Univerzitet u Beogradu

Master rad

Diofantove jednačine u preduniverzitetskom obrazovanju

Student
Dušanka Brajović 1143/2014

Mentor
Prof. dr Miodrag Mateljević

Beograd, septembar 2017

Sadržaj

1 Uvod

1.1 Zašto Diofantove jednačine

Diofantove jednačine predstavljaju staru i značajnu temu kojom su se matematičari bavili kroz bogatu istoriju matematičkih teorija i problema. Istovremeno, problemi Diofantovih jednačina su i jedan od problema kojima se matematičari i vremenski dugo bave. Otuda istorijski osvrt na Diofantove jednačine ima svoj metodički i istorijski značaj. Istorijat Diofantovih jednačina u matematičkoj nauci jedan je od najinteresantnijih istorijskih puteva, pošto je razvoj teorijske misli o Diofantovim jednačinama najuže povezan sa evolucijom matematike i razvojem matematičke simbolike, matematičkih teorija i matematičkih metoda uopšte.

Od više veoma bitnih razloga za izbor Diofantovih jednačina u preduniverzitetskom obrazovanju, za temu ovog master rada, mogu da izdvojim sledeće:

- Istorijski
  Doprinos Dofanta matematici, a pre svega aritmetici, je od veoma velikog značaja. Njega zovu "ocem aritmetike" i smatram da zaslužuje da se njegov doprinos više izučava i publikuje. Osim toga, nastavnici matematike bi trebalo da u većoj meri kroz nastavu učenicima približe Diofantov rad i značaj njegovih dela.

- Značaj Diofantovih jednačina
  Diofantove jednačine su značajne jer predstavljaju sintezu skoro svih sadržja teorije brojeva (deljivost brojeva, prosti brojevi, kongruencija...), teorije jednačina, polinoma, nejednakosti, matematičke logike...

- Metodički
  Ovo je možda i najvažniji razlog. Zamisao mi je bila da na jednom mestu obradim važnije Diofantove jednačine i da se na osnovu mog rada može ovladati metodama za rešavanje Diofantovih jednačina, razviti sposobnost za uočavanje, formulisanje, anaiziranje i rešavanje različitih problema koji se svode na Diofantove jednačine.
  Pojam Diofantovih jednačina uvodim kroz primere, vodeći računa o njihovoj raznovrsnosti (po tipu, po broju promenljivih, po stepenu...) i ukazujući na postojanje Diofantskih problema koje treba opisati pomoću Diofantove jednačine. Diofantove jednačine ne obradjujem kao nastavnu jedinicu , već ih predstavljam kao široki spektar algebarskih problema koji imaju svoju metodologiju rešavanja. Za rešavanje ovih problema potrebno je poznavanje Diofantovih jednačina i načina njihovog rešavanja.

- Programski sadržaji kroz osnovno i srednje obrazovanje
  Kao nastavni sadržaji, Diofantove jednačine nisu eksplicitno prisutne u

nastavnim programima redovne nastave matematike u osnovnoj školi. Međutim, to ne znači da problemi koji se svode na Diofantve jednačine nisu zastupljeni u nastavi. One su prisutne u nastavi i koriste se kao pogodan materijal za uvežbavanje nastavnih sadržaja u skoro svim razredima. Nigde se ne ističe da je data Diofantova jednačina i ne objašnjava se njen pojam, ali se pojavljuju često u zadacimai problemima koji se rešavaju, a posebno na takmičenjima višeg nivoa iz matematike. Skoro na svakom takmičenju pojavljuju se zadaci iz algebre koji su vezani za problematku Diofantovih jednačina.

1.2 Diofantove jednačine u nastavi osnovne i srednje škole

Kao što smo već pomenuli, Diofantove jednačine su u integrisanom obliku prisutne u nastavi matematike u osnovnoj školi i koriste se kao pogodan materijal prilikom uvežbavanja nastavnih sadržaja. Pri tom se nigde ne ističe da je dati zadatak Diofantova jednačina i ne objašnjava se njen pojam.

U početnoj nastavi matematike to su bili problemi koji se koriste za proveravanje u kojoj su meri i do kog misaonog nivoa učenici ovladali računskim operacijama i koliko imaju elementarnih kombinatornih sposobnosti.

Već od četvrtog razreda osnovne škole, Diofantove jednačine su prisutne kroz razne matematičke rebuse kao i probleme vezane za deljivost brojeva, proste brojeve, princip parnosti, rastavljanje polinoma na činioce...U programima dodatne nastave matematike u osnovnoj školi, Diofantove jednačine su prisutne praktično već od samog početka njene realizacije. U okviru nastavne teme "Matematički rebusi i magične figure", za četvrti razred osnovne škole, počinje se sa izučavanjem Diofantovih jednačina, naravno, ne pominjući sam naziv jednačine. U petom razredu realizacija nastavnog sadržaja iz oblasti deljivosti i prostih brojeva, takođe se odvija preko Diofantovih jednačina. Kasnije, ove jednačine su prisutne i u šestom razredu, kroz obradu razlomaka i celih brojeva. U sedmom razredu, sadržaji o Diofantovim jednačinama se realizuju kroz probleme vezane za stepenovanje (korišćenje poslednje cifre), ali i u realizaciji rastavljanja polinma na činioce (korišćenje proizvoda) kao i realizacija deljivosti.

Diofantove jednačine se prvi put eksplicitno, kao nastavna tema dodatne nastave, pominju tek u programima nastave matematike za osmi razred. Tu se obradjuju linearne Diofantove jednačine, jednostavniji sistemi linearnih Diofantovih jednačina, kao i njihova primena. Zatim se Diofantove jednačine rešavaju korišćenjem količnika, zbira, nejednakosti, deljivosti...

U nastavnim programima gimnazija i srednjih stručnih škola nisu eksplicitno predviđeni sadržaji o Diofantovim jednačinama. Međutim, kao i u osnovnoj školi, materija vezana za Diofantove jednačine prisutna je kroz pojedine problemske situacije i konkretne zadatke. U prvom razredu, problemi koji se u suštini svode na Diofantove jednačine susreću se kod primene rastavljanja polnoma na činioce, kao i kod sadržaja o algebarskim razlomcima i linearnim jednačinama. U drugom razredu, Diofantove jednačine su prisutne u problemima koji su vezni za kvadratnu jednačinu i jednačine koje se svode na kvadratnu. U konkretnim zadacima, vezanim za nastavne sadržaje trećeg i četvrtog razreda srednjih škola, Diofantove jednačine se ne pojavljuju.

I u programima dodatne nastave matematike za gimnazije i srednje stručne škole, Diofantove jednačine zastupljene su u prvom i drugom razredu. U prvom razredu obrađuju se složenije linearne Diofantove jednačine, jer se podrazumeva da su elementarna znanja iz ove oblasti učenici doneli iz osnovne škole. Takođe se obrađuje i primena algebarskih transformacija na rešavanje složenijih nelinearnih Diofantovih jednačina. U drugom razredu srednje škole, program dodatne nastave predviđa realizaciju sadržaja o nelinearnim Diofantovim jednačinama. Obrađuju se, takođe, i neelementarne kvadratne Diofantove jednačine, jednačine koje se na njih svode, kao i eksponencijalne Diofantove jednačine. Program dodatne nastave za treći i četvrti razred srednje škole ne predviđa sadržaje o Diofantovim jednačinama. Međutim, pojedine škole organizovano rade sa darovitim učenicima i u trećem razredu prostor koji je programom dodatne nastave dat temi "Rekurentne formule" koriste da ukažu na Pelovu jednačinu i njeno rešavanje, a prostor namenjen temi "Metode koordinata" da se prikaže kako se taj metod može koristiti za rešavanje nekih klasa Diofantovih jednačina. U četvrtom razredu, za upoznavanje učenika sa razvojem ideja o Diofantovim jednačinama i za priču o Fermaovom problemu, koristi se tema dodatne nastave "Kratak pregled istorije matematike".

Jedini nastavni program koji eksplicitno sadrži materiju vezanu za Diofantove jednačine je program Matematičke gimnazije. Realizacija sadržaja o Diofantovim jednačinama predviđena je u nastavnom programu analize sa algebrom u drugom razredu, gde su Diofantove jednačine jedna od tema koja se realizuje u okviru sadržaja iz teorije brojeva. Konkretno su predviđeni sadržaji o linearnoj Diofantovoj jednačini, Pitagorinim trojkama, velikoj Fermaovoj teoremi i elementarnim nelinearnim Diofantskim problemima.

Matematičke gimnazije u svom redovnom nastavnom planu i programu imaju u drugom razredu predviđenu obradu Diofantovih jednačina.

2 Istorijski osvrt

Diofantove jednačine predstavljaju staru i značajnu temu kojom su se matematičari bavili kroz istoriju matematičkih teorija i problema. Istovremeno, problemi Diofantovih jednačina su i jedan od problema kojima se matematičari i vremenski dugo bave. Matijaševičeva teorema i rešavanje Fermaovog problema dali su odgovore na dva značjna problema vezana za Diofantove jednačine, ali time nije zatvoren spisak matematičkih nepoznanica vezanih za ovu temu. Zbog toga je istorijski osvrt na Diofantove jednačne od velikog metodičkog i istorijskog značaja, pošto je razvoj teorijske misli o

Diofantovim jednačinama najuže povezan sa razvojem matematike i matematičke simbolike, matematičkih teorija i matematičke misli uopšte.

U drugoj polovini 20.veka Diofantova analiza postala je moderna zbog blizine sa algebarskom geometrijom. Iznenadjujuće, praktično ništa nije bilo zapisano o Diofantu, čije ime je vezano za neodređenu analizu i koji je jedan od najinteresantnijih naučnika antike. Čak i istoričari matematike ponekad imaju pogrešan pogled na njegov rad. Većina njih misli da je on specifičnim metodama rešio specifičan problem, ekvivalentan neodređenoj jednačini. Čak i jednostavni Diofantovi problemi iz analize pokazuju da on nije samo postavio problem nalaženja racionalnih rešenja u neodređenim jednačinama, nego je dao i neke generalne metode za njihovo dobijanje.

Treba imati na umu da u antičkoj matematici generalne metode nisu predstavljene u "čistoj formi", pored opštih problema. Naučnici su pažljivo morali da proučavaju radove pojedinih matematičara i da ih interpretiraju u cilju izučavanja generalnog metoda. Isto važi i za Diofanta. Njegove metode su razumeli i pretvorili u rešenje novog problema Vijet i Ferma. Dok nisu otkriveni diferencijalni i integralni račun od strane Njutna i Lajbnica, evolucija Diofantovih metoda produžena je za nekoliko vekova i preplitala se sa teorijom algebarskih funkcija i sa algebarskom geometrijom. Evolucija Diofantovih ideja može se pratiti sve do rada Poenkarea i Vijeta. Ovo čini istoriju Diofantove analize zanimljivom. Diofant otvara pred nama jednako bogat ilep svet aritmetike i algebre.

2.1 Diofant

Diofant predstavlja jednu od najvećih zagonetki u istoriji nauke. Ne znamo kada je živeo i ne znamo njegove prethodnike koji su možda radili u istoj oblasti. Mogao je da živi u bilo koje doba tokom 500 godina. Donju granicu tog perioda nije teško odrediti. U njegovoj knjizi o polinomima Diofant često pominje matematičara Hipsiklesa iz Aleksandrije koji je živeo u 2.veku pre nove ere. Sa druge strane, Teon Aleksandrijski u komentarima Ptolomejevog "Almagesta" navodi izvode iz Diofantovog rada. Teon je živeo sredinom 4.veka nove ere. Otuda pomenuti pedstogodišnji period. Franački istoričar matematike Pol Taneri, urednik mnogih listova o Diofantu, pokušao je da suzi ovaj interval. U Escurial biblioteci on je pronašao izvode rukopisa Mihaela Pselusa, vizantijskog učenjaka 11.veka, koji svedoči da "najčitaniji Anadoli, koji sakuplja mnoge esencijalne delove ove nauke posvećen je prijatelju Diofantu ". Anadoli Aleksandrijski je zapravo pisao "Uvod u aritmetiku" i izvodi iz ovog rada su navedeni iz sačuvanih dela od Iamblichus i Eusebuis. Anadoli je živeo u Aleksandriji sredinom 3.veka nove ere, preciznije do 270. godine kada je postao biskup od Loadiceje. To znači da njegovo prijateljstvo sa Diofantom mora prethoditi ovom datumu. Tako, ako su poznati aleksandrijski matematičar i Anadolijev prijatelj Diofant iste osobe, onda je Diofantmorao živeti sredinom 3.veka nove ere.

Diofantova "Aritmetika" je posvećena svešteniku Dionisu koji je bio zainteresovan za aritmetiku i koji ju je proučavao. Dok je upotreba Diofantovog imena bila relativno česta vremenom, Taneri pretpostavlja da je "sveštenik Dionis " morao da se traži među dobro poznatim ljudima tog perioda koji su zauzimali visoke pozicije. Ispostavilo se da je izvestan Dionis, koji je od 231.godine bio direktor Aleksandrijske Hrišćanske srednje škole, postao gradski episkop 247. godine. Zbog toga je Taneri identifikovao ovog Dionisa sa onim kojem se Diofant posvetio u svom radu, i tako se dolazi do zaključka da je Diofant živeo sredinom 3.veka nove ere.

Ali, mesto u kom je Diofant živeo dobro je poznato. To je poznata Aleksandrija, centar nauke za vreme Helenskog perioda. Posle raspada velike imperije Aleksandra Makedonskog, Egiptom je vladao Ptolomej, jedan od aleksandrijskih generala, koji je "stvorio" novi grad Aleksandriju kao glavni grad. Ovaj multijezički komercijalni centar uskoro je postao jedan od najlepših gradova antike. Kroz mnogo vekova, grad je bio naučni i kulturni centar starog sveta, zato što je Ptolomej osnovao Muzej, neku vrstu Akademije Nauka, koji je privlačio vodeće učenjake. Ovim učenjacima isplaćivane su plate i njihova dužnost je bila da meditiraju i učestvuju u diskusijama sa njihovim studentima. To je uključivalo i sjajnu biblioteku koja je u jednom trenutku imala 700 000 rukopisa.

Malo je čudno što su se naučnici i mladi ljudi željni znanja sjatili u Aleksandriju da slušaju različite filozofe, da uče astronmiju i matematiku i zadubljuju se u studiranje različitih rukopisa u hladnim sobama biblioteke. Na prelazu iz 3. u 2. vek pre nove ere Muzej je sijao sa imenima Euklida, Apolonija, Eratostena i Hiparha. U ranim vekovima pre nove ere pretrpeo je privremeni pad, zbog pada Ptolomeja i rimskih osvajanja (Aleksandrija je osvojena 31. godine nove ere), ali u ranim vekovima nove ere bila je regenerisana zbog podrške rimskih imperatora. Od 1. do 3. veka ovde su radili naučnici kao što su Heron, Ptolomej i Diofant. Aleksandrija je nastavila da bude centar naučnog sveta. U tom pogledu Rim joj nikada nije bio rival. Jednostavno, nije bilo takvih stvari u rimskoj nauci. Kako bi iskoristili svo znanje o ličnosti Diofanta, u skladu sa njegovim zanimanjem i životom koji je posvetio matematici, citiramo sledeći tekst koji je ostao zapisan na njegovoj nadgrobnoj ploči:

"Putniče! Ovde je sahranjen Diofant. Brojevi govore koliko je bio dug njegov život. Šestinu njegovog života čini prekrasno detinjstvo. Dvanaestinu čini njegova mladost. Sedminu svog života Diofant je proveo u braku bez dece. Prošlo je još pet godina dok mu Himen, bog braka i svadbe, nije podario sina. Sudbina je htela da sin poživi dva puta manjeod svog oca. Još četiri godine proveo je strac u dubokom bolu za izgubljenim sinom. Koliko je živeo Diofant?"

Ovaj tekst može se svesti na rešavanje algebarske jednačine, i ako ga prevedemo na jezik algebre, to bi značilo sledeće:

Brojevi govore kolikoje dug bio njeov život X.
Šestinu njegovog života čini prekrasno detinjstvo $\frac{X}{6}$.
Dvanaestinu čini njegova mladost $\frac{X}{12}$.
Sedminu svog života Diofant je proveo u braku bez dece $\frac{X}{7}$.
Prošlo je još pet godina dok mu Himen nije podario sina 5.
Sudbina je htela da sin poživi dva puta manje od svog oca $\frac{X}{2}$.
Još četiri godine proveo je starac u dubokom bolu za izgubljenim sinom 4.
Ako ovo prevedemo u algebarsku jednačinu, ona će izgledatiovako:

$$\frac{X}{6}+\frac{X}{12}+\frac{X}{7}+5+\frac{X}{2}+4=X.$$

Iz ovoga možemo zaključiti da je Diofant živeo 84 godine. Pored toga, dobijamo i informacije o njegovom životu: da se oženio kada je imao 21 godinu, da je sa 38 godina dobio sina, koga je izgubio kada je napunio 80 godina. Da bi se ovo savladalo nije potrebno poznavati Diofantovu umetnost. Dovoljno je znati rešavanje jednačine prvog reda sa jednom nepoznatom, nešto što su egipatski pisari znali da urade 2000 godine pre nove ere.

Najmističniji deo Diofantovog života je njegov rad. Od 13 knjiga njegovog najvećeg dela "Aritmetike", do nas je došlo deset [1]. Njihov stil i sadržaj radikalno se razlikuju od klasičnih antičkih dela teorije brojeva i algebre čiji model smo upoznali u Euklidovim "Elementima" i u njegovoj "Dati", kao i iz lema Arhimeda i Apolonija.

"Aritmetika" je nesumljivo rezultat brojnih istraživanja koja su nama nepoznata. Jedino možemo da pogađamo njihove korene, divno bogatstvo i lepotu njegovih rezultata. Diofantova "Aritmetika" je kolekcija problema[2], od kojih je svaki sa jednim ili više rešenja i potrebnim objašnjenjem. Otuda je i prvi utisak da ovo nije samo teorijski rad. Ali temeljan pregled pokazuje da su problemi posebno selektovani i služe da ilustruju određenu metodu. Prateći pravila antike, metode nisu navedene u opštem obliku, već se pojavljuju rešenja problema istog tipa.

Posle Diofantove smrti nastaje mračno doba, koje se prenelo i na matematiku, što je prouzrokovalo gubljenje saznanja o Diofantu i njegovoj Aritmeti cinarednih 1500 godina. Njegova dela su sačuvana zahvaljujući arapskim učenjacima koji su proučavali delo Diofanta i prenosili ga sa generacije na generaciju. Godine 1463. nemački matematičar Regiomontanus je zapisao: "Niko još nije preveo na latinski jezik Trinaestu knjigu Diofantovu, u kojoj je cvet celokupne aritmetike skriven ležao".

Upozorivši da još niko nije preveo na latinski Diofantovih 13 knjiga u kojima su najlepši plodovi aritmetike, kao prvom koji je privukao pažnju na Diofantove radove, zasluga pripada upravo Refiomontanusu. Rafael Bombelli

[1] U uvodu Diofant je izneo da je "Aritmetika" podeljena na 133 knjiga. Šest od deset koje su došle do nas su na grčkom jeziku, a 1973. godine pronađene su četiri knjige čiji je prevod bi na arapskom

[2] Sadrži 290 problema

i AntonioMaria Pazzi sačuvali su prvi latinski prevod oko 1570. godine koji nikada nije izdat.

Sledeći koji je dao iscrpan latinski prevod sa komentarima 1575. godine je Vilhelm Holzmann. Standardno izdanje Diofanta do skoro je bilo Bachetovo izdanje, koje je 1621. godine izdato po prvi put kao grčki tekst sa latinskim prevodom i komentarima. Moderni prevod Diofanta sa uvodom i zapažanjima današnjh pisaca[3] zasniva se na Tanneryevim tekstovima. To je najkompletnije izdanje do danas.

2.2 Simboli i definicije

Matematčki simboli znače kristalizaciju odnosa među brojevima i figurama, znače gotovo cele procese i sadrže sažeto matematičke pojmove. Misaoni matematički procesi izražavaju savršenost logičkog mišljenja i nalaze u simbolima svoje skraćeno označavanje. Simboi su, u stvari, u sebi združili suštinu, proces i operaciju. To je odlika matematičkih simbola u poređenju sa simbolima drugih nauka. Poznato je da su se kroz vekove matematički pojmovi, pa tako i simboli razvijali i usavršavali. U početku stvaranja, simboli nisu imali svoj vlastiti smisao, već su im smisao tokom vremena davali ljudi. Matematički simboli razlikuju se od ostalih simbola time što su intrnacionalni, oni kod svih naroda imaju isto značenje. U algebri je simbolika naročito došla do savršenog izražaja. Ako pregledamo istorijski razvitak algebarskog načina izražavanja, možemo uočti tri perioda, odnosno tri nivoa razvoja i to su: retorska, sinkopirana i simbolička algebra.

U periodu retoričke algebre vladalo je usmeno izražavanje bez upotrebe određenih specijalnih simbola. Na ovom stepenu razvitka nalazili su se Grci sve do 1.veka nove ere, Arabijani, pa čak i neki istaknuti matematičari srednjeg veka među kojima je i Regiomontanus[4] iz 14. veka.

Vrlo važan momenat u daljem razvoju algebarske simbolike predstavlja Diofantova Aritmetika krajem 3.veka nove ere. Ovo delo je, u stvari, početak takozvane Sinkopirane algebre, tj. algebre u kojoj su pojedini pojmovi i operacije označavani određenim skraćenicama; ono predstavlja prelazak iz prvog perioda u drugi. Tu Diofant već primenjuje specijalne skraćenice za označavanje nepoznate veličine, za razlomak, stepen itd. Posle Diofanta nije bilo nikog ko bi nastavio njegova nastojanja. Arabijani, na primer, koji su u istoriji matematike igrali važnu ulogu, ostaju još uvek pri retorskoj algebri, a na njih se ugledaju i matematičari srednjeg veka.

