ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES INDÉTERMINÉES A DEUX INCONNUES,

par M. Michel Petrovitch,
Professeur à l'Université de Belgrade (Yougoslavie).

L'équation algébrique indéterminée à deux inconnues, x et y,

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

où $F(x, y)$ est un polynome en x, y dont les coefficients sont des nombres entiers réels, s'écrit, d'abord,

$$y F_1(x, y) + F_2(x, y) = 0, \tag{2}$$

en mettant y en évidence dans l'ensemble des termes contenant cette inconnue à des puissances impaires, puis,

$$y = -\frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)} \tag{3}$$

Les polynomes $F_2(x, y)$, $F_1(x, y)$ ne contiennent que des puissances paires de y ; en les ordonnant suivant les puissances croissantes de cette inconnue, nous poserons

$$F_2(x, y) = p_0(x) + p_2(x)y^2 + p_4(x)y^4 + \cdots \tag{4}$$

$$F_1(x, y) = q_0(x) + q_2(x)y^2 + q_4(x)y^4 + \cdots, \tag{5}$$

où $p_j(x)$, $q_j(x)$ sont des polynomes en x,

$$p_j(x) = a_{j,0} + a_{j,1}x + a_{j,2}x^2 + \cdots, \tag{6}$$

$$q_j(x) = b_{j,0} + b_{j,1}x + b_{j,2}x^2 + \cdots \tag{7}$$

L'équation (3) devient

$$y = -\frac{p_0(x) + p_2(x)y^2 + p_4(x)y^4 + \cdots}{q_0(x) + q_2(x)y^2 + q_4(x)y^4 + \cdots}. \tag{8}$$

Nous ne considérerons, dans la présente note, que *les équations dans lesquelles tous les coefficients non nuls des polynomes* $q_j(x)$ *ont le même signe, et telles, en outre, que le degré de* $p_j(x)$ *soit le même que celui de* $q_j(x)$.

Nous allons montrer que, dans ces conditions, *les solutions* (x, y) *en nombres entiers positifs de l'équation* (1) *sont en nombre limité et s'obtiennent toutes au moyen d'un nombre fini d'équations arithmétiques élémentaires.*

On peut toujours supposer les $b_{j,i}$ positifs ; s'il n'en était pas ainsi, il n'y aurait qu'à changer les signes des $a_{j,i}$.

Utilisons la proposition élémentaire d'après laquelle, les β_k et les λ_k étant positifs, et les α_k de signes quelconques, la valeur du rapport

$$\frac{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_n}{\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \ldots + \beta_n\lambda_n}$$

est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur des rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \qquad \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

Les puissances de x et les coefficients $b_{j,i}$ étant positifs, la valeur du polynome $q_j(x)$ est positive. Les puissances de y étant également positives, la valeur du second membre de (8), et par suite aussi la valeur de y, sera comprise entre la plus petite et la plus grande valeur des rapports

$$-\frac{p_0(x)}{q_0(x)}, \qquad -\frac{p_2(x)}{q_2(x)}, \qquad -\frac{p_4(x)}{q_4(x)}, \qquad \ldots \tag{9}$$

Chacun de ces rapports reste fini pour toute valeur positive de x ; soient N et M deux nombres entre lesquels se trouvent les valeurs de tous ces rapports lorsque x varie de 0 à ∞.

La valeur y, d'après (8), sera située dans l'intervalle Δ limité par les deux nombres N et M. Cet intervalle étant limité, ne contiendra qu'un nombre fini d'entiers positifs

$$n_1, \qquad n_2, \qquad n_3, \qquad \ldots \tag{10}$$

que l'on connaîtra tous. Et alors, d'après l'équation (8),

L'inconnue y *ne peut pas avoir des valeurs admissibles en dehors de la suite* (10), *et l'inconnue* x *ne peut en avoir d'autres que des solutions en nombres entiers positifs des équations algébriques à une seule inconnue*

$$F(x, n_1) = 0, \qquad F(x, n_2) = 0, \qquad F(x, n_3) = 0, \qquad \ldots \tag{11}$$

Le problème se ramène donc à la solution en nombres entiers positifs d'un nombre fini d'équations algébriques à une seule inconnue, ce qui n'exige qu'un nombre limité d'opérations arithmétiques élémentaires et bien connues.

