Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Elektronski kurs iz analitičke geometrije u ravni za učenike trećeg razreda srednje škole

-master rad-

Mentor:
prof. dr Miroslav Marić

Student:
Suzana Luković

Beograd,
2017.

Članovi komisije:

prof. dr Mirjana Đorić

prof. dr Miroslav Marić, mentor

dr Sana Stojanović Đurđević

Sadržaj

Uvod

Savremene metode u nastavi i primena elektronskih nastavnih materijala pružaju velike mogućnosti za unapređivanje tradicionalne nastave. Inovativni pristup u predstavljanju nastavnih sadržaja korišćenjem informaciono-komunikacionih tehnologija u kombinaciji sa klasičnom nastavom u velikoj meri može da doprinese njihovom efikasnijem savladavanju i postizanju kvalitetnijeg obrazovanja. U današnje vreme, kada se tehnologija mnogo brzo razvija, povećava se i njena primena u nastavi. GeoGebra, matematički softver koji povezuje geometriju, algebru i analizu, u velikoj meri doprinosi i učenicima i nastavnicima i sve više se koristi u nastavi. Neki primeri primene GeoGebre se mogu videti u [4,6,9], a još neke od mogućnosti primene novih tehnologija u nastavi predstavljene su u radovima [7,8]. Elektronski kurs o analitičkoj geometriji u ravni za treći razred srednje škole, kreiran za potrebe ovog master rada, trebalo bi da bude još jedan doprinos osavremenjivanju nastave. U okviru kursa su sadržaji iz analitičke geometrije u ravni prikazani uz pomoć programskog paketa GeoGebra što bi učenicima trebalo da omogući da interaktivno učestvuju u rešavanju zadataka i time lakše usvoje gradivo. Kurs je osmišljen kao dodatni materijal za predavanja iz analitičke geometrije u ravni u trećem razredu srednje škole.

Analitička geometrija u ravni je oblast sa kojom se učenici sreću još u osnovnoj školi. Ona se detaljnije izučava u trećem razredu srednje škole. Smatra se da je Rene Dekart, objavljivanjem svoje *Geometrije* u jednom od tri dodatka njegovoj *Raspravi o metodi (Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences*, 1637), postavio osnove današnjoj analitičkoj geometriji. Prema anegdoti, Dekart je inspiraciju za uvođenje koordinatne ravni dobio posmatrajući muvu na plafonu. Analitičkoj geometriji ime je dao Njutn, pri čemu je pod analitičkom geometrijom podrazumevao proučavanje geometrijskih figura pomoću algebarskih jednačina. Analitička geometrija je deo matematike koji izučava svojstva geometrijskih objekata (krivih, površi, itd.) metodom koordinata. Ovom metodom nekom skupu tačaka u ravni ili prostoru dodeljuje se izvesna jednačina koja karakteriše takav skup tačaka. Razmatraju se i rešavaju i obrnuti slučajevi: ako je data jednačina koja sadrži koordinate nekih tačaka, potrebno je odrediti krivu (površi i slično) koja odgovara datoj jednačini. Metodom koordinata se utvrđivanje odnosa između određenih objekata svodi na ispitivanje odnosa njihovih odgovarajućih jednačina. Predmet daljeg razmatranja biće analitička geometrija u ravni, u odnosu na pravougli koordinatni sistem.

U radu je prikazan sadržaj kreiranog kursa. Pored uvoda u kome je predstavljena analitička geometrija u ravni, rad sadrži četiri poglavlja. U poglavlju *Duž* predstavljene su osnovne osobine tačaka i duži u koordinatnom sistemu, dok su u poglavlju *Prava*, definisani razni oblici prave, kao i njihovi uzajamni položaji. Poglavlje *Krive drugog reda* sadrži osnovne osobine krivih drugog reda (kružnica, elipsa, hiperbola, parabola) kao i njihove uzajamne položaje sa pravom.

U okviru kursa su obrađeni svi segmenti analitičke geometrije u ravni predviđeni programom za treći razred srednje škole. Zadaci i rešenja koja pored uvodnog dela i rešenih primera prate sadržaj kursa navedena su u četvrtom poglavlju *Zadaci i rešenja*. Interaktivni pristup u okviru elektronskog kursa trebalo bi da omogući lakše savladavanje gradiva, a nastavnicima da olakša realizaciju nastavnog plana i programa. Kreiran elektronski kurs se nalazi na adresi http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml09185/. Kurs je besplatan, javno dostupan i mogu da ga koriste svi učenici i nastavnici koji za to pokažu interesovanje.

1. Duž

Učenici se sa pojmom *duž* upoznaju još u osnovnoj školi. Tada oni uče samo definiciju duži, rastojanje između dve tačke i podelu duži samo u specijalnom slučaju, kada je ta tačka koja deli duž njeno središte. Zatim se u trećem rezredu srednje škole detaljnije bave izučavanjem ovog pojma. Prvo poglavlje elektronskog kursa detaljno obrađuje sadržaje vezane za pojam *Duž*. U njemu su izložene osnovne osobine rastojanja između dve tačke, podele duži u datom odnosu, kao i izračunavanje površine trougla pomoću koordinata njegovih temena. Savladavanje sadržaja iz ovog poglavlja je neophodno da bi se moglo nastaviti uspešno izučavanje analitičke geometrije u ravni.

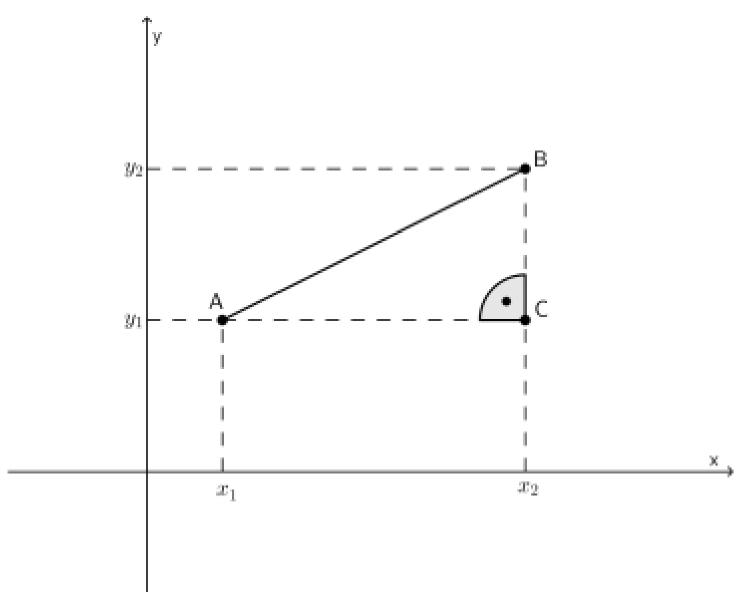
Definicija. *Duž AB se definiše kao skup svih tačaka između datih tačaka A i B, uključujući i krajnje tačke A i B.*

1.1. Rastojanje između dve tačke

U elektronskoj lekciji *Rastojanje između dve tačke* prikazano je kako se određuje rastojanje između dve tačke u koordinatnom sistemu. Pored opšteg slučaja, navedene su i formule uz pomoć kojih se jednostavnije određuje rastojanje između dve tačke ukoliko su jednake njihove apscise ili ordinate, jer u tim slučajevima je duž paralelna jednoj od koordinatnih osa.

Neka su date dve tačke $A(x_{1,}y_1)$ i $B(x_{2,}y_2)$. Rastojanje između tačaka A i B se računa primenom formule:

$$|\boldsymbol{AB}| = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}\,\boldsymbol{.} \qquad (1)$$



Slika 1: Duž AB u koordinatnom sistemu

Ako se uoči tačka $C(x_2, y_1)$ tada je trougao ABC pravougli (slika 1). Kada se na njega primeni Pitagorina teorema dobija se formula (1).
Ukoliko tačke A i B imaju jednake apscise one se nalaze na pravoj paralelnoj y-osi. Tada se rastojanje između tačaka izračunava primenom formule:

$$|AB| = |y_2 - y_1| \,.$$

Ukoliko tačke A i B imaju jednake ordinate one se nalaze na pravoj paralelnoj x-osi. Tada je njihovo rastojanje:

$$|AB| = |x_2 - x_1| \,.$$

Primene navedenih formula biće prikazane u narednom primeru. Ovaj, a i svi naredni primeri, pored novonaučenih osobina i formula, kombinovaće i koristiće i sadržaje koji su već poznati. Najlakše je naučiti nešto novo ukoliko se to poveže sa već poznatim sadržajima.

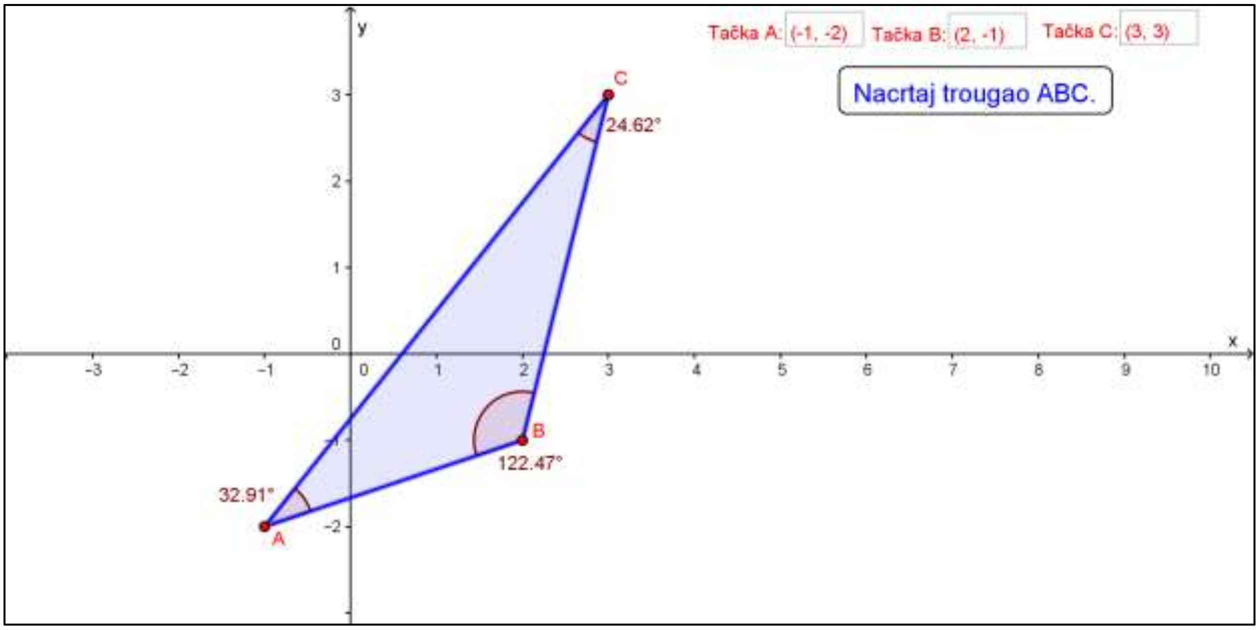
Primer. *Dokazati da je trougao* ABC *pravougli ako su njegova temena* $A(1,-1), B(7,-3)$ *i* $C(5,1)$.

Rešenje. Prvo treba izračunati stranice datog trougla, a zatim proveriti da li za njega važi Pitagorina teorema.

$|AB| = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (7-1)^2}$
$|AB| = \sqrt{40}$
$|AC| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (5-1)^2}$
$|AC| = \sqrt{20}$
$|BC| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (5-7)^2}$
$|BC| = \sqrt{20}$
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$40 = 20 + 20$

Zaključak: Trougao ABC je pravougli.

Za rešenje ovog primera u kome se proverava da li je trougao pravougli kreiran je GeoGebra aplet prikazan na slici 2. On sadrži tri tekstualna polja za unošenje koordinata temena trougla i dugme za crtanje trougla. U dobijenom trouglu se ispisuju i njegovi uglovi pa se na taj način lako uočava da li je trougao pravougli. Pored datih temena trougla u primeru, moguće je u tekstualna polja uneti i koordinate bilo koji drugih tačaka.



Slika 2: Aplet koji crta trougao ABC i prikazuje njegove uglove

1.2. Podela duži u datom odnosu

U elektronskoj lekciji *Podela duži u datom odnosu*, pored podele duži u proizvoljnom odnosu, navedeni su i specijalni slučajevi kada treba odrediti središte duži ili odrediti koordinate težišta.

Neka su date dve različite tačke $A(x_{1,}y_1)$ i $B(x_{2,}y_2)$. Podeliti duž u odnosu $m{:}n$ znači odrediti tačku $C(x,y)$ koja pripada duži AB, takvu da je:

$$|AB|{:}|CB| = m{:}n\ .$$

Koordinate tačke C se dobijaju primenom sledeće formule:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\ . \qquad (2)$$

Formula (2) se može uprostiti koristeći $\lambda = \frac{m}{n}$ i tada su koordinate tačke C određene sledećom formulom:

$$\boldsymbol{C\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right)}.$$

U specijalnom slučaju $m = n$, tačka C predstavlja središte duži AB i ima koordinate:

$$\boldsymbol{C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}.$$

U narednom primeru biće izvedena formula za određivanje koordinata težišta proizvoljnog trougla ukoliko su poznate koordinate njegovih temena.

Primer 1. *Odrediti koordinate težišta trougla* ABC *određenog tačkama* $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Rešenje. Neka je težište trougla ABC tačka $T(x_0, y_0)$. Ako se sa $A_1(x, y)$ označi središte duži BC, tada tačka T deli duž AA_1 u odnosu $2: 1$ (na osnovu osobine težišta trougla). Tada je:

$$A_1\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right),$$

$$T\left(\frac{x_1 + 2x}{1 + 2}, \frac{y_1 + 2y}{1 + 2}\right).$$

Dobija se sledeće:

$$T\left(\frac{x_1 + 2\,\frac{x_2 + x_3}{2}}{3}, \frac{y_1 + 2\,\frac{y_2 + y_3}{2}}{3}\right),$$

odnosno koordinate težišta trougla ABC su:

$$T\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}\right).$$

Primer 2. *Date su tačke* $A(1,1), B(6, -4)$ *i* $C(7,1)$. *Odrediti koordinate tačke* D *koja deli duž* AB *u odnosu* $2: 3$, *a zatim naći koordinate tačke* E *koja polovi duž* CD.

Rešenje. Neka je $\lambda = \frac{2}{3}$. Koordinate tačke D se dobijaju primenom formule:

$$D\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right),$$

ako se tačke A i B posmatraju kao $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$. Tada se lako izračunava da je tačka $D(3, -1)$.

Kako tačka E polovi duž CD, ako se tačke C i D posmatraju kao $C(x_1, y_1)$ i $D(x_2, y_2)$, tačka E se dobija primenom formule:

$$E\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Tada su koordinate tačke $E(5,0)$.

1.3. Površina trougla

Nastavni plan i program za učenike starijih razreda osnovne škole podrazumeva da učenici šestog razreda savladaju određivanje površine trougla, kao i drugih geometrijskih figura. Oni tada uče kako izračunati površinu trougla ako je poznata stranica trougla i odgovarajuća visina. Tek kasnije, u osmom razredu, za naprednije učenike spominje se i izračunavanje površine uz pomoć poluprečnika upisane ili opisane kružnice oko tog trougla. Zatim se u srednjoj školi uvodi i Heronov obrazac. U trećem razredu, ukoliko su učenicima poznate koordinate temena trougla, na vrlo jednostavan način mogu da izračunaju površinu trougla. Taj postupak, kao i neki rešeni primeri i navedeni GeoGebra apleti, prikazani su u elektronskoj lekciji *Površina trougla*.

Ako su data temena $A(x_{1,}y_1)$, $B(x_{2,}y_2)$, $C(x_{3,}y_3)$ trougla ABC, površina tog trougla se izračunava primenom formule:

$$\boldsymbol{P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|}\,. \quad (3)$$

Primer 1. *Odrediti tačku C na y-osi tako da je površina trougla ABC, gde je $A(-1,2)$ i $B(2,3)$, jednaka 10.*

Rešenje. Ako je $C(0, y)$ tražena tačka na y-osi, tada je, prema formuli (3):

$$10 = \frac{1}{2}|(-1)(3 - y) + 2(y - 2) + 0(2 - 3)|\,,$$

odakle je:

$$|3y - 7| = 20.$$

Iz poslednje jednačine je $3y - 7 = \pm 20$, što daje dva rešenja: $y = -\frac{13}{3}$ ili $y = 9$.

Postoje dve tačke koje zadovoljavaju traženi uslov i to su $C_1\left(0, -\frac{13}{3}\right)$ i $C_2(0,9)$.

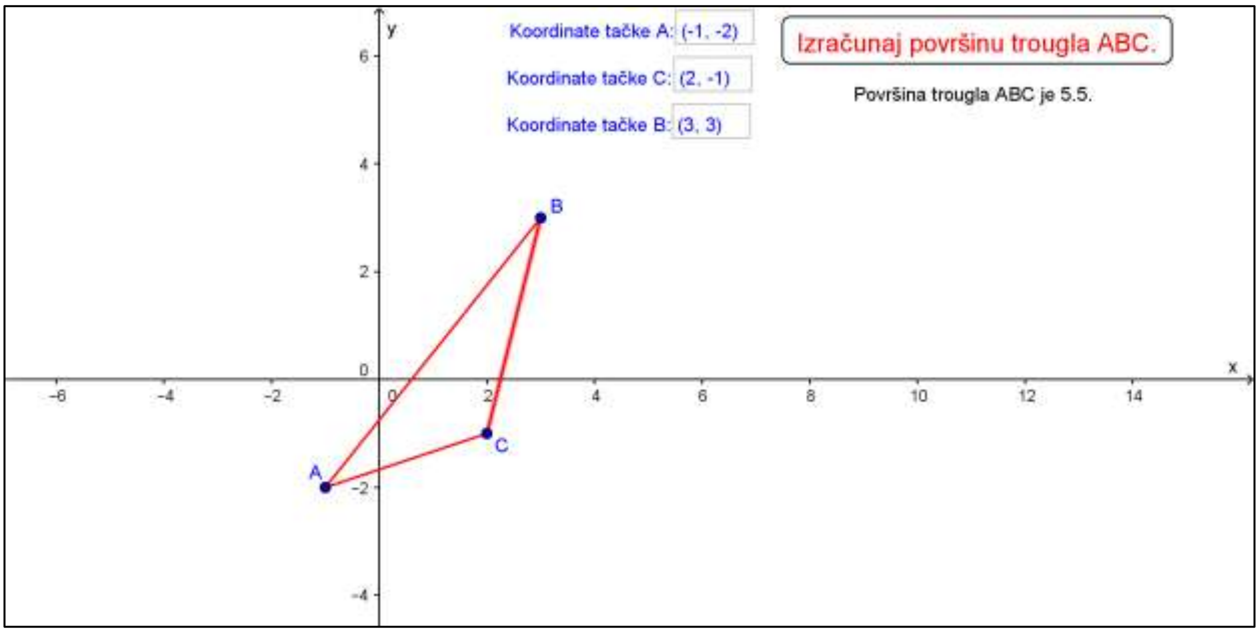
Primer 2. *Odrediti površinu trougla* ABC, *ako su data njegova temena* $A(-1,-2), B(2,-1)$, $C(3,3)$.

