



Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Rotacione površi konstantne srednje
krivine
Master rad

STUDENT:
Millorad Hajkoja

MENTOR:
dr Srdan Vukmirović
KOMISIJA:
dr Miroslava Antić, dr Tijana Šukilović

Beograd,
2017.

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Gausova i srednja krivina	3
2.1	Parametrizovana površ	3
2.2	Prva osnovna forma	6
2.3	Normalni presek i normalna krivina	7
2.3.1	Definicije	7
2.3.2	Računanje normalne krivine u specijalnom slučaju	8
2.3.3	Glavne krivine i Ojlerova teorema	9
2.4	Normalna i geodezijska krivina, druga osnovna forma.	10
2.4.1	Normalna i geodezijska krivina.	10
2.4.2	Druga osnovna forma	12
2.5	Glavne krivine, Gausova krivina i srednja krivina	13
3	Rotacione površi	16
3.1	Generisanje rotacione površi	17
3.2	Osobine rotacione površi	17
4	Rotacione površi konstantne srednje krivine	21
4.1	Od ruleta konike do Delonijeve površi	21
4.2	Od kruga do cilindra	22
4.3	Od parabole do katenoida	24
4.4	Od elipse do unduloida	27
4.5	Od hiperbole do nodoida	32
4.6	Delonijeva teorema	36
4.7	Površi kao mehuri od sapuna.	37
4.8	Minimalna površ Kosta	38
5	Zaključak	39

1 Uvod

Neka svojstva rotacionih površi su bila poznata od Arhimeda. Razvoj matematičke Analize u sedamnaestom veku dao je sistematičniji način za njihov dokaz. Krivinu opštih površi uvodi Ojler, koji 1760. godine dokazuje formulu za krivinu ravanskog dela površi, a 1771. razmatra i površi zadate u parametarskom obliku. Ključni doprinos teoriji površi daje Gaus u svoja dva rada iz 1825. i 1827. godine. Ta dva rada su dala potpuno nov ugao proučavanja površi, jer je Gaus isprva razmatrao suštinski geometriju površi, smatrajući da su svojstva, koja su određena samo geodezijskim rastojanjem između tačaka površi, nezavisna od načina na koji je površ zadata u Euklidskom prostoru. Ključni rezultat, Veličanstvena teorema Gausa, pokazuje da je Gausova krivina suštinski invarijantna, odnosno invarijantna u odnosu na lokalne izometrije. Ovo stanovište proširuje Riman na više-dimenzione prostore, što je danas poznato kao Rimanova geometrija. Devetnaesti vek je bio zlatno doba teorije površi, i to iz oba ugla gledanja - topološkog i iz ugla diferencijalne geometrije. Tada Darbu prikuplja mnoge značajne rezultate i objavljuje ih u svom delu *Théorie des surfaces*.

U 1841. godine Deloni¹ je naznačio klasu površi u Euklidskom prostoru koje je opisao eksplicitno kao rotacione površi kotrljanja konika. Ove površi su katenoidi, unduloidi i nodoidi. Danas se zovu Delonijeve površi. One su prvi netrivialni primeri površi koji imaju konstantnu srednju krivinu, pod trivialnim primerom podrazumevamo sferu.

Sledi kratak prikaz ovog master rada po glavama. Prva glava sadrži neke osnovne pojmove iz diferencijalne geometrije, kao što su prva i druga osnovna forma, Gausova i srednja krivina itd.

U drugoj glavi se posmatraju rotacione površi uopšte i neke njihove karakteristike.

U trećoj glavi se upoznajemo sa rotacionim površi koje imaju konstantnu srednju krivinu. U ovoj glavi vidimo kako se od konika dolazi do rotacionih površi sa konstantnom krivinom.

U radu će biti ilustrovani primeri rotacionih površi. Za njihovu ilustraciju je korišćen programski paket *Mathematica*. Takođe u trećoj glavi biće korišćen i programski paket *Geogebra* kako bih nacrtao konike: parabolu, elipsu i hiperbolu.

Želeo bih da se zahvalim članovima komisije dr Miroslavi Antić i dr Tijani Šukilović na korisnim komentarima koji su doprineli da ovaj master rad bude bolji. Takođe i roditeljima za podršku.

Ovaj Rad je nastao za vreme studija u okviru programa "Šrbija za Srbe iz regiona" vlade Republike Srbije.

¹Charles-Eugène Delaunay-francuski matematičar-(1816-1872)

2 Gausova i srednja krivina

2.1 Parametrizovana površ

Neka je U otvoren skup u \mathbb{R}^2 . Funkcija $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ je klase C^1 ako su r i njeni parcijalni izvodi $\frac{\partial r}{\partial u}$ i $\frac{\partial r}{\partial v}$ neprekidni. Koristićemo (u, v) kao koordinate na našem parametarskom prostoru. Slično, za svako $k \geq 2$, kažemo da je r klase C^k ako svi njeni parcijalni izvodi reda najviše k postoje i neprekidni su.

Definicija 1. *Parametrizovana regularna elementarna površ klase C^k , $k \geq 1$, podskupa $S \subset \mathbb{R}^3$ je 1-1 preslikavanje $r : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, klase C^k , gde je U otvoren podskup od \mathbb{R}^2 , a $r_u \times r_v \neq 0$.*

Oznake: $r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$ tj. $r(u, v) = r_1(u, v)e_1 + r_2(u, v)e_2 + r_3(u, v)e_3$. Parcijalne izvode po u i v označavamo skraćeno sa r_u i r_v pri čemu je

$$r_u(u, v) = \frac{\partial r}{\partial u} = \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial r_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial r_3}{\partial u}(u, v) \right), \quad (1)$$

$$r_v(u, v) = \frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial r_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial r_3}{\partial v}(u, v) \right). \quad (2)$$

Jakobijeva matrica preslikavanja r je

$$J(r)(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \\ \frac{\partial r_3}{\partial u} & \frac{\partial r_3}{\partial v} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Sledeći uslovi su ekvivalentni:

- $r_u(u_0, v_0)$ i $r_v(u_0, v_0)$ su linearno nezavisni;
- $r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0) \neq 0$;
- Jakobijeva matrica ima rang jednak 2 u tački (u_0, v_0) .

Možemo da posmatramo krive na regularnoj parametrizovanoj elementarnoj površi koje dobijamo kad fiksiramo $v = v_0$ dok je u promenljiva, koja se zove u -parametarska kriva i kad fiksiramo $u = u_0$ dok je v promenljiva, koja se zove v -parametarska kriva. U tački $P = r(u_0, v_0)$ vidimo da $r_u(u_0, v_0)$ je tangenta u -parametarske krive a $r_v(u_0, v_0)$ je tangenta v -parametarske krive.

Hoćemo da nam ovi vektori budu baza za tangentnu ravan, čiji normalan vektor je $r_u \times r_v$. Znači, tangentna ravan sadrži vektore r_u i r_v u tački $P = r(u_0, v_0)$. Sada, pošto $r_u \times r_v \neq 0$ iz definicije, vektori r_u i r_v su linearno nezavisni i kao takvi zadaju ravan. Onda važi sledeće.

Definicija 2. *Neka je S regularna parametrizovana elementarna površ, i neka je tačka $P \in S$. Neka je $r : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija takva da $P = r(u_0, v_0)$. Definišemo tangentnu ravan površi S u tački P da bude potprostor $T_P S$ koji je razapet vektorima r_u i r_v i sadrži tačku $r(u_0, v_0)$.*

Kako imamo regularnu parametrizaciju r , znamo da $r_u \times r_v$ je nenula vektor koji je ortogonalan ravni koja sadrži r_u i r_v . Tako dobijamo jedinični vektor

$$n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}. \quad (4)$$

On se zove jedinični normalni vektor regularne parametrizovane površi.

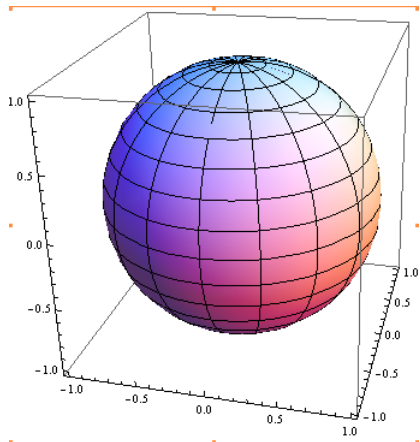
Navedimo neke primere površi:

- a) Parametrizacija sfere sa poluprečnikom $\rho > 0$ i centrom u koordinatnom početku jeste

$$r(u, v) = (\rho \sin(u) \cos(v), \rho \cos(u) \cos(v), \rho \sin(v)), \quad (5)$$

gde je $\rho > 0$ i gde je funkcija $r : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

`ParametricPlot3D[{Sin[u] Cos[v], Sin[u] Sin[v], Cos[u]},
{u, 0, Pi}, {v, 0, 2 Pi}]`



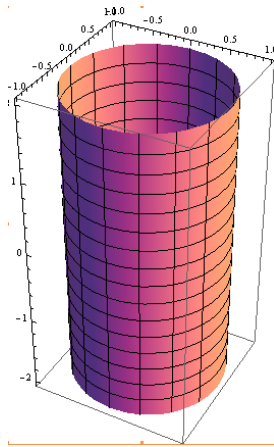
Slika 1: Sfera sa poluprečnikom $\rho = 1$

- b) Parametrizacija valjka sa poluprečnikom $\rho > 0$ koji ima kao osu osu \vec{OZ} data je sa

$$f(u, v) = (\rho \cos(v), \rho \sin(v), u), \quad (6)$$

gde je funkcija $f : (-a, a) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, i $a > 0$.

`ParametricPlot3D[{Cos[v], Sin[v], u}, {u, -2, 2}, {v, 0, 2 Pi}]`



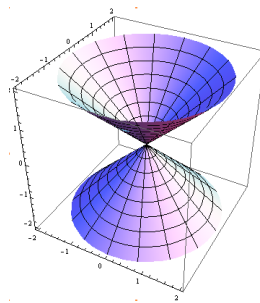
Slika 2: Valjak sa poluprečnikom $\rho = 1, a = 2$

c) Parametrizacija konusa je data sa

$$g(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u), \quad (7)$$

gde je funkcija $g : (-a, a) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $a > 0$. Presek konusa sa ravni $z = u_0$ je krug poluprečnika $\|u_0\|$, a za $u = 0$ taj presek je tačka $P(0, 0, 0)$. U tački P ova parametrizacija ne ispunjava uslove Definicije 1, tako da tačku P treba isključiti iz domena parametrizacije da bi konus bio regularna parametrizovana površ.

```
ParametricPlot3D[{u Cos[v], u Sin[v], u}, {u, -2, 2}, {v, 0, 2 Pi}]
```



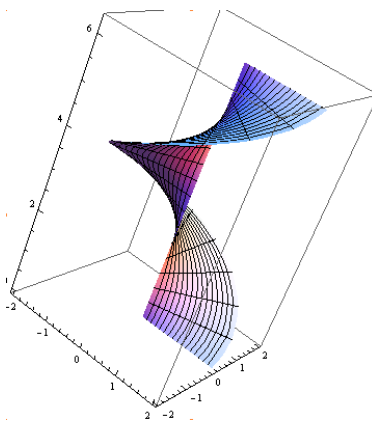
Slika 3: Konus $a = 2$

d) Parametrizacija helikoida je data sa

$$h(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v), \quad (8)$$

gde je funkcija $h : (0, a) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $a > 0$.

