљива само у степену. Нека то буду бројеви:

$$a, \quad a\sqrt{p}, \qquad a\sqrt{1 - q^2}.$$

За прву медијалу узмимо средњу пропорционалу прва два броја, тј. ставимо

$$\mu_1 = \alpha\sqrt[4]{p} .$$

Другу медијалу одредимо из пропорције

$$\mu_1 : a\sqrt{p} = a\sqrt{1 - q^2} : \mu_2$$

са вредношћу

$$\mu_2 = a\sqrt[4]{p}\,\sqrt{1 - q^2} = a\sqrt[4]{p(1 - q^2)^2} .$$

Величине μ_1 и μ_2 задовољавају услове постављене у задатку.

Заиста, 1. то су медијале, јер се изражавају помоћу корена четвртог степена из рационалних бројева. Оне су самерљиве у степену, јер имамо: $\mu_1^2 : \mu_2^2 = 1 : (1 - q^2)$.

2. Правоугаоник $\mu_1 \mu_2$ је медијалан, јер имамо

$$\mu_1\mu_2 = a^2\sqrt{p\,(1 - q^2)} .$$

3. Најзад за разлику квадрата имамо:

$$\mu_1^2 - \mu_2^2 = a^2 \sqrt{p} - a^2 \sqrt{p}\,(1 - q^2) = a^2 q^2 \sqrt{p} = (a\,q\,\sqrt[4]{p})^2 = (q\mu_1)^2,$$

при чему је $q\mu_1 \frown \mu_1$.

Траженим медијалама могу се дати и други облици, али у то нећемо улазити.

[39] Из чињенице што је толико важну теорему у савременој метрици елементарне геометрије Еуклид ставио тек у десету књигу својих Елемената, и то у облику леме, треба закључити да Еуклид није сматрао метрику, из које је поникла геометрија, за главни део свог теориског излагања.

[40] За одређивање тражених дужи Еуклид полази од две дужи, које задовољавају услове 30. задатка (примедба [36]), наиме

$$a,\ b = \frac{na}{\sqrt{m^2+n^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\,,$$

где је $p = m/n$. Даље се решава систем једначина

$$x + y = a, \qquad xy = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2/4\,(1 + p^2).$$

Ако је $x > y$ имамо решење

$$x = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right), \qquad y = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right).$$

После тога се тражене дужи s и t одређују из једначина

$$s^2 = ax, \qquad t = ay$$

у облику

$$s = a\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)}, \qquad t = a\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)}.$$

Дужи s и t задовољавају тражене услове:

1. $s \smile^{-} t$, јер је

$$s^2 : t^2 = 1 + 2p^2 + 2p\sqrt{1 + p^2}.$$

2. $s^2 + t^2 = a^2$, тј. збир квадрата је рационалан.

3. $st = \dfrac{a^2}{2\sqrt{1 + p^2}}$, тј. правоугаоник медијалан.

[41] У овом задатку полазимо од две медијале

$$\mu_1 = \frac{a}{\sqrt[4]{1 + p^2}}, \qquad \mu_2 = \frac{a}{\sqrt[4]{(1 + p^2)^3}} = \frac{\mu_1}{\sqrt{1 + p^2}}$$

и, као и у претходном задатку, решавамо једначине

$$x + y = \mu_1,$$

$$xy = (\mu_2/2)^2 = \mu_1{}^2/4\,(1 + p^2),$$

затим стављамо

$$s^2 = \mu_1\,x, \qquad t^2 = \mu_1\,y$$

и добивамо

$$s = \frac{a}{\sqrt[4]{1+p^2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}, \qquad t = \frac{a}{\sqrt[4]{1+p^2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}.$$

Дужи s и t задовољавају постављене услове:

1. $s \smile\!- t$, јер и овде је

$$s^2 : t^2 = 1 + 2p^2 + 2p\sqrt{1+p^2},$$

2. $s^2 + t^2 = \dfrac{a^2}{\sqrt{1 + p^2}} = \left(\dfrac{a}{\sqrt[4]{1 + p^2}}\right)^2,$ тј. медијалан

3. $st = \dfrac{a^2}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = \dfrac{a^2}{2\,(1 + p^2)}$, тј. рационалан.

[42] За решење овог задатка узмимо ове две медијале:

$$\mu_1 = a\sqrt[4]{p}, \qquad \mu_2 = \frac{\mu_1}{\sqrt{1 + q^2}} = \frac{a\sqrt[4]{p}}{\sqrt{1 + q^2}}.$$

Саставимо систем једначина

$$x + y = \mu_1 ,$$

$$xy = (\mu_2/2)^2 = \mu_1{}^2/4(1 + q^2),$$

решимо тај систем

$$x = \frac{1}{2}\mu_1\left(1 + \frac{q}{1 + q^2}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\mu_1\left(1 - \frac{q}{1 + q^2}\right)$$

и, после увођења

$$s^2 = \mu_1 x, \qquad t^2 = \mu_1 y,$$

добијамо тражене дужи s и t:

$$s = a\sqrt[4]{p}\sqrt{\frac{\sqrt{1 + q^2} + q}{2\sqrt{1 + q^2}}}, \qquad t = a\sqrt[4]{p}\sqrt{\frac{\sqrt{1 + q^2} - q}{2\sqrt{1 + q^2}}}.$$

Ове дужи задовољавају дати задатак; заиста:

1. $s \smile\!\!- t$, јер је $s^2 : t^2 = 1 + 2q^2 + 2q\sqrt{1 + q^2}$,
2. $s^2 + t^2 = a^2\sqrt{p} = \mu_1{}^2$,
3. $st = a^2\sqrt{p} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + q^2}} = \mu_1{}^2 \frac{1}{2\sqrt{1 + q^2}}$,
4. $\frac{s^2 + t^2}{st} = 2\sqrt{1 + q^2}$.

[48] До овог става Еуклид је оперисао са дужинама ове алгебарске природе: рационалне $-m/n$, самерљиве само у степену $- \sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и медијалне $\sqrt[4]{ab}$; медијала је средња пропорционала за две, у Еуклидовом смислу, рационалне — величине типа $\sqrt{a}$ (самерљиве само у степену). У наредним ставовима Еуклид уводи нових шест ирационалних дужи, прву хексаду ирационалности. То су величине са овим називима.

1. Биномијала — ἐκ δύο ὀνομάτων,
2. Прва бимедијала — ἐκ δύο μέσων πρώτη,
3. Друга бимедијала — ἐκ δύο μέσων δευτέρα,

4. „Већа“ — μείζων,

5. „Страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“ — ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη,

6. „Страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“ — δύο μέσα δυναμένη.

У овој 36. теореми се проучава биномијала. То је ирационалност облика

$$(*) \qquad \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

при чему један, али само један, од бројева a и b може бити квадратан.

Грчки назив „ἐκ δύο ὀνομάτων“ значи „из два назива“ и према томе било би правилније превести тај назив са „биноминала“ — „двоимена“, а не "биномијала“ — „двочлана“, како је то усвојено.

Средствима савремене алгебре извођење доказа ирационалности како израза (*), тако и свих осталих пет израза хексаде не претставља никакву тешкоћу. Нећемо то изводити.

Приметимо да ову теорему можемо тумачити и друкчије, сматрајући за биномијалу израз (Heath):

$$r + r\sqrt{k},$$

где је r рационална дуж, а k није квадратни број. У том облику ова ирационалност, можда, боље одговара грчком називу, јер је збир заиста састављен од две разноимене величине — рационалне и ирационалне у нашем смислу и самерљиве само у степену у Еуклидовом смислу. Сам збир је ирационалан у Еуклидовом смислу, јер и подигнут на квадрат он није самерљив са r.

[44] Прву бимедијалу можемо изразити збиром

$$\sqrt{a}\,\sqrt[4]{p} + \sqrt{a}\,\sqrt[4]{p^3} = \sqrt{a}\,\sqrt[4]{p}\,(1 + \sqrt{p})$$

или, у другом облику,

$$rk^{1/4} + rk^{3/4}.$$

[45] Друга бимедијала се изражава

$$\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a}\,\sqrt{b}=\sqrt[4]{a}\,(1+\sqrt{b}),$$

или

$$rk^{1/4}+r\frac{\sqrt{p}}{\sqrt[4]{k}}.$$

Приметимо да су све претходне ирационалности збирови две дужи које су самерљиве у степену.

[46] Алгебарски се ирационалност овог задатка изражава збиром:

$$s+t=\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}+\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

при чему су испуњени услови:

1. $s\smile-t$, јер је $s^2:t^2=1+2k^2+2k\sqrt{1+k^2}$,

2. $s^2+t^2=r^2$,

3. $st=\frac{1}{2}r^2\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.

Ова ирационалност се зове „већа“ из разлога што на другом месту Еуклид проучава ирационалност $s-t$, која се у поређењу са $s+t$ зове „мања“.

Приметимо да су $s+t$ и $s-t$ позитивни корени биквадратне једначине

$$z^4-2r^2z^2+\frac{k^2}{1+k^2}r^4=0.$$

[47] Ирационалност овог задатка претставићемо овако:

$$s+t=\frac{r}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k}+\frac{r}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k},$$

при чему имамо услове:

1. $s \smile t$, јер је поново $s^2 : t^2 = 1 + k^2 + 2k\sqrt{1+k^2}$,

2. $s^2 + t^2 = \dfrac{r^2}{\sqrt{1+k^2}}$, (медијална површина),

3. $st = \dfrac{r^2}{2(1+k^2)}$, (рационална површина).

Како је при томе

$$(s+t)^2 = (2st) + (s^2 + t^2),$$

биће $s + t$ страна оног квадрата чија је површина једнака збиру површина — рационалне и медијалне.

Приметимо и овде да су збир $s + t$ и разлика $s - t$ позитивни корени биквадратне једначине

$$z^4 - \frac{2}{\sqrt{1+k^2}} r^2 z^2 + \frac{k^2}{(1+k^2)^2} r^4 = 0.$$

[48] Како смо видели у примедби [42], дужи које задовољавају услове овог става могу дати ову ирационалност

$$s + t = r\frac{\sqrt[4]{p}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} + r\frac{\sqrt[4]{p}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

Остаје само да се покаже да је квадрат тог збира једнак збиру две медијалне површине. Заиста, имамо

$$(s+t)^2 = (s^2 + t^2) + (2st) = \mu^2_1 + \mu^2_1 \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

са $\mu_1 = a\sqrt[4]{p}$, а то и показује тражену особину.

И ту можемо навести ону биквадратну једначину коју задовољавају збир $s + t$ и разлика $s - t$:

$$z^4 - 2\sqrt{p}\, r^2 z^2 + p\frac{k^2}{1+k^2} r^4 = 0.$$

[49] Алгебарски можемо ову лему овако доказати.

Нека је

$$x + y = u + v = 2a$$

и $x > v$. Треба доказати да је

$$x^2 + y^2 > u^2 + v^2.$$

1. Из $x > v$ следује да је

$$x - a > v - a$$

2. $$xy = a^2 - (x - a)^2,$$

$$uv = a^2 - (v - a)^2,$$

јер је, напр.,

$$xy = a^2 - (a^2 - xy) = a^2 - (a^2 - x\,[2a - x]) = a^2 - (x - a)^2.$$

3. $xy < uv$ и $2xy < 2uv$

4. $$x^2 + y^2 + 2xy = u^2 + v^2 + 2uv$$

5. $$x^2 + y^2 > u^2 + v^2.$$

[50] Кратак текст шест теорема од 42 до 47, које се односе на ирационалности прве хексаде, сам по себи је тешко разумљив. Прави садржај тих теорема се види из овог. Свака од раније наведених шест теорема (од 36 до 41) тврди да збир две дужи одређеног типа претставља ирационалну дуж одређене категорије. Шест наредних теорема, међутим тврде да се свака таква ирационална дуж одређене категорије може само на један једини начин, тј. поделом само једном тачком, претставити као збир дужи одређеног типа.

[51] Еуклидов доказ о јединствености разлагања биномијале на два сабирка који су самерљиви само у степену, изводи се кратко овако.

Нека постоји

(*) $$a = x + y = u + v,$$

при чему искључујемо могућност $u = y$, $v = x$, која не даје ништа ново.

Тада из једначине

$$a^2 = x^2 + y^2 + 2xy = u^2 + v^2 + 2uv$$

изводимо једначину

$$(**) \qquad (x^2 + y^2) - (u^2 + v^2) = 2uv - 2xy.$$

Како је лева страна рационална, а десна је медијална, закључујемо да је она немогућа, а према томе је немогућа и једначина (*).

[52] У овом ставу треба применити једначину (**) претходне примедбе. И она доводи до немогућности, јер је њена лева страна медијална, а десна рационална.

[53] Ова теорема се не може доказати непосредно примењујући методе доказа претходних теорема, јер су у овом случају збир квадрата и правоугаоник исте аналитичке природе, они су медијални. Да избегне ову тешкоћу Еуклид конструише све површине на истој рационалној дужи, рецимо на дужи a; тада су друге стране тих површина рационалне дужи самерљиве само у степену. У овом случају долазимо до једначине

$$\frac{x^2 + y^2}{a} + \frac{2xy}{a} = \frac{u^2 + v^2}{a} + \frac{2uv}{a},$$

која изједначује две биномијале, претстављене на два различита начина, а то је, према теореми 42., немогуће. Према томе је немогућа подела на други начин и друге бимедијале.

[54] Метода доказа ове теореме је истоветна са методом која је била примењена при доказу теорема 42. и 43..

[55] Претходна примедба се проширује и на ову теорему.

[56] Доказ ове теореме је аналоган доказу теореме 44.

[57] Изаберимо неку дуж као основну и сматрајмо је као рационалну; за њу узимамо ранију ознаку r.

Даље, означимо са s неку биномијалу као збир два рационална члана који су самерљиви само у степену.

Нека a и b буду већи и мањи део биномијале, тј.

$$s = a + b. \qquad (a > b)$$

Наведених шест дефиниција дају класификацију биномијала према једначини

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Чине се две претпоставке:

$$c \frown a \text{ и } c \smile a.$$

Затим се сваки од ових случајева рашчлањује на три случаја према самерљивости делова a и b са рационалном дужи r.

Према томе можемо саставити ову схему за дефиниције шест наведених ирационалности

$$c \frown a \left\{ \begin{array}{ll} a \frown r & B_1 \\ b \frown r & B_2 \\ a \smile r,\ b \smile r & B_3 \end{array} \right.$$

$$c \smile a \left\{ \begin{array}{ll} a \frown r & B_4 \\ b \frown r & B_5 \\ a \smile r,\ b \smile r & B_6 \end{array} \right.$$

[58] Извршимо сад са алгебарским ознакама поступак који Еуклид примењује за одређивање прве биномијале.

Узмимо за рационалну дуж $\Delta = r$.

Затим на бројној правој одмеримо квадратни број $AB =$ $= p = m^2$. Од тога броја одузмимо други квадратни број n^2. Остатак означимо са $q = m^2 - n^2$; он не сме бити квадратни број.

Даље, узмимо произвољан рационалан број k и одмеримо од тачке E (слика текста) дужину kr. Нека то буде већи део a биномијале. За одређивање другог, непознатог дела b, искористимо услов да су a и b самерљиве у степену и ставимо

$$a^2/b^2 = p/q = m^2/(m^2 - n^2),$$

одакле је

$$b = a \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}.$$

На тај начин коначно имамо прву биномијелу у облику

$$a+b=kr+kr\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}.$$

Да је то биномијала види се из квадратне самерљивости делова:

$$(kr)^2:\left(kr\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}\right)^2=m^2/(m^2-n^2).$$

А да је то заиста баш прва биномијала потврђује једначина

$$a^2-b^2=c^2$$

која показује да је величина c, прво самерљива по дужини са a и, друго, да је самерљива по дужини и са r.

Приметимо да прва биномијала задовољава квадратну једначину

$$x^2-2krx+k^2r^2\frac{n^2}{m^2}=0.$$

[59] Слично предходном се показује да се друга биномијала изражава у облику

$$kr\frac{m}{\sqrt{m^2-n^2}}+kr$$

при чему је kr мањи део.

Ова биномијала задовољава једначину

$$x^2-2\frac{krm}{\sqrt{m^2-n^2}}x+\frac{n^2}{m^2-n^2}=0.$$

[60] Трећа биномијала има вредност

$$r\sqrt{k}+r\sqrt{k}\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}.$$

Како је у овом случају $a>b$, а $c=\frac{nr}{m}\sqrt{k}$, видимо да су

a и c самерљиве по дужини једна са другом, али ниједна до њих није самерљива по дужини са r.

Ова биномијала је корен једначине

$$x^2 - 2rx\sqrt{k} + \frac{n^2}{m^2} kr^2 = 0 .$$

[61] Четврта биномијала, према Еуклидовом тексту, изражава се у облику

$$kr + kr\sqrt{\frac{m}{m+n}} .$$

Пошто је у датом случају $c = kr\sqrt{\frac{n}{m+n}}$, видимо да је c несамерљиво по дужини са $a = kr$; но a је самерљиво са r.

Ова биномијала задовољава једначину

$$x^2 - 2\,krx + \frac{n}{m+n} k^2 r^2 = 0 .$$

[62] Пету биномијалу изразимо овако

$$kr\sqrt{\frac{m+n}{m}} + kr$$

Лако је видети да тај израз задовољава услове постављене за ову биномијалу.

Тај израз је корен једначине

$$x^2 + 2\,kr\sqrt{\frac{m+n}{m}} + \frac{n}{m} k^2 r^2 = 0$$

[63] Најзад за шесту биномијалу имамо

$$r\sqrt{k_1} + r\sqrt{k_2} ,$$

где k_1 и k_2 нису квадратни бројеви, k_1 је веће од k_2 и $k_1 - k_2 \neq p^2 k_1$, где је p неки рационални број. Под овим условима написани израз одговара условима постављеним за ову биномијалу.

Једначина коју задовољава ова биномијала гласи

$$x^2 - 2r\sqrt{k_1}\, x + (k_1 - k_2)\, r^2 = 0.$$

[64] Ако стране квадрата - делова означимо са a и b, можемо написати два идентитета

$$(ab)^2 \equiv a^2 . b^2 ,$$

$$[(a+b)\cdot b]^2 \equiv (a+b)^2 \cdot b^2 ,$$

који изражавају два метричка става ове леме.

[65] Ако рационалну дуж поново означимо са r, а прву биномијалу узмемо у облику који је наведен у примедби [58], површина правоугаоника је одређена изразом

$$kr^2\left(1 + \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}\right).$$

Тај израз треба претставити квадратом збира.

Како је

$$1 + \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m} \equiv \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\sqrt{m+n} + \sqrt{m-n}\right)\right]^2,$$

можемо ставити

$$kr^2\left(1 + \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}\right) = \left(r\sqrt{\frac{k(m+n)}{2m}} + r\sqrt{\frac{k(m-n)}{2m}}\right)^2,$$

а то и доказује наведену теорему, јер са десне стране имамо квадрат биномијале као збира две дужи самерљиве само у степену.

[66] У овој теореми треба искористити израз из примедбе [59] за другу биномијалу и затим се изводи идентитет

$$r\left(\frac{krm}{\sqrt{m^2 - n^2}} + kr\right) \equiv \left[r\sqrt{\frac{k}{2}\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}} + r\sqrt{\frac{k}{2}\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}}\right]^2.$$

Израз који се диже на квадрат је прва бимедијала. Ако ставимо

$$\sqrt{\frac{k}{2}\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}} = x^{1/4},$$

тај израз добива једноставан облик

$$r\,\varkappa^{1/4} + r\,\varkappa^{3/4},$$

који одговара примедби[44].

[67] За ову теорему треба потврдити идентитет

$$r\left(r\sqrt{k} + r\sqrt{k}\frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}\right) \equiv \left[r\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{2}\left(1 + \frac{n}{m}\right)} + r\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{2}\left(1 - \frac{n}{m}\right)}\right]^2.$$

Ако ставимо

$$\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{2}\left(1 + \frac{n}{m}\right)} = \varkappa^{1/4}$$

израз, који се диже на квадрат, можемо написати у облику

$$r\,\varkappa^{1/4} + r\frac{\sqrt{p}}{\varkappa^{1/4}},$$

где је

$$p = \frac{k\,(m^2 - n^2)}{4\,m^2},$$

а тај облик одговара облику друге бимедијале наведеном у примедби[45].

[68] Ова теорема се заснива на идентитету

$$r\left(k\,r + k\,r\sqrt{\frac{m}{m+n}}\right) \equiv$$

$$\equiv\left[r\sqrt{\frac{k}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{n}{m+n}}\right)} + r\sqrt{\frac{k}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{n}{m+n}}\right)}\right]^2.$$

Са леве стране имамо производ рационалне дужи и четврте биномијале (примедба[61]), а са десне квадрат такозване „веће“ (примедба[46]).

[69] За ову теорему важи идентитет

$$r\left(k\,r\sqrt{\frac{m+n}{m}} + k\,r\right) \equiv$$

$$\equiv\left[r\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} + \sqrt{\frac{n}{m}}\right)} + r\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{\frac{m+n}{m}} - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)}\right]^2$$

Са леве стране стоји производ рационалне дужи r и пете биномијале (примедба[62]), а са десне квадрат такозване „стране квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“ (примедба[47]).

[70] Најзад за последњу теорему ове групе треба навести идентитет

$$r(r\sqrt{k_1}+r\sqrt{k_2}) \equiv \left[r\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_1-k_2})} + r\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{k_1}-\sqrt{k_1-k_2})}\right]^2,$$

где је са леве стране производ r и шесте биномијале (примедба[63]), а са десне квадрат такозване „стране квадрата једнаког збиру две медијалне површине“ (примедба[48])

[71] Ако уведемо ознаке

$$\text{А}\Delta = \Delta\text{В} = a, \quad \Delta\text{Г} = x,$$

имаћемо

$$\text{АГ}^2 + \text{ГВ}^2 = (a+x)^2 + (a-x)^2 = 2(a^2+x^2) > 2a^2,$$

$$2\,\text{АГ}.\text{ГВ} = 2(a+x)(a-x) = 2(a^2-x^2) < 2a^2.$$

Одавде је јасно да је

$$\text{АГ}^2 + \text{ГВ}^2 > 2\,\text{АГ}.\text{ГВ}.$$

[72] У наредним ставовима, од 60 до 65, показује се како се квадрат на ирационалности од 36 до 41 може претставити као правоугаоник са странама — једном рационалном дужи и другом у облику биномијале о којима се говори у ставовима од 48 до 53.

Сваком од ових ставова одговара у суштини један аналитички идентитет. Еуклид своја извођења врши геометриским путем.

Ради објашњења Еуклидове методе докажимо прву теорему ове серије са уобичајеним ознакама.

Нека је : 1. $\text{АВ} = a+b, \quad a > b, \; a \frown b$

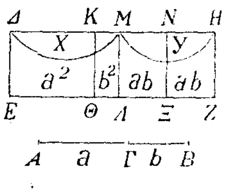
2. $(a+b)^2 = rs,$

где је r рационална дуж.

Треба доказати да је s прва биномијала, тј. дуж која се дели на таква два дела x и y, да је 1. $x > y$, $x \frown\!\!- y$, $x \frown r$ и, ако ставимо да је $x^2 - y^2 = z^2$, биће 2. $z \frown x$ и $z \frown r$.

Искористимо Еуклидову слику са допунским ознакама.

Прво се доказује да је $s = x + y$ биномијала, тј. дуж која задовољава услове: $x > y$, $x \smile y$, али $x \frown\!\!- y$.



Из $a \frown\!\!- b$ следује да је $a^2 \frown b^2$ и $a^2 + b^2 \frown a^2 \frown b^2$, па значи да је $a^2 + b^2$ рационална величина. А како је $a^2 + b^2 = rx$, значи и x је рационална величина и $x \frown r$. Пошто за $a > b$ важи $a^2 + b^2 > 2ab$, имамо $rx > ry$ или $x > y$.

За доказ да је $x \smile y$, али $x \frown\!\!- y$, узмимо једначину

$$ry = 2ab.$$

Пошто је $a \frown\!\!- b$, површина ab па значи и $2ab$ су медијалне те, према томе, ако је r рационално, y је такође рационално у Еуклидову смислу, али несамерљиво по дужини са r, а то значи и са x, које је самерљиво са r. На овај начин $x \smile y$, али $x \frown\!\!- y$.

Докажимо још да у једначини $x^2 - y^2 = z^2$, у нашем случају, имамо $z \frown x$.

Како је $rx = a^2 + b^2$, $ry = 2ab$, имамо

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{r}\right)^2,$$

а како је $a \frown\!\!- b$, тј. $a^2 \frown b^2$, биће и $\frac{a^2 - b^2}{r}$ самерљиво са $\frac{a^2 + b^2}{r}$, а то значи и са x, а и са r, пошто је и x самерљиво са r. Тиме смо потврдили и допунски услов, да дуж $s = x + y$ буде баш прва биномијала, јер је x самерљиво са r.

Ова Еуклидова конструкција одговара једначини

$$\left(a + \sqrt{k}\,a\right)^2 = r\left[\frac{a^2(1+k)}{r} + \frac{2a^2\sqrt{k}}{r}\right],$$

која се своди на идентитет

$$\left(1+\sqrt{k}\right)^2 \equiv 1+k+2\sqrt{k}.$$

Израз

$$\frac{a^2(1+k)}{r}+\frac{2a^2\sqrt{k}}{r}$$

заиста претставља прву биномијалу, јер под условом $a>b$, тј. $\sqrt{k}<1$ први део је заиста мањи од другог; затим, та два дела су самерљива само у степену и на основу једначине

$$\left[\frac{a^2(1+k)}{r}\right]^2-\left[\frac{2a^2\sqrt{k}}{r}\right]^2=\left[\frac{a^2(1-k)}{r}\right]^2$$

можемо закључити да са десне стране имамо квадрат дужи која је самерљива по дужини и са првом и са другом дужи и са r.

У коментарима наредних пет теорема зауставићемо се само на навођењу одговарајућих аналитичких идентитета.

[73] Овој теореми одговара идентитет

$$(ak^{1/4}+ak^{3/4})^2\equiv r\left[\frac{a^2(1+k)\sqrt{k}}{r}+\frac{2ka^2}{r}\right].$$

[74] Идентитет за овај случај можемо написати

$$\left(a\,k^{1/4}+\frac{a\sqrt{p}}{k^{1/4}}\right)^2\equiv r\left[\frac{a^2(k+p)}{r\sqrt{k}}+\frac{2a^2\sqrt{p}}{r}\right].$$

[75] За овај случај имамо идентитет

$$\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}+\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\right]^2\equiv r\left(\frac{a^2}{r}+\frac{a^2}{r\sqrt{1+k^2}}\right).$$

[76] Идентитет оьог случаја је

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k}+\frac{a}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k}\right)^2\equiv$$

$$\equiv r\left(\frac{a^2}{r\sqrt{1+k^2}}+\frac{a^2}{r(1+k^2)}\right).$$

[77] Најзад, за овај последњи случај имамо

$$\left[\frac{a\,p^{1/4}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}+\frac{a\,p^{1/4}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\right]^2 \equiv r\left(\frac{a^2}{r}\sqrt{p}+\frac{a^2\sqrt{p}}{r\sqrt{1+k^2}}\right).$$

[78] Теореме од 66 до 70 готово су очигледне, нарочито са гледишта савремене геометрије, јер одговарају сличној трансформацији тачака једне дужи у тачке друге дужи, чија је дужина промењена.

[79] Збир рационалне и медијалне површине, о којима је реч у овој теореми, можемо овако претставити

$$k r^2 + \sqrt{p}\, r^2 = r^2 (k + \sqrt{p}),$$

где су k и p рационални бројеви. У теореми се поставља питање о трансформацији израза $k + \sqrt{p}$ у квадрат збира две ирационалности, од којих једна може да дегенерише у рационалност.

Еуклидова геометриска анализа показује да при идентичној трансформацији

$$k + \sqrt{p} \equiv (x + y)^2$$

величине x и y треба да задовољавају једну од наредних комбинација услова.

I. $x = \sqrt{\alpha}$, $y = \sqrt{\beta}$ и $\alpha \frown \beta$

А то су услови за биномијалу.

II. $x = \sqrt[4]{\alpha}$, $y = \sqrt[4]{\beta}$, под условима: 1. $\sqrt[4]{\alpha} \smile \sqrt[4]{\beta}$ 2. $\sqrt{\alpha} \frown \sqrt{\beta}$. 3. $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ је рационалан. Ти услови одговарају првој бимедијали.

III. $x^2 : y^2 \neq m : n$, збир $x^2 + y^2$ је рационалан, а правоугаоник $x y$ — медијалан. У овом случају имамо такозвану „већу“ ирационалност.

IV. $x^2 + y^2 \neq m : n$ збир $x^2 + y^2$ је медијалан, а правоугаоник $x y$ рационалан. Овом случају одговара „страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“.

Сви се ови закључци лако могу потврдити непосредним рачуном.

Слична објашњења могу бити дата и за наредну 72. теорему.

[80] У додатку уз 72-гу теорему Еуклид упоређује различите ирационалности помоћу квадрата једне и производа друге и рационалне дужи. Ако уведемо ознаке:

r — рационална дуж,
r_2 — рационална дуж самерљива са r само у степену,
μ — медијала,
b_n — биномијала,
$b_{n,k}$ — биномијала k'тог реда,
$b_{m,k}$ — бимедијала k'тог реда,

резултат Еуклидовог упоређења можемо изразити једначинама

$$\mu^2 = rr_2,$$
$$b_n^2 = rb_{n,1},$$
$$b^2_{m,k} = rb_{n,k+1} \qquad k=1,2,3,4,5.$$

[81] Реч апотома (ἀποτομή) узимамо као термин и, како то раде и други писци (*Heath*, *Enriques*, *Thaer*) остављамо без превода. Може се превести и са „отсечак“. Мордухай-Болтовской преводи са „вычет“.

Апотоме су потпуно аналогне ирационалностима прве хексаде и разликују се од њих само знаком: ирационалности прве хексаде изражавају се збировима, а апотоме разликама тих истих величина. У детаљнију анализу тих ирационалности овде нећемо улазити. Њихова Еуклидова анализа изведена је у ставовима од 73 до 78. Упоређивање тих ирационалности биће изведено у закључку ове десете књиге, где ћемо говорити о општем систему Еуклидових ирационалности.

[82] Теореме од 79 до 84 аналогне су теоремама од 42 до 47, а слични су и методи доказа; према томе нема разлога улазити у детаљнију анализу тих теорема у нашем кратком коментару.

[83] У овим дефиницијама Еуклид класификује апотоме, тј. ирационалности изражене разликом. Свака апотома a се изражава

$$a = c - d,$$

одакле је

$$c = a + d,$$

при чему Еуклид примењује називе: за c — ἡ ὅλη (εὐθεῖα), цела дуж, за d — ἡ προσαρμόζουσα (εὐθεῖα), додатак.

Уведимо још ознаке: r дата рационална дуж и h дуж из једначине

$$h^2 = c^2 - d^2 .$$

Класификација се заснива на двема особинама апотома: 1. на самерљивости или несамерљивости c и h са r и 2. на самерљивости или несамерљивости h и c. Те особине за шест апотома можемо изразити таблицом:

I.	$c \frown r$,		$h \frown c$	A_1
II.		$d \frown r$		A_2
III.	$c \smile r$,	$d \smile r$		A_3
IV.	$c \frown r$,		$h \smile c$	A_4
V.		$d \frown r$		A_5
VI.	$c \smile r$,	$d \smile r$		A_6

Постојање тих шест апотома се доказује у наредним теоремама (85—90).

[84] За одређивање прве апотоме која, према дефиницији, треба да задовољава услове

$$c \frown r,\ h \frown c$$

ставимо, са специјалним ознакама, за прву апотому

$$a_1 = c_1 - d_1 .$$

Као и раније, и овде искоришћујемо ознаке: r — рационална дуж, m и n цели бројеви и $m > n$, $l = n/m$ и k — рационалан број.

Пре свега узмимо, по Еуклиду, $c_1 = kr$. Затим из пропорције

$$m^2 : (m^2 - n^2) = c_1^2 : d_1^2$$

одређујемо

$$d_1 = kr \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m} = kr\sqrt{1 - l^2},$$

па добивамо овај израз за прву апотому

$$a_1 = kr - kr \sqrt{1-l^2}.$$

Како величина h_1 у једначини

$$c_1^2 - d_1^2 = h_1^2$$

има вредност $klr = lc$, видимо да су заиста испуњена оба услова за прву апотому у облику a_1.

Приметимо да је прва апотома други корен квадратне једначине

$$x^2 - 2krx + l^2 k^2 r^2 = 0.$$

Први корен те једначине је била прва биномијала.

85 Слично предходној, друга апотома се образује на овај начин

$$a_2 = kr \frac{1}{\sqrt{1-l^2}} + kr.$$

Она заједно са другом биномијалом, задовољава квадратну једначину

$$x^2 - 2 \frac{kr}{\sqrt{1-l^2}} x + \frac{l^2}{1-l^2} k^2 r^2 = 0.$$

86 За трећу апотому имамо израз

$$a_3 = r\sqrt{k} + r\sqrt{k}\sqrt{1-l^2}$$

и одговарајућу квадратну једначину

$$x^2 - 2rx\sqrt{k} + l^2 kr^2 = 0.$$

87 За четврту имамо

$$a_4 = kr - kr \frac{1}{\sqrt{1+l}}$$

и квадратну једначину

$$x^2 - 2krx + \frac{l}{1+l} k^2 r^2 = 0.$$

88. Пета апотома се изражава

$$a_5 = kr\sqrt{1+l} - kr$$

и њој одговара једначина

$$x^2-2kr\sqrt{1+l}\cdot x+lk^2r^2=0.$$

[89] Најзад, наводимо шесту апотому

$$a_6=r\sqrt{k_1}-r\sqrt{k_2}$$

и одговарајућу квадратну једначину

$$x^2-2r\sqrt{k_1}\,x+(k_1-k_2)r^2=0.$$

[90] Овој теореми одговара алгебарски идентитет

$$r(kr-kr\sqrt{1-l^2})\equiv\left[r\sqrt{\frac{k}{2}(1+l)}-r\sqrt{\frac{k}{2}(1-l)}\right]^2,$$

где са леве стране стоји производ рационалне дужи и прве апотоме, а са десне квадрат разлике две ирационалности, у нашем смислу, тј. апотома.

[91] Идентитет који одговара овој теореми изгледа овако

$$r\left(\frac{kr}{\sqrt{1-l^2}}-kr\right)\equiv\left[r\sqrt{\frac{k}{2}\sqrt{\frac{1+l}{1-l}}}-r\sqrt{\frac{k}{2}\sqrt{\frac{1-l}{1+l}}}\right]^2.$$

[92] За ову теорему можемо написати идентитет

$$r\left(\sqrt{k}\,r-\sqrt{k}\,r\sqrt{1-l^2}\right)\equiv\left[r\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{2}(1+l)}-r\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{2}(1-l)}\right]^2.$$

[93] Идентитет ове теореме јесте

$$r\left(kr-\frac{kr}{\sqrt{1+l}}\right)\equiv\left[r\sqrt{\frac{k}{2}\left(1+\sqrt{\frac{l}{1+l}}\right)}-r\sqrt{\frac{k}{2}\left(1-\sqrt{\frac{l}{1+l}}\right)}\right]^2.$$

[94] За пету апотому имамо идентитет

$$r\left(kr\sqrt{1+l}-kr\right)\equiv\left[r\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{1+l}+\sqrt{l}\right)}-r\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{1+l}-\sqrt{l}\right)}\right]^2.$$

[95] Најзад, за шесту апотему идентитет се изражава

$$r\left(\sqrt{k_1}\,r-\sqrt{k_2}\,r\right)\equiv\left[r\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_1-k_2}\right)}-r\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{k_1}-\sqrt{k_1-k_2}\right)}\right]^2.$$

[96] Теореме 97-102 су обрнуте теоремама 91-96. Према томе идентитети, који одговарају теоремама 91-96 и дати су у примедбама [90-95] остају на снази и за теореме 97-102. За ову последњу серију теорема наведени идентитети треба само друкчије да се тумаче. Тако стоји ствар са гледишта савремене алгебре ирационалних величина. Примена Еуклидове геометриске методе у извођењу сваке, било основне било обрнуте, теореме, односно трасформације одговарајућег ирационалног израза, захтева низ геометриских расуђивања, при чему геометриско решавање квадратне једначине игра основну улогу у сваком доказу. Пажљиви читалац може без тешкоће пропратити Еуклидов доказ сваке теореме из наведене две серије. Да не бисмо преоптеретили наш коментар, нећемо понављати Еуклидове доказе у лакшој савременој форми како то раде неки коментатори у својим опширним коментарима.

[97] У овој теореми се говори о оном реду апотоме, који је одређен у трећим дефиницијама.

Са аналитичког гледишта ова теорема је очигледна, јер израз сваке апотоме линеарно зависи од рационалне дужи. Ова последња примедба односи се и на наредне теореме до 107 теореме закључно.

[98] У теоремама 108—110 Еуклид се бави трансформацијом разлике две површине у квадрат на дужи. Са савременог гледишта то одговара извлачењу квадратног корена из разлике две површине: рационалне и медијалне, медијалне и рационалне и две медијалне. Одговор дају парови ирационала треће хексаде, тј. ирационалности уведене у теоремама 73—78, почев од апотоме.

[99] Теорема 111 и последица те теореме служе као основа за класификацију Еуклидових ирационалности. Тој класификацији посвећујемо нарочити додатак свом коментару.

[100] J. L. Heiberg, у свом издању Еуклидових елемената ставља последње четири теореме (112—115) у заграде и изражава тиме своје мишљење да те теореме нису Еуклидове, већ да су унесене доцније. За то се могу навести ови разлози: 1. По садржају теорема 111 треба да буде логички

последња. 2. Главни садржај теорема 112—113 је у алгебарској вредности (ослобођење именилаца од ирационалности ради згоднијег израчунавања), а такво гледиште је било Еуклиду страно. 3. У овим теоремама се уводи нова терминологија: за апотоме, место ὅλη и προσαρμόζουσα — цело и додатак, стоји ὀνόματα — рационале, а та се реч раније односила само на чланове биномијала.

Садржај ових теорема кратко можемо изразити једначинама:

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}, \qquad \text{(за теорему 112)}$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}, \qquad \text{(за теорему 113)}$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b. \qquad \text{(за теорему 114)}$$

Оригиналан доказ ових теорема је врло интересантан и читалац, који је пажљиво савладао ову Еуклидову књигу, може имати велико задовољство у самосталном тумачењу текста ових теорема.

[101] Ако са μ означимо медијалу, тј. ставимо $\mu=\sqrt{ab}$, где су a и $b (a \mp b)$ рационалне дужи самерљиве само у степену можемо начинити са рационалном дужи r низ ирационалности

$$\mu_1=\sqrt{r\mu},\quad \mu_2=\sqrt{r\mu_1},\ \dots\ \mu_n=\sqrt{r\mu_{n-1}}\dots$$

који је бесконачан и чији су сви чланови различити по својој ирационалној природи.

ДОДАТАК

Наведимо основну схему за Еуклидове рационалне и ирационалне величине, које су употребљене у X књизи Елемената.

Нека су m, n — цели бројеви, k, l — рационални бројеви (k или $l = n/m$), при чему та слова не означују одређене бројне вредности, већ само природу тих бројева — цели или рационални у нашем смислу.

Са r означимо основну рационалну дуж, изабрану за упоређивање. Тада су r' и r'', под условима 1. $r' = kr$, 2. $r''^2 = kr^2$, исто тако рационалне дужи у Еуклидовом смислу, и то r' рационална и самерљива по дужини са r и r'' рационална и самерљива у степену са r.

У даљем излагању код сваке величине, коју уводимо стављаћемо у загради број, који означава теорему у којој је тој величини одређена вредност.

Медијала (21) $\mu = \sqrt{r_1'' r_2''} = \sqrt{\sqrt{k_1}\sqrt{k_2}}\, r = \sqrt[4]{k_1 k_2}\, r.$

Прва хексада ирационалности

S_1 **Биномијала** (36) $S_1 = r + r\sqrt{k};$

S_2 **Прва бимедијала** (37) $S_2 = k^{1/4} r + k^{3/4} r;$

S_3 **Друга бимедијала** (38) $S_3 = k^{1/4} r + \frac{l^{1/2}}{k^{1/4}} r;$

S_4 **„Већа“** (39) $S_4 = \frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} + \frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\ ;$

S_5 **„Страна квадрата једнаког збиру рационалне и медијалне површине“**

$$S_5 = \frac{r}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k} + \frac{r}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k}\,; \quad (40)$$

S_6 **„Страна квадрата једнаког збиру две медијалне површине“** (41)

$$S_6 = r\frac{\sqrt[4]{l}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} + r\frac{\sqrt[4]{l}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\,.$$

Особине чланова ове прве хексаде, које служе за дефиницију тих чланова, могу се изразити овако:

$$\begin{array}{lll}
S_1 = r_1'' + r_2'' & r_1''^2 \frown r_2''^2, & \\
S_2 = \mu_1 + \mu_2, & \mu_1^2 \frown \mu_2^2, & \mu_1\,\mu_2 \frown r^2; \\
S_3 = \mu_1 + \mu_2, & \mu_1^2 \frown \mu_2^2, & \mu_1\,\mu_2 \frown r^2\sqrt{k};
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
S_4 = a + b, \\
S_5 = a + b, \\
S_6 = a + b,
\end{array}\right\} \; a^2 \smile b^2 \;\left|\; \begin{array}{ll}
a^2 + b^2 \frown r^2, & a\,b \frown r^2\sqrt{k}; \\
a^2 + b^2 \frown r^2\sqrt{k} & a\,b \frown r^2\sqrt{k}; \\
a^2 + b^2 \frown r^2\sqrt{k}, & a\,b \frown r^2\sqrt{k}, a^2 + b^2 \smile a\,b.
\end{array}\right.$$

Друга хексада ирационалности рашчлањује општи израз биномијале.

B_1 **Прва биномијала** (48) $B_1 = k\,r + k\,r\sqrt{1-l^2}$,

B_2 **Друга** „ (49) $B_2 = \frac{k\,r}{\sqrt{1-l^2}} + k\,r$,

B_3 **Трећа** „ (50) $B_3 = \sqrt{k\,r} + \sqrt{k}\;r\sqrt{1-l^2}$,

B_4 **Четврта** „ (51) $B_4 = k\,r + \frac{k\,r}{\sqrt{1+l}}$,

B_5 **Пета** „ (52) $B_5 = k\,r\,\sqrt{1+l} + k\,r$,

B_6 **Шеста** „ (53) $B_6 = \sqrt{k_1}\,r + \sqrt{k_2}\,r$.

Наведимо и таблицу особина тих бројева. Ставимо

$$B_i = a_i + b_i, \qquad a_i^2 + b_i^2 = c_i^2 \qquad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

$$\left.\begin{array}{ll} B_1 & a_1 \frown r, \\ B_2 & b_2 \frown r, \\ B_3 & a_3 \smile r, \ b_3 \smile r \end{array}\right\} \quad c_i \frown a_i, \qquad i=1,2,3.$$

$$\left.\begin{array}{ll} B_4 & a_4 \frown r, \\ B_5 & b_5 \frown r, \\ B_6 & a_6 \smile r, \ b_6 \smile r \end{array}\right\} \quad c_i \smile a_i, \qquad i=4,5,6.$$

Трећа хексада. Чланови ове хексаде се разликују од чланова прве хексаде само знаком: место збира имамо разлику. Називи су други.

R_1 **Апотома** (73),

R_2 **Прва медијална апотома** (74),

R_3 **Друга медијална апотома** (75),

R_4 **„Мања“** (76),

„Дуж која са рационалном образује медијално (77),

„Дуж која са медијалном образује медијално“ (78).

Јасно је да нема потребе наводити ни вредности, ни особине горњих израза.

Као ново можемо исписати шест биквадратних једначина, од којих свака има ова четири корена

$$S_i, \ R_i, \ -S_i, \ -R_i \qquad i=1,\ 2, \ldots, 6$$

Једначине су:

1. $$z^4-2\,(1+k)\,r^2 z^2+(1-k)^2 r^4=0,$$

2. $$z^4-2\sqrt{k}\,(1+k)\,r^2 z^2+k\,(1-k)^2 r^4=0,$$

3. $$z^4-2\,\frac{k+l}{\sqrt{k}}\,r^2 z^2+\frac{(k-l)^2}{k}\,r^2=0,$$

4. $$z^4-2\,r^2 z^2+\frac{k^2}{1+k^2}\,r^4=0,$$

5. $$z^4-\frac{2}{\sqrt{1+k}}\,r^2 z^2+\frac{k^2}{(1+k^2)^2}\,r^4=0,$$

6. $$z^4-2\sqrt{l}\,r^2 z^2+l\,\frac{k^2}{1+k^2}\,r^4=0.$$

Четврта хексада. Како друга хексада претставља биномијалу S_1 развијену у шест чланова, тако и четврта хексада претставља развијену апотому R_1. Према томе у тој хексади имамо шест апотома, које ћемо означити овако:

$$A_1\ (85),\ A_2\ (86),\ A_3\ (87),\ A_4\ (88),\ A_5\ (89),\ A_6\ (90).$$

Оне се разликују од биномијала само знаком. Биномијала и одговарајућа апотома су корени исте квадратне једначине. Према томе имамо ових шест квадратних једначина:

1. $x^2 - 2\,k\,r\,x + k^2 l^2 r^2 = 0,$

2. $x^2 - \dfrac{2\,k\,r}{\sqrt{1 - l^2}}\,x + \dfrac{k^2\,l^2}{1 - l^2}\,r^2 = 0,$

3. $x^2 - 2\,r\,x\,\sqrt{k} + l^2\,k\,r^2 = 0,$

4. $x^2 - 2\,k\,r\,x + \dfrac{l}{1+l}\,k^2\,r^2 = 0,$

5. $x^2 - 2\,k\,r\,x\,\sqrt{1+l} + l\,k^2\,r^2 = 0;$

6. $x^2 - 2\,r\,x\,\sqrt{k_1} + (k_1 - k_2)\,r^2 = 0.$

Између ирационалности наведених шест хексада Еуклид поставља шест серија једначина, свака серија од шест једначина.

Резултате у теоремама 54—59 можемо кратко изразити једначином

$$(\alpha) \qquad r\,B_i \longrightarrow S_i^2$$

Знак $\longrightarrow$ употребили смо да се успостави веза не у облику једнакости оних израза, које смо употребили за, рецимо S_i, већ у облику припадања сваког израза оном типу ирационалности, за који је употребљена ознака. Одређивање самих, конкретних, израза претставља одговарајући задатак који и решава Еуклид. Наведимо, прво, решења свих одговарајућих задатака серије (α), при чему, ради упрошћавања штампања, изостављамо множитељ r односно r^2:

$$(\alpha_1)\quad k+k\sqrt{1-l^2}\equiv\left[\sqrt{\frac{k}{2}(1+l)}+\sqrt{\frac{k}{2}(1-l)}\right]^2,$$

$$(\alpha_2)\quad \frac{k}{\sqrt{1-l^2}}+k\equiv\left[\sqrt{\frac{k}{2}\left(\frac{1+l}{1-l}\right)^{1/2}}+\sqrt{\frac{k}{2}\left(\frac{1-l}{1+l}\right)^{1/2}}\right]^2,$$

$$(\alpha_3)\quad \sqrt{k}+\sqrt{k}\,\sqrt{1-l^2}\equiv\left[\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{2}(1+l)}+\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{2}(1-l)}\right]^2,$$

$$(\alpha_4)\quad k+\frac{k}{\sqrt{1-l^2}}\equiv\left[\sqrt{\frac{k}{2}\left(1+\sqrt{\frac{l}{1+l}}\right)}+\sqrt{\frac{k}{2}\left(1-\sqrt{\frac{l}{1+l}}\right)}\right]^2,$$

$$(\alpha_5)\quad k\sqrt{1+l}+k\equiv\left[\sqrt{\frac{k}{2}(\sqrt{1+l}+\sqrt{l})}+\sqrt{\frac{k}{2}(\sqrt{1+l}-\sqrt{l})}\right]^2,$$

$$(\alpha_6)\quad \sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}=\left[\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_1-k_2})}+\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{k_1}-\sqrt{k_1-k_2}}\right]^2.$$

Теореме 60 - 65 одговарају другој, обрнутој серији (α). У новој серији квадрат на S_i се претвара у правоугаоник са дужином r и ширином B_1. Према томе нову серију схематски можемо овако обележити:

$$(\beta)\qquad S_i^2\to rB_1.$$

Једначине те серије непосредно се добивају развијањем квадрата S_i^2. На овај начин имамо ових шест једначина

$$(\beta_1)\qquad (1+\sqrt{k})^2=1+k+2\sqrt{k},$$

$$(\beta_2)\qquad (k^{1/4}+k^{3/4})^2=\sqrt{k}(1+k)+2k,$$

$$(\beta_3)\qquad \left(k^{1/4}+\frac{l^{1/2}}{k^{1/4}}\right)^2=\frac{k+l}{\sqrt{k}}+2\sqrt{l},$$

$$(\beta_4)\ \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k}}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\right]^2=1+\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$(\beta_5)\ \left[\frac{1}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k}+\frac{1}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{1}{1+k^2},$$

$$(\beta_6)\ \left[\frac{l^{1/4}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}+\frac{l^{1/4}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\right]^2=\sqrt{l}+\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Што се тиче две остале серије којима одговарају теореме 91-96 и 97-102, оне су потпуно аналогне претходним серијама (α) и (β) са једном разликом што знак плус треба да буде замењен знаком минус.

Остале особине Еуклидових ирационалних израза наведене су у тексту превода и у примедбама на тај текст.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА XI

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 11

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ЈЕДАНАЕСТА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1957

Научно дело

ИЗДАВАЧКА УСТАНОВА САН

Штампа Графичко предузеће „Академија“, Београд, Космајска ул. 28

САДРЖАЈ ЈЕДАНАЕСТЕ КЊИГЕ

ПРЕДГОВОР

После десете књиге, у којој је била изложена Еуклидова теорија ирационалних величина, Еуклид се поново враћа на Геометрију. Ова једанаеста књига посвећена је првим елементима Стереометрије. После дефиниције просторних облика и постављања основних веза између њих, у првим ставовима се третирају релативни положаји правих и равни, управност и паралелност. Главни део књиге се односи на проучавање запремине паралелепипеда различитих облика и положаја.

Ставови ове књиге ушли су, у већини, било као теореме, било као задаци, у савремене уџбенике Стереометрије. Може се чак тврдити да Еуклидов стереометриски материјал улази у савремени школски курс дедуктивне геометрије са мањим изменама него планиметриски материјал. Знатно је допуњена само Еуклидова метрика која је у његово време много заостајала, чак и од његове планиметриске метрике.

Може се приметити да Еуклид уноси у своје просторне претставе много више конкретности, него у своје планиметриске претставе, које садрже више апстрактних елемената.

При изради и ове књиге су ми помогли В. В. Мишковић и Т. П. Анђелић, на чему им овде изјављујем захвалност.

А. Б.

ТЕКСТ

Дефиниције[1]

1. Тело је оно што има дужину, ширину и дубину (висину).[2]

2. Граница тела је површина.[3]

3. Права је нормална на равни ако образује праве углове са свима правима које је секу и налазе се у тој равни.[4]

4. Раван је нормална на равни, ако су праве, нормалне на пресеку тих равни у једној равни, нормалне на другој равни.[5]

5. Нагиб дужи (праве) према равни је угао између дате дужи и друге дужи која се добива кад се крај дате дужи у датој равни споји са подножјем нормале спуштене из другог краја дате дужи на дату раван.[6]

6. Нагиб равни према равни је оштар угао између правих повучених у свакој од равни нормално на пресек равни у истој тачки.[7]

7. Каже се да је раван према равни подједнако нагнута као и друга раван према другој равни, ако је нагиб првих равни једнак нагибу других равни.

8. Паралелне су оне равни које се не сусрећу.[8]

9. Сличне просторне фигуре су оне које су обухваћене сличним равнима у једнаком броју.

10. Једнаке и сличне просторне фигуре су оне које су обухваћене сличним равнима, једнаким по броју и и по величини.[10]

11. Рогаљ (телесни угао) је узајамни нагиб више од две линије, које се сусрећу у истој тачки и не налазе се у истој површини. Или друкчије: рогаљ (телесни угао) се састоји од више од два равна угла, који се не налазе у истој равни и састају се у истој тачки.[11]

12. Пирамида је просторна фигура састављена од равни конструисаних над једном равни према једној тачки.[12]

13. **Призма** је просторна фигура састављена од равни, од којих су две, наспрамне, једнаке, сличне и паралелне, а остале су паралелограми.[13]

14. Ако пречник полукруга остаје непокретан, а полукруг се око њега обрће и врати у положај из којег је почео кретање, обухваћена фигура је **сфера** (**лопта**).[14]

15. **Оса сфере** је непокретна права, око које се обрће полукруг.[15]

16. **Центар сфере** је исто што и центар полукруга.

17. **Пречник** (**дијаметар**) **сфере** је свака дуж што пролази кроз центар а ограничена је са оба краја сферном површином.[16]

18. Ако један крак правог угла (једна катета) правоуглог троугла остаје непокретан, а троугао се око те праве обрће и врати у положај из којег је почео кретање, обухваћена фигура је **конус** (**купа**). Ако је непокретан крак правог угла једнак другом краку тог угла, који се обрће, конус је правоугли, ако је мањи — тупоугли, а ако је већи — оштроугли.[17]

19. **Оса** је **конуса** непокретна права око које се троугао обрће.

20. **Основа** је **конуса** круг који описује покретна дуж.

21. Ако један крак правог угла правоуглог паралелограма остаје непокретан, а паралелограм се око тог крака обрће и врати у положај из којег је почео кретање, обухваћена фигура је **цилиндар** (**ваљак**).[18]

22. **Оса** је **цилиндра** непокретна права, око које се обрће паралелограм.

