

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МАСТЕР РАД

Запремина тетраедра у
хиперболичкој геометрији

Аутор

Михаило Крговић

Ментор

проф. др Срђан Вукмировић

Београд,
2017.

Садржај

Увод	2
1 Хиперболичка геометрија	5
2 Модели хиперболичке геометрије	9
2.1 Модели хиперболичке равни	10
2.1.1 Поенкареов диск модел хиперболичке равни	10
2.1.2 Полуравански модел хиперболичке равни	13
2.2 Модели хиперболичког простора	17
2.2.1 Поенкареов диск модел хиперболичког простора . . .	17
2.2.2 Полупросторни модел хиперболичког простора . . .	21
3 Површина хиперболичког троугла	23
4 Трансцендентна функција Лобачевског	32
5 Запремина хиперболичког тетраедра	39
5.1 Запремина идеалног хиперболичког тетраедра	39
5.2 Запремина произвољног тетраедра хиперболичке геометрије	51
5.2.1 Хиперболички тетраедар са три несвојствена темена	52
5.2.2 Хиперболички тетраедар са једним несвојственим теменом	55
6 Закључак	59

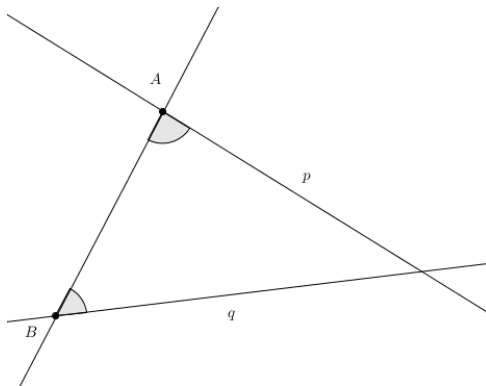
Увод

У свом првобитном значењу геометрија се схватала као наука о фигурама, о узајамном положају и размерама њихових делова, као и трансформисању фигура.

Историја геометрије сеже у античко доба и сигурно најзначајни утицај за утемељење геометрије као математичке дисциплине дугујемо античкој Грчкој, где је сматрана краљицом свих наука. У историји геометрије посебно место заузима Еуклид ¹. Он је са Елементима увео револуционарну промену у изучавању геометрије, објединивши целокупно дотадашње знање из геометрије на једном месту. Еуклидови Елементи су били толико опсежни да су садржали сво знање математике тадашњег света, тако да се никакви други списи нису користили за изучавање геометрије.

Прва књига Елемената, од укупно тринаест, почиње са дефиницијама у којима се дефинишу основни математички појмови као што су тачка, линија, права, површина и слично. Затим следи четири групе аксиома и чувени пети Еуклидов постулат, који у потпуности наводимо:

Ако једна права у пресеку са другим двема образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве, бесконачно продужене, сећи ће се и то са оне стране са које су ови углови.



Слика 1: Скица петог Еуклидовог постулата

Пети постулат је изазивао највећу пажњу научника који су се бавили геометријом, почевши од самог Еуклида, преко многобројних научника Хеленског и Арапског периода, затим Сакерија ², Ламберта ³, па све до Гауса ⁴ и његових савременика.

¹Ευκλείδης (око 330 пне. - око 275 пне.) - старогрчки математичар

²Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733) - италијански математичар

³Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) - швајцарски математичар

⁴Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) - немачки математичар

Сама помисао да постоји геометријски систем у којем не важи пети Еуклидов постулат је на први поглед апсурдна, јер није у складу са нашим виђењем и разумевањем простора, али Гаусови наследници, Бољај⁵ и Лобачевски⁶, независно један од другог, извели су сасвим нову геометрију која ће се заснивати на у потпуности измењеном петом постулату. Та сасвим нова геометрија названа је *хиперболичка геометрија*, али и у част њених утемељивача, *геометрија Лобачевског* или *геометрија Бољај-Лобачевски*, а негде и *геометрија Гаус-Бољај-Лобачевски*.

Утемељење хиперболичке геометрије проширило је многе видике геометрије, а и математике уопште; отворило је многобројна питања и задатке које је требало решити на прави начин у хиперболичкој геометрији. Једно од многобројних питања је и запремина тела хиперболичке геометрије. Тема рада је управо израчунавање запремине тетраедра хиперболичке геометрије.

На почетку овог рада позабавићемо се настанком и основама геометрије Лобачевског, као и неким занимљивим последицама, те на крају поглавља и функцијом Лобачевског која повезује углове и дужи.

У следећем поглављу конструишемо моделе хиперболичке геометрије, како моделе равни, тако и моделе хиперболичког простора, и то у оба случаја на два начина, диск модел и полуравански, односно полупросторни модел. Конструкција модела је од изузетне важности јер ћемо се током рада увек „налазити” у једном од модела, погодним за дату ситуацију.

Поглављем у којем се бавимо површином троугла на један специфичан начин дајемо увертиру, односно идеју доказа, којом ће се доћи до крајњег резултата рада. Међутим, ситуација у равни је много једноставнија и јаснија од простора, зато ће се наставак само идејно заснивати на овом делу.

У четвртном поглављу уводимо функцију Лобачевског, трансцендентну функцију помоћу које ћемо изразити запремину хиперболичког тетраедра. Доказујемо њену добру дефинисаност и непрекидност, а затим доказујемо пар особина које ће нам бити од користи у наставку рада. Такође, као завршетак поглавља, као сумација претходно изложеног, предочен је и график функције.

Затим се долази до кључне области рада, дела у којем ћемо се бавити извођењем формула запремине тетраедара хиперболичке геометрије. Као и код површине троугла, запремина је изведена у неколико корака, пре свега идеалног тетраедра, а затим и хијерархијски компликованијих, осталих тетраедара користећи претходне изведене формуле. Такође, у неким деловима су дата и проста уопштења добијених формула на одговарајуће n -гостране пирамиде.

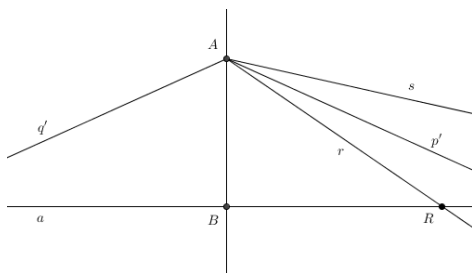
⁵Bolyai János (1802-1860) - мађарски математичар

⁶Николай Иванович Лобачевский (1793-1856) - руски математичар

Овим путем желим да се захвалим ментору проф. др Срђану Вук-мировићу на предлогу теме, помоћи и подршци у изради рада. Такође, желим да се захвалим члановима комисије проф. др Зорану Ракићу и проф. др Мирослави Антић на примедбама и сугестијама. За крај, желим да се захвалим породици која ме је у подржавала и подстицала приликом израде рада.

1 Хиперболичка геометрија

Пре него кренемо да се бавимо хиперболичком геометријом, формално уведемо појам паралелности. Посматрајмо тачку A и праву a која је не садржи. Може се доказати да у њима одређеној равни постоје тачно две полуправе p' и q' , такве да произвољна полуправа са теменом A сече праву a ако и само ако припада оном од углова са крацима p' и q' којем припада и права a .

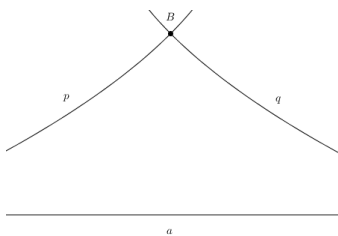


Слика 2

За полуправе p' и q' рећи ћемо да су паралелне правој a и пишемо $p' \parallel a$ односно $q' \parallel a$. Такође, за праве p и q које садрже редом полуправе p' и q' кажемо да су паралелне правој a и пишемо $p \parallel a$, односно $q \parallel a$. Конвексан угао који захватају праве AB и p (или q) називамо углом паралелности тачке A у односу на праву a или углом паралелности дужи AB у односу на праву a .

Хиперболичка геометрија је геометрија заснована на Хилбертовим аксиомама, које се могу наћи у [1] или [2], и као замена за пети Еуклидов постулат, односно Плејферову аксиому, аксиоми Лобачевског.

Аксиома Лобачевског: Постоје тачка B и права a која је не садржи, такве да у њима одређеној равни постоји више од једне праве која садржи тачку B , а са правом a нема заједничких тачака.

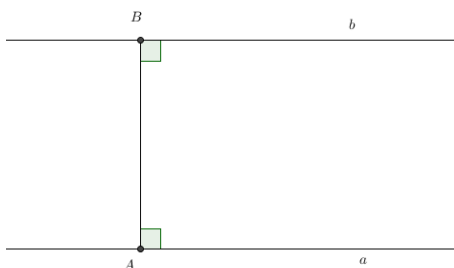


Слика 3: Скица аксиоме Лобачевског

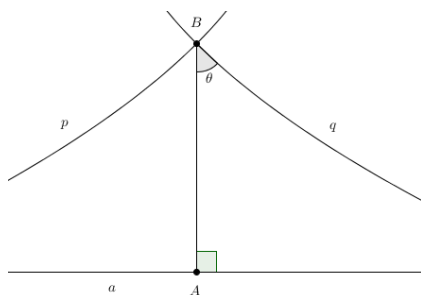
Штавише, постоји бесконачно много правих које са датој правом немају заједничких тачака, а садрже тачку B .

Аксиома Лобачевског даје низ последица које ће се у многоме разликовати од Еуклидског случаја. Неке од последица су:

1. Угао паралелности је оштар (Слика 5).
2. Збир унутрашњих углова сваког троугла је мањи од π .
3. Збир унутрашњих углова сваког простог четвороугла је мањи од 2π .
4. Постоји права у равни оштрог угла која је управна на једном његовом краку, а са другим краком нема заједничких тачака.



Слика 4: Угао паралелности Еуклидске геометрије је прав угао

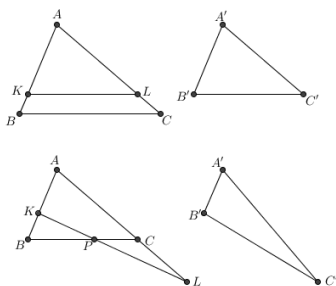


Слика 5: Угао паралелности хиперболичке геометрије - θ

Поред пет основних ставова о подударности троуглова који се могу наћи доказани у [2] у хиперболичкој геометрији ће важити још један став којим се карактерише хиперболички простор.

Теорема 1. Два троугла су подударна ако и само ако су им одговарајући углови подударни.

Доказ: Претпоставимо да су углови код темена A, B и C троугла $\triangle ABC$ подударни редом угловима код темена A', B' и C' троугла $\triangle A'B'C'$, а да ивице AB и $A'B'$ нису међусобно подударне, већ да је на пример $AB > A'B'$. Тада између тачака A и B постоји тачка K таква да је $AK \cong A'B'$. Нека је L тачка полуправе AC таква да је $AL \cong A'C'$. Тада је на основу првог става о подударности троуглова $\triangle AKL \cong \triangle A'B'C'$, па су углови код темена K и L троугла $\triangle AKL$ подударни угловима B и C троугла $\triangle ABC$.



Слика 6: Троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$

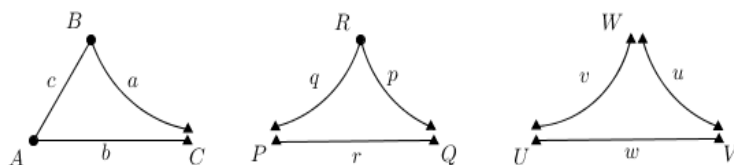
Ако би тачке A и L биле са исте стране праве BC , онда би у четвороуглу $BCKL$ збир унутрашњих углова био 2π што је у контрадикцији са претходно наведеном трећом последицом аксиоме Лобачевског. Ако тачке A и L не би биле са исте стране праве BC онда би дуж KL секла дуж BC у некој тачки P , па би у троуглу $\triangle BPK$ спољашњи угао код темена K био подударан унутрашњем углу код темена B , тј. $\angle AKP = \angle KBP$, што је немогуће јер би са једне стране било $\angle AKP + \angle BKP = \pi$ јер су суплементни, тј. $\angle KBP + \angle BKP = \pi$, а са друге стране из чињенице да је збир унутрашњих углова троугла мањи од π : $\angle KBP + \angle BKP + \angle BPK < \pi$, из чега би значило да је $\angle BPK$ негативне мере, што је контрадикција. Такође, није могућ ни случај $L = C$, јер би тада углови $\angle ACK$ и $\angle ACB$ били подударни, а при томе је први, по дефиницији, мањи од другог. Дакле није $AB > A'B'$, а аналогно није ни $AB < A'B'$, па је $AB \cong A'B'$. Стога су на основу другог става о подударности троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ подударни.

Нека је $\mathcal{P}$ сличност којом се дуж AB пресликава на дуж $A'B'$. Ако се том сличношћу тачка C која не припада правој AB слика у тачку C' , тада ће углови троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ бити подударни, па ће на основу претходне теореме бити $AB \cong A'B'$. Тиме смо показали да је свака сличност у хиперболичкој геометрији уједно и подударност.

Може се показати да је мера угла паралелности θ у вези са дужином одсечка AB , конкретно, ако је дужина одсечка AB већа тада је угао паралелности мањи, и обратно, уколико је дужина одсечка AB мања, тада је угао паралелности већи. Управо ту везу, између дужине одсечка AB и угла паралелности θ , представља **функција Лобачевског**:

$$\Pi : (0, +\infty) \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Да бисмо доказали неке битне особине функције Лобачевског, уведимо појам асимптотског троугла. Ако допустимо да две суседне ивице троугла не буду дужи већ две међусобно паралелне полуправе, добијени лик називамо *асимптотски троугао са једним несвојственим теменом* (несвојствено теме је бесконачно далека тачка у којој се паралелне полуправе секу). Допустимо такође да троугао има и два, односно сва три несвојствена темена. Сматрамо да је мера угла код несвојственог темена једнака нули.



Слика 7: Асимптотски троуглови са једним, два и три несвојствена темена редом

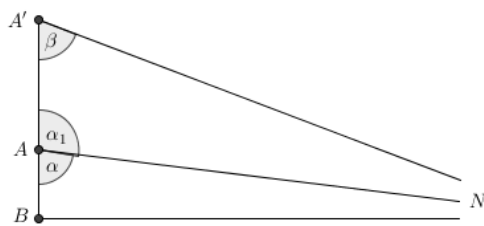
Теорема 2. *Ако је Π функција Лобачевског, тада важе:*

1. Π је строго опадајућа и непрекидна функција,

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \Pi(x) = 0$.

Доказ: Нека је N заједничко несвојствено теме троуглова $\triangle ABN$ и $\triangle A'BN$ којима је заједнички угао код темена B прав.

Нека је $A'B > AB$. Тада посматрајмо троугао $\triangle AA'N$ који је асимптотски са једним несвојственим теменом. Нека је $\angle AA'N = \beta$, $\angle A'AN = \alpha_1$ и $\angle BAN = \alpha$. Како су углови α и α_1 суплементни то важи $\alpha + \alpha_1 = \pi$, а како је збир унутрашњих углова троугла хиперболичке равни мањи од π и сматрајући да је мера угла код несвојственог темена 0, то је $\alpha_1 + \beta < \pi$, па закључујемо да је $\beta < \alpha$, односно $\Pi(A'B) < \Pi(AB)$. Обратно, ако је $\Pi(A'B) < \Pi(AB)$ аналогним размишљањем долазимо до закључка да



Слика 8

је $A'B < AB$, па функција $\Pi(x)$ опада од $\pi/2$ до 0 кад x расте од 0 до $+\infty$. $\square$

Из чињенице да $\Pi(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ кад $x \rightarrow 0$, следи да се у малим деловима простора геометрија Лобачевског мање разликује од Еуклидске геометрије и да се та разлика смањује смањивањем посматраног дела простора. Напоменимо за сада, а доказ истог ће следити у даљем тексту, да је функција Лобачевског дата са $\Pi(x) = 2 \arctan e^{-x}$.

Пре него што конструишемо моделе хиперболичке геометрије, извршимо уводне напомене које ће нам бити неопходне за разна израчунавања у моделима. Наиме, нека је дат простор са уведеном метриком, тада можемо рачунати дужине кривих, површине површи тог простора или запремине тела интегришући елемент дужине криве ds , односно елемент површине површи dA , тј. елемент запремине dV дуж криве, површи односно тела, редом. Елемент дужине ds можемо схватити као бесконачно мале делове криве, односно бесконачно малу поделу дате криве и аналогно за елемент површине dA , тј. dV .

2 Модели хиперболичке геометрије

Тридесетих година XIX века Бољај и Лобачевски дају темеље хиперболичке геометрије. Први пут је заснована теорија која се не може позвати на очигледност. Из геометријског света у коме се у потпуности могло ослонити на интуицију засновану на представама наших чула, закорачило се у свет који постоји изван дохвата наших искустава. Управо због поменуте неочигледности и не чуди што је њихов рад наишао на доста оспоравања.

