ROZÁLIA SZ. MADARÁSZ
SINIŠA CRVENKOVIĆ

RELACIONE ALGEBRE

BEOGRAD, 1992.

Izdavač: Matematički institut, Beograd, Kneza Mihaila 35

Recenzenti: dr Slaviša Prešić, Matematički fakultet, Beograd
dr Svetozar Milić, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Primljeno na štampu odlukom Naučnog veća Matematičkog instituta
od 27. aprila 1992.

Kompjuterski slog: autori

Tehnički urednik: Dragan Blagojević

Štampa: ReproGrafika-Plast, Beograd, Lipe 12

Štampanje završeno decembra 1992.

Klasifikacija Američkog matematičkog društva
(AMS Mathematics Subject Classification) 1991: 03G15

PREDGOVOR

Na današnjem stepenu razvitka matematika je izrasla u nauku sa nepreglednim bogatstvom grana, oblasti i metoda. Ipak, šta je zajedničko za sve oblasti moderne matematike? Možemo slobodno reći da je to apstrakcija. Apstraktnost je ujedno ona karakteristika savremene matematike koja je razlikuje od drugih nauka.

Dok mnogi zaljubljenici matematike govore o apstraktnosti matematike kao o jednom od glavnih razloga lepote matematike, drugi (među njima mnogi naši prijatelji nematematičari) smatraju da je apstraktnost glavni razlog što matematiku ne vole. Često se može čuti i od profesora matematike, koji rade u srednjim školama, da učenici pokazuju otpor prema apstraktnim pojmovima grupe, prstena i polja. Čak i na studijama matematike mnogi studenti jednostavno kažu da je deo algebre o apstraktnim strukturama neuhvatljiv. Sličan problem se javlja i kod nekih postdiplomaca. Čak i kada im se posle prvih ozbiljnijih susreta sa univerzalnom algebrom ona učini vrlo zanimljivom, neminovno se vremenom pojave pitanja o svrsi i primeni svih tih apstraktnih pojmova i teorema.

Ubeđeni smo, da u svim gore pomenutim nerazumevanjima i otporima prema apstraktnim pojmovima glavni razlog jeste preskakanje stepenica apstrakcije. Jednostavno učenik ili student je često nateran da prihvata apstraktan pojam pre nego što se detaljno upozna i izvežba na konkretnim pojmovima koji su poslužili za stvaranje određenog apstraktnog pojma.

Naravno, vrlo je teško preneti iskustvo kako se prelazi sa nižeg ka višem stepenu apstrakcije. Osnovna ideja koja nas je vodila kroz celu knjigu jeste jedan pokušaj da se takvo jedno iskustvo prenese na čitaoca. U tom smislu ova knjiga ima cilj da se aparat univerzalne algebre provuče kroz jednu relativno pristupačnu i (naizgled) jednostavnu temu kao što je teorija binarnih relacija.

Kako je nastala ova knjiga?

Ova knjiga je nastala na osnovu predavanja i saopštenja, koja su autori držali u zemlji i inostranstvu u periodu 1986. - 1991. godine. Materijal koji se nalazi na ovim stranicama autori su pripremali pre svega za sastanke grupe za algebru Instituta za matematiku u Novom Sadu i sastanke Seminara "Algebra i logika" Matematičkog instituta u Beogradu. Neposredan podstrek za pisanje knjige autori su dobili od profesora Svetozara Milića. Bez stalne podrške, koju nam je prof. Milić pružao tokom pripreme rukopisa, knjiga verovatno ne bi izašla.

Kome je knjiga namenjena?

Knjiga "Relacione algebre" namenjena je pre svega studentima i postdiplomcima matematike, profesorima srednjih škola, ali je mogu čitati i učenici matematičkih gimnazija, srednjoškolci (prvenstveno prvu, drugu i treću glavu), i naravno svi oni koji se zanimaju za algebru i matematiku uopšte.

Predznanje koje je potrebno

Knjiga je podeljena na 6 glava i jedan deo je nazvan Dodatak. Smatramo da prva tri dela mogu bez problema čitati svi koji su savladali matematiku na srednjoškolskom nivou. Naravno, materija koja je obuhvaćena u te tri glave daleko izlazi iz gradiva matematike u srednjim školama (čak i matematičkih gimnazija). Čitalac ne treba da se obeshrabri ako naide na pojam koji trenutno ne razume. Čitanje matematičke knjige u kojoj je čitaocu *sve odmah jasno* nije od velike koristi.

Za poslednje tri glave zahteva se osnovno znanje iz matematičke logike i teorije modela na nivou kursa na matematičkim fakultetima ([Mil 91], [Pr 74], [Me 64], [CK 73], [Mij 87]), kao i elementi univerzalne algebre, u obimu koji se može naći u Dodatku ove knjige (videti i [BS 81], [Gr 79]).

Struktura knjige

Prvi deo je uvodni i sadrži najosnovnije pojmove o skupovima, početne pojmove o relacijama, definicije operacija sa binarnim relacijama, osobine relacije ekvivalencije i poretka, zatim početne pojmove o funkcijama, operacijama i univerzalnim algebrama. Čitalac u ovom delu može naći i definicije onih klasa algebri koje se u knjizi kasnije pojavljuju. O mrežama, a pogotovo o Booleovim algebrama, navedene su i dokazane one osobine koje će se u daljem tekstu koristiti. Detaljnije o ovim pojmovima čitalac može naći u sledećim knjigama: [Mil 91], [Pr 74], [Me 64], [Su 72] (za delove 1.1 do 1.3) i [Mil 84], [Me 70], [BS 81] (za deo 1.4).

Druga glava sadrži pre svega "elementarni račun" sa binarnim relacijama. Prvo je detaljno dokazano nekoliko osobina binarnih relacija, da bi se izdvajanjem nekih od tih osobina i njihovim proglašenjem za aksiome definisala apstraktna klasa relacionih algebri. Posle navođenja glavnih modela dobijenog sistema aksioma (tzv. konkretne algebre relacija) dokazuje se (takođe pomoću modela) da je taj sistem aksioma nezavisan. Glavni naglasak u ovoj glavi je na aritmetici ("računu") u teoriji relacionih algebri. Neke osobine se mogu dokazati direktno polazeći od aksioma, a za neke je potrebno proširiti razmatranja na Booleove algebre sa operatorima. U poslednjem delu ove glave nalaze se rezultati o klonu relacione algebre. Literatura koja se odnosi na ovu glavu je: [Jo 86], [CT 51], [Jo 59], [Jo 82], [Ma 86], [Mad 78], [McK 66], [Ta 41] (za delove 2.2, 2.4 i 2.5) a [Jo 86] i [B9 86] (za deo 2.6).

Dok se prethodna glava bavila pretežno "sintaktičkim" razmatranjima, treća glava je posvećena "semantici" teorije relacionih algebri. Problem reprezentabilnosti se razmatra prvo za semigrupe, grupe i Booleove algebre. Proučavanje klase reprezentabilnih relacionih algebri počinje sa tzv. malim relacionim algebrama (sa najviše 8 elemenata), i konstrukcijom najmanje nereprezentabilne relacione algebre (od 16 elemenata). Kako uobičajena teorema reprezentabilnosti ne važi za relacione algebre, u potpunosti je opisan jedan drugi pristup reprezentaciji: preko algebri kompleksa i atomičnih struktura. Posle opštih teorema o reprezentabilnosti Booleovih algebri sa operatorima, posebno se razmatraju atomične strukture RA, tzv. poligrupe. Literatura koja se odnosi na ovu glavu je sledeća: [Me 70] (za deo 3.1), [Jo 86], [McK 66], [AM 88], [Ly 50], [Ba 86] (za deo 3.2), [Jo 86], [JTI 51], [JTII 52], [Co 84], [Ma 89] (za deo 3.3).