Rešenje.

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\left|-1(-1-3) + 2\big(3-(-2)\big) + 3(-2-(-1))\right|,$$

$$P = 5{,}5.$$

Na slici 3 prikazan je aplet pomoću koga se takodje može izračunati površina trougla unošenjem koordinata negovih temena u odgovarajuća tekstualna polja. Pored datih koordinata, unošenjem bilo kojih drugih koordinata, dobija se površina tog novog trougla.



Slika 3: Aplet koji izračunava površinu trougla sa zadatim temenima

2. Prava

Učenici se sa pravom sreću u sedmom razredu osnovne škole, kada grafički predstavljaju direktnu proporcionalnost. Ali tada se bave samo pravama koje prolaze kroz koordinatni početak. Zatim u osmom razredu osnovne škole uče pojam *Prava* kao jedan od osnovnih geometrijskih pojmova, čime je jednoznačno određena prava, kako se obeležava, itd. U osmom razredu uče i da je grafik linearne funkcije prava, pa se tada upoznaju i sa pravama u koordinatnom sistemu, koje ne prolaze kroz koordinatni početak. Od svih oblika jednačine prave u osnovnoj školi se sreću samo sa implicitnim i ekspicitnim oblikom, i prevođenjem iz jednog u drugi oblik. Uče i uslove u zavisnosti od koeficijenta pravca kada su prave paralelne ili ortogonalne. Sve ovo što je naučeno u osnovnoj školi, samo detaljnije, i ostali oblici jednačine prave, ugao između pravih i pramen pravih prikazani su u posebnim elektronskim lekcijama u poglavlju *Prava* u elektronskom kursu.

Definicija. *Skup tačaka* (x, y) *u koordinatnoj ravni, kojem odgovara linearna jednačina po* x *i* y *je prava.*

Svaka prava je jednoznačno određena dvema različitim tačkama.

Postoje razni oblici prave.
- Implicitni oblik
- Eksplicitni oblik
- Segmentni oblik
- Normalni oblik
- Jednačina prave kroz datu tačku
- Jednačina prave kroz dve tačke

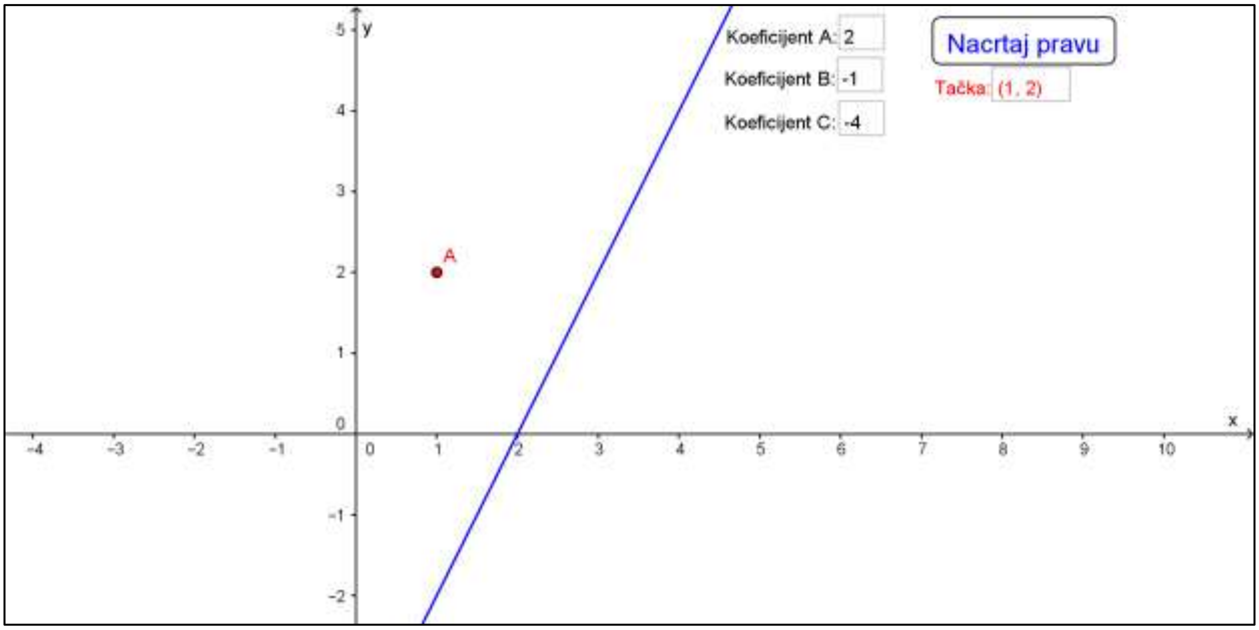
2.1. Implicitni oblik

Opšti (implicitni) oblik prave je:
$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}\,, \qquad (4)$$
pri čemu je $A \neq 0$ ili $B \neq 0$.

Primer. *Data je prava* $2x - y - 4 = 0$. *Ispitati koje od sledećih tačaka pripadaju datoj pravoj:* $A(1,2), B(2,0), C(0,3), D(-2,5), E(-3,-2)$.

Rešenje. Da bi se proverilo da li data tačka pripada pravoj potrebno je zameniti koordinate tačke u jednačinu prave (4) i ukoliko se dobije tačna jednakost tačka pripada pravoj.

Za rešavanje ovog primera kreiran je GeoGebra aplet, prikazan na slici 4, u kome se u tekstualna polja unose koeficijenti iz jednačine prave u implicitnom obliku i koordinate date tačke, nakon čega se uoči da li data tačka pripada pravoj. Moguće je uneti i bilo koje druge koeficijente iz jednačine prave, kao i koordinate proizvoljne tačke.



Slika 4: Aplet pomoću kojeg se proverava da li data tačka pripada pravoj

2.2. Eksplicitni oblik

Eksplicitni oblik jednačine prave je:

$$\boldsymbol{y = kx + n}\,, \qquad (5)$$

gde je k koeficijent pravca prave, a n je odsečak na y-osi. Za koeficijent k važi da je $k = tg\ \alpha$, gde je α ugao koji data prava gradi sa pozitivnim delom x-ose.

Ako se koeficijenti k i n posmatraju kao $k = -\frac{A}{B}$ i $n = -\frac{C}{B}$, lako se iz implicitnog oblika prave prelazi u eksplicitni oblik.

U narednom primeru prikazan je i drugi način za prebacivanje iz implicitnog u eksplicitni oblik.

Primer. *Pravu* $7x + 3y + 23 = 0$ *prebaciti u eksplicitni oblik i naći koeficijente* k *i* n.

Rešenje.

$$7x + 3y + 23 = 0,$$
$$3y = -7x - 23,$$
$$y = -\frac{7}{3}x - \frac{23}{3},$$
$$k = -\frac{7}{3}, n = -\frac{23}{3}.$$

2.3. Segmentni oblik

Jedan od oblika prave sa kojim se učenici prvi put sreću tek u trećem razredu srednje škole je segmentni oblik.

Segmentni oblik jednačine prave je:

$$\boldsymbol{\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, \ (m \neq 0, n \neq 0)}, \quad (6)$$

gde je m odsečak na x-osi, a n odsečak na y-osi. Ako se u datoj jednačini zameni $x = 0$ dobija se prava $y = n$ i obrnuto, za $y = 0$ se dobija $x = m$. Data prava prolazi kroz tačke $(0, n)$ i $(m, 0)$. Svaka prava koja nije paralelna nekoj od koordinatnih osa se može napisati u segmentnom obliku.

Primer. *Napisati jednačinu prave u implicitnom obliku, ako ona na x-osi i y-osi odseca redom odsečke dužine 5 i 3.*

Rešenje. Iz uslova zadatka je $m = 5, n = 3$,

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1,$$

$$3x + 5y - 15 = 0.$$

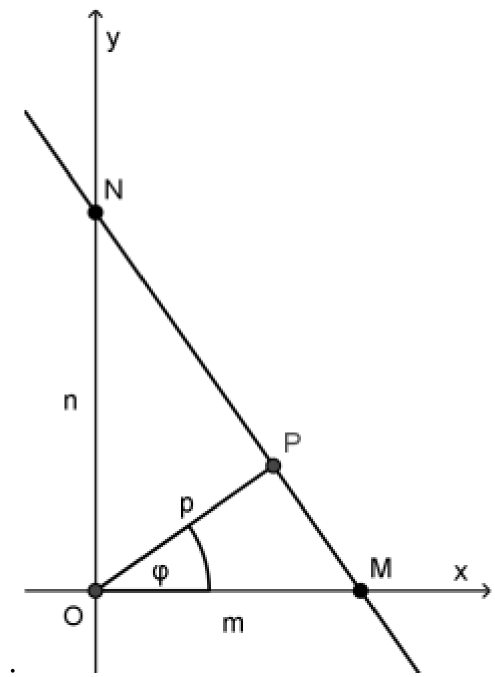
2.4. Normalni oblik

Još jedan od oblika jednačine prave koji je učenicima nepoznat do srednje škole je normalni oblik.

Neka je data prava u segmentnom obliku:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1\,,$$

koja seče koordinatne ose u tačkama $M(m,0)$ i $N(0,n)$. Konstruišimo normalu iz koordinatnog početka na datu pravu, koja je seče u tački P i označimo se p rastojanje od koordinatnog početka do date prave, kao što je prikazano na slici 5 [5].



Slika 5: Prava koja seče koordinatne ose u tačkama $M(m,0)$ i $N(0,n)$

Ako se sa φ označi ugao MOP, tada je:

$$\cos\varphi=\frac{p}{m},\sin\varphi=\frac{p}{n},$$

tj.

$$m=\frac{p}{\cos\varphi},n=\frac{p}{\sin\varphi},$$

pa jednačina dobija normalni oblik:

$$\boldsymbol{x\cos\varphi+y\sin\varphi=p}. \qquad (7)$$

Jednačina se iz opšteg oblika $Ax + By + C = 0$ prevodi u normalni oblik sledećom formulom:

$$\frac{\boldsymbol{Ax + By + C}}{(-\boldsymbol{sgn\ C})\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2}}} = \mathbf{0}\,,$$

gde je $sgn\ C$ znak koeficijenta C.

Primer. *Svesti jednačinu prave* $4x - 3y + 5 = 0$ *na normalni oblik.*

Rešenje. $C = 5 > 0$, pa normalni oblik date prave glasi:

$$\frac{4x - 3y + 5}{-\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0\,,$$

tj.

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1 = 0\,.$$

Ovde je dužina normale $p = 1$, a ugao φ je određen sa $\cos\varphi = -\frac{4}{5}$, $\sin\varphi = \frac{3}{5}$.

2.5. Jednačina prave kroz datu tačku

Jednačina prave može biti određena i pomoću koordinata jedne tačke koja joj pripada.

Jednačina prave kroz datu tačku $A(x_1, y_1)$ ima sledeći oblik:

$$\boldsymbol{y - y_1 = k(x - x_1)} \qquad (8).$$

Poznavanje koeficijenta pravca k potpuno određuje pravu kroz tačku A.

Ovo je formula sa kojom se učenici češće sreću u srednjoj školi. S obzirom da formulom (8) nisu obuhvaćene prave koje su oblika $x = x_1$, tj. koje su paralelne y-osi, jednačina svake prave određene tačkom $A(x_1, y_1)$ može se dobiti i primenom formule:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

Primer. *Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku* $(-3{,}0)$ *i sa pozitivnim delom x-ose obrazuje ugao* $\frac{2\pi}{3}$.

Rešenje. Jednačina prave koja prolazi kroz tačku $(-3,0)$ glasi:

$$y = k(x+3).$$

Kako je

$$k = tg\,\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}\,,$$

jednačina tražene prave je:

$$y = -\sqrt{3}(x+3)\,,$$

tj.

$$x\sqrt{3} + y + 3\sqrt{3} = 0\,.$$

2.6. Jednačina prave kroz dve date tačke

Jednačina prave kroz dve tačke $A(x_{1,}y_1)$ i $B(x_{2,}y_2)$ ima oblik:

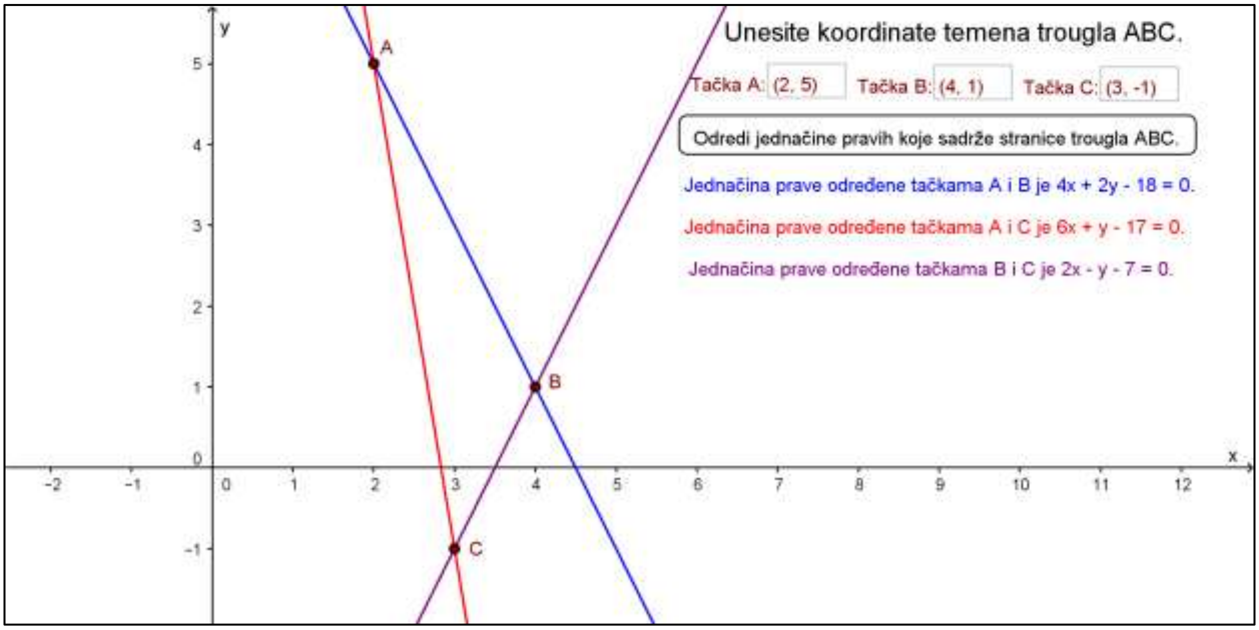
$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \qquad (9)\,.$$

Formulom (9) nisu obuhvaćene prave koje su paralelne y-osi (tj. $x_1 = x_2$).

Primer. *Temena trougla su* $A(2,5), B(4,1)$ *i* $C(3,-1)$. *Odrediti jednačine pravih koje sadrže stranice ovog trougla.*

Rešenje. Jednačine pravih se dobijaju prostom zamenom koordinata po dva temena u formulu (9) za jednačinu prave kroz dve tačke.

Na slici 6 prikazan je aplet pomoću koga se crtaju i dobijaju jednačine traženih pravih unošenjem odgovarajućih podataka u tekstualna polja. Aplet funkcioniše i za bilo koje druge proizvoljne tačke.



Slika 6: Aplet koji prikazuje jednačine pravih koje sadrže temena trougla

2.7. Uzajamni položaj pravih

Uzajamni položaj pravih $y = k_1x + n_1$ i $y = k_2x + n_2$, odnosno $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, se ispituje određujući njihove zajedničke tačke (ukoliko postoje).
Dve prave mogu da budu paralelne, da se poklapaju ili da se seku. Ukoliko se seku pod pravim uglom, tada su one normalne.

Neka je φ oštar ugao između dve date prave. Tada važi:

$$\boldsymbol{tg\ \varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|}. \quad (10)$$

Za dve paralelne prave važi:

$$\boldsymbol{k_1 = k_2} \qquad (11)$$

ako su one date u eksplicitnom obliku, ili

$$\boldsymbol{A_1B_2 = A_2B_1}$$

ako su jednačine datih pravih u implicitnom obliku.

Ako je $k_1 = k_2$ i $n_1 = n_2$, odnosno $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, reč je o jednoj istoj pravoj (koja je takođe paralelna samoj sebi), i tada se dve date prave poklapaju.

Za dve normalne prave $y = k_1x + n_1$ i $y = k_2x + n_2$ važi:

$$\mathbf{1 + k_1k_2 = 0}\,. \quad (12)$$

Primer 1. *Naći jednačinu prave koja sadrži presečnu tačku pravih* $2x + 3y - 7 = 0$ *i* $x + 2y - 5 = 0$ *i:*
a) paralelna je sa pravom $2x + y + 4 = 0$*;*
b) normalna je na pravu $x - y + 7 = 0$.

Rešenje. Prvo je potrebno pronaći presečnu tačku datih pravih. Rešavanjem sistema jednačina $2x + 3y - 7 = 0$ *i* $x + 2y - 5 = 0$ dobija se da je presečna tačka $A(-1,3)$.

a) Pošto je tražena prava paralelna sa pravom $2x + y + 4 = 0$, treba odrediti koeficijent pravca k_1 date prave i to je $k_1 = -2$. Dakle, koeficijent pravca tražene prave je takođe $k = -2$, što sledi iz uslova paralelnosti (11).
Sada treba odrediti jednačinu prave čiji je koeficijent pravca $k = -2$ i sadrži tačku $A(-1,3)$.

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$
$$y - 3 = -2(x + 1),$$

odakle je tražena jednačina prave $2x + y - 1 = 0$.

b) Koeficijent pravca tražene prave treba odrediti iz uslova normalnosti, nakon što odredimo koeficijent pravca date prave. Koeficijent pravca date prave je $k_1 = 1$, pa se iz uslova normalnosti (12) dobija da je $k_2 = -1$.
Tražena prava ima koeficijent pravca $k = -1$ i sadrži tačku $A(-1,3)$, pa je njena jednačina $x + y - 2 = 0$.

Primer 2. *Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz tačku* $M(1,3)$ *i obrazuje sa pravom* $3x + 5y + 1 = 0$ *ugao* φ*, tako da je* $tg\ \varphi = \frac{4}{7}$.

Rešenje. Na osnovu formule (10) za tangens ugla između dve prave treba odrediti koeficijent pravca tražene prave, a zatim na osnovu koeficijenta pravca i tačke M dobija se jednačina tražene prave.

$$3x + 5y + 1 = 0,$$
$$5y = -3x - 1,$$
$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5},$$

odakle se dobija da je $k_1 = -\frac{3}{5}$.

$$tg\ \varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|,$$

$$\frac{4}{7} = \left|\frac{k_2 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}k_2}\right|,$$

pa je $\frac{k_2+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}k_2} = \frac{4}{7}$ ili $\frac{k_2+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}k_2} = -\frac{4}{7}$.

Rešavanjem ove dve jednačine dobijaju se dva rešenja za koeficijente pravca: $k = -\frac{1}{47}$ ili $k = -\frac{41}{23}$. Koristeći formulu (8) za jednačinu prave koja sadrži datu tačku dobija se da su tražene prave $x + 47y - 142 = 0$ i $41x + 23y - 110 = 0$.

