Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Master rad

Metodički pristup logičko-kombinatornim zadacima za takmičenja učenika osnovnih i srednjih škola

Mentor :
dr Miljan Knežević

Student :
Dunja Ristanić 1062/2013

Beograd,
2017.

Predgovor

Master rad koji je pred vama namenjen je širokom krugu čitalaca, svima onima koji žele da razviju umne sposobnosti i kombinatorni način razmišljanja. Metodički pristup logičko-kombinatornim zadacima za takmičenja učenika osnovnih i srednjih škola jesu pokušaj da se kroz interesantne i nesvakidašnje primere približi lepota matematike i njene primene u realnom životu.
Iz ličnog iskustva u radu sa učenicima kako u osnovnoj tako i u srednjoj školi uvidela sam da se malo pažnje posvećuje rešavanju logičko-kombinatornih zadataka, pa otuda i želja da se sistematizuje i na jednom mestu objave raznovrsni logičko-kombinatorni zadaci za sve uzraste. Za rešavanje ovakvog tipa zadataka nije potrebno šire matematičko obrazovanje već sposobnost logičkog mišljenja i strpljenje.

U prvom poglavlju razmatramo značaj logičko-apstraktnog mišljenja. Dat je značaj ranog uvođenja kombinatorike u nastavu matematike kao i ciljevi i primene rešavanja logičko-kombinatornih zadataka.
U drugom poglavlju predstavljeni su pažljivo odabrani logičko-kombinatorni zadaci sa elementima teorije. Takođe su dati zadaci, kao i rešenja, sa takmičenja za učenike osnovnih i srednjih škola.
U trećem, poslednjem poglavlju ovog rada, možete videti zanimljive priče i matematičke igre. Date su i rešene matematičke igre sa olimpijada.

Želela bih da ovaj rad posluži i bude od koristi učenicima, studentima, nastavnicima i svima koji žele da oprobaju i razviju svoje umne sposobnosti.

Posvetila bih ovaj rad svim učenicima koji pokazuju skolonost i interesovanje ka matematici, kao i onima koji još nisu uvideli lepotu matematike.

Zahvaljujem se svom mentoru, prof dr Miljanu Kneževicu, na sugestijama, podršci i pomoći prilikom izrade ovog rada.
Posebnu zahvalnost dugujem mojoj porodici na stpljenju, podršci i ljubavi koju su mi pružali svih ovih godina.

U Beogradu, januar 2017. Dunja Ristanić

Sadržaj

1 Uvod

Rad počinje odlomkom Dušana Radovića iz knjige *"Na ostrvu pisaćeg stola"* sa čijim se sadržajem autor rada u potpunosti slaže: "Bilo bi dobro kada bi škola mogla da prihvati "obavezu" da ne samo uči već i nauči dete zdravo i sposobno za školu. Da, uz odgovarajuće uslove, u potpunosti preuzme odgovornost za svoj "proizvod". Krivica za stanje u školi ima mnogo, međutim, jedini koji snose posledice su deca i roditelji. Odnosi su još uvek takvi, da na optuženičkim klupama sede samo male neznalice. I samo se njima sudi. A oni ne znaju, ili nedovoljno znaju, između ostalog ili pre svega - zvog toga što su nastavni planovi preobimni i neadekvatni, što su udžbenici loši, neprecizni i nezanimljivi, što uče pod prinudom i strahom, što su obeshrabreni i bespomoćni pred onim što se od njih traži. Kada bi škola htela, ono što još uvek neće - da preuzme obavezu da nauči đaka, da isključivo ona bude odgovorna za njegov uspeh, brže bi se otkrile i efikasnije rešile sadašnje njene slabosti."
Glavni cilj nastave matematike ne sme biti kvantitet, već kvalitet dobijene informacije kao i način razmišljanja kod učenika.
Najvažniji zadatak nastavnika matematike jeste da podstakne učenika da misli. Samo sticanje matematičke intuicije od velikog je značaja za dalji razvoj ličnosti.
Nastava kao složen i dinamičan proces, neprestano pokreće nova i zanimljiva pitanja. Zbog specifičnosti predmeta, nastava matematike zahteva od nastavnika dobro poznavanje metodike, kako se ne bi pretvorila u težak i neinterensantan predmet za većinu učenika, što je, nažalost, čest slučaj.
Učenicima koji vole ovaj predmet, većina nastavnika omogućava da se detaljnije i dublje upoznaju sa lepotama matematike. Najčešće se to ostvaruje na časovima matematičke sekcije ili dodatne nastave. Ovakvi oblici nastave zahtevaju puno angažovanje, rad i trud, kako učenika tako i nastavnika.
Prema mišljenju psihologa, u ukupnoj populaciji nadarenost je zastupljena sa 2-3 %. Pod nadarenošću podrazumevamo osobine učenika koje omogućavaju ostvarivanje izrazito natprosečnih postignuća u jednoj ili više oblasti ljudskih delatnosti. Otkrivanje i prepoznavanje nadarenih učenika je složen i odgovoran zadatak. Izuzetno je značajno stvaranje ambijenta koji stimuliše nadarenu decu da iskažu svoje intelektualne sposobnosti. Poznato je, nažalost, da se talentovanoj deci u našem društvu ne poklanja dovoljno pažnje.
Nastavnike treba osposobljavati da prepoznaju nadarene učenike, ali isto tako i da pruže maksimalnu podršku razvoju individualnih potencijala učenika. Iskusni nastavnici brzo uspeju da prepoznaju učenike koji poseduju talenat

ali i pored toga, tokom školovanja, jedan broj učenika ostaje nezapažen.
U daljem tekstu će se analizirati matodički pristup kao i pažljivo izabrane zanimljive logičko-kombinatorne zadatke sa detaljnim objašnjenjem.

2 Logičko-apstraktno mišljenje

2.1 Metodički pristup kombinatornim zadacima u nastavi

"Mi nikada ne postajemo matematičari, čak i ako naučimo napamet sve tuđe dokaze, ako naš um nije osposobljen da samostalno rešava postavljene probleme." - R. Dekart

Pojave u životu i radu su sve složenije i njihovo razumevanje zahteva sve apstraktnije pristupe i metode. Polazeći od uloge koju obrazovanje ima u društvenom razvoju, postoji potreba stalnog unapređivanja i povećanja kvaliteta obrazovanja. To je moguće ostvariti u odgovarajućem sistemu obrazovanja, koji je između ostalog uslovljen savremenim planovima i programima nastave, dobro osposobljenjim nastavnicima, adekvatnim udžbenicima, itd.
Bez logičko kombinatornog mišljenja svakodnevni život, nastava, učenje, a posebno nastava matematike su nezamislivi. U novije vreme, među opštim ciljevima i željenim ishodima obaveznog osnovnog obrazovanja značajno mesto zauzimaju:

1. Rešavanje jednostavnih logičko-kombinatornih problema koji se odnose na prebrojavanje i otkrivanje pravilnosti objekata,

2. Ideje i modeli kombinatorike.

Uzimanje u obzir raznih mogućnosti rasporeda, grupisanja ili izbora predmeta, kasnije i apstraktnih elemenata, analiza tih mogućnosti, određivanje ukupnog broja mogućnosti, eventualno određivanje optimalne varijante ili verovatnoće pojavljivanja javljaju se kao nove ideje u okviru programa početne nastave matematike. Rešavanje ovakvih problema implicira kreativan pristup i primenu novih metoda i tehnika, kao što su metoda otkrivanja, problemska metoda, metoda pretpostavke, kibernetičke metode, grafovi, razni dijagrami, tablice, skupovi i sl.
U programima početne nastave matematike nekih razvijenih zemalja, već od prvog razreda osnovne škole javljaju se "teške" teme kao što su logika, skupovi, kombinatorika, verovatnoća i statistika, ali na "lak način". S obzirom na uzrast dece na ovom nivou obrazovanja, procesi i dometi saznanja su ograničeni prevashodno na ono što je konkretno, materijalno, očigledno. Na putu ka izgrađivanju apstraktnih pojmova značajnu ulogu igraju razni primeri (kroz igru, ispitivanje slučajeva, simulacije) i odgovarajuća mentalna slika, koja se formira na osnovu lične i individualne projekcije na ob-

jektivni, spoljni svet. Igre, simulacije i istraživanja slučajeva se javljaju i odvojeno i istovremeno, i to u raznim kombinacijama. Suština je u tome, da se formiranju matematičkih pojmova pristupa spiralno, polazeći od manipulacija stvarima, didaktičkim materijalom, preko istraživanja slučajeva i simbolične simulacije.
Dakle, mogli bismo pretpostaviti da već na početku matematičkog obrazovanja i vaspitanja postoje određene psihološko-pedagoške i didaktičko-metodičke potrebe i mogućnosti za propedevtiku onih društveni korisnih oblasti, kao što je, na primer, logika i kombinatorika, koji su dugo smatrani suviše složenim i suptilnim za izučavanje u opštem obrazovanju.
Problemi logike, kombinatorike, verovatnoće i statistike, u početnoj nastavi matematike su evidentni, značajani i vrlo aktuelani, ali se ova problematika u našoj stručnoj literaturi skoro i ne javlja. Rano uvođenje kombinatorike se smatra za jedno od najboljih sredstava za razvijanje kreativnosti kod učenika i za odličnu osnovu formiranja mentalnih slika i matematičkih pojmova. To su dominantni argumenti, zbog čega se sa metodičkom transformacijom kombinatorike u nastavi matematike vredi temeljnije baviti. Složene problemske situacije i njihovo razrešavanje poželjno bi bilo približiti svakom detetu. Neko od njih možda nikada neće ova početna matematička znanja izdići na visoki nivo, ali će svakako biti spremniji i snalažljiviji u rešavanju svakodnevnih životnih problema.

