Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Bulove jednačine i metodi za njihovo rešavanje

Master rad

Mentor:
Slavko Moconja
Student:
Nevena Đorđević

Beograd,
2017.

Sadržaj

1 Uvod

Četrdesetih godina XX veka Bulova algebra je dala prvu praktičnu primenu razvoju prekidačkih kola. Ovakav pristup tehničkim problemima bio je moguć zahvaljujući činjenici da prekidačka kola uglavnom čine dva stanja u uređajima pa se mogu proučavati pomoću matematičkog koncepta bivalentnih promenljivih. Taj koncept je zapravo dvoelementna Bulova algebra.

Rešenja mnogih problema u raznim naučnim disciplinama mogu se prevesti na da ili ne, odnosno na 1 ili 0. Ova činjenica je podstakla razvoj elektronike i digitalne tehnike, a time i Bulove algebre, posebno Bulove algebre na skupu $\{0, 1\}$. Prirodno je da koristimo bivalentne promenljive kad god smo suočeni sa problemima koji uključuju situacije sa samo dva moguća ishoda.

Centralno mesto u teoriji Bulovih algebri zauzimaju Bulove jednačine (nejednačine), čiji je razvoj započet u drugoj polovini XIX veka u radovima Bula i Šredera. Bulove jednačine su i jezik kojim su danas opisana digitalna kola.

Cilj rada jeste da predstavi sistematičan prikaz logičkih postupaka za rešavanje Bulovih jednačina i nejednačina u nadi da se Bulove metode mogu pokazati korisne pri rešavanju današnjih problema. U radu će biti objašnjeno kako se sistemi Bulovih jednačina i nejednačina svode na rešavanje jedne jednačine. Takođe, biće prikazani metodi za minimizaciju Bulovih izraza koji uprošćuju Bulovu jednačinu, a postupak sukcesivnih eliminacija promenljivih za rešavanje Bulovih jednačina biti detaljno objašnjen. Obrađene su i alternativne jednačine kao specijalni slučaj Bulovih jednačina.

2 Bulova algebra

2.1 Definicija Bulove algebre

Definicija 1. Neprazan skup B na kome su definisane dve binarne operacije $\vee$ (ili) i $\wedge$ (i), jedna unarna operacija $\neg$ i u kome su istaknuta dva elementa 0 i 1 naziva se Bulova algebra ako za sve a, b, $c \in B$ važe sledeće aksiome:
B_1 *Komutativni zakon*: $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$
B_2 *Asocijativni zakon*: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
B_3 *Distributivni zakon*: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
B_4 *Svojstvo identiteta*: $a \vee 0 = a$, $a \wedge 1 = a$
B_5 *Svojstvo negacije*: $a \vee \neg a = 1$, $a \wedge \neg a = 0$.

Bulovu algebru na skupu B sa operacijama $\vee$, $\wedge$, $\neg$ i konstantama 0 i 1 kraće označavamo kao uređenu šestorku $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$. Element 1 obično nazivamo *maksimum* (ili *najveći* element), a element 0 *minimum* (ili *najmanji* element).

2.2 Modeli Bulove algebre

Model 1. Dat je skup $L_2 = \{0, 1\}$. Uvedimo na skupu L_2 *binarne operacije* $\vee$ i $\wedge$ (zovemo ih redom *disjunkcija* i *konjunkcija*) i unarnu operaciju $\neg$ (zovemo je *negacija*) na sledeći način:

$$0 \vee 0 = 0,\ 0 \vee 1 = 1,\ 1 \vee 0 = 1,\ 1 \vee 1 = 1$$

$$0 \wedge 0 = 0,\ 0 \wedge 1 = 0,\ 1 \wedge 0 = 0,\ 1 \wedge 1 = 1$$

$$\neg 0 = 1,\ \neg 1 = 0$$

ili pomoću tabela:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

a	0	1
$\neg a$	1	0

Ovako definisane operacije na skupu L_2 zadovoljavaju aksiome Bulove algebre iz *Definicije 1*, što nije teško proveriti. Dakle, data algebarska struktura na skupu L_2 predstavlja model Bulove algebre. Bulovu algebru na skupu

L_2 zovemo *dvočlana Bulova algebra* i označavamo $(L_2, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$.

Model 2. Dat je skup U. Neka su na partitivnom skupu $P(U)$, $P(U) = \{X | X \subset U\}$ uočene binarne operacije $\cup$ i $\cap$ (unija i presek) i unarna operacija ^{c} (komplement). Operacije $\cup$, $\cap$ i ^{c} zadovoljavaju aksiome Bulove algebre iz *Definicije 1.* Naime, ako su A, B i C elementi skupa $P(U)$, iz teorije skupova poznato je da važi:

B_1: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
B_2: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
B_3: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
B_4: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$
B_5: $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$

Ovde je najmanji element $\emptyset$, a najveći element skup U, pa data algebarska struktura na skupu $P(U)$ predstavlja model Bulove algebre u oznaci $(P(U), \cup, \cap, ^c, \emptyset, U)$.

Model 3. Matricu $A = [a_{ij}]$, $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$, gde je $a_{ij} \in \{0, 1\}$ zovemo Bulova matrica formata $m \times n$.

Neka je M skup svih Bulovih matrica formata $m \times n$. Uvedimo na skupu M dve binarne operacije, u oznaci "$+$"i "$\times$"i jednu unarnu operaciju u oznaci "$'$"na sledeći način:

$A + B \overset{def}{=} [a_{ij} \vee b_{ij}] \quad i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n$
$A \times B \overset{def}{=} [a_{ij} \wedge b_{ij}] \quad i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n$
$A' \overset{def}{=} [\neg a_{ij}] \quad i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n$

Ovde su $\vee$, $\wedge$ i $\neg$ operacije skupa $\{0, 1\}$ iz *Modela 1*, gde je 0 zapravo 0-matrica (svi njeni elementi su nule), a 1 je 1-matrica (svi njeni elementi su jedinice). Na primer, za Bulove matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

imamo:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 0 & 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A' = \begin{bmatrix} \neg 1 & \neg 0 & \neg 1 \\ \neg 0 & \neg 1 & \neg 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uvedene operacije "$+$", "$\times$"i "$'$"na skupu M zadovoljavaju aksiome Bulove algebre iz *Definicije 1.* i algebarska struktura na skupu M predstavlja model Bulove algebre u oznaci $(M, +, \times, ', 0, 1)$.

Model 4. Neka je M neprazan skup. Funkciju f, koja je definisana na skupu M i ima vrednosti u skupu $\{0, 1\}$, tj.

$$f : M \rightarrow \{0, 1\}$$

zovemo *bivalentna* (dvovrednosna) funkcija.

Obeležimo sa L_2^M skup svih ovakvih bivalentnih funkcija na skupu M. Uvedimo na skupu L_2^M binarne operacije "$\vee$", "$\wedge$" i unarnu operaciju "$\neg$" na sledeći način:

$$(f \vee g)(x) \stackrel{def}{=} f(x) \vee g(x)$$
$$(f \wedge g)(x) \stackrel{def}{=} f(x) \wedge g(x)$$
$$\neg f(x) \stackrel{def}{=} \neg(f(x))$$

za svako $x \in M$, gde su operacije "$\vee$", "$\wedge$"i "$\neg$"respektivno disjunkcija, konjunkcija i negacija na skupu $\{0, 1\}$ iz *Modela 1.* Najmanji element skupa L_2^M je bivalentna funkcija 0, gde je za svako $x \in M$, $0(x) = 0$, dok je najveći element bivalentna funkcija 1, gde je za svako $x \in M$, $1(x) = 1$.

Uvedene operacije na skupu L_2^M zadovoljavaju aksiome Bulove algebre iz *Definicije 1.* i algebarska struktura na skupu L_2^M predstavlja model Bulove algebre u oznaci $(L_2^M, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$.

2.3 Važne teoreme Bulove algebre

Identiteti:

(1) $x \vee x = x$

(2) $x \wedge x = x$

(3) $x \vee 1 = 1.$
(4) $x \wedge 0 = 0$
(5) $(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = 1$
(6) $(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) = 0$

Dokaz:

(1) $x = x \vee 0$ (definicija 1, B_4)
$= x \vee (x \wedge \neg x)$ (definicija 1, B_5)
$= (x \vee x) \wedge (x \vee \neg x)$ (definicija 1, B_3)
$= (x \vee x) \wedge 1$ (definicija 1, B_5)
$= x \vee x$ (definicija 1, B_4)

(2) $x = x \wedge 1$ (definicija 1, B_4)
$= x \wedge (x \vee \neg x)$ (definicija 1, B_5)
$= (x \wedge x) \vee (x \wedge \neg x)$ (definicija 1, B_3)
$= (x \wedge x) \vee 0$ (definicija 1, B_5)
$= x \wedge x$ (definicija 1, B_4)

(3) $x \vee 1 = x \vee (x \vee \neg x)$ (definicija 1, B_5)
$= (x \vee x) \vee \neg x$ (definicija 1, B_2)
$= x \vee \neg x$ (identitet (1))
$= 1$ (definicija 1, B_5)

(4) $x \wedge 0 = x \wedge (x \wedge \neg x)$ (definicija 1, B_5)
$= (x \wedge x) \wedge \neg x$ (definicija 1, B_2)
$= x \wedge \neg x$ (identitet (2))
$= 0$ (definicija 1, B_5)

(5) $(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = ((x \vee y) \vee \neg x) \wedge ((x \vee y) \vee \neg y)$
(definicija 1, B_3)
$= (x \vee (\neg x \vee y)) \wedge (x \vee (y \vee \neg y))$ (definicija 1, B_2, B_1)
$= ((x \vee \neg x) \vee y) \wedge (x \vee 1)$ (definicija 1, B_2, B_5)
$= (1 \vee y) \wedge (x \vee 1)$ (definicija 1, B_5)
$= 1 \wedge 1 = 1$ (identitet (3) i identitet (2)).