Требало је доказати да је оваква геометрија непротивречна, тј. да постоји неки њен модел. Доказ те чињенице започиње Белтрами⁷ конструишући модел хиперболичке равни унутар еуклидског простора. Завршни корак доказу даје Клајн⁸ конструишући модел еуклидске геометрије унутар хиперболичке геометрије, чиме је показана еквивалентност

⁷Eugenio Beltrami (1835 – 1900) - италијански математичар

⁸Felix Christian Klein (1849 — 1925) - немачки математичар

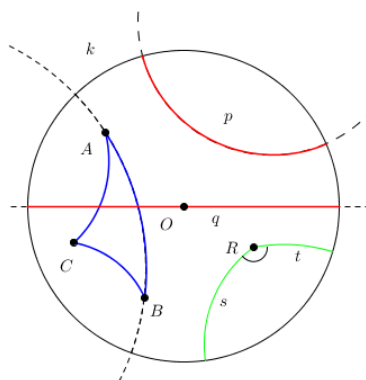
ност ове две геометрије, односно једна геометрија је непотивречна ако и само ако је непотивречна друга.

Текст који следи посвећен је моделима хиперболичке геометрије, како равни, тако и простора. Посебан акценат ћемо ставити на Поенкареов⁹ диск модел хиперболичке равни и простора, као и полуравански, односно полупросторни модел хиперболичке равни, односно простора.

2.1 Модели хиперболичке равни

2.1.1 Поенкареов диск модел хиперболичке равни

Нека је задат произвољан круг еуклидске равни који ћемо назвати *апсолутом*, а његову унутрашњу област *h-равни*, док ћемо сваку тачку *h-равни* назвати *h-тачком*. Пресек произвољног еуклидског круга или праве који су управни на апсолути са *h-равни* представљају *h-праве*, а пресеке са апсолутом *крајевима h-праве*. Сваки сегмент *h-праве* чија темена припадају *h-равни* представљају *h-дужи*, а сегмент чије је једно теме на апсолути, а друго припада *h-равни* представља *h-полуправу*. Прво поменуто теме називамо крајем, а друго теменом *h-полуправе*. Две *h-полуправе* које имају заједничко теме разлажу *h-раван* на две области које називамо *h-угловима*, а те две полуправе крацима тог *h-угла*. Коначно, ако су *A*, *B* и *C* три *h-тачке* које не припадају једној *h-правој*, тада скуп који се састоји из тачака *h-дужи AB*, *BC* и *CA* називамо *h-троуглом*.



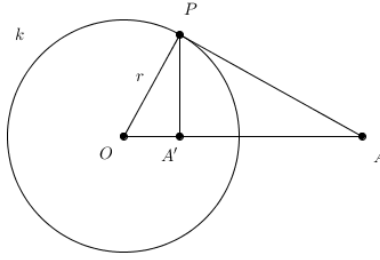
Слика 9: Поенкареов диск модел: круг *k* је апсолута, *p* и *q* су *h-праве*, *Rs* и *Rt* *h-полуправе*, док су *AB*, *BC* и *CA* *h-дужи* које су странице хиперболичког троугла $\triangle ABC$

Пре него што уведемо рефлексiju *h-равни*, подсетимо се инверзије у односу на круг.

⁹ Jules Henri Poincaré (1854 - 1912) - француски математичар

Дефиниција 1. Нека је $k(O, r)$ произвољан круг равни E^2 .

Инверзијом у односу на круг k називамо трансформацију равни $\psi_k : E^2 \setminus \{O\} \rightarrow E^2 \setminus \{O\}$ која свакој тачки $A \in E^2 \setminus \{O\}$ додељује тачку $A' = \psi_k(A)$ на полуправој OA са почетком у O такву да је: $OA \cdot OA' = r^2$.



Слика 10: Инверзија у односу на круг $k(O, r)$

Приметимо да се инверзијом у односу на круг кругови и праве сликају на кругове и праве, у зависности од њиховог положаја у односу на круг инверзије. Такође, инверзија чува углове, а кругови и праве управни на кругу инверзије су фиксни. Докази неведених тврђења могу се наћи у [1] или [2].

Напомена 1. Инверзију у односу на круг можемо додефинисати тако да буде дефинисана за све тачке равни E^2 тако што ће се центар круга, тачка O , пресликати у бесконачно далеку тачку равни, тачку ∞ .

Инверзијом у односу на круг k управан на апсолути или рефлексijом у односу на праву k управну на апсолути (права управна на круг је права која садржи средиште круга), h -раван се пресликава на саму себе. Рестрикцију поменуте инверзије, односно рефлексije, на h -раван зваћемо h -рефлексijом.

Уведимо релације h -између за три тачке и h -подударности парова тачака на следећи начин:

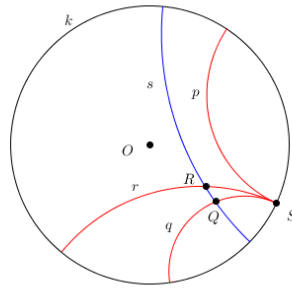
Дефиниција 2. За h -тачку B различиту од h -тачака A и C рећи ћемо да је **h -између** тачака A и C , у ознаци $\mathcal{B}_h(A, B, C)$, ако h -тачка B припада h -дужи AC .

Дефиниција 3. За пар h -тачака (A, B) кажемо да је **h -подударан** пару h -тачака (C, D) , у ознаци $(A, B) \stackrel{h}{\cong} (C, D)$, ако постоји низ h -рефлексija чија композиција пресликава пар h -тачака (A, B) на (C, D) .

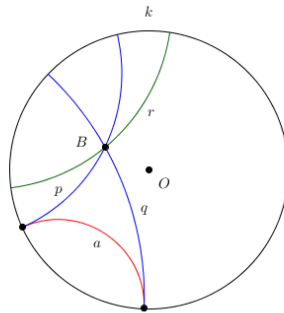
Могуће је доказати да h -раван задовољава све аксиоме хиперболичке геометрије, па овако дефинисана раван, h -раван, је модел хиперболичке равни који се остварује унутар еуклидске геометрије. Конструисани модел назива се *Поенкареов диск модел*.

Такође, доказује се да се паралелне h -праве еуклидски секу на апсолути, док хиперпаралелне праве, праве које се нити секу нити су паралелне, немају заједничких тачака ни у h -равни ни на апсолути. Самим тим, интуитивно апсолута представља бесконачно далеку праву.

Следеће две слике ће нам илустровати однос међу h -правама у моделу, као и аксиому Лобачевског.



Слика 11: h -праве p , q и r су паралелне, праве s и p хиперпаралелне, док се h -праве s и q , односно s и r секу у h -тачкама Q и R редом



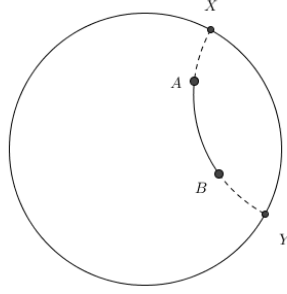
Слика 12: Задовољена је аксиома Лобачевског: h -праве p и q су паралелне датој h -прави a , док јој је r хиперпаралелна

Имајући у виду уводне напомене које се тичу рачунања дужине криве, непоходно је увести метрику овог модела. Растојање између две тачке

A и B рачунамо помоћу дворазмере тачака, односно:

$$d_P = |\log([A, B; X, Y])| = \left| \log \left(\frac{X - A}{X - B} : \frac{Y - A}{Y - B} \right) \right|,$$

где су тачке X и Y еуклидски пресек апсолуте и круга, односно праве, чији део представља h -праву одређену h -тачкама A и B .



Слика 13: Дуж AB и одговарајуће тачке X и Y на апсолути

Доказује се да овако уведена метрика задовољава аксиоме метрике, и на основу ње изводи се елемент дужине криве као

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2},$$

док је елемент површине

$$dA = \frac{4 dx dy}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

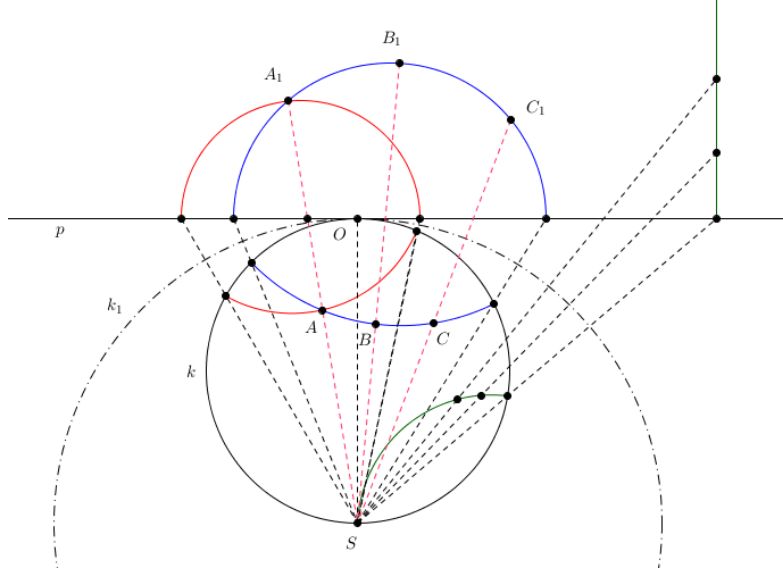
2.1.2 Полуравански модел хиперболичке равни

На основу Поенкареовог диск модела хиперболичке равни можемо конструисати још један модел хиперболичке равни унутар еуклидске равни, а то је *полуравански модел*.

Нека су задати круг k и права p која додирује круг k у тачки O . Нека је тачка S тачка круга k дијаметрално супротна тачки O (Слика 14). Инверзијом ψ у односу на круг са средиштем S и полупречником SO , круг k без тачке S се пресликава на праву p , а унутрашњост тог круга на отворену полураван π са рубом p , док се тачка S , по претходној напомени, пресликава у бесконачно далеку тачку праве одређеном тачкама S и O која се налази у полуравни π , назовимо га правац v . Дакле апсолута модела је $p \cup \{v\}$. Може се доказати да је посматрано пресликавање бијекција.

Нека је полураван π *h-раван*, а свака њена тачка *h-тачка*. Како инверзија чува углове то ће се h -праве унутрашњости круга k пресликати у

полукругове или полуправе полуравни π , управне на рубу те полуравни, на правој p . Приметимо да ће се једино h -праве унутрашњости круга k које садрже центар инверзије S пресликати у полуправе¹⁰. Добијене полукругове и полуправе назовимо *h -правама*.



Слика 14: Конструкција полураванског модела из Поенкареовог диск модела коришћењем инверзије у односу на круг

Аналогно диск моделу, уведемо распоред тачака и подударност парова тачака полураванског модела.

Дефиниција 4. Ако је тачка B h -равни унутрашњости круга k h -између тачака A и C , тада ћемо за слику B_1 тачке B рећи да је **h -између** слика A_1 и C_1 тачака A и C у инверзији ψ (Слика 14) и пишемо:

$$\mathcal{B}_h(A_1, B_1, C_1).$$

Дефиниција 5. Ако су (A, B) и (C, D) h -подударни парови тачака h -равни унутрашњости круга k , тада ћемо за парове (A_1, B_1) и (C_1, D_1) рећи да су **h -подударни парови тачака h -равни π** и пишемо:

$$(A_1, B_1) \stackrel{h}{\cong} (C_1, D_1).$$

¹⁰Тврђење важи јер се центар инверзије слика у бесконачно далеку тачку на основу Напомене 1

Оправдање за Дефиницију 5 можемо видети у следећем разматрању. Ако постоји низ инверзија у односу на кругове управне на k таквих да се композицијом тих инверзија пар тачака (A, B) пресликава на пар (C, D) , тада постоји и низ инверзија у односу на слике тих кругова у инверзији ψ (помоћу које смо од Поенкареовог диск модела добили полуравански модел) таквих да се композицијом тих инверзија пар тачака $(A_1, B_1) = \psi(A, B)$ h -равни π пресликава на пар тачака $(C_1, D_1) = \psi(C, D)$ исте равни.

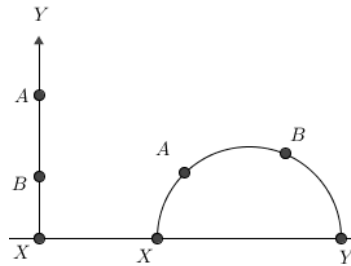
На основу одељка 2.1.1 систем h -тачака, h -правих, h -између и h -подударност парова тачака равни унутрашњости круга k задовољава свих пет група аксиома хиперболичке геометрије (Поенкареов диск модел). Имајући у виду да се инверзијом ψ поменуће h -тачке и h -праве пресликавају редом на h -тачке и h -праве h -равни π и како инверзија чува релацију h -између и h -подударности парова тачака h -равни π (на основу Дефиниције 4 и Дефиниције 5) стога ће и систем h -тачака, h -правих, h -између и h -подударност парова тачака h -равни π такође задовољавати свих пет група аксиома хиперболичке геометрије. Дакле, h -раван π је модел хиперболичке равни унутар еуклидске равни који називамо *полуравански модел*.

Будући да је полуравански модел добијен из Поенкареовог модела сликајући га инверзијом у односу на круг, за коју се може доказати да чува дворазмеру тачака, па самим тим ће метрика полураванског модела бити иста као метрика Поенкареовог модела, тј. :

$$d_P = \left| \log \left(\frac{X - A}{X - B} : \frac{Y - A}{Y - B} \right) \right|,$$

односно, уколико је једна од тачака, рецимо Y , бесконачно далека тачка

$$d_P = \left| \log \left(\frac{X - A}{X - B} \right) \right|.$$



Слика 15: Дуж AB -део еуклидске полуправе (лево) и део еуклидског полукруга (десно)

Из метрике и елемента дужине Поенкареовог модела можемо извести елемент дужине полураванском модела као:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

односно елемент површине

$$dA = \frac{dx dy}{y^2}.$$

Могуће је доказати да су Поенкареов диск модел, односно полуравански модел хиперболичке геометрије конформно еквивалентни еуклидској равни, што значи да је мера угла у поменутих моделима једнака мери угла еуклидске равни. Знајући то можемо доказати чињеницу коју смо раније поменули у вези са функцијом Лобачевског.

Теорема 3. *Функција Лобачевског дата је формулом*

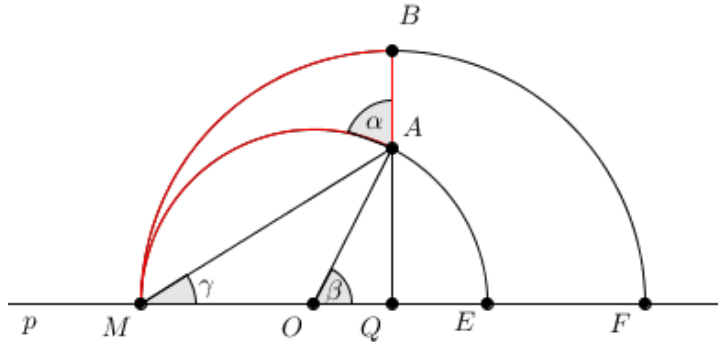
$$\Pi(x) = 2 \arctan e^{-x}.$$

Доказ: Посматрајмо полуравански модел хиперболичке равни и нека је тачка M заједнички крај двеју паралелних h -правих полуравни π којима су други крајеви тачке E и F (које припадају рубној правој p полуравни π) такве да важи распоред тачака $B(M, E, F)$. Нека је даље тачка B средиште полукруга MF , а тачка A у којој управна из B на правој p сече полукруг ME (Слика 16). Угао паралелности α дужи AB је h -угао MAB . Ако је Q подножје управне из B на правој p , а O средиште дужи ME важи:

$$\angle QOA \cong \alpha \quad \text{и} \quad \angle QMA \cong \frac{\alpha}{2},$$

односно у складу са сликом

$$\beta = \alpha \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\alpha}{2}.$$



Слика 16

Нека је x мера дужи AB . Како је права одређена тачкама A и B управна на праву p у тачки Q на основу метрике полураванског модела добијамо да је:

$$x = \log \frac{Q - B}{Q - A} = \log \frac{BQ}{AQ},$$

тј.

$$e^x = \frac{BQ}{AQ} = \frac{MQ}{AQ} = \cot \frac{\alpha}{2}, \text{ па је } \alpha = 2 \arctan e^{-x},$$

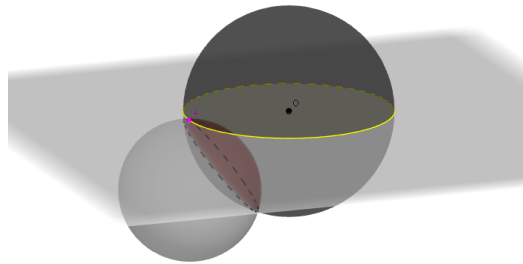
чиме је доказ комплетиран. $\square$

2.2 Модели хиперболичког простора

У претходној секцији конструисали смо два модела хиперболичке равни унутар еуклидске равни, диск модел и полуравански. Пред нама је задатак да уопшtimo преходне конструкције на тродимензиони случај, односно да конструишемо модел хиперболичког H^3 простора унутар еуклидског E^3 простора.