U četvrtoj glavi se bavimo strukturnim osobinama relacionih algebri. Izučavanje strukturnih osobina relacionih algebri počinje izučavanjem odgovarajućih osobina klase Booleovih algebri. Prvo se razmatraju mreže kongruencija. Pomoću specijalnih elemenata relacione algebre dolazimo do opisa prostih relacionih algebri, poddirektno nerazloživih relacionih algebri, da bi dokazali rezultat da je varijetet relacionih algebri poluprost. Razmatranja se zatim usmeravaju na mrežu podvarijeteta varijeteta relacionih algebri. U ovoj glavi se takođe može naći kompletan dokaz rezultata Tarskog da je klasa reprezentabilnih relacionih algebri varijetet. Posle razmatranja nekih karakterističnih identiteta relacionih algebri, daje se univerzalno algebarsko ispitivanje tzv. klase semigrupnih relacionih algebri. Za čitanje ove glave preporučujemo: [Jo 86], [McK 66], [Mo 64], [Ta 55], [Ma 86], [TG 87], (za delove 4.1 i 4.2), [Ma 86], [Ma 89], [CM 87], [CM 88], [Sch 76], (za deo 4.3).

U petoj glavi se mogu naći rezultati o reduktima relacionih algebri Tarskog, o reprezentaciji struktura pomoću specijalnih relacija, da bi se glavni naglasak stavio na jednu specifičnu klasu relacionih algebri – na tzv. Kleenejeve algebre. Ta klasa algebri je zanimljiva pre svega zbog primene u teoriji programiranja i formalnih jezika. Polazeći od Kleenejevih algebri dolazimo do tzv. dinamičkih algebri, koje takođe u novije vreme nalaze primenu u konkretnim problemima programiranja. Literatura za ovaj deo je: [An 88], [An 91], [Bre 84], [BSc 78], [Sch 70], [Siv 78], [Jo 59], [Sch 64], [Sch 72] (za deo 5.1), [Jo 86], [Ma 89], [CM 91], [Con 71], [Ei 74], [GP 72], [Ne 82], [St 72] (za deo 5.2).

U šestoj glavi su opisani glavni tipovi problema odlučivosti u univerzalnoj algebri. Dati su kompletni dokazi o njihovoj međusobnoj povezanosti, da bi se kasnije opisao tzv. semigrupni pristup. Ovaj pristup se pokazao dobar pri dokazivanju raznih neodlučivih problema za slučaj relacionih algebri. Za ovo preporučujemo literaturu: [BMc 81], [Ma 89], [Ev 51], [Ev 53], [Mal 71], [McKV 89], [Ev 80], [Mad 80], [Mal 58], [MNS], [Mos 73], [Ta 53], [TMR 53] (za delove 6.1 i 6.2), [CM 91], [CM 92], [Ma 89], [Ma 89], [Ne 87] (za deo 6.3).

Sedma glava sadrži pojmove iz univerzalne algebre potrebne za kompletno čitanje knjige. Za detaljnije izučavanje univerzalne algebre preporučujemo knjige: [BS 81], [Gr 79], [ČT 73], [Mal 70].

Zahvaljujemo se

Na kraju želimo da se zahvalimo onima koji su nam pomogli prilikom pisanja ove knjige.

Zahvaljujemo se profesoru Svetozaru Miliću i Matematičkom institutu u Beogradu što su nam omogućili izdavanje ove knjige. Profesoru Miliću se zahvaljujemo na ukazanim propustima i greškama, naročito u prvim verzijama rukopisa. Pored toga, moramo reći da su predavanja iz algebre i logike, koje smo slušali kao studenti kod profesora Milića, odnosno razgovori koje smo kasnije na postdiplomskim studijama vodili sa njim, postali često inspiracija u našim kasnijim istraživanjima.

Zahvaljujemo se i dr Hajnal Andreki i Istvanu Nemetiju (Matematički institut Madarske akademije nauka) koji su nas (1986. godine) uputili na oblast relacionih algebri i algebarske logike uopšte. Oni su nam pomogli da dodemo do vrlo važnih i interesantnih rukopisa i radova iz ove oblasti. Njihovi predlozi i ideje, koje su dali posle vrlo detaljnog čitanja rukopisa magistarskog rada i doktorske teze prvog autora ([Ma 86], [Ma 89]), služe autorima ove knjige i dalje kao osnovni putokazi u daljim naučnim istraživanjima.

Zahvaljujemo se profesoru Slaviši Prešiću koji je detaljno pregledao završnu verziju teksta i dao niz korisnih saveta i dopuna. Deo teksta pod naslovom *U vezi sa teoremom Maljceva* u delu 6.3 je prilog profesora Prešića koji je sigurno obogatio sadržaj knjige.

Zahvaljujemo se i studentu Lii Vaš na korisnim sugestijama koje nam je dala posle čitanja kompletnog rukopisa, kao i studentu Draganu Mašuloviću na konstrukciji modela iz dela 2.3 ove knjige (Nezavisnost sistema aksioma relacionih algebri).

Zahvaljujemo se dr Draganu Blagojeviću na savesnom uredivanju i korekturi završne verzije rukopisa ove knjige.

Dugujemo zahvalnost i Siladi Čabi na kucanju rukopisa i na strpljenju i podršci koju je pružio prilikom oblikovanja svih verzija kucanog teksta knjige.

Novi Sad, oktobar 1992. godine. Autori

SADRŽAJ

UVOD

Relacione algebre su algebre nastale nakon iskustva pri proučavanju raznih svojstava binarnih relacija. Naime, kada se izučavaju binarne relacije na raznim skupovima, lako se mogu uočiti neke zakonitosti koje važe u svim tim slučajevima. Na primer, može se dokazati da je proizvod relacija uvek asocijativna operacija i distributivna u odnosu na uniju. Jedan odbir u mnoštvu takvih zakonitosti – a koji je i do danas ostao neprevaziđen – napravio je A. Tarski. On je, uzimajući odabrane osobine binarnih relacija za aksiome, godine 1941. uveo pojam *relacione algebre*.

Kao i u slučaju aksiomatizacije drugih matematičkih teorija, postavlja se pitanje kako od mnoštva osobina odabrati aksiome, a da u tako nastaloj aksiomatskoj teoriji možemo izvesti sve "ključne osobine" polaznih objekata. Ako je odbir aksioma dobar i ako je nastala aksiomatska teorija dovoljno "bogata" da pokrije polaznu matematičku teoriju, onda se problemi koji se pojavljuju u polaznoj matematičkoj teoriji prevode u probleme unutar aksiomatske teorije. Kako u aksiomatskim teorijama imamo tačno određen pojam matematičkog izvođenja, onda takvim prevođenjem problema oni postaju ne samo jasniji i pregledniji nego često i lakši za rešavanje.

U slučaju binarnih relacija problem njihove aksiomatizacije se pokazao težim nego što se u početku mislilo.

Postoje dva suštinski različita pristupa teoriji binarnih relacija. Prvi način je stariji i može se naći već u radovima A. De Morgana pedesetih godina XIX veka. U tom pristupu binarne relacije se izučavaju uz neku teoriju prvog reda $\mathcal{T}$: individualne promenljive " šetaju" kroz neki domen A i jezik govori o elementima skupa A. Binarne relacije su podskupovi od A^2 i o njihovim osobinama možemo govoriti samo tako što se spustimo na domen A. Tvrđenja koja izražavaju osobine binarnih relacija nisu na jeziku teorije $\mathcal{T}$.

Po drugom pristupu teorija binarnih relacija se izučava kao *aksiomatska teorija*. U ovom slučaju individualne promenljive se interpretiraju kao binarne relacije, a operacijski i relacijski simboli kao operacije i relacije među binarnim relacijama. U ovom drugom slučaju teoriju zovemo *aritmetika binarnih relacija.* U ovoj knjizi ćemo koristiti i prvi i drugi pristup.

