ODBITKA ZE SPRAWOZDAŃ Z POSIEDZEŃ TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO XXVII. 1934. WYDZIAŁ III.

Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXVII. 1934. Classe. III.

M. Petrovitch.

Twierdzenie o funkcjach całkowitych.

Proposition sur les fonctions entieres.

WARSZAWA — 1934

Odbitka ze Sprawozdań z posiedzeń Towarzystwa
Naukowego Warszawskiego XXVII 1934. Wydział III.
Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences
et des lettres de Varsovie XXVII 1934. Classe III.

Michał Petrovitch.

Twierdzenie o funkcjach całkowitych.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 28 lutego 1934 r.

Streszczenie.

Jeżeli nazwiemy funkcję majoryzującą $F(z)$ funkcji $f(x)$ (gdzie $r = |x|$), danej przez swe rozwinięcie na szereg Taylora (T), szereg, otrzymany przez zastąpienie współczynników rozwinięcia (T) oraz liczby x przez ich moduły, wówczas pewne związki linjowe między współczynnikami dwuch funkcyj całkowitych $u(x)$ i $v(x)$, których funkcje majoryzujące $U(x)$ i $V(z)$ są związane zależnością *algebraiczną* względem $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\underline{r}$, są możliwe tylko wówczas, gdy $\underline{u}$ i $\underline{v}$ są rodzaju *skończonego*.

Michel Petrovitch.

Proposition sur les fonctions entieres.

Présenté dans la séance du 28 Février 1934.

Nous dèsignerons, selon la définition usuelle, comme *fonction majorante* $F(r)$ d'une fonction donnée

(1) $$f x = \sum a_n x^n$$

à coefficients a_n réels ou imaginaires, la fonction

(2) $$F(r) = \sum a_n r_n$$

obtenue de (1) en y remplaçant les $\underline{a}_n$ et $\underline{x}$ par leurs modules

$$|a_n| = \alpha_n \qquad\qquad |x| = r$$

Soit $[\lambda_n \alpha_n]$ la forme linéaire en α_n

(3) $$[\lambda_n \alpha_n] = \lambda_n \alpha_0 + \lambda_{n-1} \alpha_1 + \cdots + \lambda_0 \alpha_n$$

rattachée à la fonction $f(\underline{x})$ où $\underline{\lambda}_n$ est le coefficient de $\underline{x}^n$ dans le développement taylorien d'une fonction *algébrique* $\Theta(x)$ à coefficients tous réels.

Dans le cas, par exemple, de

$\Theta(x) = a + bx$ on a $\lambda_0 = a$, $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = 0$

$\Theta(x) = \dfrac{1}{1-x}$ on a $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = 1$

$\Theta(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ on a $\lambda_n = n + 1$

$\Theta(x) = \dfrac{1}{(1-x)^p}$ on a $\lambda_n = \dfrac{(p+n-1)!}{(p-1)!\; n!}$

$\Theta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ on a $\lambda_n = \dbinom{2n}{n}$

La proposition faisant l'objet de cette Note se rapporte aux fructions *entiéres*

(4) $$u(x) = \sum a_n x^n \qquad v(x) = \sum a_n' x^n$$

admettant des formes respectives

$$[\lambda_n a_n] \quad \text{et} \quad [\lambda_n' a_n']$$

dont le rapport s'exprime en relation *birrationelle* avec n, c'est-à-dire est de la forme

(5) $$\frac{[\lambda_n a_n]}{[\lambda_n' a_n']} = \frac{an + b}{a'n + b'}$$

(où $\underline{a}$, $\underline{a}'$, $\underline{b}$, $\underline{b}'$ ne dépendent pas de $\underline{n}$.