2.2 Logičko-kombinatorni pristup

" Najbolji način da se nešto nauči jeste - da se samostalno otkrije."
- D. Polja

Najveći deo sadržaja užbenika matematike čine zadaci. Bez obzira da li se koristi za izlaganje novog gradiva, vežbanje, obnavljanje, zadatak u udžbeniku matematike uvek ima istu ulogu. On treba da aktivira određena znanja i sposobnosti učenika i da na osnovu (ne)uspeha u njegovom rešavanju, omogući nova i kvalitetna znanja i sposobnosti.
Matematička logika i kombinatorika se izučavaju u srednjoj školi, a samo neki njihovi elementi u dodatnoj nastavi matematike. Učenika osnovnoškolskog uzrasta najlakše je zainteresovati za matematiku ako ga stavimo u situaciju da rešava raznovrsne i zanimljive zadatke. Pri rešavanju nestandardnih zadataka dolazi do izražaja logičkog i stvaralačkog mišljenja i osećaj zadovoljstva kada se samostalno reši zadatak. Zadovoljstvo je kruna umnog napora, procesa mišljenja i zaključivanja kroz koje je učenik prošao. Matematički problemi nas uče pažljivom čitanju teksta, pravilnom uočavanju bitnog, tačnom izražavanju i zaključivanju.
Na početku svake teme preporučljivo je učenicima zadavati karakteristične zadatke i na taj način ih uvoditi u metodologiju nestandardnih zadataka.
Nastavnikova uputstva, po pravilu, treba da podstiču i razvijaju kreativnost kod svakog učenika pojedinačno sa ciljem razvijanja njihovih matematičkih sposobnosti.
Logički zadaci u najširem smislu nisu samo klasični logički zadaci već i bilo koji drugi gde je rešenje dobijeno na osnovu uverljivog logičkog rasuđivanja i sa malo izučavanja. To su zadaci za razvijanje oštroumnosti.

Zahvaljujući večitim nastojanjima autora matematičkih zadataka da ih formulišu tako da nisu suvoparni i apstraktni, već da su autentični i originalni, nastao je veliki broj raznovrsnih matematičkih zadataka.
Rešavanje zadataka zahteva dovitljivost i logičnost u rasuđivanju, a ta se veština stiče tokom dužine prakse. Mnogi zadaci mogu biti rešavani na različite načine. Obično je jedana varijanta rešenja uobičajna (univerzalna), a ostale varijante su specifične i zasnivaju se na izvesnim uslovima u zadatku.

2.3 Dodatna nastava, matematička sekcija i takmičenje

"Matematika je suviše ozbiljna, i zbog toga ne treba propustiti ni jednu priliku da se učini zanimljivom" - Blez Paskal

Specifični oblici nastave koji zahtevaju puno angažovanje kako učenika tako i nastavnika, su dodatna nastava, matematičke sekcije i matematička takmičenja.
Podsticanje nadarenih učenika na intezivno učenje i razvijanje interesovanja za matematiku treba da bude stalna briga škole, roditelja i društva.

Dodatna nastava

Dodatna nastava služi onim učenicima koji žele da se dublje upoznaju sa predmetom. Ovakav oblik nastave ima svoje specifičnosti u smislu razvijanja interesovanja za nauku i za cilj ima da proširi i produbi znanje učenika koje je stečeno na redovnoj nastavi. Postojanje fleksibilnog orijentacionog programa rada potrebno je za uspešno izvođenje ovakvog tipa nastave. Nastavnik treba da odabere zadatke koji se odlikuju tematskom i problemskom raznovršnošću, kao i da podstaknu učenike na rad. Najčešće je ovakva nastava organizovana po grupama. Nastavnik treba da prepozna nivoe i odabere kriterijume grupa. Prilikom selekcije grupa treba pažnju posvetiti intelektualnim karakteristikama učenika i njihovim željama. Odrediti obim i kvalitet znanja kojima učenici raspolažu od presudnog su značaja. Za postizanje dobrih rezultata potrebna je želja, istrajnost i znanje.

Matematičke sekcije

Razvijanje i produbljivanje interesovanja za matematiku može se ostvariti i pomoću matematičke sekcije. Sekcija služi za obradu raznovrsnih poglavlja iz matematike. Udžbenici mogu biti planovi matematičke sekcije. Nastavnikove obaveze, prilikom rada u sekciji, jesu da osmisli zanimljiv program. Taj program mora odgovarati učenicima različitog uzrasta a samim tim i različitog obrazovnog nivoa. Prilikom odabira programa, mora se voditi računa na metodički pristup i izbor sadržaja. Pošto je cilj matematičke sekcije da se proširi obrazovni nivo učenika, nastavnici bi trebalo obavezno uvesti zanimljivosti iz istorije matematike, postaviti neku interesantnu logičku igru

ili prikazati film sa matematičkim sadržajem. Na sekcijama učenike treba da posmatramo kao male istraživače ili naučnike koji sledeći svoje ideje tragaju za odgovarajućim rešenjima ili izumima. Ideja je, pored logičko-kombinatornih zadataka, zadavati učenicima i zadatke iz teorije brojeva. Primeri zadataka iz teorije brojeva mogu se naći u ovom radu.
Pustiti učenike da ispolje svoj stvaralački duh glavna je svrha matematičke sekcije.

Matematička takmičenja

Takmičenja su jedan od uspešnijih oblika podsticanja učenika za učenje. Matematička takmičenja služe da učenici svoja znanja uporede sa svojim vršnjacima. Pripremanje učenika za matematička tamičenja se obavljaju na dodatnoj nastavi, sekciji ili na časovima redovne nastave. Pored pomoći nastavika, učenik mora pokazati samostalno zalaganje za rad. Svrha takmičenja iz matematike jeste povećanje interesovanja za nauku, kao i stepen logičkog i kombinatornog mišljenja, razumevanje tekstova i korišćenje stečenog matematičkog znanja.
Kod nas, kao i u svetu, održavaju se takmičenja iz matematike i to sa svih nivoa- od školskog, preko opštinskog, okružnog, republičkog (državnog), saveznog (odnosno Srpske matematičke olimpijade) do Balkanijade. U daljem tekstu biće dati primeri zadataka sa takmičenja kao i njihovo rešenje sa detaljnim objašnjenima.

2.4 Cilj i primena

Cilj nastave matematike je da učenici usvoje elementarne matematičke kompetencije (znanja, veštine i vrednosne stavove) koje su potrebne za shvatanje pojava i zakonitosti u prirodi i društvu i koji će da osposobe učenike za primenu usvojenih matematičkih znanja u rešavanju raznovrsnih zadataka iz životne prakse. Takođe je cilj da ih osposobi za uspešno nastavljanje matematičkog obrazovanja, kao i da doprinese razvijanju mentalnih sposobnosti. Sistematičnost, urednost, preciznost, temeljnost, istrajnost, kritičnost u radu kao i kreativnost samo su neke od osobina koja se stiču rešavanjem matematičkih zadataka. Učenici treba da budu podstaknuti za stručni razvoj i usavršavanje u skladu sa individualnim sposobnostima i potrebama društva. Formirani široki pogled na svet i svestrani razvitak ličnosti posledice su ulaganja u matematičko obrazovanje.
Zadaci nastave matematike služe da učenici:

1. razvijaju logičko-apstraktno mišljenje,
2. razvijaju sposobnost jasnog i preciznog izražavanja,
3. razvijaju sposobnost određivanja i procene kvantitativnih veličina i njihovih odnosa,
4. razlikuju geometrijske objekte i njihove uzajamne odnose i transformacije,
5. razumeju funkcionalne zavisnosti kao i njihovo predstavljanje i primenu,
6. razvijaju radne navike i sposobnost za samostalni i grupni rad,
7. formiraju sistem vrednosti,
8. stiču znanja i veštine koje mogu da primene i u drugim predmetima.

Postoje misaone operacije koje se tipično koriste u rešavanju zadataka. Zadatak možemo varirati rastavljanjem i sastavljanjem njegovih elemenata, vraćanjem na definiciju nekih izraza, upotrebom pomoćnih izvora kao što su: specijalizacija, generalizacija ili analogija. Variranje zadataka može dovesti do pomoćnih elemenata ili do otkrića jednostavnijeg pomoćnog zadatka. Nastavnik može apstraktnim matematičkim pojmovima dati konkretne interpretacije (npr. doneti na čas neka geometrijska tela ili koristiti kompjuterske programe).

3 Logičko-kombinatorni problemi

3.1 Kombinatorika

Oblast matematike koja se bavi izučavanjem mogućih rasporeda, metoda za prebrojavanje i pravila grupisanja elemenata najčešće konačnih skupova zove se kombinatorika.
Prilikom rešavanja zadataka preporučljivo je koristiti pogodne grafičke interpretacije (npr. crtanje odgovarajućeg stabla) i pogodne načine zapisivanja rasporeda.

Primer 1:

Pred vama je "TROUGAO" sastavljen od reči trougao.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{T} & \mathbf{R} & O & U & G & A & O \\
R & \mathbf{O} & U & G & A & O & \\
O & \mathbf{U} & \mathbf{G} & \mathbf{A} & O & & \\
U & G & A & \mathbf{O} & & & \\
G & A & O & & & & \\
A & O & & & & & \\
O & & & & & &
\end{array}
$$

Na koliko načina je moguće, krećući se od slova do njemu susednog slova, pročitati reč TROUGAO?
Na slici je dat jedan od mogućih načina.

Rešenje:

Početno slovo je T u levom gornjem uglu. Do sledećeg slova R možemo doći na dva načina (idući u desno i dole).
TR se može pročitati na dva načina.
TRO možemo pročitati na $2 \cdot 2 = 4$ načina, jer se od slova R do sledećeg slova O može stići na dva načina.
Ova se situacija ponavlja u svakom koraku pa se reč trougao, idući od slova do njemu susednog slova, može pročitati na $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ načina.

3.2 Elementi kombinatorike

Binomni koeficienat

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n \in N, k \in N \cup \{0\}, (0! = 1)$$

Pravilo proizvoda Ako skup A_1 ima n_1 elemenata, skup A_2 ima n_2 elemenata,..., A_k ima n_k elemenata, i ako se bira po jedan element iz svakog od skupova A_i, pri čemu su svi posmatrani elementi različiti.
Ovakvih izbora ima $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Permutacije Pojam permutacije vezuje se za preuređivanje objekata, odnosno promenu njihovog rasporeda. Permutacija na skupu je ređanje elemenata skupa u bilo kom poretku.

Permutacije bez ponavljanja Svi elementi skupa $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ se raspoređuju u uređenu n-torku. Broj ovakvih rasporeda je

$$P_n = n!.$$

Permutacije sa ponavljanjem Iz skupa $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ se bira n_1 puta element a_1, n_2 puta element a_2, n_k puta element a_k, i izabrani elementi se svrstavaju u uređenu n-torku onim redom kojim su birani.
Ovakvih izbora ima

$$P_{n_1,n_2,...,n_k}{}^n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!},$$

gde je $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Varijacije Varijacije su rasporedi kod kojih je, kao i kod permutacija, bitan raspored, ali se u opštem slučaju ne koriste svi elementi nad datim skupom, nego samo deo njih.