(6) $(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) = ((\neg x \wedge \neg y) \wedge x) \vee ((\neg x \wedge \neg y) \wedge y)$
(definicija 1, B_3)
$= (\neg y \wedge (\neg x \wedge x)) \vee (\neg x \wedge (\neg y \wedge y))$ (definicija 1, B_1, B_2)

$= (\neg y \wedge 0) \vee (\neg x \wedge 0)$ (definicija 1, B_5)
$= 0 \vee 0 = 0$ (identitet (4) i identitet (1)).

Teorema 1.

$$
\begin{array}{ll}
(i) & x \wedge (x \vee y) = x \\
(ii) & x \vee (x \wedge y) = x
\end{array}
$$

Dokaz:
(i) $x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y)$ (definicija 1, B_4)
$= x \vee (0 \wedge y)$ (definicija 1, B_3)
$= x \vee 0$ (identitet (4))
$= x$ (definicija 1, B_4)
(ii) $x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y)$ (definicija 1, B_4)
$= x \wedge (1 \vee y)$ (definicija 1, B_3)
$= x \wedge 1$ (identitet (2))
$= x$ (definicija 1, B_4).

Teorema 2. Ako je $x \vee y = 1$ i $x \wedge y = 0$, onda je $y = \neg x$.

Dokaz:
$y = y \wedge 1$ (definicija 1, B_4)
$= y \wedge (x \vee \neg x)$ (definicija 1, B_5)
$= (y \wedge x) \vee (y \wedge \neg x)$ (definicija 1, B_3)
$= 0 \vee (\neg x \wedge y)$ (pretpostavka $y \wedge x = 0$)
$= (\neg x \wedge y) \vee 0$ (definicija 1, B_1)
$= (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge x)$ (definicija 1, B_5)
$= \neg x \wedge (y \vee x)$ (definicija 1, B_3)
$= \neg x \wedge 1$ (pretpostavka $y \vee x = 1$)
$= \neg x$ (definicija 1, B_4).

De Morganovi zakoni:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \\
(2) & \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y
\end{array}
$$

Dokaz:
(1) $(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = 1$ (identitet (5))
$(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) = 0$ (identitet (6))

$\neg x \wedge \neg y = \neg(x \vee y)$ (iz prethodne dve jednačine po teoremi 2.)
Slično za deo dokaza pod (2).

Zadatak 1. Dokazati identitet:

$$(A \times B)' \times (A' + B) \times (B' + B) = A'.$$

A i B su matrice modela $(M, +, \times, ', 0, 1)$.
Rešenje:
$(A \times B)' \times (A' + B) \times (B' + B) =$
$(A' + B') \times (A' + B) \times 1 =$
$(A' \times A') + (A' \times B) + (B' \times A') + (B' \times B) =$
$A' + A' \times (B + B') + 0 =$
$A' + A' \times 1 =$
$A' + A' = A'$

Zadatak 2. Dokazati identitet:

$$C \cup (B \cap C)^c = U.$$

B i C su elementi skupa $P(U)$.
Rešenje:
$C \cup (B \cap C)^c =$
$C \cup (B^c \cup C^c) =$
$C \cup C^c \cup B^c =$
$U \cup B^c = U$

2.4 Binarne relacije $\leq$, $\geq$ u Bulovoj algebri

Uvodimo u Bulovu algebru $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ binarnu relaciju $\leq$ (manje ili jednako) na sledeći način:

Definicija 2. Za elemente x, y iz B kažemo da je $x \leq y$ ako i samo ako $x \vee y = y$.

Teorema 3. $x \leq y$ ako i samo ako $x \wedge y = x$.

Dokaz: Dokazaćemo prvo da iz $x \leq y$ proizilazi $x \wedge y = x$.
$x \leq y$ (pretpostavka)

$x \vee y = y$ (definicija 2.)
$x \wedge y = x \wedge y$ (identitet)
$x \wedge (x \vee y) = x \wedge y$ (zamena 2. u 3. jednačinu)
$x = x \wedge y$ (teorema 1. (i))

Dokažimo sada da iz $x \wedge y = x$ proizilazi $x \leq y$.

$x = x \wedge y$ (pretpostavka)
$x \vee y = x \vee y$ (identitet)
$x \vee y = (x \wedge y) \vee y$ (zamena 1. u 2. jednačinu)
$x \vee y = y \vee (x \wedge y)$ (definicija 1, B_1)
$x \vee y = y$ (teorema 1. (ii))
$x \leq y$ (definicija 2.).

Teorema 4. Relacija $\leq$ je relacija poretka u Bulovoj algebri $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, tj. za svaki x, y, z iz B važi:

(1) $x \leq x$,
(2) ako je $x \leq y$ i $y \leq x$ onda je $y = x$,
(3) ako je $x \leq y$ i $y \leq z$ onda je $x \leq z$.
(4) 0 je najmanji, a 1 je najveći element.

Dokaz:

(1) $x \vee x = x$ (identitet)
$x \leq x$ (definicija 2.)
(2) $x \leq y$ i $y \leq x$ (pretpostavka)
$x \vee y = y$ i $y \vee x = x$ (definicija 2.)
$y = x$ (tranzitivnost)
(3) $x \leq y$ i $y \leq z$ (pretpostavka)
$x \vee y = y$ i $y \vee z = z$ (definicija 2.)
$(x \vee y) \vee z = z$ (iz 2. jednačine)
$x \vee (y \vee z) = z$ (definicija 1, B_2)
$x \vee z = z$ (zamena iz pretpostavke)
$x \leq z$ (definicija 2.).
(4) $x = x$ (identitet)
$0 \vee x = x$ (definicija 1, B_4)
$0 \leq x$ (definicija 2.)
Slično se dokazuje da je 1 najveći element.

Definicija 3. Za elemente x, y iz B kažemo da je $x \geq y$ ako i samo ako $x \wedge y = y$.

Dakle, $x \leq y$ ako i samo ako $y \geq x$.

Definicija 2. i definicija 3. su dualne.
Uopšte, neka je T teorema (definicija, identitet) Bulove algebre $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ u kojoj se pojavljuju i simboli $\leq$, $\geq$. Dualna teorema (definicija, identitet) T^* izvodi se tako što se pored međusobne zamene simbola $\vee$ i $\wedge$, 0 i 1 vrši međusobna zamena i simbola $\leq$ i $\geq$.
Neposredno proizilazi da je $(T^*)^* \equiv T$.

2.5 Simetrična razlika u Bulovoj algebri

U Bulovoj algebri $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ koja je definisana u *Definiciji 1*, pored osnovnih operacija: konjunkcija, disjunkcija i negacija pogodno je proučiti i operaciju:

$$(1) \qquad x \veebar y = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y).$$

Definicija 4. Operaciju $\veebar$ definisana u (1) nazivamo *simetrična razlika* ili *suma po modulu* 2.
Iz (1) sledi da je:

$$0 \veebar 0 = 0, \qquad 0 \veebar 1 = 1 \veebar 0 = 1, \qquad 1 \veebar 1 = 0.$$

Važe sledeća svojstva:
(i) $\quad x \veebar y = y \veebar x$,
(ii) $\quad (x \veebar y) \veebar z = x \veebar (y \veebar z)$,
(iii) $\quad x \veebar 0 = x$,
(iv) $\quad x \veebar 1 = \neg x$,
(v) $\quad x \veebar x = 0$,
(vi) $\quad x \wedge (y \veebar z) = (x \wedge y) \veebar (x \wedge z)$

Dokaz:
(i) $\quad x \veebar y = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$ (definicija)
$= (y \wedge \neg x) \vee (\neg y \wedge x)$ (komutativnost za $\vee$ i $\wedge$)
$= y \veebar x$ (definicija)
(ii) $\quad (x \veebar y) \veebar z = ((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \veebar z$ (definicija)
$= \Big[((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \wedge \neg z\Big] \vee \Big[\neg((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \wedge z\Big]$ (definicija)
$= \Big[((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \wedge \neg z\Big] \vee \Big[((\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)) \wedge z\Big]$ (zakoni de