Nous désignerons un tel couple de fonctions entieres comme *couple* (u, v). Tel serait, par exemple, le couple formé de deux fonctions

$$u(x) = h + (ax + b)e^x = \sum \frac{an + b}{n} x^n + h$$

$$v(x) = h' + (a'x + b')e^x = \sum \frac{a'n + b'}{n!} x^n + h$$

admettant les deux formes

$$[\lambda_n \alpha_n] = \alpha_n = \frac{an + b}{n!}$$

$$[\lambda_n' \alpha'_n] = \alpha_n' = \frac{a'n + b'}{n!}$$

correspondant à $\Theta(x) = 1 \quad \lambda_0 = \lambda_0' = 1$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_1' = \lambda_2' = \cdots = 0$$

et dont le rapport est égal à

$$\frac{an + b}{a'n + b'}$$

La proposition est la suivante:

Si les fonctions majorantes $\underline{U(r)}$ et $\underline{V(r)}$ de deux fonctions entierés $\underline{u(x)}$ et $\underline{v(x)}$ formant un couple (u, v), sont liées par une relation algébrique en $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\underline{r}$, les fonctions $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont de genre fini.

Pour le faire voir, nous remarquerons que la série

$$\sum [\lambda_n \alpha_n] r^n \tag{6}$$

est le développement du produit de $\underline{U(r)}$ par la fonction algébrique $\underline{\Theta(r)}$ ayant $\underline{\lambda_n'}$ comme coefficient de $\underline{r^n}$, et que la série

$$\sum [\lambda_n' \alpha_n'] r^n \tag{7}$$

est le développement du produit de $\underline{V(r)}$ par la fonction algébrique $\underline{\Theta(r)}$ ayant $\underline{\lambda_n'}$ comme coefficient de $\underline{r^n}$.

D'autre part, de (5) on tire

$$(a'n + b')[\lambda_n \alpha_n] = (an + b)[\lambda_n' \alpha_n']$$

d'où

$$a' F_1(r) + b' F_0(r) = a\Phi_1(r) + b\Phi_0(r) \tag{8}$$

où

$$F_0(r) = \sum [\lambda_n \alpha_n] r^n = \Theta U$$

(9)
$$F_1(r) = \sum n [\lambda_n \alpha_n] r^n = r \frac{d}{dr} (\Theta U)$$

$$\Phi_0(r) = \sum [\lambda_n' \alpha_n'] r^n = \Theta_1 V$$

$$\Theta_1(r) = \sum n [\lambda_n' \alpha_n'] r^n = r \frac{d}{dr} (\Theta_1 V)$$

De (8) et (9) on tire la relation

(10)
$$a' r \Theta \frac{dU}{dr} + (a' r \frac{d\Theta}{dr} + b' \Theta) U = a r \Theta_1 \frac{dV}{dr} +$$

$$+ (a r \frac{d\Theta_1}{dr} + (b \Theta_1) V = 0 .$$

Supposons maintenant qu'entre U, V et r existe une relation algébrique

(11)
$$f(U, V, r) = 0 .$$

L'élimination de V et de $\frac{dV}{dr}$ entre les trois équations (10), (11) et

(12)
$$\frac{df}{dU} \frac{dU}{dr} + \frac{dt}{dV} \frac{dV}{dr} + \frac{dt}{dr} = 0$$

conduit à une équation différentielle du premier ordre

(13)
$$\varphi \left(r, U, \frac{dU}{dr} \right) = 0$$

où φ est un polynome en r, U, $\frac{dU}{dr}$.

Le genre de la fonction entière $U(r)$ est dès lors nécéssairement fini. En effet, on a pour tout point x sur le cercle de rayon arbitraire r ayant l'origine comme centre

(14)
$$| u(x) | \leqslant \sum \alpha_n r^n = U(r)$$

et U est une intégrale réelle de l'équation (13). D'après le théorème connu de M. E. Lindelöf sur la croissance des ntégrales réelles des équations différentielles algébriques du premier ordre, la valeur de $U(r)$ pour r positif suffisemment grand ne surpasse pas la valeur.

$$e^{C r^m} \tag{15}$$

où C et m sont une constante positive et un entier positif *fini*, convenablement choisis.

On en conclut, de la manière connu dans la théorie des fonctions entieres, que le genre de $U(r)$ ne surpasse par m, et d'après l'inégalité (14) il en est de même de $u(x)$.

