

MATEMATIČKI INSTITUT

Savremena računaska tehnika i njena primena

Knjiga 6

Radovan Krtolica

**Analiza matematičkih
modela stohastičkih
sistema sa raspode-
ljenim parametrima**

BEOGRAD

1979

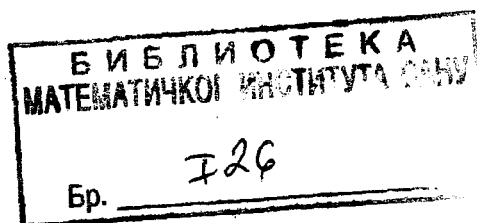
MATEMATIČKI INSTITUT

Savremena računaska tehnika i njena primena

Knjiga 6

Radovan Krtolica

**Analiza matematičkih
modela stohastičkih
sistema sa raspode-
ljenim parametrima**



BEOGRAD

1979

Recenzenti:

Stojaković dr Mirko, član Srpske akademije nauka i umetnosti
Parezanović dr Nedeljko, profesor PMF u Beogradu
Ivković dr Zoran, profesor PMF u Beogradu

Primljeno za štampu na sednici Redakcionog odbora od 14. novembra 1977. godine.

Republička zajednica nauke SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.

Prema mišljenju republičkog sekretara za kulturu SR Srbije ova publikacija je oslobođena poreza na promet.

SADRŽAJ

	Strana
PREDGOVOR	5
UVOD	7
I PREGLED MONTE–KARLO ALGORITAMA U OBLASTI SRP	
1.1. Opšte napomene	11
1.2. Algoritmi Monte–Karlo za rešavanje diskretizovanih PDJ i IJ	13
1.3. Algoritmi Monte–Karlo za rešavanje integralnih jednačina	16
1.4. Algoritmi Monte–Karlo za rešavanje PDJ modeliranjem difuzionih procesa	19
II SIMULACIJA EKSPPLICITNOG STOHAŠTIČKOG MODELA PARABOLIČNOG SISTEMA NA DIGITALNOM RAČUNARU	
2.1. Deterministički nestacionarni parabolični sistem	21
2.1.1. Stohastički model	21
2.1.2. Eksplicitno rešenje u tački	27
2.2. Parabolični sistem sa slučajno raspodeljenim parametrima	28
2.2.1. Stohastički koeficijenti	29
2.2.2. Stohastički konturni uslovi	33
2.3. Primer stohastičkog modeliranja na digitalnom računaru	34
2.3.1. Stohastički model	34
2.3.2. Aproksimacija SWL procesa procesom diskretnog lutanja	35
2.3.3. Diskretni algoritam za izračunavanje kriterijuma	36
2.3.4. Analiza greške diskretnog algoritma	37
2.3.4.1. Greška diskretizacije Wiener-ovog procesa	38
2.3.4.2. Greška usrednjavanja po konačnom broju realizacija	40
2.3.4.3. Metodi umanjenja greške usrednjavanja	40
a) Korišćenje korelisanih uzoraka sa negativnim korelacionim koeficijentom	40
b) Metod raslojavanja uzorka	44
III SIMULACIJA EKSPPLICITNOG STOHAŠTIČKOG MODELA NA HIBRIDNOM RAČUNARU	
3.1. Definicija hibridnog simulacionog algoritma	49
3.2. Analiza grešaka	52

	Strana
a) Neposredni izvori grešaka pri realizaciji metoda na hibridnoj mašini	51
b) Greške aproksimacije SDJI	52
c) Greška ocene matematičkog očekivanja diskretnim algoritmom	58
3.3. Određivanje skala – faktora	60
3.4. Simulacija jednog nestacionarnog SRP	63
IV KARAKTERISTIČNI (IMPLICITNI) STOHAŠTIČKI MODEL	
4.1. Opšte napomene	71
4.2. Karakteristični stohastički model	72
4.3. Karakteristični stohastički model u slučaju stacionarnosti operatora L	78
V IDENTIFIKACIJA PARAMETARA KARAKTERISTIČNOG STOHAŠTIČKOG MODELA SISTEMA U PRISUSTVU ŠUMA	
5.1. Opšte napomene	83
5.2. Formulacija problema identifikacije	83
5.3. Algoritam za identifikaciju disperzione matrice	89
5.4. Numerički primeri	91
5.5. Zaključak	98
LITERATURA	101

PREDGOVOR

Stohastički modeli realnih sistema koriste se u širokom krugu disciplina prirodnih, društvenih i tehničkih nauka. Ovo je pre svega uslovljeno mogućnostima njihove numeričke realizacije (simulacije) sredstvima savremene računске tehnike. U ovoj knjizi se analiziraju stohastički modeli prostorno raspodeljenih sistema (slučajnih polja) sa stanovišta njihove simulacije sredstvima digitalne i hibridne računске tehnike.

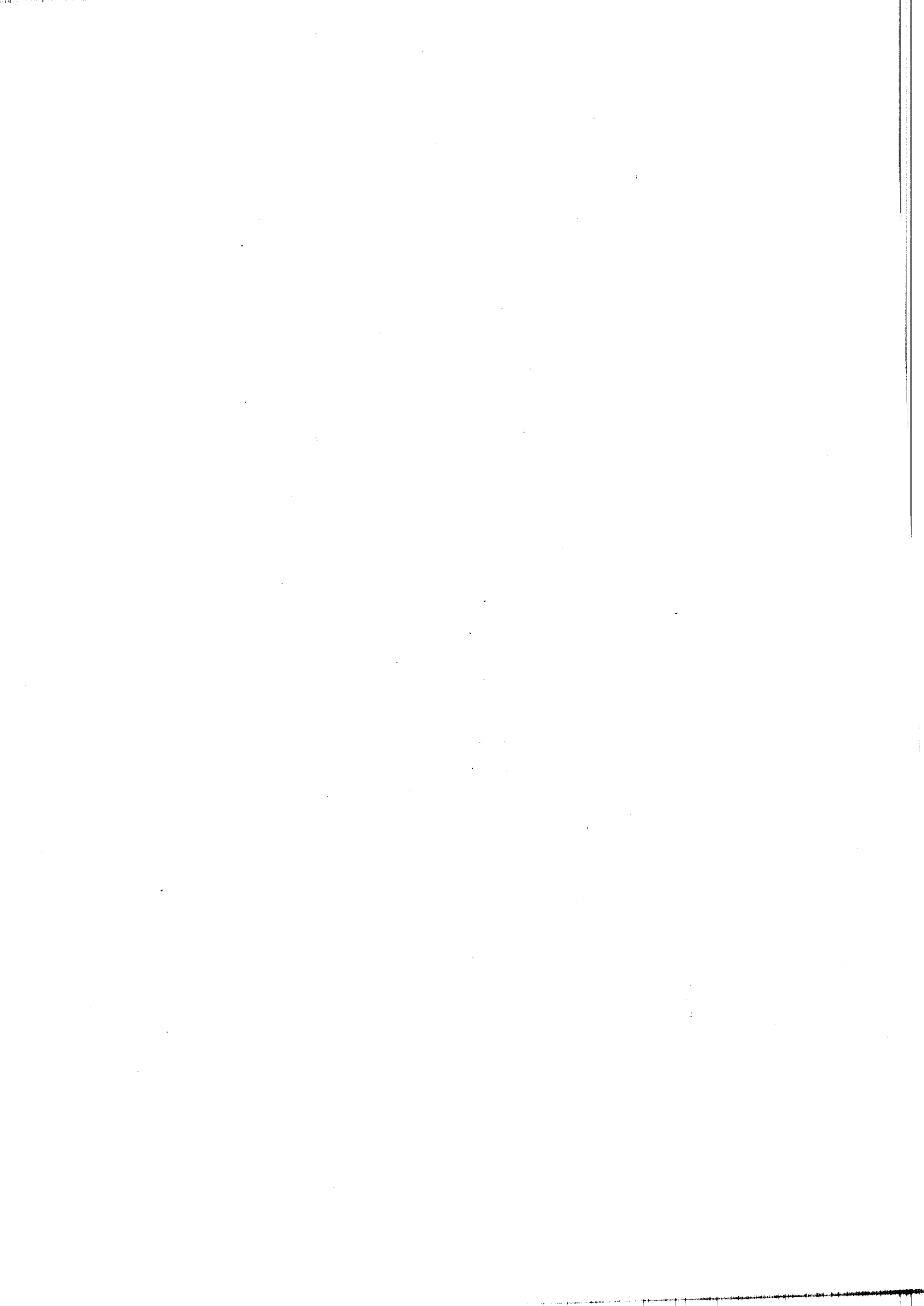
Knjiga sadrži pet glava. U prvoj je dat pregled Monte–Karlo algoritama za simulaciju raspodeljenih sistema. U drugoj i trećoj glavi je izložen opšti postupak konstruisanja eksplicitnih stohastičkih modela linearnih paraboličnih sistema kao preduslov za simulaciju na digitalnom i hibridnom računaru. Postupci simulacije su ilustrovani primerima. U četvrtoj glavi je prikazana mogućnost konstrukcije implicitnog stohastičkog modela na osnovu generalisanih karakteristika paraboličnog sistema. U petoj glavi je pokazano kako se ovi modeli mogu koristiti u svrhe identifikacije parametara raspodeljenih sistema, što je ilustrovano primerom identifikacije parametara jednog podzemnog rezervoara.

Rukopis ove knjige pročitali su akademik *dr Mirko Stojaković*, *dr Zoran Ivković* i *dr Nedeljko Parezanović*. Na njihovim sugestijama i primedbama autor se zahvaljuje.

Primedbe na stručnu ili metodske stranu izlaganja autor će primiti sa zahvalnošću.

Beograd, decembar 1977.

Autor



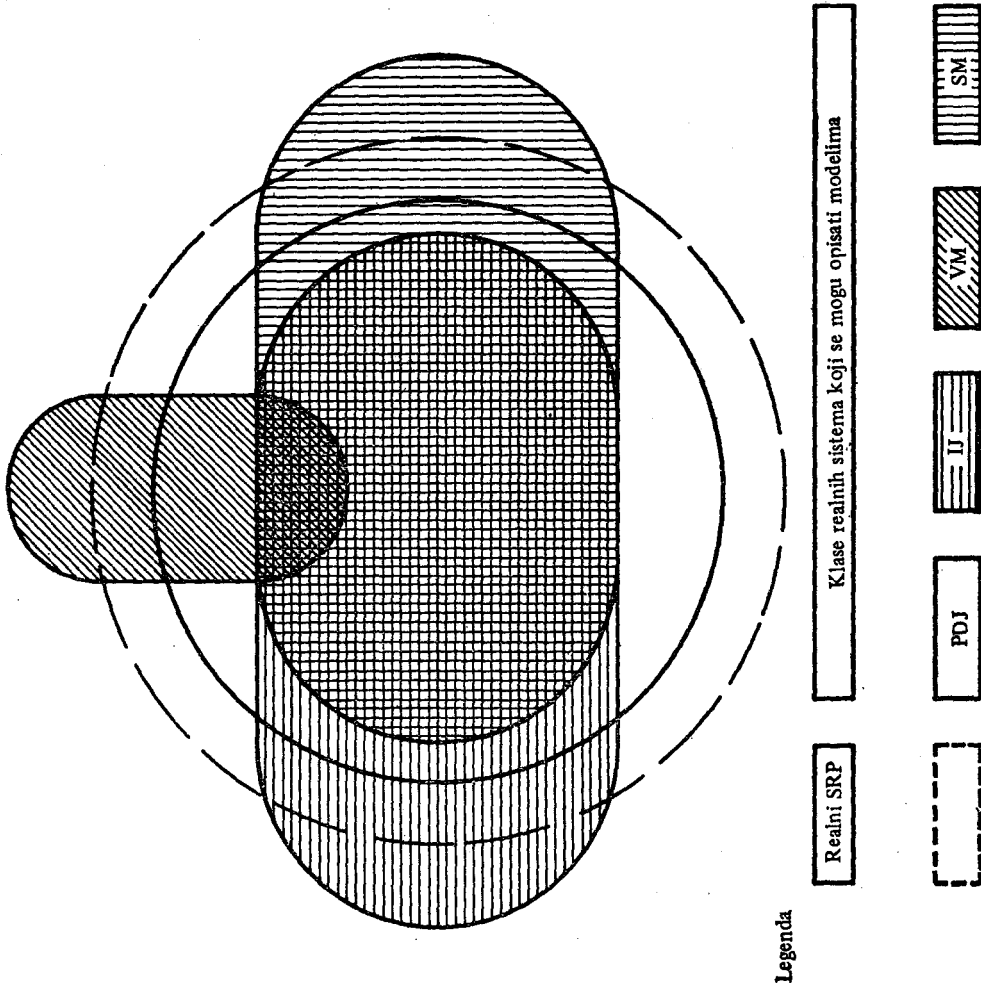
UVOD

Savremeni tehnološki razvoj nametnuo je potrebu regulacije i kontrole složenih tehnoloških i prirodnih mehanizama što se ispoljava i kroz dinamičan uspon koji teorija sistema sa raspodeljenim parametrima (SRP) doživljava u poslednje vreme [1]. Prema široko usvojenoj definiciji [56], pod sistemom sa raspodeljenim parametrima se podrazumeva sistem čije je stanje opisano skalarnom ili vektorskom veličinom raspodeljenom u nekom određenom prostoru.

Tipične primere SRP kod kojih se nameću upravljačke intervencije predstavljaju različiti fizički (hidrodinamički, elektromagnetski i dr.) i tehnološki (termički, hemijski i dr.) procesi, a takodje i problemi iz oblasti prostorne tehnike (na primer, ponašanje letilica sa tečnim gorivom). Najvećim delom, ovi objekti kao i sličnija dejstva kojima su podvrgnuti nisu u potpunosti određeni. Kako je teorija verovatnoće uobičajeni matematički aparat za opisivanje neodređenosti, možemo o najvećem broju praktičnih primera SRP govoriti kao o sistemima sa slučajno (stohastički) raspodeljenim parametrima (SSRP).

Da bi u što preglednijem obliku ukazali na raspoložive mogućnosti teorije SRP i na mesto koje u tom okviru zauzima metoda stohastičkog modeliranja, na sl. 1 smo vizuelno predstavili klase realnih sistema na koje se odnose četiri osnovna matematička modela. U osnovne matematičke modele SRP ubrojali smo parcijalne diferencijalne jednačine (PDJ), integralne jednačine (IJ), stohastičke modele (SM) i varijacione modele (VM).

Klasa realnih SRP koja se može ekvivalentno opisati pomoću sva četiri osnovna modela, odgovara linearnim eliptičnim PDJ. Linearni parabolični sistemi PDJ se mogu ekvivalentno opisati pomoću IJ i SM. Hiperboličke PDJ se ne mogu ekvivalentno opisati stohastičkim modelom, a nelinearne PDJ se, u opštem slučaju, ne mogu prevesti u IJ. Svi osnovni modeli, osim PDJ, obuhvataju i određene klase sistema sa koncentrisanim parametrima. Najzad, na sl.1 je ukazano i na činjenicu da svi SRP nisu u potpunosti matematički strukturirani, odnosno da se matematička struktura nekih realnih SRP ne može u potpunosti identifikovati ni sa jednim od osnovnih modela.



Slika 1.

Na sl. 2 su prikazane osnovne numeričke metode za dobijanje brojnih podataka o SRP – direktno uslovljene jednim od četiri osnovna matematička modela.

Za one klase SRP koje se mogu ekvivalentno opisati sa više matematičkih modela, ovim direktnim numeričkim postupcima se pridružuju i indirektni koji se sastoje u određivanju matematičkog modela ekvivalentnog zadatom i primeni odgovarajućeg direktnog numeričkog modela. Tako se ustaljeno stanje procesa difuzije na nekoj površini G može opisati jednim od sledeća četiri međusobno ekvivalentna modela:

$$(PDJ) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; (x,y) \in G;$$

$$u(x,y) = f(x,y); (x,y) \in \delta G = \{(x,y): x = \xi(t), y = \eta(t), t \in [0,T]\};$$

$$(IJ) \quad u(x,y) = \int_{\delta G} \mu(t) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arctg} \frac{\eta(t) - y}{\xi(t) - x} dt,$$

gde je $\mu(t)$ rešenje Fredholm-ove integralne jednačine druge vrste:

$$\pi \mu(s) + \int_0^T K(s,t) \mu(t) dt = f(s); K(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arctg} \frac{\eta(t) - \eta(s)}{\xi(t) - \xi(s)}$$

$$(SM) \quad x(t) = x_0 + w_1(t), y(t) = y_0 + w_2(t);$$

$$u(x_0, y_0) = Mf(x(\tau), y(\tau));$$

$$\tau = \inf \{t : (x(t), y(t)) \notin G\};$$

$w_1(t), w_2(t)$ – standardni, međusobno nezavisni skalarni procesi Wiener-a.

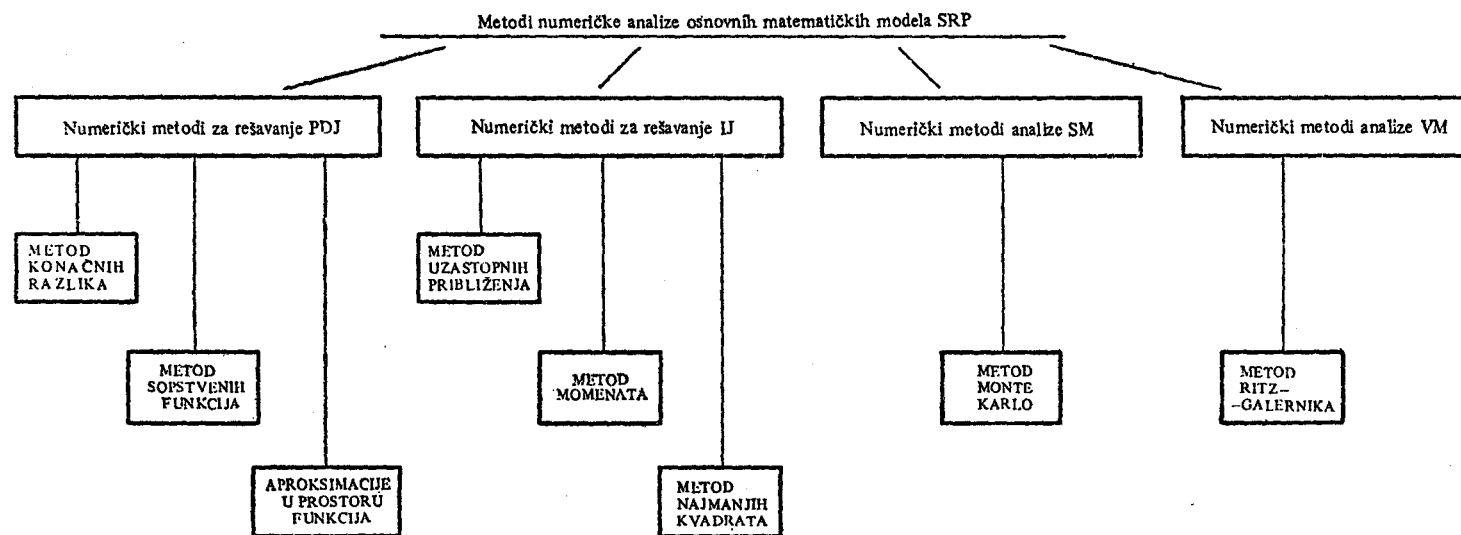
(VM) Funkcija $u(x,y)$ je određena kao ekstremala funkcionala

$$\phi(u) = \int_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy,$$

definisano nad klasom K_1 dopustivih funkcija:

$$K_1 = \{u(x,y); u \in C^{(2)}, (x,y) \in \bar{G}, u((x,y) \in \delta G) = f(x,y)\};$$

Prema tome, numerička analiza navedenog SRP se može sprovesti bilo kojim od metoda predstavljenih na sl. 2. Pri tome su te metode uslovno klasifikovane u direk-



Slika 2.

tne i indirektno u zavisnosti od toga sa kojim je matematičkim modelom SRP prvobitno identifikovan.

Složenost matematičkih modela SRP sa stanovišta njihove numeričke analize, odnosno realizacije na računaru, se povećava ako se spoljašnja dejstva na sistem ne mogu unapred potpuno odrediti, te se opisuju kao slučajna, stohastička. U ovoj knjizi se izlažu rezultati analize matematičkih modela stohastičkih sistema sa raspodeljenim parametrima sa stanovišta njihove realizacije (simulacije) sredstvima raspoložive računarske tehnike.

U glavi I rada dat je pregled algoritama Monte–Karlo koji se primenjuju u oblasti SRP. Data je kratka istorijska retrospekcija razvoja metoda. Algoritmi su podeljeni u tri osnovne grupe prema vrsti stohastičkih modela na osnovu kojih se izvode. Za grupe algoritama kojima se rad ne bavi direktno, izloženi su u kratkim crtama principi na kojima se zasnivaju.

U glavi II razrađen je opšti postupak za konstruisanje stohastičkih modela parabolinih PDJ sa slučajnim koeficijentima na osnovu kojih se formiraju algoritmi za njihovo rešavanje. Eliptične PDJ se tretiraju kao poseban slučaj parabolinih. Prikazan je primer stohastičkog modeliranja SSRP na digitalnom računaru.

U glavi III su na osnovu stohastičkih modela iz predhodnih glava formirani hibridni algoritmi za rešavanje parabolinih i eliptičnih PDJ. Analizirane su greške algoritma. Prikazan je primer simulacije jednog nestacionarnog SRP na hibridnom računaru.

U glavi IV je pokazano da – analogno sa sistemom karakteristika za linearne PDJ prvoga reda – postoji sistem generalisanih (stohastičkih) karakteristika i za parabolinih sisteme. Ova činjenica je iskorištena za obrazovanje stohastičkog modela SRP ekvivalentnog opisu pomoću PDJ. Takav model opisuje implicitno stanja raspodeljenog sistema pomoću stohastičkih diferencijalnih jednačina duž difuzionih trajektorija i naziva se karakterističnim stohastičkim modelom.

U glavi V se rešava zadatak identifikacije nepoznatih parametara karakterističnog stohastičkog modela u slučaju delovanja raspodeljenog šuma na sistem. Zadatak identifikacije se svodi na iznalaženje minimuma neke regresione funkcije (funkcionala), što se efikasno numerički rešava algoritmima stohastičke aproksimacije. Postupak je ilustrovan primerima. Dati su rezultati pretraživanja ocena u parametarskoj ravni pomoću digitalnog računara.

I PREGLED MONTE-KARLO ALGORITAMA U OBLASTI SRP

1.1. OPŠTE NAPOMENE

Osnovna ideja metoda Monte-Karlo zasniva se na mašinskoj reprodukciji (simulaciji) velikog broja realizacija slučajnih veličina koje figurišu u SM i ocenjivanju njihovih brojnih karakteristika (matematičko očekivanje, disperzija i dr.) na osnovu brojnih karakteristika uzorka (aritmetička sredina, srednji kvadrat i dr.). Pošto takav postupak potseća na bacanje kocke u igrama na sreću, metod je dobio široko usvojeni naziv „Monte-Karlo metod”.

Iako su konstrukcije stohastičkih modela ekvivalentnih diskretizovanim shemama PDJ već dvadesetih godina ovoga veka izložene u radovima *Petrovskog* [5] i *Wienera* [6], rad *Metropolis-a* i *Ulam-a* [7], u kojem je prvi put upotrebljena ova veza za formiranje numeričkog algoritma, pojavio se tek 1949. godine u vezi sa pojavom prvih praktično upotrebljivih elektronskih računara. Ovo se lako može shvatiti ako se ima u vidu da relativno spora konvergencija brojnih karakteristika uzorka ka brojnim karakteristikama statističke populacije u celini (slučajne veličine) zahteva simulaciju velikog broja međusobno nezavisnih realizacija slučajne veličine.

Prateći razvoj elektronskih računara, metod Monte-Karlo se dalje snažno razvijao šireći sve više oblast svoje primene. Algoritmi Monte-Karlo za dobijanje brojnih podataka o SRP se prema stohastičkim modelima iz kojih su izvedeni, mogu podeliti u tri grupe.

Algoritmi prve i najstarije grupe izvode se iz SM kojim se sistem linearnih algebarskih jednačina ekvivalentno predstavlja u obliku Markovljevog lanca. Koriste se za rešavanje PDJ i IJ u diskretizovanom vidu.

U drugu grupu ulaze algoritmi izvedeni iz SM kojima se ekvivalentno opisuje jedna klasa integralnih jednačina.

Trećoj grupi pripadaju algoritmi na bazi difuzionih procesa (tipa procesa *Wiener-a*) ekvivalentnih nekim klasama PDJ.

Sredstva računске tehnike kod kojih se veličine predstavljaju kontinualno (analogna tehnika) i diskretno – kontinualno (hibridna tehnika) je prirodno koristiti za realizaciju algoritama druge i treće grupe. Ovo opravdava uslovnu terminologiju prema kojoj su algoritmi iz prve, druge i treće grupe respektivno: diskretni, diskretno–kontinualni (hibridni) i kontinualni.

1.2. ALGORITMI MONTE–KARLO ZA REŠAVANJE DISKRETIZOVANIH PDJ I IJ

Prvi algoritam ovoga tipa je formulisan u već pomenutom radu *Metropolis-a* i *Ulam-a* [7]. U osnovi to je algoritam za rešavanje jedne klase sistema linearnih algebarskih jednačina, tako da se u poznijim radovima upravo u tom obliku i razvijao [8–11].

U odnosu na postojeće algoritme za rešavanje PDJ novi algoritam je imao sledeća preimućstva:

- 1) Ovim algoritmom se mogu dobiti rešenja u proizvoljnoj tački prostora ili vremena, a da pri tome nije neophodno da se rešenje određuje u celoj prostornoj oblasti u toku cele „predistorije” kao kod metoda konačnih razlika.
- 2) Zahtevi u pogledu kapaciteta (operativne memorije) računara i ukupno vreme rešavanja rastu sa povećanjem broja dimenzija PDJ znatno sporije nego li kod klasičnih algoritama.
- 3) Daje mogućnost jednovremenog rešavanja PDJ sa više različitih graničnih uslova uz minimalno povećanje broja računskih operacija.
- 4) Algoritam nije osetljiv na šum računskih komponentata (grešku–okrugljenja).
- 5) Tačnost i veličina oblasti u kojoj se rešava PDJ ne moraju biti ograničeni kapacitetom računara kao kod metode konačnih razlika. Alternativno ograničenje može biti maksimalno dopušteno vreme za određivanje rešenja na računaru.

Nabrojane odlike u osnovi karakterišu celu metodu i glavni su motiv daljeg razvoja Monte–Karlo algoritama.

Osnovno ograničenje algoritama prve grupe predstavlja zahtev da matrica sistema ima „dominantnu” dijagonalu. Na ovo ograničenje nailazi se i kod standardnih iterativnih postupaka za rešavanje linearnih algebarskih sistema jednačina (npr., *Gauss–Seidel-ov* postupak).

Izložićemo u kratkim crtama konstrukciju algoritma. Neka je data matrična jednačina

$$A x = b \quad (1)$$

gde

- matrica Q tipa $n \times n$ sa elementima a_{ij} ima dominantnu dijagonalu,
- b je zadati vektor sa elementima b_i , ($i = 1, \dots, n$),
- x je nepoznati vektor sa elementima x_i , ($i = 1, \dots, n$).

Relacija (1) se može napisati u obliku

$$x = Hx + d \quad (2)$$

gde su matrica H sa elementima h_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) i vektor d sa elementima d_i , ($i = 1, \dots, n$) odabrani tako da sve sopstvene vrednosti matrice H po modulu budu manje od jedinice. To je uvek moguće kada matrica A ima dominantnu dijagonalu.

Za matrice A sa dominantnom dijagonalom se iz (2) dobija

$$x = (E - H)^{-1}d = d + Hd + H^2d + \dots \quad (3)$$

ili u skalarnom obliku

$$x_i = d_i + \sum_{j=1}^n h_{ij} d_j + \sum_{k=1}^n h_{ik} \sum_{j=1}^n h_{kj} d_j + \dots \quad (3')$$

($i = 1, \dots, n$).

Uvedimo nenegativne multiplikatore p_{ij} , ($i, j = 1, \dots, n$) tako da važi

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} < 1, \quad (i = 1, \dots, n)$$

i definišimo matricu V elemenata v_{ij} , ($i, j = 1, \dots, n$) određenih relacijama

$$v_{ij} p_{ij} \triangleq h_{ij}, \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (4)$$

Neka je dalje

$$p_{i,n+1} \triangleq 1 - \sum_{j=1}^n p_{ij}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$p_{n+1,j} \triangleq 0, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Odredimo sada Markovljev lanac nad skupom diskretnih stanja $\{S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}\}$ tako što ćemo za matricu prelaza usvojiti matricu P sa elementima p_{ij} ($i, j = 1, \dots, n+1$) koji predstavljaju verovatnoće prelaza iz stanja S_i u stanje S_j . Krajnje stanje (K) realizacije Markovljevog lanca - (trajektorije) $T_i = \{S_{i_0}, S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_i, K\}$ će biti stanje $K=S_{n+1}$.

jer su verovatnoće prelaza iz stanja S_{n+1} u bilo koje drugo stanje jednake nuli.

Definišimo slučajnu funkciju nad trajektorijom T_i

$$\xi(T_i) \triangleq d_{i_0} + v_{i_0 i_1} d_{i_1} + v_{i_0 i_1} v_{i_1 i_2} d_{i_2} + \dots + v_{i_0 i_1} \dots v_{i_{m-1} i_m} d_{i_m} \quad (6)$$

sa verovatnoćom realizacije

$$P(T_i) = p_{i_1 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{m-1} i_m} p_{i_m i_{m+1}}; (i_{m+1} = n+1, m \leq \infty).$$

Pokazaćemo sada da je rešenje sistema (1) određeno matematičkim očekivanjem $M \xi(T_i) = x_i$.

Zaista važi

$$M \xi(T_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n P(T_i) \cdot (d_{i_0} + v_{i_0 i_1} d_{i_1} + v_{i_0 i_1} v_{i_1 i_2} d_{i_2} + \dots + v_{i_0 i_1} \dots v_{i_{m-1} i_m} d_{i_m})$$

odnosno

$$M \xi(T_i) = d_{i_0} + \sum_{i_1=1}^n h_{i_0 i_1} d_{i_1} + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n h_{i_0 i_1} h_{i_1 i_2} d_{i_2} + \dots \quad (7)$$

Upoređenjem (7) i (3') zaključuje se da za $i = i_0$ važi

$$M \xi(T_i) = x_i, \quad (8)$$

što je trebalo dokazati.

Stohastički model je dakle slučajna funkcija $\xi(T_i)$ nad trajektorijama Markovljevog lanca. Na osnovu ovog modela se formira sledeći algoritam za određivanje x_i .

- 1) Organizuje se N realizacija T_i^k ($k = 1, \dots, N$) Markovljevog lanca $\{S_r, P\}$ ($r = 1, \dots, n+1$), sa početnim stanjem S_i .
- 2) U toku svake realizacije formira se veličina $\xi(T_i^k)$ i registruje se njena konačna vrednost posle izbijanja trajektorije u krajnje stanje S_{n+1} .
- 3) Za dovoljno veliki broj N realizacija može se uzeti da je

$$x_i \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi(T_i^k). \quad (9)$$

Poslednji algoritamski korak (3) se opravdava zakonom velikih brojeva prema kome važi

$$P \left\{ \left| M \xi(T_i) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi(T_i^k) \right| < \epsilon \right\} > 1 - \frac{D \xi(T_i)}{N \epsilon^2}$$

Lako je videti da se algebarski sistemi dobijeni diskretizacijom hiperboličnih PDJ ne mogu rešavati ovim algoritmom, jer matrice takvih sistema nemaju dominantnu dijagonalu.

Osnovno preimućstvo algoritama iz ove grupe je njihova opštost. Njima se direktno rešavaju diskretizovane PDJ i LJ sa linearnim graničnim uslovima druge i treće vrste, [12–14], što kod algoritama iz ostalih grupa nije slučaj. Pored toga, algoritmi ovog tipa dopuštaju, barem principijelno, rešavanje diskretizovanih PDJ reda različitog od 2.

U nedostatke ove grupe algoritama može se ubrojati njihova čisto diskretna priroda koja ih predodređuje isključivo za primenu na digitalnim računarima pri čemu se operativna memorija računara opterećuje jednako kao i u primeni klasičnih relaksacionih metoda za rešavanje sistema (1), [12]. U opštem slučaju ovi algoritmi obuhvataju veći broj računskih operacija i podataka od algoritama iz ostalih grupa, jer ne uzimaju u obzir specifičnosti algebarskih sistema dobijenih diskretizacijom pojedinih klasa PDJ. Ovo vodi povećavanju odgovarajućeg mašinskog vremena kao i zahteva u pogledu kapaciteta memorije mašine.