Morgana)
$= \Big[(x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z)\Big] \vee \Big[((\neg x \wedge \neg y) \vee (y \wedge x)) \wedge z\Big]$ (distributivnost)
$= (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$ (distributivnost)
$= \Big[x \wedge ((\neg y \wedge \neg z) \vee (y \wedge z))\Big] \vee \Big[\neg x \wedge ((y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z))\Big]$ (asocijativnost i distributivnost)
$= \Big[x \wedge ((\neg y \vee z) \wedge (y \vee \neg z))\Big] \vee \Big[\neg x \wedge ((y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z))\Big]$ (distributivnost)
$= \Big[x \wedge \neg((y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z))\Big] \vee \Big[\neg x \wedge ((y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z))\Big]$ (zakoni de Morgana)
$= x \veebar ((\neg y \wedge z) \vee (y \wedge \neg z))$ (definicija)
$= x \veebar (y \veebar z)$ (definicija)
(iii) $x \veebar 0 = (x \wedge \neg 0) \vee (\neg x \wedge 0)$ (definicija)
$= x \wedge 1$ (definicija 1, glava II)
$= x$ (definicija 1, glava II)
(iv) $x \veebar 1 = (x \wedge \neg 1) \vee (\neg x \wedge 1)$ (definicija)
$= \neg x \wedge 1$ (definicija 1, glava II)
$= \neg x$ (definicija 1, glava II)
(v) $x \veebar x = (x \wedge \neg x) \vee (\neg x \wedge x)$ (definicija 1, glava II)
$= 0 \vee 0 = 0$
(vi) $x \wedge (y \veebar z) = x \wedge ((y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z))$ (definicija)
$= (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z)$ (distributivnost)
$= \Big[(x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge \neg x)\Big] \vee \Big[(x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge z \wedge \neg x)\Big]$ (glava II, definicija 1, B_4)
$= ((x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg z)) \vee ((\neg x \vee \neg y) \wedge (x \wedge z))$ (distributivnost, komutativnost)
$= ((x \wedge y) \wedge \neg(x \wedge z)) \vee (\neg(x \wedge y) \wedge (x \wedge z))$ (zakoni de Morgana)
$= (x \wedge y) \veebar (x \wedge z)$ (definicija)

3 Bulova algebra skupa $\{0, 1\}$

3.1 Bulov izraz

Uvedimo na skupu L_2 relaciju

$$\begin{aligned} x^\alpha &= 0, \quad \text{ako je } x \neq \alpha \\ x^\alpha &= 1, \quad \text{ako je } x = \alpha \end{aligned}$$

$\alpha, x \in L_2$.

Dakle, imamo da je:
$0^0 = 1, \quad 0^1 = 0, \quad 1^0 = 0, \quad 1^1 = 1.$

Na osnovu uvedene relacije važi:

$$\neg x = x^0, \qquad x = x^1$$
$$\neg(x^\alpha) = x^{\neg\alpha}.$$

Takođe važi:

$x^\alpha \wedge x^\alpha = x^\alpha, \quad \alpha \in L_2$
$x^\alpha \wedge x^\beta = 0, \quad \alpha, \beta \in L_2, \alpha \neq \beta$
$x^\alpha \vee x^\alpha = x^\alpha, \quad \alpha \in L_2$
$x^\alpha \vee x^\beta = 1, \quad \alpha, \beta \in L_2, \alpha \neq \beta.$

Definicija 1.
1. Bulove konstante 0 i 1 i Bulove promenljive x, y, z,... su Bulovi izrazi.
2. Ako su A i B Bulovi izrazi tada su i $(A \vee B), (A \wedge B)$, $\neg A$ Bulovi izrazi.
3. Bulovi izrazi su samo oni izrazi koji se dobijaju konačnom primenom 1. i 2.

3.2 Forme Bulovih izraza

Definicija 2.
(i) Elementarne konjunkcije su konjunkcije promenljivih i njihovih negacija.
(ii) Elementarne disjunkcije su disjunkcije promenljivih i njihovih negacija.

Definicija 3.
(i) Elementarna konjunkcija C u odnosu na promenljive x_1, x_2,...,x_n zove se kanonska elementarna konjunkcija ako svaka njena promenljiva x_k (ili njena negacija $\neg x_k,\ \ k=1,...,n$) uzeta jednom učestvuje u izgradnji konjunkcije C.
(ii) Elementarna disjunkcija D u odnosu na promenljive x_1, x_2,...,x_n zove se kanonska elementarna disjunkcija ako svaka promenljiva x_k (ili njena negacija $\neg x_k,\quad k=1,2,...,n$) uzeta samo jednom učestvuje u izgradnji disjunkcije D.

Definicija 4.
(i) Bulov izraz oblika $C_1 \vee C_2 \vee ... \vee C_n$, gde su $C_1, C_2, ..., C_n$ elementarne konjunkcije, zove se disjunktivna forma (kraće DF).
(ii) Bulov izraz oblika $D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_n$, gde su $D_1, D_2, ..., D_n$ elementarne disjunkcije, zove se konjunktivna forma (kraće KF).

Definicija 5.
(i) Disjunktivna forma

$$\bigvee_{i=1}^{m} C_i$$

zove kanonska disjunktivna normalna forma (kraće $KDNF$) u odnosu na promenljive x_1, x_2,..., x_n, ako su C_1,C_2,...,C_m kanonske elementarne konjunkcije u odnosu ne promenljive x_1, x_2,...,x_n.
(ii) Konjunktivna forma

$$\bigwedge_{i=1}^{m} D_i$$

zove se kanonska konjunktivna normalna forma (kraće $KKNF$) u odnosu na promenljive x_1, x_2,..., x_n, ako su D_1,D_2,...,D_m kanonske elementarne disjunkcije u odnosu ne promenljive x_1, x_2,...,x_n.

Teorema 1. Svaki Bulov izraz koji sadrži neke od promenljivih x_1, x_2,..., x_n može se transformisati u $KDNF$ (odnosno $KKNF$) u odnosu na promenljive x_1, x_2,..., x_n.

Dokaz: Neka je E Bulov izraz. Koristeći svojsva Bulove algebre, dati izraz E možemo transformisati u DF (odnosno KF). Na primer, Bulov izraz $(x \wedge (y \vee \neg z)) \vee (x \wedge z)$ transformišemo u DF primenom distributivnosti i

dobijamo $(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z) \vee (x \wedge z)$. Ako je Bulov izraz baš $KDNF$ (odnosno $KKNF$) dokaz je završen. Ako izraz E nije $KDNF$ (odnosno $KKNF$) onda postoji bar jedna elementarna konjunkcija C (odnosno elementarna disjunkcija D) koja nije kanonska elementarna konjunkcija (odnosno kanonksa elementarna disjunkcija).
Ako konjunkcija C' (odnosno disjunkcija D') ne sadrže promenljivu x ili $\neg x$ možemo pisati

$$C' = C' \wedge (x \vee \neg x) = (C' \wedge x) \vee (C' \wedge \neg x),$$

ili

$$D' = D' \vee (x \wedge \neg x) = (D' \vee x) \wedge (D' \vee \neg x).$$

Prema tome, svaka konjunkcija (odnosno disjunkcija) može se transformisati u $KDNF$ (odnosno $KKNF$).

Teorema 2. Disjunkcija svih kanonskih konjunkcija oblika $x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n}$, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in L_2^n$ jednaka je 1, tj.

$$\bigvee_{\alpha \in L_2^n} x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n} = 1.$$

Dokaz: Neka je $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in L_2^n$ i

$$E(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \bigvee \beta_1^{\alpha_1} \wedge \beta_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge \beta_n^{\alpha_n}.$$

Konjunkcije

$$\beta_1^{\alpha_1} \wedge \beta_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge \beta_n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in L_2^n$$

imaju vrednosti 0 ili 1, tj.

$$\begin{aligned} \beta_1^{\alpha_1} \wedge \beta_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge \beta_n^{\alpha_n} = 1, &\quad \text{ako je } (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \\ \beta_1^{\alpha_1} \wedge \beta_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge \beta_n^{\alpha_n} = 0, &\quad \text{ako je } (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \neq (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n). \end{aligned}$$

Prema tome, postoji samo jedna konjunkcija $\beta_1^{\alpha_1} \wedge \beta_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge \beta_n^{\alpha_n}$ koja je jednika 1; na osnovu identiteta $x \vee 1 = 1$ važi:

$$\bigvee_{\alpha \in L_2^n} x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n} = 1.$$

4 Bulove jednačine

4.1 O Bulovim jednačinama

Definicija 1. Ako su $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $B(x_1, x_2, ..., x_n)$ Bulovi izrazi, gde bar jedan od njih sadrži promenljive $x_1, x_2, ..., x_n$ skupa L_2, tada se jednakost:

$$(1) \qquad A(x_1, x_2, ..., x_n) = B(x_1, x_2, ..., x_n)$$

zove *Bulova jednačina*.