Fundamente aritmetike binarnih relacija postavio je C.S. Peirce (u radovima od 1870 do 1882). Peirceov rad je nastavljen u radovima E. Schrödera. No, za početak modernog (aksiomatskog) razvoja teorije binarnih relacija smatra se godina 1941. i rad Tarskog [Ta41]. Zahvaljujući uglavnom radovima Tarskog, Jónssona, Madduxa, Lyndona, McKenzieja, Andréke, Németija i Bíróa, relacione algebre danas predstavljaju vrlo kompleksnu oblast univerzalne algebre i algebarske logike. Sistem aksioma koji je Tarski predložio za opisivanje algebri binarnih relacija biće u ovoj knjizi osnovno polazište. Koliko je taj sistem "dobar" i koliko imamo šansi da ga "popravimo" razmatraćemo u prvom delu knjige. Slobodno rečeno, problemi " jačine " aksiomatskog sistema se u matematici nazivaju *problemi reprezentacije.* Konkretno, u slučaju sistema aksioma za relacione algebre problem reprezentacije glasi: da li je svaki algebarski sistem koji zadovoljava predložene aksiome neka od algebri binarnih relacija? Tarski je u početku mislio da je odgovor pozitivan. Međutim, godine 1950. američki matematičar Lyndon je uspeo da konstruiše algebru koja je zadovoljavala sve aksiome Tarskog, ali nije bila izomorfna ni jednoj algebri binarnih relacija. Lyndon je našao tzv. *nereprezentabilnu relacionu algebru*.

Tako se ispostavilo da je sistem aksioma Tarskog Σ slabiji nego što bi trebalo. Kako naći sistem aksioma $\Sigma_1 \supseteq \Sigma$ tako da su jedini modeli za Σ_1 reprezentabilne relacione algebre? Da li takav Σ_1 postoji? Da. Tarski je 1954. godine dokazao da je klasa reprezentabilnih algebri *jednakosna klasa*, tj. da postoji skup identiteta koji aksiomatizuje konkretne algebre binarnih relacija. U drugom delu knjige dajemo kompletan dokaz ove činjenice. No, problem time nije u potpunosti rešen. Činjenica je da smo dokazali da takav sistem jednakosti postoji, ali kako ga naći? Američki matematičar Donald Monk je 1964. godine dokazao da je svaki sistem aksioma za konkretne algebre binarnih relacija beskonačan. Kažemo da ta klasa algebri *nije konačno aksiomatizabilna*.

Šta je razlog da je klasa reprezentabilnih relacionih algebri tako neuhvatljiva? Možda bi trebalo pored operacija unije, preseka, komplementa, proizvoda i inverzije uvesti još neke operacije na skupu binarnih relacija? Ni to nam ne bi puno pomoglo. Naime, nedavno (1988. god.) su B. Bíró i R. Maddux dokazali da (grubo rečeno) ne postoji ni jedno konačno "lepo" proširenje jezika relacionih algebri tako da klasa reprezentabilnih algebri ima konačnu bazu identiteta.

Neko bi mogao reći: ako se već pokazalo da su relacione algebre tako nezgodne, nije li bolje ne izučavati ih. Da li su one stvarno vredne truda? Vredne su truda. Naime, još 1951. godine Chin i Tarski su primetili da relacione algebre mogu odigrati veoma važnu ulogu u matematičkim istraživanjima. U njihovom radu [CT 51] oni tvrde sledeće: " Pokazano je da se svaki problem koji se tiče izvodljivosti matematičkog tvrđenja iz datog skupa aksioma može svesti na problem da li neka jednakost važi identički u svakoj relacionoj algebri. Tako se može reći da, u principu, celo matematičko istraživanje možemo izvesti ispitujući identitete u aritmetici relacionih algebri".

Ovaj program je i realizovan u knjizi Tarskog i Givanta [TG 87]. Tu je dat jedan nov, jednostavan formalizam koji je blisko povezan sa jednakosnom teorijom relacionih algebri. On ne sadrži promenljive, kvantore, iskazne veznike. Pokazalo se da je ovaj formalizam tako jak, da se u njemu može formulisati teorija skupova, aritmetika... mogli bismo reći cela matematika!

Napomenimo na kraju da je Tarski 1953. godine dokazao da ne postoji algoritam koji bi za datu jednakost na jeziku relacionih algebri odlučio da li ta jednakost važi ili ne važi u svakoj relacionoj algebri. Kažemo da je jednakosna teorija relacionih algebri *neodlučiva*. Interesantno je da se neodlučivost jednakosne teorije relacionih algebri može na neki način i "lokalizovati": može se dokazati da ona ne dolazi od Booleovog dela (tj. operacija $\cup, \cap, ^{-}$), nego od semigrupnog dela (tj. od operacije $\circ$). Da je uloga semigrupnog dela u pitanjima odlučivosti algebri relacija stvarno suštinska pokazao je I. Németi u radu [Ne87]. On je dokazao sledeće: Ako se aksioma za asocijativnost operacije $\circ$ izostavi iz spiska aksioma relacionih algebri, onda će tako dobijena klasa imati odlučivu jednakosnu teoriju!

Najnovija istraživanja pokazuju da je teorija relacionih algebri suštinski povezana sa teorijom cilindričnih algebri ([HMT I 71] i [HMT II 85]). Možemo slobodno reći da obe teorije danas predstavljaju osnovne stubove algebarske logike.

1. UVODNI POJMOVI

Ovaj uvodni deo sadrži najosnovnije pojmove o skupovima, početne pojmove o relacijama, definicije operacija sa binarnim relacijama, osobine relacije ekvivalencije i poretka, zatim početne pojmove o funkcijama, operacijama i univerzalnim algebrama. Čitalac u ovom delu može naći i definicije onih klasa algebri koje se u knjizi kasnije pojavljuju. O mrežama, a pogotovo o Booleovim algebrama, navedene su i dokazane one osobine koje će se u daljem tekstu koristiti.

1.1 Nešto o skupovima

Skupove i njihove osnovne osobine čitalac je sigurno već imao prilike da upozna. Kako je skup jedan od osnovnih matematičkih pojmova na kome će se celo naše dalje izlaganje oslanjati, ipak navodimo ukratko neke osnovne činjenice o skupovima.

Relaciju *pripadanja* označavamo sa $\in$. Činjenicu da objekat x pripada skupu A zapisujemo sa $x \in A$, a čitamo *x je element skupa A*. Zapis $x \notin A$ znači da *x ne pripada skupu A*. Dva skupa su *jednaka* ako i samo ako imaju iste elemente. Drugim rečima, *skup je potpuno odreden svojim elementima*. Ako neki skup A ima konačno mnogo elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$, onda to zapisujemo sa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. U teoriji skupova se uvodi tzv. *prazan skup* $\emptyset$, skup bez elemenata. Naravno, ako neki skup ima puno ili čak beskonačno mnogo elemenata, ne možemo ih sve navesti. U takvim slučajevima skup zadajemo ili pomoću zapisa $A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ (u slučaju da je jasno koji elementi slede posle x_2 odnosno posle x_n) ili pomoću ovakvog zapisa: $A=\{x \mid x$ ima osobinu $O\}$ tj. $A=\{x \mid O(x)\}$. Ovo znači da je A skup svih elemenata koji imaju osobinu O.

Da olakšamo zapisivanje raznih osobina i rečenica mi ćemo se služiti standardnim logičnim simbolima: ako su P i Q dve rečenice, onda sa $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$, označavamo redom rečenice: ne P, P i Q, P ili Q, iz P sledi Q, P ako i samo ako Q (tj. P akko Q). Simbole $\exists$ i $\forall$ zovemo kvantorima (egzistencijalni i univerzalni kvantor), a zapisi $(\exists x)P(x)$, $(\forall x)Q(x)$ znače redom "postoji x tako da je $P(x)$", odnosno "za svako x važi $Q(x)$". Umesto $(\forall x)(x \in A \Rightarrow P(x))$ pišemo nekad $(\forall x \in A)P(x)$, dok oznaka $(\exists x \in A)Q(x)$ znači isto što i $(\exists x)(x \in A \wedge Q(x))$.

Ako su A i B skupovi, onda kažemo da je *A podskup od B* (i pišemo $A \subseteq B$) ako važi $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$. Na primer, ako sa $\mathbb{Z}$ označimo cele, sa $\mathbb{Q}$ racionalne, a sa $\mathbb{R}$ realne brojeve, onda važi: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Skup A je *pravi podskup* od B (u oznaci $A \subset B$) ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$. U svim gornjim primerima imamo upravo slučaj pravog podskupa. Skup *svih podskupova* nekog skupa S (tzv. *partitivni skup od S*) obeležavaćemo sa $\mathcal{P}(S)$.