23. **Основе** су **цилиндра** кругови, које описују оне две наспрамне стране паралелограма које се обрћу.

24. **Слични** су они **конуси** и **цилиндри**, чије су осе и пречници основа пропорционални.

25. **Коцка** (**куб**) је просторна фигура обухваћена са шест једнаких квадрата.

26. **Октаедар** је просторна фигура обухваћена са осам једнаких и равностраних троуглова.

27. **Икосаедар** је просторна фигура обухваћена са двадесет једнаких и равностраних троуглова.

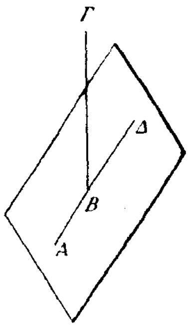
28. **Додекаедар** је просторна фигура обухваћена са дванаест једнаких, једнакостраних и једнакоуглих петоуглова.[19]

1.

Један део праве линије не може се налазити у некој, основној, равни, а други део бити издигнут изнад те равни.

Заиста, ако је то могуће, нека се део АВ праве линије АВГ налази у основној равни, док је други део ВГ издигнут.

Нека постоји у основној равни нека права као праволиниско продужење праве АВ. Нека то буде ВΔ. На овај начин АВ је заједнички део две праве АВГ и АВΔ. А то је немогуће, јер, ако око центра В са полупречником АВ нацртамо круг, његови пречници отсецаће од круга неједнаке кружне лукове.

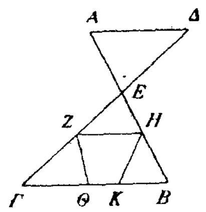


На овај начин, не може се један део праве линије налазити у некој, основној, равни, а други бити издигнут изнад те равни.

А то је требало доказати.[20]

2.

Ако две праве секу једна другу, оне су у истој равни; и сваки троугао је у истој равни.



Нека две праве АВ и ГΔ секу једна другу у тачки Е. Тврдим да су АВ и ГΔ у истој равни и сваки троугао је у истој равни.

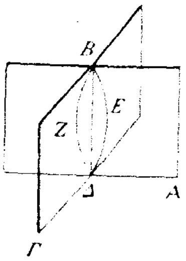
Заиста узмимо на правима ЕГ и ЕВ неке тачке Z и Н и повуцимо ГВ, ZН и ZΘ, НК. Прво тврдим, да је троугао ЕГВ у истој равни. Заиста, ако се један део троугла ЕГВ, ZΘГ или НВК, налази у основној равни, а други је издигнут ван те равни, онда се и један део правих ЕГ и ЕВ налази у основној равни, а други део ван те равни. А ако се део ZГВН троугла ЕГВ налази у основној равни, а остали део ван, онда се и код правих ΕΓ и ΕΒ један део налази у основној равни, а други ван равни. А то је, према доказаном, бесмислено. Према томе је троугао ΕΓΒ у истој равни. И свака од правих ΕΓ и ΕΒ биће у истој равни са троуглом ΕΓΒ, а биће у равни ΕΓ и ΕΒ и праве ΑΒ и ΓΔ. На овај начин праве ΑΒ и ΓΔ су у истој равни, и сваки троугао је у истој равни. А то је требало доказати.[21]

3.

Ако две равни секу једна другу, њихов пресек је права.

Заиста, нека две равни ΑΒ и ΒΓ секу једна другу и њихов пресек је линија ΔΒ. Тврдим да је ΔΒ права линија.

Заиста, ако није, спојимо тачке Δ и Β правом ΔΕΒ у равни ΑΒ и правом ΔΖΒ у равни ΒΓ. Тада постоје две праве ΔΕΒ и ΔΖΒ са заједничким крајевима, и, очевидно, обухватају неку површину, а то је бесмислено. Према томе ΔΕΒ и ΔΖΒ нису праве линије. Слично се доказује, да никаква друга права не постоји што спаја Δ и Β, сем ΔΒ, која је заједнички пресек равни ΑΒ и ΒΓ.



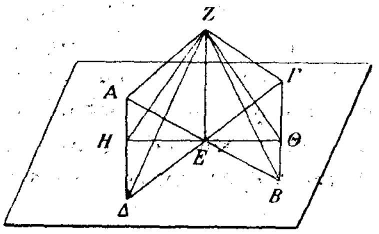
На овај начин, ако две равни секу једна другу, њихов пресек је права. А то је третребало доказати.[22]

4.

Права повучена кроз пресечну тачку две праве под правим угловима према свакој од њих биће под правим углом и према равни тих правих.

Заиста, нека је права ΕΖ, која пролази кроз пресечну тачку Ε правих ΑΒ и ΓΔ, под правим угловима према тим правима. Тврдим, да је ΕΖ под правим углом и према равни правих ΑΒ и ΓΔ.

Заиста, одмеримо међу собом једнаке дужи ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ и кроз Ε повуцимо произвољну праву ΗΕΘ, нацртајмо ΑΔ и ΓΒ и затим кроз тачку Ζ



повуцимо дужи ZA, ZH, ZΔ, ZΓ, ZΘ, ZB. Пошто су две дужи AE и EΔ једнаке двема дужима ΓE и EB и оне чине једнаке углове, онда је основа AΔ једнака основи ΓB и троугао AEΔ једнак троуглу ΓEB. Услед тога је и угао ΔAE једнак углу EBΓ. Али и угао AEH је једнак углу BEΘ. Према томе имамо два троугла AHE и BEΘ, код којих су два угла једног једнака са два односна угла другог, сваки — сваком, и једна страна AE између углова једног је једнака одговарајућој страни EB другог. Они тада имају и остале стране једнаке осталим странама. На овај начин је HE једнако EΘ и AH једнако BΘ. И пошто је AE једнако EB, а ZE заједничка страна при правим угловима, онда је основа ZA једнака основи ZB. Из истих разлога је ZΓ једнако ZΔ. И пошто је AΔ једнако ΓB и ZA једнако ZB, значи две стране ZA и AΔ једнаке двема странама ZB и BΓ, свака свакој, а доказано је да је и основица ZΔ једнака основици ZΓ, биће једнаки и углови ZAΔ и ZBΓ. И пошто је још доказано да је AH једнако BΘ, а и ZA да је једнако ZB, онда су две стране ZA и AH једнаке двема странама ZB и BΘ; а такође је доказано да је угао ZAH једнак углу ZBΘ. Отуд закључујемо да је и основица ZH једнака основици ZΘ. И пошто је још, према доказаном, HE једнако EΘ, а EZ је заједничка страна, значи две стране HE, EZ једнаке су двема странама ΘE, EZ, а и основица ZH једнака је основици ZΘ, па према томе и угао HEZ једнак је углу ΘEZ. На тај начин је сваки од углова HEZ и ΘEZ прав. Према томе је ZE управна на произвољној правој кроз тачку E. На сличан начин се доказује да ZE чини прав угао са сваком правом која је сече и налази се у основној равни. Но права је управна на равни, ако чини прав угао са сваком правом која је сече и налази се у тој равни. Према томе је права ZE управна на основној равни. Али основна раван је раван правих AB и ΓΔ. Према томе је ZE под правим углом према равни правих AB и ΓΔ.

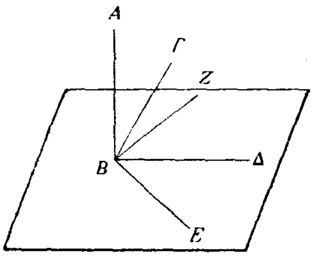
На овај начин, права повучена кроз пресечну тачку две праве под правим угловима према свакој од њих биће под правим углом и према равни тих правих. А то је требало доказати.[23]

5.

Три праве са заједничком тачком су у истој равни, ако постоји права која пролази кроз ту заједничку тачку и управна је на свакој од тих правих.

Заиста, нека права AB која пролази кроз заједничку тачку B правих BГ, BΔ, BE стоји под правим углом према свакој од њих. Тврдим, да су BГ, BΔ, BE у истој равни.

Заиста, ако то није тако, онда је могуће, да BΔ и BE буду у основној равни, а BГ ван те равни. Конструишимо онда кроз AB и BГ раван. У пресеку са основном равни она чини праву. Нека то буде права BZ. Значи да су три праве AB, BГ, BZ у истој равни која пролази кроз AB и BГ. А како је AB управна према свакој од BΔ и BE, она је управна и на равни правих BΔ и BE. Но раван правих BΔ и BE је основна раван. Према томе је AB управна на основној равни. А тада је AB управна на свакој правој у тој равни која сече праву AB. Но њу сече и права BZ, која се такође налази у основној равни. Према томе је угао ABZ прав угао. Али је претпостављено да је и угао ABГ прав. Према томе је угао ABZ једнак углу ABГ. И они се налазе у истој равни. А то је немогуће. Дакле права BГ неће бити у некој равни изнад основне. Према томе се три праве BГ, BΔ, BE налазе у истој равни.



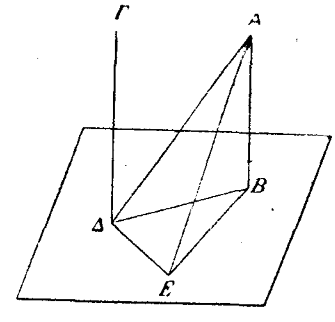
На овај начин, три праве са заједничком тачком су у истој равни, ако постоји права која пролази кроз ту заједничку тачку и управна је на свакој од тих правих. А то је требало доказати.[24]

6.

Ако су две праве управне на истој равни, оне су паралелне.

Заиста, нека праве AB и ГΔ стоје под правим угловима према основној равни. Тврдим да је права AB паралелна са правом ГΔ.

Заиста, нека оне секу основну раван у тачкама B и Δ, па повуцимо праву BΔ и нека је ΔE права у основној равни управна на ВΔ; даље одмеримо ΔЕ једнако АВ и повуцимо ВЕ, АЕ, АΔ. Пошто је дуж АВ нормална на основној равни, она ће образовати прав угао са сваком правом која је сече и налази се у основној равни. Но АВ сече сваку од правих ВΔ и ВЕ, које се налазе у основној равни. Према томе је сваки од углова АВΔ и АВЕ прав. Из истих разлога је и сваки од углова ГΔВ и ГΔЕ прав. И пошто је АВ једнако ΔЕ, а ВΔ је заједничка, две стране АВ, ВΔ једнаке су двема странама ЕΔ, ΔВ. И оне образују праве углове. Тада је основица АΔ једнака основици ВЕ. И пошто је АВ једнако ΔЕ, а и АΔ једнако ВЕ, значи две стране АВ, ВЕ једнаке су двема странама ЕΔ, ΔА, а и основица АЕ им је заједничка. Према томе је угао АВЕ једнак углу ЕΔА. А како је угао АВЕ прав, биће прав и и угао ЕΔА. Значи ЕΔ је управна на ΔА. Дакле, она је управна и према свакој од ВΔ и ΔГ. Према томе је ЕΔ управна на три праве ВΔ, ΔА и ΔГ, који имају са њом заједничку тачку. Због тога се три праве ВΔ, ΔА и ΔГ налазе у истој равни. И у оној равни у којој се налазе ΔВ и ΔА, налази се и АВ, јер се цео троугао налази у истој равни. Према томе су праве АВ, ВΔ и ΔГ у истој равни. И сваки је од углова АВΔ и ВΔГ прав, те је АВ паралелна са ГΔ.



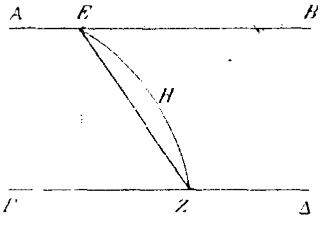
На овај начин, ако су две праве управне на истој равни, оне су паралелне. А то је требало доказати.

7.

Ако постоје две паралелне праве и на свакој од њих је узета по једна произвољна тачка, биће права што их спаја у истој равни са паралелним.

Нека су АВ и ГΔ две паралелне праве и на свакој од њих узета произвољна тачка: Е односно Z. Тврдим, да се права што спаја тачке Е и Z налази у истој равни са паралелним.

Заиста, ако то није тако, онда је могуће, да се она налази у некој другој равни као права ЕНZ и повуцимо кроз ЕНZ раван. Та раван сече основну раван дуж неке праве, нека то буде права EZ. На овај начин, праве EHZ и EZ обухватају неку површину. А то је немогуће. Значи права што спаја тачке E и Z се налази у равни паралелних правих АВ и ГΔ.



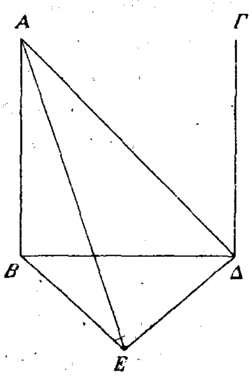
На овај начин, ако постоје две паралелне праве и на свакој од њих је узета по једна произвољна тачка, биће права што их спаја у истој равни са паралелним. А то је требало доказати.

8.

Ако су две праве паралелне и једна од њих управна на некој равни, биће и друга управна на тој равни.

Нека су АВ и ГΔ две паралелне праве, и нека је једна од њих, АВ, управна на основној равни. Тврдим, да је и друга ГΔ управна на истој равни.

Заиста нека су тачке В и Δ продорне тачке правих АВ и ГΔ у основној равни, и повуцимо ВΔ. Тада су АВ, ГΔ и ВΔ у истој равни. Нацртајмо у основној равни ΔЕ управну на ВΔ, одмеримо дуж ΔЕ једнаку АВ и спојимо са правим ВЕ, АЕ, АΔ. Пошто је АВ управно на основној равни, а свака права, која се налази у основној равни и сече управну праву, управна је на правој АВ, биће сваки од углова АВΔ и АВЕ прав. И пошто су паралелне АВ и ГΔ пресечене правом ВΔ, биће збир углова АВΔ и ГΔВ једнак двоструком правом углу. Но угао АВΔ је прав, па значи и угао ГΔВ прав. Према томе је права ГΔ управна на правој ВΔ. И пошто је АВ једнако ΔЕ, а ВΔ је заједничка, онда су две стране АВ и ВΔ једнаке двема странама ЕΔ и ΔВ. А и угао АВΔ једнак је углу ЕΔВ, јер је сваки од њих прав. Према томе је и основица АΔ једнака основици ВЕ. И пошто је АВ једнако ΔЕ, а ВЕ једнако АΔ, онда су две стране АВ, ВЕ



једнаке двема странама EΔ, ΔA, свака свакој, а и AE је заједничка основица. Према томе је угао ABE једнак углу EΔA. Но ABE је прав, те значи да је и EΔA прав угао. Дакле, EΔ је управно на AΔ, но EΔ је управно и на ΔB. Према томе је права EΔ управна на равни правих BΔ и ΔA. Значи EΔ чини прав угао и са сваком правом која је сече и налази се у равни BΔA. Али ће у равни која пролази кроз BΔA бити и ΔΓ, јер су у равни што пролази кроз BΔA и AB и BΔ, а у оној у којој се налазе AB и BΔ, налази се и ΔΓ. Према томе је EΔ под правим углом према ΔΓ. Значи и ΓΔ је под правим углом према ΔE. Но ΓΔ је под правим углом и према BΔ. На овај начин ΓΔ, пролазећи кроз пресечну тачку Δ правих ΔE и ΔB, стоји под правим углом према тим правима. Према томе је ΓΔ нормала на равни правих ΔE и ΔB. Но раван правих ΔE и ΔB је основна раван, па је према томе права ΓΔ нормална на основној равни.

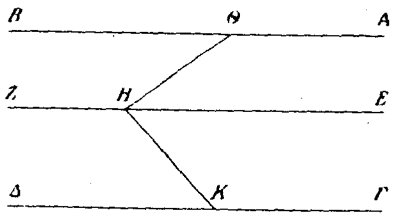
На овај начин, ако су две праве паралелне и једна од њих управна на некој равни, биће и друга права управна на тој равни. А то је требало доказати.

9.

Праве паралелне истој правој, које се са овом не налазе у истој равни, паралелне су међу собом.

Заиста, нека је свака од правих AB и ΓΔ паралелна са EZ, но нека се не налазе у истој равни. Тврдим, да су AB и ΓΔ паралелне.

Заиста, узмимо на EZ произвољну тачку H и из те тачке повуцимо у равни правих EZ и AB под правим углом према EZ праву HΘ, а у равни правих ZE и ΓΔ праву HK под правим углом према EZ. Пошто је EZ управна на свакој од правих HΘ и HK, она је управна и на равни што пролази кроз праве HΘ и HK. И права EZ је паралелна са правом AB. Према томе је и права AB управна на равни ΘHK. Из истих разлога је и права ΓΔ управна на равни ΘHK. На овај начин је свака од

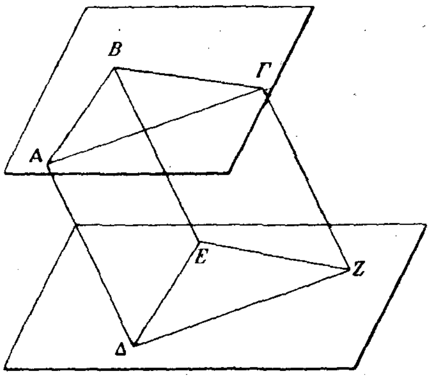


АВ и ГΔ управна на равни ΘНК. Но ако су две праве управне на истој равни, оне су паралелне. На овај начин права АВ је паралелна са ГΔ. А то је требало доказати.

10.

Ако су две праве, које се секу, паралелне са двема правима, које се секу, но не налазе се са овима у истој равни, оне образују једнаке углове.

Заиста, нека су АВ и ВГ две праве, које једна другу секу, паралелне са правима ΔЕ и ЕZ, које секу једна другу, но не налазе се у истој равни са првим правима. Тврдим, да је угао АВГ једнак углу ΔЕZ.



Заиста, одмеримо дужи ВА, ВГ, ЕΔ, ЕZ једнаке међу собом и спојимо АΔ, ГZ, ВЕ, АГ, ΔZ. Пошто је ВА једнако и паралелно ЕΔ, биће и АΔ једнако и паралелно ВЕ. Из истих разлога је и ГZ једнако и паралелно ВЕ. Према томе је свака од АΔ и ГZ једнака и паралелна са ВЕ. Но праве које су паралелне истој правој а не налазе се са њом у истој равни паралелне су. Према томе је АΔ паралелна ГZ и једнака. А спајају их АГ и ΔZ, па је значи и АГ једнака ΔZ и паралелна. И пошто су две стране АВ и ВГ једнаке двема странама ΔЕ и ЕZ и основица АГ једнака основици ΔZ, биће угао АВГ једнак углу ΔЕZ.

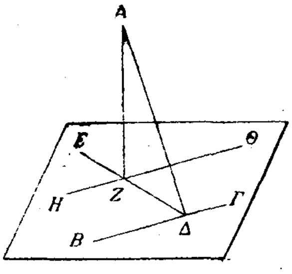
На овај начин, ако су две праве, које се секу, паралелне са двема правима, које се секу, но не налазе се са њима у истој равни, оне образују једнаке углове. А то је требало доказати.[25]

11.

Из дате тачке ван равни повући праву управну на ту раван.

Нека је А дата тачка над датом основном равни. Треба из дате тачке А повући праву линију управну на дату основну раван.

Повуцимо у основној равни произвољну праву ВГ и конструишимо из тачке А нормалу АΔ управну на ВГ. Ако је АΔ нормала на основној равни, тражено је постигнуто. Ако није, повуцимо у основној равни из тачке Δ нормалу ΔЕ на праву ВГ и спустимо из тачке А нормалу АZ на праву ΔЕ, па кроз тачку Z повуцимо праву НΘ паралелну правој ВГ.



Пошто је ВГ управна на свакој од ΔА и ΔЕ, биће ВГ управна и на равни ЕΔА. Но њој је паралелна и права НΘ. А ако су две праве паралелне и једна од њих управна на некој равни, онда је и друга управна на тој равни. Према томе је НΘ управна на равни правих ЕΔ и ΔА која сече праву НΘ. Но њу сече права АZ, која се налази у равни правих ЕΔ и ΔА. Према томе је НΘ управна на ZА. А значи и ZА је управна на ΘН. Но АZ је управна и на ΔЕ. АZ је на тај начин управна на свакој од НΘ и ΔЕ. Али ако је кроз тачку пресека две праве повучена права нормална на тим правима биће повучена права нормална и на равни тих правих. Према томе је ZА управна на равни правих ЕΔ и НΘ. Но раван правих ЕΔ и НΘ је основна раван. Према томе је ZА права управна на основној равни.

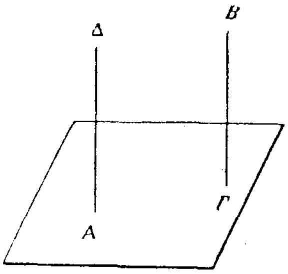
На овај начин је из дате тачке А ван равни повучена права АZ управна на датој равни. А то је требало извести.[26]

12.

На датој равни кроз тачку на њој подићи нормалу на раван.

Нека је дата раван — основна раван, и тачка А на њој. Треба у тачки А подићи нормалу на основној равни.

Узмимо неку тачку В ван основне равни и повуцимо кроз њу праву ВГ управну на основној равни, а кроз тачку А повуцимо праву АΔ паралелну ВГ. Сад, пошто су АΔ и ГВ две паралелне праве и једна од њих ВГ је управна на основној равни, биће и друга АΔ управна на тој равни.

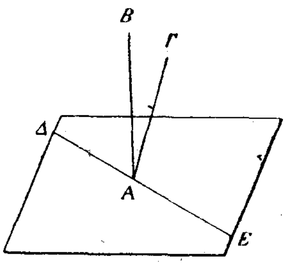


На овај начин је на дату раван кроз дату тачку А на њој повучена права АΔ управна на датој равни. А то је требало извести.[27]

13.

Не могу се подићи кроз исту тачку две нормале на истој равни.

Заиста, ако је могуће, нека су кроз исту тачку А у основној равни подигнуте две праве АВ и АГ нормалне на равни и са исте стране. Конструишимо раван кроз АВ и АГ. Она као пресек са основном равни, образује праву која пролази кроз А. Нека је то права ΔАЕ. Према томе су праве АВ, АГ, ΔАЕ у истој равни. И пошто је ГА управна на основној равни, биће она управна на свакој правој у основној равни која је сече. Али она сече праву ΔАЕ у основној равни. Према томе је угао ГАЕ прав. Из истих је разлога и угао ВАЕ прав. Значи да је угао ГАЕ једнак углу ВАЕ. И они су у истој равни. А то је немогуће.



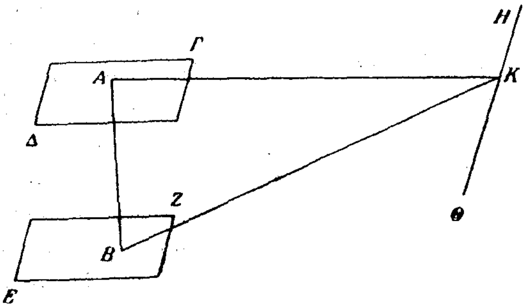
На овај начин, не могу се подићи кроз исту тачку две нормале на истој равни. А то је требало доказати.[28]

14.

Равни управне на истој правој паралелне су.

Заиста, нека је права АВ управна на свакој од равни ГΔ и EZ. Тврдим да су те равни паралелне.

Заиста, ако то није тако, оне се продужене сусрећу. Нека се сусрећу; тада постоји заједнички пресек — права линија. Нека то буде права НΘ. Узмимо на НΘ произвољну тачку К и спојимо АК и ВК. Пошто је АВ нормала на равни ЕZ, биће АВ нормална и на ВК, пошто се ВК налази у равни ЕZ управној на АВ. Према томе је угао АВК прав. Из истих



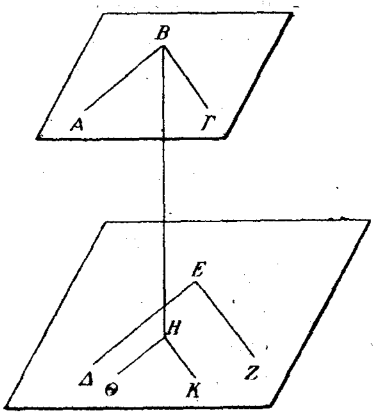
разлога је и угао ВАК прав. На овај начин троугао АВК има два права угла — АВК и ВАК. А то је немогуће. Према томе равни ГΔ и ЕZ и продужене не сусрећу се. Значи равни ГΔ и ЕZ су паралелне.

На овај начин, равни управне на истој правој паралелне су. А то је требало доказати.[29]

15.

Ако су две праве, које се секу, паралелне двема другим правима, које се секу, а не налазе се у истој равни, њихове равни су паралелне.

Заиста, нека су две праве АВ и ВГ, које се секу, паралелне правима ΔЕ и ЕZ, али раван првих правих је различита од равни других. Тврдим да равни које пролазе кроз АВ, ВГ и кроз ΔЕ, ЕZ и продужене не сусрећу једна другу.

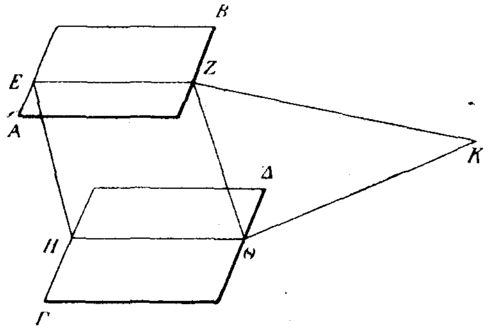


Заиста, повуцимо кроз тачку В нормалу ВН на раван правих ΔЕ и ЕZ и нека она продире ту раван у тачки Н, па повуцимо и кроз Н праву НΘ паралелно ЕΔ и праву НК паралелно ЕZ. Пошто је права ВН управна на равни правих ΔЕ и ЕZ, биће она управна и на свакој правој у тој равни која је сече. Према томе је она управна и на правима НΘ и НК, које се налазе у равни правих ΔЕ и ЕZ. Значи сваки од углова ВНΘ и ВНК је прав. И пошто је ВА паралелна НΘ, биће збир углова НВА и ВНΘ једнак са два права угла. Но угао ВНΘ је прав, па према томе мора бити и угао НВА прав. Дакле, НВ је под правим углом према ВА. Из истих разлога је НВ под правим углом и према ВГ. И пошто сад права НВ стоји управно на двема правима, које се секу, ВА и ВГ, биће НВ нормала на равни правих ВА и ВГ. Из истих разлога ВН је нормала и на равни правих НΘ и НК. А раван тих правих је иста што и раван правих ΔЕ и ЕZ. Према томе је ВН нормала и на равни правих ΔЕ и ЕZ. А ВН је нормала и на равни правих АВ и ВГ. Но равни, управне на истој правој, паралелне су. Према томе је раван правих АВ и ВГ паралелна са равни правих ΔЕ и ЕZ.

На овај начин, ако су две праве, које се секу, паралелне двема другим правима, које се секу, а не налазе се у истој равни, њихове равни су паралелне. А то је требало доказати.

16,

Ако се две паралелне равни пресеку неком равни, њихови заједнички пресеци паралелни су.



Заиста, нека су две паралелне равни АВ и ГΔ пресечене са равни ЕZНΘ и ЕZ и НΘ њихови заједнички пресеци. Тврдим, да је права ЕZ паралелна са правом НΘ.

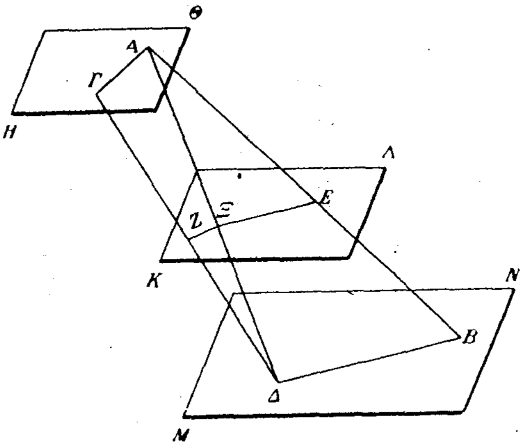
Заиста, ако то није тако, онда се ЕZ и НΘ сусрећу, било са стране ZΘ, било са стране ЕН. Продужимо их са стране Z и Θ и нека се сусрећу прво у тачки К. Пошто се ЕZК налази у равни АВ, налазе се све тачке ЕZК у равни АВ. А како тачка К припада правој ЕZК, и она се налази у равни АВ. Из истих разлога закључујемо да се тачка

К налази у равни ГД. На овај начин се равни АВ и ГΔ, продужене, сусрећу. Али оне се не сусрећу, јер су, по претпоставци паралелне. Према томе праве ΕΖ и ΗΘ, продужене са стране Ζ и Θ, не сусрећу се. На сличан начин се доказује да се праве ΕΖ и ΗΘ не сусрећу продужене ни са стране Е и Н. А оне које се не сусрећу ни са једне стране, паралелне су. Према томе ΕΖ је паралелна са ΗΘ.

На овај начин, ако се две паралелне равни пресеку неком равни, њихови заједнички пресеци паралелни су. А то је требало доказати.

17.

Ако се две праве пресеку паралелним равнима, њихови отсечци су у истој размери.



Заиста, нека су две праве АВ и ГΔ пресечене паралелним равнима ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ у тачкама А, Е, В, Г, Ζ, Δ. Тврдим да је дуж АЕ према дужи ЕВ као ГΖ према ΖΔ.

Заиста, спојимо АГ, ВΔ, АΔ и нека АΔ продире раван ΚΛ у тачки Ξ, па спојимо ΕΞ и ΞΖ. Пошто су две паралелне равни, ΚΛ и ΜΝ, пресечене са равни ΕΒΔΞ, биће њихови заједнички пресеци ΕΞ и ΒΔ паралелни. Из истих разлога, пошто су две паралелне равни, ΗΘ и ΚΛ, пресечене са равни ΑΞΖΓ, биће и њихови пресеци, АГ и ΞΖ, паралелни. И пошто је у троуглу ΑΒΔ повучена права ΕΞ паралелно страни ΒΔ, биће

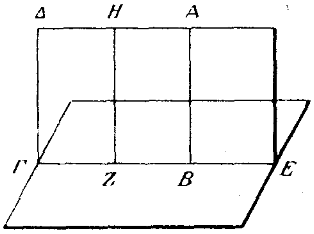
AE према EB као EΞ према ΞΔ. Даље, пошто је у троуглу AΔΓ права ΞZ повучена паралелно страни AΓ, биће AΞ према ΞΔ као ΓZ према ZΔ. А доказано је да је AΞ према ΞΔ као и AE према EB. Према томе је AE према EB као ΓZ према ZΔ.

На овај начин, ако се две праве пресеку паралелним равнима, њихови отсечци су у истој размери. А то је требало доказати.

18.

Ако је права управна на некој равни, свака раван што пролази кроз ту праву, управна је на тој равни.

Заиста, нека је нека права AB управна на основној равни. Тврдим да је свака раван што пролази кроз AB управна на основној равни.



Заиста, повуцимо кроз AB раван ΔE и нека је ΓE пресек равни ΔE са основном равни. Узмимо на ΓE произвољну тачку Z и повуцимо кроз Z, у равни ΔE, ZH управно на ΓE. Пошто је AB управна на основној равни, биће AB управна на свакој правој у основној равни која је сече. Стога ће она бити управна и на ΓE. И угао ABZ је прав. А прав је и угао HZB. Према томе је AB паралелна са ZH. Но права AB је управна на основној равни, те значи да је и права ZH управна на основној равни. А раван је управна на равни, ако праве у једној од њих, управне на пресечној правој, стоје управно на другој равни. Али доказали смо да је права ZH, повучена у равни ΔE управно на правој пресека ΓE, управна на основној равни. Па према томе је раван ΔE управна на основној равни. На сличан начин се доказује да је и свака раван, повучена кроз AB, управна на основној равни.

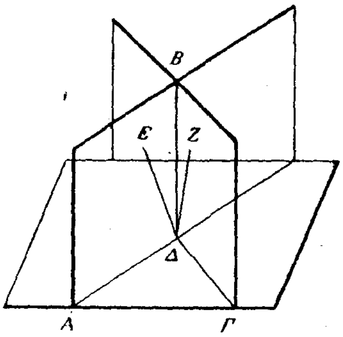
На овај начин, ако је права управна на некој равни, свака раван што пролази кроз ту праву управна је на тој равни. А то је требало доказати.

19.

Ако су две равни, које се секу, нормалне на некој равни, биће и њихов пресек нормалан на истој равни.

Нека су две равни, АВ и ВГ, нормалне на основној равни, а њихов пресек нека буде права ВΔ. Тврдим, да је ВΔ нормална на основној равни.

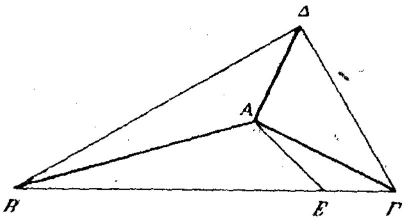
Заиста, нека није тако. Из тачке Δ у равни АВ повуцимо праву ΔЕ управну на АΔ, а у равни ВГ праву ΔZ управну на ГΔ. Пошто је АВ раван управна на основној равни и у равни АВ је повучена права ΔЕ управна на заједничком пресеку равни АВ и основне равни, биће права ΔЕ управна на основној равни. Слично се доказује да је и права ΔZ управна на основној равни. Према томе из исте тачке Δ основне равни са исте стране те равни повучене су две нормале на ту раван. А то је немогуће. Значи из тачке Δ основне равни не може бити друге нормале сем ВΔ, пресека равни АВ и ВГ.



На овај начин, ако су две равни, које се секу, нормалне на некој равни, биће и њихов пресек нормалан на тој равни. А то је требало доказати.

20.

Ако је рогаљ обухваћен са три равна угла, збир ма која два од њих је већи од трећег.



Заиста, нека је рогаљ код тачке А обухваћен са три равна угла: ВАГ, ГАΔ, ΔАВ. Тврдим да је збир ма која два од углова ВАГ, ГАΔ, ΔАВ већи од трећег.

Ако су углови ВАГ, ГАΔ, ΔАВ једнаки један другом, јасно да је збир било која два од њих већи од трећег. Ако нису једнаки, нека је највећи угао ВАГ. Конструишимо у равни ВАГ, на правој АВ код тачке А, угао ВАЕ једнак углу ΔАВ, одмеримо дуж АЕ једнаку АΔ и нека права ВЕГ кроз тачку

Е пресеца праве АВ и АГ у тачкама В и Г, па спојимо ВΔ и ΔГ. И пошто је дуж ΔА једнака дужи АЕ, а АВ је заједничка, биће две једнаке двема. А и угао ΔАВ једнак је углу ВАЕ. Према томе је и основица ΔВ једнака основици ВЕ. И пошто је збир ВΔ и ΔГ већи од ВГ, од којих је ВΔ, како је доказано, једнако ВЕ, биће и остатак ΔГ већи од остатка ЕГ. И пошто је ΔА једнако АЕ, а АГ је заједничка, и основица ΔГ је већа од основице ЕГ, биће угао ΔАГ већи од угла ЕАГ. Доказано је међутим да је угао ΔАВ једнак углу ВАЕ. Према томе је збир углова ΔАВ и ΔАГ већи од угла ВАГ. Слично се доказује да су и други, узети по два, већи од трећег.

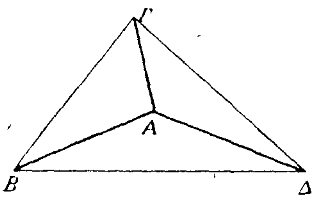
На овај начин, ако је рогаљ обухваћен са три равна угла, збир ма која два од њих је већи од трећег. А то је требало доказати.[30]

21.

Сваки рогаљ је обухваћен равним угловима, чији је збир мањи од четири права угла.

Нека је рогаљ код тачке А обухваћен равним угловима ВАГ, ГАΔ, ΔАВ. Тврдим да је збир углова ВАГ, ГАΔ, ΔАВ мањи од четири права угла.

Заиста, узмимо на свакој од правих АВ, АГ, АД произвољне тачке В, Г, Δ и спојимо ВГ, ГΔ, ΔВ. Пошто је просторни угао код тачке В обухваћен равним угловима ГВА, АВΔ, ГВΔ, биће збир два ма која од њих већи од трећег. Према томе је збир ГВА и АВΔ већи од ГВΔ. Из истих разлога је и збир ВГА и АГΔ већи од ВГΔ, а и збир ГΔА и АΔВ већи од ГΔВ. Значи и збир од шест углова: ГВА, АВΔ, ВГА, АГΔ, ГΔА, АΔВ је већи од збира три угла: ГВΔ, ВГΔ, ГΔВ. Но збир три угла ГВΔ, ВΔГ, ВГΔ једнак је са два права угла. Према томе је збир од шест углова ГВА, АВΔ, ВГА, АГΔ, ГΔА, АΔВ већи од два права угла. И пошто је у сваком од троуглова АВГ, АГΔ, АΔВ збир од три угла једнак са два права угла, биће код три троугла збир од девет углова ГВА, АГВ, ВАГ, АГΔ, ГΔА, ГАΔ, АΔВ, ΔВА, ВАΔ једнак са шест правих углова; у том збиру збир



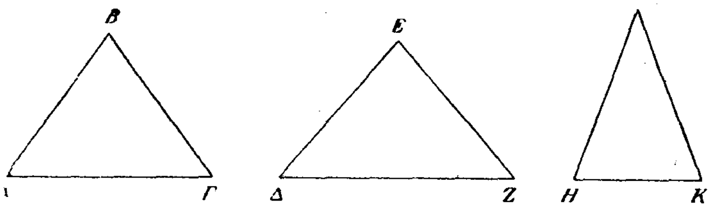
шест углова АВГ, ВГА, АГΔ, ГΔА, АΔВ ΔВА је већи од два права угла, па према томе је збир остала три угла ВАГ, ГАΔ, ΔАВ, који обухватају рогаљ, мањи од четири права угла.

На овај начин, сваки рогаљ је обухваћен равним угловима, чији збир мањи од четири права угла.

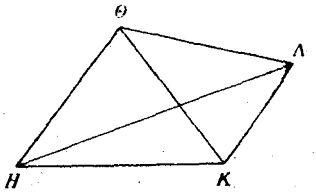
22.

Ако постоје три равна угла, од којих је збир два произвољно узета, већи од преосталог, а образују их једнаке дужи онда је могуће конструисати троугао од дужи које спајају крајеве једнаких дужи.

Нека постоје три равна угла АВГ, ΔЕΖ, НΘК, од којих је збир два већи од преосталог, наиме: збир АВГ и ΔЕΖ већи је од НΘК, а збир ΔЕΖ и НΘК од АВГ и збир НΘК и АВГ од ΔЕΖ. И нека су дужи АВ, ВГ, ΔЕ, ЕΖ, НΘ, ΘК једнаке. Па спојимо АГ, ΔΖ, НК. Тврдим, да је могуће од дужи, које су једнаке: АГ, ΔΖ, НК саставити троугао, тј. да је збир од две, произвољно узете, дужи од АГ, ΔΖ, NК већи од преостале.



Ако су углови АВГ, ΔЕΖ, НΘК једнаки међу собом, јасно је, да су тада и дужи АГ, ΔΖ, НК једнаке међу собом, а од једнаких дужи АГ, ΔΖ, НК могуће је саставити троугао. Ако то није тако, нека углови нису једнаки. Конструишимо на дужи ΘК, код тачке Θ, угао КΘΛ једнак углу АВГ, одмеримо дуж ΘΛ једнаку једној од дужи АВ, ВГ, ΔЕ, ЕΖ, НΘ, ΘК и спојимо КΛ, НΛ. Пошто су две дужи АВ и ВГ једнаке двема дужима КΘ, ΘΛ и угао код тачке В једнак углу КΘΛ, биће и основица АГ једнака основици КΛ. И пошто је збир углова

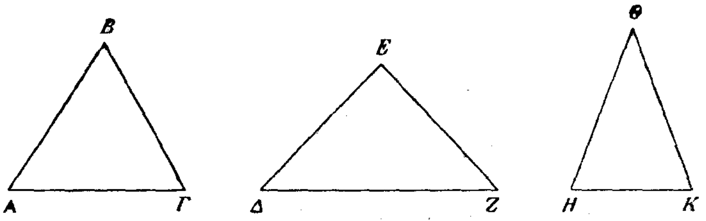


АВГ и НΘК већи од угла ΔΕΖ, а угао АВГ једнак је углу КΘΛ, биће угао НΘΛ већи од угла ΔΕΖ. А пошто су две дужи НΘ и ΘΛ једнаке двема дужима ΔΕ, ΕΖ и угао НΘΛ већи од угла ΔΕΖ, биће и основица НΛ већа од основице ΔΖ. Али збир од НК и КΛ је већи од НΛ, па према томе и збир НК и КΛ је већи од ΔΖ. Но КΛ је једнако дужи АГ. На овај начин је збир од АГ и НК већи од преостале ΔΖ. Слично се доказује, да је и збир од АГ и ΔΖ већи од НК, па и збир од ΔΖ и НК већи од АГ. На овај начин је могуће од три дужи, једнаке са АГ, ΔΖ, НК, конструисати троугао. А то је требало доказати.

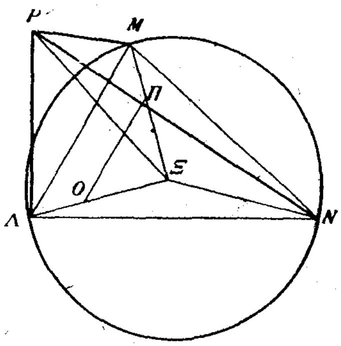
23.

Од три равна угла, од којих је збир два, произвољно узета, већи од преосталог, конструисати рогаљ. При томе треба да збир та три равна угла буде мањи од четири права угла.

Нека су АВГ, ΔΕΖ, НΘК три дата равна угла од којих је збир два, произвољно узета, већи од преосталог, а збир тих углова мањи од четири права угла. Треба од углова АВГ, ΔΕΖ, НΘК конструисати рогаљ.



Одмеримо једнаке дужи АВ, ВГ, ΔΕ, ΕΖ, НΘ, ΘК и спојимо АГ, ΔΖ, НК. Тада се може од дужи једнаких АГ, ΔΖ и НК конструисати троугао. Конструишимо троугао ΛΜΝ тако да АГ буде једнако ΛΜ, ΔΖ—ΜΝ и НК—ΝΛ и опишимо око троугла ΛΜΝ круг ΛΜΝ; нека његов центар буде Ξ и спојимо ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ. Тврдим, да је АВ већи од ΛΞ. Заиста, ако то није тако, биће АВ или једнако ΛΞ или мање од ΛΞ. Нека је, прво, једнако. Тада ће, пошто је АВ једнако ΛΞ, АВ једнако ВГ, а ΞΛ једнако ΞΜ, бити две дужи АВ и ВГ једнаке двема дужима ΛΞ и ΞΜ, свака свакој. И основица АГ је, по претпоставци, једнака основици ΛΜ. Према томе је угао АВГ једнак углу ΛΞΜ. Из истих разлога је и угао ΔΕΖ једнак углу ΜΞΝ, а и угао НΘК једнак углу ΝΞΛ. На овај начин су три угла АВГ, ΔEZ и HΘK једнака са три угла ΛΞM, MΞN и NΞΛ. Али збир три угла ΛΞM, MΞN и NΞΛ је једнак са четири права угла, значи и збир три угла ABΓ, ΔEZ, HΘK једнак је са четири права угла. С друге стране претпостављено је да је тај збир мањи од четири права угла. А то је бесмислено. Дакле AB није једнако ΛΞ. Тврдим да AB неће бити ни мање од ΛΞ. Ако је то могуће, нека буде. Одмеримо ΞO једнако AB, ΞП једнако BΓ и повуцимо OП. Пошто је AB једнако BΓ, биће и ΞO једнако ΞП. И остатак ΛO једнак је ПM. Према томе је ΛM паралелна са OП и троугао ΛMΞ је истих углова са троуглом OПΞ. Значи ΞΛ се односи према ΛM као ΞO према OП, а после пермутовања ΛΞ је према ΞO као ΛM према OП. Но ΛΞ је веће од ΞO, па према томе је и ΛM веће од OП. Али ΛM је одмерено једнако AΓ, па је због тога и AΓ веће од OП. Пошто су сад две дужи AB и BΓ једнаке двема дужима ΘΞ и ΞП, а основица AΓ је већа од основице OП, биће угао ABΓ већи од угла OΞП. Слично се доказује да је и угао ΔEZ већи од угла MΞN, као и угао HΘK од угла NΞΛ. На тај начин је збир од три угла ABΓ, ΔEZ и HΘK већи од збира три угла ΛΞM, MΞN, NΞΛ. Међутим је, по претпоставци, збир углова ABΓ, ΔEZ, HΘK, мањи од четири права угла. Стога је збир углова ΛΞM, MΞN, NΞΛ, утолико пре, мањи од четири права угла. Но он је и једнак. А то је бесмислено. Према томе AB није мање од ΛΞ. А доказано је да није ни једнако. На тај начин је AB веће од ΛΞ. Поставимо у тачки Ξ нормалу ΞП на раван круга ΛMN и нека квадрат на ΞP буде једнак разлици квадрата на AB и на ΛΞ. Па спојимо PΛ, PM, PN. Пошто је PΞ нормала на равни круга ΛMN, биће свака од ΛΞ, MΞ, NΞ управна на PΞ. И пошто је ΛΞ једнако ΞM, а ΞP заједничка страна спрам правог угла, биће основица PΛ једнака основици PM. Из истих разлога је и PN једнако свакој од PΛ и PM. Према томе су три дужи PΛ, PM, PN једнаке међу собом. И пошто је, по претпоставци, квадрат

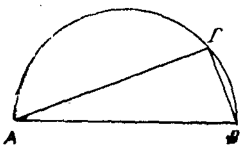


на PΞ једнак разлици квадрата на AB и ΛΞ, биће квадрат на AB збир квадрата на ΛΞ и ΞP. Али збир квадрата на ΛΞ и ΞP је једнак квадрату на ΛP, пошто је угао ΛΞP прав. Значи квадрат на AB једнак је квадрату на PΛ, а према томе је AB једнако PΛ. Но дуж AB једнака је свакој од дужи BΓ, ΔE, EZ, HΘ, ΘK, а PΛ једнака свакој од PM и PN. Према томе је свака од дужи AB, BΓ, ΔE, EZ, HΘ и ΘK једнака свакој од PΛ, PM, PN. И пошто су две дужи ΛP и PM једнаке двема дужима AB и BΓ, а основица ΛM једнака основици AΓ по претпоставци, биће угао ΛPM једнак углу ABΓ. Из истих разлога је и угао MPN једнак углу ΔEZ, а угао ΛPN углу HΘK.

На овај начин, од три равна угла ΛPM, MPN, ΛPN, који су једнаки датим угловима ABΓ, ΔEZ, HΘK, конструисан је код тачке P рогаљ, чији су равни углови ΛPM, MPN, ΛPN. А то је требало извести.

Лема

Како узети квадрат на ΞP да он буде једнак површини за коју је квадрат на AB већи од квадрата на ΛΞ, показаћемо овако. Одмеримо дужи AB и ΛΞ и нека је AB већа од АΞ, па конструишимо на њој полукруг ABΓ и у полукругу ABΓ дуж AΓ, једнаку ΛΞ, која није већа од пречника AB.



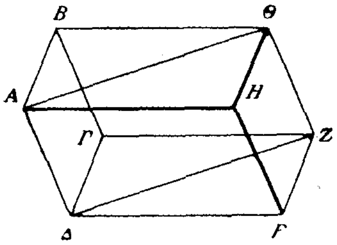
Пошто је сад у полукругу AΓB угао AΓB спрам пречника, биће угао AΓB прав. Према томе је квадрат на AB једнак збиру квадрата на AΓ и на ΓB. А то значи квадрат на AB је већи од квадрата на AΓ за квадрат на ΓB. Но AΓ је једнако ΣΞ. На овај начин је квадрат на AB већи од квадрата на ΛΞ за квадрат на ΓB. Ако сад одмеримо ΞP једнако BΓ, биће квадрат на AB већи од квадрата на ΛΞ за квадрат на ΞP. А то је требало извести.[31]

24.

Ако је тело обухваћено паралелним равнима, наспрамне равни су једнаки паралелограми.

Заиста, нека је тело ГΔΘН обухваћено паралелним равнима АГ, НZ, ΔZ, ВZ, АЕ. Тврдим да су наспрамне равни једнаки паралелограми.

Заиста, пошто су две паралелне равни ВН и ГЕ пресечене са равни АГ, њихови заједнички пресеци паралелни су. Према томе је АВ паралелно са ΔГ. Даље, пошто су две паралелне равни ВZ и АЕ пресечене са равни АГ, њихови заједнички пресеци су паралелни. Према томе је ВГ, паралелно са АΔ. А доказано је да је и АВ паралелно са ΔГ. Према томе је АГ паралелограм. На сличан начин се доказује да је и сваки од ΔZ, ZН, НВ, ВZ, АЕ паралелограм.



Спојимо АΘ, ΔZ. Пошто је АВ паралелно са ΔГ, а ВΘ са ГZ, имамо две дужи АВ, ВΘ,које се секу, паралелне са двема дужима ΔГ и ГZ, које са секу, но не у истој равни. Оне чине једнаке углове. Према томе је угао АВΘ једнак углу ΔГZ. И пошто су две дужи, АВ и ВΘ једнаке двема дужима ΔГ и ГZ, и угао АВΘ једнак углу ΔГZ, биће и основица АΘ једнака основици ΔZ, и троугао АВΘ једнак троуглу ΔГZ. И удвостручени троугао АВΘ је паралелограм ВН, а удвостручени троугао ΔГZ је паралелограм ГЕ. Према томе је паралелограм ВН једнак паралелограму ГЕ. На сличан начин се доказује да је и паралелограм АГ једнак паралелограму НZ, а и АЕ паралелограму ВZ.

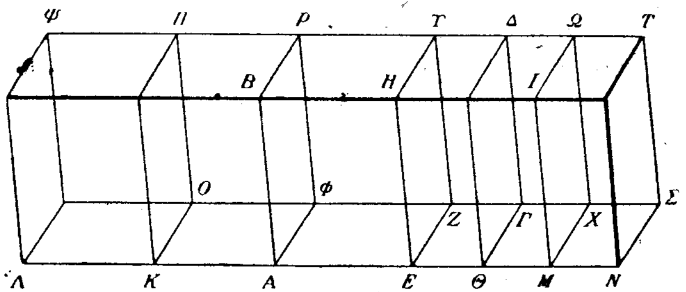
На овај начин, ако је тело обухваћено паралелним равнима, наспрамне равни су једнаки паралелограми. А то је требало доказати.[32]

25.

Ако је паралелепипед пресечен са равни паралелном његовим супротним паралелним равнима, односиће се основа према основи као тело према телу.

Заиста, нека је паралелепипед АВГΔ пресечен са равни ZН, паралелном супротним равнима РА и ΔΘ. Тврдим да је основа AEZΦ према основи EΘΓZ као тело ABZY према телу EHΓΔ.

Заиста, продужимо AΘ на обе стране и одмеримо, колико желимо, дужи AK, KΛ једнаке AE, дужи ΘM, MN једнаке EΘ и допунимо паралелограме ΛO, KΦ, ΘX, MΣ и тела ΛΠ, KP, ΔM и MT. Пошто су дужи ΛK, KA, AE једнаке међу собом, биће једнаки међу собом и паралелограми KΞ, KB, AH, а исто тако и паралелограми ΛΨ, KΠ, AP једнаки међу собом, јер су наспрамни. Из истих разлога су и паралелограми EΓ, ΘX, MΣ једнаки међу собом, и паралелограми ΘH,



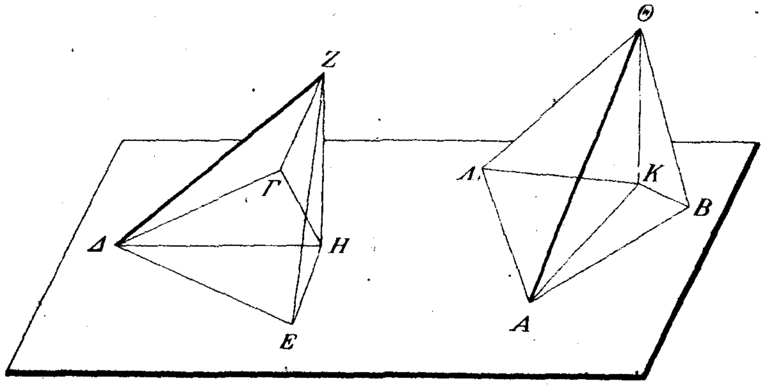
ΘI и IN једнаки међу собом, а такође и ΔΘ, MΩ, NT; значи три равни ΛΠ, KP и AY тела једнаке су трима равнима. Али ове три једнаке су трима наспрамним. Према томе су и три тела ΛΠ, KP и AY једнака међу собом. Из истих разлога су и три тела EΔ, ΔM и MT једнака међу собом. Према томе колики је основа ΛZ мултиплум основе AZ, толики је и тело ΛY мултиплум тела AY. Из истих разлога колики је основа NZ мултиплум основе ZΘ, толики је мултиплум и тело NY тела ΘY. Те ако је основа ΛZ једнака основи NZ, биће и тело ΛY једнако телу NY; ако је основа ΛZ већа од основе HZ, биће и тело ΛY веће од тела NY, а ако је мања, биће мање. Дакле, од четири уочене величине, две основе AZ и ZΘ, и два тела AY и YΘ, узети су једнаки мултиплуми основе AZ и тела AY, и то основа ΛZ и тело ΛY, а од основе ΘZ и од тела ΘY основа NZ и тело NY, и доказано је да ће, ако је основа ΛZ већа од основе ZN, бити и тело ΛY веће од тела NY; ако је једнака, биће једнако, а ако је мања, биће мање. На овај начин је основа AZ према основи ZΘ као тело AY према телу YΘ. А то је требало доказати[33].

26.

На датој правој и у датој тачки на њој конструисати рогаљ једнак датом рогљу.