Varijacije bez ponavljanja Iz skupa $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ se $k \leq n$ puta bira neki element tako da svi izabrani elementi budu različiti (prethodno izabrani elementi se ne biraju ponovo) i izabrani elementi se raspoređuju u n-torku.
Ovakvih izbora raspoređivanja ima

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!.$$

Varijacije sa ponavljanjem Iz skupa $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ se k puta bira neki element tako da se svaki put element bira iz celog skupa A (prethodno izabrani elementi se mogu ponovo izabrati) i izabrani elementi se raspoređuju u uređenu n-torku.
Ovakvih izbora raspoređivanja ima

$$\overline{V_k^n} = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Kombinacije Kombinacije su rasporedi kod kojih nije bitan redosled. Razlikuje se od varijacije po bitnom svojstvu a to je da se kod kombinacije ne vodi računa o poretku.

Kombinacije sa ponavljanjem Iz skupa $A = \{a_1, a_2, .., a_n\}$ se bira podskup od $k \leq n$ elemenata.
Ovakvih podskupova ima

$$C_k^n = \binom{n}{k}.$$

Kombinacije bez ponavljanja Iz skupa $A = \{a_1, a_2, .., a_n\}$ se bira podskup u kome se elementi mogu ponavljati, ali tako da ukupno elemenata sa ponavljanjem bude k.
Ovakvih izbora ima

$$\overline{C_k^n} = \binom{n+k-1}{k}.$$

3.3 Dirihleov princip

Princip nazvan u čast nemačkog matematičara P.G.L. Diricher[1] koristimo u rešavanju raznih zadataka a naročito za dokazivanje postojanja objekta sa određenim svojstvima. Ovaj princip je jedan od najjednostavnijih elementarnih kombinatornih principa.

Dirihleov princip se najčešće iskazuje na popularan način u verziji problema "zečeva i kaveza".

Ako imate 7 zečeva i 6 kaveza (ili uopšte m zečeva i k kaveza gde je $m > k$) i sve zečeve smestimo u kaveze, onda mora postojati kavez u kome će biti smeštena bar 2 zeca.
Pretpostavimo da ne postoji takav kavez u kome su bar 2 zeca.
Onda je u svaki kavez smešteno najviše po jedan zec, tako da ukupan broj smeštenih zečeva u ovom slučaju nije veći od $1 \cdot 6 = 6$ zečeva, a ima ih ukupno 7 zečeva što je protivrečno našoj pretpostavci.
Znači da postoji kavez u kojem se nalaze bar 2 zeca.

Strogo formulisano Dirihleov princip glasi:

Ako su A i B klasični skupovi i $|A| > |B|$, onda ne postoji [2]injektivno (1-1) preslikavanje skupa A u skup B.

Drugačija, nešto jednostavnija formulacija Dirihleovog principa glasi:
Ako je $n + 1$ ili više objekata smešteno u n kutija, tada se bar u jednoj kutiji nalaze bar dva objekta.

Dokažimo ovo tvrđenje.
Najpre pretpostavimo da svaka kutija sadrži najviše jedan objekat. Tada je ukupan broj objekata najviše n, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da ima bar $n + 1$ objekta.

[1] *Johan Peter Gustav Ležen Dirihle* (1805-1859) bio je nemački matematičar kome se prepisuje moderna formalna definicija funkcije.

[2] $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Princip zbira

Ako jedan događaj može da se realizuje na m načina, a neki drugi na n načina, tada jedan od njih može da se realizuje na $m + n$ načina.

Princip proizvoda

Ako jedan događaj može da se realizuje na m načina, a neki drugi na n načina, tada se oba događaja mogu istovremeno realizovati na $m \cdot n$ načina.

Opšti oblik Dirihleovog principa može se dobiti iz principa zbira.

Neka je određen broj objekata smešten u n kutija i neka je A_i skup objekata u kutiji, pri čemu važi da je $1 \leq i \leq n$.

Pošto su skupovi A_i [3]disjunktni, broj objekata u kutiji je dat sa

$$|A_1| + |A_2| + ... + |A_n|.$$

Stoga, ako bi se u svakoj kutiji nalazilo najviše k objekata, tada bi ukupan broj objekata bio najviše $k + k + ... + k = nk$.
Odnosno, ako je m objekta smešteno u n kutija i $m > nk$, tada se u bar jednoj kutiji nalazi $k + 1$ objekat.

[3]Disjunktni skupovi su skupovi koji nemaju zajedničkih elemenata.

Primer 2:

Koliko karata treba izvući iz špila od 52 karte da bi se među izvučenim kartama sigurno nalazile četiri sa istim znakom?

Rešenje:

Izvučene karte možemo grupisati prema vrsti u četiri grupe.
Da bismo bili sigurni da je u jednoj od njih 4 elementa, shodno Dirihleovom principu, potrebno je izvući $4 \cdot 3 + 1 = 13$ karata.
Ako je broj karata manji, recimo 12, postoji mogućnost da su te četiri grupe po tri karte. Slično, i za manje brojeve.
Nakon 13 i više izvučenih karata (naravno, ne više od 52) sigurno postoje četiri koje su istog znaka.

Primer 3:

Na takmičenju iz matematike svaki od pet postavljenih zadataka boduje se sa 0, 1, 2, 3, 4 ili 5 poena. Koliko najmanje takmičara treba da učestvuje na takmičenju da bi među njima postojala dva koja su na svakom zadatku osvojila jednak broj poena?

Rešenje:

Rezultat pojedinog učenika je niz $(a_1, a_2, ..., a_n)$, gde je a_i broj poena koje je učenik osvojio na i-tom zadatku. Kako je a_i broj iz skupa $0, 1, 2, 3, 4, 5$, to je broj različitih rezultata (po principu proizvoda) jednak $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776$.
Na osnovu Dirihleovog principa, najmanji broj takmičara koji garantuje da postoje dva takmičara sa istim brojem poena na svakom zadatku je 7777.

3.4 Princip uključenja - isključenja

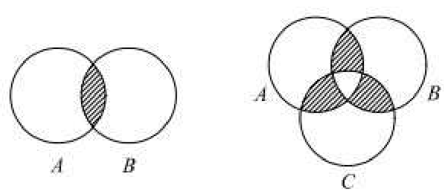
Jedan od osnovnih principa prebrojavanja - princip zbira tvrdi da je

$$A \cup B = |A| + |B|$$

kada su A i B disjunktni skupovi.

Ako A i B nisu disjunktni, sabiranjem $|A|$ i $|B|$ elemente preseka $|A \cap B|$ brojimo dva puta, pa da bi dobili pravu vrednost $|A \cup B|$ moramo oduzeti $|A \cap B|$.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



Slično rasuđivanje primenjujemo i u slučaju tri skupa. Kada saberemo $|A|, |B|$ i $|C|$ elemente preseka $|A \cap B|$, $|B \cap C|$ i $|C \cap A|$ brojimo dva puta (ukoliko nisu u preseku sva tri skupa). Da ovo ispravimo, oduzimamo $|A \cap B|$, $|B \cap C|$ i $|C \cap A|$.
Ali sada smo elemente $|A \cap B \cap C|$, koje smo u $|A| + |B| + |C|$ brojali tri puta, oduzeli takođe tri puta.

Stoga, da bi dobili pravu vrednost $|A \cup B \cup C|$, moramo da dodamo $|A \cap B \cap C|$.

$$|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) + |A \cap B \cap C|$$

Primer 4:

Na drugoj godini Odseka za matematiku ima 50 studenata. Od njih će u oktobarskom ispitnom roku 24 izaći na matematičku analizu, 20 na algebru i 13 na diskretnu matematiku. Matematičku analizu i algebru će polagati 6 studenata, algebru i diskretnu matematiku 5 studenata, a analizu i diskretnu matematiku 4 studenta. Ako jedino Nemanja polaže sva tri ispita, koliko studenata neće izaći ni na jedan ispit?

Rešenje:

Neka sa M, A i D označimo skupove studenata koji izlaze na matematičku analizu, algebru i diskretnu matematiku, redom.
Iz gornjih uslova imamo da je $|M| + |A| + |D| = 24 + 20 + 13 = 57$,
$|M \cap A| + |A \cap D| + |D \cap M| = 6 + 5 + 4 = 15$,
$|M \cap A \cap D| = 1$.
Iz jednakosti imamo $|M \cup A \cup D| = 57 - 15 + 1 = 43$, pa je broj studenata koji neće izaći ni na jedan ispit jednak $50 - 43 = 7$.

Prethodno rasuđivanje možemo da proširimo i na slučaj n konačnih skupova $A_1, A_2, ..., A_n$.

Teorema uključenja - isključenja:

Za konačne skupove $A_1, A_2, ..., A_n$ važi:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,...,n\}} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} A_i| \tag{1}$$

Dokaz prebrojavanjem :

Posmatrajmo proizvoljni element $x \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.
On doprinosi tačno 1 veličini unije na levoj strani jednačine (1).
Razmotrimo sada koliko x doprinosi veličinama raznih preseka na desnoj strani ove jednačine. Neka je j broj skupova A_i koji sadrže x. Preimenujmo skupove tako da se x sadrži u skupovima $A_1, A_2, \ldots, A_j$. Sada se element x pojavljuje u preseku svake k-torke skupova $A_1, A_2, \ldots, A_j$ i ni u je-

dnom drugom preseku. Pošto postoji $\binom{j}{k}$ k-elementnih podskupova skupa sa j elemenata, x se pojavljuje u $\binom{j}{k}$ preseka k-torki skupova. Veličine preseka k-torki skupova se množe sa $(-1)^{k-1}$, tako da na desnoj strani jednačine, element x doprinosi vrednošću

$$j - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - ... + (-1)^{j-1} \cdot \binom{j}{j}.$$

[4] Iz posledice za zbir binomnih koeficijenata sa naizmeničnim znacima, dobijamo da je gornji izraz jednak 1.
Prema tome, za proizvoljno $x \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ doprinos x obema stranama naše jednačine je jednak 1, pa zaključujemo da su izrazi u ovoj jednačini zaista jednaki.

Ova teorema se može dokazati i primenom matematičke indukcije.

Dokaz indukcijom :

Indukcija je po broju skupova n, s tim što za bazu indukcije koristimo $n = 2$. Kao što znamo, jednačina (1) važi za dva skupa.
Pretpostavimo da ona važi za proizvoljnih $n - 1$ konačnih skupova. Tada je:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cup A_n|$$

$$= |\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i| + |A_n| - |(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n|$$

(iskoristili smo princip uključenja-isključenja za dva skupa,
tj.$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ sa $A = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ i $B = A_n$)

$$= |\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i| + |A_n| - |\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)|$$

[4] $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

(distributivnost preseka : $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
sada koristimo induktivnu pretpostavku dva puta,
jednom za

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$$

i jednom za

$$|\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_n)|)$$

$$= (\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,...,n-1\}} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} A_i|) + |A_n| - (\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,...,n-1\}} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I \cup \{n\}} A_i|).$$

Dokaz je skoro gotov. U prvoj sumi sabiramo, sa odgovarajućim znacima, veličine svih preseka skupova koji ne uključuju skup A_n.
U drugoj sumi se pojavljuju veličine svih preseka k skupova koji uključuju skup A_n
(tj. A_n i $k-1$ skupova između $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ sa znakom $-(-1)^{k-1} = (-1)^k$).

