УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ СА ОСВРТОМ НА ПРОБЛЕМСКЕ ЗАДАТКЕ

Мастер рад

Ментор: проф. др Александар Липковски

Студент: Светлана Елезовић

Београд, јун 2017.

САДРЖАЈ

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ СА ОСВРТОМ

НА ПРОБЛЕМСКЕ ЗАДАТКЕ

1. УВОД

Експоненцијална функција је део обавезне наставе у гимназијама и средњим струковним школама, а вероватно није међу „омиљеним“ наставним поглављима. Ученицима обично није јасна сврха њеног увођења и њена примена на проблеме из реалног живота.
Подстакнута том чињеницом, у овом раду сам настојала да приближим експоненцијалну функцију кроз њене бројне примене у другим васпитно-образовним областима и сферама људског живота. Нема професора математике који се бар једном у свом радном веку није сусрео са питањем неког од ђака којима је предавао:„Експоненцијална и логаритамска функција, шта ће то мени?” или сличним питањем. Како суштина математичког начина размишљања подразумева да се оно може применити у разним областима људског деловања, циљ овог рада је да пружи професорима средњошколске математике разне примере из реалног живота којима би могли отпочети наставну тему о експоненцијалним функцијама, уз идеје како се она може учинити занимљивијом кроз сарадњу са колегама који предају друге предмете, као на пример биологије, информатике, хемије или физике. Поред тога, биће представљен избор задатака за које већина професора сматра да их је добро урадити како би тема била квалитетно презентована ученицима. Као увод у тему наведена је историјска прича о проблему зрна пшенице на шаховској табли. У наредним поглављима обрађено је упознавање са експоненцијалном зависношћу и њеном применом у:

- економији (раст камате, опадање вредности коришћеног аутомобила),
- биологији (раст неке популације, нпр. бактерија, вируса; површина ране као функција времена),
- физици (Њутнов закон хлађења; промена атмосферског притиска са висином),
- криминалистици (одређивање времена смрти),
- хемији (време полураспада разних елемената и материјала),
- електротехници (прелазне појаве приликом укључивања и искључивања струјних кола).

Поред наведених примера експоненцијалне функције, постоје и многи други, врло реални и практични примери. Каква су очекивања о дужини животног века неке здраве особе? Којом се брзином шири нека заразна болест? Колико се комараца може очекивати у неком подручју следећег лета? Колико времена треба алкохолисаном возачу да буде способан за вожњу? Каква су демографска кретања у појединим градовима или селима Србије?
Одговоре на оваква питања моћи ћемо да дамо када поближе упознамо поменуту експоненцијалну, али и њој блиску логаритамску функцију.

Повезивањем математичких садржаја и свакодневног живота образовни циљеви се лакше постижу. Наведене примене могу бити и приступачан материјал за тимски рад у учионици.
Као професор у гимназијама и електротехничкој школи мотивацију за овај рад сам пронашла у свакодневном раду са ђацима, као и у разговору са колегама професорима, и сви заједно смо уочили сличан проблем везан за математичка знања и њихову ширу примену. Неопходно је знати да школске установе имају за циљ образовање будућих стручњака за поједине сфере људског рада (специјалисте струке у области информационих технологија, електронике, енергетике, конструкционог машинства).

Предавајући основне лекције, свој рад сам усмерила на разумевање материје и њену примењивост у њиховим даљим предавањима, настојећи да се при том задржи потребан минималан теоретски ниво знања.

И без системског истраживања, потпуно је евидентно да математичка знања и вештине са којима наши ђаци долазе у средње школе често нису довољне за успешно праћење наставе. Као пример можемо навести да појединци имају проблема решавајући већ и једноставне линеарне једначине у којима коефицијенти нису цели бројеви или ако непознате нису изражене стандардним величинама x и y.

Сигуран рад и разумевање рада са степенима, као и решавање експоненцијалних и логаритамских једначина, више је реткост него правило.
Зато је циљ овог рада да се прошири обрада једне од тема која по правилу није омиљена (експоненцијалне функције) те да се оживи повезивањем са садржајима из живота, што наставне садржаје математике доводи у корелацију са садржајима осталих предмета (физике, хемије, биологије).

Најважнија чињеница везана за експоненцијалне функције је управо та да су врло присутне у реалним ситуацијама. Користе се за популационе моделе, датирање уз помоћ угљеникових једињења, помажу патолозима у одређивању времена смрти, време полураспада радиоактивног материјала, економистима код одређивања коначне вредности улагања, а многе физикалне величине су описане експоненцијалном зависношћу. Како су професори увек ограничени планираним бројем часова и у сталној трци са опсежним програмима, довољно је издвојити свега два часа на којима ће сами ученици, формирани у групе, изложити неке од примена које су поменуте у овом раду.

Најпознатија прича која се везује за ову тему је легенда о пореклу шаха. Шах је једна од најстаријих друштвених игара. О његовом настанку постоје многа предања и легенде и ево једне од њих.

Када је цар Шерам упознао и научио да игра шах, био је задивљен лепотом те игре. Циљ игре било је хватање непријатељског краља, па се игра на персијском језику звала шахмат (тако се зове и на руском, белоруском, литванском, казашком, итд.) а значи смрт краљу. Сазнавши да је ту игру измислио један од његових поданика, чиновник (или мудрац) Сеса, цар је наредио да га доведу како би га лично наградио. Мудри чиновник дошао је пред цара.

Желећи да га достојно награди, цар му обећа да ће испунити било коју жељу. Сеса је рекао: „Желим да ми за прво поље на табли дате 1 зрно пшенице, за друго поље 2 зрна, за треће 4, за четврто 8, и тако за свако следеће два пута више зрна него за претходно поље.“

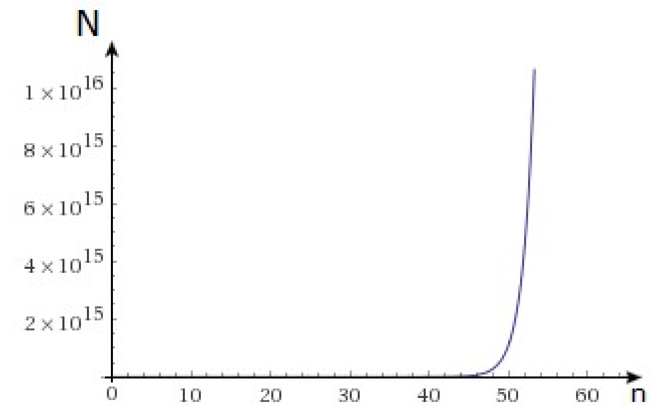
Цар се изненадио рекавши: „Зар само то? Нема проблема, добићеш своју врећу пшенице после ручка“. Но, потпуно неочекивано, број зрна на шаховској табли био је чак оволико, како је представљено на сликама 1.1 и 1.2. То су цареви математичари рачунали два дана и израчунали колико зрна треба предати чиновнику. Израчунали су да тај број износи: 18 446 744 073 709 551 615.

2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}
2^{8}	2^{9}	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Слика 1.1 Распоред зрна по шаховским пољима.

Цар се замислио јер су му математичари рекли да његове залихе не би биле довољне ни када би биле и сто пута веће. (Ради се, заправо, отприлике о 150 – годишњем данашњем роду пшенице у целом свету!) На крају је смислио решење, позвао чиновника и рекао му: „Драги човече, ја те не желим преварити ни за једно зрно, па ћеш ти своју награду бројати заједно са мојим слугама“.

1.поље	1 зрно
2.поље	2 зрна
3.поље	4 зрна
4.поље	8 зрна
5.поље	16 зрна
6.поље	32 зрна
7.поље	64 зрна
8.поље	128 зрна
9.поље	256 зрна
10.поље	512 зрна
11.поље	1024 зрна
12.поље	2096 зрна
13.поље	4192 зрна
14.поље	8396 зрна
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
63.поље	4 611 686 018 427 387 904 зрна
64.поље	9 223 372 036 854 775 808 зрна



N- број зрна на пољима шаховске табле
n-број шаховског поља

Слика 1.2 Број зрна на пољима шаховске табле

Када би Сеса пристао да сам пребројава зрно по зрно непрекидно дан и ноћ, пребројавајући по зрно у секунди, он би првог дана пребројао укупно 86 400 зрна. Да би пребројао милион зрна, требало би му око 10 дана непрекидног бројања. Један кубни метар пшенице пребројавао би пола године. За 10 година непрекидног бројања избројао би 20 кубних метара. Ако би тако пребројавао и даље, Сеса би за време живота избројао тек незнатни део награде која му припада.

Чувши то, Сеси је постало неугодно и почео се извињавати да има хитног посла, на шта се цар насмејао и дао му богату награду како би се светом ширио глас о милостивости цара Шерама. Прича о персијској шаховској табли можда је само бајка. Међутим, стари Персијанци и Индуси су били добри познаваоци математике свог времена, па су разумели велике бројеве који настају понављаним удвостручивањем. Да је шаховска табла измишљена са 100 квадрата (10 × 10) уместо са 64 (8 × 8), дуг у зрнима пшенице би био тежак као Земља.

Низ бројева попут ових, код којег је сваки број тачан делилац претходног, зове се геометријски низ, а он описује експоненцијални раст. Математичка функција коју је Сеса очигледно познавао је експоненцијална функција.

2. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА

2.1 Појам и својства експоненцијалне функције

Експоненцијална функција је једна од најважнијих функција у математици, а дефинише се као $f(x) = a^x$, при чему је $a > 0$, $a \neq 1$. Број a се назива основа или база. Тај број је позитиван и различит од један, константан и реалан. Број x је изложилац или експонент експоненцијалне функције.

Експоненцијална функција је дефинисана за свако $x \in R$ (домен је цели скуп R).
Скуп вредности функције су позитивни реални бројеви (кодомен је скуп R^+).
График функције $f(x) = a^x$ пресеца осу Oy у тачки $(0,1)$ и асимптотски се приближава оси Ox.
Функција $f(x) = a^x$ је инјективна (пресликава свако различито x из свог домена у различито y из свог кодомена тако да је $f(x) = y$, тј. из $a^{x_1} = a^{x_2}$ следи $x_1 = x_2$) и сурјективна (њене вредности испуњавају њен цео кодомен, тј. за свако y у кодомену постоји бар једно x у домену такво да је $f(x) = y$), па је и бијективна.

Како смо експоненцијалну функцију $f(x)= a^x$ дефинисали за сваки реални број x, уз услов да је $a> 0$ и $a \neq 1$ реалан број, показаћемо зашто база степена мора да буде позитиван број.

Ако бисмо допустили да је база негативан број, тада степени као што су на пример $(-2)^{-14}$, $(-3)^8$ и слични не би били реални бројеви. Ако би база била једнака нули, тада би важило $0^x = 0$ за сваки реални број x осим за x=0, када тај степен није дефинисан. Исто тако је $1^x = 1$ за сваки реални број x. Дакле, функција $f(x)= 1^x=1$ је константа, па је због тога уведено и ограничење $a \neq 1$.

Нека је база експоненцијалне функције $a > 1$, тада за сваки позитиван рационални експонент $x = \frac{m}{n} > 0$ важи $a^x = \sqrt[n]{a^m} > 1$.

Наиме, $a^x = \sqrt[n]{a^m}$, а како је $a^m > 1$, онда је и $\sqrt[n]{a^m} >1$. Узмимо да је $x_1<x_2$. Уз примену својства $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ имамо: $a^{x_2} = a^{(x_2-x_1)+x_1} = a^{x_2-x_1} \cdot a^{x_1} > a^{x_1}$
јер је $x_2 - x_1 > 0$ и $a^{x_2-x_1} > 1$.

Овим смо за позитивне експоненте доказали:

Ако је $a > 1$, онда за рационалне бројеве $x_1 < x_2$ важи $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Аналогно бисмо доказали:

ако је $0 < a < 1$, онда за рационалне бројеве $x_1 < x_2$ важи $a^{x_1} > a^{x_2}$.

За негативне експоненте важи обрнуто:

Ако је $a > 1$, онда за рационалне бројеве $x_1 < x_2$ важи $a^{x_1} > a^{x_2}$;

ако је $0 < a < 1$, онда за рационалне бројеве $x_1 < x_2$ важи $a^{x_1} < a^{x_2}$.