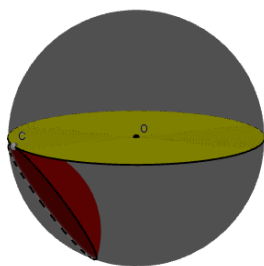
2.2.1 Поенкареов диск модел хиперболичког простора

Произвољну сферу еуклидског тродимензионог простора назовимо *апсолутом*. Унутрашњу област апсолуте назовимо *h-простором*, а сваку тачку h-простора *h-тачком*. Пресек произвољне еуклидске сфере или еуклидске равни управне на апсолути (раван је управна на сферу ако садржи њено средиште) са h-простором представљају *h-раван*. Дакле, равни h-простора могу бити унутрашњости еуклидских великих кругова апсолуте (настали пресеком равни управне на апсолути) или еуклидски одсечци сфере (настали као пресек сфере управне на апсолути) као што је приказано на Слици 17 и Слици 18.



Слика 17: Добијање h-равни модела помоћу равни и помоћу сфере управних на апсолути

Пресек еуклидског круга или еуклидске праве управне на апсолуту са h -простором назовимо *h-правама*, а пресеке са апсолутом *крајевима* h -праве. Сваки сегмент h -праве чија темена припадају h -простору представљају *h-дужи*, а сегмент чије је једно теме на апсолути а друго припада h -равни представља *h-полуправу*. Прво поменуто теме називамо крајем, а друго теменом h -полуправе.

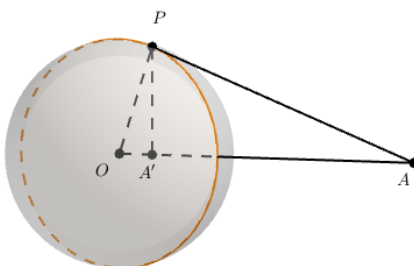


Слика 18: h -равни модела међусобно паралелене

На сличан начин као у дводимензионом случају уведемо и релацију h -између за три h -тачке као и релацију h -подударности парова h -тачака, међутим, пре тога подсетимо се инверзије у односу на сферу.

Дефиниција 6. Нека је $S(O, r)$ произвољна сфера простора E^3 .

Инверзијом у односу на сферу S називамо трансформацију простора $\psi_S : E^3 \setminus \{O\} \rightarrow E^3 \setminus \{O\}$ која свакој тачки $A \in E^3 \setminus \{O\}$ додељује тачку $A' = \psi_S(A)$ на полуправој OA са почетком у O такву да је: $OA \cdot OA' = r^2$.



Слика 19: Инверзија у односу на сферу

Инверзија у односу на сферу има сличне особине као инверзија у односу на круг. Наиме, инверзијом у односу на сферу кругови и праве сликају се у кругове и праве, односно сфере и равни у сфере и равни, у зависности од њиховог положаја у односу на сферу инверзије. Такође, инверзија у односу на сферу чува углове, а кругови и праве, односно сфере и равни управне на сферу инверзије остају фиксни при инверзији. Докази ових тврђења могу се наћи у [1] или [2].

Напомена 2. *Инверзију у односу на сферу можемо додефинисати тако да буде дефинисана за све тачке простора E^3 тако што ће се центар сфере, тачка O , пресликати у бесконачно далеку тачку простора, тачку ∞ .*

Инверзијом у односу на сферу S управну на апсолути или рефлексивном у односу на раван S управну на апсолути, h -простор се пресликава на самог себе. Рестрикцију поменуте инверзије, односно рефлексивне, на h -простор зваћемо *h -рефлексивном*.

Дефиниција 7. *За h -тачку B различиту од h -тачака A и C рећи ћемо да је **h -између** тачака A и C , у ознаци $B_h(A, B, C)$, ако h -тачка B припада h -дужи AC .*

Дефиниција 8. *За пар h -тачака (A, B) кажемо да је **h -подударан** пар h -тачака (C, D) , у ознаци $(A, B) \stackrel{h}{\cong} (C, D)$ ако постоји низ h -рефлексива чија композиција пресликава пар h -тачака (A, B) на (C, D) .*

Оправдање да су овако конструисане h -равни модели равни хиперболичке геометрије лежи у следећем. Уколико је h -раван унутрашњост еуклидског круга ствар је тривијална, наиме то је Поенкареов диск модел, за који смо у одељку 2.1.1 показали да представља модел хиперболичке равни. Остаје показати да h -равни које су еуклидски одсечци сфере управних на апсолути такође представља модел хиперболичке равни. У ту сврху посматрајмо пресликавање познато као канонска пројекција π_3 .

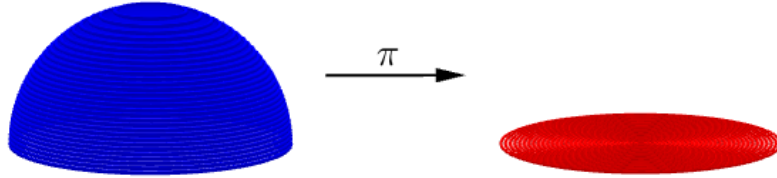
Дефиниција 9. *Канонска пројекција простора је пресликавање еуклидског E^3 простора на самог себе, $\pi_3 : E^3 \rightarrow E^3$ дефинисаног са:*

$$\pi_3(x) = \pi_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$$

Овим је представљена пројекција простора на раван $z = 0$, међутим ово пресликавање можемо уопштити пројекцијом на било коју раван. У сваком случају, увек можемо погодном изабрати координатни систем тако да пројекција постане канонска пројекција представљена дефиницијом. Очигледно је канонска пројекција сурјективно пресликавање.

Желимо да покажемо да је h -раван која је еуклидски одсечак сфере модел хиперболичке равни. Обележимо посматрани исечак сфере са

σ , а круг пресека апсолуте са сфером која садржи σ са ω . Можемо погодно изабрати координатни систем тако да ω припада равни $z = 0$. Посматрајмо рестрикцију канонске пројекције π на кружном исечку, $\pi|_{\sigma} = \pi_{\sigma}$, односно $\pi_{\sigma} : \sigma \rightarrow E^3$. Слика ове рестрикције је управо ω .

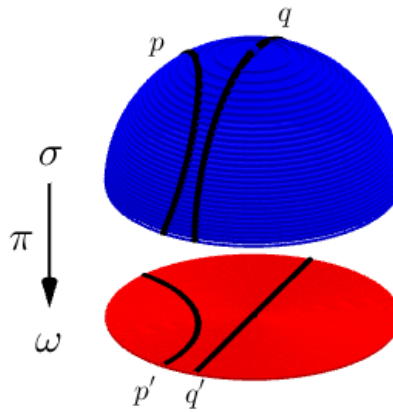


Слика 20: Пројекција π пресликава одсечак сфере на круг

Тада је пресликавање $\pi_{\sigma} : \sigma \rightarrow \omega$ (Слика 20) бијективно пресликавање, па постоји њему инверзно пресликавање

$$\pi_{\sigma}^{-1} : \omega \rightarrow \sigma.$$

Како је ω еуклидски круг то он на основу 2.1.1 представља модел хиперболичке равни, па ће и његова слика при π_{σ}^{-1} представљати модел хиперболичке равни, јер ће се овим пресликавањем одржати систем h -тачке, h -праве, релације h -између и h -подударности тачака. Прецизније, h -тачке и h -праве модела ω пресликаће се на h -тачке и h -праве модела σ и при томе ће се h -распоред тачака у моделу ω пренети на h -распоред тачака модела σ . Такође, уколико су парови h -тачака модела ω h -подударни, тада ће и њихове слике при π_{σ}^{-1} пресликати на пар h -подударних h -тачака модела σ .



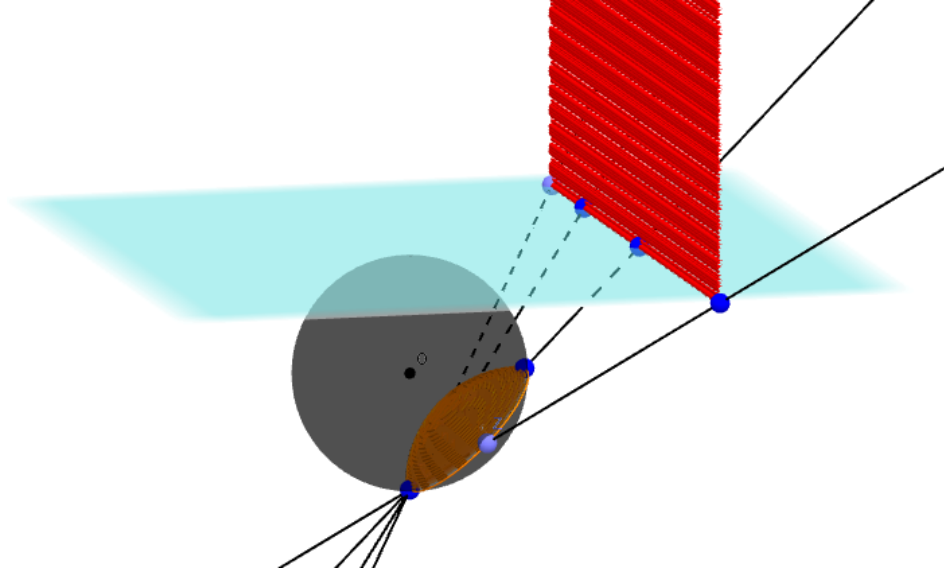
Слика 21: Пресликавање h -правих p и q h -равни σ на h -праве p' и q' h -равни ω пресликавањем π

2.2.2 Полупросторни модел хиперболичког простора

Нека је затада сфера $\mathcal{K}$ и раван π која је додирује у тачки O . Нека је тачка S дијаметрално супротна тачки O . Инверзијом ψ у односу на сферу са средиштем S и полупречником SO , сфера $\mathcal{K}$ без тачке S се пресликава на раван π , а унутрашњост сфере на отворен полупростор Π са рубном равни π , док се тачка S , по договору, пресликава у бесконачно далеку тачку праве одређеном тачкама S и O која се налази у полупростору Π , назовимо га правац v . Дакле апсолута модела је $\pi \cup \{v\}$. Овакво пресликавање је бијекција.

21

Из истог разлога ће се h -праве унутрашњости сфере пресликати у полукругове или полуправе управне на равни π . Приметимо да ће се једино h -равни, односно h -праве, унутрашњости сфере $\mathcal{K}$ које садрже центар инверзије S пресликати у полуравни, односно полуправе¹¹. Добијене полусфере, односно полуравни, назовимо h -равнима, а добијене полукругове, односно, полуправе h -правама.



Слика 23: Конструкција полупросторног модела из Поенкареовог диск модела коришћењем инверзије у односу на сферу - добијена h -раван је полураван

На крају, уведемо распоред тачака и подударност парова тачака полураванског модела.

Дефиниција 10. Ако је тачка B h -простора унутрашњости сфере $\mathcal{K}$ h -између тачака A и C , тада ћемо за слику B_1 тачке B рећи да је h -између слика A_1 и C_1 тачака A и C у инверзији ψ и пишемо:

$$\mathcal{B}_h(A_1, B_1, C_1).$$

Дефиниција 11. Ако су (A, B) и (C, D) h -подударни парови тачака h -простора унутрашњости сфере $\mathcal{K}$, тада ћемо за парове (A_1, B_1) и (C_1, D_1) рећи да су h -подударни парови тачака h -простора Π и пишемо:

$$(A_1, B_1) \stackrel{h}{\cong} (C_1, D_1).$$

¹¹Тврђење важи јер се центар инверзије слика у бесконачно далеку тачку на основу Напомене 2.

Оправдање за претходну дефиницију можемо видети у потпуној аналогiji са дводимензионим случајем. Наиме, ако постоји низ инверзија у односу на сфере управне на $\mathcal{K}$ таквих да се композицијом тих инверзија пар тачака (A, B) пресликава на пар (C, D) , тада постоји и низ инверзија у односу на слике тих сфера у инверзији ψ (помоћу које смо од Поенкареовог диск модела добили полупросторни модел) таквих да се композицијом тих инверзија пар тачака $(A_1, B_1) = \psi(A, B)$ h -простора Π пресликава на пар тачака $(C_1, D_1) = \psi(C, D)$ истог простора.

На основу одељка 2.2.1 систем h -тачака, h -правих, h -равни, релација h -између и h -подударност парова тачака простора унутрашњости сфере $\mathcal{K}$ задовољава аксиоме хиперболичког простора (Поенкареов диск модел). Имајући у виду да се инверзијом ψ поменуте h -тачке, h -праве и h -равни пресликавају редом на h -тачке, h -праве и h -равни h -простора Π и како инверзија чува релацију h -између и h -подударности парова тачака h -простора Π (на основу Дефиниције 10 и Дефиниције 11) стога ће и систем h -тачака, h -правих, h -равни, релације h -између и h -подударност парова тачака h -простора Π такође задовољавати аксиоме хиперболичког простора. Дакле, h -раван Π је модел хиперболичког H^3 простора унутар еуклидског E^3 простора који називамо *полупросторни модел*.

Посматрајмо сада сноп паралелних равни модела и уочимо производњу тачку модела. Скуп слика дате тачке у раванским рефлексijaма у односу на равни посматраног снопа равни називамо *орисфером*. Орисфера у датом моделу може бити еуклидска сфера која додирује рубну раван модела у тачки коју називамо средиштем орисфере, уколико су равни снопа еуклидске полусфере, или раван паралелна рубној равни модела, уколико су равни снопа еуклидске полуравни. Тада је средиште орисфере бесконачно далека тачка одређена правцима полуправих управних на рубну раван модела, односно правац v . Такође, напомнимо да се на орисфери реализује еуклидска геометрија, а доказ тога може се наћи у [2].

Истакнимо још да се на основу метрике изводи елемент дужине модела као

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2},$$

односно елемент запремине:

$$dV = \frac{dx dy dz}{z^3}.$$

3 Површина хиперболичког троугла

Овај одељак посвећен је доказивању формуле површине троугла хиперболичке геометрије. Прецизније, акценат је на самом поступку, односно идеји доказа, јер ће се сличан, уопштен у тродимензионом случају,

користити у доказивању формуле за површину тетраедра хиперболичке геометрије.

Пре него што кренемо да се бавимо површином троугла хиперболичке равни uvedимо појам *дефекта троугла*.

Дефиниција 12. Нека је дат троугао $\triangle ABC$ хиперболичке равни са унутрашњим угловима α, β и γ , тада дефект троугла $\triangle ABC$, у ознаци $\delta(\triangle ABC)$ или само δ , дефинишемо са:

$$\delta = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

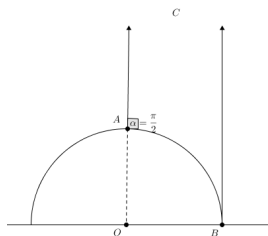
Напомена 3. Како је збир унутрашњих углова хиперболичког троугла строго мањи од π , то је дефект троугла строго позитиван број.

Сада можемо формулисати теорему која се тиче површине хиперболичког троугла, коју ћемо доказати у неколико корака.

Теорема 4. Нека је дат троугао $\triangle ABC$ хиперболичке равни са унутрашњим угловима α, β и γ , тада је површина датог троугла једнака његовом дефекту δ .

Доказ: Пре свега, приметимо да је на основу претходне напомене дефект троугла строго позитиван број што има смисла јер се ради о површини троугла. Кренимо са доказивањем теореме за који смо претходно најавили да ћемо извршити у неколико корака. Напоменимо још да ћемо приликом доказивања теореме радити у полураванском моделу.

Први корак: Доказаћемо да је дата формула тачна у случају правоуглог асимптотског троугла хиперболичке равни са два несвојствена темена. Посматрајмо један такав троугао хиперболичке равни чије су странице одређене хиперболичким правама у моделу представљеним полукругом $y = \sqrt{1 - x^2}$ и правама $x = 0$ и $x = 1$, односно чија су темена $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$ и C бесконачно далека тачка еуклидских полуправих управних на апсолути. Тада су унутрашњи углови $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$ и $\gamma = 0$, по договору јер су B и C несвојствена темена, а дефект $\delta = \pi/2$. Потребно је доказати да је $P_{\triangle} = \pi/2$.