U daljem ćemo raditi sa uobičajenim operacijama na skupovima: unija, presek, razlika, komplement. Ako su A, B i S skupovi i $A \subseteq S$, onda

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \qquad (\textit{unija}),$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \qquad (\textit{presek}),$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \qquad (\textit{razlika}),$$

$$C_S(A) = \{x \mid x \in S \wedge x \notin A\} \qquad (\textit{komplement od } A \textit{ u odnosu na } S).$$

Ako se skup S unapred izabere, često nećemo u oznaci $C_S(A)$ posebno naglašavati S, pa se umesto $C_S(A)$ piše samo $\bar{A}$.

Simetrična razlika skupova A i B jeste skup $A \nabla B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Nije teško videti da za proizvoljne skupove A i B važi: $A = B$ akko $A \nabla B = \emptyset$.

Unijom familije skupova $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ nazivamo skup $\bigcup \langle A_i \mid i \in I \rangle$ definisan na sledeći način:

$$\bigcup \langle A_i \mid i \in I \rangle = \{x \mid (\exists i \in I) x \in A_i\}.$$

Presek familije skupova $\langle A_i \mid i \in I \rangle$, gde je $I \neq \emptyset$, je skup $\bigcap \langle A_i \mid i \in I \rangle$ definisan na sledeći način:

$$\bigcap \langle A_i \mid i \in I \rangle = \{x \mid (\forall i \in I) x \in A_i\}.$$

Uređen par elemenata a i b, u oznaci (a, b), je skup $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Za element a kažemo da je *prva komponenta*, a za b *druga komponenta* uređenog para (a, b). Na osnovu definicije uređenog para i definicije jednakosti skupova može se dokazati da su *dva uređena para jednaka akko su im odgovarajuće komponente jednake* tj. $(a, b) = (c, d)$ akko $a = b$ i $c = d$.

Neka su A i B skupovi. *Direktan proizvod* $A \times B$ jeste skup svih uređenih parova čija je prva komponenta iz skupa A, a druga iz skupa B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Primer 1.1 Ako je $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ onda

$$A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}.$$

□

Primer 1.2 Za svaki skup A, $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$. Zaista, ako pretpostavimo da je $(a, b) \in A \times \emptyset$, dobijamo da $a \in A$ i $b \in \emptyset$ što nije moguće ni za jedno b. Tako, $A \times \emptyset = \emptyset$. Slično dokazujemo da važi $\emptyset \times A = \emptyset$.

□

Primetimo da za neprazne skupove A i B, za $A \neq B$ važi $A \times B \neq B \times A$. Zaista, ako $A \neq B$ onda $A \setminus B \neq \emptyset$ ili $B \setminus A \neq \emptyset$. Neka je $A \setminus B \neq \emptyset$ i $a \in A \setminus B$. Kako je $B \neq \emptyset$, postoji neko $c \in B$. Tada $(a, c) \in A \times B$, ali $(a, c) \notin B \times A$ tj. $A \times B \neq B \times A$.

Pomoću uređenog para možemo definisati pojam *uređene n-torke* $(a_1,\dots,a_n)$, $n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$, na sledeći način:

1) $(a_1)=a_1$

2) $(a_1,\dots,a_n)=((a_1,\dots,a_{n-1}),a_n)$.

Na osnovu osobina uređenih parova može se dokazati da su dve uređene n-torke jednake akko su im odovarajuće komponente jednake:

$$(a_1,\dots,a_n)=(b_1,\dots,b_n) \text{ akko } (\forall i)(1\leq i\leq n\Rightarrow a_i=b_i).$$

Neka su $A_1,A_2,\dots,A_n$ skupovi. *Direktan proizvod* tih skupova je skup definisan na sledeći način:

$$A_1\times A_2\times\dots\times A_n=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\,|\,(\forall i)(1\leq i\leq n\Rightarrow a_i\in A_i)\}.$$

Specijalno, ako je $A_1=A_2=\dots=A_n=A$ onda umesto $A_1\times A_2\times\dots\times A_n$ pišemo A^n, i taj skup zovemo *n-ti (direktan) stepen skupa* A.

Neke osobine operacija sa skupovima

U daljem ćemo nabrojati neke od osnovnih (i najpoznatijih) osobina operacija unije, preseka, komplementa kao i direktnog proizvoda skupova. Sve te osobine se mogu dokazati na osnovu definicija odgovarajućih operacija i nekih poznatih zakona zaključivanja (zakona logike).

Teorema 1.1 Neka su $A,B,C\in\mathcal{P}(S)$. Tada važi:

1. $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$ (komutativnost unije i preseka),

2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

   $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (asocijativnost unije i preseka),

3. $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ (idempotentnost unije i preseka),

4. $A=A\cup(A\cap B)$,

   $A=A\cap(A\cup B)$ (zakoni apsorpcije),

5. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

   $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (zakoni distributivnosti),

6. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap S = A$ (osobine skupova $\emptyset$ i S),

7. $A \cup \bar{A} = S$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$. (osobine komplementa).

Dokaz.

Dokažimo, radi ilustracije, prvi deo zakona distributivnosti. Treba dokazati da važi $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, tj. da proizvoljan element x pripada skupu sa leve strane jednakosti ako i samo ako pripada skupu sa desne strane jednakosti. Krenućemo od leve strane, a zatim ćemo postupno koristiti definicije unije i preseka ili neke poznate tautologije.

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) \ &\text{akko } x \in A \lor x \in B \cap C \\ &\text{akko } x \in A \lor (x \in B \land x \in C) \\ &\text{akko } (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C) \\ &\text{akko } (x \in A \cup B) \land (x \in A \cup C) \\ &\text{akko } x \in (A \cup B) \cap (A \cup C), \end{aligned}$$

što znači da $x \in A \cup (B \cap C)$ akko $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ tj.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Slično se dokazuju i ostale navedene osobine.

□

Od mnogobrojnih osobina izdvojićemo nekoliko iz kojih se vidi međusobni odnos operacija unije, preseka i razlike sa jedne strane, i direktnog proizvoda sa druge strane.

Teorema 1.2 Za sve skupove A, B, C, D važi:

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$;

c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

d) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Dokaz.

Dokaz sledi neposredno, na osnovu definicije operacija $\cup, \cap, \setminus$, $\times$ i poznatih zakona logike.

□

1.2 Početni pojmovi o relacijama

Neka su A i B skupovi. Svaki podskup ρ direktnog proizvoda $A \times B$ zovemo *binarna relacija skupova A i B*. Ako je $A=B$, kažemo da je relacija ρ *binarna relacija skupa A*. Kažemo da je *element x u relaciji ρ sa y* (i pišemo $x \rho y$) ako $(x,y) \in \rho$. Skup svih binarnih relacija skupa A obeležavamo sa $\mathcal{R}e(A)$.

Prazan skup je binarna relacija proizvoljnog skupa A. Tu relaciju obeležavamo sa $\emptyset$ i zovemo je *prazna relacija*. Relaciju "biti jednak" na skupu A, tj. relaciju $\{(a,a) \mid a \in A\}$, zovemo *dijagonala skupa A*, i obeležavamo sa $\triangle_A$ (ili samo $\triangle$ ukoliko je iz konteksta jasno šta je skup A). Najveću relaciju skupa A, tj. relaciju A^2, zovemo *puna relacija*.

Primer 1.3 Na skupu $A=\{a,b,c\}$ imamo ukupno 2^9 binarnih relacija. Na primer, sledeći skupovi su binarne relacije skupa A: $\{(a,a)\}$, $\{(a,b),(b,a)\}$, $\emptyset, A^2$ itd.

Primer 1.4 Na skupu $\mathbb{Z}$ primeri binarnih relacija su "$=$", "$\leq$", "$\geq$", "je delilac od" itd. Slično, relacija inkluzije "$\subseteq$" jeste binarna relacija skupa $\mathcal{P}(S)$.

□

Svaki podskup od A^n jeste *relacija (dužine n)* skupa A. Naravno, relacije dužine 2 nisu ništa drugo nego već definisane binarne relacije.