На пример, бројеви $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ су све већи, а бројеви $(1/2)^0, (1/2)^1, (1/2)^2, (1/2)^3, \ldots$ су све мањи (и наравно позитивни). То значи да решење неједначине

$$a^x > a^3$$

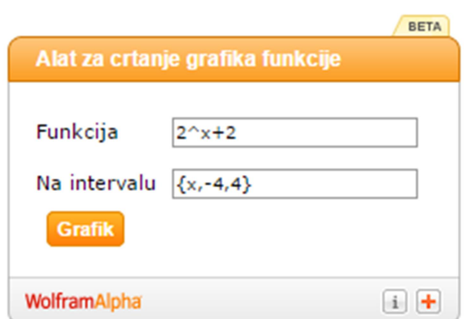
битно зависи од тога да ли је основа a већа или мања од један. Сагласно томе, њена решења су

$$\begin{cases} x > 3, & a > 1, \\ x < 3, & a < 1. \end{cases}$$

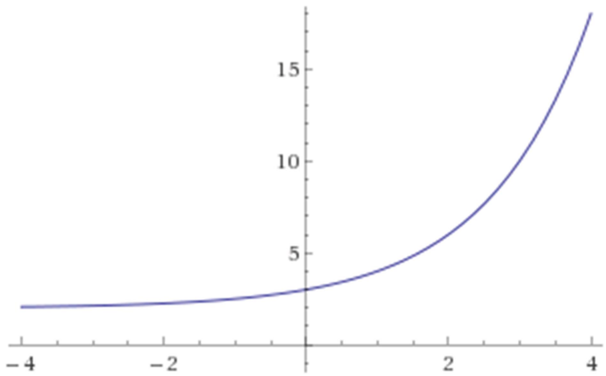
2.2. График и својства експоненцијалне функције

Бројне вредности свих функција у наредним примерима ћемо израчунавати на калкулатору. На пример, за израчунавање вредности $2^{3+2}=32$, а на калкулатору се притисне редом 2, x^y, (3+2) и добије се вредност 32.

Функције ћемо цртати у програму „WolframAlpha“ [6]. На пример, функција $y = 2^x+2$ на интервалу од –4 до 4, у програму „WolframAlpha“ се добије:



притиском на Grafik, почиње израчунавање и цртање графика функције приказане испод



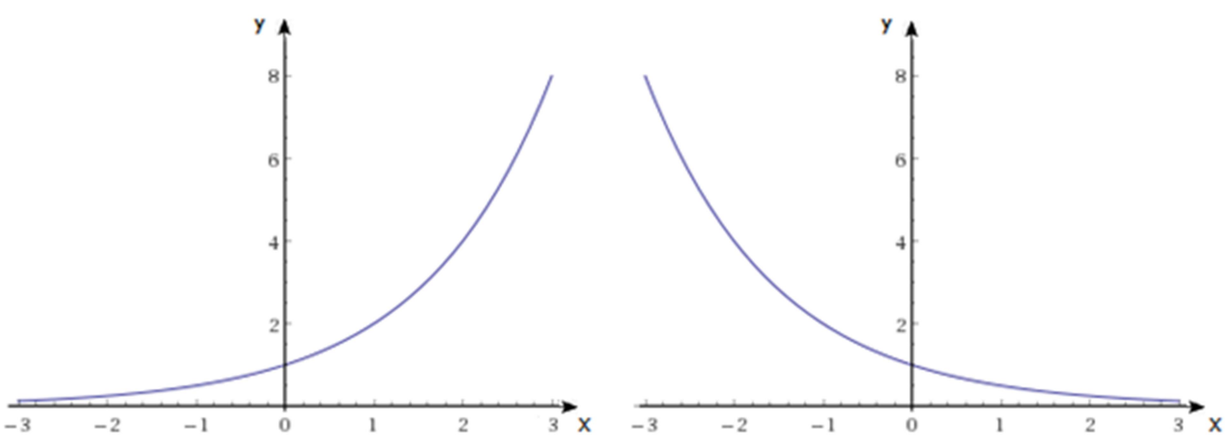
<u>Пример 1.</u>
Степеновањем броја 2 целим бројевима добили бисмо $y = 2^x$ и $y = 2^{-x}$.
Прва функција ($y = 2^x$) је свуда позитивна и свуда растућа, друга ($y = 2^{-x}$) је такође свуда позитивна, али је свуда опадајућа.

Уопште, експоненцијална функција $f(x)=a^x$, за $a > 1$ је растућа, а за $0 < a < 1$ је опадајућа.

x	$y = 2^x$	$y = (1/2)^x = 2^{-x}$
0	1	1
1	2	0,5
2	4	0,25
3	8	0,125
4	16	0,0625

Табела 2.1 Вредности функције $y= 2^x$ и $y= (1/2)^x= 2^{-x}$

На основу тачака (x, y) према табели су добијени графици ових експоненцијалних функција.



Слика 2.1 Експоненцијалне функције $y = 2^x$ и $y = (1/2)^x = 2^{-x}$

Пример 2. Експоненцијална функција $y=10^x$

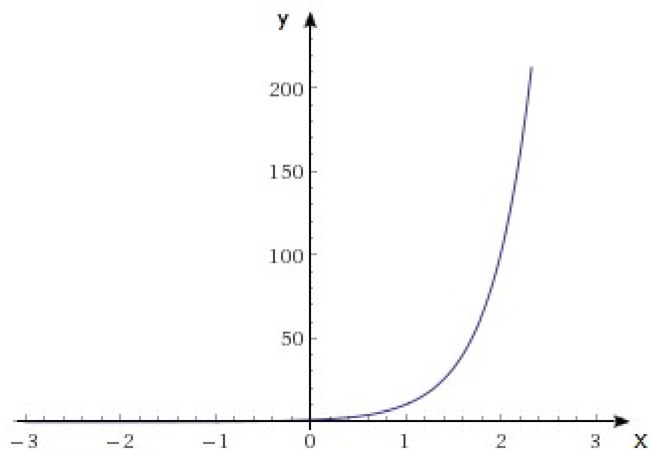
На основу начина на који записујемо бројеве може се претпоставити да ће база $a = 10$ имати посебну улогу у рачунању степена.

Како се декадни запис бројева заснива управо на рачунању са степеном броја 10, разматран је степен облика 10^x. У ту сврху су израчунате вредности функције $f(x) = 10^x$ за неколико одабраних вредности x и скициран је график функције $f(x) = 10^x$.

Приметимо да су вредности функције у тачкама приближне, јер су $\sqrt{10}$ и $\sqrt{1000}$ ирационални бројеви.

Видимо да ова експоненцијална функција расте врло брзо за позитивне бројеве x. За негативне аргументе x функција опада према нули, такође врло брзо. Њен график се приближава негативном делу x осе. Кажемо да је негативни део x осе хоризонтална асимптота графика експоненцијалне функције.

x	10^x
-3	10^{-3}=0,001
-2	10^{-2}=0,01
-1	10^{-1}=0,1
0	10^0=1
0,5	$10^{0,5}$=3,16
1	10^1=10
1,5	$10^{1,5}$=31,6
2	10^2=100

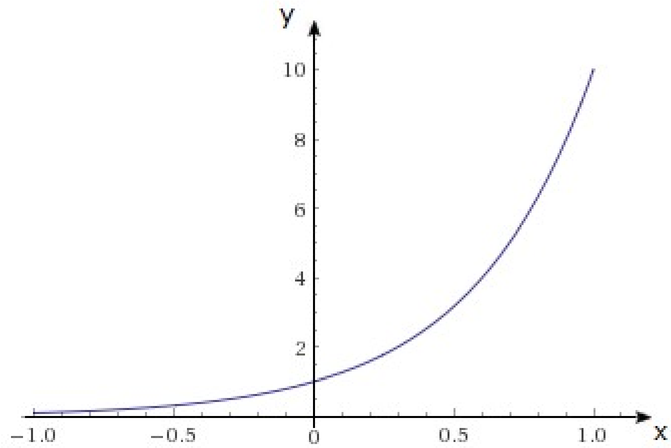


Слика 2.2 Вредности и график функције $y = 10^x$

Графике функција које расту врло брзо можемо лакше представити тако да употребимо различита мерила на координатним осама. Нацртајмо сад график експоненцијалне функције 10^x на интервалу $[-1, 1]$ изабравши јединице на координатним осама тако да једној јединици на x оси одговара десет јединица на y оси.

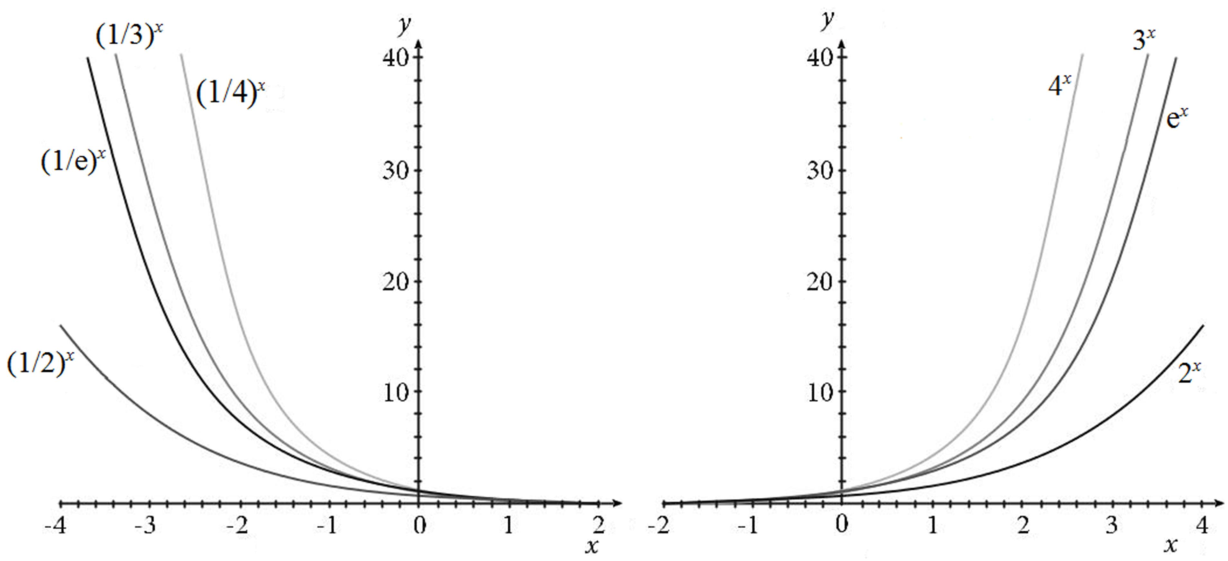
x	$y=10^x$
-1	0,1
-0,8	0,16
-0,6	0,25
-0,4	0,40
-0,2	0,63
0	1

0,2	1,6
0,4	2,5
0,6	4,0
0,8	6,3
1	10



Слика 2.3 Вредности и график функције $y = 10^x$ на интервалу $[-1, 1]$

Исто као за $a = 10$, можемо нацртати график функције a^x и за друге вредности базе a . На следећој слици су представљени графици функције 2^x, e^x , 3^x, 4^x и $(1/2)^x$, $(1/e)^x$, $(1/3)^x$, $(1/4)^x$. Видимо да све функције које имају $a > 1$, на пример 2^x, e^x , 3^x, 4^x имају график сличан графику функције $y= 10^x$, само што оне за позитивне реалне бројеве $x > 0$, расту спорије, јер је $2^x < e^x < 3^x < 4^x < 10^x$. За функције које имају негативне експоненте x важи супротна неједнакост.



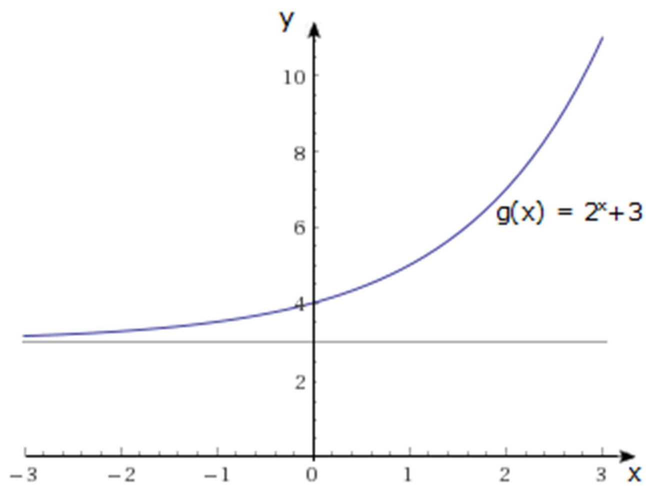
Слика 2.4 Графици функција $y = (1/2)^x$, $y =(1/e)^x$, $y =(1/3)^x$, $y =(1/4)^x$ и $y =2^x$, $y =e^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$.

Све функције које имају 0 < а < 1, на пример $y = (1/2)^x$, $y = (1/e)^x$, $y = (1/3)^x$ и $y = (1/4)^x$ су опадајуће.

<u>Пример 3.</u>

После анализе тока функције и представљања функције $f(x) = 2^x$, можемо размотрити сличну функцију $g(x) = 2^x + 3$.
Свака вредност функције се рачуна као степен од 2, плус 3. У табели испод је приказано неколико вредности функције.
Вредности функције $g(x)$ се понашају слично као вредности за $f(x) = 2^x$. Међутим, како је свака вредност функције за 3 већа од степена двојке, хоризонтална асимптота ове функције је права $y = 3$. График ове функције са хоризонталном асимптотом је на следећој слици.

x	$g(x) = 2^x + 3$
-2	$2^{-2}+3 = \frac{1}{4} + 3 = 3\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1}+3 = \frac{1}{2} + 3 = 3\frac{1}{2}$
0	$2^0+3 = 1+3 = 4$
1	$2^1+3 = 2+3 = 5$
2	$2^2+3 = 4+3 = 7$
3	$2^3+3 = 8+3 = 11$



Слика 2.5 Вредности и график функције $g(x) = 2^x + 3$

На основу проучавања графика претходних функција, није тешко препознати да график функције $g(x) = 2^x + 3$, настаје транслацијом графика $f(x) = 2^x$ навише за 3.
а основом 2 ако извршимо одређена померања, односно пресликавања. У наредној табели су сумиране различите врсте трансформација функције $f(x)=2^x$. Примена ширења и скупљања графика детаљније је анализирана у примерима после табеле.