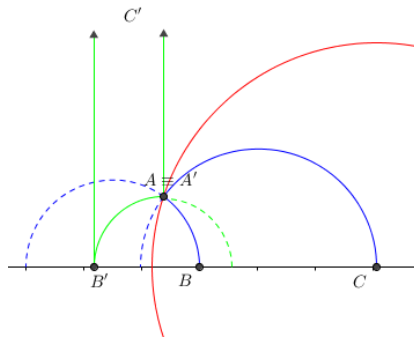


Слика 24: Правоугли асимптотски троугао са два несвојствена темена

Користећи да је елемент површине у полураванском моделу дат са $dA = \frac{dx dy}{y^2}$ и параметризацијом површине троугла са: $0 \leq x \leq 1; y \geq \sqrt{1-x^2}$ израчунавамо површину траженог троугла:

$$\begin{aligned} P_{\Delta} &= \iint_{\Delta} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{y \geq \sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{y^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{y} \Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} = \delta(\Delta ABC), \end{aligned}$$

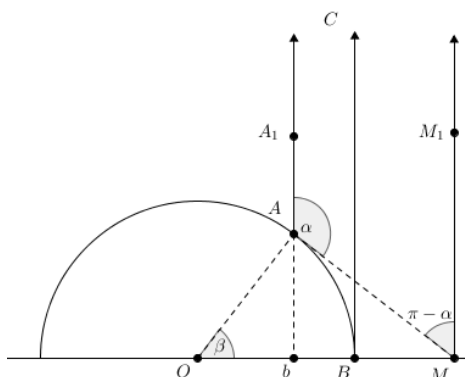
што је и требало доказати. Међутим, поставља се питање да ли је формула тачна и у случају када су два несвојствена темена правоуглог троугла тачке рубне праве модела. Посматрајмо један такав троугао ΔABC коме су темена B и C на рубној правој модела. Посматрајмо инверзију у односу на круг k чији је центар тачка C који садржи тачку A , једину својствену тачку троугла. Како је C центар инверзије он се слика у бесконачно далеку тачку, тачка A се налази на кругу инверзије те је она фиксна, док се тачка B слика у тачку B' која се такође налази на рубној правој модела. Дакле, инверзијом, тј. h -рефлексијом равни смо правоугли несвојствени троугао са два несвојствена темена на рубној правој модела, троугао ΔABC , пресликали у правоугли (јер инверзија чува углове међу круговима и правима) троугао $\Delta AB'C'$ чије је једно несвојствено теме тачка која одговара правцима полуправих управних на рубну праву модела.



Слика 25: Пресликавање правоуглог несвојственог троугла са два темена на рубној правој модела у троугао чије је једно несвојствено теме тачка рубне праве модела

Овим смо доказали да су таква два троугла хиперболички подударни те имају једнаке површине, стога формула површине важи за све правоугле троуглове са два несвојствена темена. Други начин да се то види лежи у чињеници да сви троуглови овог типа имају подударне углове те су хиперболички подударни, па су им и површине једнаке.

Међукорак: Докажимо истинитост формуле за асимптотски троугао са два несвојствена темена чији угао није нужно прав. Нека је тај угао α . Посматрајмо један такав троугао у полураванском моделу чија су темена $A = (b, c)$, $b^2 + c^2 = 1$, $c > 0$, $B = (1, 0)$ и C бесконачно далека тачка еуклидских полуправих управних на апсолути. Без умањења општости претпоставимо да је $\alpha > \pi/2$, доказ за $\alpha < \pi/2$ се изводи у потпуној аналогiji.



Слика 26: Асимптотски троугао са два несвојствена темена и унутрашњим углом α

Дефект ученог троугла је $\delta = \pi - \alpha$. Израчунајмо његову површину сличним поступком као у првом кораку:

$$\begin{aligned} P_{\Delta} &= \iint_{\Delta} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_b^1 \left(\int_{y \geq \sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{y^2} \right) dx \\ &= \int_b^1 \left(-\frac{1}{y} \Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \right) dx = \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \arcsin x \Big|_b^1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin b. \end{aligned}$$

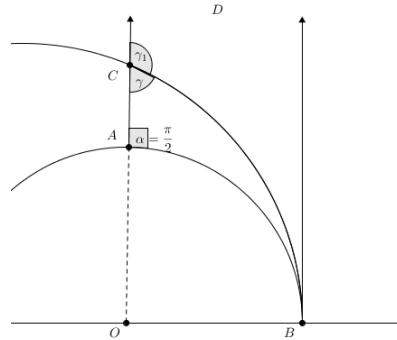
Израчунајмо b имајући у виду да је угао α угао код темена A хиперболичког троугла $\triangle ABC$. Нека је M пресек апсолуте и праве која садржи A и управе на полупречник OA . Еуклидски гледано, то значи

да је α угао између AA_1 и AM , међутим, тада је $\angle AMM_1 = \pi - \alpha$ због паралелности крака, па је $\angle AMO = \alpha - \pi/2$. Нека је $\angle AOM = \beta$, тада је $\beta = \pi - \alpha$. Са друге стране $b = \cos \beta$, што значи да је $b = \cos(\pi - \alpha)$, односно $b = -\cos \alpha$, тј. $b = -\sin(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha - \pi/2)$. Замењујући то у претходну формулу добијамо:

$$P_{\Delta} = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(\alpha - \pi/2)) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi - \alpha = \delta(\triangle ABC).$$

Аналогно претходном кораку, могуће је доказати да је доказивање формуле за изабраног представника повлачи валидност формуле и за остале троуглове овог типа.

Други корак: У овом кораку доказујемо теорему у случају да је троугао такође правоугли и асимптотски, али са једним несвојственим теменом. Као и у претходном кораку уочићемо погодан троугао и на њему доказати тврђење теореме. Наиме учени троугао ће доста личити на претходни, темена су $A = (0, 1)$ и $B = (1, 0)$, док је теме C произвољна тачка праве $x = 0$ која се налази у моделу тако да је, без умањења општости, $|C| > 1$. Како постоји полукруг који садржи тачке C и B , а чије је средиште на рубној правој модела, то је троугао $\triangle ABC$ добро конструисан.



Слика 27: Правоугли асимптотски троугао са једним несвојственим теменом, B , представљен у полураванском моделу

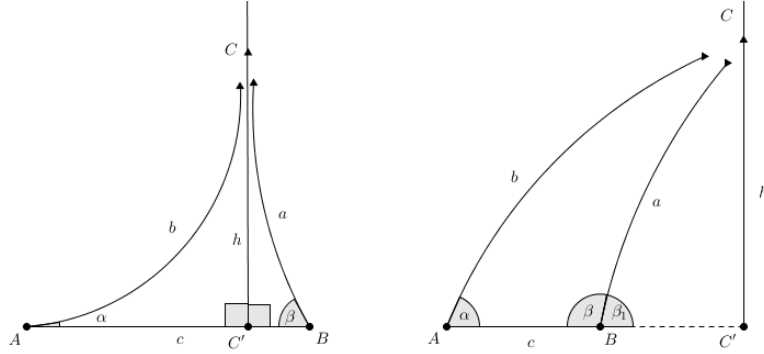
Унутрашњи углови $\triangle ABC$ су $\alpha = \pi/2$ код темена A и γ код темена C , док је, по договору, угао код темена B мере нула јер је B несвојствено теме. Тиме је дефект $\delta = \pi - \pi/2 - \gamma$, тј. $\delta = \pi/2 - \gamma$. У циљу доказивања да је површина оваквог троугла једнака његовом дефекту посматрајмо два помоћна троугла $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$, где је теме D ових двају троуглова бесконачно далека тачка правих $x = 0$, односно $x = 1$.

Површину троугла $\triangle ABC$ можемо видети као разлику површина $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$, оба асимптотска са по два несвојствена темена чија је површина једнака дефекту на основу претходног корака, па је:

$$\begin{aligned}
P(\triangle ABC) &= P(\triangle ABD) - P(\triangle BCD) = \delta(\triangle ABD) - \delta(\triangle BCD) \\
&= \pi - \frac{\pi}{2} - (\pi - \gamma_1) = \frac{\pi}{2} - (\pi - (\pi - \gamma)) \\
&= \frac{\pi}{2} - \gamma = \delta(\triangle ABC).
\end{aligned}$$

Аналогно претходним корацима доказује се да формула површине важи за све троуглове овог типа, а не само изабраног представника.

Међукорак: Докажимо да је површина асимптотског троугла са једним несвојственим теменом, не обавезно правоуглог, једнака његовом дефекту. Уочимо један такав троугао $\triangle ABC$ коме је рецимо C несвојствено теме, и чији су унутрашњи углови α и β . Уочимо праву управну на правој одређену страницом AB , а паралелну правама одређеним страницама AC и BC .



Слика 28: Асимптотски троугао са једним несвојственим теменом и његова „висина”

Праву управну на AB која садржи несвојствено теме сече праву одређену тачкама A и B у тачки која припада дужи AB или је ван ње, зато разликујемо два случаја (Слика 28). За потребе оба случаја израчунајмо површине троуглова $\triangle AC'C$ и $\triangle BC'C$ од којих су оба правоугла асимптотска са једним несвојственим теменом, па им је површина једнака дефекту.

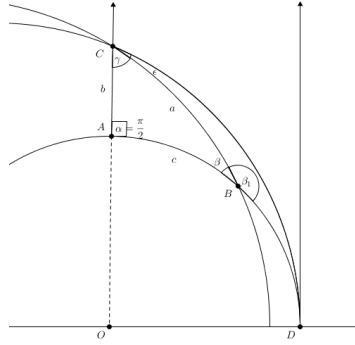
Што се тиче првог случаја површине тражених помоћних троуглова су: $P(\triangle AC'C) = \pi - \alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и потпуно аналогно $P(\triangle BC'C) = \frac{\pi}{2} - \beta$. Стога је:

$$\begin{aligned}
P(\triangle ABC) &= P(\triangle AC'C) + P(\triangle BC'C) \\
&= \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta \\
&= \pi - \alpha - \beta = \delta(\triangle ABC).
\end{aligned}$$

У другом случају површине помоћних троуглова су: $P(\triangle AC'C) = \pi - \alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, док је, уз напомену да је $\beta' = \pi - \beta$, $P(\triangle BC'C) = \pi - \beta_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi + \beta = -\frac{\pi}{2} + \beta$. Сада је:

$$\begin{aligned} P(\triangle ABC) &= P(\triangle AC'C) - P(\triangle BC'C) \\ &= \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta \\ &= \pi - \alpha - \beta = \delta(\triangle ABC). \end{aligned}$$

Трећи корак: Сада доказујемо теорему за правоугли троугао који нема несвојствених темена. Нека је то троугао $\triangle ABC$ коме су темена $A = (0, 1)$, $C = (0, a)$, $a > 1$ и тачка B на луку јединичног круга који се налази у првом квадранту, као што је приказано следећом сликом. Унутрашњи углови посматраног троугла су $\alpha = \pi/2$, β и γ , па је дефект једнак $\delta = \pi/2 - \beta - \gamma$.



Слика 29: Правоугли троугао $\triangle ABC$ представљен у полураванском моделу

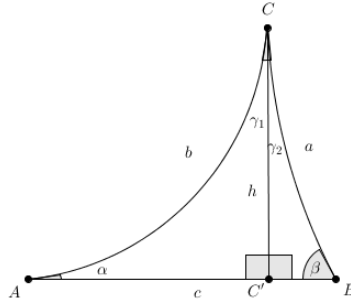
Уочимо помоћну тачку $D = (1, 0)$. Тада је површина траженог троугла $\triangle ABC$ једнака разлици површина троуглова $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$. Приметимо да су то асимптотски троуглови са по једним несвојственим темемом чија је површина, на основу претходног, једнака дефекту. Унутрашњи углови троугла $\triangle BDC$ су $\angle DCB = \epsilon$ и $\angle DBC = \beta_1 = \pi - \beta$, док је теме D несвојствено. Унутрашњи углови троугла $\triangle ADC$ су $\angle DAC = \pi/2$, $\angle DCA = \angle DCB + \angle BCA = \epsilon + \gamma$. Сада можемо израчунати површину траженог троугла:

$$\begin{aligned} P(\triangle ABC) &= P(\triangle ADC) - P(\triangle BDC) = \delta(\triangle ADC) - \delta(\triangle BDC) \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - (\gamma + \epsilon) - (\pi - \epsilon - \beta_1) \\ &= \frac{\pi}{2} - \gamma - \epsilon + \epsilon - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma = \delta(\triangle ABC). \end{aligned}$$

Слично претходним корацима из валидности формуле површине овако изабраног представника следи валидност формуле за све троуглове овог типа.

Четврти корак: Нека је дат произвољан троугао $\triangle ABC$ без несвојствених темена. Посматрајмо висину датог троугла из произвољног темена троугла. Тада могу наступити два случаја, могуће је да уочена висина припада (Слика 30) или не припада унутрашњој области троугла (Слика 31).

Први случај: Уколико висина троугла $\triangle ABC$, CC' на пример, припада унутрашњој области троугла тада је троугао висином подељен на два правоугла троугла $\triangle ACC'$ и $\triangle BCC'$ (Слика 30), дакле површина траженог троугла је једнака збиру површина добијених троуглова. За добијене правоугле троуглове је претходно доказана теорема, па им је површина једнака дефекту. Нека су α , β и γ унутрашњи углови датог троугла, тада је дефект $\delta(\triangle ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.



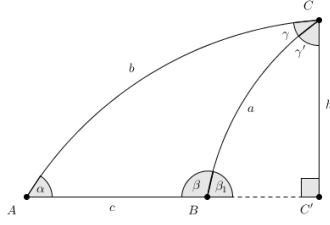
Слика 30: Подела троугла висином која припада унутрашњој области троугла

Унутрашњи углови троугла $\triangle ACC'$ су α , $\pi/2$ и γ_1 , док су унутрашњи углови троугла $\triangle BCC'$ β , $\pi/2$ и γ_2 , уз напомену да је $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Тада је:

$$\begin{aligned} P(\triangle ABC) &= P(\triangle ACC') + P(\triangle BCC') = \delta(\triangle ACC') + \delta(\triangle BCC') \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma_1 + \pi - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma_2 \\ &= \pi - \alpha - \beta - \gamma = \delta(\triangle ABC). \end{aligned}$$

Други случај: Уколико висина троугла не припада унутрашњој области посматраног троугла $\triangle ABC$ чији су унутрашњи углови α , β и γ , тада такође уочимо два правоугла троугла $\triangle ACC'$ и $\triangle BCC'$ (Слика 31).

Површина траженог троугла једнака је разлици површина ова два троугла чији су унутрашњи углови α , $\pi/2$ и $\gamma + \gamma'$, односно β , $\pi/2$ и

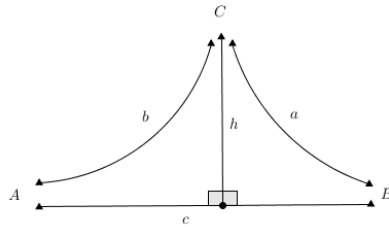


Слика 31: Подела троугла висином која не припада унутрашњој области троугла

γ' уз напомену да је $\beta + \beta_1 = \pi$, односно $\beta_1 = \pi - \beta$. Дефект траженог троугла $\triangle ABC$ је $\delta(\triangle ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$, а површина:

$$\begin{aligned}
 P(\triangle ABC) &= P(\triangle ACC') - P(\triangle BCC') = \delta(\triangle ACC') - \delta(\triangle BCC') \\
 &= \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha - (\gamma + \gamma') - (\pi - \frac{\pi}{2} - \beta_1 - \gamma') \\
 &= \frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma - \gamma' - \frac{\pi}{2} + \pi - \beta + \gamma' \\
 &= \pi - \alpha - \beta - \gamma = \delta(\triangle ABC).
 \end{aligned}$$

Пети корак: У последњем кораку доказаћемо теорему у случају асимптотског троугла коме су сва три темена несвојствена. Како су по договору његови унутрашњи углови мере нула, то ће његов дефект бити $\delta = \pi$. Такав троугао се висином из било ког несвојственог темена, која је у ствари полуправа управна на једној страници, а паралелна преосталим двема страницама троугла, може поделити на два правоугла, такође асимптотска троугла, али са два несвојствена темена (Слика 32).