Нека је дата права АВ и на њој дата тачка, тачка А; и дат је рогаљ код тачке Δ обухваћен равним угловима ΕΔΓ, ΕΔΖ и ΖΔΓ. Треба на правој АВ и у датој тачки А на њој конструисати рогаљ једнак рогљу код тачке Δ.

Заиста, узмимо на ΔΖ произвољну тачку Ζ и повуцимо кроз Ζ нормалу ΖΗ на раван правих ΕΔ и ΔΓ; нека она просеца ту раван у тачки Η, па повуцимо ΔΗ; и на правој АВ у њеној тачци А конструишимо угао ВАΛ једнак углу ΕΔΓ, угао ВАК једнак углу ΕΔΗ; одмеримо АК једнако ΔΗ, поставимо кроз тачку К нормалу КΘ на равни ВАΛ, одмеримо КΘ једнако ΗΖ, и спојимо ΘА. Тврдим да је равним угловима ВАΛ, ВАΘ и ΘАΛ обухваћен рогаљ код тачке А једнак угловима ΕΔΓ, ΕΔΖ и ΖΔΓ обухваћеном рогљу код тачке Δ.



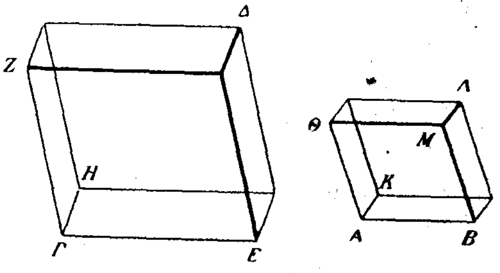
Заиста, одмеримо једнаке дужи АВ и ΔΕ и спојимо ΘВ, КВ, ΖΕ и ΗΕ. Пошто је ΖΗ нормала на основној равни, она чини прав угао са сваком правом која је сече и налази се у основној равни. Значи да је прав и сваки од углова ΖΗΔ и ΖΗΕ. Из истих разлога је прав и сваки од углова ΘКА и ΘКВ. И пошто су две дужи КА и АВ једнаке двема дужима ΗΔ и ΔΕ, свака свакој, и обухватају једнаке углове, биће основица КВ једнака основици ΗΕ. Исто тако је и КΘ једнако KZ, и обухватају праве углове. Према томе је и ΘВ једнако ZЕ. Даље, пошто су две дужи АК и КΘ једнаке двема дужима ΔН и НZ, и обухватају праве углове, биће основица АΘ једнака основици ZΔ. А и АВ је једнако ΔЕ. Па су две дужи ΘА и АВ једнаке двема дужима ΔZ и ΔЕ. И основица ΘВ једнака је основици ZЕ. Према томе је угао ВАΘ једнак углу ЕΔZ. Из истих разлога је и угао ΘАΛ једнак углу ZΔΓ [ако одмеримо једнаке АΛ и ΔΓ па повучемо КΛ, ΘΛ, НΓ, ZΓ, пошто је цео угао ВАΛ једнак целом углу ЕΔΓ, а и део ВАК једнак је делу ЕΔН, биће и остатак, угао КАΛ, једнак остатку, углу НΔΓ. И пошто су две дужи КА и АΛ једнаке двема дужима НΔ и ΔΓ и обухватају једнаке углове, биће основица КΛ једнака основици НΓ. А и КΘ једнако је НZ. Дакле две дужи ΛК и КΘ једнаке су двема дужима ΓН и НZ. И обухватају праве углове. Значи основица ΘΛ једнака је основици ZΓ. А како су две дужи ΘА и АΛ једнаке двема дужима ZΔ и ΔΓ и основица ΘΛ једнака основици ZΓ, биће угао ΘАΛ једнак углу ZΔΓ]. Исто тако је и угао ВАΛ једнак углу ЕΔΓ.

На овај начин, на датој правој и у датој тачки на њој конструисан је рогаљ једнак датом рогљу. А то је требало извести.[34]

27.

На датој правој конструисати паралелепипед сличан и у сличном положају према датом паралелепипеду.

Нека је АВ дата права и ΓΔ дати паралелепипед. Треба на датој правој АВ конструисати паралелепипед сличан и у сличном положају према датом паралелепипеду ΓΔ.



Заиста, конструишимо на правој АВ, у датој тачки А на њој, рогаљ једнак рогљу код тачке Γ са равним угловима ВАΘ, ΘАК, КАВ и то тако да угао ВАΘ буде једнак углу

ЕГZ, угао ВАК — углу ЕГН и угао КАΘ — углу НГZ; и подесимо да ЕГ буде према ГН као ВА према АК, и НГ буде према ГZ као и КА према АΘ. Исто тако да ЕГ буде према ГZ као и ВА према АΘ. И допунимо паралелограм ΘВ и тело АΛ.

Како је ЕГ према ГН као ВА према АК и према томе су краци једнаких углова ЕГН и ВАК пропорционални, биће паралелограм НЕ сличан параралелограму КВ. Из истих разлога је и паралелограм КΘ сличан паралелограму НZ, и ZЕ паралелограму ΘВ. Према томе су три паралелограма тела ГΔ слична са три паралелограма тела АΛ. Али овим трима паралелограмима одговарају једнаки и слични наспрамни паралелограми; значи и ова три наспрамна паралелограма једног паралелепипеда једнаки су и слични са три наспрамна паралелограма другог паралелепипеда. Према томе је и цело тело ГΔ слично са целим телом АΛ.

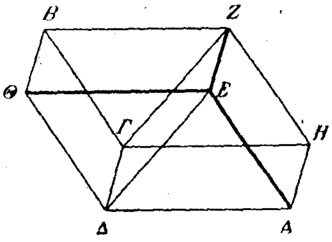
На овај начин је на датој правој АВ конструисан паралелепипед АΛ сличан и у сличном положају са датим паралелепипедом ГΔ. А то је требало извести.

28.

Ако раван, која пресеца паралелепипед, пролази кроз дијагонале наспрамних страна, тело је преполовљено том равни.

Заиста, нека је паралелепипед АВ пресечен са равни ГΔЕZ, која пролази кроз дијагонале ГZ и ΔЕ наспрамних страна. Тврдим да је тело АВ преполовљено са равни ГΔЕZ.

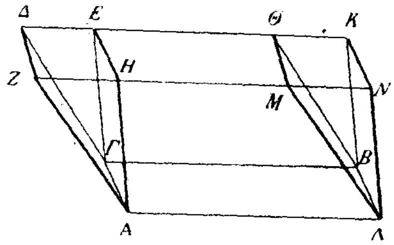
Заиста, пошто је троугао ГНZ једнак троуглу ГZВ, АΔЕ троуглу ΔЕΘ, паралелограм ГА једнак паралелограму ЕВ, јер су наспрамни, и паралелограм НЕ паралелограму ГΘ, биће и призма обухваћена са два троугла ГНZ и АΔЕ и са три паралелограма НЕ, АГ, ГЕ једнака призми обухваћеној са два троугла ГZВ и ΔЕΘ и три паралелограма ГΘ, ВЕ и ГЕ. Према томе су оне обухваћене равнима истим и по броју и по величини. На овај начин је цело тело АВ преполовљено са равни ГΔЕZ. А то је требало доказати.[35]



29.

Паралелепипеди са истом основом, истом висином и бочним ивицама чији су крајеви на истим правима — једнаки су међу собом.

Нека су паралелепипеди ΓM и ΓN на истој основи AB, са истом висином, и бочним ивицама AH, AZ, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK са крајевима на истим правима ZN и ΔK. Тврдим да је тело ΓM једнако телу ΓN.



Заиста, пошто је сваки од четвороуглова ΓΘ и ΓK паралелограм, дуж ΓB је једнака свакој од дужи ΔΘ и EK. Према томе је дуж ΔΘ једнака дужи EK. Како је EΘ њихов заједнички део, биће остатак ΔE једнак остатку ΘK. Према томе је и троугао ΔΓE једнак троуглу ΘBK, а паралелограм ΔH — паралелограму ΘN. Из истих разлога је и троугао AZH једнак троуглу MΛN. А и паралелограм ΓZ једнак паралелограму BM, и паралелограм ΓH — паралелограму BN, јер су наспрамни. И на тај начин је призма, обухваћена са два троугла AZH и ΔΓE и са три паралелограма AΔ, ΔH и ΓH, једнака призми обухваћеној са два троугла MΛN и ΘBK и три паралелограма BM, ΘN и BN. Додајмо заједничко тело, чија је основа палалелограм AB и наспрамна страна HEΘM, па ће тада цео паралелепипед ΓM бити једнак целом паралелепипеду ΓN.

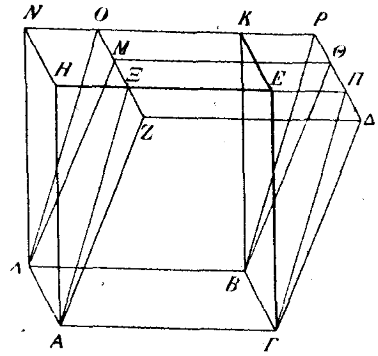
На овај начин, паралелепипеди са истом основом, истом висином и са бочним ивицама, чији су крајеви на истим правима — једнаки су међу собом. А то је требало доказати.[36]

30.

Паралелепипеди са истом основом, истом висином и бочним ивицама чији крајеви нису на истим правима — једнаки су међу собом.

Нека су паралелепипеди ΓM и ΓN на истој основи AB, са истом висином и бочним ивицама AZ, AH, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ и BK са крајевима који нису на истим правима. Тврдим, да је тело ΓM једнако телу ΓN.

Заиста, продужимо NK и ΔΘ и нека се оне сусрећу у тачки Р. Продужимо још ZM и НЕ до О и П, и повуцимо АΞ, ΛО, ГП, ВР. Сад је тело ГМ са основом паралелограмом АГВΛ и наспрамном страном ZΔΘM једако телу ГО са основом паралелограмом АГВΛ и наспрамном страном ΞПРО, јер су она на истој основи АГВΛ, са истом висином и бочним ивицама АZ, АΞ, ΛМ, ΛО, ГΔ, ГП, ВΘ, ВР, чији су крајеви на истим правама ZО и ΔР. Но тело ГО са основом паралелограмом АГВΛ и наспрамном страном ΞПРО једнако је телу ГN са основом паралелограмом АГВΛ и наспрамном страном НЕКN, пошто су она на истој основи АГВΛ, са истом висином и бочним ивицама АН, АΞ, ГЕ, ГП, ΛN, ΛО, ВК, ВР чији су крајеви на истим правама НП и NР. Па према томе је тело ГМ једнако телу ГN.



На овај начин, паралелепипеди са истом основом, истом висином и бочним ивицама чији крајеви нису на истим правима — једнаки су међу собом.

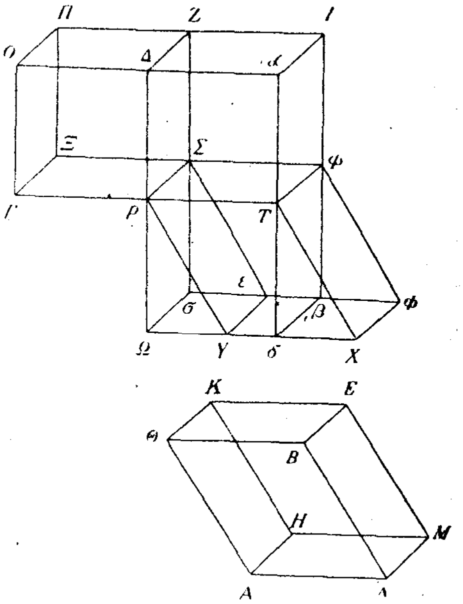
31.

Паралелелипеди са једнаким основама и истом висином једнаки су међу собом.

Нека су АЕ и ГZ паралелепипеди са једнаким основама АВ и ГΔ и истом висином. Тврдим, да је тело АЕ једнако телу ГZ.

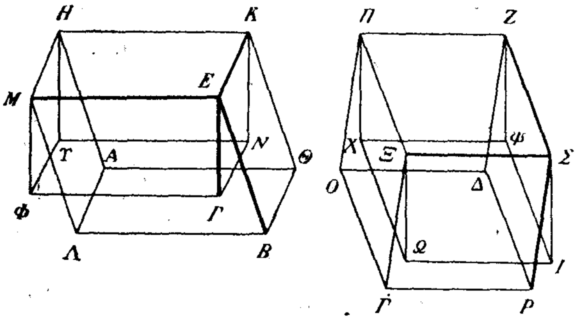
Нека су, прво, бочне ивице ΘК, ВЕ, АН, ΛМ, ОП, ΔZ, ГΞ, РΣ управне на основама АВ и ГΔ. Одмеримо дуж РТ у продужењу праве ГР и конструишимо на правој РТ код тачке Р угао ТРΥ једнак углу АΛВ, одмеримо РТ једнако АΛ и РΥ једнако ΛВ и допунимо основу РХ и тело ΨΥ. Пошто су две стране ТР и РΥ једнаке двема странама АΛ и ΛВ, и обухваћени углови једнаки, биће једнак и сличан паралелограм РХ са паралелограмом ΘΛ. И пошто је, даље, АΛ једнако РТ, ΛМ једнако

PΣ, а обухваћени углови прави, биће и паралелограм PΨ једнак и сличан паралелограму AM. Из истих разлога је и паралелограм ΛE једнак и сличан паралелограму ΣY. Према томе су три паралелограма тела AE једнака и слична са три паралелограма тела ΨY. А како су прва три паралелограма једнака и слична трима супротним, а и друга три једнака и слична трима супротним, биће и цео паралелепипед AE једнак целом паралелепипеду ΨY. Продужимо ΔP и XY и нека се сусрећу у тачки Ω. Повуцимо кроз T праву $_1$αTδ паралелно ΔΩ и продужимо OΔ до $_1$α, и допунимо тела ΩΨ и PI. Тада ће тело ΨΩ коме је основа паралелограм PΨ и супротна страна паралелограм Ω $_1$β бити једнако телу ΨY коме је основа паралелограм PΨ и супротна страна паралелограм YΦ, јер су она на истој основи PΨ, са истом висином и бочним ивицама PΩ, PY, Tδ, TX, Σσ, Σε, Ψ $_1$β, ΨΦ чији су крајеви на истим правама ΩX и $_1$β Φ. Но тело ΨY једнако је телу AE, па је према томе и тело ΨΩ једнако телу AE. И пошто је паралелограм PYXT једнак паралелограму ΩT, јер су на истој основи и између паралелних PT и ΩX, а паралелограм PYXT једнак паралелограму ΓΔ, пошто је једнак и са AB, биће стога и паралелограм ΩT једнак паралелограму ΓΔ. Но ΔT је други паралелограм, И према томе ће ΩT бити према ΔT као основа ΓΔ према ΔT. А пошто је паралелепипед ΓI пресечен са равни PZ паралелно са супротним странама, биће основа ΓΔ према основи ΔT као тело ΓZ према телу PI. Из истих разлога ће, пошто је паралелепипед ΩI пресечен са равни PΨ паралелне са супротним странама, бити основа ΩT према основи TΔ као тело ΩΨ према телу PI. Но основа ΓΔ је према ΔT као ΩT према ΔT. Дакле,



и тело ΓZ је према телу PI као тело ΩΨ према телу PI. Према томе је свако од тела ΓZ и ΩΨ у истом односу према телу PI. Стога је тело ΓZ једнако телу ΩΨ. Но тело ΩΨ је, како је доказано, једнако телу AE. На овај начин тело AE једнако је телу ΓZ.

Нека сад бочне ивице AH, ΘK, BE, ΛM, ΓΞ, OΠ, ΔZ, PΣ нису управне, на основама AB и ΓΔ. Опет тврдим да је тело AE једнако телу ΓZ. Заиста, спустимо из тачака K, E, H, M, Π, Z, Ξ, Σ нормале KN, EΓ, HY, MΦ, ΠX, ZΨ, ΞΩ, ΣI на основну раван и нека су подножја тих нормала тачке N, Γ, Y, Φ, X, Ψ, Ω, I и спојимо NΓ, NY, YΦ, ΓΦ, XΨ, XΩ, ΩI, IΨ. Тело KΦ је тада једнако телу ΠI, јер су она са једнаким основама KM и ΠΣ, истом висином и бочним ивицама управним на основама. Али и тело KΦ једнако је телу AE, а тело ΠI телу ΓZ, пошто су она са истом основом, истом висином и бочним ивицама чији се крајеви не налазе на истим правима. Према томе и тело AE једнако је телу ΓZ.



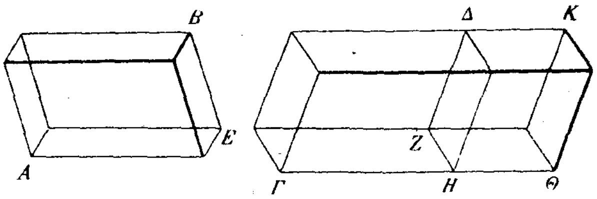
На овај начин, паралелепипеди са једнаким основама и истим висинама једнаки су међу собом. А то је требало доказати.

32.

Паралелепипеди са истом висином се односе један према другом као основе.

Нека су паралелепипеди AB и ΓД исте висине. Тврдим да се паралелепипеди AB и ΓΔ односе један према другом као основе, тј. да је основа AE према основи ΓZ као тело AB према телу ΓΔ.

Заиста, конструишимо са ZH паралелограм ZΘ једнак паралелограму AE и на основи ZΘ са висином истом као и код тела ΓΔ допунимо паралелепипед НК. Биће тада тело АВ једнако телу НК, јер су са једнаким основама АЕ и ZΘ и истом висином. И пошто је паралелепипед ΓК пресечен са



равни ΔН паралелном супротним странама, биће основа ΓZ према основи ZΘ као тело ΓΔ према телу ΔΘ. Но основа ZΘ једнака је основи АЕ и тело НК телу АВ. Према томе је основа АЕ према основи ΓZ као тело АВ према телу ΓΔ.

На овај начин, паралелепипеди исте висине се односе један према другом као основе. А то је требало доказати.

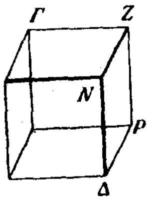
33.

Размера сличних паралелепипеда је трипут виша од размере хомологних ивица.

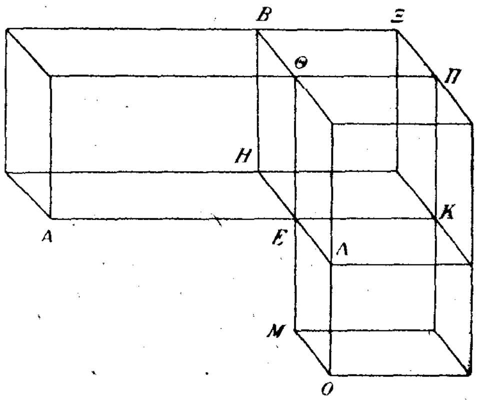
Нека су АВ и ΓΔ слични паралелепипеди и ивица АЕ хомологна са ивицом ΓZ. Тврдим да је размера тела АВ према телу ΓΔ трипут виша од размере АЕ према ΓZ.

Заиста, продужимо АЕ, НЕ и ΘЕ за ЕК, ЕΛ и ЕМ и одмеримо ЕК једнако ΓZ, ЕΛ једнако ZN, ЕМ једнако ZР и допунимо паралелограм КΛ и тело КО.

Међутим, како су две дужи КЕ и ЕΛ једнаке двема дужима ΓZ и ZN, а и угао КЕΛ једнак углу ΓZN, и угао АЕН једнак углу ΓZN због сличности тела АВ и ΓΔ, биће једнак [и сличан] паралелограм КΛ паралелограму ΓN. Из истих разлога је и паралелограм КМ једнак и сличан [паралелограму] ΓР, и ЕО — ΔZ. Према томе су три паралелограма тела КО једнака и слична са три паралелограма тела ΓΔ. А прва три су једнака и слична трима супротним, па и три друга су једнака и слична трима супротним. Због тога је и цело тело КО једнако и слично целом телу ΓΔ. Допунимо па-



ралелограм НК и на основама НК и КЛ, са висином једнаком висини тела АВ, допунимо тела ЕZ и ΛП. Пошто је, због сличности тела АВ и ΓΔ, АЕ према ΓZ као ЕН према ZN, и ЕΘ према ZР и ΓZ је једнако ЕК, ZN једнако ЕΛ и ZР — ЕМ, биће АЕ према ЕК као НЕ према ЕΛ и ΘЕ према ЕМ. Но АЕ је према ЕК као (паралелограм) АН према паралелограму НК, НЕ је према ЕΛ као НК према КΛ, а ΘЕ је према ЕМ као ПЕ према КМ. Према томе је паралелограм АН према НК као НК према КΛ и ПЕ према КМ. Но АН је према НК као тело АВ према телу ЕΞ, а НК је према КΛ као тело ΞЕ према телу ПΛ и ПЕ је према КМ као тело ПΛ према телу КО. Према томе је тело АВ према телу ЕΞ као ЕΞ према ПΛ и ПΛ према КО. Али, ако су четири величине у непрекидној пропорцији, биће размера прве према четвртој трипут виша од размере прве према другој. Према томе размера тела АВ према телу КО је трипут виша од размере АВ према ЕΞ. Но АВ је према ЕΞ као паралелограм АН према НК и дуж АЕ према ЕК. Значи тело АВ је према телу КО у размери трипут вишој од размере АЕ према ЕК. Но тело КО једнако је телу ΓΔ, а дуж ЕК дужи ΓZ и према томе је размера тела АВ према телу ΓΔ трипут виша од размере ивице АЕ према хомологној ивици ΓZ.



На овај начин, размера сличних паралелепипеда је трипут виша од размере хомологних ивица. А то је требало доказати.

Закључак

Одавде је јасно да ће, ако су четири дужи пропорционалне, бити прва према четвртој као паралелепипед на првој према сличном и слично конструисаном паралелепипеду на другој, пошто је прва према четвртој у трипут вишој размери од размере прве према другој.

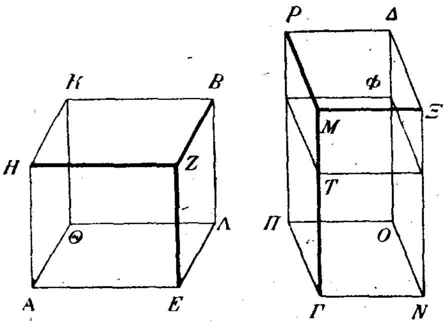
34.

Код паралелепипеда једнаке запремине основе су обрнуто пропорционалне висинама. И ако су код паралелепипеда основе обрнуто пропорционалне висинама, они су једнаке запремине.

Нека су запремине паралелепипеда АВ и ГΔ једнаке. Тврдим да су основе паралелепипеда АВ и ГΔ обрнуто пропорционалне висинама, и да је основа ЕΘ према основи NП као висина тела ГΔ према висини тела АВ.

Заиста, нека су, прво, бочне ивице АН, ЕZ, ΛВ, ΘК, ГМ, NΞ, ОΔ, ПР нормалне на својим основама. Тврдим, да је основа ЕΘ према основи NП као ГМ према АН.

Ако је сад основа ЕΘ једнака основи NП и тело АВ једнако телу ГΔ, биће једнака и дуж ГМ дужи АН. Заиста, паралелепипеди исте висине се односе међу собом као основе [јер, ако при једнаким основама ЕΘ и NП висине АН и ГМ нису исте, неће бити ни тело АВ једнако телу ГΔ. А по претпоставци једнако је. Према томе висина ГМ неће бити неједнака висини АН. Значи једнака је]. И основа ЕΘ је према основи NП као ГМ према АН, те је очигледно да су основе паралелепипеда АВ и ГΔ обрнуто пропорционалне висинама.



Нека сад основа ЕΘ није једнака основи NП, већ је ЕΘ већа. Но тело АВ је једнако телу ГΔ, па је стога, и висина ГМ већа од висине АН. [јер ако није, неће тада ни тела АВ и ГΔ бити једнака, а претпостављено је, да су једнака]. Па одмеримо ГТ једнако АН и допунимо на основи NП са висином ГТ паралелепипед ФГ.

Пошто је тело AB једнако телу ГΔ, а постоји и тело ГΦ, а једнаке (величине) су у истој размери према истој (величини), биће тело AB према телу ГΦ као и тело ГΔ према телу ГΦ. Но тело AB је према телу ГΦ као основа EΘ према основи NП, јер су тела AB и ГΦ са истим висинама. Тело ГΔ је према телу ГΦ као основа MП према основи TП и висина ГM према висини ГT. Према томе је основа EΘ према основи NП као висина MГ према висини ГT. Но ГT је једнако AH, и на овај начин је основа EΘ према основи NП као MГ према AH. Дакле, основе паралелепипеда AB и ГΔ обрнуто су пропорционалне висинама.

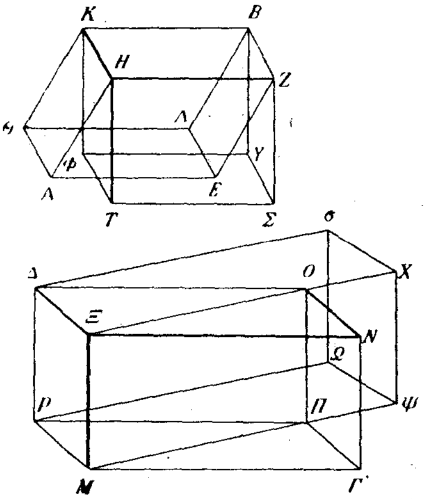
Даље, нека основе паралелепипеда AB и ГΔ буду обрнуто пропорционалне висинама и нека је основа EΘ према основи NП као висина тела ГΔ према висини тела AB. Тврдим да је тело AB једнако телу ГΔ.

[Заиста,] нека су поново конструисане бочне ивице управне на основама. И ако је основа EΘ једнака основи NП, и основа EΘ је према основи NП као висина тела ГΔ према висини тела AB, биће висина тела ГΔ једнака висини тела AB. ~~Пошто су~~ паралелепипеди са једнаким основама и са истим висинама једнаки међу собом, биће тело AB једнако телу ГΔ.

Нека основа EΘ није једнака [основи] NП, него је већа EΘ. Према томе је и висина тела ГΔ већа од висине тела AB, тј. ГM од AH. Одмеримо поново ГT једнако AH и на сличан начин допунимо тело ГΦ. Пошто је основа EΘ према основи NП као MГ према AH, а AH је једнако ГT, биће основа EΘ према основи NП као MГ према ГT. Али [основа] EΘ је према основи NП као тело AB према телу ГΦ, јер су тела AB и ГΦ са једнаким висинама. Но ГM је према ГT као основа MП према основи ПT и тело ГΔ према телу ГΦ. Према томе је тело AB према телу ГΦ као тело ГΔ према телу ГΦ. Дакле свако од тела AB и ГΔ је у истом односу према ГΦ. На овај начин, тело AB је једнако телу ГΔ. [А то је требало доказати].

Нека сад конструисане бочне ивице ZE, BΛ, HA, ΘK, ΞN, ΔO, MГ, PП нису управне на својим основама. Повуцимо кроз тачке Z, H, B, K, Ξ, M, Δ, P нормале на равни EΘ и NП и нека њихова подножја у тим равнима буду тачке Σ, T, Y, Φ, X, Ψ, Ω, σ па допунимо тела ZΦ и ΞΩ. Тврдим, да су и у том случају, под условима да су тела AB и ГΔ једнака, основе обрнуто пропорционалне висинама, наиме: основа EΘ је према основи NΠ као висина тела ΓΔ према висини тела AB.

Пошто је тело AB једнако телу ΓΔ, а тело AB једнако телу BT, јер су са истом основом ZK и са истом висином [а крајеви бочних ивица нису на истим правима]. И тело ΓΔ једнако је телу ΔΨ, јер су опет са истом основом PΞ и са истом висином [а крајеви бочних ивица нису на истим правима]. Према томе и тело BT једнако је телу ΔΨ. [Код једнаких паралелепипеда, под условом да су висине управне на основе, основе су обрнуто пропорционалне висинама]. Према томе је основа ZK према основи ΞP као висина тела ΔΨ према висини тела BT. Но основа ZK је једнака основи EΘ, а основа ΞP једнака основи NΠ. Према томе је основа EΘ према основи NΠ као висина тела ΔΨ према висини тела BT. Али су висине код тела ΔΨ и BT исте као и код тела ΔΓ и BA. Према томе је основа EΘ према основи NΠ као висина тела ΔΓ према висини тела AB. На овај начин, код паралелепипеда AB и ΓΔ основе су обрнуто пропорционалне висинама.



Нека су сад код паралелепипеда AB и ΓΔ основе обрнуто пропорционалне висинама, наиме: основа EΘ је према основи NΠ као висина тела ΓΔ према висини тела AB. Тврдим да су тела AB и ΓΔ једнака.

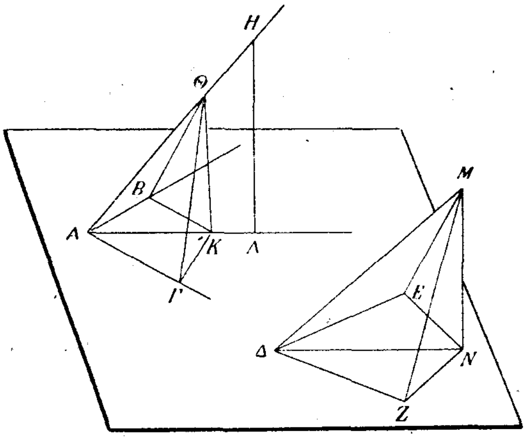
Заиста, са истим конструкцијама, пошто је основа EΘ према основи NΠ као висина тела ΓΔ према висини тела AB,, а основа EΘ једнака је основи ZK и основа NΠ основи ΞP биће основа ZK према основи ΞP као висина тела ΓΔ према висини тела AB. Али су тела AB и ΓΔ са истим висинама као и тела BT и ΔΨ. Према томе је основа ZK према основи ΞP као висина тела ΔΨ према висини тела BT. Основе паралелепипеда BT и ΔΨ су обрнуто пропорционалне висинама [тела оних паралелепипеда код којих су висине управне на основама, а основе обрнуто пропорционалне висинама, једнака су]. Према томе је тело BT једнако телу ΔΨ. Но BT је једнако BA, пошто су са истом основом, ZK, и са истом висином [а крајеви њихових бочних ивица нису на истим правима]. И тело ΔΨ једнако је телу ΔΓ [пошто су и она са истом основом ΞP и са истом висином, а крајеви бочних ивица нису на истим правима]. На овај начин, тело AB је једнако телу ΓΔ. А то је требало доказати.

35.

Ако су дата два једнака равна угла и кроз њихова темена повучене, изнад равни тих углова, праве, које образују једнаке углове са крацима углова, свака са сваким па се на повученим правима узму произвољне тачке и из њих спусте нормале на равни полазних углова, и подножја тих нормала споје са теменима полазних углова, биће углови између тих спојница и ван равни повучених правих једнаки међу собом.

Нека су BAΓ и EΔZ два праволиниска угла и AH и ΔM из тачака A и Δ повучене ван равни тих углова праве, које образују једнаке углове са крацима полазних углова, свака са сваким, угао MΔE једнак је углу HAB и угао MΔZ — углу HAΓ; нека су на правима AH и ΔM узете произвољне тачке H и M, из тачака, H и M, спуштене нормале на равни кроз BAΓ и кроз EΔZ, нека су тачке N и Λ подножја нормала MN и HΛ, на тим равнима и повучене спојнице ΛA и NΔ. Тврдим да је угао HAΛ једнак углу MΔN.

Узмимо AΘ једнако ΔM и повуцимо кроз тачку Θ праву ΘK паралелну HΛ. Пошто је HΛ нормална на равни кроз BAΓ, биће и ΘK нормална на равни кроз BAΓ. Повуцимо из тачака K и N нормале KΓ, NZ, KB, NE на праве AΓ, ΔZ, AB, ΔE и узмимо спојнице ΘΓ, ΓB, MZ, ZE. Пошто је квадрат на ΘA једнак збиру квадрата на ΘK и KA, а квадрат на KA једнак збиру квадрата на KΓ и на ΓA, биће квадрат на ΘА једнак збиру квадрата на ΘК, на КΓ и на ΓА. А пошто је збир квадрата на ΘК и на КΓ једнак квадрату на ΘΓ, биће квадрат на ΘА једнак збиру квадрата на ΘΓ и на ΓА. Према томе је угао ΘΓА прав. Из истих разлога и угао ΔZМ је прав. Дакле, угао ΘАΓ једнак је углу МΔZ. Постоје два троугла МΔZ и ΘАΓ, који имају по два једнака угла, сваки сваком, и по једну једнаку страну, ΘА једнаку МΔ, спрам једнаких углова. Према томе су и остале стране једнаке осталим странама. Значи и АΓ једнака је ΔZ. Слично се доказује да је и АВ једнака ΔЕ [и то овако: спојимо ΘВ и МЕ. Пошто је квадрат на АΘ једнак збиру квадрата на АК и на КΘ, а квадрат на АК једнак збиру квадрата на АВ и на ВК, биће збир квадрата на АВ, на ВК и на КΘ једнак квадрату на АΘ. Али збир квадрата на ВК и КΘ једнак је квадрату на ВΘ, јер је угао ΘКВ прав, као угао нормале на основној равни. Према томе је квадрат на АΘ једнак збиру квадрата на АВ и ВΘ. Значи угао АВΘ је прав. Из истих разлога и угао ΔЕМ је прав. А и угао ВАΘ једнак је углу ЕΔМ по претпоставци, и АΘ је једнако ΔМ, значи и АВ је једнако ΔЕ]. Пошто је сад АΓ једнако ΔZ и АВ једнако ΔЕ, две дужи ΓА и АВ једнаке су двема дужима ZΔ и ΔЕ, а и угао ΓАВ једнак је углу ZΔЕ, биће основица ВΓ једнака основици ЕZ, троугао — троуглу и остали углови осталим угловима, те према томе је и угао АΓВ једнак углу ΔZЕ. А такође је и прав угао



АГК једнак правом углу ΔZN. Дакле и преостали угао ВГК једнак је преосталом углу EZN. Из истих разлога и угао ГВК једнак је углу ZEN. Постоје два троугла ВГК и EZN, који имају по два једнака угла, сваки сваком и по једну једнаку страну ВГ и EZ спрам једнаких углова, према томе су и остале стране једнаке осталим странама. Значи да је ГК једнако ZN. А и АГ једнако је ΔZ. Две дужи АГ и ГК једнаке су двема дужима ΔZ и ZN и чине праве углове. Преме томе и основица АК једнака је основици ΔN. И пошто је АΘ једнако ΔM, биће једнак и квадрат на АΘ квадрату на ΔM. Али квадрат на АΘ једнак је збиру квадрата на АК и на КΘ, јер је угао АКΘ прав. И квадрат на ΔM једнак је збиру квадрата на ΔN и на NM, јер је и угао ΔNM прав. На тај начин збир квадрата на АК и на КΘ једнак је збиру квадрата на ΔN и NM, од којих је квадрат на АК једнак квадрату на ΔN, па је стога и преостали квадрат на КΘ једнак квадрату на NM. Према томе је ΘК једнако MN. И пошто су две дужи ΘА и АК једнаке двема дужима MΔ и ΔN, свака свакој, и основица ΘК једнака основици MN, биће и угао ΘАК једнак углу MΔN.

На овај начин, ако су дата два једнака равна угла и тако даље како је у тексту теореме. [А то је требало доказати].[37]

Последица

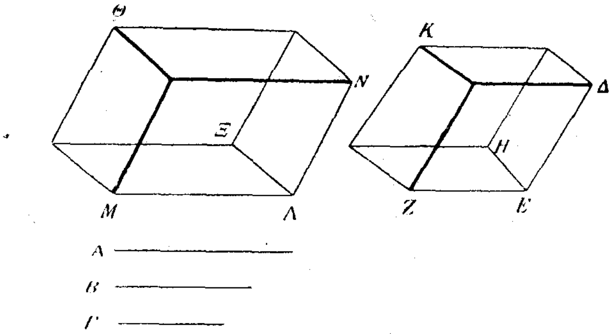
Из овог је јасно, да ако постоје два једнака равна угла и ако су кроз њихова темена повучене изнад равни тих углова једнаке дужи, које образују једнаке углове са крацима полазних углова, свака са сваким, биће нормале, повучене из крајева тих дужи на равни полазних углова, једнаке међу собом. А то је требало доказати.

36.

Ако су три дужи (непрекидно) пропорционалне, биће запремина паралелепипеда састављеног од њих (као ивица) једнака запремини једнакоивичног паралелепипеда, састављеног од средње дужи са угловима једнаким угловима полазног (паралелепипеда).

Нека су А, В, Г три (непрекидно) пропорционалне дужи, тј. нека је А према В као В према Г. Тврдим, да је запремина паралелепипеда са ивицама А, В, Г једнака запремини једнакоивичног паралелепипеда са ивицом В и са угловима једнаким угловима првог паралелепипеда.

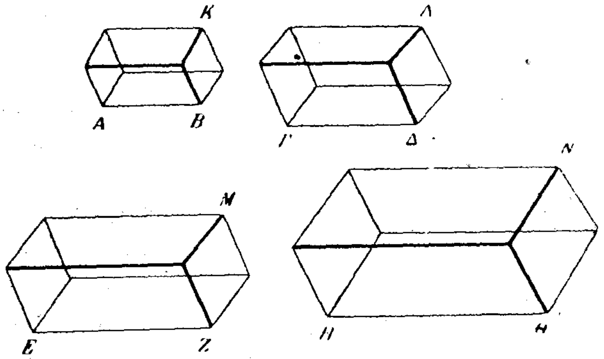
Конструишимо код тачке Е рогаљ обухваћен са ΔЕН, НЕZ и ZЕΔ, одмеримо ΔЕ, НЕ, ЕZ сваку једнаку дужи В и допунимо паралелепипед ЕК. Одмеримо затим ΛМ једнако А, конструишимо на дужи ΛМ, код тачке Λ, рогаљ једнак рогљу код тачке Е, обухваћен угловима NΛΞ, ΞΛМ и МΛN и одмеримо ΛΞ једнако В и ΛN једнако Г. Пошто је А према В као В према Г, а А је једнако ΛМ, В сваком од ΛΞ и ЕΔ, и Г једнако ΛN, биће ΛМ према ЕZ као ΔЕ према ΛN. А код једнаких углова NΛМ и ΔЕZ краци су обрнуто пропорционални, према томе је паралелограм МN једнак паралелограму ΔZ. И пошто су два равна праволиниска угла ΔЕZ и NΛМ једнака и над њима су конструисане једна другој једнаке дужи ΛΞ и ЕН, које са полазним правима образују једнаке углове, сваки сваком, биће једнаке међу собом и нормале спуштене из тачака Н и Ξ на равни кроз NΛМ и кроз ΔЕZ. Према томе су тела ΛΘ и ЕК, свако, исте висине. А паралелепипеди са једнаким основама и истим висинама једнаки су међу собом. Због тога је тело ΘΛ једнако телу ЕК. А тело ΛΘ је састављено од А, В, Г, а тело ЕК од В. На овај начин, запремина паралелепипеда састављеног од А, В, Г једнака је запремини једнакоивичног паралелепипеда састављеног од В, са угловима једнаким угловима првог паралелепипеда. А то је требало доказати.[38]



Ако су четири дужи пропорционалне, пропорционални су и слични паралелепипеди, слично конструисани на тим дужима. И ако су слични паралелепипеди, а слично конструисани на дужима, пропорционални, онда су пропорционалне и саме ове дужи.

Нека су AB, ΓΔ, EZ, HΘ четири пропорционалне дужи, наиме: AB је према ΓΔ као EZ према HΘ. Конструишимо на AB, ΓΔ, EZ и HΘ сличне и слично конструисане паралелепипеде KA, ΛΓ, ME и NH. Тврдим да је KA према ΛΓ као ME према NH.

Заиста, пошто је паралелепипед KA сличан ΛΓ, биће размера KA према ΛΓ трипут виша од размере AB према ΓΔ. Из истих разлога је размера ME према NH трипут виша од размере EZ према HΘ. А како је AB према ΓΔ као EZ према HΘ, биће и AK према ΛΓ као тело ME према NH.



Но нека је тело AK према телу ΛΓ као тело ME према NH. Тврдим, да је дуж AB према ΓΔ као EZ према HΘ.

Заиста, пошто је, опет, размера KA према ΛΓ трипут виша од размере AB према ΓΔ, а и ME је према NH у размери трипут вишој од размере EZ према HΘ, а KA је према ΛΓ као ME према NH, биће и AB према ΓΔ као EZ према HΘ.

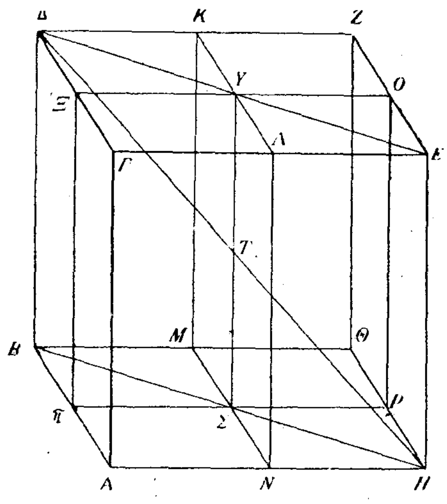
На овај начин, ако су четири дужи пропорционалне, онда су и тако даље, као у тексту теореме. А то је требало доказати.[39]

38.

Ако су ивице наспрамних страна коцке (куба) преполовљене и кроз деоне тачке повучене равни, заједнички пресек тих равни и дијагонала коцке се полове.

Заиста, нека су ивице наспрамних страна ΓΖ и ΑΘ коцке ΑΖ преполовљене тачкама Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ, кроз пресеке конструисане равни ΚΝ и ΞΡ, чији је заједнички пресек ΥΣ, и ΔΗ дијагонала коцке. Тврдим да су једнаке дужи: ΥΤ са ΤΣ и ΔΤ са ΤΗ.

Заиста, спојимо ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ и ΣΗ. Пошто је ΔΞ паралелно са ΟΕ, биће унакрсни углови ΔΞΥ и ΥΟΕ једнаки међу собом. И пошто је ΔΞ једнако ΟΕ и ΞΥ једнако ΥΟ и обухватају једнаке углове, биће основица ΔΥ једнака ΥΕ, троугао ΔΞΥ једнак троуглу ΟΥΕ, а остали углови једнаки осталим угловима. Према томе је угао ΞΥΔ једнак углу ΟΥΕ. Због тога је ΔΥΕ права линија. Из истих разлога је и ΒΣΗ права линија и ΒΣ једнако ΣΗ. И пошто је ΓΑ једнако и паралелно са ΔΒ, а ΓΑ је једнако и паралелно и са ΕΗ, биће ΔΒ једнако и паралелно са ΕΗ. А спајају их дужи ΔΕ и ΒΗ. Према томе су паралелне и дужи ΔΕ и ΒΗ. Због тога је угао ΕΔΤ једнак углу ΒΗΤ, јер су унакрсни, а и угао ΔΤΥ једнак је углу ΗΤΣ. Постоје два троугла ΔΤΥ, ΗΤΣ, који имају два угла једнака са два угла и једну страну једнаку једној страни, спрам једнаких углова, тј. ΔΥ и ΗΣ, јер су половине дужи ΔΕ и ΒΗ. Стога су и остале стране једнаке осталим странама. Према томе је ΔΤ једнако ΤΗ и ΥΤ једнако ΤΣ.

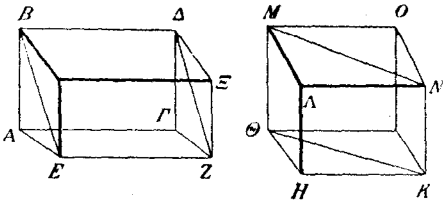


На овај начин, ако су ивице наспрамних страна коцке (куба) преполовљене и кроз деоне тачке повучене равни, заједнички пресек тих равни и дијагонала коцке се полове. А то је требало доказати.[40]

39.

Ако је код једне од две призме са истом висином основа паралелограм, а код друге троугао и паралелограм двапут већи од троугла, призме су једнаке.

Нака су ΑΒΓΔΕΖ и ΗΘΚΛΜΝ две призме са истим висинама и нека је код једне основа паралелограм ΑΖ, код друге троугао ΗΘΚ и паралелограм ΑΖ двапут већи од троугла ΗΘΚ. Тврдим, да је призма ΑΒΓΔΕΖ једнака призми ΗΘΚΛΜΝ.



Заиста, допунимо тела ΑΞ и ΗΟ. Пошто је паралелограм ΑΖ двапут већи од троугла ΗΘΚ, а паралелограм ΘΚ исто тако двапут већи од троугла ΗΘΚ, биће паралелограм ΑΖ једнак паралелограму ΘΚ. Како су паралелепипеди са једнаким основама и истим висинама једнаки међу собом, биће тело ΑΞ једнако телу ΗΟ. Но призма ΑΒΓΔΕΖ је половина тела ΑΞ, а призма ΗΘΚΛΜΝ је половина тела ΗΟ. Према томе је и призма ΑΒΓΔΕΖ једнака призми ΗΘΚΛΜΝ.

На овај начин, ако је код једне од две призме са истом висином основа паралелограм, а код друге троугао и паралелограм двапут већи од троугла, призме су једнаке. А то је требало доказати.[41]

КОМЕНТАР

[1] О логичкој структури ових двадесет осам дефиниција Еуклидове стереометрије могло би се поновити све оно што смо казали уопште о дефиницијама Еуклидове планиметрије у првој књизи. И овде више дефиниција имају описни карактер и могу се сматрати као, више или мање, јасни закључци из претходних геометриских знања добивених у ранијем индуктивном периоду геометрије.

[2] У овој дефиницији „тела“ Еуклид наводи три димензије овог просторног објекта — дужину, ширину и, према једном тумачењу, дубину (τό βάθος), како то стоји, напр. код Heath'a (depth) и Мордухай-Болтовског (глубина). Али τό βάθος, како се то налази у неким речницима, значи и висина. Види, напр., код G. E. Benseler'a и K. Schenkl'a у 13-ом издању: τό βάθος — 1) Tiefe, Höhe, je nach dem Standpunkt или код А. Д. Вейсмана у 3-ћем издању: βάθος, εος, τό глубина; иногда значит: высота. Савремена школска литература је усвојила као главну трећу димензију тела — висину. Али на овом месту код Еуклида τό βάθος ипак значи дубина, јер у овој истој књизи, кад је реч о висини у савременом смислу, Еуклид редовио употребљује другу реч, наиме τό ὕψος, напр.: Τὰ παραλληλεπίπεδα ὑπὸ τὸ αὐτό ὕψος — паралелепипеди са истом висином.

У вези са овом првом Еуклидовом дефиницијом у овој књизи учинимо још једну важну примедбу. Код Еуклида реч „στερεόν“ има двојако значење, као што, напр., у српском језику реч „површина“ има двојако значење — геометриског облика и величине. Тако и „στερεόν“ значи и геометриски облик и величину тог геометриског облика, тј. запремину. Те, према томе, тело једног паралелепипеда може бити или исто (αὐτὸν) са телом другог паралелепипеда, или једнако (ἴσον); у првом случају паралелепипеди се могу поклопити, у другом су им једнаке запремине. У нашем преводу задржавамо, као и други преводиоци, Еуклидову реч „тело“ за оба случаја.

[3] Према предлогу проф. М. Радојчића ту би требало ставити реч „површ“ у смислу латинске речи superficies или руске — поверхность, а реч „површина“ задржати у смислу area, руска реч — площадь.

[4] У овој дефиницији јасно се види индуктивна природа њена. Строго логичка структура дефиниције не допушта да се унапред говори о равни која пролази кроз више од две праве које се секу. У савременом логичком излагању геометрије могућност Еуклидове форме ове дефиниције следује тек после доказа познате теореме о положају сваке треће праве која стоји управно на датој правој.

[5] И ова дефиниција има недостатак претходне дефиниције. Ова форма дефиниције оставља отворена питања: да ли можемо произвољно бирати нормале у једној равни и да ли услов дефиниције зависи од тога коју раван узимамо као прву раван?

[6] Као што је познато, Еуклид не разликује појам праве, која може бити продужена било у оба правца било само у једном (полуправа), од појма дужи. Текст ове дефиниције се може изложити јасније ако се употреби појам дужи, јер, према Еуклидовом тексту, она има горњи и доњи крај.

[7] И ова дефиниција претпоставља, као очевидно, да тај „оштар“ угао (зашто баш оштар?) не зависи од положаја тачке на пресечној правој тих равни.

[8] Еуклидова реченица гласи: „Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα. Уступајући савременој форми дефиниције паралелности, употребио сам у првој књизи у дефиницији паралелности правих израз: „које се не секу једна са другом“, међутим, држећи се ближе Еуклидовог текста, треба употребити и овде и тамо појам стицања. Боље је написати у првој књизи: које се не стичу. У томе смислу грчка реч ἀσύμπτωτος је ушла и у савремену математичку терминологију.

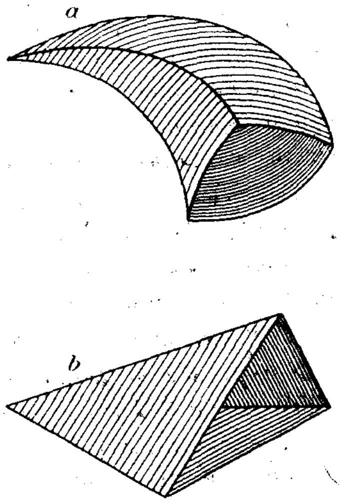
[9] У овој дефиницији се поставља појам „сличних просторних фигура (Ὅμοια στερεὰ σχήματά), при чему се појам фигуре очевидно сматра као добро познат. У грчком језику реч „τό σχῆμα“ има много значења: спољашњи изглед, облик,

форма; држање тела, став, понекад и леп изглед, лепота; вид (под видом), предлог (учинити предлог); положај у животу, стање, улога; одело и, најзад, као стручни израз — геометриска фигура.

Савремени читалац ће врло тешко разумети тачан смисао ове дефиниције. Пре свега под равнима треба разумети равне слике и то у датом случају многоуглове. Даље, ништа није наведено о распореду тих сличних и у истом броју многоуглова. Међутим тај распоред игра врло важну улогу у конструкцији полиједара. Довољно је навести пример два неправилна тетраедра симетрична у односу на раван основе: њихове стране су чак и једнаке, па ипак та два тела нису слична.

[10] Примедба на претходну дефиницију се односи и на ову дефиницију. Еуклидови услови нису довољни за једнакост полиједара.

[11] Пре свега треба навести разилажење код преводилаца у тумачењу те дефиниције. У тексту стоји „δύο γραμμῶν" и на другом месту „ταῖς γραμμαῖς", а „γραμμή" значи линија уопште, а не специјално права (εὐθεῖα). Према томе овој дефиницији одговара геометриски облик (сл. 1, а) са криволиниским ивицама. И у планиметрији Еуклид је увео сличан појам (деф. 8, књ. I). Ово тумачење се још појачава тиме, што се у том делу дефиниције говори о граничним површинама, а не о равнима. Са друге стране, у другој варијанти ове дефиниције Еуклид говори о равнима, које се сусрећу у истој тачки, а тада су ивице праволиниске (сл. 1, b). Разуме се, да две варијанте могу имати и различити садржај.



Грчки термин „Στερεὰ γωνία" преводимо са усвојеним школским називом „рогаљ". Али сматрам да називи „телесни угао“ или „запремински угао“ више би одговарали и грчком тексту и примљеној терминологији у другим језицима, наиме: латински — solidus angulus франц. — angle solide, енгл. — solid angle, немачки — körperliche Ecke, руски — телесный угол.

Приметимо да се Еуклидов појам рогља односио, како то следује из садржаја теореме 21. ове књиге, само на конвексне рогљеве, тј. такве, чија област се налази само са једне стране од равни сваког равног рогљевог угла.

[12] „Σχῆμα στερεὸν преводим са „просторна фигура“. Реч „слика“ је остављена за облике у равни, а фигура може бити и у равни и у простору.

[13] Из ове дефиниције јасно проистиче да се под равнима овде разумеју многоуглови. У планиметрији су код Еуклида права и дуж обухваћене истим термином — εὐθεῖα, исто тако у Стереометрији истим термином ἐπίπεδον су обухваћене раван и многоугао.

[14] У овој дефиницији Еуклид уноси у Геометрију елемент кретања, тачније, померања, промене места, без учешћа времена. Тај индуктивни елемент Еуклид сматра као јаснији и природнији од појма геометриског места. Ипак у Планиметрији при дефиницији круга (деф. 15, књ. 1) Еуклид наводи само особину једнакоудаљености.

[15] У српском језику две речи „оса“ и „осовина“ имају исти садржај, али постоји тенденција да се за „осу“ повеже чисто геометриски облик праве линије, чак и у широким круговима, а за „осовину“ — материјално тело, око којег се обрће друго материјално тело.

[16] Текст ове дефиниције оправдава тврђење, да Еуклидова реч „σφαῖρα“ значи тело, лопту, јер стоји: „ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας“, тј. „сферном површином“. У српском језику постоји тенденција да се за тело употребљава реч „лопта“, а за површину лопте — „сфера“, напр., небеска сфера, сферни троугао.

[17] Савремени појам конуса и конусне површине је шири од наведеног Еуклидовог појма. Еуклидов појам је еквивалентан у савременој српској школској литератури појму „праве купе“.

[18] Савремени појам и цилиндра и цилиндарске површине је шири од Еуклидовог појма. Код Еуклида је реч о правом кружном цилиндру или ваљку.

[19] Еуклид је, наводећи у дефиницијама 25—28 правилне полиједре, изоставио правилни тетраедар. Можда је то случајан пропуст у оним грчким рукописима, којима је располагао I. L. Heiberg. Немачки преводилац J. K. F. Hauff (1797) уноси под бројем 26 још једну, двадесет девету дефиницију, дефиницију тетраедра. Она би овако гласила: Тетраедар је просторна фигура обухваћена са четири једнака, једнакострана троугла. Али се може поставити и друга хипотеза. Можда је већ у Еуклидово време реч тетраедар (τετράεδρόν) значила сваки тетраедар уопште, а не само правилан и зато није ушла у дефиниције правилних полиједара, а полиједри уопште нису били дефинисани.