Primer 1.5 U Dekartovom (prostornom) koordinatnom sistemu, sfera $S(O,r)$ sa centrom u koordinatom početku i poluprečnikom r, zadaje se kao skup svih tačaka (x,y,z) čije koordinate zadovoljavaju uslov $x^2+y^2+z^2=r^2$. U tom smislu sferu $S(O,r)$ možemo shvatiti kao relaciju dužine 3 skupa realnih brojeva.

□

U ovoj knjizi ćemo se zadržavati samo na binarnim relacijama.

Operacije sa binarnim relacijama

Kako su binarne relacije *skupovi*, onda na njih možemo preneti sve što znamo o skupovima. To znači da na skupu $\mathcal{R}e(A)$ (svih binarnih relacija skupa A) imamo operacije unije, preseka i komplementa.(Ako se drugačije ne kaže, onda se komplement relacije uvek uzima u odnosu na punu relaciju A^2.)

Pored tih skupovnih (kaže se i *Booleovih*) operacija, možemo definisati i operacije koje su svojstvene binarnim relacijama. Neka su ρ i σ relacije skupa A. *Proizvod* (ili *slaganje, kompozicija*) *relacija* ρ i σ jeste relacija $\rho\circ\sigma$ definisana na sledeći način:

$$\rho\circ\sigma=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in A^2\wedge(\exists z\in A)((x,z)\in\rho\wedge(z,y)\in\sigma)\}.$$

Primer 1.6 Neka je $A=\{a,b,c\}$, $\rho=\{(a,b),(b,c),(b,b)\}$, $\sigma=\{(a,b),(b,c)\}$. Onda $\rho\circ\sigma=\{(a,c),(b,c)\}$, $\sigma\circ\rho=\{(a,c),(a,b)\}$, $\rho\circ\emptyset=\emptyset$, $\sigma\circ A^2=\{(a,b),(a,a),(a,c),(b,a),(b,c),(b,b)\}$.

□

Iz ovog primera vidimo da operacija $\circ$ nije komutativna tj. da ne mora važiti $\rho\circ\sigma=\sigma\circ\rho$. Dalje, nije teško videti da *za bilo koju relaciju* $\rho\subseteq S^2$ važi $\rho\circ\emptyset=\emptyset\circ\rho=\emptyset$. Zaista, $(x,y)\in\rho\circ\emptyset\Leftrightarrow(\exists z\in S)((x,z)\in\rho\wedge(z,y)\in\emptyset)$. No, pošto je $(z,y)\in\emptyset$ uvek netačno, onda traženi $z\in S$ ne postoji tj. $\rho\circ\emptyset=\emptyset$. Slično, $\emptyset\circ\rho=\emptyset$.

Inverzija relacije $\rho\subseteq A^2$ jeste relacija ρ^{-1} definisana sa

$$\rho^{-1}=\{(y,x)\in A\;|\,(x,y)\in\rho\}.$$

Rečima, operacija inverzije "obrće" redosled komponenti u parovima koji su u relaciji. Naravno, oznaku $^{-1}$ treba shvatiti *samo kao oznaku*.

Primer 1.7 Neka je $A=\{a,b,c,\}$, $\rho=\{(a,b),(b,b),(c,d)\}$. Onda je

$$\rho^{-1}=\{(b,a),(b,b),(d,c)\}.$$

Primer 1.8 Inverzija relacije $\leq$ (posmatrane na $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, ili bilo kom drugom skupu brojeva) jeste relacija $\geq$.

□

Osnovne osobine dosad definisanih operacija (unije, preseka, komplementa, kompozicije, inverzije) i njihov odnos sa istaknutim relacijama (prazna, puna, dijagonala) detaljno ćemo izučavati u delu 2.1. ove knjige.

Relacija ekvivalencije

Od binarnih relacija, koje se najčešće javljaju u matematici, mnoge možemo rasporediti u dve velike grupe: u jednu grupu spadaju one koje " liče " na relaciju *jednakosti* , a u drugu, one koje " liče " na relaciju $\leq$ (" *manje ili jednako* ") . Relacije iz prve grupe zovemo *relacije ekvivalencije*.

Definicija 1.1 Za relaciju $\rho \in \mathcal{R}e(A)$ kažemo da je *relacija ekvivalencije* na A ako za sve x, y, $z \in A$ važi

(R) $(x,x) \in \rho$ (refleksivnost),

(S) $(x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho$ (simetričnost),

(T) $((x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho) \Rightarrow (x,z) \in \rho$ (tranzitivnost).

□

Primer 1.9 Na bilo kom skupu A, relacija jednakosti, tj. $\triangle_A$, jeste relacija ekvivalencije. Relacija ekvivalencije je i puna relacija.

Primer 1.10 Podudarnost trouglova u skupu svih trouglova neke ravni je relacija ekvivalencije. Isto tako i relacija paralelnosti pravih u skupu svih pravih neke ravni jeste relacija ekvivalencije.

Primer 1.11 Relacija " imati iste ostatke pri deljenju sa 5 " jeste relacija ekvivalencije skupa Z.

□

Na ovom mestu navodimo samo nekoliko osnovnih stvari o relacijama ekvivalencije.

Teorema 1.3 Relacija $\rho \in \mathcal{P}(A^2)$ je relacije ekvivalencije na A akko važi

$$\triangle_A \subseteq \rho, \quad \rho = \rho^{-1}, \quad \rho \circ \rho = \rho.$$

Dokaz.

$(\rightarrow)$. Ako je ρ relacija ekvivalencije, onda zbog refleksivnosti važi $\triangle_A \subseteq \rho$. Dokažimo da je $\rho \subseteq \rho^{-1}$:

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho \qquad \text{(jer je } \rho \text{ simetrična)}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \rho^{-1} \qquad \text{(po definiciji inverzije).}$$

Slično se dokazuje da važi $\rho^{-1} \subseteq \rho$:

$$(x, y) \in \rho^{-1} \Rightarrow (y, x) \in (\rho^{-1})^{-1} \Rightarrow (y, x) \in \rho \Rightarrow (x, y) \in \rho.$$

Tako, $\rho \subseteq \rho^{-1}$ i $\rho^{-1} \subseteq \rho$ pa važi $\rho = \rho^{-1}$.

Da dokažemo treću jednakost $\rho \circ \rho = \rho$, treba dokazati da je $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ i $\rho \subseteq \rho \circ \rho$:

$$(x, y) \in \rho \circ \rho \Rightarrow (\exists z)((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \rho)$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \rho.$$

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (x, x) \in \triangle_A \wedge (x, y) \in \rho$$

$$\Rightarrow (x, x) \in \rho \wedge (x, y) \in \rho$$

$$\Rightarrow (\exists z)((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \rho)$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \rho \circ \rho.$$

Prema tome $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ i $\rho \subseteq \rho \circ \rho$ pa sledi $\rho \circ \rho = \rho$.

$(\leftarrow)$. Refleksivnost relacije sledi iz uslova $\triangle_A \subseteq \rho$, za simetričnost je dovoljno iskoristiti uslov $\rho \subseteq \rho^{-1}$, dok tranzitivnost sledi iz uslova $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

□

Neka je ρ relacija ekvivalencije skupa A. *Klasa elementa* a jeste skup a/ρ definisan sa: $a/\rho = \{ b \in A \mid a \, \rho \, b \}$. Klasi a/ρ pripadaju, dakle, svi oni elementi skupa A koji su u relaciji sa a. Skup svih klasa relacije ekvivalencije ρ zovemo *količnički skup (relacije ρ)*, i obeležavamo najčešće sa A/ρ.

Primer 1.12 Neka je relacija ρ na skupu $\mathbb{Z}$ definisana na sledeći način:

$x \rho y$ akko 7 deli $x - y$.

Može se dokazati da je ρ relacija ekvivalencije skupa $\mathbb{Z}$, i da količnički skup $\mathbb{Z}/\rho$ ima 7 elemenata: $\mathbb{Z}/\rho=\{0/\rho, 1/\rho, \ldots, 6/\rho\}$. Klasi $0/\rho$ pripadaju svi celi brojevi koji su deljivi sa 7, klasi $1/\rho$ svi celi brojevi koji pri deljenju sa 7 daju ostatak 1, itd.