Слика 32: Подела асимптотског троугла са три несвојствена темена на два правоугла са по два несвојствена темена

Површину таквог троугла смо претходно, у првом кораку израчунали, и она је једнака његовом дефекту који је $\delta = \pi/2$. Стога је површина почетног троугла једнака збиру површина оваква два троугла, односно збиру одговарајућих дефеката

$$P_{\Delta} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi = \delta(\Delta).$$

Овим је теорема у потпуности доказана. $\square$

4 Трансцендентна функција Лобачевског

После уводних књига писаних у циљу извођења геометрије засновану на измењеном петом Еуклидовом постулату, Николај Лобачевски, за свечану споменицу Казањског универзитета 1855. године пише рад посвећен хиперболичкој геометрији, рад [7]. Ту Лобачевски уводи појам угла паралелности дужи (претходно поменуте у раду) и доказује да је задат формулом:

$$\Pi(x) = 2 \arctan e^{-x}.$$

Поред овога, Лобачевски изводи формуле хиперболичке тригонометрије, доказује да је геометрија орисфере истоветна еуклидској геометрији. Бавећи се мерењем у геометрији, доказује да је површина троугла једнака његовом дефекту, а за израчунавање запремине тетраедра, чињенице коју нас у овом раду највише занима, користи трансцендентну функцију:

$$L(\theta) = \int_0^{\theta} \log |\sec y| dy.^{12}$$

Међутим, за потребе овог рада, користићемо мало измењену, такође трансцендентну функцију:

$$\mathcal{L}(\theta) = - \int_0^{\theta} \log |2 \sin t| dt.$$

Две поменуте трансцендентне функције повезане су са:

$$L(\theta) = \int_0^{\theta} \log \sec y dy = \mathcal{L}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \theta \log 2, \quad \text{за } |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Додефинишимо функцију у нули са $\mathcal{L}(0) = 0$. Уочимо да је интеграл у дефиницији функције $\mathcal{L}(\theta)$ несвојствен за сваки умножак броја π . Упркос томе, доказаћемо да је дата функција добро дефинисана и непрекидна за свако θ , тј. доказаћемо да дати интеграл у критичним случајевима конвергира.

¹² $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

Нека је $z \in \mathbb{C}$ и нека је његов аргумент $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$. Тада је на основу формуле:

$$\log(1 - z) = \log |1 - z| + i \arg(1 - z)$$

функција $\log(1 - z)$ аналитичка. Везу између претходног логаритма и функције $\mathcal{L}(\theta)$ дата је следећом лемом.

Лема 1. *Ако је $0 < \theta < \pi$, тада:*

$$\log(1 - e^{2i\theta}) = \log(2 \sin \theta) + i(\theta - \pi/2).$$

Доказ: Приметимо следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned} 1 - e^{2i\theta} &= 1 - (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 1 - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2i \sin \theta \cos \theta \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2i \sin \theta \cos \theta \\ &= 2 \sin^2 \theta - 2i \sin \theta \cos \theta = 2 \sin \theta (\sin \theta - i \cos \theta) \\ &= 2 \sin \theta [\cos(\theta - \pi/2) + i \sin(\theta - \pi/2)]. \end{aligned}$$

Логаритмовањем последње једнакости добијамо:

$$\begin{aligned} \log(1 - e^{2i\theta}) &= \log(2 \sin \theta) + \log[\cos(\theta - \pi/2) + i \sin(\theta - \pi/2)] \\ &= \log(2 \sin \theta) + \log |\cos(\theta - \pi/2) + i \sin(\theta - \pi/2)| \\ &\quad + i \arg[\cos(\theta - \pi/2) + i \sin(\theta - \pi/2)] \\ &= \log(2 \sin \theta) + \log 1 + i(\theta - \pi/2) \\ &= \log(2 \sin \theta) + i(\theta - \pi/2), \end{aligned}$$

чиме смо доказали лему. □

Посматрајмо даље функцију $\phi(\omega)$ дефинисану као:

$$\phi(\omega) = \frac{-\log(1 - \omega)}{\omega}.$$

Посматрана функција има сингуларитет у $\omega = 0$, који је отклоњив из чињенице да је

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \phi(\omega) = 0.$$

На основу Тејлоровог развоја:

$$-\log(1 - \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n}, \quad \text{за } |\omega| < 1,$$

закључујемо да

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= -\frac{\log(1 - \omega)}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left(-\log(1 - \omega) \right) \\ &= \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{n-1}}{n}, \quad \text{за } |\omega| < 1, \end{aligned}$$

па је функција $\phi(\omega)$ такође аналитичка.

Дефинишимо сада аналитичку *дилогаритамску функцију* $Li_2(z)$ као

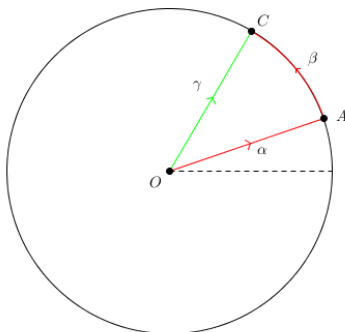
$$Li_2(z) = \int_0^z \phi(\omega) d\omega.$$

Заменом претходно добијеног, $\phi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{n-1}}{n}$, за $|\omega| < 1$, у дефиницију дилогаритамске функције и интеграцијом степеног реда члан по члан на области конвергенције добијамо

$$\begin{aligned} Li_2(z) &= \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{n-1}}{n} d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \frac{\omega^{n-1}}{n} d\omega \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\omega^n}{n^2} \Big|_0^z \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \text{за } |\omega| < 1. \end{aligned}$$

Нека су ϵ и θ реални бројеви такви да је $0 < \epsilon < \theta < \pi$. Посматрајмо криве α , β и γ параметризоване као:

$$\alpha(\rho) = \rho e^{2i\epsilon}, 0 < \rho < 1; \quad \beta(\xi) = e^{2i\xi}, \epsilon < \xi < \theta; \quad \gamma(\rho) = \rho e^{2i\theta}, 0 < \rho < 1.$$



Слика 33: Тачке $A = e^{2i\epsilon}$ и $C = e^{2i\theta}$ комплексне равни, као и криве α , β и γ

Како је $\phi(\omega)$ аналитичка функција, тада важи:

$$\int_{\alpha} \phi(\omega) d\omega + \int_{\beta} \phi(\omega) d\omega = \int_{\gamma} \phi(\omega) d\omega,$$

односно

$$\int_{\beta} \phi(\omega) d\omega = \int_{\gamma} \phi(\omega) d\omega - \int_{\alpha} \phi(\omega) d\omega,$$

па имајући у виду криве α и γ добијамо

$$\begin{aligned}\int_{\beta} \phi(\omega) d\omega &= \int_0^{e^{2i\theta}} \phi(\omega) d\omega - \int_0^{e^{2i\epsilon}} \phi(\omega) d\omega \\ &= Li_2(e^{2i\theta}) - Li_2(e^{2i\epsilon}).\end{aligned}$$

Уведимо смену $\omega = e^{2it}$ у интегралу $\int_{\beta} \phi(\omega) d\omega$, тада је $d\omega = 2ie^{2it}$, па је $\frac{d\omega}{\omega} = \frac{2ie^{2it}}{e^{2it}} dt = 2idt$, па замењујући $\phi(\omega) = -\frac{\log(1-\omega)}{\omega}$ добијамо

$$\begin{aligned}\int_{\beta} \phi(\omega) d\omega &= - \int_{\beta} \log(1-\omega) \frac{d\omega}{\omega} = - \int_{\epsilon}^{\theta} \log(1-e^{2it}) 2idt \\ &= - \int_{\epsilon}^{\theta} [\log(2\sin t) + i(t - \pi/2)] 2idt \\ &= (t^2 - \pi t) \Big|_{\epsilon}^{\theta} - 2i \int_{\epsilon}^{\theta} \log(2\sin t) dt.\end{aligned}$$

Зато је

$$-2i \int_{\epsilon}^{\theta} \log(2\sin t) dt = Li_2(e^{2i\theta}) - Li_2(e^{2i\epsilon}) + (\pi t - t^2) \Big|_{\epsilon}^{\theta}.$$

Како је Li_2 непрекидна функција на јединичном кругу закључујемо да несвојствени интеграл

$$\int_0^{\theta} \log(2\sin t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\theta} \log(2\sin t) dt$$

конвергира, па је функција $\mathcal{L}(\theta)$ добро дефинисана за свако $0 < \theta < \pi$ и важи

$$2i \mathcal{L}(\theta) = Li_2(e^{2i\theta}) - Li_2(1) + \pi\theta - \theta^2.$$

Израчунајмо вредност функције $\mathcal{L}(\theta)$ за $\theta = 0$ користећи добијену формулу:

$$\begin{aligned}2i \mathcal{L}(0) &= Li_2(e^{2i \cdot 0}) - Li_2(1) + \pi \cdot 0 - 0^2 \\ &= Li_2(1) - Li_2(1) - 0 = 0,\end{aligned}$$

што се подудара са претходно додефинисаном вредношћу функције $\mathcal{L}(\theta)$ у нули. Пуштајући да $\theta \rightarrow \pi$ добијамо да $\mathcal{L}(\theta)$ конвергира за $\theta = \pi$ и да је

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\pi) &= Li_2(e^{2i\pi}) - Li_2(1) + \pi \cdot \pi - \pi^2 \\ &= Li_2(1) - Li_2(1) + \pi^2 - \pi^2 = 0,\end{aligned}$$

па формула $2i \mathcal{L}(\theta) = Li_2(e^{2i\theta}) - Li_2(1) + \pi\theta - \theta^2$ важи за $0 \leq \theta \leq \pi$.

Теорема 5. Функција $L(\theta)$ је добро дефинисана и непрекидна за свако θ . Штавише, функција $L(\theta)$ је непарна и π -периодична.

Доказ: Како је из претходног извођења $L(0) = 0 = L(\pi)$ и из чињенице да је $\log |2 \sin \theta|$ периодична са периодом π (грубо речено, периодична је из чињенице да је функција $\sin x$ периодична, а период је π због апсолутне вредности синусне функције) то је функција периодична са периодом π , па је самим тим $L(\theta)$ добро дефинисана из π периодичности функције и добре дефинисаности за $0 \leq \theta \leq \pi$ (односно вредности функцију $L(\theta)$ из $0 \leq \theta \leq \pi$, π -продужујемо и добијамо дефинисаност за свако $\theta \in \mathbb{R}$). Како је $\log |2 \sin \theta|$ парна функција то је због предзнака минуса $L(\theta)$ непарна. $\square$

Теорема 6. За сваки цео број $n \in \mathbb{N}$, функција $L(\theta)$ задовољава:

$$L(n\theta) = n \sum_{j=0}^{n-1} L(\theta + j\pi/n).$$

Доказ: Замењујући $z = e^{2it}$ у једнакост

$$z^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1} (z - e^{-2\pi i j/n})$$

добијамо

$$e^{2int} - 1 = \prod_{j=0}^{n-1} e^{2it} (1 - e^{-2it-2\pi i j/n}).$$

На основу Леме 1 важи

$$|1 - e^{2i\theta}| = |2 \sin \theta|,$$

па преласком на модул и коришћењем леме добијамо

$$\begin{aligned} |e^{2int} - 1| &= \left| \prod_{j=0}^{n-1} e^{2it} (1 - e^{-2it-2\pi i j/n}) \right| \\ |2 \sin nt| &= \prod_{j=0}^{n-1} |e^{2it}| |2 \sin(t + j\pi/n)| \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} |2 \sin(t + j\pi/n)|. \end{aligned}$$

Логаритмујући добијену једнакост па преласком на интеграл са границама од 0 до θ добијамо

$$\int_0^\theta \log |2 \sin nt| dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\theta \log |2 \sin(t + j\pi/n)| dt.$$

Уведимо у претходне интеграле смене $nt = x$ и $t + j\pi/n = x$ тада је $dt = dx/n$ у првом, односно $dt = dx$ у другом интегралу, а границе интеграла постају од 0 до $n\theta$ у првом, односно од $j\pi/n$ до $\theta + j\pi/n$ у другом, односно претходна једнакост постаје

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^{n\theta} \log |2 \sin x| dx &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{j\pi/n}^{\theta+j\pi/n} \log |2 \sin x| dx \\ \frac{1}{n} \mathcal{L}(n\theta) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\int_0^{\theta+j\pi/n} \log |2 \sin x| dx - \int_0^{j\pi/n} \log |2 \sin x| dx \right] \\ \frac{1}{n} \mathcal{L}(n\theta) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}(\theta + j\pi/n) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}(j\pi/n). \end{aligned}$$

На основу непарности и π периодичности функције $\mathcal{L}(\theta)$ важи

$$\mathcal{L}((n-j)\pi/n) = \mathcal{L}(\pi - j\pi/n) = \mathcal{L}(-j\pi/n) = -\mathcal{L}(j\pi/n),$$

па је $\sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}(j\pi/n) = 0$. Заменом у претходну једнакост добијамо:

$$\frac{1}{n} \mathcal{L}(n\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}(\theta + j\pi/n)$$

што је и требало доказати. □

На основу Њутн-Лајбницевог формуле важи

$$\frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} = -\log |2 \sin \theta| \quad \text{и} \quad \frac{d^2 \mathcal{L}(\theta)}{d\theta^2} = -\cot \theta.$$

Без умањења општости претпоставимо да $\theta \in [0, \pi]$ (јер је функција $\mathcal{L}(\theta)$ π периодична), Тада је $\sin \theta$ позитиван, па можемо занемарити апсолутне вредности. Тада

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} &= 0 \\ -\log(2 \sin \theta) &= 0 \\ \theta &= \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad \theta = \frac{5\pi}{6}, \quad \text{ако } \theta \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Посматрајући знак првог извода функције $\mathcal{L}(\theta)$ дат следећом табелом закључујемо да функција $\mathcal{L}(\theta)$ достиже свој максимум у $\frac{\pi}{6}$, а минимум

Табела 1: Знак извода, односно монотоност функције Лобачевског на интервалу $(0, \pi)$

θ	$(0, \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$	$(\frac{5\pi}{6}, \pi)$
$\mathcal{L}'(\theta)$	+	−	+
$\mathcal{L}(\theta)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

у $\frac{5\pi}{6}$. Нумеричким методама је израчунато да је

$$\mathcal{L}\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0.5074709 \dots$$

На основу Теореме 6 добијамо једнакост

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(2\theta) = \mathcal{L}(\theta) + \mathcal{L}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

па применом непарности и π -периодичности функције $\mathcal{L}(\theta)$ добијамо

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(2\theta) = \mathcal{L}(\theta) - \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

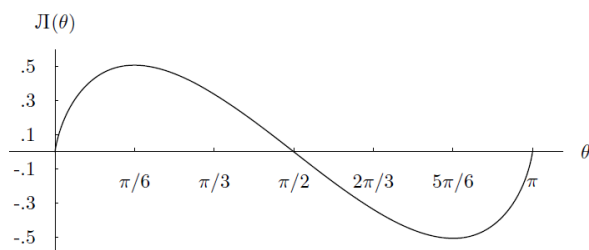
Заменом $\theta = \frac{\pi}{6}$ у претходну једнакост добијамо

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(\pi/3) = \mathcal{L}(\pi/6) - \mathcal{L}(\pi/3),$$

па, коначно

$$\mathcal{L}(\pi/3) = \frac{2}{3}\mathcal{L}(\pi/6) \approx 0.3383128 \dots$$

На основу свега што смо извели, а тиче се функције $\mathcal{L}(\theta)$, можемо скицирати график исте који је приказан следећом сликом.



Слика 34: График функције $\mathcal{L}(\theta)$ на сегменту $[0, \pi]$

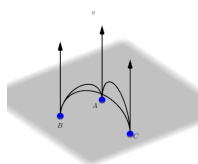
5 Запремина хиперболичког тетраедра

5.1 Запремина идеалног хиперболичког тетраедра

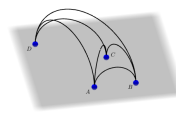
У овом одељку израчунаћемо запремину идеалног тетраедра, односно тетраедра који има сва четири темена несвојствена. Аналогно трећем одељку, где смо се бавили површином хиперболичког троугла, радићемо у полупросторном моделу хиперболичког простора.

Генерално, тетраедар је одређен са четири некомпланарне тачке, а како разматрамо идеалан тетраедар, он је одређен са четири некомпланарне идеалне тачке. Четири идеалне тачке хиперболичког простора су некомпланарне ако не постоји раван која их садржи, односно не постоји раван хиперболичког простора чије су бесконачно далеке тачке управо те четири тачке. Приметимо да су, у складу са једном од аксиома припадња, три различите идеалне тачке увек компланарне, јер уколико еуклидски припадају рубној равни модела и нису еуклидски колинеарне њима је одређена полусфера, тј. хиперболичка раван модела, уколико су оне још и еуклидски колинеарне тада је њима одређена полураван управна на рубној равни модела што је такође хиперболичка раван модела, и коначно, ако је једна од идеалних тачака тачка која одговара правцу v , тада је такође њима одређена хиперболичка раван у виду полуравни управне на рубу модела.

Све идеалне тачке модела који посматрамо, полупросторног модела, јесу тачке рубне равни модела као и бесконачно далека тачка модела која одговара правцима еуклидских полуправих управних на рубној равни, назовимо тај правац v . Управо зато разликујемо два типа идеалних тетраедара; тетраедре чије је једно теме тачка која одговара правцу v а остала темена тачке рубне равни модела и тетраедре коме су сва темена тачке рубне равни модела.