Primer 1. Ako su x, y i z iz skupa L_2 tada su jednakosti:
$x \vee 1 = 1, \quad (x \vee y) \wedge z = 0 \quad (x \vee z) \wedge x \wedge y = (x \vee y) \wedge z$
Bulove jednačine. Medjutim, jednakosti:
$1 \vee 0 = 1, \quad (1 \vee 0) \wedge 1 = 1, \quad (1 \vee 1) \wedge 0 = 0$
nisu Bulove jednačine.

Vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ skupa L_2^n zove se partikularno rešenje Bulove jednačine (1) ako je:

$$A(\alpha) = B(\alpha).$$

Skup svih partikularnih rešenje Bulove jednačine (1) zovemo skup rešenja jednačine. Ako sa R označimo skup rešenja Bulove jednačine (1), onda je:

$$R = \{\alpha \mid A(\alpha) = B(\alpha),\ \alpha \in L_2^n\}$$

to jest, $R \subset L_2^n$.

Primer 2. Skup rešenja Bulove jednačine $x \vee y = 1$ je:
$R = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, gde je $(x, y) \in R$.

Definicija 2. Ako su $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $B(x_1, x_2, ..., x_n)$ Bulovi izrazi, gde bar jedan od njih sadrži promenljive $x_1, x_2, ..., x_n$ skupa L_2, tada se relacija

$$(2) \qquad A(x_1, x_2, ..., x_n) \leq B(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$\Big(A(x_1, x_2, ..., x_n) \geq B(x_1, x_2, ..., x_n)\Big)$$

zove *Bulova nejednačina*.

Skup R je skup rešenja Bulove nejednačine (2) ako je:

$$R = \{\alpha \mid A(\alpha) \leq B(\alpha),\ \alpha \in L_2^n\} \text{ ili}$$
$$R = \{\alpha \mid A(\alpha) \geq B(\alpha),\ \alpha \in L_2^n\}.$$

Primer 3. Skup rešenja Bulove nejednačine $x \wedge y \leq 1$ je $R = \{(0,0),(0,1),(1,0)(1,1)\}$, gde je $(x,y) \in R$, jer je $0 \leq 1,\ 1 \leq 1$.

Definicija 3. Dve Bulove jednačine (nejednačine) J_1 i J_2 su ekvivalentne ako i samo ako se jednačina (nejednačina) J_1 može transformisati na jednačinu (nejednačinu) J_2 konačnom primenom Bulovih aksioma (teorema) i obratno.

Primer 4. Jednačine

(J_1) $\qquad \neg(x \wedge y) \wedge x = y \wedge \neg(y \vee z)$
(J_2) $\qquad \neg y \wedge x = 0$

jesu ekvivalentne.

Zaista, iz jednačine (J_1) možemo izvesti jednačinu (J_2):

(J_1)	$\neg(x \wedge y) \wedge x = y \wedge \neg(y \vee z)$	(jednačina (J_1))
(K_1)	$(\neg x \vee \neg y) \wedge x = y \wedge (\neg y \wedge \neg z)$	(zakoni de Morgana)
(K_2)	$(\neg x \wedge x) \vee (\neg y \wedge x) = (y \wedge \neg y) \wedge \neg z$	(distributivnost i asocijativnost)
(K_3)	$0 \vee (\neg y \wedge x) = 0 \wedge \neg z$	(svojstvo negacije)
(J_2)	$\neg y \wedge x = 0$	(definicija 1, glava II).

Jednačine(J$_1$), (K_1), (K_2), (K_3), (J_2) su ekvivalentne.

Teorema 1. Bulova nejednačina $A \leq B$ je ekvivalentna Bulovim jednačinama

$$(i) \quad A \wedge \neg B = 0 \qquad (ii) \quad \neg A \vee B = 1$$

Dokaz:

(i)	(1) $A \leq B$ ako i samo ako $B \wedge A = A$	(glava II, teorema 3.)
(2)	$B \wedge (A \wedge \neg B) = A \wedge \neg B$	(zamena A sa $(A \wedge \neg B)$ u (1))
(3)	$A \wedge (B \wedge \neg B) = A \wedge \neg B$	(asocijativnost i komutativnost)
(4)	$A \wedge 0 = A \wedge \neg B$	(glava II, definicija 1.)
(5)	$0 = A \wedge \neg B$	(identitet (4))

(ii) (1) $A \leq B$ ako i samo ako $A \vee B = B$ (glava II, definicija 2.)

(2) $\quad A \vee (\neg A \vee B) = \neg A \vee B$ (zamena B sa $(\neg A \vee B)$ u (1))
(3) $\quad (A \vee \neg A) \vee B = \neg A \vee B$ (asocijativnost)
(4) $\quad 1 \vee B = \neg A \vee B$ (glava II, definicija 1.)
(5) $\quad 1 = \neg A \vee B$ (identitet (3)).

Lema 1.

$$x = 0 \text{ i } y = 0 \text{ ako i samo ako } x \vee y = 0,$$
$$x = 1 \text{ i } y = 1 \text{ ako i samo ako } x \wedge y = 1.$$

Dokaz leme sledi iz definicije 1, glava II.

Teorema 2. Bulova jednačina $A = B$ je ekvivalentna Bulovim jednačinama:
(i) $\quad (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) = 0$ $\qquad (ii)$ $\quad (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) = 1.$

Dokaz:
(i) (1) $A = B$ ako i samo ako $A \leq B$ i $B \leq A$ (glava II, teorema 4.)
(2) $\quad A \leq B$ i $B \leq A$ ako i samo ako $\neg A \wedge B = 0$ i $\neg B \wedge A = 0$ (glava IV, teorema 1.)
(3) $\quad \neg A \wedge B = 0$ i $\neg B \wedge A = 0$ ako i samo ako $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) = 0$ (glava IV, lema 1.)

(ii) (1) $A = B$ ako i samo ako $A \leq B$ i $B \leq A$ (glava II, teorema 4.)
(2) $\quad A \leq B$ i $B \leq A$ ako i samo ako $\neg A \vee B = 1$ i $\neg B \vee A = 1$ (glava IV, teorema 1.)
(3) $\quad \neg A \vee B = 1$ i $\neg B \vee A = 1$ ako i samo ako $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) = 1$ (glava IV, lema 1.)

Zadatak 1. Dokazati da su jednačine:

$$(J_1) \quad y \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) \text{ i}$$
$$(J_2) \quad (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) = 0$$

ekvivalentne.
Rešenje: Iz jednačine (J_1) možemo izvesti jednačinu (J_2):
$(J_1) \quad y \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z)$
$\Big[\neg(y \vee (x \wedge z)) \wedge (x \vee (y \wedge z))\Big] \vee \Big[(y \vee (x \wedge z)) \wedge \neg(x \vee (y \wedge z))\Big] = 0$
$\Big[((\neg y \wedge \neg x) \vee (\neg y \wedge \neg z)) \wedge ((x \vee y) \wedge (x \vee z))\Big] \vee \Big[((y \vee x) \wedge (y \vee z)) \wedge ((\neg x \wedge$

$\neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z))\Big] = 0$
$(J_2) \quad (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) = 0.$

Teorema 3.
(i) Sistem Bulovih jednačina $A_i = 0$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ je ekvivalentan sa Bulovom jednačinom $\bigvee_{i=1}^{n} A_i = 0$

(ii) Sistem Bulovih jednačina $A_i = 1$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ je ekvivalentan sa Bulovom jednačinom $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = 1$.

Dokaz teoreme 3. proizilazi iz generalizacije iskaza:
$x = 0$ i $y = 0$ ako i samo ako $x \vee y = 0$ odnosno,
$x = 1$ i $y = 1$ ako i samo ako $x \wedge y = 1$.

Primer 5. Sistem Bulovih jednačina:

$$\begin{gathered}(x \wedge y) \vee z = 0\\ (\neg x \vee \neg z) \wedge y = 0\\ x \vee \neg y = 0\end{gathered}$$

po teoremi 3.(i) je ekvivalentan Bulovoj jednačini
$\Big((x \wedge y) \vee z\Big) \vee \Big((\neg x \vee \neg z) \wedge y\Big) \vee (x \vee \neg y) = 0.$

Sistem Bulovih jednačina:

$$\begin{gathered}(x \wedge y) \vee z = 1\\ (\neg x \vee \neg z) \wedge y = 1\\ x \vee \neg y = 1\end{gathered}$$

po teoremi 3.(ii) je ekvivalentan Bulovoj jednačini
$\Big((x \wedge y) \vee z\Big) \wedge \Big((\neg x \vee \neg z) \wedge y\Big) \wedge (x \vee \neg y) = 1.$

Prirodno se nameću sledeće posledice ovih teorema:

Posledica 1. Sistem Bulovih jednačina

$$A_i = B_i, \;\; i = 1, 2, ..., n$$

je ekvivalentan Bulovim jednačinama
(*i*) $\bigvee_{i=1}^{n}((\neg A_i \wedge B_i) \vee (A_i \wedge \neg B_i)) = 0$ (*ii*) $\bigwedge_{i=1}^{n}((\neg A_i \vee B_i) \wedge (A_i \vee \neg B_i)) = 1$
(posledica teoreme 2. i teoreme 3.)