2.8. Pramen pravih

Definicija. *Skup svih pravih u ravni koje prolaze kroz tačku $S(x_0, y_0)$ naziva se pramen pravih. Tačka S naziva se centar pramena.*

Ako su $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ jednačine dve prave koje se seku u tački S, tada jednačina:

$$\boldsymbol{\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0},\ \ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

predstavlja jednačinu pramena pravih sa centrom S. Kao što se može videti u [5], ako se za $\alpha \neq 0$ stavi $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, dobija se jednačina:

$$\boldsymbol{A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0},$$

koja predstavlja sve prave pramena kroz S, osim prave $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Primer. *Proveriti da li prava* $7x + 2y - 15 = 0$ *pripada pramenu pravih* $5x + 3y + 6 + \lambda(3x - 4y - 37) = 0$.

Rešenje. Jednačina pramena pravih se može napisati u obliku:

$$(5 + 3\lambda)x + (3 - 4\lambda)y + (6 - 37\lambda) = 0\ .$$

Data prava pripada pramenu ako postoji λ tako da važi:

$$\frac{5 + 3\lambda}{7} = \frac{3 - 4\lambda}{2} = \frac{6 - 37\lambda}{-15}.$$

Ovo je sistem od dve jednačine sa jednom nepoznatom koji nema rešenje, iz čega se zaključuje da prava ne pripada datom pramenu pravih.

2.9. Rastojanje između tačke i prave

Kada se traži rastojanje između tačke i prave misli se na najkraće rastojanje, jer je ono jedinstveno, a to je rastojanje pod pravim uglom.
Rastojanje tačke $M(x_0, y_0)$ od prave $Ax + By + C = 0$ se može izračunati sledećom formulom:

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}.$$

Primer. *Odrediti jednačinu prave koja je podjednako udaljena od paralelnih pravih* $3x + 5y + 4 = 0$ *i* $3x + 5y - 1 = 0$.

Rešenje. Ako je $M(x, y)$ proizvoljna tačka tražene prave, tada je podjednako udaljena od datih pravih i važi:

$$\frac{|3x + 5y + 4|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{|3x + 5y - 1|}{\sqrt{3^2 + 5^2}},$$

odakle se dobija $3x + 5y + 4 = \pm(3x + 5y - 1)$. Pošto mogućnost $3x + 5y + 4 = +(3x + 5y - 1)$ dovodi do apsurda $(4 = -1)$, ostaje da je jednačina tražene prave $3x + 5y + 4 = -(3x + 5y - 1)$ ili $6x + 10y + 5 = 0$.

3. Krive drugog reda

Poglavlje *Krive drugog reda* sadrži pojedinačne elektronske lekcije o kružnici, elipsi, hiperboli i paraboli i njihove uzajamne položaje sa pravom. Učenici, još u petom razredu osnovne škole, uče šta je to kružnica (kružna linija) i koja je razlika između kružnice i kruga. Uče i koji su to uzajamni položaji dve kružnice i dva kruga i kako za određivanje uzajamnog položaja da koriste rastojanje između centara i poluprečnike. Ali sa jednačinom kružne linije se sreću tek u srednjoj školi. I sa parabolom se sreću pre trećeg razreda, kada u drugom razredu srednje škole uče grafik kvadratne funkcije.
Opšte je poznato da učenici mnogo lakše usvajaju gradivo koje im je vizuelno prikazano, posebno ako oni mogu interaktivno da učestvuju. U elektronskim lekcijama u ovom poglavlju brojni primeri su propraćeni GeoGebra apletima u kojima učenici sami unose jednačine krivih, koordinate tačaka i slično, i na taj način lako mogu da uoče šta se menja sa promenom tih podataka, kao i da provere rešenja zadataka.

3.1. Kružnica

Definicija. *Kružna linija (kružnica) je skup tačaka u ravni koje su podjednako udaljene od jedne fiksirane tačke (centra kružnice).*

Ako je $C(p,q)$ centar kružnice, stalno rastojanje (poluprečnik kružnice) r, a $M(x,y)$ proizvoljna tačka kružnice, tada je $d(C,M)=r$ ili

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=r\ ,$$

odakle je:

$$\boldsymbol{(x-p)^2+(y-q)^2=r^2} \qquad (13)$$

i to je kanonska jednačina kružne linije sa centrom $C(p,q)$ i poluprečnikom r.
Ako se centar kružne linije poklapa sa koordinatnim početkom, tj. važi $C(0,0)$, jednačina kružne linije ima oblik:

$$\boldsymbol{x^2+y^2=r^2}\ . \qquad (14)$$

Svaka kružna linija u ravni ima kanonsku jednačinu koja posle sređivanja postaje:

$$x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0$$

i ona je specijalan slučaj sledeće opšte jednačine drugog stepena:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Cy+F=0, (A,B,C,D,E,F\in\mathbb{R}).$$

Ova jednačina samo pod određenim uslovima predstavlja jednačinu kružne linije. Mora da važi sledeće:

$$B = 0, \frac{A}{1} = \frac{C}{1} = \frac{D}{-2p} = \frac{E}{-2q} = \frac{F}{p^2 + q^2 - r^2} = \lambda \neq 0 \,,$$

odakle se dobija $A = C = \lambda \neq 0$, pa posle deljenja koeficijentom A jednačina postaje:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0,$$

tj. da bi se formirali kvadrati binoma kao u kanonskoj jednačini:

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2} + y^2 + \frac{E}{A}y + \frac{E^2}{4A^2} + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E^2}{4A^2} = 0$$

ili

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Da bi ova jednačina predstavljala jednačinu kružne linije, broj na desnoj strani mora da bude pozitivan, tj. mora da bude ispunjen uslov:

$$D^2 + E^2 - 4AF > 0 \,.$$

Dakle, jednačina $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Cy + F = 0$ predstavlja kružnu liniju ako i samo ako je:

$$B = 0, A = C \neq 0, D^2 + E^2 - 4AF > 0 \,.$$

Njen centar je $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$, a poluprečnik $r = \frac{1}{2|A|}\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}$.

Naredni primer je jedan od osnovnih i početnih primera koji se rešavaju kada se uvede jednačina kružne linije.

Primer. *Odrediti jednačinu kružne linije koja sadrži tačke* $A(7,1), B(5,5), C(-2,4)$.

Rešenje. Dati problem se može rešiti na dva načina. Jedan je da se, zamenjujući koordinate tačaka A, B, C u jednačinu kružne linije, dobije sistem od tri jednačine sa tri nepoznate p, q, r. Dobija se:

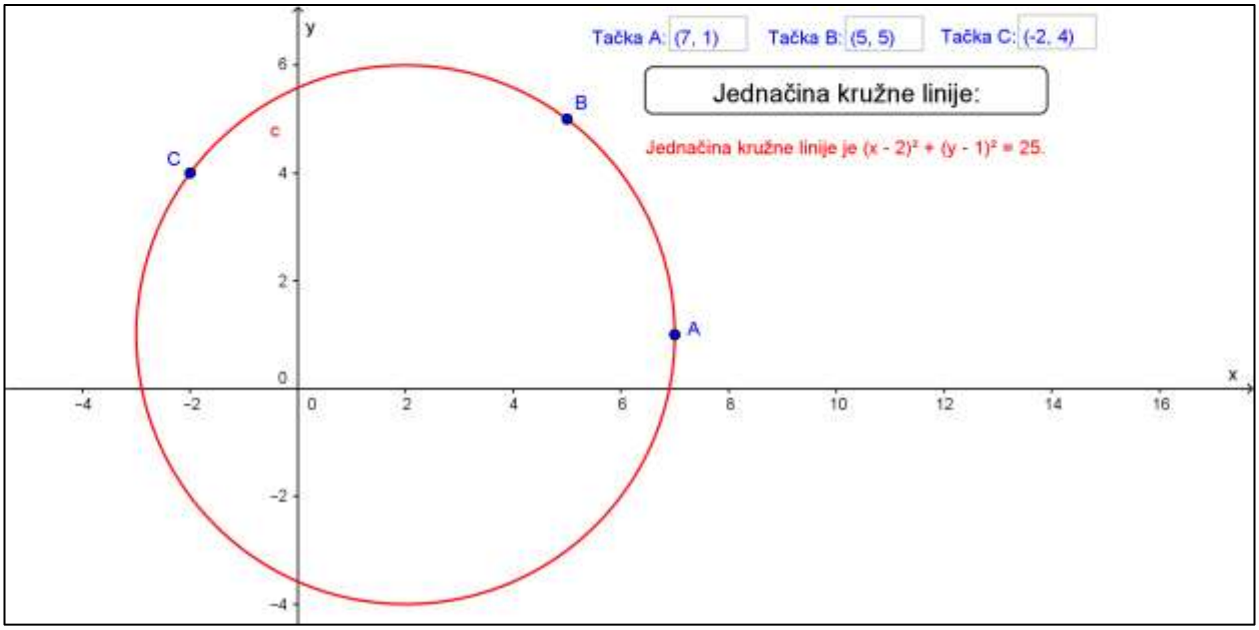
$$(7-p)^2 + (1-q)^2 = r^2 \wedge (5-p)^2 + (5-q)^2 = r^2 \wedge (-2-p)^2 + (4-q)^2 = r^2 \,.$$

Ovaj sistem ima jedinstveno rešenje $(p, q) = (2,1)$ i to je centar tražene kružne linije. Ako se nađene vrednosti za p i q zamene u bilo koju od tri polazne jednačine sistema po p, q, r nalazi se da je $r^2 = 25$. Prema tome, jednačina kružne linije glasi:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \,.$$

Drugi način za rešavanje je odrediti simetrale duži AB i BC, na primer, i njihovu presečnu tačku S koja je centar tražene kružne linije, a zatim rastojanje tačke S od bilo koje od tačaka A, B, C koje je poluprečnik tražene kružne linije.

Na slici 7 je prikazan aplet u kome se nakon unošenja koordinata tri tačke koje pripadaju kružnici dobija jednačina te kružnice.



Slika 7: Aplet koji prikazuje jednačinu kružnice koja sadrži tri date tačke

3.2. Kružna linija i prava

U petom razredu osnovne škole bilo je dovoljno znati koliko je centar kružnice udaljen od neke prave, da bi se na osnovu upoređivanja sa poluprečnikom utvrdio uzajamni položaj prave i kružnice. U elektronskoj lekciji *Kružna linija i prava* navedeni su svi uslovi na osnovu kojih se razlikuju uzajamni položaji prave i kružnice.

Prava $y = kx + n$ (ili $x = m$) i kružnica $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ mogu imati najviše dve zajedničke tačke. U slučaju kada nemaju zajedničkih tačaka ispunjen je uslov da je rastojanje centra kružnice od date prave veće od poluprečnika kružnice. Ako prava i kružnica imaju dve zajedničke tačke, ta prava se naziva sečica, tačke preseka se dobijaju rešavanjem sistema jednačina koji čine jednačina date prave i kružnice i tada je ispunjen uslov da je rastojanje centra kružnice od date prave manje od poluprečnika. Ukoliko prava i kružnica imaju tačno jednu zajedničku tačku važi da je rastojanje centra kružnice od date prave tačno jednako poluprečniku te kružnice i ta prava se naziva tangenta. Ako je prava $y = kx + n$ tangenta kružnice $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ tada važi uslov dodira prave i kružnice:

$$\boldsymbol{r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2}\,. \quad (15)$$

U slučaju da je tangenta oblika $x = m$, ako je centar kružnice $C(p, q)$ jednačine tangenti su $x = p \pm r$, a ako je centar koordinatni početak $(0,0)$ jednačine tangenti su $x = \pm r$.

U slučaju kada je centar kružnice koordinatni početak, tj. jednačina kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, uslov dodira se svodi na jednakost:

$$\boldsymbol{r^2(k^2 + 1) = n^2} . \quad (16)$$

Ako je $T(x_0, y_0)$ dodirna tačka kružnice i tangente, tada jednačina tangente ima oblik:

$$\boldsymbol{(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) = r^2} . \quad (17)$$

Ako tangente t_1 i t_2 kružnice sa dodirnim tačkama T_1 i T_2 imaju zajedničku tačku A, onda se ta kružnica iz tačke A vidi pod uglom $\varphi = \angle T_1AT_2$.

Ugao pod kojim se seku neka prava i kružnica jeste ugao između te prave i tangente date kružnice, postavljene u presečnoj tački.

Primer 1. *Data je prava* $x + 2y + 1 = 0$ *i kružnica* $x^2 + y^2 = 5$. *Odrediti jednačine tangenata date kružnice koje su:*

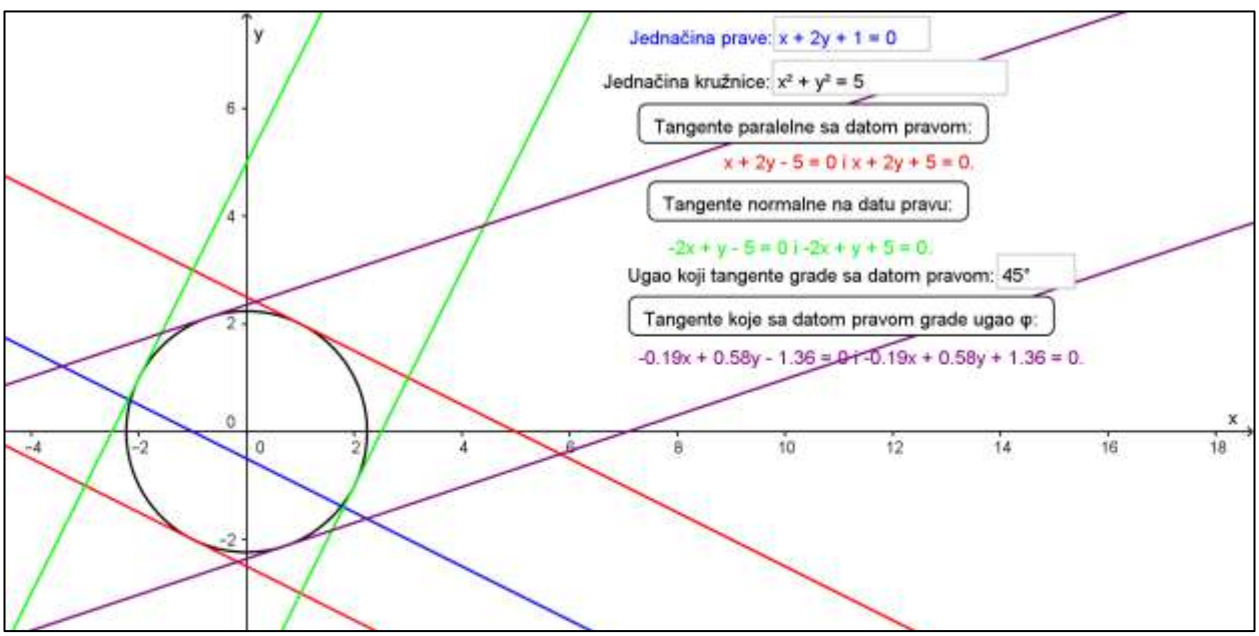
a) paralelne sa datom pravom;

b) normalne na datu pravu;

c) sa datom pravom grade ugao od $45°$.

Rešenje. Prevođenjem u eksplicitni oblik dobija se koeficijent pravca date prave, a onda se iz uslova paralelnosti, normalnosti ili formule za ugao koji obrazuju data prava i tangenta dobija koeficijent pravca tangente. Koeficijent n se tada dobija iz uslova dodira (16).

Na slici 8 prikazan je aplet u kome se unošenjem odgovarajućih podataka u tekstualna polja i klikom na dugme crtaju odgovarajuće tangente i ispisuju njihove jednačine.

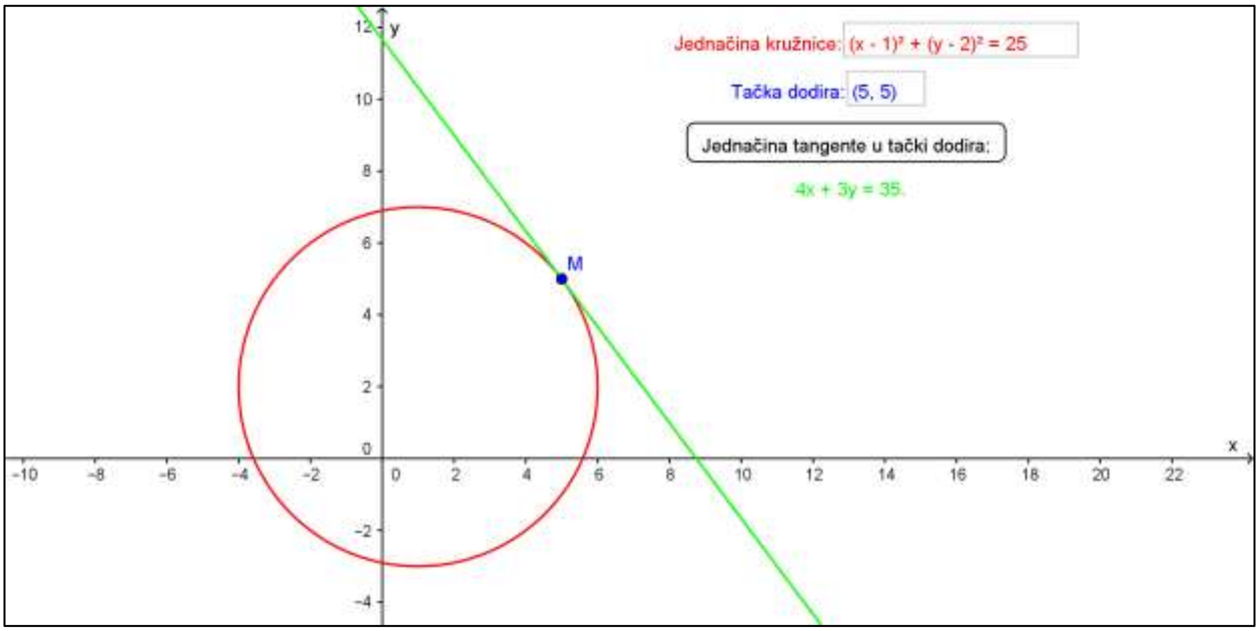


Slika 8: Aplet koji prikazuje tangente kružnice

Primer 2. *Odrediti jednačinu tangente kružnice* $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ *u tački* $M(5,5)$ *koja pripada kružnici.*

Rešenje. Jednačina tangente se može dobiti primenom formule (17) za jednačinu tangente u tački koja pripada kružnici.