Druga suma ne uključuje $|A_n|$, ali se taj sabirak pojavljuje između dve sume. Sve u svemu, veličina preseka bilo kojih k skupova između $A_1, A_2, ..., A_n$ pojavljuje se tačno jednom u izrazu sa znakom $(-1)^{k-1}$, što se slaže sa jednačinom (1), pa je dokaz indukcijom završen.

Primer 5:

Koliko ima prirodnih brojeva ne većih od 1000 koji nisu deljivi ni sa 2, ni sa 3, ni sa 5?

Rešenje:

Neka je A_1 skup brojeva deljivih sa 2, A_2 skup brojeva deljivih sa 3 i A_3 skup brojeva deljivih sa 5.

Tada je $|A_1| = 500$, $|A_2| = 333$ i $|A_3| = 200$.

Brojeva deljivih i sa 2 i sa 3, tj. deljivih sa 6 ima $|A_1 \cap A_2| = 166$,
brojeva deljivih i sa 2 i sa 5, tj. deljivih sa 10 ima $|A_1 \cap A_3| = 100$,
i brojeva deljivih i sa 3 i sa 5, tj. deljivih sa 15 ima $|A_2 \cap A_3| = 66$.

Najzad, brojeva deljivih i sa 2 i sa 3 i sa 5, tj deljivih sa 30 ima

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 33.$$

Prema formuli uključivanja i isključivanja, brojeva koji su deljivi bar jednim od brojeva 2, 3 ili 5 ima

$$500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734.$$

Dakle, brojeva ne većih od hiljadu koji nisu deljivi ni sa 2, ni sa 3, ni sa 5 ima

$$S = 1000 - 734 = 266.$$

3.5 Zadaci sa takmičenja za učenike osnovnih škola

Zadatak 1:

Svaki put kad pogreši pri izradi domaćeg zadataka, Milan istrgne jedan list iz sveske. Tako mu se desilo da je iz jedne sveske istrgne 25% listova, a iz druge, iste takve sveske, svaki deveti list. Koliko je bilo prvobitno u svakoj svesci i za koliko procenata se smanjio ukupan broj listova (u obe sveske zajedno) ako je Milan istrgao ukupno 26 listova?

Rešenje:

Ako sa x obeležimo broj listova u jednoj svesci, tada je $\frac{x}{4} + \frac{x}{9} = 26$, tj $x = 72$.
Broj listova će se smanjiti za $\frac{26}{144} = 0.1806 \approx 18\%$.
(Republičko takmičenje 2004. , 6.razred)

Zadatak 2:

Tanja je napisala 10 uzastopnih prirodnih brojeva. Zbir cifara ni jednog od tih brojeva nije deljiv brojem sedam. Koji je namanji broj koji je Tanja mogla da napiše?

Rešenje:

Brojevi 7, 16, 25, 34, 43, 52, 59, 61, 68, 70, 77, 86 i 95 imaju zbir cifara deljiv sa 7, a između nikoja dva od njih nema 10 brojeva. Prema tome, najmanji broj koji je Tanja zapisala je 96 jer su prvih 10 uzastopnih brojeva kojima zbir cifara nije deljiv sa sedam : 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104 i 105.
(Opštinsko takmičenje 2005., 8.razred)

Zadatak 3:

Cifra desetica dva različita dvocifrena broja je 6. Ako u svakom od njih cifre desetica i jedinica zamene mesta, proizvod tako dobijenih brojeva je jednak proizvodu datih brojeva. O kojim različitim brojevima je reč?

Rešenje:

Ako su x i y cifre jedinica datog broja, iz uslova zadatka dobijamo da je $\overline{6x} \cdot \overline{6y} = \overline{x6} \cdot \overline{y6}$. Iz jednakosti $(60+x)(60+y) = (10x+6)(10y+6)$ sledi $3600 + xy = 100xy + 36$, odnosno $xy = 36$. Kako su x i y cifre, one mogu biti jedino 4 i 9, pa su traženi brojevi 64 i 69.
(Školsko takmičenje 2006. , 7.razred)

Zadatak 4:

U jednoj korpi nalaze se crvene, a u drugoj bele ruže. Broj crvenih jednak je $\frac{7}{8}$ broja belih ruža. Ako se sedam belih ruža premesti u korpu sa crvenim ružama, u korpama će biti isti broj ruža. Koliko ima crvenih ruža?

Rešenje:

Ako je x broj belih, tada je $\frac{7}{8}x$ broj crvenih ruža. Iz uslova zadatka dobijamo jednačinu $\frac{7}{8} \cdot x + 7 = x - 7$, čije je rešenje broj 112.
Dakle, belih ruža ima 112, a crvenih $\frac{7}{8} \cdot 112$, odnosno 98.
(Okružno takmičenje 2006., 5.razred)

Zadatak 5:

Ceo broj $n > 1$ zove se savršen ako je zbir svih njegovih delilaca (uključujući i n i 1) jednak $2n$. Naći sve savršene brojeve n takve da su $n-1$ i $n+1$ prosti brojevi.

Rešenje1: Najmanji savršeni broj je 6 i on zadovoljava uslove zadatka.
Pretpostavimo da je $n > 6$ i da su $n-1$ i $n+1$ prosti brojevi. Tada mora da važi $n = 6k$ za neki prirodan broj $k > 1$.
To znači da su 1, k, $2k$, $3k$ i $6k$ različiti delioci broja n, pa je zbir svih njegovih delioca veći ili jednak od

$$1 + k + 2k + 3k + 6k = 12k + 1 = 2n + 1 > 2n$$

i broj n nije savršen. Dakle, $n = 6$ je jedini broj koji zadovoljava uslove zadatka.

Rešenje2: Prema Euklid-Ojlerovoj teoremi[5] svaki paran savršen broj n može se prikazati u obliku

$$n = 2^{p-1} \cdot (2p - 1),$$

gde su p i $2p - 1$ prosti brojevi. Ako je $p = 2$, dobija se prvi savršen broj 6 koji, očigledno, zadovoljava uslove zadatka. Ako je p neparan broj, onda je $2^p \equiv 2 \pmod 3$ i $2^{p-1} \equiv 1 \pmod 3$, pa je $n - 1 \equiv 0 \pmod 3$, pa broj $n - 1$ ne može da bude prost.
Dakle, broj 6 je jedino rešenje zadatka.

(Deseta juniorska balkanska olimpijada 2006., Moldavija)

Zadatak 6:

Na jednoj proslavi bilo je ukupno 2007 osoba. Za svake 1003 od tih osoba postojala je bar jedna osoba od preostalih prisutnih koja se poznavala sa svakom od te 1003 osobe. Dokazati da je na proslavi postojala osoba koja se poznavala sa svim prisutnim osobama.

Rešenje:

Napravimo proizvoljnu grupu od 1003 člana. Jedna od 1004 preostale osobe poznaje sve članove te grupe. Neka je to osoba x_1. Uključimo osobu x_1 u tu grupu umesto neke od članova te grupe.
Sada među preostalime 1004 osobe opet postoji osoba, označimo sa x_2 koja poznaje sve članove te grupe. Uključujemo i nju u grupu umesto jedne od osoba izuzev osobe x_1. Na ovaj način može se oformiti grupa od 1003 osobe x_1,x_2,...,x_{1003} koje se međusobno poznaju.
Sada postoji osoba x_{1004} koja nije u grupi i poznaje sve osobe iz te grupe. U grupi x_1,x_2,...,x_{1003},x_{1004} svi poznaju jedni druge.
Od preostale 1003 osobe se može formirati jedna grupa čije će sve članove poznavati neka osoba van te grupe, to jest neka od osoba x_1,x_2,...,x_{1004}, recimo osoba x.
Ta osoba x zapravo poznaje sve prisutne osobe.
(Prva Srpska matematička olimpijada)

[5] Videti, na primer, V.Mićić, Z.Kadelburg, D.Djukić : *Uvod u teoriju brojeva*, Materijali za mlade matematičare 15, Društvo matematičara Srbije, Beograd 2013.

Zadatak 7:

Na jednom ostrvu $\frac{3}{4}$ muškaraca su oženjeni, a $\frac{2}{3}$ žena su udate. Koji deo stanovništva ostrva nije u braku ako je broj oženjenih muškaraca jednak broju udatih žena?

Rešenje:

Ako je x muškaraca u braku, onda je i x žena u braku, pa na ostrvu živi $\frac{4x}{3}$ muškaraca i $\frac{3x}{2}$ žena. Ostrvo ima ukupno $\frac{17x}{6}$ stanovnika. U braku je $2x$ stanovnika, a $\frac{5x}{6}$ stanovnika nije, a to je $\frac{5}{17}$ stanovnika.
(Okružno takmičenje 2009., 6.razred)

Zadatak 8:

Majka i ćerka su rođene u istom veku. Koliko godina je majka starija od ćerke ako je danas proizvod njihovih godina 2010?

Rešenje:

Kako je $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, i kako su majka i ćerka rođene u istom veku, to je jedino moguće da majka ima 67 godina, a ćerka $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ godina.
(Školsko takmičenje 2010., 6.razred)

Zadatak 9:

U zemlji čuda cene se menjaju svakog dana. Prvog dana se povećaju za 1% a narednog dana se smanje za 1%, zatim se sledećeg dana ponovo povećaju za 1%, pa se narednog dana opet smanje za 1%, i tako dalje. Da li je cena posle 2010 dana ista kao na početku?

Rešenje:

Neka je cena neke robe x. Prvog dana cena te robe je $101\%x = 1,01x$. Drugog dana cena te robe je $99\% \cdot (1,01x) = 0,99 \cdot 1,01x = 0,9999x$. Ponavljajući ovo imamo da je nakon 2010 dana cena te robe $0,9999^{1005}x$.
Kako je $0,9999 < 1$, to je i $0,9999^{1005} < 1$, odakle zaključujemo da je cena robe posle 2010. dana niža nego prvog dana.
(Državno takmičenje 2010, 7.razred)

Zadatak 10:

Koje godine je rođena osoba koja 2011. godine puni onoliko godina koliki je zbir cifara njenog rođenja?

Rešenje:

Označimo godinu kada je osoba rođena sa $\overline{abcd}$.