□

Primetimo da je u gornjem primeru relacija ρ odredila jedno "razbijanje" (kaže se i *particiju*) skupa $\mathbb{Z}$ na klase ekvivalencije. U opštem slučaju, *particija* nepraznog skupa A jeste familija $\pi=\{A_i | i\in I\}$ nepraznih podskupova A_i skupa A tako da važi:

1. $(\forall i\in I)(\forall j\in I)(A_i=A_j \vee A_i\cap A_j=\emptyset)$, 2. $\bigcup\{A_i | i\in I\}=A$.

Teorema 1.4 Za svaku relaciju ekvivalencije ρ nepraznog skupa A, količnički skup A/ρ jeste jedna particija skupa A.

Dokaz.

Primetimo da, zbog refleksivnosti, klasa ekvivalencije nekog elementa nikad nije prazna . Dalje, dve klase su ili jednake ili disjunktne. Naime, neka $a/\rho\cap b/\rho\neq\emptyset$ i $c\in a/\rho\cap b/\rho$. Tada

$$
\begin{array}{lll}
c\in a/\rho\cap b/\rho & \Rightarrow a\,\rho\,c \wedge b\,\rho\,c & \text{(po definiciji } \cap \text{)} \\
 & \Rightarrow a\,\rho\,c \wedge c\,\rho\,b & \text{(zbog simetričnosti } \rho\text{),} \\
 & \Rightarrow a\,\rho\,b & \text{(zbog tranzitivnosti } \rho\text{).} \\
x\in a/\rho & \Rightarrow a\,\rho\,x & \text{(po definiciji klase ekvivalencije),} \\
 & \Rightarrow x\,\rho\,a & \text{(zbog simetričnosti } \rho\text{),} \\
 & \Rightarrow x\,\rho\,b & \text{(zbog } a\,\rho\,b \text{ i tranzitivnosti),} \\
 & \Rightarrow b\,\rho\,x & \text{(zbog simetričnosti } \rho\text{),} \\
 & \Rightarrow x\in b/\rho & \text{(po definiciji klase ekvivalencije),}
\end{array}
$$

čime smo dokazali da je $a/\rho\subseteq b/\rho$. Potpuno analogno se dokazuje i $b/\rho\subseteq a/\rho$, pa se klase a/ρ i b/ρ poklapaju. Na kraju, dokažimo da je $\bigcup\{a/\rho | a\in A\}=A$. Jasno, po definiciji klase ekvivalencije, za sve $a\in A$ imamo da je $a/\rho\subseteq A$, pa je i $\bigcup\{a/\rho | a\in A\}\subseteq A$. S druge strane, ako je $a\in A$ onda je $a\in a/\rho$. Kako je $a/\rho\subseteq\bigcup\{a/\rho | a\in A\}$, dobijamo da $a\in\bigcup\{a/\rho | a\in A\}$ što dokazuje da je $A\subseteq\bigcup\{a/\rho | a\in A\}$ a time i traženu jednakost.

□

Sledeća teorema je na neki način obrat Teoreme 1.4. Svaka particija π skupa A određuje jednu relaciju ekvivalencije $R(\pi)$.

Teorema 1.5 Neka je $\pi=\{A_i \mid i\in I\}$ jedna particija skupa A. Relacija $R(\pi)$ skupa definisana sa: $(x, y)\in R(\pi)$ akko $(\exists i\in I)(x\in A_i \wedge y\in A_i)$, jeste relacija ekvivalencije skupa A.

Dokaz.

Dokaz neposredno sledi iz definicije relacije ekvivalencije i definicije relacije $R(\pi)$.

U daljem, ako je π neka particija skupa A, sa $R(\pi)$ ćemo označavati pridruženu relaciju ekvivalencije definisanu u Teoremi 1.5.

Teorema 1.6 Neka je A neprazan skup. Tada važi:

a) Ako je ρ relacija ekvivalencija skupa A, onda $R(A/\rho)=\rho$.

b) Ako je π particija skupa A, onda je $A/R(\pi)=\pi$.

Dokaz.

Sledi iz teorema 1.4 i 1.5.

Poslednje tri teoreme pokazuju da postoji potpuna paralela između pojmova "relacije ekvivalencije" i pojma "particije".

Relacija poretka

Relacije koje su "slične" relaciji "$\leq$" zovemo *relacije poretka.*

Definicija 1.2 Za relaciju $\rho\in \mathcal{R}e(A)$ kažemo da je *relacija poretka* (ili *relacija parcijalnog uređenja*) skupa A ako za sve $x, y, z\in A$ važi:

1. $(x,x)\in\rho$ (refleksivnost),
2. $((x,y)\in\rho \wedge (y,x)\in\rho)\Rightarrow x=y$ (antisimetričnost),
3. $((x,y)\in\rho \wedge (y,z)\in\rho)\Rightarrow (x,z)\in\rho$ (tranzitivnost).

Uređen par (A,ρ) zovemo (*parcijalno*) *uređen skup* ako je ρ relacija poretka nepraznog skupa A.

□

Primer 1.13 Relacija $\leq$ je primer relacije poretka na $\mathbb{N}$ (pa i na $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). Naravno, i relacija $\geq$ ima istu osobinu.

Primer 1.14 Inkluzija $\subseteq$ jeste relacija poretka na $\mathcal{P}(S)$.

Primer 1.15 Relacija " $|$ " (" je delilac ") na skupu $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ je takođe relacija poretka.

□

Primetimo da je relacija jednakosti na proizvoljnom skupu jedina relacija koja je *istovremeno* i relacija ekvivalencije i relacija poretka.

Teorema 1.7 Relacija $\rho \in \mathcal{R}e(A)$ je relacija poretka skupa A akko $\triangle_A \subseteq \rho$, $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \triangle_A$ i $\rho \circ \rho = \rho$.

Dokaz.

Sličan dokazu Teoreme 1.3.

□

Primetimo razliku između Primera 1.13 i Primera 1.14. Kod prvog primera svaka dva elementa su " uporediva " tj. za sve $x, y \in \mathbb{N}$ je $x \leq y$ ili $y \leq x$ dok kod drugog (ako S ima bar dva elementa) postoje skupovi $A, B \in \mathcal{P}(S)$ takvi da niti je $A \subseteq B$ niti je $B \subseteq A$.

Definicija 1.3 Relacija $\rho \in \mathcal{R}(A)$ je relacija *linearnog* ili *totalnog uređenja* ako je

1) ρ relacija parcijalnog uređenog skupa A,

2) za sve $x, y \in A$ važi $x \rho y$ ili $y \rho x$.

Ako je ρ relacija linearnog uređenja nepraznog skupa A, uređen par (A, ρ) zovemo *linearno uređen skup* ili *lanac*.

□

Napomena 1.1 Relaciju parcijalnog uređenja na *proizvoljnom* skupu A često *obeležavamo* sa $\leq$. Naravno, znak $\leq$ tada treba shvatiti samo kao oznaku *neke* relacije parcijalnog uređenja, a ne kao oznaku za relaciju " manje ili jednako" na skupu nekih brojeva. U tom smislu, ako $\leq$ označava neku relaciju poretka, onda inverznu relaciju $\leq^{-1}$ obeležavamo sa $\geq$.

□

Neka je $(A, \leq)$ parcijalno uređen skup i $S \subseteq A$. Za element $a \in A$ kažemo da je *gornje ograničenje* skupa S akko je $s \leq a$ za sve $s \in S$. Ako je pored toga još $a \in S$, onda za a kažemo da je *najveći element* (ili *maksimum*) od S.

Dualno definišemo i *donje ograničenje* . Element $b \in A$ je *donje ograničenje* od S akko $b \leq s$ za sve $s \in S$. Ako pored toga $b \in S$, element b je *najmanji element* (ili *minimum*) od S.

Primer 1.16 U parcijalno uredenom skupu $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$, gornja ograničenja skupa $S = \{\{1, 2\}, \{4\}\}$ su recimo $a_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ili $a_2 = \mathbb{N}$. Donje ograničenje tog skupa je $\emptyset$ (to je i jedino donje ograničenje). Skup S nema ni najmanji, ni najveći element.