U radu [12] ušteda u kapacitetu operativne memorije ostvarena je tako što je svim elementima matrice V pripisana ista vrednost. To međjutim, zahteva realizacije Markovljevog lanca sa unapred zadatim verovatnoćama prelaza. Da realizacija algoritma za generisanje takvog Markovljevog lanca ne bi oduzimala isuviše mnogo mašinskog vremena, predlaže se posebna konstrukcija generatora Markovljevih trajektorija (u „hardware”-u). Ovim se efektivno vreme računanja skraćuje, ali se znatno uvećava period pripreme.

1.3. ALGORITMI MONTE-KARLO ZA REŠAVANJE INTEGRALNIH JEDNAČINA

Ovu ideju je razvio i praktično primenio za određivanje sopstvenih vrednosti *Fredholm*-ovih integralnih jednačina druge vrste *Kalos* [16]. Algoritam je našao primenu u određivanju najmanje sopstvene vrednosti *Hamilton*-ovog operatora u *Schrödinger*-ovoj jednačini svedenoj na integralni oblik, [17].

Nemogućnost da se postojećim numeričkim metodama i raspoloživom računskom tehnikom odredi potencijal *Schrödinger*-ove jednačine za sisteme od tri i više korpuskula predstavljala je osnovni motiv za razvoj ovih metoda. Sa brojem korpuskula u sistemu, dimenzionalnost *Schrödinger*-ove jednačine naglo raste, što već za tri istovrsne

korpuskule onemogućava numeričko rešenje integralne jednačine za potencijal metodom konačnih razlika. Metod Monte-Karlo nameće se kao jedini izlaz iz ove situacije, [18].

Opisaćemo stohastički model za izvodjenje algoritma ovoga tipa.

Neka je data *Fredholm*-ova integralna jednačina druge vrste

$$\phi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y-z) \phi(z) dz + F(y) = A \phi(y) + F(y), \quad (10)$$

gde je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(v) dv = L < \infty, \quad 0 \leq F(v) < \infty.$$

Uvedimo u (10) smene

$$\frac{\phi(v)}{L} \triangleq \varphi(v); \quad \frac{F(v)}{L} \triangleq f(v); \quad \frac{K(v)}{M_0} \triangleq k(v) \quad (11)$$

i uočimo da za IJ koja se tako dobija

$$\varphi(y) = M_0 \int_{-\infty}^{+\infty} k(y-z) \varphi(z) dz + f(y) \quad (12)$$

važi razvoj u red

$$\varphi(y) = f(y) + \sum_{m=1}^{\infty} M_0^m A^m f(y). \quad (13)$$

S. druge strane poznato je da za dve medjusobno nezavisne veličine ξ_0 i ξ_1 važi

$$P\{\xi_0 + \xi_1 < y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{\xi_0 < y-z\} \frac{d}{dz} P\{\xi_1 < z\} dz \quad (14)$$

uz pretpostavku da je funkcija raspodele $P\{\xi_1 < z\}$ diferencijabilna po z . Neka je

$$P\{\xi_0 < v\} = k(v), \quad (15)$$

$$\frac{d}{dv} \cdot P\{\xi_1 < v\} = \frac{d}{dv} P\{\xi_2 < v\} = \dots = f(v).$$

Uočimo da za slučajnu funkciju

$$\chi\{\xi < v\} = \begin{cases} 1, & \xi < v \\ 0, & \xi \geq v \end{cases}$$

važi

$$M \chi \{ \xi < v \} = P \{ \xi < v \}.$$

Otuda sledi

$$\begin{aligned} M \sum_{m=1}^{\infty} M_0^m \chi \left\{ \sum_{\nu=0}^m \xi_{\nu} < y \right\} &= \sum_{m=1}^{\infty} M_0^m P \left\{ \sum_{\nu=0}^m \xi_{\nu} < y \right\} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} M_0^m A^m f(y) = \varphi(y) - f(y). \end{aligned}$$

Algoritam Monte-Karlo za određivanje vrednosti funkcije $\varphi(y)$ u tački y formira se na osnovu jednačine

$$\varphi(y) = M \sum_{m=1}^{\infty} M_0^m \chi \left\{ \sum_{\nu=0}^m \xi_{\nu} < y \right\} + f(y). \quad (16)$$

- 1) Generira se realizacija ξ_0^k slučajne veličine sa raspedlom verovatnoće $k(v)$.
- 2) Nezavisno od ξ_0 generiraju se realizacije ξ_i^k međusobno nezavisnih slučajnih veličina ξ_i , ($i = 1, 2, \dots, J$) sa gustinom raspodele $f(v)$.
- 3) Formiraju se zbrovi $\sum_{\nu=0}^m \xi_{\nu}^k$ i određuju vrednosti

$$\chi \left\{ \sum_{\nu=0}^m \xi_{\nu}^k \right\}, \quad (m = 1, 2, \dots, J).$$

- 4) Funkcija $\varphi(y)$ u tački y se određuje prema formuli

$$\varphi(y) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^J M_0^m \chi \left\{ \sum_{\nu=0}^m \xi_{\nu} < y \right\} + f(y). \quad (17)$$

Na osnovu konvergencije reda (13) i zakona velikih brojeva, može se smatrati da za dovoljno veliko J i N formula (17) sa dobrom približnošću određuje vrednost funkcije $\varphi(y)$.

Razvoj ove grupe algoritama prvenstveno je diktiran potrebama teorijske fizike, što je u znatnoj meri određilo njihova preimućstva i nedostatke. Osnovna preimućstva ovih algoritama su ekonomičnost u rešavanju višedimenzionih problema i praktična primenljivost algoritma u odsustvu početnih aproksimacija rešenja. Osnovni nedostatak je nedovoljna tačnost rešenja u slučajevima kada se jezgro IJ (potencijal) ne ponaša dovoljno „pitomo“. Do sada razvijeni algoritmi ove grupe namenjeni su isključivo brzim digi-

talnim računarima velikog kapaciteta operativne memorije. Pitanjima optimizacije algoritama sa stanovišta raspoloživog kapaciteta operativne memorije i dopuštenog vremena računanja nedovoljno je posvećena pažnja. Može se očekivati da će istraživanje u ovom pravcu otvoriti puteve primeni ove grupe algoritama i na šire klase SRP izvan domena teorijske fizike.

1.4. ALGORITMI MONTE-KARLO ZA REŠAVANJE PDJ MODELIRANJEM DIFUZIONIH PROCESA

Prvi algoritam u kome su primenjene diskretizovane realizacije *Wiener*-ovog procesa (diskretno lutanje) za numeričko rešavanje PDJ dat je 1950. godine u radu *Donsker* i *Kac*-a, [19]. Faza tesne sprege između algoritama Monte-Karlo i razvoja računске tehnike počela je sa radom *Chuang*, *Kazda* i *Windeknecht*-a 1962. godine, [20], u kome su sredstva analogne računске tehnike u kombinaciji sa nekim logičkim elementima upotrebljena za realizaciju diskretno-kontinualnog algoritma na bazi neprekidnih realizacija *Wiener*-ovog procesa. Ova sprega pored toga što je predstavljala jedan od motiva razvoja hibridne računске tehnike, [21–23], posredno je približila metod Monte-Karlo problemima teorije upravljanja. U novije vreme algoritmom Monte-Karlo ovoga tipa je rešen jedan primer optimalnog upravljanja determinističkim SRP, [13].

Osnovna karakteristika algoritama ove grupe je veća ekonomičnost (manji broj računskih operacija) u odnosu na algoritme iz prve grupe. Ova odlika je posledica činjenice da su difuzioni (strogo Markovljevi) procesi doslovno ekvivalentni linearnim eliptičnim i paraboličnim PDJ, dok diskretni Markovljevi procesi u algoritmima iz prve grupe tek u graničnom prelazu postaju ekvivalentni PDJ.

Izložićemo ukratko osnovne radove iz navedene oblasti.

Posle pionirskog rada *Chuang*, *Kazda* i *Windeknecht*-a [20], u kome se rešava prost slučaj dvodimenzione eliptične jednačine, metod su prihvatili i dalje razvili *Lipcer*, *Kabalevskij* i *Daševskij*, [24, 25]. Rešena je parabolična jednodimenziona PDJ sa uslovima Cauchy-a i graničnim uslovima prve vrste. Isti problem je 1967. rešavao *Händler* na brznoj repetitivnoj analognoj mašini *ASTRAC II* tako da je vreme potrebno za određivanje rešenja znatno skraćeno, [26]. Ovaj uspeh je inspirisao dalje radove na konstrukciji specijalizovanih hibridnih računara i daljoj razradi algoritama, [27–29].

U ovim radovima su razvijeni algoritmi za rešavanje posebnih slučajeva eliptičnih i stacionarnih paraboličnih jednačina. Algoritam za rešavanje nestacionarnih paraboličnih jednačina, u oblastima sa pokretnom granicom razvijen je u [30, 31].

Iz pregleda postojećih algoritama Monte-Karlo za numeričku analizu SRP možemo zaključiti sledeće.

- 1) Savremena računaska tehnika je savladala početne teškoće uslovljene sporošću statističke konvergencije algoritama Monte–Karlo.
- 2) U skladu sa tim u prvi plan su izbili problemi razvoja efektivnih algoritama širokog spektra primene, posebno u oblasti upravljanja SRP.
- 3) Postojeći algoritmi Monte–Karlo za numeričku analizu SRP nisu u dovoljnoj meri međusobno povezani, što se očituje u srazmerno uskom polju primene pojedinačnih algoritama.
- 4) Primena identifikacionih i drugih standardnih metoda teorije upravljanja znatno je otežana nepovezanošću i ograničenošću stohastičkih modela na osnovu kojih se određuju algoritmi, posebno odsustvom stohastičkih modela koji bi uzimali u obzir neodređenost ili zašumljenost parametara SRP.

Potreba otklanjanja uočenih nedostataka predstavljala je motivaciju za ovaj rad.

II SIMULACIJA EKSPlicitNOG STOHAStičKOG MODELA PARABOLIČNOG SISTEMA NA DIGITALNOM RAČUNARU

2.1. DETERMINISTIČKI NESTACIONARNI PARABOLIČNI SISTEM

2.1.1. Stohastički model

Neka je linearni nestacionarni parabolični sistem opisan sledećim mešovitim problemom sa početnim i graničnim uslovima prve vrste

$$\begin{aligned} L u(x,t) - c(x,t) u(x,t) + d(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in G \times I_t, \\ u(x,t) &= \psi(x,t), \quad (x,t) \in \delta G \times \bar{I}_t, \end{aligned} \quad (1)$$

gde je ograničena otvorena oblast $G \subset E^n$, δG – granica oblasti G ,

$$\bar{G} \triangleq G \cup \delta G$$

$$I_t = (0, t_{\max}), \quad 0 < t_{\max} \leq \infty, \quad \bar{I}_t \triangleq [0, t_{\max}),$$

c, d, u – skalari,

diferencijalni operator $L \triangleq (a, \nabla) + (B \nabla, \nabla) - \frac{\partial}{\partial t}$,

simbol (\cdot) označava skalarni proizvod,

vektor a , $(n \times 1)$, sa elementima $a_i(x, t)$,

matrica B , $(n \times n)$, sa elementima $b_{ij}(x, t)$,

vektorski diferencijalni operator „nabla” $\nabla \triangleq \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$,

$$\psi(x,t) \triangleq \begin{cases} \varphi(x,t), & (x,t) \in \delta G \times (0, t_{\max}), \\ f(x), & x \in \bar{G}; t = 0. \end{cases}$$

Primetimo da je uvodjenjem sintetičke funkcije $\psi(x,t)$ mešoviti problem *Cauchy*–

—Dirichlet-a sveden formalno na problem Dirichlet-a sa degenerisanom eliptičnom jednačinom (1)*.

Matrica B mora biti pozitivno—definitna za svako $(x,t) \in GXI_t$ da bi se očuvao normalno—parabolični karakter operatora L. Uočimo još da je matrica B uvek simetrična.

Klasično (ili strogo) rešenje $u(x,t)$ jednačine (1) mora biti dva puta diferencijabilno po svim prostornim koordinatama (x_i) i jedanput po vremenskoj koordinati (t) . U tu svrhu dovoljni su sledeći uslovi [32]:

(A) funkcije $c(x,t)$, $d(x,t)$, $a_1(x,t)$, $b_{ij}(x,t)$ moraju biti neprekidne po Lipschitz-u za svako $(x,t) \in G \times I_t$.

(B) funkcija $\psi(x,t)$ mora biti deo po deo neprekidna za svako $(x,t) \in \delta G \times \bar{I}_t$.

Celishodno je, radi povezivanja sistema (1) sa odgovarajućim stohastičkim procesom, uvesti sledeće nove oznake:

$$\begin{aligned} s &\triangleq t_0 - t, \\ v(x,s) &\triangleq u(x, t_0 - s), \\ L' &\triangleq (a', \nabla) + (B' \nabla, \nabla) + \frac{\partial}{\partial s}, \\ a'_1(x,s) &\triangleq a_1(x, t_0 - s), \\ b'_{ij}(x,s) &\triangleq b_{ij}(x, t_0 - s), \\ c'(x,s) &\triangleq c(x, t_0 - s), \\ d'(x,s) &\triangleq d(x, t_0 - s), \\ \varphi'(x,s) &\triangleq \varphi(x, t_0 - s), \\ \psi'(x,s) &\triangleq \psi(x, t_0 - s), \\ I_s &\triangleq \{s: s \in (0, t_0)\}, \quad \bar{I}_s \triangleq \{s: s \in (0, t_0]\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Smenom $s = t_0 - t$ invertuje se smer vremenske ose, a početni uslov $f(x), (t = 0)$ prevodi u krajnji uslov $(s = t_0)$. Uvodjenjem ove smene i oznaka (2) u (1) i sužavanjem poluinterval vremena I na poluinterval I_s , dobićemo

$$\begin{aligned} L'v(x,s) - c'(x,s)v(x,s) + d'(x,s) &= 0, \quad (x,s) \in G \times I_s, \\ v(x,s) &= \psi'(x,s), \quad (x,s) \in \delta G \times \bar{I}_s. \end{aligned} \quad (1')$$

*U saglasnosti sa ovim nazvaćemo objedinjenu funkciju graničnih i početnih uslova konturnim uslovom. Pod konturom se ovde razume granica prostorno—vremenske oblasti $G \times I_t$.

Koristeći se analogijom između (1') i prve jednačine *Kolmogorova*, možemo koeficijentima $a'_i(x,s)$ i $b'_{ij}(x,s)$ pripisati značenje lokalnih statističkih parametara nekog strogo Markovljevog (difuzionog) procesa, [33]. Naime $a'_i(x_0, s_0)$ i $b'_{ij}(x_0, s_0)$ se mogu odrediti preko verovatnoća prelaza $P(s_0, x_0, s, dx)$ difuzionog procesa, kao koeficijent translacije i difuzije u tački (x_0, s_0) :

$$\int_{|x-x_0| \leq \epsilon} (x-x_0) P(s_0, x_0, s, dx) = a'(x_0, s_0) \cdot (s-s_0) + o(s-s_0),$$

$$\int_{|x-x_0| \leq \epsilon} (y, x-x_0)^2 P(s_0, x_0, s, dx) = (B'(x_0, s_0) y, y) \cdot (s-s_0) + o(s-s_0), \tag{3}$$

gde je

$y \in D^n$, (D^n – skup n -dimenzionih vektora sa komponentama iz nekog skupa D^1 apstraktnih elemenata),

ϵ – proizvoljno mali pozitivan broj.

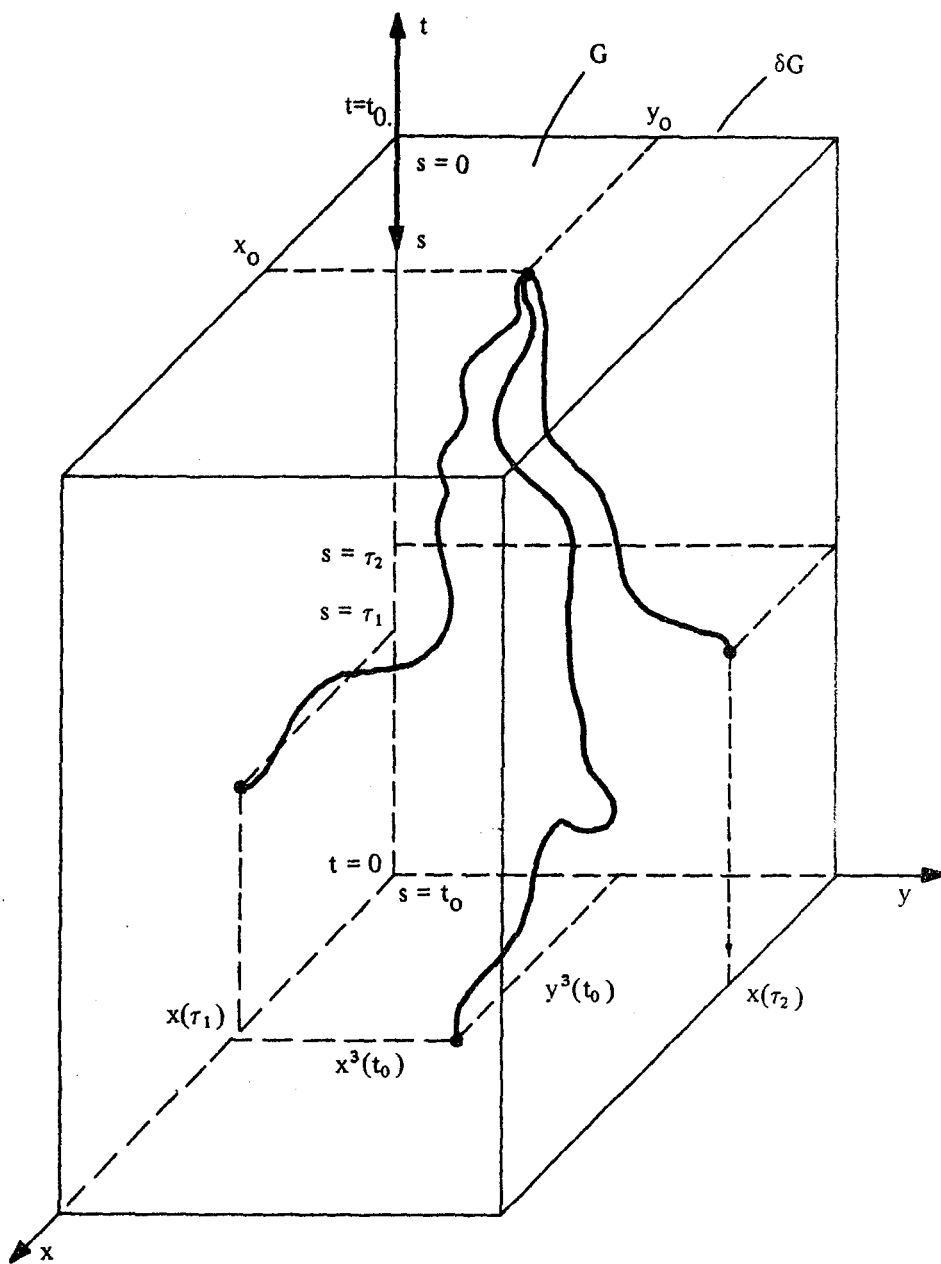
Relacije (3) daju koeficijentima a'_i i b'_{ij} fizički očigledan smisao srednje brzine translacije i srednje brzine difuzije u tački x_0 i trenutku s_0 . Upotrebjene oznake ilustrovane su na sl. 3.

Kada su koeficijenti jednačine (1') zadati, relacije (3) određuju verovatnoće prelaza jednog strogo Markovljevog (difuzionog) procesa, tj. definišu stohastički proces koji sa jediničnom verovatnoćom jednoznačno odgovara datom operatoru L' jednačine (1'). Medjutim, rešavanje sistema n -dimenzionih integralnih jednačina (3) je veoma složen problem, tako da, u opštem slučaju, moramo odustati od određivanja difuzionog procesa preko verovatnoća prelaza. Neposredno određivanje realizacije difuzionog procesa znatno je prostije. Trajektorije (realizacije) difuzionog procesa sa određenim lokalnim karakteristikama (srednjim brzinama difuzije i translacije) mogu se odrediti, kako je to pokazao *K. Itô* [34–36], preko priraštaja standardnog procesa *Wiener–Lévy*-a (SWL) i *Itô*-ovog stohastičkog integrala (ISI). Ako sa $w(s)$ označimo n -dimenzioni SWL sa međusobno nezavisnim komponentama, a sa \bar{B} , matricu određenu relacijom $\bar{B} \bar{B}^T = B'$ (indeks T označava transponovanje), difuzioni proces $x(s)$ sa difuzijom B' i translacijom a' će biti određen integralnom relacijom

$$x(s) = x(0) + \int_0^s a'(x(s_1), s_1) ds_1 + \int_0^s \bar{B}'(x(s_1), s_1) dw(s_1), \tag{4}$$

$(x,s) \in G \times I_s.$

U jednačini (4) prvi integral predstavlja uobičajeni stohastički integral (SI) određen srednjekvadratnom konvergencijom integralnih suma, dok je drugi integral tipa ISI, što



Slika 3.

po definiciji označava konvergenciju po verovatnoći odgovarajućih integralnih suma.

Iz (4) se može pokazati ([37], str. 482) da za dovoljno male vrednosti Δs približno važi

$$x(s + \Delta s) - x(s) = a'(x(s), s) \Delta s + \bar{B}'(x(s), s) (w(s + \Delta s) - w(s)), \quad (5)$$

što opravdava zapisivanje integralne jednačine u obliku stohastičke diferencijalne jednačine Itô-a (SDJI):

$$dx(s) = a'(x(s), s) ds + \bar{B}'(x(s), s) dw(s); x(0) = x_0. \quad (6)$$

Rešenje ove jednačine egzistira ako su

(C) koeficijenti $a'_i(x, s)$ i elementi $\bar{b}'_{ij}(x, s)$ matrice $\bar{B}'(x, s)$ ograničeni, odnosno ako se ne menjaju brže od linearnih funkcija koordinata.

Uz uslove (A), rešenje SDJI (6) će biti sa tačnošću do stohastičke ekvivalentnosti jedinstveno i skoro sigurno neprekidno, jer se neprekidna po Lipschitz-u matrica B' uvek može faktorizovati tako da matrica – faktor \bar{B}' , za koju važi $\bar{B}', \bar{B}'^T = B'$ takodje bude neprekidna po Lipschitz-u [38].

Na taj način, svakom parabolichnom operatoru L' (odnosno L) sa glatkim i ograničenim koeficijentima (uslovi (A) i (C)), odgovara jedan strogo Markovljev proces čije su skoro sve trajektorije neprekidne i predstavljaju rešenje SDJI (6). Kaže se da operator L' upravlja procesom ili indukuje proces $x(s)$.

Ova činjenica navodi na misao da se sistem sa raspodeljenim parametrima opisan parcijalnom diferencijalnom jednačinom i mešovitim uslovima (1)–(1') može opisati preko SDJI, tj. predstaviti kao sistem sa koncentrisanim parametrima i stohastičkom pobudom. Ideja predstavlja generalizaciju dobro poznatog metoda karakteristika za linearne PDJ prvog reda na slučaj eliptičnih i parabolichnih jednačina.

Da bi se upotpunio opis parabolichnog sistema (1), jednačini (6) treba pridružiti još jednu jednačinu koja će opisivati ponašanje same funkcije $v(x, s)$ u zavisnosti od koeficijenata neobuhvaćenih operatorom L' u jednačini (1'). Za dobijanje ove relacije iskoristićemo formulu K. Itô-a o diferenciranju složenih funkcija od difuzionih procesa [39].

Neka je difuzioni proces $x(s)$ odredjen SDJI (6) i neka je funkcija $F(x, s)$ dvaput neprekidno diferencijabilna po koordinatama x i jedanput po s u nekoj oblasti $C \times I$. Tada je stohastički diferencijal Itô-a (SDI) složene funkcije $F(x(s), s)$ difuzionog procesa $x(s)$ odredjen relacijom

$$dF(x(s), s) = L'F(x(s), s) ds + (\nabla F(x(s), s), \bar{B}' dw(s)). \quad (7)$$

Imajući u vidu da za funkciju $F(x, s) = v(x, s)$ mora da važi jednačina (1') za svako

$(x, s) \in G \times I_s$ dobićemo

$$dv(x(s), s) = [c'(x(s), s) v(x(s), s) - d'(x(s), s)] ds + \\ + (\nabla v(x(s), s), \bar{B}'(x(s), s) dw(s)), \quad (x, s) \in G \times I_s. \quad (8)$$

Konturni uslov ove jednačine određen je uslovom (1'):

$$v(x(s), s) = \psi'(x(s), s), \quad (x(s), s) \in \delta G \times \bar{I}_s$$

koji se može iskazati preko momenta $\bar{\tau}$ prvog izlaska procesa $x(s)$ na konturu $\delta G \times \bar{I}_s$

$$v(x(\bar{\tau}), \bar{\tau}) = \psi'(x(\bar{\tau}), \bar{\tau}). \quad (9)$$

Formalno se $\bar{\tau}$ definiše relacijom $\bar{\tau} \triangleq \tau_{G, I_s}$ gde je

$$\tau_{U, I} \triangleq \inf_{s \in I} \{s : x(s) \notin U\}, \quad x(s_0) \in U, \quad s_0 \triangleq \inf I.$$

Sistem SDJI (6), (8) sa uslovom (9) daje potpun opis paraboličnog sistema (1'). Stohastički model sistema (1') u integralnom obliku glasi:

$$x(s) = x(0) + \int_0^s a'(x(s_1), s_1) ds_1 + \int_0^s \bar{B}'(x(s_1), s_1) dw(s_1), \quad s \in (0, \bar{\tau}), \quad x_0 \in G; \quad (10)$$

$$v(x(s), s) = v(x(0), 0) + \int_0^s [c'(x(s_1), s_1) v(x(s_1), s_1) - d'(x(s_1), s_1)] ds_1 + \\ + \int_0^s (\nabla v(x(s_1), s_1), \bar{B}'(x(s_1), s_1) dw(s_1)), \quad s \in (0, \bar{\tau}).$$

Da bi se izbegle iteracije, jednačina (8) se mora integraliti na celom intervalu $s \in (0, \bar{\tau})$ nezavisno od (6), jer je za nju određen uslov u tački $s = \bar{\tau}$, dok se uslov za (6) određuje u tački $s = 0$. U skladu sa tim, promenimo smer integriranja u poslednjoj od jednačina (10) smenom $t = t_0 - s$ i predjimo na oznake iz (1).

$$x(s) = x(0) + \int_0^s a(x(s_1), t_0 - s_1) ds_1 + \int_0^s \bar{B}(x(s_1), t_0 - s_1) dw(s_1), \\ s \in (0, \bar{\tau}), \quad x(0) \in G; \\ u(x_0, t_0) = \psi(x_0, t_0 - \bar{\tau}) - \int_{t_0 - \bar{\tau}}^{t_0} [c(x(t_0 - t_1), t_1) u(x(t_0 - t_1), t_1) \\ - d(x(t_0 - t_1), t_1)] dt_1 - \int_{t_0 - \bar{\tau}}^{t_0} [\nabla u(x(t_0 - t_1), t_1), \\ \bar{B}(x(t_0 - t_1), t_1) dw(t_0 - t_1)], \quad t_0 \in I_t. \quad (11)$$

Matrica $\bar{B}(x,t)$ je određena odnosom $\bar{B} \bar{B}^T = B$.

Model (11) u kome stohastički proces tipa SWL predstavlja pobudu, u potpunosti zamenjuje determinisani sistem (1).

Poslednja iz jednačina (11) sa jediničnom verovatnoćom utvrđuje jednakost determinisane funkcije (rešenja) $u(x_0, t_0)$ u ma kojoj unapred zadatoj tački $(x_0, t_0) \in G \times I$ i funkcionala nad difuzionim trajektorijama i nad funkcijama $u(x,t)$ i $\nabla u(x,t)$.

Stohastički model (11) je srodan sa sistemom karakterističnih diferencijalnih jednačina kojim se opisuju linearne PDJ prvog reda, u tom smislu što se duž nekih karakterističnih putanja („staza”) određenih trajektorijama difuzionog procesa $x(s)$, rešenje PDJ može odrediti kao linijski integral od parametara PDJ. U oba slučaja se dakle sistem sa raspodeljenim parametrima opisuje nekim karakterističnim sistemom sa koncentrisanim parametrima.

2.1.2. Eksplicitno rešenje u tački

Uvedimo oznaku

$$\phi(\nabla v, x, dw(s)) \triangleq (\nabla v(x(s), s), \bar{B}'(x(s), s) dw(s)) \quad (12)$$

i uočimo da je SDJI

$$dv(x(s), s) = [c'(x(s), s)v(x(s), s) - d'(x(s), s)]ds + \phi(\nabla v, x, dw(s)), (x, s) \in G \times I_0,$$

linearna po $v(s) = v(x(s), s)$. Koristeći se poznatom kvadraturnom formulom za linearne diferencijalne jednačine prvog reda, dobićemo

$$v(x(0), 0) = v(x(\bar{t}), \bar{t}) e^{\int_0^{\bar{t}} c'(x(s_1), s_1) ds_1} + \int_0^{\bar{t}} e^{\int_0^{\bar{t}} c'(x(s_1), s_1) ds_1} d'(x(s_2), s_2) ds_2 - \int_0^{\bar{t}} e^{\int_0^{\bar{t}} c'(x(s_1), s_1) ds_1} (\nabla v(x(s_2), s_2), \bar{B}'(x(s_2), s_2) dw(s_2)). \quad (13)$$

Prema poznatoj osobini ISI [34], važi

$$M_x \int_0^{\bar{t}} e^{\int_0^{\bar{t}} c'(x(s_1), s_1) ds_1} (\nabla v(x(s_2), s_2), \bar{B}'(x(s_2), s_2) dw(s_2)) = 0, \quad (14)$$

gde je sa M_x označen operator matematičkog očekivanja definisan u prostoru verovat-

noće difuzionog procesa $x(s)$. Ako na (13) primenimo M_x i vratimo se na oznake iz (1), dobićemo rešenje problema (1) u tački $x_0 = x(0) \in G$ i $t_0 \in I_t$:

$$u(x_0, t_0) = M_x \psi(x(\bar{t}), t_0 - \bar{t}) e^{\int_0^{\bar{t}} c(x(s_1), t_0 - s_1) ds_1} + \\ + M_x \int_0^{\bar{t}} e^{\int_0^{\bar{t}} c(x(s_1), t_0 - s_1) ds_1} d(x(s_2), t_0 - s_2) ds_2, \quad (15) \\ (x_0, t_0) \in G \times I_t$$

Jednačina (15) zajedno sa SDJI (6) u potpunosti određuje rešenje determinisanog problema (1) u tački (x_0, t_0) prostorno vremenske oblasti $G \times I_t$.

Jednačine (6) i (15) predstavljaju osnovu za formiranje kontinualnih, diskretnih i diskretno-kontinualnih stohastičkih (Monte-Karlo) algoritama za rešavanje paraboličnog sistema (1) sa mešovitim kontinualnim uslovima.

Napomenimo da se rešenje (6), (15) odnosi i na opštiji slučaj nestacionarnog parabolichnog sistema u jednostruko povezanoj oblasti G_t sa vremenski promenljivom granicom δG_t . Dokaz ove činjenice dat je u [31].

Treba podvući da rešenje problema *Dirichlet*-a za eliptičnu jednačinu koja se dobija iz (1) uklanjanjem izvoda po vremenu iz operatora L , predstavlja ustaljeno stanje parabolichnog sistema (1): $u_D(x_0) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} u(x_0, t_0)$. Na taj način se iz (15) lako dobija formula za određivanje rešenja $u_D(x)$ eliptičnih jednačina.

2.2. PARABOLIČNI SISTEM SA SLUČAJNO RASPODELJENIM PARAMETRIMA

U realnim procesima koji se opisuju pomoću PDJ postoji uvek izvesna doza neodređenosti u poznavanju vrednosti parametara sistema, bilo da se radi o greškama merenja, bilo da je u pitanju slučajna priroda samih parametara. Međutim, kompleksnost matematičkih modela kojima se opisuju ovakvi sistemi retko dopušta uzimanje u obzir ove činjenice.