Tek u 15. veku javljaju se pokušaji da se nastavi ono što je Diofant još vrlo davno otpočeo. Ponovo se uvode skraćenice. U tom veku započeta je današnja forma simbolike, a tada se javlja i jedan novi princip simboličke algebre, tj. javljaju se simbolički znaci. Naročite zasluge za uvođenje

[3] Ovaj prevod je iz 1910. godine

[4] Johannes MÃijller von KÃűnigsberg (6. jun 1436âĂŤ 6. ÑŸul 1476), poznatiji kao Regiomontan je bio memački matematičar, astronom i prevodilac

savremene algebarske simbolike ima francuski matematičar Fransoa Vijet[5], koji je pored ostalog i u jednačine umesto brojnih koeficijenata uveo slova-opšte brojeve, koja su onda omogućavala sažimanje opštih izvođenja. Međutim, sve do 17. veka oseća se uticaj ranije teškog načina izražavanja starijih matematičara, i tek delima engleskog matematičara Hariota (1560-1620), zatim Dekarta, Lajbnica, Njutna i Ojlera, stvorena je algebra koja omogućava da se matematička misao može prenositi bez upotrebe reči. Dakle, konačno je stvorena internacionalna simbolička algebra.

Diofant je počeo sa fundamentalnim definicijama i doslovnim opisom simbola koje je koristio. U njegovom slučaju slika je značajno različita u odnosu na sliku u klasičnoj grčkoj matematici. Za Grke klasičnog perioda brojevi su značili kolekcije jedinica i to su bili celi brojevi. Jedinicu su gledali kao nedeljivu, pa tako razlomljene i iracionalne veličine nisu zvali brojevima. Nije bilo negativnih brojeva, kao ni ekvivalenata za negativne brojeve. Diofantovo izlaganje je čisto analitičko. Za označavanje nepoznatih i njihovih stepena, suprotnih i recipročnih brojeva, minusa i jednakosti, Diofant koristi skraćen zapis reči ili simbole. Imao je preciznu predstavu o negativnim brojevima i bio je prvi matematičar koji je vršio algebarske operacije.

Upravo Prva knjiga Diofantove "Aritmetike" sadrži prilično detaljan uvod u kome u 11 tačaka on definiše pojmove i simbole koje će u daljem izlaganja koristiti. U njegovom radu susrećemo se sa početkom konstrukcije slovne algebre koja je bazirana na aritmetici, a ne na geometriji kao u slučaju Euklida. Tako da se smatra da je Diofant prvi matematičar koji je simboliku uveo u aritmetiku napravivši od nje algebru. Njegove ideje unapredili su indijski matematičari oko 6. veka, ali je prava simbolička algebra zaživela tek u vreme Fransoa Vijeta .

2.3 Diofantova jednačina

Probleme koji zahtevaju da se u njihovom rešavanju koriste sistemi od dve linearne Diofantove jednačine, javljaju se u Kini početkom srednjeg veka. Japanski matematičar Seki Kova[6] 1683. godine poboljšao je vrlo staru kinesku metodu rešavanja sistema linearnih jednačina, čiji su koeficijenti prikazivani bambusovim štapićima. Bambusov štapoć bio je postavljen u tablici na ono mesto gde treba da stoji određen koeficijent. Pomeranjem i slaganjem štapića rešavao se ovaj sistem jednačina.

Kada bismo neku današnju jednačinu, na primer $5x+3y=7$, dali nekom iz doba Diofanta, on bi bio krajnje zbunjen, iako bi znao da reši tu jednačinu. Naime, u to doba matematičari su se koristili potpuno drugačijim načinom rešavanja zadataka uz drugačije simbole. Diofant je prvi rešavao ovakve jednačine.

Linearna Diofantova jednačina sa dve nepoznate se u današnjem obliku

[5] Viete Francois (Fonten le Kont 1540-Pariz 1603).

[6] Seki Kowa (1642-1708), japanski matematičar

pojavljuje u Indiji u ranom srednjem veku. Brahmagupta[7] je poznavao jednostavnu metodu za dobijanje celobrojnih rešenja te jednačine. U Evropi su prva susretanja sa linearnom Diofantovom jednačinom vezana za početak XVII veka. Algoritam za rešavanje linearne Diofantove jednačine, među prvima, dao je Baše de Mezirjak, poznat kao prevodilac Diofantove "Aritmetike" na latinski jezik. Jedan od najvećih svetskih matematičara svih vremena, Leonard Ojler[8], u V poglavlju svoje "Algebre" iz 1770. godine opisuje svoj metod za rešavanje linearne Diofantove jednačine.

Pouzdane metode i značajne teoreme koje govore o rešivosti linearnih Diofantovih jednačina sa dve i više promenljivih, datiraju iz druge polovine XIX veka. Prigodni problemi se javljaju i u arapskim matematičarskim krugovima u X veku. Njihova rešenja je dao Fibonači[9]. Konačan odgovor o rešivosti sistema linearnih Diofantovih jednačina dali su Smit i Frobenius[10].

2.4 Diofantova Aritmetika

Istorija matematičke misli beleži Diofanta Aleksandrijskog kao jednu od najznačajnijih ličnosti u evoluciju matematičkih, posebno algebarskih ideja. U Diofantovoj "Aritmetici", koja sadrži 6 sačuvanih knjiga (od napisanih 13), i odlomcima knjige o mnogougaonim brojevima, sistematično su izložene osnove elementarne algebre. Ono što najviše iznenađuje u vezi sa Diofantovom "Aritmetikom" nije samo to što Diofant koristi sasvim nov jezik i njegovo smelo proširenje domena brojeva, već i problemi koje je postavljao i rešavao. Izložen je priličan broj problema koji se svode na neodređene jednačine različitih stepena i prikazane metode za rešavanje takvih jednačina u skupu pozitivnih racionalnih brojeva.

"Aritmetika" je, u današnjem smislu reči, zbornik zadataka koji sadrži 189 problema. Međutim, pažljivim proučavanjem "Aritmetike" jasno se može uočiti da to nije obična zbirka zadataka, jer ona sadži i više rešenja pojedinih zadataka, i rešenja dobijena korišćenjem različitih metoda, kao i neophodna objašnjenja.

Iako na prvi pogled "Aritmetika" ne predstavlja teorijski rad, daljim istraživanjem se dolazi do očigledne činjenice da konkretni problemi služe kao ilustracije opštih metoda. U antičkoj matematici je to praktično bio stil: metode se ne izlažu odvojeno od zadatka, već se razotkrivaju u procesu rešavanja problema. Imponuje Diofantova sistematičnost, metodičnost i postupnost u izlaganju zadatih problema.

[7] 589-668, indijski matematičar i astronom

[8] Leonhard Euler (Bazel, 15. april 1707 - Sankt Peterburg, 18. septembar 1783.), švajcarski matematičar

[9] Leonardo Fibonacci (1170-1250), italijanski matematičar

[10] Ferdinand Georg Frobenius (26.oktobar 1849 - 3. avgust 1917.), nemački matematičar

2.4.1 Prva knjiga Diofantove "Aritmetike"

Kao što smo već rekli, Diofant je u svojoj "Aritmetici" koristio začetke simboličke notacije. U Prvoj knizi Diofantove "Aritmetike" u uvodu su definisani pojmovi i simboli koji se koriste u daljem izlaganju. U tački 1 on daje pojam broja, a u tački 2 uvodi simbole za brojeve i njihove stepene. Po Radojčiću[11], Diofant je za nepoznatu koristio znak ς. Problem u velikoj meri komplikuje činjenica da nije uveo simbole za drugu promenljivu, pa bi ponekad u okviru jednog problema ς označavalo više od jednog nepoznatog broja. Pored toga, uvodi notaciju za šest stepena nepoznate x : x^2, x^3, x^4, x^5, x^6. Kvadrat nepoznate obeležavao je sa Δ^v (od reči ΔINAMIΣ = kvadrat), a kub sa K^v (od reči KΥBOΣ = kub). Stepene tretira po aditivnom principu, tako da je četvrti stepen ustvari kvadrat kvadrata $\Delta^v\Delta$, peti stepen kvadrat-kub Δ^vK, šesti stepen kub-kub K^vK. Ovo je bio slučaj i pre Diofanta, ali i posle njega. U Evropi je prvi aditivni princip formiranja stepena u XIII veku koristio poznati italijanski matematičar iz Pize, Leonardo Fibonači

U tački 2 svoje prve knjige "Aritmetike" Diofant takođe uvodi i pojam jedinice, u tački 3 vrednosti recipročne datim stepenima, tj. stepene sa negativnim eksponentima. Uveo je i specijalan termin χ za negativne eksponente i time kompletirao simbolizam za označavanje pozitivnih i negativnih stepena jedne promenljive, uključujući šest stepena. Tako na primer, ς^χ predstavlja $\frac{1}{x}$, $\Delta^{v\chi}$ je $\frac{1}{x^2}$, $K^{v\chi}$ je $\frac{1}{x^3}$, $\Delta^{v\chi}\Delta$ je $\frac{1}{x^4}$, $\Delta K^{v\chi}$ je $\frac{1}{x^5}$, $K^{v\chi}$K je $\frac{1}{x^6}$ ... Tačka 4 karakteristična je po tome što se u njoj definiše množenje stepena. U njoj Diofant uvodi pravilo za množenje x^m sa x^n za pozitivno i negativno m i n ($|m| \geq 6$, $|n| \geq 6$). U tački 5 definiše se proizvod broja i njemu recipročnog broja, a u tački 6 množenje sa jedinicom kao neutralnim elementom.

Brojčane koeficijente Diofant je obeležavao dodatnim simbolima M^Δ, a za pisanje brojčanih koeficijenata Diofant je koristio starogrčki način upotrebe slova sa crtom iznad (koji je kasnije bio korišćen u starom srpskom i drugim slovenskim jezicima), pri čemu je brojna vrednost određena pozicijom slova u alfabetu. Naime, Grci su koristili slova alfabeta da označe brojeve. Prvih devet slova $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$...označavaju brojeve od 1 do 9. Sledećih devet predstavljaju brojeve od 10 do 90, a poslednjih devet predstavljaju hiljade[12]. Tako, na primer, $\overline{\beta} = 2$, $\overline{\sigma} = 200$, $\overline{\sigma\beta} = 202$, $\overline{\gamma} = 3$, $\overline{\iota} = 10$, $\overline{\iota\gamma} = 13$.

Što se tiče algebarskih operacija, Diofant sabiranje nije obeležavao posebnim znakom, već bi samo dopisivanje članova, dakle nadovezivanje označavalo zbir. Za oduzimanje je imao simbol Λ (od reči ΛEĐŸĐ§ΣIΣ=oduzimanje), dok je za jednakost koristio I (od reči IΣΩΣ=jednak). Obzirom da je brojčani koeficijent pisao iza nepoznate, u Diofantovoj notaciji jednačina

$$(x^3 + x) - (5x^2 + 1) = x$$

[11] 7, strana 71

[12] Grčki alfabet ima 24 slova, ali su označavanje brojeva uveli još tri stara slova

je izgledala ovako

$$K\overline{A}\ SS\overline{H}\ \Lambda\ \Delta\overline{E}\ M^{\Delta}\overline{A}\ I\ S\overline{A}.$$

Ali to nije sve. Iako je Diofant gledao samo pozitivna racionalna rešenja, on je lako koristio i negativne brojeve u pomoćnim izračunavanjima. On je praktično poznavao i negativne brojeve i takve brojeve zvao je brojevima za oduzimanje, za razliku od brojeva za sabiranje. Za njih koristi i poseban izraz $\lambda\epsilon\tau\psi\iota\varsigma$, izveden od reči $\lambda\epsilon\tau\pi\omega$, što znači nedostaje, nedovoljno, tako da termin može biti preveden kao "nedostatak". Mnogi su ovaj termin prevodili kao "oduzimanje", što je pogrešno, jer je Diofant, kao što smo rekli, koristio drugi izraz za ovu algebarsku operaciju. Međutim, Diofant svoje "brojeve za oduzimanje" nije koristio samostalno, već samo u sklopu izraza sa obavezno pozitivnim rezultatom. Drugim rečima, on je znao šta je $2-1$, ali nije znao šta je -1.

Tačka 9 govori o proizvodu negativnog i pozitivnog broja i dva negativna broja i u njoj se definiše simbol koji odgovara našem današnjem minusu. Naime, on je formulisao odnos brojeva sledećim pravilom za znakove: proizvod dva broja za oduzimanje je broj za sabiranje, a broja za oduzimanje sa brojem za sabiranje je broj za oduzimanje (što bi danas rekli: negativan pomnožen sa negativnim daje pozitivan, a negativan pomnožen sa pozitivnim daje negativan). Karakterističan znak za negativno je obrnuto i skraćeno slovo ψ.

Tačka 11 sadrži zakon distribucije zbira u proizvod.

Svi Diofantovi problemi u prvoj knjizi, a ima ih tačno 39, su određeni, jer predstavljaju ili jednačine sa jednom nepoznatom ili sisteme jednačina kod kojih je broj jednačina jednak broju nepoznatih. Problemi, bez obzira da li se radi o sistemima jednačina ili jednačinama su zadati metodički, od lakšeg ka težem. Čak i oni problemi koji samom svojom formulacijom neodređeni, postaju rešivi, jer im se u samom procesu rešavanja otklanja dodavanjem novih uslova[13].

Na primer, u problemu I_{14} (Odrediti dva broja takva da njihov proizvod i njihov zbir imaju zadati odnos) koji se u suštini svodi na jednačinu $xy = k(x+y)$, Diofant prvo za koeficijent proporcionalnosti proizvoda i zbira fiksira $k = 3$, a potom primećuje da se jedan od brojeva x i y može zadati proizvoljno. Uzimajući za $y = 12$, lako se dobija $x = 4$. Interesantno je da potpuno isti problem Diofant rešava i u drugoj knjizi, sada kao problem II_3, koji tretira kao neodređenu jednačinu u kojoj bira samo koeficijent proporcionalnosti $k = 6$. Vrednosti za x i y dobija tako što uzima da su oni upravo proporcionalni, tj. $x = t, y = \beta t$.

U prvoj knjizi Diofantove "Aritmetike" je nekoliko zadataka[14] dato u obliku sistema dve jednačine sa dve nepoznate koji je ekvivalentan kvadratnoj jednačini. Zanimljivo je da kod ovih problema Diofant postavlja uslov da

[13] zadaci $I_{14}, I_{22}, I_{23}, I_{24}, I_{25}$

[14] $I_{27}, I_{28}, I_{29}, I_{30}$

diskriminanta bude potpun kvadrat, čime postiže da rešenja dobijene jednačine budu racionalna.

2.4.2 Druga kniga Diofantove "Aritmetike"

Problemi druge knjige Diofantove "Aritmetike" već se konkretno odnose na Diofantove jednačine. Prvih deset problema predstavljaju jednačine oblika $F_2(x,y)=0$, gde je $F_2(x,y)$ polinom drugog stepena sa racionalnim koeficijentima. U ovoj knjizi "Aritmetike" Diofant posmatra različite neodređene jednačine drugog reda i osnovni prateći rezultat: neodređene jednačine drugog reda sa dve nepoznate sa ili bez racionalnih rešenja ili beskonačno mnogo. Ako jednačina $F_2(x,y)=0$ ima racionalno rešenje, onda ima i beskonačno mnogo racionalnih rešenja, pri čemu nepoznate mogu biti iskazane kao racionalne funkcije jednog parametra: $x=\Phi(t)$ i $y=\Psi(t)$.

Opšti metod Diofanta može se ilustrovati na primeru osmog problema II knjige, čiji bi bukvalni prevod bio: "podeliti dati kvadrat na sumu dva kvadrata", a koji u suštini predstavlja Pitagorinu jednačinu $x^2+y^2=z^2$.

Diofant je konkretno rekao: "Podeliti 16 na sumu dva kvadrata". Neka je prva suma x^2, a druga $y^2=16-x^2$. Kako $16-x^2$ mora biti potpun kvadrat, neka je to kvadrat broja $y=2x-4$. Naravno, ne slučajno baš ovog broja. Njegovim kvadriranjem dobija se $16-x^2=4x^2-16x+16$. Ako obema stranama dodamo $x^2, 16x$ i -16 dobijamo $5x^2=16x$, dakle $x=\frac{16}{5}$ ili $x=0$, pa je traženo netrivijalno razlaganje broja 16 na brojeve $\frac{256}{25}$ i $\frac{144}{25}$. Svaki od ovih brojeva je kvadrat, a njihova suma je upravo broj 16, što je i bio zahtev problema.

Međutim, do sličnog rezultata se može doći i ako se uzme, na primer $y=5x-4$. Tada je

$$16-x^2=(5x-4)^2,$$

ili posle kvadriranja

$$16-x^2=25x^2-40x+16,$$

pa dodavanjem obema stranama $x^2, 40x$ i -16 dobijamo

$$26x^2=40x$$

tj. $x=0$ ili $x=\frac{20}{13}$. Očigledno je u tom slučaju traženo netrivijalno razlaganje broja 16 na brojeve $\frac{400}{169}$ i $\frac{2304}{169}$.

Ovaj primer dokazuje dve stvari: da se dati metod može oupštiti i da data jednačina u skupu racionalnih brojeva, verovatno ima beskonačno mnogo rešenja.

Pokušaćemo da izložimo ovaj Diofantov metod u opštem slučaju. Tako razmatramo jednačinu na koju se problem svodi: $x^2+y^2=z^2$. Jedno od njenih rešenja je $(0,-z)$. Diofant je uveo smenu $y=kx-z$ i dobio da je

$$z^2-x^2=(kx-z)^2.$$

Posle kvadriranja dobija se

$$z^2 - x^2 = k^2x^2 - 2kxz + z^2.$$

Rešavanjem dobijene jednačine po x dobija se

$$(k^2 + 1)x^2 = 2kxz.$$

Sledi da je $y = \frac{k^2-1}{k^2+1}z$, a to znači da je $\frac{x}{z} = \frac{2k}{k^2+1}$ i $\frac{x}{z} = \frac{k^2-1}{k^2+1}$.

Iako Diofant nije ništa napisao o broju rešenja, očigledno je da je formulama $x = 2k, y = k^2 - 1$ i $z = k^2 + 1$definisano beskonačno mnogo racionalnih rešenja date jednačine.

Jednačina $x^2 + y^2 = z^2$ je poznata kao Pitagorina jednačina, a svako njeno rešenje (x, y, z) kao Pitagorina trojka. Međutim, danas je opšteprihvaćena formula koja generiše sve Pitagorine trojke:

$$x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2.$$

Ova formula se dobija kada se u prethodnoj definiciji rešenja Pitagorine jednačine uzme da je parametar k racionalan broj te da se može napisati kao $k = \frac{m}{n}$ gde su m i n uzajamno prosti prirodni brojevi.

Iako se Diofant veoma često koristio ovim formulama pa mu se one ponekad i pripisuju, ipak se smatra da je ta formula verovatno Euklidovo delo, bar u smislu prvog pisanog traga. Ali otkriće da je broj Pitagorinih trojki, kao i formalno tvrđenje kojim su one opisane, ipak pripada Diofantu, jer u trećoj knjizi "Aritmetike" u komentaru rešenja 19. problema on kaže: "Mi znamo da se razlaganje datog kvadrata na dva kvadrata može izvesti na beskonačno mnogo načina".

Diofantov parametarski metod koji smo opisali prethodnim primerom može se uspešno primeniti na rešavanje velikog broja kvadratnih Diofantovih jednačina kod kojih je poznato bar jedno osnovno celobrojno ili racionalno rešenje.

2.4.3 Ostale knige Diofantove "Aitmrtike"

Treća kniga Diofantove "Aritmetike" predstavlja logičan nastavak prethodnih Diofantovih izlaganja i u njoj se on uglavnom bavi sistemima neodređenih jednačina, pri čemu je stepen promenljivih manji ili jednak 2, a broj jednačina uvek veći ili jednak 3.

U četvrtoj knjizi Diofant je razmatrao neodređene kubne i kvadratne jednačine, pa čak i jednu jednačinu šestog stepena[15]. Svoj metod za određivanje racionalnih rešenja neodređenih jednačina oblika $F_2(x, y) = 0$ on prenosi na jednačine oblika $F_3(x, y) = 0$. Interpretirano jezikom analitičke geometrije Diofant u prvom slučaju traži tačke sa racionalnim koordinatama u kojima

[15] 18. tačka

prava $y = kx$(gde je k neki racionalan broj) seče krivu $F_2(x, y) = 0$, a u drugom slučaju je dodiruje. U četvrtoj knjizi Diofant za dobijanje racionalnih tačaka krive $F_3(x, y) = 0$ koristi dve slične metode: "metod sečice" i "metod tangente".

Metod sečice zasniva se na sledećem: Neka su poznata dva racionalna rešenja neodređene jednačine $F_3(x, y) = 0$, na primer (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Kroz tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ konstruiše se prava koja krivu L definisanu jednačinom $F_3(x, y) = 0$ seče u tački $C(x_3, y_3)$, koja će takođe imati racionalne koordinate.

Metod tangente: Ako je poznato samo jedno rešenje neodređene jednačine $F_3(x, y) = 0$, na primer (x_1, y_1), onda se kroz tačku $A(x_1, y_1)$, kao dodirnu, konstruiše prava koja krivu L definisanu jednačinom $F_3(x, y) = 0$ seče u tački $B(x_2, y_2)$.

Peta knjiga sadrži najsloženije probleme. Na prvi pogled problemi izgledaju uobičajeno, ali ako se malo detaljnije pogledaju pojedini problemi onda se tek može shvatiti njihova suština. Takav je problem u 9. tački pete knjige koji u Diofantovoj varijanti glasi: "Razložiti jedinicu na dva razlomka i dodati svakom od njih dati broj, tako da se dobiju kvadrati." Prevedimo ovaj problem na jezik jednačina: Ako su traženi razlomci x i y, a dati broj a, onda je

$$x + y = 1, x + a = m^2, y + a = n^2.$$

Ako se poslednje dve jednačine saberu dobija se

$$x + y + 2a = m^2 + n^2.$$

kako je $x + y = 1$, dobija se

$$2a + 1 = m^2 + n^2.$$

Drugim rečima, problem se svodi na to da neparan broj treba predstaviti kao zbir kvadrata dva prirodna broja. Međutim, problem je praćen ograničenjem koje mora biti nametnuto od datog broja da bi problem bio rešen. Na sreću, Diofantov problem prate reči: "Dati broj ne sme biti neparan i njegova dvostruka vrednost uvećana za jedinicu ne sme biti broj deljiv sa prostim brojem, koji je posle dodavanja jedinice deljiv sa 4". U istoriji matematike bilo je dosta rasprava baš oko formulacije tog uslova[16], pa su u pomoć pozvani čak i filozofi.