[20] Ова прва теорема замењена је у савременом излагању Стереометрије аксиомом: Ако права са равни има две заједничке тачке, свака њена тачка је у тој равни (аксиома праве и равни).

У формулисању и доказу како ове теореме тако и неких других Еуклид употребљава израз „τὸ ὑποχείμενον ἐρίπεδον који се може превести „раван доле“, „доња“ или „основна раван“ и други израз — μετεωροτέρῳ“ који означава „горе“ или „издигнут“. Можда је то одговарало оној хоризонталној равни у односу на коју је Еуклид изводио конструкције за време својих предавања.

[21] У овој теореми Еуклид наводи само један начин за одређивање положаја равни у простору, наиме помоћу две праве које се секу. Остали начини помоћу: 1. три тачке, које не припадају истој правој, 2. праве и тачке ван те праве, и 3. две паралелне праве могу се свести на одређивање помоћу две праве које се секу.

[22] Ова Еуклидова теорема сад се замењује теоремом: Ако две равни имају заједничку тачку, оне имају бар једну заједничку праву.

[23] Еуклидова теорија нормале на равни има тај недостатак што узима без доказа постојање у простору праве нормалне на двема правима које се секу. У савременој

школској литератури, која се придржава строжијег ма и компромисног дедуктивног излагања, прво се показује да је могуће конструисати у простору праву нормалну на двема правима које се секу. То се постиже на тај начин што се кроз тачку на пресеку двеју равни повуку нормале на тај пресек у свакој равни.

У школској литератури Еуклидов доказ ове теореме је замењен Кошијевим доказом, који се разликује од Еуклидовог не суштином логичког расуђивања, већ прегледношћу конструкције. Код Еуклида се оба дела конструкције налазе са исте стране равни, а код Кошија са разних страна равни и то у положају симетричном према равни. Ова врло популарна теорема била је предмет доказа и других писаца (Лежандр, Безу, Адамар и др.). При индуктивном излагању, теорија нормале на равни се заснива на елементарним, конкретним геометриским претставама, напр. на отвореној књизи (Е. Борел).

[24] У вези са садржајем како ове, тако и других теорема наведимо ову примедбу. У својим излагањима Еуклид не разликује три појма, које обухвата истом речју — „εὐθεῖα“ — права. То су, како смо већ наводили, права, полуправа и дуж. Услед тога при тачном формулисању неких ставова и доказа настају, нарочито у Стереометрији, понекад формалне компликације и нејасности и то при одређивању положаја једног од тих облика у односу на други. И употреба одговарајућих глагола може бити незгодна. Тако је, напр., незгодно казати да се две полуправе секу, кад су њихови крајеви у истој тачки, а незгодно је употребити и глагол додирују, јер појам додира у савременој математици има сасвим други геометриски садржај. Једино због тога што су одговарајућа расуђивања врло једноставна Еуклидова употреба само једне речи и примена, можда, и неодговарајућих глагола не изазива неспоразуме о суштини предмета.

[25] У овој теореми о угловима са паралелним крацима Еуклид изоставља случај кад је збир таквих углова једнак двама правим угловима. Овај пропуст је врло карактеристичан за Еуклидову геометрију, геометрију не промењљивих геометриских облика у разним могућим положајима, већ

облика готово увек исте форме и у истом положају. Сем тога је тој геометрији апсолутно стран појам смера рецимо, датог правца.

Овај Еуклидов пропуст показује, карактеристичну за Еуклида, нарочиту особину излагања. Еуклид се строго придржава у доказу само оних података који непосредно следују из конкретних слика и фигура.

У вези са садржајем ове теореме приметимо да се савремени појам угла, изгледа од XVIII столећа, односи не само на угао две праве које се секу, већ и на две мимоилазне праве. За угао такве две праве се узима угао правих које су паралелне датим мимоилазним правима и пролазе кроз исту произвољну тачку. Узимање одређених смерова на правим једног и другог пара прецизира одређивање, нарочито величине тих углова. Ово проширење појма угла стоји у природној вези са улогом угла као геометриским елементом, који служи за оцењивање промене положаја једног геометриског објекта у односу на други, нарочито са образовањем нове форме. Угао треба сматрати као геометриски параметар форме (в. наш чланак: „О геометриским параметрима". Зборник радова Математичког Института Српске Академеје наука. Књ. 5. 1957).

[26] У овом ставу Еуклид решава први конструктивни просторни задатак. Пре тога Еуклид не наводи оне основне просторне конструкције на које треба да се сведе сваки конструктивни задатак у простору.

При прорачунавању наведене Еуклидове конструкције прирорно се појављује, у вези са произвољним увођењем праве ВГ у датој равни, питање о јединствености добивене нормале. Доказ те јединствености није тежак.

У вези са овом конструкцијом приметимо да код Еуклида не постоји "теорема три нормале", коју је увео Луј Бертран и која је стекла нарочиту популарност пошто ју је Лежандр (1752 – 1834) унео у своје „Елементе" (Élements de Géométrie par A. M. Legendre. Ouvrage adopté par l'Université. У нашим рукама је 38. издање без ознаке године издања, према обичају француске школске литературе). У нашој редакцији (в., напр., Билимовић – Анђелић. Геометрија за VI разред средњих школа. Стереометрија, Б. 1943 г.) ова теорема гласи: Нека је NA нормала са подножјем A на равни α и p права у тој равни. Ако је P подножје нормале из A на p, онда је и права NP нормала на правој p (теорема три нормале).

[27] Нека је у датој равни α дата тачка A. Треба из A конструисати нормалу на равни α. Узмимо кроз тачку A у равни α праву p и поставимо кроз ту праву две равни β_1 и β_2, а у тим равнима две нормале n_1 и n_2 на правој p. Раван тих нормала означимо са γ. Нека та раван сече раван α дуж праве q. Нормала n у равни γ на правој q у тачки A је нормала из тачке A на равни α.

[28] Интересантно је да је Еуклид нашао за потребно да доказује јединственост нормале само за нормалу кроз тачку на равни, а изоставио је случај тачке ван равни.

[29] Теореме од 14. до 19. завршавају низ Еуклидових теорема које се односе на проучавање релативног положаја у простору тачака, правих и равни. У савременим уџбеницима геометрије тај низ се попуњава са још неколико група теорема. У те групе спадају теореме о просторним угловима, о симетрији, о мимоилазним правима, о кореспонденцији између елемената у равни и елемената у простору и др.

[30] Теореме 20.–23. третирају особине рогљеве. Текст теореме 21. се односи само на конвексне, испупчене рогљеве. Претстава о другим рогљевима Еуклид, изгледа, није имао, па према томе није могао да наведе ни тачније формулисање теореме 21.

[31] Навођење ове леме, чији је садржај непосредна последица Питагорине теореме, доказује да у Еуклидово време ова теорема, основа метрике, није заузимала оно место које заслужује.

[32] У тексту ове теореме задржавамо Еуклидове речи „наспрамне равни“ (τὰ ἀπεναντίον … ἐπίπεδα) да још једанпут подвучемо двозначност Еуклидовог појма „раван“ (ἐπίπεδον).

[33] У овом ставу је први пут неведен појам „στερεὸν παραλληλεπίπεδον“ без претходне дефиниције. Може се превести „паралелепипедно тело“ или једноставно „паралелепипед“ што више одговара савременој терминологији.

[34] Овај конструктивни задатак је одвојен од теореме о рогљевима очевидно из разлога што служи као помоћни став за наредни задатак конструкције паралелепипеда.

[35] У вези са овом једноставном теоремом учинимо две примедбе: 1. И у овој и у другим теоремама Еуклид никад не искоришћава методу поклапања једног тела са другим. Његова геометриска апстракција није још дошла до тог степена да се може једно тело поклопити са другим. Материјалност физичког тела још је кочила просторну апстракцију. 2. Као услове за једнакост тела Еуклид узима да једнака тела буду обухваћена равнима истим и по броју и по величини. Јасно је да су такви услови недовољни за утврђивање једнакости два геометриска тела. Узмимо две коцке. На горњу основу једне ставимо правилну квадратну пирамиду са основом стране коцке и са висином половином висине коцке. Од друге коцке исте величине одузмимо правилну квадратну пирамиду са основом горње основе коцке и врхом у центру коцке. Прво тело — коцка са пирамидним додатком и друго тело — коцка са пирамидним удубљењем обухваћени су равнима истим и по броју и по величини, али оба тела нису једнака.

[36] У теоремама 29.—31. развијена је позната Еуклидова теорија упоређивања запремина два паралелепипеда са једнаким основама и висинама, али различите форме. У теореми 32. то упоређивање се проширује на паралелепипеде који имају једнаке само висине, а у теореми 33. на сличне паралелепипеде. У теореми 34. су наведени два обрнута става.

[37] У вези са овом теоремом о углу праве и њене пројекције на раван од интереса је приметити да Еуклид за конструкцију те пројекције не примењује непосредну, савремену методу, већ употребљава две помоћне праве које много отежавају расуђивање.

[38] Тој геометриској теореми одговара ово алгебарско извођење. Ако су $a:b=b:c$, биће $ac=b^2$ и према томе $abc=b^3$.

[39] Овом ставу одговара: првом делу

из $a : b=c : d$ следује $a^3 : b^3=c^3 : d^3$

и другом

из $a^3 : b^3=c^3 : d^3$ следује $a : b=c : d$.

[40] У овој теореми могу се наћи трагови претстава о геометриској симетрији.

[41] Савременом читаоцу текст ове теореме изгледа погрешан, јер смо навикли да су основе призме паралне равни. Међутим код једне од наведених призама за основу, изгледа хоризонталну, узета је бочна страна призме.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА XII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 12

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ДВАНАЕСТА КЊИГА

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1957

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Ова, дванаеста, књига Еуклидових елемената је важна како по садржају ставова који су у њој изнесени, тако и по новој методи коју је Еуклид употребио у доказима теорема ове књиге.

Садржај је посвећен упоређивању величина оних геометриских објеката који се не могу упоређивати поделом на конгруентне делове или путем допуне до конгруентних објеката. Ти геометриски објекти су: кругови, пирамиде, купе, ваљци и лопте.

Метода која је употребљена, то је метода ексхаустије (лат. exhaustio) или исцрпљивања.

И садржај ове књиге и метода ексхаустије служили су, а служе и сада, као материјал за проучавања са разних гледишта. Особито богата методска литература посвећена је оним питањима елементарне геометрије, која у настави још нису добила дефинитивна решења. Наш скроман коментар нема за циљ да се упушта у разматрања свих оних питања која су у вези са овом дванаестом књигом.

При изради и ове књиге су ми помогле колеге В. В. Мишковић и Т. П. Анђелић, на чему им овде изјављујем захвалност.

А. Б.

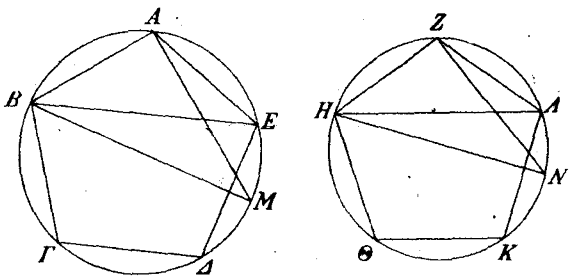
ТЕКСТ

1.

Слични многоуглови, уписани у кругове, односе се један према другом као квадрати на пречницима.

Нека су ABΓ, ZHΘ кругови, и ABΓΔE, ZHΘKΛ уписани слични многоуглови, и нека су BM, HN пречници кругова. Тврдим да је квадрат на BM према квадрату на HN као многоугао ABΓΔE према многоуглу ZHΘKΛ.

Заиста, повуцимо BE, AM, HΛ, ZN. Пошто је многоугао ABΓΔE сличан многоуглу ZHΘKΛ, угао BAE је једнак углу HZΛ и дуж BA је према дужи AE као HZ према ZΛ. Сад имамо два троугла, BAE и HZΛ, и угао BAE једног једнак је углу HZΛ другог, а краци тих углова су пропорционални. Тада троуглови ABE и ZHΛ имају једнаке углове. Према томе је угао AEB једнак углу ZΛH. Али угао AEB је једнак углу AMB, пошто су над истим луком. И угао ZΛH је једнак углу ZNH; па и угао AMB је једнак углу ZNH. А и прав угао BAM је једнак правом углу HZN. Стога је и преостали угао једнак преосталом углу. Према томе троуглови ABM и ZHN имају једнаке углове. Дакле, размера BM према HN једнака је размери BA према HZ. Али размера двапут виша од размере BM према HN је једнака размери



квадрата на ВМ према квадрату нн НN. А размера двапут виша од размере ВА према НZ је једнака размери многоугла АВГΔЕ према многоуглу ZНΘКΛ. Према томе је квадрат на ВМ према квадрату на НZ као многоугао АВГΔЕ према многоуглу ZНΘКΛ.

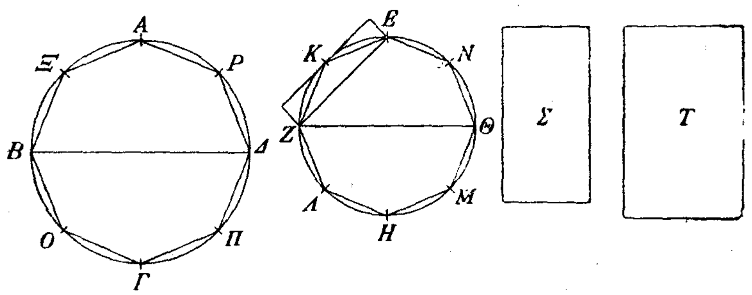
На овај начин, слични многоуглови, уписани у кругове, односе се један према другом као квадрати на пречницима. А то је требало доказати.[1]

2.

Кругови се односе један према другом као квадрати на пречницима.

Нека су АВГΔ и ЕZНΘ кругови, а ВΔ и ZΘ њихови пречници. Тврдим да се круг АВГΔ односи према кругу ЕZНΘ као квадрат на ВΔ према квадрату на ZΘ.

Заиста, ако се круг АВГΔ не односи према кругу ЕZНΘ као квадрат на ВΔ према квадрату на ZΘ, биће размера квадрата на ВΔ према квадрату на ZΘ једнака размери круга АВГΔ према површини или мањој или већој од површине круга ЕZНΘ. Нека буде, прво, према мањој Σ. Упишимо у круг ЕZНΘ квадрат ЕZНΘ. Тај уписани квадрат је већи од половине круга ЕZНΘ. Јер, ако кроз тачке Е, Z, Н, Θ повучемо тангенте на круг, половина описаног квадрата једнака је квадрату ЕZНΘ; а како је описани квадрат већи од круга, биће уписани квадрат ЕZНΘ већи од половине круга ЕZНΘ. Преполовимо лукове ЕZ, ZН, НΘ, ΘЕ тачкама К, Λ, М, N и повуцимо дужи ЕК,. КZ, ZΛ, ΛН, НМ, МΘ, ΘN и NЕ; тада је



сваки од троуглова ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ већи од половине одговарајућег кружног сегмента. Јер, ако кроз тачке Κ, Λ, Μ, Ν повучемо тангенте на круг и на правима ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ конструишемо паралелограме, сваки од троуглова ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ једнак је половини одговарајућег паралелограма; а сваки кружни сегмент је мањи од паралелограма. Према томе је сваки од троуглова ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ већи од половине одговарајућег кружног сегмента. Ако сад преполовимо кружне лукове, који настају после претходне поделе, спојимо нове деоне тачке дужима и тај поступак продужимо непрекидно, добићемо кружне сегменте чији је збир мањи од разлике круга и мање површине Σ. Заиста, према првој теореми десете књиге, ако имамо две неједнаке величине, исте природе, па од веће одузмемо величину већу од њене половине, од остатка одузмемо поново величину већу од половине тог остатка и тај поступак продужимо непрекидно, остаће нека величина која је мања од мање од полазних величина. Нека тако буде и нека збир конструисаних кружних сегмената ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ круга ΕΖΗΘ буде мањи од разлике круга ΕΖΗΘ и површине Σ. Тада је остатак, многоугао ΕΚΖΛΗΜΘΝ, већи од површине Σ. Упишимо и у круг ΑΒΓΔ многоугао ΑΞΒΟΓΠΔΡ, сличан многоуглу ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Тада је квадрат на ΒΔ према квадрату на ΖΘ као многоугао ΑΞΒΟΓΠΔΡ према многоуглу ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Али квадрат на ΒΛ према квадрату на ΖΘ односи се као круг ΑΒΓΔ према површини Σ. Према томе је круг ΑΒΓΔ према површини Σ као многоугао ΑΞΒΟΓΠΔΡ према многоуглу ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Према томе, после промене реда, круг се односи према у њ уписаном многоуглу као површина Σ према многоуглу ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Али круг је већи од многоугла уписаног у њ, па према томе је и површина Σ већа од многоугла ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Но она је и мања. А то је немогуће. Према томе није квадрат на ΒΔ према квадрату на ΖΘ као круг ΑΒΓΔ према површини мањој од круга ΕΖΗΘ. Слично се доказује да и квадрат на ΖΘ према квадрату на ΒΔ није као круг ΕΖΗΘ према површини мањој од круга ΑΒΓΔ.

Тврдим, такође, да ни квадрат на ΒΔ према квадрату на ΖΘ неће бити као круг ΑΒΓΔ према површини која је већа од круга ΕΖΗΘ.

Заиста, ако је то могуће, нека буде према већој површини Т. Значи, после промене реда, квадрат на ZΘ је према квадрату на ΔΒ као површина Т према кругу ΑΒΓΔ. Али површина Т се односи према кругу ΑΒΓΔ као круг ΕΖΗΘ према површини мањој од круга ΑΒΓΔ. На овај начин квадрат на ZΘ је према квадрату на ΒΔ као круг ΕΖΗΘ према површини мањој од круга ΑΒΓΔ. А доказано је да је то немогуће. Према томе квадрат на ΒΔ према квадрату на ZΘ не односи се као круг ΑΒΓΔ према површини већој од круга ΕΖΗΘ. А доказали смо да није ни као тај круг прама мањој површини. Према томе је квадрат на ΒΔ према квадрату на ZΘ као круг ΑΒΓΔ према кругу ΕΖΗΘ.

На овај начин, кругови се односе један према другом као квадрати на пречницама. А то је требало доказати.[2]

Лема

Тврдим, да ако је површина Σ већа од круга ΕΖΗΘ, онда је површина Σ према кругу ΑΒΓΔ као круг ΕΖΗΘ према површини мањој од круга ΑΒΓΔ.

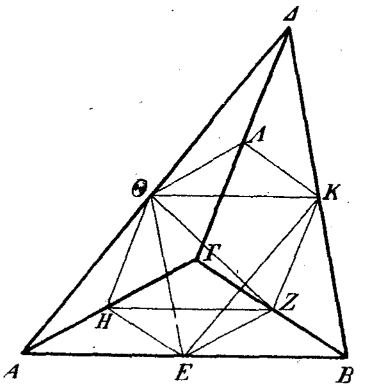
Заиста, начинимо тако да површина Σ буде према кругу ΑΒΓΔ као круг ΕΖΗΘ према површини Т. Тврдим да је површина Т мања од круга ΑΒΓΔ.

Заиста, пошто је површина Σ према кругу ΑΒΓΔ као круг ΕΖΗΘ према површини Т, то ће, после промене реда, површина Σ бити према кругу ΕΖΗΘ као круг ΑΒΓΔ према површини Т. Но површина Σ је већа од круга ΕΖΗΘ, па према томе је и круг ΑΒΓΔ већи од површине Т. На тај начин је површина Σ према површини ΑΒΓΔ као круг ΕΖΗΘ према површини мањој од круга ΑΒΓΔ. А то је требало доказати.[3]

3.

Свака пирамида са троуглом основом може се поделити на две једнаке пирамиде са троуглим основама, сличне једна другој и целој пирамиди, и на две једнаке призме; збир те две призме је већи од половине целе пирамиде.

Нека буде дата пирамида са троуглом основом ΑΒΓ и врхом у тачки Δ. Тврдим да се пирамида ΑΒΓΔ може поделити на две једнаке пирамиде са троуглим основама, сличне једна другој и целој пирамиди, и на две једнаке призме, и да је збир те две призме већи од половине целе пирамиде.



Заиста, преполовимо AB, BΓ, ΓA, AΔ, ΔB, ΔΓ тачкама E, Z, H, Θ, K, Λ и спојимо ΘE, EH, HΘ, ΘK, KΛ, ΛΘ, KZ, ZH. Пошто је AE једнако EB и AΘ једнако ΔΘ, права EΘ је паралелна првој ΔB. Из истих разлога биће и права ΘK паралелна правој AB. Према томе је ΘEBK паралелограм. Стога је ΘK једнако EB. Но EB је једнако EA, па је стога и AE једнако ΘK. И AΘ је једнако ΘΔ. Две дужи AE и AΘ једнаке су двема дужима KΘ и ΘΔ, свака свакој; и угао EAΘ једнак је углу KΘΔ, па је, значи, и основица EΘ једнака основици KΛ. Према томе је троугао AEΘ једнак и сличан троуглу ΘKΔ. Из истих разлога и троугао AΘH једнак је и сличан троуглу ΘΛΔ. И пошто су две праве EΘ и ΘH, које се секу, паралелне са двема правима KΔ и ΔΛ, које се секу, а прве праве нису у истој равни са другим, оне образују једнаке углове. Према томе је угао EΘH једнак углу KΔΛ. И пошто су две дужи EΘ и ΘH једнаке двема дужима KΔ и ΔΛ, свака свакој, и угао EΘH једнак углу KΔΛ, биће и основица EH једнака основици KΛ. На овај начин троугао EΘH једнака је и слична троуглу KΔΛ. Из истих разлога је и троугао AEH једнак и сличан троуглу ΘKΛ. На овај начин је пирамида којој је основа троугао AEH и врх у тачки Θ једнака и слична пирамиди којој је основа троугао ΘKΛ и врх у тачки Δ. И пошто је у троуглу AΔB повучена права ΘK паралелно једној од страна, страни AB, троугао AΔB имаће једнаке углове као и троугао ΔΘK, а стране су им пропорционалне. Према томе је троугао AΔB сличан троуглу ΔΘK. Из истих разлога и троугао ΔBΓ биће сличан троуглу ΔKΛ, а троугао AΔΓ троуглу ΔΛΘ. И пошто су две праве BA и AΓ, које се секу, паралелне са двема правима КΘ и ΘΛ, које се такође секу, али са првима нису у истој равни, оне образују једнаке углове. Дакле угао ΒΑΓ једнак је углу ΚΘΛ. И пошто је ΒΑ према ΑΓ као ΚΘ према ΘΛ, биће троугао ΑΒΓ сличан троуглу ΘΚΛ. И на тај начин је пирамида којој је основа троугао ΑΒΓ и врх у тачки Δ слична пирамиди којој је основа троугао ΘΚΛ и врх у тачки Δ. Доказано је међутим да је пирамида којој је основа троугао ΘΚΛ и врх у тачки Δ слична пирамиди којој је основа троугао ΑΕΗ и врх у тачки Θ [јер је и пирамида којој је основа троугао ΑΒΓ и врх у тачки Δ слична пирамиди којој је основа троугао ΑΕΗ и врх у тачки Θ]. Према томе је свака од пирамида ΑΕΗΘ и ΘΚΛΔ слична целој пирамиди ΑΒΓΔ.

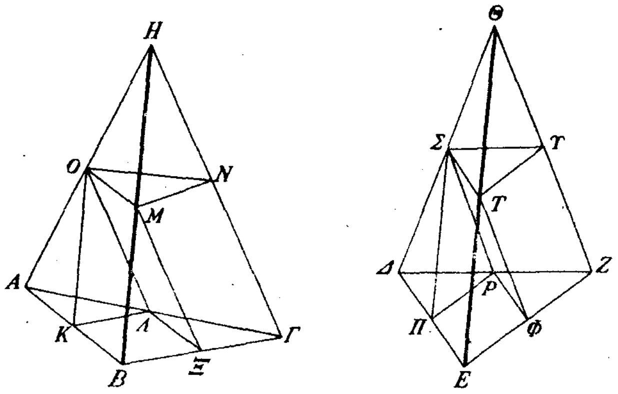
И пошто је ΒΖ једнако ΖΓ, паралелограм ΕΒΖΗ је двапут већи од троугла ΗΖΓ. А како су две призме, ако имају једнаке висине и једна за основу паралелограм, а друга троугао, уз то паралелограм двапут већи од троугла, једнаке, биће и призма обухваћена двама троуглима, ΒΚΖ и ΕΘΗ, и трима паралелограмима, ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ, једнака призми обухваћеној двама троуглима ΗΖΓ и ΘΚΛ и трима паралелограмима ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ и ΘΚΖΗ. И јасно је да ће свака призма, наиме, прва, којој је основа паралелограм ΕΒΖΗ и наспрамна ивица ΘΚ, и друга којој је основа троугао ΗΖΓ и наспрамни троугао ΘΚΛ — бити већа од сваке пирамиде са основама ΑΕΗ и ΘΚΛ и врховима у тачкама Θ и Δ, пошто, ако повучемо праве ΕΖ и ΕΚ, биће призма чија је основа паралелограм ΕΒΖΗ и наспрамна ивица ΘΚ већа од пирамиде којој је основа троугао ΕΒΖ и врх тачка Κ. Међутим је пирамида којој је основа троугао ΕΒΖ и врх тачка Κ једнака пирамиди којој је основа троугао ΑΕΗ и врх тачка Θ, пошто су оне обухваћене једнаким и сличним равнима (многоугловима). На тај начин је и призма којој је основа паралелограм ΕΒΖΗ и наспрамна ивица ΘΚ већа од пирамиде којој основа троугао ΑΕΗ и врх у тачки Θ. Но призма којој је основа паралелограм ΕΒΖΗ и наспрамна ивица ΘΚ једнака је призми којој је основа троугао ΗΖΓ и наспрамни троугао ΘΚΛ. А пирамида којој је основа троугао ΑΕΗ и врх у тачки Θ једнака је пирамиди којој је основа троугао ΘΚΛ и врх у тачки Δ. Значи две наведене призме веће су од две наведене пирамиде, чије су основе троуглови АЕН и ΘКΛ и врхови у тачкама Θ и Δ.

На овај начин цела пирамида којој је троугао АВГ у основи и врх у тачки Δ може се поделити на две међу собом једнаке (сличне целој) пирамиде и на две једнаке призме, чији је збир већи од половине целе пиремиде. А то је требало доказати.[4]

4.

Ако постоје две пирамиде са истом висином, чије су основе троуглови, и сваку поделимо на две једнаке пирамиде, сличне међу собом и са целом пирамидом, и на две једнаке призме, основа једне пирамиде односиће се према основи друге пирамиде као све призме прве пирамиде према свима, у истом броју, призмама друге пирамиде.

Нека постоје две пирамиде са истом висином, чије су основе троуглови АВГ и ΔΕΖ и врхови у тачкама Н и Θ, и нека је свака подељене на две једнаке пирамиде, сличне међу собом и целој пирамиди, и на две једнаке призме. Тврдим да је основа АВГ према основи ΔΕΖ као и све призме пирамиде АВГН према призмама у истом броју пирамиде ΔΕΖΘ.



Заиста, пошто је ВΞ једнако ΞГ, а АΛ једнако ΛГ, биће права ΛΞ паралелна АВ и троугао АВГ сличан троуглу ΛΞГ.

Из истих разлога је и троугао ΔΕΖ сличан троуглу ΡΦΖ. И пошто је ΒΓ двапут веће од ΓΞ, а ΕΖ од ΖΦ, биће ΒΓ према ΓΞ као ΕΖ према ΖΦ. На тај начин су на ΒΓ и на ΓΞ конструисане сличне и у сличном положају праволиниске слике ΑΒΓ и ΛΞΓ, а на ΕΖ и на ΖΦ сличне и у сличном положају праволиниске слике ΔΕΖ и ΡΦΖ. Према томе је троугао ΑΒΓ према троуглу ΛΞΓ као троугао ΔΕΖ према троуглу ΡΦΖ. Или, после промене реда, троугао ΑΒΓ је према троуглу ΔΕΖ као троугао ΛΞΓ према троуглу ΡΦΖ. Међутим је троугао ΛΞΓ према троуглу ΡΦΖ као призма којој је основа троугао ΛΞΓ и наспрамни троугао ΟΜΝ према призми којој је основа троугао ΡΦΖ и наспрамни троугао ΣΤΥ. Те је према томе троугао ΑΒΓ према троуглу ΔΕΖ као призма, којој је основа троугао ΛΞΓ и наспрамни троугао ΟΜΝ, према призми, којој је основа троугао ΡΦΖ и наспрамни троугао ΣΤΥ. Но наведене призме се једна према другој односе као призма којој је основа паралелограм ΚΒΞΛ а наспрамна ивица ΟΜ према призми којој је основа паралелограм ΠΕΦΡ а наспрамна ивица ΣΤ. А у истој размери је и збир две призме: једне, којој је основа паралелограм ΚΒΞΛ и наспрамне ивица ΟΜ, и друге, којој је основа ΛΞΓ и наспрамни троугао ΟΜΝ, према збиру призама, једне којој је основа ΠΕΦΡ и наспрамна ивица ΣΤ и друге којој је основа троугао ΡΦΖ а наспрамни троугао ΣΤΥ. На овај начин се збир две наведене призме односи према збиру две друге наведене призме као основа ΑΒΓ према основи ΔΕΖ.

На сличан начин, ако се пирамиде ΟΜΝΗ и ΣΤΥΘ поделе на две призме и на две пирамиде, биће основа ΟΜΝ према основи ΣΤΥ као две призме у пирамиди ΟΜΝΗ према двема призмама у пирамиди ΣΤΥΘ. Али основа ΟΜΝ је према основи ΣΤΥ као основа ΑΒΓ према основи ΔΕΖ, јер је сваки од троуглова ΟΜΝ и ΣΤΥ једнак сваком од троуглова ΛΞΓ и ΡΦΖ. И на тај начин је основа ΑΒΓ према основи ΔΕΖ као четири призме према четири призме. Исто тако ће, ако се преостале пирамиде поделе на две пирамиде и на две призме, основа ΑΒΓ бити према основи ΔΕΖ као све призме у пирамиди ΑΒΓΗ према свима призмама у истом броју у пирамиди ΔΕΖΘ. А то је требало доказати.[5]

Лема

А да је троугао ΛΞΓ према троуглу ΡΦΖ као призма којој је основа троугао ΛΞΓ, а наспрамни троугао ΟΜΝ, према призми којој је основа троугао ΡΦΖ, и наспрамни троугао ΣΤΥ, то треба доказати.

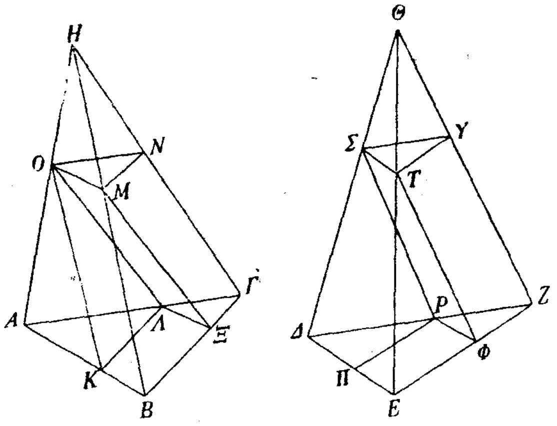
Заиста, замислимо на истој слици две нормале спуштене из тачака Η и Θ на равни ΑΒΓ и ΔΕΖ; оне су, очигледно, једнаке, јер се претпоставља да су пирамиде са истим висинама. Пошто су две праве ΗΓ и нормала из Η, пресечене двема паралелним равнима ΑΒΓ и ΟΜΝ, оне су пресечене у истој размери. А како је дуж ΗΓ преполовљена пресеком са равни ΟΜΝ у тачки Ν, биће преполовљена пресеком са равни ΟΜΝ и нормала спуштена из тачке Η на раван ΑΒΓ. Из истих разлога биће преполовљена пресеком са равни ΣΤΥ и нормала спуштена из тачке Θ на раван ΔΕΖ. Но нормале спуштене из тачака Η и Θ на равни ΑΒΓ и ΔΕΖ једнаке су, па према томе су једнаке и нормале спуштене из тачака троуглова ΟΜΝ и ΣΤΥ на равни троуглова ΑΒΓ и ΔΕΖ. Према томе призме којима су основе троуглови ΛΞΓ и ΡΦΖ, а наспрамни троуглови ΟΜΝ и ΣΤΥ, имају исте висине. Значи и паралелепипеди, конструисани од тих призама, имају исте висине и у размери су један према другом као основе. Према томе су и њихове половине, наведене призме, једна према другој у односу основе ΛΞΓ према основи ΡΦΖ. А то је требало доказати.[6]

5.

Пирамиде једнаких висина и са троуглим основама у размери су једна према другој као основе.

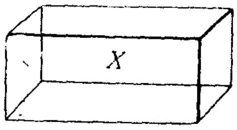
Нека су дате пирамиде са основама ΑΒΓ и ΔΕΖ са истом висином и са врховима у тачкама Η и Θ. Тврдим, да се основа ΑΒΓ према основи ΔΕΖ односи као пирамида ΑΒΓΗ према пирамиди ΔΕΖΘ.

Заиста, ако основа ΑΒΓ не би била према основи ΔΕΖ као пирамида ΑΒΓΗ према пирамиди ΔΕΖΘ, онда ће основа ΑΒΓ бити према оснвои ΔΕΖ као пирамида ΑΒΓΗ према величини мањој или већој од пирамиде ΔΕΖΘ. Нека буде, прво, према мањој величини Χ; и поделимо пирамиду ΔΕΖΘ на две једнаке пирамиде, сличне међу собом и целој пирамиди, и на две једнаке призме, при чему је збир две призме већи од половине целе пирамиде. Затим пирамиде добавене после поделе поделимо понове на сличан начин и тако ћемо поступати све док од пирамиде ΔΕΖΘ не остану такве пирамиде које су мање од разлике пирамиде ΔΕΖΘ и тела Χ. Нека остану и нека то буду, напр., пирамиде ΔΠΡΣ и ΣΤΥΘ. Тада су све остале призме у пирамиди ΔΕΖΘ веће од тела Χ. Поделимо и пирамиду ΑΒΓΗ, на сличан начин и на исти број делова, као што је подељена пирамида ΔΕΖΘ. Тада се основа ΑΒΓ према основи ΔΕΖ односи као призме у пирамиди ΑΒΓΗ према призмама у пирамиди ΔΕΖΘ. Али основа ΑΒΓ је према основи ΔΕΖ као пирамида ΑΒΓΗ према телу Χ. Према томе је пирамида ΑΒΓΗ према телу Χ као призме у пирамиди ΑΒΓΔ према призмама у пирамиди ΔΕΖΘ. На тај начин, после промене реда, пирамида ΑΒΓΗ је према призмама у њој као тело Χ према призмама у пирамиди ΔΕΖΘ. Но пирамида ΑΒΓΗ је већа од призама у њој, па према томе и тело Χ је веће од призама у пирамиди ΔΕΖΘ. Али оно је и мање. А то је немогуће. Према томе основа ΑΒΓ према основи ΔΕΖ није у размери пирамиде ΑΒΓΗ према телу мањем од пирамиде ΔΕΖΘ. На сличан начин се доказује да основа ΔΕΖ према



основи АВГ није у размери пирамиде ΔΕΖΘ према телу мањем од пирамиде АВГН.

Али тврдим да основа АВГ према основи ΔΕΖ није у размери пирамиде АВГН ни према телу већем од пирамиде ΔΕΖΘ.



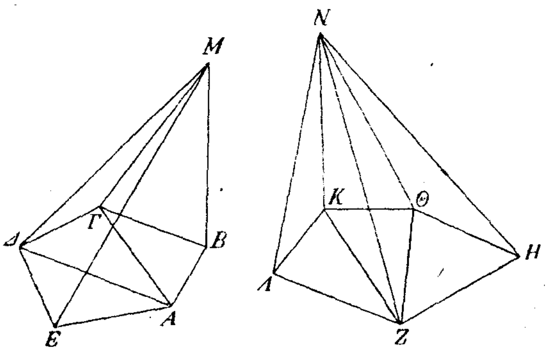
Заиста, ако је могуће, нека буде према већем телу X. Значи, обрнуто, основа ΔΕΖ је преме основи АВГ као тело X према пирамиди АВГН. Али тело X према пирамиди АВГН је као пирамида ΔΕΖΘ према телу мањем од пирамиде АВГН, како је било доказано. Дакле, основа ΔΕΖ је према основи АВГ као пирамида ΔΕΖΘ према телу мањем од пирамиде АВГН, а доказано је да је то бесмислено. Према томе основа АВГ према основи ΔΕΖ није у размери пирамиде АВГН према телу већем од пирамиде ΔΕΖΘ. А доказано је да није ни према мањем. На овај начин основа АВГ је према основи ΔΕΖ као пирамида АВГН према пирамиди ΔΕΖΘ. А то је требало даказати.[7]

6.

Пирамиде једнаких висина и са многоугловима у основама у размери су једна према другој као основе.

Нека су дате пирамиде једнаких висина, којима су основе многоуглови АВГΔΕ и ΖΗΘΚΛ, а врхови у тачкама М и N. Тврдим да је основа АВГΔΕ према основи ΖΗΘΚΛ као пирамида АВГΔΕМ према пирамиди ΖΗΘΚΛN.

Заиста, повуцимо АГ, АΔ, ΖΘ, ΖΚ. Сад, пошто две пирамиде АВГМ и АГΔМ имају у основама троуглове, а висине су им једнаке, оне стоје у размери основа. Према томе је основа АВГ према основи АГΔ као пирамида АВГМ према пирамиди АГΔМ. И после састављања биће основа АВГΔ према основи АГΔ као пирамида АВГΔМ према пирамиди АГΔМ. Али је и основа АГΔ према основи АΔΕ као пирамида АГΔМ према пирамиди АΔЕМ. Значи, према једнакоудаљености је основа АВГΔ према основи АΔЕ као пирамида АВГΔМ према пирамиди АΔЕМ. И опет, после састављања, биће основа ΑΒΓΔΕ према основи ΑΔΕ као пирамида ΑΒΓΔΕΜ према пирамиди ΑΔΕΜ. Слично се доказује, да је и основа ZHΘΚΛ према основи ZHΘ као пирамида ZHΘΚΛΝ према пирамиди ZHΘΗ. Пошто две пирамиде ΑΔΕΜ и ZHΘΝ једнаких висина имају за основе троуглове, биће основа ΑΔΕ према основи ZHΘ као пирамида ΑΔΕΜ према пирамиди

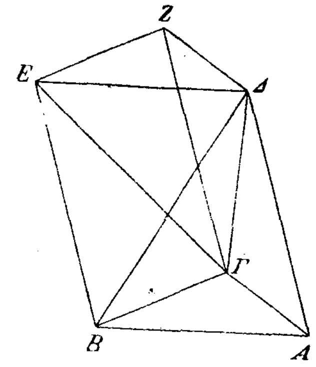


ZHΘΝ. Али је основа ΑΔΕ према основи ΑΒΓΔΕ као пирамида ΑΔΕΜ према пирамиди ΑΒΓΔΕΜ. Значи због једнакоудаљености односиће се основа ΑΒΓΔΕ према основи ZHΘ као пирамида ΑΒΓΔΕΜ према пирамиди ZHΘΝ. Но и основа ZHΘ је према основи ZHΘΚΛ као пирамида ZHΘΝ према пирамиди ZHΘΚΛΝ. На овај начин, због једнакоудаљености, основа ΑΒΓΔΕ је према основи ZHΘΚΛ као пирамида ΑΒΓΔΕΜ према пирамиди ZHΘΚΛΝ. А то је требало доказати.[8]

7.

Свака призма са троуглом у основи може се поделити на три међу собом једнаке пирамиде са троугловима у основама.

Нека је дата призма којој је троугао ΑΒΓ у основи и наспрамни троугао ΔΕΖ. Тврдим да се призма ΑΒΓΔΕΖ може поделити на три међу собом једнаке пирамиде са троугловима у основама.



Заиста, повуцимо BΔ, EΓ и ΓΔ. Пошто је ABEΔ паралелограм, а BΔ је његова дијагонала, биће троугао ABΔ једнак троуглу EBΔ. Према томе је пирамида којој је троугао ABΔ у основи и врх у тачки Γ једнака пирамиди којој је троугао ΔEB у основи и врх у тачки Γ. Али пирамида којој је основа троугао ΔEB и врх у тачки Γ иста је као и пирамида којој је основа троугао EBΓ и врх у тачки Δ, јер су оне обухваћене истим равнима. И према томе је пирамида којој је основа троугао ABΔ и врх у тачки Γ једнака пирамиди којој је основа троугао EBΓ и врх у тачки Δ. Даље, пошто је ZΓBE паралелограм, а ΓE његова дијагонала, троугао ΓEZ једнак је троуглу ΓBE. И на тај начин је пирамида којој је основа троугао BΓE и врх у тачки Δ једнака пирамиди којој је основа троугао EΓZ и врх у тачки Δ. А доказали смо да је пирамида којој је основа троугао BΓE и врх у тачки Δ једнака пирамиди којој је основа троугао ABΔ и врх у тачки Γ. Према томе је пирамида којој је основа троугао ΓEZ и врх у тачки Δ једнака пирамиди којој је основа троугао ABΔ и врх у тачки Γ. На овај је начин призма ABΓΔEZ подељена на три међу собом једнаке пирамиде са троугловима у основама.

И пошто је пирамида којој је основа троугао ABΔ и врх у тачки Γ иста са пирамидом којој је основа троугао ΓAB и врх у тачки Δ, јер су оне обухваћене истим равнима, а, како смо доказали, пирамида којој је основа троугао ABΔ и врх у тачки Γ је једна трећина призме којој је основа троугао ABΓ и наспрамни троугао ΔEZ, биће, према томе, пирамида којој је основа троугао ABΓ и врх у тачки Δ једна трећина призме којој је основа исти троугао ABΓ и наспрамни троугао ΔEZ.[9]

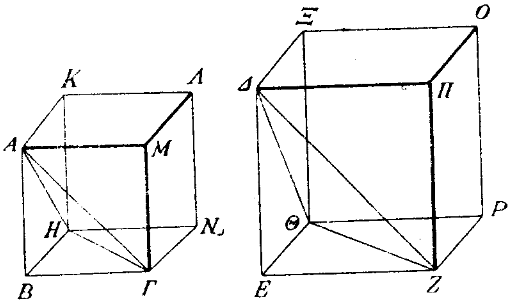
Последица

Одавде је јасно да је свака пирамида трећи део оне призме која има исту основу и исту висину [јер ако би призма имала као основу неку другу, сем троугла, праволиниску слику, као и наспрамну слику, та призма се може поделити на призме којима су основе троуглови и са наспрамним троугловима, и цела основа према свакој . . .]. А то је требало доказати.[10]

8.

Размера сличних пирамида којима су основе троуглови трипут је виша од размере хомологних ивица.

Нека су дате сличне и у сличном положају пирамиде којима су основе троуглови ΑΒΓ и ΔΕΖ и врхови у тачкама Η и Θ. Тврдим да је размера пирамиде ΑΒΓΗ према пирамиди ΔΕΖΘ трипут виша од размере ΒΓ према ΕΖ.



Заиста, допунимо паралелепипеде ΒΗΜΛ и ΕΘΠΟ. Пошто је пирамида ΑΒΓΗ слична пирамиди ΔΕΖΘ, биће угао ΑΒΓ једнак углу ΔΕΖ, угао ΗΒΓ углу ΘΕΖ и угао ΑΒΗ углу ΔΕΘ, и ΑΒ према ΔΕ као ΒΓ према ΕΖ и као ΒΗ према ΕΘ. А како је ΑΒ према ΔΕ као ΒΓ према ΕΖ, а то су пропорционални краци једнаких углова, биће паралелограм ΒΗ сличан паралелограму ΕΠ. Из истих разлога је и паралелограм ΒΝ сличан паралелограму ΕΡ, и ΒΚ—ΕΞ. На тај начин су три паралелограма ΒΜ, ΒΚ, ΒΝ слична трима паралелограмима ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ. Но три паралелограма ΒΜ, ΒΚ, ΒΝ су једнака и слична трима наспрамним паралелограмима, а исто тако су и три паралелограма ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ једнака и слична својим наспрамним. На тај начин су тела ΒΗΜΛ и ΕΘΠΟ обухваћена сличним равним површинама у истом броју. Према томе је тело ΒΗΜΛ слично телу ΕΘΠΟ. Но размера сличних паралелепипеда је трипут виша од размере хомологних ивица. На овај начин је тело ΒΗΜΛ према телу ΕΘΠΟ у трипут вишој размери од размере хомологне ивице

ВГ према хомологној ивици EZ. Али тело ВНМΛ је према телу EΘПО као пирамида ABГH према пирамиди ΔEZΘ, јер је пирамида шести део паралелепипеда, чија је половина, као призма, једнака утростру̂ченој пирамиди. И на тај начин је размера пирамиде ABГH према пирамиди ΔEZΘ трипут виша од размере ивице ВГ према ивици EZ. А то је требало доказати.

Последица

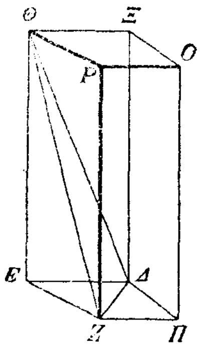
Из овог је јасно, да је и размера сличних пирамида којима су многоуглови у основама трипут више од размере хомологних ивица. Заиста, ако их поделимо на њихове пирамиде које имају троуглове у основама и то поделом сличних основа на сличне троуглове у истом броју и у сличном положају према целим пирамидама, биће једна пирамида којој је троугао у основи у једној целој пирамиди према једној пирамиди којој је троугао у основи у другој целој пирамиди као збир пирамида којима су троуглови у основи једне целе пирамиде према збиру пирамида којима су троуглови у основи друге целе пирамиде, тј. као једна пирамида са многоуглом у основи према другој пирамиди са многоуглом у основи. А како је размера пирамида којима су троуглови у основама трипут виша од размере хомологних ивица, биће и размера пирамида којима су слични многоуглови у основама трипут виша од размере хомологних ивица.[11]

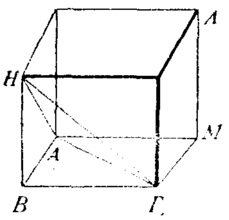
9.

Код једнаких пирамида које имају троуглове у основама основе су обрнуто пропорционалне висинама; и ако су код пирамида које имају троуглове у основама основе обрнуто пропорционалне висинама, пирамиде су једнаке.

Нека су дате једнаке пирамиде са троугловима ABГ и ΔEZ у основама и са врховима у тачкама H и Θ. Тврдим да су код пирамида ABГH и ΔEZΘ основе обрнуто пропорционалне висинама, тј. да је основа ABГ према основи ΔEZ као висина пирамиде ΔEZΘ према висини пирамиде ABГH.

Заиста, допунимо паралелепипеде ВНМΛ и EΘПО. Пошто је пирамида ABГH једнака пирамиди ΔEZΘ а тело ВНМΛ је шест пута веће од пирамиде ΑΒΓΗ и тело ΕΘΠΟ шест пута веће од пирамиде ΔΕΖΘ, биће тело ΒΗΜΛ једнако телу ΕΘΠΟ. Али су код једнаких паралелепипеда основе обрнуто пропорционалне висинама. Но основа ΒΜ је према ΕΠ као троугао ΑΒΓ према троуглу ΔΕΖ. Значи троугао ΑΒΓ се односи према троуглу ΔΕΖ као висина тела ΕΘΠΟ према висини тела ΒΗΜΛ. Али висина тела ΕΘΠΟ је једнака висини пирамиде ΔΕΖΘ и висина тела ΒΗΜΛ је једнака висини пирамиде ΑΒΓΗ. На тај начин се основа ΑΒΓ односи према основи ΔΕΖ као висина пирамиде ΔΕΖΘ према висини пирамиде ΑΒΓΗ. Према томе су код пирамида ΑΒΓΗ и ΔΕΖΘ основе обрнуто пропорционалне висинама.





Нека су сад код пирамиде ΑΒΓΗ и ΔΕΖΘ основе обрнуто пропорционалне висинама, тј. основа ΑΒΓ је према основи ΔΕΖ као висина пирамиде ΔΕΖΘ према висини пирамиде ΑΒΓΗ. Тврдим да је пирамида ΑΒΓΗ једнака пирамиди ΔΕΖΘ.

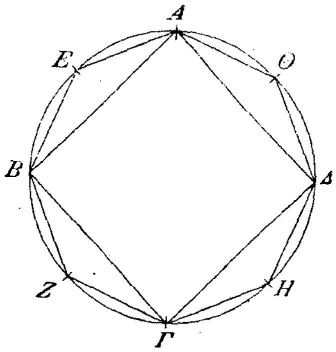
Заиста, после исте конструкције, пошто је основа ΑΒΓ према основи ΔΕΖ као и висина пирамиде ΔΕΖΘ према висини пирамиде ΑΒΓΗ, а основа ΑΒΓ је према основи ΔΕΖ као паралелограм ΒΜ према паралелограму ΕΠ, биће паралелограм ΒΜ према паралелограму ΕΠ као висина пирамиде ΔΕΖΘ према висини пирамиде ΑΒΓΗ. Но висина пирамиде ΔΕΖΘ је једнака висини паралелепипеда ΕΘΠΟ, а висина пирамиде ΑΒΓΗ је једнака висини паралелепипеда ΒΗΜΛ. Према томе је основа ΒΜ према основи ΕΠ као висина паралелепипеда ΕΘΠΟ према висини паралелепипеда ΒΗΜΛ. Али ако су код неких паралелопипеда основе обрнуто пропорционалне висинама, такви су паралелепипеди једнаки. Значи, паралелепипед ΒΗΜΛ једнак је паралелопипеду ΕΘΠΟ. А како је пирамнда ΑΒΓΗ шести део од ΒΗΜΛ, а пирамида ΔΕΖΘ шести део од паралелепипеда ΕΘΠΟ, биће и пирамида ΑΒΓΗ једнака пирамиди ΔΕΖΘ.

На тај начин, код једнаких пирамида које имају троуглове у основама основе су обрнуто пропорционалне висинама; и ако су код пирамида које имају троуглове у основама основе обрнуто пропорционалне висинама, пирамиде су једнаке. А то је требало доказати.[12]

10.

Свака купа (конус) је трећина ваљка (цилиндра), ако имају исту основу и једнаке висине.

Нека купа и ваљак имају исти круг ΑΒΓΔ за основу и једнаке висине. Тврдим да је купа трећина ваљка, тј. да је ваљак трипут већи од купе.



Заиста, ако ваљак није трипут већи од купе, он ће бити већи или више но трипута или мање но трипута. Нека прво буде већи више но трипута. Упишимо у круг ΑΒΓΔ квадрат ΑΒΓΔ. Тај квадрат је већи од половине круга ΑΒΓΔ. Конструишимо над квадратом ΑΒΓΔ призму са висином једнаком висини ваљка. Конструисана призма је већа од половине ваљка; јер, ако око круга ΑΒΓΔ опишемо квадрат, уписани квадрат је половина описаног, а тела конструисана над њима су призме једнаких висина. А како су призме једнаких висина у размери њихових основа, биће призма конструисана над квадратом ΑΒΓΔ једнака половини призме над квадратом описаним око круга ΑΒΓΔ. А како је ваљак мањи од призме конструисане над квадратом описаним око круга ΑΒΓΔ, биће призма конструисана над квадратом ΑΒΓΔ са висином једнаком висини ваљка већа од половине ваљка. Преполовимо кружне лукове ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ тачкама Ε, Ζ, Η, Θ и повуцимо ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ. Тада је сваки од троуглова ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ већи од половине отсечка круга ΑΒΓΔ, како смо раније доказали.

Конструишимо над сваким од троуглова ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ призму која има висину једнаку висини ваљка. Тада је и свака од конструисаних призама већа од половине отсечка ваљка, јер, ако кроз тачке Ε, Ζ, Η, Θ повучемо праве паралелне са ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ допунимо паралелограме на ΑΒ, ΒΓ ΓΔ, ΔΑ и над њима конструишемо паралелепипеде са висинама једнаким висини ваљка, половина сваког је призма конструисана над троугловима ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. И отсечци ваљка су мањи од конструисаних паралелепипеда. На тај начин су призме конструисане над троугловима ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ веће од половине отсечака. Ако преполовимо преостале кружне лукове, повучемо праве и конструишемо над сваким троуглом призму са висином ваљка, онда, поступајући тако непрекидно, добићемо на крају такве отсечке ваљка чији ће збир бити мањи од разлике ваљка и утростручене купе. Нека је то постигнуто са отсечцима ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ. Тада је преостала призма, са основом многоуглом ΑΕΒΖΓΗΔΘ и висином ваљка, већа од утростручене купе. Но призма којој је многоугао ΑΕΒΖΓΗΔΘ у основи и висина једнака висини ваљка једнака је трострукој пирамиди којој је многоугао ΑΕΒΖΓΗΔΘ основа и врх у врху купе. Према томе је пирамида којој је многоугао ΑΕΒΖΓΗΔΘ основа и врх у врху купе већа од купе са кругом ΑΒΓΔ у основи, али је она и мања, јер је она обухваћена купом. А то је немогуће. Према томе ваљак неће бити већи од утростручене купе.

Тврдим да ваљак неће бити ни мањи од утростручене купе.