`ParametricPlot3D[{u Cos[v], u Sin[v], v}, {u, 0, 2}, {v, 0, 2 Pi}]`



Slika 4: Helikoid $a = 2$

2.2 Prva osnovna forma

Prva osnovna forma je skalarni proizvod vektora koji pripadaju tangentnoj ravni u tački P . Ona se označava sa I . Prva osnovna forma nam omogućava da računamo krivinu i metričke osobine površi, kao što su dužina i površina.

Neka su vektori $x = ar_u + br_v, y = cr_u + dr_v \in T_P S$ i neka je $\{r_u, r_v\}$ baza, onda je prva osnovna forma data sa:

$$\begin{aligned} I_P(x, y) &= \langle x, y \rangle = \langle ar_u + br_v, cr_u + dr_v \rangle \\ &= ac\langle r_u, r_u \rangle + (ad + bc)\langle r_u, r_v \rangle + bd\langle r_v, r_v \rangle \\ &= Eac + F(ad + bc) + Gbd, \end{aligned} \quad (9)$$

gde su E, F i G koeficijenti prve osnovne forme, dati sa:

$$\begin{aligned} E &= I_P(r_u, r_u) = \langle r_u, r_u \rangle, \\ F &= I_P(r_u, r_v) = \langle r_u, r_v \rangle = \langle r_v, r_u \rangle = I_P(r_v, r_u), \\ G &= I_P(r_v, r_v) = \langle r_v, r_v \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

i obično se prva osnovna forma predstavlja simetričnom matricom $I_P = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.
 Specijalno ako prva osnovna forma ima samo jedan argument, onda se koristi skalarni proizvod tog vektora sa samim sobom

$$\begin{aligned} I_P(x, x) &= \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle ar_u + br_v, ar_u + br_v \rangle \\ &= Ea^2 + 2Fab + Gb^2, \quad x \in T_P S. \end{aligned} \quad (11)$$

Neka su $r(U)$ i $r^*(U)$ dve površi. Kažemo da su te površi lokalno izometrične ako za svaki $P \in r(U)$ postoji regularna parametrizacija $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, sa $r(u_0, v_0) = P$ i druga regularna parametrizacija $r^* : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (gde koristimo isti otvoren skup $U \subset \mathbb{R}^2$), za koje važi $I_P = I_{P^*}$ kad god $P = r(u, v)$ i $P^* = r^*(u, v)$ za neke $(u, v) \in U$. Tada je funkcija $f = r^* \circ r^{-1} : r(U) \rightarrow r^*(U)$ je 1-1 preslikavanje koje čuva prvu osnovnu formu, a samim tim i rastojanje.

Kako imamo

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_u r_u & r_u r_v \\ r_v r_u & r_v r_v \end{pmatrix} = (r_u \quad r_v)^T (r_u \quad r_v), \quad (12)$$

sledi

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \det \begin{pmatrix} r_u r_u & r_u r_v \\ r_v r_u & r_v r_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_u r_u & r_u r_v & 0 \\ r_v r_u & r_v r_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \det \left((r_u \quad r_v \quad n)^T (r_u \quad r_v \quad n) \right) = (\det((r_u \quad r_v \quad n)))^2, \end{aligned} \quad (13)$$

što je kvadrat zapremine paralelepipeda koji je određen vektorima r_u , r_v i n . Kako je n jedinični vektor ortogonalan ravni koja sadrži r_u i r_v , ova vrednost je onda kvadrat površine paralelograma određenog vektorima r_u i r_v . Tako da važi $EG - F^2 = \|r_u \times r_v\|^2 > 0$. Zato je površina parametrizovane površi $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana kao integral

$$\int_U \|r_u \times r_v\| dudv = \int_U \int_U \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (14)$$

2.3 Normalni presek i normalna krivina

Osobine krivine za površi su mnogo složenije nego one za krive. To je zbog prostog razloga što iz jedne tačke P na površ možemo da posmatramo duž beskonačno mnogo tangenčnih pravaca i krivina može da se menja između ovih pravaca. Bilo bi teško proučavati beskonačno mnogo krivina. Može se pokazati da je dovoljno da poznamo samo dve, da bismo znali krivinu na površi u datoj tački.

2.3.1 Definicije

Neka je S površ i neka je P tačka na površi: u tački P , površ ima tangentnu ravan $T_P S$ koja se sastoji od svih tangenčnih vektora krivih na površi S koje

prolaze kroz tačku P . Izaberimo jedinični normalni vektor $n(P)$ i fiksirajmo vektor $v \in T_P S$, gde $\|v\| = 1$. Ova dva vektora nam daju normalnu ravan $\pi_v(P)$ kroz P (sa parametrizacijom $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + sv + tn(P)$, $s, t \in \mathbb{R}$). Presek normalne ravni $\pi_v(P)$ sa površi S je kriva na površi koja se zove normalni presek u smeru v .

Definicija 3. Normalni presek $C_v(P)$ površi S u tački $P \in S$ u smeru $v \in T_P S$ je kriva čija je slika presek normalne ravni $\pi_v(P)$ i površi S .

$$C_v(P) = S \cap \pi_v(P). \quad (15)$$

Normalna krivina $k_n(P; v)$ je definisana kao krivina normalnog preseka $C_v(P)$ viđena kao kriva u normalnoj ravni $\pi_v(P)$ sa smerom zadatim $\{v, n(P)\}$.

Preciznije, neka je $r_v : I \rightarrow S$, parametrizacija dužinom luka normalnog preseka $C_v(P)$ sa $r_v(0) = \overrightarrow{OP}$, orijentisana na takav način da je $r'_v(0) = v$. Tada je

$$r''_v(0) = k_n(P; v) \cdot n(P). \quad (16)$$

Kako je $r''_v(0)$ normalna na $r'_v(0) = v$ i deo je ravni sa bazom $\{v, n(P)\}$, onda jednačina (16) ima smisla. Specijalno, normalna krivina

$$k_n(P; v) = r''_v(0) \cdot n(P) \quad (17)$$

može biti pozitivna, negativna ili nula. Za normalni presek sa parametrizacijom koja ne mora biti zadata dužinom luka, normalna krivina ima oblik

$$k_n(P; v) = \frac{r''_v(0) \cdot n(P)}{\|r'_v(0)\|^3}. \quad (18)$$

2.3.2 Računanje normalne krivine u specijalnom slučaju

Normalni presek seče površi blizu tačke P , i normalna krivina u tački P meri normalnu krivinu tih krivih. Ovi brojevi daju krivine površi S u svakom tangentom pravcu. Teško je izračunati svaku normalnu krivinu. Postoji li neka veza ovih normalnih krivina? Da li je moguće da izračunamo manje (konačno mnogo krivina), a da dobijemo celu sliku? Odgovor ćemo prvo dati samo u specijalnom slučaju. Kasnije će biti pokazano da slično važi i u opštem slučaju.

Razmotrimo prvo specijalni slučaj. Neka je površ S dobijena kao grafik glatke funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gde je $D \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup i $O = (0, 0) \in D$. Pretpostavimo takođe da:

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = 0. \quad (19)$$

Prvi uslov nam obezbeđuje da površ S sadrži tačku $O \in \mathbb{E}^3$. Sledeća dva uslova nam kažu da tangentna ravan $T_O S$ u tački O ima kao bazu vektore $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$. Onda se afina tangentna ravan $\pi_O S$ poklapa sa XY -ravan a vektor $k = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ se može izabrati za jedinični normalni vektor u tački O .

Za datu površ S i tacku $P \in S$, uvek postoji izometrija prostora kojom se ta površ i tačka slikaju u one koje zadovoljavaju ove osobine. Prvo, translacijom za vektor \overrightarrow{PO} , tačka P se slika u O , zatim posoji rotacija koja slika jedan normalni vektor na drugi, tj. tangentnu ravan u koordinatnu ravan O_{xy} . Na kraju, postoji rotacija sa osom k kojom možemo ispuniti poslednji uslov $f_{xy}(0, 0) = 0$.

Nađimo sada normalni presek u ovom specijalnom slučaju:

Jedan jedinični tangentni vektor $v \in T_O S$, je oblika $v = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, za neki ugao $\theta \in (0, 2\pi)$. Koristićemo ovaj ugao kako bismo parametrizovali normalni presek $C(\theta) = C_v(O)$ i normalne krivine $k_n(\theta) = k_n(O, v)$. Normalni presek $C(\theta)$ je presek ravni određenih vektorskim pravcima

$$\{(\cos \theta, \sin \theta, 0), k\} = \{(t \cos \theta, t \sin \theta, s) | s, t \in \mathbb{R}\},$$

sa

$$S = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}.$$

Kako je $x = t \cos \theta$ i $y = t \sin \theta$, onda je $z = s = f(t \cos \theta, t \sin \theta)$, pa se tačka (x, y, z) preseka $C(\theta)$ može parametrizovati vektorskom funkcijom:

$$r : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(t) = (t \cos \theta, t \sin \theta, f(t \cos \theta, t \sin \theta)).$$

Koristeći izvod složene funkcije, naći ćemo normalnu krivinu za pravac θ

$$r'(t) = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \theta f_x(t \cos \theta, t \sin \theta) + \sin \theta f_y(t \cos \theta, t \sin \theta)),$$

$$r''(t) = (0, 0, \cos^2 \theta f_{xx}(t \cos \theta, t \sin \theta) + 2 \cos \theta \sin \theta f_{xy}(t \cos \theta, t \sin \theta) + \sin^2 \theta f_{yy}(t \cos \theta, t \sin \theta)),$$

i posebno

$$r'(0) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = v,$$

$$r''(0) = (0, 0, \cos^2 \theta f_{xx}(0, 0) + \sin^2 \theta f_{yy}(0, 0)).$$

Koristeći formulu za normalnu krivinu (18) u pravcu $v = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \in T_O S$, računamo

$$k_n(O; v) = k_n(O; \theta) = \frac{r''(0)n(0)}{|r'(0)|^3} = \cos^2 \theta f_{xx}(0, 0) + \sin^2 \theta f_{yy}(0, 0). \quad (20)$$

2.3.3 Glavne krivine i Ojlerova teorema

U prethodnom odeljku smo, u jednom specijalnom slučaju, pokazali tvrđenje koje važi i u opštijem obliku i naziva se Ojlerova² teorema. Primitimo da je $k_1 = f_{xx}(0, 0)$ normalna krivina površi S u tački O na pravac x -ose a $k_2 = f_{yy}(0, 0)$ je normalna krivina površi S u tački O na pravac y -ose.

²Leonhard Euler-švajcarski matematičar-(1707-1783)

Propozicija 1. Neka je površ S grafik glatke funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gde je $D \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup takav da $O = (0, 0) \in D$ i $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = 0$.

Tada $k_1 = f_{xx}(0, 0)$ i $k_2 = f_{yy}(0, 0)$ su maksimalna, odnosno minimalna normalna krivina od S na O , i normalna krivina $k_n(\theta)$ na pravac $v = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \in T_O S$, je data Ojlerovom formulom

$$k_n(O; \theta) = \cos^2 \theta k_1 + \sin^2 \theta k_2. \quad (21)$$

Ojlerova formula preakazuje da je normalna krivina funkcija ugla θ .

Dokaz: Iz Ojlerove jednacine (21) vidimo da su $k_1 = k_n(O; 0)$ i $k_2 = k_n(O; \frac{\pi}{2})$ normalne krivine. Zašto su ekstremalne? Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da $k_1 \geq k_2$ (ako ne onda zamenimo ulogu x i y ose). Tada,

$$k_2 = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) k_2 \leq k_n(O; \theta) = \cos^2 \theta k_1 + \sin^2 \theta k_2 \leq (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) k_1 = k_1. \quad (22)$$

Definicija 4. Brojevi k_1 i k_2 se zovu glavne krivine površi S u tački O .