Specifika karakterističnih stohastičkih modela sastoji se u njihovoj selektivnosti. Naime integraljenje duž difuzionih staza omogućava određivanje rešenja (odziva sistema) isključivo u tačkama nekog unapred izabranog podskupa zadate prostorno-vremenske oblasti. Kada je broj tačaka izabranog podskupa iz bilo kojih razloga mnogo manji od ukupnog broja tačaka zadate oblasti (što je u praksi čest slučaj, [40]) karakteristični stohastički model se nameće svojom ekonomičnošću. Ova eko-

nomičnost čini numerički prihvatljivim modele koji vode računa i o slučajnoj raspodeli parametara.

Primenimo izloženu metodiku konstrukcije karakterističnih stohastičkih modela u 2.1. na sisteme sa slučajno raspodeljenim parametrima i na sisteme sa slučajnim poremećajem konturnih uslova.

2.2.1. Stohastički koeficijenti

Najopštiji slučaj „zašumljenosti“ sistema (1) se može formulisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} L_{\omega} u(x,t,\omega) - c(x,t,\omega) u(x,t,\omega) + d(x,t,\omega) &= 0, (x,t,\omega) \in G \times I_t \times \Omega \\ u(x,t,\omega) &= \psi(x,t), (x,t,\omega) \in \delta G \times \bar{I}_t \times \Omega \end{aligned} \quad (16)$$

gde je

$$L_{\omega} u(x,t,\omega) \triangleq [a(x,t,\omega), \nabla] + (B(x,t,\omega) \nabla, \nabla) - \frac{\partial}{\partial t} u(x,t,\omega),$$

Ω – skup elementarnih događaja ω iz prostora verovatnoće slučajnih funkcija a, B, c, d .

Simetrična matrica B je pozitivno definitna za svako $(x,t,\omega) \in G \times I_t \times \Omega$.

Za razliku od (1), relacije (16) određuju čitav skup prostorno i vremenski raspodeljenih funkcija $u(x,t,\omega_{\alpha})$ koje odgovaraju svakoj pojedinačnoj realizaciji elementarnog događaja $\omega = \omega_{\alpha}$ iz skupa elementarnih događaja Ω . Da bi glatkome operatoru L_{ω} mogli da damo uobičajeni smisao, moramo obezbediti dvostruku diferencijabilnost po prostornim i jednostruku po vremenskoj koordinati svih realizacija rešenja $u(x,t,\omega)$.

Uslov glatkosti rešenja (B) iz 2.1. ostaje dakle neizmenjen, dok se uslov (A) iz 2.1. proširuje na sve realizacije:

(A) funkcije $a(c,t,\omega), d(x,t,\omega), a_1(x,t,\omega), b_{ij}(s,t,\omega)$ moraju biti neprekidne po *Lipschitz*-u za svako $(x,t,\omega) \in G \times I_t \times \Omega$.

Uslovi (A) i (B) iz 2.1. garantuju egzistenciju klasičnog rešenja za svaku realizaciju $\omega = \omega_{\alpha} \in \Omega$ raspodeljenih parametara sistema: c, d, a, B .

Koristeći oznake (2) za obeležavanje parametara sistema sa invertovanim smerom vremenske ose ($s = t_0 - t$), dobićemo

$$L'_{\omega} (v(x,s,\omega) - c'(x,s,\omega) v(x,s,\omega) + d'(x,s,\omega)) = 0, (x,s,\omega) \in G \times I_s \times \Omega$$

$$v(x,s,\omega) = \psi'(x,s), (x,s,\omega) \in \delta G \times \bar{I}_t \times \Omega. \quad (16')$$

Za svako $\omega \in \Omega$ operator L'_{ω} indukuje difuzioni proces $x(s, \omega)$ koji predstavlja rešenje SDJI

$$dx(s,\omega) = a'(x(s,\omega), s, \omega) ds + \bar{B}'(x(s,\omega), s, \omega) dw(s), (x,s,\omega) \in G \times I_s \times \Omega,$$

$$x(0,\omega) = x_0. \quad (17)$$

Ovde je kao i ranije $\bar{B}'(x,s,\omega) \cdot \bar{B}'^T(x,s,\omega) = B(x,s,\omega)$.

I uslov egzistencije rešenja SDJI (C) iz 2.1. se mora proširiti na sve realizacije koeficijenata.

(C) elementi $a'_i(x,s,\omega)$, $\bar{b}'_{ij}(x,s,\omega)$ vektora $a'(x,s,\omega)$ i matrice $\bar{B}'(x,s,\omega)$ su ograničeni konstantom ili se ne menjaju brže od linearnih funkcija koordinata za svako $(x,s,\omega) \in G \times I_s \times \Omega$.

Uslovi (A) i (C) garantuju egzistenciju i jedinstvenost skoro sigurno neprekidnog rešenja SDJI (21) sa tačnošću do stohastičke ekvivalencije.

Pošto je uslovom (A) i uslovom (B) iz 2.1. obezbedjena potrebna glatkost svake realizacije funkcije $v(x,s,\omega)$, na nju se može primeniti formula *K.Itô*-a za diferenciranje složene funkcije, što uz (16') daje

$$dv(x(s,\omega), s, \omega) = [c'(x(s,\omega), s, \omega)v(x(s,\omega), s, \omega) - d'(x(s,\omega), s, \omega)] ds$$

$$+ (\nabla v(x(s,\omega), s, \omega), \bar{B}'(x(s,\omega), s, \omega) dw(s)); (x,s,\omega) \in G \times I_s \times \Omega. \quad (18)$$

Iz konturnog uslova (16') dobijamo

$$v(x(\bar{\tau}(\omega)), \bar{\tau}(\omega), \omega) = \psi'(x(\bar{\tau}(\omega)), \bar{\tau}(\omega)), \quad (19)$$

gde je za tačku $s = \bar{\tau}(\omega)$ uvedena oznaka $x(\bar{\tau}(\omega)) = x(s, \omega)$.

Trenutak $\bar{\tau}(\omega)$ prvog izlaska difuzione trajektorije na konturu

$$\bar{\tau}(\omega) \triangleq \tau_{G, I_s}(\omega)$$

$$\bar{\tau}_{U, I}(\omega) \triangleq \inf_{s \in I} \{s: x(s, \omega) \notin U\} \quad (20)$$

zavisi od realizacije (ω) slučajnih koeficijenata PDJ.

Sistem SDJI (17) i (18) sa slučajnim parametrima i uslov (19) u potpunosti određuju „zašumljeni“ parabolni sistem (16). Vraćajući se na oznake iz (16) i zapisujući SDJI (17), (18) u integralnom obliku, dobićemo sledeći karakteristični stohastički model sistema (16).

$$\begin{aligned}
 x(s, \omega) &= x_0 + \int_0^s a(x(s_1, \omega), t_0 - s_1, \omega) ds_1 + \int_0^s \bar{B}(x(s_1, \omega), t_0 - s_1, \omega) dw(s_1), \\
 & \quad s \in (0, \bar{\tau}(\omega)), x_0 \in G; \\
 u(x_0, t_0, \omega) &= \psi(x(\bar{\tau}(\omega)), t_0 - \bar{\tau}(\omega)) - \int_{t_0 - \bar{\tau}(\omega)}^{t_0} [c(x(t_0 - t_1, \omega), t_1, \omega) u(x(t_0 - t_1, \omega), t_1, \omega) \\
 & \quad - d(x(t_0 - t_1, \omega), t_1, \omega)] dt_1 - \int_{t_0 - \bar{\tau}(\omega)}^{t_0} (\nabla u(x(t_0 - t_1, \omega), t_1, \omega), \\
 & \quad B(x(t_0 - t_1, \omega), t_1, \omega) d_t w(t_0 - t_1)), \\
 & \quad (t_0 \in I_t). \quad (21)
 \end{aligned}$$

Matrica $\bar{B}(x, t, \omega)$ je određena relacijom $\bar{B} \cdot \bar{B}^T = B$.

Dok je u poslednjoj SDJI iz (11) funkcija na levoj strani jednačine predstavljala determinističku veličinu stohastički ekvivalentnu funkcionalu od difuzione trajektorije, dotle veličina na levoj strani poslednje SDJI iz (21) i sama predstavlja slučajnu funkciju. Funkcional sa kojim se utvrđuje stohastička ekvivalentnost, kao i difuziona trajektorija, zavisi od fluktuacija slučajnih parametara PDJ (16).

Verovatnoće slučajnih fluktuacija koeficijenata sistema (16) i priraštaja SWL procesa $dw(s)$ su, kao što se vidi iz izvođenja stohastičkog modela (21), međusobno nezavisne. Ova osobina verovatnoća je posledica pretpostavke da se odgovarajući fizički sistem sa slučajno raspodeljenim parametrima uspešno može opisati parabolnom jednačinom (16) čiji su koeficijenti slučajne funkcije. Samim tim, pretpostavljeno je da su fluktuacije koeficijenata PDJ („makro-pojave“) pojave različitog reda veličine od procesa difuzije „(mikro-pojave“), te da se mogu tretirati nezavisno jedne od drugih. Intervencijom u stohastičkom modelu (21) mogu se uzeti u obzir i različite vrste interferencije fluktuacije koeficijenata i difuzije, što ukazuje na činjenicu da je stohastički model (21) obuhvatniji od PDJ sa slučajnim koeficijentima (16).

Integrirajmo SDJI (18) kao linearnu jednačinu po funkciji $v(s, \omega) = v(x(s, \omega), s, \omega)$, primenimo na dobijeno rešenje operator matematičkog očekivanja M_x i vratimo se na

oznake iz (16).

$$\begin{aligned}
 u(x_0, t_0, \omega) = & M_x \psi(x(\bar{\tau}(\omega)), t_0 - \bar{\tau}(\omega)) e^{-\int_0^{\bar{\tau}(\omega)} c(x(s_1, \omega), t_0 - s_1, \omega) ds_1} \\
 & + M_x \int_0^{\bar{\tau}(\omega)} e^{-\int_0^{s_2} c(x(s_1, \omega), t_0 - s_1, \omega) ds_1} d(x(s_2, \omega), t_0 - s_2, \omega) ds_2, \quad (22) \\
 & (x_0, t_0, \omega) \in G \times I_t \times \Omega.
 \end{aligned}$$

Slučajna funkcija $u(x_0, t_0, \omega)$ određena jednačinom (22) i SDJI (17) predstavlja rešenje problema (16) u tački (x_0, t_0) . Eksplicitan izraz (22) omogućuje određivanje različitih statističkih parametara odziva „zašumljenog” sistema (16). Navešćemo samo izraz za matematičko očekivanje.

Označimo sa M_ω operator matematičkog očekivanja definisan u prostoru verovatnoće slučajnih koeficijenata sistema (16). Primenimo M_ω na (22) i uvedimo oznaku $M \triangleq M_\omega M_x$.

$$\begin{aligned}
 M_\omega u(x_0, t_0, \omega) = & M \psi(x(\bar{\tau}(\omega)), t_0 - \bar{\tau}(\omega)) e^{-\int_0^{\bar{\tau}(\omega)} c(x(s_1, \omega), t_0 - s_1, \omega) ds_1} + \\
 & + M \int_0^{\bar{\tau}(\omega)} e^{-\int_0^{s_2} c(x(s_1, \omega), t_0 - s_1, \omega) ds_1} d(x(s_2, \omega), t_0 - s_2, \omega) ds_2, \quad (23) \\
 & (x_0, t_0, \omega) \in G \times I_t \times \Omega.
 \end{aligned}$$

Izraz na desnoj strani jednačine (23) se zajedno sa SDJI (17) može iskoristiti za formiranje Monte-Karlo algoritma za izračunavanje $M_\omega u(x_0, t_0, \omega)$.

Očigledno je da relacije (17) i (22) obuhvataju i slučaj pokretne granice δG_t jednodruko povezane oblasti G_t .

Stohastički model predstavlja uopštenje modela sistema sa slučajnom pobudom formulisano u [41].

Klasa slučajno raspodeljenih parametara obuhvaćenih stohastičkim modelom (21) može se proširiti i na parametre sa prekidnim realizacijama što zahteva uopšteniju formulaciju problema (16). Prirodnu podlogu za takva uopštenja predstavlja stohastički model (21), što će biti pokazano u glavi IV.

2.2.2. Stohastički konturni uslovi

Situaciju u kojoj precizno određivanje konturnih uslova predstavlja znatne teorijske i praktične teškoće najprirodnije je opisati nekom raspodelom verovatnoće realizacija tih uslova. Stohastički model (21) prosto se proširuje i na taj slučaj, ako se uslovi (B) iz 2.1. preformulišu na sledeći način:

(B) funkcija $\psi(x,t, \omega)$ mora biti deo po deo neprekidna za svako $(x,t,\omega) \in \delta G \times I_t \times \Omega$.

Uslovi (A) i (B) za svaku realizaciju konturnih uslova ψ i raspodeljenih parametara c, d, a, B garantuju jednostruku diferencijabilnost po vremenskoj i dvostruku diferencijabilnost po prostornim koordinatama rešenja sledećeg problema:

$$L_{\omega} u(x,t,\omega) - c(x,t,\omega) u(x,t,\omega) + d(x,t,\omega) = 0, \quad (x,t,\omega) \in G \times I_t \times \Omega,$$

$$u(x,t,\omega) = \psi(x,t,\omega), \quad (x,t,\omega) \in \delta G \times \bar{I}_t \times \Omega. \quad (24)$$

Ako se uslovi (A) i (B) dopune uslovom (C), sistem (24) se može predstaviti sledećim stohastičkim modelom:

$$x(s,\omega) = x_0 + \int_0^s a(x(s_1,\omega), t_0 - s_1, \omega) ds_1 + \int_0^s \bar{B}(x(s_1,\omega), t_0 - s_1, \omega) dw(s_1),$$

$$s \in (0, \bar{\tau}(\omega)), x_0 \in G;$$

$$u(x_0, t_0, \omega) = \psi(x(\bar{\tau}(\omega)), t_0 - \bar{\tau}(\omega), \omega) - \int_{t_0 - \bar{\tau}(\omega)}^{t_0} [c(x(t_0 - t_1, \omega), t_1, \omega) u(x(t_0 - t_1, \omega), t_1, \omega) - d(x(t_0 - t_1, \omega), t_1, \omega)] dt_1 - \int_{t_0 - \bar{\tau}(\omega)}^{t_0} (\nabla u(x(t_0 - t_1, \omega), t_1, \omega), \bar{B}(x(t_0 - t_1, \omega), t_1, \omega) d_{t_1} w(t_0 - t_1)); \quad (t_0 \in I_t). \quad (25)$$

Očigledno je da se, analogno (22) i (23), iz poslednje SDJI (25) mogu dobiti: eksplicitan izraz za rešenje u vidu slučajne funkcije parametarskih fluktuacija kao i izraz za matematičko očekivanje rešenja

$$u(x_0, t_0, \omega) = M_x \psi(x(\bar{\tau}(\omega)), t_0 - \bar{\tau}(\omega), \omega) e^{-\int_{t_0 - \bar{\tau}(\omega)}^{t_0} c(x(s_1, \omega), t_0 - s_1, \omega) ds_1}$$

$$+ M_x \int_0^{\bar{\tau}(\omega)} e^{-\int_0^{s_2} c(x(s_1, \omega), t_0 - s_1, \omega) ds_1} d(x(s_2, \omega), t_0 - s_2, \omega) ds_2, \quad (26)$$

$$(x_0, t_0, \omega) \in G \times I_t \times \Omega;$$

$$M_\omega u(x_0, t_0, \omega) = M \psi(x(\bar{\tau}(\omega)), t_0 - \bar{\tau}(\omega), \omega) e^{-\int_0^{\bar{\tau}(\omega)} c(x(s_1, \omega), t_0 - s_1, \omega) ds_1} +$$

$$M \int_0^{\bar{\tau}(\omega)} e^{-\int_0^{s_2} c(x(s_1, \omega), t_0 - s_1, \omega) ds_1} d(x(s_2, \omega), t_0 - s_2, \omega) ds_2; \quad (27)$$

$$(x_0, t_0, \omega) \in G \times I_t \times \Omega.$$

2.3. PRIMER STOHAŠTIČKOG MODELIRANJA NA DIGITALNOM RAČUNARU

2.3.1. Stohastički model

Posmatrajmo sistem

$$\begin{aligned} dx(s) &= \bar{b}_{11} \cdot dw_1(s); & x(0) &= x_0 \\ dy(s) &= \bar{b}_{22} \cdot dw_2(s); & y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} s = t_0 - t, s \in [0, t_0], (x_0, y_0) \in G;$$

$$dH(x(s), y(s), t_0 - s) = g(x(s), y(s)) \cdot ds - b_0 \cdot dw_\epsilon(t_0 - s) +$$

$$+ \bar{b}_{11} \cdot \frac{\partial}{\partial x} H(x(s), y(s), t_0 - s) \cdot dw_1(s) + \bar{b}_{22} \cdot \frac{\partial}{\partial y} H(x(s), y(s), t_0 - s) \cdot dw_2(s).$$

$$s \in [0, \bar{\tau}]; H(x(\bar{\tau}), y(\bar{\tau}), t_0 - \bar{\tau}) = U; \quad (28)$$

gde je

$$\tau \triangleq \inf \{s: (x(s), y(s)) \notin G, s \in [0, t_0]\}; \bar{\tau} \triangleq \min(\tau, t_0);$$

$$\bar{b}_{11} = \bar{b}_{22} = \sqrt{\frac{2T}{S}}; g(x, y) \triangleq \frac{1}{S} d(x, y); b_0 \triangleq \frac{\sqrt{S_0}}{S}.$$

Rešenje ovog sistema SDJI je određeno jednačinom

$$\begin{aligned}
 M \in H(x_0, y_0, t_0, w_\epsilon) &= U - M_x M_y \int_0^{\bar{\tau}} g(x(s_1), y(s_1)) ds_1 = \\
 &= U - \frac{Q}{4SL^2} M_x M_y \chi_{I_{t_0}}(\tau) \int_0^{\tau} \chi_{D_0}(x(s_1), y(s_1)) ds_1 + \chi_{I_\tau}(t_0) \int_0^{t_0} \chi_{D_0}(x(s_1), \\
 & \hspace{15em} y(s_1)) ds_1
 \end{aligned} \quad (29)$$

Polazeći od jednačine (29) odredimo diskretni Monte-Karlo algoritam za rešavanje sistema SDJI (28).

2.3.2. Aproksimacija SWL procesa procesom diskretnog lutanja

Neka je

$$Dw_1(t) = Dw_2(t) = t; \quad Mw_1(t) = Mw_2(t) = 0. \quad (30)$$

Stohastički model tada glasi:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \bar{b}_{11} \sqrt{2} \int_0^t dw_1(s) = x_0 + \bar{b}_{11} \sqrt{2} w_1(t); \\
 y(t) &= y_0 + \bar{b}_{22} \sqrt{2} \int_0^t dw_2(s) = y_0 + \bar{b}_{22} \sqrt{2} w_2(t);
 \end{aligned}$$

ili

$$\frac{x(t)-x_0}{\bar{b}_{11} \sqrt{2}} = w_1(t); \quad \frac{y(t)-y_0}{\bar{b}_{22} \sqrt{2}} = w_2(t). \quad (31)$$

Definišimo diskretnan proces Markova $z(n)$ na sledeći način. Neka je $z(0)$ bilo koji ceo broj $z(0) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ i neka je

$$\begin{aligned}
 z(1) &= z(0) + \mu_1, \\
 z(n) &= z(n-1) + \mu_n
 \end{aligned} \quad (32)$$

gde je

$$P \{ \mu_i = 1 \} = P \{ \mu_i = -1 \} = \frac{1}{2}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$P \{ \mu_i = \pm 1; \mu_j = \pm 1 \} = P \{ \mu_i = \pm 1 \} P \{ \mu_j = \pm 1 \}, \quad (ij = 1, \dots, n).$$

Proces $z(n)$ definisan jednačinom (32) nazvaćemo *diskretnim lutanjem* (slučajnim, „pijanim” hodom).

Prema *Donsker*-u, [52], za dovoljno veliko n važe sledeće aproksimacije:

$$w_1(t) \approx \frac{z_1([nt])}{\sqrt{n}}, \quad w_2(t) \approx \frac{z_2([nt])}{\sqrt{n}}, \quad (33)$$

gde $[nt]$ označava celobrojnu vrednost od nt , a realna promenljiva t uzima vrednosti sa segmenta $[0,1]$. Očigledno važi:

$$\frac{[nt] - 1}{n} < t \leq \frac{[nt]}{n}. \quad (34)$$

Uvedimo oznaku $k = [nt] \leq n$ i posmatrajmo relacije (31) i (33) u tačkama $t = t_k = \frac{k}{n}$.

$$\begin{aligned} x\left(\frac{k}{n}\right) &= \bar{b}_{11} \sqrt{2/n} \cdot z_1(k) + x_0, \\ y\left(\frac{k}{n}\right) &= \bar{b}_{22} \sqrt{2/n} \cdot z_2(k) + y_0. \end{aligned} \quad (k \leq n) \quad (35)$$

Relacije (35) predstavljaju diskretnu aproksimaciju relacija (28). Vremenski korak diskretizacije iznosi $\Delta t = \frac{1}{n}$, a prostorni $|\Delta x| = |\Delta y| = \sqrt{2/n} \cdot \bar{b}_{11}$.

Obično je pogodno odabrati veličinu prostornog koraka prema veličini oblasti G , a vremenski korak odrediti preko relacije $(\Delta x)^2 / (2 \bar{b}_{11}^2) = \Delta t$.

2.3.3. Diskretni algoritam za izračunavanje kriterijuma

Uočimo da integral

$$t(\bar{\tau}) \triangleq \int_0^{\bar{\tau}} \chi_{D_0}(x(s_1), y(s_1)) ds_1$$

određuje vreme koje difuziona trajektorija provede u zoni crpljenja D_0 do prvog izlaska na konturu (prostornu – δG – ili vremensku – t_0 – granicu).

Diskretizacijom difuzione trajektorije diskretizuju se i slučajne veličine τ , $\bar{\tau}$, $t(\bar{\tau})$:

$$\tau_D \triangleq \Delta t [\inf \{ k : (x(k), y(k)) \notin G_D \}] ,$$

$$\tau_D \triangleq \Delta t [\inf \{ k : (x(k), y(k)) \notin G_D, k \geq [t_0 / \Delta t] \}] ,$$

$$\bar{\tau}_D \triangleq \sum_{k=1}^{\bar{k}} \chi_D(x(k), y(k)) \cdot \Delta t ,$$

gde je

$$G_D \triangleq \{ (x_i, y_j) : (x_i, y_j) \in G; x_i = i \Delta x, y_j = j \Delta y \} ,$$

$$D \triangleq \{ (x_i, y_j) : (x_i, y_j) \in D_0, x_i = i \Delta x, y_j = j \Delta y \} ,$$

$$(i, j) = 1, 2, \dots; \bar{k} \triangleq \bar{\tau}_D / \Delta t .$$

Diskretni algoritam za rešavanje problema (28) je određen jednačinom (35) i diskretizovanim oblikom jednačine (20) u kojoj je operator matematičkog očekivanja $M_x M_y$ zamenjen aritmetičkom sredinom od N međusobno nezavisnih slučajnih funkcija argumenata $\bar{\tau}_D^\nu$ (\bar{k}^ν , τ_D^ν), $\bar{\tau}_D$, $x^\nu(k)$, $y^\nu(k)$, ($\nu = 1, \dots, N$):

$$M_\epsilon H(x_0, y_0, t_0, w_\epsilon) = U - \frac{Q \Delta t}{4SL^2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{\bar{k}^\nu} \chi_D(x^\nu(k), y^\nu(k)) \right\} . (36)$$

Relacije (35) i (36) u potpunosti određuju diskretni Monte–Karlo algoritam za rešavanje problema (28).

2.3.4. Analiza greške diskretnog algoritma

Diskretni Monte–Karlo algoritam rešavanja problema (28) unosi u rešenje tri osnovna tipa greške:

- (1) grešku diskretizacije neprekidnog *Wiener*-ovog procesa (35),
- (2) grešku usrednjavanja po konačnom broju realizacija (36),
- (3) grešku usled neidealnosti generatora slučajnih brojeva.

Prva dva tipa greške su značajnija od trećeg, jer se pogodnim izborom generatora, greška trećeg tipa može uvek učiniti dovoljno malom.

2.3.4.1. Greška diskretizacije Wiener-ovog procesa

Osnovna ideja za ovu ocenu greške uzeta je iz [53].

Neka je

$$u_n(x_0, t_0) = M_{[x_0/\sqrt{n}]} \psi\left(\frac{z([ns])}{\sqrt{n}}, \frac{[nt_0] - [ns]}{n}\right) \quad (37)$$

$$0 \leq s \leq t_0 \leq 1; \psi \in C(\mathbb{R}^1)$$

$$\psi(x, t) \triangleq \begin{cases} f(x); t = 0, & 0 \leq x \leq a \\ \varphi(x, t); t > 0, & x = 0, x = a \\ \psi(x, t); t > 0, & x \in (0, a) \end{cases}$$

$$n \geq 1; k \triangleq [ns]; i \triangleq [x/\sqrt{n}]; m \triangleq [nt_0]; r \triangleq m - k;$$

$$0 \leq k \leq m \leq n.$$

Funkcija $u_n(x, t) = M_i \left\{ \psi\left(\frac{z(k)}{\sqrt{n}}, \frac{m-k}{n}\right) \right\}$ predstavlja matematičko očekivanje funkcije ψ od diskretne trajektorije lutanja $z(k)$ sa početkom u tački i .

Uočimo da važi

$$\begin{aligned} u_n(x, t + \frac{1}{n}) &= M_i \left\{ \psi\left(\frac{z(k)}{\sqrt{n}}, \frac{m+1-k}{n}\right) \right\} = M_i \left\{ \psi\left(\frac{z(r+1)}{\sqrt{n}}, \frac{m-r}{n}\right) \right\} = \\ &= M_{i+z(1)} \left\{ \psi\left(\frac{z(r)}{\sqrt{n}}, \frac{m-r}{n}\right) \right\} = M_{z(1)} \left\{ M_i \left\{ \psi\left(\frac{z(r)}{\sqrt{n}}, \frac{m-r}{n}\right) \right\} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} M_{i+1} \left\{ \psi\left(\frac{z(r)}{\sqrt{n}}, \frac{m-r}{n}\right) \right\} + \frac{1}{2} M_{i-1} \left\{ \psi\left(\frac{z(r)}{\sqrt{n}}, \frac{m-r}{n}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot u_n\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}}, t\right) + \frac{1}{2} u_n\left(x - \frac{1}{\sqrt{n}}, t\right). \end{aligned} \quad (38)$$

Oduzmimo $u_n(x,t)$ od leve i desne strane jednačine (38) i podelimo sa $1/n$.

$$\begin{aligned} \frac{u_n(x, t + \frac{1}{n}) - u_n(x, t)}{\frac{1}{n}} &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{u_n(x + \frac{1}{\sqrt{n}}, t) - 2u_n(x, t) + u_n(x - \frac{1}{\sqrt{n}}, t)}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^2}; \\ u_n(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \quad (39)$$

Modifikujmo diskretno lutanje $z(k)$ tako da za $k \geq k_0$, ($k_0 \triangleq \inf \{k : z(k) \notin (0, a)\}$) verovatnoće prelaza novog diskretnog lutanja $\tilde{z}(k)$ budu jednake nuli (diskretno lutanje sa zaustavljanjem). Ako funkciju $u_n(x_0, t_0)$ ponovo definišemo preko $\tilde{z}(k)$, ($k \leq k_0 \Rightarrow \tilde{z}(k) = z(k)$):

$$u_n(x_0, t_0) = M_{[x_0, \sqrt{n}]} \left\{ \psi \left(\frac{\tilde{z}[\text{ns}]}{\sqrt{n}}, \frac{[nt_0] - [\text{ns}]}{n} \right) \right\} \quad (37')$$

$$s \in [0, \tau_D),$$

relacijama (24), koje i dalje važe, se mogu pridodati relacije:

$$\begin{aligned} u_n(a, t) &= M_{[a, \sqrt{n}]} \{ \psi(a, t - 0) \} = \psi(a, t - 0) = \varphi(a, t), \\ u_n(0, t) &= M_0 \{ \psi(0, t - 0) \} = \psi(0, t) = \varphi(0, t). \end{aligned} \quad (40)$$

Diskretni problem određen relacijama (39) i (40) ima svoj kontinualni analogon:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < a, t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq a, \\ u(0, t) &= \varphi(0, t); \quad u(a, t) = \varphi(a, t), t > 0. \end{aligned} \quad (41)$$

2.3.4.2. Greška usrednjavanja po konačnom broju realizacija

Odredićemo disperziju ocene (36) rešenja (30) problema (28), prema [55]. Prema (36) imamo

$$u(x,y,t) \approx \bar{u}(x,y,t) \triangleq \frac{U}{N} \sum_{v=1}^N \mu_v.$$

gde je

$$\mu_v \triangleq \chi_{\tau_D}^{v,0} < t_0,$$

$$\gamma \triangleq M\mu_v = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p \leq 1;$$

$$\delta^2 \triangleq D\mu_v = p \cdot 1^2 + q \cdot 0^2 - p^2 = pq < 1;$$

$$M\bar{u} = \frac{U}{N} \sum_{v=1}^N M\mu_v = Up;$$

$$M\bar{u}^2 = \frac{U^2}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M\mu_i \mu_j = \frac{U^2 p}{N} \cdot (N + (N-1)p);$$

$$D\bar{u} = \frac{U^2 p}{N} (1 - p) = \frac{U^2 pq}{N} = \frac{U^2}{N} \cdot D\mu_v$$

$$\sqrt{D\bar{u}} = \frac{U}{\sqrt{N}} \cdot \sigma < \frac{U}{\sqrt{N}}$$

2.3.4.3. Metodi umanjenja greške usrednjavanja

A) Korišćenje korelisanih uzoraka sa negativnim korelacionim koeficijentom

Za ocenu veličine $u \triangleq MF(\xi)$ usvajamo veličinu $\bar{u} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\xi_i)$, gde su ξ_i slučaj-

ne veličine sa istom raspodelom kao i ξ , koje medju sobom mogu biti i korelirane.

[9].

Odredimo $D\bar{u}$ preko:

$$DF(\xi_i) = DF(\xi) = \sigma^2,$$

$$MF(\xi_i) = MF(\xi) = u,$$

$$\begin{aligned} M \{ [F(\xi_i) - MF(\xi_i)] \cdot [F(\xi_j) - MF(\xi_j)] \} &= r_{ij} \sqrt{DF(\xi_i) DF(\xi_j)} = \\ &= r_{ij} \sigma^2; (i, j = 1, \dots, N). \end{aligned}$$

Uočimo pre svega da je

$$M\bar{u} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N MF(\xi_i) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N MF(\xi) = u.$$

Dalje je

$$D\bar{u} = M(\bar{u} - u)^2 = \frac{\sigma^2}{N} \cdot \left(1 + \frac{2}{N} \cdot \sum_{i < j} r_{ij} \right).$$

Kada su ξ_i medjusobno nekorelisane veličine

$$D\bar{u} = \frac{\sigma^2}{N} = \frac{DF(\xi)}{N}$$

Kada su ξ_i medjusobno korelisane

$$D\bar{u} = \frac{\sigma^2}{N} \cdot \left(1 + \frac{2}{N} \cdot \sum_{i < j} r_{ij} \right),$$

što znači da u tom slučaju disperzija ocene \bar{u} može biti veća ili manja od disperzije ocene za slučaj nekorelisanog niza ξ_i – u zavisnosti od toga da li je koeficijent

$$\theta \triangleq 1 + \frac{2}{N} \cdot \sum_{i < j} r_{ij}$$

veći ili manji od jedinice.

Da bi umanjili disperziju, zahtevaćemo dakle

$$|\theta| < 1,$$

odnosno

$$-1 < 1 + \frac{2}{N} \cdot \sum_{i < j} r_{ij} < 1.$$

Sledi

$$-N \cdot \sum_{i < j} r_{ij} < 0.$$

Kada je $r_{ij} = \bar{r} = \text{const}$, $i \neq j$, odavde sledi

$$\frac{-2}{N-1} < \bar{r} < 0.$$

Ako se usvoji $\bar{r} = -\frac{1}{N}$, dobija se

$$\theta = \frac{1}{N},$$

odnosno

$$D\bar{u} = \frac{\sigma^2}{N^2} \cdot \sqrt{D\bar{u}} = \frac{\sigma}{N}.$$

Pretpostavimo da iz nekorelisanog niza izvodimo korelisani niz tako da korelacije postoje samo izmedju parnih i prethodnih neparnih članova niza. (Usvojimo još da je N parno). Tada će se korelacioni koeficijenti korelisanih parova nalaziti isključivo na pomoćnim dijagonalama korelacione matrice i ukupan broj takvih koeficijenata će biti $N-1$.