Posledica 2. Sistem Bulovih nejednačina

$$A_i \leq B_i, \ \ i = 1, 2, ..., n$$

je ekvivalentan sa Bulovim jednačinama
(*i*) $\bigvee_{i=1}^{n}(A_i \wedge \neg B_i) = 0$ (*ii*) $\bigwedge_{i=1}^{n}(\neg A_i \vee B_i) = 1$
(posledica teoreme 1. i teoreme 3.)

Premo ovome, sistem Bulovih jednačina i nejednačina uvek se može svesti na jednu Bulovu jednačinu.

Primer 6. Sistem Bulovih jednačina i nejednačina

$$\begin{gathered}(x \wedge y) \vee z = x \\ x \vee (y \wedge z) = y \\ x \vee (z \wedge y) = y \vee (x \wedge z) \\ y \vee (x \wedge z) \leq x\end{gathered}$$

na osnovu teoreme 1. (*i*) i teoreme 2. (*i*) je ekvivalentan sistemu

$$\begin{gathered}\Big((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg z \wedge x\Big) \vee \Big(((x \wedge y) \vee z) \wedge \neg x\Big) = 0 \\ \Big(\neg x \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge y\Big) \vee \Big((x \vee (y \wedge z)) \wedge \neg y\Big) = 0 \\ \Big(\neg x \wedge (\neg z \vee \neg y) \wedge (y \vee (x \wedge z))\Big) \vee \Big((x \vee (z \wedge y)) \wedge \neg y \wedge (\neg x \vee z)\Big) = 0 \\ (y \vee (x \wedge z)) \wedge \neg x = 0\end{gathered}$$

odnosno sistemu

$$\begin{gathered}(x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge z) = 0 \\ (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y) = 0 \\ (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) = 0 \\ y \wedge \neg x = 0.\end{gathered}$$

Dobijeni sistem jednačina je na osnovu teoreme 3. ekvivalentan Bulovoj jednačini

$$\Big((x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge z)\Big) \vee \Big((\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y)\Big) \vee \Big((\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z)\Big) \vee (y \wedge \neg x) = 0$$

odnosno Bulovoj jednačini

$$(x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z) = 0.$$

Zadatak 2. Dat je sistem jednačina i nejednačina:

$$\begin{gathered} y \vee (x \wedge z) = b \vee c \\ z \vee (x \wedge y) = c \vee b \\ 1 \leq x \vee (y \wedge z) \\ x \leq 1 \\ y \leq b \vee c, \end{gathered}$$

gde su b i c parametri iz skupa L_2.
Dokazati da je dati sistem jednačina i nejednačina ekvivalentan sa jednačinom $(\neg b \wedge \neg c \wedge y) \vee (\neg c \wedge \neg b \wedge z) \vee ((b \vee c) \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (c \wedge \neg x \wedge \neg z) \vee (b \wedge \neg x \wedge \neg y) = 0.$

Rešenje: Sistem Bulovih jednačina i nejednačina ekvivalentan je sistemu:

$$\begin{gathered} \Big((\neg y \wedge (\neg x \vee \neg z)) \wedge (b \vee c)\Big) \vee \Big((y \vee (x \wedge z)) \wedge (\neg b \wedge \neg c)\Big) = 0 \\ \Big((\neg z \wedge (\neg x \vee \neg y)) \wedge (c \vee b)\Big) \vee \Big((z \vee (x \wedge y)) \wedge (\neg c \wedge \neg b)\Big) = 0 \\ 1 \wedge \neg x \wedge (\neg y \vee \neg z) = 0 \\ x \wedge \neg 1 = 0 \\ y \wedge \neg b \wedge \neg c = 0 \end{gathered}$$

odnosno sistemu

$$\begin{gathered} \Big((\neg y \wedge \neg x \wedge (b \vee c)) \vee (\neg y \wedge \neg z \wedge (b \vee c))\Big) \vee \Big((y \vee x) \wedge (y \vee z) \wedge (\neg b \wedge \neg c)\Big) = 0 \\ \Big((\neg z \wedge \neg x \wedge (c \vee b)) \vee (\neg z \wedge \neg y \wedge (c \vee b))\Big) \vee \Big((z \vee x) \wedge (z \vee y) \wedge (\neg c \wedge \neg b)\Big) = 0 \\ (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z) = 0 \\ y \wedge \neg b \wedge \neg c = 0. \end{gathered}$$

Dobijeni sistem jednačina je ekvivalentan Bulovoj jednačini
$(\neg b \wedge \neg c \wedge y) \vee (\neg c \wedge \neg b \wedge z) \vee ((b \vee c) \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (c \wedge \neg x \wedge \neg z) \vee (b \wedge \neg x \wedge \neg y) = 0.$

Dakle, sistem Bulovih jednačina i nejednačina po x_1,x_2,...,x_n je ekvivalentan Bulovoj jednačini

$$(3) \qquad A(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$

gde je $(x_1,x_2,...,x_n)$ iz skupa L_2^n. Kako se na osnovu teoreme o KDNF, svaki Bulov izraz $A(x_1,x_2,...,x_n)$ može transformisati u KDNF $A'(x_1,x_2,...,x_n)$ to sledi da je jednačina (3) ekvivalentna jednačini:

$$(4) \qquad A'(x_1,x_2,...,x_n) = \bigvee \mathrm{a}_{i_1,...,i_n} \wedge x_1^{\alpha_{i_1}} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_{i_n}} = 0$$

gde je $(\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_n}) \in M$,

$$M = \{(\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_n}) | \mathrm{a}_{i_1,...,i_n} = 1\} \subset L_2^n.$$

Teorema 4. Skup rešenja Bulovih jednačina (3) je $L_2^n \backslash M$, gde je M skup iz (4).

Dokaz:
Neka je $(e_1, e_2, ..., e_n)$ partikularno rešenje jednačine (3) i neka $(e_1, e_2, ..., e_n) \in M$. Kako su jednačine (3) i (4) ekvivalentne to je $A'(e_1, e_2, ..., e_n) = 0$, odnosno

$$(5) \qquad \bigvee \mathrm{a}_{i_1,...,i_n} \wedge e_1^{\alpha_{i_1}} \wedge ... \wedge e_n^{\alpha_{i_n}} = 0.$$

Kako je $(e_1, e_2, ..., e_n) \in M$ to postoji jedna jedina konjunkcija u (5) (teorema 2, glava III), tako da je

$$e_1^{\alpha_{i_1}} \wedge ... \wedge e_n^{\alpha_{i_n}} = 1$$

Ostale konjunkcije u (5) su jednake nuli. Dakle $A'(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$, što je u suprotnosti sa činjenicom da su jednačine (3) i (4) ekvivalentne. Prema ovome, partikularno rešenje $(e_1, e_2, ..., e_n) \notin M$, odakle sledi $(e_1, e_2, ..., e_n) \in L_2^n \backslash M$.
Pretpostavimo da $(e_1, e_2, ..., e_n) \notin M$. Za sve $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} ..., \alpha_{i_n}) \in M$ imamo da je $e_1^{\alpha_{i_1}} \wedge e_2^{\alpha_{i_2}} \wedge ... \wedge e_n^{\alpha_{i_n}} = 0$, jer za neko k imamo $e_k \neq \alpha_{i_k}$, pa je $e_k^{\alpha_{i_k}} = 0$. Dakle, cela disjunkcija u (4) jednaka je 0, tj. $A'(e_1, e_2, ..., e_n) = 0$. Kako su (3) i (4) ekvivalentne, $A(e_1, e_2, ..., e_n) = 0$, odnosno rešenje $(e_1, e_2, ..., e_n)$ je rešenje jednačine (3).