Može se pokazati da se broj može reprezentovati kao suma dva kvadrata ako i samo ako slobodan deo kvadrata nije deljiv sa prostim brojem oblika $4n + 1$. Koliko je Diofantovo ograničenje bilo blizu ovom uslovu? Odgovor na ovo pitanje biće baziran na rekonstrukciji teksta.

Jedan od najpoznatijih matematičara 19. veka, Karl Gustav Jakobi[17]

[16] B. Merzijak, P. Ferma, K. Jakobi, P. Taneri...

[17] 1804-1851

posebno se posvetio istraživanju ovog problema. On je sproveo detaljnu psihološki analizu Diofantovog teksta i na osnovu nje predložio je sledeću rekonstrukciju: "Dati broj ne sme biti neparan i udvostručen broj plus jedinica ne sme biti deljiv bilo kojim brojem koji je povećan za 1 deljiv sa 4." Jakobi je pretpostavio da je Diofant imao dokaz da je uslov potreban, da bi mogao da opravda svoje ograničenje. Osim toga, bio je siguran da je Diofant znao da je uslov takođe i dovoljan, ali nije mogao da dokaže jer je to dokaz koji zahteva sredstva izvan onih iz antičke matematike.

Posle Diofanta jedino je Ferma dao opšti uslov za brojeve koji se ne mogu predstaviti kao suma dva kvadrata celih i racionalnih brojeva. Ovo je Fermaova formulacija: "Ako ceo broj ima prost delitelj oblika $4n-1$ i nema kvadratni delitelj, onda on ne može biti prikazan kao suma dva kvadrata." Ovaj "negativan" kriterijum je ekvivalentan "pozitivnom" kriterijumu za reprezentaciju brojeva kao sume dva kvadrata. Oba mogu biti izvedena iz teoreme koju je formulisao Ferma, a dokazao Ojler. Ona kaže da su prosti brojevi predstavljeni kao suma dva kvadrata upravo oblika $4n-1$.

Peta knjiga "Aritmetike" je karakteristična i po tome što se u zadacima od 9. do 14. tačke Diofant bavi predstavljanjem prirodnog broja u obliku zbira dva, tri, četiri kvadrata, koji zadovoljavaju neke uslove (nejednakosti). Pri rešavanju ovakvih problema Diofant primenjuje precizan algoritam koji on naziva "metod približavanja". U okviru tog metoda Diofant se bavi kvadratnim nejednačinama i rešava jednačine oblika $ax^2+1=y^2$ [18].

U problemu 14. tačke pete knjige Diofant daje potreban uslov za brojeve da bi bili predstavljeni kao suma tri kvadrata. Ograničenje je da broj ne sme biti oblika $8n+7$ da bi se predstavio kao suma tri kvadrata.

Jedan deo šeste knjige "Aritmetike" posvećen je Pitagorinoj jednačini i složenim problemima vezanim za Pitagorinu jednačinu. Naime, u ovom delu "Aritmetike" Diofant se uglavnom bavi pravouglim trouglovima čiji su merni brojevi stranica racionalni brojevi, tj. takvom trojkom racionalnih brojeva x, y, z koja zadovoljava jednačinu

$$x^2+y^2=z^2.$$

Pored tog uslova, koji je opšti za sve probleme, on dodaje uslove koji se odnose na obim, površinu, zbir površine i stranica itd. Još možemo reći da je ova knjiga preko problema pravouglog trougla, čija je površina potpun kvadrat, bila direktna inspiracija za Fermaov problem.

Šesta knjiga je značajna i zbog toga što Diofant u njenom 12. i 15. problemu iskazuje tri leme (dve u prvom i jednu u drugom) vezane za jednačinu oblika $ax^2+1=y^2$, tj. Pelovu jednačinu, u kojima dokazuje da data jednačina ukoliko ima jedno rešenje, ima i beskonačno mnogo rešenja.

Kako smo već naglasili, ostale knjige Diofantove "Aritmetike" nisu sačuvane, pa je samim tim i njihov sadržaj nepoznat današnjici.

[18] Pelova jednačina

2.5 Značaj Diofantove "Aritmetike"

Posmatrajući Diofantovu "Aritmetiku" kao celovito delo, možemo zaključiti da ono predstavlja jedno od najznačajnijih dela antičke matematike, ali i matematičke nauke uopšte. Pored toga što svojim sadržajima uvodi početke matematičke simbolike, ovo delo otvorilo je čitav niz novih matematičkih problema, ali i dalo mnoge algoritme i metode za njihovo rešavanje.

Iako je Diofant u ovom delu dao prilično detaljna rešenja 189 izloženih problema sa konkretnim brojevima, glavna suština i najveći značaj leži u činjenici da rešenja tih problema u velikoj meri predstavljaju najopštije zaključke i tvrđenja u teoriji brojeva:

1. Svaki prost broj oblika $4k + 1$ može se predstaviti u obliku zbira dva kvadrata (III_{19}, V_9).

2. Ceo broj n može se predstaviti u obliku zbira dva kvadrata, ako on nema prostih delilaca oblika $4k + 3$ neparnog stepena (V_9).

3. Ceo broj n koji je proizvod dva prosta broja oblika $4k + 1$, može se na bar dva načina predstaviti kao zbir dva kvadrata. Kvadrat takvog broja može se predstaviti u obliku zbira kvadrata na bar četiri različita načina (III_{19}).

4. Svaki prirodan broj se može predstaviti u obliku zbira kvadrata četiri racionalna broja $(IV_{29-30;V_{14}})$.

5. Nijedan prirodan broj oblika $24k + 7$ ne može se predstaviti u obliku zbira tri kvadrata celih ili racionalnih brojeva (V_{11}).

Kad je reč oalgoritmima i metodama, onda je dovoljno reći da je jedan od najopštijih metoda za rešavanje neodređenih jednačina upravo Diofantov metod parametara. Diofant je ovaj metod koristio u nekoliko varijanti, kao jedan od najefikasnijih za dobijanje opštih rešenja i dokazivanje da neki problem ima ili nema rešenje, kao i za uspostavljanje kriterijuma o beskonačnom skupu rešenja. Kroz upoznavanje sa knjigama "Aritmetike" osim ove metode pomenuli smo još neke kao što su, na primer, metod sečice, metod tangente, metod približavanja, itd.

2.6 Uticaj Diofanta na druge matematičare

Na osnovu svega što je napisano, jasan je veliki značaj Diofantove "Aritmetike" i njegovog rada uopšte. Već punih 18 vekova njegovo delo inspiriše veliki broj matematičara na stvaralaštvo.

Diofantov rad je komentarisan i u antici. Poznata Hipatija, ćerka naučnika Teona Aleksandrijskog, posvetila je svoje radove analizi Diofantovih knjiga. Hipatija je živela krajem 4. i početkom 5. veka nove ere. Slavu je stekla kao brilijantan govornik i ekspert Platonove filozofije. Nažalost, njeni radovi nisu došli do nas.

Nisu nam poznati Aleksandrijski matematičari posle Hipatije. Poslednji grčki naučnici su Proklus, Isidorus i Simplikus, koji su radili u Atini. Ali i ovde su se naučne misli ugasile početkom 7. veka. Antička nauka je propala zajedno sa antičkim društvom. Između 9. i 13. veka otvoreni su novi naučni centri u Konstantinopolju, Bagdadu i drugim gradovima Arapskog istoka.

Početkom 12. veka naučne misli su odatle premeštene u Evropske centre. Evropski naučnici se upoznaju sa Diofantovim algebarskim idejama 300 godina pre učenja njegovih aritmetičkih ideja. Ovo nije iznenzđujuće. Nova algebra uzeta je od Diofantovog vizantijskog komentatora Plandusa[19], kao i od arapskih matematičara, posebno Abu'l Vafe i njegove škole[20].

Arabijski matematičari koristili su reči umesto oznaka za označavanje stepena nepoznatih. Štaviše, u radu sa stepenima nepoznatih, oni su koristili čudan multiplikativni princip umesto pogodan aditivni princip koji je koristio Diofant. Na primer x^6 su zvali "kvadrat-kub", a ne kao Diofant "kub-kub". međutim, u slučajux^5 nisu mogli da daju ime bazirano na nižem stepenu, jer je 5 prost broj i ne može biti napisan kao proizvod njegovih faktora. Slična teškoća je nastala u vezi sa svim prostim stepenima promenljuve. Ovaj notacioni princip preuzeli su od arabijskih matematičara evropski. Posebno, to je bilo korišćeno u Italiji tokom renesanse i kasnije kod nemačkih algebrista. Jedan izuzetak bio je u 13. veku matematičar Leonardo Pizano. On nije samo koristio aditivni princip za stepene nepoznate, nego je i prvi Evropljanin koji je razmotrio problem koji se svode na neodređene jednačine.

Diofantova pravila za rad sa polinomima i jednačinama u srednjem veku prihvaćeni su praktično od strane svih algebrista. Međutim, daleko manje spremno prihvaćeni su negativni brojevi. Arabijski matematičari ih uopšte nisu koristili a Evropljani su prihvatili sa velikom dozom skepticizma. Dugo su ih zvali "lažnim" brojevima i pokušavali da rade bez njih.

Diofantova "Aritmetika" sadrži drugi, daleko dublji krug ideja, Diofantovu analizu. Dugo vremena ove ideje su bile potpuno nepoznate. Paradoksalna je situacija da su u Evropi u 15. i 16. veku naučnici istraživali algebru izvedenu od Diofanta, ali nisu znali ništa o njegovom radu. Naime, do 16. veka Diofantovim radovima su se bavili arapski matematičari, a njihova matematička znanja i znanja antičke civilizacije u Evropu stižu preko Vizantije, tako da evropski matematičari koriste ideje i metode drevnih civilizacija, ali nemaju dodira sa njihovim radovima.

Prvi koji je čitao Diofantove radove bio je u 15. veku astronom Johan Miler. Miler je, boraveći u Veneciji otkrio Diofantove rukopise i o njima pisao prijatelju. Sadržaj rukopisa bio je neverovatno bogat i Miler je odlučio da ga prevede. Prvo je pokušao da pronađe svih 13 knjiga koje Diofant pominje u uvodu, ali uspeo je da pronađe samo 6 knjiga koje su i danas poznate.

[19] 13. vek
[20] 10. vek

Međutim, prevod ipak nije urađen.

Period renesanse je u Evropi značajno probudio interesovanje za umetničke i naučne domete antike. U tom periodu najznačajnija dela u oblasti algebre stvara Fransoa Vijet, kome su očigledno veoma dobro bili poznati Diofantovi radovi, pa prema tome i njegove ideje i metode. Posle Diofanta, Vijet je bio taj koji je stvorio nove korake u izgradnji slovne algebre, pa je s pravom nazvan ocem slovnog računa.Vijet je uveo simbole za proizvoljne konstantne parametre u problemima. Tada su se prvi put pojavile formule i bilo je moguće zameniti neke umne operacije sa jednim slovom.

U 16. problemu V knjige "Aritmetike" Diofant je napisao: "Razlika dva kuba može biti predstavljena kao suma dva kuba." Očigledno, problem se svodio na jednačinu

$$x^3 + y^3 = a^3 - b^3$$

za $a > b > 0$ i proizvoljne x i y. Rešenje ovog problema ne postoji u "Aritmetici". Vijet je u svojoj knjizi dokazao ovo tvrđenje i postavio dva adiciona analogna problema:

$$x^3 + y^3 = a^3 - b^3 (x > y > 0, a > b >)$$

$$x^3 - y^3 = a^3 - b^3, (x > y > 0, a > b >).$$

On sva tri problema rešava sredstvima Diofantove metode tangenti. Na primer, da bi rešio prvi problem Vijet je stavio smene $x = t - b, y = a - kt$ i posle zamene dobio

$$t^3(1 - k^3) + 3t^2(ak^2 - b) + 3t(b^2 - a^2k) = 0.$$

Zatim je stavio $b^2 - a^2k = 0$, što je ekvivalentno uslovu da je prava $y = a - k(x + b)$ tangenta krive date jednačinom $x^3 + y^3 = a^3 - b^3$ u tački $(-b, a)$, i našao da je $t = \frac{3a^3b}{a^3b^3}$. Za x i y dobijamo

$$x = b\frac{2a^3 - b^3}{a^3 + b^3}, y = a\frac{a^3 - 2b^3}{a^3 + b^3},$$

što daje da će rešenje biti pozitivno samo ako je $a^3 > 2b^3$. Ovo protivreči Diofantovoj tvrdnji povezanoj sa jednačinom $x^3 + y^3 = a^3 - b^3$, da "razlika dva kuba može biti predstavljena kao suma dva kuba". Kasnije, ovu zagonetku je uspeo da reši Ferma i savlada sličnu teškoću vezanu za jednačinu $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$, koju je on dodao na jednačine Diofanta i Vijeta. Njegova ideja za savladavanje ove teškoće je postupak ponavljanja metode tangente. Ali, opet se može postaviti pitanje: Da li je Diofant ponavljao metod tangente mnogo pre Ferme?

Tek posle Vijeta nastaje puna afirmacija Diofantove "Aritmetike". U svojoj poznatoj "Algebri" krajem 16. veka, tačnije 1572. godine, autor Rafael

Bombeli pominje 143 Diofantova problema. U uvodu ovog rada Bombeli je napisao: "Materijal za poslednji deo knjige je pronađen u biblioteci našeg Gospoda u Vatikanu, napisanog od određenog Diofanta, grčkog autora koji je živeo u vreme Antonius Piusa". Pius je bio rimski imperator koji je živeo u 2. veku nove ere. Nakon čitanja rukopisa, Bombeli je zaključio da je njegov autor bio "veliki poznavalac teorije brojeva". Bombeli i Pacci, kasniji rimski matematičar, odlučili su da prevedu pronađeni rukopis smatrajući da je potrebno obogatiti svet tako važnim delom. Uspeli su da prevedu 5 od 7 knjiga, ali na nesreću, prevod je nestao bez traga.

Diofanova "Aritmetika" uticala je na celu Bombelijevu knjigu. U krajnjoj verziji knjige, njegovi problemi su formulisani na način kao kod Diofanta, iako su u originalnom rukopisu bili predstavljeni na drugačiji način. Osim toga, Bombeli je promenio neke teoreme i dao ih bliže onima koje je našao kod Diofanta.

Bombelijeva Algebra je za nas važna jer je u njoj prvi put uključen Diofantov problem, doduše bez konteksta. Osim toga, ovo delo sadrži poboljšanu algebarsku notaciju za stepene promenljivih i u njemu se prvi put pojavljuju kompleksni brojevi i precizna pravila za operacije sa njima.

Samo tri godine posle objavljivanja Bombelijeve Algebre, pojavio se prvi latinski prevod "Aritmetike". Ovaj prevod pripremio je poznati filozofi filolog Ksilandrom[21]. Iako nije bio poznavalac matematike, njegov prevod u celosti je bio prilično dobar.

Problemi iz prve četiri Diofantove knjige pojavili su se 1585. godine u knjizi dobro poznatog matematičara i mehaničara Simona Stevina. Drugo izdanje ove knjige, pripremljeno od nadarenog algebriste Alberta Žirara uključuje i probleme iz preostale dve knjige. Međutim, Diofantove metode potpuno su oživeli u svojim knjigama dva najveća francuska matematičara u 16. i 17. veku, Fransoa Vijet i Pjer Ferma.

Naime, 1621. godine dogodio se revolucionarni događaj, kada se pojavio najpre grčki, a zatim i savršen latinski prevod Diofantove "Aritmetike" sa tumačenjem i komentarima, čiji je autor bio francuski matematičar Gaspar Klod Baše de Merzijak[22]. Novi prevod bio je jači od Ksilanderovog prevoda i sadrži grčki tekst kao i latinski prevod. Ovo izdanje Diofantove "Aritmetike" postalo je slavno, ne samo zbog kvalitete prevoda, već jer je na marginama jednog od primeraka koji su mu bili dostupni i koje je pažljivo proučavao, svoja teorijsko-numerička zapažanja zapisao veliki francuski matematičar Pjer Ferma. On je na taj način zapisao čak 45 veoma zanimljivih komentara što najbolje govori sa koliko je interesovanja Ferma čitao Diofantovo delo i koliko duboko je pronikao u Diofantove ideje i metode. Neki od tih komentara predstavljali su rešenje nečeg što Diofant, Vijet i de Merzijak nisu do kraja rešili, dok su neki predstavljali novo tvrđenje ili uopštenje nekog od

[21] Pravo ime mu je bilo Vilhelm Holcman

[22] 1581-1683

Diofantovih problema. Sigurno je najznačajniji drugi Fermaov komentar koji se odnosi na 8. zadatak druge knjige "Aritmetike" koji se odnosi na opšte rešenje Pitagorine jednačine $x^2 + y^2 = z^2$. Kao komentar na rezultat koji je dobio Diofant, tj. činjenicu da Pitagorina jednačina ima beskonačno mnogo celobrojnih rešenja, Ferma je napisao: "Međutim, nemoguće je kub razložiti na dva kuba, ni bikvadrat na dva bikvadrata, i uopšte nikakav stepen veći od kvadrata, na dva stepena sa istim takvim izložiocem. Ja sam za to otkrio izvanredan dokaz, no za njega su margine ove knjige zaista male."

Ovim komentarom koji je Ferma ostavio praktično je formulisan čuveni veliki Fermaov problem, tj. Velika Fermaova teorema, koja je svom autoru donela slavu daleko izvan granica matematike i koja tvrdi da je jednačina $x^n + y^n = z^n$ nemoguća za pozitivne vrednosti x, y, z ako je n prirodan broj i $n > 2$. U Fermaovoj zaostavšini nije pronađen dokaz o kom je govorio, pa je zauvek ostala zagonetka da li je i kakvim dokazom Ferma raspolagao. Isto koliko su želeli da reše Fermaov problem, matematičari su toliko želele i da saznaju da li je Fermaov dokaz zaista postojaoi da li je bio korektan. Ova teorema je zbog svega toga bila predmet istraživanja Ojlera, Ležandra, Kumera i drugih sjajnih matematičara koje je stimulisao za izgradnju nove oblasti matematike, poznate kao viša aritmetika polja algebarskih brojeva.

Što se tiče Fermaovog tretmana kvadratnih i kubnih neodređenih jednačina oblika $f(x, y) = 0$, sve što možemo reći je da je on razumeo Diofantove ideje i vrlo vešto primenjivao njegov metod. Problem koji je redukovan na traženje racionalnog rešenja kubne jednačine pronađen je na margini Fermaove kopije "Aritmetike" kao i u Bilijevom radu pisanom posle Fermaove smrti sa ciljem da se razjasni njegov metod. U njegovom radu, Diofantove metode su primenjene u detaljnom i metodičkom načinu, ali ništa novo nije dodato u njih.

Diofantovim radovima, ali i Fermaovim radovima nastalim posle proučavanja "Aritmetike" bavili su se Ojler, Jakobi i mnogi drugi matematičari uključujući i one koji to i danas čine.

Upravo je Leonard Ojler[23] dao završetak prve faze istraživanja kvadratnih i kubnih jednačina koje je, kako smo rekli, počelo od Diofanta. Ojler je najveći matematičar 18. veka i zauzima vodeću poziciju u matematici gde bukvalno ne postoji područje u kojem on nije doprineo fundamentalni rezultat, duboke ideje ili jake opšte metode. Ovo je posebno tačno za Diofantovu analizu.

U svojoj "Algebri" Ojler je analizirao jednačine oblika $y^2 = ax^3 + bx^2 + c$ i $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ i pokazao kako dobiti nova rešenja sredstvima Diofantove metode tangenti. Njegovi argumenti su čisto analitički, bez ikakve geometrijske terminologije. Poslednjih godina svog života Ojler se vratio Diofantovoj analizi. On je usavršio njegov metod i po prvi put upotrebio Diofantov metod sečice za dve date racionalne tačke na krivoj. Ojler je

[23] 1707-1783

bio autor izvesnih drugih istraživanja, na prvi pogled nepovezanih sa Diofantovim problemima, koji su doprineli kompletno novom gledištu na ove probleme.

Ojlerova teorema omogućava dobijanje nove racionalne tačke na krivoj od jedne ili dve poznate racionalne tačke na toj krivoj. Prvi koji je primetio vezu između Ojlerove adicione teoreme i Diofantove analize bio je poznati nemački matematičar Karl Gustav Jakobi. To je naglasio u svom radu" Upotreba eliptičnih i Abelovih integrala na Diofantovu analizu" koji je objavljen 1834. godine. Izgleda da su Jakobijevi savremenici ignorisali ovaj rad uprkos njegovom dubokom i veoma interesantnom sadržaju. Na početku ovog rada Jakobi izražava iznenađenje da je Ojler prevideo vezu koju je on razmatrao i smatrao očiglednom. Formulisao je Ojlerovu adicionu teoremu i primetio da se iz datog konačnog broja racionalnih tačaka na krivoj Γ može dobiti beskonačan broj novih racionalnih tačaka na krivoj Γ .

Ni Ojler ni Jakobi nisu pridavali značaj geometrijskoj interpretaciji analitičkih izraza. Tako je Jakobijev rad ostao neprimećen i prvi koji je osmislio ideju izgradnje aritmetike na eliptičnim krivama bio je, početkom 20. veka, francuski matematičar Henri Poenkare. Na početku njegove knjige "Aritmetičke osobine algebarskih krivih" istaknuto je važno zapažanje autora da su aritmetičke osobine mnogih objekata vrlo blisko povezane sa njihovim transformacijama. Poenkare je počeo da razmišlja o načinu povezivanja i sistematizovanja ovog problema i Diofantove analize. U tom cilju obnovio je klasifikaciju polinoma sa dve nepoznate sa racionalnim koeficijentima. Potpuno je bazirao ovu klasifikaciju na biracionalnim transformacijama sa racionalnim koeficijentima. Poenkare je zatim objasnio Diofantov metod tangente i sečice, naravno bez pominjanja njihovog imena, za pronalaženje novih racionalnih tačaka na krivoj Γ ako su date jedna ili dve racionalne tačke krive Γ . Prvo je obe metode formulisao geometrijski, a zatim ih povezao sa Ojlerovom adicionom teoremom.