Za $r_{ij} = \bar{r} = \text{const}$ imaćemo

$$\frac{2}{N} \cdot \sum_{i < j} r_{ij} = \frac{N-1}{N} \cdot \bar{r}.$$

Prema tome, uslov da bi postupak imao smisla u ovom slučaju glasi

$$-N < \frac{N-1}{N} \cdot \bar{r} < 0.$$

odnosno

$$-\frac{N^2}{N-1} < \bar{r} < 0.$$

Primer 1.

$$\text{Za } \bar{r} = -\frac{1}{2} \text{ važi } \theta = 1 + \frac{2}{N} \cdot \sum_{i < j} r_{ij} = \frac{1}{2N},$$

odnosno

$$D\bar{u} = \frac{\sigma^2}{2N^2}; \quad \sqrt{D\bar{u}} = \frac{\sigma}{N\sqrt{2}}$$

Primer 2.

Neka je ξ slučajna veličina ravnomerno raspodeljena na segmentu $[0,1]$ i neka je $f(\xi) \triangleq \frac{e^\xi - 1}{e-1}$.

Posmatrajmo niz slučajnih veličina $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}$ koje sve imaju istu raspodelu kao i ξ .

Odredimo korelacioni koeficijent:

$$K[f(\xi), f(1-\xi)] = \frac{M[f(\xi) \cdot f(1-\xi)] - Mf(\xi) \cdot Mf(1-\xi)}{\sqrt{Df(\xi) \cdot Df(1-\xi)}}$$

Uočimo da važi:

$$Mf(\xi) = \frac{e-2}{e-1},$$

$$Mf(1-\xi) = \frac{e-2}{e-1},$$

$$Df(\xi) = \frac{3-e}{2(e-1)^2},$$

$$Df(1-\xi) = \frac{3-e}{2(e-1)^2} = Df(\xi),$$

$$M[f(\xi) \cdot f(1-\xi)] = \frac{3-e}{(e-1)^2}.$$

Smenom ovih vrednosti u gornju relaciju, odredićemo vrednost korelacionog koeficijenta

$$K[f(\xi) \cdot f(1-\xi)] = 2 \cdot \frac{3-e-(e-2)^2}{(e-1)(3-e)} = 2 \cdot \frac{3e-e^2-1}{(e-1)(3-e)} \approx -0.76.$$

Dalje imamo

$$\frac{2}{N} \cdot \sum_{i < j} [Kf(\xi_i) \cdot f(1-\xi_j)] \approx \frac{N-1}{N} \cdot (-0.76) \approx 0.76,$$

$$\theta = 1 + \frac{2}{N} \cdot \sum_{i < j} K[f(\xi_i) \cdot f(1-\xi_j)] \approx 1 - 0.76 \approx 0.24.$$

$$D\bar{u} \approx 0.24 \frac{\sigma^2}{N}$$

$$\sqrt{D\bar{u}} \approx 0.5 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{\sigma}{2\sqrt{N}}.$$

Standardna devijacija je oko *dva puta* manja od standardne devijacije ocene sa nekoreliranim nizom – ako su u korelisanom nizu parni članovi određeni izrazima :

$$\xi_2 = 1 - \xi_1, \xi_4 = 1 - \xi_3, \dots, \xi_{2i} = 1 - \xi_{2i-1}, \dots, \xi_N = 1 - \xi_{N-1}.$$

B) Metod raslojavanja uzorka

Neka je

$$U \triangleq MF(\xi); \bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\xi_i); D\bar{u} = \frac{1}{N} DF(\xi), \text{ gde } \xi_i \text{ ne zavisi od } \xi_j \text{ za } i \neq j.$$

a slučajne veličine ξ_i imaju sve istu raspodelu kao slučajna veličina ξ . Disperzija ocene u na uzorku (ξ_1, \dots, ξ_N) matematičkog očekivanja $u = MF(\xi)$ umanjuje se pogodnom modifikacijom (raslojavanjem) uzorka. Razdelimo uzorak, [9], na k intervala $x_{j-1} < \xi_i^{(j)} \leq x_j$ sa n_j realizacija u svakom: $(i = 1, 2, \dots, n_j), (j = 1, \dots, k)$.

$\sum_{j=1}^k p_j = 1, \sum_{j=1}^k n_j = N$. Označimo sa P_j verovatnoću:

$$P_j \triangleq P \{x_{j-1} < \xi_i^{(j)} \leq x_j\} = P(\xi_i^{(j)} \leq x_j) - P(\xi_i^{(j)} \leq x_{j-1}).$$

Predpostavimo da su verovatnoće P_j poznate *a priori* (na primer, usled simetričnosti i ravnomernosti raspodele). Tada možemo koristiti sledeći oblik ocene

$$\tilde{u} \triangleq \sum_{j=1}^k P_j \cdot \frac{1}{n_j} \cdot \sum_{i=1}^{n_j} F(\xi_i^{(j)}).$$

Uočimo da je

$$M\tilde{u} = \sum_{j=1}^k P_j \cdot MF(\xi^{(j)}) = M [M(F(\xi) | \xi = \xi^{(j)})] = MF(\xi) = u$$

$$\begin{aligned} D\tilde{u} &= M \left[\sum_{j=1}^k P_j \cdot \frac{1}{n_j} \cdot \sum_{i=1}^{n_j} F(\xi_i^{(j)}) - u \right]^2 = \\ &= \sum_{r,\ell} \frac{P_r P_\ell}{n_r n_\ell} \cdot \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{i'=1}^{n_\ell} M \{ [F(\xi_i^{(r)}) - u] \cdot [F(\xi_{i'}^{(\ell)}) - u] \} = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{P_j^2}{n_j} \cdot DF(\xi^{(j)}). \end{aligned}$$

Neka je $u_j \triangleq MF(\xi^{(j)})$. Uočimo da važi

$$MF(\xi^{(j)}) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x) \cdot \frac{dP \{ \xi < x \}}{P_j},$$

$$\begin{aligned} DF(\xi) &= M \{ M \{ [F(\xi^{(j)}) - u_j]^2 | \xi = \xi^{(j)} \} \} = \\ &= \sum_{j=1}^k P_j \cdot \int_{x_{j-1}}^{x_j} [F(x) - u_j]^2 \cdot d \left[\frac{P \{ \xi < x \}}{P_j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} [F(x) - u_j]^2 dP \{ \xi < x \}. \end{aligned}$$

Prema definiciji je:

$$\begin{aligned} DF(\xi^{(j)}) &\triangleq M \{ [F(\xi^{(j)}) - u_j]^2 | \xi = \xi^{(j)} \} = \\ &= \frac{1}{P_j} \cdot \int_{x_{j-1}}^{x_j} [F(x) - u_j]^2 dP \{ \xi < x \} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{P_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F^2(x) dP \{ \xi < x \} - \frac{1}{P_j^2} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x) dP \{ \xi < x \} \right\}^2.$$

Usvajimo da je $DF(\xi^{(j)}) = b = \text{const}$, ($j = 1, \dots, k$) i iz uslova

$$b = DF(\xi^{(j)}) = \frac{1}{P_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F^2(x) dP \{ \xi < x \} - \frac{1}{P_j^2} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x) dP \{ \xi < x \} \right\}^2,$$

$$(j = 1, \dots, k),$$

odredimo $k-2$ nepoznate x_1, \dots, x_{k-1} , (slučaj konačnog intervala), i veličine k, b .

a) Za slučaj polukonačnog intervala nepoznate su

$$x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, k$$

ili

$$x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, k$$

b) Za slučaj beskonačnog intervala nepoznate su

$$x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k.$$

U slučajevima a) i b) disperzija \underline{b} može biti zadata unapred.

Za ovako određene podele, može se odrediti i teoretski ispravan obim uzorka u svakom podintervalu iz uslova:

$$\frac{n_j}{N} = P_j, \quad n_j = N P_j.$$

Odatve sledi

$$D\tilde{u} = \sum_{j=1}^k \frac{P_j^2}{n_j} \cdot DF(\xi^{(j)}) = \sum_{j=1}^k \frac{P_j^2}{NP_j} = \frac{\underline{b}}{N}.$$

Iz definicije $DF(\xi^{(j)})$ sledi

$$b = DF(\xi^{(j)}) \leq DF(\xi),$$

što znači da je

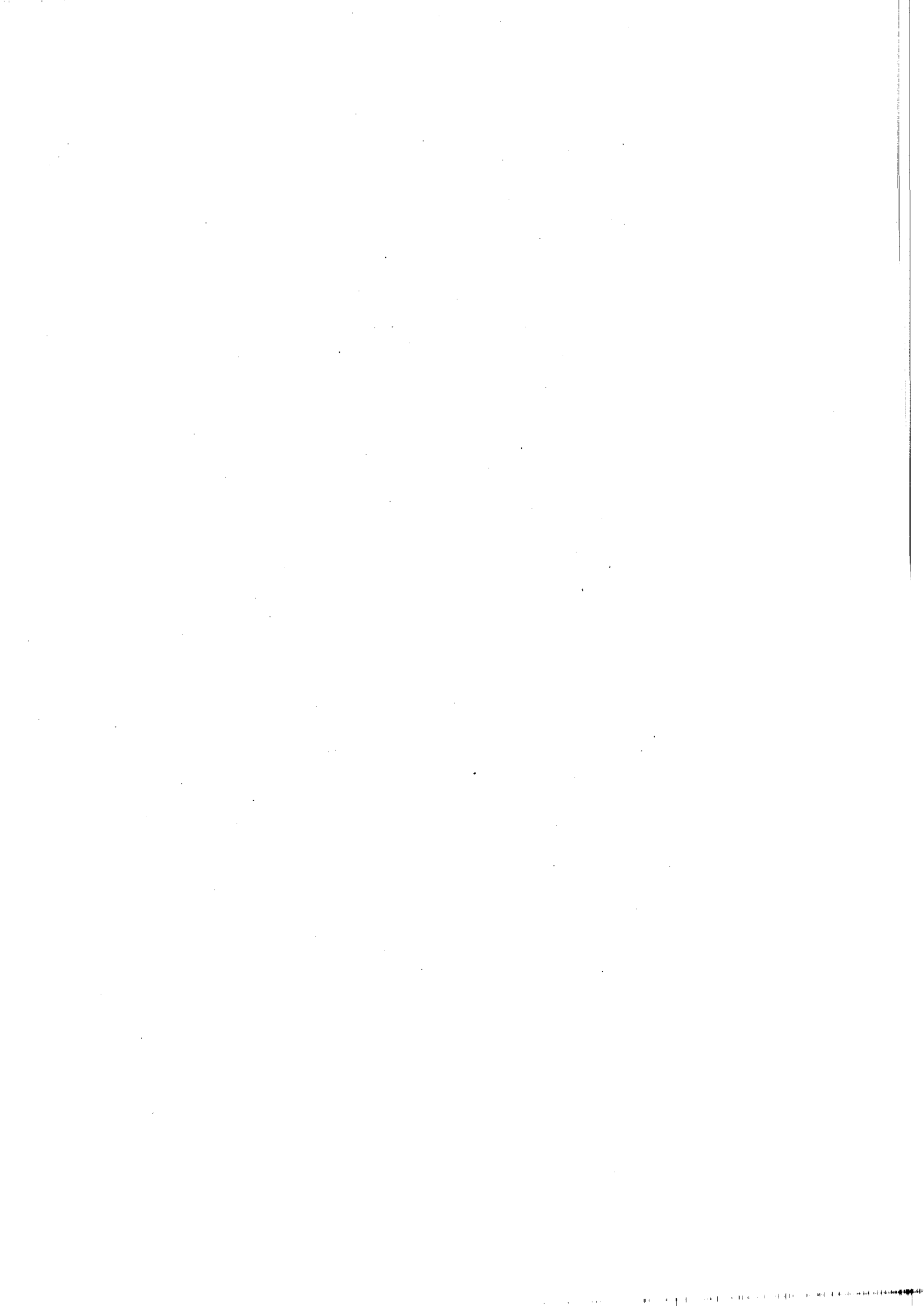
$$D\tilde{u} = \frac{b}{N} \leq \frac{DF(\xi)}{N} = D\bar{u}.$$

U slučajevima kada se vrednost b može slobodno birati, moguće je usvojiti $b = \frac{DF(\xi)}{N}$, pa će važiti

$$D\tilde{u} = \frac{b}{N} = \frac{DF(\xi)}{N^2},$$

$$\sqrt{D\tilde{u}} = \frac{\sqrt{DF(\xi)}}{N}.$$

Nažalost funkcija $P\{\xi < x\}$ nije poznata, pa se u opštem slučaju mora odustati od tačnog određivanja granica podintervala — one se određuju približno na osnovu intuicije.



III SIMULACIJA EKSPLICITNOG STOHAŠTIČKOG MODELA NA HIBRIDNOM RAČUNARU

3.1. DEFINICIJA HIBRIDNOG SIMULACIONOG ALGORITMA

Simulacioni algoritam za određivanje odziva sistema (2.1) i (2.16) u tački (x_0, t_0) na osnovu jednačina (2.15), (2.23) i (2.27) se zasniva na estimaciji matematičkog očekivanja funkcionala polazeći od njegovih realizacija, što predstavlja opštu karakteristiku algoritama Monte-Karlo tipa. Nestacionarnost difuzionih procesa ne dopušta primenu ergodične teoreme, tako da se matematičko očekivanje mora ocenjivati na osnovu diskretnog broja realizacija funkcionala od difuzionih trajektorija. Ova okolnost, nezavisno od načina na koji se izračunavaju same trajektorije i funkcional, ne donušta da se eksplicitni izrazi (2.15), (2.23) i (2.27) shvate kao čisto kontinualni algoritmi. Zamena operatora matematičkog očekivanja odgovarajućim estimatorom i svaka druga delimična diskretizacija SDJI i funkcionala dovode do raznih varijanta hibridnog (diskretno-kontinualnog) simulacionog algoritma. Ako se pak izvrši potpuna diskretizacija SDJI (2.6) ili (2.17) i odgovarajućeg funkcionala, algoritam postaje čisto diskretan.

Ova podala simulacionih algoritama na hibridne i diskretne odgovara podeli postojeće računске tehnike na hibridne i digitalne računске sisteme. Međutim, određivanje kontinualnog ili diskretnog oblika funkcionala i SDJI predstavlja samo prvi korak u razvoju algoritma za hibridnu odnosno digitalnu računsku mašinu. Algoritam se može smatrati potpunim tek kada je rešen niz pratećih problema usko vezanih za specifikum primenjene računске tehnike kao što su: skaliranje, analize greške, metod programiranja itd.. Tako upotpunjene algoritme prirodno je nazivati digitalnim i hibridnim simulacionim algoritmima.

Kao tipičan primer hibridnog algoritma odabraćemo slučaj kada osim zamene operatora matematičkog očekivanja diskretnim estimatorom nikakva druga diskretiza-

cija nije vršena. Algoritam je određen na bazi jednačina (2.17) i (2.27) koje rešavaju najopštiji slučaj (2.24) problema sa mešovitim graničnim uslovima.

Pridružimo svakom elementarnom događaju $\omega_k \in \Omega$, jednu realizaciju SWL procesa w^k . Tada će svakom paru realizacija (ω_k, w^k) odgovarati jedan ceo pozitivan broj $k = 1, 2, 3, \dots, N$. Indeksom k označimo u (2.17) sve veličine koje zavise od k -tog para realizacija (ω_k, w^k) .

$$\begin{aligned} dx^k(s) &= a'(x^k(s), s, k) ds + \bar{B}'(x^k(s), s, k) dw^k \\ x^k(0) &= x_0; (x, s) \in G \times I_s, k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1)$$

Postupimo na isti način sa jednačinom (2.27)

$$\begin{aligned} M_{\omega} u(x_0, t_0, \omega) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi_k(x(\bar{\tau}), t_0 - \bar{\tau}_k) e^{-\int_0^{\bar{\tau}_k} c_k(x^k(s_1), t_0 - s_1) ds_1} + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \int_0^{\bar{\tau}_k} e^{-\int_0^{s_2} c_k(x^k(s_1), t_0 - s_1) ds_1} d_k(x^k(s_2), t_0 - s_2) ds_2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$(x_0, t_0) \in G \times I_t.$$

Operator M na desnoj strani jednačine (2.27) zamenjen je aritmetičkom sredinom od N realizacija.

Jednačine (1) i (2) predstavljaju hibridni simulacioni algoritam za određivanje matematičkog očekivanja odziva zašumljenog parabolichnog sistema (2.24).

Za realizaciju simulacionog algoritma (1), (2) potrebno je:

1. Generisati n medjusobno nezavisnih gausovskih slučajnih procesa tipa beloga šuma i višekratno rešavati stohastičke diferencijalne jednačine *Ito*-a.
2. Odrediti prostorno-vremenske koordinate tačaka prvog izlaska difuzione trajektorije na granicu oblasti $G \times I_t$.
3. Odrediti vrednosti slučajnog funkcionala koji figuriše pod znakom operatora matematičkog očekivanja u izrazu (2), prema datim realizacijama difuzionog procesa.
4. Izračunati aritmetičku sredinu kojom se aproksimira operator matematičkog očekivanja u formuli (2).

Prve dve operacije modeliranja difuzionog procesa sa zaustavljanjem na granici su neprekidne, a poslednja je diskretna. Prirodno je prenesti analognom delu hibridnog sistema ostvarivanje neprekidnih operacija, a na digitalnom delu realizovati diskretne operacije. Operacije obuhvaćene pod 3. mogu se prebaciti prema potrebi bilo na analogni bilo na hibridni deo računara.

Za generisanje desnih strana stohastičkih diferencijalnih jednačina potreban je generator n međusobno nezavisnih Gauss-ovih procesa $\xi_j(t)$, ($j = 1, \dots, n$) tipa belog šuma sa dovoljno širokim spektrom gustine snage $S_j(f) = S_{0j} = \text{const}$, $f \in (f_{\min}, f_{\max})$ [42]. Sistem SDJI se dalje rešava standardnim analognim metodama.

3.2. ANALIZA GREŠAKA

a) Neposredni izvori grešaka pri realizaciji metoda na hibridnoj mašini

Ukažimo pre svega na greške linearnog i nelinearnog dela analognog modela, AD konvertora i digitalnog programa.

Izvore grešaka linearnog dela analognog modela predstavljaju ograničenja na frekventni i dinamički diapazon mašine. Pored toga od bitnog uticaja može biti i opseg ravnomernosti spektra gustine snage generatora beloga šuma i odgovarajuća vrednost samoga spektra. Izbor parametara generatora zavisi od frekventnih i dinamičkih ograničenja analognog modela. Opseg ravnomernosti spektra gustine snage generatora ne treba da prevazilazi frekventna ograničenja analognog modela.

Frekventna i dinamička ograničenja linearnog dela analognog modela su uslovljena fizičkim karakteristikama komponenta.

Niskofrekventna ograničenja određuju se donjom granicom propusnog opsega pojačavača, netačnošću integriranja integratora i nekompenzovanim komponentama drifta pojačavača kao i efektom indukcije spoljašnje mreže (50 Hz).

Visokofrekventna ograničenja su uslovljena gornjom granicom propusnog opsega pojačavača.

Minimalni napon koji se može predstaviti na analognoj mašini određuje se smetnjama izazvanim elektronskim prekidačima pri uspostavljanju početnih uslova (šum početnih uslova), efektom indukcije od spoljašnje mreže (50 Hz), nekompenzovanim driftom pojačavača i šumova pojačavača zvučnih učestanosti. Pobrajani izvori grešaka su u osnovi karakteristični za analognu mašinu koja radi u režimu sa velikom repeticijom. Maksimalni napon koji se može predstaviti na analognoj mašini je jednak referentnom naponu

БИБЛИОТЕКА
МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА САНУ

Generisanje granica oblasti polja i određivanje vremenskih i prostornih koordinata tačke prvoga izlaska difuzione trajektorije na granicu predstavljaju nelinearne analogne operacije. Ako se granični uslovi realizuju na analognom delu hibridnog sistema, oni takodje moraju biti ostvareni pomoću nelinearnih elemenata. U osnovi, to mogu biti generatori funkcija od jedne ili nekoliko promenljivih i komparatori. Ovde su izvori greške sledeći: greška generisanja zadate funkcije, greška okidačkog praga komparatora, konačnost vremena okidanja komparatora. Pored toga AD konvertori analogno dobijenih rezultata mogu takodje uneti značajnu dopunsku grešku. Ako se granični uslovi realizuju u digitalnom delu programa, greška diskretne realizacije graničnih uslova mora biti uzeta u obzir. Kvantitativna analiza ovih grešaka sprovedena je u [31].

b) Greške aproksimacije SDJI

Trajektorije difuzionog procesa $x(s)$ indukovanog operatorom L' mogu se modelirati na analognom delu hibridnog računara samo približno. Naime, infinitezimalni priraštaj SWL procesa ($dw(s)$), tehnički opisan kao „beli šum”, se fizički može samo približno realizovati u obliku „ograničenog belog šuma”. Za razliku od idealnog „belog šuma”, čiji je spektar gustine snage ravnomeran (postojan) duž cele frekventne ose, „ograničeni beli šum” $\xi(s)$ ima konačan (ograničen) frekventni opseg ravnomernosti spektra. Matematički se „ograničeni beli šum” može definisati kao familija strogo stacionarnih Gauss-ovih stohastičkih procesa $\xi(s, \beta)$ čija se autokorelaciona funkcija približava (Dirac-ovoj) delta-funkciji kada $\beta \rightarrow \infty$.

Ako u SDJI (1) zamenimo priraštaje SWL procesa $dw(s)$ „ograničenim belim šumom” $\xi(s, \beta) ds \approx dw(s)$, dobićemo oblik stohastičke diferencijalne jednačine (SDJ) koji se može realizovati na analognom delu hibridnog sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} x^k(s) &= a'(x^k(s), s, k) + \bar{B}'(x^k(s), s, k) \xi^k(s, \beta), \\ x^k(0) &= x_0, (x, s) \in G \times I_s, k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

SDJ (3) je definisana preko običnih stohastičkih integrala određenih srednjekvadratnom konvergencijom integralnih suma.

Od načina na koji se autokorelacione funkcije procesa $\xi^k(s, \beta)$ približavaju delta-funkciji kada $\beta \rightarrow \infty$ zavisi da li će SDJ (3), težiti SDJI (1), (simetrična konvergencija) ili će, ne menjajući difuziju, uneti u matematičko očekivanje rešenja granične SDJ neko odstupanje od matematičkog očekivanja SDJI (1), (asimetrična konvergencija). U ovom poslednjem slučaju, potrebno je izmeniti SDJ (3) tako da simetrično konvergira ka SDJI (1). Za jedan određen tip asimetrične konvergencije, odgovarajući korigovani (simetrizirani) tip SDJ (3) je definisao *Stratonovič* [43].

Realizacijom SDJ (3) dopušta se, usled ograničenosti opsega ravnomernosti spektra gustine snage beloga šuma $\xi(s, \beta)$, odstupanje realizovane trajektorije $x(s, \beta)$ od idealne difuzione trajektorije $x(s)$. Ovo može usloviti odgovarajuću grešku funkcionala nad trajektorijama i dalje – grešku matematičkog očekivanja funkcionala – odnosno grešku u oceni rešenja problema (2.16). Može se dakle tvrditi da se realizacijom SDJ (3) namesto SDJI (1) unosi greška u PDJ (2.16) čije se rešenje traži.

Koristeći se radovima Stratonoviča [44], izvešćemo PDJ koja odgovara ostvarljivoj SDJ (3). Razlika između dobijene PDJ i zadate PDJ (1) daće nam uvid u kvalitativnu i kvantitativnu stranu ove greške. Pošto se sve PDJ drugog reda mogu svesti na kano-ničan oblik u kome ne figurišu članovi sa mešovitim izvodima, definišaćemo, radi prostijeg izvodjenja, parabolni operator L_s tako da ne sadrži mešovite izvode. To znači da će matrice B , \bar{B} i \bar{B}' biti dijagonalne i da će komponente difuzionog procesa $x(s)$ iz SDJI (1), odnosno SDJ (3) biti međusobno nezavisne.

Definišimo karakterističnu funkciju θ r -toga reda skalarnog slučajnog procesa $z(t, \omega)$ ($\omega \in \Omega, s \in \mathbb{R}^1$):

$$\theta(v; \underline{t}; r; z) \triangleq M \left\{ \exp \left[j \sum_{i=1}^r z(t_i, \omega) v_i \right] \right\} \quad (4)$$

gde je

$$v \triangleq (v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^r; \underline{t} = (t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r; z \in \mathbb{R}^1;$$

$$j = \sqrt{-1}; r = 1, 2, \dots$$

Korelacionu funkciju r -toga reda (K) procesa $z(t, \omega)$ ćemo definisati na sledeći način:

$$K(\underline{t}; r; z) = \frac{1}{j^r} \left[\frac{\partial}{\partial v_1 \dots \partial v_r} \ln \theta(v; \underline{t}; r; z) \right]_{v=0} \quad (5)$$

gde je $r = 1, 2, \dots$;

$$K(\underline{t}; 0; z) \triangleq 0. \quad (6)$$

Polazeći od definicije (5) i (6), može se pokazati da se korelacione funkcije procesa $x_i - x_{0i}$ koji predstavlja i -tu skalarnu komponentu n -dimenzionog stohastičkog procesa $x(s) - x_0$, određuju preko korelacionih funkcija izvoda $\dot{x}_i(s)$ prema sledećim formulama

$$K(\underline{t}; r; x_1 - x_{0i}) = \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_r} K(\underline{s}; r; \dot{x}_i) ds_1 \dots ds_r;$$

$$r = 2, \dots, ; \quad (7)$$

$$K(t_1; 1; x_1 - x_{0i}) = \int_0^{t_1} M \dot{x}_i(s) ds.$$

Iz definicije korelacionih funkcija sledi da karakteristična funkcija prvoga reda procesa $x_i(t) - x_{0i}$ može biti izražena preko korelacionih funkcija na sledeći način:

$$\theta(v_1; t_1; 1; x_1 - x_{0i}) = \exp \left[\sum_{r=1}^{\infty} j^r K(\underline{t}; r; x_1 - x_{0i}) v_1^r \right],$$

gde je

$$K(\underline{t}; r; x_1 - x_{0i}) = K(t_1, t_1, \dots, t_1; r; x_1 - x_{0i}) \equiv$$

$$\equiv \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_1} K(\underline{s}; r; \dot{x}_i) ds_1 \dots ds_r \triangleq k(t_1, r, i). \quad (8)$$

Na taj način, ako znamo sve korelacione funkcije procesa $\dot{x}_i(s)$, možemo konstruisati karakterističnu funkciju prvoga reda priraštaja $x_i(t) - x_{0i}$. Kada su komponente $\dot{x}_i(t)$ međusobno nezavisne, možemo konstruisati i karakterističnu funkciju priraštaja vektora $x(t) - x_0$.

$$\theta(v_1; t_1; 1; x - x_0) \equiv \prod_{i=1}^n \theta(v_1; t_1; 1; x_i - x_{0i}) =$$

$$= \exp \left[\sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(j)^r}{r!} k(t_1, r, i) \cdot v_1^r \right]. \quad (9)$$

Posle množenja (9) sa skalarom ψ i diferenciranja po t_1 , dobićemo:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \psi \cdot \theta(v_1; t_1; 1; x - x_0) =$$

$$= \psi \cdot \theta(v_1; t_1; 1; x - x_0) \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(j)^r}{r!} \cdot \frac{d}{dt_1} [k(t_1, r, i)] \cdot v_1^r. \quad (10)$$

Primenom inverzne *Fourier-ove* transformacije na karakterističnu funkciju (9) od-

redićemo gustinu verovatnoće $p(x-x_0, t_1)$, priraštaja $x-x_0$ za vreme t_1 :

$$p(x-x_0, t_1) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(v_1; t_1; 1; x_1-x_{01}) \cdot \exp [j \cdot v_1(x_1-x_{01})] dv_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(v_n; t_1; 1; x_n-x_{0n}) \cdot \exp [-j \cdot v_n(x_n-x_{0n})] dv_n \quad (11)$$

Množenjem (11) sa skalarom ψ i diferenciranjem po t_1 , dobićemo:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \psi \cdot p(x-x_0, t_1) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-j \cdot \sum_{i=1}^n v_i(x_i - x_{0i})] \frac{\partial}{\partial t_1} [\psi \prod_{i=1}^n \theta(v_i; t_1; 1; x_i; x_{0i})] dv_1 \dots dv_n \quad (12)$$

Uvedimo oznaku:

$$u(x, t) \triangleq \psi p(x-x_0, t); \quad (13)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-j \cdot \sum_{i=1}^n v_i(x_i - x_{0i})] \cdot [\psi \prod_{i=1}^n \theta(v_i; t; 1; x_i; x_{0i})] dv_1 \dots dv_n \quad (14)$$

Uvodjenjem (10), a zatim (14) u jednačinu (12) dobićemo posle elementarnih transformacija parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \frac{d}{dt} k(t, r, i) (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x_{0i}^r} u(x_0, t). \quad (15)$$

Iz (8) se elementarno dokazuje da je

$$\frac{d}{dt} k(t, r, i) = r \int_0^t \dots \int_0^t K(t, \underline{s}; r; \dot{x}_i) ds_1 \dots ds_{r-1} \quad (16)$$

gde je $\underline{s} = (s_1, \dots, s_{r-1})$; $r = 2, 3, \dots$

Kada je proces $x(t)$ Gauss-ov, PDJ (15) se svodi na jednačinu drugoga reda. Zaista, korelacione funkcije Gauss-ovih procesa $x(t)$ jednake su nuli za $r > 2$. Za taj slučaj, uvedimo oznake

$$\frac{d}{dt} k(t,2,i) = 2 \int_0^t K(t,s; 2; x_i) ds \triangleq 2 \tilde{b}_{ii}(x_{0i}, t), \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} k(t,1,i) = \frac{d}{dt} \int_0^t K(s; 1; \dot{x}_i) ds \equiv K(t; 1; \dot{x}_i) \equiv$$

$$\equiv Mx_i(t) \equiv \tilde{a}_i(x_{0i}, t)$$

Jednačina (15) će se tada svesti na oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_{0i}, t) = \sum_{i=1}^n \left[-\tilde{a}_i(x_{0i}, t) \frac{\partial}{\partial x_{0i}} u(x_{0i}, t) + \tilde{b}_{ii}(x_{0i}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_{0i}^2} u(x_{0i}, t) \right]. \quad (18)$$

Ako sada pustimo da autokorelaciona funkcija procesa $\xi(s, \beta)$ teži delta-funkciji, uslovićemo time da i autokorelaciona funkcija procesa $\dot{x}(s)$ takodje teži delta-funkciji. Granične vrednosti koeficijenata će tada prema (17) glasiti:*

$$2 \tilde{b}_{ii}(x_{0i}, t) \equiv \int_0^{2t} S_{0i}(x_{0i}, t) \delta(t, s) ds \equiv S_{0i}(x_{0i}, t) \equiv b_{ii}^*(x_{0i}, t), \quad (19)$$

$$\tilde{a}_i(x_{0i}, t) \equiv M\dot{x}_{0i}(t) \equiv a_i^*(x_{0i}, t).$$

U tom slučaju jednačina (18) prelazi u PDJ tipa (2.1), a proces $x(t)$ određen SDJ (3) prelazi u difuzioni proces određen SDJI (1).

Razlika između jednačine (18) i jednačine (2.1) se sastoji u tome što idelani beli šum propušten kroz filter (3) zadržava precizno određena lokalna svojstva, dok Gauss-ov proces konačne snage (ograničeni beli šum) daje na izlazu istoga filtra proces koji se ne može opisati lokalnim karakteristikama (funkcijama). Može se slikovito kazati da su lokalne karakteristike procesa koji teže ka difuzionim procesima „razmazane” duž određenog vremenskog segmenta Δt_{kor} . Za vremenske intervale mnogo veće od Δt_{kor} važi aproksimacija

*Predpostavlja se „simetrična” konvergencija.

$$\int_0^t |K(s_1, s_2; 2; x)| ds_2 \approx K(s_1, s_1; 2; x) \Delta t_{kor}, \quad (t \gg \Delta t_{kor}),$$

na osnovu koje se može govoriti o „približno lokalnim” karakteristikama procesa $x(s)$. Naime, stvarne karakteristike procesa (integral na desnoj strani gornje relacije, na primer) u tački s_1 i na segmentu $[s_1 - \Delta t_{kor}/2, s_1 + \Delta t_{kor}/2]$ se mogu u prvoj približnosti zameniti lokalnim konstantama (ovde $-K(s_1, s_1; 2; x) \cdot \Delta t_{kor}$). Međutim, za vremenske intervale reda veličine $\Delta t_{kor} \sim t$, stvarne karakteristike profiltriranog procesa se matematički opisuju kao funkcionali od statističkih karakteristika procesa na ulazu filtra i ne mogu se svesti na obične funkcije vremena, (ne mogu se iskazati u terminima lokalnih karakteristika).