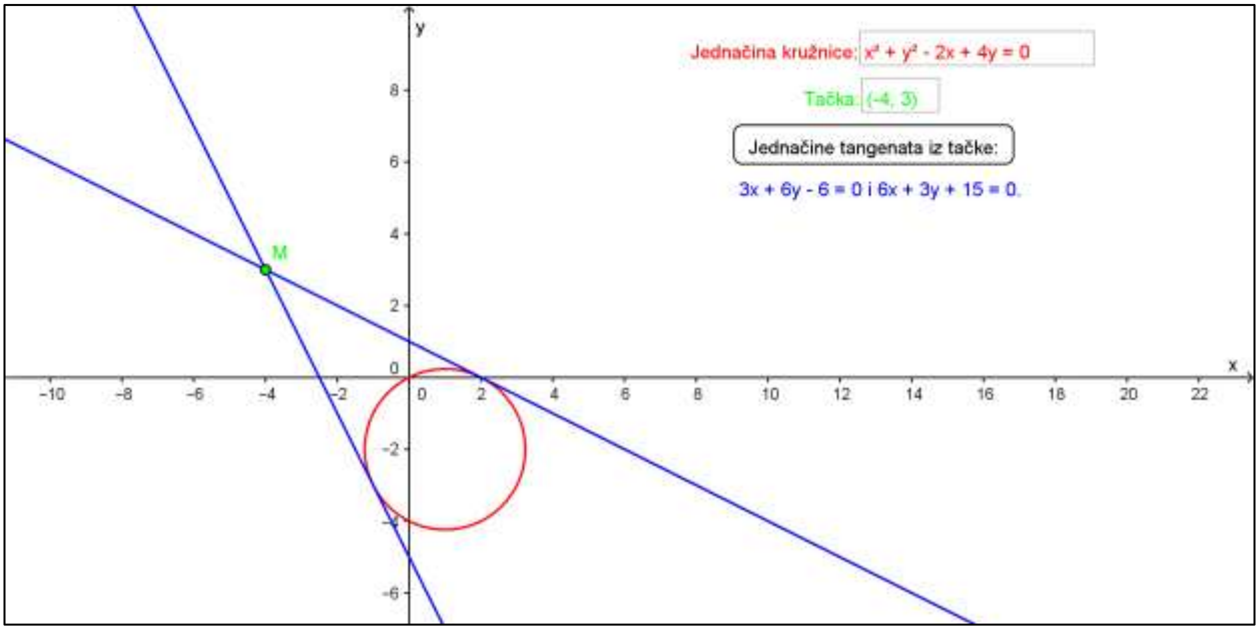
U GeoGebra aplet prikazan na slici 9, potrebno je prvo u tekstualna polja uneti ispravne podatke iz primera, a zatim, klikom na dugme, crta se i ispisuje jednačinu tangente u tački M.



Slika 9: Aplet pomoću kojeg se određuje tangenta u tački koja pripada kružnici

Primer 3. *Odrediti jednačine tangenata kružnice konstruisanih iz tačke* $M(-4,3)$ *na kružnicu* $x^2+y^2-2x+4y=0$.

Rešenje. Data tačka pripada tangenti iz čega se može dobiti veza između koeficijenata k i n, a zatim na osnovu uslova dodira (15) se dobijaju koeficijenti i jednačine tangenti.
Na slici 10 je prikazan aplet koji prikazuje jednačine tangenti, nakon unošenja jednačine kružnice i koordinata tačke iz koje se konstruišu tangente.



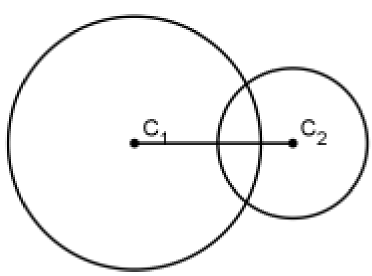
Slika 10: Aplet koji prikazuje jednačine tangenti konstruisane iz date tačke na kružnicu

3.3. Dve kružnice

Učenici znaju još iz osnovne škole kako da utvrde uzajamni položaj kružnica kada su dati njihovi poluprečnici i kada je dato rastojanje između centara kružnica. Sada, kada je data jednačina kružnice, pa se iz nje mogu odrediti svi elementi kružnice, i kada je u elektronskoj lekciji *Rastojanje između dve tačke* dato kako se može odrediti rastojanje između centara, lako se, na isti način kao u osnovnoj školi, utvrđuje uzajamni položaj kružnica.

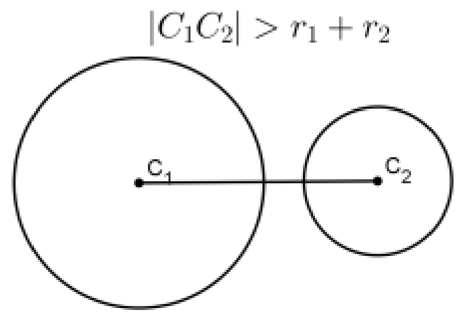
Neka su k_1 i k_2 kružne linije sa centrima C_1 i C_2 i poluprečnicima r_1 i r_2.
Kružnice imaju dve zajedničke tačke kada je rastojanje između centara C_1 i C_2 manje od zbira poluprečnika, a veće od njihove razlike (slika 11).

$$|r_2 - r_1| < |C_1C_2| < r_1 + r_2$$



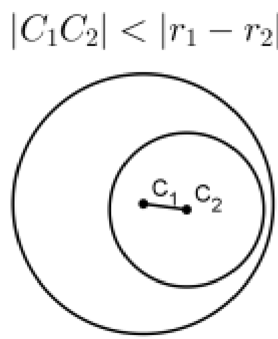
Slika 11: Dve kružnice koje imaju dve zajedničke tačke

Kružnice nemaju zajedničkih tačaka kada je jedna kružnica izvan druge (slika 12)



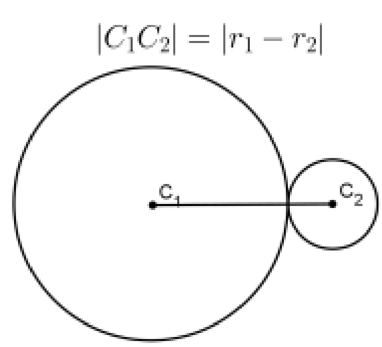
Slika 12: Kružnice koje nemaju zajedničkih tačaka

ili kada je jedna kružnica unutar druge (slika 13).



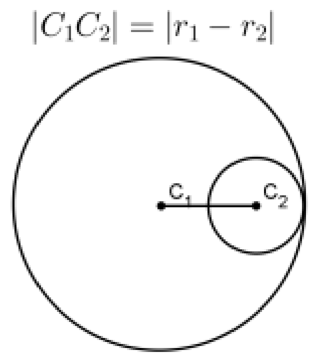
Slika 13: Jedna kružnica unutar druge kružnice

Kružnice imaju samo jednu zajedničku tačku ako se dodiruju spolja (slika 14)



Slika 14: Kružnice koje se dodiruju spolja

ili ako se dodiruju iznutra (slika 15).

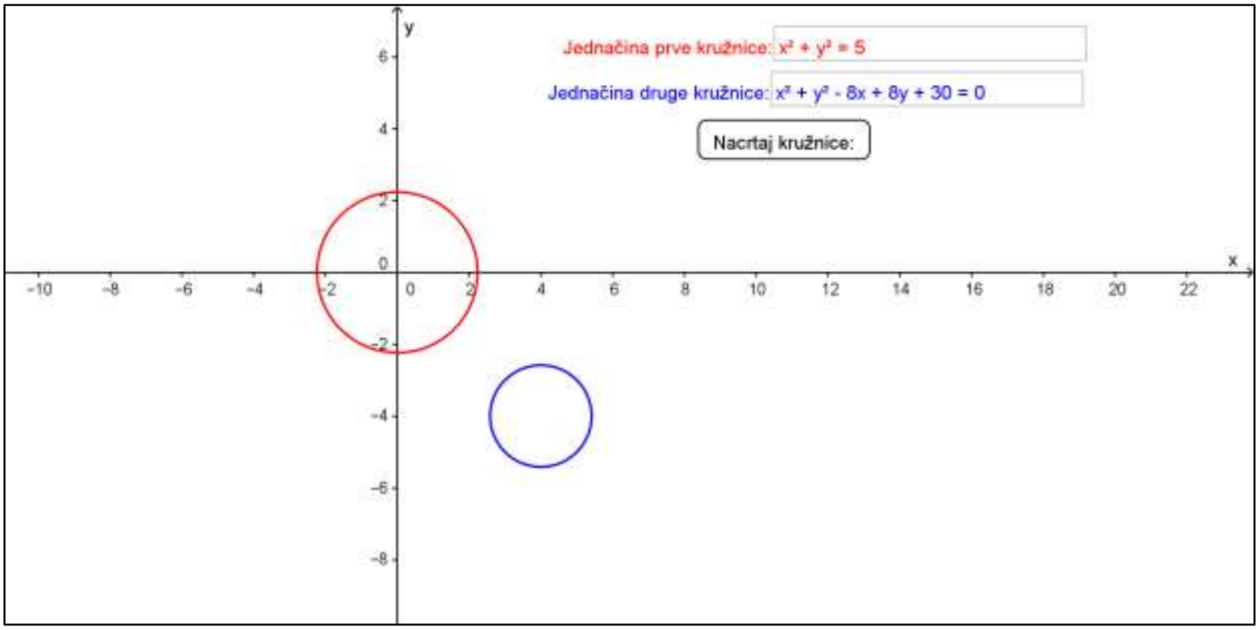


Slika 15: Kružnice koje se dodiruju iznutra

Kružnice su koncentrične ako imaju isti centar.
Uzajamni položaj dve kružnice se jednostavno ispituje kad su poznate njihove jednačine. Postupak je prikazan u sledećem primeru, a napravljen je i GeoGebra aplet uz pomoć kog učenici lako i grafički mogu da provere svoje rešenje.

Primer. *Ispitati položaj kružnih linija* $x^2 + y^2 = 5$ *i* $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 30 = 0$.

Rešenje. Centar prve kružnice je $C_1(0,0)$, a druge $C_2(4,-4)$. Odgovarajući poluprečnici su $r_1 = \sqrt{5}$, $r_2 = \sqrt{2}$. Rastojanje između centara je $|C_1C_2| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$, pa kako je $4\sqrt{2} > \sqrt{5} + \sqrt{5}$, zaključuje se da ove kružnice nemaju zajedničkih tačaka.
Za ove kružnice, ali i za bilo koje druge, u apletu koji je prikazan na slici 16 se grafički može proveriti njihov odnos, unoseći njihove jednačine u tekstualna polja i zatim klikom na dugme.



Slika 16: Aplet koji ispituje uzajamni položaj dve kružnice

Ako se dve kružnice seku ugao između njih se definiše kao ugao između njihovih tangenti u jednoj presečnoj tački. Specijalno, ako se dve kružne linije seku pod pravim uglom, kaže se da su one ortogonalne. Važno svojstvo ortogonalnih kružnica je da tangente svake od njih u presečnim tačkama prolaze kroz centar druge. Zato, na osnovu Pitagorine teoreme, za ortogonalne kružnice važi:

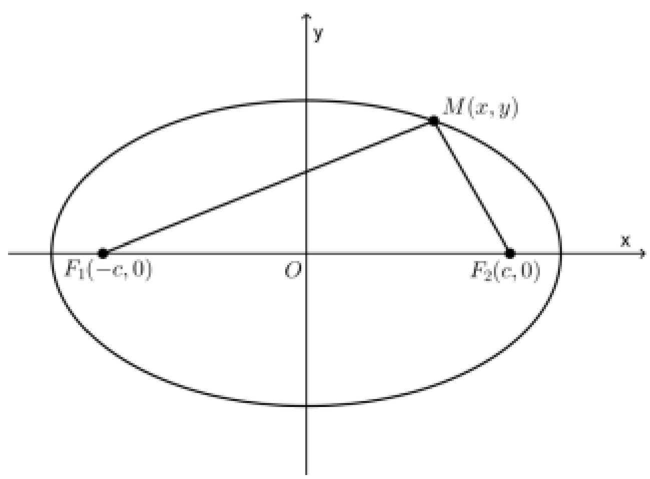
$$|C_1C_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 .$$

3.4. Elipsa

Učenici se sa elipsom prvi put sreću u trećem razredu, kada uče analitičku geometriju u ravni. Kada su u elektronskoj lekciji *Kružnica* naučili jednačinu kružnice, lako će moći da primete da jednačine kružnice i elipse imaju dosta sličnosti. U ovoj elektronskoj lekciji navedena je definicija elipse, svi njeni elementi, i kroz rešene primere je prikazano kako se do njih dolazi.

Definicija. *Elipsa je skup svih tačaka u ravni takav da je za svaku od njih zbir rastojanja od dveju datih tačaka konstantan.*

Te dve tačke se obeležavaju sa F_1 i F_2 i zovu se žiže ili fokusi elipse. Neka je rastojanje između tačaka F_1 i F_2 jednako $2c$ $(c \geq 0)$. Za $c = 0$, tj. ako je $F_1 \equiv F_2$ dobija se slučaj kružnice. Neka žiže F_1 i F_2 pripadaju x-osi i neka su simetrične u odnosu na koordinatni početak, tj. neka je $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$ (slika 17). Označimo sa $2a (a > 0)$ zbir rastojanja proizvoljne tačke elipse od žiža F_1 i F_2, koji je prema definiciji elipse konstantan.



Slika 17: Žiže elipse

Odnos $\frac{c}{a}$ je numerički ekscentricitet elipse i označava se sa e, tj. $e = \frac{c}{a}$. Uz oznaku $b = \sqrt{a^2 + b^2}$ i osobinu elipse da je zbir rastojanja proizvoljne tačke $M(x, y)$ od žiža elipse F_1 i F_2 konstantan dobija se jednačina elipse:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \, .$$

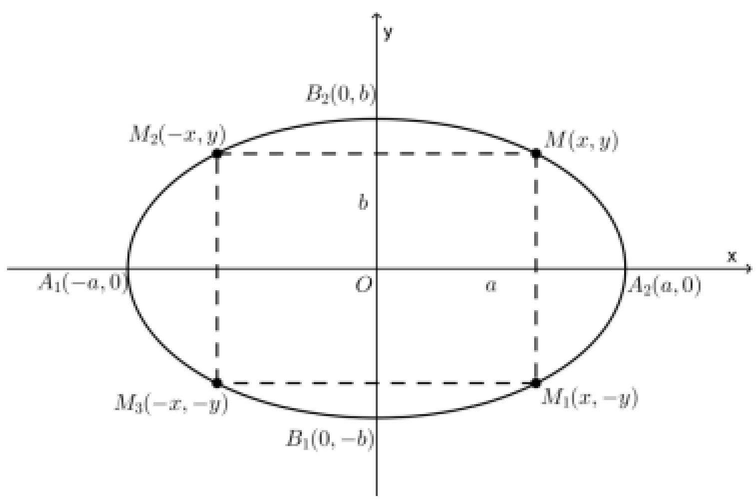
Ovakav oblik naziva se kanonski oblik jednačine elipse. Jednačina elipse može biti i u obliku:

$$\boldsymbol{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2} \, .$$

Veličine a i b nazivaju se poluose elipse. Pri tom, zbog $a \geq b$ za a se kaže da je velika poluosa, a b mala poluosa elipse. Rastojanje žiže od centra elipse naziva se linearni ekscentricitet i važi $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Ako tačka $M(x, y)$ pripada elipsi, tada njoj pripadaju i tačke $M_1(x, -y), M_2(-x, y)$ i $M_3(-x, -y)$, tj. koordinatne ose su ose simetrije elipse, a koordinatni početak centar simetrije elipse. Tačka $(0,0)$ je centar elipse.

Tačke $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b)$ i $B_2(0, b)$ takođe pripadaju elipsi i zovu se temena elipse (slika 18).



Slika 18: Elipsa

Prave čije su jednačine $x = \pm\frac{a}{e}$ nazivaju se direktrise elipse. Radijus vektori tačke elipse $M(x, y)$ su dužine:

$$r_1 = F_1M = a - \frac{c}{a}x, \qquad r_2 = F_2M = a + \frac{c}{a}x \, .$$

Parametar elipse je $p = \frac{b^2}{a}$.

Primer 1. *Neka je data jednačina elipse* $3x^2 + 4y^2 = 12$. *Odrediti poluose date elipse, žiže i numerički ekscentricitet.*

Rešenje. Jednačina elipse se može napisati u obliku:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \,.$$

Poluose su $a = 2$ i $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$, pa su žiže elipse $F_1(-1,0)$ i $F_2(1,0)$. Ekscentricitet je $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

Primer 2. *Na pravoj* $x = -5$ *odrediti tačku jednako udaljenu od "leve" žiže i "gornjeg" temena elipse.*

Rešenje. Pošto tražena tačka pripada pravoj $x = -5$, apscisa tražene tačke je -5, tj. tražena tačka je oblika $M(-5, y)$, i ostaje da se odredi njena ordinata. Data elipsa se može zapisati u obliku:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1 \,,$$

odakle se dobija $a = \sqrt{20}, b = 2, c = 4$, pa je "leva" žiža tačka $F_1(-4,0)$, a "gornje" teme je tačka $B_2(0,2)$. Tražena tačka $M(-5, y)$ je jednako udaljena od tačaka F_1 i B_2, pa se iz jednakosti rastojanja, tj. $|F_1M| = |MB_2|$ dobija da je $y = 7$ i tražena tačka je $M(-5,7)$.

3.5. Elipsa i prava

Uzajamni položaj prave i elipse određuje se na sličan način kao što je to prikazano u elektronskoj lekciji *Kružnica i prava*.

Da bi se odredile zajedničke tačke prave $y = kx + n$ (ili $x = m$) i elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, potrebno je rešiti sistem jednačina:

$$\left(y = kx + n \ \wedge \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right) \vee \left(x = m \ \wedge \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right) .$$

Eliminacijom promenljive y dolazi se do kvadratne jednačine:

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2kna^2x + a^2n^2 - a^2b^2 = 0 \,,$$

čija je diskriminanta, kada se sredi,

$$4a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - n^2).$$

S obzirom da je $4a^2b^2 > 0$ odnos prave i elipse zavisi od izraza $a^2k^2 + b^2 - n^2$.
Ako je $a^2k^2 + b^2 - n^2 > 0$ prava $y = kx + n$ seče elipsu u dvema različitim tačkama.
Ako je $a^2k^2 + b^2 - n^2 < 0$ prava i elipsa nemaju zajedničkih tačaka.