Čini se da je Poenkare bio potpuno neupućen u rad svojih prethodnika na aritmetici algebarskih krivih. Znamo za Diofantove procedure i njihove povezanosti sa Ojlerovom adicionom teoremom iz opšte teorije algebarskih krivih. Ali ideja korišćenja poznatih činjenica i metoda za izračunavanje aritmetičkih osobina krivih je zamišljena od Poenkarea nezavisno od drugih. Tako je ova ideja nastala najmanje tri puta: sredinom 3. veka nove ere u radu Diofanta, 1830. godine u radu Jakobija i početkom 20. veka u radu Poenkarea.

3 Metode rešavanja Diofantovih jednačina

3.1 Uvod

Algebarska jednačina ili sistem algebarskih jednačina sa realnim koeficijentima čije rešenje pripada skupu celih ili racionalnih brojeva, ili nekom skupu od njihovih podskupova (skupu N ili N_0) nazivaju se algebarskim Diofantovim jednačinama. Obično se pretpostavlja da Diofantova jednačina ima dve ili više promenljivih, a da sistem Diofantovih jednačina ima više nepoznatih nego jednačina. Međutim, neki primeri u daljem toku rada pokazaće postojanje i nekih drugih vrsta Diofantovih problema i jednačina. Ukoliko se nepoznate veličine u Diofantovoj jednačini javljaju samo u prvom stepenu, onda je takva jednačina linearna Diofantova jednačina, dok je ona u kojoj se promenljive javljaju sa izložiocem većim od 1, nelinearna Diofantova jednačina.

Iz definicije Diofantovih jednačina možemo zaključiti da zadaci koji sadrže ove jednačine mogu imati veoma različite i raznovrsne zahteve. Osnovna pitanja vezana za Diofantove jednačine su:

1. Dokazati ili opovrgnuti postojanje rešenja.
2. Da li jednačina ima konačno ili beskonačno rešenja?
3. Ako jednačina ima konačan broj rešenja, koliko je to?
4. Ako jednačina ima konačan broj rešenja, odrediti sva njena rešenja.
5. Ako jednačina ima beskonačno mnogo rešenja, odrediti formule koje daju sva ta rešenja (ukoliko je to moguće).
6. Od svih mogućih rešenja izdvojiti ona koja zadovoljavaju posebne uslove (ako se to traži).

Do odgovora na postavljene zahteve i pitanja često se dolazi veoma teško. Zbog svega toga teorija Diofantovih jednačina ima prilično veliki značaj i jedna je od najinteresantnijih oblasti u elementarnoj matematici. Pri rešavanju problema sa Diofantovim jednačinama najbitnije je prepoznavanje odgovarajuće metode za njeno rešavanje. Stroga sistematizacija ovih metoda sigurno ne bi bila potpuna, jer se opšti postupak može definisati samo za neke klase jednačina. U ovom radu prezentovaćemo (teorijski i kroz primere) najčešće korišćene metode: metoda razlikovanje slučajeva, metode proizvoda, količnika, zbira, nejednakosti, parnosti, diskriminante, Ojlera i Diofanta.

Ovaj deo rada ima za cilj da je što je moguće potpunije ukaže na neke teorijske osnove za realizaciju nastavnog programa u osnovnim i srednjim školama. Jer na dobrom poznavanju materije koja se izlaže počiva i svaka dobra metodička razrada.

3.2 Metod razlikovanja slučajeva

Metod razlikovanja slučajeva je jedan od najčešće korišćenih metoda za rešavanje Diofantovih jednačina, ali i uopšte za matematičke probleme u aritmetici. U teoriji Diofantovih jednačina ovaj metod može se koristiti samostalno, ali i u kombinaciji sa drugim metodama. Jednačina se često mora prvo napisati u odgovarajućem obliku, da bi se koroz razlikovanje slučajeva mogao suziti skup potencijalnih rešenja, pa konačno i naći sama rešenja. U zavisnosti od toga kakav zapis jednačine koristimo, ili pak po kojoj osnovi razlikujemo slučajeve, kombinujemo različite metode rešavanja.

Ova metoda se najčešće koristi u osnovnoj školi pri rešavanju problema koji se svode na Diofantove jednačine i zasnovan je na korišćenju nekoliko ideja: parnost, neparnost, deljivost i poslednja cifra.

Međutim, iako je ovo veoma korisna i pogodna metoda za rešavanje Diofantovih jednačina, ipak nije svemoguća i uvek primenljiva. Osim toga, kao i ostale metode, i ova je donekle proizvoljna, pa nam najveći problem predstavlja način na koji razdvajamo slučajeve. Ovde veliku ulogu igraju matematičko iskustvo, intuicija, talenat i osećaj za problem.

Rešavanjem i razmatranjem sledećih primera pokušaćemo da prezentujemo najčešće metode za razlikovanje slučajeva i formulišemo određene metodološke principe vezane za rešavanje Diofantovih jednačina ovom metodom.

PRIMER 1 *Odrediti sve uređene parove* (p, q) *prostih brojeva* p *i* q*, tako da je* $p^2 + q = 101$.

Rešenje: Ovaj primer Diofantove jednačine je jedan od onih koji možemo rešiti metodom razlikovanja slučajeva. Dva slučaja koja ovde razlikujemo su:

1. Ako je $p = 2$, onda je $q = 101 - 4 = 97 \in P$.
2. Ako je $p \geq 3$, onda je p neparan broj, pa je $101 - p^2$ paran broj, što znači da je $q = 2$, jer je 2 jedini paran prost broj. Tada je $p^2 = 99$, pa u ovom slučaju nema rešenja.

Dakle, jedino rešenje problema je uređeni par $(p, q) = (2, 97)$.

U nekim zadacima je potrebno više puta koristiti metodu razlikovanja slučajeva. Jedan takav je dat sledećim primerom:

PRIMER 2 *Odredi sve uređene parove* (x, y) *prirodnih brojeva* x *i* y *tako da važi jednakost:* $xy^2 + 4 = 2000y^2$.

Rešenje: Razlikujemo dva slučaja:

1. Ako je $y = 0$, tada dobijamo da je $4 = 0$ pa $y = 0$ nije rešenje date jednačine;
2. Ako je $y \neq 0$, pogodnom transformacijom dobijamo $\frac{4}{y^2} = 2000 - x$. Kako je $2000 - x$ prirodan broj, to je i $\frac{4}{y^2}$ takođe prirodan broj. Možemo zaključiti da y^2 mora biti delilac broja 4, tako da opet razlikujemo više slučajeva:

(a) $y^2 = 1$, onda je $y = 1$, a $x = 1996$;

(b) $y^2 = 2$, onda y nije prirodan broj, pa ovaj slučaj otpada kao rešenje jednačine;

(c) $y^2 = 4$, onda je $y = 2$, a $x = 1999$.

Na osnovu ovog razmatranja dolazimo do zaključka da više uređenih parova zadovoljava tražene uslove zadatka, pa je tako skup rešenja date jednačine $(x, y) = \{(1996, 1), (1992, 2)\}$.

Primer 3 *Odrediti sve prirodne brojeve n za koje važi da je broj $2^n + 1$ deljiv sa 3.*

Rešenje: Opet razlikujemo dva slučaja:

1. Ako je n paran prirodan broj, onda postoji prirodan broj k, takav da je $n = 2k$. Tada je $2^n + 1 = 2^{2k} + 1 = 4^k + 1$. Kako je $4 \equiv 1$ po modulu 3, to je $4^k + 1 = 1 + 1 \equiv 2$ po modulu 3. Dakle, brojevi oblika $2^n + 1 = 2^{2k} + 1 = 4^k + 1$ pri deljenju sa 3 daju ostatak 2, tj. u ovom slučaju data jednačina nema rešenja.

2. Ako je n neparan prirodan broj, onda postoji prirodan broj k, takav da je $n = 2k + 1$. Tada je $2^n + 1 = 2^{2k+1} + 1 = 2 \cdot 4^k + 1$. Kako je $4 \equiv 1$ po modulu 3, to je $2 \cdot 4^k + 1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 = 3 \equiv 0$ po modulu 3. Dakle, brojevi oblika $2^n + 1 = 2^{2k+1} + 1 = 2 \cdot 4^k + 1$ pri deljenju sa 3 daju ostatak 0, tj. deljivi su sa 3. Očigledno, rešenja ove jednačine su svi neparni prirodni brojevi.

Primer 4 *Od svih pravougaonika obima $40cm$, odredi pravougaonik najveće površine.*

Rešenje: Ako je obim pravougaonika $40cm$, onda je njegov poluobim $20cm$.Odnosno, ako dužine stranica pravougaonika obeležimo sa a i b, onda možemo zapisati da je $a + b = 20$. Razlikovaćemo tri slučaja:

1. Ako je $0 < a < 10$, onda postoji duž dužine x takva da je $a = 10 - x$. Tada je $b = 10 + x$, pa je površina pravougaonika

$$P = a \cdot b = (10 - x) \cdot (10 + x) = 100 - x^2 < 100.$$

2. Ako je $a = 10$, onda je i $b = 10$, pa je površina pravougaonika

$$P = a \cdot b = 10 \cdot 10 = 100.$$

3. Ako je $10 < a < 20$, onda postoji duž dužine x takva da je $a = 10 + x$. Tada je $b = 10 - x$, pa je površina pravougaonika

$$P = a \cdot b = (10 + x) \cdot (10 - x) = 100 - x^2 < 100.$$

Dakle, razmatrajući ove slučajeve, vidimo da od svih pravougaonika obima $40cm$, najveću površinu ima onaj čije su obe stranice po $10cm$, tj. kvadrat stranice $10cm$.

Razmatrajući prethodne primere i njihovo rešavanje, možemo uopštiti problem razdvajanja na slučajeve. Naime, neka se traži skup svih rešenja opšte Diofantove jednačine $\Phi(x, y, z, ...) = 0$, gde je S neprazan skup koji predstavlja njenu oblast definisanosti. Metod razlikovanja slučajeva ustvari se zasniva na razbijanju tog skupa S na konačno mnogo konačnih ili beskonačnih skupova $S_1, S_2, S_3 ... S_k$ tako da je njihova unija skup S, tj. da u potpunosti prekrivaju skup mogućih rešenja. Posebno je dobro mada ne i neophodno, da su ti skupovi međusobno disjunktni, tj. da je njihov presek prazan skup.

Metod razlikovanja slučajeva u rešavanju jednačine $\Phi(x, y, z, ...) = 0$ svodi se na rešavanje te jednačine na svakom od skupova $S_1, S_2, S_3 ... S_k$ na koje je razbijena njena oblast definisanosti S. Skup rešenja date jednačine predstavlja uniju svih rešenja te jednačine u svakom od skupova $S_1, S_2, S_3 ... S_k$.

Ovaj princip rešavanja jednačine možda izgleda duže, ali metodološki je jednostavniji, jer skupove $S_1, S_2, S_3 ... S_k$ možemo birati tako da rešavanje jednačine $\Phi(x, y, z, ...) = 0$ u njima bude što jednostavnije.

Razmatrajući sve navedeno o metodi razlikovanja slučajeva, a posebno prethodne primere i njihova rešenja, možemo formulisati metodološke principe korišćenja ove metode (posebno pri razbijanju supa S, tj. razdvajanja slučajeva).

- Princip potpunosti koristi se pri razdvajanju slučajeva. Naime, skup potencijalnih rešenja, tj. skup S u potpunosti se prekriva sa konačno mnogo konačnih ili beskonačnih (po mogućstvu disjunktnih) podskupova $S_1, S_2, S_3 ... S_k$ takvih da je $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup ... \cup S_k = S$. Na taj način se izbegava mogućnost da bi bilo koje potencijalno rešenje bude izostavljeno.

- Princip racionalnosti odnosi se na činjenicu da prilikom razdvajanja slučajeva treba uočiti što više podskupova koji zadovoljavaju jedan od sledeća dva uslova, tj. mogućnosti:

    1. Kada u odabranom podskupu $S_i (1 \leq i \leq k)$ domena S data jednačina nema nijedno rešenje;
    2. Kada u odabranom podskupu $S_i (1 \leq i \leq k)$ domena S data jednačina uvek ima rešenja.

  Prva mogućnost ovog principa služi za eliminaciju slučajeva koji nemaju realan smisao, pa se na taj način skup potencijalnih rešenja svodi na neku od svojih restrikcija. Ovo je naročito značajno, primarno metodološko upustvo koje ukazuje na svođenje skupa mogućih rešenja na što manje podskupove, što predstavlja prvi korak u razdvajanju slučajeva.

- Princip prirodnosti odnosi se na potrebu da prilikom razlikovanja slučajeva i prekrivanja skupa potencijalnih rešenja disjunktnim podskupovima koristimo logična razbijanja skupa mogućih rešenja S. U teoriji brojeva najčešće se skup celih brojeva ili neki njegov podskup razbija na: parne i neparne; negativne, nulu i pozitivne; klase ekvivalencije po određenom modulu...

- Princip primene ogleda se u tome da se metod razlikovanja slučajeva zasniva na primeni već poznatih matematičkih tvrđenja (Pitagorine teoreme, poznatih nejednakosti...) koje se kao slučajevi javljaju u rešavanju jednačine.

U narednim poglavljima bavićemo se sistematskom ilustracijom primene metode razlikovanja slučajeva i drugih postupaka rešavanja Diofantovih jednačina.

3.3 Metod proizvoda

Kao što smo već naglasili, metod razlikovanja slučajeva koristi se i u kombinaciji sa nekim drugim metodama. Potrebno je Diofantovu jednačinu svesti na ekvivalentan oblik pogodan za primenu metode razlikovanja slučajeva, a sredstvo za taj postupak su različite algebarske transformacije. Naizgled složene jednačine mogu se algebarskim transformacijama dovesti do proizvoda dva izraza, a potom njegovom analizom do najelementarnijih sistema jednačina.

Metod proizvoda je jedna od metoda algebarskih transformacija. Naime, zasniva se na nizu transformacija i faktorizacija Diofantove jednačine u proizvod dva ili više činilaca, nakon kojih se ovaj metod svodi na metod razlikovanja slučajeva. Najpovoljnija situacija je ukoliko se na jednoj strani jednakosti izraz koji sadrži promenljive faktorizuje na činioce, a na drugoj strani faktorizuje konstanta. Ili kada jedna od strana jednakosti predstavlja proizvod prostih brojeva, bez obzira da li se radi o konstantama ili promenljivim. Ova metoda se najčešće koristi pri rešavanju nelinearnih Diofantovih jednačina, a njeno korišćenje radi lakšeg razdvajanja slučajeva najbolje ćemo ilustrovati sledećim primerima.

PRIMER 5 *Nađi sva celobrojna rešenja jednačine* $3xy + 2y = 7$.

Rešenje: Ovu jednačinu možemo napisati u obliku proizvoda, tj. u obliku njoj ekvivalentne jednačine koja je pogodnija za primenu metode razdvajanja slučajeva

$$y \cdot (3x + 2) = 7,$$

Pa kako su y i $(3x+2)$ celi brojevi imamo sledeće mogućnosti:

1. $y = 1, (3x+2) = 7 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \notin Z, y = 1;$
2. $y = -1, (3x+2) = -7 \Rightarrow x = -3, y = -1;$
3. $y = 7, (3x+2) = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \notin Z, y = 7;$
4. $y = -7, (3x+2) = -1 \Rightarrow x = -1, y = -7.$

Sledi da jednačina ima dva rešenja koja zadovoljavaju tražene uslove:

$$(x, y) = \{(-3, -1), (-1, -7)\}.$$

PRIMER 6 *Odrediti sve parove (x, y) celih brojeva za koje je*

$$2x^2 + xy - 3y^2 = 17.$$

Rešenje: Pokušaćemo algebarskim transformacijama levu stranu jednačine da zapišemo u obliku proizvoda dva cela broja:

$$2x^2 + xy - 3y^2 = 2x^2 + 3xy - 2xy - 3y^2 =$$

$$= x(2x+3y) - y(2x+3y) = (2x+3y)(x-y).$$

Na ovakav oblik jednačine možemo primeniti metod razlikovanja slučajeva, tako da razlikujemo sledeće slučajeve:

1. $(2x+3y) = 17, (x-y) = 1 \Rightarrow x = 4, y = 3;$
2. $(2x+3y) = 1, (x-y) = 17 \Rightarrow y = -\frac{33}{5} \notin Z;$
3. $(2x-3y) = -17, (x-y) = -1 \Rightarrow y = \frac{19}{5} \notin Z;$
4. $(2x+3y) = -1, (x-y) = -17 \Rightarrow y = \frac{33}{5} \notin Z.$

Vidimo da su samo u prvom slučaju rešenja celobrojne vrednosti, pa shodno tome, zadatak ima samo jedno rešenje $(x, y) = (4, 3)$.

PRIMER 7 *Naći sva rešenja jednačine $y^2 - x^2 = 4x + 11$ u skupu celih brojeva.*

Rešenje: Transformacijom dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$y^2 - x^2 - 4x - 4 = 7,$$

odnosno

$$y^2 - (x+2)^2 = (y-x-2) \cdot (y+x+2) = 7.$$

Ova jednakost je moguća u skupu celih brojeva samo u sledećim slučajevima:

1. $y - x - 2 = 1, y + x + 2 = 7 \Rightarrow x = 1, y = 4;$

2. $y - x - 2 = -1, y + x + 2 = -7 \Rightarrow x = -5, y - 4;$

3. $y - x - 2 = 7, y + x + 2 = 1 \Rightarrow x = 1, y = -4;$

4. $y - x - 2 = -7, y + x + 2 = -1 \Rightarrow x = -5, y = -4.$

Odavde imamo četiri rešenja početne jednačine:

$$(x, y) = \{(1, 4), (-5, 4), (1, -4), (-5, -4)\}.$$

Primer 8 *Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $n^2 - 4n + 16$ potpun kvadrat nekog prirodnog broja.*

Rešenje: Neka je $m^2 = n^2 - 4n + 16$. Algebarskim transformacijama dobijamo:

$$m^2 = n^2 - 4n + 16 = n^2 - 4n + 4 + 12 = (n - 2)^2 + 12.$$

Odavde sledi da je

$$12 = m^2 - (n - 2)^2 = (m + n - 2) \cdot (m - n + 2).$$

Kako su zbir i razlika dva cela broja uvek iste parnosti (u ovom slučaju to su brojevi m i $n - 2$), i kako je $m + n - 2 \geq 0$ (*zbog* $m, n \geq 1$) razlikujemo dva slučaja:

1. $m + n - 2 = 2,\ m - n + 2 = 6 \Rightarrow m = 4, n = 0;$

2. $m + n - 2 = 6,\ m - n + 2 = 2 \Rightarrow m = 4, n = 4.$

Kako nula nije prirodan broj, to je jedino rešenje $n = 4$.

Primer 9 *Dokazati da broj $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ nije kvadrat prirodnog broja ni za jedan prirodan broj n.*

Rešenje: Kako je

$$\begin{aligned} & n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \\ = {} & n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1 \\ = {} & n^2(n^2 + 2n + 1) + n^2 + 2n + 1 \\ = {} & (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 1) \\ = {} & (n + 1)^2(n^2 + 1), \end{aligned}$$

to je dobijeni broj potpun kvadrat samo ako je $n^2 + 1$ potpun kvadrat, tj. $n^2 + 1 = a^2$. Tada je $a^2 - n^2 = 1$, tj. $(a - n)(a + n) = 1$. Iz ovoga sledi da je jedini slučaj $(a - n) = (a + n) = 1$ odakle je $a = 1$, $n = 0$, što nije moguće, jer $n = 0$ nije prirodan broj. Ovim je traženi dokaz završen.

3.4 Metod količnika

Pored pomenutog proizvoda, jedan od načina za korišćenje razdvajanja slučajeva je i metod količnika. Ovaj metod koristi se kada je data Diofantova jednačina koja se pogodnim transformacijama može prilagoditi i napisati u ekvivalentnom obliku iz kojeg jednu promenljivu možemo izraziti u zavisnosti od druge.

Metod količnika zasniva se na ideji da se jednačina oblika $A = B$, nizom algebarskih transformacija, prevede u oblik $M = N + \frac{P}{Q}$. Ako su M i N celi brojevi, onda to mora biti i broj $\frac{P}{Q}$, što znači da se Q mora sadržati u P. Uočavanjem mogućnosti u kojima se to događa, njihova analiza dovodi do logičnog načina za razdvajanje svih mogućih slučajeva. Sledeći primeri najbolje ilustruju ovu metodu:

Primer 10 *U skupu celih brojeva rešiti jednačinu:*

$$xy + 7x - 3y = 23.$$

Rešenje: Transformacijom polazne jednačine dobija se

$$x(y + 7) = 3y + 23,$$

Odnosno

$$x = \frac{3y + 23}{y + 7} = \frac{3y + 21 + 2}{y + 7} = \frac{3(y + 7) + 2}{y + 7} = 3 + \frac{2}{y + 7}.$$

Na desnoj strani smo dobili količnik (razlomak), pa možemo razlikovati dva slučaja:

1. Ako je $y = -7$, onda je imenlac razlomka jednak nuli, što ne sme biti, pa data jednačina nema rešenja;

2. Ako je $y \neq -7$, onda je $x = 3 + \frac{2}{y+7}$. Uslov zadatka zahteva da je leva strana ove jednačine ceo broj, pa onda i desna strana mora biti ceo broj. To je moguće samo ako je $\frac{2}{y+7}$ ceo broj, što znači da je $y + 7$ mora biti sadržan u broju 2. Na osnovu toga, razlikujemo mogućnsti (slučajeve):

   (a) $y + 7 = -1 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow x = 1;$

   (b) $y + 7 = 1 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow x = 5;$

   (c) $y + 7 = -2 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow x = 2;$

   (d) $y + 7 = 2 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow x = 4.$

Konačno, moguća rešenja polazne jednačine su:

$$(x, y) = \{(1, -8), (5, -6), (2, -9), (4, -5)\}.$$

Primer 11 *Nađi sve prirodne brojeve* n *za koje* $n+2$ *deli* n^4+2.