Заиста, ако је могуће, нека ваљак буде мањи од утростручене купе; значи, обрнуто, купа је већа од трећине ваљка. Упишимо у круг ΑΒΓΔ квадрат ΑΒΓΔ. Тада је квадрат ΑΒΓΔ већи од половине круга ΑΒΓΔ. Конструишимо над квадратом ΑΓΒΔ пирамиду са врхом у врху купе. Конструисана пирамида је већа од половине купе, јер, како смо већ доказали, ако опишемо око круга квадрат, квадрат ΑΒΓΔ биће једнак половини квадрата описаног око круга. И ако на квадратима конструишемо паралелепипеде, који се зову и призме, са висинама једнаким висини купе, биће призма конструисана над квадратом ΑΒΓΔ половина призме конструисана над квадратом описаним око круга, јер су оне у размери једна према другој као основе. А у истој су размери и њихове трећине. Према томе је пирамида којој је квадрат ΑΒΓΔ у основи половина пирамиде конструисане над квадратом описаним око круга. А пирамида конструисана над квадратом описаним око круга је већа од купе, јер она купу обухвата. Према томе је пирамида којој је квадрат ΑΒΓΔ у основи и врх у врху купе већа од половине купе. Преполовимо кружне лукове ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ тачкама Ε, Ζ, Η, Θ и повуцимо ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; тада је сваки од троуглова ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ већи од половине одговарајућег отсечка круга. Сад конструишимо над сваким од троуглова ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ пирамиду са истим врхом као и купа. Свака од конструисаних пирамида биће, на основу изведених расуђивања, већа од половине одговарајућег отсечка купе. Ако преполовимо преостале кружне лукове, повучемо праве и конструишемо над сваким од троуглова пирамиду са врхом у врху купе, онда ћемо, тако поступајући непрестано, добити на крају такве отсечке купе, чији ће збир бити мањи од разлике купе и трећег дела ваљка. Нека је то постигнуто са отсечцима ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ. Тада је преостала пирамида, којој је многоугао ΑΕΒΖΓΗΔΘ у основи и врх у врху купе, већа од трећине ваљка. Али је пирамида којој је многоугао ΑΕΒΖΓΗΔΘ основа и врх у врху купе трећина призме којој је многоугао ΑΕΒΖΓΗΔΘ у основи и висина једнака висини ваљка. Према томе је призма којој је многоугао ΑΕΒΖΓΗΔΘ у основи и висина једнака висини ваљка већа од ваљка са кругом ΑΒΓΔ у основи. Али је она и мања, јер је ваљак обухвата. А то је немогуће. На овај начин ваљак неће бити мањи од утростручене купе. А доказано је да неће бити ни већи од утростручене купе. Према томе је ваљак утростручена купа, дакле купа је трећина ваљка.

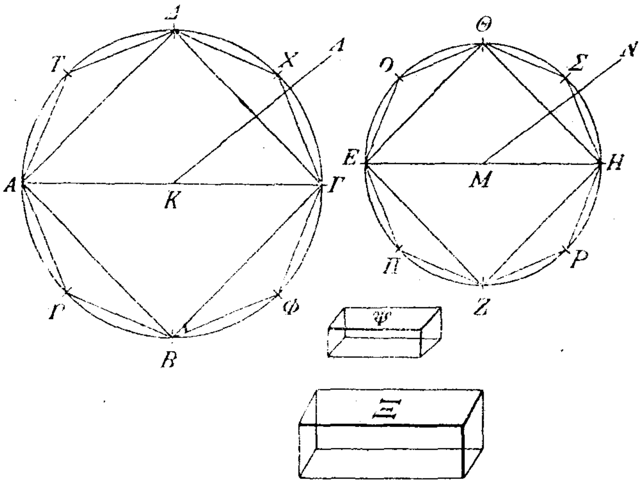
На овај начин је свака купа трећина ваљка, ако имају исту основу и једнаке висине. А то је требало доказати.[13]

11.

Купе и ваљци са истом висином односе се једно према другом, посебице, као основе.

Нека су дате купе и ваљци исте висине, њихове основе су кругови ΑΒΓΔ и ΕΖΗΘ, осе—ΚΛ, ΜΝ, пречници основа ΑΓ и ΕΗ. Тврдим, да се круг ΑΒΓΔ односи према кругу ΕΖΗΘ као купа ΑΛ према купи ΕΝ.

Заиста, ако није, нека је круг ΑΒΓΔ према кругу ΕΖΗΘ као купа ΑΛ према купи или мањој од купе ΕΝ или већој. Нека, прво, буде према мањој Ξ и нека је тело Ψ једнако разлици између купе ΕΝ и тела Ξ. Према томе је купа ΕΝ



једнака збиру тела Ξ и Ψ. Упишимо у круг ΕΖΗΘ квадрат ΕΖΗΘ. Према томе је тај квадрат већи од половине круга. Конструишимо над квадратом ΕΖΗΘ пирамиду са висином купе. На овај начин конструисана пирамида је већа од половине купе, јер, ако око круга опишемо квадрат и над њим конструишемо пирамиду са висином купе, биће уписана пирамида половина описане, пошто су оне у размери основа. А купа је мања од описане пирамиде. Преполовимо кружне лукове ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ тачкама Ο, Π, Ρ, Σ и повуцимо праве ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ. Према томе је сваки од троуглова ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ већи од половине одговарајућег кружног отсечка. Конструишимо над сваким од троуглова ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ пирамиду са висином једнаком висини купе. И тада је свака од конструисаних пирамида већа од половине одговарајућег отсечка купе. Ако преполовимо преостале кружне лукове, повучемо праве и конструишемо над сваким троуглом пирамиду са висином једнаком висини купе, добићемо, тако поступајући непрекидно, отсечке купе, чији је збир мањи од тела Ψ. Нека је то постигнуто са ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ. Према томе је преостала пирамида, којој је многоугао ΘΟΕΠΖΡΗΣ основа, висина једнака висини купе, већа од тела Ξ. Упишимо и у круг ΑΒΓΔ многоугао ΔΤΑΥΒΦΓΧ, сличан и у сличном положају са многоуглом ΘΟΕΠΖΡΗΣ, и конструишимо над њим пирамиду са висином купе ΑΛ. Пошто је сад квадрат на ΑΓ према квадрату на ΕΗ као многоугао ΔΤΑΥΒΦΓΧ према многоуглу ΘΟΕΠΖΡΗΣ, а квадрат на ΑΓ је према квадрату на ΕΗ као круг ΑΒΓΔ према кругу ΕΖΗΘ, биће круг ΑΒΓΔ према кругу ΕΖΗΘ као многоугао ΔΤΑΥΒΦΓΧ према многоуглу ΘΟΕΠΖΡΗΣ. Али круг ΑΒΓΔ је према кругу ΕΖΗΘ као купа ΑΛ према телу Ξ, а многоугао ΔΤΑΥΒΦΓΧ према многоуглу ΘΟΕΠΖΡΗΣ као пирамида којој је многоугао ΔΤΑΥΒΦΓΧ основа и врх у тачки Λ према пирамиди којој је многоугао ΘΟΕΠΖΡΗΣ основа и и врх у тачки Ν. И на тај начин је купа ΑΛ према телу Ξ као пирамида којој је многоугао ΔΤΑΥΒΦΓΧ основа и врх у тачки Λ према пирамиди којој је многоугао ΘΟΕΠΖΡΗΣ основа и врх у тачки Ν. На тај начин, после промене реда, купа ΑΛ се односи према пирамиди у њој као тело Ξ према пирамиди у купи ΕΝ. Но купа ΑΛ је већа од пирамиде у њој. Па према томе је и тело Ξ веће од пирамиде у купи ΕΝ. А оно је мање. А то је бесмислено. И тако се круг ΑΒΓΔ не односи према кругу ΕΖΗΘ као купа ΑΛ према телу мањем од купе ΕΝ. Слично се доказује да се ни круг ΕΖΗΘ не односи према кругу ΑΒΓΔ као купа ΕΝ према телу мањем од купе ΑΛ.

Тврдим да се ни круг ΑΒΓΔ неће односити према кругу ΕΖΗΘ као купа ΑΛ према телу већем од купе ΕΝ.

Заиста, ако је могуће, нека буде према већем телу Ξ. Значи, обрнуто: круг ΕΖΗΘ је према кругу ΑΒΓΔ као тело Ξ према купи ΑΛ. Но тело Ξ је према купи ΑΛ као купа ΕΝ према телу мањем од купе ΑΛ. И према томе је круг ΕΖΗΘ према кругу ΑΒΓΔ као купа ΕΝ према телу мањем од купе АΛ. А ово је, како смо доказали, немогуће. На тај начин не односи се круг ΑΒΓΔ према кругу ΕΖΗΘ као купа ΑΛ према телу већем од купе ΕΝ. А доказано је да се не односи ни према мањем. Према томе је круг ΑΒΓΔ према кругу ΕΖΗΘ као купа ΑΛ према купи ΕΝ.

Но купа је према купи као ваљак према ваљку, јер је свако трипут већи од сваког. И према томе се круг ΑΒΓΔ односи према кругу ΕΖΗΘ као и ваљци конструисани над њима, са једнаким висинама (са купама).

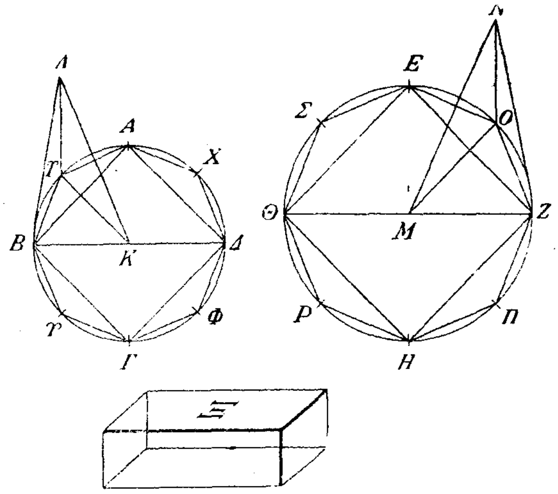
На овај начин, купе и ваљци са истом висином односе се једно према другом, посебице, као основе. А то је требало доказати.[14]

12.

Сличне купе међу собом и слични ваљци међу собом су у размери трипут вишој од размере пречника њихових основа.

Нека су дате сличне купе и слични ваљци чије су основе кругови ΑΒΓΔ и ΕΖΗΘ, пречници ΒΔ и ΖΘ, а осе купа и ваљака ΚΛ и ΜΝ. Тврдим да је купа којој је основа круг ΑΒΓΔ и врх у тачки Λ према купи којој је основа круг ΕΖΗΘ и врх у тачки Ν у размери трипут вишој од размере ΒΔ према ΖΘ.

Заиста, ако купа ΑΒΓΔΛ није према купи ΕΖΗΘΝ у размери трипут вишој од размере ΒΔ према ΖΘ, биће онда купа ΑΒΓΔΛ у размери трипут вишој или према телу мањем од купе ΕΖΗΘΝ или према већем телу. Нека, прво, буде према мањем телу Ξ. Упишимо у круг ΕΖΗΘ квадрат ΕΖΗΘ. Тада је квадрат ΕΖΗΘ већи од половине круга ΕΖΗΘ. И конструишимо над квадратом ΕΖΗΘ пирамиду са врхом у врху купе. Конструисана пирамида је већа од половине купе. Преполовимо кружне лукове ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ тачкама Ο, Π, Ρ, Σ и повуцимо праве ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ. Сваки од троуглова ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ је мањи од половине одговарајућег отсечка круга. Сад конструишимо над сваким од троуглава ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ пирамиду са врхом у врху купе. И свака од конструисаних пирамида је већа од половине одговарајућег отсечка купе. Ако преполовимо преостале кружне лукове, повучемо праве и конструишемо над сваким троуглом пирамиду са врхом у врху купе, онда ћемо, поступајући тако непрестано, добити на крају отсечке купе чији ће збир бити мањи од разлике купе EZHΘN и тела Ξ. Нека је то постигнуто са EO, OZ, ZΠ, ΠH, HP, PΘ, ΘΣ. ΣE. Тада је преостала пирамида којој је многоугао EOZΠHPΘΣ у основи и



врх у тачки N већа од тела Ξ. Упишимо и у круг ABΓΔ многоугао ATBΥΓΦΔX сличан и у сличном положају са многоуглом EOZΠHPΘΣ, и конструишимо над многоуглом ATBΥΓAΔX пирамиду са врхом у врху купе, и нека је ΛBT један од троуглова бочне површине пирамиде којој је многоугао ATBΥΓΦΔX у основи и врх у тачки Λ, а NZO један од троуглова бочне површине пирамиде којој је многоугао EOZΠHPΘΣ у основи и врх у тачки N, и повуцимо KT и MO. Пошто је купа ABΓΔΛ слична купи EZHΘN, биће BΔ према према ZΘ као оса KΛ према оси MN. И BΔ је према ZΘ као BK према ZM. И према томе је BK према ZM као KΛ према MN. Но краци једнаких углова су пропорционални, према томе је троугао BKΛ сличан троуглу ZMN. Затим, пошто је BK према KT као ZM према MO и то су краци једнаких углова BKT, ZMO, јер је угао BKT исти део од четири права угла код центра K, који је и угао ZMO од четири права угла код центра M. Пошто су сад код једнаких углова краци пропорционални, биће троугао BKT сличан троуглу ZMO. Затим, пошто је доказано да је BK према KΛ као ZM према MN, BK једнако KT, а ZM—OM, онда је TK према KΛ као OM према MN. И то је код једнаких углова TKΛ и OMN, јер су они прави. Како су стране пропорционалне, троугао ΛKT је сличан троуглу NMO. И пошто је, због сличности троуглова BKT и ZMO, KB према BT као MZ према ZO. Затим, пошто је, због сличности троуглова ΛTK, NOM, ΛT према TK као NO према OM и, због сличности троуглова TKB и OMZ, KT је према TB као MO према OZ, биће, због једнакоудаљености, ΛT према TB као NO према OZ. А доказали смо да је и TB према BΛ као OZ према ZN. На тај начин, због једнакоудаљености, TΛ је према ΛB као ON према NZ. Према томе су стране троуглова ΛTB и NOZ пропорционалне. Значи троуглови ΛTB и NOZ имају једнаке углове, те су према томе слични. На тај начин је пирамида којој је троугао BKT у основи и врх тачки Λ слична пирамиди којој је троугао ZMO у основи и врх у тачки N, јер су оне обухваћене сличним равнима у истом броју. Али је размера сличних пирамида које имају троуглове у основама трипут виша од размере хомологних ивица. Према томе је размера пирамиде BKTΛ према пирамиди ZMON трипут виша од размере BK према ZM. На сличан начин, ако повучемо праве из A, X, Δ, Φ, Γ, ϒ ка K из E, Σ, Θ, P, H, Π ка M и конструишемо над свим троугловима пирамиде са врховима у врху купа, може се доказати да је размера сваке од пирамида према свакој пирамиди у сличном положају виша од размере ивице BK према хомологној ивици ZM, тј. размере BΔ према ZΘ. И пошто је један претходни према једном наредном као збир свих претходних према збиру свих наредних, биће пирамида BKTΛ према пирамиди ZMON као цела пирамида којој је многоугао ATBϒΓΦΔX у основи и врх у тачки Λ према целој пирамиди којој је многоугао EOZΠHPΘΣ у основи и врх у тачки N. Према томе је размера пирамиде којој је многоугао ATBϒΓΦΔX у основи и врх у тачки Λ према пирамиди којој је многоугао EOZΠHPΘΣ у основи и врх у тачки N трипут виша од размере BΔ према ZΘ. А претпоставља се да је и размера купе којој је круг ABΓΔ у основи и врх у тачки Λ према телу Ξ трипут виша од размере ΒΔ према ΖΘ. На овај начин је купа којој је круг ΑΒΓΔ у основи и врх у тачки Λ према телу Ξ као пирамида којој је многоугао ΑΤΒΥΓΦΔΧ основи и врх у тачки Λ према пирамиди којој је многоугао ΕΟΖΠΗΡΘΣ у основи и врх у Ν. Или, после промене реда, купа којој је круг ΑΒΓΔ у основи и врх у Λ се односи према својој пирамиди којој је многоугао ΑΤΒΥΓΦΔΧ у основи и врх у тачки Λ као тело Ξ према пирамиди којој је многоугао ΕΟΖΠΗΡΘΣ у основи и врх у Ν. Али поменута купа је већа од пирамиде, јер је обухвата. Према томе и тело Ξ је веће од пирамиде којој је многоугао ΕΟΖΠΗΡΘΣ у основи и врх у Ν. Но оно је и мање. А то је немогуће. На овај начин купа којој је круг ΑΒΓΔ у основи и врх у Λ неће бити у размери према неком телу мањем од купе којој је круг ΕΖΗΘ у основи и врх у Ν у трипут вишој размери од размере ΒΔ према ΖΘ. Слично се доказује да и купа ΕΖΗΘΝ неће бити према телу мањем од купе ΑΒΓΔΛ у размери трипут вишој од размере ΖΘ према ΒΔ.

Тврдим да купа ΑΒΓΔΛ неће бити ни према телу већем од купе ΕΖΗΘΝ у размери трипут вишој од размере ΒΔ према ΖΘ.

Заиста, ако је то могуће, нека буде према већем телу Ξ. Према томе, обрнуто, тело Ξ је према купи ΑΒΓΔΛ у размери трипут вишој од размере ΖΘ према ΒΔ. Тело Ξ је је према купи ΑΒΓΔΛ као купа ΕΖΗΘΝ према телу мањем од купе ΑΒΓΔΛ. Дакле, купа ΕΖΗΘΝ је према телу мањем од купе ΑΒΓΔΛ у размери трипут вишој од размере ΖΘ према ΒΔ. А доказано је да је то немогуће. Према томе купа ΑΒΓΔΛ према телу већем од купе ΕΖΗΘΝ није у размери трипут вишој од размере ΒΔ према ΖΘ. А доказано је да није ни према мањем телу. На овај начин купа ΑΒΓΔΛ је према купи ΕΖΗΘΝ у размери трипут вишој од размере ΒΔ према ΖΘ.

Али купа према купи је као ваљак према ваљку, јер је ваљак трипут већи од купе са истом основом и висином. Према томе је и ваљак према ваљку у размери трипут вишој од размере ΒΔ према ΖΘ.

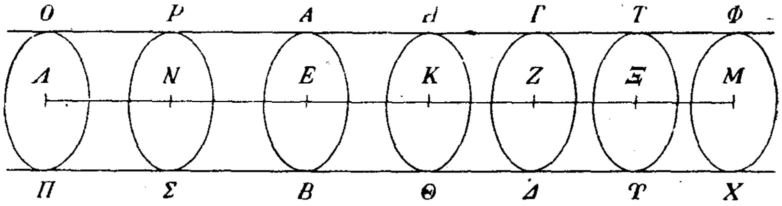
На овај начин, сличне купе међу собом и слични ваљци међу собом су у размери трипут вишој од размере пречника њихових основа. А то је требало доказати.[15]

13.

Ако је ваљак пресечен неком равни паралелном са наспрамним равнима, односиће се оса према оси као ваљак према ваљку.

Нека је ваљак AΔ пресечен са равни HΘ, која је паралелна са наспрамним равнима AB и ΓΔ, и нека раван HΘ сече осу у тачки K. Тврдим да је ваљак BH према ваљку HΔ као оса EK према оси KZ.

Заиста, продужимо осу EZ на обе стране до тачака Λ и M, одмеримо неколико дужи EN, NΛ једнаких EK, и неколико дужи ZΞ, ΞM једнаких ZK, и замислимо на оси ΛM ваљак OX коме су кругови OΠ и ΦX основе. Па кроз тачке



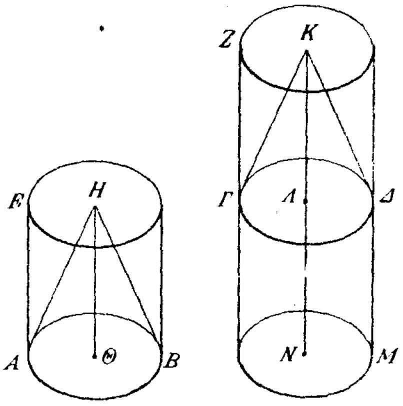
N и Ξ конструишимо равни паралелне са AB и ΓΔ и са основама ваљка OX и добићемо кругове PΣ и TΥ са центрима N и Ξ. Пошто су осе ΛN, NE, EK једнаке међу собом, односиће се ваљци ΠP, PB, BH међу собом као основе. Али и основе су једнаке. Према томе су и ваљци ΠP, PB, BH једнаки међу собом. Пошто су сад осе ΛN, NE, EK једнаке међу собом, а и ваљци ΠP, PB, BH међу собом, и број једних једнак је броју других, биће оса KΛ исти мултиплум осе EK који је и ваљак ΠH мултиплум ваљка HB. Из истих разлога је и оса MK исти мултиплум осе KZ који је, и ваљак XH ваљка HΔ. И ако је оса KΛ једнака оси KM, биће и ваљак ΠH једнак ваљку HX, ако је оса већа од осе, биће и ваљак већи од ваљка, и ако је мања, биће мањи. Од четири величине, наиме две осе EK и KZ, и два ваљка BH и HΔ, начињени су исти мултиплуми, од осе EK и од ваљка BH, оса ΛK и ваљак ΠH, а од осе KZ и од ваљка HΔ—оса KM и ваљак HX, и доказано је да ће, ако је оса KΛ већа од осе KM, бити и ваљак ΠH већи од ваљка HX, ако је једнака, једнаки, а ако је мања, мањи. На овај начин се оса ЕК односи према оси KZ као ваљак ВН према ваљку НΔ. А то је трабало доказати.[16]

14.

Купе и ваљци са једнаким основама су у размери висина.

Нека ваљци ЕВ и ZΔ имају једнаке кружне основе АВ и ГΔ. Тврдим да је ваљак ЕВ према ваљку ZΔ као и оса НΘ према оси КΛ.

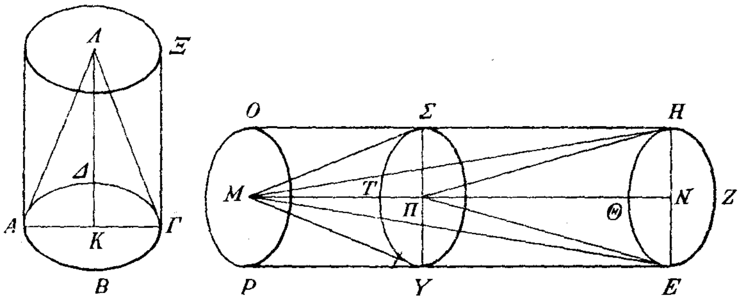
Заиста, продужимо осу КΛ према тачки N, одмеримо дуж ΛN једнаку оси НΘ и замислимо око осе ΛN ваљак ГМ. Пошто су сад ваљци ЕВ и ГМ исте висине, они су у размери основа, а ако су основе једнаке, и ваљци ЕВ и ГМ су једнаки. И како је ваљак ZM пресечен равни ГΔ, која је паралелна са наспрамним равнима, биће ваљак ГМ према ваљку ZΔ као оса ΛN према оси КΛ. Но ваљак ГМ једнак је ваљку ЕВ, а оса ΛN оси НΘ. Према томе је ваљак ЕВ према ваљку ZΔ као оса НΘ према оси КΛ. Али је ваљак ЕВ према ваљку ZΔ као купа АВН према купи ГΔК. На овај начин је оса НΘ према оси КΛ као купа АВН према купи ГΔК и као ваљак ЕВ према ваљку ZΔ. А то је требало доказати.[17]



15.

Код једнаких купа и ваљака основе су обрнуто пропорционалне висинама. Купе и ваљци, код којих су основе обрнуто пропорционалне висинама, једнаки су.

Нека су дате једнаке купе и једнаки ваљци, који имају кругове АВГΔ и ЕZНΘ у основама, и пречнике АГ и ЕН, а осе КΛ и МN, које су и висине купа и ваљака, па допунимо ваљке AΞ и EO. Тврдим да су код ваљка AΞ и EO основе обрнуто пропорционалне висинама, тј. основа ABΓΔ је према основи EZHΘ као висина MN према висини KΛ.



Заиста, висина ΛK је или једнака висини MN или није. Нека је, прво, једнака. Но и ваљак AΞ једнак је ваљку EO. Али купе и ваљци са истом висином су у размери међу собом као основе. Према томе је и основа ABΓΔ једнака основи EZHΘ. И обрнуто, основа ABΓΔ према основи EZHΘ је као висина MN према висини KΛ.

Нека међутим висина ΛK не буде једнака висини MN, већ ова, MN, већа. Одузмимо од MN висину ΠN, једнаку KΛ, и пресецимо ваљак EO са равни TΣΥ кроз тачку Π, равни која је паралелна са равнима - EZHΘ и круга PO - и над кругом EZHΘ као основом замислимо ваљак EΣ са висином NΠ. Пошто је ваљак AΞ једнак ваљку EO, биће ваљак AΞ према ваљку EΣ као ваљак EO према ваљку EΣ. Но ваљак AΞ је према ваљку EΣ као основа ABΓΔ према основи EZHΘ, јер ваљци AΞ и EΣ имају исту висину. Но ваљак EO је према ваљку EΣ као висина MN према висини ΠN, јер је ваљак EO пресечен са равни која је паралелна са наспрамним равнима. Према томе је основа ABΓΔ према основи EZNΘ као висина MN према висини ΠN. Али је висина ΠN једнака висини KΛ. Дакле, основа ABΓΔ је према основи EZNΘ као висина MN према висини KΛ. На овај начин су код ваљака AΞ и EO основе обрнуто пропорционалне висинама.

Нека су сад код ваљака AΞ и EO основе обрнуто пропорционалне висинама, тј. основа ABΓΔ је према основи EZNΘ као висина EN према висини KΛ. Тврдим да је ваљак AΞ једнак ваљку EO.

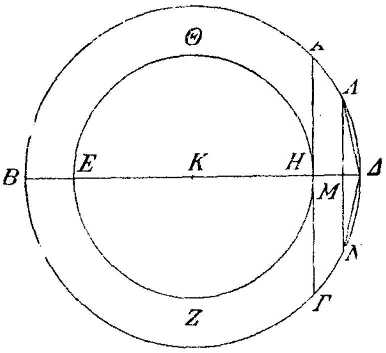
Заиста, после истих конструкција закључујемо, да ће се, пошто је основа ABΓΔ према основи EZHΘ као висина MN према висини KΛ, а висина KΛ једнака висини ΠN, основа ABΓΔ односити према основи EZHΘ као висина MN према висини ΠN. Али основа ABΓΔ је према основи EZHΘ као ваљак AΞ према ваљку EΣ, јер су они са истом висином. И висина MN је према висини ΠN као ваљак EO према ваљку EΣ. Према томе је ваљак AΞ према ваљку EΣ као ваљак EO према ваљку EΣ. На овај начин је ваљак AΞ једнак ваљку EO. Исто и са купама. А то је требало доказати.[18]

16.

Ако су дата два круга са истим центрима, уписати у већи круг једнакострани многоугао, са парним бројем страна, који не додирује мањи круг.

Нека су дата два круга ABΓΔ и EZHΘ са истим центром K. Треба у већи круг ABΓΔ уписати једнакострани многоугао са парним бројем страна који не додирује круг EZHΘ.

Повуцимо кроз центар K праву BKΔ, а кроз тачку H праве BΔ повуцимо, под правим углом, праву HA и продужимо је до Γ. Права AΓ је, према томе, тангента круга EZHΘ. Преполовимо лук BAΔ и његову половину поново преполовимо; поступајући тако стално, добићемо лук мањи од AΔ. Нека је то постигнуто и нека то буде ΛΔ; и из тачке Λ спустимо на BΔ нормалу ΛM и продужимо до N, и повуцимо ΛΔ и ΔN; тада је ΛΔ једнако ΔN. Пошто је ΛN паралелна са AΓ, а AΓ тангента круга EZHΘ права ΛN неће додиривати круг EZHΘ. Утолико пре дужи ΛΔ, ΔN неће додиривати круг EZHΘ. Према томе, ако у кругу ABΓΔ почнемо цртати праве једнаке ΛΔ, биће у круг ABΓΔ уписан



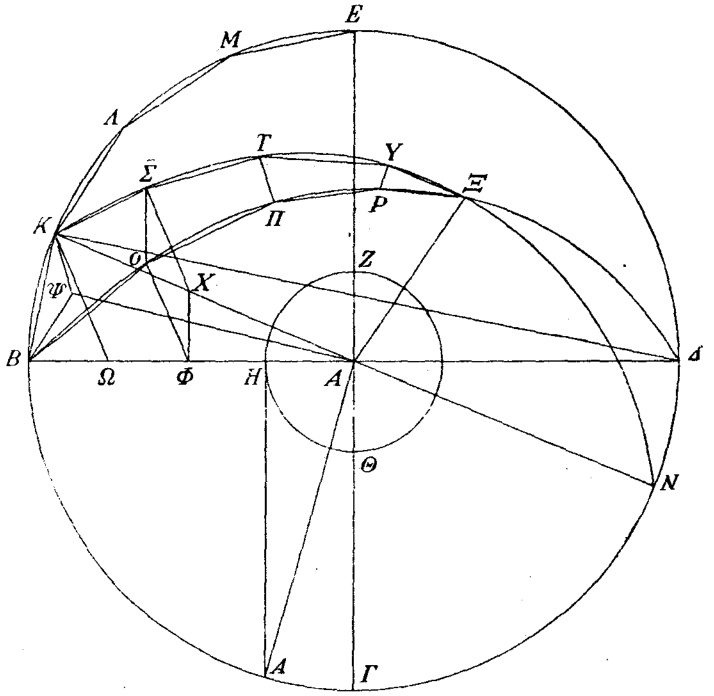
једнакостран многоугао, са парним бројем страна, који не додирује мањи круг ΕΖΗΘ. А то је требало извести.[19]

17.

Ако су дате две сфере са истим центром, уписати у већу сферу полиједарско тело које не додирује површину мање сфере.

Нека су дате две сфере са истим центром А. Треба у већу сферу уписати полиједарско тело које не додирује површину мање сфере.

Пресецимо ове сфере неком равни кроз центар. Тада су пресеци кругови, јер се сфера добива обртањем полукруга око непомичног пречника, те тако ма у ком положају ми



замислимо тај полукруг, раван кроз исти даје круг на површини сфере. И јасно је да је тај круг највећи могући, јер је пречник сфере, који је у исто време пречник и полусфере, а природно, и круга, највећа дуж која може да стане у круг или у сферу. Нека сад BΓΔE буде круг веће сфере, а ZHΘ круг мање сфере; повуцимо два пречника BΔ и ΓE, управна један на други. То су два круга са истим центром, BΓΔE и ZHΘ па упишимо у већи круг BΓΔE једнакострани многоугао са парним бројем страна, који не додирује мањи круг ZHΘ. Нека су BK, KΛ, ΛM, ME његове стране у квадранту BE; па повуцимо праву KA, продужимо до N, затим из тачке A повуцимо нормалу AΞ на раван круга BΓΔE и нека ова сече површину сфере у тачки Ξ, па кроз AΞ и сваку од BΔ и KN конструишимо равни. Оне ће на површини сфере образовати велике кругове. Узмимо да образују оне кругове којима припадају полукругови BΞΔ и KΞN на пречницима BΔ и KN. Пошто је ΞA управна на равни круга BΓΔE и свака раван кроз ΞA је управна на равни круга BΓΔE, биће и полукругови BΞΔ и KΞN управни на равни круга BΓΔE. А како су BEΔ, BΞΔ и KΞN једнаки полукругови, јер су на једнаким пречницима BΔ и KN, биће једнаки међу собом и квадранти BE, BΞ и KΞ. И према томе колико је страна многоугла у квадранту BE, толико ће бити дужи једнаких BK, KΛ, ΛM, ME у једнаким квадрантима BΞ и KΞ. Упишимо и нацртајмо BO, OΠ, ΠP, PΞ, KΣ, ΣT, TY, YΞ, затим спојимо ΣO, TΠ, YP, па из тачака O и Σ спустимо нормале на раван круга BΓΔE. Оне ће пасти на BΔ и на KN, што су пресеци равни, јер су равни BΞΔ и KΞN управне на равни круга BΓΔE. Нека то буду нормале OΦ и ΣX, па повуцимо XΦ. И пошто су на једнаким полукруговима, BΞΔ и KΞN, одмерени једнаки лукови, BO и KΣ, и повучене нормале OΦ и ΣX, биће OΦ једнако ΣX и BΦ једнако KX. А пошто је цело BA једнако целом KA, биће и остатак ΦA једнак остатку XA. Према томе је BΦ према ΦA као KX према XA и XΦ је паралелно са KB. А пошто је свако од OΦ и ΣX управно на равни круга BΓΔE, биће OΦ паралелно ΣX. А доказано је и да је једно другом једнако. Према томе су XΦ и ΣO међу собом једнаки и паралелни. И пошто је XΦ паралелно ΣO, а XΦ је паралелно KB, онда је и ΣO паралелно KB. Сад повуцимо BO и KΣ. Тада је KBOΣ раван четвороугао, јер, ако постоје две паралелне праве и на свакој од њих су узете две произвољне тачке, две праве, које спајају те тачке, биће у равни паралелних правих. Из истих разлога је и сваки од четвороуглова ΣОПТ и ТПРΥ у равни. А и троугао ΥРΞ је у равни. Ако замислимо праве што спајају тачку А са тачкама О, Σ, П, Т, Р, Υ, онда се образује нека полиједарска фигура која се налази између лукова ВΞ и КΞ и која је образована од пирамида које имају у основама четвороуглове КВОΣ, ΣОПТ, ТПРΥ и троугао ΥРΞ, а врх у тачки А. Ако на свакој од страна КΛ, ΛМ, МЕ извршимо исте конструкције као и на ВК, а исто тако и у осталим трима квадрантима, добива се фигура полиједра уписаног у сферу и састављеног од пирамида са четвороугловима и троуглом ΥРΞ у основама, а такође и од основа у сличном положају са њима, и са врхом у тачки А.

Тврдим да наведени полиједар неће додиривати површину мање сфере на чијој је површини круг ΖΗΘ.

Из тачке А спустимо нормалу АΨ на раван четвороугла КВОΣ и нека она продире ту раван у тачки Ψ, па повуцимо ΨВ и ΨК. Пошто је АΨ нормала на равни четвороугла КВОΣ, она ће бити управна и на свакој правој у тој равни која је сече. Према томе је АΨ управна и на свакој од правих ВΨ и ΨК. И пошто је АВ једнако АК, биће и квадрат на АВ једнак квадрату на АК. Но квадрат на АВ једнак је збиру квадрата на АΨ и на ΨВ, јер је угао код Ψ прав. И квадрат на АК једнак је збиру квадрата АΨ и на ΨК. Значи збир квадрата на АΨ и ΨВ једнак је збиру квадрата на АΨ и на ΨК. Одузимамо заједнички квадрат на АΨ. Тада је и преостали квадрат на ВΨ једнак преосталом квадрату на ΨК. Значи и ВΨ једнако је ΨК. На сличан начин се доказује да су и праве повучене из Ψ у О и у Σ једнаке свакој од правих ВΨ и ΨК. Према томе круг коме је центар у Ψ и дужи ΨВ и ΨК као полупречници проћи ће и кроз тачке О и Σ, а четвороугао КВОΣ биће у кругу.

И пошто је КВ веће од ХΦ, а ХΦ је једнако ΣО, веће је и КВ од ΣО. Но КВ је једнако и КΣ и ВО. Према томе је и свако од КΣ и ВО веће од ΣО. И пошто је четвороугао КВОΣ у кругу, дужи КВ, ВО, КΣ су једнаке, а ОΣ је мање и ВΨ је полупречник, биће квадрат на КВ већи од удвострученог квадрата на ВΨ. Повуцимо из К нормалу КΩ на ВΦ. Сад пошто је ВΔ мање од двоструког ΔΩ, и ВΔ је према ΔΩ као правоугаоник од ΔВ и ВΩ према правоугаонику од ΔΩ и ΩВ, онда ће, кад се на ВΩ конструише квадрат и допуни паралелограм на ΩΔ, правоугаоник од ΔВ и ВΩ бити мањи од двоструког правоугаоника од ΔΩ и ΩВ. И ако се повуче КΔ, биће правоугаоник од ΔВ и ВΩ једнак квадрату на ВК и правоугаоник од ΔΩ и ΩВ једнак квадрату на КΩ. И према томе је квадрат на КВ мањи од удвострученог квадрата на ВΩ. Али квадрат на КВ је већи од удвострученог квадрата на ВΨ, па је према томе и квадрат на КΩ већи од квадрата на ВΨ. Но како је ВА једнако КА, биће и квадрат на ВА једнак квадрату на АК. И збир квадрата на ВΨ и на ΨА једнак је квадрату на ВА, а збир квадрата на КΩ и на ΩА квадрату на КА, па је према томе збир квадрата на ВΨ и на ΨА једнак збиру квадрата на КΩ и на ΩА, али квадрат на КΩ је већи од квадрата на ВΨ. Значи, преостали квадрат на ΩА мањи је од квадрата на ΨА. Због тога је АΨ веће од АΩ. Тим пре је АΨ веће од АН. И АΨ је нормала спуштена на једну од основа полиједара, а АН је нормала повучена према површини мање сфере. Према томе полиједар не додирује површину мање сфере.

На овај начин, за две сфере са истим центром у већу сферу је уписано полиједарско тело које не додирује површину мање сфере. А то је требало извести.[20]

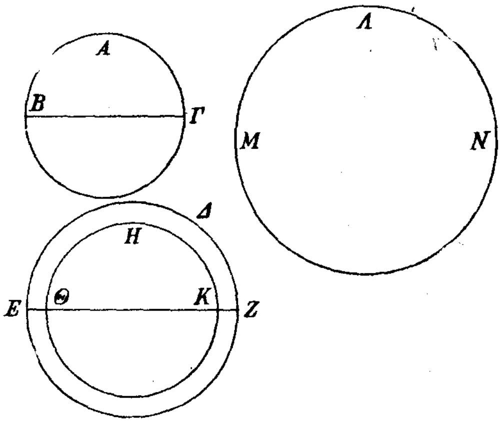
Последица

Ако се и у другу сферу упише полиједарско тело слично полиједарском телу уписаном у сферу ВГΔЕ, биће размера полиједарског тела уписаног у сферу ВГΔЕ према полиједарском телу уписаном у другу сферу трипут виша од размере пречника сфере ВГΔЕ према пречнику друге сфере. Заиста, ако поделимо оба тела на исти број пирамида са сличним распоредом, биће пирамиде сличне. Но размера сличних пирамида је трипут виша од резмере хомологних ивица. Према томе је размера пирамиде којој је основа КВОΣ и врх у тачки А према пирамиди која има сличан положај у другој сфери трипут виша од размере хомологне ивице према хомологној ивици, тј. полупречника AB сфере којој је центар у A према полупречнику друге сфере. Слично томе је и размера сваке пирамиде у сфери којој је центар у A према пирамиди која има сличан положај у другој сфери је трипут виша од размере AB према полупречнику друге сфере. Али како је један од претходних према одговарајућем наредном, тако је и збир свих претходних према збиру свих наредних. Због тога је размера целог полиједарског тела уписаног у сферу којој је центар у A према целом полиједарском телу уписаном у другу сферу трипут виша од размере AB према полупречнику друге сфере, тј. пречника BΔ према пречнику друге сфере. A то је требало извести.[21]

18.

Размера једне лопте према другој је трипут виша од размере њихових пречника.

Замислимо лопте AВΓ и ΔEZ; нека су им пречници ВΓ и EZ. Тврдим да је размера лопте AВΓ према лопти ΔEZ трипут виша од размере ВΓ према EZ.



Заиста, ако размера лопте AВΓ према лопти ΔEZ није трипут виша од размере ВΓ према EZ, биће размера лопте AВΓ трипут виша од размере ВΓ према EZ или према лопти мањој од лопте ΔEZ или према већој. Нека буде, прво, према мањој, наиме према HΘK. Замислимо лопте ΔEZ и HΘK око истог центра. Упишимо у већу лопту ΔEZ полиједарско тело тело које не додирује површину мање лопте HΘK. Упишимо и у лопту AВΓ полиједарско тело слично полиједарском телу уписаном у лопту ΔEZ. Тада је размера полиједарског тела уписаног у лопту AВΓ према полијадарском телу уписаном у лопту ΔΕΖ трипут виша од размере ΓΒ према ΕΖ. Али и размера лопте ΑΒΓ према лопти ΗΘΚ је трипут виша од размере ΒΓ према ΕΖ. Према томе се лопта ΑΒΓ односи према лопти ΗΘΚ као полиједарско тело уписано у лопту ΑΒΓ према полиједарском телу уписаном у лопту ΔΕΖ. После промене реда, лопта ΑΒΓ се односи према њеном полиједру као лопта ΗΘΚ према полиједарском телу уписаном у лопту ΔΕΖ. И лопта ΑΒΓ је већа од њеног полиједра. Већа је према томе и лопта ΗΘΚ од полиједра у лопти ΔΕΖ. Али је и мања, јер је она њиме обухваћена. Значи, лопта ΑΒΓ није према мањој лопти ΔΕΖ у размери трипут вишој од размере пречника ΒΓ према ΕΖ. Слично се доказује да ја лопта ΔΕΖ према лопти мањој од лопте ΑΒΓ у размеру трипут вишој од размере ΕΖ према ΒΓ.

Тврдим да лопта ΑΒΓ није ни према лопти већој од лопте ΔΕΖ у трипут вишој размери од размере ΒΓ према ΕΖ.

Заиста, ако је могуће, нека буде према већој ΛΜΝ. Значи, обрнуто: лопта ΛΜΝ је према лопти ΑΒΓ у трипут вишој размери од размере пречника ΕΖ према пречнику ΒΓ. Али се лопта ΛΜΝ односи према лопти ΑΒΓ као лопта ΔΕΖ према некој мањој лопти од лопте ΑΒΓ, пошто је лопта ΛΜΝ, како је раније доказано, већа од лопте ΔΕΖ. На овај начин лопта ΔΕΖ се односи према лопти мањој од лопте ΑΒΓ у трипут вишој размери од размере ΕΖ према ΒΓ. А доказано је да је то немогуће. Према томе лопта ΑΒΓ није према лопти већој од лопте ΔΕΖ у размери трипут вишој од размере ΒΓ према ΕΖ. А доказано је да није ни према мањој.

На овај начин лопта ΑΒΓ је према лопти ΔΕΖ у размери трипут вишој од размере ΒΓ према ΕΖ. А то је требало доказати.[22]

КОМЕНТАР

[1] Ова стереометриска књига почиње са две планиметриске теореме. У првој, коју треба сматрати као лему за другу, доказује се једнакост размере површина сличних многоуглова, уписаних у кругове, са размером квадрата пречника тих кругова; у другој се са том истом размером квадрата пречника изједначује размера површина самих кругова.

Било би природније да је та прва теорема била стављена у шесту планиметриску књигу, заједно са другим (4, 5, 6, 7, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 31) теоремама о сличним многоугловима, јер је она непосредни закључак 20. теореме те књиге. Али Еуклид је дао већу важност другој страни ове теореме. Она чини део оног комплекса теорема, које су везане за методу ексхаустије (исцрпљивања), а та метода је логичка срж дванаесте књиге. Тако је и ова прва, у суштини планиметриска теорема, дошла у ову стереометриску књигу.

[2] Анализирајмо доказ ове теореме.

Нека K_1 и K_2 буде површине кругова пречника d_1 и d_2. Треба доказати да је

$$K_1 : K_2 = d_1^2 : d_2^2 .$$

Претпоставимо да то није тако и да је

$$d_1^2 : d_2^2 = K_1 : K , \tag{*}$$

где је K нека површина, прво, мања од K_2. Тада можемо конструисати, почев од квадрата, такав правилан многоугао, уписан у K_2, површине p_2, да разлика $K_2 - p_2$ буде мања од разлике $K_2 - K$, тј.

$$K_2 - p_2 < K_2 - K. \tag{**}$$

Та конструкција има за циљ да учини разлику $K_2 - p_2$ што мањом, да исцрпи разлику $K_2 - K$ која може бити произвољна. Ово је расуђивање праизвор савремене епсилонтике.

Из (**) следује неједнакост

$$p_2 > K\,.$$

Ако сад конструишемо правилан многоугао p_1, уписан у круг K_1, сличан многоуглу p_2, имамо за површине p_1 и p_2, према претходној теореми, пропорцију

$$d_1^2 : d_2^2 = p_1 : p_2\,.$$

Сад из ове једнакости следује, после повећања првог члана десне размере на K_1 и смањења другог члана на K, ова неједнакост

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} < \frac{K_1}{K}$$

а она је у противуречности са претпостављеном једнакошћу (*). Према томе површина K не може бити мања од K_2.

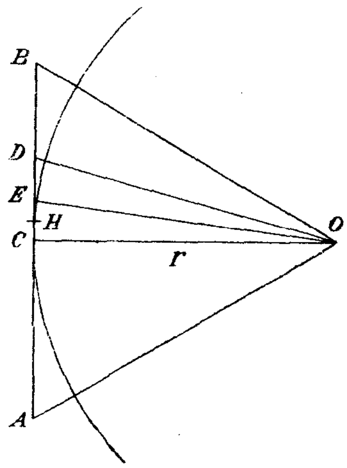
Свођењем на овај случај, а на основу наредне леме, доказује се да K не може имати неку вредност L већу од K_2 и тиме се утврђује садржај теореме.

У овој једноставној теореми се види суштина методе ексхаустије, кад се разлика између непознате величине, у датом случају површине круга, и познате, у датом случају правилног уписаног многоугла, може после примене одређеног поступка начинити колико го̑д желимо малом, исцрпљеном.

Еуклидов формалан поступак је правилан, али разлика између његовог и савременог расуђивања је у томе што Еуклид сматра површину круга као величину јасну са̑му по себи, а у савременом излагању та величина, као и друге величине, подлеже претходној дефиницији. Као и на другим местима Еуклид искоришћава такозвани очигледан елемент, који у строго логичком излагању треба да буде искључен.

Како овде тако и у претходним књигама Еуклид ништа не говори о израчунавању ни површине круга ни дужине његове периферије. Еуклид је, разуме се, знао нека практична правила за израчунавања тих геометриских величина, но он није имао логичку методу за права̑ израчунавања тих величина и због тога је одлучио да то питање прећути.

Тек је Архимед (287—212 пре наше ере), у својој расправи — Κύκλου μέτρησις — мерење круга — дао методу за израчунавање периферије и површине круга. Следећи примеру многих коментатора, навешћемо и ми укратко, са савременим ознакама, Архимедов поступак при израчунавању Архимедовог размака за број π.



Сл. 1.

Архимед рачуна обим P_{96} правилног многоугла, од 96 страна, описаног око круга полупречника $r=1$, при чему искоришћује једноставну слику само са једном страном (сл. 1). Пре свега узима страну правилног шестоугла a_6 са вредношћу

$$AB=a_6=2r/\sqrt{3}$$

и рачуна однос полупречника према половини стране

$$OC:BC=r:\frac{r}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}:1.$$

За $\sqrt{3}$ узима мању приближну вредност једнаку броју 265/153. Како је Архимед израчунавао вредности квадратног корена, то у наведеној његовој расправи није објашњено. Неки коментатори дају о томе своја објашњења, али у то нећемо улазити. Са добивеном вредношћу корена имамо за $BC=\frac{1}{2}a_6$ ову неједнакост

$$OC:BC>265:153.$$

Даље, искоришћавајући особину бисектрисе угла, према којој она дели супротну страну на делове пропорционалне странама троугла које чине тај угао, Архимед долази до резултата да је за $DC=\frac{1}{2}a_{12}$

$$OC:DC>571:153.$$

Продужујући слична израчунавања Архимед за $CH = \frac{1}{2}a_{96}$ долази до резултата

$$OC : HC > 4673\tfrac{1}{2} : 153.$$

Одавде следује да је за $d = 2r$

$$\frac{d}{P_{96}} > \frac{4673\tfrac{1}{2}}{153 \cdot 96}$$

и

$$P_{96} < \frac{14688}{4673\tfrac{1}{2}}\,d < 3\,\frac{667\tfrac{1}{2}}{4672\tfrac{1}{2}}\,d \approx 3\,\frac{1}{7}\,d,$$

при чему је, при извођењу дељења после издвајања целог броја, Архимед тројку у имениоцу заменио двојком и тако добио једноставан заокругљен резултат. Пошто је периферије круга, коју ћемо означити са P, мања од периметра описаног многоугла, имамо коначно

$$P < 3\,\frac{1}{7}\,d$$

и, према томе, Архимедова горња граница за π постаје

$$\pi < \frac{22}{7} = 3,(142857).$$

За израчунавање друге границе Архимед је употребио другу елементарну геометриску методу и помоћу уписаног правилног 96.—угла нашао вредност

$$\pi > 3\,\frac{10}{71} = 3,(140845\ldots).$$

Из граница

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}$$

следује да је Архимед први дао вредност броја π са три вредносне цифре.

Историја броја π заједно са питањима ректификације периферије круга и његове квадратуре сачињава велику и и значајну главу у историји математике уопште, која ни данас није довршена. Овде није место да улазимо у садржај те велике главе.

[3] Ова лема је искоришћена у претходној теореми. Са ознакама употребљеним у коментару претходне теореме ова лема би гласила.

Ако је L веће од K_2, онда је

(°) $$\frac{L}{K_1}=\frac{K_2}{K},$$

где је $K<K_1$.

Тачност овог резултата непосредно следује, напр., из једнакости

$$LK=K_1 K_2.$$

Према овој леми други случај претходне теореме се овако доказује. Треба свести на први случај једначину

(°°) $$\frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{K_1}{L}.$$

где је $L>K_2$.

После промене реда у (°°) имамо

$$\frac{d_2^2}{d_1^2}=\frac{L}{K_1}.$$

Десну размеру на основу (°) можемо сменити са $K_2\colon K$ и тада добивамо пропорцију

$$\frac{d_2^2}{d_1^2}=\frac{K_2}{K},$$

где је $K<K_1$. А та пропорција своди други случај на први, како је то наглашено у теореми.

[4] Ову теорему треба сматрати као припремну за израчунавање запремине пирамиде путем примене методе ексхаустије. Тек после седме теореме Еуклид долази до резултата да је запремина пирамиде једнака једној трећини запремине одговарајуће призме. Међутим на основу већ познатих особина тела и само једног алгебарског става, наиме вредности збира бескрајно опадајуће геометриске прогресије, који је био познат Архимеду, из ове теореме следује вредност запремине пирамиде. Заиста, ако нашу пирамиду са запремином V допунимо до призме, запремине П, са основом АВГ и бочном ивицом

ГΔ, призма HZΓΛKΘ биће осмина призме П, јер, по теореми 33, XI запремине ових сличних тела стоје у размери кубова одговарајућих ивица, а ивица ГΛ је двапут мања од ивице ГΔ. Како наша пирамида садржи две одговарајуће призме, тај део запремине V износи $\frac{1}{4}$ П. Од две преостале пирамиде тела V поново можемо издвојити по две призме, чија заједничка запремина износи $2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$ део запремине призме П. На тај начин, одузимајући увек по две призме од двеју преосталих пирамида, добићемо овај ред за запремину пирамиде

$$V = \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\right] \text{П}.$$

Како је тај збир једнак $\frac{1}{4} : \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}$, долазимо коначно до резултата $V = \frac{1}{3}$ П.

Приметимо да са строгошћу античке математике вредност збира наведене прогресије ($a_n \to 0$ и $S_n - S_{n-1} \to 0$) непосредно следује из једначине

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots = S = \frac{1}{4}(1 + S).$$

Али је за Еуклида циљ ове теореме само у томе да искористи запремину пирамиде као величину, од које се у току даљег расуђивања одузима величина већа од половине те величине.

[5] У овој теореми се показује да су код пирамида једнаких висина и са троугловима у основама запремине призама, и то не само првих које су конструисане према претходној теореми, већ свих које се конструишу по том истом правилу редом у све мање пирамиде, — запремине свих тих одговарајућих призама пропорционалне основама полазних пирамида. То је друга припремна теорема.

[6] У току доказа претходне теореме требало је искористити елементарну особину две одговарајуће призме наведену

у леми. У овој леми та особина је потврђена у детаљима. I. L. Heiberg мисли да ова лема не припада Еуклиду. Неки преводиоци (нпр. C. Thaer) изостављају ову лему.

[7] Структура доказа ове теореме је иста као и структура, рецимо, теореме 2. ове књиге, где се примењује метода ексхаустије. Тамо су за упоређивање кругова били узети правилни многоуглови, а овде су за упоређивање пирамида узете двоструке вредности запремине призама смештених у пирамиде.

[8] Алгебарски садржај теореме овако се изражава. Нека су V_1, $V_2, \ldots, V_n$ запремине пирамида које су настале после поделе целе пирамиде запремине $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ на пирамиде са троугловима S_1, $S_2, \ldots, S_n$ у основама. Из низа једнаких размера

$$\frac{V_1}{S_1} = \frac{V_2}{S_2} = \ldots = \frac{V_n}{S_n}$$

непосредно следује

$$\frac{V}{S} = \frac{V_1}{S_1},$$

где је $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$. За другу пирамиду бисмо имали

$$\frac{V'}{S_1} = \frac{V_1'}{S_1'},$$

где су ознаке очигледне. Пошто на основу теореме за тростране пирамиде имамо

$$\frac{V_1}{S_1} = \frac{V_1'}{S'_1},$$

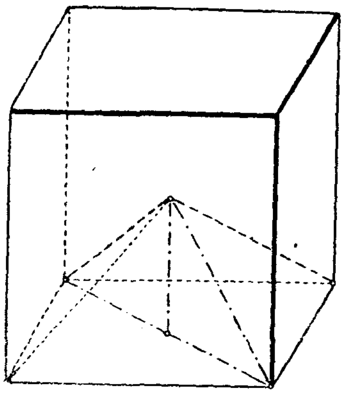
долазимо до пропорције

$$V : S = V' : S',$$

која изражава тражену теорему.