(a) Тетраедар са теменом v

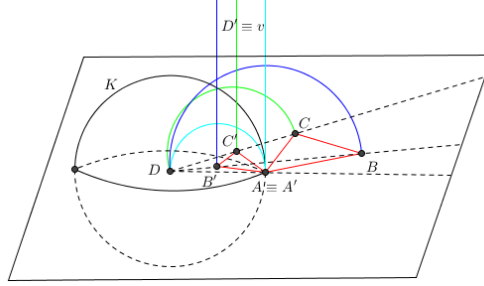


(b) Тетраедар коме теме није v

Слика 35: Идеални тетраедри у полупросторном моделу

Убудуће у раду са идеалним тетраедрима разматраћемо тетраедре које имају теме које одговара правцу v , односно случај (a) са претходне слике, које ћемо обележити са T . Овим не губимо на општости јер се сваки тетраедар коме су сва темена тачке рубне равни модела, обележимо такве тетраедре са T' , може трансформисати у тетраедар типа T . Посматрајмо произвољан тетраедар $ABCD$ типа T' . Уочимо еуклидску

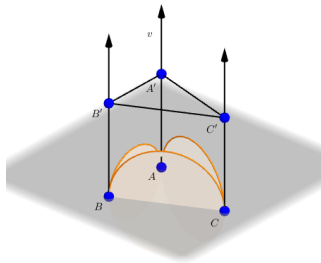
сферу $\mathcal{K}$ са центром D која садржи тачку A .



Слика 36: Пресликавање тетраедра типа $\tilde{T}$ у T

Инверзијом у односу на сферу $\mathcal{K}$ ивица тетраедра AD се пресликава у полуправу са почетком A управну на рубну раван модела, јер се тачка A налази на сфери инверзије, а D је центар инверзије, стога A остаје фиксна а D се слика у ∞ . Дакле ивица AD се пресликала у ивицу Av . Посматраном инверзијом ће се ивица тетраедра BD пресликати у полуправу са почетком B' такође управну на рубној равни модела, тј. ивица BD се пресликала у $B'v$, и аналогно се ивица тетраедра CD пресликава у $C'v$. Претходном инверзијом смо тетраедар $ABCD$ типа T' пресликали у тетраедар $AB'C'v$ типа T , а како је претходно речено да је инверзија у односу на сферу ништа друго до h -рефлексија хиперболичког простора, односно раванска рефлексија хиперболичког простора, то су ова два тетраедра хиперболички подударна.

Посматрајмо један такав идеалан тетраедар T . Уочимо орисферу σ чије је средиште бесконачно далека тачка која одговара правцу v , тако да σ нема заједничких тачака са пљосни тетраедра наспрамној средишту орисфере. Подсетимо се да је таква орисфера еуклидска раван паралелна рубној равни модела. Обележимо пресек тетраедра и орисфере $T \cap \Sigma$ са $L(v)$ (Слика 37). Како је орисфера Σ раван то је $L(v)$ еуклидски троугао.



Слика 37: Пресек орисфере и идеалног тетраедра- $L(v)$ -троугао $\triangle A'B'C'$

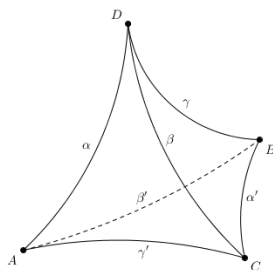
Тетраедар типа T је у потпуности одређен распоредом темена A, B и C . Међутим, како су еуклидски троуглови $\triangle ABC$ и $L(v)$ еуклидски подударни, штавише, они су трансляторно једнаки, стога и еуклидски троугао $L(v)$ у потпуности одређује тетраедар T . Заиста, уколико су дата два тетраедра T и $\tilde{T}$ са врховима који одговарају правцу v и базним теменима A, B и C , односно A', B' и C' и такви да је $L(v) \sim \tilde{L}(v)$, како важе еуклидске подударности $\triangle ABC \cong L(v)$ и $\triangle A'B'C' \cong \tilde{L}(v)$ из сличности $L(v) \sim \tilde{L}(v)$ следи еуклидска сличност еуклидских троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Одатле следи њихова хиперболичка подударност те се тетраедар $\tilde{T}$ може трансформисати у T . Поменута сличност је хиперболичка изометрија, јер је као последица аксиоме Лобачевског свака сличност хиперболичког простора подударност, а доказ тога се може наћи у [2].

Као последицу претходног разматрања добијамо да је тетраедар одређен, до на подударност, са $L(v)$ који је у суштини еуклидски троугао чији је збир унутрашњих углова π . Такође, можемо приметити да су управо унутрашњи углови еуклидског троугла $L(v)$ диедарски углови међу пљоснима тетраедра, па закључујемо да је збир углова међу пљоснима које одговарају једном темену тетраедра π .

Овим смо делимично доказали следећу теорему:

Теорема 7. *Нека је T идеалан тетраедар хиперболичког простора. Тада је T одређен до на подударност са три диедарска угла, α, β и γ , међу пљоснима врха тетраедра T . Штавише, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ и наспрамни диедарски углови међу пљоснима су подударни. Још, ако су α, β и γ позитивни реални бројеви тако да је $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, тада постоји идеалан тетраедар хиперболичког простора чији су диедарски углови α, β и γ .*

Доказ: Одређеност тетраедра T диедарским угловима α, β и γ , као и чињеница да је $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ су претходно доказани. Докажимо да су наспрамни диедарски углови α и α', β и $\beta',$ односно γ и γ' међусобно подударни. Посматрајмо тетраедар са следеће слике.



Слика 38: Тетраедар $ABCD$ са диедарским угловима $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ и γ'

На основу претходног збир диедарских углова код сваког од темена је π . На основу тога можемо формирати следећи систем линеарних једначина

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= \pi \\ \alpha + \beta' + \gamma' &= \pi \\ \alpha' + \beta' + \gamma &= \pi \\ \alpha' + \beta + \gamma' &= \pi\end{aligned}\tag{1}$$

где је прва једначина добијена посматрањем темена D и њему одговарајућих диедарских углова $\alpha = \angle(ACD, ABD)$, $\beta = \angle(ACD, BCD)$ и $\gamma = \angle(CDB, ABD)$. Аналогно су добијене друга, трећа и четврта једначина посматрајући редом темена A , B и C . Сабирањем прве две и последње две једначине система добијамо

$$\begin{aligned}2\alpha + (\beta + \beta') + (\gamma + \gamma') &= 2\pi \\ 2\alpha' + (\beta + \beta') + (\gamma + \gamma') &= 2\pi\end{aligned}$$

па одузимањем добијених једначина добијамо да је $\alpha = \alpha'$. На потпуно аналоган начин из почетног система добијамо и једнакост $\beta = \beta'$, односно $\gamma = \gamma'$, чиме је доказан и тај део теореме.

Нека су α , β и γ позитивни реални бројеви тако да важи $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Тада постоји еуклидски троугао чији су унутрашњи углови управо α , β и γ , назовимо га B . Нека је T идеалан хиперболички тетраедар чија су темена темена троугла B , а четврто теме бесконачно далека тачка правца v . Тада су из $B \sim L(v)$, где је $L(v)$ пресек орисфере са центром у v и тетраедра, унутрашњи углови еуклидског троугла $L(v)$ такође α , β и γ , па су на основу претходног дела теореме диедарски углови тетраедра T управо α , β и γ , што је и требало доказати. Овим је доказ теореме компетиран. $\square$

Управо из последице да је идеалан тетраедар у потпуности одређен мерама три диедарска угла, убудуће ћемо идеалан тетраедар чији су диедарски углови α , β и γ обележавати са $T_{\alpha, \beta, \gamma}$.

После претходних уводних припрема можемо кренути са израчунавањем запремине идеалног хиперболичког тетраедра $T_{\alpha, \beta, \gamma}$.

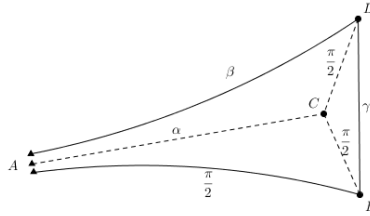
Теорема 8. *Запремина идеалног тетраедра $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ једнака је*

$$V(T_{\alpha, \beta, \gamma}) = L(\alpha) + L(\beta) + L(\gamma),$$

где је $L(\theta)$ трансцендентна функција Лобачевског.

Доказ: Доказ теореме извешћемо на донекле сличан начину доказивања теореме која се тиче површине хиперболичког троугла. Наиме,

извршићемо декомпозицију идеалног тетраедра на „једноставније”, чије ћемо запремине моћи израчунати. У циљу израчунавања запремине поменутог једноставнијег тетраедра, прво ћемо израчунати запремину тетраедра $ABCD$ коме је теме A несвојствено, три диедарска угла права, чије су ивице инцидентне са теменима A и B , B и C , односно C и D , три преостала диедарска угла α , β и γ , чије су ивице редом инцидентне са тачкама A и C , A и D , односно B и D редом, као што је приказано на Слици 39, обележимо га са $S_{\alpha,\beta,\gamma}$. Како је теме A несвојствено то је збир диедарских углова код тог темена једнак π , тј. важи $\alpha + \beta + \pi/2 = \pi$, односно $\alpha + \beta = \pi/2$ или $\beta = \pi/2 - \alpha$. Самим тим овај тетраедар можемо видети и као $S_{\alpha,\pi/2-\alpha,\gamma}$.



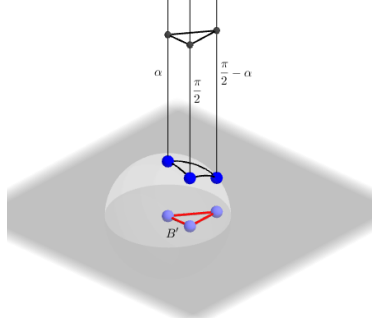
Слика 39: Тетраедар $S_{\alpha,\beta,\gamma}$

Лема 2. *Запремина тетраедра $S_{\alpha,\pi/2-\alpha,\gamma}$ једнака је*

$$V(S_{\alpha,\pi/2-\alpha,\gamma}) = \frac{1}{4} \left[\mathcal{L}(\alpha + \gamma) + \mathcal{L}(\alpha - \gamma) + 2\mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right].$$

Доказ леме: Посматрајмо овакав хиперболички тетраедар у полупросторном моделу хиперболичног простора. Нека је бесконачно далеко теме, теме A са слике, бесконачно далека тачка модела, правац v . Тада су ивице које се секу у том темену еуклидски паралелне вертикалне линије. Даље, претпоставимо да се базни троугао, обележимо га са B , налази на јединичној полусфери, која је хиперболичка раван. Овом претпоставком не губимо на општости јер уколико се базни троугао налази на некој другој хиперболичкој равни, тада је та раван представљена неком полусфером. Ту полусферу је могуће прво транслирати у координатни почетак а затим хомотетијом пресликати у јединичну полусферу. Овом еуклидском сличношћу смо базни троугао пресликали у њему еуклидски сличан троугао на јединичној полусфери, па су тада они хиперболички подударни.

Раније је напоменуто да је елемент запремине $dV = \frac{dx dy dz}{z^3}$. Пројекција поменутог базног троугла на Oxy раван је еуклидски троугао B'



Слика 40: Тетраедар $S_{\alpha, \pi/2 - \alpha, \gamma}$ у полупросторном моделу

чији су унутрашњи углови $\alpha, \pi/2 - \alpha$ и $\pi/2$ који можемо параметризовати са $0 \leq x \leq \cos \gamma$, $0 \leq y \leq x \tan \alpha$.

Сада израчунајмо његову запремину користећи претходну параметризацију

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{B'} \int_{z \geq \sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dx dy dz}{z^3} \\ &= \iint_{B'} \frac{dx dy}{2(1-x^2-y^2)}. \end{aligned}$$

Упростимо запис заменом $a = \sqrt{1-x^2}$ чиме је $a^2 = 1-x^2$, па интеграл постаје

$$\begin{aligned} V &= \iint_{B'} \frac{dx dy}{2(a^2 - y^2)} = \int_0^{\cos \gamma} dx \int_0^{x \tan \alpha} \frac{dy}{2(a^2 - y^2)} \\ &= \int_0^{\cos \gamma} \left(\frac{x}{4a} \log \frac{a + x \tan \alpha}{a - x \tan \alpha} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\cos \gamma} \frac{dx}{a} \log \frac{2(a \cos \alpha + x \arcsin \alpha)}{2(a \cos \alpha - x \arcsin \alpha)}. \end{aligned}$$

Уведимо смену $x = \cos \theta$, тада је $a = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 \theta} = \sin \theta$, $\frac{dx}{a} = \frac{-\sin \theta d\theta}{\sin \theta} = -d\theta$, а границе интеграла постају $\frac{\pi}{2}$ и γ , односно цео интеграл постаје

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{\gamma} -d\theta \left(\frac{2(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha)}{2(\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{\gamma} -d\theta \left(\frac{2 \sin(\theta + \alpha)}{2 \sin(\theta - \alpha)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[- \int_{\pi/2}^{\gamma} \log(2 \sin(\theta + \alpha)) d\theta + \int_{\pi/2}^{\gamma} \log(2 \sin(\theta - \alpha)) d\theta \right]. \end{aligned}$$

Уводећи смене $\theta_1 = \theta + \alpha$ и $\theta_2 = \theta - \alpha$ добијамо

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4} \left[- \int_{\pi/2+\alpha}^{\gamma+\alpha} \log(2 \sin \theta_1) d\theta_1 + \int_{\pi/2-\alpha}^{\gamma-\alpha} \log(2 \sin \theta_2) d\theta_2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\mathbb{L}(\gamma + \alpha) - \mathbb{L}(\pi/2 + \alpha) - \mathbb{L}(\gamma - \alpha) + \mathbb{L}(\pi/2 - \alpha) \right]. \end{aligned}$$

Коначно, користећи непарности и π -периодичности функције Лобачевског добијамо $\mathbb{L}(\gamma - \alpha) = -\mathbb{L}(\alpha - \gamma)$ односно $\mathbb{L}(\pi/2 + \alpha) = -\mathbb{L}(\pi/2 - \alpha)$, тачније

$$V = \frac{1}{4} \left[\mathbb{L}(\alpha + \gamma) + \mathbb{L}(\alpha - \gamma) + 2\mathbb{L}(\pi/2 - \alpha) \right],$$

што је и требало доказати. $\square$

Ако претпоставимо да је у тетраедру $S_{\alpha, \pi/2-\alpha, \gamma}$ још једно теме несвојствено, односно бесконачно далеко, тада је збир диедарских углова код тог темена такође π , а имајући у виду претходно наведену инциденту ивицу диедара и темена тетраедра то може бити једино теме D , јер би се иначе код несвојственог темена сустицала три диедарска угла од којих би два била по $\pi/2$, па би трећи морао бити мере 0, што није могуће. Стога важи $\beta + \gamma + \pi/2 = \pi$, а како смо претходно установили да је, посматрајући несвојствено теме A , $\alpha + \beta + \pi/2 = \pi$, то је $\alpha = \gamma$, па је његова запремина користећи претходно доказану лему:

$$V(S_{\alpha, \pi/2-\alpha, \alpha}) = \frac{1}{4} \left[\mathbb{L}(2\alpha) + 2\mathbb{L}(\pi/2 - \alpha) \right].$$

На основу непарности, π -периодичности функције Лобачевског као и особине из Теореме 6 из одељка 5 добијамо

$$\mathbb{L}(\pi/2 - \alpha) = -\mathbb{L}(\pi/2 + \alpha) \quad \text{и} \quad \mathbb{L}(2\alpha) = 2\mathbb{L}(\alpha) + \mathbb{L}(\alpha + \pi/2),$$

па је

$$V(S_{\alpha, \pi/2-\alpha, \alpha}) = \frac{1}{4} \left[2\mathbb{L}(\alpha) + 2\mathbb{L}(\alpha + \pi/2) - 2\mathbb{L}(\alpha + \pi/2) \right],$$

тј.

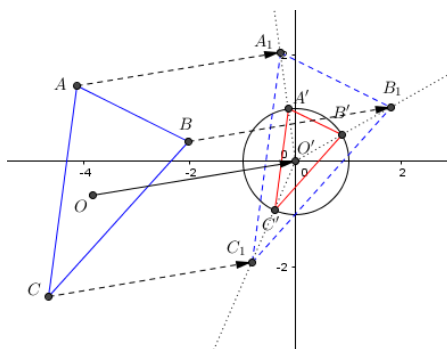
$$V(S_{\alpha, \pi/2-\alpha, \alpha}) = \frac{1}{2} \mathbb{L}(\alpha).$$

Овим смо израчунали запремину жељеног „простијег” тетраедра помоћу којег ћемо израчунати запремину почетног, идеалног тетраедра $T_{\alpha, \beta, \gamma}$. У наставку доказа бавићемо се декомпозицијом тетраедра T на тетраедре облика S .

Посматрајмо идеалан тетраедар $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ у полупросторном моделу тако да је једно несвојствено теме бесконачно далеко тачка модела, правац v ,

а остале три на рубној равни модела и то тако да се налазе на јединичној полусфери, која је хиперболичка раван.