Rešenje: Treba naći sve prirodne brojeve n za koje je $\frac{n^4+2}{n+2}$ prirodan broj. Transformacijom dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{n^4+2}{n+2} &= \frac{n^4+2n^3-2n^3-4n^2+4n^2+8n-8n-16+16+2}{n+2} \\
&= \frac{n^3(n+2)-2n^2(n+2)+4n(n+2)-8(n+2)+18}{n+2} \\
&= \frac{(n+2)(n^3-2n^2+4n-8)+18}{n+2} \\
&= n^3-2n^2+4n-8+\frac{18}{n+2}.
\end{aligned}$$

Potrebno je da je količnik koji smo dobili na desnoj strani $\frac{18}{n+2}$ prirodan broj. Uzimajući u obzir da se $n+2$ sadrži u broju 18 i da je $n+2 \geq 3$, možemo razlikovati sledeće slučajeve:

1. $n+2=3 \Rightarrow n=1$,
2. $n+2=6 \Rightarrow n=4$,
3. $n+2=9 \Rightarrow n=7$,
4. $n+2=18 \Rightarrow n=16$.
   Na osnovu toga, vidimo da je skup rešenja $n \in \{1,4,7,16\}$.

Primer 12 *Nađi sve dvocifrene brojeve koji su tri puta veći od proizvoda svojih cifara.*

Rešenje: Ako traženi broj označimo sa $\overline{ab}$, tada je traženi uslov $\overline{ab}=3ab$, odnosno $10a+b=3ab$. Ova jednakost ekvivalentna je sa $10a=b(3a-1)$, odakle deljenjem sa $3a-1 \neq 0$ dobijamo:

$$b=\frac{10a}{3a-1}=\frac{9a-3+a+3}{3a-1}=\frac{3(3a-1)+a+3}{3a-1}=3+\frac{a+3}{3a-1}.$$

Sada sledi da količnik $\frac{a+3}{3a-1}$ mora biti ceo broj, tj. da je $3a-1$ sadržano u $a+3$. Uzimajući u obzir da je a prva cifra dvocifrenog broja, ona može imati vrednosti od 1 do 9, pa su tako mogući slučajevi:

1. $a=1 \Rightarrow b=5$
2. $a=2 \Rightarrow b=4$
3. $a=3 \Rightarrow b=\frac{6}{8} \notin Z$
4. $a=4 \Rightarrow b=\frac{7}{11} \notin Z$

5. $a = 5 \Rightarrow b = \frac{8}{14} \notin Z$

6. $a = 6 \Rightarrow b = \frac{9}{17} \notin Z$

7. $a = 7 \Rightarrow b = \frac{10}{20} \notin Z$

8. $a = 8 \Rightarrow b = \frac{11}{23} \notin Z$

9. $a = 9 \Rightarrow b = \frac{12}{26} \notin Z$,

Pa možemo zaključiti da su jedina rešenja $(a, b) = \{(1, 5), (2, 4)\}$, tj. traženi dvocifreni brojevi su 15 i 24.

Možemo doći do rešenja i neproveravajući sve slučajeve pojedinačno. Vidimo da $a \geq 3$ važi $3a - 1 > a + 3$, pa $\frac{a+3}{3a-1}$ ne može biti celobrojan, tako da imamo dva dvocifrena broja koja zadovoljavaju početni uslov i to su 15 i 24.

Primer 13 *Odredi cele brojeve x i y tako da važi* $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$.

Rešenje: Transformišući jednačinu razdvajanjem promenljive dobijamo:

$$x^2 + 2x - 6 = xy + 3y = y(x + 3).$$

Kako za $x = -3$ poslednja jednačina nema rešenja, to mora biti

$$y = \frac{x^2 + 2x - 6}{x + 3} = \frac{x^2 + 3x - x - 3 - 3}{x + 3} = x - 1 - \frac{3}{x + 3}.$$

Količnik $\frac{3}{x+3}$ mora biti ceo broj pa su mogući slučajevi:

1. $x + 3 = 1 \Rightarrow x = -2, y = -6$;

2. $x + 3 = -1 \Rightarrow x = -4, y = -2$;

3. $x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0, y = -2$;

4. $x + 3 = -3 \Rightarrow x = -6, y = -6$.

Na osnovu toga dobijamo da je skup rešenja početne jednačine:

$$(x, y) = \{(-2, -6), (-4, -2), (0, -2), (-6, -6)\}.$$

3.5 Metod zbira

Još jedan način da se jednačina svede na oblik pogodan za razlikovanje slučajeva je metod zbira. Ovaj metod zasniva se na transformaciji jedne strane date jednačine u oblik zbira celih (najčešće nenegativnih ili kvadrata) brojeva, i daljoj diskusiji slučajeva koji mogu nastupiti. Ponekad su transformacije jednačine u takav oblik skoro očigledne, ali često nisu vidljive na prvi pogled.

Primer 14 *Odredi dva cela broja takva da je njihova suma dvostruko manja od sume njihovih kvadrata.*

Rešenje:Ako tražene brojeve označimo sa x i y, tada problem možemo zapisati na sledeći način:

$$x^2 + y^2 = 2(x + y),$$

ili drugačije

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2,$$
$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Na ovaj način smo levu stranu jednačine zapisali kao zbir dva kvadrata. Jedini način da se broj 2 napiše kao suma dva kvadrata dva cela broja je kao suma dve jedinice.Odatle sledi da je

$$(x - 1)^2 = (y - 1)^2 = 1,$$

odnosno možemo razlikovati četiri slučaja:

1. $x - 1 = 1,\ y - 1 = 1 \Rightarrow x = 2, y = 2,$
2. $x - 1 = 1,\ y - 1 = -1 \Rightarrow x = 2, y = 0,$
3. $x - 1 = -1,\ y - 1 = 1 \Rightarrow x = 0, y = 2,$
4. $x - 1 = -1,\ y - 1 = -1 \Rightarrow x = 0, y = 0.$

Na osnovu razmatranja ovih slučajeva, vidimo da su parovi brojeva koji zadovoljavaju zadati uslov dati skupom

$$(x, y) = \{(2, 2), (2, 0), (0, 2), (0, 0)\}.$$

Primer 15 *U skupu celih brojeva reši jednačinu* $4x^2 + y^2 = 12x + 4y - 12$.

Rešenje: Koristeći algebarske transformacije levu stranu jednačine možemo napisati kao zbir kvadrata

$$(2x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Zbir dva kvadrata jednak je 1 jedino u slučaju kad je jedan od njih 1, a drugi 0. Zbog toga su mogući slučajevi:

1. $(2x - 3)^2 = 0,\ (y - 2)^2 = 1$
   (a) $2x - 3 = 0,\ y - 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin Z,\ y = 3,$
   (b) $2x - 3 = 0,\ y - 2 = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin Z,\ y = 1;$
2. $(2x - 3)^2 = 1, (y - 2)^2 = 0$
   (a) $2x - 3 = 1,\ y - 2 = 0 \Rightarrow x = 2,\ y = 2;$

(b) $2x-3=-1,\ y-2=0 \Rightarrow x=1,\ y=2.$

Razmatrajući moguće slučajeve i uzimajući u obzir početni uslov, da tražena rešenja moraju biti celobrojne vrednosti, dobijamo $(x,y)=\{(1,2),(2,2)\}$.

Primer 16 *Odredi celobrojna rešenja jednačine:*

$$x^2+5y^2+5z^2-4xz-2y-4yz+1=0.$$

Rešenje: Transformišimo jednačinu na sledeći način:

$$(x^2-4xz+4z^2)+(z^2-4yz+4y^2)+(y^2-2y+1)=0.$$

Odavde je

$$(x-2z)^2+(z-2y)^2+(y-1)^2=0,$$

pa je jedina mogućnost koja zadovoljava ovu jednakost da je:

$$x-2z=0,\ z-2y=0,\ y-1=0.$$

Dobijamo da je $y=1,\ z=2y=2,\ x=2z=4$, pa je $(x,y,z)=(1,2,4)$ jedino celobrojno rešenje početne jednačine.

3.6 Metod nejednakosti

Ova metoda se često koristi da bi se smanjio skup mogućih rešenja jedne jednačine, a zatim se na tom smanjenom skupu razlikuju slučajevi. U stvari, nejednakost se koristi da se iz oblasti definisanosti jednačine izdvoje i eliminišu skupovi u kojima jednačina nema rešenja (najbolje beskonačni deo), a zatim se u preostalom delu oblasti definisanosti jednačina rešava primenom neke od ostalih metoda.

Metoda nejednakosti često se koristi i u kombinaciji sa nekom drugom metodom za rešavanje Diofantovih jednačina, kao što možemo videti na sledećem primeru.

Primer 17 *Nađite $x,y\in Z$ koji zadovoljavaju jednačinu*

$$5x^2+5y^4+4x+4xy^2=5.$$

Rešenje: Jednostavnim transformacijama jednačinu možemo napisati u obliku

$$4x^2+4x+1+x^2+4xy^2+4y^4+y^4=6$$
$$(2x+1)^2+(x+2y^2)^2+y^4=6.$$

Uočavamo da smo na levoj strani gornje jednačine dobili sumu tri nenegativna broja. Ukoliko bi bilo $\mid y \mid > 1$, važilo bi i $y^4\geq 16$, pa bi leva strana jednačine bila veća od 6. Ovom nejednakošću smo oblast mogućih rešenja smanjili na $\mid y \mid \leq 1$. Dakle, uslov je da $y\in\{-1,0,1\}$. Analiziramo tri moguća slučaja:

Ako je $y = 0$ dobijamo

$$(2x+1)^2 + x^2 = 6$$

$$5x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Rešenje te kvadratne jednačine je $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{29}}{5} \notin Z$, pa u ovom slučaju početna jednačina nema rešenja.

Ako je $y = \pm 1$ naša jednačina postaje

$$(2x+1)^2 + (x+2)^2 + 1 = 6$$

$$5x^2 + 8x = 0$$

$$x(5x+8) = 0,$$

pa je $x_1 = 0, x_2 = \frac{-8}{5} \notin Z$. Zaključujemo da imamo dva rešenja:

$$x = 0, y = 1 \ i \ x = 0, y = -1.$$

Primer 18 *Odredi sve dvocifrene prirodne brojeve koji su jednaki zbiru kuba cifre desetica i kvadrata cifre jedinica.*

Rešenje: Neka je traženi broj $\overline{ab}$. Problem dat tekstom zadatka možemo zapisati na sledeći način:

$$\overline{ab} = 10a + b = a^3 + b^2.$$

Kako je $\overline{ab} = 10a + b \leq 99$, to je i $a^3 + b^2 \leq 99$, pa možemo zaključiti da je $1 \leq a \leq 4$. Ova nejednakost sužava oblast potencijalnih rešenja za cifru a sa mogućih 9 (jer mora biti $a \neq 0$) na samo 4 cifre.

Daljom transformacijom jednačine koja predstavlja početni problem dobijamo:

$$10a - a^3 = b^2 - b,$$

odnosno

$$a(10 - a^2) = b(b-1).$$

Posmatrajući desnu stranu poslednje jednakosti, uočavamo da je ona predstavljena kao proizvod dva uzastopna prirodna broja, od kojih je jedan sigurno paran, pa je i ceo proizvod paran. Odatle sledi da je i leva strana jednakosti paran broj, pa je i broj a paran. Osim toga

$$b(b-1) \geq 0 \Rightarrow a(10 - a^2) \geq 0 \Rightarrow 10 - a^2 \geq 0 \Rightarrow a \leq 3.$$

Jedini paran broj manji ili jednak od broja 3 je broj 2, pa na osnovu toga zaključujemo da je $a = 2, b = 4$, a traženi dvocifren broj koji ispunjava uslove zadatka $\overline{ab} = 24$.

U ovom primeru, koristeći metod nejednakosti od mogućih 90 rešenja (dvocifrenih brojeva) dobili smo samo jedno.

Primer 19 *U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $a + b + c = abc$.*

Rešenje: Bez smanjenja opštosti možemo napisati da je $a \leq b \leq c$. Tada je

$$abc = a + b + c \leq 3c,$$

odnosno $ab \leq 3$, pa na osnovu ove dve nejednakosti možemo razlikovati tri slučaja:

1. $a = 1, b = 1 \Rightarrow 2 = 0$ što je kontradikcija;
2. $a = 1, b = 2 \Rightarrow c = 3$;
3. $a = 1, b = 3 \Rightarrow c = 2$, što je kontradikcija sa $b \leq c$.

Dakle, jedino rešenje je $(a, b, c) = (1, 2, 3)$.

Primer 20 *U skupu celih brojeva rešiti jednačinu*

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y.$$

Rešenje: Množenjem početne jednačine sa 4 i dodavanjem na obe strane broja 1, dobijamo

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 + 4y + 1 = (2y + 1)^2.$$

Sada je

$$(2y + 1)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (2x^2 + x)^2 + (3x + 1)(x + 1),$$

odakle zaključujemo da je

$$(2y + 1)^2 > (2x^2 + x),$$

ukoliko je

$$(3x + 1)(x + 1) > 0.$$

A to je za $x > 0$ ili $x < -1$. S druge strane

$$(2y+1)^2 = 4x^4+4x^3+4x^2+x^2+4x+1+2x-2x-x^2 = (2x^2+x+1)^2-(x^2-2x)$$

pa je

$$(2y + 1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2$$

ukoliko je $x^2 - 2x > 0$, a to je za $x < 0$ ili $x > 2$. Zaključujemo da je za $x < -1$ ili $x > 2$

$$(2x^2 + x)^2 < (2y + 1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2.$$

Kako su $2x^2 + x$ i $2x^2 + x + 1$ uzastopni celi brojevi, to se između njih ne nalazi ni jedan ceo broj, pa za $x < 0$ ili $x > 2$ jednačina nema celobrojnih rešenja. Tako smo metodom nejednakosti oblast mogućih rešenja smanjili na interval $-1 \leq x \leq 2$. Zamenjujući vrednosti dobijamo konačno rešenje početne jednačine

$$(x, y) = \{(-1, 0), (-1, -1), (0, 0), (0, -1), (2, 5), (2, -6)\}.$$

3.7 Metod parnosti

Očigledno je da se prilikom rešavanja Diofantovih jednačina pored osnovne zamisli uvek koristi još nešto, tj. svaka ideja se kombinuje sa nekom drugom. Metode koje smo do sada pomenuli koristile su sličnu ideju da se različitim transformacijama jednačina (ili neki njeni delovi) zapiše u odgovarajućem obliku (proizvoda, količnika, zbira), pa se taj zapis koristi kao baza za ispitivanje mogućih slučajeva. Najčešće se kao pomoćni način koristi deljivost, kao osnovna relacija teorije brojeva. Najveća pažnja posvećuje se sa deljivosti brojem 2 (parnost i neparnost), zatim brojevima $3, 4, 5$ i 9, ali neretko, zavisno od situacije i deljivost sa ostalim prirodnim brojevima.

Metod parnosti je jedan od metoda zasnovan na deljivosti brojeva. Ovaj metod koristi osobinu brojeva da su parni, odnosno neparni, što dovodi do eliminacije velikog broja slučajeva i suženja opsega, tj. oblasti vrednosti promenljivih. Na ovaj način eliminiše se čitav jedan podskup potencijalnih rešenja.

Ovaj metod rešavanja Diofantovih jednačina koristi se već od 5. razreda osnovne škole, ne samo zato što je razlikovanje parnih i neparnih celih brojeva prirodno, već i zato što postoji čitav niz algoritama za utvrđivanje (ne)parnosti. Zbog toga je ovaj metod jedan od poznatih i često primenjivanih u rešavanju Diofantovih jednačina.

Kroz detaljno rešavanje sledećih primera videćemo na koji način se koristi ova metoda i kombinuje sa ostalim. Najčešće se razlikuju dva slučaja: kada je jedna od nepoznatih parna, odnosno neparna, pa se odvojeno vrše dalja ispitivanja.

PRIMER 21 *Odredi sve proste brojeve p, q, r takve da je $2p+3q+4r = 2006$.*

Rešenje: Brojevi $2p, 4r$ i 2006 su parni, pa i broj $3q$ mora biti paran, a time je i broj q sigurno paran. Jedini paran prost broj je broj 2, tako da je $q = 2$.

Koristeći ovo rešenje, zamenom u početnu jednačinu dobilamo

$$2p + 4r = 2000,$$

odnosno

$$p + 2r = 1000.$$

Kako su $2r$ i 1000 sigurno parni brojevi, to je i p paran broj, tako da mora biti i $p = 2$ iz istog razloga kao i q.

Zamenom i ovog rešenja u jednačinu nalazimo da je $r = 499$, što jeste prost broj, pa zaključujemo da je jedinstveno rešenje početne jednačine $p = q = 2$ i $r = 499$.

PRIMER 22 *Dokazati da jednačina $x^2+y^2+z^2 = 2007$ nema rešenja u skupu celih brojeva.*

Rešenje: Vidimo da je zbir ova tri kvadrata, odnosno tri broja neparan, što je moguće u slučaju da su sva tri broja neparna ili su dva parna a jedan neparan. Prema tome, razlikujemo sledeće slučajeve:

1. Neka su sva tri broja neparna, pa ih možemo zapisati u sledećem obliku

$$x = 2m + 1,\ y = 2n + 1,\ z = 2k + 1\ (m, n, k \in Z).$$

   Tada je

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2k + 1)^2$$

$$= 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4k^2 + 4k + 1 = 2007.$$

   Sledi da je

$$4m(m + 1) + 4n(n + 1) + 4k(k + 1)^2 = 2004.$$

   Deljenjem obe strane poslednje jednakosti sa 4 dobijamo

$$m(m + 1) + n(n + 1) + k(k + 1) = 501.$$

   Kako su brojevi $m(m + 1),\ n(n + 1),\ k(k + 1)$parni (jer su napisani kao proizvod dva uzastopna broja, od kojih je jedan sigurno paran) leva strana jednakosti je njihov zbir, pa je i ona paran broj, dok je 501 neparan, što je kontradiktorno, pa jednačina u ovom slučaju nema rešenja.

2. Neka su x i y parni, a z neparan broj. Tada ih možemo napisati kao

$$x = 2m,\ y = 2n,\ z = 2k + 1\ (m, n, k \in Z).$$

   Tada je

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2m)^2 + (2n)^2 + (2k + 1)^2$$
$$= 4m^2 + 4n^2 + 4k^2 + 4k + 1 = 2007.$$

   Daljim sređivanjem dobijamo

$$4m^2 + 4n^2 + 4k(k + 1) = 2006.$$

   Sada obe strane jednakosti delimo sa 2 i ona postaje

$$2m^2 + 2n^2 + 2k(k + 1) = 1003.$$

I u ovom slučaju leva strana jednakosti je paran (kao zbir tri parna broja), a desna neparan broj, pa jednačina nema rešenja. Ovim smo dokazali da ne postoje traženi celi brojevi x, y i z takvi da ispunjavaju uslov zadatka dat početnom jednačinom.

Primer 23 *Da li postoje celi brojevi m i n koji zadovoljavaju jednačinu $n^4 + 16m = 7993$?*

Rešenje: Ako bi n bio paran broj, tada bi leva strana jednačine takođe bila parna, a kako je 7993 neparan, to ne bismo imali rešenja u ovom slučaju. Stoga je, ako rešenje postoji, n obavezno neparan broj koji pišemo u obliku $n = 2k + 1$ za neki celi broj k. Ako taj oblik broja n uvrstimo u početnu jednačinu dobijamo:

$$(2k+1)^4 + 16m = 7993$$

$$(4k^2 + 4k + 1)^2 + 16m = 7993$$

$$16k^4 + 16k^2 + 1 + 32k^3 + 8k^2 + 8k + 16m = 7993$$

$$8(2k^4 + 2k^2 + 4k^3 + k^2 + k) + 16m = 7992.$$

Deljenjem obe strane jednakosti sa brojem 8, dobijamo

$$2(k^4 + k^2 + 2k^3 + m) + k(k+1) = 999.$$

Leva strana jednačine je paran broj jer je zbir dva parna broja (prvi je očigledno deljiv sa 2, a drugi je proizvod dva uzastopna cela broja). Kako je broj na desnoj strani neparan, znači da početna jednačina ni u ovom slučaju nema celobrojnih rešenja.

3.8 Metod deljivosti

Kao što smo već rekli, osim metode parnosti, koja se zasniva na deljivosti brojem 2, u rešavanju Diofantovih jednačina koristi se i deljivost nekim drugim brojevima. Naime, ovaj metod se zasniva na krišćenju osobina deljivosti (samo kada je u pitanju deljenje bez ostatka), tj. na činjenici da obe strane svake jednakosti moraju imati identična svojstva u pogledu deljivosti određenim brojem. Zbog toga je bitno datu jednačinu transformisati u ekvivalentnu tako da jedna strana jednakosti ima jasno definisanu deljivost.

Primer 24 *Odrediti sve dvocifrene prirodne brojeve koji su devet puta veći od zbira svojih cifara.*

Rešenje: Zapišimo traženi broj kao $\overline{ab}$. Uslov zadatka možemo predstaviti jednačinom

$$10a + b = 9(a+b).$$

Kako je desna strana jednakosti očigledno deljiva sa 9, to je i leva strana, tj. traženi dvocifren broj takođe deljiv sa 9. Prema definiciji deljivosti i zbir cifara traženog broja deljiv je sa 9, pa na osnovu toga imamo dve mogućnosti: $a + b = 9$ ili $a + b = 18$. U prvom slučaju je $10a + b = 81$, a u drugom $10a + b = 162$. Obzirom da 162 nije dvocifren broj, dobijamo jedinstveno rešenje da je traženi dvocifreni broj koji ispunjava uslove zadatka $\overline{ab} = 81$.

PRIMER 25 *Odrediti sve trocifrene brojeve $\overline{abc}$ koji su pet puta veći od proizvoda svojih cifara.*

Rešenje: Prema uslovu zadatka možemo zapisati jednačinu

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 5abc.$$

Desna strana jednakosti je deljiva sa 5, pa je i leva strana jednakosti, tj. traženi trocifreni broj deljiv sa 5. Prema tome, koristeći definiciju deljivosti ovim brojem, zaključujemo da poslednja cifra broja koju smo obeležili sa c može biti 0 ili 5. U prvom slučaju, za $c = 0$, zamenom dobijamo da je $5 \cdot a \cdot b \cdot 0 = 0$, pa broj nije trocifren i nemamo rešenje. Ostaje mogućnost da je $c = 5$. Tada je

$$100a + 10b + 5 = 25ab$$

tj. posle transformacija

$$10b + 5 = 25ab - 100a$$

$$5(2b + 1) = 25a(b - 4)$$

$$2b + 1 = 5a(b - 4).$$

Vidimo da je broj na levoj strani jednakosti deljiv sa 5 (jer je desna strana deljiva sa 5), neparan i manji od 20 (jer je ≤ 9).