Prema tome, na vremenskim odsečcima reda veličine Δt_{kor} se pomoću SDJ (3) ne može generisati proces $x_i(t)$ čije lokalne karakteristike tačno odgovaraju unapred datim koeficijentima PDJ. Za vremenske odsečke koji su mnogo veći od Δt_{kor} , koeficijenti PDJ se mogu sa dobrom približnošću opisati, odgovarajućim izborom korelacionih funkcija procesa $x_i(t)$. Odstupanje rešenja PDJ (18) od rešenja granične PDJ čiji su koeficijenti određeni relacijama (19) predstavlja grešku izazvanu ograničenošću opsega ravnomernosti spektra gustine snage šuma $\xi_i(s, \beta)$ ($\beta < \infty$), odnosno grešku usled konačnosti vremena korelacije Δt_{kor} ograničenog belog šuma $\xi_i(s, \beta)$.

Greške usled približnog određivanja SDJI analognim računskim sredstvima se mogu svesti isključivo na greške usled konačnosti vremena korelacije u slučaju da je potrebno modelirati linearne SDJI. Zaista, u tom slučaju je dovoljno da procesi $\xi_i(s, \beta)$ budu *Gauss*-ovi pa da i rešenja SDJ (3) budu *Gauss*-ova.

Za nelinearne SDJ je mnogo teže obezbediti *Gauss*-ovu prirodu rešenja $x_i(s)$, (nije dovoljno da „ulazni” proces $\xi(s, \beta)$ bude *Gauss*-ov). U slučajevima kada PDJ koja se rešava indukuje nelinearne SDJI, moramo najčešće dopustiti da raspodele procesa $x_i(s)$ odstupaju od *Gauss*-ovih. Na taj način se, kao što se to vidi iz (15), zadata parcijalna diferencijalna jednačina perturbuje malim parametrima.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x_0, t) = & \sum_{i=1}^n (-\tilde{a}_i(x_{0i})) \frac{\partial}{\partial x_{0i}} u(x_0, t) + \tilde{b}_{ii}(x_0, t) \frac{\partial^2}{\partial x_{0i}^2} u(x_0, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{r=3}^{\infty} \left(\frac{1}{r!} \frac{d}{dt} k(t, r, i) (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x_{0i}^r} u(x_0, t) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Koeficijenti $\frac{d}{dt} k(t, r, i)$, ($r = 3, 4, \dots$), predstavljaju male parametre, pošto korelacione funkcije višega reda brže opadaju sa vremenom nego li korelacione funkcije nižega reda (za dovoljno malo Δt_{kor}). Na taj način za PDJ koje indukuju nelinearne SDJI,

rešenje koje se dobija na osnovu analogne realizacije SDJ (3) zadovoljava parcijalnu jednačinu (20) koja se od zadate PDJ razlikuje za izraz

$$R_3 \triangleq \sum_{i=1}^n \sum_{r=3}^{\infty} \left(\frac{1}{r!} \frac{d}{dt} k(t, r, i) (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x_{0i}^r} u(x_0, t) \right). \quad (21)$$

Izraz (21) određuje grešku usled prisustva malih parametara. Iako je R_3 u krajnjoj liniji greška izazvana konačnošću vremena korelacije ograničenog belog šuma, i-pak ćemo je nazvati greškom usled nelinearnosti indukovane SDJI da bi istakli njenu specifičnost.

Analizom greške analogne realizacije SDJI izdvojene su dakle dve vrste grešaka: greške usled konačnosti vremena korelacije Δt_{kor} ograničenog belog šuma (greška „razmazivanja“ lokalnih karakteristika difuzionog procesa) i greške usled nelinearnosti indukovanih SDJI.

Prva vrsta grešaka je obavezna u svim analognim realizacijama SDJ sa ograničenim belim šumom, dok se druga vrsta grešaka javlja samo u slučaju da su indukovane SDJI nelinearnog tipa.

c) Greška ocene matematičkog očekivanja diskretnim algoritmom

Ova greška hibridnog simulacionog algoritma detaljno je razmatrana u [27] za slučaj *Gauss*-ove raspodele realizacija i za opšti slučaj – primenom centralne granične teoreme i zakona velikih brojeva. Obim uzorka (broj realizacija) N određuje se iz relacije

$$P \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k - \mu \right| < \epsilon \right\} = 1 - \alpha, \quad (22)$$

gde je

μ – matematičko očekivanje slučajne veličine u ,

u_k – k -ta realizacija slučajne veličine u ,

α – verovatnoća da apsolutno odstupanje aritmetičke sredine N realizacija od matematičkog očekivanja bude ne manje od ϵ ,

ϵ – proizvoljno mali pozitivan broj.

Kada se raspodela uzorka (realizacija) razlikuje od *Gauss*-ove raspodele, potrebno je za određivanje obima uzorka pre primene simulacionog algoritma poznavati standardnu devijaciju σ slučajne veličine (u) čije se matematičko očekivanje ocenjuje. Me-

djutim, veličina σ nije unapred poznata, što otežava primenu metodike izložene u [27]. Stoga ćemo dati jednu ocenu standardne devijacije slučajne veličine

$$u_k \triangleq \psi_k(x(\bar{\tau}_k), t_0 - \bar{\tau}_k) e^{\int_0^{\bar{\tau}_k} (x^k(s_1), \bar{t}_0 - s_1) ds_1} + \int_0^{\bar{\tau}_k} e^{\int_0^{s_2} c_k(x^k(s_1), t_0 - s_1) ds_1} d_k(x^k(s_2), t_0 - s_2) ds_2 \quad (23)$$

kojom se zaokrugljuje navedena metodika.

Treba oceniti disperziju $Du \equiv Mu^2 - M^2u$.

Uvedimo skraćene oznake:

$$\bar{\psi} \triangleq \max_{x,t} |\psi(x,t)|; \bar{d} \triangleq \max_{x,t} |d(x,t)|, \quad (24)$$

$$\eta \triangleq \frac{u}{\bar{\psi} + \bar{d}(T - \theta_0)}$$

Zamenom (24) u (23) i elementarnim transformacijama dobijamo posle majoriranja

$$Mu^2 \leq [\bar{\psi} + \bar{d}(T - \theta_0)]^2,$$

$$M\eta^2 \leq 1. \quad (25)$$

Prema tome, standardna devijacija se ocenjuje nejednakošću:

$$\sigma \triangleq \sqrt{Du} \leq \bar{\psi} + \bar{d}(T - \theta_0). \quad (26)$$

Zamenjujući stvarnu vrednost standardne devijacije σ vrednošću njene majorante iz (26), možemo da koristimo sve navedene metode za određivanje N pre rešavanja problema na hibridnom sistemu.

3.3. ODREĐJIVANJE SKALA – FAKTORA

Izbor skala – faktora SDJ koje se rešavaju na analognom delu hibridnog sistema olakšan je time što se oblast promene zavisnih promenljivih (x) stohastičkih diferencijalnih jednačina poklapa sa oblašću G datog problema sa graničnim uslovima. Ipak, direktno uvođenje skala faktora u SDJ dovodi do neproporcionalne promene koeficijenta pri drugim izvodima u odgovarajućoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini, u odnosu na ostale koeficijente. Usled toga skala – faktori se moraju uvoditi prvo u parcijalnu diferencijalnu jednačinu. Skalirana stohastička diferencijalna jednačina se dobija automatski pomoću formalnog prelaza od date parcijalne jednačine ka odgovarajućoj stohastičkoj diferencijalnoj jednačini.

Maksimalni napon U_0 , koji određuje skalu analognog dela, i dužina T_p maksimalne radne periode određuju $n+1$ – dimenzionalni paralelepiped Π (radna oblast analogne mašine) u koji se mora smestiti zadata oblast $G \times I_s$ sistema (2.16). U tu svrhu G treba upisati u odgovarajući minimalni paralelepiped

$$G \subset \Pi \triangleq \{x: x_1 \in [-d_1, d_1], \dots, x_n \in [-d_n, d_n]\},$$

gde je

$$d_1 \triangleq \max_{x \in G} |x_1|, d_2 \triangleq \max_{x \in G} |x_2|, \dots, d_n \triangleq \max_{x \in G} |x_n|.$$

Pri tome koordinatni sistem sa koordinatama x treba izabrati tako da oblast G ispunjava približno jednako pozitivni i negativni deo paralelepipeda. Skala faktori nezavisno promenljivih veličina parcijalne diferencijalne jednačine (2.1) dobijaju se iz odnosa

$$M_{xi} \triangleq \frac{d_i}{U_0}, (i = 1, \dots, n), M_t \triangleq \frac{t_{\max}}{T_p}. \quad (27)$$

Pomoću (27) odredimo mašinske nezavisno promenljive veličine jednačinama:

$$x_i = M_{xi} \cdot x_{iM}, (i = 1, \dots, n), t = M_t \cdot t_M. \quad (28)$$

Polazeći od principa maksimuma za problem *Cauchy*-a sa graničnim uslovima i parabolničnim jednačinama (ili za problem *Dirichlet*-a sa eliptičnim jednačinama), [45], možemo tvrditi za slučaj kada u jednačini (2.1) odsustvuje slobodni član, da rešenje problema $u(x_0, t_0)$ uzima ekstremalnu vrednost ili u početnom trenutku ili na granici δG . Ako u oblasti $G \times I_t$ slobodni član ne menja znak, princip maksimuma se

može iskoristiti i u opštem slučaju kada $d(x, t) \neq 0$. Za slobodni član sa promenljivim znakom u $G \times I_t$, u svrhu ocenjivanja ekstremalne vrednosti rešenja može se koristiti nejednakost

$$|Mu| \leq M|u| \leq |\psi(x(\bar{\tau}), t_0 - \bar{\tau})| + \int_0^{\bar{\tau}} |d(x(s), t_0 - s)| ds, \quad (29)$$

Uvedimo oznake

$$\begin{aligned} \bar{u} &\triangleq \max_{x \in G, t \in [0, t_0]} |\psi(x(\bar{\tau}), t_0 - \bar{\tau})| + \int_0^{\bar{\tau}} |d(x(s), t_0 - s)| ds; \\ \bar{c} &\triangleq \max_{x \in G, t \in [0, t_0]} c(x, t); \quad a_i = \max_{x \in G, t \in [0, t_0]} |a_i(x, t)|; \\ \bar{b}_{ij} &\triangleq \max_{x \in G, t \in [0, t_0]} |b_{ij}(x, t)|. \end{aligned} \quad (30)$$

Iz (29) i (30) sledi

$$-\bar{u} \leq u \leq \bar{u}. \quad (31)$$

Nejednačinu (31) možemo iskoristiti za skaliranje zavisno promenljive veličine u . Na osnovu ograničenja:

$$\begin{aligned} 0 &\leq c(x, t) \leq \bar{c}; \quad |d(x, t)| \leq \bar{d}; \\ |\bar{a}_i(x, t)| &\leq \bar{a}_i, \quad (i = 1, \dots, n); \quad u(x, t) \leq \bar{u}; \\ |b_{ij}(x, t)| &\leq \bar{b}_{ij}, \quad (ij = 1, \dots, n); \end{aligned} \quad (32)$$

odredimo skala-faktore

$$\begin{aligned} M_0 &\triangleq \frac{\bar{c}}{U_0} = \frac{c(x, t)}{c_M(x_M, t_M)}; \\ M_{aj} &\triangleq \frac{\bar{a}_i}{U_0} = \frac{a_i(x, t)}{a_{Mi}(x, t)}, \quad (i = 1, \dots, n); \\ M_d &\triangleq \frac{\bar{d}_0}{U_0} = \frac{d(x, t)}{d_M(x_M, t_M)}; \end{aligned} \quad (33)$$

$$M_{bij}^2 \triangleq \frac{\bar{b}_{ij}}{U_0} = \frac{b_{ij}(x,t)}{b_{Mij}(x_M, t_M)}, \quad (i, j = 1, \dots, n);$$

$$M_u \triangleq \frac{\bar{u}}{U_0} = \frac{u(x,t)}{u_M(x_M, t_M)}.$$

Prepišimo jednačinu (2.1) uzimajući u obzir jednakosti (28) i (33)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_{M0}} u_M(x_{M0}, t_{M0}) &= \sum_{i=1}^n a_{Mi}(x_{M0}, t_{M0}) \frac{M_{ai} M_t}{M_{xi}} \frac{\partial}{\partial x_{M0i}} u_M(x_{M0}, t_{M0}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{Mij}(x_{M0}, t_{M0}) \frac{M_t M_{bij}^2}{M_{xi} M_{xj}} \frac{\partial^2}{\partial x_{Mi} \partial x_{Mj}} u_M(x_{M0}, t_{M0}) - \\ &- c_M(x_{M0}, t_{M0}) M_c M_t u_M(x_{M0}, t_{M0}) + d_M(x_{M0}, t_{M0}) \frac{M_d M_t}{M_u}. \end{aligned} \quad (34)$$

Jednačine (33) i (28) omogućuju da se izvrši prelaz od rešenja skaliranih jednačina $u_M(x_M, t_M)$ ka rešenju realnih jednačina $u(x,t)$.

Odredimo SDJ indukovanu operatorom L:

$$\begin{aligned} d x_{Mi}(t_M) &= \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{2}{S_j} \cdot \frac{M_j}{M_{xi} M_{xj}}} \cdot \bar{b}_{Mij}(x_M(t_M), t_M) dw_j(t_M) + \\ &+ \frac{M_{ai} M_t}{M_{xi}} \cdot a_{Mi}(x_M(t_M), t_M), \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (35)$$

gde je:

$S_j t$, ($j = 1, \dots, n$) – disperzija j -te komponente Wiener-ovog procesa $w_j(t)$.

Odgovarajuća aproksimacija (35) sa belim šumom $\xi(t)$, ograničenog opsega (f_{\min}, f_{\max}) ravnomernosti spektra gustine snage S_j komponenata ξ_j , prema Stratonoviču [43] glasi:

$$\begin{aligned} \frac{d x_{Mi}(t_M)}{dt_M} &= \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{2}{S_j} \cdot \frac{M_t}{M_{xi} M_{xj}}} \cdot \bar{b}_{Mij}(x_M(t_M), t_M) \cdot \xi_j(t_M) + \\ &+ \frac{M_{ai} M_t}{M_{xi}} \cdot a_{Mi}(x_M(t_M), t_M) - \sum_{j=1}^n \frac{2}{S_j} \cdot \frac{M_t}{M_{xi} M_{xj}} \cdot \bar{b}_{Mij} \frac{\partial}{\partial x_{Mj}} \bar{b}_{Mij}. \end{aligned} \quad (36)$$

Jednačine analognog modela SDJ mogu da se zapišu u obliku

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_{Mi}(t_M) &= \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{ij}}{R_i C_i} \cdot \bar{b}_{Mij} (x_M(t_M), t_M) \cdot \dot{x}_j(t_M) + \\ &+ \frac{\alpha_i}{R_i C_i} \cdot a_{Mi}(x_M(t_M), t_M) - \sum_{j=1}^n \frac{\beta_{ij}}{R_i C_i} \cdot \bar{b}_{Mij} \frac{\partial}{\partial x_{Mj}} \bar{b}_{Mij}, \end{aligned} \quad (37)$$

(i = 1, ..., n),

gde su:

- $\alpha_{ij}, \alpha_i, \beta_{ij}$ – koeficijenti pojačanja,
- $R_i C_i, (i = 1, \dots, n)$ – vremenske konstante integratora.

Poredjenjem (35) i (37) dobija se

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{ij}}{R_i C_i} &= \sqrt{\frac{2M_t}{S_j M_{xi} M_{xj}}}, \\ \frac{\alpha_i}{R_i C_i} &= \frac{M_{ai} M_t}{M_{xi}}, \quad \frac{\beta_{ij}}{R_i C_i} = \frac{2}{S_j} \cdot \frac{M_t}{M_{xi} M_{xj}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Hibridni simulacioni algoritam (1) i (2) je sada upotpunjen ocenama greške metoda (21), (22), (26), i formulama za određivanje koeficijenata analognog modela indukovane SDJI (38).

Detalji implementiranja hibridnog simulacionog algoritma na hibridnu računsku mašinu podrobno su razmatrani (za determinističke paraboličke sisteme) u [31] i [66].

3.4. SIMULACIJA JEDNOG NESTACIONARNOG SRP

Posmatrajmo dugački štap od homogenog feromagnetnog materijala sa kvadratnim poprečnim presekom oko kojega je omotan provodnik električne struje. Provodnik se pobudjuje strujnim generatorom tako što se intenzitet struje iz generatora linear- no povećava sve dok ne dostigne nivo zasićenja, nosle čega intenzitet ostaje konstan- tan.

Biće posmatran samo linearni deo krive magnećenja, radi jednostavnosti izlaganja. Uz ove pretpostavke, raspodela intenziteta magnetnog polja će, ako se vrtložne struje uzmu u obzir a pojava histerezisa zanemari, biti opisana rešenjem sledećeg problema sa graničnim uslovima

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \mu \gamma \cdot \frac{\partial H}{\partial t}; 0 \leq t \leq T; (x, y) \in G, \quad (39)$$

$$H \equiv H(x, y, t),$$

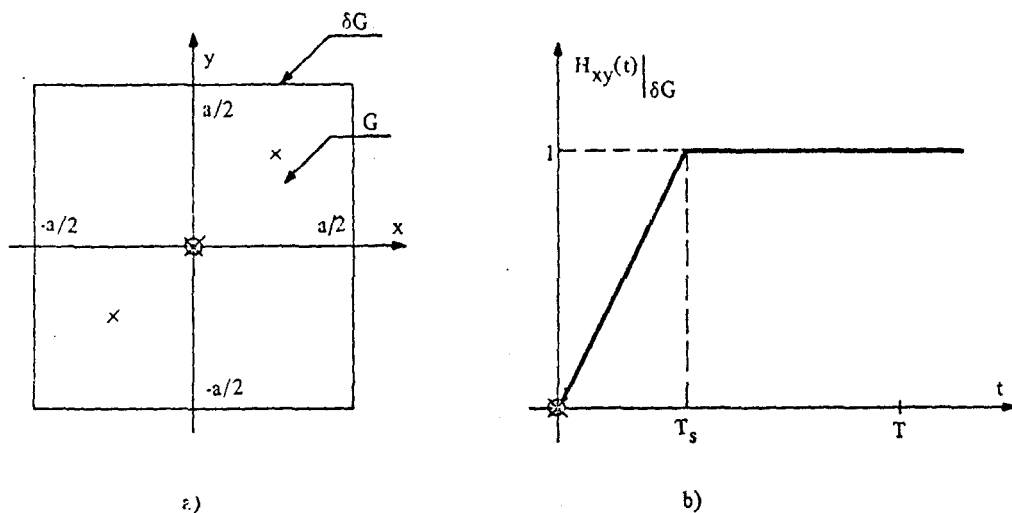
gde je

$$H(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in G,$$

$$H(x, y, t) = \begin{cases} t/T_s, & 0 < t \leq T_s \\ 1, & t > T_s \end{cases}; (x, y) \in \delta G.$$

Sa δG je označena granica kvadratne oblasti G . Vreme potrebno da se ustali jednosmeran strujni tok kroz provodnik označeno je sa T_s . Oblast G je određena izrazom

$$G = \{(x, y) : |x| < \frac{a}{2}, |y| < \frac{a}{2}\}, \text{ (vidi sl. 4).}$$



Slika 4.

· Iz postavke zadatka se vidi da za intenzitet magnetnog polja H važi

$$0 \leq H(x, y, t) \leq 1.$$

Označimo sa T vreme u toku kojega se želi posmatrati promena magnetnog polja. Fizičke veličine kojima je opisan sistem su date u sledećim jedinicama: $H[\text{A/cm}]$; $a, x, y[\text{cm}]$; $t, T, T_s[\text{sec}]$; $\mu[\Omega\text{sec/cm}]$; $\gamma[1/\Omega\text{cm}]$; $\mu \cdot \gamma[\text{sec/cm}^2]$. Pri simulaciji na hibridnom računskom sistemu usvojene su sledeće brojne vrednosti: $\mu \gamma = 0,628$; $a = 5$; $T_s = 0$, $T_s = 1,42$; $T = 10$.

Prema 3.1, opisani SRP se može ekvivalentno odrediti sledećim stohastičkim modelom

$$\begin{aligned} dx(t) &= \sqrt{\frac{2}{S_1 \mu \gamma}} \cdot dw_1(t); \quad x(0) = x_0, \\ dy(t) &= \sqrt{\frac{2}{S_2 \mu \gamma}} \cdot dw_2(t); \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$u(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N [\psi_{\tau_i} < t_0 - T_s + \frac{1}{T_s} (t_0 - \tau_i) \cdot \chi_{\tau_i} \geq t_0 - T_s],$$

gde je $(x_0, y_0) \in G$, a S_1 i S_2 spektralne gustine generatora beloga šuma, saglasno (35).

Da bi se ovaj model realizirao na hibridnom računaru potrebno je

- simulirati dva nezavisna SWL procesa $w_1(t)$ i $w_2(t)$;
- zadati prostornu i vremensku granicu δG i t_0 i odrediti prostorno–vremenske koordinate prvog izlaska *Wiener*-ove trajektorije $(x(t), y(t))$ na – prostornu granicu $x(\tau), y(\tau), \tau$ ili na – vremensku granicu $x(t_0), y(t_0), t_0$;
- izračunati srednju vrednost prema (40).

U skladu sa 3.1, stohastičke diferencijalne jednačine iz (40) se rešavaju na analognom, a aritmetička srednja vrednost na digitalnom delu hibridnog računara, pri čemu je potrebno da analogni deo preko A/D konvertora dostavlja podatke digitalnom delu računara.

Granična oblast δG se simulira pomoću četiri komparatora koji upoređuju svaku od koordinata vektorskog procesa *Wiener*-a $(x(t), y(t))$ sa veličinama $\frac{a}{2} i - \frac{a}{2}$. Istovremeno se određuje i trenutak τ prvog izbijanja trajektorije na prostornu granicu: tekuće vreme t je predstavljeno naponom na izlazu iz integratora koji na ulazu

ima konstantan napon. Rad hibridnog računara se može proslediti na blok-šemama prikazanim na sl. 5.

Blok za sledjenje i pamćenje signala T/S (track-and-store block) sledi napon na izlazu iz integratora dogod radi u režimu sledjenja (track). Kada trajektorija izađe na prostornu granicu na izlazu jednog od četiri „prostorna” komparatora pojavljuje se impuls. S obzirom da su izlazi svih komparatora vezani na logičko „ILI” kolo, taj impuls predstavlja tzv. signal prekida (interrupt) na izlazu iz „ILI” kola. Ovaj signal prevodi blok T/S za sledjenje i pamćenje signala iz režima sledjenja u režim pamćenja (store) s jedne strane — i zaustavlja digitalni deo hibridnog računara, s druge strane. Zapamćena veličina iz integratora ide preko A/D konvertora u digitalni deo računara kao veličina τ_1 . Istovremeno se napon na izlazu iz bloka za sledjenje i pamćenje poredi sa prethodno zadatim naponom (koji odgovara veličini t_0) na „vremenskom” komparatoru. Ukoliko bi trajektorija izašla na vremensku granicu (pre nego na prostornu), na izlazu iz komparatora bi se obrazovao signal prekida koji bi u odnosu na digitalni deo računara imao niži prioritet od signala prekida izazvanog izlaskom trajektorije na prostornu granicu. Izračunavanje graničnih uslova i usrednjavanje obavljaju se na digitalnom delu računara.

Pri simulaciji SDJI (40) na analognom delu hibridnog računara, potrebno je odrediti koeficijente razmere tako da se fizički model SRP uklopi u raspoloživi radni onseg napona $[-10V, +10V]$ analognog dela računara. U tu svrhu potrebno je pre svega izmeriti spektralne gustine S_1 i S_2 generatora belog šuma GŠ-1 i GŠ-2, respektivno. Merenjem [31] je dobijeno $S_1 = S_2 = 3,18 [V^2sec]$ za generatore koji su korišćeni u simulaciji, [42]. Fizičke dimenzije oblasti koja se simulira su: $\pm \frac{a}{2} = \pm 2,5$

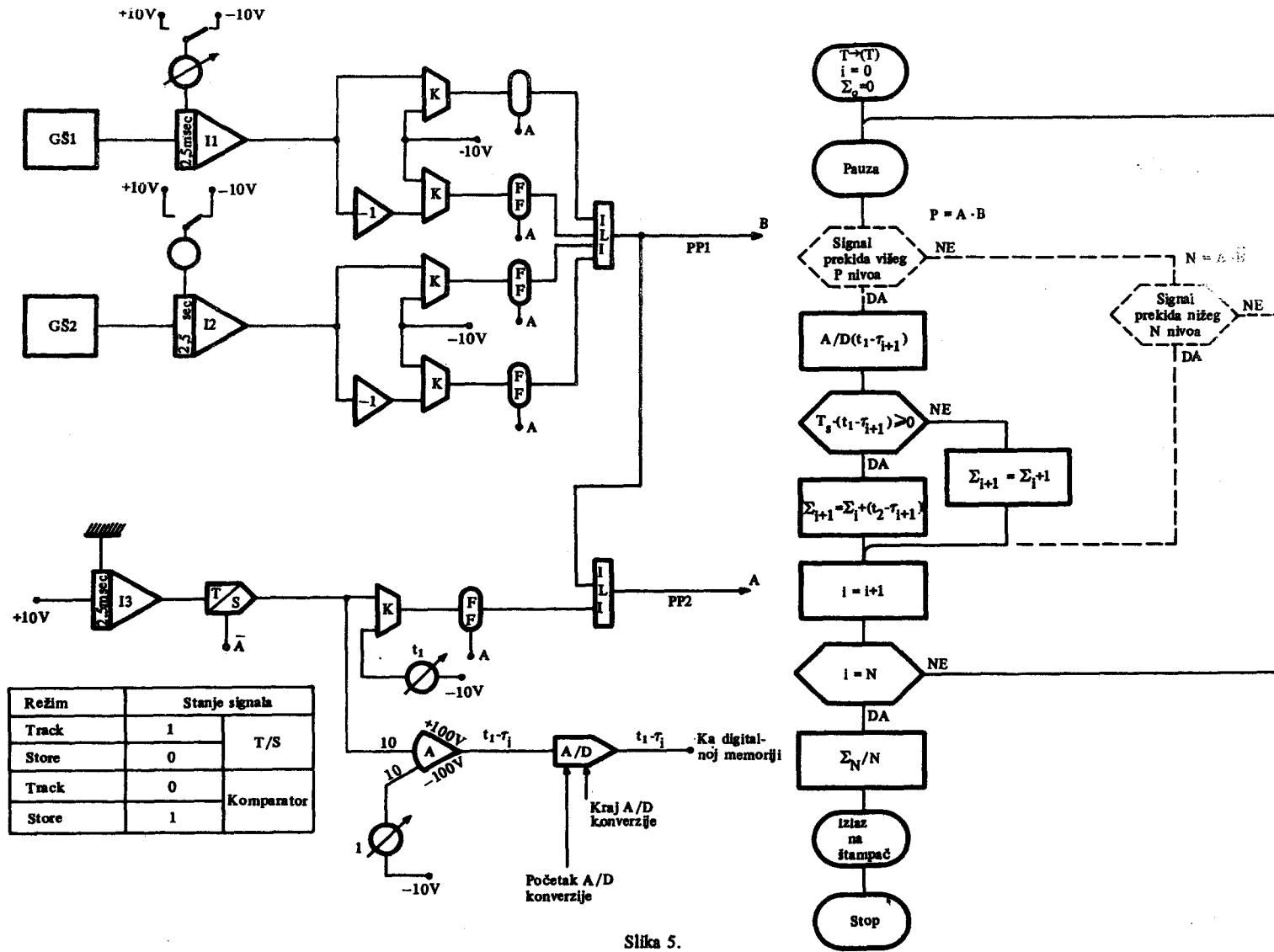
cm, a fizičko vreme koje je od interesa za proces magnećenja iznosi $T = 10$ sec. Maksimalno vreme trajanja simulacije je uslovljeno (u repetitivnom režimu rada analognog dela računara koji je za ovu vrstu simulacije podesan) periodom repeticije $T_p = 1$ msec. Skaliranje oblasti varijacije vrednosti nezavisno promenljivih u zadatku se izvodi na sledeći način. Skala-faktor simulacionog modela G_μ oblasti G je određen izrazom

$$k_x = k_y = k = \frac{a}{2 \cdot U_r} = \frac{5}{20} [cm/V] = 0,25 [cm/V], \quad (41)$$

gde je U_r — maksimalni radni napon na analognom delu hibridnog računara.

Skala-faktor vremena simulacije se određuje koeficijentom

$$\beta = \frac{T}{T_p} = \frac{10 [sec]}{1 [msec]} = 10^4. \quad (42)$$



Režim	Stanje signala	
Track	1	T/S
Store	0	
Track	0	Komparator
Store	1	

Slika 5.

Sada je pomoću skala-faktora k i β moguće odrediti koeficijente šeme analognog modela. Izrazimo promenljive fizičkog modela preko promenljivih analognog modela koristeći skala-faktore.

$$\frac{\beta}{k^2} \cdot \frac{1}{\mu\gamma} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_M^2} H(x_M, y_M, t_M) + \frac{\beta}{k^2} \cdot \frac{1}{\mu\gamma} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y_M^2} H(x_M, y_M, t_M) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_M} H(x_M, y_M, t_M); \quad H(x_M, y_M, 0) = 0;$$

$$H(x_M, y_M, t_M) \Big|_{G_M} = \begin{cases} \frac{T_s}{T_s/\beta}, & t_M \in (0; T_s/\beta) \\ 1, & t_M > T_s/\beta \end{cases}; \quad 0 \leq t_M \leq T_p \quad (43)$$

Koristeći se rezultatima odeljka 2.1, dobićemo SDJI odgovarajućeg stohastičkog modela

$$d x_M(t_M) = \sqrt{\frac{2}{S_1}} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\mu\gamma}} \cdot \frac{1}{k} dw_1(t_M); \quad (44)$$

$$d y_M(t_M) = \sqrt{\frac{2}{S_2}} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\mu\gamma}} \cdot \frac{1}{k} dw_2(t_M);$$

gde je $t_M \beta = t$. Iz sl.5 se vidi da je

$$\frac{d}{dt_M} x_M(t_M) = \frac{\alpha_1}{RC} \dot{w}_1(t_M), \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt_M} y_M(t_M) = \frac{\alpha_2}{RC} \dot{w}_2(t_M),$$

gde $\dot{w}_1(t_M)$ i $\dot{w}_2(t_M)$ predstavljaju dva nezavisna bela šuma koja generišu blokovi GŠ1 i GŠ2 respektivno, α_1 i α_2 vrednosti koeficijentnih potencijometara na ulazu u odgovarajuće integratore, a RC vremenska konstanta integratora.

Poredjenjem(44) i (45) dobija se

$$\frac{\alpha_1}{RC} = \sqrt{\frac{2}{S_1}} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\mu\gamma}} \cdot \frac{1}{k},$$

$$\frac{\alpha_2}{RC} = \sqrt{\frac{2}{S_2}} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\mu\gamma}} \cdot \frac{1}{k} \quad (46)$$

Uzimajući u obzir vrednosti $RC=2,5$ [msec], $S_1 = S_2 = 3,18$ [V^2 sec], $k = 0,25$ [cm/V], $\beta = 10^4$, $\mu\gamma = 0,628$ [sec/cm²], dobija se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 . \quad (47)$$

Zadatak je rešavan na hibridnom računskom sistemu koji se sastojao iz digitalnog računara SD3 910/920, brzog repetitivnog analognog računara (tranzistorizovana varijanta EMV-10) i A/D konvertora tipa ACPK 100-II/2, [31]. Rezultati su prikazani u tabeli 1, gde su upoređeni sa tačnim rezultatima u tri karakteristične tačke oblasti G, (vidi sl. 4a).