En permutant u et v dans les relations précédentes, on arrive à la conclusion que le genre de v est également fini, ce qui démontre la proposition.

Ainsi, par exemple, si parmi les formes

$$\begin{aligned} & a\,\alpha_n + b\,\alpha_{n-1} \qquad (a\,,\ b = \text{const. positives}) \\ & \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \\ & \alpha_0 + 2\,\alpha_1 + 3\,\alpha_2 + \cdots + (n+1)\,\alpha_n \\ & \alpha_0 + \tbinom{2}{1}\alpha_1 + \tbinom{4}{2}\alpha_2 + \cdots + \tbinom{2n}{n}\alpha_n \end{aligned} \tag{16}$$

il y en a deux, appliquées l'une à $u(x)$, l'autre à $v(x)$, dont le rapport serait quotient de deux polynomes du premier degré en n, les fonctions u et v dont les fonctions majorantes U et V seraient liées par une relation algébrique

$$f(U,\ V,\ r) = 0 \tag{17}$$

sont de genre fini.

Un exemple en est fourni par le couple $(u\,,\ v)$ fourni par une équation différentielle algébrique réelle du premier ordre

$$f\left((r\,,\ y\,,\ \frac{dy}{dr}\right) \tag{18}$$

admettant comme intégrale particulière $y(r)$ une fonction enrière à coefficients tayloriens réells et positifs; il suffit de prendre pour u et v les fonctions $y(x)$ et $y'(x)$. On a alórs

$$U(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots = u(r)$$

$$V(r) = a_1 + 2\,a_2 r + 3\,a_3 r^2 + \cdots = v(r);$$

en prenant $\Theta(x) = 1$, ce qui correspond à

$$\lambda_0 = 1\,, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = 0$$

et $\Theta_1(x) = x$, ce qui correspond à

$$\lambda_0' = n\,, \qquad \lambda_1' = \lambda_2' = \cdots = 0$$

les fonctions u et v admettant les deux formes

$$[\lambda_n \alpha_n] = \alpha_n$$
$$[\lambda_n' \alpha_n'] = n\,\alpha_n$$

dont le quotient est $\dfrac{1}{n}$; u et v sont de genre fini.

D'après la proposition précédente, *deux fonctions entiéres $\underline{u}$ et $\underline{v}$ de genre infini, dont les fonctions majorantes $\underline{U}$ et $\underline{V}$ sont liées entre elles et avec $\underline{r}$ par une relation algébrique, n'admettent aucune paire de formes $[\lambda_n \alpha_n]$ et $[\lambda_n' \alpha_n']$ dont le rapport serait quotient de deux polynomes du premier degré en $\underline{n}$.*

Or, il n'en est pas nécéssairement ainsi si l'un de deux polynomes (ou bien tous les deux) est de degré supérieur à 1. La raison de l'impossibilité dans le cas du premier degré réside dans le fait que la relation

$$\sum n\,\alpha_n r^n = r\,\frac{dU}{dr}$$

impose à $\underline{U}$, lié avec $\underline{V}$ et $\underline{r}$ par une relation algébrique, la condition de satisfaire à une équation différentielle algébrique du premier ordre, n'admettant comme intégrale aucune fonction entière dn genre infini. Par contre, la relation

$$\sum n^p\,\alpha_n r^n = r\left[r\,\frac{d}{dr}\cdots r\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dU}{dr}\right)\right]$$

impose à U la condition de satisfaire à une équation différentielle algébrique d'ordre supérieur à 1, et l'on sait que des telles équations peuvent etre satisfaites par des fonctions entières de genre infini. Un exemple en est fourni par les fonctions

$$u = P(x)\,e^{e^x}\,, \qquad v = Q(x)\,e^{e^x}$$

(où $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ sont polynomes en $\underline{x}$), dont $\underline{U}$ et $\underline{V}$ satisfont chacune à une équation différentielle algébrique du second ordre.

J. Dziewulski. Warszawa.