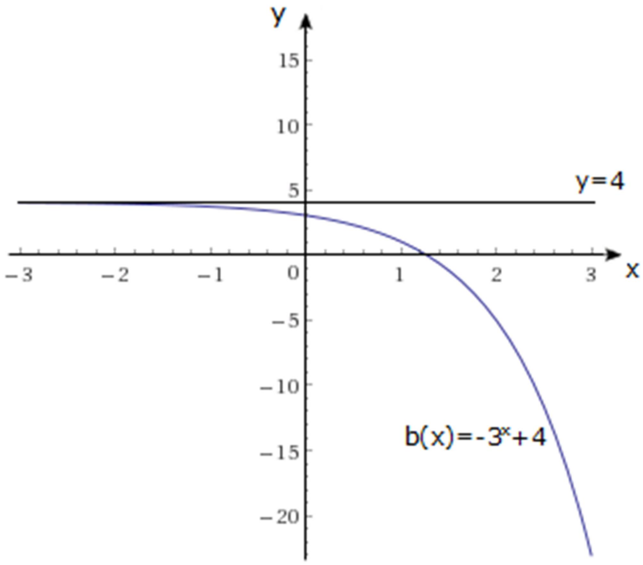
Табела 2.2 Померање графика

Једначина	Веза са графиком $f(x) = 2^x$	Кодомен
$g(x) = 2^{x-a}$, $a>0$	Добија се померањем графика f за a јединица у десно	$y > 0$
$g(x) = 2^{x+a}$, $a>0$	Добија се померањем графика f за a јединица у лево	$y > 0$
$g(x) = 2^x + a$, $a>0$	Добија се померањем графика f за a јединица на горе	$y > a$
$g(x) = 2^x - a$, $a>0$	Добија се померањем графика f за a јединица на доле	$y > a$
$g(x) = a \cdot 2^x$, $a>0$	Добија се ширењем графика f вертикално a пута	$y > 0$
$g(x) = 2^{ax}$, $a>0$	Добија се скупљањем графика f хоризонтално a пута	$y > 0$
$g(x) = -2^x$	Добија се симетричним пресликавањем графика f преко x-осе	$y < 0$
$g(x) = 2^{-x}$	Добија се симетричним пресликавањем графика f преко y-осе	$y > 0$

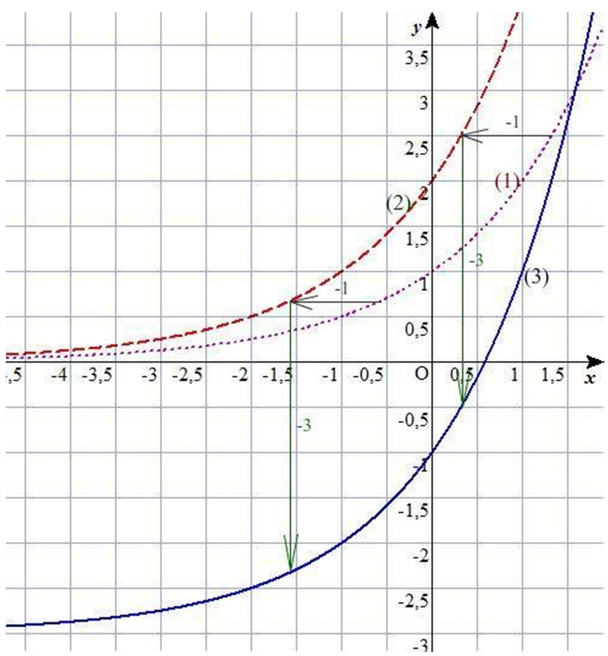
Пример 4.

Употребом наведених трансформација можемо скицирати график функције $b(x) = -3^x+4$. На следећој слици, полазећи од графика експоненцијалне функције $y=3^x$, добијемо симетричан график у односу на x-осу, $y = -3^x$, па вертикалним померањем за 4 јединице навише добијамо график функције $b(x) = -3^x+4$. Домен функције $b(x)$ је скуп реалних бројева, кодомен скуп $(-\infty, 4)$, функција има једну (хоризонталну) асимптоту $y = 4$ и нулу ($y_3 = 0$) за $3^x = 4$, односно $x \approx 1{,}26$.

На слици 2.6 је приказан овај поступак. Вредности функције се понашају слично као вредности за $f(x) = 3^x$. Међутим, пошто је свака вредност функције за 4 већа од степена двојке, хоризонтална асимптота ове функције је права $y = 4$. График ове функције са хоризонталном асимптотом је на следећој слици.



Слика 2.6 График функције $b(x)$ = - 3^x+4.



Слика 2.7   Графици функција: y_1= 2^x (1), y_2= 2^{x+1} (2) и y_3= 2^{x+1} -3 (3)

Пример 5.

Употребом наведених трансформација може се скицирати график функције y_3= 2^{x+1} -3. На слици 2.7, полазећи од графика експоненцијалне функције y_1=2^x (1) транслацијом у лево за 1 добијамо график функције y_2= 2^{x+1} (2), а затим транслацијом доле за 3 добијамо график функције y_3= 2^{x+1} -3   (3). Домен функције y_3 је скуп реалних бројева, кодомен скуп

(-3, +∞), функција има једну (хоризонталну) асимптоту y = -3, и нулу (y_3 = 0) за 2^{x+1}= 3, односно $x\approx$ 0,58.

Уз базу 10, која је важна због тога што рачунамо у декадном систему, те базу 2, јер калкулатори рачунају у бинарном систему (систему с базом 2), важна је и експоненцијална функција чија је база број е. То је ирационалан и трансцендентан број с приближном вредношћу е = 2.718281828 . . .
Функција $f(x)$ = e^x уграђена је у џепни калкулатор и мобилни телефон који садржи и остале стандардне функције. Њена типка је означена са e^x. Вредност броја е можемо добити на калкулатору притиском на e^x и 1.

Вредност броја е
Једначине као што су линеарна $ax + b = 0$, квадратна $ax^2 + bx + c= 0$ или једначина 3. степена (кубна), где су коефицијенти рационални бројеви зову се алгебарске једначине. Реални бројеви који су решења таквих једначина зову се алгебарски бројеви. Но, постоје реални бројеви који нису решења ни једне алгебарске једначине. То су трансцендентни бројеви. Број π је трансцендентан број. Он није решење ни једне алгебарске једначине. Дуж чија је дужина трансцендентан број није могуће конструисати. Тако не можемо конструисати ни дуж дужине π и то је разлог због којег није решив задатак квадратуре круга. Уз број π још се истиче трансцендентан број е.
Тај број чија је приближна вредност 2,7182818284590 као база експоненцијалне функције појављује се у врло разноликим природним законима као што су разне врсте природног прираста. Незаобилазне су такве функције и у оптици, акустици, електроници, динамици итд.
Ако посматрамо низ бројева који добијемо увршттавањем за n редом природних бројева у израз $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, што даље у том низу напредујемо, све смо ближи броју е.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 2{,}7182818284590\ldots$$

е ≈ 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352...

Ознаку е увео је швајцарски математичар Леонард Ојлер (Leonhard Euler) 1727. године, вероватно инспирисан речју експонент. Он је 1737. доказао да је е ирационалан, а да је трансцендентан доказао је 1873. Шарл Ермит (Charles Hermite).

Вредност броја е у почетку је рачуната у банкарске сврхе. Колики је његов значај за економију илуструју примери који следе.

Претпоставимо да улажемо у банку суму новца x. Ако би банка давала 100% -тну камату на годишњем нивоу, после једне године сума новца коју бисмо могли да подигнемо износила би 2 x (овде се ради о простом каматном рачуну).
Уколико бисмо на пола године подигли новац и поново га уложили, после једне године имали бисмо $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot x$. Ако бисмо сваки дан подизали новац и поново га улагали, наша сума би се после једне године повећала $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$ пута.
Поставља се питање: „Колико новца можемо зарадити уколико би банка рачунала сложену камату на бесконачно малим временским интервалима?“ (тзв. „непрекидно капиталисање“). Одговор је:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Може се поставити и питање: „Шта ако камата не износи 100% на одређеном периоду, него нпр. 200%?“ Одговор је следећи: тај временски период можемо поделити на два једнака дела. На основу претходно изложеног можемо закључити да ће на крају прве половине (и почетку друге половине) посредством „непрекидног капиталисања“ сума бити е пута већа од уложене. Слично, на крају друге половине сума ће бити e пута већа него на њеном почетку, што значи да ће на крају временског периода који посматрамо сума бити $e \cdot e = e^2$ пута већа од уложене.
Сада можемо извести уопштен закључак:
Ако ће се, рачунато простим каматним рачуном, уложена сума после одређеног временског периода, увећати r пута, онда ће се „непрекидним капиталисањем“ та иста сума, после истог временског периода увећати e^r пута.

3. ПРИМЕНА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИХ ФУНКЦИЈА

Примена експоненцијалне функције у економији, биологији, физици, криминалистици, хемији и електротехници представљена је у следећим примерима. Бројне вредности функције су израчунате у MS Excel или на калкулатору, а функције нацртане у програму „WolframAlpha“.

3.1. Економија

3.1.1. Сложена камата

Још у доба вавилонске алгебре појавили су се изрази за рачунање сложених камата у облику експоненцијалне функције. У данашње време, када нам банке и њихове камате у великој мери одређују свакодневни живот, добро је бити упознат с елементима финансијске математике. Један од темеља финансијске математике је сложени каматни рачун. Како је у том односу увек повољније бити у улози улагача а не дужника, размотрен је случај повољније позиције.

Замислимо да је у банку уложен одређени износ новца (капитал, главница) C_o и да банка примењује каматну стопу p на годишњем нивоу. Зависно од датих услова, банка камате може приписивати n пута у години. Износ којим улагач располаже после времена t дат је изразом:

$$C(t) = C_0\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{nt} \qquad (3.1)$$

Погледајмо на једном примеру како се мења коначни износ којим улагач располаже у случају да се време приписивања камата (време капиталисања) мења.

Нека је почетни улог 100 000 динара, а време капиталисања годишње, полугодишње, квартално, месечно, дневно, сваког часа, сваког минута. Банка примењује годишњу каматну стопу од 4%, а штедиша подиже новац после једне године. C_o = 100 000 динара.

C_o =100000	Број капиталисања n	Коначна вредност C
годишње	1	104000,00
полугодишње	2	104040,00
квартално	4	104060,40
месечно	12	104074,15
дневно	365	104080,85
сваког часа	8760	104081,07
сваког минута	525600	104081,08

Пораст суме у зависности од периода капиталисања

На основу добијених резултата видљиво је да су за улагача повољнија чешћа капиталисања. Замислимо да се време између два обрачуна све више смањује, а приписивање камата нема временског прекида. Тада говоримо о непрекидном (континуираном) капиталисању.
У том случају број n постаје све већи и већи, а коначна вредност улога после t година постаје:

$C(t) = Ce^{pt}$ (3.2).

Погледајмо сада на коју би вредност нарастао првобитни улог од 100 000 динара у случају непрекидног капиталисања у истом времену од једне године с истом каматном стопом од 4% годишње.

Коначни износ добијен непрекидним капиталисањем с тачношћу од две децимале је једнак оном рачунатом с капиталисањем сваког минута. Видљиво је, међутим, да се износи ипак разликују када рачунамо с тачношћу од најмање 4 децимална места.
Овде се могу поставити бројни занимљиви задаци. После колико времена ће улагач удвостручити улог у случају да уложи у банку износ C_0, ако се камата приписује непрекидно. Банка даје годишњу камату од 3%. Уврштавањем познатих величина долазимо до једноставне експоненцијалне једначине.

$$2C_0 = C_0e^{0,03t}$$

$$2 = e^{0,03t}$$

$$\ln 2 = 0,03t$$
$$t = \frac{\ln 2}{0,03}$$

$t = 23,1$ година

Нажалост, постоје и економска кретања која не показују економски раст него пад, па се долази до инфлације. Инфлација је прекомерно повећање новчане масе у оптицају, што доводи до смањења вредности новца. Последица инфлације је смањивање вредности новца за одређени проценат сваке године, те раст цена. Нека је A_0 почетна цена неког производа (услуге), а p годишња стопа инфлације. Тада је цена тог истог производа после t година дата изразом:

$$A(t) = A_0(1+p)^t$$

Уколико је инфлација, као у наредном примеру 3,9% , то значи да ће цена производа која је данас 10 динара (нпр. папирне марамице) за једну годину бити 10,39 динара. Када би се задржала иста стопа инфлације током 5 година, цена истих марамица би тада била 12,11 динара.