Tada je $2011 = \overline{abcd} + a + b + c + d = 1000a + 100b + 10c + d + a + b + c + d = 1001a + 101b + 11c + 2d$. Jedino je moguće $a = 1$.

Tada imamo $101b + 11c + 2d = 1010$. Jedina mogućnost za b je 9.
Tada je $11c + 2d = 101$. Jedina mogućnost za c je 9, pa je onda $d = 1$.

Dakle, osoba je rođena 1991. godine.
(Opštinsko takmičenje 2011., 5.razred)

3.6 Zadaci sa takmičenja za učenike srednjih škola

Zadatak 11:

Na koliko načina 6 parova može da sedne u red bioskopa koji ima 20 mesta, ako svaki par želi da sedne na susedna mesta?

Rešenje:

Ako se dva susedna mesta na kojima par sedi posmatra kao blok, kada se svi smeste u redu će biti 6 blokova i 8 praznih mesta.
Blokovi i prazna mesta mogu se u red poređati na $\binom{14}{6}$ načina, parovi se pridružuju blokovima na 6! načina. Svaki par može sesti u izbrani blok na dva načina (što daje $2^{(6)}$ mogućnosti).
Dakle, ukupan broj rasporeda je $\binom{14}{6} \cdot 6! \cdot 2^{(6)}$.
(Okružno takmičenje 2010.)

Zadatak 12:

Na pitanje koji mu je broj kuće Perica je odgovorio sledeće:
Ako je moj broj kuće deljiv sa 3, onda je to broj između 50 i 59,
Ako moj broj kuće nije deljiv sa 4, onda je broj između 60 i 69,
Ako moj broj kuće nije deljiv sa 6, onda je broj između 70 i 79.
Koji je Pericin broj kuće?

Rešenje:

Neka je k broj Pericine kuće.

- 1. Ako $3|k$, na osnovu prve izjave $50 \leq k \leq 59$, tj. k mora biti $k \in 51, 54, 57$.
  Kako ni jedan od tih brojeva nije deljiv sa 4, na osnovu druge izjave je $60 \leq k \leq 69$. Kako ne može biti $k \leq 59$ i $k \geq 60$, sledi da je ova situacija nemoguća.

- 2. Ako $3 \not| k$, tada $6 \not| k$, pa na osnovu treće izjave sledi $70 \leq k \leq 79$. Takodje $4|k$, inače bi po drugoj izjavi sledilo $60 \leq k \leq 69$, tj. $k \leq 69$ i $k \geq 70$, što je nemoguće.

Dakle, $70 \leq k \leq 79$, $3 \not| k$ i $4|k$
Jedini broj koji zadovoljava ove osobine je 76.(Izmedju 70 i 79 postoje dva broja deljiva sa 4 - to su 72 i 76, ali je 72 deljiv sa 3).
Dakle, broj Pericine kuće je 76.
(Okružno takmičenje 2010.)

Zadatak 13:

Na takmičenju je učestvovalo 100 učenika koji su rešavali po 5 zadataka. Poznato je da je svaki zadatak rešilo bar 60 učenika. Dokazati da postoje bar dva učenika koji su zajedno rešili sve zadatke.

Rešenje:

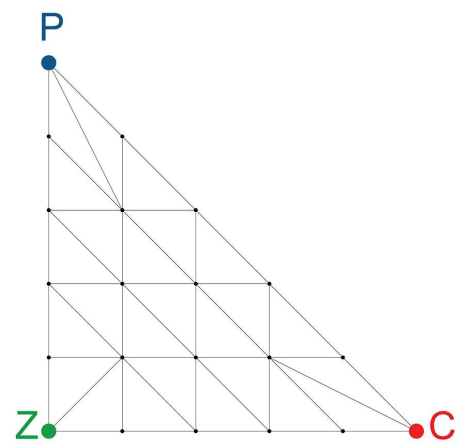
Prvi zadatak nije uradilo najviše 40 učenika (jer ga je uradilo bar 60), pa je broj parova učenika, takvih da ni jedan od učenika u tom paru nije rešio prvi zadatak, najviše $\binom{40}{2}$.

Kako analogno zaključivanje važi i za preostale zadatke. Sledi da je broj parova učenika takvih da ni jedan od učenika u tom paru nije rešio neki od zadataka, ne veći od $5 \cdot \binom{40}{2} = 3900$.

Međutim kako je ukupan broj parova učenika $\binom{100}{2} = 4950 \geq 3900$,
sledi da postoji par učenika koji su zajedno rešili svih 5 zadataka.
(Nagradni zadaci, Tangenta 45st. 16 zad,M566)

Zadatak 14:

Trougao $\triangle ZCP$ je podeljen na 25 "malih" trouglova (kao na slici), a zatim su sva temena tih trouglova obojena sa tri boje na sledeći način.
Teme Z je obojeno zelenom bojom, teme C crvenom bojom a teme P plavom bojom. Svako od temena na duži ZC obojeno je ili zelenom ili crvenom bojom, svako od temena na duži CP obojeno je ili crvenom ili plavom bojom a svako od temena na duži ZP obojeno je ili zelenom ili plavom bojom.
Sva temena koja se nalaze u unutrašnjosti trougla obojena su bez restrikcija, jednom od tri boje.
Dokazati da bez obzira na način bojenja, bar jedan od 25 "malih" trouglova ima sva tri temena različite boje.



Rešenje:

Posmatraćemo stranice malih trouglova koje imaju jedno teme obojeno crvenom a drugo plavom bojom. Takve stranice ćemo zvati crveno plave stranice.
Svaka crveno plava stranica koja se nalazi u unutrašnjosti trougla $\triangle ZCP$ je stranica tačno dva mala trougla.
Dakle, svaka crveno plava stranica koja se nalazi na jednoj od stranica $\triangle ZCP$ po uslovu zadatka mora pripadari duži CP.
S obzirom da je C teme obojeno crvenom bojom a P plavom, broj crveno plavih stranica na duži CP je neparan.
Prema tome, mora postojati bar jedan mali trougao koji ima neparan broj crveno plavih stranica. Jasno, taj trougao ima sva tri temena različite boje.

(Srpska matematička olimpijada 2006/2007)

Zadatak 15:

Od 16 ljudi, među kojima su po 4 iz Srbije, Rumunije, Bugarske i Makedonije treba izbrati 6.

a. Koliko ima takvih izbora u kojima je zastupljena svaka zemlja?

b. Koliko ima takvih izbora u kojima nema više od dva predstavnika neke zemlje?

Rešenje:

a. Kako je zastupljen predstavnik svake zemlje, sledi da ili jedna zemlja ima 3 predstavnika (ostale 3 po 1 predstavnika) ili dve zemlje imaju dva predstavnika (ostale 2 po 1 predstavnika).

   1 Ako jedna zemlja ima 3 predstavnika njen izbor se može izvršiti na $\binom{4}{3}$ načina, njena 3 predstavnika na $\binom{4}{3}$ načina, dok se predstavnik od preostalih zemalja može izvršiti na $\binom{4}{1}$ načina pa u ovoj situaciji postoji $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3}^3 = 1024$.

   2 Ako dve zemlje imaju dva predstavnika, njihov izbor se može izvršiti na $\binom{4}{2}$ načina, za svaku od njih dva predstavnika na $\binom{4}{2}$ načina, dok se predstavnik neke od preostalih zemalja moze izvršiti na $\binom{4}{1}$ načina, pa u ovoj situaciji postoji $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot \binom{4}{1}^2 = 3456$. Dakle, odgovor na pitanje dela (a.) je $1024 + 3456 = 4480$ izbora.

b. Kako svaka od zemalja ima najviše dva predstavnika, sledi da bar 3 zemlje moraju imati predstavnike, tj. ili tri zemlje imaju po 2 predstavnika ili (ako svaka zemlja ima predstavnika) dve zemlje imaju 2, a dve 1 predstavnika.

   1 Ako tri zemlje imaju po 2 predstavnika, njihov izbor se može izvršiti na $\binom{4}{3}$ načina, a po dva predstavnika u svakoj od njih na $\binom{4}{2}$ načina, pa u ovoj situaciji postoji $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}^3 = 846$ izbora.

   2 Ako dve zemlje imaju 2 predstavnika (a dve jednog), broj izbora je isti kao i u drugom delu (a.), tj. u ovom slučaju ima 3456 uzbora.
   Dakle, odgovor na pitanje dela (b.) je 846+3456=4320 izbora.

(Opštinsko takmičenje 2009.)

Zadatak 16:

Grupa od 300 ljudi sa određenim tegobama učestvuje u ispitivanju takozvanog placebo efekta. Određenom broju ljudi iz ove grupe, dat je odgovarajući lek, a preostalima lažni (lek koji nema nikakvo dejstvo).
Naravno, niko nije znao da li je dobio pravi ili lažni lek. Ispostavilo se da je 20% onih koji su dobili pravi lek reklo da ne oseća nikakvo poboljšanje, dok su preostali rekli da im je bolje. 20% onih koji su dobili lažni lek je potvrdilo da im je bolje, dok su preostali iz ove grupe rekli da ne uočavaju nikakvu promenu.
Ako je ukupno 40% ljudi koji su učestvovali u eksperimentu potvrdilo poboljšanje sopstvenog stanja, odrediti koliko njih je dobilo pravi lek, a koliko lažan.

Rešenje:

Neka je x broj ljudi koi su dobili lažni lek. Tada je njih $300 - x$ dobilo pravi lek.
Pošto 20% ljudi koji su dobili lažni lek tvrdi da im je bolje, njih ima $\frac{x}{5}$.

Takođe, 80% ljudi koji su dobili pravi lek tvrdi da im je bolje, pa je njih $\frac{4 \cdot (300-x)}{5}$.
Onih koji tvrde da im je bolje ima 40% od 300, odnosno 120.

Dakle, $\frac{x}{5} + \frac{4 \cdot (300-x)}{5} = 120$.

$$x = 200$$

200 ljudi je dobilo lažni lek a 100 pravi lek.
(Opšinsko takmičenje 2014.)

Zadatak 17:

Koliko ima 100-cifrenih brojeva koji se zapisuju ciframa 1,2 i 3 tako da im nikoje dve susedne cifre nisu jednake?

Rešenje:

Prvu cifru ovog broja možemo izabrati na 3 načina. Nakon odabiranja prve cifre, drugu cifru možemo izabrati na 2 načina (ona mora biti različita od prve).
Slično, treću kao i svaku narednu možemo odabrati na 2 načina (ona mora biti različita od prethodno odabrane) pa je traženi broj jednak $3 \cdot 2^{99}$.