Ako je $a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0$ prava ima samo jednu zajedničku tačku sa elipsom. Ta prava je tangenta elipse i tada važi uslov dodira prave i elipse:

$$\boldsymbol{a^2k^2 + b^2 = n^2} \,. \quad (18)$$

U slučaju tangente oblika $x = m$, jednačine tih tangenti su $x = \pm a$.
Jednačina tangente na elipsu u tački $M(x_1, y_1)$ koja pripada elipsi ima oblik:

$$\boldsymbol{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \text{ ili } b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2} \,. \quad (19)$$

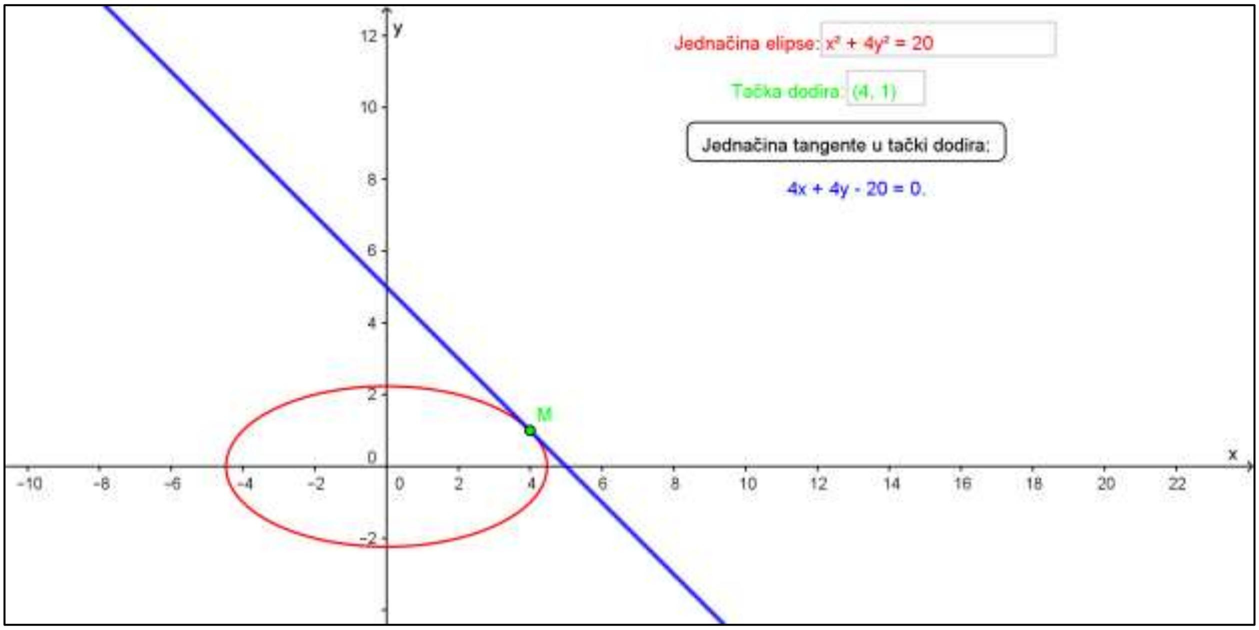
Prava kroz tačku $M(x_1, y_1)$, normalna na tangentu je normala elipse u tački $M(x_1, y_1)$. Ugao pod kojim prava seče elipsu je ugao koji ta prava određuje sa tangentom u presečnoj tački. Ugao pod kojim se se seku dve elipse je ugao između njihovih tangenti u jednoj presečnoj tački.

U ovoj elektronskoj lekciji, pored navedenih slučajeva uzajamnih položaja prave i elipse i uslova kada oni važe, rešeni su i primeri koji prikazuju te slučajeve.

Primer 1. *Odrediti jednačinu tangente na elipsu* $x^2 + 4y^2 = 20$ *u tački* $(4,1)$ *koja joj pripada.*

Rešenje. Jednačina tangente se može dobiti primenom formule (19) za jednačinu tangente u tački koja pripada elipsi.

U apletu koji je prikazan na slici 19 može se takodje dobiti jednačina tražene tangente. U dati aplet moguće je uneti i bilo koju drugu jednačinu elipse ili druge koordinate tačke, da bi se dobila jednačina tražene tangente.

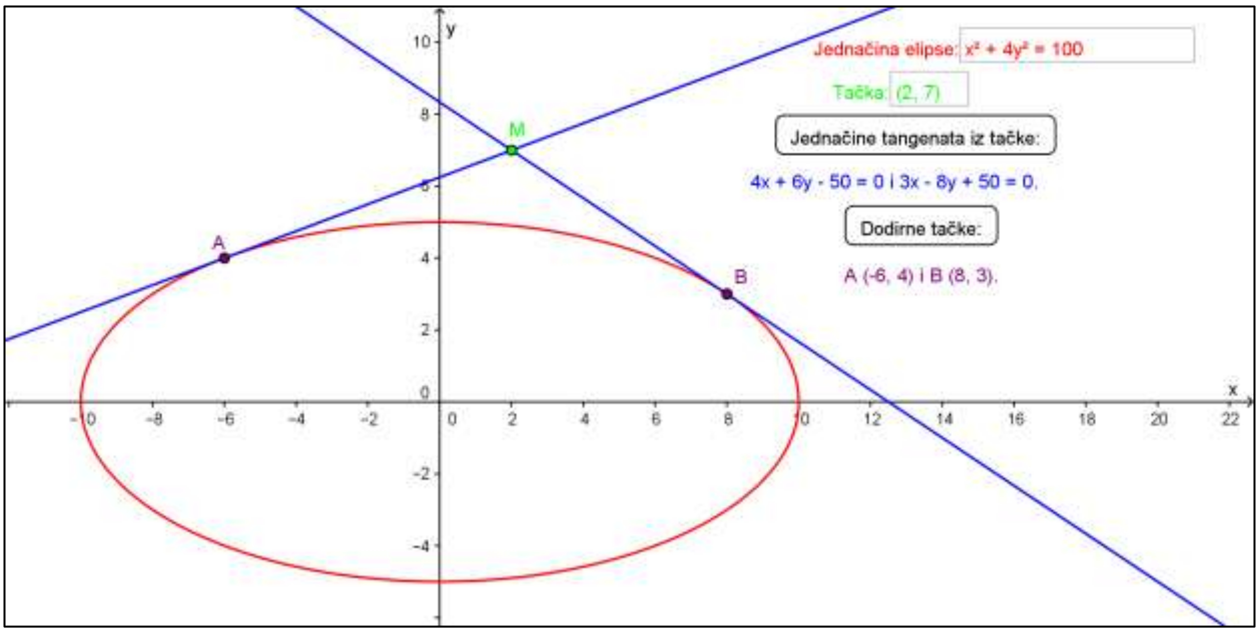


Slika 19: Aplet u kojem se određuje jednačina tangente elipse u tački koja pripada elipsi

Primer 2. *Odrediti jednačine tangenata konstruisanih iz tačke* $(2,7)$ *na elipsu* $x^2 + 4y^2 = 100$ *i odrediti koordinate dodirnih tačaka.*

Rešenje. Data tačka pripada tangenti iz čega se može dobiti veza između koeficijenata k i n, a zatim na osnovu uslova dodira (18) se dobijaju koeficijenti i jednačine tangenti. Koordinate dodirnih tačaka se dobijaju rešavanjem sistema jednačina koji čine jednačina tangente i jednačina elipse.

Rešenje se može dobiti i uz pomoć apleta prikazanog na slici 20.



Slika 20: Aplet u kojem se određuju tangente iz tačke i dodirne tačke sa elipsom

Primer 3. *Data je prava* $x + y - 1 = 0$ *i elipsa* $9x^2 + 16y^2 = 144$. *Odrediti jednačine tangenata date elipse koje su:*

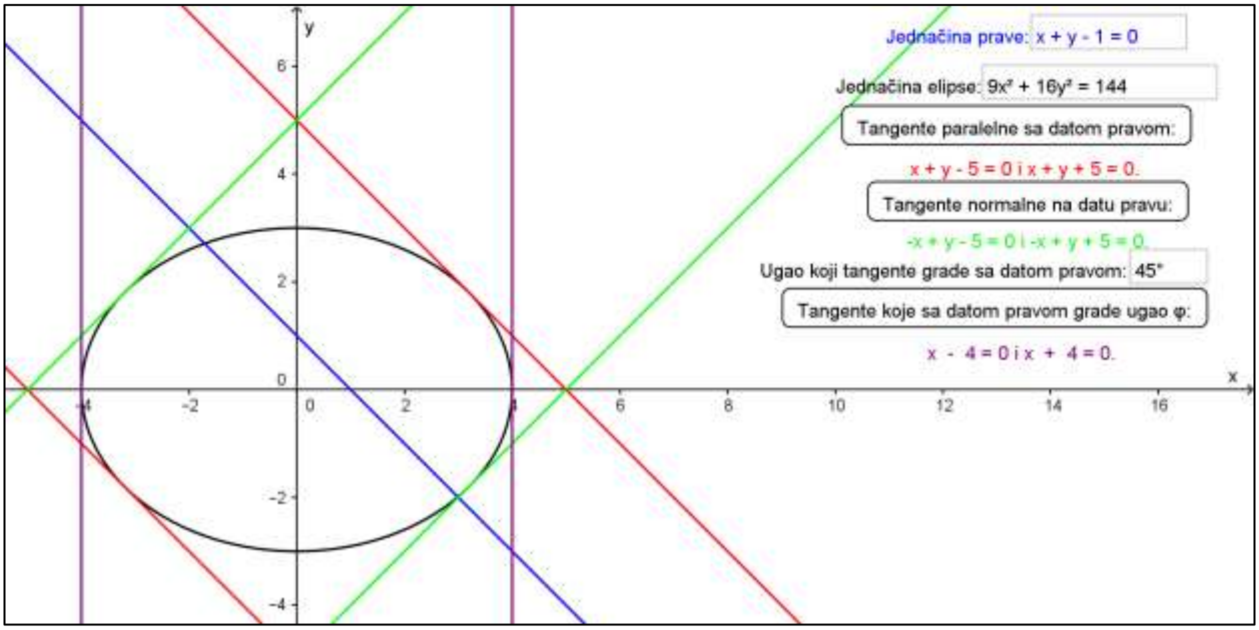
a) paralelne sa datom pravom;

b) normalne na datu pravu;

v) sa datom pravom grade ugao od 45°.

Rešenje. Prevođenjem u eksplicitni oblik dobija se koeficijent pravca date prave, a onda se iz uslova paralelnosti, normalnosti ili formule za ugao koji obrazuju data prava i tangenta dobija koeficijent pravca tangente. Koeficijent n se tada dobija iz uslova dodira.

Jednačine tangenata se mogu dobiti i u apletu prikazanom na slici 21.



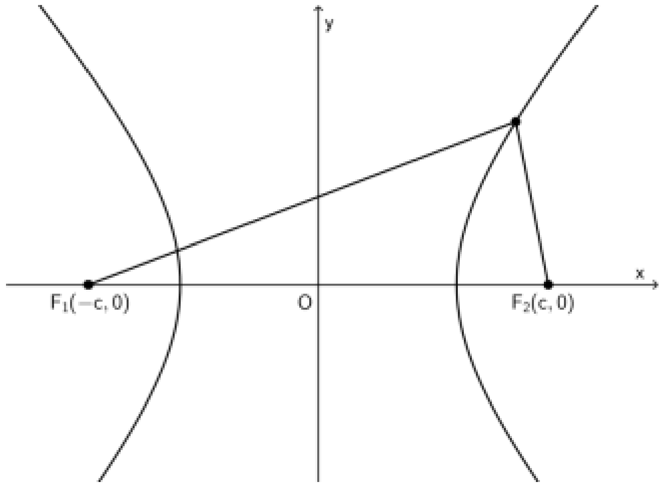
Slika 21: Aplet u kojem se dobijaju jednačine tangenata koje su paralelne, normalne ili obrazuju neki ugao sa datom pravom

3.6. Hiperbola

Kao što je slučaj sa elipsom, i sa hiperbolom se učenici detaljno upoznaju tek u trećem razredu srednje škole.

Definicija. *Hiperbola je skup svih tačaka u ravni takvih da je za svaku od njih moduo razlike rastojanja od dveju fiksiranih tačaka konstantan i različit od nule.*

Slično kao kod elipse, žiže ili fokusi hiperbole obeležavaju se sa $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$ (slika 22). Označimo sa $2a$ $(a > 0)$ moduo razlike rastojanja proizvoljne tačke hiperbole od žiža F_1 i F_2.



Slika 22: Žiže hiperbole

Neka je $M(x, y)$ proizvoljna tačka hiperbole. Tada je prema definiciji hiperbole

$$|MF_1 - MF_2| = 2a .$$

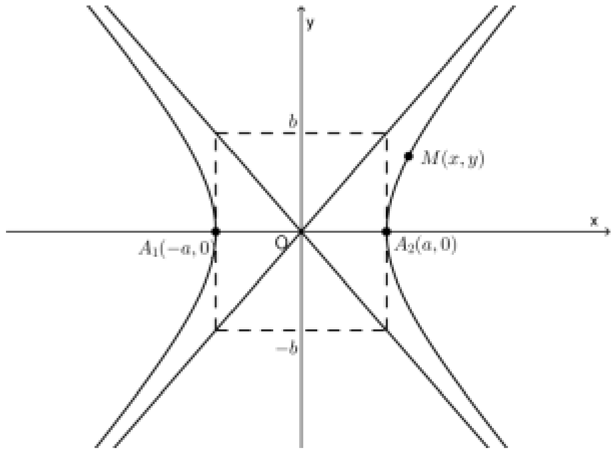
Odnos $\frac{c}{a}$ se naziva numerički ekscentricitet hiperbole i obeležava se sa $e = \frac{c}{a}$.
Uz oznaku $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ i osobinu hiperbole da je moduo razlike rastojanja proizvoljne tačke $M(x, y)$ od žiža hiperbole konstantan dobija se jednačina hiperbole:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} .$$

Ovakav oblik naziva se kanonski oblik jednačine hiperbole. Jednačina hiperbole može biti data i u obliku:

$$\boldsymbol{b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2} .$$

Veličine a i b nazivaju se poluose hiperbole, i to a je realna poluosa, a b imaginarna. Linearni ekscentricitet je parametar $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Kod hiperbole mora da važi $|x| \geq a$, iz čega sledi da u traci ograničenoj pravama $x = -a$ i $x = a$ nema tačaka koje pripadaju hiperboli. Odatle sledi da i y-osa nema zajedničkih tačaka sa hiperbolom.



Slika 23: Hiperbola

Lako se proverava da tačke $A_1(-a,0)$ i $A_2(a,0)$ pripadaju hiperboli, a pošto pripadaju redom i graničnim pravama $x=-a$ i $x=a$, tačke A_1 i A_2 nazivaju se temena hiperbole (slika 23).

Kao i u slučaju elipse, zajedno sa tačkom $M(x,y)$ i tačke $M_1(x,-y), M_2(-x,y)$ i $M_3(-x,-y)$ takođe pripadaju hiperboli. Dakle, hiperbola je simetrična u odnosu na koordinatni početak (centar hiperbole). Prave $y=-\frac{b}{a}x$ i $y=\frac{b}{a}x$ zovu se asimptote hiperbole. Osobina ovih pravih je da im se tačke hiperbole približavaju za proizvoljno velike vrednosti apscise x, kao i da se hiperbola nalazi u delu ravni koji se nalazi između asimptota hiperbole i koji sadrži x-osu.
Direktrise hiperbole su prave čije su jednačine $x=\frac{a}{e}$ i $x=-\frac{a}{e}$. Radijus vektori tačke hiperbole $M(x,y)$ su dužine:

$$r_1=\frac{c}{a}x-a, \qquad r_2=\frac{c}{a}x+a\,.$$

Parametar hiperbole je $p=\frac{b^2}{a}$.

Primer 1. *Neka je data jednačina hiperbole* $9x^2-4y^2=36$. *Odrediti poluose, žiže, asimptote i numerički ekscentricitet date hiperbole.*

Rešenje. Jednačina hiperbole se može napisati u obliku:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,$$

odakle se lako uočava da su poluose $a=2, b=3, c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$, pa su žiže hiperbole $F_1\left(-\sqrt{13},0\right)$ i $F_2\left(\sqrt{13},0\right)$. Za ovu hiperbolu $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$ i asimptote su $y=\pm\frac{3}{2}x$.

Primer 2. *Naći jednačinu hiperbole čije su asimptote* $y = \pm\frac{3}{4}x$*, a rastojanje između direktrisa je* $\frac{64}{5}$.

Rešenje. Poluose hiperbole dobijaju se rešavanjem sistema jednačina:

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \wedge \frac{2a}{e} = \frac{64}{5},$$

tj.

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \wedge \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{32}{5}.$$

Rešavanjem datog sistema dobija se da je $a = 8, b = 6$, pa jednačina tražene hiperbole glasi:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1 .$$

3.7. Hiperbola i prava

Odnos hiperbole i prave može se posmatrati pomoću sistema jednačina:

$$\left(y = kx + n \ \wedge\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right) \vee \left(x = m \ \wedge\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right).$$

U slučaju kada važi $a^2k^2 - b^2 - n^2 < 0$ hiperbola i prava imaju dve zajedničke tačke.
U slučaju $a^2k^2 - b^2 - n^2 > 0$ hiperbola i prava nemaju zajedničkih tačaka.
Prava $y = kx + n$ je tangenta hiperbole, tj. sa njom ima tačno jednu zajedničku tačku ako je:

$$\boldsymbol{a^2k^2 - b^2 = n^2 \ \wedge n \neq 0} . \quad (20)$$

Jednakost (20) je uslov dodira prave i hiperbole. Više o uslovu dodira prave i hiperbole se može naći u [2].
Prava $x = m$ može biti tangenta hiperbole u slučaju $m = \pm a$, odnosno jednačine tangenti su tada $x = \pm a$.
Jednačina tangente hiperbole u tački $M(x_1, y_1)$ koja pripada hiperboli ima oblik:

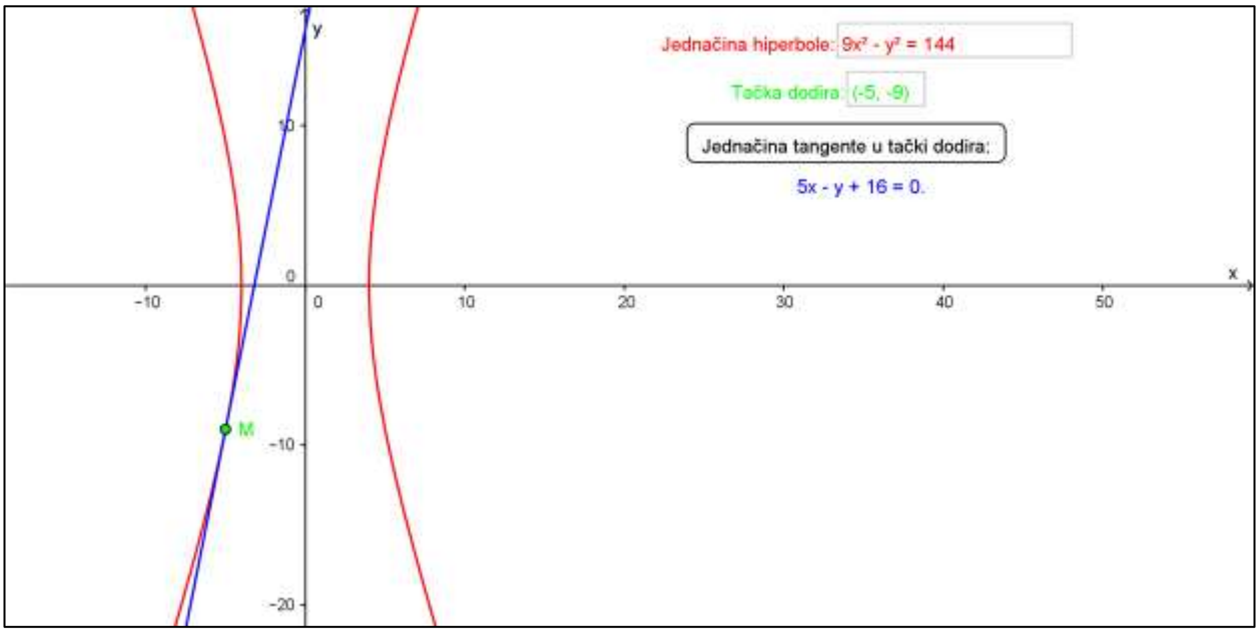
$$\boldsymbol{\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \text{ ili } b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2} . \quad (21)$$

Prava koja sadrži tačku M hiperbole, a normalna je na tangentu u toj tački, predstavlja normalu hiperbole. Ugao pod kojim prava seče hiperbolu određuje se kao ugao između te prave i tangente u presečnoj tački. Ugao pod kojim neka kriva seče hiperbolu je ugao između nihovih tangenti u jednoj presečnoj tački.