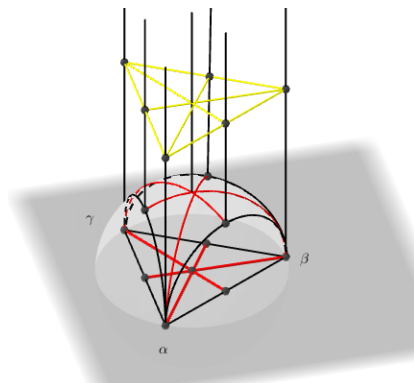
Доказаћемо формулу запремине идеалног тетраедра за овако специфично изабран тетраедар, а формула запремине важиће за сваки други идеалан тетраедар јер се сваки други идеалан тетраедар може еуклидском сличношћу пресликати на овакав тетраедар. Како је еуклидска сличност модела хиперболичка изометрија то ће посматрани тетраедри имати једнаке запремине. Опишимо детаљније поменути еуклидску сличност. Нека је дат произвољан идеални тетраедар чији је врх v , а темена A , B и C нису на јединичном кругу рубне равни модела, односно нису несвојствене тачке хиперболичке равни представљене јединичном полусфером. Тада транслирајмо центар описане кружнице троугла $\triangle ABC$, тачку O , у координатни почетак O' . Транслацијом $\mathcal{T}_{O\vec{O}'}$ прсликајмо $\triangle ABC$ у $\triangle A_1B_1C_1$, тада је тачка O' центар описане кружнице троугла $\triangle A_1B_1C_1$. Нека су тачке A' , B' и C' тачке пресека полуправих $O'A_1$, $O'B_1$ и $O'C_1$, са почетком у тачки O' , и јединичне кружнице са центром O' . Коначно, хомотетијом чији је центар тачка O' а коефицијент $k = \frac{O'A'}{O'A_1} = \frac{O'B'}{O'B_1} = \frac{O'C'}{O'C_1}$ троугао $\triangle A_1B_1C_1$ се прсликава на $\triangle A'B'C'$, па је композиција претходне транслације и поменуте хомотетије тражена еуклидска сличност, односно хиперболичка изометрија.



Слика 41: Композиција транслације и хомотетије којом се произвољан троугао $\triangle ABC$ прсликава у $\triangle A'B'C'$ на јединичној кружници

Наставимо са доказом теореме. Нека је тачка x пресек управне из v на сферу. Повежимо тачку x са преосталим теменима тетраедра. Поред тога, конструишимо управне из v на странице базног троугла датог тетраедра. Тетраедри чија су темена: једно од темена почетног тетраедра, подножје управне из x на страницу базног троугла суседној изабраном темену, тачка x као и бесконачно далеки правац v чине тражену декомпозицију идеалног тетраедра. Овим поступком смо почетни идеални тетраедар поделили на тераедре од којих је сваки тетраедар типа S из последице претходне леме, па њихову запремину знамо да израчунамо.

Ипак, сам распоред, односно број таквих помоћних тетраедара може да буде различит, зависно до распореда базних темена почетног тетраедра.



Слика 42: Декомпозиција идеалног тетраедра $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ на тетраедре типа S

У сврху решавања питања које се наметнуло, пројектујмо претходну конструкцију на Oxy раван. Као пројекцију добијамо јединични круг у који је уписан троугао. Пројекција тачке x је средиште јединичног круга, односно описаног круга троугла у пројекцији. Самим тим, тачка x може да се пројектује у тачку која:

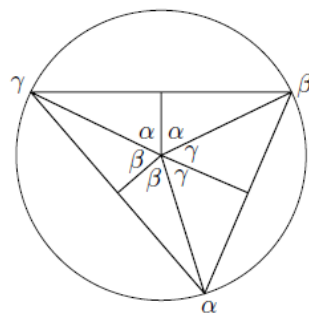
1. припада унутрашњој области троугла,
2. се налази на једној од страница троугла и
3. припада спољашњој области троугла,

па ћемо стога имати три случаја којим ћемо завршити доказ теореме.

Први случај:

Претпоставимо да пројекција врха v припада унутрашњој области базног троугла, као што је приказано у пројекцији на Слици 43. Тада је пројектовани троугао подељен на шест правоуглих троуглова од којих су по два суседна, који имају заједничку катету, подудрани.

Овим поступком смо полазни идеални тетраедар поделили на шест тетраедара типа S , конкретније то су по два тетраедра $S_{\alpha, \pi/2 - \alpha, \alpha}$, $S_{\beta, \pi/2 - \beta, \beta}$ и $S_{\gamma, \pi/2 - \gamma, \gamma}$ чије су запремине на основу леме редом $\frac{1}{2} \cdot \mathbb{L}(\alpha)$, $\frac{1}{2} \cdot \mathbb{L}(\beta)$ и $\frac{1}{2} \cdot \mathbb{L}(\gamma)$. Као закључак добијамо:



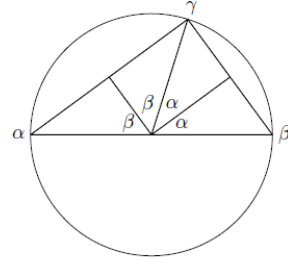
Слика 43: Пројекција врха припада унутрашњој области базног троугла

$$\begin{aligned}
V(T_{\alpha,\beta,\gamma}) &= 2(V(S_{\alpha,\pi/2-\alpha,\alpha}) + V(S_{\beta,\pi/2-\beta,\beta}) + V(S_{\gamma,\pi/2-\gamma,\gamma})) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\mathbb{L}(\alpha) + \frac{1}{2}\mathbb{L}(\beta) + \frac{1}{2}\mathbb{L}(\gamma)\right) = \mathbb{L}(\alpha) + \mathbb{L}(\beta) + \mathbb{L}(\gamma).
\end{aligned}$$

Други случај:

Претпоставимо да пројекција тачке x припада једној од страница троугла у пројекцији. Тада је поменути троугао правоугли и центар описане кружнице је средиште хипотенузе (Слика 44). Самим тим је један од диједарских углова идеалног тетраедра прав, рецимо, нека је то γ . Базни троугао подељен је на четири правоугла троугла од којих су по два суседна, који имају заједничку катету, подударни.

Полазни идеални тетраедар је подељен на четири тетраедра типа S и то по два $S_{\alpha,\pi/2-\alpha,\alpha}$ и $S_{\beta,\pi/2-\beta,\beta}$ чије су запремине редом $\frac{1}{2}\mathbb{L}(\alpha)$ и $\frac{1}{2}\mathbb{L}(\beta)$. Приметимо још да је $\mathbb{L}(\gamma) = \mathbb{L}(\pi/2) = 0$, па је



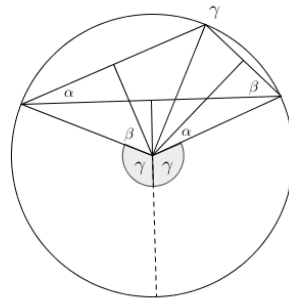
Слика 44: Пројекција врха припада једној од страница базног троугла

$$\begin{aligned}
V(T_{\alpha,\beta,\gamma}) &= 2(V(S_{\alpha,\pi/2-\alpha,\alpha}) + V(S_{\beta,\pi/2-\beta,\beta})) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\mathbb{L}(\alpha) + \frac{1}{2}\mathbb{L}(\beta)\right) = \mathbb{L}(\alpha) + \mathbb{L}(\beta) + \mathbb{L}(\gamma).
\end{aligned}$$

Трећи случај:

Претпоставимо да пројекција тачке x припада спољашњој области троугла у пројекцији. Тада је базни троугао тупоугли, претпоставимо да је $\gamma > \pi/2$. Троугао у пројекцији приказан је Слика 45. Тада површину базног троугла можемо видети као унију четири правоугла, по два међусобно подударна, троугла из које су избачена два такође правоугла, међусобно подударна, троугла.

Запремина полазног тетраедра једнака је, дакле, збиру запремина по два $S_{\alpha,\pi/2-\alpha,\alpha}$ и $S_{\beta,\pi/2-\beta,\beta}$ од којег је одузета запремина два $S_{\pi-\gamma,\gamma-\pi/2,\pi-\gamma}$ тетраедра чије су запремине редом



Слика 45: Пројекција врха припада спољашњој области базног троугла

$\frac{1}{2}\mathbb{L}(\alpha)$, $\frac{1}{2}\mathbb{L}(\beta)$ и $\frac{1}{2}\mathbb{L}(\pi - \gamma)$, па је користећи π -периодичност као и непарност функције Лобачевског

$$\begin{aligned} V(T_{\alpha,\beta,\gamma}) &= 2(V(S_{\alpha,\pi/2-\alpha,\alpha}) + V(S_{\beta,\pi/2-\beta,\beta}) - V(S_{\pi-\gamma,\gamma-\pi/2,\pi-\gamma})) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\mathbb{L}(\alpha) + \frac{1}{2}\mathbb{L}(\beta) - \frac{1}{2}\mathbb{L}(\pi - \gamma)\right) = \mathbb{L}(\alpha) + \mathbb{L}(\beta) - \mathbb{L}(\pi - \gamma) \\ &= \mathbb{L}(\alpha) + \mathbb{L}(\beta) - \mathbb{L}(-\gamma) = \mathbb{L}(\alpha) + \mathbb{L}(\beta) + \mathbb{L}(\gamma), \end{aligned}$$

чиме је доказ теореме комплетиран. $\square$

Идеалан тетраедар коме су сви диедарски углови по $\pi/3$ назива се *регуларни идеални тетраедар*. Докажимо сад једно занимљиво тврђење које се тиче регуларног идеалног тетраедра.

Теорема 9. *Регуларни идеални тетраедар је тетраедар максималне запремине хиперболичког простора H^3 .*

Доказ: Како је сваки идеалан тетраедар могуће поделити на тетраедре који имају бар једно коначно теме, односно, прецизније, сваки тетраедар који има бар једно коначно теме је могуће уписати у неки идеални тетраедар, то је запремина идеалног тетраедра већа од запремине било којег другог тетраедра. Запремина идеалног тетраедра дата је са

$$V(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = \mathbb{L}(\alpha) + \mathbb{L}(\beta) + \mathbb{L}(\gamma),$$

па треба наћи максимум те функције под условима

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0 \quad \text{и} \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Како је запремина непрекидна функција то она на компакту $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$; $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ достиже максимум и минимум. Запремина је такође и ненегативна функција па је минимум функције баш 0 који се достиже кад су сви углови 0. Стога се максимум достиже за $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Нека је

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

На основу правила Лагранжових множилаца постоји скалар λ такав да важи

$$\text{grad}(V) = \lambda \text{grad}(f)$$

за сваку тачку $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ у којој се достиже максимум. Самим тим важи

$$\mathbb{L}'(\alpha_0) = \mathbb{L}'(\beta_0) = \mathbb{L}'(\gamma_0),$$

па је

$$\sin(\alpha_0) = \sin(\beta_0) = \sin(\gamma_0).$$

Како је $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = \pi$ то је

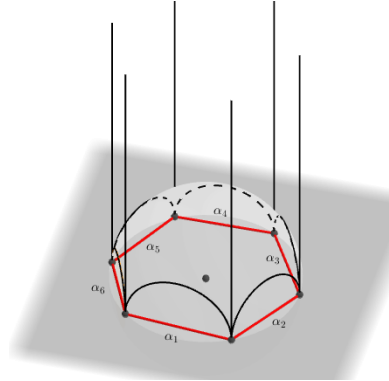
$$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \frac{\pi}{3},$$

па је тетраедар максималне запремине управо регуларни идеални тетраедар. Израчунајмо и конкретну запремину регуларног идеалног тетраедра, односно тетраедра $T_{\pi/3, \pi/3, \pi/3}$, присећајући се да смо у претходном поглављу аналитички израчунали $\mathcal{L}(\pi/3) \approx 0,3383128$, стога је

$$V(T_{\pi/3, \pi/3, \pi/3}) = 3\mathcal{L}(\pi/3) \approx 1,0149384.$$

□

Теорему о запремини идеалног тетраедра можемо генерализовати на израчунавање запремине идеалне n -тоугране пирамиде чији је врх правац v , а основа n -тоугао хиперболичке равни где су сва темена n -тоугла идеална. Нека су диједарски углови између бочних страна и равни базног n -тоугла углови $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Обележимо овакав хиперболички полиедар са $P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$. Тада важи следећа теорема.

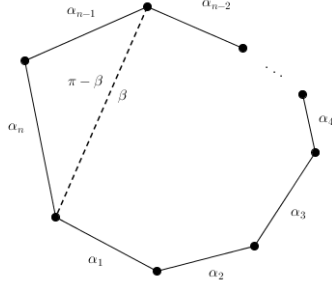


Слика 46: Идеална хиперболичка пирамида $P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6}$

Теорема 10. Нека је $P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ идеална n -тоуграна пирамида. Тада важи:

1. $\sum_{k=1}^n \alpha_k = \pi$
2. $V(P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}) = \sum_{k=1}^n \mathcal{L}(\alpha_k).$

Доказ: Доказ теореме извешћемо индукцијом по n . База индукције, случај $n = 3$, доказана је у Теорему 7 и Теорему 8. Претпоставимо да је теорема тачна за $n - 1$. Поделитемо базни n -тоугао идеалне пирамиде $P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ на $(n - 1)$ -тоугао и троугао. Спајајући добијена темена два



Слика 47: Подела базе на $(n - 2)$ -угао и троугао

добијена многоугла са бесконачно далеком тачком модела поделили смо $P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ на унију $P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \beta}$ и $P_{\alpha_{n-1}, \alpha_n, \pi - \beta}$.

На основу индуктивне хипотезе је

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-2} + \beta = \pi,$$

$$\alpha_{n-1} + \alpha_n + \pi - \beta = \pi.$$

Сабирањем добијених једнакости добијамо да је $\sum_{k=1}^n \alpha_k = \pi$. На исти начин је и

$$V(P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \beta}) = \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{L}(\alpha_k) + \mathbb{L}(\beta),$$

$$V(P_{\alpha_{n-1}, \alpha_n, \pi - \beta}) = \mathbb{L}(\alpha_{n-1}) + \mathbb{L}(\alpha_n) + \mathbb{L}(\pi - \beta).$$

Из π -периодичности као и непарности функције Лобачевског закључујемо да је $\mathbb{L}(\pi - \beta) = -\mathbb{L}(\beta)$, па сабирањем претходне две једнакости добијамо $V(P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{L}(\alpha_k)$, чиме је доказ теореме комплетиран.

□

5.2 Запремина произвољног тетраедра хиперболичке геометрије

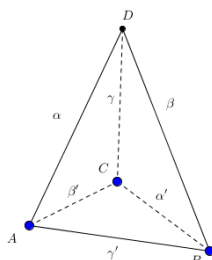
У овом одељку позабавићемо се питањем одређивања запремине произвољног тетраедра. Испоставља се да је тешко, односно и немогуће, наћи јединствену формулу којом би се рачунала запремина произвољног тетраедра. Међутим, постоје случајеви који су доста једноставнији које ћемо предочити у наставку рада. Наиме, ради се о тетраедрима

који имају тачно једно коначно теме и тетраедар који има тачно једно бесконачно далеко теме.

Пре него кренемо да се бавимо њиховим запреминама уведемо неопходну нотацију којом ћемо олакшати запис, донекле различиту од нотације претходне секције. Тетраедар ћемо обележавати као и до сада словом T . Индекс слова T наглашаваће колико несвојствених темена дати тетраедар има, а у заградама ћемо набројати диедарске углове. За идеалне тетраедра смо доказали теорему да је он у потпуности одређен трима својим диедарским угловим, тј. да су му наспрамни диедарски углови подударни. Међутим, у општем случају то не важи, тако да ћемо диедарске углове обележити са $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ и γ' , где су α и α' наспрамни углови, аналогно и β и β' , односно γ и γ' . Примера ради, $T_3(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ представља тетраедар који има три несвојствена темена чији су диедарски углови су $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ и γ' .

5.2.1 Хиперболички тетраедар са три несвојствена темена

Посматрајмо хиперболички тетраедар са три несвојствена темена, односно $T_3(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$. Такође, што се тиче нотације, претпоставимо да се диедарски углови α, β, γ сустичу у јединој коначној тачки тетраедра. На слици која следи бесконачно далеке тачке представљене су плавом бојом.