Primedba 1. Posebno, Ojlerova formula (21) nam kaže kako da izračunamo normalnu krivinu u proizvoljnom tangentnom pravcu ako su poznate glavne krivine. Ako hoćemo da nađemo normalnu krivinu u datom pravcu v , dovoljno je znati dve glavne krivine i ugao između jednog glavnog pravca- u našem slučaju x -ose i pravca vektora v . U stvari Ojlerova formula je tačna u opštem slučaju, što ćemo objasniti kasnije.

2.4 Normalna i geodezijska krivina, druga osnovna forma.

U ovom poglavlju, dajemo formulu za normalnu krivinu u datoj tački neke površi. Računi su ovde malo složeniji nego u specijalnom slučaju. Tokom tog računa delimo krivinu jedne proizvoljne krive na površi S na normalnu i geodezijsku komponentu.

2.4.1 Normalna i geodezijska krivina.

Neka je S površ data parametrizacijom

$$r : U \rightarrow \mathbb{R}^3, U \subset \mathbb{R}^2.$$

Neka je C , kriva na površi S sa parametrizacijom $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ koja ima $(u(t), v(t))$ kao parametrizaciju za odgovarajuću krivu na U . Neka je $P(t)$, tačka krive data vektorom $P = r(u(t), v(t))$.

Imamo sledeći oronormirani pokretni reper:

- Jedinični tangentni vektor $\tau(t)$;
- Normalni vektor površi S , dat sa $\nu(u, v) = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}(u, v)$;
- Vektor binormale $\gamma(t) = \nu(t) \times \tau(t)$ se nalazi u tangentnoj ravni $T_{P(t)} S$ u tački $P(t)$ i normalan je na $\tau(t)$.

Vektori $\tau(t), \nu(t), \gamma(t)$ formiraju alternativnu bazu za \mathbb{R}^3 , duž krive.

Glavni normalni vektor $n(t)$ krive C u tački $P(t)$ je ortogonalan na $\tau(t)$ i kao takav je jedinični vektor ravni razapet vektorima $\nu(t)$ i $\gamma(t)$. Zato postoji ugao $\theta(t)$ takav da je normalni vektor na površ dat sa

$$n(t) = \sin \theta(t)\gamma(t) + \cos \theta(t)\nu(t). \quad (23)$$

Vektor krivine $k(t)n(t)$ se sastoji od dve komponente:

$$k(t)n(t) = k(t) \sin \theta(t)\gamma(t) + k(t) \cos \theta(t)\nu(t), \quad (24)$$

tangente i normalne komponente.

Definicija 5. *Koeficijenti ove dve komponente se zovu:*

Geodezijska krivina u $P(t)$, $k_g(t) = k(t) \sin \theta(t)$,

Normalna krivina u $P(t)$, $k_n(t) = k(t) \cos \theta(t)$.

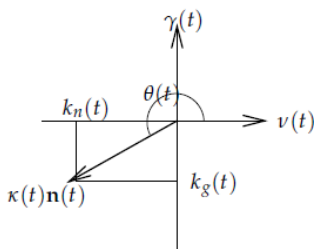
Napomena 1. *U slučaju kada kriva C pripada normalnom preseku $C_v(P)$ sadržanom u normalnoj ravni $\pi_v P$, glavni normalni vektor $n(t)$ od $C_v(P)$ u P je jedinični vektor koji se nalazi u toj ravni i normalan je na vektor v . Onda, $n(t)$ mora da se poklapa sa $\nu(t)$ ili $-\nu(t)$ i kao posledica, geodezijska krivina normalnog preseka u P je $k_g(0) = 0$ a njegova normalna krivina u P je $k_n(0) = \pm k(0)$, odnosno krivina krive normalnog preseka $C_v(P)$ (znak zavisi od izbora jediničnog normalnog vektora $\nu(0)$).*

Sada hoćemo da izračunamo normalnu krivinu za datu krivu C na površi S koristeći parametrizaciju r i, posebno, krivine normalnih preseka:

Neka je kriva parametrizovana sa $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$. Iz Freneovih jednačina za prostornu krivu znamo da važi

$$\tau'(t) = s'(t)k(t)n(t) = s'(t)(k_g(t)\gamma(t) + k_n(t)\nu(t)). \quad (25)$$

gde je s prirodni parametar krive.



Slika 5: Dekompozicija za vektor krivine

Propozicija 2. Normalna krivina od k zadovoljava:

$$k_n(t) = \frac{1}{s'(t)}(\tau'(t) \cdot \nu(t)) = -\frac{1}{s'(t)}(\tau(t) \cdot \nu'(t)). \quad (26)$$

Dokaz:

Druga jednačina se dobija diferenciranjem jednačine $\tau(t) \cdot \nu(t) = 0$.

Kako bismo interpretirali vektore $\nu' = (v \circ r)'$ i $\tau(t)$ u formuli gore, ili prvu od Freneovih jednačina

$$\nu' = \nu_u u' + \nu_v v', \quad (27)$$

$$\tau = \frac{1}{s'(t)}(r_u u' + r_v v'). \quad (28)$$

Iz propozicije zaključujemo da važi:

Posledica 1.

$$k_n(t) = -\frac{1}{s'(t)}\tau(t) \cdot \nu'(t) = -\frac{1}{s'(t)^2}((r_u \cdot \nu_u)(u')^2 + (r_u \cdot \nu_v + r_v \cdot \nu_u)u'v' + (r_v \cdot \nu_v)(v')^2). \quad (29)$$

Posledica 2. Normalna krivina zavisi od tangentnog vektora τ krive u P , ali ne od same krive. Za nenula tangentni vektor $\tau = ar_u + br_v$, rezultat Posledice 1 može se koristiti kao definicija za normalnu krivinu površi S u pravcu τ :

$$k_n(t) = -\frac{1}{|\tau|^2}((r_u \cdot \nu_u)a^2 + (r_u \cdot \nu_v + r_v \cdot \nu_u)ab + (r_v \cdot \nu_v)b^2). \quad (30)$$

2.4.2 Druga osnovna forma

Konačno, hoćemo da nađemo izraze za koeficijente u formuli (29). Za ovaj cilj koristimo:

Definicija 6. Neka je data površ S parametrizacijom $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, kao u prethodnom poglavlju. Definišemo tri realne glatke funkcije $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, sa

$$e(u, v) = (r_{uu} \cdot \nu)(u, v) = \frac{r_{uu}(r_u \times r_v)}{|r_u \times r_v|}(u, v); \quad (31)$$

$$f(u, v) = (r_{uv} \cdot \nu)(u, v) = \frac{r_{uv}(r_u \times r_v)}{|r_u \times r_v|}(u, v); \quad (32)$$

$$g(u, v) = (r_{vv} \cdot \nu)(u, v) = \frac{r_{vv}(r_u \times r_v)}{|r_u \times r_v|}(u, v); \quad (33)$$

i drugu osnovnu formu za tangentni vektor $t = ar_u + br_v \in T_P S$, $P = r(u, v)$, kao kvadratni polinom sa dve nepoznate a i b :

$$II(t)(u, v) = e(u, v)a^2 + 2f(u, v)ab + g(u, v)b^2. \quad (34)$$

Veza između ovih funkcija sa koeficijentima iz formula (31), (32) i (33) se objašnjava sledećom lemom:

Lema 1.

$$e(u, v) = -(r_u \cdot \nu_u)(u, v); \quad (35)$$

$$f(u, v) = -(r_u \cdot \nu_v)(u, v) = -(r_v \cdot \nu_u)(u, v); \quad (36)$$

$$g(u, v) = -(r_v \cdot \nu_v)(u, v). \quad (37)$$

Dokaz:

Koristimo parcijalno diferenciranje jednačine

$$0 = r_u \cdot \nu = r_v \cdot \nu,$$

po u i po v .

Kako smo normu $|t|$ vektora t izračunali prvom osnovnom formom, dobijamo sledeći izraz za normalnu krivinu u pravcu t :

Propozicija 3. Normalna krivina k_n površi S u tački P sa $P = r(u, v)$, na tangentni pravac $t = ar_u + br_v \in T_P S$, je količnik druge i prve osnovne forme:

$$k_n(t) = \frac{e(u, v)a^2 + 2f(u, v)ab + g(u, v)b^2}{E(u, v)a^2 + 2F(u, v)ab + G(u, v)b^2}. \quad (38)$$

2.5 Glavne krivine, Gausova krivina i srednja krivina

Naš cilj je da uopštimo rezultat što smo dobili za glavne krivine površi grafika funkcije na opštu površ. Mi se nadamo da ćemo naći u svakoj tački P površi S dve glavne krivine takve da svaka normalna krivina $k_n(t)$ pripada intervalu njima određenom.

Bilo bi lepo da imamo formule koje izražavaju normalnu krivinu preko glavnih krivine. Koja je maksimalna, odnosno minimalna vrednost za ovaj izraz (normalnu krivinu) i za koji (tangentni) pravac se to dešava?

Preformulišimo ovo pitanje: Neka je $P \in S$, takva da $P = r(u_0, v_0)$. Fiksiramo vrednost dveju osnovni formi u toj tački:

$$E = E(u_0, v_0), F = F(u_0, v_0), G = G(u_0, v_0),$$

$$e = e(u_0, v_0), f = f(u_0, v_0), g = g(u_0, v_0).$$

Sada se pitamo za koje realne brojeve k jednačina

$$k = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}, \quad (39)$$

ima netrivialno rešenje $(a, b) \neq (0, 0)$. (**Napomena:** Uvek postoji rešenje za $k = \frac{e}{E}$, za koje je rešenje $(a, b) = (1, 0)$.)

Sledeće jednačine su ekvivalente:

$$ea^2 + 2fab + gb^2 = kEa^2 + 2kFab + kGb^2,$$

$$(kE - e)a^2 + 2(kF - f)ab + (kG - g)b^2 = 0,$$

$$\text{i } (kE - e)^2a^2 + 2(kF - f)(kE - e)ab + (kG - g)(kE - e)b^2 = 0$$

Neka je $kE \neq e$. Onda možemo napisati

$$((kE - e)a + (kF - f)b)^2 + ((kG - g)(kE - e) - (kF - f)^2)b^2 = 0. \quad (40)$$

Jednačina (40) može imati rešenje ako drugi sabirak je manji ili jednak nuli

$$(kG - g)(kE - e) - (kF - f)^2 \leq 0,$$

$$(EG - F^2)k^2 - (eG + gE - 2fF)k + (eg - f^2) \leq 0,$$

$$k^2 - \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}k + \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \leq 0 \quad (41)$$

(U redu je da delimo sa $EG - F^2$ jer je to uvek pozitivan broj $EG - F^2 > 0$).

Definicija 7. Neka je $P \in S$, tačka regularne parametrizovane površi, i neka su E, F, G i e, f, g koeficijenti prve i druge osnovne forme u P u datoj parametrizaciji. Onda definišemo Gausovu krivinu $K(P)$ površi S u tački P kao realni broj

$$K(P) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (42)$$

i srednju krivinu $H(P)$ kao realni broj

$$H(P) = \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}. \quad (43)$$

Napomena 2. K i H definišu glatke funkcije $K(u, v)$ i $H(u, v)$ na njihovom domenu.

Koristeći ove skraćenice, nejednačina (41) se piše:

$$k^2 - 2Hk + K \leq 0.$$

Za date realne brojeve K i H ova funkcija predstavlja parabolu. Jednačina

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

ima dva rešenja $k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$ i $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$.