Шта још то значи? Ако нека особа у страху од колапса банкарског система своју уштеђевину од 10 000 динара држи код куће, сваке године губи на вредности. Требало би је орочити у банци током те године с каматом од најмање 3,9% како не би изгубила на вредности (или уложити у неки посао са стопом раста приноса већом од 3,9%). Као показатељ инфлације често се прати време потребно да се цене удвоструче ($A(t) = 2A_0$).
Решавањем експоненцијалне једначине добијамо време удвостручења цена.

$$2A_0 = A_0(1+p)^t$$

$$2 = (1+p)^t$$

$$\ln 2 = t \cdot \ln(1+p)$$

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1+p)}$$

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1+0{,}039)} \approx 18{,}11$$

У посматраном примеру реч је о релативно благој инфлацији (удвостручивање цена је сваких 18 година).
Кроз историју памте се знатно веће стопе инфлације. Екстремна инфлација назива се хиперинфлација, а карактерише је месечни раст цена од најмање 50%. Историјски рекорд држе редом:
1. Мађарска (1946.) с месечном стопом од 4,19 · 1016 % месечно, при чему су се цене удвостручивале сваких 15 часова.
2. СР Југославија (1993.) с месечном стопом 5 · 1015 % месечно (цене су се удвостручивале сваких 16 часова).
3. Грчка (1941-1944.) с месечном стопом 8,55 · 109 % (удвостручивање сваких 28 часова).
4. Немачка (1923.) с месечном стопом 3,26 · 106 % (удвостручивање сваких 49 часова).

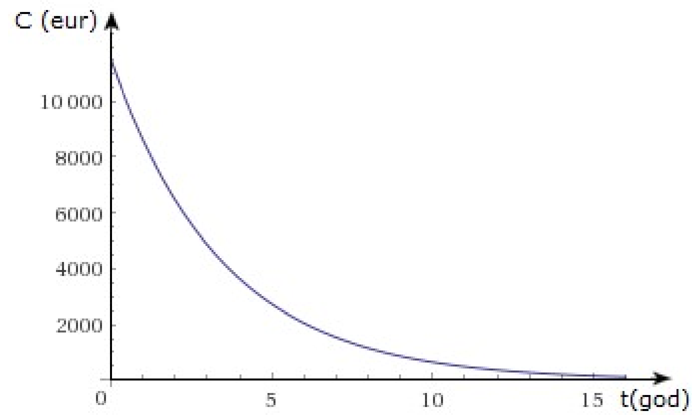
3.1.2 Цена коришћеног аутомобила

Цена коришћеног аутомобила зависи од неколико чинилаца од којих је најбитнији година производње. Сваке године његова вредност се умањује за 25% у односу на претходну.
Ако је нов аутомобил стајао 15 000 евра, колика му је цена после 5 година?

Решење.
Означимо са C_0 = 15 000 цену новог аутомобила.
После једне године дана цена се умањи за 25% и износи
$C_1 = C_0 - C_0 \cdot 0{,}25 = C_0(1 - 0{,}25) = C_0 \cdot 0{,}75$ = 11 250 евра.
После још једне године аутомобилу цена поново падне за 25% и износи
$C_2 = C_1 - C_1 \cdot 0{,}25 = C_1(1 - 0{,}25) = C_1 \cdot 0{,}75 = C_0 \cdot (0{,}75)2$ = 8 437,5 евра.
Аналогно, после 3 године вредност аутомобила је једнака $C_3 = C_0 \cdot (0{,}75)^3$ = 6 328 евра. Рачунамо даље, а цео рачун је приказан прегледно следећом табелом и графиком на слици

3.1. Цена аутомобила је функција времена и можемо је записати у следећем облику: $C_n = C_o \cdot (0,75)^n$. При том је C_0 цена новог аутомобила, а C_n цена истог аутомобила после n година.

Број година *t*(god)	Цена аутомобила *C(eur)*
0	15000
1	11250
2	8438
3	6328
4	4746
5	3560
6	2670
7	2002
8	1502
9	1126
10	845
11	634
12	745
13	356
14	267
15	200



Слика 3.1 Пад цене аутомобила *C(eur)* у зависности од броја година старости *(t)*

На слици 3.1 је приказан пад вредности аутомобила зависно од његове старости. На апсцисној оси је време (старост аутомобила у годинама), а на ординатној оси цена у еврима. Видљиво је да цена много брже опада на почетку, првих година, а што је ауто старији њено умањење је готово занемарљиво.
Наравно, има смисла интересовати се о цени аутомобила и после 3,5 године или после 75 месеци и слично, јер једна година је ипак дуг период у животу аутомобила.

3.2. Раст популације

У биологији је добро познато да многе популације у почетку свог развоја показују својства експоненцијалног раста.
Анализиран је модел неограниченог раста популације који подразумева раст популације који није ограничен храном, простором, нити било којим другим животним ресурсом; дакле, раст који није зависан од густине популације. Како реално постоје многи ограничавајући фактори за њен раст везани за густину (грабљивци, ограничења ресурса, ...), тај исти тренд не следи и после.

У апроксимацији неограниченог раста популације важи временски континуирани експоненцијални раст:

$N(t)=N_0e^{rt}$ (3.3)

где су

$N(t)$-број јединки у популацији после времена t,

N_0 -почетна величина популације,

t - време,

r - индивидуална експоненцијална стопа раста (r > 0 популација расте експоненцијално, r < 0 популација се смањује и приближава нули и r = 0 популација је константна).

Пример1.

Израчунати колико треба времена да се популација која има експоненцијални раст $N(t)=N_0e^{rt}$, удвостручи.

Решење:

За решавање нам је потребна логаритамска функција.

$N(t) = 2N_0$

$2N_0 = N_0 e^{rt}$

$2 = e^{rt}$

$\ln 2 = rt$

$t = \frac{\ln 2}{r}$

Прогнозе које овај модел даје могу бити употребљиве само у врло кратком временском интервалу. Постоје ситуације у природи када се експоненцијални раст може догађати кроз релативно дуже време, а то су када се популације природно или уз помоћ човека досељавају у ново и за њих повољно подручје, када су популације биле снажно ограничаване у расту услед људских активности, а онда те активности престану, када су популације природно подложне великим флуктуацијама и налазе се у оној фази када од ниске густине расту према максимално могућој густини.

Пример: Изворне популације скакаваца опстају на ограниченим регионима где су погодни услови за њихов опстанак и репродукцију. Током периода када су клима и залихе хране веома повољни популција расте невероватном брзином, мења своју морфологију и понашање, јединке се агрегирају у огромне ројеве и мигрирају у друга огромна подручја. Такве велике миграције обе афричке врсте скакаваца (Locusta migratoria и Nomadacris septemfasciata) су се јављале два-три пута током прошлог века, захватајући већи део јужне Африке, површине више милиона квадратних километара и више од десет пута већу површину од изворне области.

Експоненцијални раст популације своју примену налази у:

- микробиологији (раст броја бактерија),
- конзервационој биологији (управљање угроженим популацијама),
- узгоју организама (прогноза приноса),
- карантину биљака и инсеката (раст унешених врста),
- рибарству (прогноза динамике рибљих популација).

Већина популација у природи не расте експоненцијално или се тај раст догађа врло краткотрајно. Када би популације у природи расле експоненцијално, чак би и популације врста које се размножавају врло споро достигле енормно велике бројке и у релативно кратком времену дословно прекриле Земљу.
Томас Малтус (Thomas Malthus) је 1798. у свом делу „Есеј о принципима становништва“ [8] указао на проблематику експоненцијалног раста људске популације у односу на линеарни раст ресурса за преживљавање. Малтус је сматрао да су зато људи осуђени на беду и сиромаштво уколико се не предузму мере ограничења пораста становништва. Без тих мера природне недаће (глад, болести, ратови итд.) ће природним путем регулисати однос између раста популације и производње хране. Но, његове идеје је кориговао белгијски математичар Пиер-Франсоа Ферхулст (Pierre-François Verhulst) 1838. када је извео своју логистичку једначину да би описао самоограничавајући раст биолошких популација.

$$N(t) = \frac{K}{1+A \cdot e^{-r_0 t}} \qquad (3.4)$$

при чему је K носиви капацитет система, а параметри K и N се рачунају помоћу максималног капацитета K и почетне популације N_0.

Ипак, Малтусов рад је био веома утицајан на практичном нивоу. Током прошлог века су израђене многе емпиријске студије које су доказале исправност гледишта ове теорије у многим сиромашним земљама у којима и данас становништво гладује. Недостатак капитала, ниска продуктивност, ограничени земљишни ресурси уз повећање броја становника доводи до опадања производа по једном раднику. Такав тренд развоја непосредно утиче на појаву глади и повећане смртности у сиромашним земљама, али и на ратне сукобе. Посебно се тај тренд јавља у Афричким земљама. Према подацима Светске организације за исхрану, преко 800 милиона становника данас гладује у свету. Због тога, Малтусов став подстиче на превентиву у решавању наведеног проблема. Изгледа да многе земље, плашећи се да не упадну у Малтусову „замку“, доносе законе о планирању породице и ограничавању броја рађања деце.

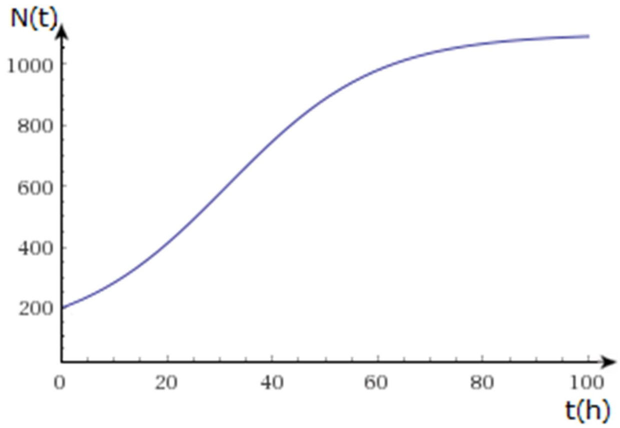
Пример 2.
Култура бактерија има стопу раста k = 0,07 на час и максимални капацитет подлоге је 1000 бактерија. Ако на почетку имамо 100 бактерија, треба написати једначину модела.

Решење:

$$A = \frac{1000-100}{100} = 9$$

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 9 \cdot e^{-0.07t}}$$

t(h)	0,5	1	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
N(t)	103	106	145	205	281	374	476	580	678	762	830	881	919	945	963	975



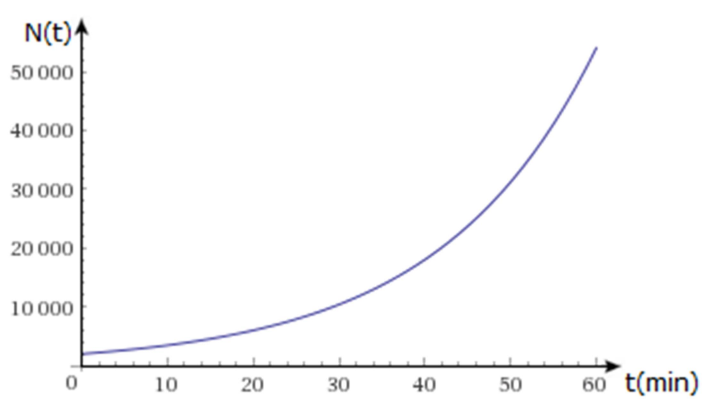
Слика 3.2 Промена броја бактерија у времену

Пример 3.

Пораст броја бактерија. Биолози су установили да под идеалним условима број бактерија у култури расте експоненцијално. Ако је у тренутку $t = 0$ присутно 2000 бактерија, а 20 минута касније 6000 бактерија, колико ће бактерија бити после првог сата?

Решење:

Нека је $N(t)$ број бактерија после t минута. Према претпоставци је $N(t) = N_0 e^{kt}$, где су $N(0) = N_0$ у почетном тренутку $t = 0$, а k позитивна константа. Треба израчунати $N(60)$.



Слика 3.3 Експоненцијална промена броја бактерија у времену

Према услову $6000 = 2000e^{20k}$, односно $e^{20k} = 3$,
$N(60) = 2000\ e^{60k} = 2000\ (e^{20k})^3 = 2000 \cdot 3^3 = 54000$.

Пример 4.
Модел ширења неке заразне болести може се представити експоненцијалном функцијом

$N(t) = \frac{K}{1+A \cdot e^{-r_0 t}}$.

Болест се шири градом чија ризична популација броји око 50 000 особа. У почетној фази у граду је 100 инфицираних особа, а после 10 недеља број инфицираних је порастао на 1000. После колико времена ће бити инфицирана половина ризичне популације?