Primer 1.17 U parcijalno uredenom skupu $(\mathbb{Q}, \leq)$ skup $S_1 = \{0, 1/2, 1/3\}$ ima najmanji i najveći element, dok skup $S_2 = \{x \mid x \in Q \wedge 0 < x \leq 2\}$ ima najveći, a nema najmanji element.

□

Za parcijalno uređen skup (A, ρ) kažemo da je *dobro uređen skup* (ili da ρ *dobro uređuje skup* A) ako svaki neprazan podskup B skupa A ima najmanji element. Naravno, svaki dobro uređen skup je i linearno uređen, ali obrat nije tačan. Na primer, $(\mathbb{Q}, \leq)$, gde je $\leq$ uobičajena relacija poretka skupa $\mathbb{Q}$, jeste linearno uređen skup, ali nije i dobro uređen (jer, na primer, podskup $\mathbb{Z}$ nema najmanji element). Slično, ni $(\mathbb{R}, \leq)$ nije dobro uređen skup. Prirodno je postaviti pitanje da li se, recimo, na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ može definisati neka druga relacija poretka ρ koja bi "dobro uredila" skup $\mathbb{R}$. Da li se na svakom nepraznom skupu može definisati relacija dobrog uređenja? Stav koji tvrdi *da se na svakom nepraznom skupu A može definisati relacija* ρ *tako da je* (A, ρ) *dobro uređen skup*, matematičari uglavnom prihvataju *kao aksiomu.* Može se dokazati, naime, da je stav o dobrom uređenju (tzv. *Princip dobrog uređenja*) ekvivalentan sa tzv. *Aksiomom izbora,* koja tvrdi da *za svaku familiju* $\{A_i \mid i \in I\}$ *nepraznih skupova* A_i *postoji funkcija izbora* $f: I \to \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$ *takva da je* $f(i) \in A_i$, *za sve* $i \in I$. O Aksiomi izbora i njenim ekvivalentima danas postoji opširna literatura –videti recimo [Su 72] ili [Sie 18].

Neka je $(A, \leq)$ parcijalno uređen skup, $S \subseteq A$. Među svim gornjim ograničenjima skupa S može, a ne mora, da postoji najmanji. Ako postoji najmanje gornje ograničenje skupa S, onda taj element zovemo *supremum od* S (u oznaci sup S, ili $\sum\{s \mid s \in S\}$). Analogno, ako postoji najveće donje ograničenje od S, zovemo ga *infimum od* S (u oznaci inf S, ili $\prod\{s \mid s \in S\}$).

Primer 1.18 U parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{Q}, \le)$ skup $S_1=\{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge 0< x \le 2\}$ nema najmanji element, ali ima infimum, inf $S=0$. Skup $S_2=\{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge 2<x^2\}$ nema infimum u $\mathbb{Q}$, ali ima u $\mathbb{R}$.

□

Parcijalno uređen skup $(L, \le)$ u kome svaki dvočlani podskup ima supremum i infimum, zovemo *mreža*. Na primer, $(\mathbb{N}, \le)$, $(\mathbb{Q}, \le)$, $(\mathbb{R}, \le)$ su mreže, kao i $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$.

Ako u parcijalno uređenom skupu $(L, \le)$ svaki podskup $A \subseteq L$ ima supremum i infimum, za $(L, \le)$ kažemo da je *kompletna mreža* . Mreže $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ i $([0,1], \le)$ su kompletne. Primetimo da u kompletnoj mreži (zbog postojanja sup $\emptyset$ i inf $\emptyset$) uvek imamo najmanji i najveći element. Tako, $(\mathbb{N}, \le)$, $(\mathbb{Q}, \le)$ nisu kompletne mreže. Obratno, postoje mreže koje imaju najveći i najmanji element, ali nisu kompletne. Na primer, mreža $(\{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge 0 \le q \le 3\}, \le)$ nije kompletna.

1.3 Funkcije i operacije

Neka su A i B skupovi. Za binarnu relaciju $f \subseteq A \times B$ kažemo da je *funkcija* (*preslikavanje*) *skupa* A *u skup* B ako za svaki element a skupa A postoji tačno jedan element b skupa B tako da je $(a,b) \in f$; element b zovemo *slika* elementa a, dok za element a kažemo da je *original* elementa b, i pišemo $f(a)=b$ (ili $af=b$ ili $f:a \to b$). Skup A jeste *domen* funkcije f (u oznaci dom(f)) , a skup B *kodomen* funkcije f (u oznaci codom(f)). Ako je f funkcija skupa A u skup B, pišemo $f: A \to B$. Skup svih funkcija skupa A u B obeležavamo sa B^A.(Primetimo da je $B^{\emptyset}=\{\emptyset\}$.) Ako $f: A \to A$, za funkciju f kažemo da je *funkcija skupa* A.

Neka je $\rho \subseteq A \times B$ neka relacija, i $X \subseteq A$. Skup $\rho(X)$ definišemo na sledeći način:

$$\rho(X)=\{b \mid b \in B \wedge (\exists a \in X)(a,b) \in \rho\}.$$

Na taj način, ako je zadata funkcija $f: A \to B$, $X \subseteq A$, imamo da je

$$f(X)=\{b \mid b \in B \wedge (\exists a \in X) f(a)=b\}.$$

Restrikcija funkcije $f:A\to B$ *na skup* X ($X\subseteq A$) jeste funkcija $f|_X:X\to B$ definisana sa $f|_X=f\cap(X\times B)$. Tako, za sve $a\in X$ važi da je $f|_X(a)=f(a)$.

Primer 1.19 Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcija definisana sa $f(x)=x^2$, i neka je $X=\{-1,-2,0,1,2\}$. Funkciju $f|_X$ možemo zapisati i kao $f=\begin{pmatrix}-2&-1&0&1&2\\4&1&0&1&4\end{pmatrix}$. Naravno, $f(X)=\{0,1,4\}$.

□

Za funkciju $f:A\to B$ kažemo da je *injekcija* (ili "1–1") ako se različiti elementi skupa A preslikavaju na različite elemente skupa B tj.

$$(\forall x\in A)(\forall y\in A)(x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y)).$$

Funkcija $f:A\to B$ jeste *sirjekcija* (ili "*na*") ako svaki element skupa B ima svoj original u A tj. ako važi $(\forall b\in B)(\exists a\in A)\ f(a)=b$. *Bijekcija* (ili *permutacija*) je funkcija koja je injekcija i sirjekcija.

Primer 20. Dijagonala $\triangle_A$ skupa A je permutacija skupa A. Kada se $\triangle_A$ posmatra kao funkcija, zovemo je *identična funkcija skupa* A i označavamo sa id_A.

Primer 21. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisana sa $f(x)=x^2$ nije injekcija ni sirjekcija. Funkcija $f|_{\mathbb{N}}$ jeste injekcija, ali nije sirjekcija. Primer funkcije koja jeste sirjekcija, ali nije injekcija, jeste trigonometrijska funkcija $\sin:\mathbb{R}\to[0,1]$. Funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisana sa $g(x)=2x+1$ jeste bijekcija.

□

Primetimo da za svaku funkciju f konačnog skupa A važi da je f injekcija akko je f sirjekcija. Naravno, kao što se iz gornjih primera vidi, takav zaključak ne važi za beskonačne skupove.

Za skupove A i B kažemo da su *ekvipotentni* (ili *ekvivalentni* ili su *iste kardinalnosti*), u oznaci $|A|=|B|$, ako postoji bijekcija $f:A\to B$. Za skup kažemo da je *prebrojiv* ako je ekvipotentan sa skupom prirodnih brojeva. Osnovno o kardinalnosti skupova može se naći u [Mil 91].