Obzirom na to može biti $2b - 1 = 5$ ili $2b - 1 = 15$. Pri tom je $b = 7 > 4$ i $2 \cdot 7 + 1 = 5a(7 - 4)$ tj. $a = 1$. Konačno, jedini broj koji zadovoljava uslove zadatka je 175 i to je traženo rešenje.

PRIMER 26 *Zbir cifara jednog četvorocifrenog broja je 27. Dokazati da je zbir tog broja i broja zapisanog istim ciframa, ali u obrnutom poretku, takođe deljiv sa 27.*

Rešenje: Neka je $\overline{abcd}$ broj takav da je $a + b + c + d = 27$. Traženi zbir možemo zapisati kao

$$S = \overline{abcd} + \overline{dcba} = 1000a + 100b + 10c + d + 1000d + 100c + 10b + a$$

$$= 1001a + 110b + 110c + 1001d$$

$$= 110(a + b + c + d) + 891(a + d)$$

$$= 110 \cdot 27 + 27 \cdot 33 \cdot (a + d)$$

$$= 27(110 + 3(a + d)),$$

što očigledno predstavlja deljivost datog zbira sa 27.

3.9 Metod kongruencije

Ovaj metod je zasnovan na ideji sličnoj kao i metod deljivosti jer ako je $A = B$, onda je $A \equiv B \pmod{m}$. Naime, brojevi koji daju isti ostatak pri deljenju brojem m imaju mnogo zajedničkih osobina, što doprinosi i korišćenju kongruencije u rešavanju Diofantovih jednačina.

Najpre ćemo se podsetiti definicija i oznaka vezanih za kongruenciju kao jednu od najvažnijih relacija u teoriji brojeva.

- Za cele brojeve a i b koji pri deljenju sa $m \neq 0$ daju jednake ostatke (tj. ako ceo broj m deli $a - b$) kaže se da su kongruentni po modulu m. Simbolički, to se zapisuje kao $a \equiv b \pmod{m}$.

- Ako m ne deli $a - b$ kaže se da da a nije kongruentno sa b po modulu m, što simbolički zapisujemo $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Neposredno iz definicije kongruencije slede i neke od njenih osobina koje imaju mnoge zajedničke osobine sa osobinama jednakosti i sadržane su u sledećoj teoremi.

Teorema 1 *Ako su a, b, c, d, x, y i $m \neq 0$ proizvoljni celi brojevi, tada važi:*

- $a \equiv a \pmod{m}$ *(refleksivnost).*

- $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv a \pmod{m}$ *i* $a - b \equiv 0 \pmod{m}$ *su ekvivalentna tvrđenja (simetričnost).*

- *Ako je* $a \equiv b \pmod{m}$ *i* $b \equiv c \pmod{m}$, *onda* $a \equiv c \pmod{m}$ *(tranzitivnost).*

- *Ako je* $a \equiv b \pmod{m}$ *i* $c \equiv d \pmod{m}$, *onda je* $ax + cy \equiv bx + dy \pmod{m}$ *(linearnost).*

- *Ako je* $a \equiv b \pmod{m}$, *onda postoji ceo broj* q *takav da je* $a = mq + b$.

- *Ako je* $a \equiv b \pmod{m}$ *i ako je* $c \equiv d \pmod{m}$, *onda je* $ac \equiv bd \pmod{m}$ *(multilikativnost).*

- *Ako je* $a \equiv b \pmod{m}$ *i* $P(x)$ *polinom sa celim koeficijentima, onda je* $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$.

- *Ako je* $a \equiv b \pmod{m}$ *i ako je* $d \mid m$, *onda je* $a \equiv b \pmod{d}$.

Nakon podsećanja na definiciju i najvažnije osobine kongruencije slede primeri koji ilustruju na koji način se pomoću ove osobine rešavaju pojedine Diofantove jednačine.

Primer 27 *Koliko rešenja u skupu celih brojeva ima jednačina* $3^x - 2^y = 5$*?*

Rešenje: Iz date jednačine sledi da je $3^x = 5 + 2^y > 5$ odakle možemo zaključiti da je $x \geq 2$, odnosno $2^y = 3^x - 5 \geq 3^2 - 5 = 4$ što povlači da je i $y \geq 2$.

Za $y = 2$ iz $3^x = 5 + 2^2 = 9$ sledi da je $x = 2$.

Za $y > 2$ broj 2^y je deljiv sa 8, pa $5 + 2^y \equiv 5 \pmod 8$. Pogledajmo sada kakve ostatke pri deljenju sa 8 daje 3^x. Razlikujemo dva slučaja, kada je x paran, odnosno neparan:

1. $x = 2k \Rightarrow 3^x = 3^{2k} = 9^k \equiv 1 \pmod 8$.
2. $x = 2k + 1 \Rightarrow 3^x = 3^{2k+1} = 3 \cdot 9^k \equiv 3 \cdot 1^k = 3 \pmod 8$.

Sledi da $3^x = 5 + 2^y$ pri deljenju sa 8 ne može dati ostatak 5, pa stoga za $y > 2$ rešenja nema, i jedino rešenje je $x = 2, y = 2$.

Primer 28 *Za koje cele brojeve x i y broj $x^4 + y^4$ pri deljenju sa 25 daje ostatak 3?*

Rešenje: Tražimo brojeve x i y takve da je $x^4 + y^4 = 25m + 3$ za neki broj $m \in Z$. Uočimo da tada $x^4 + y^4$ i pri deljenju sa 5 daje ostatak 3. Pogledajmo sada kakve sve ostatke pri deljenju sa 5 može dati četvrti stepen celog broja:

1. $x \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow x^4 \equiv 0 \pmod 5$;
2. $x \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x^4 \equiv 1^4 = 1 \pmod 5$;
3. $x \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow x^4 \equiv 2^4 = 16 = 1 \pmod 5$;
4. $x \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow x^4 \equiv 3^4 = 81 = 1 \pmod 5$;
5. $x \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow x^4 \equiv 4^4 = 256 = 1 \pmod 5$;

Dakle, razmatrajući ove slučajeve uočavamo da x^4 i y^4 pri deljenju sa 5 mogu dati samo ostatke 0 ili 1, pa onda $x^4 + y^4$ pri deljenju sa 5 može dati ostatke 0,1 ili 2, a nikako 3. Prema tome, sledi da traženi brojevi x i y ne postoje.

Primer 29 *Da li jednačina $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4 = 1599$ ima rešenja u skupu celih brojeva?*

Rešenje: Neka je k prirodan broj. Mogući ostaci pri deljenju broja k sa brojem 16 pripadaju skupu $\{0, 1, 2, ..., 13, 14\}$. Prema tome, mogući ostaci deljenja broja k^2 sa 16 su iz skupa $\{0, 1, 4, 9\}$, a broj k^4 iz skupa $\{0, 1\}$. Koristeći simbole kongruencije ova tvrđenja možemo zapisati kao:

$$k \equiv a \pmod{16},\ a \in \{0, 1, 2, ..., 13, 14\}\,;$$

$$k^2 \equiv b \pmod{16},\ b \in \{0, 1, 4, 9\}\,;$$

$$k^4 \equiv 0 \pmod{16} \textit{ ili } k^4 \equiv 1 \pmod{16}.$$

Na osnovu prethodnog, očigledno je da je zbir $x_1^4+x_2^4+...+x_{14}^4$ pri deljenju sa brojem 16 može imati bilo koji ostatak iz skupa $\{0,1,2,...,13,14\}$, ali ne i broj 15. Kako je $1599 \equiv 15 \pmod{16}$, zaključujemo da početna jednačina nema rešenja u skupu celih brojeva.

3.10 Metod diskriminante

Ovaj metod za rešavanje Diofantovih jednačina u najvećem broju slučajeva može dovesti do rešenja, ukoliko ostale metode dodatno otežaju ili zakomplikuju datu jednačinu i njeno rešavanje. Da bi metod diskriminante mogao da se primeni potrebno je da datu jednačinu možemo predstaviti kao kvadratnu jednačinu (sa celobrijnim koeficijentima) po jednoj od promenljuvih.

Potrebno je da se podsetimo pojma diskriminante kvadratne jednačine. Naime, ako je data kvadratna jednačina $at^2+bt+c=0$, onda su njena rešenja data formulom

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Izraz $D = b^2-4ac$ naziva se diskriminanta kvadratne jednačine i očigledno da bi rešenja kvadratne jednačine bila celobrojna potrebno je da diskriminanta bude potpun kvadrat, a time i nenegativan broj. Diskusija diskriminante dovodi do razlikovanja slučajeva.

PRIMER 30 *Rešiti jednačinu $x^2+xy+y^2=x^2y^2$ u skupu celih brojeva.*

Rešenje: Možemo razlikovati sledeće slučajeve:

1. Ako je $y=0$ onda je $x=0$;
2. Ako je $y=-1$ onda je $x=1$;
3. Ako je $y=1$ onda je $x=-1$;
4. Ako je $y \notin \{-1,0,1\}$, onda početnu jednačinu možemo zapisati kao kvadratnu jednačinu po promenljivoj x, pa je $(1-y^2)x^2+xy+y^2=0$.

Da bi jednačina u ovom obliku imala celobrojna rešenja potrebno je da njena diskriminanta bude potpun kvadrat. Znači da potpun kvadrat mora biti izraz $y^2-4(1-y^2)y^2$. Transformacijom dobijamo:

$$\begin{aligned} y^2-4(1-y^2)y^2 &= y^2-4y^2+4y^4 \\ &= 4y^4-3y^2 = y^2(4y^2-3). \end{aligned}$$

Da bi poslednji izraz bio potpun kvadrat, mora biti $y=0$ (što je već razmotreno u prvom slučaju) ili $4y^2-3=k^2$. Sledi da je $4y^2-k^2=3$, pa se korišćenjem razlike kvadrata dobija $(2y+k)(2y-k)=3$.

Rešavanjem odgovarajućih sistema jednačina dobija se ili $y=-1$ ili $y=1$. Kako prema uslovu mora da važi $y \notin \{-1,0,1\}$ to u ovom skupu jednačina nema rešenja.

Dakle, celobrojna rešenja početne jednačine su $(x,y)=\{(0,0),(1,-1),(-1,1)\}$.

Primer 31 *Koliko prirodnih brojeva n ima osobinu da je $n^2+3n+24$ potpun kvadrat nekog celog broja?*

Rešenje: Neka je $n^2+3n+24=m^2$. Transformacijom ovu jednačinu možemo napisati kao kvadratnu jednačinu po promenljivoj n

$$n^2+3n+24-m^2=0.$$

Rešavanjem dobijene jednačine dobijamo

$$n_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4(24-m^2)}}{2}.$$

Da bi n, kao rešenje ove jednačine, bio ceo broj, diskriminanta kvadratne jednačine mora biti potpun kvadrat, pa je

$$9-96+4m^2=k^2,$$

tj.

$$4m^2-k^2=87$$

$$(2m-k)(2m+k)=87.$$

Sada razlikujemo slučajeve:

$$(2m-k)\in\{1,3,29,87,-1,-3,-29,-87\}$$

$$(2m+k)\in\{87,29,3,1,-87,-29,-3,-1\}.$$

Sabirajući dobijamo $4m\in\{88,32,-88,-32\}$, pa je $m\in\{22,8,-22,-8\}$.Sada je $n\in\{5,-8,20,-23\}$. Uslove zadatka ispunjavaju samo $m=5$ i $n=20$, pa su ovo rešenja početne jednačine, tj. traženi celi brojevi.

3.11 Ojlerov metod

Ojler je u 5. delu "Algebre" iz 1770.godine opisao svoju metodu za rešavanje linearne Diofantove jednačine.

Ovaj metod, iako nije često funkcionalan, najčešće se koristi u osnovnoj školi jer je sama metodologija prilično jasna. Primenjuje se na rešavanje linearne Diofantove jednačine, tj. jednačine oblika $ax+by=c$ pri čemu su brojevi a i b uzajamno prosti.

Primer 32 *Odrediti sva celobrojna rešenja x i y jednačine $3x+7y=89$.*

Rešenje: Pošto su brojevi 3 i 7 uzajamno prosti, za rešavanje ove jednačine možemo koristiti Ojlerov metod. Rešavanjem jednačine po x dobijamo

$$x = \frac{89 - 7y}{3},$$

tj. posle transformacija desne strane

$$x = \frac{89 - 7y}{3} = 29 - 2y - \frac{y - 2}{3},$$

pa je x ceo broj samo ako je broj $y - 2$ deljiv sa 3, što možemo zapisati kao $y - 2 = 3k$ gde je k neki ceo broj. Tada je $y = 3k + 2$, a $x = 25 - 7k$.

Dobijeno rešenje je opšte rešenje date jednačine i data jednačina ima beskonačno mnogo rešenja, jer se za svako celobrojno k dobije uređeni par $(x, y) = (25 - 7k, 3k + 2)$ koji je rešenje date jednačine.

Pojam opšteg rešenja Diofantove jednačine je jedan od najvažnijih pojmova, a predstavlja formulu koja opisuje sva rešenja date jednačine. Opšte rešenje je najčešće parametarskog tipa, tj. pokazuje kako se u zavisnosti od vrednosti nekog parametra menjaju rešenja date jednačine. Opšte rešenje može biti i funkcija dva, pa i više parametara.

Primer 33 *Rešiti Diofantovu jednačinu* $39x - 22y = 10$.

Rešenje: Kako su 39 i 22 uzajamno prosti brojevi, jednačina ima rešenje. Transformacijom date jednačine dobijamo

$$y = \frac{39x - 10}{22} = \frac{22x + 17x - 10}{22} = x + \frac{17x - 10}{22}.$$

Očigledno da će y biti ceo broj ako je $\frac{17h-10}{22}$ takođe ceo broj. Obeležimo $z = \frac{17x-10}{22}$, zatim postupajući na isti način dobijamo

$$x = \frac{22z + 10}{17} = z + \frac{5z + 10}{17} = z + m.$$

I dalje, istom analogijom dobijamo

$$z = \frac{17m - 10}{5} = 3m - 2 + \frac{2m}{5}.$$

Konačno je $m = 5n$ gde je n takođe ceo broj. Sada je

$$z = 3m - 2 + \frac{2m}{5} = 15n - 2 + 2n = 17n - 2,$$

$$x = z + m = 17n - 2 + 5n = 22n - 2$$

i

$$y = x + z = 22n - 2 + 17n - 2 = 39n - 4.$$

Dakle, sva celobrojna rešenja date jednačine su $(x, y) \in (22n-2, 39n-4)$, gde je n ceo broj.

3.12 Diofantov metod

Diofant Aleksandrijski u svojoj drugoj knjizi "Aritmetike" daje opšti metod za određivanje racionalnih rešenja kvadratne algebarske jednačine sa dve promenljive. Naime, ovaj metod sastoji se u sledećem: Posmatra se kvadratna jednačina sa dve promenljive

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

gde su A, B, C, D, E i F celi brojevi. Ova jednačina predstavlja u ravni xOy neku krivu drugog reda. Ako je (x_0, y_0) jedno celobrojno rešenje date jednačine, onda se kroz tačku (x_0, y_0) postavlja pramen pravih $y - y_0 = k(x - x_0)$, gde je k racionalan broj različit od nule. Za razne vrednosti parametra k dobija se beskonačno mnogo tačaka preseka pravih i krive. Te tačke su racionalne.

Primer 34 *Rešiti jednačinu* $3x^2 - y^2 = 26$ *u skupu celih brojeva.*

Rešenje: Jednačinu prave Diofant je koristio u parametarskom obliku:

$$x = x_0 + t;\ y = y_0 + kt.$$

Kako je jedno rešenje date jednačine $(x_0, y_0) = (3, 1)$, to je

$$x = 3 + t;\ y = 1 + kt.$$

Zamenom u jednačinu dobijamo

$$3(3 + t)^2 - (1 + kt)^2 = 26,$$

a posle transformacije

$$t(t(3 - k^2) + 18 - 2k) = 0.$$

Rešenja dobijene jednačine su $t = 0$ ili $t = \frac{18-2k}{k^2-3}$. Akoje $t = 0$ dobija se početno rešenje, a ako je $t = \frac{18-2k}{k^2-3}$ onda je

$$x = \frac{3k^2 - 2k + 9}{k^2 - 3}; y = \frac{18k - k^2 - 3}{k^2 - 3}.$$

Na primer za $k = 1$, dobija se celobrojno rešenje $(x, y) = (-5, -7)$, a za $k = 2$ rešenje je $(x, y) = (17, 29)$. Ako se k napiše kao količnik dva cela broja, odnosno $k = \frac{m}{n}$ dobija se dvoparametarsko rešenje

$$x = \frac{3m^2 - 2mn + 9n^2}{m^2 - 3n^2};\ y = \frac{18mn - m^2 - 3n^2}{m^2 - 3n^2}.$$

Primer 35 *U skupu racionalnih brojeva rešiti jednačinu*

$$x^2 - 2y^2 - 3xy + 4x - 5y + 3 = 0.$$

Rešenje: Kako je $(x_0, y_0) = (1, 0)$ jedno rešenje date jednačine,to je

$$x = 1 + t;\ y - 0 = k[(1 + t) - 1], tj.\ y = kt.$$

Zamenom u početnu jednačinu dobija se nova jednačina

$$(1 + t)^2 - 2(kt)^2 + 3(1 + t)kt + 4(1 + t) - 5kt + 3 = 0.$$

Posle transformacije se dobija da je

$$t(t(1 - 2k^2 + 3k) + 8k - 2) = 0.$$

Odavde su rešenja dobijene jednačine

$$t = 0\ ili\ t = \frac{8k - 2}{2k^2 - 3k - 1}.$$

Pada su rešenja početne jednačine

$$x = \frac{2k^2 + 5k - 3}{2k^2 - 3k - 1}\ i\ y = \frac{8k^2 - 2k}{2k^2 - 3k - 1}.$$

Za $k \neq 0$ dobijamo beskonačno mnogo rešenja.

4 Neki tipovi Diofantovih jednačina i njihova primena u zadacima u osnovnoj i srednjoj školi

4.1 Uvod

U prethodnom poglavlju obrađivanjem većeg broja metoda za rešavanje Diofantovih jednačina, postavljene su teorijske osnove koje predstavljaju veoma bitan preduslov za ostatak ovog rada. Naime, na osnovu njih se dalje bavimo obradom tipova Diofantovih jednačina kao i metodičkim transformacijama kojim se sadržaj o Diofantovim jednačinama priprema za direktnu primenu u nastavi osnovne i srednje škole.

Dakle, u ovom poglavlju bavićemo se tipovima Diofantovih jednačina najčešće korišćenim u redovnoj i dodatnoj nastavi osnovne i srednje škole. Od mnoštva materijala izdvojeni su najpogodniji i prilagođeni nastavnim uslovima. Predstavljeni su kroz definicije, teoreme, primere sa rešenjima i primene.

Primena Diofantovih jednačina ogleda se u problemima koje je prvo potrebno prevesti sa običnog na matematički jezik, a potom dobijenu Diofantovu jednačinu rešiti nekom od metoda ili njihovom kombinacijom.

4.2 Elementarne Diofantove jednačine

4.2.1 Matematički rebusi

U matematičkim ili brojevnim rebusima umesto zvezdica treba napisati odgovarajuće cifre, tako da sve operacije budu tačno izvršene, vodeći pri tom računa da se obuhvate sva moguća rešenja. Postupak rešavanja rebusa naziva se i dešifrovanje.

Ne znajući da se radi o Diofantovim jednačinama, ovaj najjednostavniji tip srećemo već u četvrtom razredu osnovne škole. Pri rešavanju ovakvih problema koriste se ideje na kojima počivaju mnoge metode za rešavanje Diofantovih jednačina. Naime, od ključne važnosti je činjenica da sve što važi za jednu stranu jednakosti, u identičnoj formi važi i za drugu. Na primer, ako je leva strana jednakosti paran broj, potpun kvadrat ili deljiva sa nekim brojem, onda tu osobinu mora imati i desna strana te jednakosti.

Pored toga, znajući da nepoznate cifre u matematičkom rebusu mogu imati samo vrednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, razmatramo deset različitih mogućnosti, što je u stvari rešavanje Diofantovog problema metodom razlikovanja slučajeva. Međutim, često postoje još neka ograničenja u postavci zadatka koja mogu smanjiti broj mogućnosti, kao na primer, ako je nepoznata prva cifra nekog broja, odbacujemo mogućnost da ta cifra bude 0.

Ovakvi i slični problemi koji se koriste u početnoj nastavi matematike služe za proveru u kojoj su meri i do kog misaonog nivoa učenici ovladali računskim operacijama i koliko imaju elementarnih kombinatornih sposobnosti. U njima se Diofantove jednačine javljaju u integrisanm obliku i nigde se ne ističe i ne objašnjava njihov pojam.

Primer 36 *Da li rebus* $***+*** = ***$ *ima rešenja, ako se svaka od cifara* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *može upotrebiti samo jednom?*

Rešenje: Ovaj rebus mogu rešavati učenici nižih razreda osnovne škole, potrebno je samo da su savladali sabiranje do hiljadu. U tom periodu učenici se susreću sa prvim zadacima koji se mogu rešiti na više načinai koji čak mogu imati i više rešenja. Ne postoji striktno precizan metod za rešavanje matematičkih rebusa, već rešavanje počinje uočavanjem nekih osobina i donošenjem zaključaka na osnovu njih. Naime, u ovom primeru uočavamo da zbir dva trocifrena broja mora biti takođe trocifren broj, pa je logično pretpostaviti da je prvi sabirak što manji broj. Najmanji mogući broj od raspoloživih cifara je 123, ali u tom slučaju mora doći do ponavljanja neke od cifara. Pokušamo sa brojem 124. Sada poslednja cifra drugog sabirka (cifra jedinica) može biti $3, 5, 9$. Ako pokušamo sa ciframa 3 ili 5 vidimo da se cifre opet moraju ponoviti. Ukoliko na to mesto stavimo cifru 9 tada dobijamo $124 + **9 = **3$. Odavde zaključujemo da je traženi zbir $124 + 549 = 673$.