Primer 1. *Odrediti jednačinu tangente hiperbole* $9x^2 - y^2 = 144$ *u tački* $(-5, -9)$ *koja joj pripada.*

Rešenje. Jednačina tangente se može dobiti primenom formule (21) za jednačinu tangente u tački koja pripada hiperboli.

Aplet koji je prikazan na slici 24 takodje određuje jednačinu tangente hiperbole u tački koja joj pripada. Moguće je uneti u tekstualna polja i bilo koju drugu jednačinu hiperbole i koordinate neke tačke koja joj pripada. Klikom na dugme opet će se ispisati jednačina i nacrtati tangenta hiperbole u datoj tački.

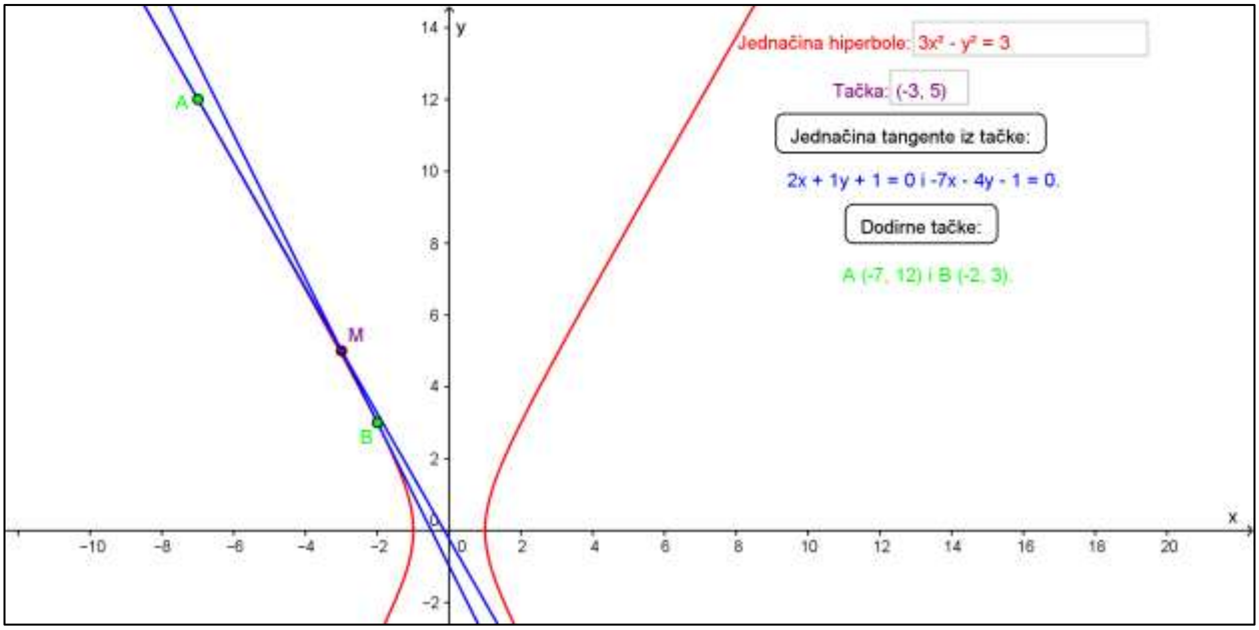


Slika 24: Aplet u kojem se prikazuje jednačina tangente u tački koja pripada hiperboli

Primer 2. *Odrediti jednačine tangenata konstruisanih iz tačke* $(-3,5)$ *na hiperbolu* $3x^2 - y^2 = 3$ *i odrediti koordinate dodirnih tačaka.*

Rešenje. Data tačka pripada tangentama iz čega se može dobiti veza između koeficijenata k i n, a zatim na osnovu uslova dodira (20) se dobijaju koeficijenti i jednačine tangenti. Koordinate dodirnih tačaka se dobijaju rešavanjem sistema jednačina koji čine jednačina tangente i jednačina hiperbole.

Rešenje se može dobiti ili proveriti i uz pomoć apleta prikazanog na slici 25.

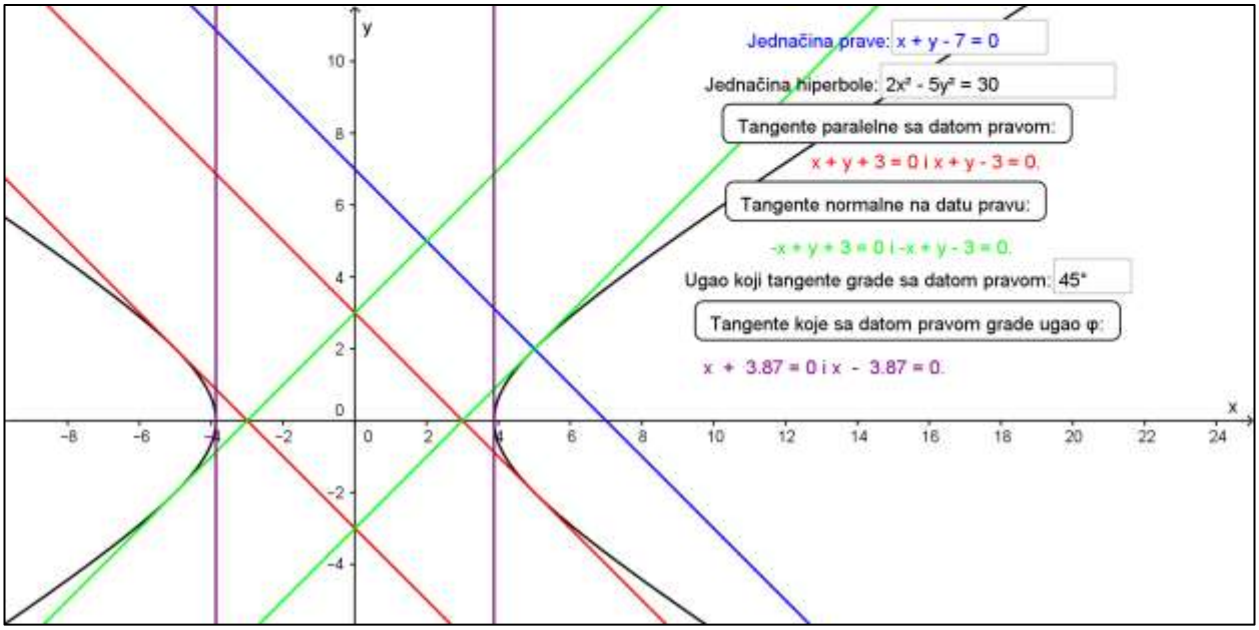


Slika 25: Aplet u kojem se određuju tangente iz tačke i dodirne tačke sa hiperbolom

Primer 3. *Data je prava* $x + y - 7 = 0$ *i hiperbola* $2x^2 - 5y^2 = 30$. *Odrediti jednačine tangenata date hiperbole koje su:*
a) paralelne sa datom pravom;
b) normalne na datu pravu;
v) sa datom pravom grade ugao od 45°.

Rešenje. Prevođenjem u eksplicitni oblik dobija se koeficijent pravca date prave, a onda se iz uslova paralelnosti, normalnosti ili formule za ugao koji obrazuju data prava i tangenta dobija koeficijent pravca tangente. Koeficijent n se tada dobija iz uslova dodira (20).

Jednačine tangenata se mogu dobiti i u apletu prikazanom na slici 26.

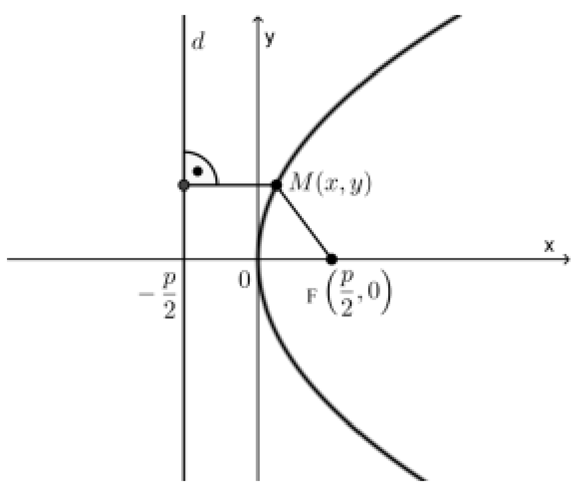


Slika 26: Aplet u kojem se dobijaju jednačine tangenata koje su paralelne, normalne ili obrazuju neki ugao sa datom pravom

3.8. Parabola

Definicija. *Parabola je skup svih tačaka u ravni takvih da je svaka od njih jednako udaljena od jedne date tačke i date prave (koja ne sadrži datu tačku).*

Data tačka označava se sa F i zove se žiža (fokus) parabole, a pravu se označava sa d i naziva direktrisa parabole. Tada su $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ i $d: x = \frac{p}{2}$ (slika 27).



Slika 27: Žiža i direktrisa parabole

Neka je $M(x,y)$ proizvoljna tačka parabole. Tada za apscisu mora da važi $x \geq 0$. Iz osobine parabole da je proizvoljna tačka podjednako udaljena od žiže i direktrise, tj. rešavanjem sledeće jednačine:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x$$

dobija se jednačina parabole:

$$\boldsymbol{y^2 = 2px}\,.$$

Ova jednačina se zove jednačina parabole u kanonskom obliku. Rastojanje između žiže i direktrise parabole se naziva parametar parabole. Ako tačka $M(x,y)$ pripada paraboli, tada i tačka $M_1(x,-y)$ pripada paraboli. Dakle, x-osa (tj. prava koja sadrži žižu F i normalna je na direktrisu d) je osa simetrije parabole. Tačku $O(0,0)$, koja pripada paraboli, nazivamo temenom parabole.

Primer 1. *Na paraboli $y^2 = 12x$ odrediti tačku najbližu pravoj $l: x - y + 7 = 0$.*

Rešenje. Rastojanje proizvoljne tačke $M(x,y)$ parabole od prave l dato je formulom:

$$d(M,l)=\frac{|x-y+7|}{\sqrt{2}},$$

a pošto tačka M pripada paraboli važi $y^2 = 12x$, pa je rastojanje:

$$d(M,l)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{y^2}{12}-y+7\right|=\frac{1}{12\sqrt{2}}|y^2-12y+84|\,.$$

Poslednji trinom dostiže minimum $2\sqrt{2}$ za $y = 6$. Iz jednačine $y^2 = 12x$ se dobija da je $x = 3$, pa je tražena tačka $M(3,6)$.

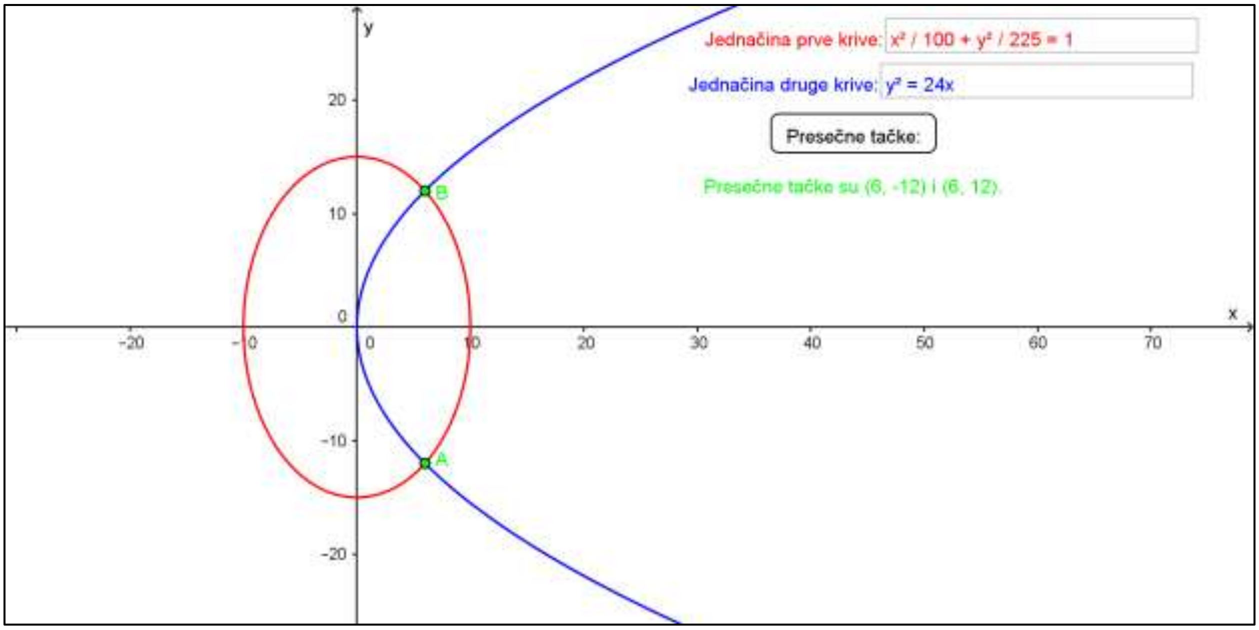
Primer 2. *Naći koordinate presečnih tačaka datih krivih:*

a) elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ i parabole $y^2 = 24x$;

a) hiperbole $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ i parabole $y^2 = 3x$.

Rešenje. Koordinate presečnih tačaka dobijaju se rešavanjem sistema jednačina datih krivih.

A presečne tačke mogu se dobiti i unošenjem jednačina datih krivih u predviđena polja u GeoGebra apletu prikazanom na slici 28. Pored ovih datih krivih u tekstualna polja se mogu uneti jednačine bilo koje dve krive, da bi se odredile njihove presečne tačke.



Slika 28: Aplet koji prikazuje presečne tačke krivih

3.9. Parabola i prava

Odnos prave $y = kx + n$ (ili $x = m$) i parabole $y^2 = 2px$ dobija se ispitivanjem sistema jednačina:

$$(y = kx + n \;\wedge\; y^2 = 2px) \text{ ili } (x = m \;\wedge\; y^2 = 2px).$$

Rešavanjem prvog sistema, zamenom y iz prve jednačine u drugu, dobija se kvadratna jednačina:

$$k^2x^2 + 2(kn - p)x + n^2 = 0\,,$$

sa diskriminantom:

$$4(kn - p)^2 - 4k^2n^2\,,$$

tj.

$$4p(p - 2kn).$$

Kako je $p > 0$, na osnovu poznatih svojstava kvadratne jednačine zaključujemo:

a) ako je $p - 2kn > 0$ postoje dva različita rešenja, x_1 i x_2, date jednačine. To su apscise tačaka M_1 i M_2 u kojima prava seče parabolu;

b) ako je $p - 2kn < 0$, data kvadratna jednačina nema realnih rešenja, pa prava i parabola nemaju zajedničkih tačaka;

v) ako je $p - 2kn = 0$, postoji jedno rešenje kvadratne jednačine i to je apscisa tačke M u kojoj prava dodiruje parabolu, tj. prava je tangenta parabole u tački M.

Uslov dodira prave $y = kx + n$ i parabole $y^2 = 2px$ je:

$$\boldsymbol{p = 2kn}\,. \qquad (22)$$

Ukoliko je tangenta parabole oblika $x = m$, tada je jednačina tangente $x = 0$.
Jednačina tangente na parabolu u tački $M(x_1, y_1)$ koja pripada paraboli ima oblik:

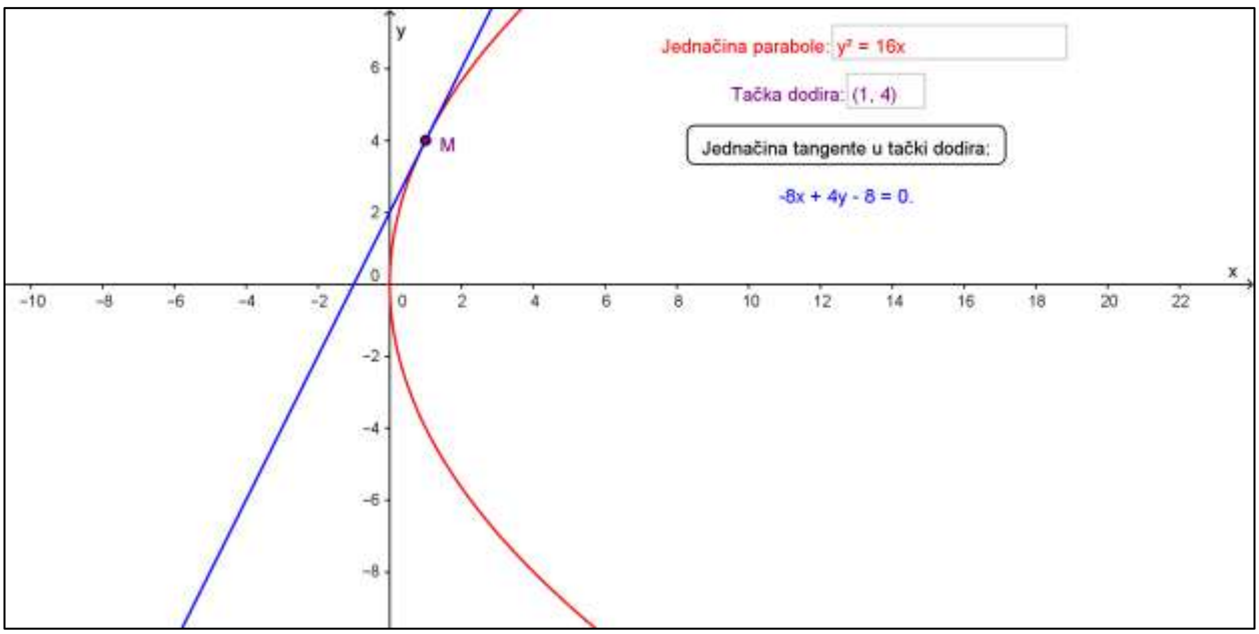
$$\boldsymbol{yy_1 = p(x + x_1)}. \qquad (23)$$

Ugao pod kojim neka prava seče parabolu je ugao između te prave i tangente parabole u presečnoj tački.

Primer 1. *Odrediti jednačinu tangente na parabolu* $y^2 = 16x$ *u tački* $M(1{,}4)$ *koja pripada paraboli.*

Rešenje. Jednačina tangente se dobija primenjujući formulu (23) za tangentu u tački koja pripada paraboli.

Rešenje se može dobiti i unošenjem odgovarajućih podataka u dati GeoGebra aplet koji je prikazan na slici 29.