[9] Ова теорема се заснива на растављању тростране призме на три пирамиде истих запремина. Важно је да се обрати пажња на то да ове три пирамиде нису конгруентне и да се њихова једнакост може доказати тек после доказа раније наведених теорема. Према томе у основи доказа ове теореме лежи оно што се обично не уводи у строгој форми

у школску геометрију. Једнакост пирамида једнаких висина са једнаким троугловима у основи може се доказати или методом ексхаустије или методом прелаза на граничну вредност. Такозвана Кавалијеријева метода или метода интегралног рачуна је модификована претходна метода. Методика излагања овог питања у елементарној, нарочито школској, геометрији није ни досад добила неку јасну стандардну форму. Многи геометри су покушавали да примене методу поделе на конгруентне делове или методу допуњавања познатим телима до конгруентних делова, односно до целине, али су сви ти покушаји остали безуспешни у општем случају произвољне тростране пирамиде. Сад су ови покушаји напуштени, јер је 1902 године математичар М. Ден (Dehn) доказао да је таква подели у општем случају немогућа. Оно што је могуће за призму, односно за паралелепипед, немогуће је за пирамиду, односно за тетраедар. Приметимо да Денова теорема не искључује могућност поделе односно допуне пирамиде специјалног облика. Тако, напр., коцку можемо поделити на шест конгруентних пирамида са квадратном основом (сл. 2), односно на дванаест конгруентних пирамида са троуглом у основи.



Сл. 2.

У вези са дефинитивним резултатом о запремини пирамиде наведимо један историски податак.

Постоји такозвани Московски папирус, са збирком математичких задатака. У 14-ом задатку се одређује запремина зарубљене купе, при чему поступак на конкретном примеру одговара обрасцу

$$V = \frac{1}{3} h \left(a^2 + ab + b^2\right),$$

где је h висина купе, а a и b стране квадрата једне и друге основе. Египтолози сматрају да се тај папирус односи на

[10] Текст доказа ове последице је скраћен; тако стоји и у Хајберговом грчком тексту.

почетак другог милениума пре наше ере. Према томе од тог времена до наших дана прошло је готово четири хиљаде година.

Интересантно је да ни у Московском папирусу, ни у вавилонском тексту папируса Британског музеја нема примера за израчунавање запремине пуне пирамиде, већ само примере на зарубљену пирамиду у облику јаме. Вавилонски математичар је рачуна помоћу обрасца

$$V=h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right],$$

који претставља модификацију претходног обрасца. Први члан $h\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ има вредност запремине призме са средњим пресеком, а други одговара запремини осам пирамида у теменима са висином $h/2$ и квадратном основом којој је страна $\frac{1}{4}(a-b)$.

[11] Теорема 8. са последицом односи се на сличне пирамиде које имају троуглове, односно многоуглове у основама. Из алгебарских израза за запремине

$$V_1=\frac{1}{3}h_1 S_1, \qquad V_2=\frac{1}{3}h_2 S_2,$$

и из услова за сличност

$$h_1 : h_2 = a_1 : a_2, \qquad S_1 : S_2 = a_1^2 : a_2^2,$$

где су a_1 и a_2 хомологне ивице, следује непосредно садржај теореме и последице:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{h_1 S_1}{h_2 S_2}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_1^2}{a_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

[12] И теорема 9. се овако може доказати алгебарским путем.

Ако је $V_1=V_2$, онда је

(⌟) $$h_1 S_1 = h_2 S_2,$$

а одавде можемо написати

(⌟⌟) $$S_1 : S_2 = h_2 : h_1,$$

и ова пропорција одговара првом делу теореме. Други део, обрнута теорема, непосредно се изводи из (┘┘), које доводи до (┘), а из тога следује једнакост $V_1 = V_2$.

[13] За доказ ове теореме Еуклид исто тако примењује методу ексхаустије, при чему за упоређивање ваљка и купе служе правилне уписане призме и пирамиде. Излагање се врши готово по истом калупу као и у претходним случајевима. Алгебарски теорема се изражава једначином $V_k = \frac{1}{3} V_b$ под условом $h_k = h_b$, $S_k = S_b$, где индекси k и b означавају купу и ваљак.

[14] И ова 11. теорема се доказује код Еуклида методом ексхаустије. Алгебарски теорема се изражава једначином $V_1 : V_2 = S_1 : S_2$, под условом да је $h_1 = h_2$, а S_1 и S_2 – основе.

[15] И при доказу 12. теореме се примењује метода ексхаустије. Алгебарски садржај теореме гласи: $V_1 : V_2 = d_1^3 : d_2^3$, ако је $h_1 : h_2 = d_1 : d_2$.

[16] Доказ ове теореме, која се алгебарски изражава једначином

$$V_1 : V_2 = h_1 : h_2 \quad (S_1 = S_2)$$

Еуклид заснива на непосредној примени дефиниције пропорционалних величина.

[17] Алгебарски садржај теореме 14. се изражава овако

$$V_b : V_b' = h : h',$$

$$V_k : V_k' = h : h',$$

под условима

$$S_b = S_b', \quad S_k = S_k'.$$

[18] Садржај ове 15. теореме гласи:

Први део: ако је $V_k = V_k'$, онда је $S_k : S_k' = h_k' : h_k$ и ако је $V_b = V'_b$, онда је $S_b : S_b' = h_b' : h_b$.

Други део: ако је $S_k : S_k' = h_k' : h_k$, онда је $V_k = V_k'$ и ако се претходна пропорција односи на ваљк, онда је $V_b = V_b'$.

Како ова тако и претходне теореме које се односе на размере и попорције још једанпут и на овом месту показују какво огромно упрошћавање уводи алгебра у доказе геометриских теорема са алгебарском суштином.

[19] Овај планиметарски задатак игра улогу претходне конструкције за наредни конструктивни задатак, који је потребан за доказ последње 18. теореме ове књиге о запреминама две лопте.

Конструкција се своди на конструкцију тангенте на мањи круг у датој тачки (тачка H) и на дељење полукруга ВАΔ на 2, 4, 8,... итд. делова, док лук ΔΛ не постане мањи од лука ΔА. Дуж ΔΛ је страна уоченог, у већи круг АВГΔ уписаног, многоугла који не додирује мањи круг.

[20] У другом конструктивном задатку треба уписати у сферу веће лопте полиједарско тело и то такво да његова површина нигде не додирује сферу мање лопте истог центра као и већа лопта. Код Еуклида је излагање и саме конструкције и њеног доказа прилично дуго. Излагање се може знатно скратити, ако употребимо појмове екватора и меридијана.

Конструкција траженог полиједарског тела се постиже овако. Замислимо у истој равни два екватора, један за већу и други за мању лопту. То су два концентрична круга. Према претходном задатку упишимо у већи екватор правилан многоугао са парним бројем страна, и то тако да овај не додирује мањи екватор. Кроз темена таквог многоугла конструишимо меридијане и, почев од екватора, поделимо их на исти начин као и екватор. Спојимо тачке на меридијанима и тачке на истим паралелима. Добићемо низ четвороуглова и троуглове око полова. Ти четвороуглови и троуглови претстављају стране траженог полиједарског тела. Еуклид подробно доказује да су то заиста равни четвороуглови и да су дужине нормала спуштених из центра на те равни увек веће од полупречника мале лопте.

У Хајберговом издању слика за ову теорему је доста незгодна. Пажљивом читаоцу је згодније нацртати нову слику са обичним положајем екватора и меридијана у простору и према тој слици пропратити доказ конструкције.

[21] Алгебарски се ова последица овако изражава. Означимо са $V_1, V_2, \ldots, V_n$ запремине пирамида на које се може поделити наше полиједарско тело уписано у већу сферу, а са $v_1, v_2, \ldots, v_n$ одговарајуће сличне пирамиде на које се може

поделити мање тело. Ако се R и r означимо полупречнике веће и мање лопте, имамо низ пропорција

$$\frac{V_1}{v_1}=\frac{V_2}{v_2}=\ldots=\frac{V_n}{v_n}=\frac{R^3}{r^3}.$$

Из тога низа, према познатом ставу, имамо

$$\frac{V_1+V_2+\ldots+V_n}{v_1+v_2+\ldots+v_n}=\frac{V}{v}=\frac{R^3}{r^3}=\frac{D^3}{d^3},$$

где су V и v запремине одговарајућих полиједарских тела, а D и d пречници веће и мање лопте.

[22] Доказ ове теореме се изводи такође методом ексхаустије, при чему се за упоређивање запремина употребљава оно полиједарско тело чију конструкцију чини садржај претходног задатка. Сама метода ексхаустије је примењена у овој теореми у мало друкчијој форми него што је била примењена у ранијим теоремама.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА XIII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 13

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ТРИНАЕСТА КЊИГА
СА ДОДАТКОМ ТАКОЗВАНЕ
ЧЕТРНАЕСТЕ И ПЕТНАЕСТЕ КЊИГЕ

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1957

Научно дело

ИЗДАВАЧКА УСТАНОВА САН

Штампа Графичко предузеће „Академија“, Београд, Космајска ул. 28

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

У овој књизи дајемо текст и коментар тринаесте, последње књиге Еуклидових елемената и два додатка који се често зову четрнаеста и петнаеста књига Еуклидових елемената.

Последња, тринаеста књига Еуклидових елемената посвећена је углавном проучавању правилних полиједара — тетраедру и икосаедру којима су стране троуглови, коцки којој су стране квадрати и додекаедру коме су стране петоуглови. Њихове основне особине се проучавају у првим теоремама ове књиге. При излагању тих претходних теорема врло важну улогу игра непрекидно дељење дужи (златни пресек). На тој теорији се заснива и теорија икосаедра и додекаедра.

Такозвана четрнеста књига припада грчком математичару Хипсиклу. У њој се даље развија теорија правилних тела.

Најзад, такозвана петнаеста књига садржи исто тако продужење теорије правилних тела и углавном је посвећена такозваном Исидоровом проблему одређивања просторних углова код правилних тела.

Завршавајући ову, последњу књигу Еулидових елемената дозволио сам себи да напишем и закључак, у облику поговора.

При изради и ове књиге су ми помогле колеге В. В. Мишковић и Т. П. Анђелић, на чему им овде изјављујем захвалност.

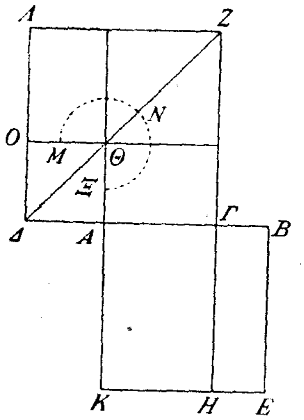
А. Б.

ТЕКСТ

1.

Ако је дуж подељена непрекидно, биће квадрат на збиру већег дела и половине целе дужи једнак петоструком квадрату на тој половини.

Нека је дуж AB тачком Γ подељена непрекидно и нека је AΓ већи део; продужимо дуж ΓA преко A за дуж AΔ и нека је AΔ једнако половини AB. Тврдим да је квадрат на ΓΔ једнак петоструком квадрату на ΔA.



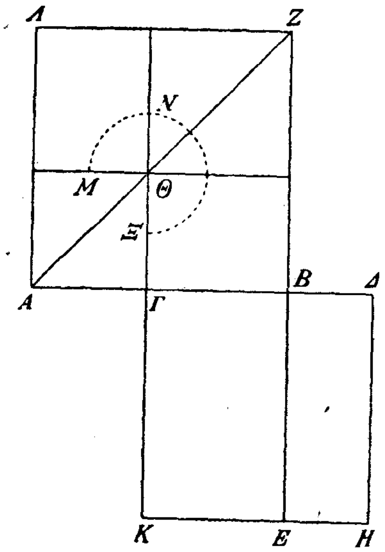
Заиста, конструишимо на AB и на ΔΓ квадрате AE и ΔZ и у ΔZ нацртајмо уобичајену слику и продужимо ZΓ до H. Пошто је AB тачком Γ подељено непрекидно, биће правоугаоник обухваћен од AB и BΓ једнак квадрату на AΓ. Но правоугаоник од AB и BΓ једнак је правоугаонику ΓE, а квадрат на AΓ једнак је квадрату ZΘ. Према томе је ΓE, једнако ZΘ. И пошто је BA двоструко AΔ, и BA једнако KA, а AΔ једнако AΘ, биће и KA двоструко AΘ. Али KA је према AΘ као ΓK према ΓΘ, па је, значи, ΓK двоструко ΓΘ. Но, и збир ΛΘ и ΘΓ је двоструко ΓΘ. А доказано је да је и ΓE једнако ΘZ. Према томе је цео квадрат AE једнак гномону MNΞ. И пошто је BA удвостручено AΔ, биће квадрат на BA четвороструки квадрат на AΔ, тј. AE четвороструко ΔΘ. Али AE је једнако гномону MNΞ, па према томе је гномон MNΞ четвороструко AO. А цео ΔZ је петоструко AO. Но ΔZ је квадрат на ΔΓ, а AO на ΔA, па је стога квадрат на ΓΔ петоструки квадрат на ΔA.

На овај начин, ако је дуж подељена непрекидно, биће квадрат на збиру већег дела и половине целе дужи једнак петоструком квадрату на тој половини. А то је требало доказати.[1]

2.

Ако је квадрат на некој дужи пет пута већи од квадрата на једном њеном делу и удвостручени тај део подељен непрекидно, биће преостали део полазне дужи већи део.

Нека је квадрат на дужи АВ пет пута већи од квадрата на АГ и нека је удвостручено АГ дуж ГΔ. Тврдим да је ГВ већи део дужи ГΔ подељене непрекидно.



Заиста, конструишимо на свакој од дужи АВ и ГΔ квадрате АZ и ГН, у АZ нацртајмо уобичајену слику и продужимо ВЕ. Пошто је квадрат на ВА пет пута већи од квадрата на АГ, биће АZ петоструко АΘ. Према томе је гномон MNΞ четвороструко АΘ. И пошто је ΔГ двоструко ГА, биће квадрат на ΔГ четворостурки квадрат на ГА, тј. ГН од АΘ. А доказано је да је и гномом MNΞ четвороструко АΘ. Према томе је гномон MNΞ једнак ГН. И пошто је ΔГ двоструко ГА, ΔГ је једнако ГК, а АГ једнако ГΘ [па, према томе, и КГ је удвостручено ГΘ], биће и КВ двоструко ВΘ. Такође је и збир ΛΘ и ΘВ једнак двоструком ΘВ. Према томе је КВ једнако збиру ΛΘ и ΘВ. А доказано је да је и цео гномон MNΞ једнак целом ГН, те је и остатак ΘZ једнак ВН. Но правоугаоник ВН је обухваћен дужима ГΔ и ΔВ, јер је ГΔ једнако ΔН, а ΘZ је квадрат на ГВ. Према томе је правоугаоник обухваћен од ГΔ и ΔВ једнак квадрату на ГВ. На тај начин је ΔГ према ГВ као ГВ према ВД. Међутим ΔГ је веће од

ГВ, а према томе и ГВ је веће од ВΔ. Дакле ГВ је већи део дужи ГΔ подељене непрекидно.

На овај начин, ако је квадрат на некој дужи пет пута већи од квадрата на једном њеном делу и удвостручени тај део је подељен непрекидно, биће преостали део полазне дужи већи део. А то је требало доказати.[2]

Лема

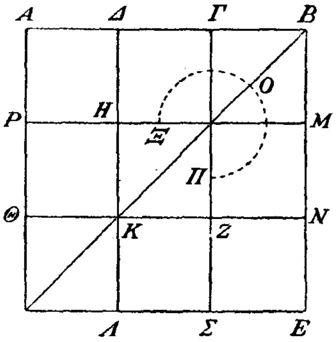
А да је двоструко АГ веће од ВГ, овако се доказује.

Заиста, ако то није тако, онда нека буде, ако је ово могуће, ВГ двоструко ГА. Тада је квадрат на ВГ четири пута већи од квадрата на ГА. А збир квадрата на ВГ и на ГА је пет пута већи од квадрата на ГА. Али се претпоставља да је квадрат на ВА пет пута већи од квадрата на ГА. Па према томе је квадрат на ВА једнак збиру квадрата на ВГ и на ГА. Но то је немогуће. Значи ГВ није двоструко АГ. Слично се доказује да и дуж мања од ГВ није двострука од дужи ГА, јер је то још више бесмислено.

На овај начин, удвостручено АГ је веће од ГВ. А то је требало доказати.[3]

3.

Ако је нека дуж подељена непрекидно, биће квадрат збира мањег дела и половине већег дела пет пута већи од квадрата на половини већег дела.



Нека је дуж АВ подељена тачком Г непрекидно, и нека је већи део АГ, и АГ преполовљено тачком Δ. Тврдим да је квадрат на ВΔ пет пута већи од квадрата на ΔГ.

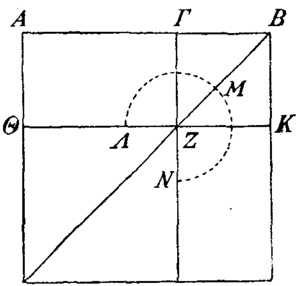
Заиста, конструишимо на АВ квадрат АЕ и нацртајмо двоструку слику. Пошто је АГ двоструко ΔГ, биће квадрат на АГ четири пута већи од квадрата на ΔГ, тј. ΡΣ од ΖΗ. И пошто је правоугаоник обухваћен од АВ и ВГ једнак квадрату на АГ, а исти правоугаоник, обухваћен од

АВ и ВГ, једнак и ГЕ, биће ГЕ једнако РΣ. Но РΣ је четвороструко ZH. Дакле, и ГЕ је четвороструко ZH. Даље, пошто је АΔ једнако ΔГ, биће и ΘК једнако КZ. Те према томе је и квадрат HZ једнак квадрату ΘΛ. А како је НК једнако КΛ, а и MN — NE, биће и MZ једнако ZE. Али MZ је једнако ГН, па према томе је и ГН једнако ZE. Додајмо им исто ГN; тада ће гномон ΞОП бити једнак ГЕ. Али већ је доказано да је ГЕ четвороструко HZ. И према томе је и гномон ΞОП четвороструки квадрат ZH. Значи, збир гномона ΞОП и квадрата ZH је петоструки квадрат ZH. Но збир гномона ΞОП и квадрат ZH је ΔN. А ΔN је квадрат на ΔВ, а HZ квадрат на ΔГ. На овај начин квадрат на ΔВ је петоструки квадрат на ΔГ. А то је требало доказати.[4]

4.

Ако је дуж подељена непрекидно, биће збир квадрата на целој дужи и на мањем делу једнак троструком квадрату на већем делу.

Нека је дуж АВ подељена тачком Г непрекидно и нека ја АГ већи део. Тврдим да је збир квадрата на АВ и на ВГ трипут већи од квадрата на ГА.

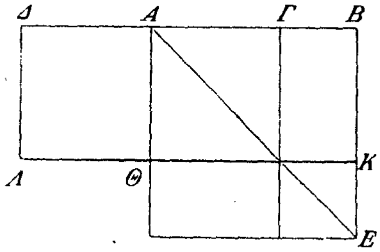


Заиста, конструишимо на АВ квадрат АΔЕВ и нацртајмо слику. Пошто је сад АВ тачком Г подељено непрекидно и већи део је АГ, биће правоугаоник обухваћен од АВ и ВГ једнак квадрату на АГ. И пошто је АК правоугаоник обухваћен од АВ и ВГ, а квадрат на АГ је ΘН, биће АК једнако ΘН. И пошто је АZ једнако ZE, додајмо им исто ГК. Тада је цело АК једнако целом ГЕ, па је према томе збир АК и ГЕ двоструко АК. Али збир АК и ГЕ је збир гномона ΛMN и квадрата ГК. Према томе је збир гномона ΛMN и квадрата ГК двоструко АК. Али већ је доказано да је АК једнако и ΘН. Према томе, гномон ΛMN и [квадрат ГК су двапут већи од квадрата ΘН и значи гномон ΛMN и] квадрати ГК и ΘН трипут су већи од квадрата ΘН. Но гномон ΛМN и квадрати ГК и ΘН чине цео квадрат АЕ и квадрат ГК, а то су квадрати на АВ и на ВГ, док је НΘ квадрат на АГ. На овај начин је збир квадрата на АВ и на ВГ једнак троструком квадрату на АГ. А то је требало доказати.[5]

5.

Ако ја нека дуж подељена непрекидно, па јој се дода већи део подељене дужи, биће и цела добивена дуж подељена непрекидно и њен већи део је полазна дуж.

Нека је дуж АВ подељена тачком Г непрекидно и нека је већи део АГ. Одмеримо АΔ једнако АГ. Тврдим да се дуж ΔВ дели тачком А непрекидно и да је већи део полазна дуж АВ.



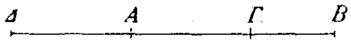
Заиста, конструишимо на АВ квадрат АЕ и нацртајмо слику. Пошто је АВ подељено тачком Г непрекидно, биће правоугаоник обухваћен од АВ и ВГ једнак квадрату на АГ. Али правоугаоник обухваћен од АВ и ВГ је ГЕ, а квадрат на АГ је ГΘ. Према томе је ГЕ једнако ΘГ. Но ГЕ је једнако ΘЕ, а ΘГ — ΔΘ. На тај начин ΔΘ је једнако ΘЕ [а додајемо исто ΘВ]. Према томе је цело ΔК једнако целом АЕ. Но ΔК је правоугаоник обухваћен од ВΔ и ΔА једнак квадрату на АВ. А отуда следује да је ΔВ према ВА као ВА према АΔ. Како је ΔВ веће од ВА, биће и ВА веће од АΔ.

На тај начин тачка А дели ΔВ непрекидно и већи део је АВ. А то је требало доказати.[6]

6.

Ако је рационална дуж подељена непрекидно, биће сваки од делова ирационалан, такозвана апотома.

Нека је АВ рационална дуж подељена тачком Г непрекидно и нека је АГ већи део. Тврдим да је свака од АГ и ГВ ирационална, такозвана апотома.



Заиста, продужимо ВА и одмеримо АΔ као половину ВА. Пошто је дуж АВ подељена тачком Г непрекидно и већем отсечку АГ додата дуж АΔ једнака половини АВ, биће квадрат на ГΔ пет пута већи од квадрата на ΔА. Према томе квадрат на ГΔ се односи према квадрату на ΔА као број према броју. Значи квадрат на ГΔ је самерљив са квадратом на ΔА. Но квадрат на ΔА је рационалан, јер је рационално ΔА као половина рационалне дужи АВ. Те према томе је рационалан и квадрат на ГΔ; значи рационално је и ГΔ. И пошто квадрат на ГΔ према квадрату на ΔА није у размери квадратног броја према квадратном броју, биће ГΔ несамерљиво по дужини са ΔА. Према томе су ГΔ и ΔА рационални али самерљиви само у степену. На овај начин АГ је апотома. Даље, пошто је АВ подељено непрекидно и АГ ја већи део, биће правоугаоник обухваћен од АВ и ВГ једнак квадрату на АГ. На тај начин квадрат на апотоми АГ претворен у правоугаоник са рационалном дужином АВ и ширином ВГ. Но квадрат на апотоми претворен у правоугаоник са рационалном дужином има за ширину прву апотому. Према томе је ГВ прва апотома. А доказано је да је и ГА апотома.

На тај начин, ако је рационална дуж подељена непрекидно, биће сваки од делова ирационалан, такозвана апотома. А то је требало доказати.[7]

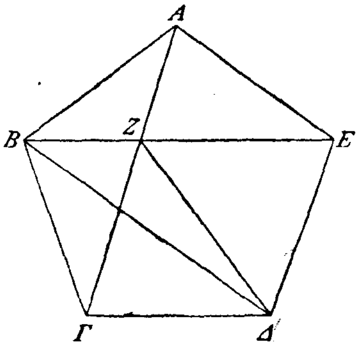
7.

Ако су код једнакостраног петоугла три угла, била узастопна или не, једнака међу собом, петоугао је једнакоугли.

Нека су, прво, три узастопна угла, А, В, Г једнакостраног петоугла АВГΔЕ једнака међу собом. Тврдим да су сви углови петоугла АВГΔЕ једнаки међу собом.

Заиста, нацртајмо спојнице АГ, ВЕ, ZΔ. Пошто су две стране ГВ и ВА једнаке двема странама ВА и АЕ, свака свакој, и угао ГВА једнак углу ВАЕ, биће и основица АГ једнака основици ВЕ, троугао АВГ једнак троуглу АВЕ, и преостали углови једнаки преосталим угловима, који су спрам једнаких страна, наиме угао ВГА углу ВЕА, и угао АВЕ углу

ГАВ, па ће стога и страна AZ бити једнака страни BZ. А доказано је да је и цело АГ једнако целом ВЕ. Дакле, и остатак ZГ једнак је остатку ZE. А и ГΔ је једнако ΔЕ. Две стране ZГ и ГΔ једнаке су двема странама ZE и ЕΔ, а основица ZΔ је заједничка. Према томе је угао ZГΔ једнак углу ZЕΔ. А доказано је да је и угао ВГА једнак углу АЕВ. Према томе је и цео угао ВГΔ једнак целом углу АЕΔ. Али по претпоставци угао ВГΔ једнак је угловима код А и В, па је према томе и угао АЕΔ једнак угловима код А и В. Слично се доказује да је и угао ГΔЕ једнак угловима код А, В, Г. На овај начин петоугао АВГΔ једнакоугли.



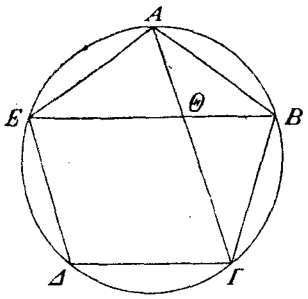
Нека су сад једнаки не три узастопна угла, већ углови код тачака А, Г, Δ. Тврдим да је и тада петоугао АВГΔЕ једнакоугли.

Заиста, нацртајмо ВΔ. Пошто су две стране ВА и АЕ једнаке двема странама ВГ и ГΔ и обухватају једнаке углове, биће основица ВЕ једнака основици ВΔ, троугао АВЕ једнак троуглу ВГΔ, и остали углови једнаки осталим угловима, који су спрам једнаких страна. Према томе је угао АЕВ једнак углу ГΔВ. А и угао ВЕΔ једнак је углу ВΔЕ, пошто је страна ВЕ једнака страни ВΔ. На тај начин је и цео угао АЕΛ једнак целом углу ГΔЕ. Али угао ГΔЕ, по претпоставци, једнак је угловима код А и код Г, па је према томе и угао АЕΔ једнак угловима код А и Г. Из истих разлога и угао АВГ једнак је угловима код А, Г и Δ. На овај начин петоугао АВГΔЕ је једнакоугли. А то је требало доказати.[8]

8.

Ако код једнакостраног и једнакоуглог петоугла две дужи спајају углове преко једног, оне деле једна другу непрекидно и њихови већи делови једнаки су страни петоугла.

Нека у једнакостраном и једнакоуглом петоуглу АВГΔЕ дужи АГ и ВЕ, које спајају из темена А и В углове преко једног, секу једна другу у тачки Θ. Тврдим, да је свака од њих подељена тачком Θ непрекидно и да су њихови већи делови једнаки страни петоугла.



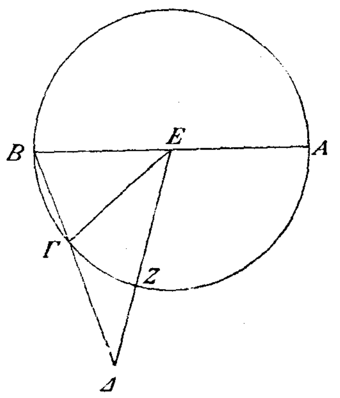
Заиста, опишимо око петоугла АВГΔЕ круг АВГΔЕ. Пошто су две дужи ЕА и АВ једнаке двема дужима АВ и ВГ и оне обухватају једнаке углове, биће и основица ВЕ једнака основици АГ, троугао АВЕ једнак троуглу АВГ, и преостали углови једнаки преосталим угловима, сваки сваком, који су обухваћени једнаким странама. Према томе је угао ВАГ једнак углу АВЕ. Значи, угао АΘЕ је удвостручени угао ВАΘ. И угао ЕАГ је двапут већи од угла ВАГ, јер је лук ЕΔГ двапут већи од лука ГВ. Према томе је угао ΘАЕ једнак углу АΘЕ. Значи, и дуж ΘЕ једнака је АЕ, тј. једнака је и АВ. И пошто је дуж ВА једнака дужи АЕ, биће и угао АВЕ једнак углу АЕВ. Но доказано је да је угао АВЕ једнак углу ВАΘ. Према томе је и угао ВЕА једнак углу ВАΘ. И код два троугла АВЕ и АВΘ угао АВЕ је заједнички. Дакле, преостали угао ВАЕ једнак је преосталом углу АΘВ. Према томе троуглови АВЕ и АВΘ имају једнаке углове. И на тај начин имамо пропорцију: ЕВ је према ВА као АВ према ВΘ. Но ВА ја једнако ЕΘ, значи, ВЕ је према ЕΘ као ЕΘ према ΘВ. Но ВЕ је веће од ЕΘ, па ће и ЕΘ бити веће од ΘВ. На овај начин ВЕ је подељено тачком Θ непрекидно и већи део ΘЕ је страна петоугла. Слично се доказује да је и АГ тачком Θ подељено непрекидно и да је ГΘ једнако страни петоугла. А то је требало доказати.[9]

9.

Збир стране шестоугла и десетоугла, уписаних у исти круг, подељен је непрекидно и већи део је страна шестоугла.

Нека је АВГ круг и од слика уписаних у круг АВГ нека је ВГ страна десетоугла, а ГΔ — шестоугла и нека су надовезане на истој правој. Тврдим да се цела ВΔ дели непрекидно и да је већи део ГΔ.

Заиста, узмимо за центар тачку Е, повуцимо ЕВ, ЕГ, ЕΔ, и продужимо ВЕ до А. Пошто је ВГ страна једнакостраног десетоугла, лук АГВ је пет пута већи од лука ВГ. Према томе је лук АГ четири пута већи од лука ГВ. И лук АГ је према луку ГВ као угао АЕГ према углу ГЕВ. Значи, и угао АЕГ је четири пута већи од угла ГЕВ. И пошто је угао ЕВГ једнак углу ЕГВ, биће угао АЕГ двапут већи од угла ЕГВ. И пошто је дуж ЕГ једнака дужи ГΔ, јер је свака од њих једнака страни шестоугла уписаног у круг, биће и угао ГЕΔ једнак углу ГΔЕ, а угао ГЕВ двапут већи од угла ЕΔГ. А доказано је да је и угао АЕГ двапут већи од угла ЕГВ, па према томе је угао АЕГ четири пута већи од угла ЕΔГ. Дакле, угао ЕΔГ је једнак углу ВЕГ. Код два троугла ВЕГ и ВЕΔ угао ЕВΔ је заједнички. И преостали угао ВЕΔ једнак је углу ЕГВ. Према томе троуглови ЕВΔ и ЕВГ имају једнаке углове. Значи, постоји пропорција: ΔВ је према ВЕ као ЕВ према ВГ. А ЕВ је једнако ГΔ. Према томе ВΔ је према ΔГ као ΔГ према ГВ. И већа је дуж ВΔ од ΔГ, па је и ΔГ веће од ГВ. На тај начин дуж ВΔ је подељена (тачком Г) непрекидно и већи њен део је ΔГ. А то је требало доказати.[10]

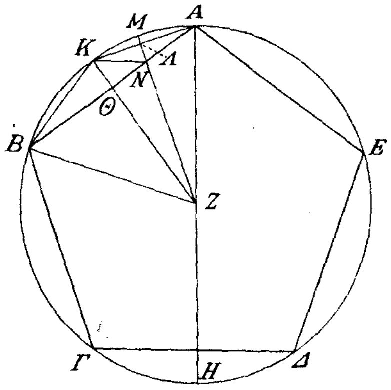


10.

Ако је у круг уписан једнакостран петоугао, биће квадрат стране петоугла једнак збиру квадрата стране шестоугла и стране десетоугла уписаних у исти круг.

Нека је АВГΔЕ круг и АВГΔЕ једнакостран петоугао уписан у круг АВГΔЕ. Тврдим да је квадрат стране петоугла АВГΔЕ једнак збиру квадрата стране шестоугла и стране десетоугла уписаних у круг АВГΔЕ.

Заиста, узмимо за центар круга тачку Z, и продужимо АZ до тачке Н, нацртајмо ZВ, и из тачке Z повуцимо нормалу ZΘ на праву AB, продужимо је до тачке K, нацртајмо AK и KB, па из тачке Z повуцимо ZΛ, нормалу на AK, продужимо је до M и нацртајмо KN. Пошто је лук ABΓH једнак луку AEΔH и једнаки су њихови делови ABΓ и AEΔ, биће и остатак ΓH једнак остатку HΔ. Но ΓΔ је лук петоугла, па је према томе ΓH лук десетоугла. И пошто је ZA једнако ZB, а ZΘ је нормала, биће угао AZK једнак углу KZB те према томе и лук AK једнак луку KB. И лук AB је двапут већи од лука BK, значи, дуж AK је страна десетоугла. Из истих разлога и лук AK је двапут већи од лука KM. И пошто је лук AB двапут већи од лука BK, а лук ΓΔ једнак луку AB, биће и лук ΓΔ двапут већи од лука BK. Но лук ΓΔ је двапут већи од лука ΓH, па је, значи, и лук ΓH једнак луку BK. Али лук BK је двапут већи од лука KM, као и лук KA. Па и лук ΓH је двапут већи од KM. Но и лук ΓB је двапут већи од лука BK, јер је лук ΓB једнак BA. Значи, цео лук HB је двапут већи од BM. Те је према томе и угао HZB двапут већи од угла ZAB. И на тај начин је угао ZAB једнак углу ABZ. И угао BZN једнак је углу ZAB. Код два троугла ABZ и BZN угао ABZ је заједнички, па и преостали угао AZB једнак је преосталом углу BNZ. Дакле троуглови ABZ и BZN имају једнаке углове. Значи постоји пропорција: дуж AB је према дужи BZ као дуж ZB према дужи BN. И према томе је правоугаоник обухваћен од AB и BN једнак квадрату на BZ. Затим, пошто је AΛ једнако ΛK, а нормала ΛN је заједничка, биће основица KN једнака основици AN и угао ΛKN једнак углу ΛAN. Но угао ΛAN једнак је углу KBN, значи и угао ΛKN једнак је углу KBN. И код два троугла AKB и AKN угао код A је заједнички. Па и преостали угао AKB једнак је преосталом углу KNA. Према томе троуглови KBA и KNA имају једнаке углове. Значи, постоји пропорција: дуж BA је према дужи AK као KA према AN. И



правоугаоник обухваћен од BA и AN једнак је квадрату на на AK. А доказано је да је и правоугаоник обухваћен од AB и BN једнак квадрату на BZ. Но збир правоугаоника обухваћеног од BA и AN и правоугаоника обухваћеног од AB и BN чини квадрат на BA, који је према томе једнак збиру квадрата на BZ и на AK. И BA је страна петоугла, BZ — шестоугла и AK — десетоугла.

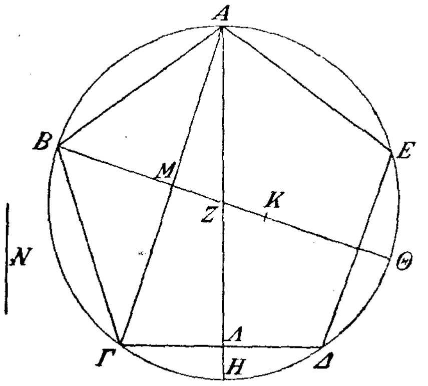
На овај начин, квадрат стране петоугла једнак је збиру квадрата стране шестоугла и стране десетоугла, уписаних у исти круг. А то је требало доказати.[11]

11.

Ако је у круг са рационалним пречником уписан једнакостран петоугао, његова страна је ирационална, такозвана „мања“.

Нека је круг ABΓΔE са рационалним пречником уписан једнакостран петоугао ABΓΔE. Тврдим да је страна петоугла [ABΓΔE] ирационала, такозвана „мања“.

Заиста, узмимо за центар круга тачку, Z нацртајмо AZ и ZB и продужимо их до тачака H и Θ; нацртајмо AΓ и, одмеримо ZK, четвртину од AZ. AZ је рационално, па према томе је рационално и ZK. Рационално је и BZ, а значи рационално и цело BK. И пошто је лук AΓH једнак луку AΔH, а једнаки су и њихови делови, лук ABΓ и лук AEΔ, биће и остатак ΓH једнак остатку HΔ. И ако нацртамо AΔ, онда су углови код тачке Λ прави и ΓΔ је двапут веће од ΓΛ. Из истих разлога су и код тачке M углови прави и AΓ је двапут веће од ΓM. Пошто је сад угао AΛΓ једнак углу AMZ, угао ΛAΓ заједнички за троуглове AΓΛ и AMZ, биће и преостали угао AΓΛ једнак преосталом MZA. Према томе троуглови AΓΛ и AMZ имају једнаке углове. И на тај начин постоји пропорција: ΛΓ је према ΓA као MZ према ZA. И од удвостручених прет-



ходних имамо: удвостручено ΛΓ је према ΓΑ као удвостручено ΜΖ према ΖΑ. Но удвостручено ΜΖ је према ΖΑ као ΜΖ према половини ΖΑ, па, значи удвостручено ΛΓ је према ΓΑ као ΜΖ према половини ΖΑ. И од наредних половина имамо: удвостручено ΛΓ је према половини ΓΑ као ΜΖ према четвртини ΖΑ. Но удвостручено ΛΓ је ΔΓ, а половина од ΓΑ је ΓΜ, а четвртина од ΖΑ је ΖΚ. Према томе ΔΓ је према ΓΜ као ΜΖ према ΖΚ. И после сабирања: збир ΔΓ и ΓΜ је према ΓΜ као ΜΚ према ΚΖ. Дакле, квадрат на збиру ΔΓ и ΓΜ је према квадрату на ΓΜ као квадрат на ΜΚ према квадрату на ΚΖ. И пошто је код дужи која спаја две стране петоугла (дијагонале), напр. код дужи ΑΓ, подељене непрекидно, већи део страна петоугла, тј. ΔΓ, а квадрат на збиру већег дела и половине целе дужи је пет пута већи од квадрата на половини целе дужи, и половина целе ΑΓ је ΓΜ, биће квадрат на збиру ΔΓ и ΓΜ пет пута већи од квадрата на ΓΜ. Али, како је доказано, квадрат на збиру ΔΓ и ΓΜ се односи према квадрату на ΓΜ као квадрат на ΜΚ према квадрату на ΚΖ. Према томе је квадрат на ΜΚ пет пута већи од квадрата на ΚΖ. Но ΚΖ је рационално, јер је рационалан пречник, па према томе је рационалан и квадрат на ΜΚ, дакле, рационално и ΜΚ [али само у степену]. И пошто је ΒΖ четири пута веће од ΖΚ, онда је ΒΚ пет пута веће од ΚΖ, значи, квадрат на ΒΚ двадесетпет пута већи од квадрата на ΒΖ. Но квадрат на ΜΚ је пет пута већи од квадрата на ΚΖ, дакле, квадрат на ΒΚ је пет пута већи од квадрата на ΚΜ. И према томе квадрат на ΒΚ према квадрату на ΚΜ није у односу квадратног броја према квадратном броју. На тај начин ΒΚ није самерљиво по дужини са ΚΜ. А свако од њих је рационално. Према томе су ΒΚ и ΚΜ рационалне дужи, самерљиве само у степену. Међутим ако се од рационале дужи одузме рационална дуж самерљива са целом само у степену, биће остатак ирационалан, апотома. Значи ΜΒ је апотома, а ΜΚ је њена допуна. Тврдим, да је то четврта апотома. Нека је оно, за колико је квадрат на ΒΚ већи од квадрата на ΚΜ, једнако квадрату на дужи Ν. Значи, квадрат на ΒΚ је већи од квадрата на ΚΜ за квадрат на Ν. Пошто је ΚΖ самерљиво са ΖΒ, биће и састављено ΚΒ самерљиво са ΖΒ. Али ΒΖ је самерљиво са ΒΘ, па значи и ВК самерљиво са ВΘ. И пошто је квадрат на ВК пет пута већи од квадрата на КМ, биће квадрат на ВК према квадрату на КМ у размери 5 према 1. Према томе, после замене једног дела другим, квадрат на ВК према квадрату на N је у размери 5 према 4, не као квадратни број према квадратном броју. Значи ВК није самерљиво са N и квадрат на ВК је већи од квадрата на КМ за квадрат на дужи која је несамерљива са ВК. Сад, пошто је квадрат на целој дужи ВК већи од квадрата на њеној допуни КМ за квадрат на дужи која је несамерљива са ВК, и цело ВК је самерљиво са повученом рационадном дужи ВΘ, биће МК четврта апотома. И правоугаоник обухваћен рационалном дужи и четвртом апотомом је ирационалан, и страна квадрата једнаког његовој површини је ирационална, и зове се „мања". Дуж АВ је страна квадрата једнаког правоугаонику обухваћеном од ΘВ и ВМ, јер је повлачењем дужи АΘ добива троугао АВΘ који има са троуглом АВМ једнаке углове, па ће бити ΘВ према ВА као АВ према ВМ.

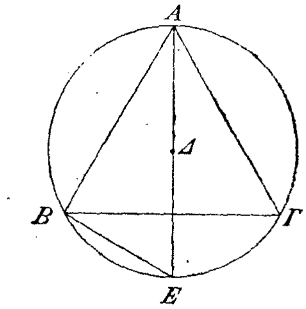
На овај начин је АВ, страна петоугла, ирационална' такозвана „мања". А то је требало доказати.[12]

12.

Ако је у круг уписан једнакостран троугао, квадрат на страни тог троугла је трипут већи од квадрата на полупречнику.

Нека је АВГ круг и АВГ у њ уписан једнакостран троугао. Тврдим да је квадрат на страни троугла АВГ једнак трострукој вредности квадрата на полупречнику.

Заиста, узмимо центар Δ круга АВГ и праву што спаја А и Δ, продужимо до Е и нацртајмо ВЕ. Пошто је троугао АВГ једнакостран, биће лук ВЕГ трећина кружног лука АВГ. И према томе је лук ВЕ шестина кружног лука АВГ. Значи ВЕ је страна шестоугла и она је, на тај начин, једнака полупречнику. А како је АЕ двапут веће од ΔЕ, биће квадрат АЕ четири пута већи од квадрата на ЕΔ, тј. од квадрата на ВЕ. Но



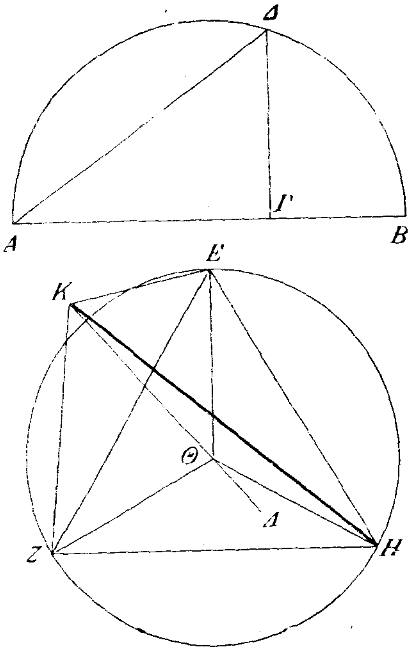
квадрат на AE једнак је збиру квадрата на AB и на BE. Значи, збир квадрата на AB и на BE једнак је четвороструком квадрату на BE. Стога, после одузимања, тврдимо да је квадрат на AB трипут већи од квадрата на BE. А BE је једнако ΔE и према томе квадрат на AB трипут већи од квадрата на ΔE.

На овај начин је квадрат на страни троугла трипут већи од квадрата на полупречнику.[13]

13.

Конструисати пирамиду, обухватити је датом сфером, и доказати да је квадрат на пречнику сфере један и по пута већи од квадрата на ивици пирамиде.

Одмеримо дуж AB, једнаку пречнику дате сфере, и пресецимо је тако тачком Γ да AΓ буде двапут веће од ΓB. Нацртајмо на AB полукруг AΔB, конструишимо кроз тачку Γ дуж ΓΔ управну на AB и спојимо A и Δ правом AΔ. Нацртајмо круг EZH полупречника ΔΓ, упишимо у круг EZH једнакостран троугао EZH, узмимо за центар круга тачку Θ, и повуцимо дужи EΘ, ΘZ, ΘH[1]). И из тачке Θ конструишимо праву ΘK нормалну на раван круга EZH. И одмеримо на ΘK дуж ΘK једнаку AΓ. Повуцимо KE, KZ, KH. И пошто је права KΘ нормала на равни круга EZH, она образује праве углове са свим правима које је секу и налазе се у равни круга EZH. Но сече је свака од правих ΘE, ΘZ, ΘH, па према томе је ΘK управна на свакој од ΘE, ΘZ, ΘH. И пошто је AΓ једнако ΘK, а ΓΔ једнако ΘE и образују прав угао, биће и основица ΔA једнака основици KE. Из истих разлога и свако од KZ и KH једнако је ΔA. Према томе су



---

[1]) У коментару је наведена још једна слика за ову теорему.

три дужи KE, KZ, KH једнаке међу собом. И пошто је AΓ двапут веће од ΓB, биће AB трипут веће од BΓ. Но, како ћемо то доцније доказати, AB је према BΓ као квадрат на AΔ према квадрату на ΔΓ. Према томе је квадрат на AΔ трипут већи од квадрата на ΔΓ. И квадрат на ZE трипут већи од квадрата на EΘ, а ΔΓ је једнако EΘ. Дакле, и ΔA једнако је EZ. Али, како је доказано, и свако од KE, KZ, KH једнако је ΔA, па је значи, свако од EZ, ZH, HE једнако сваком од KE, KZ, KH. Према томе су четири троугла EZH, KEZ, KZH и KEH једнакострани. На овај начин ја образована пирамида од четири једнакострана троугла, чија је основа троугао EZH, а врх тачка K.

Али се тражи да буде обухваћена датом сфером и да се докаже да је један и по квадрат на пречнику сфере једнак квадрату на ивици пирамиде.

Заиста, продужимо у правцу праве KΘ праву ΘΛ и одмеримо ΘΛ једнако ΓB. И пошто је AΓ према ΓΔ као ΓΔ према ΓB, а AΓ је једнако KΘ, и ΓΔ једнако ΘE и ΓB једнако ΘΛ, биће KΘ према ΘE као EΘ према ΘΛ. И према томе је правоугаоник обухваћен од KΘ и ΘΛ једнак квадрату на EΘ. И сваки од углова KΘE и EΘΛ прав. Значи полукруг, конструисан на KΛ, пролази кроз E [пошто ће, ако конструишемо EΛ, угао ΛEK бити прав, јер је троугао EΛK са истим угловима као и сваки од троуглова EΛΘ и EΘK]. Ако се при непокретном KΛ, полукруг при обртању поново врати у почетни положај од којег је почео обртање, он ће проћи и кроз тачке Z и H, јер, ако се повуче ZΛ и ΛH, углови код Z и H ће на сличан начин бити прави и пирамида бити обухваћена датом сфером. Заиста, KΛ, пречник ове сфере, једнак је пречнику AB дате сфере, јер је KΘ одмерено једнако AΓ и ΘΛ једнако ΓB.

Тврдим такође да је квадрат на пречнику сфере један и по пута већи од квадрата на ивици прирамиде.

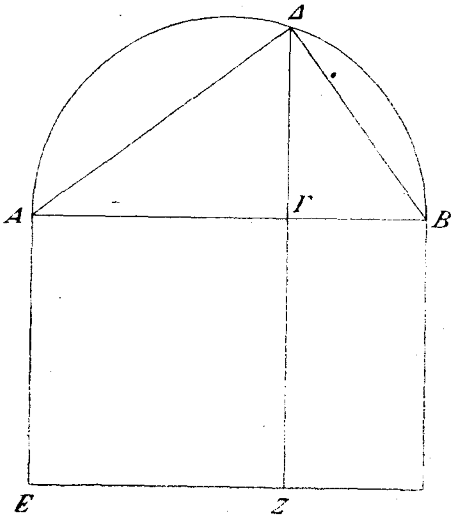
Пошто је AΓ двапут веће од ΓB, биће AB трипут веће од BΓ, а после замене једног дела другим, биће BA један и по пута веће од AΓ. Но BA је према AΓ као квадрат на BA према квадрату на AΔ [пошто ће, ако се повуче ΔB, BA бити према AΔ као ΔA према AΓ, и то на основу сличности троуглова ΔAB и ΔAΓ и стога што је прво према трећем као квадрат на првом према квадрату на другом]. Према томе је квадрат на ВΛ два и по пута већи од квадрата на АΔ. А ВА је пречник дате сфере и АΔ ивица пирамиде.

На овај начин је квадрат на пречнику сфере један и по пута већи од квадрата на ивици пирамиде. А то је требало доказати.[14]

Лема

Доказати да је АВ према ВГ као квадрат на АΔ према квадрату на ΔГ.

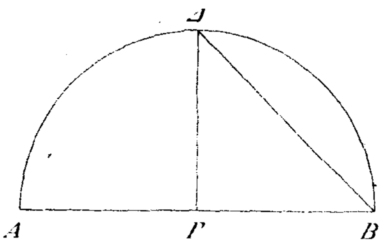
Заиста, уочимо слику полукруга, повуцимо ΔВ, па нацртајмо квадрат ЕГ на АГ и допунимо паралелограм ZВ. Пошто је сад, због једнакости углова у троугловима ΔАВ и ΔАГ, дуж ВА према дужи АΔ као ΔА према АГ, биће правоугаоник обухваћен од ВА и АГ једнак квадрату на АΔ. И пошто је АВ према ВГ као ЕВ према ВZ и ЕВ је правоугаоник обухваћен од ВА и АГ, јер је ЕА једнако АГ, а ВZ је правоугаоник обухваћен од АГ и ГВ, биће АВ према ВГ као правоугаоник обухваћен од ВА и АГ према правоугаонику обухваћеном од АГ и ГВ. И правоугаоник обухваћен од ВА и АГ једнак је квадрату на АΔ, а обухваћен од АГ и ГВ — квадрату на ΔГ, јер је нормака ΔГ средња пропорционала отсечака АГ и ГВ основице зато што је угао АΔВ прав. И према томе је АВ према ВГ као квадрат на АΔ према квадрату на ΔГ. А то је требало доказати.[15]

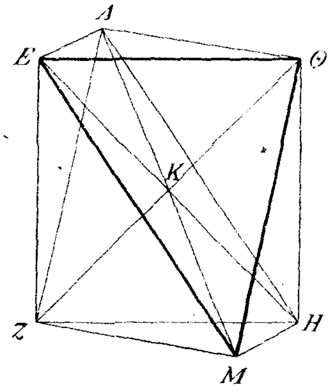


14.

Конструисати октаедар, обухватити га сфером, као у претходном случају, и доказати да је квадрат на пречнику сфере двапут већи од квадрата на ивици октаедра.

Одмеримо пречник дате сфере AB, преполовимо га тачком Γ и нацртајмо на AB полукруг AΔB. Затим из тачке Γ повуцимо праву нормалну на AB; повуцимо ΔB и узмимо квадрат EZHΘ чије су све стране једнаке ΔB. Даље, повуцимо ΘZ, EH, па из тачке K повуцимо, под правим угловима према равни квадрата EZHΘ, праву KΛ, продужимо је са друге стране равни као KM. На свакој од KΛ и KM одмеримо праве KΛ, KM једнаке једној од EK, ZK, HK, ΘK и нацртајмо ΛE, ΛZ, ΛH, ΛΘ, ME, MZ, MH, MΘ. Пошто је KE једнако KΘ и угао EKΘ прав, биће квадрат на ΘE двапут већи од квадрата на EK. Затим, пошто, је ΛK једнако KE и угао ΛKE прав, биће квадрат на EΛ двапут већи од квадрата на EK. А доказано је да је и квадрат на ΘE двапут већи од квадрата на EK. Према томе је квадрат на ΛE једнак квадрату на EΘ; дакле и ΛE једнако EΘ. Из истих разлога је и ΛΘ једнако ΘE. Дакле је троугао ΛEΘ једнакостран. Слично се доказује да је једнакостран и сваки од преосталих троуглова чије су основице стране квадрата EZHΘ и врхови у тачкама Λ, M. На овај начин је конструисан октаедар омеђен са осам једнакостраних троуглова.





Треба га обухватити датом сфером и доказати да је квадрат на пречнику сфере двапут већи од квадрата на ивици октаедра.

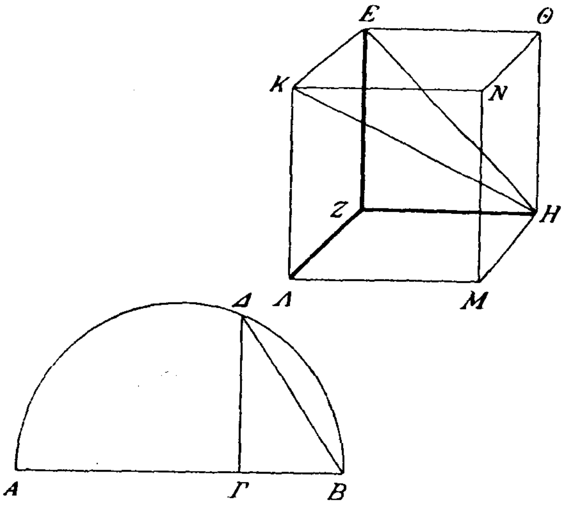
Пошто су три дужи ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ једнаке међу собом, то ће полукруг нацртан на ΛΜ проћи и кроз тачку Ε. Из истих разлога, ако се, при непокретном ΛΜ, полукруг обрне и поново врати у почетни положај, он ће проћи и кроз тачке Ζ, Η, Θ и октаедар ће бити обухваћен сфером. Тврдим да је то дата сфера. Заиста, пошто је ΛΚ једнако ΚΜ, а ΚΕ је заједничко и обухватају праве углове, биће и основица ΛΕ једнака основици ΕΜ. И пошто је угао ΛΕΜ прав, јер је у полукругу, биће квадрат на ΛΜ двапут већи од квадрата на ΛΕ. Затим, пошто је ΑΓ једнако ΓΒ, биће ΑΒ двапут већи од ΒΓ. Но ΑΒ је према ΒΓ као квадрат на ΑΒ према квадрату на ΒΔ. Према томе је и квадрат на ΑΒ двапут већи од квадрата на ΒΔ. А доказано је да је и квадрат на ΛΜ двапут већи од квадрата на ΛΕ. И квадрат на ΔΒ једнак је квадрату на ΛΕ, јер је узето ΕΘ једнако ΔΒ. Према томе је квадрат на ΑΒ једнак квадрату на ΛΜ, дакле, и ΑΒ једнако ΛΜ. А како је ΑΒ пречник дате сфере, биће и ΛΜ пречник дате сфере.