Primer 37 *Dešifrovati množenje* $*2*\cdot 45 = (**)^2$.

Rešenje: Koristićemo činjenicu da je leva strana jednakosti deljiva sa 45, što znači sa 9 i 5, pa zbog toga i desna strana mora imati to svojstvo. Pošto je desna strana pored toga i potpun kvadrat, to je moguće samo u slučaju da je deljiva i sa 25. Odatle sledi da je broj $*2*$ deljiv sa 5, pa mu poslednja cifra mora biti 0 ili 5, tj. mora biti oblika $*20$ ili $*25$. Kako je $*2*$ manja od $10000 : 45$, tj. od 222, ovim sužavanjem dobijamo tri mogućnosti, da je $*2*$ jedan od brojeva 120, 125 i 220. Proveravanjem utvrđujemo da je jedino rešenje $125 \cdot 45 = 75^2$.

Primer 38 *Odrediti cifre a, b, c i prirodan broj n, tako da je $a+\overline{bb}+\overline{ccc} = n^4$. Koliko ima rešenja?*

Leva strana datog matematičkog rebusa očigledno predstavlja zbir jednocifrenog, dvocifrenogi trocifrenog broja. Ovaj zbir $a + \overline{bb} + \overline{ccc}$ mora biti veći od zbira 1+11+111=122, a manji od 9+99+999=1107. Na osnovu ovog zaključka važi nejednakost $121 < 122 \leq n^4 \leq 1107 < 1225$.

Posmatramo dva moguća slučaja:

1. Ako je $n = 4$, onda je $n^4 = 256 = 222 + 33 + 1$;

2. Ako je $n = 5$, onda je $n^4 = 625 = 555 + 66 + 4$.

Primer 39 *Dat je razlomak $\frac{A \cdot R \cdot H \cdot I \cdot M \cdot E \cdot D}{E \cdot U \cdot K \cdot L \cdot I \cdot D}$. Izračunati vrednost razlomka ako jednakim slovima odgovaraju jednake cifre, arazličitim slovima različite cifre.*

Rešenje: Ovaj zadatak mogu rešavati učenici petog razreda osnovne škole. Treba primetiti da imamo deset različitih slova, što znači da moramo imati i deset različitih cifara. Kako cifra 0 ne sme biti u imeniocu (u tom slučaju razlomak nije definisan), onda je ona u broiucu, a samom tim je i vrednost razlomka jednaka 0.

Primer 40 *Razlomci*

$$\frac{3*5*}{36} \; i \; \frac{4*7*}{45}$$

su prirodni brojevi. Uporedi ih po veličini.

Rešenje:Broj $3*5*$ mora biti deljiv sa 36, tj. sa 4 i 9. To znači da mu je dvocifreni završetak deljiv sa 4, a zbir cifara sa 9. Shodno tome, poslednja cifra može biti 2 ili 6. U prvom slučaju traženi brojilac prvog razlomka je 3852, dok je u drugom 3456.

Posmatrajući drugi razlomak, uočavamo da broj $4*7*$ mora biti deljiv brojem 45, odnosno brojevima 5 i 9. Poslednja cifra može biti 0 ili 5. Pošto zbir cifara i ovog broioca mora biti deljiv sa 9, to su mogućnosti 4770 i 4275. Prema tome sledi:

$$\frac{4275}{45} = 95 < \frac{3456}{36} = 96 < \frac{4770}{45} = 106 < \frac{3852}{36} = 107.$$

4.2.2 Diofantove jednačine sa prostim brojevima

Mnogi zadaci koji se javljaju još u osnovnoj školi uglavnom u dodatnoj, a ređe u redovnoj nastavi, sadrže probleme koji su predstavljeni Diofantovim jednačinama koje se odnose na proste brojeve. Do rešenja ovakvih problema dolazi se na osnovu ideja koje uglavnom počivaju na nekim osobinama i jednostavnijim tvrđenjima vezanim za proste brojeve.

Navođenjem i rešavanjem nekoliko primera ilustrovaćemo način rešavanja Diofantovih jednačina ovog tipa.

PRIMER 41 *Odredi sve uređene parove* (p, q) *prostih brojeva* p *i* q *tako da je*

1. $2p + 3q = 200$;
2. $2p + 3q = 201$.

Rešenje:

1. Ako je $2p+3q = 200$, onda je $3q = 200-2p$, pa je sa desne strane paran broj, što znači da i $3q$ mora biti paran broj. To je moguće jedino u slučaju $q = 2$. Tada dobijamo da je $2p = 200 - 6 = 194$. Kako je onda $p = 97$ prost broj, to je $(p, q) = (97, 2)$ jedino rešenje ove jednačine.

2. Ako je $2p + 3q = 201$, onda je $2p = 201 - 3q = 3(67 - q)$. Ovim dobijamo da je desna strana jednakosti deljiva sa 3, pa to svojstvo mora imati i leva. Broj $2p$ može biti deljiv sa 3 samo u slučaju da je $p = 3$, jer je to jedini prost broj deljiv sa 3. Tada dobijamo da je $2 = 67-q$, a $q = 65$ što nije prost broj. Zaključujemo da ova jednačina nema rešenja u skupu prostih brojeva.

PRIMER 42 *Odrediti sve proste brojeve* q *i* r, *takve da važi jednakost*

$$p + pq + pqr = 38.$$

Rešenje: Ako je $p + pq + pqr = 38$, onda je

$$p(1 + q + qr) = 38 = 2 \cdot 19.$$

Obzirom da je izraz u zagradi sigurno veći od 2, to mora biti

$$p = 2 \; i \; q + qr = q(1 + r) = 18.$$

Kako je $1 + r > 2$, to mora biti

$$q = 3, \; 1 + r = 6, \; tj. r = 5.$$

Ovim dobijamo konačno rešenje početne jednačine $(p, q, r) = (2, 3, 5)$.

Primer 43 *Odrediti proste (ne nužno različite) brojeve p, q, r i s takve da važi*

$$p \cdot q \cdot (r+s) = 2014.$$

Rešenje: Kako je $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, to je $\{p, q, r+s\} \in \{2, 19, 53\}$. Kako ne postoje dva prosta broja čiji je zbir 2 ili 53, to mora biti $r+s = 19$. Pošto je ovaj zbir neparan broj, jedan od sabiraka r i s mora biti paran, a drugi neparan, odnosno jedan je 2, a drugi 17. Iz svega pomenutog možemo zaključiti da je

$$\{p, q\} \in \{2, 5, 3\} \ i \ \{r, s\} \in \{2, 17\}.$$

Dobijamo skup rešenja

$$(p, q, r, s) \in \{(2, 53, 2, 17), (2, 53, 17, 2), (53, 2, 2, 17), (53, 2, 17, 2)\}.$$

4.2.3 Diofantove jednačine sa celim brojevima

Kroz sledeće uvodne primere ilustruju se ideje koje se koriste u rešavanju raznih Diofantovih jednačina elementarnog tipa čije promenljive pripadaju skupu celih brojeva. Sve navedene ideje spadaju u elementarne i predstavljaju dobru pripremu za studiozniji pristup problematici Diofantovih jednačina.

Primer 44 *Data je jednačina*

$$x^2 + 3y = 24.$$

Koliko rešenja ima data jednačina u skupu prirodnih, a koliko u skupu celih brojeva?

Rešenje: Iz jednačine sledi da je $x^2 = 24 - 3y = 3(8 - y)$. Očigledno je desna strana uvek deljiva sa 3, pa mora biti i leva strana. To znači da je x^2, odnosno i samo x deljivo sa 3. S obzirom da je $x^2 < 24$, to je $x < 4$, pa je $x = 3$, $y = 5$ jedino rešenje date jednačine u skupu prirodnih brojeva.

Ako je $x = 3k$ $(k \in Z)$, ondaje $x^2 = 9k^2$, pa je $x^2 + 3y = 9k^2 + 3y = 24$ ili $3y = 24 - 9k^2$, pa je $y = 8 - 3k^2$. Dakle, u skupu celih brojeva jednačina ima beskonačno mnogo rešenja, a opšte rešenje date jednačine u ovom skupu je $x = 3k$, $y = 8 - 3k^2$.

Primer 45 *Odrediti sve uređene parove (x, y) celih brojeva x i y takvih da je $5x = 17y$.*

Rešenje: Ako je y ceo broj onda je desna strana jednačine deljiva sa 5. Pa pošto 17 nije deljivo sa 5, to mora biti y, što možemo zapisati $y = 5k$ $(k \in Z)$. Tada je $5x = 17 \cdot 5k$, pa je $x = 17k$.

Uređeni par $(17k, 5k)$ gde je k bilo koji ceo broj dokazuje da data jednačina ima beskonačno mnogo rešenja, jer za svako od beskonačno mnogo celobrojnih k, može se dobiti odgovarajuće celobrojno x i y. Uređeni par $(x, y) = (17k, 5k)$ predstavlja opšte rešenje date jednačine.

PRIMER 46 *Postoji li dvocifren broj koji je jednak zbiru svoje cifre desetica i kvadrata cifre jedinica?*

Rešenje: Neka je traženi dvocifren prirodan broj $\overline{xy}$. Tadaje

$$10x + y = x + y^2,$$

odnosno

$$9x = y^2 - y = y(y-1).$$

Kako su brojevi y i $y-1$ dva uzastopna prirodna broja, oni su i uzajamno prosti, što znači da nemaju zajedničkih delilaca. Pošto je leva strana jednakosti deljiva sa 9, to je sa 9 deljiv i jedan od brojeva y ili $y-1$. Dakle $y = 9$ ili $y - 1 = 9$, odnosno $y = 10$. Drugi slučaj ne može biti rešenje, jer i x i y moraju biti jednocifreni brojevi, pa ostaje mogućnost da je $y = 9$. Tada je

$$9x = y(y-1) = 9 \cdot 8$$

što znači da je $x = 8$, a traženi broj 89.

4.3 Diofantove jednačine jedne promenljive

DEFINICIJA 1 *Jednačina koja sadrži jednu promenljivu i koja ima za uslov da je ona celobrojna, predstavlja Diofantovu jednačinu jedne promenljive.*

Problem Diofantovih jednačina jedne promenljive može se uopštiti na probleme polinoma. Dve teoreme koje su veoma bitne za takvo razmatranje u nastavku navodimo bez dokaza.

TEOREMA 2 *Ako $\frac{p}{q}$ (p i q su uzajamno prosti celi brojevi i $p, q \neq 0$)racionalna nula polinoma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

sa celobrojnim koeficijentima $a_n \neq 0$, onda je p delilac broja a_0, a q delilac broja a_n.

TEOREMA 3 *Ako x_0 predstavlja celobrojnu nulu sledećeg polinoma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

sa celobrojnim koeficijentima $a_n \neq 0$, onda je x_0 jedan od delilaca broja a_0.

PRIMER 47 *Odredi sve cele brojeve za koje važi*

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 14 = 0.$$

Rešenje: Možemo razlikovati dva slučaja:

1. Ako je $x = 0$, onda jednačina nema rešenja, jer je $14 \neq 0$;

2. Ako je $x \neq 0$, onda deljenjem sa x data jednačina se transformiše u sledeću:
$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + \frac{14}{x}.$$

Kako je x ceo broj i kako je desna strana jednakosti ceo broj, to mora biti i leva, a to znači da izraz $\frac{14}{x}$ mora biti ceo broj. Dakle, broj x mora pripadati skupu celobrojnih delilaca broja 14, pa je $x \in \{-14, -7, -2, -1, 1, 2, 7, 14\}$. Proverom se dobija da samo $x = 2$ zadovoljava datu jednačinu.

4.4 Linearne Diofantove jednačine oblika $ax + by = c$

4.4.1 Egzistencija rešenja linearne Diofantove jednačine

DEFINICIJA 2 *Ako su a, b, c celi brojevii $a, b \neq 0$ linearna jednačina oblika $ax + by = c$, pri čemu su vrednosti x i y iz skupa celih brojeva, naziva se linearna Diofantova jednačina.*

Ako je $c = 0$, dobijamo jednačinu $ax + by = 0$, koja se naziva homogena linearna Diofantova jednačina.

Očigledno je da se svaka linearna jednačina sa dve promenljive i celobrojnim koeficijentima može svesti na jednačinu oblika $ax + by = c$.

Već smo pominjali osnovna pitanja na koja treba odgovoriti prilikom rešavanja Diofantovih jednačina. Jedno od tih pitanja odnosi se na egzistenciju rešenja i odgovor na njega kad je reč o linearnim Diofantovim jednačinama daju sledeće teoreme koje su navedene bez dokaza.

TEOREMA 4 *Linearna Diofantova jednačina oblika $ax + by = c$ $(a, b, c \in Z)$ ima rešenje ako i samo ako je $d \mid c$, gde je $d = NZD(a, b)$.*

TEOREMA 5 *Linearna Diofantova jednačina oblika $ax + by = c$ $(a, b, c \in Z)$ ima uvek rešenje ako je $NZD(a, b) = 1$.*

PRIMER 48 *Odrediti celobrojna rešenja jednačine $28x + 70y = 39$.*

Rešenje: Kako je $NZD(28, 70) = 14$ i kako 14 nije delilac broja 39, zaključujemo da ova jednačina nema rešenja u skupu celih brojeva.

PRIMER 49 *Dokazati da jednačina $2x + 5y = 111$ ima beskonačno mnogo celobrojnih rešenja, a jednačina $3x + 6y = 1000$ nema celobrojnih rešenja.*

Rešenje: Kako su 2 i 5 uzajamno prosti brojevi, prva jednačina na osnovu teoreme 4 uvek ima rešenja.

Druga jednačina se deljenjem sa 3 može transformisati u sledeći oblik $x + 2y = \frac{1000}{3}$. Iz ovog oblika je očigledno da jednačina nema celobrojnih rešenja.

Posle ove dve teoreme, navešćemoi teoremu kojom se precizira racionalan postupak nalaženja opšteg rešenja jednačine oblika $ax + by = c$.

TEOREMA 6 *Ako je* $d = NZD(a,b)$, $d \mid c$ *i* $(x_0, y_0$ *jedno rešenje Diofantove jednačine* $ax + by = c$, *tada su sva rešenja* (x, y) *data formulom* $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ *i* $y = y_0 - \frac{a}{d}t$.

Ako su u ovakvoj jednačini a i b uzajamno prosti brojevi, opšta rešenja jednačine definisana su formulama: $x = x_0 + bt$ *i* $y = y_0 - at$ *(t je ceo broj).*

Ovaj postupak rešavanja Diofantove jednačine naziva se i Metod početnog rešenja.

PRIMER 50 *Odredi sva celobrojna rešenja jednačine* $3x + 5y = 8$.

Rešenje: Kako je $NZD(3,5) = 1$ data Diofantova jednačina ima rešenja u skupu celih brojeva. Partikularno rešenje ove jednačine je očigledno i ono je $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Sada je opšte rešenje jednačine

$$x = x_0 + bt = 1 + 5t,\ y = y_0 - at = 1 - 3t,\ t \in Z.$$

4.4.2 Primena Euklidovog algoritma u određivanju počtetnog rešenja

U primeni algoritma datog u prethodnoj teoremi jedini problem može biti određivanje tog jednog (partikularnog) rešenja (x_0, y_0). Ako to rešenje nije očigledno, jedan od mogućih načina za konkretno rešavanje tog problema je primena Euklidovog algoritma, kojim se efikasno određuje jedno od beskonačno mnogo mogućih rešenja.

PRIMER 51 *Odredi sva celobrojna rešenja jednačine* $13x + 32y = 5$.

Rešenje: Kako je $NZD(13, 32) = 1$ i kako je 1 delilac broja 5, data Diofantova jednačina ima rešenja u skupu celih brojeva. Koristeći Euklidov algoritam dobijamo

$$32 = 2 \cdot 13 + 6$$

$$13 = 2 \cdot 6 + 1$$

$$6 = 6 \cdot 1.$$

Brojevi 32 i 13 su uzajamno prosti, pa broj 1 možemo predstaviti kao linearnu funkciju brojeva 32 i 13.

$$1 = 13 + (-2) \cdot 6 = 5 \cdot 13 + (-2) \cdot 32.$$

Konačno dobijamo da je $13 \cdot 25 + 32 \cdot (-10) = 5$. Dakle, jedno rešenje linearne Diofantove jednačine $13x + 32y = 5$ je $(x_0, y_0) = (25, -10)$. Na osnovu prethodnih teorema dobijamo druga rešenja ove jednačine, tj. opšte rešenje:

$$x = x_0 + bt = 25 + 32t,\ y = y_0 - at = -10 - 13t,\ t \in Z.$$

PRIMER 52 *Odredi početno rešenje, a potom rešiti Diofantovu jednačinu*

$$155x - 95y = 100.$$

Rešenje: Data jednačina ima rešenje, jer je $NZD(155, 95) = 5$, a 5 je delilac broja 100. Prema tome, početna jednačina se deljenjem sa 5 može uprostiti i napisati u ekvivalentnom obliku $31x - 19y = 20$. Kako su sada brojevi 31 i 19 uzajamno prosti, to postoje celi brojevi α i β takvi da je $31\alpha - 19\beta = 1$. Brojeve α i β određujemo korišćenjem Euklidovog algoritma:

$$31 = 1 \cdot 19 + 12;\ 19 = 1 \cdot 12 + 7;\ 12 = 1 \cdot 7 + 5;\ 7 = 1 \cdot 5 + 2;\ 5 = 2 \cdot 2 + 1.$$

Predstavljamo broj 1 kao linearnu kombinaciju brojeva 19 i 31.

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7 - 1 \cdot 5) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$$

$$= 3(12 - 1 \cdot 7) - 2 \cdot 7 = 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7$$

$$= 3 \cdot 12 - 5(19 - 1 \cdot 12) = 8 \cdot 12 - 5 \cdot 19$$

$$8(31 - 1 \cdot 19) - 5 \cdot 19 = 8 \cdot 31 - 13 \cdot 19.$$

Dakle, $\alpha = 8$ i $\beta = 13$. Kako je $31\alpha - 19\beta = 1$, to je $20(31\alpha - 19\beta) = 20$, pa je

$$20 \cdot 31\alpha - 20 \cdot 19\beta = 20,$$

a zatim i

$$x_0 = 20\alpha = 20 \cdot 8 = 160,\ y_0 = 20\beta = 20 \cdot 13 = 260.$$

Prema tome, opšte rešenje date jednačine je

$$x = 160 + 19k,\ y = 260 + 31k,\ k \in Z.$$

U ovom primeru postajala su i manja početna rešenja $(x_0, y_0) = (8, 12)$, ali se do njih može doći samo intuicijom ili pogađanjem.

4.5 Diofantove jednačine stepena većeg od 1

Diofantove jednačine koje sadrže promenljivu stepena većeg od 1 su nelinearne Diofantove jednačine. Ovaj tip jednačina uglavnom se razmatra u skupu prirodnih brojeva (ako drugačije nije naglašeno), a sva razmatranja mogu se analogno obaviti i u skupu celih brojeva, mada rezultat ne mora biti identičan.

4.5.1 Diofantova jednačina tipa $xy = n\ (n \in N)$

Rešavanje Diofantove jednačine oblika $xy = n$ svodi se u stvari na određivanje činilaca broja n, pa se razmatranje ove jednačine odnosi na određivanje njenog broja rešenja. Jednačina ovog oblika uvek ima rešenja u skupu prirodnih (a i celih) brojeva, a model određivanja broja rešenja većine jednačina zasniva se na modelu prebrojavanja broja rešenja upravo ove jednačine.

PRIMER 53 *Koliko rešenja (x, y) ima jednačina $xy = p^n$, ako su x, y i n prirodni brojevi, a p prost broj?*

Rešenje: Delioci broja p^n su $1, p, p^2, p^3, ..., p^n$, pa data jednačina ima $n + 1$ rešenja , jer x može uzimati sve vrednosti od 1 do p^n, a y vrednosti $\frac{p^n}{x}$.

PRIMER 54 *Ako je kanonski oblik prirodnog broja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ dokazati da je onda broj rešenja Diofantove jednačine $xy = n$ u skupu prirodnih brojeva*

$$r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1).$$

Rešenje: Broj x može biti ma koji delilac prirodnog broja n. Kako n ima tačno $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1)$ delilaca, to jednačina $xy = n$, u skupu prirodnih brojeva ima $r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1)$ rešenja.

PRIMER 55 *Odrediti najmanji prirodan broj n, tako da jednačina $xy = n$ ima 10 rešenja.*

Rešenje: Na osnovu prethodnog primera imamo da je broj rešenja date jednačinen$r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1) = 10$, pa prema tome postoji nekoliko mogućnosti:

1. $\alpha_1 + 1 = 10$, $\alpha_2 + 1 = \alpha_3 + 1 = ... = \alpha_k + 1 = 1$. Tada je $n = 2^9 = 512$.
2. $\alpha_1 + 1 = 5, \alpha_2 + 1 = 2, \alpha_3 + 1 = ... = \alpha_k + 1 = 1$. Tada je $n = 2^4 \cdot 3 = 48$.
3. $\alpha_1 + 1 = 2, \alpha_2 + 1 = 5, \alpha_3 + 1 = ... = \alpha_k + 1 = 1$. Tada je $n = 2 \cdot 3^4 = 162$.
4. $\alpha_1 + 1 = 1$, $\alpha_2 + 1 = 10, \alpha_3 + 1 = ... = \alpha_k + 1 = 1$. Tada je $n = 3^9 = 19683$.

Najmanji takav prirodan broj je 48.

4.5.2 Pitagorina jednačina $x^2 + y^2 = z^2$

Problem Pitagorinih brojeva, tj. pitanje rešenja Pitagorine Diofantove jednačine, svakako predstavlja jedan od najzanimljivijih problema teorije brojeva.

DEFINICIJA 3 *Uređenu trojku prirodnih brojrva (x, y, z) koji zadovoljavaju Pitagorinu jednačinu $x^2 + y^2 = z^2$ nazivamo Pitagorina trojka.*

U geometrijskom smislu, ovi brojevi su takvi da su x i y katete, a z hipotenuza nekog pravouglog trougla. Ako su x, y i z uzajamno prosti brojevi, onda kažemo da je (x, y, z) osnovna Pitagorina trojka i takav trougao nazivamo Pitagorin trougao.