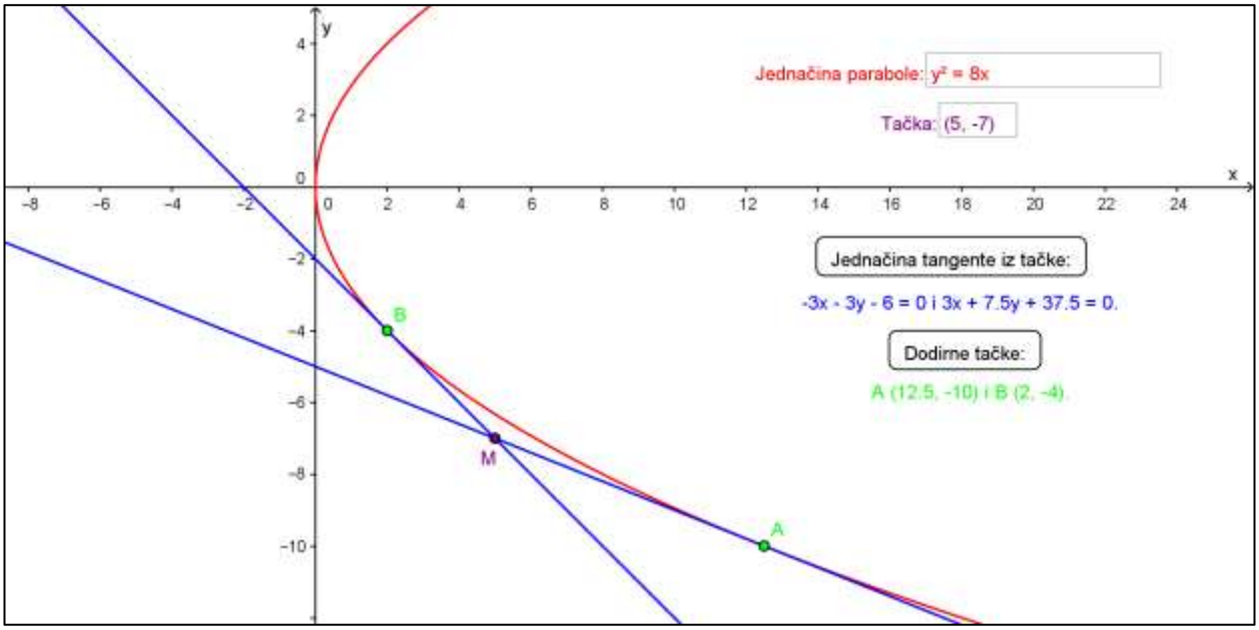


Slika 29: Aplet koji prikazuje jednačinu tangente na parabolu u tački koja joj pripada

Primer 2. *Odrediti jednačine tangenata parabole* $y^2 = 8x$ *konstruisanih iz tačke* $P(5, -7)$.

Rešenje. Data tačka pripada tangenti iz čega se može dobiti veza između koeficijenata k i n, a zatim na osnovu uslova dodira (22) se dobijaju koeficijenti i jednačine tangenti. Koordinate dodirnih tačaka se dobijaju rešavanjem sistema jednačina koji čine jednačina tangente i jednačina parabole.

Rešenje se može dobiti i uz pomoć apleta prikazanog na slici 30.

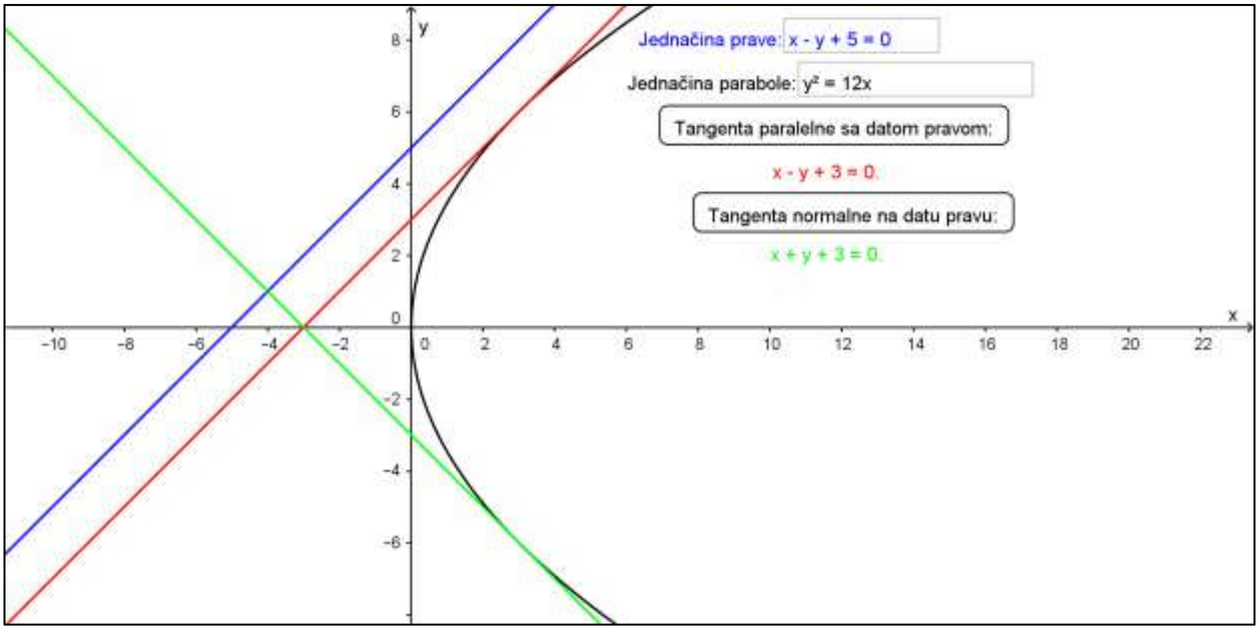


Slika 30: Aplet koji prikazuje jednačine tangenata i dodirne tačke

Primer 3. *Data je prava* $x - y + 5 = 0$ *i parabola* $y^2 = 12x$. *Odrediti jednačine tangenata date parabole koje su:*
a) paralelne sa datom pravom;
b) normalne na datu pravu.

Rešenje. Prevođenjem u eksplicitni oblik dobija se koeficijent pravca date prave, a onda se iz uslova paralelnosti ili normalnosti dobija koeficijent pravca tangente. Koeficijent n se tada dobija iz uslova dodira (22).

Jednačine tangenata se mogu dobiti i u apletu prikazanom na slici 31.



Slika 31: Aplet u kojem se dobijaju jednačine tangenata koje su paralelne sa datom pravom ili normalne na nju

Zadaci i rešenja

U ovom poglavlju navedeni su zadaci koji se nalaze na kraju svake elektronske lekcije i njihova rešenja. Posle uvedenih pojmova, navedenih formula i rešenih primera, učenici imaju mogućnost da provežbaju i provere naučene sadržaje. Kao inspiracija za zadatke koji su navedeni u sadržaju poslužili su zadaci iz zbirki [1,3,10]. Pored navedenih, tu se može naći još dosta sličnih zadataka, pogodnih za vežbanje.

1. Duž

1.1. Rastojanje između dve tačke

1. Data su temena trougla $A(3,2)$, $B(-1,-1)$ i $C(11,-6)$. Odrediti dužine njegovih stranica.
2. Odrediti tačku koja je podjednako udaljena od tačaka $A(0,4)$ i $B(5,3)$, a njeno odstojanje od y-ose je dva puta veće nego odstojanje od x-ose.
3. Data su dva temena paralelograma $A(-2,-4)$ i $B(2,-1)$ i presek dijagonala $S(0,0)$. Naći koordinate preostala dva temena i dokazati da je ovaj paralelogram romb.

1.2. Podela duži u datom odnosu

1. Duž AB, gde je $A(-3,-2)$ i $B(9,10)$, podeliti:
a) tačkom D u odnosu $5:7$;
b) na tri jednaka dela;
v) na tri dela koja se odnose kao $1:2:3$.
2. Težište trougla ABC poklapa se sa koordinatnim početkom, tačke A i B imaju koordinate $A(6,0)$ i $B(0,-2)$. Odrediti koordinate temena C.
3. Tačke M, N i P su središta redom stranica AB, BC, CA trougla ABC. Odrediti koordinate temena trougla, ako je $M(7,8), N(-4,5), P(1,-4)$.

1.3. Površina trougla

1. Izračunati površinu četvorougla $ABCD$, ako je $A(1,3), B(-2,0), C(5,3)$ i $D(-3,4)$.
2. Dva temena trougla su $A(6,3)$ i $B(9,-6)$, a središte stranice AC je tačka $D(-3,0)$. Kolika je površina trougla ABC?
3. Date su tačke $A(1,3), B(4,7), C(2,8)$ i $D(-1,4)$. Dokazati da je četvorougao $ABCD$ paralelogram i naći dužinu visine koja odgovara stranici AB.

2. Prava

2.2. Eksplicitni oblik

1. Odrediti vrednosti realnog parametra $m \neq 0$ tako da:
a) prava čija je jednačina $4x - my - 7 = 0$ ima koeficijent pravca $k = 3$;
b) prava čija je jednačina $mx - y - 3m + 6 = 0$ odseca na y-osi odsečak $n = 5$.
2. Odrediti jendačinu prave koja odseca na y-osi odsečak dužine 6, a sa pozitivnim delom x-ose gradi ugao $\frac{\pi}{4}$.
3. Odrediti uglove koje date prave zaklapaju sa pozitivnim delom x-ose:
a) $y = x + 3$;
b) $2x + 2y - 5 = 0$;
v) $x + y\sqrt{3} - 2 = 0$;
g) $3x - y\sqrt{3} + 2 = 0$.

2.3. Segmentni oblik

1. Naći segmentni oblik jednačine prave:
a) $x + 2y - 2 = 0$;
b) $2x - 3y + 6 = 0$;
v) $x + 3y - 3 = 0$;
g) $4x + y - 4 = 0$.
2. Odrediti parametar m tako da:
a) odsečak prave $mx + 4y - 8 = 0$ na x-osi bude 4;
b) odsečci prave $3x + 2my - 6 = 0$ na koordinatnim osama budu jednaki;
v) odsečak prave $3x + my = 12$ između koordinatnih osa bude 5.
3. Za koje vrednosti parametara m i n prava $(m - 3n - 2)x + (2m + 4n - 1)y = 3m - n + 2$ odseca na x-osi odsečak 3, a na y-osi odsečak -2?

2.4. Normalni oblik

1. Date jednačine pravih svesti na normalni oblik:
a) $5x - 12y + 26 = 0$;
b) $4x + 3y - 5 = 0$;
v) $6x - 8y + 15 = 0$.
2. Koristeći normalni oblik jednačine prave, izračunati rastojanje od koordinatnog početka do date prave:
a) $3x + 4y - 10 = 0$;
b) $x + y + 4 = 0$;
v) $2x + y - 5 = 0$.

2.5. Jednačina prave kroz datu tačku

1. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku A, a sa pozitivnim delom x-ose gradi ugao φ, ako je:
a) $A(3,2), \varphi = \frac{\pi}{4}$;
b) $A(-4,-1), \varphi = \frac{3\pi}{4}$.
2. Odrediti jednačinu prave koja:
a) prolazi kroz tačku $A(2,3)$ i ima koeficijent pravca $k = 3$;
b) prolazi kroz koordinatni početak i ima koeficijent pravca $k = 2$;
v) je simetrala prvog i trećeg kvadranta;
g) prolazi kroz koordinatni početak i sa pozitivnim delom x-ose obrazuje ugao od 30°.

2.6. Jednačina prave kroz dve tačke

1. Odrediti jednačinu prave koja sadrži presečnu tačku pravih $x + 7y - 12 = 0$ i $2x - y + 6 = 0$ i tačku $A(8,-4)$.
2. Napisati jednačine dijagonala četvorougla $ABCD$, ako su njegova temena $A(-4,-5), B(7,6), C(3,8)$ i $D(-2,3)$.
3. Odrediti jednačine težišnih linija trougla čija su temena $A(-1,6), B(5,3), C(-5,-2)$.
4. Data su dva temena trougla $A(-4,5)$ i $B(-2,3)$, a teme C pripada pravoj $x + y - 11 = 0$. Odrediti koordinate temena C, tako da površina trougla ABC bude 15.

2.7. Uzajamni položaj pravih

1. Naći ugao između pravih:
a) $y = 3x, y = -2x + 5$;
b) $y = 4x - 7, x + 4y - 8 = 0$;
v) $y = 5x - 3, y = 5x + 7$.
2. Izračunati uglove trougla ABC ako su temena trougla $A(3,7), B(5,1), C(1,3)$.
3. Odrediti jednačinu simetrale duži AB ako je:
a) $A(1,-4), B(3,2)$;
b) $A(-5,-2), B(1,4)$.
4. Dokazati da je trougao koji obrazuju prave $y = 3x - 1, x - 7y = 7$ i $x + y = 7$ jednakokraki.

2.8. Pramen pravih

1.Odrediti simetrale uglova koji su određeni pravama $x - 3y + 1 = 0, 2x + y + 3 = 0$.
2. Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz presek pravih $3x + 4y = 4$ i $9x + 5y + 4 = 0$ i ima koeficijent pravca $\frac{9}{4}$.
3. Dat je pramen pravih $2x + 5y + 4 + \lambda(3x - 2y + 25) = 0$. Naći onu pravu tog pramena koja odseca na koordinatnim osama odsečke iste veličine.
4. U pramenu pravih određenim pravama $2x - 3y + 6 = 0$ i $-5x + 4y - 1 = 0$ odrediti onu koja:
a) prolazi kroz tačku $(-4, -5)$;
b) je normalna na pravu $2x - y + 4 = 0$;
v) seče pravu $2x - y + 4 = 0$ pod uglom od $\frac{\pi}{4}$.

2.9. Rastojanje između tačke i prave

1. Odrediti m tako da je prava $y = my + 5$ udaljena od koordinatnog početka za $d = \sqrt{5}$.
2. Ako su data temena trougla $A(3,6), B(-1,3), C(2,-1)$ odrediti dužine njegovih visina.
3. Odrediti jednačinu prave koja je paralelna pravama $4x - 6y - 3 = 0$ i $2x - 3y + 7 = 0$ i jednako udaljena od njih.
4. Date su prave $24x - 10y + 39 = 0$ i $12x - 5y - 26 = 0$ kojima pripadaju paralelne stranice kvadrata. Odrediti površinu kvadrata.
5. Simetrala ugla ima jednačinu $x - 7y + 21 = 0$, a jedan krak je $4x - 3y + 9 = 0$. Napisati jednačinu drugog kraka.

3. Krive drugog reda

3.1. Kružnica

1. Naći jednačinu kružne linije čiji se centar nalazi u preseku pravih $2x - y = 8$ i $x + y = 1$, i koja prolazi kroz tačku P prve od ovih pravih, pri čemu je apscisa tačke P jednaka 5.
2. Naći jednačinu kružne linije čiji je prečnik duž AB, gde je $A(5, -1)$ i $B(-3,7)$.
3. Naći jednačine kružne linije koja dodiruje x-osu u tački $(6,0)$ i prolazi kroz tačku $(9,9)$.
4. Odrediti jednačinu kružne linije koja prolazi kroz tačke $(11,2), (7, -2)$, a čiji centar pripada pravoj $y = 3x - 19$.
5. Centar kružnice pripada pravoj $x + y = 0$. Naći jednačinu te kružnice ako ona sadrži tačke preseka kružnica $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 50$ i $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$.
6. Odrediti jednačinu zajedničke tetive kružnica $x^2 + y^2 = 10$ i $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$.

7. Naći jednačinu kružnice koja sadrži tačke preseka kružnice $x^2+y^2+4x-4y=0$ i prave $y=-x$ i tačku $A(4{,}4)$.
8. Data je kružnica $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ čiji je centar tačka C. Ako kružnica seče x-osu u tačkama A i B, naći površinu trougla ABC.

3.2. Kružnica i prava

1. Odrediti jednačine tangenti kružnice $x^2+y^2-10x-12y+36=0$ koje su paralelne pravoj $4x-3y+10=0$.
2. Odrediti jednačine tangenti kružnice $x^2+y^2-6x-8y+15=0$ koje su normalne na pravu $y=3x$.
3. Odrediti jednačinu normale kružnice k u njenoj tački M ako je:
a) $k: x^2+y^2+4x-4y-17=0, M(2{,}5)$;
b) $k: x^2+y^2-6x-8y+17=0, M(5{,}6)$;
v) $k: x^2+y^2=25, M(3{,}4)$.
4. U zavisnosti od parametra m odrediti međusobni položaj kružnice
$x^2+y^2-12x-8y+44=0$ i prave $y=x+m$.
5. Napisati jednačinu kružnice koja dodiruje dve paralelne prave $2x+y-5=0$ i
$2x+y+15=0$, pri čemu jednu dodiruje u tački $A(2{,}1)$.
6. Pod kojim uglom prava $y=\frac{4}{3}x$ seče kružnicu $x^2+y^2=25$?
7. Iz tačke $P(2,-3)$ konstruisane su tangente kružnice $(x-1)^2+(y+5)^2=4$. Odrediti jednačinu tetive koja sadrži dodirne tačke.

3.3. Dve kružnice

1. Ispitati uzajamni položaj kružnih linija:
a) $x^2+y^2-2x-y+6=0, x^2+y^2-10x-8y+40=0$;
b) $x^2+y^2-8x-18y+93=0, x^2+y^2-8x-8y+23=0$;
v) $x^2+y^2=25$, $2x^2+2y^2-4x-3y-25=0$;
g) $x^2+y^2-10x-20=0, x^2+y^2+2x-4y-20=0$;
d) $x^2+y^2+8y+12=0, x^2+y^2-2x+4y-20=0$;
đ) $x^2+y^2-4x-2y-20=0, x^2+y^2-4x-2y-4=0$.
2. Odrediti jednačinu kružnice koja je koncentrična sa kružnicom $x^2+y^2+6x+2y+5=0$ i prolazi kroz tačku $M(1,-4)$.
3. Izračunati rastojanje od centra kružnice $x^2+y^2-2x=0$ do prave određene presečnim tačkama kružnica $x^2+y^2+5x-8y+1=0$ i $x^2+y^2-3x+7y-25=0$.
4. Data je kružnica $x^2+y^2-4x-5=0$ i tačka $A(5{,}4)$. Odrediti jednačinu kružnice čiji je centar data tačka A i koja dodiruje spolja datu kružnicu.
5. Pod kojim uglom se seku kružnice:
a) $x^2+y^2=3$ i $(x-1)^2+y^2=4$; b) $x^2+y^2=16$ i $(x-5)^2+y^2=9$?

3.4. Elipsa

1. Izračunati dužinu tetive elipse $x^2 + 2y^2 = 18$ koja polovi ugao između koordinatnih osa.
2. Naći dužine i jednačine radijus vektora konstruisanih iz tačke $M(2, y < 0)$ elipse $5x^2 + 9y^2 = 45$.
3. Na elipsi $36x^2 + 100 = 3600$ naći tačke čije je rastojanje od desne žiže četiri puta veće od njegovog rastojanja od leve žiže.
4. U elipsu $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ upisan je pravougaonik tako da mu dve naspramne stranice sadrže fokuse elipse. Izračunati površinu tog pravougaonika.
5. Naći površinu četvorougla čija dva temena leže u žižama elipse $x^2 + 5y^2 = 20$, a druga dva se poklapaju sa krajevima male ose.
6. U elipsu $x^2 + 4y^2 = 36$ upisan je kvadrat.Odrediti dužinu stranice tog kvadrata.
7. Tetiva elipse $x^2 + 3y^2 = 36$ na pravoj $x - y = 6$ je osnova jednakokrakog trougla čiji vrh pripada y-osi. Naći površinu tog trougla.