Решење:

$K = 50\ 000$; $N_0 = 100$; $N(t_1) = 1000$; $t_1 = 10$

$A = \frac{50\ 000 - 100}{100} = 499$

Треба прво решити једначину

$$N(t) = \frac{K}{1 + A \cdot e^{-r_0 t}}$$

$$1000 = \frac{50000}{1 + 499 \cdot e^{-10k}}$$

одакле се добија $1 + 499 \cdot e^{-10k} = 50$, тј. $499 \cdot e^{-10k} = 49$.
Одатле је
$e^{-10k} = 0{,}0982$
$-10k = \ln 0{,}0982$
и коначно $k = 0{,}23208$

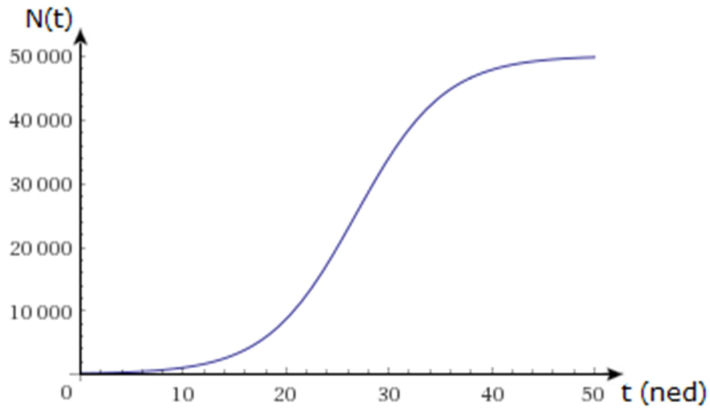
Модел ширења болести у овој популацији гласи

$$N(t) = \frac{50000}{1 + 499 \cdot e^{-0{,}23208t}}$$

Време потребно да се инфицира пола ризичне популације добићемо решавањем једначине

$$25000 = \frac{50000}{1 + 499 \cdot e^{-0{,}23208t}}$$

а из овог се добија да је потребно време $t = 26{,}8$ недеља.



Слика 3.4 Ширење заразне болести

Пример 5.

На основу тока ширења еболе, тешке заразне болести, у једном делу Уганде [10], постављен је математички модел који описује повећање броја оболелих у *t* дана после почетка посматрања $N(t) = \frac{396}{1+2{,}75\cdot 1{,}1^{-t}}$.

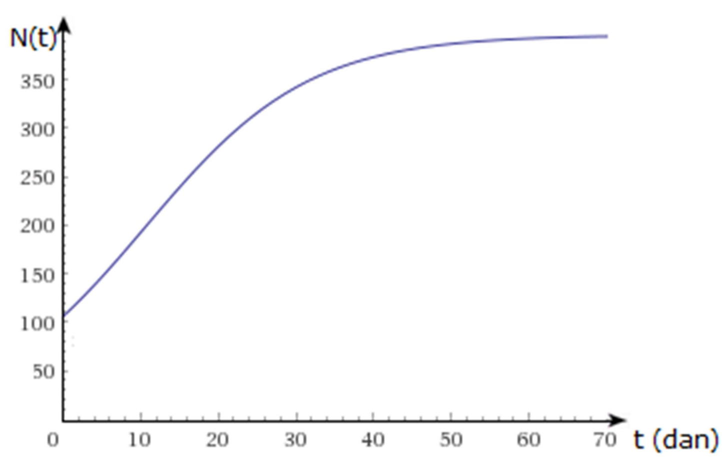
Колико се оболелих може очекивати после 60 дана?

Решење:

Из дате формуле израчунамо $N(60) = \frac{396}{1+2{,}75\cdot 1{,}1^{-60}} \approx$ 392 особе.

Може се, дакле, очекивати да ће после 60 дана вирусом еболе бити заражене приближно 392 особе.

t (dan)	*N(t)*
0	106
10	192
20	281
30	342
40	373
50	387
60	392



Слика 3.5 Ширење заразне болести еболе

У биологији је познато да многе популације у почетку свога развоја показују својства експоненцијалног раста – али краткотрајно.
Када би популације у природи расле експоненцијално, чак би и популације врста које се размножавају врло споро достигле енормно велике бројеве и у релативно кратком времену дословно прекриле Земљу.

Пример 6.
Стадо говеда се удвостручи за 2 године. За почетну популацију од 50 говеда, добила би се експоненцијална функција $N = 50^{t/2}$.
У следећој табели су приказани подаци зависности броја говеда N од протеклог времена t:

Број година *(t)*	0	2	4	10	50	100	200
Величина стада *(N)*	50	100	200	1600	$1{,}67 \cdot 10^{9}$	$5{,}62 \cdot 10^{16}$	$6{,}33 \cdot 10^{31}$

Дакле, за 200 година експоненцијални модел предвиђа стадо од чак $6{,}33 \cdot 10^{31}$ говеда. То стадо би било теже од целе Земље ($6 \cdot 10^{24}$ kg), па је очигледно да модел експоненцијалног раста у овом случају није добар.

3.3. Зарастање рана

Нормално зарастање рана могуће је моделирати експоненцијалном функцијом. Нагласимо да је ово груба апроксимација, јер постоје бројни математички захтевнији и прецизнији модели. Ако са A_0 означимо почетну површину ране, тада се површина ране $A(t)$, после t дана може описати функцијом:

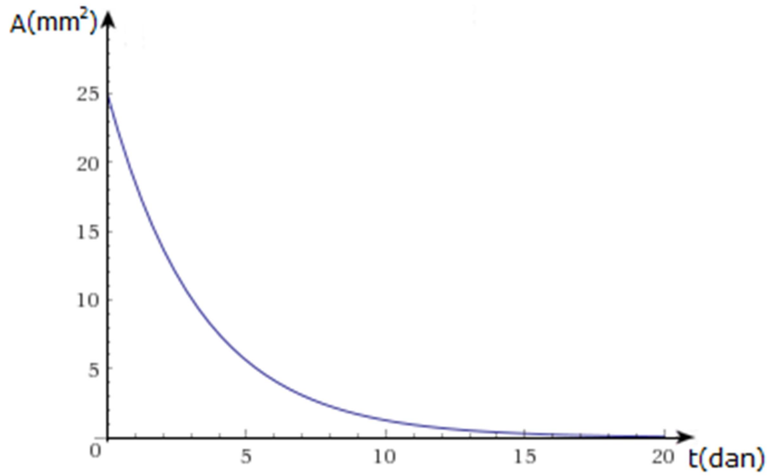
$A(t) = A_0 e^{-0.3t}$. (3.5)

Уз претпоставку да је почетна рана имала површину од 25 mm^2, једначина гласи

$A(t) = 25 \cdot e^{-0.3t}$.

Пратећи тај модел можемо предвидети колика ће рана бити током следећих дана и када ће у потпуности зацелити.

t (dan)	A (mm^2)	t (dan)	A (mm^2)
1	18.52	16	0,21
2	13,72	17	0,15
3	10,16	18	0,11
4	7,53	19	0,08
5	5,58	20	0,06
6	4,11	21	0.05
7	3,06	22	0,03
8	2,27	23	0,03
9	1,68	24	0,02
10	1,24	25	0,01
11	0,92	26	0,01
12	0,68	27	0,01
13	0,51	28	0,01
14	0,37	29	0,00
15	0,28		



Слика 3.6 Површина ране као функција времена

Ако рачунамо с тачношћу од 2 децимале, очигледно је да ће рана у потпуности зацелити за 29 дана.

3.4. Раст атмосферског притиска

Свима је и из искуства познато да се атмосферски притисак с висином смањује, али мање је познато да при том следи експоненцијалну зависност од висине. Дакле, статички атмосферски притисак на некој висини h је одређен релацијом

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} \cdot h} \qquad (3.6),$$

где су:
h – надморска висина,
p_0 – притисак на референтном нивоу ($h = 0$),
g – убрзање земљине силе теже ($g = 9{,}81\ m/s^2$),

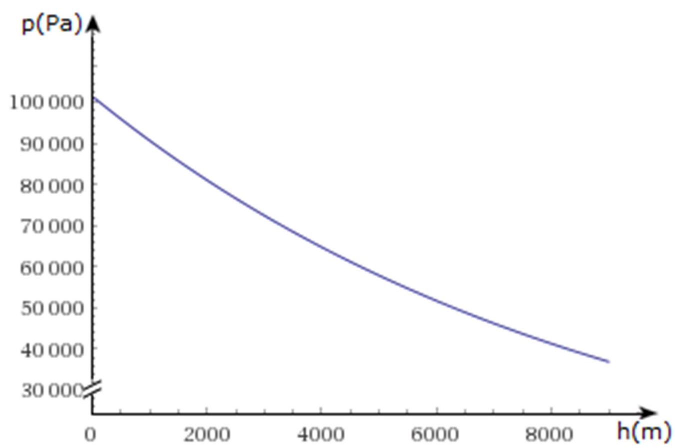
ρ_0 – густина ваздуха на референтном нивоу (h = 0),

На основу дате релације и познавања података да је на обали мора притисак p_0 =101 400 Pa и густина ваздуха ρ_0 = 1,16 kg/m^3, израчунат је притисак на врху Авале, надморске висине h = 511m:

$$p\ (511\text{m}) = 101400 \cdot e^{-\frac{1{,}16 \cdot 9{,}81}{101400} \cdot 511} \approx 83\ 254\ \text{Pa}$$

На исти начин израчунат је притисак на неким познатим локацијама у Србији и свету.

Локација	Надморска висина (m)	Притисак (Pa)
Београд Славија	117	100 077
Авала	511	95 749
Фрушка Гора	539	95 448
Космај	626	94 521
Златибор	1000	90 636
Панчићев врх	2017	80 854
Монт Блан	4809	59 109
Килиманџаро	5985	51 801
Аконкагва	6962	46 422
Монт Еверест	8848	37 568



Слика 3.7 Атмосферски притисак као функција надморске висине

3.5. Њутнов закон хлађења

На основу Њутновог закона хлађења промена температуре објекта је пропорционална разлици температуре објекта T и температуре околине $T_{околине}$. Овај закон је добра апроксимација процеса хлађења у стандардним условима, а он гласи:

$T(t)=T_{околине}+(T_{почетна}-T_{околине})\cdot e^{-kt}$ (3.7)

Пример1.

Како бисмо охладили тврдо кувано јаје температуре 98 °C, оставимо га у тањиру на собној температури (18 °C). После 5 минута температура јаја износи 38 °C. Када ће јаје достићи температуру 25 °C?

Решење:

$T_{поч}$= 98 °C, $T_{околине}$= 18 °C, t = 5 min, T= 38 °C.

Прво ћемо искористити познате величине како бисмо одредили константу k:

$38 = 18 + (98 - 18)\cdot e^{-5k}$
$20 = 80 \cdot e^{-5k}$
$0{,}25 = e^{-5k}$
$\ln 0{,}25 = -5k$

$$k = \frac{\ln 0{,}25}{5}$$

$k = 0{,}2773$

Сада можемо одредити и време потребно да се јаје охлади на температуру 25 °C:

$25 = 18 + (98 - 18)\cdot e^{-0{,}2773t}$
$7 = 80\cdot e^{-0{,}2773t}$
$0{,}0875 = e^{-0{,}2773t}$
$\ln 0{,}0875 = -0{,}2773t$

$$t = -\frac{\ln 0{,}0875}{0{,}2773}$$

t = 8,79 min

Пример 2.

Шоља чаја температуре 30°C је стављена у фрижидер температуре 4°C. Ако је после 12 минута температура била 17°C, одредите температуру шоље чаја после 20 минута.

Решење:

Користимо формулу за Њутнов закон хлађења

$T(t) = T_{околине} + (T_{поч} - T_{околине})\cdot e^{-kt}$.

Прво ћемо искористити познате величине како бисмо одредили константу k:

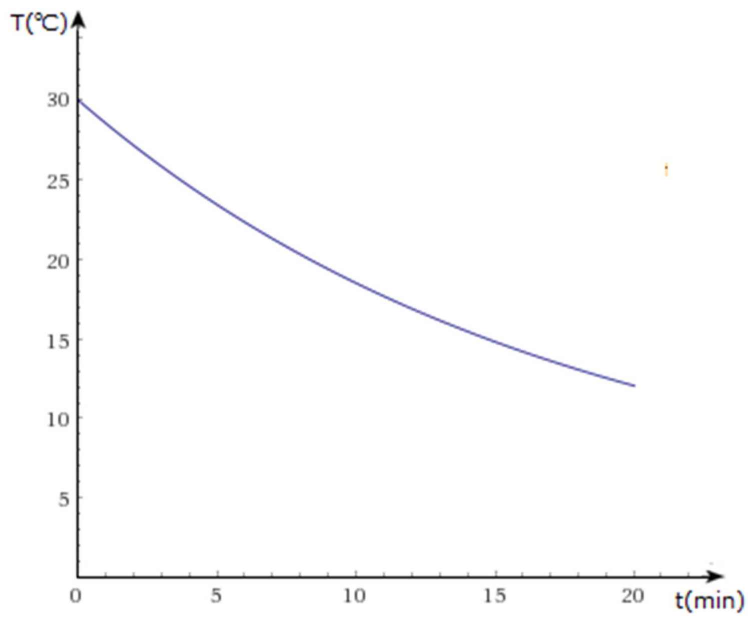
$17 = 4 + (30-4)\cdot e^{-12k}$
$13 = 26\cdot e^{-12k}$
$0{,}5 = e^{-12k}$
$\ln 0{,}5 = -12k$

$k = \dfrac{\ln 0{,}5}{-12}$

$k = \dfrac{\ln 2}{12}$

$k = 0{,}058$, а t је време изражено у минутима

$T(20) = 4+(30-4)\cdot e^{-0{,}058\cdot 20} \approx 12{,}15°C$.



Слика 3.8 Температура као функција времена

3.6. Одређивање времена смрти

Експоненцијални закон налази своју примену и у криминалистици, за одређивање времена смрти.