Primer 7. Nađimo skup rešenja Bulove jednačine

$$\Big((x \vee y) \wedge z\Big) \vee \Big(x \wedge (y \vee z)\Big) \vee x = 0.$$

Datu Bulovu jednačinu možemo, pomoću teoreme o KDNF, transformisati u ekvivalentnu jednačinu

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) = 0,$$

odnosno,

$$(x^1 \wedge y^1 \wedge z^1) \vee (x^1 \wedge y^0 \wedge z^1) \vee (x^1 \wedge y^1 \wedge z^0) \vee (x^0 \wedge y^1 \wedge z^1) \vee (x^1 \wedge y^0 \wedge z^0) = 0$$

gde je

$$M = \{(1,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (0,1,1), (1,0,0)\}.$$

Dakle, skup rešenja date jednačine je

$$R = L_2^3 \backslash M = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0)\}.$$

Zadatak 3. Odrediti skup rešenja Bulove jednačine:

$$(\neg x \wedge \neg y) \wedge (x \wedge \neg z) = 0.$$

Rešenje:

$$\begin{gathered}\Big((\neg x \wedge \neg y) \wedge (z \vee \neg z)\Big) \vee \Big((x \wedge \neg z) \wedge (y \vee \neg y)\Big) = 0 \\ (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg z \wedge y) \vee (x \wedge \neg z \wedge \neg y) = 0 \\ (x^0 \wedge y^0 \wedge z^1) \vee (x^0 \wedge y^0 \wedge z^0) \vee (x^1 \wedge y^1 \wedge z^0) \vee (x^1 \wedge y^0 \wedge z^0) = 0\end{gathered}$$

Dakle, skup rešenja Bulove jednačine je

$$\begin{gathered}R = L_2^3 \backslash \{(0,0,1), (0,0,0), (1,1,0), (1,0,0)\}, \text{ tj.} \\ R = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,1,1), (0,1,0)\}.\end{gathered}$$

Lema 2. Svaka Bulova jednačina

$$(6) \quad A(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

je ekvivalentna Bulovim jednačinama

$$\begin{gathered}(7) \quad \Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge x_i\Big) \vee \\ \Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge \neg x_i\Big) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.\end{gathered}$$

Dokaz:

$$A(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Ako je $x_i = 0$, imamo da je

$$\begin{gathered}
A(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) = 0, \text{ tj.} \\
\Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge 0\Big) \vee \\
\Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge 1\Big) = 0, \text{ pa je} \\
\Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge x_i\Big) \vee \\
\Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge \neg x_i\Big) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.
\end{gathered}$$

Ako je $x_i = 1$, imamo da je

$$\begin{gathered}
A(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) = 0, \text{ tj.} \\
\Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge 1\Big) \vee \\
\Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge 0\Big) = 0, \text{ pa je} \\
\Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge x_i\Big) \vee \\
\Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge \neg x_i\Big) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.
\end{gathered}$$

Ovim je jedan smer ekvivalencije završen.
Ako pođemo od jednačine

$$\begin{gathered}
(7) \qquad \Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge x_i\Big) \vee \\
\Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge \neg x_i\Big) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n
\end{gathered}$$

i uzmemo da je $x_i = 0$, imamo

$$\begin{gathered}
\Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge 0\Big) \vee \\
\Big(A(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge 1\Big) = 0, \text{ tj.} \\
A(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) = 0, \text{ pa je} \\
A(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.
\end{gathered}$$

Ako je $x_i = 1$, imamo da je

$$\Big(A(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)\wedge 1\Big)\vee$$
$$\Big(A(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)\wedge 0\Big)=0, \text{ tj.}$$
$$A(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)=0, \text{ pa je}$$
$$A(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)=0, \quad i=1,2,...,n.$$

Ovim je i drugi smer ekvivalencije završen, pa time i dokaz Leme 2.

Teorema 5. Jednačina (6) je moguća (ima rešenje) ako i samo ako $A(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)\wedge A(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)=0$, za $i\in\{1,2,...,n\}$

Dokaz: Neka je $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ rešenje jednačine (6). Na osnovu leme 2. $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ je rešenje i sistema (7), to jest

$$(8)\qquad \Big(A(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\wedge\alpha_i\Big)\vee$$
$$\Big(A(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\wedge\neg\alpha_i\Big)=0,\quad i=1,2,...,n.$$

Po teoremi 3. sistem (8) je ekvivalentan sa sistemom

$$(9)\quad A(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\wedge\alpha_i=0,\quad i=1,2,...,n$$

$$A(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\wedge\neg\alpha_i=0,\quad i=1,2,...,n,$$

a po teoremi 1. (i) sistem (9) je ekvivalentan sa sistemom nejednačina

$$A(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\le\neg\alpha_i\le\neg A(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n),$$

to jest sistem (9) je ekvivalentan sa sistemom nejednačina

$$(10)\quad A(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\le\neg A(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n),$$
$$i=1,2,...,n$$

jer je relacija $\le$ relacija poretka (teorema 4, glava II), a drugi smer implikacije važi na osnovu teoreme 1. (i).

Na osnovu teoreme 2. sistem nejednačina (10) je ekvivalentan sa sistemom jednačina

$$A(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\wedge A(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)=0,$$
$$i=1,2,...,n.$$

Ovim je teorema 5. dokazana.

Primer 8. Bulova jednačina

$$(\neg b \wedge \neg c \wedge x) \vee \Big((b \vee c) \wedge \neg x\Big) = 0,$$

gde su b i c konstante iz skupa L_2 je moguća, jer je, po teoremi 5,

$$\neg b \wedge \neg c \wedge (b \vee c) = 0$$

dok Bulova jednačina

$$(a \wedge c \wedge x) \vee \Big((b \vee \neg c) \wedge \neg x\Big) = 0$$

nije uvek moguća, jer je $a \wedge c \wedge (b \vee \neg c) = a \wedge b \wedge c$.

Na osnovu leme 2. jednačina

$$(11) \qquad A(x) = 0$$

je ekvivalentna jednačini $(A(1) \wedge x) \vee (A(0) \wedge \neg x) = 0$, to jest

$$(12) \qquad (a \wedge x) \vee (b \wedge \neg x) = 0,$$

gde je $A(1) = a$ i $A(0) = b$.

Zadatak 4. Data je Bulova jednačina:

$$((b \vee c) \wedge \neg x) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge x) \vee \Big[\Big((\neg c \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge x) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c)\Big) \wedge (c \vee a)\Big] = 0$$

gde su a, b i c parametri iz skupa L_2. Dokazati da je data jednačina moguća.
Rešenje:
$(b \wedge \neg x) \vee (c \wedge \neg x) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge x) \vee \Big[\Big((\neg c \wedge \neg a \wedge x) \vee (\neg c \wedge \neg b \wedge x) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c)\Big) \wedge (c \vee a)\Big] = 0$
$(b \wedge \neg x) \vee (c \wedge \neg x) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge x) \vee (\neg c \wedge \neg b \wedge x \wedge a) = 0$
$((a \wedge \neg b \wedge \neg c) \wedge x) \vee ((b \vee c) \wedge \neg x) = 0$
Data jednačina je moguća jer je:
$(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \wedge (b \vee c) = 0$ za svako a, b i $c \in L_2$.

Teorema 6. Neka je jednačina (12) moguća, to jest, neka je $a \wedge b = 0$. Tada je x rešenje jednačine (12) ako i samo ako

$$(13) \qquad b \leq x \leq \neg a$$

ili

$$(13') \qquad x = (\neg a \wedge x) \vee (b \wedge \neg x).$$

Dokaz: Dokažimo prvo relaciju (13).

1.	$(a \wedge x) \vee (b \wedge \neg x) = 0$	(jednačina (12))
2.	$a \wedge x = 0$ i $b \wedge \neg x = 0$	(iz 1. po teoremi 3.(i))
3.	$x \leq \neg a$ i $b \leq \neg(\neg x) = x$	(iz 2. po teoremi 1.(i))

Iz koraka 3. čitamo: $b \leq x \leq \neg a$. (Tj. jednačina 1. je ekvivalentna sistemu jednačina 2. koji je ekvivalentan sistemu nejednačina 3.)

Dokažimo sada relaciju (13′). Kako je $x \leq \neg a$ ekvivalentno sa $x \wedge \neg a = x$ (jer je $x \wedge a = 0$, odnosno $\neg x \vee \neg a = 1$), a $b \leq x$ ekvivalentno sa $b \wedge \neg x = 0$, pa je $x = (x \wedge \neg a) \vee 0$ ekvivalentno sa $x = (x \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg x)$.
Ovim je teorema 6. dokazana.

Primer 9. Posmatrajmo Bulovu jednačinu

$$(12') \qquad (\neg b \wedge \neg c \wedge x) \vee \Big((b \vee c) \wedge \neg x\Big) = 0,$$

gde su b i c iz skupa L_2. Po relaciji (13) (teorema 6.) x je rešenje jednačine (12′) ako i samo ako

$$b \vee c \leq x \leq \neg b \wedge \neg c.$$

Teorema 7. Neka je jednačina

$$(14) \qquad (a \wedge x) \vee (b \wedge \neg x) = 0$$

moguća. Njeno opšte rešenje je

$$(15) \qquad (i) \quad x = (\neg a \wedge p) \vee (b \wedge \neg p) \quad \text{ili} \quad (ii) \quad x = b \vee (\neg a \wedge p),$$

gde je p parametar skupa L_2.

Dokaz: Neka je $x = (\neg a \wedge p) \vee (b \wedge \neg p)$. Zamenjujući rešenje $x = (\neg a \wedge p) \vee (b \wedge \neg p)$ u (14) imamo:

$$
\begin{aligned}
(a \wedge x) \vee (b \wedge \neg x) &= \Big(a \wedge ((\neg a \wedge p) \vee (b \wedge \neg p))\Big) \vee \Big(b \wedge \neg((\neg a \wedge p) \vee (b \wedge \neg p))\Big) \\
&= (a \wedge \neg a \wedge p) \vee (a \wedge b \wedge \neg p) \vee (b \wedge a \wedge p) \\
&= a \wedge b \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

jer je $a \wedge b = 0$ (uslov da je jednačina (14) moguća).