Zadatak 18:

Tri Engleza i dva Francuza zainteresovani su za 7 različitih knjiga:
3 na engleskom jeziku (traže ih samo Englezi),
2 na francuskom jeziku (traže ih samo Francuzi)
2 na srpskom jeziku (traže ih i Englezi i Francuzi).
Na koliko načina svakom od njih možemo pokloniti po jednu knjigu?

Rešenje:

Imamo 3 mogućnosti:

1 Oba Francuza dobila su knjigu na francuskom jeziku.
U ovom slučaju Francuzima knjige možemo pokloniti na dva načina.
Za troje Engleza imamo 5 mogućih knjiga, pa njima knjige možemo pokloniti na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina.
Dakle, ukupan broj načina da se osobama poklone knjige je u ovom slučaju $2 \cdot 60 = 120$.

2 Jedan Francuz je dobio knjigu na francuskom a drugi na srpskom jeziku. U ovom slučaju potrebno je izabrati koji će od Francuza dobiti knjigu na francuskom jeziku, zatim izabrati jednu od dve knjige na srpskom jeziku, koju ćemo pokloniti drugom Francuzu.
Dakle, Francuzima knjige možemo pokloniti na 8 načina.
Za Engleze ostaju 4 knjige (tri na engleskom jeziku i jedna na srpskom

jeziku), pa njima knjige možemo pokloniti na $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ načina.
Ukupan broj načina da se osobama poklone knjige u ovom slučaju je $8 \cdot 24 = 192$ načina.

3 Oba Francuza dobila su knjige na srpskom jeziku. U ovom slučaju Francuzima knjige možemo pokloniti na 2 načina.
Za tri Engleza preostale su tri knjige, pa njima knjige možemo pokloniti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina.
Ukupan broj načina da se osobama poklone knjige u ovom slučaju jednak je $2 \cdot 6 = 12$.

Ukupan broj načina da se osobama poklone knjige jednak je zbiru brojeva iz slučajeva 1,2 i 3, odnosno $120 + 190 + 12 = 324$.

Zadatak 19:

Bračni par Ljubica i Milenko pozovu na večeru svoje prijatelje, tri bračna para. Pošto su svi stigli istovremeno, počeli su da se rukuju, pri čemu se svako rukovao sa nekoliko ljudi, a niko se nije rukovao sa svojim bračnim drugom. Kada su završili sa rukovanjem Milenko je pitao svakog (pa i Ljubicu) koliko se puta rukovao. Dobio je sedam različitih odgovora.
Sa koliko se ljudi rukovala Ljubica?

Rešenje:

Očigledno je da je najveći broj rukovanja 6. Pošto je dato 7 različitih odgovora oni mogu biti 0,1,2,3,4,5 i 6.
Neka se osoba A rukovala 6 puta. Ona se rukovala sa svima osim sa svojim bračnim drugom. Ostali su se rukovali bar po jednom osim bračnog druga osobe A koja se nije rukovala (rukovala se 0 puta).
Slično utvrđujemo da se preostalom skupu (lica koja su se rukovala 1,2,3,4,5 puta) se nalazi osoba B koja se rukovala 5 puta (sa osobom A i sa preostale 4 osobe). Bračni drug osobe B se rukovao samo jednom (sa osobom A ali ne i sa osobom B).
Od preostale 3 osobe (koje su se rukovale 2,3 i 4 puta) osoba C rukovala se 4 puta (sa osobama A i B, sa Milenkom i Ljubicom), a bračni drug osobe C se rukovao dva puta (sa osobama A i B).

Preostaje da se Ljubica rukovala 3 puta.

3.7 Zadaci sa matematičkih olimpijada

Zadatak 20:

Na matematičkom takmičenju neki učenici su prijatelji; ako je A prijatelj sa B, tada je i B prijatelj sa A. Grupa učenika se naziva *družina* ako su svaka dva učenika u toj grupi prijatelji. (Specijalno, svaka grupa sa manje od dva učenika je družina.)
Broj učenika u družini naziva se njenom veličinom. Na ovom takmičenju maksimalna veličina družine je paran broj. Dokazati da se učenici mogu rasporediti u dve sobe, tako da je maksimalna veličina družine u jednoj sobi jednaka maksimalnoj veličini družine u drugoj sobi.
(48. međunarodna matematička olimpijada 2007.)

Rešenje:

Za početak smestimo sve učenike jedne od družina maksimalne veličine $2n$ u sobu X. Nazovimo ove učenike *P-učenicima*.
Ostale učenike smestimo u sobu Y. Neka su $d(X)$ i $d(Y)$ maksimalne veličine družina u sobama X i Y u datom momentu, redom.
Prebacivanjem jednog učenika iz sobe X u sobu Y veličina $d(X)$ se smanjuje za 1, a $d(Y)$ se ne menja ali povećava za 1, pa se razlika $d(X) - d(Y)$ smanjuje za 1 ili 2. Ponavljanjem ovog postupka možemo postići da ova razlika bude 0 (čime bi bilo dokazano tvrđenje zadatka) ili -1 (tj. $d(Y) = d(X)+1$).

Nadalje pretpostavljamo da je $d(X) = l$ i $d(Y) = l + 1$. Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. Ako u sobi Y postoji P-učenik koji ne pripada nekoj od družina u Y veličine $l+1$, nakon njegovog prebacivanja u sobu X ostaje $d(Y) = l+1$, ali se $d(X)$ povećva za 1, čime se postiže $d(X) = d(Y)$.

2. Pretpostavimo da svaki od $2n - 1$ P-učenika u Y pripada svim dužinama veličine $l + 1$ u Y.
   Tada proizvoljna dužina veličine $l+1$ u sobi Y sadrži $2n-1$ P-učenika i $0 \leq l+1-(2n-l) = 2(n-l)+1$ učenika koji nisu P-učenici (zovemo ih *ne-P-učenicima*). Kako je $2(n-l)+1 \neq 0$, u svakoj družini veličine $l+1$ u Y postoji ne-P-učenik.

Sada odaberemo neku družinu u Y veličine $l+1$ i prebacimo jednog ne-P-učenika iz nje u X. Ponavljamo ovaj postupak dok god postoje družine veličine $l+1$ u Y (a njih je konačo mnogo). Kako se $d(Y)$ prilikom svakog ovakvog poteza ne menja ili smanjuje za 1, u jednom momentu će važiti $d(Y)=l$. Dovoljno je pokazati da nakon ovog postupka ostaje $d(X)=l$.
Zaista, pretpostavimo da se u X stvorila družina veličine $l+1$. Tada svi učenici te družine poznaju svih $2n-l$ P-učenika u Y (jer svi su oni ili P-učenici, ili su prebačeni iz Y gde su bili u družini sa ovih $2n-l$ učenika), pa njihova unija sa ovih $2n-l$ učenika čini družinu veličine $(l+1)+(2n-l)=2n+1>2n$, što je nemoguće.

Zadatak 21:

Kejptaunska banka izdaje novčiće vrednosti $\frac{1}{n}$ za svaki prirodan broj n. Ako imamo konačno mnogo takvih novčića (ne obavezno različitih vrednosti) ukupne vrednosti ne veće od $99+\frac{1}{2}$, dokazati da možemo da ih podelimo u najviše 100 grupa tako da ukupna vrednost novčića u svakoj grupi nije veća od 1.
(55. međunarodna matematička olimpijada 2014.)

Rešenje:

Dokazaćemo da, ako je ukupna vrednost novčića $n-\frac{1}{2}$ za neko $n\in N$, onda je moguće podeliti ih u n grupa ukupnih vrednosti ne većih od 1.
Novčići vrednosti 1 čine grupe za sebe, pa možemo da smatramo da ih nema.
Dalje, ako imamo $d>1$ novčića vrednosti $\frac{1}{k}$, gde $d\mid k$, onda možemo da ih zamenimo jednim novčićem vrednosti $\frac{1}{e}$ za $e=k\mid d$.
Na ovaj način možemo da pretpostavimo da (1) novčić vrednosti $\frac{1}{2k-1}$ ($k\in N$) se pojavljuje najviše $2k-2$ puta, i (2) novčić vrednosti $\frac{1}{2k}$ ($k\in N$) se pojavljuje najviše jednom.
Za $k=1,2,...,n$, stavimo u k-tu grupu sve novčiće vrednosti $\frac{1}{2k-1}$ i $\frac{1}{2k}$: ukupna vrednost ove grupe nije veća od $\frac{2k-2}{2k-1}+\frac{1}{2k}<1$.
Preostale novčiće, vrednosti manjih od $\frac{1}{2n}$, rasporedićemo jedan po jedan. Uzmimo jedan od njih: bar u jednoj grupi ukupna vrednost novčića nije veća od $\frac{1}{n}(n-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2n}$, pa ovaj novčić možemo smestiti u tu grupu. Na ovaj način završavamo podelu.
Napomena : Tvrđenje ne važi ako se $n-\frac{1}{2}$ zameni sa npr. $n-\frac{1}{30}$, kao što se vidi na primeru kada novčići imaju vrednosti $1,1,...,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}$.

Zadatak 22:

Komisija sastavljena od 3366 filmskih kritičara glasa za Oskara. Svaki kritičar glasa za jednog glumca i jednu glumicu. Nakon glasanja se ispostavilo da za svaki prirodan broj n ne veći od 100 postoji glumac ili glumica koji je dobio/la tačno n glasova. Dokazati da postoje dvoje kritičara koji su glasali za istog glumca i istu glumicu.

(32. Balkanska matematička olimpijada 2015.)

Rešenje:

Pretpostavimo suprotno. Za svako $i = 1, 2, ..., 100$ fiksiraćemo jednog kandidata A_i koji je dobio i glasova.

Broj studija koje su glasale oba puta za nekog od kandidata iz skupa $\alpha = \{A_{34}, A_{35}, ..., A_{100}\}$ nije veći od broja parova glumac-glumica među ovim kandidatima, a on je najviše $33 \cdot 34 = 1122$.

S druge strane, od ukupno $2 \cdot 3366 = 6732$ glasova koje su sudije dodelile, njih $34 + 35 + ... + 100 = 4489$ je otišlo kandidatima iz skupa α. Zato ima najviše $6732 - 4489 = 2243$ sudija koje nisu oba puta glasale za kandidate iz α.

Dakle, ukupan broj sudija ne prelazi $1122 + 2243 = 3365$, što je kontradikcija.

3.8 Odabrani zadaci za razvijanje logike i opažanja

Zadatak 23:

Date su tri posude. Prva zahvata 8 litara, druga 5 litara a treća 3 litra. Posuda od 8 litara sadrži osam litara vode. Ostale posude se prazne. Podeliti tih 8 litara tako da 4 litra ostanu u najvećoj posudi a 4 litara vode bude u posudi od 5 litara.