<u>Пример.</u>

Догодило се убиство и на терен је изашла полицијска екипа на увиђај. Температура тела убијеног тада је износила 26,5 °C. Два часа после, температура тела жртве је износила 24,5 °C. У соби је температура константна и износи 20 °C. Уз претпоставку да је температура тела пре смрти била просечних 36,5 °C, одредите време смрти.

Решење:

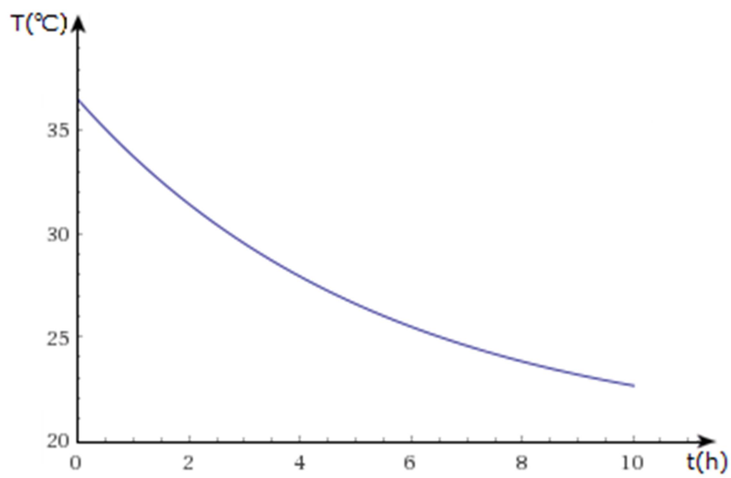
$T_{поч}$= 26,5 °C
$T(2)$ = 24,5 °C
$T_{околине}$= 20 °C.

Одредимо константу k
$24{,}5 = 20 + (26{,}5 - 20)\cdot e^{-2k}$
$4{,}5 = 6{,}5 \cdot e^{-2k}$
$0{,}6923 = e^{-2k}$
$\ln 0{,}6923 = -2k$

$k = -\frac{\ln 0{,}6923}{2}$
$k = 0{,}18387$

Дакле, хлађење тела при тим условима следи законитост:

$T(t) = 20 + (36{,}5-20)\, e^{-0{,}18387t}$
$T(t) = 20 + 16{,}5\, e^{-0{,}18387t}$



Слика 3.9 Температура као функција времена

Знајући коначну температуру тела, можемо одредити време смрти:

$24{,}5 = 20 + 16{,}5\, e^{-0{,}18387t}$
$4{,}5 = 16{,}5\, e^{-0{,}18387t}$
$0{,}2727 = e^{-0{,}18387t}$

$\ln 0{,}2727 = -0{,}18387t$
$t = 7{,}07$ h

Дакле, убиство се догодило око 7 часова пре проналаска тела.

3.7. Одређивање година живота

Статистички је добијено да је средњи животни век у Србији 2010. године био за жене 76,4 година, а за мушкарце 71,1 година.

Очекивани број година живота се рачуна према функцијама и то:

за жене $f(n) = 76{,}4 \cdot 1{,}001^{n}$ (3.8) и

за мушкарце $f(n) = 71{,}1 \cdot 1{,}002^{n}$ (3.9) .

Интересантно би било израчунати, колики животни век може очекивати жена којој је сада 25 година:

$f(25) = 76{,}4 \cdot 1{,}001^{25} \approx 78{,}33.$

Жена којој је сада 60 година може да очекује:

$f(60) = 76{,}4 \cdot 1{,}001^{60} \approx 81{,}12.$

Колики животни век може очекивати мушкарац који има сада 20 година?

$f(20) = 71{,}1 \cdot 1{,}002^{20} \approx 73{,}99,$

а мушкарац који има сада 60 година може да очекује

$f(60) = 71{,}1 \cdot 1{,}002^{60} \approx 80{,}15.$

Може се приметити да се за старије особе повећава очекивани животни век.

3.8. Време полураспада радиоактивних елемената

Радиоактивност је процес у којем долази до спонтане трансформације језгра, које том приликом мења састав или енергетско стање. Вероватноћа распада неког радиоактивног језгра је одређена само природом процеса који се у том језгру догађају и на њу се не може утицати спољашњим факторима као што су температура, притисак, магнетна или електрична поља и слично, па се задати изотоп може сматрати константном. Управо та константа, која представља вероватноћу одигравања радиоактивног распада једног језгра у одређеном интервалу времена, назива се константа радиоактивног распада λ и представља константу пропорционалности између броја језгара која се распадају у неком интервалу времена и укупног броја нестабилних језгара *N*.

$-\Delta N/\Delta t = \lambda N = A$ (3.10)

Овај број језгара који се распадне у неком интервалу времена представља количину радиоактивног материјала која се назива активност. Она се углавном изражава у јединицама Кири (*Ci*), који је једнак $3{,}7\cdot 10^{10}$ распада у секунди, што представља велику количину радиоактивности. Јединица SI система за радиоактивност је Бекерел (*Bq*) који представља један распад у секунди. Јасно је да је веза између ове две јединице $1Ci = 3{,}7\cdot 10^{10} Bq$. Негативан знак на левој страни горње једначине говори да се распадом смањује број посматраних радиоактивних језгара.

Решавањем једначине (3.10) добија се закон радиоактивног распада

$N = N_0 e^{-\lambda t}$ (3.11)

Време полураспада или физички период полураспада $T_{1/2}$ представља време за које се број радиоактивних атома у одређеном узорку смањи за једну половину. Изотопи који се користе у нуклеарној медицини имају период полураспада реда величине од неколико сати до неколико дана. Константа радиоактивног распада и време полураспада су повезани релацијом

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

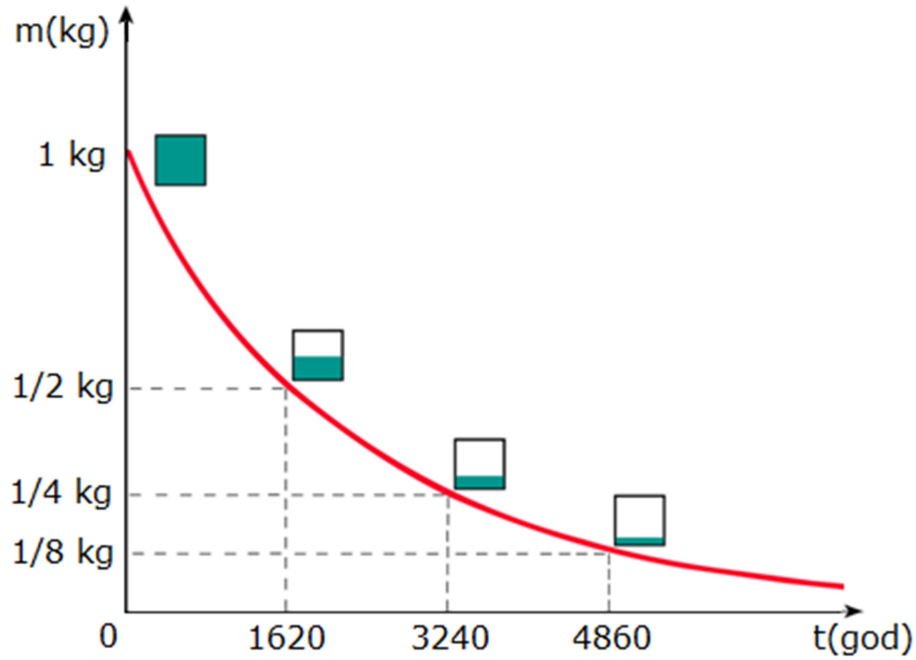
Времена полураспада ($T_{1/2}$) за неке елементе су:

- угљеник ^{14}C је 5730 година, а константа радиоактивног распада $\lambda = \frac{\ln 2}{5730} = 0{,}00021$

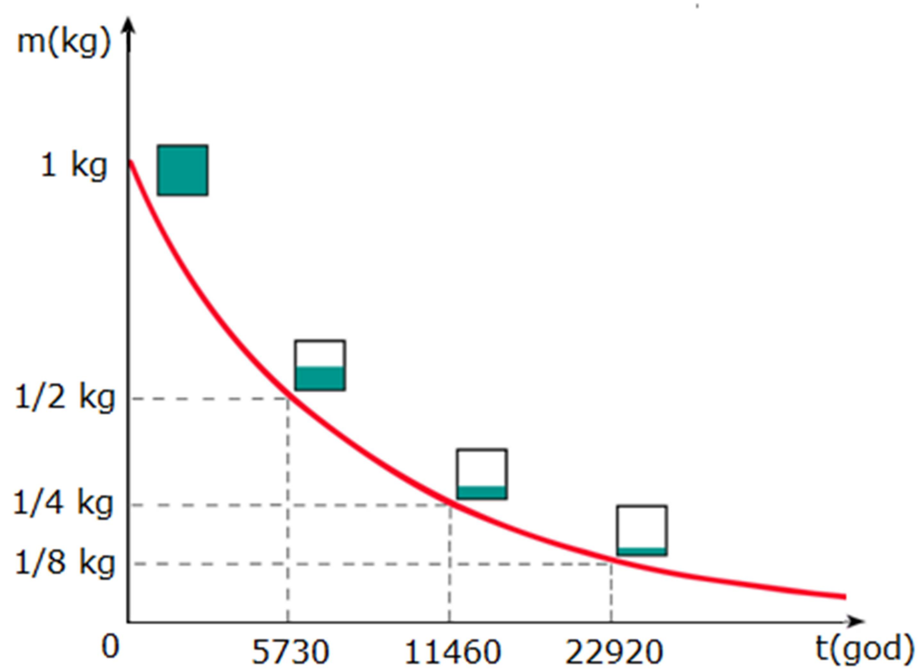
- радон ^{88}Ra је 1620 година, а константа радиоактивног распада $\lambda = \frac{\ln 2}{1620} = 0{,}000428$

- осиромашени уран ^{238}U је $4{,}5\cdot 10^{9}$ година, а константа радиоактивног распада

$$\lambda = \frac{\ln 2}{1{,}54\cdot 10^{-10}} \;.$$



Слика 3.10 Полураспад радона ^{88}Ra. Уместо функције $N=N_0e^{-\lambda t}$ приказана је функција $m= m_0e^{-0,004280t}$, где је m_0= 1kg, почетна маса радона.



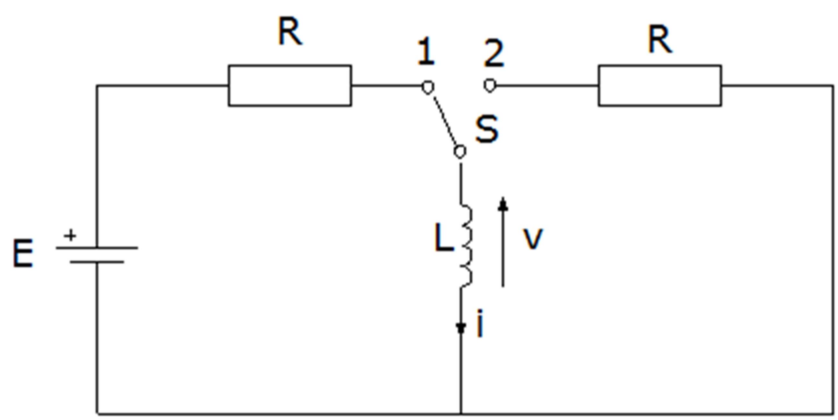
Слика 3.11 Полураспад изотопа угљеника ^{14}C. Уместо функције $N=N_0e^{-\lambda t}$ приказана је функција $m = m_0e^{-0,00121t}$, где је m_0 = 1kg, почетна маса изотопа угљеника.

3.9. Прелазне појаве у електротехници

Електрични елементи који могу ускладиштити енергију електричног (кондензатор) и магнетног (калем, завојница) поља, могу се налазити у два стационарна стања: са и без енергије. Интересантно је упознати појаве које настају при прелазу из једног у друго стационарно стање, јер се њима обухвата прерасподела енергије у струјним колима, што је чест случај у пракси. Скуп свих догађаја при том прелазу називамо "прелазне појаве". Главно питање које се у следећим примерима решава је: како се мењају напон и струја на калему и кондензатору између два стационарна стања.

3.9.1. RL коло

Пример 1. Укључење RL кола
Сваки реални калем се може представити као веза активне отпорности R и индуктивности L. Ако се доведе напон у струјно коло у који је спојена реална завојница (укључење прекидача, положај 1, на слици 3.12.) струја ће од почетне вредности $i = 0$ до своје стационарне вредности $i = E/R$ с временом мењати свој износ. Промена струје индуковаће напон самоиндукције, који ће се по Ленцовом закону супротстављати промени струје, тј. успораваће њен пораст.