На овај начин је октаедар обухваћен датом сфером и у исто време је доказано да је квадрат на пречнику сфере двапут већи од квадрата на ивици октаедра. А то је требало доказати.[16]

15.

Конструисати коцку, обухватити је сфером, као и пирамиду, и доказати да је квадрат на пречнику сфере трипут већи од квадрата на ивици коцке.

Одмеримо ΑΒ као пречник дате сфере и поделимо га тачком Γ тако да ΑΓ буде двапут веће од ΓΒ. Даље, нацртајмо на ΑΒ полукруг ΑΔΒ, из Γ подигнимо нормалу ΓΔ на ΑΒ, повуцимо ΔΒ, конструишимо квадрат ΕΖΗΘ коме је страна једнака ΔΒ. Па кроз тачке Ε, Ζ, Η, Θ у равни квадрата ΕΖΗΘ повуцимо нормале ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, одмеримо на свакој од ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ дужи ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ од којих је свака једнака једној од дужи ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ и спојимо K са Λ, Λ са M, M са N и N са K. Тако је начињена коцка ZN обухваћена са шест једнаких квадрата.



Треба је обухватити датом сфером и доказати да је квадрат на пречнику сфере трипут већи од квадрата на ивици коцке.

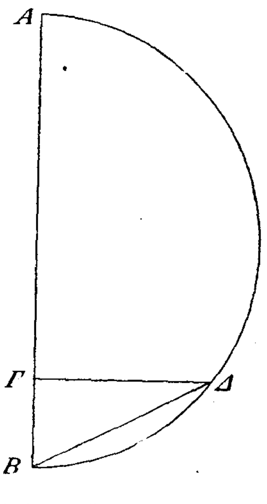
Заиста, нацртајмо KH и EH. И пошто је угао KEH прав, јер је KE нормала на равни EH, дакле, и на правој EH, то ће полукруг конструисан на KH проћи и кроз тачку E. Затим пошто је HZ нормално према сваком од ZΛ и ZE, биће HZ нормално и према равни ZK; према томе, ако конструишемо ZK, биће HZ нормално и према ZK. И из истих разлога, поново, полукруг конструисан на HK проћи ће и кроз тачку Z. A проћи ће, слично, и кроз преостале тачке коцке. Ако се, при непокретном KH, полукруг обрне и поново врати у почетни положај, биће коцка обухваћена сфером. Тврдим да је то дата сфера. Заиста, пошто је HZ једнако ZE и угао код тачке Z је прав, биће квадрат на EH двапут већи од квадрата на EZ. Но EZ је једнако EK. Значи, квадват на EH је двапут већи од квадрата на EK, а збир квадрата на EH и на EK, тј. квадрат на HK, је трипут већи од квадрата на EK. И пошто је AB трипут веће од ΓB и AB је је према ВГ као квадрат на АВ према квадрату на ВΔ, биће квадрат на АВ трипут већи од квадрата на ВΔ. А доказано је да и квадрат на НК трипут већи од квадрата на КЕ. И КЕ је узето једнако ΔВ. Па према томе је и КН једнако АВ. А како је АВ једнако пречнику дате сфере, биће и КН једнако пречнику дате сфере.

На овај начин, коцка је обухваћена датом сфером. И, у исто време доказано је да је квадрат на пречнику сфере трипут већи од квадрата на ивици коцке. А то је требало доказати.[17]

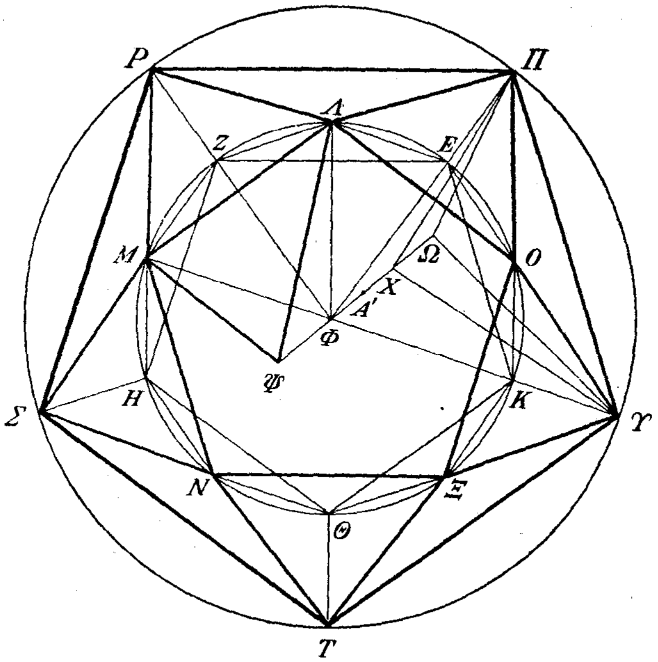
16.

Конструисати икосаедар, обухватити га сфером, као и раније наведена тела, и доказати да је ивица икосаедра ирационална и то такозвана „мања“.

Одмеримо АВ као пречник дате сфере и поделимо га тачком Г тако да АГ буде четири пута веће од ГВ. Даље, нацртајмо на ΔВ полукруг АΔВ, повуцимо из Г нормалу ГΔ на АВ, нацртајмо ΔВ, и конструишимо круг ΕΖΗΘΚ полупречника ΔВ. Па упишимо у круг ΕΖΗΘΚ једнакострани и једнакоугли петоугао ΕΖΗΘΚ, преполовимо лукове ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ тачкама Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο и нацртајмо ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. Биће тада ΛΜΝΞΟ једнакостран и једнакоугли петоугао и ΕΟ страна десетоугла. И кроз тачке Ε, Ζ, Η, Θ, Κ у равни круга повуцимо нормале ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ једнаке полупречнику круга ΕΖΗΘΚ, и спојимо ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. И пошто је свака од ΕΠ и ΚΥ нормална на истој равни, биће ΕΠ паралелно са ΚΥ. А оне су и једнаке. Али праве које спајају са исте стране крајеве једнаких и паралелних дужи једнаке су и паралелне. Према томе су праве ΠΥ и ΕΚ једнаке и паралелне. Но ΕΚ је страна једнакостраног петоугла. Па значи да је и ΠΥ страна једнакостраног петоугла уписаног у круг ΕΖΗΘΚ. Из истих разлога и свака од дужи ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ је страна једнакостраног петоугла уписаног у круг ΕΖΗΘΚ.



Дакле петоугао ΠΡΣΤΥ је једнакостран. Пошто је ΠΕ страна шестоугла, а ΕΟ — десетоугла и угао ΠΕΟ је прав, биће ΠΟ страна петоугла, јер је квадрат стране петоугла једнак збиру квадрата стране шестоугла и стране десетоугла уписаних у исти круг. Из истих разлога и ΟΥ је страна петоугла. Такође и ΠΥ је страна петоугла. Према томе је троугао ΠΟΥ једнакостран. Из истих разлога и сваки од троуглова ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ је једнакостран. И пошто је доказано да је свака од дужи ΕΛ и ΠΟ страна петоугла, а такође и ΛΟ страна петоугла, биће и троугао ΠΛΟ једнакостран. Из истих разлога и сваки од троуглова ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ је једнакостран. Узмимо за центар круга ΕΖΗΘΚ тачку Φ. Из тачке Φ спустимо нормалу ΦΩ на раван круга и продужимо као ΦΨ на другу страну. Па одмеримо страну шестоугла ΦΧ и сваку ΦΨ, ΧΩ као стране десетоугла и спојимо ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. И пошто је свака од ΦΧ и ΠΕ нормала на равни круга, онда су ΦΧ и ΠΕ паралелне, а оне су и једнаке. Значи, и ΕΦ и ΠΧ су једнаке и паралелне. Но ΕΦ је страна шестоугла, те према томе и ΠΧ је страна



шестоугла. И пошто је ΠΧ страна шестоугла, ΧΩ страна десетоугла и угао ΠΧΩ прав, биће ΠΩ страна петоугла. Из истих разлога и ΥΩ је страна петоугла, јер, ако повучемо ΦΚ и ΧΥ, они су једнаки и супротног положаја; а како је ΦΚ, као полупречник, страна шестоугла, биће и ΧΥ страна шестоугла. Но ΧΨ је страна десетоугла и угао ΥΧΩ прав, значи и ΥΩ је страна петоугла; а и ΠΥ је страна петоугла. Према томе је и троугао ΠΥΩ једнакостран. Из истих разлога и сваки од преосталих троуглова са основицама ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ и са врхом у тачку Ω је једнакостран. Затим, пошто је ΦΛ страна шестоугла, а ΦΨ десетоугла и угао ΛΦΨ прав, биће ΛΨ страна петоугла. Из истих разлога, ако узмемо дуж ΜΦ, која је страна шестоугла, биће и ΜΨ страна петоугла. Но и ΛΜ је страна петоугла. Према томе је троугао ΛΜΨ једнакостран. На сличан начин се доказује да је и сваки од преосталих троуглова са основицама ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ и врхом у тачки Ψ једнакостран. На овај начин је конструисан икосаедар обухваћен са двадесет једнакостраних троуглова.

Треба га обухватити датом сфером и доказати да је ивица икосаедра ирационална и то такозвана „мања".

Заиста, пошто је ΦΧ страна шестоугла, а ΧΩ — десетоугла, ΦΩ је подељено тачком Χ непрекидно и већи део је ΦΧ; значи ΩΦ је према ΦΧ као ΦΧ према ΧΩ. Али ΦΧ је једнако ΦΕ, а ΧΩ једнако ΦΨ. Према томе је ΩΦ према ΦΕ као ΦΕ према ΦΨ. И углови ΩΦΕ и ΕΦΨ су прави. Значи, ако узмемо дуж ΕΩ, биће и угао ΨΕΩ прав због сличности троуглова ΨΕΩ и ΦΕΩ. Из истих разлога, пошто је ΩΦ према ΦΧ као ΦΧ према ΧΩ, а ΩΦ једнако ΨΧ и ΦΧ једнако ΧΠ, биће ΨΧ према ΧΠ као ΠΧ према ΧΩ. Затим, из истих разлога, ако узмемо ΠΨ, биће угао код Π прав. Према томе полукруг конструисан на ΨΩ проћи ће и кроз тачку Π. И ако се, при непокретном ΨΩ, полукруг обрне и поново врати у почетни положај од којег је почео обртање, он ће проћи кроз тачку Π и кроз преостале тачке икосаедра и биће икосаедар обухваћен сфером. Тврдим да је то дата сфера. Заиста преполовимо ΦΧ тачком Α'. И пошто је дуж ΦΩ подељена тачком Χ непрекидно и њен мањи део је ΩΧ, биће квадрат на збиру ΩΧ и половине већег дела ΧΑ' пет пута већи од квадрата на половини већег дела. Према томе је квадрат на ΩΑ' пет пута већи од квадрата на A'X. Но ΩΨ је двапут веће од ΩA', а ΦX двапут веће од A'X. Значи квадрат на ΩΨ је пет пута већи од квадрата на XΦ. И пошто је AΓ четири пута веће од ΓB, биће AB пет пута веће BΓ. Но AB је према BΓ као квадрат на AB према квадрату на BΔ, па према томе је квадрат на AB пет пута већи од квадрата на BΔ. А доказано је да је и квадрат на ΩΨ пет пута већи од квадрата на ΦX. И ΔB је једнако ΦX, јер је свако од њих полупречник круга EZHΘK. Према томе је и AB једнако ΨΩ. Али AB је пречник дате сфере. Дакле, и ΨΩ је пречник дате сфера. На овај начин је икосаедар обухваћен датом сфером.

Тврдим да је ивица икосаедра ирационална, такозвана „мања". Заиста, пошто је пречник сфере рационалан и квадрат на њему пет пута већи од квадрата на полупречнику круга EZHΘK, биће и полупречник круга EZHΘK рационалан, дакле рационалан је и његов пречник. Но ако се у круг са рационалним пречником уписује једнакостран петоугао, онда је страна петоугла ирационална, такозвана „мања". Но страна петоугла EZHΘK је ивица икосаедра. На овај начин је ивица икосаедра ирационална, такозвана „мања".

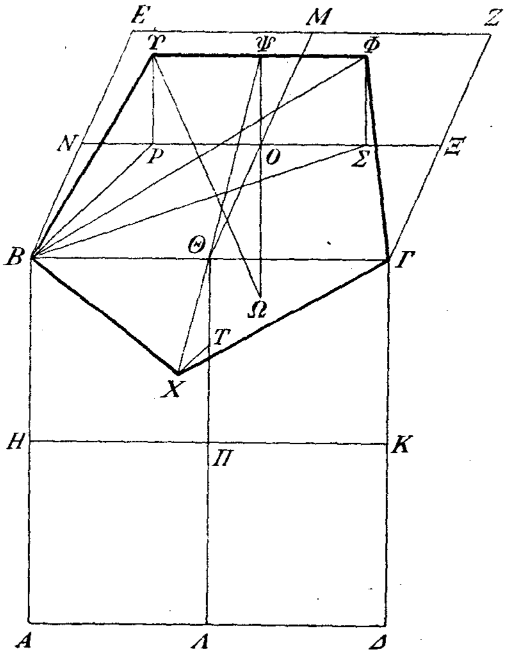
Последица

Из овог је јасно да је квадрат на пречнику сфере пет пута већи од квадрата на полупречнику круга помоћу ког се описује икосаедар, и да је пречник сфере једнак збиру стране шестоугла и две стране десетоугла уписаних у тај круг. А то је требало доказати.[18]

17.

Конструисати додекаедар, обухватити га сфером, као и раније наведена теле (фигуре), и доказати да је ивица додекаедра ирационална, такозвана апотома.

Узмимо две, једна на другој управне, равни ABΓΔ и ΓBEZ, раније поменуте коцке. Сваку од ивица AB, BΓ, ΓΔ, ΔA, EZ, EB, ZΓ преполовимо тачкама H, Θ, K, Λ, M, N, Ξ спојимо HK, ΘΛ, MΘ, NΞ, и поделимо сваку од NO, OΞ, ΘΠ непрекидно тачкама P, Σ, T. И нека су PO, OΣ, TΠ већи делови. Па из тачака P, Σ, T подигнимо нормале на равнима коцке са спољашње стране, одмеримо дужи РΥ, ΣФ, ТХ једнаке дужима РО, ОΣ, ТП и спојимо ΥВ, ВХ, ХГ, ГФ, ФΥ. Тврдим да је ΥВХГФ једнакостран раван петоугао и да има једнаке углове. Заиста, узмимо РВ, ΣВ и ФВ. Пошто је дуж NО подељена тачком Р непрекидно и већи део је РО, биће збир квадрата на ОN, и NР трипут већи од квадрата на РО. Но ОN је једнако NВ и ОР једнако РΥ. Према томе је збир квадрата на ВN и на NР трипут већи од квадрата на РΥ. Но збир квадрата на ВN и на NР једнак је квадрату на ВР. Значи, квадрат на ВР је трипут већи од квадрата на РΥ. Тако, да је збир квадрата на ВР и на РΥ четири пута већи од квадрата на РΥ. Но збир квадрата на ВР и на РΥ једнак је квадрату на ВΥ. Према томе је квадрат на ВΥ четири пута већи од квадрата на ΥР, дакле, ВΥ је двапут веће од РΥ. Но и ФГ је двапут веће од ΥР, пошто је ΣР двапут веће од ОР, тј. од РΥ. На овај начин ВΥ је једнако ΥФ. Слично се доказује, да је и свако од ВХ, ХГ, ГФ, једнако сваком од ВΥ и ΥФ. Дакле, петоугао ВΥФГХ је једнакостран. Тврдим да је и раван. Заиста, повуцимо кроз тачку О са спољашње стране коцке праву ОΨ паралелну свакој од правих РΥ и ΣФ и повуцимо ΨΘ и ΘХ. Тврдим да је ΨΘХ права. Заиста, пошто је дуж ΘП подељена тачком Т непрекидно и већи њен део је ПТ, биће ΘП према ПТ као ПТ према ТΘ. Но ΘП је једнако ΘО, а ПТ свакој од ТХ и ОΨ, дакле, ΘО је према ОΨ као ХТ према ТΘ. И дуж ΘО је паралелна



са ΤΧ, пошто је свака од њих нормална на равни ΒΔ. И дуж ΤΘ је паралелна са ΟΨ, јер је, заиста, свака нормална на равни ΒΖ. Но ако су два троугла, ΨΟΘ и ΘΤΧ, са по две пропорционалне стране, у таквом положају да су два крака угла једног троугла паралелна са хомологним крацима угла другог троугла, онда су њихове преостале стране у истој правој. Према томе су ΨΘ и ΘΧ на истој правој. Но свака права је у истој равни, па је према томе петоугао ΥΒΧΓΦ у једној равни.

Тврдим да он има једнаке углове.

Заиста, пошто је дуж ΝΟ подељена тачком Ρ непрекидно и већи део је ΟΡ [биће и збир ΝΟ и ΟΡ према ΟΝ као ΟΝ према ΟΡ], а ΟΡ је једнако ΟΣ [значи, ΣΝ је према ΝΟ као ΝΟ према ΟΣ], према томе, ΝΣ је подељено тачком Ο непрекидно и већи део је ΝΟ. Значи, збир квадрата на ΝΣ и на ΣΟ је трипут већи од квадрата на ΝΟ. Но ΝΟ је једнако ΝΒ и ΟΣ једнако ΣΦ. Према томе је збир квадрата на ΝΣ и на ΣΦ трипут већи од квадрата на ΝΒ. Тако да је збир квадрата на ΦΣ, ΣΝ и ΝΒ четири пута већи од квадрата на ΝΒ. Но збир квадрата на ΣΝ и на ΝΒ једнак је квадрату на ΣΒ. На тај начин збир квадрата на ΒΣ и на ΣΦ, а то је квадрат на ΒΦ [јер је угао ΦΣΒ прав], четири пута је већи од квадрата на ΝΒ. Значи ΒΦ је двапут веће од ΝΒ. Али и ΒΓ је двапут веће од ΒΝ. Према томе је ΒΦ једнако ΒΓ. И пошто су две стране ΒΥ и ΥΦ једнаке двема странама ΒΧ и ΧΓ и основица ΒΦ једнака је основици ΒΓ, биће и угао ΒΥΦ једнак углу ΒΧΓ. Слично се доказује да је и угао ΥΦΓ једнак углу ΒΧΓ. Према томе су три угла ΒΧΓ, ΒΥΦ и ΥΦΓ једнака међу собом. Али ако су код једнакостраног петоугла три угла једнака међу собом, петоугао има једнаке углове. Једнаке углове има и петоугао ΒΥΦΓΧ. А доказано је да је он и једнакостран. На тај начин петоугао ΒΥΦΓΧ је једнакостран и једнакоугли и налази се на ивици ΒΓ коцке. Према томе, ако на свакој од дванаест ивица коцке извршимо исто то, добићемо просторну фигуру обухваћену од дванаест једнакостраних и једнакоуглих петоуглова, која се зове додекаедар.

Треба такође и њега обухватити датом сфером и доказати, да је ивица додекаедра ирационална, такозвана апотома.

Заиста, продужимо ΨΟ за ΨΩ. Према томе се ΨΟ пресеца са дијагоналом коцке и полови је, како је то доказано у претпоследњој теореми једанаесте књиге. Нека се оне секу у тачки Ω. Према томе је Ω центар сфере која обухвата коцку и ΩΟ је половина ивице коцке. Узмимо ϒΩ. И пошто је дуж NΣ подељена тачком Ο непрекидно и већи део је NO, биће збир квадрата на NΣ и на ΣΟ трипут већи од квадрата на NO. Но NΣ једнако је ΨΩ, пошто је и NO једнако ΟΩ, а ΨΟ једнако ΟΣ. Али је и ΟΣ једнако Ψϒ, пошто је једнако PO. Према томе је збир квадрата на ΩΨ и на Ψϒ трипут већи од квадрата на NO. Но збир квадрата на ΩΨ и на Ψϒ једнак је квадрату на ϒΩ, значи и квадрат на ϒΩ је трипут већи од квадрата на NO. Али и квадрат на полупречнику сфере која обухвата коцку трипут је већи од квадрата на половини ивице коцке, јер је раније показано како се конструише коцка и обухвата сфером и како се доказује да је квадрат на пречнику сфере трипут већи од квадрата на ивици коцке. Но цело је према целом као и половина (првог) према половини (другог). Али NO је половина коцкине ивице, а ϒΩ је једнако полупречнику сфере која обухвата коцку. И Ω је центар сфере која обухвата коцку. Према томе је ϒ тачка на сферној површини. Слично се доказује да се и свако од осталих темена додекаедра налази на сферној површини. Додекаедар је према томе обухваћен датом сфером.

Тврдим да је ивица додекаедра ирационална, такозвана апотома.

Заиста, пошто је дуж NO подељена непрекидно и већи део је PO, а при непрекидној подели дужи ΟΞ већи део је ΟΣ, биће, при непрекидној подели целе дужи NΞ, већи део PΣ. Пошто је NO према OP, као OP према PN, а у истој су размери и удвостручени, јер су делови у истој размери као и мултиплуми исте вишеструкости. Према томе је NΞ према PΣ као PΣ према збиру NP и ΣΞ. Но веће је NΞ од PΣ. Због тога је и PΣ веће од збира NP и ΣΞ. На тај начин је дуж NΞ подељена непрекидно и већи део је PΣ. Но PΣ је једнако ϒΦ, према томе дуж NΞ подељена је непрекидно и има већи део ϒΦ. А пошто је пречник сфере рационалан и квадрат на њему трипут већи од квадрата на коцкиној ивици, биће рационална и дуж NΞ, ивица коцке. Но ако се рационална дуж дели непрекидно, сваки део је ирационалан и то апотома.

На овај начин је дуж ΥΦ, ивица додекаедра, ирационална и то апотома.

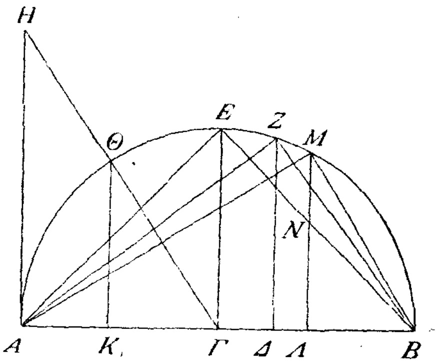
Последица

Из овог је јасно, да је при непрекидној подели ивице коцке већи део ивица додекаедра. А то је требало доказати.[19]

18.

Одредити ивице пет проучених тела и упоредити их међу собом.

Узмимо АВ као пречник дате сфере и тачком Г га тако поделимо да АГ буде једнако ГВ и тачком Δ тако да АΔ буде двапут веће од ΔВ, па на АВ конструишимо полукруг АЕВ, кроз Г и Δ повуцимо нормале ГЕ и ΔZ на АВ и спојимо АZ, ZВ, ЕВ. Пошто је АΔ двапут веће од ΔВ, биће АВ трипут веће од ВΔ. Или, после замене једног дела другим, ВА је један и по пута веће од АΔ. Но ВА је према АΔ као квадрат на ВА према квадрату на АZ, јер троугао АZВ има исте углове као и троугао АZΔ. Према томе је квадрат на ВА један и по пута већи од квадрата на АZ. Но и квадрат на пречнику сфере је један и по пута већи од квадрата на ивици пирамиде. Како је АВ пречник сфере, биће АZ једнако ивици пирамиде.



Затим, пошто је АΔ двапут веће од ΔВ, биће АВ трипут веће од ВΔ. На АВ је према ВΔ као квадрат на АВ према квадрату на ВZ. И квадрат на АВ је трипут већи од квадрата на ВZ. Но и квадрат на пречнику сфере је трипут већи од квадрата на ивици коцке. А како је АВ пречник сфере, биће ВZ ивица коцке.

И пошто је АГ једнако ГВ, биће АВ двапут веће од ВГ. Но АВ је према ВГ као квадрат на АВ према квадрату на ВЕ. Према томе је квадрат на АВ двапут већи од квадрата на ВЕ. Но и квадрат на пречнику сфере је двапут већи од ивице октаедра. А како је АВ пречник дате сфере, биће ВЕ ивица октаедра.

Повуцимо из тачке А праву АН управну на АВ, одмеримо АН једнако АВ и спојимо Н са Г. Па из тачке Θ повуцимо нормалу ΘК на праву АВ. И пошто је НА двапут веће од АГ, јер је НА једнако АВ, а НА је према АГ као ΘК према АВ, биће и ΘК двапут веће од КГ. А квадрат на ΘК је четири пута већи од квадрата на КГ. И према томе збир квадрата на ΘК и на КГ, а то значи на ΘГ, биће пет пута већи од квадрата на НГ. Но ΘГ је једнако ГВ, те према томе је квадрат на ВГ пет пута већи од квадрата на ГК. И пошто је АВ двапут веће од ГВ, а АΔ двапут веће од ΔВ, биће и остатак ВΔ двапут већи од остатка ΔГ. Према томе је ВГ трипут веће од ГΔ, а квадрат на ВГ девет пута већи од квадрата на ГΔ. Но квадрат на ВГ је и пет пута већи од квадрата на ГК. Према томе је квадрат на ГК већи од квадрата на ГΔ, дакле, и ГК је веће од ГΔ. Одмеримо ГΛ једнако ГК, кроз Λ повуцимо ΛМ управно на АВ и спојимо МВ. Пошто је квадрат на ВГ пет пута већи од квадрата на ГК и АВ је двапут веће од ВГ, а КΛ је двапут веће од ГК, биће и квадрат на АВ пет пута већи од квадрата на КΛ. Но и квадрат на пречнику сфере је пет пута већи од квадрата на полупречнику круга помоћу којег се конструише икосаедар. Како је АВ пречник сфере, биће КΛ полупречник круга помоћу којег се конструише икосаедар. Према томе је КΛ страна шестоугла поменутог круга. И пошто је пречник сфере једнак збиру стране шестоугла и две стране десетоугла уписаних у поменути круг, и АВ је пречник сфере, КΛ — страна шестоугла и АК једнако ΛВ, то је свака од АК и ΛВ страна десетоугла уписаног у круг, помоћу ког се конструише икосаедар. И пошто је ΛВ страна десетоугла, а МΛ — шестоугла, јер је МΛ једнако дужи КΛ, као и дужи ΘК, и то због тога што су подједнако удаљене од центра и што је свака од ΘК и КΛ двапут већа од КГ. Према томе је МВ страна петоугла. Али страна петоугла је и ивица икосаедра. На тај начин МВ је ивица икосаедра.

И пошто је ZB ивица коцке, поделимо је тачком N непрекидно и нека већи део буде NB. Према томе NB је ивица додекаедра. И пошто је квадрат на пречнику сфере један и по пута већи од квадрата на AZ, ивици пирамиде, двапут већи од квадрата на ВЕ, ивици октаедра, трипут већи од квадрата на ZB, ивици коцке, онда, од шест делова (јединица) квадрата на пречнику сфере квадрат на ивици пирамиде садржи четири, квадрат на ивици октаедра — три и на ивици коцке два дела. Према томе је квадрат на ивици пирамиде један и трећину пута већи од квадрата на ивици октаедра, двапут већи од квадрата на ивици коцке, а квадрат на ивици октаедра је један и по пута већи од квадрата на ивици коцке. Према томе, тврдим, да се ивице три поменута тела, — пирамиде, октаедра и коцке,— налазе међу собом у рационалним размерама. А ивице остала два, — икосаедра и додекаедра, — тврдим, не налазе се, ни међу собом ни према раније наведеним, у рационалним размерама, јер су оне ирационалне — „мања“ и апотома.

Докажимо сад да је ивица МВ икосаедра већа од ивице додекаедра.

Заиста, пошто троугао ZΔB има исте углове као и троугао ZAB, постоји пропорција: ΔB је према BZ као BZ према BA. А кад су три дужи пропорционалне, биће прва према трећој као квадрат на првој према квадрату на другој. Према томе је ΔB према BA као квадрат на ΔB према квадрату на BZ. И обратно: AB је према BΔ као квадрат на ZB према квадрату на BΔ. Али AB је трипут веће од BΔ, па је и квадрат на ZB трипут већи од квадрата на BΔ. Но квадрат на AΔ је четири пута већи од квадрата на ΔB, јер је AΔ двапут веће од ΔB. Према томе је квадрат на AΔ већи од квадрата на ZB. Дакле, и AΔ је веће од ZB. Утолико пре је и AΛ веће од ZB. И при подели AΛ у непрекидној размери већи део је KΛ, пошто је ΛK страна шестоугла, а KA — десетоугла. А при непрекидној подели ZB већи део је NB. Према томе је KΛ веће од NB. Но KΛ је једнако ΛM, значи и ΛM је веће од NB [а MB је веће од ΛМ]. Према томе утолико пре је MB, ивица икосаедра, већа од NB, ивице додекаедра. А то је требало доказати.[20]

Тврдим, да се сем пет поменутих тела не може конструисати ниједно друго тело, које би било обухваћено једнакостраним и једнакоуглим многоугловима.

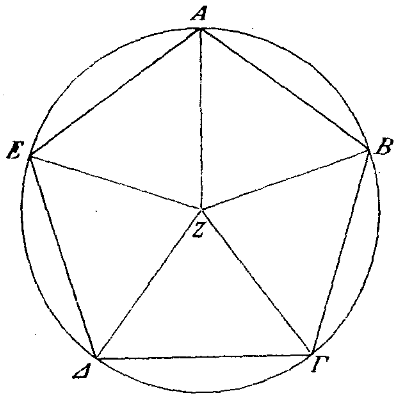
Заиста, од два троугла или ма које равне слике рогаљ се не може саставити. Од три троугла (се образује) рогаљ пирамиде, од четири — октаедра, од пет — икосаедра. Од шест једнакостраних и једнакоуглих троуглова састављених код једне тачке рогаљ се не може образовати; заиста, пошто угао једнакостраног троугла износи две трећине правог угла, то је шест таквих углова једнако четири права угла, а то је немогуће, јер је сваки рогаљ обухваћен угловима, чији је збир мањи од четири права угла. Из истих разлога се не може образовати рогаљ ни са више од шест таквих углова у равни. Са три квадрата је обухваћен рогаљ коцке. Са четири је немогуће, јер се добивају поново четири права угла. Од једнакостраних и једнакоуглих петоуглова се са три образује додекаедар. А од четири је немогуће, јер угао једнакостраног петоугла износи прав угао и једну петину, па према томе су четири угла заједно већи од четири права угла, а то је немогуће. Из истих разлога се не може образовати рогаљ ни помоћу других многоуглова.

На овај начин сем пет поменутих тела не може се конструисати ниједно друго тело које би било обухваћено једнакостраним и једнакоуглим многоугловима. А то је требало доказати.[21]

Лема

Да угао једнакостраног и једнакоуглог петоугла износи прав угао и петину правог, доказује се овако.

Нека је ΑΒΓΔΕ једнакострани и једнакоугли петоугао; опишимо око њега круг ΑΒΓΔΕ; узмимо му за центар Ζ и спојимо ZА, ZВ, ZГ, ZΔ, ZЕ. Ове праве полове углове код А, В, Г, Δ, Е. Пошто је пет углова код Z једнако четири



права угла и они су једнаки, један од њих, напр. АZВ, износи прав угао без једне петине правог. А збир остала два, ZАВ и АВZ, износи прав угао и једну петину. Како је угао ZАВ једнак ZВГ, биће и цео угао АВГ једнак правом углу и једној петини. А то је требало доказати.

КОМЕНТАР

[1] Аналитичко извођење ове теореме је врло кратко.

Нека су a и a_1 цела дуж и већи део дужи a подељене непрекидно. Тада је

$$a : a_1 = a_1 : (a - a_1).$$

Према томе је

$$a_1^2 = a\,(a - a_1),$$

или

$$a_1^2 + a\,a_1 = a^2.$$

Одатле, на основу елементарне методе „допуњавања до потпуног квадрата", изводимо

$$a_1^2 + 2\,a_1 \cdot \frac{1}{2}\,a + \left(\frac{1}{a}\,a\right)^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}\,a\right)^2,$$

или

$$\left(a_1 + \frac{1}{2}\,a\right)^2 = 5\left(\frac{1}{2}\,a\right)^2,$$

а то и одговара тексту ове Еуклидове теореме.

Интересантно је пропратити, исто тако у аналитичкој форми, узастопна расуђивања Еуклидовог доказа ове теореме као вежбу.

[2] Аналитички ову теорему можемо формулисати овако.

Ако је

(*) $$a = a_1 + a_2$$

и

(**) $$a^2 = 5\,a_1^2$$

биће a_2 већи део кад се $2\,a_1$ подели непрекидно.

Заиста, ако у (**) ставимо (*), добићемо

$$(a_1 + a_2)^2 = 5\,a_1^2,$$

или

$$a_2^2=2\,a_1\,(2\,a_1-a_2),$$

одакле је

$$2\,a_1 : a_2=a_2 : (2\,a_1-a_2),$$

а то и потврђује наведену теорему.

[3] I. L. Heiberg сматра да је ова лема била укључена доцније и да по стилу излагања не одговара Еуклиду.

[4] Аналитички ову теорему можемо изразити и овако. Ако је

$$(a_1+a_2) : a_1=a_1 : a_2,$$

мора бити:

$$\left(a_2+\frac{1}{2}\,a_1\right)^2=5\left(\frac{1}{2}\,a_1\right)^2.$$

Потврда тачности се врши на овај начин. Из пропорције следује

$$a_1^2=a_2\,(a_1+a_2),$$

одакле закључујемо:

$$a_2^2+2\cdot\frac{1}{2}\,a_1\cdot a_2+\left(\frac{1}{2}\,a_1\right)^2=\left(\frac{1}{2}\,a_1\right)^2+a_1^2,$$

а то и доводи до једначине

$$\left(a_2+\frac{1}{2}\,a_1\right)^2=5\left(\frac{1}{2}\,a_1\right)^2,$$

која потврђује садржај теореме.

[5] Аналитички ова теорема тврди да из услова

$$(a_1+a_2) : a_1=a_1 : a_2$$

следује једначина

$$(a_1+a_2)^2+a_2^2 = 3\,a_1^2.$$

Заиста, из услова

$$a_1^2=(a_1+a_2)\,a_2$$

и замене

$$a_1=a_1+a_2-a_2$$

проистиче

$$(a_1+a_2)^2-2\,a_2\,(a_1+a_2)+a_2^2=(a_1+a_2)\,a_2;$$

одатле закључујемо да је

$$(a_1+a_2)^2+a_2^2=3\,(a_1+a_2)\,a_2=3\,a_1^2,$$

а то и потврђује теорему.

[6] Аналитички ову теорему можемо изразити овако.

Ако је

$$(a_1+a_2):a_1=a_1:a_2,$$

онда је и

$$(a_1+a_2+a_1):(a_1+a_2)=(a_1+a_2):a_1.$$

Из последње пропорције треба да следује:

$$(a_1+a_2)^2=a_1\,(a_1+a_2+a_1),$$

што после извршеног множења даје

$$a_1^2=(a_1+a_2)\,a_2,$$

а то се потврђује на основу прве пропорције.

[7] Теореме 1—6 припадају теорији „златног пресека". Један део ове теорије, изложен на други начин, био је предмет проучавања и у другој књизи „Елемената". Врло је интересантно, и са логичког и са историског гледишта, упоредно проучавање како поделе материјала у другој и у овој књизи, тако и математичког стила излагања. Тим упоредним проучавањем се бави више коментатора.

[8] Ову једноставну теорему Еуклид искоришћује при извођењу особина додекаедра.

[9] Савременим математичким језиком текст ове теореме згодније је кратко изразити на овај начин: Дијагонале правилног петоугла се деле златним пресеком и већи део је страна правилног петоугла.

[10] Из ове теореме, коју алгебарски можемо формулисати овако

$$(r+a_{10}):r=r:a_{10},$$

где је: $r=a_6$ полупречник круга и страна уписаног правилног шестоугла, a_{10} — страна уписаног правилног десетоугла, непосредно следује ова вредност стране уписаног правилног десетоугла

$$a_{10} = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1).$$

[11] Ова теорема омогућава да се помоћу стране правилног уписаног десетоугла, која је одређена у коментару претходне теореме, и полупречника круга израчуна страна правилног уписаног петоугла.

Заиста, према овој теореми имамо

$$a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2,$$

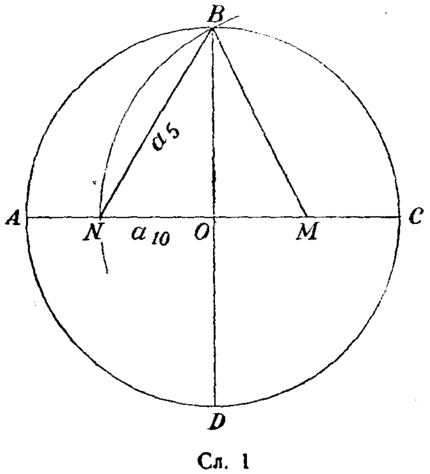
а како је $a_6 = r$ и $a_{10} = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1)$, добива се

$$a_5 = \frac{1}{2} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot$$

Помоћу вредности a_5 лако је поставити једначину

$$a_5^2 + d_5^2 = 5 r^2,$$

где је d_5 дијагонала правилног петоугла уписаног у круг полупречника r.



Сл. 1

Изнесимо још Птолемајову конструкцију стране петоугла и десетоугла, коју је Птолемај навео у Алмагесту.

Нека су AC и BD (сл. 1) два управна пречника, M средина полупречника OC и MN = MB. Тврдим да је BN страна петоугла и ON страна десетоугла уписних у нацртани круг.

Заиста, непосредно из слике имамо

$$NM^2 = BM^2 = OB^2 + OM^2,$$

или

$$\left(a_{10}+\frac{1}{2}r\right)^2=r^2+\frac{1}{4}r^2,$$

одакле добивамо потребну вредност

$$a_{10}=\frac{1}{2}r\,(\sqrt{5}-1).$$

За a_5 слика даје

$$a_5^2=a_{10}^2+r^2,$$

а то је управо она једначина што одређује a_5.

[12] Пре свега треба обратити пажњу на једну новину у Еуклидовим ознакама, коју је он употребио први пут при излагању доказа ове теореме. Збир две дужи, напр. ΔΓ и ΓΜ, Еуклид означује са ΔΓΜ и онда кад те две дужи не припадају истој правој. У наш текст ми не уносимо ту Еуклидову ознаку.

Аналитички садржај теореме састоји се у изражавању стране петоугла a_5 као апотоме, тј. разлике две ирационалне величине a_1 и a_2, тј.

$$a_5=a_1-a_2,$$

и то четврте апотоме (теорема 76, X књиге) или „мање", за коју a_1 и a_2 задовољавају ове услове:

$$a_1^2+a_2^2=\text{рационално},$$

$$a_1\,a_2=\text{медијално}.$$

Пошто је из претходног коментара

$$a_5=\frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

треба одредити $a_1=\frac{1}{2}r\sqrt{A}$, $a_2=\frac{1}{2}r\sqrt{B}$, тј. ставити

$$a_5=\frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}r\,(\sqrt{A}-\sqrt{B}),$$

или

$$\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\sqrt{A}-\sqrt{B}.$$

Пошто је после дизања на квадрат

$$10-2\sqrt{5}=A+B-2\sqrt{AB}$$

имамо две једначине за A и B:

$$A+B=10, \quad AB=5,$$

чије решење

$$A=5+2\sqrt{5}, \quad B=5-2\sqrt{5}$$

одговара нашем задатку и долазимо до резултата

$$a_5=\frac{1}{2}r\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\frac{1}{2}r\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$

а то је четврта апотома, јер збир квадрата износи

$$\left(\frac{1}{2}r\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}r\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)^2=\frac{5}{2}r^2,$$

а то је рационално, а производ

$$\frac{1}{2}r\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}r\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\frac{1}{4}r^2\sqrt{5},$$

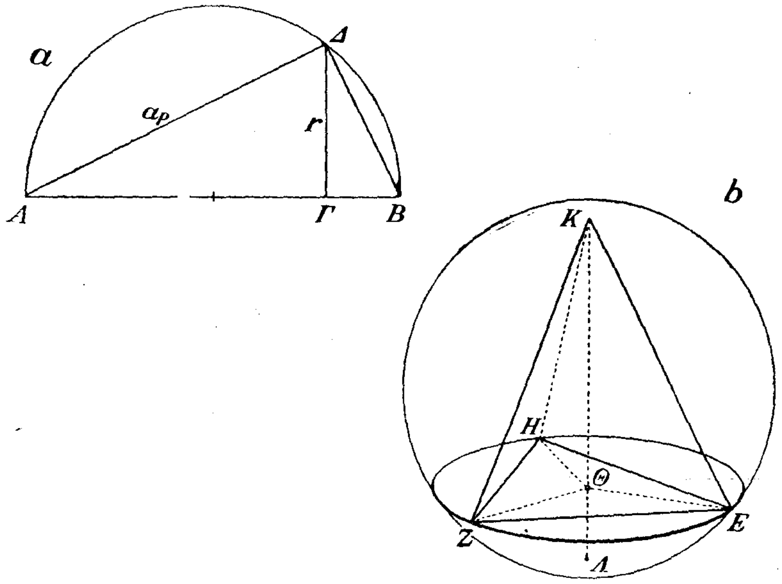
а то је медијално. Према томе је аналитички доказана ова Еуклидова особина стране петоугла. Интересантно је пропратити аналитички и Еуклидов доказ, како то ради, например, T. L. Heath.

[13] То је, можда, најједноставнија теорема, чији се резултат непосредно чита са слике. На основу Питагорине теореме из троугла ABE читамо: $a_3^2=(2\,r)^2-r^2=3\,r^2$, а то и одговара овој теореми.

[14] Ова теорема је посвећена конструкцији и метричким особинама правилног тетраедра уписаног у сферу.

Интересантно је приметити да се тај просторни објект, који се сада зове правилни тетраедар, зове једноставно у тексту теореме пирамида, без обзира на то што је појам у Еуклидовим дефиницијама много шири. Таква нелогичност у примени терминологије се појављује код Еуклида и у другим појмовима. Од овог Еуклидовог недостатка није поштеђена ни данашња школска литература елементарне геометрије.

Пошто је у Heiberg'овом издању доста незгодна слика, а ми у тексту репродукујемо оригиналне слике тог издања, наводимо овде другу слику, природнију са данашњег гледишта на распоред просторних елемената, нарочито при првом проучавању тих елемената.



Сл. 2

У вези са решавањем конструктивног задатка ове теореме треба нагласити да то решење има вештачки карактер, ако се претходно задатак не анализира. Није јасно, зашто Еуклид баш непосредно у почетку, без анализе просторних односа, узима дуж, будући пречник сфере, и дели је у односу 2:1.

Карактеристично је за излагање и то да Еуклид чак и елементарну метричку особину правоуглог троугла издваја у засебан став као лему.

Докажимо аналитички у теореми наведену метричку особину правилног тетраедра и описане сфере.

Ако за елементе просторне слике и троугла АВГ уведемо кратке ознаке

ΚΕ = ΖΕ = ΑΔ = a_p (ивица пирамиде),

ΑΒ = ΚΛ = d (пречник сфере), md = ΑΓ (висина пирамиде),

nd = ΓΒ, $(m+n=1)$, ΘΕ = ΓΔ = r (полупречник круга описаног око основе пирамиде),

можемо на основу геометриских особина написати ове три једначине:

$a_p^2 = 3\,r^2$ (према теореми 12. за једнакостран троугао),

$(md)^2 = a_p^2 - r^2$ (према Питагориној теореми),

$mnd^2 = r^2$ (према последици Питагорине теореме).

Одавде, после елиминисања a_p, r и d долазимо до резултата

$$m : n = 2 : 1, \quad m = \frac{2}{3}, \quad n = \frac{1}{3},$$

који Еуклид претпоставља у почетку теореме. После тога остаје само две једначине

$$a_p^2 = 3r^2, \quad \left(\frac{2}{3}\,d\right)^2 = 2r^2,$$

које дају метричку везу

$$d^2 = \frac{3}{2}\,a_p^2,$$

доказану у теореми.

Видимо да при том извођењу садржај наредне леме није ни потребан.

[15] Ако задржимо ознаке коментара претходне 13. теореме и означимо дуж ΓΒ са c, садржај леме се може овако изразити:

$$d : c = a_p^2 : r^2.$$

Видимо да та пропорција садржи две величине r и c, које не учествују у формулисању дефинитивног резултата; како смо помоћу само једне помоћне величине r, под условом $m : n = 2 : 1$, извели тражену везу, и то врло једноставно, јасно је да је друга величина c сувишна. Она је сувишна и због тога што се изражава, и то много једноставније, помоћу основне величине проблема, јер је $c = \frac{1}{3}\,d$, а са таквом вредношћу садржај леме се своди на једначину

$$a_p^2 = 3\,r^2,$$

која је наведена као теорема 12. и коју је Еуклид већ искористио у доказу теореме 13.

[16] Расуђивања ове теореме су изведена по истој схеми као и расуђивања претходне теореме, само су једноставнија према простијој природи садржаја теореме.

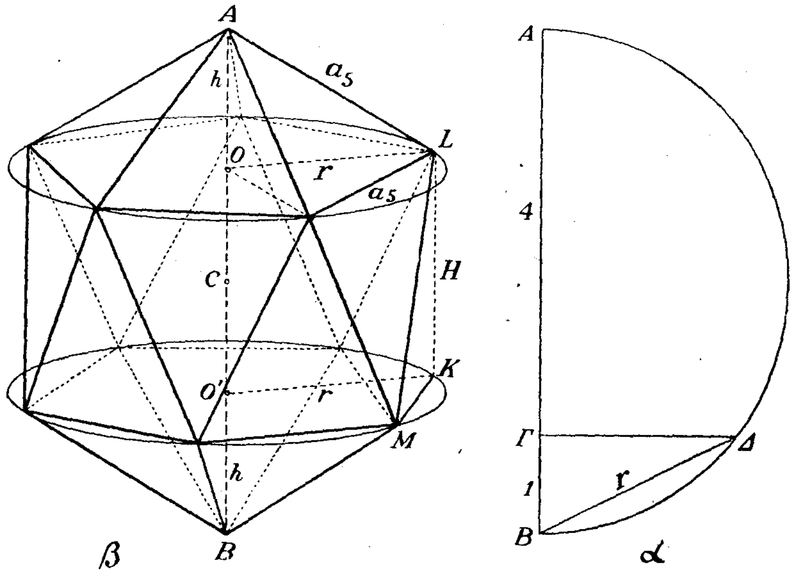
Између ивице октаедра $a_{\text{окт.}}$ и полупречника R описане сфере лако се поставља ова веза

$$a_{\text{окт.}} = R\sqrt{2}\,.$$

[17] И у извођењу овог става о коцки расуђивања су извршена по схеми претходних теорема о тетраедру и октаедру.

Веза између ивице коцке $a_{\text{коц.}}$ и полупречника описане сфере изгледа овако

$$a_{\text{коц.}} = \frac{2}{3} R\sqrt{3}\,.$$



Сл. 3

[18] Изведимо кратко конструкцију икосаедра по Еуклидовом плану. Пошто слика у Heiberg'овом издању није згодна, дајемо другу слику (сл. 3).

Основа Еуклидове конструкције икосаедра, уписаног у дату сферу, је пречник сфере, зваћемо га основни, са два мала паралелна једнака круга управна на основном пречнику. Ако са R означимо полупречник сфере, са r полупречник наведених малих кругова, за утврђивање везе између r и R Еуклид наводи пре свега слику у равни (сл. 3, *a*), где је

$$AB=2R, \quad B\Gamma:\Gamma A=1:4, \quad B\Delta=r.$$

Са те слике се одређује вредност

$$r=\frac{2}{\sqrt{5}}R. \tag{1}$$

Пречник $AB=2R$ се дели на делове $AO=BO'=h$, $OO'=H$, где су O и O' центри малих кругова полупречника r; тада имамо

$$H=\frac{2}{\sqrt{5}}R=r,$$

пошто је $r^2=\left(R+\frac{1}{2}H\right)\left(R-\frac{1}{2}H\right)$, па је, значи, $\frac{4}{5}R^2=$ $=R^2-\frac{1}{4}H^2$, а одавде и одређујемо написану вредност H. После тога добивамо за h :

$$h=\frac{R}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)=a_{10},$$

јер је

$$h=\frac{1}{2}(2R-H)=\frac{R}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1),$$

а то је вредност стране десетоугла уписаног у круг полупречника r.

После наведене поделе основног пречника можемо извршити просторну конструкцију икосаедра (сл. 3, *b*). Кроз тачку O повуцимо раван управну на пречник AB и у круг те равни упишимо петоугао. Његова страна износи

$$a_5=\frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{R}{\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{R}{5}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}.$$

После тога из троугла AOL одређујемо хипотенузу AL:

$$AL^2=r^2+h^2=r^2+\frac{1}{4}r^2(\sqrt{5}-1)^2=\frac{1}{4}(10-2\sqrt{5}).$$

Ова једначина тврди да је $AL=a_5$. Према томе је пирамида са врхом A једнаконвична са ивицом a_5. Исто вреди и за пирамиду са врхом у тачки B.

Појас између два паралелна круга се испуњава троугловима и то тако да се, кад је основица троугла страна уписаног петоугла у једном малом кругу, његов врх налази на другом малом кругу. Покажимо да је бочна страна сваког таквог троугла једнака наведеној дужини a_5. Заиста, из троугла LKM, где су $H=r$, $MK=a_{10}$ имамо

$$LM^2=H^2+KM^2=r^2+\frac{1}{4}r^2(\sqrt{5}-1)^2=\frac{1}{4}r^2(10-2\sqrt{5})=a_5^2.$$

На тај начин је конструисан икосаедар уписан у сферу пречника $2R$.

Није тешко показати да се израз за његову ивицу,

$$a_5=\frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

може претворити у ову разлику

$$a_5=\frac{1}{2}r\left[\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right],$$

а то је такозвана „мања" ирационалност.

При томе једначина (1) потврђује први део последице, јер је

$$5r^2=(2R)^2,$$

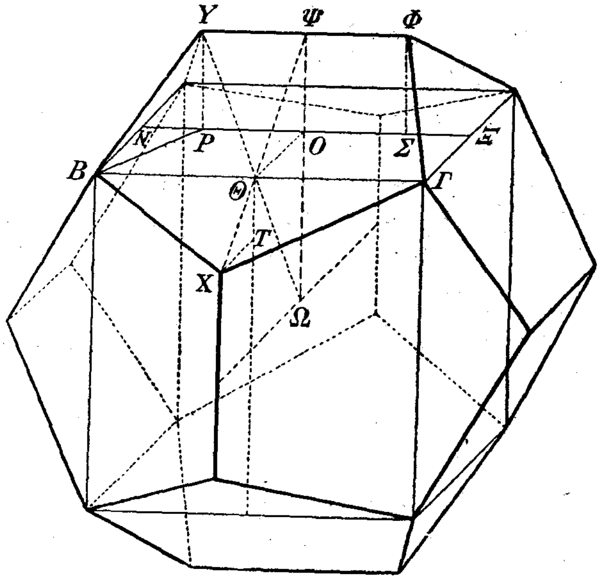
а извршена подела пречника потврђује други део последице, јер је

$$AB=2h+H=2a_{10}+a_6.$$

Сем Еуклидове конструкције икосаедра постоје и друге конструкције, у чију анализу нећемо улазити.

[19] Еуклидова конструкција додекаедра полази од коцке, на чијој се свакој страни конструишу делови четири пра-

вилна петоугла у косом положају према равнима коцке. Конструкција једног петоугла је показана на слици у тексту. Овде додајемо допунску слику конструисаног целокупног додекаедра (сл. 4).



Сл. 4

Кратко Еуклидову конструкцију у мало измењеној форми можемо приказати овим редом.

1. Конструише се коцка.

2. Спајају се средине N и Ξ наспрамних ивица коцке и одређује се средина дужи NΞ, тачка O.

3. Тачкама P и Σ се деле непрекидно дужи NO и OΞ и то тако да OP и OΣ буду већи делови; дужину PΣ означимо са *a*; то ће бити ивица додекаедра.

4. Из тачака P и Σ подижу се нормале на раван коцке са једнаком дужином $P\Upsilon = \Sigma\Phi = \frac{1}{2}a$. Тачке B, Υ, Φ, Γ су темена оног дела правилног петоугла у облику трапеза, који је над изабраном равни коцке.

5. Последње теме X се добива као теме једнакокраког троугла, у равни конструисаног трапеза, коме је основица BΓ,

ивица коцке и дијагонала правилног петоугла, а бочна страна једнака a.

Доказ изведене конструкције у детаљима се налази у Еуклидовом тексту. Изведимо неке аналитичке особине уведених геометриских елемената.

$\Upsilon\Phi = \Pi\Sigma = a$, то је ивица додекаедра.

Ако са c означимо ивицу коцке, $OP = \frac{1}{2} a$ се добива као већи део $ON = \frac{1}{2} c$ подељене непрекидно, тј.

$$\frac{c}{2} : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} : \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right),$$

одакле је

$$c^2 = a^2 + ac. \tag{1}$$

Пошто је

$$B\Upsilon^2 = P\Upsilon^2 + BP^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 = a^2,$$

и то на основу једначине (1), закључујемо да и $B\Upsilon = a$ ивица додекаедра. Слично се потврђује да је и ГФ једнако a. Даље, код Еуклида се показује да преостало теме X задовољава оне услове, који су наведени код нас у петој тачки.