Rešenje:

Iz posude od 8L prebacimo 5L u posudu od 5L a iz nje 3L u posudu od 3L.
Ta 3L se vrati u najveću posudu pa iz srednje posude se prebaci ona 2L u najmanju posudu. Potom se iz najveće posude prelije 5L u srednju posudu pa iz nje dopuni najmanju posudu sa 1L. U srednjoj je sada ostalo 4L kao i u najvećoj kada se u nju vrati 3L iz najmanje posude koja ostaje prazna.

Zadatak 24:

U podrumu se nalaze tri sijalice. Sve sijalice su isključene. Prekidači za te tri sijalice se nalaze van podruma. Imamo pravo da ukjučujemo i isključujemo prekidače koliko god želimo. Kada smo van podruma ne možemo da vidimo ništa što se dešava unutar podruma. Kako ćemo da odredimo koji prekidač odgovara kojoj sijalici ako imamo prava samo jednom da uđemo u podrum.

Rešenje:

Uključimo prvi prekidač i sačekamo neko vreme. Isključimo prvi, uključimo drugi prekidač i uđemo u podrum. Ona sijalica koja je upaljena njen je drugi prekidač. Dodirnemo one dve ugašene sijalice. Ona koja je vruća za nju je prvi prekidač, a ona koja nije, koristi treći prekidač.

Zadatak 25:

Date su tri kutije sa voćem. Na jednoj piše "jabuke", na drugoj piše "banane" a na trećoj piše "jabuke i banane". Kutije su pogrešno označene i to tako da na svakoj kutiji stoji pogrešan natpis. Svaki natpis treba staviti na odgovadajuću kutiju pri čemu možemo da iz jedne kutije uzmemo samo jednu voćku ne gledajući sadržaj te kutije.

Rešenje:

Uzmem jednu voćku iz kutije sa natpisom "jabuke i banane":
1) Ako je jabuka:

1. natpis "jabuke" stavim na tu kutiju.
2. natpis "jabuke i banane" na kutiju sa natpisom "banane",
3. a natpis "banane" na kutiju gde je pisalo "jabuke";

2)Ako je banana:

1. natpis "banane" stavim na tu kutiju.
2. natpis "jabuke i banane" na kutiju sa natpisom "jabuke",
3. a natpis "jabuke" na kutiju gde je pisalo "banane".

Zadatak 26:

Dato je 12 bilijarskih kugli. Svaka od njih je ista po obliku i boji, tako da se vizuelno ne razlikuju. Ipak, jedna od njih je nešto lakša ili teža od drugih. Da bi utvrdili koja kugla ima drugačiju težinu mi imamo na raspolaganju vagu sa dva tasa. Kako odrediti koja je kugla različita ako imamo pravo da izvršimo ne više od tri merenja?

Rešenje:

Podelimo kugle u grupe od po 6. Kada ustanovimo koja je teža, tu delimo na dve grupe po 3 kugle. Pošto smo utvrdili koja je grupa teža biramo 2 kugle i vršimo treće merenje koje pokazuje da li je tražena kugla na tasu ili van.

Zadatak 27:

Imamo dve posude. U posudi A se nalazi 10 crvenih kuglica a u posudi B 10 plavih kuglica. Nekoliko crvenih kuglica je uzeto iz posude A i stavljeno u posudu B. Nakon toga je isti broj kuglica iz posude B vraćeno u posudu A. Pitanje: Da li je broj crvenih kuglica u posudi A veći, manji ili jednak broju plavih kuglica u posudi B?

Rešenje:

Broj crvenih kuglica u posudi A je jednak broju plavih kuglica u posudi B.
Obrazloženje: Neka je prebačeno x crvenih kuglica iz posude A u posudu B (x je veće ili jednako 0 i manje ili jednako 10). U posudi A je ostalo $10 - x$ crvenih kuglica. U posudi B je $10 + x$ crvenih i plavih kuglica . Crvenih kuglica u posudi B je $x/(10+x)$. Sada se nazad vraća x kuglica. U posudi A je isto $x/(10+x)$. Dakle vraćenih crvenih kuglica u posudu A je $x \cdot x/(10+x)$ pa u posudi A ima $10 - x + x \cdot x/(10+x) = 10/(10+x)$ crvenih kuglica. Koliko je ostalo plavih kuglica u posudi B? Ostalo je $10-(x-x/(10+x)) = 10/(10+x)$ plavih kuglica. Dakle isto koliko i crvenih kuglica.

Zadatak 28:

Kralj u svom posedu ima 100 provincija. Sve provincije plaćaju svoj porez istog dana. Porez iznosi 100 zlatnika a svaki zlatnik je težak 10 grama. Kralj je nekako doznao da će predstavnik jedne od 100 provincija da donese lažne zlatnike. Takođe, kralj je doznao da su lažni zlatnici tačno jedan gram lakši od pravih zlatnika. Naravno, kralj bi po svaku cenu hteo da zna ko je taj što će da donese lažne zlatnike ali sa druge strane ne bi voleo da proverava svakog ponaosob.
Kako će kralj, uz pomoć samo jednog merenja, da sazna ko je od njegovih podanika doneo lažne zlatnike?

Rešenje:

Kralj će na kantar da stavi (sve u isto vreme tj. u jednom merenju) od predstavnika iz prve provincije 1 zlatnik, od drugog 2,..., devedesetdevetog 99 i od stotog 100. Kada niko ne bi podvaljivao merena masa blaga bi trebala da iznosi 5050g, a znaće ko ga potkrada jer ako bude manja za 1g to znaci da da je u pitanju predstavnik iz prve provincije, a ako za 2g onda je drugi,..., ako za 100g onda je stoti.

Zadatak 29:

Grupi od 100 zatvorenika preti smrtna kazna. Upravnik zatvora dolazi dan pred izvršenje smrtne kazne i nudi im mogućnost da se spasu. Sutradan će svi zatvorenici biti postrojeni u kolonu i na glavi svakog od njih će biti postavljena kapa crne ili bele boje. Svaki zatvorenik ne može videti boju svoje kape, kao ni boju kapa zatvorenika koji stoje iza njega, ali može videti boje kapa zatvorenika koji stoje ispred njega u koloni. Svaki zatvorenik moći će da kaže samo jednu reč : crna ili bela. Ukoliko se ta reč poklopi sa bojom kape na njegovoj glavi, biće spasen, u suprotnom mu predstoji smrtna kazna. Zatvorenici imaju veče da se dogovore i osmisle eventualnu strategiju kako bi ih se što više spasilo. Koliko najviše zatvorenika se sigurno može spasiti od smrtne kazne?

Rešenje:

Sigurno se može spasiti njih 99. Prvo se dogovore da onaj koji (na njegovu žalost) bude na začelju prebroji npr crne kape i ako broj bude neparan kaže "crna" u suprotnom "bela". On će imati 50% šanse da preživi. Zatim onaj ispred njega takođe prebroji crne kape i među preostalih 98 i ako im je broj i dalje neparan znači da je na njegovoj glavi bela kapa, što će i reći, u suprotnom će reći "crna". Svaki sledeći, pažljivo slušajući šta izgovara prethodnik i koristeći istu taktiku će se izvući.

Zadatak 30:

U 100 ćelija nalaze se 100 zatvorenika i soba za ispitivanje. Upravik predlaže sledeću igru. Slučajno bira jednog zatvorenika i poziva u sobu gde se nalazi taster koji ima dva položaja 0 i 1. Pozvani može da promeni položaj tastera ili da ostavi taster u istom položaju. Upravnik ne menja položaj tastera. Kada jedan zavorenik izjavi da su svi prošli kroz sobu i ako je to tačno svi će biti slobodni a ako nije svi će biti streljani. Pre početka igre zatvorenici se mogu dogovoriti o strategiji i taster je u položaju 0.

Rešenje:

Zatvorenici određuju jednog zarobljenika X koji će brojati. Svaki drugi kada uđe u sobu samo jednaput menja položaj tastera i to kada nađe tastera u položaju 0 promeni ga u položaj 1 (samo prvi put). Svaki put kada zarobljenik X nađe taster u položaju 1 promeni ga u položaj 0 i doda 1 na sumu koju pamti (ako je taster u položaju 0, ne menja položaj tastera). Kada zatvorenik X promeni položaj tastera 99-put, onda će izjaviti svi su prošli kroz sobu.

4 Matematičke igre

4.1 Igre kao razvoj intelekta

"Učiti svoje dete znanju ne treba silom nego igrom" - Platon

Najstarija svedočanstva o tzv. društvenim igrama zapisana su na staroegipatskim pergamentima. Takođe, u grobnicama egipatskih faraona, na crtežima koji potiču iz četvrtog milenijuma pre naše ere prikazani su igrači koji igraju igru.
Verujući da su faraonu na onom svetu potrebne sve stvari kojima se služio za života, stari egipćani su u grobnicama stavljali, između ostalog, i igračke koje je koristio faraon.
U nacionalnom muzeju u Kairu nalaze se divni primerci tabli i figura za igre. Igračke su pronađene u Tuntankamonovoj grobnici.[6]
Oblast matematike koja se bavi matematičkim igrama zove se *Teorija matematičkih igara.* To je zapravo "Teorija optimalnog izbora pri sukobu protivurečnih interesa".
Smatra se da je teorija igara ustanovljena 1928. godine u radovima [7]Dzona Fon Nojmana.
Oblast primene teorije matematičkih igara je široka. Teorija se primenjuje u ekonomiji, teoriji upravljanja, psihologiji, sociologiji, i uopšte, gde god se javljaju konfliktne situacije.
Jedan početnik koji je učio geometriju od Euklida [8] naučivši prvu teoremu, zapitao je Euklida :*"Sta imam od toga što sam ovo naučio?".* Euklid je pozvao svog drugog učenika i kazao:*"Donesi mu tri balvana, jer on uči zato da ima od toga koristi.".*
Zaista, kakve koristi od matematičkih igara koje iznosimo? Materijalne, na koje je očigledno mislio Euklidov učenik - nikakve.
Igra treba da zabavi i razonodi, ali ne samo to. Zabavu treba staviti u službu učenja, jer je *"Učenje bez razmišljanja beskorisno, a razmišljanje bez učenja opasno"* kako nas uči Konfučije.
Cilj igara je da razvijaju matematičko i kombinatorno mišljenje, kao i logički način mišljenja.