3.12 RL коло после укључења, прекидач у положају 1.

На основу знања из физике, II Кирхофов (Gustav Robert Kirchoff) закон за коло на слици 3.13. гласи:
$E + e_s = i \cdot R$ (3.12),
где су

E-напон извора,

$e_s = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$ (3.13), напон самоиндукције на калему,

$i \cdot R$- напон на отпорнику,

L-индуктивност калема,

одакле се уврштењем напона самоиндукције добија

$E - L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = i \cdot R$ (3.14),

и дељењем са R

$\frac{E}{R} - \frac{L}{R} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = i$ (3.15),

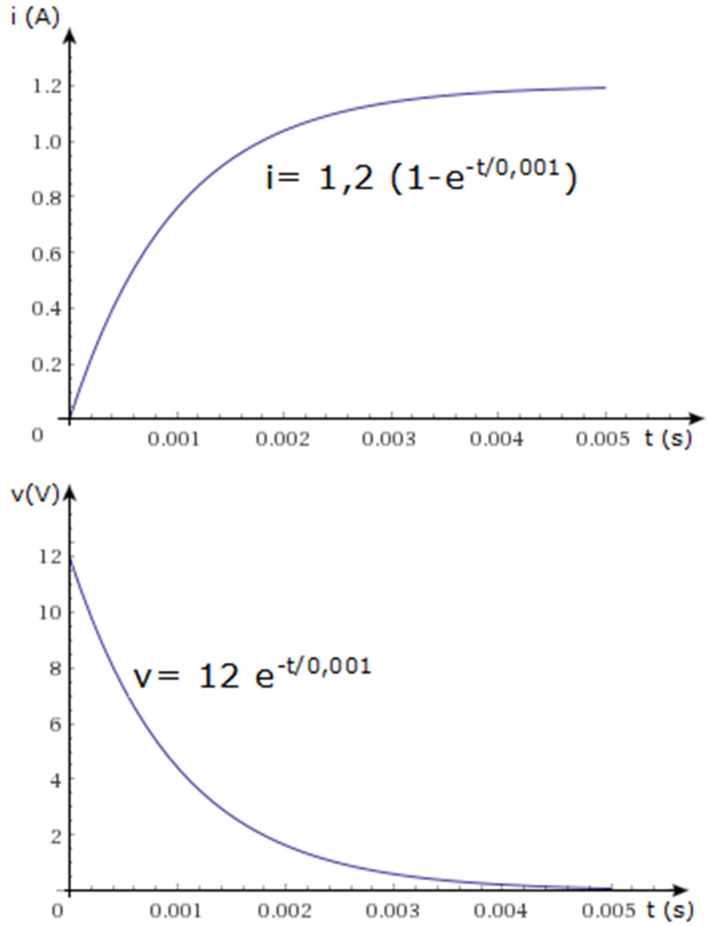
E/R је коначна (стационарна) вредност јачине струје *I*, а *L/R* је величина димензије времена, па се зове временска константа кола и означава са τ. Израз (3.15) тако постаје

$I - i = \tau \frac{\Delta I}{\Delta t}$ (3.16).

Решењем ове једначине, с почетним условима $i = 0$, за $t = 0$, за $i = f(t)$
добија се струја кроз калем $i = I(1 - e^{-t/\tau})$ (3.17),
а слично се добије и за напон $v = f(t)$ на калему, $v = Ee^{-t/\tau}$ (3.18).

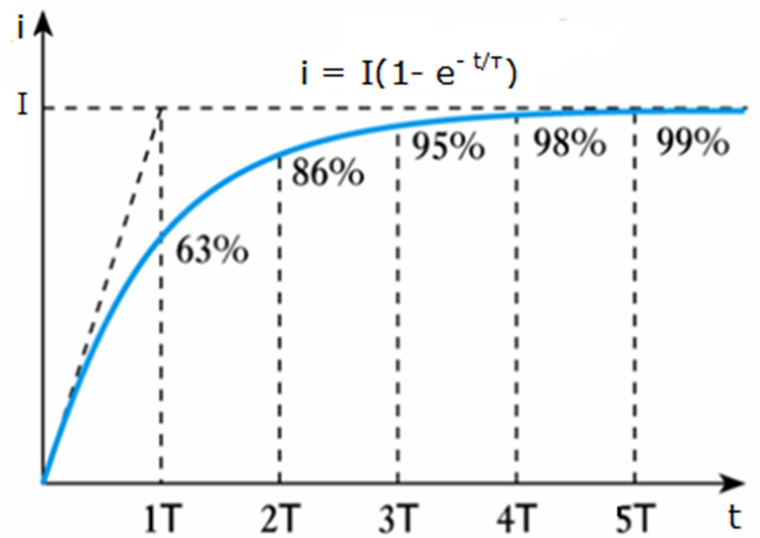
За пример E= *12V,* L=10mH, R=10Ω, τ= L/R=0,001s, добију се функције струје
$i = 1{,}2(1 - e^{-t/0.001})$ и напона $v = 12\ e^{-t/0,001}$, а вредности су приказане у табели и графицима на слици 3.14.

t(s)	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005
i(A)	0	0,76	1,04	1,14	1,18	1,19
i/I	0	0,633	0,86	0,095	0,98	0,99
v(V)	12	4,41	1,6	0,6	0,22	0,08



Слика 3.13 Струја $i = f(t)$ и напон $v = f(t)$ на калему (завојници) после укључења RL кола.

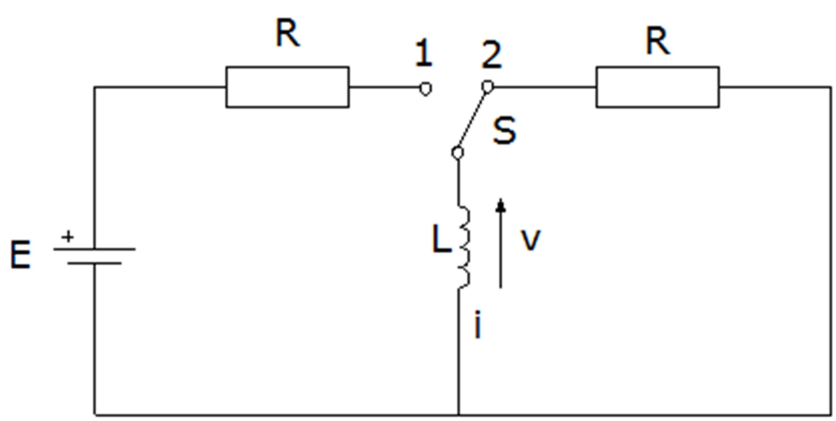
Истовремено, повећањем струје у калему, напон на њој опада од максималног износа E према нули, који постиже у стационарном стању, кад кроз калем тече константна струја $I=E/R$, као што се види на слици 3.14. Јачина струје расте у завојници по експоненцијалном закону. За време једне временске константе ($t=\tau$) струја постигне 63,2% своје коначне вредности, што се лако израчуна из (3.17). Та вредност стационарног стања практично се постиже већ после времена од 4 до 5 временских константи τ. То се нарочито јасно види на слици 3.14. која графички представља израз (3.17).



Слика 3.14 Струја $i = f(t)$ после укључења RL кола. Стационарно стање струје се практично постиже већ после времена од 4 до 5 временских константи τ.

<u>Пример 2.</u> Искључење RL кола

Други случај прелазне појаве у RL колу је прекидање тока стационарне струје I, на пример премештањем преклопника из положаја 1 у положај 2, на слици 3.15. Калем (завојница) је кратко спојена преко отпорности (прекидач у положају 2, слика 3.15). У струјном колу без извора Е, струја мора да опадне на нулу (угасиће се). Промене струје су неизбежне при смањивању стационарне вредности I на стационарну вредност $i = 0$ и оне узрокују самоиндукцију. Смер напона самоиндукције, (по Ленцовом закону) је такав да се супротставља промени, тј. настоји да одржи дотадашњу струју.



Слика 3.15 RL коло после искључења, прекидач у положају 2.

Искључењем извора струје (извор Е више није у колу са калемом), израз (3.17), тако постаје $0 - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = i \cdot R$

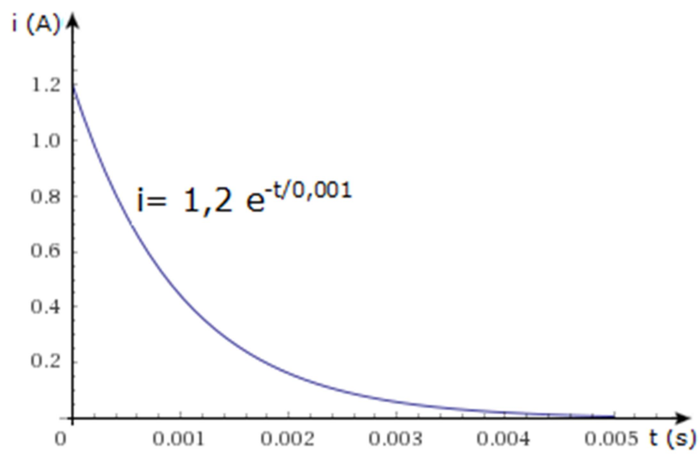
одакле се уз почетни услов $i = I$ за $t = 0$, решавањем добија

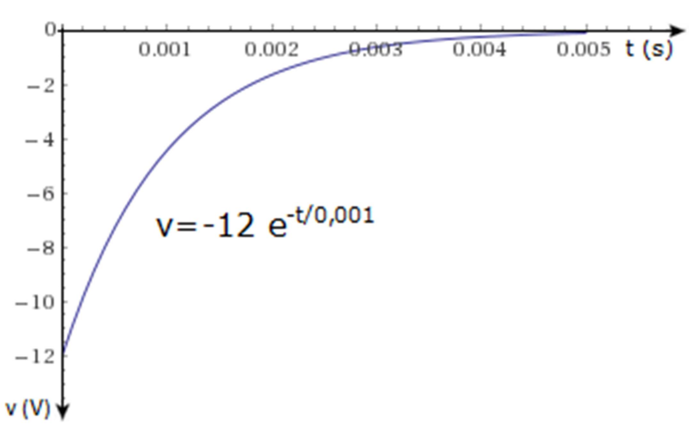
$i = I\,e^{-t/\tau}$ (3.19).

Слично се добије и за напон $v = f(t)$ на калему, $v = -Ee^{-t/\tau}$ (3.20).

За пример E= $12V$, L=10mH, R=10Ω, τ= L/R=0,001s, добију се функције струје $i = 1{,}2e^{-t/0{,}001}$ и напона $v = -12\ e^{-t/0{,}001}$, а вредности су приказане у табели и графицима на слици 3.16

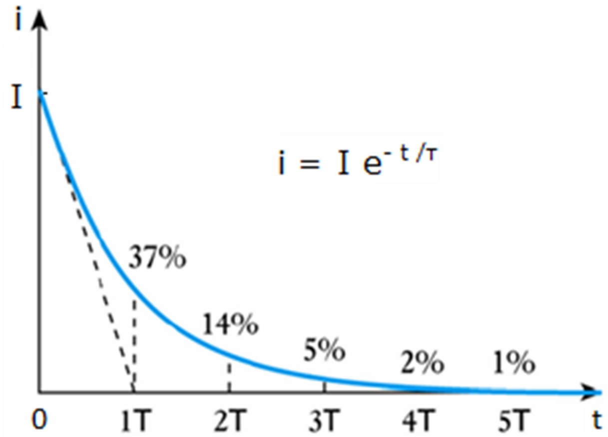
t(s)	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005
i(A)	1,2	0,44	0,16	0,06	0,02	0,008
i/I	1	0,367	0,133	0,05	0,02	0,01
v(V)	-12	-4,41	-1,62	-0,6	-0,22	-0,08





Слика 3.16 Струја $i = f(t)$ и напон $v = f(t)$ на калему после искључења RL кола.

Струја и напон експоненцијално ишчезавају у бесконачности (практично после 4-5 τ). Брзина опадања струје зависи од временске константе. Види се да због присутности индуктивности L струјно коло показује изражену инертност при свакој промени струје. Ту важи такође утицај временске константе кола (слика 3.17).

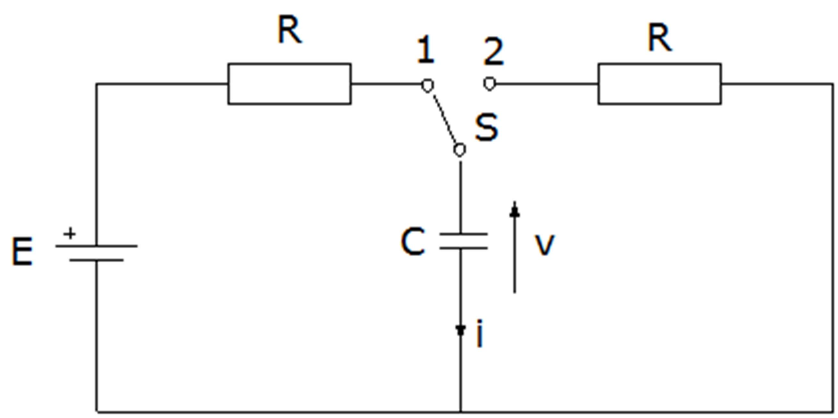


Слика 3.17 Струја $i = f(t)$ после искључења RL кола. Стационарно стање струје се практично постиже већ после времена од 4 до 5 временских константи τ.