Definicija 8. Neka je $P \in S$, tačka na površi S i neka je $K(P)$ i $H(P)$ Gausova, odnosno srednja krivina od S u P . Onda se brojevi

$$k_1(P) = H(P) + \sqrt{H^2(P) - K(P)}, \quad (44)$$

$$k_2(P) = H(P) - \sqrt{H^2(P) - K(P)}, \quad (45)$$

zovu glavne krivine za S u P .

Pridruženi glavni pravci su tangentni pravci $t_1 = a_1r_u + b_1r_v$ i $t_2 = a_2r_u + b_2r_v$ sa $k_n(t_i) = k_i(P)$ gde je $i = 1, 2$ (jednoznačno određeni za $k_1 \neq k_2$!).

Propozicija 4. 1. Glavne krivine, Gausova krivina i srednja krivina u tački $P \in S$, su vezane sledećim relacijama:

$$K(P) = k_1(P) \cdot k_2(P), \quad (46)$$

$$H(P) = \frac{k_1(P) + k_2(P)}{2}. \quad (47)$$

Poslednja jednačina objašnjava naziv srednje krivine.

2. Glavni pravci $t_i = a_i r_u + b_i r_v$ mogu se odrediti kao rešenje linearnih jednačina

$$(k_i E - e)a_i + (k_i F - f)b_i = 0,$$

ili kao rešenje linearnih jednačina

$$(k_i F - f)a_i + (k_i G - g)b_i = 0.$$

Dokaz:

1. Računajmo $k_1(P) \cdot k_2(P)$ i $k_1(P) + k_2(P)$ koristeći formule (46) i (47).
2. Posmatramo jednačinu:

$$((kE - e)a + (kF - f)b)^2 + ((kG - g)(kE - e) - (kF - f)^2)b^2 = 0.$$

Glavne krivine k_i zadovoljavaju jednačinu:

$$(k_i G - g)(k_i E - e) - (k_i F - f)^2 = 0, i = 1, 2.$$

Onda prvi deo

$$((k_i E - e)a + (k_i F - f)b)^2,$$

mora da nestane za glavni pravac t_i . To je ekvivalentno sa rešenjem (a_i, b_i) linearne jednačine

$$(k_i E - e)a_i + (k_i F - f)b_i = 0.$$

Ako sredimo prvu jednačinu onda dobijamo

$$((kE - e)(kG - g) - (kF - f)^2)a^2 + ((kF - f)a + (kG - g)b)^2 = 0.$$

Prvi deo nestaje za $k = k_i$, tako da drugi deo mora da nestane za $(a, b) = (a_i, b_i)$, koordinate glavnog pravca.

Napomena 3. Neka je data parametrizacija $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, površi S . Glavne krivine i glavni pravci mogu se dobiti po sledećem algoritmu:

1. Izračunati koeficijente E, F, G i e, f, g prve i druge osnovne forme u (u_0, v_0) ;
2. Izračunati Gausovu krivinu i srednju krivinu na P ;

3. Izračunati $k_1(P)$ i $k_2(P)$;

4. Ako $k_1(P) \neq k_2(P)$, izračunati glavne pravce t_1 i t_2 .

Na kraju se bavimo i sa specijalnim slučajem gde račun i su lakši.

Pretpostavimo da imamo površ za čiju parametrizaciju važi $F = f = 0$. Ovo je slučaj za svaku tačku rotacione površi.

Posledica 3. U tački P površi sa $F = f = 0$, glavne krivine i glavni pravci su dati kao

$$k_1 = \frac{e}{E}; \quad t_1 = r_u; \quad k_2 = \frac{g}{G}; \quad t_2 = r_v.$$

Dokaz: U jednoj tački P imamo:

$$K(P) = \frac{eg}{EG} \quad i \quad H(P) = \frac{eG + gE}{2EG}.$$

Koristeći formule (44) i (45) dobijamo vrednosti za glavne krivine. Jednačine

$$(k_i E - e)a_i + (k_i F - f)b_i = 0,$$

$$(k_i F - f)a_i + (k_i G - g)b_i = 0,$$

koje određuju glavne pravce daju:

$$\left(\frac{gE}{G} - e\right)a_2 = 0, \quad \left(\frac{eG}{E} - g\right)b_1 = 0.$$

Onda su glavni pravci dati sa $t_1 = r_u$ (za $b_1 = 0$), $t_2 = r_v$ (za $a_2 = 0$).

Definicija 9. Tačka $P \in S$ se zove

1. eliptička ako $K(P) > 0$,
2. hiperbolička ako $K(P) < 0$,
3. parabolikna ako $K(P) = 0$ i $k_1(P) \neq 0$ ili $k_2(P) \neq 0$,
4. planarna ako $k_1(P) = k_2(P) = 0$

3 Rotacione površi

Neka je $P(l, 0, n) \in E^3$ tačka u ravni O_{xz} u euklidskom prostoru. Ako je rotiramo oko z ose dobićemo krug poluprečnika l u ravni $z = n$. Taj krug može se parametrizovati kao $r(u) = (l \cos u, l \sin u, n)$, $u \in (0, 2\pi)$.

3.1 Generisanje rotacione površi

Umesto jedne tačke, možemo rotirati oko z -ose sve tačke regularne parametrizovane krive u ravni O_{xz} . Takva kriva sa glatkom parametrizacijom $r(v) = (x(v), 0, z(v))$ nam daje površ

$$r(u, v) = (x(v) \cos u, x(v) \sin u, z(v)), a < v < b, 0 < u < \pi.$$

Efekat je da se cela kriva rotira oko z -ose i generiše rotacionu površ. Pri tom treba voditi računa o sledećem:

- (1) Ako funkcija $x(v)$, uzima i pozitivne i negativne vrednosti, mora da dobija negde i vrednost $x(v_0) = 0$. To će biti tačka $(0, 0, z(v_0))$ na z -osi, koja je fiksirana tokom rotacije. Rotaciona površ koju smo dobili u ovom slučaju neće biti regularna u toj tački. Zbog toga treba da je $x(v) > 0$ za svaku $v > 0$.
- (2) Kako bismo dobili otvoren skup kao domen za parametrizaciju, imaćemo $0 < u < 2\pi$. I tako, parametrizacija ne obuhvata celu rotaciju (jedna tačka fali za svaki krug te površi). Kako bismo pokrili celu površ, možemo koristiti istu formulu za parametrizaciju, ali unutar intervala $u \in (-\pi, \pi)$ na domen.

3.2 Osobine rotacione površi

Sada ćemo analizirati osobine rotacione površi koristeći istu parametrizaciju kao gore. Parametarske krive površi su:

1. Paralele sa parametrizacijom $(x(v_0) \cos u, x(v_0) \sin u, z(v_0))$; to su krugovi za svaku fiksnu vrednost v_0 ;
2. Meridijani (kopije tačke krive posle rotacije) sa parametrizacijom $(x(v) \cos u_0, x(v) \sin u_0, z(v))$ za fiksnu vrednost parametra u_0 .

Sada ćemo da proverimo da li vektorska funkcija koju smo koristili gore ispunjava zahteve parametrizacije iz definicije. Kako je kriva koju rotiramo regularna i kako je domen izabran kao otvoren interval $u \in (0, 2\pi)$, lako se vidi da je r 1-1 preslikavanje.

Parcijalni izvodi od r su:

$$r_u(u, v) = x(v)(-\sin u, \cos u, 0); \quad r_v(u, v) = (x'(v) \cos u, x'(v) \sin u, z'(v)).$$

Kako bismo videli da su ova dva vektora linearno nezavisna za svaki par (u, v) , izračunamo njihov vektorski proizvod:

$$(r_u \times r_v)(u, v) = x(v)(z'(v) \cos u, z'(v) \sin u, -x'(v)), \quad (48)$$

i pokažimo da ne može biti nula. Znamo već da $x(v) > 0$. Štaviše, vektor $(z'(v) \cos u, z'(v) \sin u, -x'(v))$ ima dužinu $\sqrt{z'(v)^2 + x'(v)^2}$. To je norma tangentnog vektora naše krive koja je regularna, pa je onda različita od nule svuda.

Normalni vector u tački $P = r(u, v) \in S$ jeste

$$\nu(u, v) = \frac{1}{\sqrt{z'(v)^2 + x'(v)^2}}(z'(v) \cos u, z'(v) \sin u, -x'(v)). \quad (49)$$

Vidimo i drugi parcijalni izvod od parametrizacije r :

$$\begin{aligned} r_{uu} &= -x(v)(\cos u, \sin u, 0), \\ r_{uv} &= x'(v)(-\sin u, \cos u, 0), \\ r_{vv} &= (x''(v) \cos u, x''(v) \sin u, z''(v)). \end{aligned}$$

Sad izračunamo koeficijente za dve osnovne forme:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= x^2(v); & F(u, v) &= 0; & G(u, v) &= x'(v)^2 + z'(v)^2; \\ e(u, v) &= -\frac{x(v)z'(v)}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}}; & f(u, v) &= 0; & g(u, v) &= \frac{x''(v)z'(v) - x'(v)z''(v)}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}}. \end{aligned}$$

Kako je $F = 0$, zaključujemo da su paralele i meridijani međusobno ortogonalni u svakoj tački površi.

Štaviše, kako je $F = f = 0$ koristimo posledicu pomoću koje računamo glavne krivine i glavne pravce: Tangente r_u od paralela, odnosno r_v od meridijana su glavni pravci. Glavne krivine su:

$$k_1 = \frac{e}{E} = \frac{-z'(v)}{x(v)\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}}; \quad k_2 = \frac{g}{G} = \frac{x''(v)z'(v) - x'(v)z''(v)}{(x'(v)^2 + z'(v)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (50)$$

Kako bismo pojednostavili račune pretpostavimo da je naša kriva parametrizovana dužinom luka. Tada će norma tangentnog vektora $\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}$ u odnosu na ovu parametrizaciju imati vrednost 1 za svaki parametar v . Posebno, glavne krivine postaju mnogo prostije:

$$k_1 = \frac{e}{E} = \frac{-z'(v)}{x(v)}; \quad k_2 = x''(v)z'(v) - x'(v)z''(v).$$

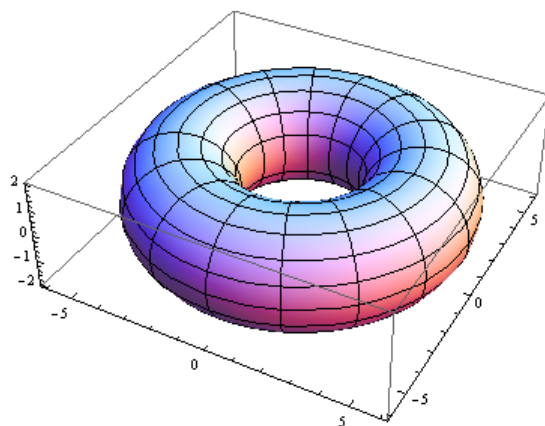
Primer: Kao prvi primer razmotrimo torus zadat parametrizacijom:

$$r(u, v) = ((R + r \cos(u)) \cos(v), (R + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)), \quad u, v \in (-\pi, \pi).$$

Torus je rotaciona površ. Mi rotiramo krug poluprečnika r , koji se nalazi u ravni O_{xz} , oko z ose. R je udaljenost centra kruga poluprečnika r od z -ose.