U nastavku ćemo navesti neke teoreme kojima su opisane osobine Pitagorinih trojki i koje su bitne za formulaciju osnovne teoreme o Pitagorinim brojevima.

TEOREMA 7 *Ako je (x, y, z) Pitagorina trojka, onda je itrojka (y, x, z) takođe Pitagorina trojka.*

DOKAZ. Očigledno je da ako važi $x^2 + y^2 = z^2$, onda važi i $y^2 + x^2 = z^2$, odakle je tvrđenje dato teoremom očigledno. □

TEOREMA 8 *Ako je (x, y, z) Pitagorina trojka, onda je i trojka (kx, ky, kz) takođe Pitagorina trojka.*

DOKAZ. Ako je (x, y, z) Pitagorina trojka, onda važi $x^2 + y^2 = z^2$, a odatle i $k^2x^2 + k^2y^2 = k^2z^2$, što značida je i $(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$. Dakle, i (kx, ky, kz) je Pitagorina trojka. □

TEOREMA 9 *Pitagorinih trojki ima beskonačno mnogo.*

DOKAZ. Na osnovu prethodne teoreme uočavamo da se za svaki prirodan broj k od Pitagorine trojke (x, y, z) može dobiti Pitagorina trojka (kx, ky, kz). Jasno je da svaka Pitagorina trojka generiše beskonačno mnogo novih Pitagorinih trojki. □

TEOREMA 10 *Ako je (x, y, z) osnovna Pitagorina trojka, onda su x i y prirodni brojevi različite parnosti.*

DOKAZ. Ako su x i y parni brojevi, onda je $x = 2a$ i $y = 2b, (a, b \in N)$. Tada je $NZD(x, y) = NZD(2a, 2b) = 2$. To znači da x i y nisu uzajamno prosti brojevi jer imaju zajednički delilac veći od 1, pa ova mogućnost otpada kao rešenje.

Ako su x i y neparni brojevi, možemo ih pisati kao $x = 2a + 1$ i $y = 2b + 1, (a, b \in N)$. Tada z mora biti paran broj, pa važi

$$(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 = (2c)^2, \ (c \in N),$$

ili

$$4a^2 + 4a + 1 + ab^2 + 4b + 1 = 4c^2.$$

Kako je sa desne strane jednakosti broj koji je deljiv sa 4, a sa leve broj koji pri deljenju sa 4 daje ostatak 2, to jednakost nije moguća.

Dakle x i y ne mogu biti iste parnosti, a z mora biti neparan prirodan broj. □

Teorema 11 *Sve osnovne Pitagorine trojke (x, y, z) u kojima je y paran, date su formulama:*

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2,$$

gde je $m > n$ i m, n uzajamno prosti brojevi različite parnosti. Takođe važi

$$y = m^2 - n^2,\ x = 2mn,\ z = m^2 + n^2.$$

Dokaz. Ovu teoremu dokazaćemo na dva načina:

I Diofantov dokaz: Ako početnu Pitagorinu jednačinu $x^2+y^2 = z^2$ podelimo sa z^2 dobijamo

$$(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 = 1.$$

Ako zatim uvedemo smene

$$\frac{x}{z} = a,\ \frac{y}{z} = b$$

jednačina postaje

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Na dobijenu jednačinu sada se primeni Diofantov metod rešavanja jednačina, koji smo pomenuli u prethodnom poglavlju. Kako je $(-1, 0)$ jedno rešenje dobijene jednačine, sledi da je

$$b = -1 + mt,\ a = nt,\ m, n \in N.$$

Tada je

$$(mt - 1)^2 + (nt)^2 = 1,$$

pa je

$$1 - 2mt + n^2t^2 = 1,\ tj.\ t = \frac{2m}{m^2 + n^2}.$$

Sada zamenom dobijamo

$$b = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\ ,\ a = \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$

Kada a i b vratimo u smene dobijamo

$$y = 2kmn,\ x = k(m^2 - n^2),\ z = k(m^2 + n^2).$$

II Algebarski dokaz: Početnu jednačinu $x^2 + y^2 = z^2$ možemo napisati u ekvivalentnom obliku koji dobijamo transformacijama

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + x)(z - x).$$

Na osnovu ove relacije možemo formirati proporciju

$$\frac{x}{z - y} = \frac{z + y}{x} = \frac{m}{n},\ m, n \in N,$$

a dalje

$$z+y=\frac{mx}{n},\ z-y=\frac{nx}{m}.$$

Rešavanjem prethodnog sistema jednačina po z i y dobija se

$$\frac{z}{x}=\frac{m^2+n^2}{2mn}\ i\ \frac{y}{x}=\frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

Tada je

$$x=2kmn,\ y=k(m^2-n^2),\ z=k(m^2+n^2).$$

Za $k=1$ dobija se tražena formula

$$x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2.$$

Naredne primere, u nešto modifikovanoj formi, rešavao je Diofant Aleksandrijski u svojoj "Aritmetici". □

PRIMER 56 *Dokazati da postoji beskonačno mnogo pravouglih trouglova kod kojih je hipotenuza za 1 veća od katete.*

Rešenje: Na osnovu prethodnih teorema znamo da su z i y neparni brojevi, pa prema tome nikako ne mogu biti uzastopni, tj. ne mogu se razlikovati za 1. Zbog toga mora biti

$$z=x+1 \text{ ili } 2mn+1=m^2+n^2.$$

Sledi da je $m^2+n^2-2mn=1$, pa je $(m-n)^2=1$. Dakle, $m=n+1$, pa sve osnovne Pitagorine trouglove kod kojih je hipotenuza za 1 veća od katete generišu jednakosti:

$$x=2n(n+1),$$
$$y=(n+1)^2-n^2=2n+1,$$
$$z=(n+1)^2+n^2=2n^2+2n+1=2n(n+1)+1.$$

PRIMER 57 *Odrediti sve trouglove čiji je merni broj obima jednak mernom broju površine.*

Rešenje: Obim Pitagorinog trougla je

$$2mn+m^2-n^2+m^2+n^2=2mn+2m^2=2(m+n)m,$$

a površina $mn(m^2-n^2)$. Dakle,

$$2(m+n)m=mn(m-n)(m+n),$$

pa je $(m-n)n=2$. Sledi da je $n=1$, a $m-n=2$ ili $n=2$, a $m-n=1$. Prema tome, postoje dva rešenja: $(m,n)=(3,1)$ ili $(m,n)=(3,2)$. Stranice trougla su tada $(4,6,10)$, a $O=P=24$ ili $(12,5,13)$, a $O=P=30$.

4.5.3 Jednačine oblika $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$

Diofantove jednačine ovog oblika mogu se posmatrati kao proširenje Pitagorine jednačine. Kao i kod prethodnih tipova jednačina, i ovde postavljamo uobičajena pitanja koja se odnose na egzistenciju rešenja, broj rešenja i opšte rešenje.

Pozitivna rešenja (x, y, z, t) jednačine oblika $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ ustvari predstavljaju dimenzije i dužine dijagonala pravouglog paralelopipeda. Mi imamo cilj da nađemo sva celobrojna rešenja.

Na isti način kao kod Pitagorine jednačine možemo pokazati da jednačina oblika $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ ima beskonačno mnogo rešenja, a opšte rešenje jednačine dato je sledećom teoremom koju ćemo i dokazati.

Teorema 12 *Opšte rešenje jednačine $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ u skupu prirodnih brojeva definisano je relacijama*

$$x = 2p,\ y = 2q,\ z = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{r},\ t = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{r}$$

gde su p, q, r prirodni brojevi koji ispunjavaju sledeće uslove:

$$r \mid p^2 + q^2;\ p^2 + q^2 > r^2.$$

Dokaz. Pri analiziranju jednačine $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ možemo uočiti da broj t^2 pri deljenju sa 4 daje ostatak 0 ili 1, pa i leva strana jednačine pri deljenju sa brojem 4 mora dati isti ostatak. Na osnovu toga zaključujemo da bar dva od brojeva x, y, z moraju biti parni, a sva tri su parna samo u slučaju da je i t paran. Međutim, deljenjem jednačine sa 4 (jednom ili više puta) na kraju se opet dolazi do slučaja da je t neparan. Tada je očigledno da dva od brojeva x, y, z moraju biti parni, a jedan neparan.

Pretpostavimo da je $x = 2p, y = 2q, p, q \in N$. Kako je $t > z$ i kako su oba neparna, to njihova razlika mora biti paran broj, tj. možemo zapisati $t - z = 2r$ ili $t = 2r + z$. Prema tome, početnu jednačinu možemo transformisati na sledeći način

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 4p^2 + 4q^2 &= t^2 - z^2 = (t - z)(t + z) \\ &= 2r(2r + z + z) = 4r^2 + 4rz. \end{aligned}$$

Iz jednakosti $4p^2 + 4q^2 = 4r^2 + 4rz$ dobijamo da je $p^2 + q^2 - r^2 = rz$, odakle dobijamo

$$\frac{p^2 + q^2 - r^2}{r}$$

uz uslove $r \mid p^2 + q^2;\ p^2 + q^2 > r^2$, čime je dobijeno opšte rešenje početne jednačine.

Korišćenjem formulacije opšteg rešenja jednačine datog prethodnom teoremom znatno je olakšano rešavanje Diofantovih jednačina oblika $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, što pokazuju i sledeći primeri. $\square$

Primer 58 *Da li postoje tri uzastopna prirodna broja čiji je zbir kvadrata jednak kvadratu nekog prirodnog broja?*

Rešenje: Uslov dat tekstom zadatka možemo zapisati kao jednačinu

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = y^2,\ x, y \in N$$

Odavde je očigledno da leva strana jednačine pri deljenju sa 3 daje ostatak 2, pa tako i desna strana te jednačine, koja je kvadrat nekog prirodnog broja, mora dati isti ostatak pri deljenju sa brojem 3. Ovakav slučaj nije moguć u skupu prirodnih brojeva, pa tako početna jednačina nema rešenja, a brojevi traženi u zadatku ne postoje.

Primer 59 *Odredi sve brojeve x, y, z takve da važi $x^2 + y^2 + z^2 = 15^2$.*

Rešenje: Na osnovu teoreme 10. koja formuliše opšte rešenje jednačine
$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ sledi da je

$$15 = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{r},$$

odnosno $p^2+q^2+r^2 = 15r$. Proverom za razne vrednosti r koje zadovoljavaju i uslov dat teoremom $0 < r < t = 15$, dobijamo da je

$$p^2 + q^2 \in \{14, 26, 36, 44, 50, 54, 56\}.$$

Kako je

$$26 = 1^2 + 5^2,\ 36 = 0^2 + 6^2,\ 50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2,$$

to su rešenja $p \in \{1, 0, 1, 5\}, q \in \{5, 6, 7, 5\}$.
Kako je opšte rešenje $x = 2p,\ y = 2q$, to su sva rešenja:

$$2^2 + 10^2 + 11^2 = 15^2,$$

$$0^2 + 12^2 + 9^2 = 15^2,$$

$$2^2 + 14^2 + 5^2 = 15^2,$$

$$10^2 + 10^2 + 5^2 = 15^2.$$

4.5.4 Jednačine oblika $x^2 + y^2 = pz^2$

Iz ovog oblika jednačine, za slučaj kada je $p = 2$ dobijamo jednačinu $x^2+y^2 = 2z^2$. Ova jednačina ima trivijalno rešenje $x = y = z = k$, ali pored tog, postavlja se pitanje o drugim mogućim rešenjima. Jednačina $x^2+y^2 = n$ ima isti broj rešenja kao jednačina $x^2 + y^2 = 2n$, a između rešenja ove dve jednačine uspostavljena je i jednoznačna korespodencija

$$(x, y) \to (x - y, x + y).$$

Na osnovu tog tvrđenja i znajući da jednačina $x^2 + y^2 = z^2$ ima rešenje $x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$, zaključujemo da će jednačina oblika $x^2 + y^2 = 2z^2$ imati opšte rešenje koje je definisano formulama:

$$x = \mid m^2 - n^2 + 2mn \mid,$$

$$y = \mid m^2 - n^2 - 2mn, \mid$$

$$z = m^2 + n^2.$$

Kao i kod Pitagorine jednačine, i u ovom slučaju važi $m > n$ i m, n uzajamno prosti prirodni brojevi različite parnosti.

U slučaju da je $p = 3$ možemo dokazati da tako dobijena jednačina $x^2 + y^2 = 3z^2$ osim trivijalnog rešenja $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ nema drugih rešenja. Naime, do tog zaključka možemo doći rešavanjem jednačine metodom najmanjeg rešenja.

Neka $\alpha_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ ima najmanju moguću vrednost. Iz jednakosti $x_0^2 + y_0^2 = 3z_0^2$ sledi da su brojevi x_0 i y_0 deljivi sa 3, što možemo zapisati $x_0 = 3x_1,\ y_0 = 3y_1$.

Tada važi

$$x_0^2 + y_0^2 = 9(x_1^2 + y_1^2) = 3z_0^2.$$

Sledi da je

$$3(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2,$$

pa je i z_0 deljivo sa 2 i zapisujemo $z_0 = 3z_1$. Sada je

$$3(x_1^2 + y_1^2) = 9z_1^2$$

pa je

$$x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2.$$

To znači da je i uređena trojka (x_1, y_1, z_1) takođe rešenje date jednačine. Međutim, kako je $\alpha_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9\alpha_1$, sledi da je $\alpha_1 < \alpha_0$ što je protivurečno tvrđenju da je α_0 najmanji takav broj, pa je jedino rešenje jednačine $x^2 + y^2 = 3z^2$ trivijalno.

U slučaju da je $p = 4$ jednačina $x^2 + y^2 = 4z^2$ može se posmatrati u obliku $x^2 + y^2 = (2z)^2$, pa je tada $(x, y, 2z)$ Pitagorina trojka. To znači da je njeno opšte rešenje

$$x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ 2z = m^2 + n^2,$$

Uz uslove $m > n$ i m, n uzajamno prosti prirodni brojevi različite parnosti.

Rešenja ove jednačine mogu se smatrati korespodentnim sa rešenjima jednačine $x^2 + y^2 = 2z^2$, pa se dobija opšte rešenje

$$x = 4mn,\ y = 2(m^2 - n^2),\ 2z = m^2 + n^2.$$

Očigledno je da na ovaj način jednačina $x^2 + y^2 = pz^2$ ima netrivijalna rešenja i lako se dolazi do rešenja za sve brojeve p koji se mogu prdstaviti kao stepen broja 2, $p = 2^k$.

Sledeći slučaj je za $p = 5$. Jednačina $x^2 + y^2 = 5z^2$ ima trivijalno rešenje $(k, 2k, k)$. Primenom Diofantovog metoda za rešavanje jednačina, posle uvođenja smene, ova jednačina postaje $a^2 + b^2 = 5$, a potom transformacijama $a = 2+mt,\ b = 1+nt$, i vraćanjem smena dobijamo opšte rešenje jednačine

$$x = 2n^2 - 2m^2 - 2mn,\ y = m^2 - n^2 - 4mn,\ z = m^2 + n^2.$$

Za $p = 6$, jednačina $x^2 + y^2 = 6z^2$ osim trivijalnog $(0, 0, 0)$ nema drugih celobrojnih rešenja. Ovo sledi iz činjenice da jednačina $x^2 + y^2 = 3z^2$ nema rešenja, pa tada i jednačina $x^2 + y^2 = 2 \cdot 3z^2$ ima isti broj rešenja, odnosno u ovom slučaju nema rešenja.

Za jednačinu $x^2 + y^2 = 7z^2$ takođe važi da osim trivijalnog nema drugih rešenja (što se kao i u slučaju $p = 3$ može dokazati metodom najmanjeg rešenja).

Trivijalna rešenja jednačine $x^2+y^2 = 9z^2$ su $(3k, 0, k)$. Kako se prethodna jednačina može zapisati kao $x^2 + y^2 = (3z)^2$, onda je opšte rešenje jednačine definisano relacijama:

$$x = 6mn,\ y = 3(m^2 - n^2),\ z = m^2 + n^2.$$

Opšte rešenje za jednačinu $x^2 + y^2 = 10z^2 = 5 \cdot 2z^2$ može se izvesti iz rešenja jednačine $x^2 + y^2 = 5z^2$, pa se proces istraživanja može nastaviti pojedinačnim razmatranjima.

4.5.5 Jednačine oblika $x^2 + py^2 = z^2$

Kao i kod prethodnog tipa jednačine, prvi slučaj koji ćemo posmatrati je za $p = 2$. U tom slučaju dobijamo jednačinu $x^2 + 2y^2 = z^2$, koja se transformacijom

$$2y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$$

svodi na sistem jednačina

$$z + x = 2y,\ z - x = y.$$

Pošto y mora biti paran broj, možemo ga zapisati kao $y = 2k$ i dobijamo da je $z = \frac{3y}{2} = 3k$ i $x = \frac{y}{2} = k$. Prema tome, jedno rešenje je $x = k,\ y = 2k,\ z = 3k$.

Obzirom da su ovim jednostavnim transformacijama data samo neka rešenja, ali ne i sva, Diofantov metod daje jednu klasu rešenja:

$$x = 2n^2 - m^2 - 8mn,\ y = 2m^2 - 4n^2 - 2mn,\ z = 3(m^2 + 2n^2).$$

Očigledno, jednačinu $x^2 + py^2 = z^2$ možemo transformisati na sledeći način
$$py^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x).$$
Jedan od mogućih dobijenih sistema jednačina je i
$$z + x = py,\ z - x = y.$$
Njihovim rešavanjem, ako se stavi da je $y = 2k$, dobija se familija rešenja:
$$x = (p-1)k,\ y = 2k,\ z = (p+1)k.$$

Naravno, rešenja možemo dobiti i koristeći Diofantove ili neke druge metode.

4.5.6 Jednačine oblika $px^2 + qy^2 = rz^2$

Jednačine ovog oblika ćemo razmatrati kroz par konkretnih primera, na sličan način kao u prethodnim slučajevima.

PRIMER 60 *Dokazati da jednačina $4x^2 + 16y^2 = 3z^2$ nema rešenja u skupu prirodnih brojeva.*

Rešenje: Ako uvedemo smenu $2x = a$ i $4y = b$, početna jednačina postaje $a^2 + b^2 = 3z^2$. Ranije smo dokazali da ova jednačina nema rešenja u skupu prirodnih brojeva, čime je dokazano da ni početna jednačina nema rešenja, što je i bio zahtev ovog zadatka.

PRIMER 61 *Odrediti opšte rešenje jednačine $2x^2 + 7y^2 = z^2$ u skupu celih brojeva.*

Rešenje: Cilj nam je da nađemo jedno partikularno rešenje kako bismo Diofantovom metodom odredili bar jednu formulu koja generiše beskonačno mnogo rešenja. Jedno takvo rešenje je $x_0 = 3,\ y_0 = 1, z_0 = 5$, pa dobijamo da jednačina ima beskonačno mnogo rešenja koja generišu formule: $x = 3k,\ y = k,\ z = 5k$.

Diofantovom metodom i transformacijama dobija se klasa dvoparametarskih rešenja početne Diofantove jednačine:
$$x = 21n^2 - 54m^2 - 70mn,\ y = 2m^2 - 63n^2 - 60mn,\ z = 5(2m^2 + 7n^2).$$

Zaključak

Ovaj rad predstavlja jedno od mogućih viđenja sadržaja o Diofantovim jednačinama u preduniverzitetskom obrazovanju. U njemu je sadržan teorijski pristup Diofantovim jednačinama, kao i primeri urađenih zadataka. Većina urađenih zadataka je iz naprednog nivoa, tako da ovaj rad može poslužiti kao deo literature za pripremu učenika za matematička takmičenja. Osim toga, može poslužiti nastavnicima i profesorima u didaktičkom i metodičkom smislu, kao podsetnik za Diofantove jednačine u toku pripreme časova redovne i dodatne nastave.

Rad sadrži tri osnovne tematske celine. Prva predstavlja istorijski osvrt na Diofanta i njegovu aritmetiku, druga se bavi metodama za rešavanje Diofantovih jednačina, a treća predstavlja različite tipove Diofantovih jednačina. Druga i treća celina sadrže mnoštvo detaljno obrađenih zadataka i metoda pogodnih za direktnu ili analognu primenu, iz problematike koja je retko prisutna u našoj literaturi.

Sam rad daje istorijske, metodičke, teoretske i praktične osnove za realizaciju sadržaja o Diofntovim jednačinama u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi, gde su prilično oskudno zastupljeni i ne pominju se eksplicitno. Kroz takve sadržaje može se mnogo toga naučiti u teorijskom i praktičnom smislu, pa je veoma korisno posvetiti im posebnu pažnju. Osim toga, kroz rad sa Diofantovim jednačinama može se steći dobar uvid u teorijsku potkovanost učenika, u sposobnost njihovog rasuđivanja, logičkog zaključivanja, kao i iskustva u odabiru matematičkih sredstava koja su siguran put ka rešenju problema.

Literatura

[1] Vojislav Andrić, Diofantove jednačine, Krug,Beograd, 2006.

[2] V. Dragović, S. Ognjanović, P. Mladenović Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjih škola (sa rešenjima), Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1999.

[3] Vojislav Andrić, Metodička transformacija sadržaja o Diofantovim jednačinama u nastavi matematike u srednjoj školi, doktorska disertacija, Novi Sad, 2006.

[4] Vojislav Andrić, Nelinearne Diofantske jednačine(neke metode rešavanja-zbirka zadataka), Arhimedes,Beograd, 1988.

[5] V. Mićić, Z.Kadelburg, D.Đukić, Uvod u teoriju brojeva Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1989.

[6] J. Pereljman, Zanimljiva aritmetika i algebra-odabrane strane, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1981.

[7] M. Jovanović, D. Tošić, Zbirka rešenih zadatakai problema iz matematike ya učenike srednjih škola, Beograd, 2010.

[8] V. Stojanović, Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1984.

[9] MATEMATISKOP, I.P., Matematiskop, Beograd, 1998-1999, broj 1-5

[10] MATEMATISKOP, I.P., Matematiskop, Beograd, 2001-2002, broj 1-5

[11] MATEMATISKOP, I.P., Matematiskop, Beograd, 2002-2003, broj 1-5

[12] Matematički list,Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2008, XLII

[13] Matematički list,Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2010, XV

[14] Tangenta,Društvo matematičara Srbije, Beograd, 20010, broj 62