Слика 48: Тетраедар $T_3(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$

Претходно је доказана теорема којом се тврди да се збир диедарских углова тетраедра који се сустичу у бесконачно далекој тачки, односно несвојственом темену, једнак π . Тврђење теореме ће важити и овом случају, али наравно само за диедарске углове који се сустичу у бесконачно далеком темену. Искористићемо то да нађемо везу међу диедарским угловима, тачније изразићемо углове α', β' и γ' у функцији углова α, β и γ . Посматрајући редом темена A, B и C и диедарске углове који се у њима сустичу, примењујући поменућу теорему добијамо следећи систем једначина:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta' + \gamma' &= \pi \\
\alpha' + \beta + \gamma' &= \pi \\
\alpha' + \beta' + \gamma &= \pi.
\end{aligned} \tag{2}$$

Претходни систем је еквивалентан следећем систему:

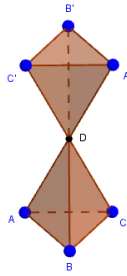
$$\begin{aligned}
\gamma' &= \pi - \alpha - \beta' \\
\alpha' &= \pi - \beta - \gamma' \\
\beta' &= \pi - \alpha' - \gamma,
\end{aligned} \tag{3}$$

заменом изражених α' , β' и γ' у десне стране једнакости система добијамо:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{\pi + \alpha - \beta - \gamma}{2} \\
\beta' &= \frac{\pi + \beta - \alpha - \gamma}{2} \\
\gamma' &= \frac{\pi + \gamma - \alpha - \beta}{2},
\end{aligned} \tag{4}$$

што је тражена зависност диједарских углова.

Израчунајмо запремину тетраедра $T_3(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$. Посматрајмо тетраедар са Сlike 48. Пресликајмо га централном симетријом са центром у тачки D . Дobili смо два подударна тетраедра, фигуру чију ћемо запремину израчунати, а самим тим добити и запремину траженог тетраедра.



Слика 49: Тетраедар $T_3(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ и његова слика при симетрији

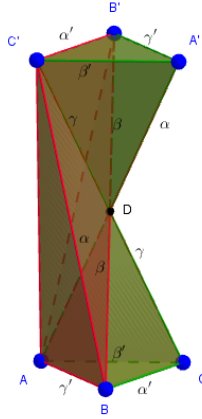
Запремину добијене фигуре можемо видети као:

$$V(ABCD) + V(A'B'C'D) = V(ABCC') + V(AA'B'C') - V(ABB'C'),$$

односно како је $A'B'C'D$ добијен симетријом тетраедра $ABCD$ важи да је $V(ABCD) = V(A'B'C'D)$ тј.

$$V(ABCD) = \frac{1}{2} \left(V(ABCC') + V(AA'B'C') - V(ABB'C') \right),$$

где је сваки од тетраедара са десне стране једнакости идеалан тетраедар чију запремину знамо да израчунамо на основу претходног поглавља. Треба још одредити диједарске углове сваког од тетраедара са десне стране једнакости, а како су они идеални то су они одређени са по три таква угла.



Слика 50: Подела фигуре на 3 идеална тетраедра

Израчунајмо диједарске углове тетраедра $ABCC'$. Угао између пљосни ABC и BCC' је подударан углу међу пљоснима ABC и BCD тј $\angle(ABC, BCC') = \angle(ABC, BCD) = \alpha'$, аналогно је и $\angle(ABC, ACC') = \angle(ABC, ACD) = \beta'$. Коначно, $\angle(BCC', ACC') = \angle(BCD, ACD) = \gamma$. Дакле,

$$V(ABCC') = V(T_{\alpha', \beta', \gamma}) = \mathbb{L}(\alpha') + \mathbb{L}(\beta') + \mathbb{L}(\gamma).$$

Посматрајмо сада тетраедар $AA'B'C'$. Сличним поступком као код претходног тетраедра израчунаћемо диједарске углове траженог тетраедра. $\angle(AA'B', AA'C') = \angle(A'B'D, A'C'D) = \alpha$, а $\angle(AA'C', A'B'C') = \angle(A'C'D, A'B'C') = \beta'$ и $\angle(AA'B', A'B'C') = \angle(A'B'D, A'B'C') = \gamma'$. Стога је

$$V(AA'B'C') = V(T_{\alpha, \beta', \gamma'}) = \mathbb{L}(\alpha) + \mathbb{L}(\beta') + \mathbb{L}(\gamma').$$

Коначно, посматрајмо тетраедар $ABB'C'$. Претходно је уочено да је $\angle(BCC', ACC') = \gamma$, а како су наспрамни диједарски углови идеалног тетраедра подударни то је $\angle(BCC', ACC') = \angle(ABC, ABC') = \gamma$. Можемо

уочити да је $\angle(ABB', ABC') = \angle(ABC, ABC') - \angle(ABC, ABD) = \gamma - \gamma'$.
 Даље можемо уочити да су $\angle(ABB', BB'C)$ и $\angle(A'B'D, B'C'D) = \beta$ суплементни углови, односно $\angle(ABB', BB'C) = \pi - \beta$ и коначно, трећи диједарски угао је β' . Тиме је

$$V(ABB'C') = V(T_{\gamma-\gamma', \pi-\beta, \beta'}) = \mathbb{L}(\gamma - \gamma') + \mathbb{L}(\pi - \beta) + \mathbb{L}(\beta').$$

Користећи непарности и π -периодичност функције Лобачевског, то је $\mathbb{L}(\pi - \beta) = -\mathbb{L}(\beta)$, а имајући у виду зависности диједарских углова које смо извели изводимо следеће:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(\gamma - \gamma') &= \mathbb{L}\left(\gamma - \frac{\pi + \gamma - \alpha - \beta}{2}\right) = \mathbb{L}\left(\frac{-\pi + \gamma + \alpha + \beta}{2}\right) \\ &= \mathbb{L}\left(\frac{\pi + \alpha + \beta + \gamma}{2} - \pi\right) = \mathbb{L}\left(\frac{\pi + \alpha + \beta + \gamma}{2}\right). \end{aligned}$$

Замењујући добијено у запремину идеалног тетраедра добијамо

$$V(ABB'C') = \mathbb{L}\left(\frac{\pi + \alpha + \beta + \gamma}{2}\right) - \mathbb{L}(\beta) + \mathbb{L}(\beta').$$

Објединујући добијене запремине идеалних тетраедара добијамо коначну формулу запремине тетраедра са три несвојствена темена:

$$\begin{aligned} V(T_3(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')) &= \frac{1}{2} \left(V(ABCC') + V(AA'B'C') - V(ABB'C') \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{L}(\alpha') + \mathbb{L}(\beta') + \mathbb{L}(\gamma) + \mathbb{L}(\alpha) + \mathbb{L}(\beta') \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{L}(\gamma') - \mathbb{L}\left(\frac{\pi + \alpha + \beta + \gamma}{2}\right) + \mathbb{L}(\beta) - \mathbb{L}(\beta') \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{L}(\alpha) + \mathbb{L}(\alpha') + \mathbb{L}(\beta) + \mathbb{L}(\beta') + \mathbb{L}(\gamma) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{L}(\gamma') - \mathbb{L}\left(\frac{\pi + \alpha + \beta + \gamma}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

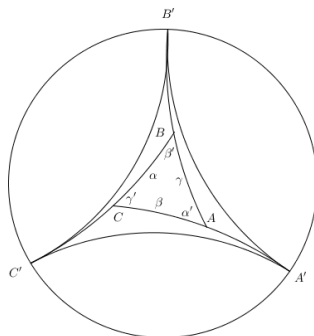
5.2.2 Хиперболички тетраедар са једним несвојственим теменом

Следећи једноставнији тетраедар за чију запремину ћемо извести експлицитну формулу је тетраедар са једним несвојственим теменом, или, у складу са уведеном нотацијом, тетраедра $T_1(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$.

Формулу коју ћемо у даљем тексту извести први је извео Винберг¹³, а извешћемо је ослањајући се на декомпозицију приказану на Слици 51, а самим тим и добрим делом на тетраедре типе T_3 . Наиме, посматрајмо

¹³Ернест Борисович Винберг (1937-) - руски математичар

троугао једине пљосни која има сва три темена коначна и продужимо сваку од страница у бесконачности у једном правцу. Тиме смо добили асимптотски троугао са три несвојствена темена који је подељен на три асимптотска троугла са по два несвојствена темена и један троугао коме су сва темена коначна. Повежимо добијена несвојствена темена са несвојственим теменом тетраедра, назовимо то теме I .



Слика 51: Проширење базног троугла до асимптотског у Поенкареовом диск моделу

Израчунајмо сада запремину тетраедра $T_1(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$. Запремину тетраедра T_1 можемо видети као разлику запремине идеалног тетраедра и запремина три T_3 тетраедра. Опишимо детаљније ова четири тетраедра чије запремине знамо да израчунамо, на основу чега ћемо добити запремину траженог тетраедра. Дакле:

$$V(ABCI) = V(A'B'C'I) - V(AA'B'I) - V(BB'C'I) - V(CC'A'I).$$

Израчунајмо диједарске углове тетраедра $AA'B'I$. Нагласимо да је на слици α диједарски угао између пљосни ABC и BCI , а угао α' између пљосни ABI и ACI и аналогно за остале углове. Очигледно је тада $\alpha_{T_3} = \angle(AA'I, AB'I) = \pi - \angle(CAI, ABI) = \pi - \alpha'$. Такође је и $\gamma_{T_3} = \angle(AB'I, AA'B') = \pi - \angle(ABI, ABC) = \pi - \gamma$ и $\beta_{T_3} = \angle(AA'I, AA'B') = \angle(ACI, ABC) = \beta$. Ово је у складу са нотацијом коју смо претходно увели јер смо са α, β и γ обележили диједарске углове који се сустичу у јединој коначној тачки тетраедра T_3 . Како је $AA'B'I$ тетраедар типа T_3 , то за његове диједарске углове важи следећа зависност

$$\begin{aligned}
\alpha'_{T_3} &= \frac{\pi + \alpha_{T_3} - \beta_{T_3} - \gamma_{T_3}}{2} \\
\beta'_{T_3} &= \frac{\pi + \beta_{T_3} - \alpha_{T_3} - \gamma_{T_3}}{2} \\
\gamma'_{T_3} &= \frac{\pi + \gamma_{T_3} - \alpha_{T_3} - \beta_{T_3}}{2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Заменењујући претходно уочене $\alpha_{T_3}, \beta_{T_3}$ и γ_{T_3} у систем налазимо да су диедарски углови тетраедра

$$\begin{aligned}
\alpha_{T_3} &= \pi - \alpha', & \alpha'_{T_3} &= \frac{\pi - \alpha' - \beta + \gamma}{2}, \\
\beta_{T_3} &= \beta, & \beta'_{T_3} &= \frac{-\pi + \alpha' + \beta + \gamma}{2}, \\
\gamma_{T_3} &= \pi - \gamma, & \gamma'_{T_3} &= \frac{\pi + \alpha' - \beta - \gamma}{2}.
\end{aligned}$$

Овим тетраедар $AA'B'I$ у складу са претходно уведеном нотацијом можемо видети као:

$$T_3\left(\pi - \alpha', \beta, \pi - \gamma, \frac{\pi - \alpha' - \beta + \gamma}{2}, \frac{-\pi + \alpha' + \beta + \gamma}{2}, \frac{\pi + \alpha' - \beta - \gamma}{2}\right).$$

На аналоган начин можемо одредити и диедарске углове преостала два тетраедра. Тиме тетраедар $BB'C'I$ можемо видети као:

$$T_3\left(\pi - \beta', \gamma, \pi - \alpha, \frac{\pi - \beta' - \gamma + \alpha}{2}, \frac{-\pi + \beta' + \gamma + \alpha}{2}, \frac{\pi + \beta' - \gamma - \alpha}{2}\right),$$

односно тетраедар $CC'A'I$ као:

$$T_3\left(\pi - \gamma', \alpha, \pi - \beta, \frac{\pi - \gamma' - \alpha + \beta}{2}, \frac{-\pi + \gamma' + \alpha + \beta}{2}, \frac{\pi + \gamma' - \alpha - \beta}{2}\right).$$

Преостало је још испитати диедарске углове тетраедра $A'B'C'I$ који је идеалан, међутим ту је ситуација јасна на основу тетраедара типа T_3 који се додирују баш у несвојственим тачкама A' , B' и C' па је диедарски угао једнак унији диедарских углова који се додирују. Стога је тетраедар $A'B'C'I$

$$T\left(\frac{\pi + \gamma - \alpha' - \beta}{2}, \frac{\pi + \alpha - \beta' - \gamma}{2}, \frac{\pi + \beta - \gamma' - \alpha}{2}\right).$$

Сада користећи формула за рачунање запремина идеалног као и тетраедра са три несвојствена темена можемо израчунати запремине помоћних тетраедра, а заменом добијених вредности у

$$V(ABCI) = V(A'B'C'I) - V(AA'B'I) - V(BB'C'I) - V(CC'A'I).$$

добијамо коначну формулу. Међутим, да бисмо олакшали запис и формулу компактније записали, уведемо још једну нотацију. Обележимо тражени тетраедар као $T_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ где су α_1, α_2 и α_3 диједарски углови ивица које повезују коначна темена, док се γ_1, γ_2 и γ_3 сустичу у бесконачно далекој тачки тетраедра. Такође нека је угао $\alpha_4 = \alpha_1$. Тада формула запремине траженог тетраедра гласи:

$$V(T_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\mathcal{L}(\gamma_i) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi + \alpha_i - \alpha_{i+1} - \gamma_i}{2}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi - \alpha_i + \alpha_{i+1} - \gamma_i}{2}\right) - \mathcal{L}\left(\frac{\pi - \alpha_i - \alpha_{i+1} + \gamma_i}{2}\right) - \mathcal{L}\left(\frac{-\pi + \alpha_i + \alpha_{i+1} + \gamma_i}{2}\right) \right].$$

Напоменимо још да претходно извођење можемо уопштити на случај када уместо троугла ABC коме су сва темена коначна посматрамо n -тоугао коме су сва темена коначна, па тиме добијамо запремину пирамиде у чијој је основи n -тоугао а врх бесконачно далека тачка. Уз претпоставку да је $\alpha_{n+1} = \alpha_1$ формула за запремину ће се променити у сумацији, тј сумација иде од 1 до n :

$$V(T_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\mathcal{L}(\gamma_i) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi + \alpha_i - \alpha_{i+1} - \gamma_i}{2}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi - \alpha_i + \alpha_{i+1} - \gamma_i}{2}\right) - \mathcal{L}\left(\frac{\pi - \alpha_i - \alpha_{i+1} + \gamma_i}{2}\right) - \mathcal{L}\left(\frac{-\pi + \alpha_i + \alpha_{i+1} + \gamma_i}{2}\right) \right].$$

6 Закључак

Откриће хиперболичке геометрије унело је невероватне промене у схватању геометрије, а самим тим и отворило прегршт питања на која је требало одговорити.

На питању запремине тетраедра хиперболичке геометрије, питања које нас у овом раду највише занима, одговор је дао још Николај Лобачевски у својим првим радовима посвећеним новооткривеној геометрији. Међутим, као што је и у раду предочено, саме формуле за запремину тетраедра нису нимало једноставне и за њихово донекле компактније записивање уведена је трансцендентна функција. Поред тога, сегмент који није обрађен у овом раду је запремина хиперболичног тетраедра коме су сва темена коначна. Најстарији метод за израчунавање запремине таквог тетраедра датира још из времена Лобачевског, а заснива се на декомпозицији тетраедра његовом висином на правоугле, међутим, одређивање диједарских углова помоћних тетраедара није једноставан задатак, и често тражени диједарски углови нису у вези са диједарским угловима полазног тетраедра. После рада Лобачевског на питању запремине тетраедра, многи светски математичари су се, у потрази за нешто једноставнијим решењем, бавили истим питањем и углавном се до резултата долазило сличном декомпозицијом. Тек крајем XX века долази се до решења које не користи поменути декомпозицију и делимично измењене формуле која такође користи функцију Лобачевског, али чији су аргументи решења система полиномних једначина.

Узевши у обзир сво претходно излагање, долазимо до закључка да је питање запремине тетраедра хиперболичке геометрије веома интересантна област, као и хиперболичке геометрија уопште. Међутим, остаје отворено питање да ли, у општем случају, можемо наћи неки једноставнији и униформан метод за израчунавање запремине тетраедра хиперболичке геометрије, а самим тим и компактнију и једноставнију формулу.

Литература

- [1] Andrey Popov, *Lobachevsky Geometry and Modern Nonlinear problems*, Springer, 2014.
- [2] Zoran Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Beograd 1997.
- [3] John Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer, 2006.
- [4] William Thurston *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, 1997.
- [5] William Thurston, *Geometry and topology of three-manifolds*, Princeton University Press, 2002.
- [6] John Milnor, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, Bulletin of the American Mathematical Society.
- [7] Николай Иванович Лобачевский, *Pangéometrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*, Kasan: Imprimerie de l'Université, 1855.
- [8] V.V. Praslov, V.M. Tikhomirov, *Geometry*, American Mathematical Society, 2001.
- [9] Saul Sathl, *The Poincaré Half-Plane: A Gateway to Modern Geometry*, Jones nad Bartlet Publishers, 1993.