3.5. Elipsa i prava

1. Naći jednačine tangenata koje datu elipsu dodiruju u datoj tački:
a) $3x^2 + 4y^2 = 48$, $A(2, -3)$;
b) $2x^2 + 3y^2 = 21$, $A(3,1)$;
v) $x^2 + 3y^2 = 16$, $A(2,2)$.
2. Odrediti jednačine tangenata na datu elipsu konstruisanih iz date tačke ako je:
a) $9x^2 + 16 = 288$, $A(12, -3)$;
b) $16x^2 + 25y^2 = 400$, $A(10,4)$;
v) $x^2 + 4y^2 = 100$, $A(2,7)$;
g) $19x^2 + 25y^2 = 475$, $A(10, -8)$;
d) $9x^2 + 15y^2 = 135$, $A(-6,3)$.
3. Odrediti jednačine tangente i normale elipse u datoj tački:
a) $3x^2 + 4y^2 = 12$, $D(-1, y > 0)$;
a) $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$, $D(5, y < 0)$.
4. Naći jednačine zajedničkih tangenata dveju elipsi:
a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ i $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$;
b) $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1$ i $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
5. U tačkama $A_1(3, y > 0)$, $A_2(4, y > 0)$ elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$ konstruisane su tangente. Izračunati površinu trougla ograničenog tim tangentama i x-osom.
6. Odrediti veliku poluosu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{36} = 1$, ako je poznato da jedna tangenta te elipse ima jednačinu $2x + y - 10 = 0$.

7. Odrediti malu poluosu elipse $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ako je poznato da jedna tangenta ove elipse ima jednačinu $3x+2y-20=0$.
8. Elipsa $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ i krug $(x-1)^2+y^2=1$ imaju tri zajedničke tačke A, B i C.
a) Odrediti koordinate tačaka A, B i C;
b) Naći jednačine tangenata na krug u tačkama A, B i C;
v) Izračunati površinu trougla koji obrazuju te tri tangente.
9. Odrediti uglove pod kojima se seku prava $x+y-2=0$ i elipsa $x^2+3y^2=12$.
10. Naći jednačinu elipse ako su poznate dve njene tangente $x+y=8$ i $x+3y+16=0$.
11. Odrediti za koje vrednosti parametra n prava $y=-x+n$:
a) seče elipsu $5x^2+20y^2=100$;
b) dodiruje je;
v) nema sa njom zajedničkih tačaka.
12. Pod kojim uglom se vidi elipsa $x^2+2y^2=162$ iz tačke $(6,15)$?
13. Odrediti jednačine zajedničkih tangenata elipse $4x^2+9y^2=36$ i kružnice $x^2+y^2=5$.

3.6. Hiperbola

1. Sastaviti jednačinu hiperbole ako je dato rastojanje između žiža 10 i realna poluosa $a=3$.
2. Odrediti poluose, žiže, temena i asimptote hiperbole:
a) $16x^2-25y^2=400$;
b) $25x^2-16y^2=1$;
v) $x^2-4y^2=16$.
3. Napisati jednačinu hiperbole ako joj pripadaju tačke $P(2,1)$ i $Q(10,7)$.
4. Odrediti jednačinu hiperbole čija je žiža $F(2\sqrt{3},0)$, a ugao između njenih asimptota iznosi $60°$.
5. Kako glasi jednačina hiperbole:
a) ako su fokusi $F_1(-10,0)$ i $F_2(10,0)$, a tačka $M(12,3\sqrt{5})$ pripada hiperboli;
b) ako je dužina realne ose 6 i tačka $M(9,-4)$ pripada hiperboli;
v) ako je $a=5$, a svako teme deli rastojanje između centra i žiže na dva jednaka dela?
6. Naći dužine radijus vektora tačke $P(5, y>0)$ na hiperboli $4x^2-5y^2=20$.
7. Naći ugao između asimptota hiperbole kod koje je $c=a\sqrt{2}$.
8. Data je hiperbola $9x^2-4y^2=36$. Izračunati površinu trougla čija su temena koordinatni početak, desna žiža i tačka na asimptoti koja ima istu apscisu kao žiža, a pripada I kvadrantu.

3.7. Hiperbola i prava

1. Odrediti jednačine tangenata konstruisanih iz date tačke na datu hiperbolu:
a) $A(1,0),\ 2x^2 - 9y^2 = 18$;
b) $B(0,3),\ x^2 - y^2 = 9$;
v) $C(-3,5),\ 3x^2 - y^2 = 3$;
g) $D(2,0),\ \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$.

2. Odrediti jednačinu tangente date hiperbole u tački, ako je:
a) $x^2 - 4y^2 = 64,\ D(10, y > 0)$;
b) $9x^2 - y^2 = 144,\ D(x < 0, -9)$;
v) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1,\ D(5, y < 0)$;
g) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1, D(4,2)$.

3. Odrediti jednačinu tangente hiperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ koja se nalazi na jednakom rastojanju od centra i desne žiže.

4. Kolike su poluose hiperbole $x^2 - 4y^2 = c$, ako je prava $x - y\sqrt{3} - 2 = 0$ tangenta te hiperbole? Zatim odrediti površinu trougla određenog tangentom i normalom u dodirnoj tački D i x-osom.

5. Naći jednačinu hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ako su njene asimptote $y = \pm\frac{1}{2}x$ i ako je jedna njena tangenta $5x - 6y - 8 = 0$.

6. U tački $D\left(-\frac{5}{3}, y > 0\right)$ konstruisana je tangenta elipse $4x^2 + 5y^2 = 20$. Ova prava određuje tetivu hiperbole $4x^2 - y^2 = 36$. Kolika je dužina te tetive?

3.8. Parabola

1. Naći jednačinu parabole ako su date žiža $F(3,0)$ i direktrisa $x = -3$.

2. Naći dužinu radijus vektora tačke M date parabole:
a) $M(7, y), y^2 = 20x$;
b) $M(x, 6), y^2 = 12x$.

3. Naći presečne tačke prave i parabole:
a) $3x + 4y - 12 = 0, y^2 = -9x$;
b) $3x - 2y + 6 = 0, y^2 = 6x$.

4. Prava $2x - y - 4 = 0$ seče parabolu $y^2 = 4x$ u tačkama A i B. Izračunati površinu trougla OAB.

3.9. Parabola i prava

1. Odrediti jednačinu tangente parabole $y^2 = 8x$ konstruisanu iz tačke $(-4,2)$.
2. Odrediti jednačinu tangente parabole $y^2 = 4x$ u tački dodira $M(1,2)$.
3. Date su hiperbola $3x^2 - y^2 = 12$ i parabola $y^2 = 16x$. Odrediti presečne tačke krivih i ugao pod kojim se seku.
4. Odrediti jednačinu tangente parabole $y^2 = 9x$ koja je paralelna pravoj $3x + 2y - 4 = 0$.
5. Odrediti jednačinu tangente parabole $y^2 = 3x$ koja je normalna na pravu $2x - 3y - 4 = 0$.
6. Odrediti površinu trougla ograničenog x-osom, tangentom i normalom parabole $y^2 = 16x$ u tački $M(1,4)$.
7. Odrediti jednačine zajedničkih tangenata elipse $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ i parabole $y^2 = \frac{20}{3}x$.

Rešenja zadataka

1. Duž

1.1. Rastojanje između dve tačke

1. $AB = 5, BC = 13, CA = 8\sqrt{2}$. 2. $C(2,1)$. 3. $C(2,4), D(-2,1), AB = BC = 5$.

1.2. Podela duži u datom odnosu

1. a) $D(2,3)$; b) $M(1,2), N(5,6)$; v) $M(-1,0), N(3,4)$. 2. $C(-6,2)$. 3. $A(12,-1)$, $B(2,17)$, $C(-10,-7)$.

1.3. Površina trougla

1. $P = 8$. 2. $P = 90$. 3. $h = 2{,}2$.

2. Prava

2.2. Eksplicitni oblik

1. a) $m = \frac{4}{3}$; b) $m = \frac{1}{3}$. 2. $y = x + 6$. 3. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{3\pi}{4}$; v) $\frac{2\pi}{3}$; g) $\frac{\pi}{4}$.

2.3. Segmentni oblik

1. a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1$; b) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$; v) $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1$; g) $\frac{x}{1} + \frac{y}{4} = 1$. 2. a) 2; b) 1,5; v)$\pm 4$.

3. $m = 1, n = -1$.

2.4. Normalni oblik

1. a) $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$; b) $\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y - 1 = 0$; v) $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{3}{2} = 0$.

2. a) $p = 2$; b) $p = 2\sqrt{2}$; v) $p = \sqrt{5}$.

2.5. Jednačina prave kroz datu tačku

1. a) $x-y-1=0$; b) $x+y+5=0$. 2. a) $3x-y-1=0$; b) $2x+y=0$; v) $x-y=0$;

g) $x\sqrt{3}-3y=0$.

2.6. Jednačina prave kroz dve tačke

1. $3x+5y-4=0$. 2. $AC: 13x-7y+17=0, BD: x-3y+11=0$.

3. $AA_1: 11x+2y-1=0, BB_1: x-8y+19=0, AC: 13x-14y+37=0$. 4. $C((3,8)$.

2.7. Uzajamni položaj pravih

1. a)$\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{2}$; v) 0. 2. $90°, 45°, 45°$. 3. a) $x+3y+1=0$ b)' $x+y+1=0$. 4. $CA=BA=\sqrt{50}$.

2.8. Pramen pravih

1. $x-3y+1\pm\sqrt{2}(2x+y+3)=0$. 2. $63x-28y+172=0$. 3. $x+y+5=0$.

4. a) $7x-9y-1=0$; b) $x+2y-11=0$; v) $3x+y-13=0$.

2.9. Rastojanje između tačke i prave

1. $m=\pm2$. 2. $h_a=5, h_b=\frac{5\sqrt{5}}{2}, h_c=5$. 3. $8x-12y+11=0$. 4. $P=\frac{49}{4}$.

5. $4x+3y-12=0$.

3. Krive drugog reda

3.1. Kružnica

1. $(x-3)^2+(y+6)^2=20$. 2. $(x-1)^2+(y-3)^2=32$. 3. $(x-6)^2+(y-5)^2=25$.

4. $(x-7)^2+(y-2)^2=16$. 5. $(x+3)^2+(y-3)^2=10$. 6. $x+y-2=0$.

7. $x^2+y^2-8y=0$. 8. $P=12$.

3.2. Kružnica i prava

1. $4x-3y+23=0, 4x-3y-27=0$. 2. $x+3y-25=0, x+3y-5=0$.

3. a) $3x-4y+14=0$ b) $4x-3y=0$; v) $x-y+1=0$. 4. Prava dodiruje kružnicu za $m=2$ ili $=-6$, seče kružnicu za $m\in(-6,2)$ i nema sa kružnicom zajedničkih tačaka za $m\in(-\infty,-6)\cup(2,+\infty)$. 5. $(x+2)^2+(y+1)^2=20$. 6. $90°$. 7. $x+2y+5=0$.

3.3. Dve kružnice

1. a) Kružnice su jedna van druge; b) kružnice se dodiruju spolja; v) kružnice se dodiruju iznutra; g) kružnice se seku; d) jedna kružnica leži u drugoj; đ) kružnice su koncentrične.

2. $(x+3)^2+(y+1)^2=25$. 3. $d=2$. 4. $(x-5)^2+(y-4)^2=4$. 5. a) $30°$; b) $90°$.

3.4. Elipsa

1. $4\sqrt{3}$. 2. $r_1=\frac{13}{3}, r_1: 5x+12y+10=0, r_2=\frac{5}{3}, r_2: x-2=0$.

3. $M_1\left(-\frac{15}{2},\frac{3\sqrt{7}}{2}\right), M_2\left(-\frac{15}{2},\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$. 4. $68\frac{4}{3}$. 5. $P=16$. 6. $a=\frac{12}{5}\sqrt{5}$. 7. $P=\frac{27}{2}$.

3.5. Elipsa i prava

1. a) $x-2y-8=0$; b) $2x+y-7=0, x+3y-8=0$. 2. a) $3x+4y-24=0$, $3x-28y-120=0$; b) $y=4, 16x-15y-100=0$; v) $2x+3y-25=0$, $-3x+8y-50=0$; g) $9x+5y-50=0, x+3y+14=0$; d) $y=3, 12x+7y+51=0$.

3. a) $t: x-2y+4=0, n: 4x+2y+1=0$; b) $4x-5y-40=0, 5x+4y-9=0$.

4. a) $x+y+3=0, x+y-3=0, x-y+3=0, x-y-3=0$; b) $2x+y+5=0$, $2x+y-5=0, 2x-y+5=0, 2x-y-5=0$. 5. $P=\frac{125}{84}$. 6. $a=4$. 7. $b=\sqrt{10}$.

8. $A(2,0), B\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{1}}{3}\right), C\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{1}}{3}\right)$; b) $t_a: x=2, t_b: x-2\sqrt{2}y+2=0, t_c: x+2\sqrt{2}y+2=0$;

v) $P=4\sqrt{2}$. 9. $45°$ I $90°$. 10. $24x^2+40^2=960$. 11. a) $|n|<5$; $|n|=5$; $|n|>5$.

12. Arctg 18. 13. $y=\pm x\pm 5$.

3.6. Hiperbola

1. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. 2. $5, 4, \left(\pm\sqrt{41},0\right), (\pm 5,0), 5y\pm 4x=0$;

b) $\frac{1}{5},\frac{1}{4},\left(\pm\frac{\sqrt{41}}{20},0\right),\left(\pm\frac{1}{5},0\right), 4y\pm 5x=0$; v) $4, 2, \left(\pm 2\sqrt{5},0\right), (\pm 4,0), 2y\pm x=0$.

3. $x^2-2y^2=2$. 4. $3x^2-y^2=9$. 5. a) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; b) $2x^2-9y^2=18$; v) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$.

6. $r_1=2\sqrt{5}, r_2=4\sqrt{5}$. 7. $90°$. 8. $P=\frac{39}{4}$.

3.7. Hiperbola i prava

1. a) $x-2y-1=0, x+2y-1=0$; b) $5x+3y-9=0, 5x-3y-9=0$;
v) $2x+y+1=0, 7x+4y+1=0$; g) $3x-2y-6=0, 3x+2y-6=0$.

2. a) $D(10,3), 5x-6y-32=0$; b) $D(-5,-9), 5x-y+16=0$;
v) $D(5,-4), x+y-1=0$; g) $x-y-2=0$. 3. $8x+\sqrt{11}y-20=0, 8x-\sqrt{11}y-20=0$.

4. $a=4, b=2, P=8\sqrt{3}$. 5. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$. 6. $D\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right), d=8\sqrt{3}$.

3.8. Parabola

1. $y^2 = 12x$. 2. a) $r = 12$; b) $r = 6$. 3. a) $C(-4, 6)$, prava dodiruje prabolu; b) prava i parabola nemaju zajedničkih tačaka. 4. $A(1, -2), B(4,4), P = 6$.

3.9. Parabola i prava

1. $x + y + 2 = 0, x - 2y + 8 = 0$. 2. $x - y + 1 = 0$. 3. $P\left(6, 4\sqrt{6}\right), Q\left(6, -4\sqrt{6}\right), tg\ \varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$.
4. $3x + 2y + 1 = 0$. 5. $3x + 2y + 1 = 0$. 6. $P = 20$. 7. $x + 3y + 15 = 0, x - 3y + 15 = 0$.

Zaključak

U tradicionalnoj nastavi dominira frontalni oblik rada koji uglavnom ne obezbeđuje dovoljnu angažovanost učenika niti ostavlja dovoljno vremena za njihove samostalne aktivnosti kako bi kvalitetno ovladali nastavnim sadržajima.

Upotreba interaktivnih materijala u nastavi mogla bi značajno uticati na povećanje motivacije i postignuća učenika. Interaktivni materijali bi trebalo da poboljšaju kvalitet nastave tako što će nastavu učiniti raznovrsnijom, bogatijom i što će podstaći osamostaljivanje učenika. Istovremeno, korišćenje novih metoda učenja moglo bi da doprinese boljim postignućima učenika, od onih najslabijih do najsposobnijih, pri čemu ove metode svakako treba kombinovati sa tradicionalnim metodama prilagođavajući ih sposobnostima učenika, njihovim potrebama i interesovanjima.

Elektronski kurs iz analitičke geometrije u ravni sadrži gradivo iz ove oblasti, prikazano uz pomoć programskog paketa GeoGebra. Svi sadržaji su potkrepljeni rešenim primerima, zadacima i GeoGebra apletima i imaju logički sled kako bi misaono aktivirali učenike. Interaktivni apleti koji prate primere omogućavaju učenicima proveru rešenja zadataka, kao i praćenje promene istih, izmenom zadatih podataka.

Interaktivni kurs koji je kreiran trebalo bi da omogući lakše usvajanje gradiva iz analitičke geometrije u ravni i doprinese učenicima da usvojeno znanje bude trajno i funkcionalno.

Literatura

[1] Bogoslavov V., Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1999.

[2] Georgijević D., Obradović M., Matematika sa zbirkom zadataka za III razred srednjeg obrazovanja i vaspitanja, Zavod za izdavanje udžbenika Novi Sad, Naučna knjiga Beograd, 1989.

[3] Ivanović Ž., Ognjanović S., Matematika 3: zbirka rešenih zadataka za III razred gimnazija i tehničkih škola, Krug, Beograd, Osmo ispravljeno izdanje, 2004.

[4] Jezdimirović J., Radović S., Marić M., GeoGebrom kroz svet matematike, Zbornik radova - V Simpozijum Matematika i primene, Matematički fakultet, Beograd, pp. 113-118, 2015, ISBN 978-86-7589-104-8, COBISS.SR-ID 218232076.

[5] Kečkić J., Matematika sa zbirkom zadataka za III razred srednje škole za gimnaziju: opštu i prirodno-matematičkog smera i za prirodno-matematičko područje rada, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1998.

[6] Marić M., Marić M., Radović S., Izrada i primena didaktičkog materijala primenom programskog paketa GeoGebra, Zbornik radova sa naučnog skupa „Tradicija i nauka“, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Filozofski fakultet, Pale, 2012, knjiga 7, tom 3, str. 177-186, ISBN 978-99938-47-50-2.

[7] Pećanac R., Lambić D., Marić M., The influence of the use of educational software on the effectiveness of communication models in teaching. The New Educational Review, Vol. 26, No. 4. pp 60-70, 2011.

[8] Radojičić M., Radović S., Marić M., Inovativni pristup nastavi matematike primenom elektronskih materijala za učenje, 5. konferencija sa međunarodnim učešćem Tehnika i Informatika u Obrazovanju, Fakultet Tehničkih Nauka, Čačak, 30-31. maj 2014, pp. 365-370, ISBN 978-86-7776-164-6, COBISS.SR-ID 208371468.

[9] Radović S., Stevanović A., Radojičić M., Marić M., Programski paket geogebra kao interaktivni alat za izučavanje površine geometrijskih figura, Inovacije u nastavi, Vol. 26, Facs. 3, pp. 135-145, 2013.

[10] Stojanović V., Ćirić N., Zbirka rešenih zadataka za treći razred srednjih škola, Matematiskop, Beograd, 1998.