Neka je x rešenje jednačine (14). Zamenom $x = p$ u $(13')$, iz teoreme 6. proizilazi da je $p = (\neg a \wedge p) \vee (b \wedge \neg p)$.

Da su relacije (i) i (ii) iz (15) ekvivalentne izlazi iz:

$$
\begin{aligned}
&b \vee (\neg a \wedge p) = \Big(b \wedge (p \vee \neg p)\Big) \vee (\neg a \wedge p) \\
&= (b \wedge p) \vee (b \wedge \neg p) \vee (\neg a \wedge p) \\
&= \Big((b \vee \neg a) \wedge p\Big) \vee (b \wedge \neg p) \\
&= (\neg a \wedge p) \vee (b \wedge \neg p).
\end{aligned}
$$

($b \vee \neg a = \neg a$ proizilazi iz uslova da je jednačina (14) moguća, to jest $a \wedge b = 0$, što je po teoremi 2. ekvivalentno sa $b \leq \neg a$, odnosno ekvivalentno sa $b \vee \neg a = \neg a$).

Primer 10. Rešenje jednačine
$(\neg b \wedge \neg c \wedge x) \vee \Big((b \vee c) \wedge \neg x\Big) = 0$
po teoremi 7. (i) je
$x = \Big((b \vee c) \wedge p\Big) \vee \Big((b \vee c) \wedge \neg p\Big)$, tj. $x = b \vee c$.

Rešenje jednačine
$(a \wedge b \wedge x) \vee \Big((\neg a \vee \neg b) \wedge \neg x\Big) = 0$
po teoremi 7. (i) je
$x = \Big((\neg a \vee \neg b) \wedge p\Big) \vee \Big((\neg a \vee \neg b) \wedge \neg p\Big)$, tj. $x = \neg a \vee \neg b$.

4.2 Metod sukcesivnih eliminacija

Neka je data Bulova jednačina

$$(16) \qquad A(x_1, x_2, ..., x_n) = B(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Na osnovu teoreme 2.(i) jednačinu (16) možemo transformisati u ekvivalentnu jednačinu

$$(17) \qquad (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) = 0, \text{ u oznaci } f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$$

Na osnovu leme 1. jednačinu (17) možemo transformisati u ekvivalentnu jednačinu

$$(18.1) \qquad (f_1(1, x_2, ..., x_n) \wedge x_1) \vee (f_1(0, x_2, ..., x_n) \wedge \neg x_1) = 0.$$

Na osnovu teoreme 5. jednačina (18.1) je moguća ako je

$$(18.1') \qquad f_1(1, x_2, ..., x_n) \wedge f_1(0, x_2, ..., x_n) = 0, \text{ u oznaci } f_2(x_2, ..., x_n),$$

gde je eliminisano x_1.

U sledećem koraku, na osnovu leme 1, je

$$(18.2) \qquad (f_2(1, x_3, ..., x_n) \wedge x_2) \vee (f_2(0, x_3, ..., x_n) \wedge \neg x_2) = 0,$$

odakle sledi

$$(18.2') \qquad f_2(1, x_3, ..., x_n) \wedge f_2(0, x_3, ..., x_n) = 0, \text{ u oznaci } f_3(x_3, ..., x_n) = 0;$$

ovde je eliminisano x_2.

Postupak eliminacije produžavamo do

$$(18.n) \qquad (f_n(1) \wedge x_n) \vee (f_n(0) \wedge \neg x_n) = 0,$$

gde su $f_n(1)$ i $f_n(0)$ konstante skupa L_2.
Po teoremi 5. Bulova jednačina $(18.n)$ je moguća ako i samo ako

$$(18.n') \qquad f_n(1) \wedge f_n(0) = 0.$$

Po teoremi 7.(i) rešenje Bulove jednačine $(18.n)$ je

$$(19.1) \qquad x_n = (\neg f_n(1) \wedge p_n) \vee (f_n(0) \wedge \neg p_n), \quad \text{tj.} \quad x_n = q_n(p_n)$$

gde je p_n promenljivi parametar skupa L_2.
Zamenom (19.1) u $(18.n-1)$ dobijamo Bulovu jednačinu

$$(f_{n-1}(1, q_n(p_n)) \wedge x_{n-1}) \vee (f_{n-1}(0, q_n(p_n)) \wedge \neg x_{n-1}) = 0$$

čije je rešenje na osnovu teoreme 6.(i)

$$\begin{aligned} &(19.2) \quad x_{n-1} = (f_{n-1}(1, q_n(p_n)) \wedge p_{n-1}) \vee (f_{n-1}(0, q_n(p_n)) \wedge \neg p_{n-1}), \\ &\text{tj. } x_{n-1} = q_{n-1}(p_{n-1}, p_n) \quad \text{gde su } p_{n-1}, p_n \text{ parametri skupa } L_2. \end{aligned}$$

Produžavanjem postupka dolazimo do

$$\begin{aligned} (19.n) \quad x_1 = &(f_1(1, q_2(p_2, ..., p_n), ..., q_n(p_n)) \wedge p_1) \\ &\vee (f_1(0, q_2(p_2, ..., p_n), ..., q_n(p_n)) \wedge \neg p_1), \end{aligned}$$

tj. $x_1 = q_1(p_1, p_2, ..., p_n)$,
gde su $p_1, p_2, ..., p_n$ parametri skupa L_2.

Na osnovu $(19.1), ..., (19.n)$ rešenje jednačine (17) je

$$\begin{gathered} x_n = q_n(p_n) \\ x_{n-1} = q_{n-1}(p_{n-1}, p_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 = q_1(p_1, p_2, ..., p_n). \end{gathered}$$

Primer 11. Data je Bulova jednačina

$$(20) \quad \Big((b \vee c) \wedge \neg x_1\Big) \vee \Big(c \wedge \neg x_2\Big) \vee \Big(b \wedge \neg x_3\Big) \vee \Big(\neg c \wedge x_1 \wedge x_2\Big) \vee \Big((\neg b \vee \neg c) \wedge x_2 \wedge x_3\Big) \vee \Big(\neg b \wedge x_1 \wedge x_3\Big) = 0,$$

gde su a, b i c parametri iz skupa L_2. Eliminišimo iz jednačine (20) nepoznatu x_3. Na osnovu $(18.1')$ dobijamo jednačinu

$$\Big[\Big((b \vee c) \wedge \neg x_1\Big) \vee \Big(c \wedge \neg x_2\Big) \vee \Big(\neg c \wedge x_1 \wedge x_2\Big) \vee \Big((\neg b \vee \neg c) \wedge x_2\Big) \vee \Big(\neg b \wedge x_1\Big)\Big] \wedge \Big[\Big((b \vee c) \wedge \neg x_1\Big) \vee \Big(c \wedge \neg x_2\Big) \vee b \vee \Big(\neg c \wedge x_1 \wedge x_2\Big)\Big] = 0$$

koja je ekvivalentna sa jednačinom

$$(21) \quad \Big((b \vee c) \wedge \neg x_1\Big) \vee \Big(c \wedge \neg x_2\Big) \vee \Big(\neg c \wedge x_1 \wedge x_2\Big) \vee \Big(b \wedge \neg c \wedge x_2\Big) = 0.$$

Eliminišimo iz jednačine (21) nepoznatu x_2. Na osnovu $(18.2')$ dobijamo jednačinu

$$\Big[\Big((b \vee c) \wedge \neg x_1\Big) \vee \Big(\neg c \wedge x_1\Big) \vee \Big(b \wedge \neg c\Big)\Big] \wedge \Big[\Big((b \vee c) \wedge \neg x_1\Big) \vee c\Big] = 0$$

koja je ekvivalentna jednačini

$$(22) \qquad (b \vee c) \wedge \neg x_1 = 0.$$

Jednačina (22) je moguća jer je $0 \wedge (b \vee c) = 0$. Na osnovu teoreme 7. iz (22), (21) i (20) dobijamo:

(21.1) $\quad x_1 = p \vee \Big((b \vee c) \wedge \neg p\Big)$

(21.2) $\quad x_2 = \Big[\Big((c \wedge x_1) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg x_1)\Big) \wedge q\Big] \vee \Big[\Big((c \vee b) \wedge \neg x_1\Big) \wedge \neg q\Big]$

(21.3) $\quad x_3 = \Big[\Big(((b \wedge x_1) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg x_1)) \wedge ((b \wedge c \wedge x_2) \vee (\neg c \wedge x_2))\Big) \wedge$
$r\Big] \vee \Big[\Big(((b \vee c) \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg c \wedge x_1 \wedge x_2)\Big) \wedge \neg r\Big]$

Zamenom (21.1) u (21.2) eliminišemo x_1, a zatim zamenom (21.2) u (21.3) eliminišemo i x_2. Na kraju dobijemo i opšte rešenje

$x_1 = b \vee c \vee p$
$x_2 = c \vee (\neg b \wedge \neg p \wedge \neg q)$
$x_3 = b \vee (\neg c \wedge \neg p \wedge \neg q \wedge r)$,
gde su p, q i r promenljivi parametri skupa L_2.