3.9.2. RC коло

<u>Пример 1.</u> Укључење RC кола

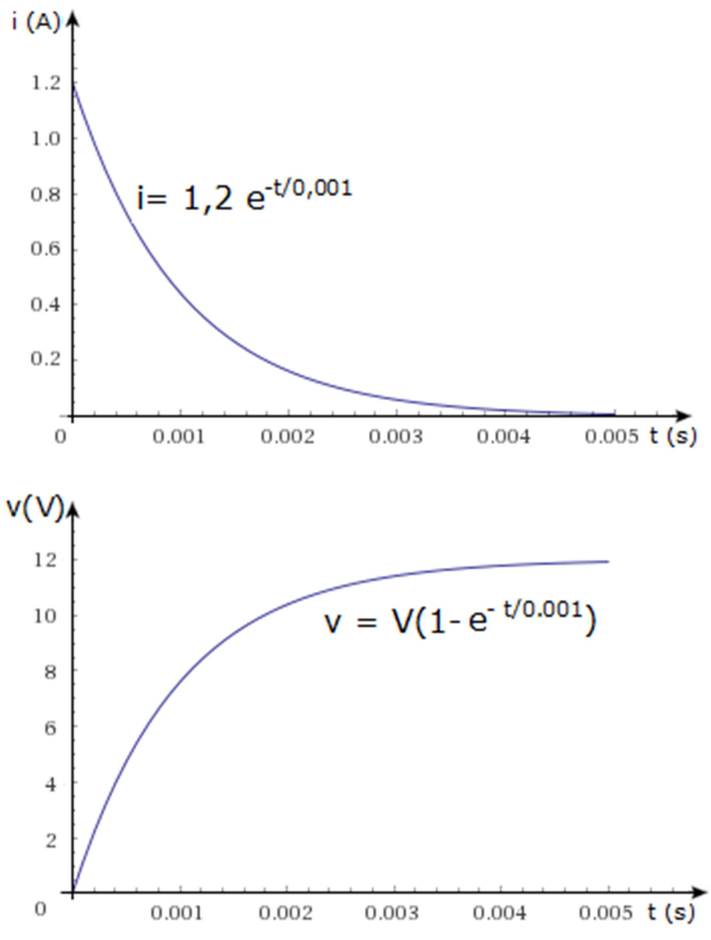
Укључењем кондензатора у струјно коло с отпорником R (прекидач у положају 1, слика 3.18) догађа се прелазна појава пуњења кондензатора, док му напон v поприми вредност напона извора E.



Слика 3.18 RC коло после укључења (пуњење кондензатора), прекидач у положају 1

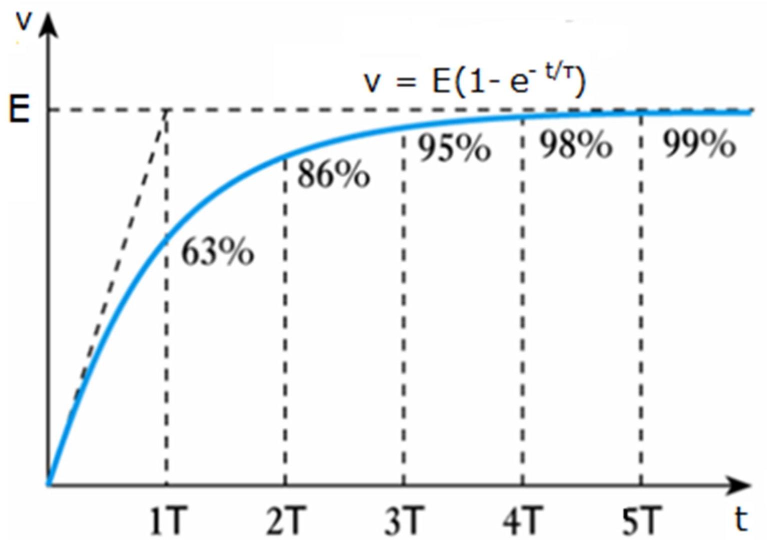
Струја пуњења кондензатора у почетку је велика, а како наелектрисање на плочама расте, тако њен износ опада (супротстављање дотоку наелектрисања истог поларитета). Према слици 3.18 и II Кирхофовом закону важи:

$E - v = i \cdot R$ (3.21),
где су
E-напон извора,
v-тренутна вредност напона на кондензатору
i- струја пуњења кондензатора



Слика 3.19 Струја $i = f(t)$ и напон $v = f(t)$ на кондензатору после укључења RC кола (пуњење кондензатора).

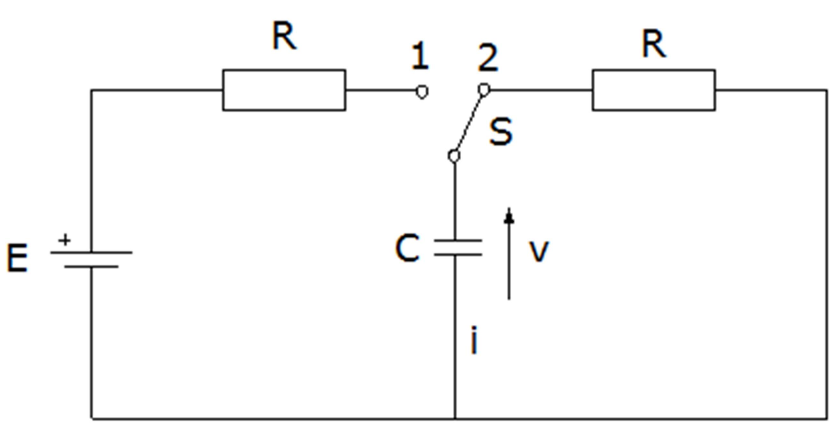
На основу
$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta (CV)}{\Delta t} = C\frac{\Delta V}{\Delta t}$ (3.22),
важи $E - v = C \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot R$ (3.23),



Слика 3.20 Напон $v = f(t)$ на кондензатору после укључења RC кола (пуњење кондензатора). Стационарно стање напона се практично постиже већ после времена од 4 до 5 временских константи τ.

Пример 2. Пражњење кондензатора.

Други случај прелазне појаве у RC колу је прекидање тока стационарне струје I, прекидач у положају 2 на слици 3.21. У струјном колу без извора промене струје и напона су неизбежне и краткотрајне. Струја и напон се смањују са почетних вредности на стационарне вредности $i = 0$ и $v = 0$.



Слика 3.21 RC коло после искључења (пражњење кондензатора), прекидач у положају 2.

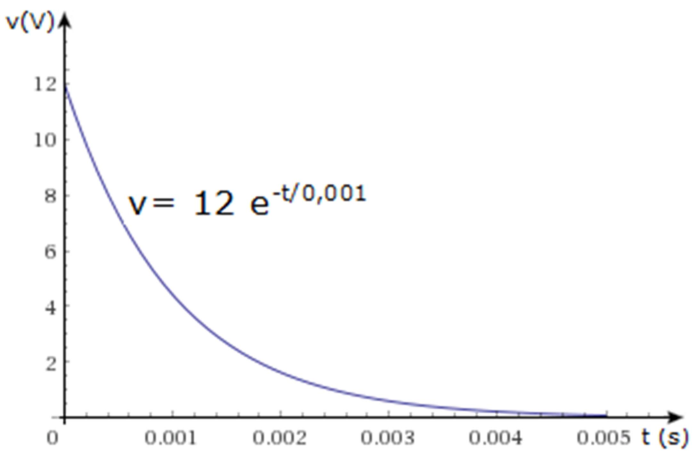
При искључењу RC кола према слици 3.21 се добија

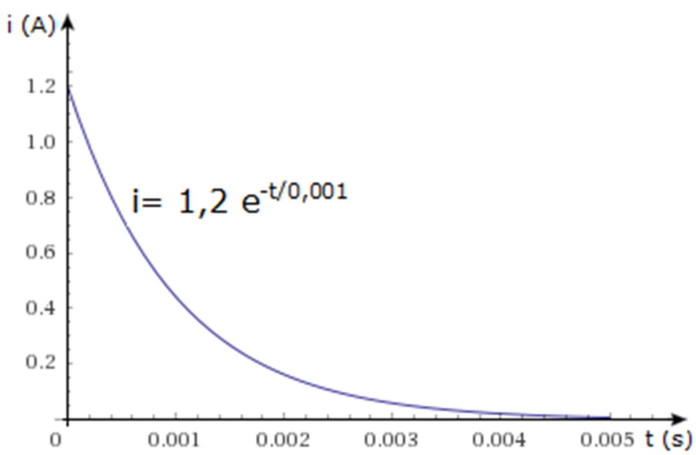
$v = E \cdot e^{-t/\tau}$ (3.26)

$i = I \cdot e^{-t/\tau}$ (3.27)

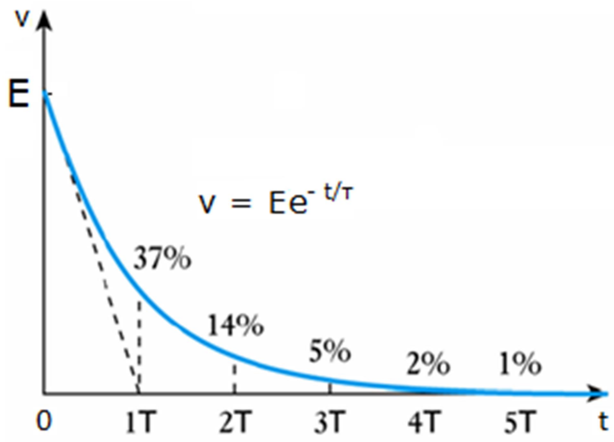
За пример: E=12V, R=10Ω*,* C=100μF, τ=RC=10Ω·0,0001F=0,0001s*,* добију се вредности струје $i = f(t)$ и напона $v = f(t)$ представљене у табели и графицима.

t(s)	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005
i(A)	1,2	0,44	0,16	0,06	0,02	0,008
v/E	1	0,375	0,14	0,05	0,02	0,01
v(V)	12	4,41	1,62	0,6	0,23	0,08





Слика 3.22 Напон $v = f(t)$ и струја $i = f(t)$ и на кондензатору, после искључења RC кола (пражњење кондензатора).



Слика 3.23 Напон *v*= *f(t)* на кондензатору после искључења RC кола (пражњење кондензатора).

Стационарно стање напона се практично постиже већ после времена од 4 до 5 временских константи τ.

4. ЗАКЉУЧАК

У раду су представљене експоненцијалне функције. На приступачан начин (за ученике гимназија и других средњих школа) су приказане и објашњене особине експоненцијалних функција и њихова примена у бројним примерима у реалним ситуацијама, а многе физикалне величине су описане експоненцијалном зависношћу.
Описан је начин како ученици могу самостално израчунати податаке, обрадити их уз помоћ одговарајућег програма и извући из њих занимљиве закључке.
Најважније сазнање у раду је да су експоненцијалне зависности врло присутне око нас, а да ми то и не примећујемо. Приказаним начином решавања одабраних примера у овом раду (раст популације, економија, сложена камата, пораст и пад цена, раст атмосферског притиска, Њутнов закон хлађења, одређивање година живота и времена смрти, време полураспада радиоактивних елемената, прелазне појаве у електротехници), ученицима је омогућено да на једноставан начин разумеју како се многе природне појаве развијају по експоненцијалном закону.
Бројне вредности функције су израчунате на калкулатору, а функције су нацртане у програму „WolframAlpha“.
Због ограниченог броја планираних часова довољно је издвојити свега два часа на којима ће сами ученици, формирани у групе, изложити неке од примена које су наведене у овом раду.

5. ЛИТЕРАТУРА

1. Математика 2, уџбеник за други разред средње школе. Градимир Војводић, Војислав Петровић, Радивоје Деспотовић, Бранимир Шешеља, Завод за издавање уџбеника, Београд, 2002.

2.Математика 2, уџбеник са збирком задатака за други разред гимназије. Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, Сузана Алексић, Klett, Београд, 2016.

3.Збирка задатака из математике 2: за други разред гимназије. Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2007.

4.Бранимир Дакић, Невен Елезовић, Математика 2, збирка детаљно ријешених задатака, из уџбеника за 2.разред гимназија и средњих техничких школа, 2. дио. Елемент,Загреб, 2015.

5.Растко Вуковић, проф, Математика I за први разред гимназије. Скрипта за наставу држану 2010-11. ш.г. у Бањој Луци. Гимназија Бања Лука 2011.

6.http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=2cca80a47a280ed03a6230b10329050b

7.https://sr.wikipedia.org/sr/%D0%91%D0%B0%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%B0%D1%80%D1%81%D0%BA%D0%B0_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0

8.Мр Даница Шантић, асистент, Теорија популационог оптимума, Географски факултет, Београд, 2008.

9.Јелена Самац, Одређивање дозе за пацијенте у нуклеарној медицини, мастер рад, Нови Сад, 2013.

10. http://www.intmath.com/exponential-logarithmic-functions/exponential-log-functions-intro.php

11.http://www.matematika.ba/component/content/article.html?id=94:legenda-o-sahu

12. http://www.algebralab.org/

13.http://www.model.u-szeged.hu/data/etc/edoc/tan/NBudinski/EksponencijalnaFunkcija.pdf Povezivanje primera iz realnog života i matematike

14. http://www.bionet-skola.com/w/Distribucija_populacije

15. http://alas.matf.bg.ac.rs/~mn06070/Broj_e.pdf