Razlikujemo tri slučaja:

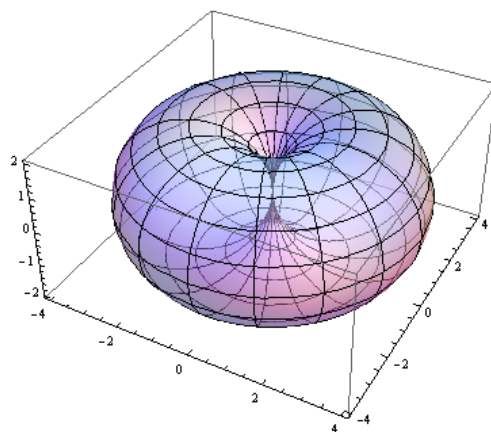
1. Kad je $R > r$, imaćemo torus prsten.



Slika 6: Torus prsten za $R = 4$ i $r = 2$

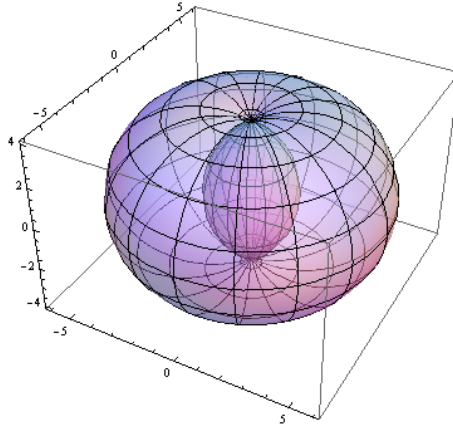
```
ParametricPlot3D[{{(4 + 2 Cos[u]) Cos[v], (4 + 2 Cos[u]) Sin[v],
  2 Sin[u]}, {u, -Pi, Pi}, {v, -Pi, Pi}}];
```

2. Kad je $R = r$ imaćemo rog torus koji nema "rupu".



Slika 7: Torus rog za $R = r = 2$

```
ParametricPlot3D[{{(2 + 2 Cos[u]) Cos[v], (2 + 2 Cos[u]) Sin[v],
  2 Sin[u]}, {u, -Pi, Pi}, {v, -Pi, Pi} ,PlotStyle->Opacity[0.5]]
```



Slika 8: Vretenasti torus za $R = 2$ i $r = 4$

3. Kad je $R < r$, imaćemo vretenasti torus koji se seče sa samim sobom.

```
ParametricPlot3D[{{(2 + 4 Cos[u]) Cos[v], (2 + 4 Cos[u]) Sin[v],
4 Sin[u]}, {u, -Pi, Pi}, {v, -Pi, Pi} ,PlotStyle->Opacity[0.5]]
```

Na prstenastom torusu možemo da primetimo i geometrijsku interpretaciju Gausove krivine. Znamo da Gausova krivina u tački P za rotacione površi ima formulu $K(P) = \frac{eg}{EG}$. U mom primeru imam

$$E = r^2; \quad G = (R + r \cos(u))^2; \quad e = r; \quad g = (R + r \cos(u)) \cos(u).$$

Sada dobijamo da je Gausova krivina data sa:

$$K(P) = \frac{\cos(u)}{r(R + r \cos(u))}.$$

U zavisnosti od ugla u Gausova krivina može biti pozitivna, negativna ili nula.

1. $K(P) > 0$, za $u < \frac{\pi}{2}$ ili $u > \frac{3\pi}{2}$. Tačka P na torusu se nalazi sa spoljne strane i jeste eliptička tačka.
2. $K(P) < 0$, za $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$. Tačka P na torusu se nalazi sa unutrašnje strane i jeste hiperbolička tačka.
3. $K(P) = 0$, za $u = \frac{\pi}{2}$ ili $u = \frac{3\pi}{2}$. Tačka P na torusu se nalazi na gornjem krugu ili respektivno na donjem krugu i jeste parabolička tačka.

4 Rotacione površi konstantne srednje krivine

U diferencijalnoj geometriji, površi konstantne srednje krivine predstavljaju uopštenja minimalnih površi. Na primer, katenoid ima srednju krivinu jednaku nuli. Ova površ je površ konstantne srednje krivine, ali takođe je minimalna površ. Minimalna površ je ona površ koja ima srednju krivinu jednaku nuli.

Rotacione površi sa konstantnom srednjom krivinom su definisane i karakterisane su u potpunosti od strane Delonija pre više od jednog veka.

Deloni je klasifikovao kompletne površi konstantne srednje krivine u euklidskom prostoru u svom radu iz 1841. godine [1]. Kažemo da je površ konstantne srednje krivine u \mathbb{R}^3 kompletna ako nije deo veće takve površi. On je pokazao da se svaka takva površ, koju zovemo Delonijeva površ, dobija rotacijom tzv. ruleta konike oko ose ruleta. Ove površi su cilindar, katenoid, unduloidi i nodoidi. One su prvi netrivialni primeri površi koji imaju konstantnu srednju krivinu. Pod trivialnim primerom podrazumevamo sferu. Sfera se dobija rotacijom polukruga. Polukrug je rulet kriva elipse kad b teži nuli.

Naime, rulet konike se dobija kada kotrljamo koniku (krug, elipsu, parabolu, hiperbolu) neprekidno po fiksiranoj pravoj (osa ruleta), i posmatramo sliku jedne žiže konike pri tom kotrljanju.

Primetimo da je rulet kruga prava, a odgovarajuća Delonijeva površ cilindar koji ima srednju krivinu različitu od nule.

Sfera je trivialni slučaj Delonijevih površi. Ona jeste površ sa konstantnom srednjom krivinom jer znamo da sfera ima srednju krivinu jednaku $1/r$, gde r je poluprečnik sfere.

Na ovaj način unduloid se dobija od trigonometrijskih funkcija, a katenoid i nodoid se dobijaju od hiperboličkih funkcija. Ovo nam omogućava da dobijemo prostije izraze za Gausovu krivinu, srednju krivinu i dužinu luka rulete.

4.1 Od ruleta konike do Delonijeve površi

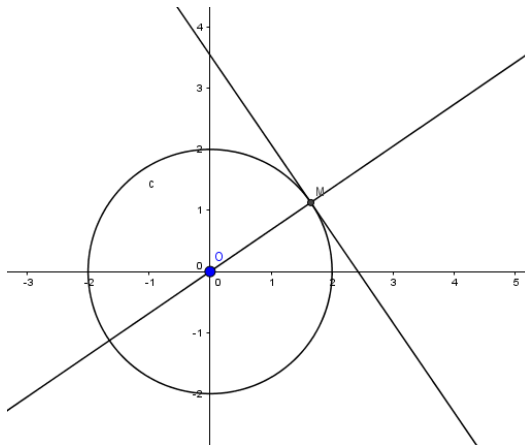
Kada kotrljamo krivu, bez klizanje, po fiksnoj krivoj, svaka tačka krive koja se kotrlja crta drugu krivu koja se zove rulet.

Mi ćemo posmatrati kotrljanje konike po fiksnoj pravoj i posmatraćemo krivu koju opisuje žiža te konike pri kotrljanju. I hoćemo da nađemo parametrizaciju ruleta koja se crta od žiže ili žiža konike. Ova fiksna prava je tangenta na koniku. Takođe, možemo zameniti uloge konike i njene tangente tako što ćemo imati fiksnu koniku i tangentu koja se kreće oko konike. Od žiže crtamo normalu na tangentu. Tako ćemo moći da nađemo parametrizaciju ruleta jer ćemo znati sve vreme apscisu i ordinatu žiže dok se tangenta pomera oko fiksne konike.

Ove rulete koje smo dobili biće meridijani za Delonijeve površi koje posmatramo. Delonijeve površi su rotacione površi koje se dobijaju rotacijom ruleta koju smo našli kotrljanjem konike.

4.2 Od kruga do cilindra

Neka je krug $x^2 + y^2 = a^2$ dat parametrizacijom $p(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$ i njegova žiža je centar kruga $O = (0, 0)$.



Slika 9: Krug

Kako kotrljamo krug po pravoj liniji koja je tangentna na njega, sve vreme centar kruga O se pomera i kreira novu krivu koja je rulet kruga. Rulet možemo naći i na drugi način. Možemo kotrljati tangentu kruga po krugu i vezati koordinatni sistem za tangentu, i naći koordinate centra kruga u svakom trenutku. Ako je M dodirna taka kruga i tangente, mi možemo naći i apscisu i ordinatu rulete na sledeći način. Za apscisu nam treba dužina luka od $t_0 = 0$ do $t_1 = t$. To nalazimo na sledeći način.

$$p'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t));$$

$$|p'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t)} = a$$

$$s = \int_0^t |p'(u)| du = \int_0^t a du = at.$$

Koeficijent tangente kruga jeste

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \cos(t)}{-a \sin(t)}.$$

Onda jednačina tangente jeste:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - a \sin(t) = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)}(x - a \cos(t))$$

$$y - \frac{a - x \cos(t)}{\sin(t)} = 0.$$

Znamo da koeficijent normale na tangentu jeste $k_1 = -\frac{1}{k} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$. Ova normala prolazi kroz centar kruga $O = (0, 0)$.

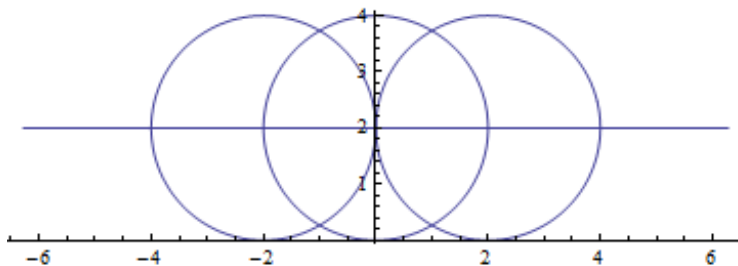
Odatle se nalazi njena jednačina

$$y - y_0 = k_1(x - x_0),$$

$$y - 0 = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}(x - 0),$$

$$y - x \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = 0.$$

Pošto je poluprečnik kruga uvek normalan na tangentu kruga u svakoj tački onda će apscisa ruleta biti $s = at$, a ordinata ruleta će biti koliko i dužina poluprečnika kruga a .



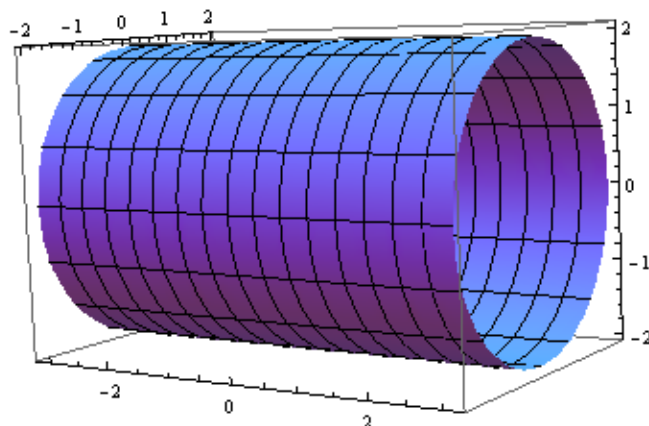
Slika 10: Ruleta za cilindar

Onda je rulet $R(t) = (at, a)$ prava linija koja je paralelna sa x-osom i udaljena od nje koliko i poluprečnik kruga a . Sada možemo da rotiramo tu pravu i na taj način dobijamo Delonijevu površ.