Iz tabele 1. se vidi da je greška rešenja $\frac{\max|\Delta H|}{\max H} \sim 5,5\%$. Interesantno je uporediti dobijenu grešku sa analitičkom ocenom greške o kojoj je bilo reči u odeljku 3.2. Poznato je da je greška računskih elemenata analognog dela računara manja od 1%, tako da je red veličine greške rešenja SDJI, s obzirom na neprekidnost približno 1%.

Sa verovatnoćom 95% se za grešku ocene polja usred ograničenog obima uzorka ($N = 10^4$) može reći da nije veća od $0,045 = 4,5\%$ kada se uzme u obzir činjenica da standardno odstupanje funkcije H ne može biti veće od 1.

Najzad, primenom postupka iz 3.2 se za relativnu grešku usled ograničenosti frekventnog opsega generatora belog šuma – dobija red veličine od 2%.

Zbir ovih ocena greške izračunavanja H, ($1\% + 4,5\% + 2\% = 7,5\%$), je za 2% veći od stvarne greške, (što je posledica majorizacije), iz čega se vidi da izložena metodika ocene greške daje prihvatljive rezultate.

U tabeli 1. su radi upoređenja navedeni neki rezultati simulacije istog eksplicitnog stohastičkog modela na digitalnom računaru dobijeni primenom postupka iz odeljka 2.3.

Tabela 1.

 $T_s = 0 \text{ sec}$

t_0 [sec]	0,142	0,71	1,42	2,13	3,55	9,94	$\Delta t = 0,142$ [sec] x = 0 y = 0
$m = t_0 / \Delta t$	1	5	10	15	25	70	
tačno rešenje	0,022	0,352	0,711	0,876	0,977	0,999	
hibridna simulacija	0,010	0,381	0,693	0,877	0,965	0,999	
digitalna simulacija	0,000	0,356	0,707				

t_0 [sec]	0,142	0,71	1,42	2,13	3,55	9,94	$\Delta t = 0,142$ [sec] x = -1,25 y = -1,25
$m = t_0 / \Delta t$	1	5	10	15	25	70	
tačno rešenje	0,101	0,568	0,821	0,924	0,986	0,999	
hibridna simulacija	0,146	0,609	0,873	0,933	0,996	0,999	
digitalna simulacija							

t_0 [sec]	0,142	0,71	1,42	2,13	3,55	9,94	$\Delta t = 0,142$ [sec] x = 1,25 y = 1,25
$m = t_0 / \Delta t$	1	5	10	15	25	70	
tačno rešenje	0,101	0,568	0,821	0,924	0,986	0,999	
hibridna simulacija	0,103	0,610	0,848	0,916	0,981	0,999	
digitalna simulacija	0,067	0,657	0,857				

 $T_s = 1,42 \text{ sec}$

t_0 [sec]	0,142	0,71	1,42	2,13	3,55	9,94	$\Delta t = 0,142$ [sec] x = 0 y = 0
$m = t_0 / \Delta t$	1	5	10	15	25	70	
tačno rešenje	0,002	0,087	0,380	0,704	0,946	0,999	
hibridna simulacija	0,005	0,103	0,391	0,718	0,955	0,998	
digitalna simulacija							

t_0 [sec]	0,142	0,71	1,42	2,13	3,55	9,94	$\Delta t = 0,142$ [sec] x = -1,25 y = -1,25
$m = t_0 / \Delta t$	1	5	10	15	25	70	
tačno rešenje	0,010	0,176	0,545	0,814	0,966	0,999	
hibridna simulacija	0,067	0,202	0,574	0,825	0,974	1,000	
digitalna simulacija							

t_0 [sec]	0,142	0,71	1,42	2,13	3,55	9,94	$\Delta t = 0,142$ [sec] x = 1,25 y = 1,25
$m = t_0 / \Delta t$	1	5	10	15	25	70	
tačno rešenje	0,010	0,176	0,545	0,814	0,966	0,999	
hibridna simulacija	0,046	0,193	0,526	0,825	0,974	1,000	
digitalna simulacija							

IV KARAKTERISTIČNI (IMPLICITNI) STOHAŠTIČKI MODEL

4.1. OPŠTE NAPOMENE

Analogija stohastičkog modela iz glava II i III sa sistemom karakteristika za linearne parcijalne jednačine prvoga reda je nepotnuna zbog prisustva prostornog gradijenta stanja u skalarnoj jednačini stohastičkog modela. U ovoj glavi stohastički model se modifikuje tako da predstavlja sistem generalisanih karakteristika raspodeljenog sistema duž difuzionih trajektorija. Takav model je nazvan karakterističnim stohastičkim modelom. Motiva za konstruisanje ovakvog modela raspodeljenog sistema ima nekoliko.

Osnovu velikog broja prirodnih i tehničkih prostorno raspodeljenih procesa na koje se nailazi u hidro i termodinamici i procesnoj industriji predstavljaju masovni difuzioni i filtracioni procesi koji se opisuju markovskim slučajnim funkcijama. Pri tome je za stanje posmatranog sistema celishodno usvojiti srednje vrednosti nekih individualnih slučajnih kretanja – što vodi ka opisu sistema pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Postojeći numerički modeli odgovarajućih raspodeljenih sistema se realizuju postupcima numeričkog rešavanja tih parcijalnih jednačina. Modeli raspodeljenih sistema ovoga tipa [56–58] ne vode računa o činjenici da se izračunata stanja mogu proveravati samo u konačnom broju prostornih tačaka u kojima je vršeno merenje.

Pošto se i upravljanje sistemom praktično ostvaruje samo u konačnom broju prostornih tačaka – evidentna je potreba za konstrukcijom egzaktnog matematičkog modela raspodeljenog sistema u konačnom broju proizvoljno prostorno raspodeljenih tačaka, [40].

Pored toga, simulacija budućih stanja sistema prednostavlja poznavanje i potpunu određenost polaznih podataka. Priroda razmatranih pojava ne dopušta u praksi da se ovaj zahtev u potpunosti zadovolji. Iz toga razloga se prognoze dobijene simulacijom moraju koristiti sa oprezom. Nepotpuna određenost parametara, graničnih i početnih uslova može da se uzme u obzir tako što će se ove veličine predstaviti u obliku slučajnih funkcija.

Nažalost, odgovarajući modeli u nizu slučajeva ne određuju jednoznačno stanje sistema. U ovoj glavi se rešava problem konstrukcije jednoznačnog modela stanja sistema pomoću stohastičkih diferencijalnih jednačina $It\delta$ -a koje povezuju pojedinačna kretanja sa prostorno raspodeljenim stanjem celog sistema.

U sledećoj glavi će biti demonstrirane mogućnosti koje modeli ovog tipa pružaju pri identifikaciji nepoznatih parametara sistema u prisustvu šuma, [63]. U narednom odeljku dokazuje se ekvivalentnost karakterističnog stohastičkog modela i parcijalne diferencijalne jednačine sa determinističkim dovoljno glatkim koeficijentima.

Dokaz se uopštava na jednačinu sa glatkim slučajnim koeficijentima. Odeljak se završava konstrukcijom jednoznačnog karakterističnog stohastičkog modela sistema sa raspodeljenim belim šumom na ulazu čija su stanja određena odgovarajućom parcijalnom diferencijalnom jednačinom.

U trećem odeljku se pokazuje da se u slučaju stacionarnosti operatora L karakteristični stohastički model može predstaviti u obliku pogodnom za ekonomičnije izračunavanje vremenske promene stanja sistema sredstvima računске tehnike.

4.2. KARAKTERISTIČNI STOHAŠTIČKI MODEL

Neka je $u(x,t)$ skalarno stanje sistema koje se opisuje jednačinom

$$Lu(x,t) - c(x,t)u(x,t) + d(x,t) = 0 \quad (1)$$

u oblasti $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T)$, gde je

$$L \triangleq \frac{\partial}{\partial t} + (a, \frac{\partial}{\partial x}) + (B \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x});$$

B – pozitivno definitna matrica na G .

Neka su zadati sledeći granični i krajnji uslovi:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi(x,t); \quad x \in \delta G, \quad t \in [0, T); \\ u(x,T) &= f(x); \quad x \in G \end{aligned} \quad (2)$$

Da bi jednačina (1) imala jedinstveno dovoljno glatko rešenje dovoljno je, prema [45], da bude zadovoljen uslov

(A) koeficijenti operatora L , $c(x,t) > 0$, $d(x,t)$ su ravnomerno neprekidni po *Lipschitz-u*.

Poznato je, [38], da se matrica B , koja je neprekidna po *Lipschitz-u*, može faktorizo-

vati $B = \overline{B}^T \overline{B}$, tako da je matrica faktor takodje neprekidna po *Lipschitz*-u. Posmatrajmo još sledeći dopunski uslov

(B) elementi matrice $\overline{B}(x,t)$, vektora $a(x,t)$ i funkcija $c(x,t)$, $d(x,t)$ ne rastu brže od linearnih funkcija prostornih koordinata.

Pokazaćemo da se stanje $u(x,t)$ sistema (1) pri ispunjenju uslova (A) i (B) može ekvivalentno odrediti sistemom karakterističnih stohastičkih diferencijalnih jednačina. Prvo ćemo dokazati da stanje $u(x,t)$ koje zadovoljava jednačinu (1) zadovoljava takodje i sistem karakterističnih diferencijalnih jednačina. Posmatrajmo stohastički diferencijal $I_t \hat{\sigma}$ -a n -dimenzionog difuzionog procesa

$$dx_t = a(x_t, t) dt + \overline{B}(x_t, t) dW_t \quad (3)$$

gde je $M[dW_t]^2 = 2dt$.

Kada su zadovoljeni uslovi (A) i (B), sistem stohastičkih diferencijalnih jednačina (3) ima skoro sigurno jedinstveno neprekidno rešenje x_t , [33]. Prema pravilu $I_t \hat{\sigma}$ -a o diferenciranju složenih funkcija $u(x,t) \in \mathcal{L}_1^2$ (gde \mathcal{L}_1^2 označava klasu dvaput neprekidno diferencijabilnih funkcija po prostornim koordinatama i jednom po vremenskoj koordinati), imaćemo

$$du(x_t, t) = Lu(x_t, t) dt + \overline{B}(x_t, t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(x_t, t) dW_t \quad (4)$$

Iz jednačine (1) sledi da duž karakterističnih trajektorija x_t u oblasti G važi sledeća relacija

$$Lu(x_t, t) - c(x_t, t) \cdot u(x_t, t) + d(x_t, t) = 0 \quad (5)$$

Upoređenjem (4) i (5) dobijamo stohastičku jednačinu

$$du(x_t, t) = [c(x_t, t) \cdot u(x_t, t) - d(x_t, t)] dt + \overline{B}(x_t, t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(x_t, t) \cdot dW_t \quad (6)$$

Funkcija $u(x_t, t)$ koja zadovoljava jednačinu (6) mora da zadovoljava i jednačinu

$$M_{x_t} [du(x_t, t) - c(x_t, t) \cdot u(x_t, t) dt + d(x_t, t) \cdot dt + \overline{B}(x_t, t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(x_t, t) \cdot dW_t] = 0 \quad (7)$$

gde M_{x_t} — označava uslovno matematičko očekivanje pri uslovu da karakteristična trajektorija polazi iz tačke x_t u trenutku t .

Pošto važi:

$$\begin{aligned} M_{x_t} [du(x_t, t) - c(x_t, t) \cdot u(x_t, t) dt + d(x_t, t) dt + \\ + \bar{B}(x_t, t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(x_t, t) dW_t] = M_{x_t} [du(x_t, t)] - \\ - c(x_t, t) \cdot u(x_t, t) dt + d(x_t, t) dt, \end{aligned}$$

funkcija $u(x_t, t)$ mora da zadovolji jednačinu

$$M_{x_t} [du(x_t, t)] = c(x_t, t) \cdot u(x_t, t) dt + d(x_t, t) dt. \quad (8)$$

Jednačina (8) važi samo u oblasti G . Prema tome, ima smisla tražiti rešenje samo na onom delu trajektorije x_t koja u potpunosti leži u oblasti G . Uvedimo oznake

$$\tau \triangleq \inf \{t: x_t \notin G, x_{t=0} = x_0 \in G\};$$

$$\tau(t) \triangleq \min(t, \tau).$$

Označimo sa $H(t) \equiv H_T^t(x(\cdot)|x_t, t)$ funkcional koji određuje rešenje (u negativnom smeru t -ose) jednačine (8) na intervalu $(t + \tau(T-t), t]$, ($T > t$), duž trajektorija $x_s, s \in (t + \tau(T-t), t]$, koje se sve završavaju u tački x_t . Rešenje jednačine (8) se može dakle predstaviti u obliku

$$u(x_t, t) = H(t) \equiv H_T^t(x(\cdot)|x_t, t). \quad (9)$$

Pokazaćemo da je (9) jedinstveno rešenje jednačine (8) i da se $H(t)$ može odrediti integrisanjem u negativnom smeru t - ose diferencijalne jednačine

$$dH(t) = c(x_t, t) \cdot H(t) dt + d(x_t, t) dt \quad (10)$$

na intervalu $t \in (t + \tau(T-t), t]$.

Da jednačina (8) ima jedinstveno rešenje dokazaćemo tako što ćemo pretpostaviti da postoje dve različite funkcije $u(x, t)$ i $v(x, t)$ koje zadovoljavaju jednačinu. Sledi

$$M_{x_t} [dz(x_t, t)] = c(x_t, t) \cdot z(x_t, t) dt,$$

gde je $z(x, t) \triangleq u(x, t) - v(x, t)$.

Ova jednačina se može zapisati u integralnom obliku

$$M_{x_t} [z(x_T, T)] - z(x_t, t) = \int_t^T c(x_s, s) \cdot z(x_s, s) ds.$$

Imajući u vidu da funkcije $u(x,t)$ i $v(x,t)$ na granici T vremenskog odsečka $[0,T]$ zadovoljavaju granični uslov (2), gornja relacija dobija sledeći oblik:

$$z(x_t, t) = - \int_t^T c(x_s, s) \cdot z(x_s, s) ds.$$

Rešenje ove homogene linearne jednačine mora biti $z(x_s, s) \equiv 0, s \in [t, T]$. Time je dokazana jedinstvenost rešenja jednačine (8). Označimo to rešenje sa $H(t)$. Treba da pokažemo da sa verovatnoćom 1 važi

$$H(t) = H_\infty(t) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(t),$$

gde $H_n(t)$ predstavlja rešenje diferencijalne jednačine

$$dH_n(t) = c(y_t^n, t) H_n(t) dt + d(y_t^n, t) dt \tag{b}$$

Stohastički proces y_t^n u jednačini (b) može biti ma koji neprekidni proces koji konvergira ka x_t kada $n \rightarrow \infty$. Tako se, na primer, kao proces y_t^n može usvojiti rešenje jednačine

$$\frac{d}{dt} y_t^n = \epsilon_n \cdot F^{(0)}(y_t^n, t, \omega) + \epsilon_n^2 \cdot F^{(1)}(y_t^n, t, \omega), \tag{b^*}$$

gde je ω -elementarni slučajni ishod, a n -dimenzione funkcije $F^{(i)}(x,t,\omega), (i = 1,2)$, zadovoljavaju uslove

$$a(x, t_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0-T}^s M \left[\frac{\partial F^{(0)}}{\partial x} (x,s,\omega) \cdot F^{(0)T} (x,s,\omega) \right] ds dt + \\ + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} M [l^{(1)}(x,t,\omega)] dt,$$

$$\bar{B}^T(x, t_0) \cdot B(x, t_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} M [F^{(0)}(x,s,\omega) F^{(0)T}(x,t,\omega)] ds dt.$$

Prema [3], rešenje jednačine (b*) će pri $\epsilon_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$, konvergirati ka difuzionom procesu x_t .

Pošto niz y_t^n konvergira, sa verovatnoćom 1 važi nejednakost $|y_t^{n+1} - y_t^n| < \epsilon(n)$, odnosno važi $y_t^{n+1} = y_t^n + \tilde{\theta} \cdot \epsilon(n)$, gde je $\tilde{\theta} \in [-1,1]$. Usled neprekidnosti $c(x,t)$ i

$d(x, t)$ po x , važe sledeće relacije

$$c(y_s^{n+1}, s) = c(y_s^n, s) + \epsilon_1(n); \quad d(y_s^{n+1}, s) = d(y_s^n, s) + \epsilon_2(n),$$

gde $\epsilon(n) > 0$, $\epsilon_i(n)$, ($i = 1, 2, 3$), predstavljaju proizvoljno male veličine za dovoljno velike vrednosti n . Otuda sledi

$$H_{n+1}(t) - H_n(t) = - \int_t^T c(y_s^n, s) [H_{n+1}(s) - H_n(s)] ds + H_{n+1}(T) - H_n(T) + \epsilon_3(n).$$

Ova jednačina je homogena po $[H_{n+1}(t) - H_n(t)]$ s tačnošću do $\epsilon_3(n)$. Prema tome, njeno rešenje je jednako nuli s tim istim redom tačnosti. Otuda sledi da niz $H_n(t)$, $n \rightarrow \infty$, konvergira sa verovatnoćom 1.

Treba još dokazati da važi $H_\infty(t) = H(t)$. Primenom uslovnog matematičkog očekivanja $M_{y_t^n}$ na jednačinu (b), dobijamo

$$M_{y_t^n} [dH_n(t)] = c(y_t^n, t) \cdot H_n(t) dt + d(y_t^n, t) dt.$$

Prema teoremi *Fatou-Lebesgue-a*, iz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} dH_n(t) = dH_\infty(t), \text{ sledi}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{y_t^n} [dH_n(t)] = M_{y_t^\infty} [dH_\infty(t)]. \text{ Važi dakle}$$

$$M_{y_t^\infty} [dH_\infty(t)] = c(y_t^\infty, t) \cdot H_\infty(t) dt + d(y_t^\infty, t) dt.$$

Pošto je $y_t^\infty = x_t$, važi

$$M_{x_t} [dH_\infty(t)] = c(x_t, t) \cdot H_\infty(t) dt + d(x_t, t) dt.$$

Prema tome, rešenje $H_\infty(t)$ predstavlja sa verovatnoćom 1 rešenje jednačine (8). Pošto je rešenje jednačine (8) jedinstveno, mora da važi $H_\infty(t) = H(t)$. Dokazali smo, dakle, da se integrisanjem jednačine (10) dobija rešenje jednačine (8).

Pošto pri uslovima (A) i (B) jednačina (10) ima jedinstveno neprekidno rešenje, dokazali smo da stanje $u(x, t)$ koje zadovoljava jednačinu (1) zadovoljava takodje i sistem karakterističnih stohastičkih diferencijalnih jednačina (3), (10). Kao početni uslov za (10) koristi se (2)

$$H(t + \hat{\tau}(T-t)) = \psi(x_{\hat{\tau}(T-t)+t}, t + \hat{\tau}(T-t)), \quad (11)$$

gde je $\psi(x,t)$ određeno relacijama

$$\psi(x,t) = \phi(x,t), \text{ za } x \in \delta G, t \in (0,T),$$

$$\psi(x,t) = f(x), \text{ za } t = T, x \in G.$$

Treba još dokazati, da stanje $u(x,t)$ određeno jednačinama (3), (9), (10) pri uslovu (11) zadovoljava, kada važe (A) i (B), jednačinu (1) pri uslovu (2).

Primenom matematičkog očekivanja M_{x_t} na levu i desnu stranu relacije (9), dobijamo

$$M_{x_t}[u(x_t,t)] = u(x_t,t) = M_{x_t}[H_T^t(x(\cdot)|x_t,t)]. \quad (12)$$

Poslednji izraz u (12) predstavlja generalisano rešenje jednačine (1), koje se pri zadovoljenju uslova (A), (B) i (11) poklapa sa klasičnim rešenjem jednačine (1) pri konstantnom uslovu (2), [48].

Tako smo najzad dokazali ekvivalentnost matematičkih modela: (1) s jedne strane i (3), (10) s druge, pri zadovoljenju uslova (A) i (B) u pogledu glatkosti koeficijenata. Funkcije: $a(x,t)$, $B(x,t)$, $c(x,t)$, $d(x,t)$ u modelu (3), (10), koje zadovoljavaju uslove (A) i (B) se mogu shvatiti kao realizacije slučajnih funkcija: $a(x,t,v)$, $\bar{B}(x,t,v)$, $c(x,t,v)$ i $d(x,t,v)$, tj. kao realizacije slučajnog operatora L_v i koeficijenata $c(x,t,v)$, $d(x,t,v)$, gde je v slučajni parametar. U tom slučaju se sistem opisan jednačinom

$$L_v u(x,t,v) - c(x,t,v) \cdot u(x,t,v) + d(x,t,v) = 0 \quad (13)$$

u oblasti $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ u kojoj realizacije slučajnih koeficijenata zadovoljavaju uslove (A) i (B), može ekvivalentno opisati karakterističnim sistemom stohastičkih diferencijalnih jednačina

$$dx_t = a(x_t, t, v)dt + \bar{B}(x_t, t, v) \cdot dW_t; \quad (14)$$

$$du(x_t, t, v) = c(x_t, t, v) \cdot u(x_t, t, v)dt - d(x_t, t, v)dt \quad (15)$$

Sistem jednačina (14), (15) ima smisla i u slučaju kada koeficijent $d(x,t,v)$ predstavlja raspodeljeni beli šum

$$d(x,t,v)dt = g(x_t, t, v) \cdot dV_t,$$

(gde je dV_t - priraštaj standardnog skalarnog procesa Wiener-a sa disperzijom

$M[dV_t]^2 = 1 \cdot dt$), iako u tom slučaju koeficijent $d(x,t,v)$ narušava uslov (A) kojim je bila garantovana egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (13). Naime, ako je $g(x,t,v)$ ravnomerno neprekidna po *Lipschitz*-u na $G \times [0, T]$ i ako ne raste brže od neke linearne funkcije prostornih koordinata, sa verovatnoćom 1 postoji jedinstveno neprekidno rešenje stohastičke diferencijalne jednačine (15). U tom slučaju, stohastički model (14), (15) jednoznačno opisuje stanje sistema (sa raspodeljenim belim šumovima na ulazu) koje nije jednoznačno određeno jednačinom (13). Tada jednačine (14) i (15) dobijaju sledeći oblik

$$dx_t = a(x_t, t, v)dt + \bar{B}(x_t, t, v)dW_t; \quad (16)$$

$$du(x_t, t, v) = c(x_t, t, v) \cdot u(x_t, t, v)dt - g(x_t, t, v) \cdot dV_t. \quad (17)$$

Ove jednačine određuju stanje sistema na intervalu $(t + \hat{\tau}(T-t), t]$, pri uslovu

$$u(x_{t+\hat{\tau}(T-t)}, t + \hat{\tau}(T-t)) = \psi(x_{t+\hat{\tau}(T-t)}, t + \hat{\tau}(T-t)).$$

Slučajne varijacije graničnih uslova koje su ovde predstavljene mogu da nastupe usled delovanja spoljašnje sredine na sistem ili usled nepouzdanosti eksperimentalnih podataka na osnovu kojih su ti uslovi određeni.

4.3. KARAKTERISTIČNI STOHAŠTIČKI MODEL U SLUČAJU STACIONARNOSTI OPERATORA L

U opštem slučaju stanje sistema $u(x,t)$ u svakoj tački $(x,t) \in G \times [0, T]$ se, prema (2.12), izračunava pomoću posebne familije trajektorija $x(\cdot)$ na intervalu $(t, T]$ koje sve polaze iz tačke x . Ako je operator vremenski invarijantan, sva stanja sistema $u(x,t)$, $t \in (0, T]$ se mogu predstaviti pomoću jedinstvene familije trajektorija $x(\cdot)$ na intervalu $(0, T]$ koje polaze iz tačke x . Ovo svojstvo omogućuje ekonomičniju realizaciju odgovarajućih karakterističnih stohastičkih modela sredstvima računске tehnike, [59], [63]. Posmatrajmo stanje $u(x,t)$ sistema koje bi se formalno moglo opisati jednačinom

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t,v) = \left[\left(a, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right) - c \right] u(x,t,v) + d(x,t,v) \quad (\alpha)$$

$(x,t) \in G \times I$, v - slučajni parametar, $I \triangleq (0, T]$, $\bar{I} \triangleq [0, T]$, sa odgovarajućim konturnim uslovima

$$u(x,t,v) = \psi(x,t,v) \triangleq \begin{cases} f(x), & (t=0, x \in \bar{G}), \\ \phi(x,t), & (t \in I, x \in \delta G), \end{cases} \quad (\beta)$$

Funkcije: $c(x,t)$, $\psi(x,t)$ zadate su na $\bar{G} \times \bar{I}$, a funkcija $B(x)$, odnosno $a(x)$ je zadata na G i $d(x,t,v)$ je raspodeljeni slučajni proces (slučajno polje), čije su statističke karakteristike unapred zadate relacijom

$$d(x,t,v)dt \equiv g(x) \cdot dV_t + q(x,t) dt.$$

Funkcije: $g(x)$, $q(x,t)$ su zadate na $G \times I$, a dV_t predstavlja priraštaj skalarnog Wiener-ovog procesa za koje je $M[dV_t] = 0$; $M[dV_t]^2 = 1 \cdot dt$.

Neka je: $\theta \triangleq T-t$; $u_1(x,\theta,v) \triangleq u(x,T-\theta,v)$; $c_1(x,\theta) \triangleq c(x,T-\theta)$,

$$\psi_1(x,\theta) \triangleq \psi(x,T-\theta), d_1(x,\theta,v) \triangleq d(x,T-\theta,v).$$

Diferenciranjem funkcije $u(x,T-\theta, v) = u(x,t,v)$ po t , dobijamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial u_1}{\partial \theta}.$$

Zamenom uvedenih veličina u (α) i (β) dobićemo

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta} + (a, \frac{\partial}{\partial x}) + (B, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) - c_1 \right] u_1(x,\theta,v) + d_1(x,\theta,v) = 0, \quad (1)$$

$$(x,\theta) \in G \times [0,t);$$

$$u_1(x,\theta,v) = \psi_1(x,\theta) \equiv \begin{cases} f(x), (\theta = T, x \in \bar{G}), \\ \phi(x,T-\theta), (\theta \in [0,T), x \in \delta G). \end{cases} \quad (2)$$

Prema odeljku 2., sistem karakterističnih stohastičkih diferencijalnih jednačina ekvivalentan jednačini (1) ima oblik

$$dx_\theta = a(x_\theta) d\theta + \bar{B}(x_\theta) \cdot dW_\theta, \theta \in (\theta_0, \hat{\tau}(T-\theta_0) + \theta_0), \theta \in (0, T), \quad (3)$$

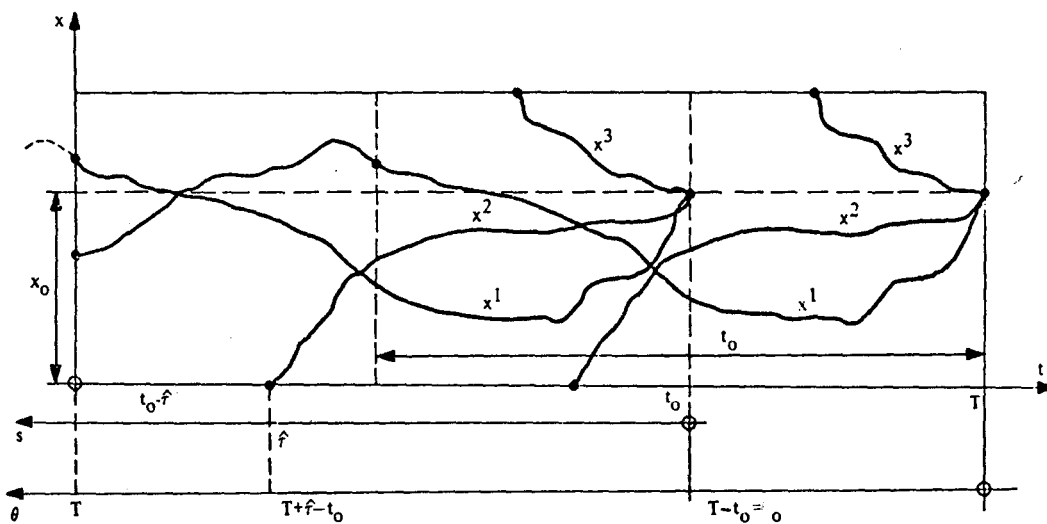
$$du_1(x_\theta, \theta, v) = c_1(x_\theta, \theta) \cdot u_1(x_\theta, \theta, v) \cdot d\theta - d_1(x_\theta, \theta, v) \cdot d\theta, \quad (4)$$

$$\theta \in (\hat{\tau}(T-\theta_0) + \theta_0, \theta_0],$$

gde je $B(x) \equiv \bar{B}^T(x) \cdot \bar{B}(x)$, $M[dW_\theta] = 0$, $M[dW_\theta]^2 = 2d\theta$.

Vratimo se, u jednačini (4), na prvobitne oznake

$$du(x_\theta, T-\theta, v) = c(x_\theta, T-\theta) \cdot u(x_\theta, T-\theta, v) d\theta - d(x_\theta, T-\theta, v) d\theta, \quad (5)$$



Slika 6.

$$\theta \in [T-t_0 + \hat{t}(t_0), T-t_0], \text{ gde je } t_0 = T-\theta_0.$$

Pošto koeficijenti u jednačini (3) ne zavise eksplicitno od vremena, funkcija prelaza procesa x_t je homogena u vremenu [33], što znači da rešenje jednačine (3) ne zavisi od izbora početka računanja vremena. Ova činjenica je ilustrovana na Sl.6 na kojoj su usvojene sledeće oznake: $t_0 \in [0, T]$; $s \in [0, t_0) \subset [0, T]$,

$$s \equiv \theta - (T-t_0) = t_0 - t, \theta \in [T-t_0, T]; \tau \triangleq \inf \{ s: x_s \notin G, x_0 \in G \};$$

$$\hat{t} = \min(t_0, \tau).$$

Rešenje jednačine (3) na intervalu $\theta \in [T-t_0, T-t_0 + \hat{t})$, pri $x_\theta = x_0$ u tački $\theta = T-t_0$, sa verovatnoćom 1 se poklapa sa rešenjem te iste jednačine na intervalu $\theta \in [0, \hat{t})$ pri uslovu $x_\theta = x_0$ za $\theta = 0$. U skladu sa relacijama (2.10–11), generalizovano rešenje jednačine (3) se određuje integriranjem jednačine (5) u negativnom smeru na skupu karakterističnih trajektorija

$$\{x_\theta: \theta \in (T-t_0, T + \hat{t} - t_0)\}, \text{ pri uslovu}$$

$$u(x_{T-t_0+\hat{t}}; t_0-\hat{t}, v) = \psi(x_{T-t_0+\hat{t}}, t_0-\hat{t}) = \begin{cases} f(x_T), x_T \in G, \tau > t_0 \\ \phi(x_{T-t_0+\tau}, t_0-\tau); \tau < t_0. \end{cases} \quad (6)$$

Pošto je funkcija prelaza procesa x_t homogena u vremenu, na intervalu $\theta \in (T-t_0, T-t_0 + \hat{\tau})$ proces x_θ sa početnim uslovom $x_{T-t_0} = x_0$ se može u jednačini (5) zameniti procesom $x_{\theta-(t-t_0)}$ sa početnim uslovom $x_{\theta-(T-t_0)} = x_0$ u tački $\theta = T-t_0$. Ako se zatim $\theta-(t-t_0)$ zameni sa θ , dobiće se jednačina

$$du(x_\theta, t_0 - \theta, v) = c(x_\theta, t_0 - \theta) \cdot u(x_\theta, t_0 - \theta, v) d\theta - d(x_\theta, t_0 - \theta, v) d\theta, \quad \theta \in (0, \hat{\tau}). \quad (7)$$

Integriranjem ove jednačine u negativnom smeru θ na intervalu $\theta \in (\hat{\tau}, 0)$ sa početnim uslovom

$$u(x_{\hat{\tau}}, t_0 - \hat{\tau}, v) = \psi(x_{\hat{\tau}}, t_0 - \hat{\tau}) \quad (8)$$

određuje se stanje sistema u tački (x_0, t_0) .