4.3 L. Lowenheim-ov oblik opšteg rešenja

Teorema 8. (L. Lowenheim) Ako je $(\xi_1, ..., \xi_n) \in L_2^n$ partikularno rešenje Bulove jednačine

$$(23) \qquad f(x_1, ..., x_n) = 0,$$

onda je njeno opšte rešenje

$$(24) \qquad x_i = (\xi_i \wedge f(p)) \vee (p_i \wedge \neg f(p)),\ i = 1, ..., n,$$

gde je $p = (p_1, ..., p_n)$ proizvoljan vektor skupa L_2^n.

Dokaz: Na osnovu teoreme o KDNF jednačina (23) je ekvivalentna sa

$$(25) \qquad \bigvee_{\alpha \in L^n} (c_{\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n} \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n}) = 0,$$

Iz (24) proizilazi da je

$$(26) \qquad \neg x_i = (\neg \xi_i \wedge f(p)) \vee (\neg p_i \wedge \neg f(p)), \quad i \in \{1, ..., n\},$$

(jer je $\neg\Big[\bigvee_{\alpha \in L^n} (c_{\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n} \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n})\Big] = \bigvee_{\alpha \in L^n} (\neg c_{\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n} \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n})$ po de Morganovim zakonima i činjenicom da ako je $y' \neq y''$, onda $x^{y'} \wedge x^{y''} = x^0 \wedge x^1 = \neg x \wedge x = 0$ dok je $x^y \wedge x^y = x^y$).

Na osnovu (24) i (26) imamo:

$$(24') \qquad x_i^{\alpha_i} = (\xi_i^{\alpha_i} \wedge f(p)) \vee (p_i^{\alpha_i} \wedge \neg f(p)),\ i \in \{1, ..., n\},\ \alpha_i \in L_2.$$

Iz jednačine (24′) dobijamo:

$$(24'') \qquad x_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n} = (\xi_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge \xi_n^{\alpha_n} \wedge f(p)) \vee (p_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge p_n^{\alpha_n} \wedge \neg f(p)).$$

Na osnovu jednačine (25) i (24″) imamo

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_n) = & \bigvee_{\alpha_1, ..., \alpha_n} [(c_{\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n} \wedge \xi_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge \xi_n^{\alpha_n} \wedge f(p_1, ..., p_n)) \vee (c_{\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n} \wedge \\ & p_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge p_n^{\alpha_n} \wedge \neg f(p_1, ..., p_n))] \\ = & [(\bigvee_{\alpha_1, ..., \alpha_n} c_{\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n} \wedge \xi_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge \xi_n^{\alpha_n}) \wedge f(p_1, ..., p_n)] \vee [(\bigvee_{\alpha_1, ..., \alpha_n} c_{\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n} \wedge \\ & p_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge p_n^{\alpha_n}) \wedge \neg f(p_1, ..., p_n)] \\ = & (f(\xi_1, ..., \xi_n) \wedge f(p_1, ..., p_n)) \vee (f(p_1, ..., p_n) \wedge \neg f(p_1, ..., p_n)) = 0 \end{aligned}$$

Neka je $(x_1^*, ..., x_n^*) = x^*$ rešenje jednačine (23), to jest $f(x^*) = 0$, $\neg f(x^*) = 1$ i $p = x^*$, onda je

$$x_i^* = (\xi_i \wedge f(x^*)) \vee (x_i^* \wedge \neg f(x^*)) \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

jer je $x_i^* = (\xi_i \wedge 0) \vee (x_i^* \wedge 1)$, tj. $x_i^* = x_i^*$.
Ovim je teorema dokazana.

Primer 12. Jedno partikularno rešenje Bulove jednačine

$$\bigvee_{h=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} a_{hj} \wedge x_h \wedge x_j = 0$$

je $(\xi_1, ..., \xi_n) = (0, ..., 0)$. Njeno opšte rešenje na osnovu teoreme 8. (24), je

$$x_i = p_i \wedge \neg f(p_1, ..., p_n), \quad i \in \{1, ..., n\},$$

to jest

$$x_i = p_i \wedge \bigwedge_{h=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} (\neg a_{hj} \vee \neg x_h \vee \neg x_j), \quad i \in \{1, ..., n\},$$

gde su $p_1, ..., p_n$ parametri iz L_2.

4.4 Alternativne jednačine

Alternativne jednačine su specijalan slučaj Bulovih jednačina u kojima figuriše binarna operacija $\underline{\vee}$ koju smo definisali u glavi II.

Primer 13. Alternativne jednačine su:

$$x \,\underline{\vee}\, y = 0, \quad (x \,\underline{\vee}\, y) \wedge z = x \,\underline{\vee}\, y,$$

dok su

$$x \,\underline{\vee}\, y \leq y, \quad (x \,\underline{\vee}\, z) \wedge y \leq 0$$

alternativne nejednačine.

Teorema 9. Alternativna jednačina

$$(J_1) \quad A(x_1, ..., x_n) \,\underline{\vee}\, B(x_1, ..., x_n) = C(x_1, ..., x_n)$$

je ekvivalentna alternativnoj jednačini

$$(J_2) \quad A(x_1, ..., x_n) = B(x_1, ..., x_n) \,\underline{\vee}\, C(x_1, ..., x_n)$$

Dokaz:
(1) $A \,\underline{\vee}\, B = C$ (jednačina (J_1))
(2) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) = C$ (definicija)
(3) $\Big[\neg((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)) \wedge C\Big] \vee \Big[((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)) \wedge \neg C\Big] = 0$
(teorema 2, glava IV)
(4) $\Big[((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \wedge C\Big] \vee \Big[((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)) \wedge \neg C\Big] = 0$
(zakoni de Morgana)
(5) $(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) = 0$
(distributivnost)

(6) $\Big[A \wedge ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))\Big] \vee \Big[\neg A \wedge ((\neg B \wedge C) \vee (B \wedge \neg C))\Big] = 0$
(distributivnost)
(7) $\Big[A \wedge ((\neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C))\Big] \vee \Big[\neg A \wedge ((\neg B \wedge C) \vee (B \wedge \neg C))\Big] = 0$
(zakoni de Morgana)
(8) $\Big[A \wedge \neg((B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C))\Big] \vee \Big[\neg A \wedge ((\neg B \wedge C) \vee (B \wedge \neg C))\Big] = 0$
(zakoni de Morgana)
(9) $A = (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$ (teorema 2, glava IV)
(10) $A = B \veebar C$ (definicija).

Primer 14. Rešiti sistem alternativnih jednačina:

$$\begin{gathered} x \veebar a = 0 \\ x \veebar y = b \\ x \veebar y \veebar z = c \\ x \veebar y \veebar t = d \end{gathered}$$

Iz teoreme 9. imamo da je:

$$\begin{gathered} x = a \veebar 0 \\ y = x \veebar b \\ z = x \veebar y \veebar c \\ t = x \veebar y \veebar d. \end{gathered}$$

Iz definicije dobijamo:

$$\begin{gathered} x = (a \wedge \neg 0) \vee (\neg a \wedge 0) \\ y = (x \wedge \neg b) \vee (\neg x \wedge b) \\ z = ((x \veebar y) \wedge \neg c) \vee (\neg (x \veebar y) \wedge c) \\ t = ((x \veebar y) \wedge \neg d) \vee (\neg (x \veebar y) \wedge d). \end{gathered}$$

Pa je:

$$\begin{gathered} x = a \\ y = a \veebar b \\ z = \Big[(a \veebar (a \veebar b)) \wedge \neg c\Big] \vee \Big[\neg (a \veebar (a \veebar b)) \wedge c\Big] \\ t = \Big[(a \veebar (a \veebar b)) \wedge \neg d\Big] \vee \Big[\neg (a \veebar (a \veebar b)) \wedge d\Big]. \end{gathered}$$

Dalje imamo

$$x = a$$
$$y = a \veebar b$$
$$z = ((0 \veebar b) \wedge \neg c) \vee (\neg(0 \veebar b) \wedge c)$$
$$t = ((0 \veebar b) \wedge \neg d) \vee (\neg(0 \veebar b) \wedge d)$$

Pa je

$$x = a$$
$$y = a \veebar b$$
$$z = (b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge c)$$
$$t = (b \wedge \neg d) \vee (\neg b \wedge d)$$

Konačno rešenje sistema alternativnih jednačina je:

$$x = a$$
$$y = a \veebar b$$
$$z = b \veebar c$$
$$t = b \veebar d.$$

Literatura

[1] Gilezan K.,Latinović B., Bulova algebra i primene, Matematički institut, Beograd, 1977.

[2] Hammer P. L., Boolean Methods in Operations Research, New York, 1968.

[3] Rudeanu S., Lattice Functions and Equations, London, 2001.

[4] Brown F. M., The Logic of Boolean Equations, New York, 1990.

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Boolean_algebra, pristupljeno 15.08.2017.