Ta površ se naziva cilindar:

$$r(t, v) = (at, a \cos(v), a \sin(v)).$$

```
ParametricPlot3D[{2*u, 2*Cos[v], 2*Sin[v]}, {u, -Pi/2, Pi/2},
{v, 0, 2 Pi}]
```

Slika 11: Cilindar

Prvi izvodi po t i po v su:

$$r_t = (a, 0, 0);$$

$$r_v = (0, -a \sin(v), a \cos(v)).$$

Jedinični normalni vektor jeste:

$$n(t, v) = (0, -\cos(v), -\sin(v)).$$

Koeficijenti prve i druge osnovne forme, glavne krivine, Gausova krivina i srednja krivina su:

$$E = a^2; \quad G = a^2; \quad e = 0; \quad g = a; \quad F = f = 0;$$

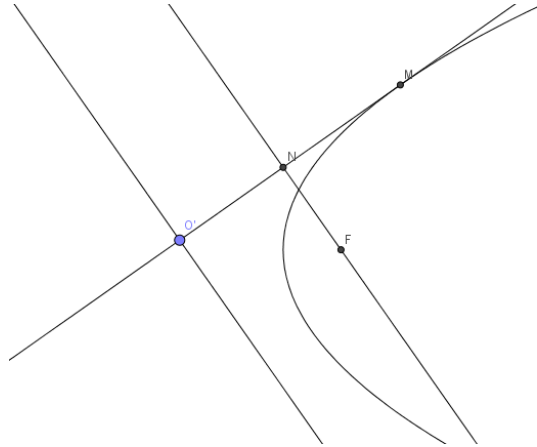
$$k_1 = 0; \quad k_2 = \frac{1}{a}; \quad H = \frac{1}{2a}; \quad K = 0.$$

Primetimo da je srednja krivina cilindra zaista konstantna i jednaka $\frac{1}{2a}$.

4.3 Od parabole do katenoida

Neka je parabola $y^2 = 2bx$ data parametrizacijom $f(t) = (b \sinh^2(t), 2b \sinh(t))$ i njena žiža $F = (b, 0)$.

Kako kotrljamo parabolu na pravoj liniji koja je tangentna sa njom, sve vreme žiža F se pomera i kreira novu krivu koja je rulet parabole. Rulet možemo naći i na drugi način. Možemo kotrljati tangentu parabole po paraboli, vezati koordinatni sistem za tangentu, i naći koordinate žiže u svakom trenutku. Posmatramo koordinatni sistem u kom je x osa tangenta parabole, a koordinatni početak O' je dodirna tačka tangente i temena parabole koja se dobija za $t=0$.



Slika 12: Parabola

Ako se parabola i njena tangenta se dodiruju u tački M mi možemo naći i apscisu i ordinatu ruleta na sledeći način. Za apscisu nam treba dužina luka od $t_0 = 0$ do $t_1 = t$. To nalazimo na sledeći način.

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= (2b \sinh(t) \cosh(t), 2b \cosh(t)); \\
 |f'(t)| &= \sqrt{4b^2 \sinh^2(t) \cosh^2(t) + 4b^2 \cosh^2(t)} = \\
 &= \sqrt{4b^2 \cosh^4(t)} = 2b \cosh^2(t); \\
 s &= \int_0^t |f'(u)| du = \int_0^t 2b \cosh^2(u) du = \\
 &= b(t + \sinh(t) \cosh(t)).
 \end{aligned}$$

Ako je N podnožje normale iz žiže F parabole na tangentu parabole, treba nam rastojanje \overline{NM} koje nalazimo na sledeći način. Koeficijent tangente parabole jeste

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2b \cosh(t)}{2b \sinh(t) \cosh(t)} = \frac{1}{\sinh(t)}.$$

Znamo da koeficijent normale na tangentu jeste $k_1 = -\frac{1}{k} = -\sinh(t)$. Ova normala prolazi kroz žižu $F = (b, 0)$.

Odatle se nalazi njena jednačina

$$\begin{aligned}
 y - y_0 &= k_1(x - x_0), \\
 y - 0 &= -\sinh(t)(x - b), \\
 y + \sinh(t)x - b \sinh(t) &= 0.
 \end{aligned}$$

Onda možemo naći daljinu tačke $M = (b \sinh^2(t), 2b \sinh(t))$

$$d = \frac{|2b \sinh(t) + b \sinh^3(t) - b \sinh(t)|}{\sqrt{1^2 + \sinh^2(t)}};$$

$$d = \overline{NM} = b \sinh(t) \cosh(t).$$

Nalazimo apscisu $\overline{ON} = \overline{OM} - \overline{NM} = s - \overline{NM} = bt$. Za ordinatu nam treba jednačina tangente $y - y_0 = k_1(x - x_0)$ koja prolazi kroz tačku M

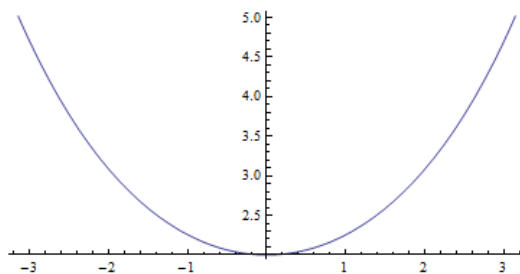
$$y - 2b \sinh(t) = \frac{1}{\sinh(t)}(x - b \sinh^2(t)),$$

i to je

$$y - \frac{x}{\sinh(t)} - b \sinh(t) = 0.$$

Onda nalazimo daljinu žiže F od tangente

$$\overline{FN} = \frac{|-\frac{b}{\sinh(t)} - b \sinh(t)|}{\sqrt{1^2 + (-\frac{1}{\sinh^2(t)})^2}} = b \cosh(t).$$

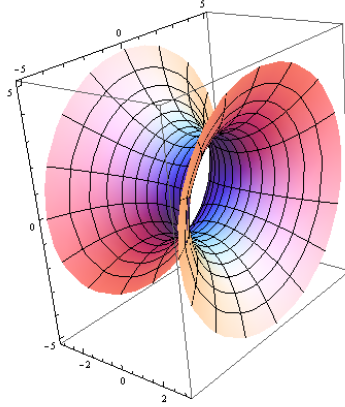


Slika 13: Ruleta za katenoid

To će nam biti ordinata za naš rulet. Tada je parametrizacija ruleta data sa $A(t) = (bt, b \cosh(t))$. Ova kriva se naziva lančanica. Naziv lančanica dolazi odatle što taj oblik ima lanac (kanap) koji slobodno visi. Sada možemo da rotiramo ovaj rulet (lančanicu) oko ose ruleta, tj, x ose, i tako ćemo dobiti rotacionu površ koja je Delonijeva površ. Ta površ se naziva katenoid:

$$x(t, v) = (bt, b \cosh(t) \cos(v), b \cosh(t) \sin(v)).$$

```
ParametricPlot3D[{2*u, 2*Cosh[u]*Cos[v], 2*Cosh[u]*Sin[v]},
{u, -Pi/2, Pi/2}, {v, 0, 2 Pi}]
```



Slika 14: Katenoid

Prvi izvodi po t i po v su:

$$x_t = (b, b \sinh(t) \cos(v), b \sinh(t) \sin(v));$$

$$x_v = (0, -b \cosh(t) \sin(v), b \cosh(t) \cos(v)).$$

Jedinični normalni vektor jeste:

$$n(t, v) = (\tanh(t), -\frac{\cos(v)}{\cosh(t)}, -\frac{\sin(v)}{\cosh(t)}).$$

Koeficijenti prve i druge osnovne forme, glavne krivine, Gausova krivina i srednja krivina su:

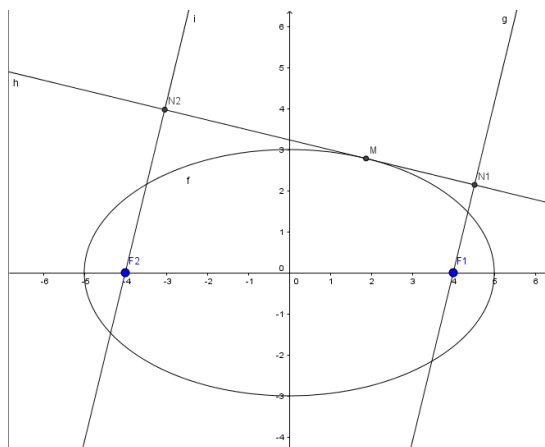
$$E = b^2 \cosh^2(t); G = b^2 \cosh^2(t); e = -b; g = b; F = f = 0;$$

$$k_1 = \frac{-1}{b \cosh^2(t)}; k_2 = \frac{1}{b \cosh^2(t)}; H = 0; K = \frac{-1}{b^2 \cosh^4(t)}.$$

Primetimo da je srednja krivina katenoida zaista konstantna i jednaka nuli. Dakle, katenoid je rotaciona minimalna površ.

4.4 Od elipse do unduloida

Neka je elipsa data sa parametrizacijom $g(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ i njene žiže $F_1 = (c, 0)$ i $F_2 = (-c, 0)$. Kako kotrljamo elipsu po pravouj liniji koja je tangenta sa njom, sve vreme žiže F_1, F_2 se pomeraju i kreiraju nove krive koja su rulet elipse. Rulet možemo naći i na drugi način. Možemo kotrljati tangentu elipse po elipsi i možemo u svakom trenutku naći koordinate ruleta, tj. žiže elipse. Ako se elipsa i njena tangenta seku u tački M možemo naći i apscisu



Slika 15: Elipsa

i ordinatu ruleta na sledeći način. Prvo ćemo naći normalu kroz žižu F_1 . Za apscisu nam treba dužina luka od $t_0 = 0$ do $t_1 = t$. To nalazimo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= (-a \sin(t), b \cos(t)); \\
 |f'(t)| &= \sqrt{(-a)^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} = \\
 &= \sqrt{a^2 \sin^2(t) + (a^2 - c^2) \cos^2(t)} = \\
 &= \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t) - c^2 \cos^2(t)} = \\
 &= \sqrt{a^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) - c^2 \cos^2(t)} = \\
 &= \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}; \\
 s &= \int_0^t |f'(u)| du = \int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du.
 \end{aligned}$$

Takođe treba nam daljina $\overline{N_1 M}$ koju nalazimo na sledeći način. Koeficijent tangente elipse jeste

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b \cos(t)}{-a \sin(t)}. \quad (51)$$

Znamo da koeficijent normale na tangentu jeste $k_1 = -\frac{1}{k} = \frac{a \sin(t)}{b \cos(t)}$. Ova normala prolazi kroz žižu $F_1 = (c, 0)$.

Odatle se nalazi njena jednačina

$$y - y_0 = k_1(x - x_0);$$

$$\begin{aligned}
y - 0 &= \frac{a \sin(t)}{b \cos(t)}(x - c); \\
y - \frac{a \sin(t)}{b \cos(t)}x + \frac{ac \sin(t)}{b \cos(t)} &= 0.
\end{aligned} \tag{52}$$

Onda možemo naći daljinu tačke $M = (a \cos(t), b \sin(t))$

$$\begin{aligned}
d &= \frac{|b \sin(t) - \frac{a^2 \sin(t) \cos(t)}{b \cos(t)} + \frac{ac \sin(t)}{b \cos(t)}|}{\frac{\sqrt{b \cos^2(t) + a \sin^2(t)}}{b \cos(t)}} = \\
&= \frac{|b^2 \sin(t) \cos(t) - a^2 \sin(t) \cos(t) + ac \sin(t)|}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} = \\
&= \frac{|-c^2 \sin(t) \cos(t) + ac \sin(t)|}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}; \\
d = \overline{N_1 M} &= \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}.
\end{aligned}$$

Nalazimo apscisu $s - \overline{N_1 M} = \int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du - \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}$.