Možemo dakle zaključiti da je stanje sistema $(\alpha), (\beta)$ sa stacionarnim operatorom L određeno integralom od $\theta = \hat{\tau} (t_0)$ do $\theta = 0$ jednačine (7), uz uslov (8), duž jedne jedinstvene familije trajektorija određene jednačinom (3) na celom vremenskom intervalu $\theta \in [0, T]$ na kojem je stanje sistema od interesa. Uočimo da se rešenje jednačine

$$du(x_\theta, t_0 - \theta, v) = c(x_\theta, t_0 - \theta) \cdot u(x_\theta, t_0 - \theta, v) d\theta - d(x_\theta, t_0 - \theta, v) d\theta \quad (9)$$

može predstaviti u obliku

$$u(x_0, t_0, v) = H_{t_0}^0(x(\cdot) | x_0, t_0), \quad (10)$$

u saglasnosti sa definicijom funkcionala $H(t_0)$ iz prethodnog odeljka. Rešenjem odgovarajuće diferencijalne jednačine (5) dobijamo

$$u(x_0, t_0, v) = H_T^{T-t_0}(x(\cdot) | x_0, t_0). \quad (11)$$

Iz (10) i (11) dobijamo

$$H_{t_0}^0(x(\cdot) | x_0, t_0) = H_T^{T-t_0}(x(\cdot) | x_0, t_0). \quad (12)$$

Rešenje (12) predstavlja posledicu homogenosti u vremenu funkcije prelaza x_t .

Da ponovimo u zaključku osnovne rezultate ovog poglavlja. Konstruisan je karakteristični stohastički model koji na proizvoljnom skupu prostorno izabраниh tačaka egzaktно opisuje stanje linearnih sistema sa raspodeljenim parametrima eliptičnog i paraboličnog tipa u toku vremena.

Karakterističnim stohastičkim modelom se mogu uzeti u obzir nepotpuna određjenost parametara, graničnih i početnih uslova, a da se ne ugrozi jednoznačna određjenost stanja modela. Ovo je posebno interesantno u slučaju raspodeljenog belog šuma na ulazu u sistem, jer rešenje odgovarajuće parcijalne diferencijalne jednačine u tom slučaju nije određeno jednoznačno.

Priroda izloženih dokaza i konstrukcija karakterističnih stohastičkih modela ukazuje na mogućnost njihovog uopštenja na neke klase kvazilinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

5. IDENTIFIKACIJA PARAMETARA KARAKTERISTIČNOG STOHAŠTIČKOG MODELA SISTEMA U PRISUSTVU ŠUMA

5.1. OPŠTE NAPOMENE

U ovoj glavi se formuliše problem identifikacije nepoznatih parametara sistema u prisustvu raspodeljenoga šuma kao zadatak minimizacije integrala srednje kvadratnog odstupanja ocene stanja sistema od mernih vrednosti u prostorno izolovanim tačkama. Pokazuje se da se u tom slučaju usvojena funkcija kriterijuma dobrote ocene može odrediti kao funkcional razlika ocenjenih i izmerenih matematičkih očekivanja i disperzija stanja sistema u tačkama x_0^r , ($r = 1, 2, \dots, K$). Na taj način se uklanja potreba za korišćenjem nepoznatih tekućih vrednosti šuma koji deluje na sistem u vremenskom periodu na koji se identifikacija odnosi. Daljom transformacijom funkcije kriterijuma dobrote ocene umanjuje se ukupni obim izračunavanja potreban za određivanje optimalne ocene nepoznatih parametara. U odnosu na identifikacioni algoritam dobijen neposrednim kombinovanjem metoda Monte-Karlo i gradijentnog postupka, algoritam dobijen pomoću navedene transformacije zahteva 500 puta manji broj računskih operacija.

Teoretski rezultati su ilustrovani sa dva primera. U prvom primeru se dokazuje konvergencija identifikacionog algoritma u srednje-kvadratnom smislu. U drugom primeru se izračunava ocena koeficijenata vodoprovodnosti T i vodoodcednosti S na osnovu merenja piezometarskog pritiska vode u jednoj tački na površini podzemnog vodnog kolektora.

5.2. FORMULACIJA PROBLEMA IDENTIFIKACIJE

Neka je zadat karakteristični stohastički model prostorno raspodeljenog stanja sistema $u(x, t, v)$ na koji deluje beli šum

$$dx_\theta = a(x_\theta) d\theta + B(x_\theta) \cdot dW, \theta \in (0, t_0), x_{\theta=0} = x_0, \quad (1)$$

$$d\hat{u}(x_\theta, t_0 - \theta, v) = c(x_\theta) \cdot \hat{u}(x_\theta, t_0 - \theta, v) d\theta - d(x_\theta, t_0 - \theta, v) d\theta$$

$$\theta \in (0, t_0), \quad (2)$$

gde je $\theta \triangleq T - t$, $t_0 \in (0, T)$, $\bar{B}^T(x) \cdot \bar{B}(x) \triangleq B(x)$, x_0 – determinisana tačka u prostornoj oblasti G . Terminalni uslov za jednačinu (2) glasi

$$u(x_{\hat{r}}, t_0 - \hat{r}, v) = \psi(x_{\hat{r}}, t_0 - \hat{r}), \quad (3)$$

gde je $\hat{r} \triangleq \hat{r}(t_0)$,

$$\text{Funkcije: } a(x), c(x), \psi(x, t) \triangleq \begin{cases} f(x), & (t=0, x \in G \cup \delta G), \\ \phi(x, t), & (t \in (0, t], x \in \delta G), \end{cases}$$

su poznate i definisane u oblasti $(G \cup \delta G) \times [0, T]$. Funkcija $d(x, t, v)$ je raspodeljena slučajna funkcija (slučajno polje), čije su statističke karakteristike a priori zadate relacijom

$$d(x, t, v) dt \triangleq g(x) dv_t + q(x, t) dt,$$

gde su $g(x)$ i $q(x, t)$ poznate determinisane funkcije zadate na $G \times (0, T]$, a dV_t predstavlja priraštaj skalarnog Wiener-ovog procesa koji zadovoljava uslove

$$M_v [dV_t] = 0; \quad M_v [dV_t]^2 = 1 \cdot dt, \quad (M_v - \text{matematičko očekivanje po šumu } V_t).$$

Treba oceniti nepoznatu matricu – parametar $B(x) \triangleq \bar{B}^T(x) \cdot \bar{B}(x)$ na osnovu merenih podataka o stanju sistema $u(x_0^r, t, v) = h_r(t, v)$, ($r = 1, 2, \dots, K; t \in [0, T]$), u K prostorno izolovanih tačaka x_0^r , $r = 1, 2, \dots, K$.

Označimo sa $\hat{u}(x, t, v)$ ocenu stanja sistema koju određuje model (1), (2), (3) u kojem je nepoznata matrica $B(x)$ ocenjena matricom $\hat{B}(x)$. Tražićemo onu optimalnu ocenu $\hat{B}_0(x)$ matrice $B(x)$ koja minimizira srednji integral kvadrata razlike ocene stanja $\hat{u}(x_0^r, t, v)$ i izmerenog stanja $u(x_0^r, t, v)$ na vremenskom intervalu $t \in [0, T]$

$$J(\hat{B}) \triangleq M_v \left\{ \sum_{r=1}^K \int_0^T [\hat{u}(x_0^r, t, v) - u(x_0^r, t, v)]^2 dt \right\} \quad (4)$$

Konstrukcijom algoritma za numeričko rešavanje ovako postavljenog zadatka moraju se odstraniti sledeće teškoće. Prvo, ocene stanja sistema se ne mogu neposredno izračunati rešavanjem sistema jednačina (1), (2), (3), jer tekuće vrednosti šuma $d(x, t, v)$ nisu poznate. Drugo, određivanje optimalne ocene pretraživanjem po vrednostima funkcije kriterijuma (4) zahteva višestruko iterativno izračunavanje matematičkog očeki-

vanja funkcionala od rešenja sistema (1), (2), što onemogućava realizaciju odgovarajućeg identifikacionog algoritma sredstvima raspoložive računске tehnike.

Prvu od navedenih teškoća ćemo odstraniti tako što ćemo dokazati da se funkcija kriterijuma (4) može predstaviti u obliku

$$J(\hat{B}) = \sum_{r=1}^K \int_0^T \left\{ \int_0^{t_0} \left[\sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta} D_v u(x_0^r, \theta, v)} - \sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta} D_v u(x_0^r, \theta, v)} \right]^2 d\theta \right\} dt_0 + \sum_{r=1}^K \int_0^T \{ M_v [\hat{u}(x_0^r, t_0, v) - u(x_0^r, t_0, v)] \}^2 dt_0 \quad (5)$$

Naime u (5) je funkcija $J(\hat{B})$ opisana pomoću matematičkog očekivanja $M_v[u(x_0^r, \theta, v)]$ i disperzije $D_v[u(x_0^r, \theta, v)]$ stanja sistema u tačkama x_0^r , ($r = 1, \dots, K$).

Da bi dokazali relaciju (5), posmatrajmo jednačinu $d\hat{u}(x_\theta, t_0 - \theta, v) = c(x_\theta) \cdot u(x_\theta, t_0 - \theta, v) \cdot d\theta - q(x_\theta, t_0 - \theta) \cdot d\theta - g(x_\theta) \cdot dV_{t_0 - \theta}$; $\theta \in (0, t_0)$, $t_0 \in (0, T)$, koja prema rezultatima gl.IV, određuje funkcional $H_{t_0}^0(x(\cdot)|x_{t_0}, t_0)$ čije matematičko očekivanje predstavlja ocenu stanja sistema $u(x_0, t_0, v)$ u tački $x_{t_0} = x_0$.

Integriranjem leve i desne strane jednačine (α) u negativnom smeru t -ose na intervalu $\theta \in (\hat{r}(t_0), 0)$ dobićemo

$$\hat{u}(x_0, t_0, v) = \int_{\hat{r}}^0 c(x_\theta) \cdot \hat{u}(x_\theta, t_0 - \theta, v) d\theta - \int_{\hat{r}}^0 q(x_\theta, t_0 - \theta) d\theta - \int_{\hat{r}}^0 g(x_\theta) \cdot dV_{t_0 - \theta} + \hat{u}(x_{\hat{r}}, t_0 - \hat{r}, v).$$

Pošto važi $M_{x_0} [\hat{u}(x_0, t_0, v)] = \hat{u}$, jednakost neće biti narušena primenom operatora matematičkog očekivanja M_{x_0} na desnu stranu jednačine. Dakle važi

$$\hat{u}(x_0, t_0, v) - M_v [\hat{u}(x_0, \tau_0, v)] = - M_{x_0} \int_{\hat{r}}^0 g'(x_\theta) dV_{t_0 - \theta} = - \int_{t_0}^0 M_{x_0} [X_{\theta < \tau} \cdot g'(x_\theta)] dV_{t_0 - \theta} = - \int_0^{t_0} M_{x_0} [X_{t_0 - \rho < \tau} \cdot g'(x_{t_0 - \rho})] \cdot dV_\rho.$$

gde je $g'(x_\theta) \triangleq g(x_\theta) \cdot \exp[-\int_0^\theta c(x_s) ds]$.

Poznato je, da za $I\hat{t}\hat{d}$ -ov stohastički integral, [33], važi

$$M_v \left\{ \int_0^{t_0} M_{x_0} [x_{t_0-\rho} < \tau \cdot g'(x_{t_0-\rho})] \cdot dV_\rho \right\}^2 = \int_0^{t_0} \{ M_{x_0} [x_{t_0-\rho} < \tau g'(x_{t_0-\rho})] \}^2 d\rho$$

$$= \int_0^{t_0} \{ M_{x_0} [x_\theta < \tau g'(x_\theta)] \}^2 d\theta$$

gde je x_D indikator skupa D.

Posmatrajmo ocene $\hat{u}^1(x_0, t_0, v)$ i $\hat{u}^2(x_0, t_0, v)$ i odgovarajuće familije trajektorija x_θ^1 i x_θ^2 .

Iz poslednja dva niza jednačina dobijamo

$$D_v[\hat{u}^1(x_0, t_0, v)] = \int_0^{t_0} \{ M_{x_0} [x_\theta < \tau_1 \cdot g'(x_\theta^1)] \}^2 d\theta,$$

$$D_v[\hat{u}^2(x_0, t_0, v)] = \int_0^{t_0} \{ M_{x_0} [x_\theta < \tau_2 \cdot g(x_\theta^2)] \}^2 d\theta, \quad (\beta)$$

$$D_v[\hat{u}^1(x_0, t_0, v) - \hat{u}^2(x_0, t_0, v)] = \int_0^{t_0} \{ M_{x_0} [x_\theta < \tau_2 \cdot g(x_\theta^2)] -$$

$$- M_{x_0} [x_\theta < \tau_1 \cdot g(x_\theta^1)] \}^2 d\theta,$$

gde $D_v(\cdot)$ označava $M_v[(\cdot)^2] - [M_v(\cdot)]^2$.

Iz (β) je očigledno da važi

$$D_v[\hat{u}^1(x_0, t_0, v) - \hat{u}^2(x_0, t_0, v)] = \int_0^{t_0} \left[\sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta} D_v u^1(x_0, \theta, v)} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta} D_v u^2(x_0, \theta, v)} \right]^2 d\theta; \quad (\gamma)$$

$$M_v[\hat{u}^1(x_0, t_0, v) - \hat{u}^2(x_0, t_0, v)]^2 = D_v[\hat{u}^1(x_0, t_0, v)$$

$$- \hat{u}^2(x_0, t_0, v)] + \{ M_v[\hat{u}^1(x_0, t_0, v) - \hat{u}^2(x_0, t_0, v)] \}^2 \quad (\delta)$$

U skladu sa formulacijom zadatka identifikacije iz odeljka 5.2, izmerena stanja sistema moraju takođe da zadovoljavaju relacije (γ) i (δ). Ako u definicionu relaciju za $J(\hat{B})$ uvedemo odgovarajuće zamene, dobićemo

$$J(\hat{B}) = \sum_{r=1}^K \int_0^T \left\{ \int_0^{t_0} \left[\sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta}} D_v \hat{u}(x_0^r, \theta, v) - \sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta}} D_v u(x_0^r, \theta, v) \right]^2 d\theta \right\} dt_0 + \sum_{r=1}^K \int_0^T \{ M_v [\hat{u}(x_0^r, t_0, v) - u(x_0^r, t_0, v)] \}^2 dt_0. \quad (\epsilon)$$

Označimo sa $H_{t_0}^0(x(\cdot)|x_0, t_0)$ rešenje diferencijalne jednačine

$$d\hat{u}(x_\theta, t_0 - \theta, v) = c(x_\theta) \cdot \hat{u}(x_\theta, t_0 - \theta, v) d\theta - q(x_0, t_0 - \theta) d\theta, \quad (\eta)$$

$$\theta \in (0, t_0); t_0 \in (0, T), \text{ u tački } \theta = 0.$$

Očigledno važi

$$M_v [\hat{u}(x_0^r, t_0, v)] = M_{x_0^r} [H_{t_0}^0(x(\cdot)|x_0, t_0)], \quad (r = 1, \dots, K). \quad (\theta)$$

Za izračunavanje disperzije i matematičkog očekivanja ocena u izrazu (ε) mogu se iskoristiti relacije (β) i (θ). Disperzija i matematičko očekivanje stanja ocenjuju se statističkom obradom rezultata merenja. Kada matematičko očekivanje i disperzija stanja nisu unapred zadati, ocenjuju se izrazima:

$$M_v [u(x_0^r, t_0, v)] \cong \bar{u}_N(x_0^r, t_0) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N u_\nu(x_0^r, t_0), \quad (6)$$

$$D_v [u(x_0^r, t_0, v)] \cong \sigma_N^2(x_0^r, t_0) \triangleq \frac{1}{N-1} \sum_{\nu=1}^N [u_\nu(x_0^r, t_0) - \bar{u}_N(x_0^r, t_0)]^2 \quad (7)$$

na osnovu niza nezavisnih merenja $u_\nu(x_0^r, t_0) \triangleq u(x_0^r, t_0, v_\nu)$ ($r = 1, 2, \dots, K, t_0 \in (0, T); \nu = 1, 2, \dots, N$), stanja sistema u tačkama x_0^r . U slučaju da se izvod stanja po vremenu

neposredno meri $u'_\nu(x_0^r, t_0) \triangleq \frac{\partial}{\partial t_0} u(x_0^r, t_0, v_\nu)$, može koristiti ocena:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} D_v [u(x_0^r, t_0, v)] \cong \frac{2}{N-1} \cdot \sum_{\nu=1}^N u_\nu(x_0^r, t_0) u'_\nu(x_0^r, t_0) - \frac{2}{N-1} \cdot \sum_{\nu=1}^N u_\nu(x_0^r, t_0) \cdot \sum_{\nu=1}^N u'_\nu(x_0^r, t_0). \quad (8)$$

Ako je izvršeno samo jedno merenje, prirodno je usvojiti ocene

$$\bar{u}_1(x_0^r, t_0) = u_1(x_0^r, t_0);$$

$$\sigma_1^2(x_0^r, t_0) = 0; \quad (r = 1, 2, \dots, K). \quad (9)$$

Funkcija kriterijuma dobrote ocene $J(\hat{B})$ se u tom slučaju može izraziti na sledeći način

$$J(\hat{B}) = \sum_{r=1}^K \int_0^T \{ D_v \hat{u}(x_0^r, t_0, v) + [M_v \hat{u}(x_0^r, t_0, v) - u_1(x_0^r, t_0)]^2 \} dt_0. \quad (10)$$

Funkcija $u_1(x_0^r, t_0)$ u (10) je determinisana. Ipak model ocene $\hat{u}(x_0^r, t_0, v)$ ostaje stohastičke prirode. Identifikacioni postupak teži da poništi uticaj stohastičkog poremećaja u modelu, jer merenje ne sadrži informaciju o statističkim karakteristikama tog poremećaja.

Kada se merenja izvode u toku postupka identifikacije (identifikacija u realnom vremenu), ocene $\bar{u}_N(x_0^r, t_0)$ i $\sigma_N^2(x_0^r, t_0)$ treba iterativno poboljšavati

$$\bar{u}_{N+1}(x_0^r, t_0) = \frac{N}{N+1} \cdot \bar{u}_N(x_0^r, t_0) + \frac{1}{N+1} \cdot u_{N+1}(x_0^r, t_0),$$

$$(r = 1, 2, \dots, K; N = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

$$\sigma_{N+1}^2(x_0^r, t_0) = \frac{N-1}{N} \sigma_N^2(x_0^r, t_0) + \frac{1}{N+1} \cdot [u_{N+1}(x_0^r, t_0) - \bar{u}_N(x_0^r, t_0)]^2. \quad (12)$$

Za $N=1$ ocene se dobijaju iz (9).

Kada se (β) i (θ) zamene u (5) dobija se eksplicitni oblik za $J(\hat{B})$:

$$J(\hat{B}) = \sum_{r=1}^K \int_0^T \left\{ \int_0^{t_0} [M_{x_0^r} x_{\theta < \tau} \cdot g(x_{\theta}) - \sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta}} D_v u(x_0^r, \theta, v)]^2 d\theta \right\} dt_0 +$$

$$+ \sum_{r=1}^K \int_0^T [M_{x_0^r} H_{t_0}^0(x(\cdot)|x_0^r, t_0) - M_v u(x_0^r, \theta, v)]^2 dt_0. \quad (13)$$

5.3. ALGORITAM ZA IDENTIFIKACIJU DISPERZIJNE MATRICE

Zadatak nalazenja ocene \hat{B}_0 koja minimizira funkcional (13) rešenja jednačine (1) predstavlja generalizaciju zadatka stohastičke aproksimacije. Naime traženje ekstremuma $J(\hat{B}_0) = \min_{\hat{B}} J(\hat{B})$ predstavlja minimizaciju nekog funkcionala regresione funkcije od \hat{B} .

Taj zadatak se može uprostiti koristeći se činjenicom da se kvadrat matematičkog očekivanja slučajne promenljive može predstaviti kao matematičko očekivanje proizvoda dve nezavisne slučajne promenljive sa funkcijama raspodele koje se poklapaju sa funkcijom raspodele prvobitne slučajne promenljive.

Neka su $x_s^{r,1} \triangleq x^1(s; 0, x_0^r)$; $x_s^{r,2} \triangleq x^2(s; 0, x_0^r)$ dva međusobno nezavisna rešenja jednačine (1), koja se, prema uslovima zadatka, moraju poklapati sa verovatnoćom 1. Označimo odgovarajuća matematička očekivanja i momente prvog izlaska na granicu δG sa M_1, τ_1^r i M_2, τ_2^r . Neka je $M \triangleq M_1 \cdot M_2$. Tada izraz (13) dobija oblik

$$J(\hat{B}) \equiv M\{Y(\hat{B})\}, \tag{14}$$

gde je $Y(\hat{B})$ određeno izrazom:

$$Y(\hat{B}) \triangleq \sum_{r=1}^K \int_0^T \int_0^{t_0} [x_{\theta} < \tau_1 \cdot g(x_{\theta}^{r,1}) - \sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta} D_r u(x_0^r, \theta, v)}] \cdot [x_{\theta} < \tau_2 \cdot g(x_{\theta}^{r,2}) - \sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta} D_r u(x_0^r, \theta, v)}] d\theta dt_0 + \sum_{r=1}^K \int_0^T [\bar{H}_{t_0}^0(x_{\theta}^{r,1}) - M_v u(x_0^r, \theta, v)] [H_{t_0}^0(x^{r,2}) - M_v u(x_0^r, \theta, v)] dt_0. \tag{15}$$

u kome je usvojena oznaka $\bar{H}_{t_0}^0(x_{\theta}^{r,i}) \triangleq M_{x_0^r} H_{t_0}^0(x_{\theta}^{r,i})$, $i = 1, 2$.

Pošto su $H_t^0(x_{\theta}^{r,i})$ i $x_{\theta}^{r,i}$, ($i = 1, 2$), rešenja jednačina (7) i (1) za svaku unapred odabranu ocenu \hat{B} , može se pomoću izraza (15) izračunati odgovarajuća vrednost $Y(\hat{B})$. Prema tome, zadatak određivanja optimalne ocene \hat{B}_0 se može rešiti nekim od algoritama tipa stohastičke aproksimacije. U slučaju kada je matrica $B(x) \equiv B$ konstantna, zadatak identifikacije B se rešava neposredno n -dimenzionim algoritmom Kiefer-Wolfowitz-a. Elementi b_{ij} konstantne matrice B se ocenjuju rekurentnim relacijama

$$\hat{b}_{ij}^{k+1} = \hat{b}_{ij}^k + \frac{a_k}{c_k} \cdot [Y_{ij}^k - Y^k], \tag{16}$$

gde $k = 0, 1, 2, \dots$ predstavlja redni broj iteracije; oznake

$$Y^k \triangleq Y(\hat{b}_{11}^k, \hat{b}_{12}^k, \dots, \hat{b}_{nn}^k), Y_{ij}^k \triangleq Y(\hat{b}_{11}^k, \dots, \hat{b}_{ij}^k + c_k, \dots, \hat{b}_{nn}^k)$$

predstavljaju odgovarajuće realizacije $Y(\cdot)$; nizovi brojeva a_k i c_k zadovoljavaju dobro poznate uslove:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k < \infty; \quad (U)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k/c_k)^2 < \infty; \quad (a_k > 0; c_k > 0; k = 1, 2, \dots).$$

Slučajne funkcije Y_{ij}^k i Y^k moraju biti međusobno nezavisne. Postupak (16) se može predstaviti i u matičnom obliku

$$\hat{B}^{(k+1)} = \hat{B}^{(k)} + (a_k/c_k) \tilde{Y}^{(k)}, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (17)$$

gde $\hat{B}^{(k)}$ označava k -tu rekurentnu ocenu matrice B , polazeći od neke početne ocene $\hat{B}^{(0)}$. Matrica $\tilde{Y}^{(k)}$ je definisana izrazom

$$\tilde{Y}^{(k)} \triangleq \begin{bmatrix} Y_{11}^k & \dots & Y_{1n}^k \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{n1}^k & \dots & Y_{nn}^k \end{bmatrix} - Y^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Kada $MY(\hat{B})$ zadovoljava uslove teoreme *Bluma* [64], ocena $\hat{B}^{(k)}$ konvergira ka optimalnoj oceni \hat{B}_0 sa verovatnoćom 1 kada $k \rightarrow \infty$.

Algoritam (16) objedinjuje metod Monte-Karlo za izračunavanje stanja modela (1), (2), (3) i algoritam stohastičke aproksimacije za ocenu parametara modela (sistema). Za razliku od uobičajenog postupka korištenja stohastičkog modela sistema sa raspodeljenim parametrima za neposredno izračunavanje rešenja metodom Monte-Karlo, stohastički model se ovde koristi za izvodjenje ekonomičnog algoritma identifikacije nepoznatih parametara. Neposredno kombinovanje algoritma Monte-Karlo za izračunavanje kriterijuma dobrote ocene $MY(\hat{B}) = J(\hat{B})$, (u slučaju da se merenja vrše samo u jednoj prostornoj tački x_0) i nekog algoritma pretraživanja za određivanje minimuma \hat{B}_0 — zahteva generisanje velikog broja nezavisnih rešenja jednačina

(1), (2), (na digitalnim računskim mašinama obično reda veličine 10^3) sa jednom te istom vrednošću ocene matrice B.

Da bi se odredio naredni iterativni korak algoritma (16) potrebne su samo vrednosti $Y(\hat{B})$ koje se određuju pomoću dva nezavisna rešenja jednačina (1) i (2).

Kada se merenja vrše samo u jednoj prostornoj tački $x_0 \in G \subset \mathbb{R}^n$, za jedan korak algoritma (16) potrebno je izračunati $2(n^2+1)$ rešenja sistema jednačina (1), (2). Za realizaciju jednog iterativnog koraka algoritma pretraživanja dobijenog neposrednim kombinovanjem metoda Monte-Karlo i gradijentnog algoritma (u slučaju kada je $g(x) \equiv 0$), potrebno je generisati $1000 \cdot (n^2+1)$ nezavisnih rešenja sistema jednačina (1), (2).

Na taj način ukupan obim potrebnih izračunavanja se povećava za 500 puta u odnosu na obim izračunavanja koji zahteva algoritam (16). Kada su elementi matrice B prostorno raspodeljeni, treba ih aproksimirati funkcijama deo po deo konstantnim u odgovarajućim podoblastima oblasti G.

Neka oznake Y_{ij}^k, Y^k, b_{ij}^k , ($i, j = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots$) u relaciji (16) predstavljaju vektore čiji su elementi konstantne vrednosti odgovarajućih koeficijenata u podoblastima oblasti G. Nepoznati vektori b_{ij} ocenjuju se višestrukom unotrebom rekurentne formule (16). Prirodno je očekivati veću tačnost ocene onih elemenata vektora b_{ij} koji se nalaze u blizini mernih tačaka x_0^r .

5.4. NUMERIČKI PRIMERI

Neka je sistem sa raspodeljenim parametrima formalno opisan relacijama

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d(x, t, v); \quad x \in (0, a); \quad t \in (0, T), \quad (18)$$

$$u(0, t) = u(a, t) = u(x, 0) = 0;$$

gde je

$$d(x, t, v) dt \equiv q \sin(\pi x/a) dt + g \sin(\pi x/a) dV_t; \quad (19)$$

($q, g = \text{const}$);

dV_t – priraštaj skalarnog procesa Wiener-a za koji važi $M[dV_t] = 0; M[dV_t]^2 = 1 \cdot dt$.

Treba oceniti nepoznati skalarni parametar B na osnovu merenja stanja sistema $u(x, t, v)$ u tački $x = x_0 \in (0, a)$ na vremenskom odsečku $t \in [0, T]$.

Neka matematičko očekivanje i izvod disperzije stanja sistema u tački x_0

$$M_v u(x_0, t, v) = \frac{qa^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{B} \cdot (1 - e^{-\pi^2 B t/a}) \cdot \sin(\pi x_0/a), \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [D_v u(x_0, t, v)] = g \sin(\pi x_0/a) \cdot e^{-2\pi^2 B t/a}, \quad (21)$$

predstavljaju rezultate merenja na vremenskom intervalu $t \in [0, T]$. Smatraćemo optimalnom onu ocenu \hat{B}_0 koja minimizira funkciju kriterijuma dobrote ocene

$$J(\hat{B}) \triangleq M_v \left\{ \int_0^T [\hat{u}(x_0, t, v) - u(x_0, t, v)]^2 dt \right\}. \quad (22)$$

Prema metodici razradjenoj u prethodnoj glavi, karakteristični stohastički model sistema (18) u kome je tačna vrednost parametra $\bar{B} = \pm \sqrt{B}$ zamenjena ocenom $\tilde{B} = \pm \sqrt{\hat{B}}$, ima sledeći oblik

$$dx_\theta = \tilde{B} dW ; \theta \in (0, \hat{t}(t_0)); x_\theta = x_0 \text{ za } \theta = 0, \quad (23)$$

gde je

$$\begin{aligned} \theta &\triangleq T-t; t_0 \in (0, T), \hat{B} = \tilde{B}^2; M_x [dW_\theta]^2 = 2d\theta; M_v [dV_t]^2 = 1 \cdot dt; \\ d\hat{u}(x_\theta, t_0 - \theta, v) &= -q \sin(\pi x_\theta/a) d\theta - g \sin(\pi x_\theta/a) dV_{t_0} = \theta; \\ \hat{u}(x_{\hat{t}}, t_0 - \hat{t}, v) &= \psi(x_{\hat{t}}, t_0 - \hat{t}) \equiv 0. \end{aligned} \quad (24)$$

U skladu sa (13), funkcija dobrote ocene (22) iskazuje se na sledeći način

$$\begin{aligned} J(\hat{B}) &= \int_0^T \left\{ M_{x_0} \int_0^{\hat{t}} q \sin\left(\frac{\pi x_\theta}{a}\right) d\theta - M_v u(x_0, t_0, v) \right\}^2 dt_0 + \\ &+ \int_0^T \int_0^{t_0} \left\{ M_{x_0} [x_\theta < \hat{t} g \sin\left(\frac{\pi x_\theta}{a}\right)] - \sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta}} D_v u(x_0, \theta, v) \right\}^2 d\theta dt_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Prema (14) i (15), izraz (25) ima oblik $J(\hat{B}) = MY(\hat{B})$, gde je

$$\begin{aligned}
 Y(\hat{B}) = & \int_0^T \left[\int_0^{\hat{\tau}_1} q \sin\left(\frac{\pi x \theta}{a}\right) d\theta - M_v u(x_0, t_0, v) \right] \cdot \left[\int_0^{\hat{\tau}_2} q \sin\left(\frac{\pi x \theta}{a}\right) d\theta - \right. \\
 & M_v u(x_0, t_0, v) \Big] dt_0 + \int_0^T \int_0^{t_0} [\chi_\theta < \hat{\tau}_1 \cdot g \sin\left(\frac{\pi x \theta}{a}\right) - \sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta}} D_v u(x_0, \theta, v)] \cdot \\
 & \cdot [\chi_\theta < \hat{\tau}_2 \cdot g \sin\left(\frac{\pi x \theta}{a}\right) - \sqrt{\frac{\partial}{\partial \theta}} D_v u(x_0, \theta, v)] d\theta dt_0 .
 \end{aligned} \quad (26)$$

U skladu sa (16), traženje optimalne ocene \hat{B}_0 obavlja se višestrukom primenom rekurentne relacije

$$\hat{B}^{k+1} = \hat{B}^k + \frac{a_k}{c_k} [Y(\hat{B}^k + c_k) - Y(\hat{B}^k)], \quad (27)$$

pri čemu koeficijenti $a_k, c_k, (k = 1, 2, \dots)$ zadovoljavaju uslove (U). Dokazaćemo sred-njekvadratnu konvergenciju algoritma (27). Primetimo da ocena stanja sistema (18) mo-že eksplicitno da se izrazi

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(x, t, v) = & \frac{qa^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\hat{B}} \cdot (1 - e^{-\frac{\pi^2 \hat{B} t}{a^2}}) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \\
 & + g \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \int_0^t e^{-\pi^2 \hat{B} (t-s)/a^2} \cdot dV_s
 \end{aligned} \quad (28)$$

Oдавde se određuju matematičko očekivanje i disperzija

$$M_v \hat{u}(x, t, v) = \frac{qa^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\hat{B}} \cdot (1 - e^{-\pi^2 \hat{B} t/a^2}) \cdot \sin(\pi x/a); \quad (29)$$

$$D_v \hat{u}(x, t, v) = g^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot (1 - e^{-2\pi^2 \hat{B} t/a^2}) \cdot \frac{a^2}{2\pi^2 \hat{B}} . \quad (30)$$

Iz (30) sledi

$$\frac{\partial}{\partial t} D_v \hat{u}(x, t, v) = g^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-2\pi^2 \hat{B} t/a^2} \quad (31)$$

Prema (5), (20) i (21), za funkciju dobre ocene dobijamo

$$J(\hat{B}) = \frac{q^2 a^4}{\pi} \int_0^T \left[\frac{1}{\hat{B}} - e^{-\pi^2 \hat{B} t_0 / a^2} \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) - \frac{1}{B} (1 - e^{-\pi^2 B t_0 / a^2}) \cdot \sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \Big|^2 dt_0 + \int_0^T \int_0^{t_0} g^2 \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \cdot [e^{-2\pi^2 \hat{B} \theta / a^2} - e^{-2\pi^2 B \theta / a^2}]^2 d\theta dt_0. \quad (32)$$

Ovaj rezultat se može i nenosredno dobiti iz (25), (20) i (21), ako se pođe od činjenice da je verovatnoća $P_{x_0} \{x_t \in dx, t < \hat{r}(t_0)\}$ da se proces x_t (sa početkom u tački x_0) u trenutku t nadje u okolini tačke $x \in (0, a)$, – fundamentalno rešenje jednačine $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \hat{B} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$; $0 < x < a$, sa graničnim uslovima $\rho(t, 0) = \rho(t, a) = 0$. U tom slučaju je

$P_{x_0} \{x_t \in dx, t < \hat{r}(t_0)\} = \rho(t; x_0, x)$ određeno izrazom, [61]:

$$\rho(t; x_0, x) = \frac{2}{a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k^2/a^2)\hat{B}t} \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_0}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)$$

Može se lako proveriti da izraz (32) za $J(\hat{B})$ zadovoljava sledeće uslove

- (a) za $\hat{B} < B$, $J(\hat{B})$ opada, za $\hat{B} > B$, $J(\hat{B})$ raste,
- (b) $K_0 \cdot |\hat{B} - B| \leq |J'(\hat{B})| \leq K_1 \cdot |\hat{B} - B|$.