Dans le cas où l'intervalle Δ *ne contient aucun entier positif, ou bien si aucune des équations* (7) *n'admet des solutions* x *en tels nombres, l'équation* (1) *elle-même n'admet aucune solution* (x, y) *en nombres entiers positifs.*

Dans un cas général, on peut déterminer l'intervalle Δ à la seule inspection de l'équation (8). Considérons le cas où il n'y a pas de coefficients b_{ji} nuls, ou bien s'il y en a, et si un b_{ji} est nul, il en est de même du coefficient correspondant $a_{j,i}$. La valeur du rapport

$$-\frac{p_j(x)}{q_j(x)}$$

figurant effectivement dans la suite (9), sera alors comprise entre la plus petite valeur N_j et la plus grande valeur M_j des rapports

$$-\frac{a_{j,0}}{b_{i,0}}, \qquad -\frac{a_{j,1}}{b_{i,1}}, \qquad -\frac{a_{j,2}}{b_{j,2}}, \qquad \ldots \tag{12}$$

et *l'intervalle* Δ *sera celui limité par le plus petit parmi les* N_j *et le plus grand parmi les* M_j.

Premier exemple : pour l'équation

$$\alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta y + \lambda x + \nu = 0 \tag{13}$$

où α, γ, δ, sont des entiers positifs, β, λ, ν des entiers quelconques, on trouve ce qui suit :

Pour que l'équation admette des solutions (x, y) en nombres entiers positifs, il faut et il suffit que l'intervalle Δ, limité par le plus petit et le plus grand de trois nombres

$$-\frac{\beta}{\alpha}, \qquad -\frac{\lambda}{\gamma}, \qquad -\frac{\nu}{\delta} \tag{14}$$

contienne au moins un entier positif m, et que pour un tel entier le nombre

$$x = -\frac{\alpha m^3 + \beta m^2 + \delta m + \nu}{\gamma m + \lambda} \tag{15}$$

soit lui-même entier positif. Les paires de valeurs (x, m) ainsi obtenues sont les seules solutions de l'équation (13)

On trouve, par exemple, pour l'équation

$$2y^3 - 3y^2 + xy + y - 3x - 3 = 0, \tag{16}$$

que la suite (14), qui est

$$\frac{3}{2}, \qquad 3, \qquad 3,$$

contient deux entiers positifs

$$m_1 = 2, \qquad m_2 = 3\,;$$

le premier fournit

$$x = 3, \qquad y = 2$$

et le second, fournissant $x = \infty$, n'est pas admissible. L'équation (16) a donc une seule solution $x = 3$, $y = 2$.

Deuxième exemple : considérons l'équation

$$(17) \qquad ay^3 + by^2 + (cx^2 + dx + e)y + px^2 + qx + r = 0,$$

où a, c, d, e sont des entiers positifs, b, p, q, r des entiers quelconques.

Pour que l'équation admette des solutions (x, y) en nombres entiers positifs, il faut et il suffit que l'intervalle compris entre le plus petit et le plus grand des quatre nombres

$$(18) \qquad -\frac{b}{a}, \qquad -\frac{p}{a}, \qquad -\frac{q}{d}, \qquad -\frac{r}{e}$$

contienne au moins un entier positif m et que pour un tel entier l'équation quadratique

$$(19) \qquad \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0,$$

où

$$\mathrm{A} = cm + p,$$
$$\mathrm{B} = dm + q,$$
$$\mathrm{C} = am^3 + bm^2 + cm + r,$$

ait au moins une racine entière positive. A tout m remplissant ces conditions correspond ainsi une solution de l'équation (17), et l'on aura de cette manière toutes les solutions.

On trouve, par exemple, que pour l'équation

$$(20) \qquad y^3 - 3y^2 + (2x^2 + x + 1)y - x^2 - 4x + 3 = 0,$$

la suite (13), qui est

$$3, \qquad \frac{1}{2}, \qquad 4, \qquad -3,$$

contient quatre nombres entiers

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = 2, \qquad m_3 = 3, \qquad m_4 = 4.$$

Pour m_2, m_3, m_4, l'équation quadratique (19) n'a pas de racines entières positives. Pour $m = m_1$, elle est

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

et a comme racines $x = 1$, $x = 2$. A toutes les deux racines correspond la valeur $y = 1$; l'équation (20) a donc en tout deux solutions

$$x = 1, \qquad y = 1 \qquad \text{et} \qquad x = 2, \qquad y = 1.$$

On trouve, de la même manière, que par exemple l'équation

$$y^3 - y^2 + (x^2 + 1)y + x^2 - 1 = 0$$

n'admet aucune solution en nombres entiers positifs, ce qui est d'ailleurs bien évident.