Za ordinatu nam treba jednačina tangente $y - y_0 = k(x - x_0)$ koja prolazi kroz tačku M

$$y - b \sin(t) = \frac{b \cos(t)}{-a \sin(t)}(x - a \cos(t)),$$

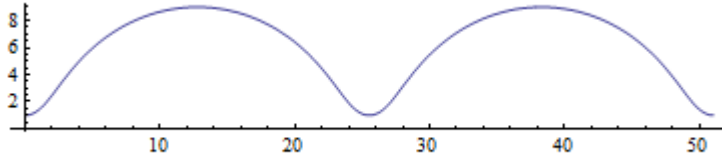
i to je

$$y + \frac{b \cos(t)}{a \sin(t)}x - \frac{ba}{a \sin(t)} = 0.$$

Onda nalazimo daljinu žiže F_1 od tangente

$$\overline{F_1 N_1} = \frac{|\frac{bc \cos(t) - ba}{a \sin(t)}|}{\frac{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}{a \sin(t)}} = \frac{b(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}},$$

što je ordinata tačke našeg ruleta.



Slika 16: Ruleta za unduloid

Onda imamo parametrizaciju ruleta za dve žiže elipse

$$B_1(t) = \left(\int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du - \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}, \frac{b(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \right),$$

$$B_2(t) = \left(\int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du - \frac{c \sin(t)(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}, \frac{b(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \right).$$

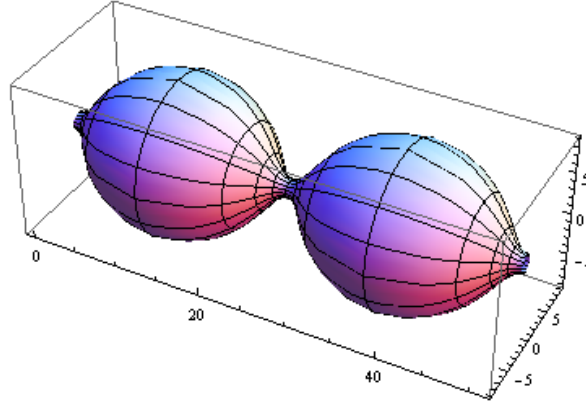
Rotacijom ovih ruleta elipse oko prave po kojoj smo kotrljali elipsu dobijamo Delonijeve površi koje nazivamo unduloidi:

$$y_1(t, v) = \left(\int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du - \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}, \frac{b(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \cos(v), \right. \\ \left. \frac{b(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \sin(v) \right),$$

$$y_2(t, v) = \left(\int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du - \frac{c \sin(t)(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}, \frac{b(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \cos(v), \right. \\ \left. \frac{b(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \sin(v) \right).$$

a = 5; b = 3; c = 4

```
x1[t_] := NIntegrate[Sqrt[a^2 - c^2 Cos[u]^2], {u, 0, t}] -
(c Sin[t] (a - c Cos[t]))/ Sqrt[a^2 - c^2 Cos[t]^2];
y1[t_] := (b (a - c Cos[t]))/Sqrt[a^2 - c^2 Cos[t]^2];
ParametricPlot3D[{x1[t], Cos[v] y1[t], Sin[v] y1[t]}, {t, 0, 4 Pi},
{v, 0, 2 Pi}]
```



Slika 17: Unduloid $a = 5, b = 3, c = 4$

Kako imamo :

$$h_1(t) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}(a + c \cos(t))}.$$

Prvi izvodi po t i po v su:

$$y_{1t} = (bh_1(t), c \sin(t)h_1(t) \cos(v), c \sin(t)h_1(t) \sin(v)),$$

$$y_{1v} = (0, -\frac{b(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \sin(v), \frac{b(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \cos(v)).$$

Jedinični normalni vektor jeste:

$$n(t, v) = (\frac{c \sin(t)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}, \frac{-b \cos(v)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}, \frac{-b \sin(v)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}).$$

Koeficijenti prve i druge osnovne forme, glavne krivine, Gausova krivina i srednja krivina su:

$$E = \frac{a^2 b^2}{(a + c \cos(t))^2}; G = \frac{b^2(a - c \cos(t))}{(a + c \cos(t))}; F = f = 0;$$

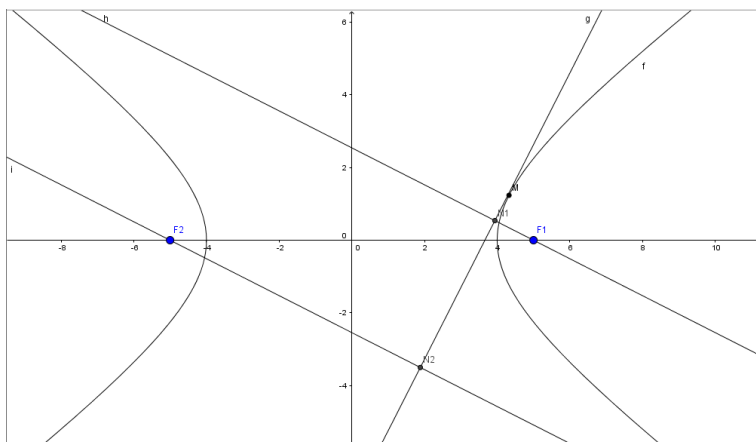
$$e = \frac{-ab^2 c \cos(t)}{(a^2 - c^2 \cos^2(t))(a + c \cos(t))}; \quad g = \frac{b^2}{a + c \cos(t)};$$

$$k_1 = \frac{-c \cos(t)}{a(a - c \cos(t))}; \quad k_2 = \frac{1}{a - c \cos(t)};$$

$$H = \frac{1}{2a}; \quad K = \frac{-c \cos(t)}{a(a - c \cos(t))^2}.$$

Vidimo da je srednja krivina unduloida pozitivna i konstantna.

4.5 Od hiperbole do nodoida



Slika 18: Hiperbola

Neka je hiperbola data parametrizacijom $l(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t))$ i njene žiže $F_1 = (c, 0)$ i $F_2 = (-c, 0)$. Kako kotrljamo hiperbolu po pravoj liniji koja je tangenta sa njom, sve vreme žiže F_1, F_2 se pomeraju i kreiraju nove krive koje su ruleti hiperbole. Rulete možemo naći i na drugi način. Možemo kotrljati tangentu hiperbole na hiperbolu i možemo u svakom trenutku naći koordinate naših ruleta. Ako se hiperbola i njena tangenta seku u tački M mi možemo naći i apscisu i ordinatu ruleta na sledeći način. Prvo ćemo naći za žižu F_1 . Za apscisu nam treba dužina luka od $t_0 = 0$ do $t_1 = t$. Nalazimo je na sledeći način.

$$\begin{aligned}
 l'(t) &= (a \sinh(t), b \cosh(t)); \\
 |l'(t)| &= \sqrt{a^2 \sinh^2(t) + b^2 \cosh^2(t)} = \\
 &= \sqrt{a^2 \sinh^2(t) + (c^2 - a^2) \cosh^2(t)} = \\
 &= \sqrt{a^2 \sinh^2(t) + c^2 \cosh^2(t) - a^2 \cosh^2(t)} = \\
 &= \sqrt{a^2(\sinh^2(t) - \cosh^2(t)) + c^2 \cosh^2(t)} = \\
 &= \sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}; \\
 s &= \int_0^t |l'(u)| du = \int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du.
 \end{aligned}$$

Takođe, treba nam daljina $\overline{N_1M}$ koju nalazimo na sledeći način. Koeficijent tangente hiperbole jeste

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b \cosh(t)}{a \sinh(t)}. \quad (53)$$

Znamo da koeficijent normale sa tangentom jeste $k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{a \sinh(t)}{b \cosh(t)}$. Ova normala prolazi kroz žižu $F_1 = (c, 0)$.

Odatle se nalazi njena jednačina

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_1(x - x_0); \\ y - 0 &= -\frac{a \sinh(t)}{b \cosh(t)}(x - c); \\ y + \frac{a \sinh(t)}{b \cosh(t)}x - \frac{ac \sinh(t)}{b \cosh(t)} &= 0. \end{aligned}$$

Onda možemo naći daljinu tačke $M = (a \cosh(t), b \sinh(t))$

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left| \frac{b^2 \sinh(t) \cosh(t) + a^2 \sinh(t) \cosh(t) - ac \sinh(t)}{b \cosh(t)} \right|}{\frac{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}{b \cosh(t)}} = \\ &= \frac{|c^2 \sinh(t) \cosh(t) - ac \sinh(t)|}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}; \\ d = \overline{N_1M} &= \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}. \end{aligned}$$

Nalazimo apscisu $s - \overline{N_1M} = \int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}$.

Za ordinatu nam treba jednačina tangente $y - y_0 = k(x - x_0)$ koja prolazi kroz tačku M

$$y - b \sinh(t) = \frac{b \cosh(t)}{a \sinh(t)}(x - a \cosh(t)),$$

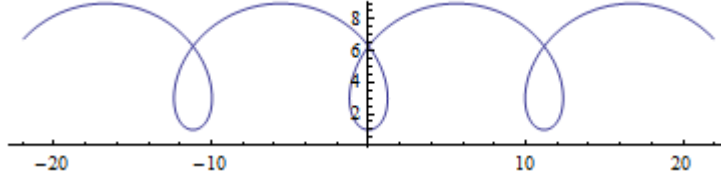
i to je

$$\begin{aligned} y - \frac{b \cosh(t)}{a \sinh(t)}x + \frac{ab \cosh^2(t)}{a \sinh(t)} - \frac{ab \sinh^2(t)}{a \sinh(t)} &= 0; \\ y - \frac{b \cosh(t)}{a \sinh(t)}x + \frac{ab}{a \sinh(t)} &= 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Onda nalazimo daljinu žiže F_1 od tangente

$$\overline{F_1N_1} = \frac{\left| \frac{-bc \cosh(t) + ab}{a \sinh(t)} \right|}{\frac{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}{a \sinh(t)}} = \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}},$$

što je ordinata tačke našeg ruleta.