За извођење везе између пречника $2R$ описане сфере и ивице додекаедра узмимо троугао $\Upsilon\Psi\Omega$, из којег имамо

$$R^2 = \Upsilon\Psi^2 + \Psi\Omega^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right)^2,$$

одакле, на основу (1), изводимо:

$$(2R)^2 = 3c^2.$$

Како из исте једначине (1) имамо

$$c = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

претходна једначина даје тражени резултат

$$a = \frac{R}{\sqrt{3}}(\sqrt{5} - 1) = \frac{R}{3}(\sqrt{15} - \sqrt{3}).$$

Пошто је R рационално, ивица додекаедра је разлика две ирационалне величине и, према томе, претставља апотому.

[20] У нашем коментару навели смо алгебарске вредности ивица правилних полиједара у функцији полупречника описане сфере и то за:

тетраедар у[14] $a_{\text{тетр.}} = \frac{2}{3} R \sqrt{6}$

октаедар у[16] $a_{\text{окт.}} = R \sqrt{2},$

коцку у[17] $a_{\text{коц.}} = \frac{2}{3} R \sqrt{3},$

икосаедар у[18] $a_{\text{икос.}} = \frac{1}{5} R \sqrt{10(5-\sqrt{5})},$

додекаедар у[19] $a_{\text{дод.}} = \frac{1}{3} R (\sqrt{15}-\sqrt{3}).$

У овој последњој теореми Еуклид даје конструкцију у равни за одређивање свих тих ивица као функција пречника 2 R описане сфере.

Пошто овај, врло интересантан, резултат није довољно познат, понављам га у краћој форми и дајем кратак аналитички доказ. Придржавамо се слике у тексту. Из те слике непосредно имамо:

$$\text{АГ}=\text{ГВ}=\text{R},\ \ \text{АΔ}=\frac{2}{3}\cdot 2\,\text{R}=\frac{4}{3}\text{R},\ \ \text{ΔВ}=\frac{2}{3}\text{R},\ \ \text{ГН}=\text{R}\sqrt{5},$$

$$\text{КГ}=\text{ГΛ}=\frac{1}{\sqrt{5}}\text{R}=\frac{1}{5}\text{R}\sqrt{5}.$$

На основу тих података лако добивамо

$$\text{AZ}^2=\text{AB}\cdot\text{AΔ}=2\,\text{R}\cdot\frac{4}{3}\text{R}=\frac{8}{3}\text{R}^2,$$

одакле је

$$\text{AZ}=\frac{2}{3}\text{R}\sqrt{6}, \tag{1}$$

а то је ивица тетраедра.

Даље, рачунамо

$$BE = R\sqrt{2}, \tag{2}$$

а то је ивица октаедра.

За BZ имамо

$$BZ^2 = AB^2 - AZ^2 = (2\,R)^2 - \frac{8}{3}R^2 = \frac{4}{3}R^2,$$

одакле је

$$BZ = \frac{2}{3}R\sqrt{3},$$

а то је ивица коцке.

За икосаедар израчунавамо BM, и то овако

$$BM^2 = AB \cdot \Lambda B,$$

али

$$\Lambda B = B\Gamma - \Gamma\Lambda = R - \frac{R}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}R(\sqrt{5}-1),$$

па према томе имамо

$$BM^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}R^2(\sqrt{5}-1) = \frac{2}{5}R^2(5-\sqrt{5}),$$

одакле је

$$BM = \frac{1}{5}R\sqrt{10(5-\sqrt{5})}.$$

Најзад, за додекаедар треба узети већи део BN дужи BZ, подељене непрекидно. Пошто дуж BZ има вредност

$$BZ = \frac{2}{3}R\sqrt{3},$$

а већи део неке дужи m подељене непрекидно износи

$$\frac{1}{2}m(\sqrt{5}-1),$$

закључујемо да је

$$BN = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\cdot\frac{2}{3}R\sqrt{3} = \frac{1}{3}R(\sqrt{15}-\sqrt{3}),$$

а то је ивица додекаедра.

Што се тиче пропорције

$$(2\,R)^2 : a^2_{\text{тетр.}} : a^2_{\text{окт.}} : a^2_{\text{коц.}} = 6 : 4 : 3 : 2,$$

она непосредно следује из написаних вредности ивица наведених тела.

Размера $a^2_{\text{икос.}} : a^2_{\text{дод.}}$ је ирационална, и $a_{\text{икос.}} > a_{\text{дод.}}$, јер је

$$\frac{1}{5}R\sqrt{10(5-\sqrt{5})} > \frac{1}{3}R(\sqrt{15}-\sqrt{3}).$$

а то се потврђује непосредним дизањем леве и десне стране на квадрат.

[21] Други део ове теореме садржи расуђивање о томе да правилних тела може бити само пет наведених. Ово кратко расуђивање је постало основно и улази у све уџбенике елементарне геометрије готово у истој форми.

Теорија правилних полиједара игра врло важну улогу не само у теориској математици — анализи (теорија група) и геометрији, већ и у примењеној математици, механици и физици.

Теорија полиједара разноврсних облика данас претставља посебну област која је, нарочито у вези са кристалографијом, постала и засебна грана науке о природи, наука о природним формама. Као специјални део она улази и у топологију.

После правилних тела, која имају једнаке правилне рогљеве и једнаке правилне стране и која се зову Платонови полиједри, први типови полиједара са најмањим отступањем од правилности то су такозвани Архимедови полиједри: једнакорогљасти полуправилни полиједри и једнакострани полуправилни полиједри. Прву категорију Архимедових полиједара искористио сам у једном свом раду[1]) као пример проблема n тела, који се може решити помоћу елиптичких функција. Прва и друга категорија Архимедових полиједара садржи по 15 тела. Наведеном раду приложени су фотографски снимци 15 модела једнакорогљастих полиједара. Сами модели су изгорели за време рата заједно са библиотеком Математичког семинара Београдског универзитета.

---

[1]) Улога једнакорогљастих Архимедових полиједара у проблему више тела. Глас. CLXXXV САН. 1941.

ДОДАТАК

Такозвана четрнаеста и петнаеста књига Еуклидових елемената

У свом издању грчко-латинског текста „Euclides Elementa“ I. L. Heiberg даје још две књиге: четрнаесту, која припада грчком математичару Хипсиклу, живео је око 200 г. наше ере, и петнаесту, чији је аутор непознат. Из текста петнаесте књиге се може закључити да је она била написана много доцније, можда чак у VI веку н. е. Како се ове две књиге и по садржају и по начину излагања знатно разликују од правих Еуклидових књига, оне су добиле назив „такозваних књига“ Еуклидових елемената.

Како ове две књиге имају више историски значај и њихов геометриски садржај је врло скроман, дајемо, као и други Еуклидови преводиоци, превод само важнијих места из тих књига и то са коментаром.

Четрнаеста књига

Тексту књиге претходи овај предговор.

О Протарху, кад је Василије (Базилејдес) из Тира дошао у Александрију и састао се са мојим оцем, он је већи део свог боравка провео са мојим оцем, јер их је спајао заједнички интерес према математици. И тако, једног дана, док су проучавали Аполонијеву књигу о упоређивању додекаедра и икосаедра уписаних у исту сферу, наиме у каквом су они односу један према другом, дошли су Василије и мој отац до закључка да оно што је написано код Аполонија није тачно, те су, како сам чуо од оца, написали сами исправљени текст. Доцније је и мени дошла у руке друга књига, коју је издао Аполоније, са неким доказом који се односи на поменуто питање, па сам са великим одушевљењем почео да се бавим тим питањем. Сад, изгледа, сваки може да се упозна са књигом коју је издао Аполоније, пошто се она налази у промету и то у новој обради, која је, мислим, пажљивије написана. И ја, кад сам написао у облику коментара све што ми је изгледало потребно, решио сам да се са овим рукописом обратим теби, с једне стране стога што си ти, због твог успеха у свим гранама математике, нарочито у геометрији, у стању да, са пуним познавањем ствари, судиш о свему што ћу даље написати, — са друге стране због тога, што ћеш ти, добро познат са мојим оцем и расположен према мени, добронамерно обратити своје уво мојој расправи. На овом, изгледа, треба завршити мој предговор и приступити самом излагању.

1.

Нормала спуштена из центра круга на страну у тај круг уписаног петоугла једнака је половини збира стране шестоугла и стране десетоугла уписаних у исти круг.

Покажимо кратак доказ ове теореме.

Нека је у кругу ABΓ полупречника ΔZ=r дуж BΓ страна уписаног петоугла, ΔEZ нормала на BΓ, ΓH — симетрала угла ΔΓZ. Из елементарног посматрања углова троугла ΔΓZ са симетралом ΓH следују једнакости

$$\Delta H = H\Gamma = \Gamma Z = a_{10}$$

и

$$EZ = EH.$$

Према томе за висину ΔE можемо написати два израза:

$$\Delta E = \Delta H + EH = a_{10} + EH,$$

$$\Delta E = \Delta Z - EZ = r - EH,$$

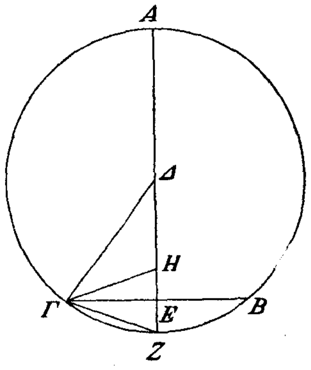
одакле, после сабирања, добивамо једначину

$$2\,\Delta E = r + a_{10} = a_6 + a_{10},$$

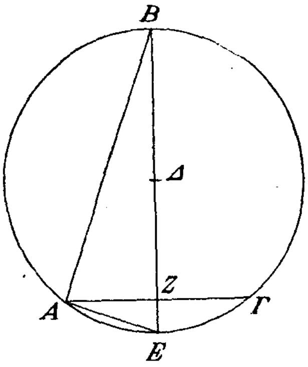
која потврђује теорему.

2.

Ако је у круг уписан једнакострани и једнакоугли петоугао, збир квадрата на његовој дијагонали и на његовој страни једнак је петоструком квадрату на полупречнику круга.



Сл. 1



Сл. 2

Нека је у кругу АВГ полупречника $\Delta E = r$ дуж $A\Gamma = a_5$ страна уписаног петоугла, а $AB = d_5$ његова дијагонала. Треба доказати да је

$$d_5^2 + a_5^2 = 5\,r^2.$$

Из правоуглог троугла АВЕ имамо

$$d_5^2 + a_{10}^2 = 4\,r^2,$$

но између a_5 и a_{10} постоји (10, књ. XIII) веза

$$a_5^2 = a_{10}^2 + r^2;$$

сабирањем чланова написане две једначине после елиминисања a_{10} долазимо до једначине

$$d_5^2 + a_5^2 = 5\,r^2,$$

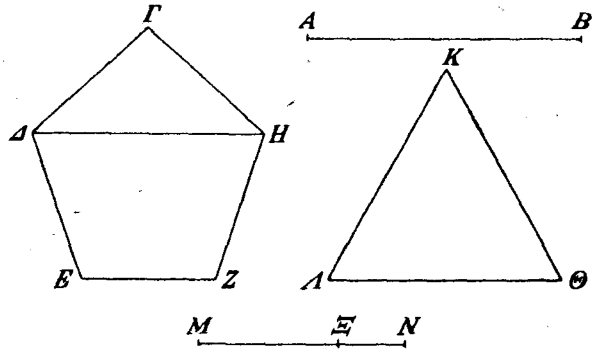
која потврђује теорему.

3.

Јадан исти круг обухвата и петоугао додекаедра и троугао икосаедра, који су уписани у исту сферу.

Хипсикл на овај начин доказује ову теорему.

Нека је AB пречник сфере; нека су у њу уписани додекаедар и икосаедар и нека је ΓΔEZH један од петоуглова додекаедра, а KΛΘ један од троуглова икосаедра. Тврдим да су полупречници око њих описаних кругова једнаки, тј. да исти круг обухвата и петоугао ΓΔEZH и троугао KΛΘ.



Сл. 3

Повуцимо ΔH. ΔH ће бити ивица коцке. Узмимо сад праву MN тако да квадрат на AB буде пет пута већи од квадрата на MN. Но и квадрат на пречнику (2 R) сфере је пет пута већи од квадрата на полупречнику (*r*) оног круга помоћу кога се конструише икосаедар. Према томе MN је полупречник оног круга помоћу кога се конструише икосаедар. Поделимо тачком Ξ дуж MN непрекидно и нека је MΞ већи део. MΞ ће бити страна десетоугла. И пошто је квадрат на AB пет пута већи од квадрата на MN, а квадрат на AB је трипута већи од квадрата на ΔH, биће три квадрата на ΔH једнака са пет квадрата на MN. Према томе три квадрата на ΔH се односе према три квадрата на ΓH као пет квадрата на MN према пет квадрата на MΞ. Али збир пет квадрата на MΞ и пет квадрата на MN једнак је петоструком квадрату на KΛ. Према томе је пет квадрата на KΛ једнако збиру три квадрата на ΓH и три квадрата на ΔH. Но пет квадрата на KΛ једнако је 15 квадрата на полупречнику круга описаном око троугла ΘKΛ, а збир три квадрата на ΔH и три квадрата на ΓH једнак је 15 квадрата на полупречнику круга описаном око

ΓΔΕΖΗ, јер је раније било показано да је збир квадрата на ΔΗ и на ΓΗ пет пута већи од квадрата на полупречнику круга описаног око петоугла ΓΔΕΖΗ. Према томе 15 квадрата на једном полупречнику једнако је 15 квадрата на другом полупречнику. Значи један полупречник једнак је другом полупречнику.

На овај начин, један исти круг обухвата и петоугао додекаедра и троугао икосаедра обухваћених истом сфером. Такав је Хипсиклов доказ ове теореме.

Полазећи од оних аналитичких резултата које смо добили у коментару у вези са одређивањем ивице додекаедра и икосаедра резултат наведене теореме можемо потврдити и на овај начин.

За ивицу a_{12} додекаедра и ивицу a_{20} икосаедра имали смо ове вредности

$$a_{12}=\frac{1}{3}\mathrm{R}(\sqrt{15}-\sqrt{3}),\quad a_{20}=\frac{1}{5}\mathrm{R}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}\,,$$

где је R полупречник сфере. Са друге стране за страну a_5 петоугла и страну a_3 троугла можемо написати

$$a_5=\frac{1}{2}r_1\sqrt{10-2\sqrt{5}},\quad a_3=r_2\sqrt{3},$$

где су r_1 и r_2 полупречници кругова описаних око тих полигона.

Треба доказати да је $r_1=r_2$.

Како је $a_{12}=a_5$ и $a_{20}=a_3$, имамо два услова:

$$\frac{1}{5}\mathrm{R}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}=r_2\sqrt{3},\quad \frac{1}{3}\mathrm{R}(\sqrt{15}-\sqrt{3})=\frac{1}{2}r_1\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,,$$

из којих одређујемо однос

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{2.5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}=1\,,$$

чија вредност потврђује истинитост теореме.

4.

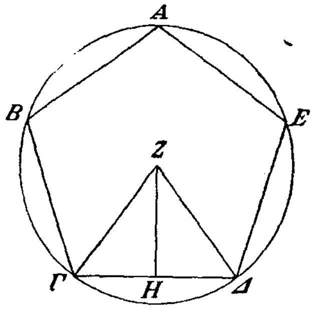
Ако постоји једнакостран и једнакоугли петоугао и око њега описани круг и из центра круга спуштена нормала на једну његову страну, биће тридесет правоугаоника обухваћених страном петоугла и наведеном нормалом једнако површини додекаедра.

Овај резултат непосредно следује после израчунавања површина $12 \times 5 = 60$ троуглова, на које можемо поделити целокупну површину додекаедра. Према слици имамо:

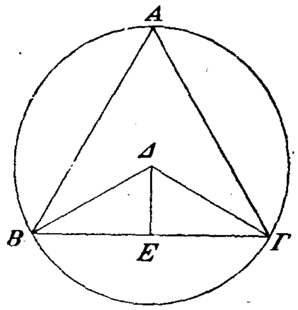
$$60\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\Delta\cdot ZH = 30\cdot\Gamma\Delta\cdot ZH.$$

5.

Ако је АВГ једнакостран троугао у кругу, Δ је његов центар и ΔЕ нормала спуштена из Δ на ВГ, биће тридесет правоугаоника обухваћених од ВГ и ΔЕ једнако површини икосаедра.



Сл. 3



Сл. 4

И овај резултат непосредно проистиче после поделе сваког троугла површине икосаедра на три троугла, јер за ту површину имамо

$$\frac{1}{2}\cdot B\Gamma\cdot\Delta E\cdot 3\cdot 20 = 30\cdot B\Gamma\cdot\Delta E.$$

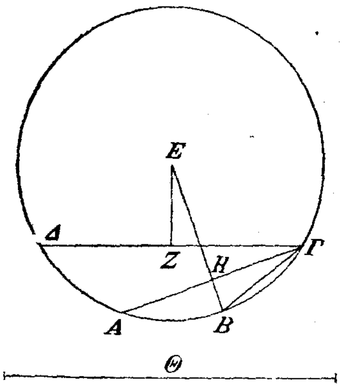
Последица

Површина додекаедра је према површини икосаедра као правоугаоник обухваћени ивицом првог и нормалом спуштеном на њу из центра круга петоугла АВГΔЕ према правоугаонику обухваћеном ивицом икосаедра и нормалом спуштеном на њу из центра круга троугла, а под условом да су додекаедар и икосаедар обухваћени истом сфером.

6.

Површина додекаедра је према површини икосаедра као ивица коцке према ивици икосаедра.

Узмимо круг АВГ који обухвата петоугао додекаедра и троугао икосаедра уписаних у исту сферу. Нека је $АГ = a_5$ страна петоугла и $ГΔ = a_3$ страна троугла уписаних у круг АВГ. Из центра Е спустимо нормале $ЕН = n_5$ и $EZ = n_3$ на АГ и на ГΔ. Продужимо ЕН до тачке В на кругу, $ВГ = a_{10}$ биће страна у круг уписаног десетоугла. Означимо полупречник круга са $ЕВ = r$ и дијагоналу петоугла са d_5.



Сл. 6

Према претходној последици имамо

$$\frac{(\text{површина додекаедра})}{(\text{површина икосаедра})} = \frac{a_5 \cdot n_5}{a_3 \cdot n_3}.$$

Докажимо да је

$$\frac{a_5 \cdot n_5}{n_3} = d_5, \tag{1}$$

где је d_5 у исто време и ивица коцке која је послужила за конструкцију додекаедра.

Кратко назначимо низ закључака.

$$(r + a_{10}) : r = r : a_{10}, \qquad (2) \qquad \text{(XIII,9)}$$

$$n_5 = \frac{1}{2}(r + a_{10}), \qquad \text{(XIV,1)}$$

$$n_3 = \frac{1}{2} r.$$

Из (2)

$$n_5 : n_3 = n_3 : (n_5 - n_3). \tag{3}$$

Са друге стране,

$$d_5 : a_5 = a_5 : (d_5 - a_5), \qquad \text{(XIII,17, последица).} \tag{4}$$

Из упоређивања (3) и (4) изводимо

$$d_5 : a_5 = n_5 : n_3,$$

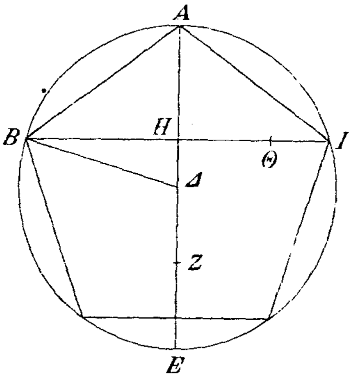
одакле следује (1).

И према томе коначно имамо

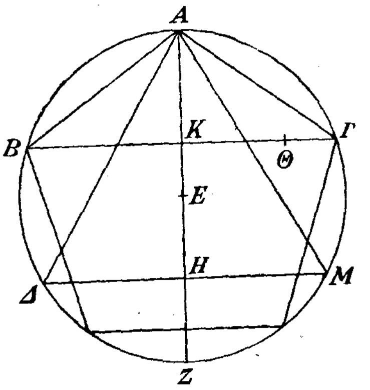
$$\frac{\text{(површина додекаедра)}}{\text{(површина икосаедра)}} = \frac{d_5}{a_3} = \frac{\text{(ивица коцке),}}{\text{(ивица икосаедра)}},$$

а то и потврђује наведену теорему.

Хипсикл даје и други доказ ове теореме, много једноставнији и непосреднији. Ако при томе искористимо још и операције са разломцима, доказ постаје сасвим једноставан, а неки елементи са Хипсиклових слика сувишни.



Сл. 7



Сл. 8

За површину петоугла из троугла ABΔ имамо

$$\text{површина петоугла} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{A}\Delta \cdot \text{BH} = \frac{5}{4} r d_5,$$

а за целокупну површину додекаедра имамо

$$\text{површина додекаедра} = 15\, r \cdot d_5, \tag{5}$$

где је, као и раније, дијагонала петоугла и ивица коцке.

Са друге слике, за површину троугла АΔМ имамо

$$\text{површина троугла} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\, r\cdot a_3 = \frac{3}{4}\, r\cdot a_3,$$

а за целу површину икосаедра

$$(6)\qquad \text{површина икосаедра} = 20\cdot\frac{3}{4}\, r\cdot a_3 = 15\, r\cdot a_3.$$

После упоређивања (5) и (6) долазимо до закључка

$$\frac{(\text{површина додекаедра})}{(\text{површина икосаедра})} = \frac{d_5}{a_3} = \frac{(\text{ивица коцке})}{(\text{ивица икосаедра})},$$

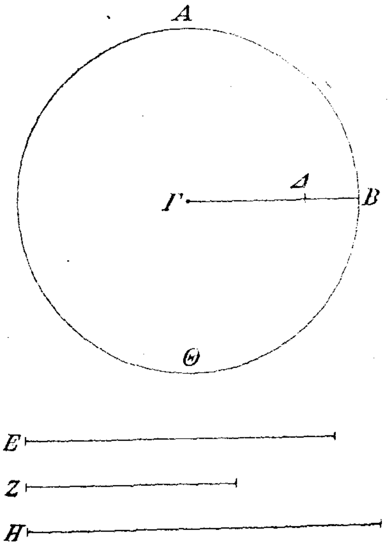
а то и потврђује теорему.

Тачке Θ и Z на првој слици и тачка Θ на другој уведене су ради замене операција са разломцима поделом дужи НГ тачком Θ на два дела у размери 2 : 1 и поделом полупречника ΔЕ, тачком Z, у размери 1 : 1.

7.

Ако је нека дуж подељена непрекидно, онда је збир квадрата на целој дужи и на већем делу према збиру квадрата на целој дужи и на мањем делу као квадрат на ивици коцке према квадрату на ивици икосаедра.

Нека је АΘВ круг који обухвата петоугао додекаедра и троугао икосаедра уписаних у исту сферу, тачка Г њихов центар, ГΔ већи део дужи ГВ подељене тачком Δ непрекидно. ГΔ је страна десетоугла уписаног у исти круг. Узмимо ивицу икосаедра Е, додекаедра Z и коцке Н. Тада је Е страна једнакостраног троугла, Z страна петоугла уписаног у исти круг и Z је већи део дужи Н подељене непрекидно. Пошто



Сл. 9

је Ε страна једнакостраног троугла, а квадрат на страни једнакостраног троугла једнак је тространом квадрату на ΒΓ [тј. квадрат на Ε је утростручен квадрат на ΒΓ], а такође и збир квадрата на ΓΒ и на ΒΔ је трипут већи од квадрата на ΓΔ, онда је квадрат на Ε према квадрату на ΓΒ као збир квадрата на ΓΒ и на ΒΔ према квадрату на ΓΔ. После пермутације: квадрат на Ε је према збиру квадрата на ΓΒ и на ΒΔ као квадрат на ΓΒ према квадрату на ΓΔ. Но квадрат на ΒΓ је према квадрату на ΓΔ као квадрат на Η према квадрату на Ζ, јер је Ζ већи део од Η. Према томе је квадрат на Ε према збиру квадрата на ΓΒ и на ΒΔ као квадрат на Η према квадрату на Ζ. Или, после промене реда и то на обрнути: квадрат на Η је према квадрату на Ε као квадрат на Ζ према збиру квадрата на ΓΒ и на ΒΔ. Но збир квадрата на ΒΓ и на ΓΔ једнак је квадрату на Ζ, јер је квадрат на страни петоугла једнак збиру квадрата на страни шестоугла и десетоугла уписаних у исти круг. Према томе се квадрат на Η односи према квадрату на Ε као збир квадрата на ΒΓ и на ΓΔ према збиру квадрата на ΓΒ и на ΒΔ. И на тај начин квадрат на Η је према квадрату на Ε, при непрекидној подели дужи, као збир квадрата на целој дужи и на већем делу према збиру квадрата на целој дужи и на мањем делу. И Η је ивица коцке, а Ε — икосаедра.

И затим, слично Еуклиду, Хипсикл понавља текст теореме.

Аналитички ову теорему можемо доказати овако.

Ако је нека дуж a подељена непрекидно, њен већи део x има вредност

$$x = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} - 1).$$

После тога можемо израчунати однос

$$(a^2 + x^2) : [a^2 + (a - x)^2] = \frac{1}{6} (5 + \sqrt{5}).$$

Са друге стране, за ивицу коцке и ивицу икосаедра смо имали изразе:

$$a_{\text{коц.}} = \frac{2}{3} R \sqrt{3},$$

$$a_{\text{икос.}} = \frac{1}{5} R \sqrt{10(5-\sqrt{5})},$$

и према томе за однос њихових квадрата

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2(5-\sqrt{5})} = \frac{1}{6}(5+\sqrt{5}),$$

а тиме је доказана наведена теорема, јер је тај израз једнак претходном изразу.

8.

Ивица коцке је према ивици икосаедра као запремина додекаедра према запремини икосаедра.

Доказ ове теореме је врло кратак, јер за додекаедар и икосаедар, уписане у исту сферу, полупречници кругова описаних око петоугла додекаедра и троугла икосаедра имају исту вредност, коју смо означавали са r. У таквом случају имају исту висину h пирамиде којима су основе петоугао и троугао и врхови у центру сфере, јер је

$$h^2 = R^2 - r^2,$$

где је R полупречник сфере.

Како запремина додекаедра износи

$$V_{\text{дод.}} = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot (\text{површ. петоугл.}) = \frac{1}{3} h \cdot (\text{површ. додекаедра}),$$

а запремина икосаедра

$$V_{\text{икос.}} = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot (\text{површ.троугл.}) = \frac{1}{3} h \cdot (\text{површ. икосаедра}),$$

за размеру тих запремина добићемо

$$V_{\text{дод.}} : V_{\text{икос.}} = (\text{површ. додек.}) : (\text{површ. икосаедра}).$$

Но размера ових површина, према 6. теореми, једнака је размери ивице коцке према ивици икосаедра, па према томе долазимо до резултата:

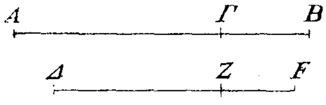
$$V_{\text{дод.}} : V_{\text{икос.}} = (\text{ивица коцке}) : (\text{ивици икосаедра}),$$

а то је садржај ове теореме.

9.

Ако су две дужи подељене непрекидно, њихови делови су у истој размери.

Нека тачка Г дели дуж АВ, а тачка Z дуж ΔЕ непрекидно. Већи део прве је АГ, а друге ΔZ. Тврдим, да је цела дуж АВ према АГ као цела дуж ΔЕ према већем делу ΔZ.



Сл. 10

Ако уведемо очевидне кратке ознаке, имамо две пропорције

$$a : x = x : (a - x),$$

$$b : y = y : (b - y),$$

из којих треба да изведемо пропорцију

$$a : x = b : y.$$

Хипсикл поступа овако: из пропорција следује

$$x^2 = a(a - x), \quad y^2 = b(b - y),$$

и према томе узастопце закључујемо

$$\frac{a(a-x)}{x^2} = \frac{b(b-y)}{y^2},$$

$$\therefore \quad \frac{4a(a-x)}{x^2} = \frac{4b(b-y)}{y^2},$$

$$\therefore \quad \frac{4a(a-x)+x^2}{x^2} = \frac{4b(b-y)+y^2}{y^2},$$

$$\therefore \quad \frac{(2a-x)^2}{x^2} = \frac{(2b-y)^2}{y^2},$$

$$\therefore \quad \frac{2a-x}{x} = \frac{2b-y}{y},$$

$$\therefore \quad a : x = b : y,$$

а то је и требало доказати.

На крају књиге стоји овај закључак.

Ако је АВ$=a$ нека дужина подељена тачком Г непрекидно и АГ$=m$ већи део, а ГВ$=n$ мањи, и ако имамо коцку, додекаедар и икосаедар, уписани у исту сферу, онда је

1. (ивица коцке) : (ивици икосаедра) $= \sqrt{a^2 + m^2} : \sqrt{a^2 + n^2}$,
2. (површина додекаедра) : (површини икосаедра) $=$ $=$ (ивица коцке) : (ивици икосаедра),
3. (запремина додекаедра) : (запремини икосаедра) $=$ $=$ (површина додекаедра) : (површини икосаедра),
4. (запремина додекаедра) : (запремини икосаедра) $=$

$$= \sqrt{a^2 + m^2} : \sqrt{a^2 + n^2}.$$

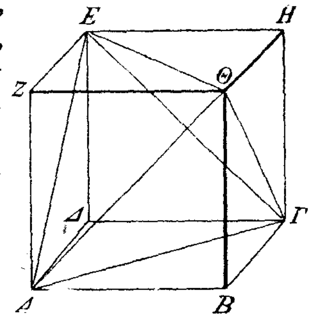
Петнаеста књига

Садржај „такозване“ петнаесте књиге много је слабији од садржаја Хипсиклове књиге. Неки истраживачи су мишљења, да књига има карактер ђачке бележнице и да можда и није припадала истом писцу. Не може се тачно установити ни време кад је она написана. Шта више као на време постанка ове књиге мисли се на интервал од првог столећа *пре* до шестог столећа *после* наше ере. I. L. Heiberg посвећује овој књизи 14 страна грчког текста. T. I. Heath додељује јој само две непуне стране, F. Enriques — две стране, Д. Д. Мордухай-Болтовской посвећује девет страна текста и пола стране коментара. Што је могуће краће изложићемо ипак целокупан геометриски садржај ове књиге.

1.

У дату коцку уписати пирамиду (тетраедар).

Нека је дата коцка ΑΒΓΔΕΖΗΘ, уписати у њу пирамиду. Спојимо ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. Јасно је да су троуглови ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΘΓΕ једнакострани, јер су њихове стране дијагонале квадрата. На овај начин, ΑΕΓΘ је пирамида, и она је уписана у дату коцку.

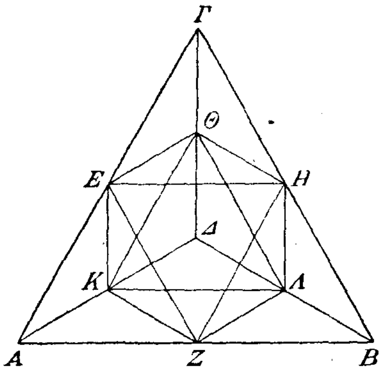


Сл. 11

2.

У дату пирамиду (тетраедар) уписати октаедар.

Нека је ΑΒΓΔ дата пирамида са врхом у тачки Δ, уписати у њу октаедар. Преполовимо тачкама Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, дужи ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΓ и спојимо ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ, а и преостале. И пошто је ΑΒ двапут веће од сваке од дужи ΘΚ и ΗΖ, биће ΘΚ једнако и паралелно са ΖΗ. Према томе је (четвороугао) ΘΚΖΗ једнакостран. Тврдим да је он и правоугаони. Заиста, ако из ΚΛ спустимо нормале на равни ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΚ, ΚΛΛΗ (штампарска грешка у грчком тексту), онда ће на сличан начин доказује да су троуглови и над квадратом ΘΚΖΗ једнакострани.*

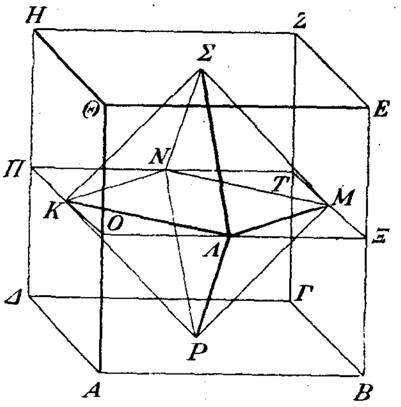


Сл. 12

3.

У дату коцку уписати октаедар.

Нека је ΑΒΓΔΕΖΗΘ коцка. Узмимо центре Κ, Λ, Μ, Ν вертикалних квадрата и спојимо их са ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ. Тврдим да је ΚΛΜΝ квадрат (доказ изостављам. А. Б.). Узмимо центре Ρ и Σ квадрата ΒΔ и ΕΗ и спојимо ΡΛ, ΡΜ, ΡΚ, ΡΝ, ΣΚ, ΣΛ, ΣΜ, ΣΝ. Јасно је да су троуглови добијеног октаедра једнакострани, што се доказује на сличан начин.



Сл. 13

4.

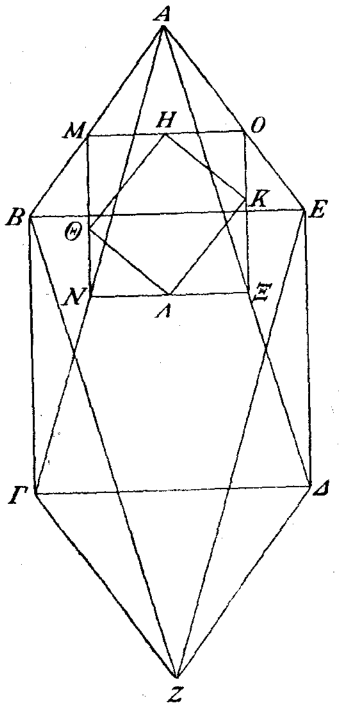
У дати октаедар уписати коцку.

Узмимо центре Η, Θ, Κ, Λ кругова описаних око троуглова ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΕ, ΑΔΕ и спојимо их са ΗΘ, ΗΚ, ΘΛ, ΛΚ.

---

* Ово место Heiberg'овог текста је дефектно.

Тврдим да је НΘКΛ квадрат, (доказ изостављам. А. Б.). Ако узмемо и преостале центре троуглова и спојимо их на сличан начин, доказаћемо да су и преостали квадрати; и на тај начин добићемо коцку уписану у дати октаедар.

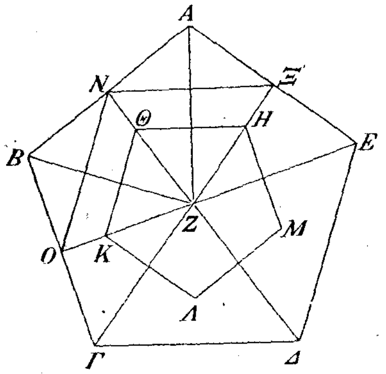


Сл. 14

5.

У дати икосаедар уписати додекаедар.

Узмимо петоугао АВГΔЕ и центре Н, Θ, К, Λ, М кругова описаних око троуглова AZE, AZB, BZΓ, ZΓΔ, ΔZE и спојимо их са НΘ, ΘК, КΛ, ΛМ, МН. Затим продужимо ZН, ZΘ, ZК ка тачкама Ξ, N, O. Ове тачке полове дужи ЕА, АВ, ВГ. И NΞ је према NO као НΘ према ΘК. Значи, и ΘН је једнако ΘК. На сличан начин се доказује да су и преостале стране петоугла НΘКΛМ једнаке. Тврдим да и он има једнаке углове.



Сл. 18

Затим се доказује да је наведени петоугао раван. На томе се зауставља излагање конструкције и њеног доказа. Излагање је, према томе, недовршено.

Даље следују врло елементарна расуђивања о броју страна и броју темена код проучених полиједара.

Књига се завршава проучавањем проблема који је поставио Исидор, „велики наш учитељ" (Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑρηγήσατο μέγας διδάσκαλος), како га велича аутор књиге. Неки коментатори мисле, да је то Исидор из Милета, архитекта који је руководио зидањем цркве св. Софије у Цариграду завршене 537 године, али је то мало вероватно. Исидоров проблем састоји се у одређивању углова између равни страна пет правилних полиједара. Решење тог проблема састоји се у овом.

Јасно је да су ти углови код коцке прави.

За пирамиду (тетраедар) узмимо један троугао њене површине и из крајева једне стране тог троугла нацртајмо лукове полупречником једнаким висини троугла. Нека се ти лукови секу у тачки; тада праве што спајају ту тачку пресека са центрима лукова одређују нагиб равни пирамиде.

За октаедар на страни троугла конструишимо квадрат и из крајева његове дијагонале, као центара, нацртајмо лукове полупречника опет једнаког висини троугла; тачку пресека тих лукова спојимо са центрима, добијени угао допуњава угао између две равни површине октаедра до два права угла (јер се добива унутрашњи угао октаедра).

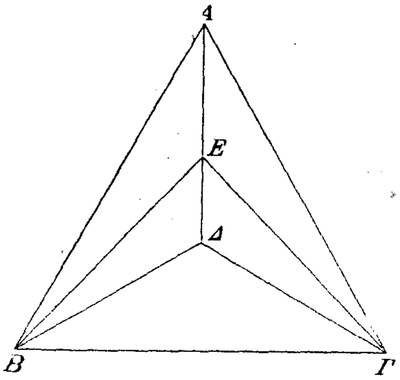
За икосаедар на страни троугла конструишимо петоугао и из крајева његове дијагонале, као центара, нацртајмо лукове полупречника поново једнаког висини троугла; тачку пресека тих лукова спојимо са центрима, добијени угао допуњава угао између две равни површине икосаедра до два права угла.

То је решење поменутог „славног човека", наводи аутор књиге. Како докази тих конструкција нису били за аутора књиге довољно јасни, он даје своја објашњења за све конструкције и, пре свега, за пирамиду (тетраедар).

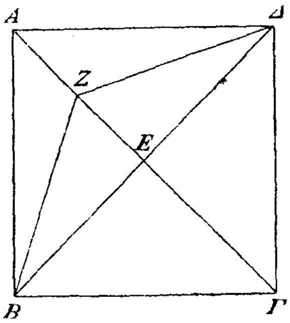
Наводимо кратко пишчев доказ.

Узмимо тетраедар АВГΔ са основом АВГ и врхом у Δ. Из крајева В и Г стране троугла основе спустимо нормале ГЕ и ВЕ на ивицу АΔ, то су висине троуглова АΔГ и АΔВ са заједничком тачком Е. Угао између тих правих је угао нагиба две равни тетраедра, јер оне леже у тим равнима и управне су на њихов пресек. После мале анализе о пресеку лукова са центрима у В и Г и полупречницима једнаким висини троугла писац долази до закључка да је Исидорова конструкција за тетраедар тачна.

За октаедар замислимо пирамиду са квадратом АВГΔ као основом, врхом у Е, и бочним странама једнакостраним троугловима. Таква пирамида је половина октаедра. Из крајева дијагонале ВΔ квадрата спустимо нормале ΔZ и BZ на

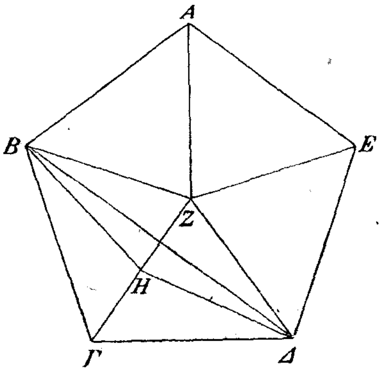


Сл. 16



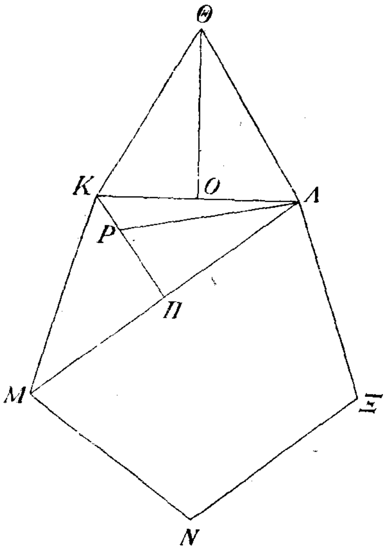
Сл. 17

ивицу АЕ; то су висине троуглова АЕΔ и АЕВ са заједничком тачком Z. Угао између тих правих је туп угао између две равни октаедра, јер оне леже у тим равнима и управне су на њиховом пресеку. А како се за угао нагиба две равни, према Еуклидовој дефиницији, сматра увек оштар угао између тих равни, биће наведени угао BZΔ троугла BΔZ допуна угла нагиба до два права угла. При томе се и овде врши анализа конструкције у равни троугла BZΔ и то у облику доказа да је свака од дужи BZ и ΔZ већа од половине ВΔ.



Сл. 18

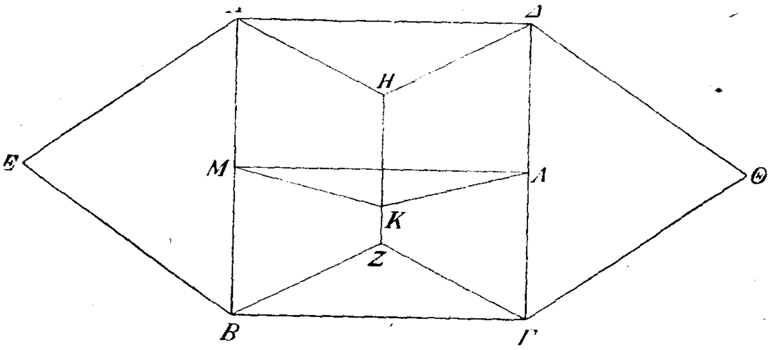
Слично се изводи и доказ наведене конструкције за икосаедар. Узмимо једнакостран и једнакоугли петоугао АВГΔЕ за основv пирамиде са врхом у Z; бочне стране су једнакострани троуглови. Пирамида ΑΒΓΔΕΖ је део икосаедра. Из крајева Β и Δ дијагонале петоугла основе спустимо у равнима троуглова ΒΓΖ и ΔΓΖ нормале ΒΗ и ΔΗ на ивицу ΓΖ, то су висине троуглова ΓΒΖ и ΓΔΖ са заједничком тачком Η. Угао између тих нормала је туп и служи као допуна нагиба између две равни икосаедра. Тиме се доказује наведена Исидорова конструкција икосаедра. Као допуна служи анализа о могућности извођења те конструкције. Интересантно је забележити да се овде први пут говори о „инструментној конструкцији“ (ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς), тј. конструкцији помоћу неког инструмента, вероватно шестара. Аутор сматра такву природу конструкције као неки доказ конструкције. Али сем тог доказа писац наводи и овај логички доказ са засебном сликом.



Сл. 19

Замислимо засебно једнакостран троугао ΘΚΛ, на ΚΛ конструишимо петоугао ΚΜΝΞΛ, спојимо ΜΛ и повуцимо висину ΘΟ троугла ΘΚΛ. Тврдим да је ΘΟ веће од половине ΜΛ. Повуцимо из Κ нормалу ΚΠ на ΜΛ. Пошто је угао ΚΛΠ већи од једне трећине правог угла, тј. од угла ΚΘΟ, конструишимо угао ΠΛΡ једнак углу ΚΘΟ. Према томе ΠΛ је висина једнакокраког троугла са страном ΡΛ и значи квадрат на ΡΛ према квадрату на ΛΠ као 4 : 3. Но ΚΛ је веће од ΛΡ и, према томе, размера квадрата на ΚΛ према квадрату на ΛΠ већа од размере 4 према 3. Но размера квадрата на ΚΛ према квадрату на ΘΟ једнака је размери 4 према 3. Према томе ΚΛ има већу размеру према ΛΠ него према ΘΟ. На овај начин ΘΟ је веће од ΛΠ.

Са додекаедром ствар стоји овако. Нека један од квадрата коцке на којима се конструише додекаедар буде квадрат АВГΔ и две равни АЕВZН и НΔΘГZ додекаедра. Тврдим да је и у овом случају дат нагиб две равни додекаедра. Преполовимо ZН тачком К и из тачке К ивице ZН у свакој од равни повуцимо нормале КΛ и КМ на ивицу ZН и спојимо МΛ. Аутор прво тврди да је угао МКΛ туп. Заиста, у тринаестој књизи Елемената, где се говори о конструкцији додекаедра, доказано је да је нормала из К на квадрату АВГΔ једнака половини стране петоугла, према томе је она мања од половине МΛ, а услед тога је угао МКΛ туп. Уједно се у тој теореми доказује и да је квадрат на КΛ једнак збиру квадрата на половини ивице коцке и на половини стране петоугла. На овај начин дужи КΛ и КМ, које су једнаке, веће су од половине дужи МΛ. Према томе, ако је угао МКΛ дат, биће одређена и величина нагиба уочених равни, која је допуна тог угла до два права угла. Даље, пошто је страна квадрата АВГΔ дијагонала петоугла са датим странама, јер је петоугао дат, дато је и МΛ. А дата је и свака од дужи МК и КΛ, јер су то нормале из средине дијагонале на паралелну страну НZ петоугла. Значи, дат је и угао ΛКМ, који је, како је било речено, допуна траженог нагиба до два права угла. Дакле, добро је рекао Исидор о инструментној конструкцији, да је потребно у датом петоуглу повући дијагоналу, која је једнака ивици коцке, затим из крајева те дијагонале, као центара, нацртати два лука полупречником једнаким отстојању дијагонале петоугла од паралелне стране,



Сл. 20

на слици су то КЛ и КМ, па из тачке пресека тих лукова повуħи дужи ка центрима, које образују угао чија је допуна до два права угла нагиб две равни додекаедра. А да је КЛ веħе од половине МЛ, то је, како је речено, веħ доказано у Елементима.

Читалац, који је прегледао како садржај ове књиге, тако и облик излагања, могао је лако доħи до закључка да се ова „такозвана“ XV књига знатно разликује како од тринаест оригиналних Еуклидових књига, тако и од Хипсиклове „такозване“ четрнаесте књиге Еуклидових елемената.

ПОГОВОР

Успомени мог сина

У последње време интерес према Еуклидовим елементима јако је порастао. У Америци је изашло ново издање капиталног дела T. L. Heath'a — The thirteen books of Euclid's Elements; у Италији под редакцијом F. Enriques'a изашао је нов превод са коментаром; у Совјетском савезу такође је изашао нов превод Д. Д. Мордухай—Болтовского са врло опширним коментаром, који је делимично написао И. Н. Веселовский; у Немачкој је штампан у Otswald'овој збирци нов превод Clemens'a Thaer'a.

Не наводимо ове податке и земље као да у њима култ античке културе није био довољно развијен па се сад тек појавио, већ, обратно, као примере за земље у којима су или сами Еуклидови елементи или „геометрија по Еуклиду" били, у већој или мањој мери, основа математичког образовања широких слојева, и баш у овим земљама поново је оживео интерес према Еуклиду, Еуклиду у оригиналу.

Сама та чињеница да су Еуклидови елементи зборник истина, које су задржале своју тачност у току више од две хиљаде година, да су широки слојеви културних народа у у току више столећа врло пажљиво проучавали те истине, да је опадање или повећање интереса према тим истинама ишло заједно са замирањем или процватом културе уопште — сама та чињеница је довољан разлог за појачање интереса према Еуклидовим елементима баш у данашње време, кад се не само поједини стручњаци, већ и широке масе интересују за све што је везано за развитак људског знања.

Али има и специјалних разлога за повећање интереса према Еуклидовим елементима у данашње време.

Без обзира на нагло развијање математике у свим правцима, с једне стране, у вези са захтевима које математици постављају блиске науке — механика у разним својим формама, физика, хемија, па чак и такве научне дисциплине које су до последњег времена биле врло далеке од математике, са друге стране, у вези са огромним повећавањем кадрова који се специјално баве наставом савремене математике, преглед основа математике, нарочито са логичког гледишта, баш сада је постао врло актуалан.

Пошто су Еуклидови елементи по времену први и по форми и садржају изванредни узорак логичког, нарочито дедуктивног, излагања математичких истина, а пошто се озбиљна расуђивања о логичкој структури математике уопште не могу заснивати на изворима компилативног, уџбеничког карактера, већ се мора обратити на основне изворе, а такав извор су пре свега Еуклидови елементи, јасно је да свако ко хоће да озбиљније размисли о основама математике, а нарочито и са историског гледишта, мора пре свега узети у руке ово математичко јеванђеље.

Други разлог за јачање интереса према Еуклидовим елементима везан је за питање елементарне геометрије у савременој школи. Јасно је да књига Еуклидових елемената, која је била написана за врло узак круг грчких мислилаца, евентуално за студенте александриске академије, не може бити дата непосредно у руке савременом омладинцу у оном узрасту кад он почиње учити геометрију.

Ипак дуги низ година ортодоксна настава геометрије је задржавала, ако не самог Еуклида (Енглеска), онда Еуклидов систем, у више или мање компромисном облику, али увек у дедуктивној форми. Заступници тог система су сваком новатору пре свега постављали питање: „Јесте ли читали Еуклида у оригиналу или бар у преводу?“ Па ако би одговор био негативан, дискусија се завршавала речима: „Прочитајте га!“

Сâм аутор ових редова придржава се концентричног система наставе геометрије са индуктивним почетком, који је и у историском развићу претходио дедуктивном систему, а са садржајем приступачним чак и основцу; тај систем у даљим концентрима може постићи, због већ развијених просторних претстава, боље резултате како у односу на утврђивање јаче логике, тако и у развијању веће моћи апрастракције; но при извођењу тог система у индуктивним концентрима треба се придржавати индуктивне логике, која исто тако постоји као и дедуктивна и не мешати их са дедуктивним концентрима. При мешању настаје логички хаос, који се не може правдати споредним разлозима постепеног прилагођавања, које баш одузима смисао понављања исте геометриске истине на два начина — индуктивно и дедуктивно. Према томе читалац овог превода би стекао погрешну претставу о преводиочевој намери, ако би помислио, да он позива на јаче утврђивање Еуклидових принципа у настави геометрије и само њих. Не, обратно, овај превод треба да иде у корист баш новаторима, да постану свесни реформатори наставе геометрије у новој школи и да на питање: „Јесте ли читали Еуклида?“ одговоре: „Јесте, читали смо и зато баш свесно уносимо у наставу геометрије индуктивни концентар“. Претставници других земаља са одавно добро развијеном математичком културом не могу више да потцењују наше тежње у реформама наставе геометрије замерком да је то земља која још и после две хиљаде година нема Еуклидових елемената за употребу широких кругова на свом језику.

Нисам имао у плану свог научног рада превод Еуклидових елемената. То је сувише велики и сувише тежак посао за који нисам хтео да потрошим онолико времена колико он захтева. Прву књигу сам превео са намером да југословенском читаоцу, који недовољно влада страним језицима на којима су објављени други преводи, покажем огромну вредност тог изванредног извора математичке културе. Тиме сам желео да попуним, бар у минималној форми, ону празнину, која постоји код наших народа у поређењу са другим културним народима. Почетак тог рада је био још за време живота мог покојног сина, доктора медицине Арсена Билимовића. Видевши мој рад, син ми је саветовао да продужим тај рад и после његове смрти, јер тај рад „над памятником классического спокойствия“, рекао је, може ублажити мој бол. Ја сам поступио према његовој жељи. Полако сам радио и тај посао уколико нисам био одвајан од њега својим другим, научним и педагошким радовима.

Разуме се, трудио сам се да превод буде што бољи, али на путу остварења имао сам много тешкоћа и у погледу терминолошке доследности и у погледу основних израза којима се нарочито каректерише грчки текст и који су супротни стилу српскога језика. Као главни циљ ставио сам себи да што тачније пренесем математички садржај Еуклидовог текста и да дам што јаснију српску форму без обзира на то што при томе отступам од филолошког превода. При изради српског текста много су ми помогли колеге академик В. В. Мишковић и професор универзитета Т. П. Анђелић, за које је то био такође велики труд, јер је било потребно решавати колебљива питања српске терминологије. На томе им и овде изјављујем дубоку захвалност.

Што се тиче Коментара, ограничавао сам се само на оно, што ми је изгледало да треба навести без икакве тенденције ка дубоком научном проучавању, како самог текста тако и садржаја, нарочито са историског гледишта с обзиром на време како до Еуклида тако и после Еуклида до наших дана. Читалац кога то дубље итересује може се обратити на стручна дела, пре свега на поменуто дело Т. L. Heath'a, који је посветио знатан део свог живота проучавању грчке математике.

Моја неодлучност да после друге књиге преведем и трећу, а затим и остале, била је разлог што је свака књига излазила засебно, са засебном пагинацијом. То одузима овом преводу извесну целину, али спољашњег формалног карактера. За оне који би желели да повежу у једну све књиге штампарија је приложила листић са заједничким насловом.

Слике у Heiberg'овом издању понекад не одговарају тачно тексту, оне често имају само схематски карактер, но те недостатке нисам хтео исправљати, јер би те исправке одузеле оригиналу његов карактер. Знатан део слика је прецртавао беспрекоран цртач Математичког института САН М. Чавчић коме изјављујем моју захвалност.

Штампање српског текста са грчким словима за ознаке геометриских објеката изведено је из разлога да би читалац, који би желео да упореди текст превода са грчким текстом оригинала, могао без тешкоће наћи одговарајуће речи и реченице у оригиналу. Ово је чинило извесну тешкоћу слагачима штам-

парије „Академије", чијем колективу, на челу са директором предузећа М. Гавриловићем, изјављујем нарочиту захвалност за савесно савлађивање овог тешког посла.

Издавачкој установи САН „Научно дело", са њеним управником С. Рајковићем, исто тако изјављујем срдачну захвалност за предусретљивост при остварењу овог дела.

Најзад сматрам за своју дужност да изразим највећу захвалност Управи Математичког института Српске академије наука и његовом управнику академику Р. Кашанину који су омогућили штампање овог издања.

1 мај 1957 год. *А. Б.*