[6]Tuntankamon, egipatski faraon XVIII dinastije oko 1354-1346. godine P.N.E

[7]Dzon Fon Nojman(1903-1957) je bio mađarsko-američki matematičar i naučnik koji je dao doprinos kvantnoj fizici, funkcionalnoj analizi, teoriji skupova, topologiji, informatici i dr.

[8]Euklid- oko 330. godine P.N.E - 275. godine P.N.E

Lajbnic [9] u svojoj knjizi "Napomena o nekim igrama" (1710.) ističe da se često zapaža da ljudi u toku igre ispoljavaju svoj pronalazački duh i da matematičke igre ne služe samo za zabavu, već razvijaju pronalaženje.
Igre nam disciplinuju mišljenje, pored razvijanja intelektualnih navika, uče nas da primenjujemo algoritme. Jednom rečju, igre su moćno sredstvo razvoja intelekta.

[9] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) je bio nemački filozof, matematičar, pronalazač, pravnik i dr. Dao je značajan doprinos u optici i mehanici.

4.2 Igre sa matematičkih olimpijada

Zadatak 31:

Napisana je jednačina.

$$x^3 + ?x^2 + ?x + ? = 0$$

Dvoje igraju sledeću igru: prvi igrač stavlja umesto bilo kog znaka "?" neki ceo broj različit od nule (pozitivan ili negativan). Zatim drugi stavlja ceo broj umesto jednog od preostalih znakova "?". Na kraju prvi stavlja neki ceo broj umesto poslednjeg znaka "?". Dokazati da prvi može igrati tako da, nezavisno od igre drugog, sva tri korena jednačine budu celi brojevi.

Rešenje:

Ako prvi igrač stavi 1 umesto "?" pored promenjive x (prvi stepen), a u svom drugom koraku na poslednje mesto na koje je ostalo stavi broj suprotan broju koji je postavio drugi igrač, onda se dobija jednačina oblika $x^3 - Ax^2 - x + A = 0$, odnosno $(x^2 - 1)(x - A) = 0$.
Odavde se vidi da su koreni polinoma celi brojevi.
(Treća svesovjetska olimpijada, Kijev, 1969.)

Zadatak 32:

Dva igrača igraju sledeću igru. Prvi zapisuje jedan za drugim dva reda po 10 brojeva, tako da za svake dve susedne kolone važi da su zbirovi unakrsnih brojeva jednaki, npr. ako je prvi igrač zapisao dva niza brojeva

$$\begin{array}{cccccccccc} A1 & A2 & A3 & A4 & A5 & A6 & A7 & A8 & A9 & A10 \\ B1 & B2 & B3 & B4 & B5 & B6 & B7 & B8 & B9 & B10 \end{array}$$

onda mora da važi: $A1 + B2 = A2 + B1, A2 + B3 = A3 + B2, A3 + B4 = A4 + B3, ..., A9 + B10 = A10 + B9$. Drugi igrač, znajući to pravilo, treba da odredi sve brojeve koje je zapisao prvi igrač.
Da bi to uradio on prvom igrču postavlja pitanja tipa "Kakav broj stoji u prvom redu na 3.mestu?" ili "Kakav broj stoji u drugom redu na devetom mestu?" itd.
Sa kojim najmanjim brojem pitanja drugi igrč može da prepozna sve zapisane brojeve?

Rešenje:

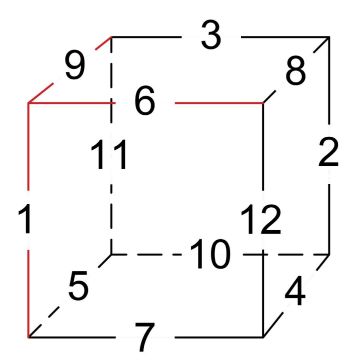
Sa 11 pitanja. Iz 10 pitanja treba da sazna sve brojeve iz jednog reda i još iz jednog pitanja da sazna 1 broj iz drugog reda.
(Svesovjetska olimpijada, Riga, 1971)

Zadatak 33:

Za igru je potrebna kocka i dve boje: crvena i zelena. Dva igrača igraju sledeću igru. Prvi igrač bira tri (bilo koje) ivice kocke i boji ih crvenom bojom. Drugi igrač bira sledeće tri ivice (neobojene) i boji ih zelenom bojom, zatim prvi boji sledeće tri neobojene ivice crvenom bojom i najzad njegov partner boji u zeleno preostale tri neobojene ivice. Zabranjeno je da se boji ivica ako je već obojena. Pobednik je onaj koji prvi uspe da dobije sve 4 ivice jedne stranice kocke u svojoj boji. Može li prvi igrač pri pravilnoj igri da obezbedi sebi pobedu?

Rešenje:

Prvi igrač ima 220 mogućnosti ($\binom{12}{3}$) da oboji 3 ivice kocke ali kako kocka ima 48 simetrija, odnosno 8 rotacionih simetrija reda 6 definisanih u oba smera u odnosu na pravce određene u naspramnim temenima, možemo reći da postoji 8 početnih položaja prvog igrača. Uzmimo na primer da prvi igrač oboji u crveno ivice (1-6-9) sa slike. Sve tri ivice su iz istog temena, pa pošto se može rotirati do bilo kog drugog temena kocke, ovaj položaj ima 8 simetrija. Ukoliko drugi igrač oboji zelenom bojom bilo koju ivicu strane kocke čije su dve ivice već crvene boje, prvi igrač nema šanse da sa tri dodatna poteza pobedi. Slično se dokazuje za sledećih sedam početnih položaja. (9-6-8 , 9-6-2, 9-6-4, 9-6-12, 9-8-4, 9-8-7 i 9-2-7) Prema tome, odgovor je da ne može. Igrač koji boji zelenom bojom uvek može da osujeti prvog igrača.



(Ruska olimpijada, Ašhabad,1984)

Zadatak 34:

Dva igrača redom ispisuju na tabli prirodne brojeve koji nisu veći od unapred zadatog broja p. Kod ispisivanja brojeva zabranjeno je ispisivati broj koji je delitelj nekog od već zapisanih brojeva. Gubi onaj igrač koji ne može da zapiše broj kada je na potezu. Objasniti ko od igrača ima strategiju za pobedu ako je p=10.

Rešenje:

Ako prvi u svom prvom potezu napiše broj 6, drugi može zapisati jedan od brojeva (4,5), (7,8), (9,10). Brojeve smo namerno stavili u zagrade, jer će takvo njihovo grupisanje poslužiti za optimalnu strategiju.
Naime, koji god broj da upotrebi drugi igrač, prvi treba iza njega da odigra broj koji je u istoj zagradi sa brojem koje je upotrebio drugi igrač.
Na taj način prvi igrač će pobediti.
Evo jedne partije

PRVI IGRAČ	DRUGI IGRAČ
6	10
9	7
8	4
5	

(Ruska olimpijada, Frunze,1987)

Zadatak 35:

Dat je konveksan poliedar sa 5 ili više od 5 strana. Iz svakog temena izlaze po tri ivice. Dvoje igraju sledeću igru: naizmenično zapisuju imena na jednoj od slobodnih strana poliedra. Pobeđuje onaj igrač koji napiše svoje ime na tri strane poliedra, koje imaju zajedničko teme. Dokazati da postoji takva strategija igre prvog igrača da on može uvek da pobedi.

Rešenje:

Najpre treba dokazati da postoji bar jedna strana koja nije trougao, a zatim to iskoristiti kod igre. Pretpostavimo suprotno.
Neka su, naime, sve strane trouglovi. Takav poliedar od n trouglova imao bi $3n/2$ ivica.

Po Ojlerovoj formuli [10] imamo $n + n - 3n/2 = 2$, tj. $n = 4$, što protivureči pretpostavci.

Sada treba da se pokaže kako treba da igra prvi igrač da bi pobedio.
U prvom potezu on je dužan da zauzme stranu A1 koja nije trougao. U drugom potezu on mora da zauzme stranu A2 koja se graniči sa A1 i ima zajedničke ivice sa dvema slobodnim stranama A3,A4, koje se takodje graniče sa A1. (To je moguće jer drugi igrač može zauzeti samo jednu stranu koja se graniči sa A1.)

Na kraju, u svom trećem potezu, prvi igrač može zauzeti jednu od strana A3 ili A4 onu koju nije zauzeo drugi igrač.
Na taj način prvi igrač pobeđuje u svom trećem potezu.

[10] Ojlerova formula glasi: neka je l broj temena konveksnog poliedra, m-broj njegovih ivica, a n- broj njegovih strana. Tada važi jednakost $l - m + n = 2$.

5 Zaključak

Logičko mišljenje je široko primenjivo i treba nastojati razvijati ga.
Omogućite deci da misle!

"Ako se već toliko zaklinjemo
da nam je od svega važnije aktivno učenje dece u nastavi,
ako nam je zaista iskrena ta naša želja da deca misle,
da više razumevaju a manje pamte,
moramo tražiti konkretne i efikasne načine
da decu pokrenemo, zainteresujemo i aktiviramo." - Dušan Radović

Litratura

[1] Društvo matematičara Srbije, 1100 zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola 2004 -2013.godine, Beograd 2013.

[2] Borislav Simic,Dragoljub Milošević Matematika za znatiželjne, Arhimedes, Beograd 1999.

[3] Marko Dejić, Matematičke igre, Arhimedes, Beograd 1995.

[4] Klub mladih matematičara "Arhimedes", Logički zadaci, Arhimedes, Beograd 2005

[5] Milan Šarić, Bogoljub Marinković, Različiti načini rešavanja zadataka i odabrani zadaci, Beograd-Beli Manastir, 1995.

[6] Miodrag Mateljević, Elementi metodike, načela nastave matematike, Matematički fakultet, Beograd, 2014.

[7] Aleksandar Lipkovski, O nastavi linearne algebre i analitičke geometrije, Matematički fakultet, Beograd

[8] Vlada Crne Gore zavod za školstvo, Naša škola, Matematike i nadareni učenici, Podgorica 2007.

[9] Valerija Krekić Pinter, Savremene metodičke transformacije kombinatorike u početnoj nastavi matematike, izvorni naučni članak, Učiteljski fakultet

[10] Nataša Matović, Vrste zadataka i njihove karakteristike u udžbeniku matematike, izvorni naučni rad, Filozifski fakultet, Beograd, 2003.

[11] Dušan Radović, Na ostrvu pisaćeg stola, Mascom EC/Booking, Beograd

[12] Dragan Stevanović, Marko Milošević i Vladimir Baltić, Diskretna matematika, Osnove kombinatorike i teorije grafova, Beograd 2004

[13] https://www.mathsolutions.biz

[14] https://www.dms.rs

[15] https://srb.imomath.com