Pošto važi

$$(c) DY(\hat{B}) < \text{const} < \infty,$$

obezbedjena je konvergencija algoritma (27) u srednjekvadratnom smislu prema poznatoj teoremi Dupuća, [64]. Uslove (a) i (b) (*) nije teško proveriti, ako se uoči da se izraz (32) za $J(\hat{B})$ može prevesti u oblik

$$J(\hat{B}) = \frac{q^2 a^2}{\pi^2} \cdot \int_0^T \left\{ \int_0^{t_0} [e^{-\pi^2 \hat{B} \theta / a^2} - e^{-\pi^2 B \theta / a^2}] d\theta \right\}^2 \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) dt_0 + \int_0^T \int_0^{t_0} g^2 \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \cdot [e^{-2\pi^2 \hat{B} \theta / a^2} - e^{-2\pi^2 B \theta / a^2}]^2 d\theta dt_0.$$

(*) Uslov (b) je zadovoljen samo na proizvoljnom konačnom odsečku $|\hat{B} - B| < L$, $L < \infty$. Međutim, zamena tačne funkcije dobrote ocene $J(B)$ izvan neke okoline B – sa proizvoljnom neprekidno diferencijabilnom funkcijom, čiji izvod ne menja znak na intervalima $(-\infty, -L)$; $(L, +\infty)$ a u tačkama $B = \pm L$ se poklapa sa $J(B)$ – ne utiče na konvergenciju algoritma i na graničnu vrednost.

Prema tome, sa stanovišta konstrukcije algoritma za ocenu B , uslov (b) se može smatrati zadovoljenim.

Diferenciranjem po \hat{B} dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial B} = & -2q^2 \cdot \int_0^T \left\{ \int_0^{t_0} [e^{-\pi^2 \hat{B} \theta / a^2} - e^{-\pi^2 B \theta / a^2}] d\theta \right\} \left\{ \int_0^{t_0} \theta e^{-\pi^2 \hat{B} \theta / a^2} d\theta \right\} \\ & \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) dt_0 - \frac{4g^2 \cdot \pi^2}{a^2} \cdot \int_0^T \int_0^{t_0} \sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \cdot [e^{-2\pi \hat{B} \theta / a^2} - e^{-2\pi^2 B \theta / a^2}] \cdot \\ & \cdot \theta e^{-2\pi^2 \hat{B} \theta / a^2} d\theta dt_0. \end{aligned}$$

Iz ovog izraza neposredno sledi (a) i (b).

Postupak identifikacije iz odeljka 5.3 se može primeniti u slučajevima kada je, pored koeficijenta difuzije, potrebno oceniti i neke druge parametre sistema. Ova tvrdnja se može potkrepiti sledećim primerom identifikacije parametara jednog determinističkog hidrogeološkog sistema, [60], [63].

Stanje sistema (piezometarski pritisci vode jednog arteskog akvifera) opisano je sledećom parcijalnom diferencijalnom jednačinom

$$\begin{aligned} S \frac{\partial u}{\partial t} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) & \leq Q(x,y), \\ (x, y, t) \in (0,a) \times (0,b) \times (0,\bar{t}) & \equiv G \times I; \end{aligned} \quad (33)$$

$u(x,y,t) = U = \text{const}$ za $(x,y,t) \in (\delta G \times I) \cup (G \times O)$.

Funkcija $Q(x,y)$ je definisana izrazom

$$Q(x,y) \equiv \begin{cases} 1, & |x-x_0| \leq L \text{ i } |y-y_0| \leq L; \\ 0, & |x-x_0| > L \text{ ili } |y-y_0| > L. \end{cases}$$

Treba oceniti nepoznate skalarne konstante T i S na osnovu merenja stanja sistema $u(x_0,t) = h(t)$ u tački $x_0 \in G$ na vremenskom odsečku $t \in [0, \bar{t}]$. Optimalne ocene \hat{T}_0, \hat{S}_0 biraju se tako da funkcija dobrote ocene

$$J(\hat{T}, \hat{S}) \triangleq \int_0^{\bar{t}} [\hat{u}(x_0,t) - u(x_0,t)]^2 dt \quad (34)$$

uzme minimalnu vrednost.

Karakteristični stohastički model ekvivalentan sa (33) se dobija na isti način kao i u prethodnom primeru kada se uoči da je $B \equiv T/S$; $q(x,y) \equiv -Q(x,y)/S$; $g(x,y) \equiv 0$

Ako namesto \sqrt{B} uvedemo oznaku $\sqrt{T/S}$, dobićemo karakteristični stohastički model u sledećem obliku

$$dx_\theta = \sqrt{T/S} dW_1(\theta); x_\theta = x_0 \text{ za } \theta = 0; \theta \in [0, \hat{\tau}], \quad (35)$$

$$dy_\theta = \sqrt{T/S} dW_2(\theta); y_\theta = y_0 \text{ za } \theta = 0; \theta \in [0, \hat{\tau}], \quad (36)$$

$$du(x_\theta, y_\theta, t_0 - \theta) = \frac{1}{\hat{S}} \cdot Q(x_\theta, y_\theta) d\theta, \quad (37)$$

$$u(x_{\hat{\tau}}, y_{\hat{\tau}}, t_0 - \hat{\tau}) = \psi(x_{\hat{\tau}}, y_{\hat{\tau}}, t_0 - \hat{\tau}) = U; \theta \in [0, \hat{\tau}].$$

Za skalarne, medjusobno nezavisne procese Wiener-a $W_1(\theta)$ i $W_2(\theta)$ važi $M[dW_1(\theta)]^2 = M[dW_2(\theta)]^2 = 2d\theta$. Iz (13) sledi

$$J(\hat{T}, \hat{S}) = \int_0^{\hat{\tau}} \left\{ U - \frac{1}{\hat{S}} \cdot M \int_0^{\hat{\tau}} Q(x_\theta, y_\theta) d\theta - u(x_0, y_0, t_0) \right\}^2 dt_0. \quad (38)$$

Prema (14) i (15), izraz (38) dobija oblik

$$J(\hat{T}, \hat{S}) = MY(\hat{T}, \hat{S}), \quad (39)$$

gde je

$$Y(\hat{T}, \hat{S}) \triangleq \int_0^{\hat{t}} \left[U - h(t_0) - \frac{1}{\hat{S}} \cdot \int_0^{\hat{\tau}_1} Q(x_\theta^1, y_\theta^1) d\theta \right] \cdot \left[U - h(t_0) - \frac{1}{\hat{S}} \cdot \int_0^{\hat{\tau}_2} Q(x_\theta^2, y_\theta^2) d\theta \right] dt_0. \quad (40)$$

Optimalna ocena parametara \hat{T} i \hat{S} izračunava se višestrukom primenom rekurentnih relacija

$$\hat{T}^{k+1} = \hat{T}^k + \frac{a_k}{c_k} \cdot [Y(\hat{T}^k, \hat{S}^k) - Y(\hat{T}^k, \hat{S}^k)]; \quad (41)$$

$$\hat{S}^{k+1} = \hat{S}^k + \frac{a_k}{c_k} [Y(\hat{T}^k, \hat{S}^k + c_k) - Y(\hat{T}^k, \hat{S}^k)]. \quad (42)$$

Za dovoljno velike vrednosti k , veličine \hat{T}^k i \hat{S}^k su približno optimalne ocene parametara T i S . Na digitalnom računaru izračunato je 150 iteracija algoritma (41). (42) za sledeće brojne vrednosti parametara sistema: $Q = 0,156$; $U = 214$; $L = 275$; $X_0 = 1600$; $Y_0 = 400$; $a = 3500$; $b = 1000$.

U tabeli 2. navedene su početne ocene parametara i odgovarajuće ocene dobijene u poslednjoj iteraciji. Da bi se proverila tačnost i numerička konvergencija postupka, ceo postupak je ponovljen četiri puta za četiri para početnih ocena koje odgovaraju temeni- ma kvadrata u parametarskoj ravni $T-S$, (sl. 7a). Kao ilustracija numeričkog procesa ite- rativnog približavanja ocena, na sl. 7b je prikazan proces ustaljenja ocene \hat{S}^k u zavisnos- ti od broja iteracija $k = 0, 1, 2, \dots, 150$. U toku rada na računaru, uočeno je da se pro- ces ustaljenja algoritma ubrzava kada se u svakoj iteraciji zameni Y sa \bar{Y} , gde \bar{Y} pred- stavlja aritmetičku sredinu od 30 nezavisnih realizacija Y .

Klasičnim postupcima za određivanje vrednosti parametara artesnog akvifera, koji koriste merenja u više prostornih tačaka sistema, dobijaju se sledeće ocene

$$T_0 = 0,421 \cdot 10^{-2}; \quad S_0 = 0,636 \cdot 10^{-2}.$$

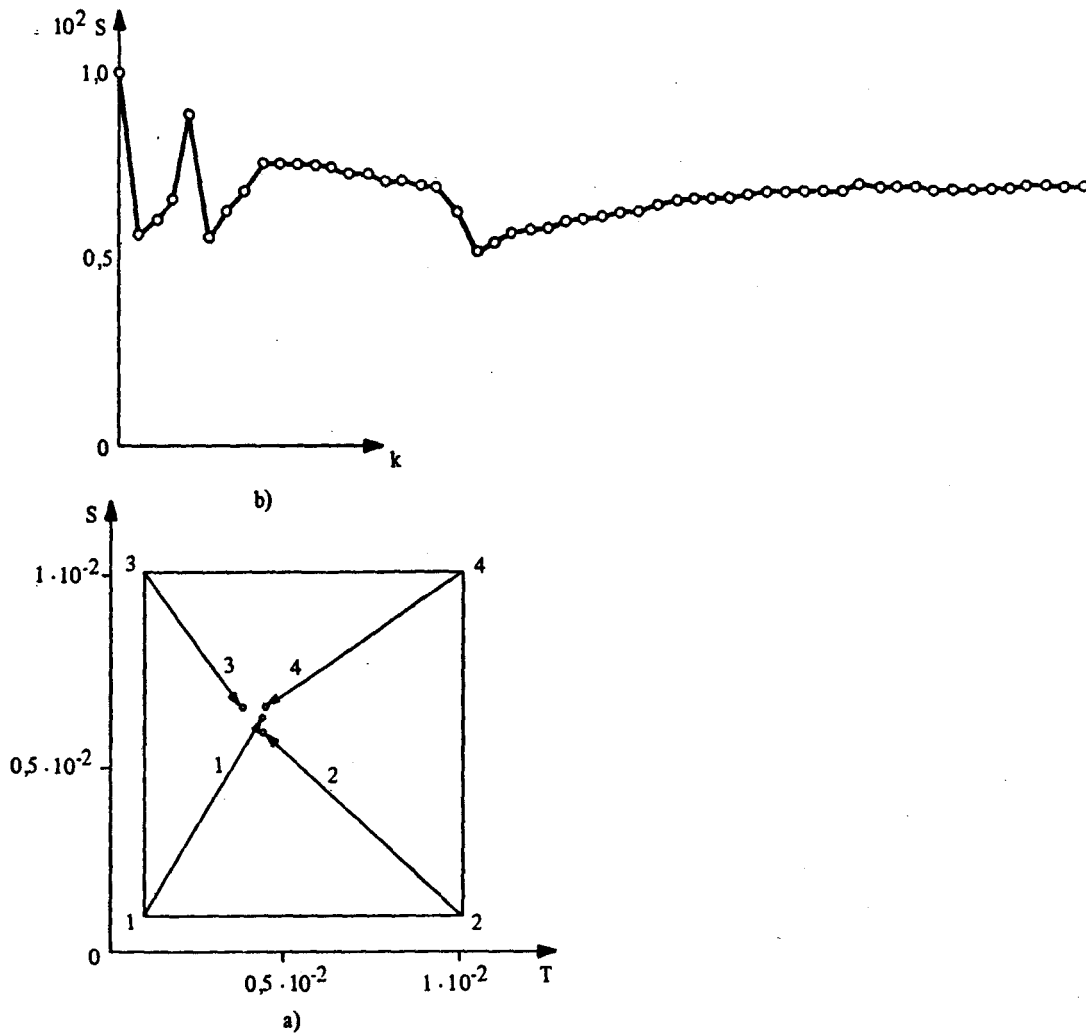
Najveća relativna odstupanja dobijenih ocena od ovih vrednosti iznose

$$\max_{\hat{T}_i^0} \left(\frac{\hat{T}_i^0 - T_0}{T_0} \right) = 10,2\%; \quad \max_{\hat{S}_i^0} \left(\frac{\hat{S}_i^0 - S_0}{S_0} \right) = 9,1\%,$$

što u inženjerskoj praksi predstavlja zadovoljavajući rezultat pri rešavanju ovoga tipa proble- ma, [65]. Izračunavanje jednoga para ocena \hat{T}^{150} , \hat{S}^{150} na digitalnoj računskoj mašini IBM 360/44 zahtevalo je prosečno 7 min zauzimanja računskog sistema, (kompilacija, asembliranje, štampanje rezultata svakog drugog iteracionog koraka). U ovo vreme u- računato je i vreme kompilacije i štampanje rezultata svake druge iteracije.

Tabela 2.

i	$\hat{T}_i^0 \cdot 10^2$	$\hat{S}_i^0 \cdot 10^2$	$\hat{T}_i^{150} \cdot 10^2$	$\hat{S}_i^{150} \cdot 10^2$
1	0,1	0,1	0,442	0,651
2	0,1	1,0	0,378	0,657
3	1,0	0,1	0,436	0,583
4	1,0	1,0	0,429	0,654



Slika 7.

5.5. ZAKLJUČAK

U ovoj glavi problem identifikacije nepoznatih parametara sistema na koji deluje raspedeljeni šum se formuliše kao zadatak minimizacije integrala srednje-kvadratnog odstupanja ocene stanja od tačnih vrednosti u mernim tačkama. Pokazano je da se u tom slučaju funkcija dobrote može izraziti kao funkcional odstupanja ocenjenih i izmerenih vrednosti matematičkih očekivanja i disperzija u tačkama x_0^r , ($r = 1, 2, \dots, K$). Na taj način je otklonjena teškoća koju stvara neizvesnost tekućih vrednosti šuma koji deluje na sistem.

Dalje se pokazuje da se odgovarajuća izračunavanja mogu u znatnoj meri skratiti prostom transformacijom kriterijuma dobrote ocene tako da se optimalna ocena dobija kao minimum neke regresivne funkcije. Na taj način je kriterijum dobrote ocene doveden na oblik pogodan za neposrednu primenu algoritma stohastičke aproksimacije. Obim izračunavanja koji zahtevaju ovi algoritmi manji je 500 puta od obima izračunavanja potrebnih pri neposrednom kombinovanju Monte-Karlo metoda i gradijentnog metoda. Dobijeni algoritam se može primeniti i u slučaju kada parametri koji se ocenjuju zavise od prostornih koordinata.

Teoretski rezultati su ilustrovani sa dva primera. U prvom se analitički ilustruje navedena metoda rešavanja problema identifikacije. Pokazuje se da u tom konkretnom slučaju izvedeni identifikacioni algoritam konvergira u srednje-kvadratnom smislu. U drugom primeru je izračunata ocena koeficijenta filtracije T i vodoodcednosti S na osnovu merenja piezometarskog pritiska vode u jednoj tački na površini podzemnog vodnog kolektora (akvifera). Pokazuje se da se pri srazmerno malom ukupnom obimu izračunavanja dobija zadovoljavajuća ocena parametara T i S .

Uvedeni postupak identifikacije ima dobre izgleda da bude uspešno primenjen u zadacima određivanja nepoznatih graničnih uslova i spoljašnjih dejstava na sistem, jer se u tim slučajevima sva odgovarajuća stanja sistema mogu odrediti pomoću jedne te iste familije trajektorija x_t , što vodi ka znatnom skraćenju vremena izračunavanja ocene.

Izgleda nam da rezultati ove glave dovoljno ubedljivo ukazuju na pogodnost i dalju perspektivu korišćenja karakterističnih stohastičkih modela sistema sa raspodeljenim parametrima u problemima identifikacije i upravljanja takvim sistemima.



LITERATURA

1. A.C.Robinson
A survey of optimal control of distributed parameter systems, *Automatica*, Vol. 7, No 3, (May 1971).
2. H.J.Kushner
Stochastic stability and control, Academic Press, N.Y. – London 1967.
3. Р.Э.Хасъминский
Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, Наука, Москва, 1969.
4. С.Г. Михлин
Курс математической физики, Наука, Москва, 1968.
5. H.B.Philips, N.Wiener
Nets and Dirichlet problem, *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 2, (1932).
6. I.G. Petrovskii
Über das Irrfahrtproblem, *Mathematische Annalen*, Vol. 109, (1934).
7. N.Metropolis, S.Ulam
The Monte–Carlo method, *Journal of American statistical association*, Vol. 44, No 247, (1949).
8. Ю.А. Шрейдер
Решение систем линейных алгебраических уравнений по методу Монте-Карло, Вопросы теории математических машин, сборник №1, Физматгиз, Москва, 1958.
9. J.M.Hammersley and D.C.Handscomb
Monte–Carlo methods, Methuen, London, 1966.

10. E.F. Beckenbach (editor)
Modern mathematics for engineer, Mc Graw-Hill, N.Y., 1961.
11. Н.П.Бусленко, Д.И.Голенко, И.М.Соболь,
В.Г.Срагович, Ю.А.Шрейдер
Метод статистических испытаний (Монте-Карло),
Физматгиз, 1962.
12. K.H.Edwards, R.R.Khanna
Feasibility study of Monte Carlo modelling techniques for distributed – parameter systems, Part 1 – discrete Monte Carlo models and their uses, Proceedings of IEE, Vol. 117, No 12, (December 1970).
13. K.H. Edwards, R.R.Khanna
Feasibility study of Monte Carlo modelling techniques for distributed – parameter systems, Part 2 – search problem involving a distributed – parameter system solved by Monte Carlo methods, Proceedings of IEE, Vol. 117, No 12, (December 1970).
14. K.H.Edwards, R.R.Khanna
Feasibility study of Monte Carlo modelling techniques for distributed – parameter systems, Part 3 – a model of continuous furnace, Proceedings of IEE, Vol. 118, No 7, (July 1971).
15. E.S. Page
The Monte Carlo solution of some integral equations, Proceedings of the Cambridge philosophical society, Vol. 50, (1954).
16. M.H.Kalos
Monte Carlo calculations of the ground state of three – and four-body nuclei,
Physical Review, Vol. 128, No 4, (November 1962).
17. R.C.Grimm and R.G.Storer
Monte-Carlo solution of Schrödinger's equation, Journal of Computational Physics,
Vol. 7. No 1, (February 1971).
18. R.P. Feynman and A.R.Hibbs
Quantum mechanics and path integrals, Mc Graw-Hill, N.Y., 1965.
19. M.Donsker, M.Kac
The Monte Carlo method and its applications, Journal of research of the National Bureau of Standards, Vol. 44, (1950).

20. K.Chuang, L.Kazda, T.Windeknecht
Solving partial differential equations on electronic models by stochastic methods, Proceedings of the 1st IFAC Congress, Vol. 3, Moscow 1961.
21. Э.Н.Шпилевский
Решение дифференциальных уравнений в частных производных и задач линейного стохастического программирования методом Монте-Карло на гибридной вычислительной машине, сборник трудов V Всесоюзной конференции - семинария по теории и методам математического моделирования, Ленинград 22-26.X.1966 Наука, Москва, 1969.
22. W.D. Little
Hybrid computer solutions of partial differential equations by Monte Carlo methods, Proceedings of the Fall Joint Computer Conference, AFIPS, Vol. 29, Spartan book, Washington, 1966.
23. G.A.Korn
Hybrid computer Monte Carlo techniques, Simulation, Vol. 5, No. 4, (October) 1965.
24. М.Л.Дашевский, А.Н.Набалевский
Один способ решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом Монте-Карло на АВМ, Автоматика и Телемеханика, №9, (Сентябрь 1967).
25. Ю.С.Ильин, А.Н.Набалевский, Р.Ш.Липцер, Ю.А.Митневич.
Комплекс аппаратуры статистического синтеза, ИБернетика и управление, сборник трудов ИАТ АН СССР, Москва, 1967.
26. H.Handler
Monte Carlo solution of partial differential equations using a hybrid computer, IEEE Transactions on EC, Vol. EC-16, No 5, (October 1967).
27. Э.Н. Шпилевский
Реализация методов статистического моделирования на гибридных вычислительных машинах, диссертация на соискание уч. степ. к.т.н., Москва, 1967.
28. А.Н.Набалевский, Р.Ш.Липцер
О построении генератора случайных функций для моделирования на АВМ марковских процессов диффузионного типа, Автоматика и телемеханика, №6, (Июнь 1966).

29. R.T. D'Aquanni

A Monte Carlo technique using a fast repetitive analog computer for determining lowest eigenvalues of partial differential equations for various boundaries, with applications, *Révue internationale pour le calcul analogique (AICA)*, Vol. XII, No 2, (Avril 1970).

30. B.Ya. Kogan, R.Krtolica

Solving nonstationary boundary value problems with variable boundary conditions on a hybrid computer system, *Proceedings of the 6 th AICA-IFIP Conference on hybrid computation, Munich 1970.*

31. Р. Кртолица

Решение дифференциальных уравнений параболического типа методом Монте-Карло с помощью гибридной вычислительной системы, диссертация на соискание уч. степ. к. т. н., Москва, 1970.

32. С. Л. Соболев

Уравнения математической физики, Наука, Москва, 1966.

33. И. И. Гихман, А. В. Скороход

Введение в теорию случайных процессов, Наука, Москва, 1965.

34. К. Итô

Stochastic integral, *Proceedings of the Imperial Academy Tokyo*, Vol. 20, (1944).

35. К. Итô

On stochastic integral equation, *Proceedings of the Japan Academy*, Vol. 1-4, (1946).

36. К. Итô

On stochastic differential equation in a differentiable manifold, *Nagoya Mathematics Journal*, Vol. 1, (1950).

37. Е. Б. Дыннин

Марковские процессы, Физматгиз, Москва, 1963.

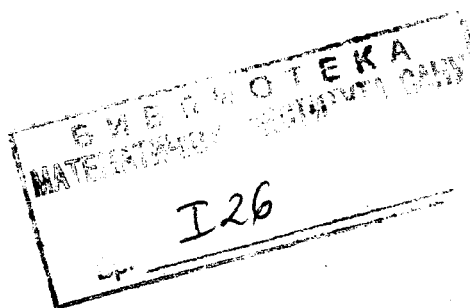
38. М. И. Фрейдлин

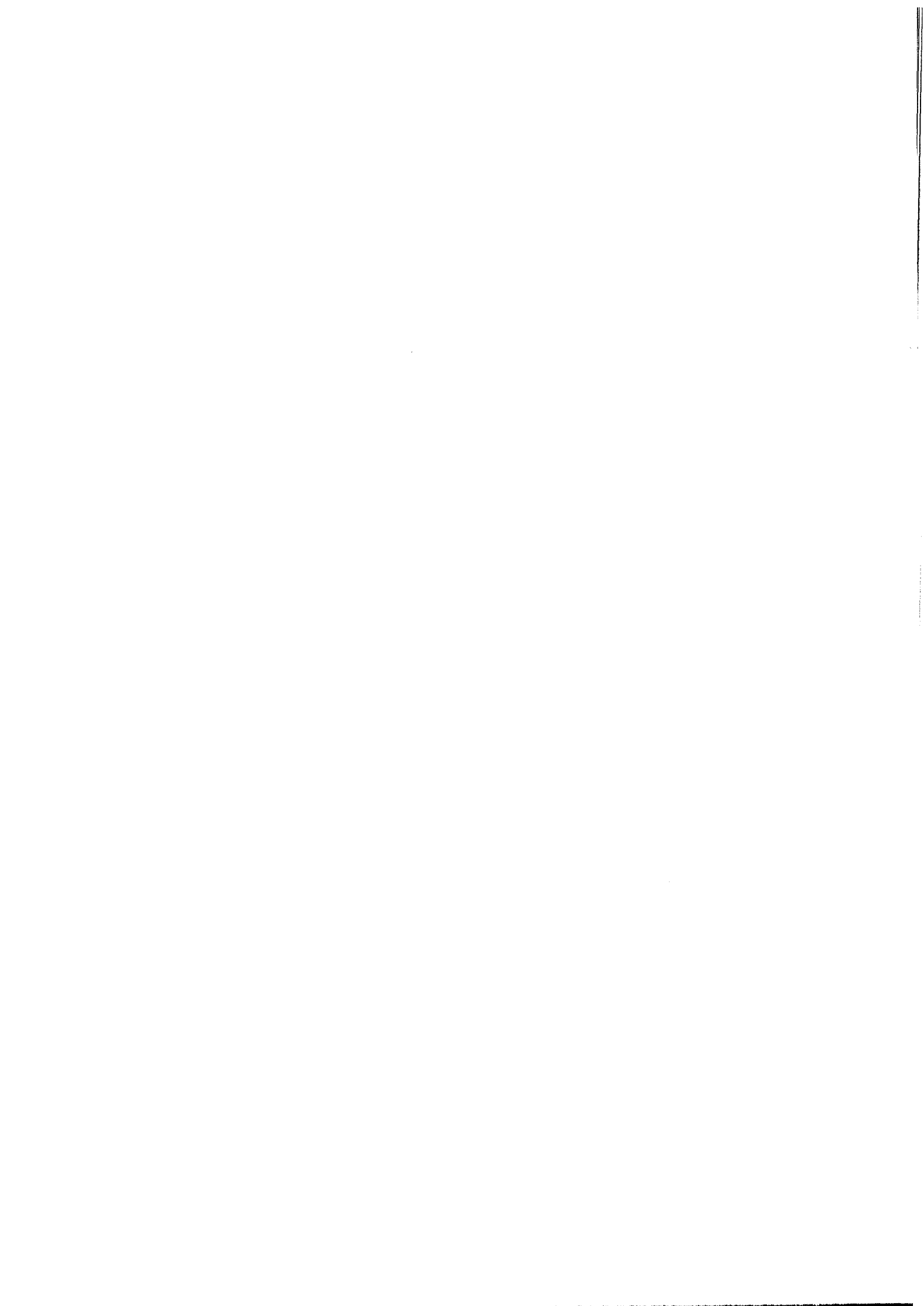
О факторизации неотрицательно определенных матриц. Теория вероятностей и ее примен., том X, вып. 2. (1968).

39. Н.Ито
Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов, Математика (сборник переводов), том 3, №5, (1959).
40. M. Athans
Toward a practical theory for distributed parameter systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol, AC-15, No 2, (April 1970).
41. R.Krtolica
Analiza sistema sa raspodeljenim parametrima metodom stohastičkog modeliranja, doktorska disertacija, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1971.
42. R.Krtolica, R.Tonić
Generator pseudoslučajnog belog šuma, Automatika, god. IX, No 5-6 (1968).
43. Р.Л.Стратонович
Новая форма записи стохастического интеграла и уравнений, Вестник МГУ, серия математика-механика, сер.мат., №1, Москва, 1964.
44. Р.Л.Стратонович
Избранные вопросы теории флюктуации в радиотехнике, Советское радио, Москва, 1961.
45. A.Friedman
Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, N.J., 1964.
46. R.Krtolica, B.Miletović, J.Josipović
Ocena rezervi podzemnih voda u Sprečkom polju modeliranjem jednačine kontinuiteta na digitalnom računaru, zbornik radova prvog Jug. simpozijuma o hidrogeologiji i inženjerskoj geologiji, (Hercegnovi 4. - 8.V 1971), Beograd 1971.
47. D.K.Todd
Ground water hydrology, John Wiley and Sons, N.Y., 1959.
48. М.М.Фрейдлин
О стохастических уравнениях Н.Ито и вырождающихся эллиптических уравнениях, Известия АН СССР, серия мат. №26, (1962).
49. М.И. Фрейдлин
О глаткости решений вырождающихся эллиптических уравнений, Известия А.Н.СССР, сер. мат., № 32, 1968.

50. IBM Application Program,
360/44 Scientific Subroutine Package, subroutine RANDU.
51. Е.Б. Дыннин
Инфинитезимальные операторы марковских процессов,
Теория вероятностей и ее применения, том I, (1958).
52. M.D. Donsker
An invariance principle for certain probability limit theorems, *Memoirs of the American mathematical society*, No 6, (1951).
53. А.Я. Хинчин
Асимптотические законы теории вероятностей, ОНТИ,
Москва-Ленинград, 1936.
54. В.П. Демидович, И.А. Марон, Э.Э. Шувалова
Численные методы анализа, приближение функций,
дифференциальные и интегральные уравнения,
Наука, Москва, 1967.
55. Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барновский
Курс теории вероятностей и математической статисти-
стики для технических приложений, Наука
Москва 1969.
56. Zhivoglyudov V.P., Kaipov V.KH.
Identification of distributed parameter plants in the presence of noises, Proc.
IFAC
Symposium on Identification in Automatic Control Systems, Prague, 1967.
57. Bensoussan A.
Identification de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles,
Computing methods in optimization problems – 2, papers presented at the SAN
REMO CONFERENCE, Sept. 9–13, 1968/ED. Zadeh, Neustadt, Balakrishnan,
Acad. Press, New York, 1969.
58. Tzafestas S.G.
Identification of stochastic distributed-parameters systems, *International Journal
of Control*, No 4, Vol. 11, (April 1970).
59. Ноган Б.Я., Кртоřица Р., Лапина И.А.
О решении на гибридном комплексе нестационар-
ных краевых задач с переменными граничными
условиями, *Автоматика и Телемеханика*, №2,
февраль 1972.

60. Krtolica R., Todorović V.
Identifikacija parametara jedne klase stohastičkih modela, Zbornik radova XVI god. konf. Jug. Kom. za ETAN, Velenje, juni 1972.
61. Itô K., McKean H.P.
Diffusion processes and their sample paths, Springer-Verlag, Berlin 1965.
62. Кртолица Р.
Статистическое моделирование систем с распределенными параметрами.
I. Стохастическая модель, Автоматика и Телемеханика, Но 1, январь 1976.
63. Кртолица Р.
Статистическое моделирование систем с распределенными параметрами.
II. Идентификация системы в присутствии случайных воздействий, Автоматика и Телемеханика, Но 2, февраль 1976.
64. Wasan M.I.
Stochastic approximation, Combridge at the University Press, 1969.
65. Polubarinova-Kochina, P.Y.
Theory of Ground-Water Movement, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.
66. Кртолица Р., Лапина И.А.
Методика определения масштабных коэффициентов стохастических дифференциальных уравнений при решении уравнений в частных производных на гибридной вычислительной системе методом Монте-Карло, Автоматика и Телемеханика, Но 1, январь 1972.





Radovan Krtolica

**Analiza matematičkih modela stobastičkih
sistema sa raspedljenim parametrima**

**B e o g r a d
1979.**

Na kompozeru kucala Milosava Jandrić
Korekture izvršio Radovan Krtolica
Nacrt za korice Milan Čavčić

Tiraž: 500 primeraka