Slika 19: Ruleta za nodoid

Onda imamo parametrizaciju rulete koje su

$$C_1(t) = \left(\int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}, \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \right),$$

$$C_2(t) = \left(\int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}, \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \right).$$

Rotacijom ruleta hiperbole oko prave po kojoj smo kotrljali hiperbolu dobijamo rotacione površi koje nazivamo nodoidi:

$$z_1(t, v) = \left(\int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}, \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \cos(v), \right.$$

$$\left. \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \sin(v) \right),$$

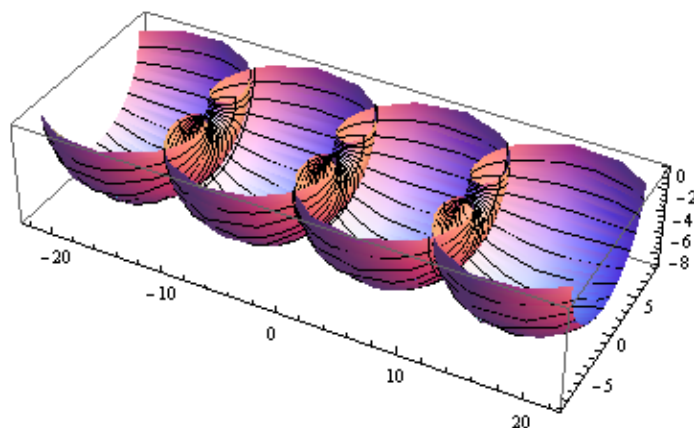
$$z_2(t, v) = \left(\int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}, \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \cos(v), \right.$$

$$\left. \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \sin(v) \right).$$

```

a = 4; b = 3; c = 5;
x1[t_] := (b^2/a) NIntegrate[Cos[u]/((c/a)
+ Cos[u]) Sqrt[(c/a)^2 - Cos[u]^2]), {u, 0, t}];
y1[t_] := b Sqrt[((c/a) - Cos[t])/((c/a) + Cos[t])];
ParametricPlot3D[{x1[t], Cos[v] y1[t], Sin[v] y1[t]},
{t, -10, 10}, {v, -Pi, 0}]

```



Slika 20: Nodoid $a = 4, b = 3, c = 5$

Kako imamo :

$$m_1(t) = \frac{ab}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2(c \cosh(t) + a)}}.$$

Prvi izvodi po t i po v su:

$$z_{1t} = (bm_1(t), c \sinh(t)m_1(t) \cos(v), c \sinh(t)m_1(t) \sin(v)),$$

$$z_{1v} = \left(0, -\frac{b(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \sin(v), \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \cos(v)\right).$$

Jedinični normalni vektor jeste:

$$n_1(t, v) = \left(\frac{c \sinh(t)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}, \frac{-b \cos(v)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}, \frac{-b \sin(v)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}\right).$$

Koeficijenti prve i druge osnovne forme, glavne krivine, Gausova krivina i srednja krivina su:

$$E = \frac{a^2 b^2}{(c \cosh(t) + a)^2}; G = \frac{b^2(c \cosh(t) - a)}{(c \cosh(t) + a)}; F = f = 0;$$

$$e = \frac{-ab^2 c \cosh(t)}{(c^2 \cosh^2(t) - a^2)(c \cosh(t) + a)}; g = \frac{b^2}{c \cosh(t) + a};$$

$$k_1 = \frac{-c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) - a)}; k_2 = \frac{1}{c \cosh(t) - a};$$

$$H = -\frac{1}{2a}; \quad K = \frac{-c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) - a)^2}.$$

Slično radimo i za drugi nodoid.

Kako imamo :

$$m_2(t) = \frac{-ab}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2(c \cosh(t) - a)}}.$$

Prvi izvodi po t i po v su:

$$z_{2t} = (bm_2(t), c \sinh(t)m_2(t) \cos(v), c \sinh(t)m_2(t) \sin(v)),$$

$$z_{2v} = (0, -\frac{b(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \sin(v), \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \cos(v)).$$

Jedinični normalni vektor jeste:

$$n_2(t, v) = \left(-\frac{c \sinh(t)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}, \frac{b \cos(v)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}, \frac{b \sin(v)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \right).$$

Koeficijenti prve i druge osnovne forme, glavne krivine, Gausova krivina i srednja krivina su:

$$E = \frac{a^2 b^2}{(c \cosh(t) - a)^2}; \quad G = \frac{b^2(c \cosh(t) + a)}{(c \cosh(t) - a)}; \quad F = f = 0;$$

$$e = \frac{-ab^2 c \cosh(t)}{(c^2 \cosh^2(t) - a^2)(c \cosh(t) - a)}; \quad g = \frac{-b^2}{c \cosh(t) - a};$$

$$k_1 = \frac{-c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) + a)}; \quad k_2 = \frac{-1}{c \cosh(t) + a};$$

$$H = -\frac{1}{2a}; \quad K = \frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) + a)^2}.$$

Primetimo da je srednja krivina oba nodoida konstantna tako da su nodoidi rotacione površi konstantne srednje krivine.

4.6 Delonijeva teorema

U ovom poglavlju dokazaćemo Delonijevu teoremu, čiji je originalni dokaz objavljen 1841. godine u radu [1].

Teorema 4.1. *Kompletna rotaciona površ konstantne srednje krivine smeštena u R^3 je helikoid, cilindar, sfera, nodoid ili unduloid. Pri tom je helikoid minimalna površ.*

Dokaz: U oznakama iz poglavlja 3.1. pretpostavimo da površ dobijamo rotacijom krive $r(v) = (x(v), 0, z(v))$ oko Oz ose. Ako je $x = const$ tada je kriva prava paralelna Oz osi, oko Oz ose, pa u tom slučaju dobijamo cilindar koji je površ konstantne srednje krivine.

Ako je $x \neq const$, tada je kriva grafik funkcije $z = f(x)$. Iz relacije (49) dobijamo relaciju za srednju krivinu te površi

$$H = \frac{-ff'' + 1 + f'^2}{2f(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pretpostavimo da je $H = const$ i prethodnu jednačinu zapišimo sa

$$1 + f'^2 - ff'' = 2Hf(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (55)$$

Primitimo da je lančanica $z = f(x) = \cosh \frac{x}{a}$ rešenje ove jednačine za $H = 0$, tj. jedina minimalna rotaciona površ (uz ravan) je katenoid.

Integraleći prethodnu jednačinu dobijamo da rotaciona površ ima konstantnu srednju krivinu $H \neq 0$ ako zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$f^2 \pm \frac{2f}{H\sqrt{1 + f'^2}} = \pm b^2, \quad (56)$$

gde je b neka konstanta. Jedno rešenje ove jednačine je $z(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, što nam daje sferu.

Koristeći relaciju (51) lako proveravamo da je (52) takodje rešenje diferencijalne jednačine (56). To rešenje predstavlja rilet elipse koji nam daje unduloid.

Koristeći relaciju (53) lako proveravamo da je (54) takodje rešenje diferencijalne jednačine (56). To rešenje predstavlja rilet hiperbole koji nam daje nodoid.

Rešavanjem diferencijalne jednačine (56) vidimo da su to njena jedina rešenja, čime je teorema dokazana.

4.7 Površi kao mehuri od sapuna.

Mehurići sapuna su fizički primeri kompleksnog matematičkog problema minimalne površine. Oni predstavljaju površ najmanje površine, sa nekom granicom, tj. sadrži datu zapreminu. Minimalna površ je ilustrovana sapunskim filmom, koji ima isti pritisak kako unutra tako i spolja, stoga je površina sa nul-tom srednjom krivinom. Mehurić sapuna je zatvoreni film sapuna: zbog razlike spoljašnjeg i unutrašnjeg pritiska, to je površina konstantne srednje krivine.

Iako je poznato još od 1884. godine da je sferni sapunski mehur zatvorena površ najmanje površine, sa datom zapreminom (teorema H.A. Schwarz-a), do 2000. godine nije dokazano da dva spojena mehura sapuna predstavljaju optimalni način smeštanja dve zadate količine vazduha različite veličine sa najmanjom površinom. Ovo je nazvano dvomehurnom pretpostavkom [6].

Zahvaljujući ovim karakteristikama, filmovi sapuna su korišćeni za rešavanje nekih praktičnih problema. Strukturni inženjer Frei Otto koristio je filmove sapuna za određivanje geometrije najmanje površine koja se prostire između nekoliko tačaka. Tako je dobio neke interesantne krovne konstrukcije [7]. Poznati primer je njegov zapadnonemački paviljon na Ekspo 67 u Montrealu.

Površine konstantne srednje krivine su relevantne za oblik gasa i tečnosti na superhidrofobnoj površini [8].

U hemiji trostruko periodične minimalne površi se koriste kao modeli za blok kopolimera u kojima različite komponente imaju nultu međusobnu energiju, tj. tenziju [9, 10, 11].

U arhitekturi površi konstantne srednje krivine se koriste za slobodne strukture kao što su naduvane kupole i kućišta.



Slika 21: Mehur sapuna

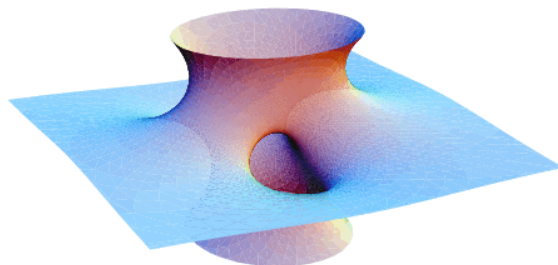
4.8 Minimalna površ Kosta

Osim rotacionih postoje i razne druge površi konstantne srednje krivine.

Minimalna površ Kosta je minimalna površina otkrivena 1982. godine od strane brazilskog matematičara Celso Jose da Costa. To je takođe površina konačne topologije, što znači da se može formirati punkcijom kompaktne površi. Topološki, to je trostruko probušeni torus.

Do otkrivanja verovalo se da su ravni, helikoidi i katenoidi jedine minimalne površi koje se mogu formirati punkcijom kompaktne površi. Površ Kosta evoluirala iz torusa, koji se deformiše dok planarni kraj ne postane katenoidan. Definisavanje ovih površina na pravougaonim torusima proizvoljnih dimenzija daje površ Kosta. Njeno otkriće pokrenulo je istraživanje i otkrivanje i nekoliko novih površi otvorene pretpostavke u topologiji.

Površ Kosta se može opisati korišćenjem Vajerštras zeta i eliptični funkcija Vajerštrasa.



Slika 22: Površ Kosta

5 Zaključak

U ovom radu opisane su rotacione površi konstantne srednje krivine.

Pokazano je da se od konika (krug, parabola, elipsa i hiperbola) može doći do rotacionih površi konstantne srednje krivine. Kotrljanjem konike oko fiksne ose, žiže kreiraju nove krive koje se zovu rulete konike. Rotacijom ruleta oko fiksirane ose dobijaju se tražene rotacione površi: cilindar, sfera, katenoid, unduloid i nodoid. Svaka od ovih površi ima konstantnu srednju krivinu. Katenoid ima srednju krivinu jednaku nuli i zbog toga je ona i minimalna površ.

Literatura

- [1] C. Delaunay, *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pures Appl., 6 (1841),309320. With a note appended by M. Sturm.
- [2] Martin M. Lipschultz, *Ph.D. Schaum's Outlines of Theory and Problems of Differential Geometry*.
- [3] Carl Johan Lejdfors, *Surfaces of Constant Mean Curvature*, Master's thesis 2003, Lund University, Centre for Mathematical Sciences, Mathematics.
- [4] Enrique Bendido, Mark J. Bowick and Agustín Medina, Departament Matemàtica Aplicada III, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain, Physics Department, Syracuse University, Syracuse, NY, USA, *Delaunay Surfaces*.
- [5] Alfred Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Third Edition by Elsa Abbena and Simon Salamon*.
- [6] Hutchings, Michael; Morgan, Frank; Ritoré, Manuel; Ros, Antonio (July 17, 2000). *Proof of the double bubble conjecture*. Electronic Research Announcements. American Mathematical Society. 6 (6): 45-49.
- [7] Jonathan Glancey, *The Guardian November 28, 2012*.
- [8] E.J. Lobaton, T.R. Salamon. *Computation of constant mean curvature surfaces: Application to the gasliquid interface of a pressurized fluid on a superhydrophobic surface*. Journal of Colloid and Interface Science. Volume 314, Issue 1, 1 October 2007, Pages 184-198.
- [9] D. M. Anderson, H. T. Davis, L. E. Scriven, J. C. C. Nitsche, *Periodic Surfaces of Prescribed Mean Curvature in Advances in Chemical Physics vol 77*, eds. I. Prigogine and S. A. Rice, John Wiley & Sons, 2007 , p. 337-396.
- [10] Meinhard Wohlgemuth, Nataliya Yufa, James Hoffman, and Edwin L. Thomas. *Triply Periodic Bicontinuous Cubic Microdomain Morphologies by Symmetries*. Macromolecules 2001, 34, 6083-6089.
- [11] Samuel P. Gido , Dwight W. Schwark , Edwin L. Thomas , Maria do Carmo Goncalves, *Observation of a non-constant mean curvature interface in an ABC triblock copolymer*, Macromolecules, 1993, 26 (10), pp 2636-2640.