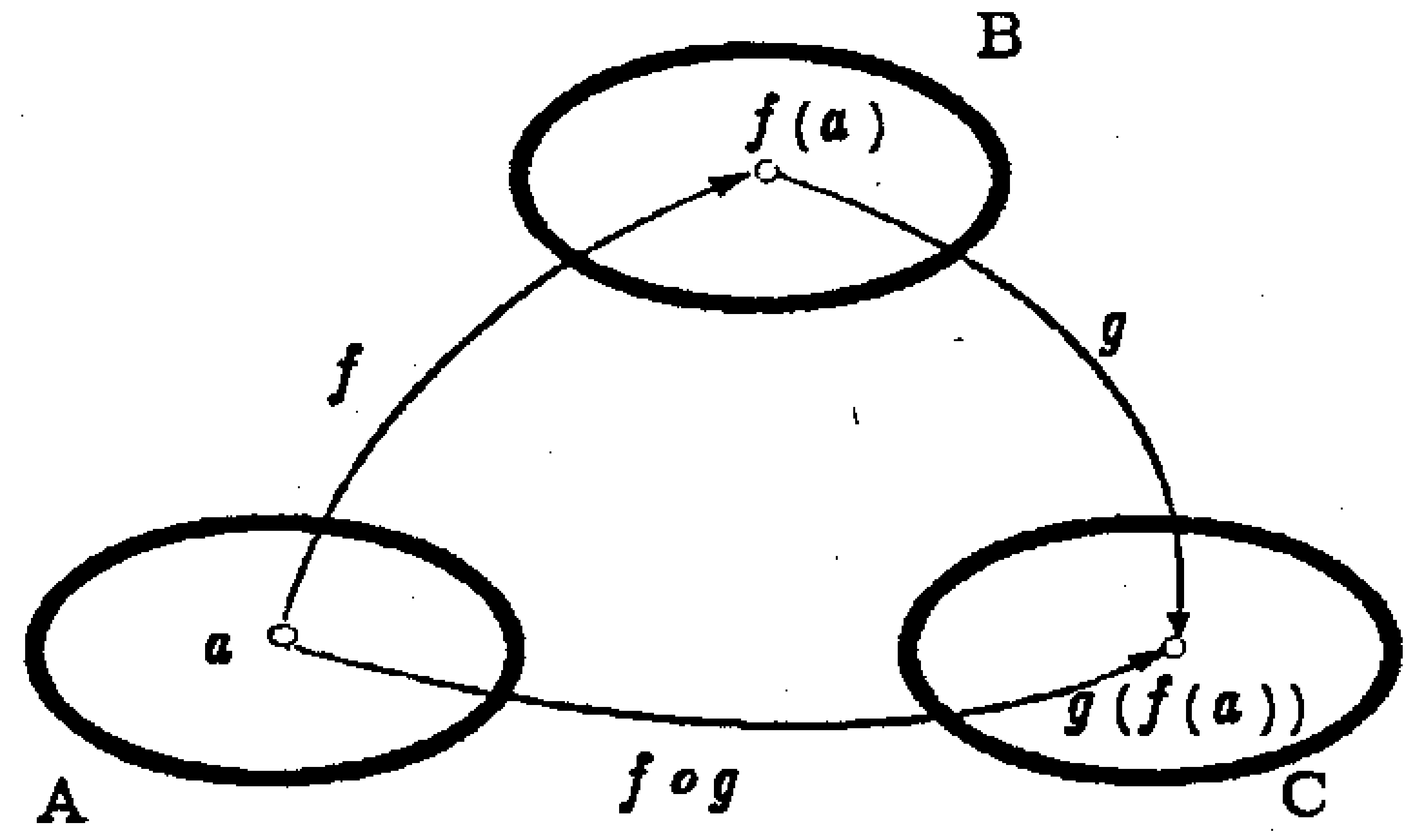
Slaganje funkcija

Definicija 1.4 Neka je A neprazan skup, $f:A\to B$, $g:B\to C$. *Slaganje* (ili *proizvod*, *kompozicija*) *funkcija* f i g jeste funkcija $f\circ g$: $A\to C$ definisana na sledeći način: ako je $a\in A$ onda

$(*)\qquad (f\circ g)(a)=g(f(a))$.

□

Prema tome, ako $f:A\to B$, $g:B\to C$ onda sliku $(f\circ g)(a)$ elementa $a\in A$ nalazimo tako što element a prvo preslikamo funkcijom f, a zatim taj element $f(a)$ preslikamo funkcijom g.



Primer 1.21 Neka su $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcije definisane sa $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2+3$. Tada imamo: $(f\circ g)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)^2+3=4x^2+4x+4$. Sličnim "računom" dobijamo da je $(g\circ f)(x)=f(g(x))=f(x^2+3)=2(x^2+3)+1=2x^2+7$. Iz ovog primera se vidi da u opštem slučaju ne mora biti $f\circ g=g\circ f$.

□

U literaturi se kompozicija funkcija često definiše dualno: ako $f:A\to B$, $g:B\to C$ onda $(g\circ f)(a)=g(f(a))$. Razlog zbog koga usvajamo Definiciju 1.4 jeste taj da se *ovakva definicija slaganja funkcija poklapa sa definicijom proizvoda f i g kada se f i g posmatraju kao relacije.* Da to dokažemo, uvedimo (privremeno) oznaku $\rho\circ_r\sigma$ za kompoziciju binarnih relacija ρ i σ. Primetimo da ako $f:A\to B$, $g:C\to D$ onda su f i g binarne relacije skupa $A\cup B\cup C\cup D$, pa je kompozicija $f\circ_r g$ uvek definisana. Naravno, relacija $f\circ_r g$ nije uvek i funkcija. Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov da $f\circ_r g$ bude funkcija. Takođe ćemo dokazati da se u tom slučaju $f\circ_r g$ poklapa sa funkcijom $f\circ g$ koju smo definisali uslovom $(*)$.

Teorema 1.8 Neka su A i C neprazni skupovi, $f:A\to B$, $g:C\to D$. Tada:

a) $f\circ_r g$ je funkcija skupa A u skup D akko $f(A)\subseteq C$.

b) Ako je $f(A)\subseteq C$ onda $f\circ_r g=f\circ g$ tj. za sve $a\in A$ važi $(f\circ_r g)(a)=g(f(a))$.

Dokaz.

a) Neka je $f(A)\subseteq C$. Jasno, $f\circ_r g\subseteq A\times D$. Neka je a proizvoljan element skupa A. Kako je f funkcija, onda postoji jednoznačno određen element $b\in B$ tako da je $(a,b)\in f$.

Dalje, $b\in f(A)$, $f(A)\subseteq C$, pa sledi $b\in C$. Kako je i g funkcija, onda postoji jednoznačno određen element $d\in D$ tako da je $(b,d)\in g$. Po definiciji $f\circ_r g$ sledi da je $(a,d)\in f\circ_r g$, tj. za svaki $a\in A$ postoji jedinstveno određen $d\in D$ tako da je $(a,d)\in f\circ_r g$, što dokazuje da je $f\circ_r g$ funkcija skupa A u skup D.

Obratno, neka je $f\circ_r g:A\to D$ i neka je $b\in f(A)$. Tada postoji neki element $a\in A$ tako da je $f(a)=b$. Treba dokazati da $b\in C$. No, kako je $f\circ_r g:A\to D$, onda za element a postoji element $d\in D$ tako da je $(a,d)\in f\circ_r g$. To znači (po definiciji kompozicije relacija) da postoji element z tako da je $(a,z)\in f$ i $(z,d)\in g$. Kako $f:A\to B$, $(a,b)\in f$ i $(a,z)\in f$ sledi da je $b=z$. Tada dobijamo da $(b,d)\in g$, iz čega sledi (zbog činjenice da $g:C\to D$) da je $b\in C$, što je trebalo da se dokaže.

b) Imajući u vidu uslov $f(A)\subseteq C$ i stav a) ove teoreme, imamo da je $f\circ_r g$ funkcija skupa A u skup D. Treba dokazati da za sve $a\in A$ i sve $d\in D$ važi

$$(f\circ_r g)(a)=d \ \text{ akko } g(f(a))=d.$$

Ovo sledi iz:

$$(f\circ_r g)(a)=d \text{ akko } (a,d)\in f\circ_r g \text{ akko } (\exists z)((a,z)\in f \wedge (z,d)\in g)$$

$$\text{akko } (\exists z)(f(a)=z \wedge g(z)=d) \text{ akko } g(f(a))=d,$$

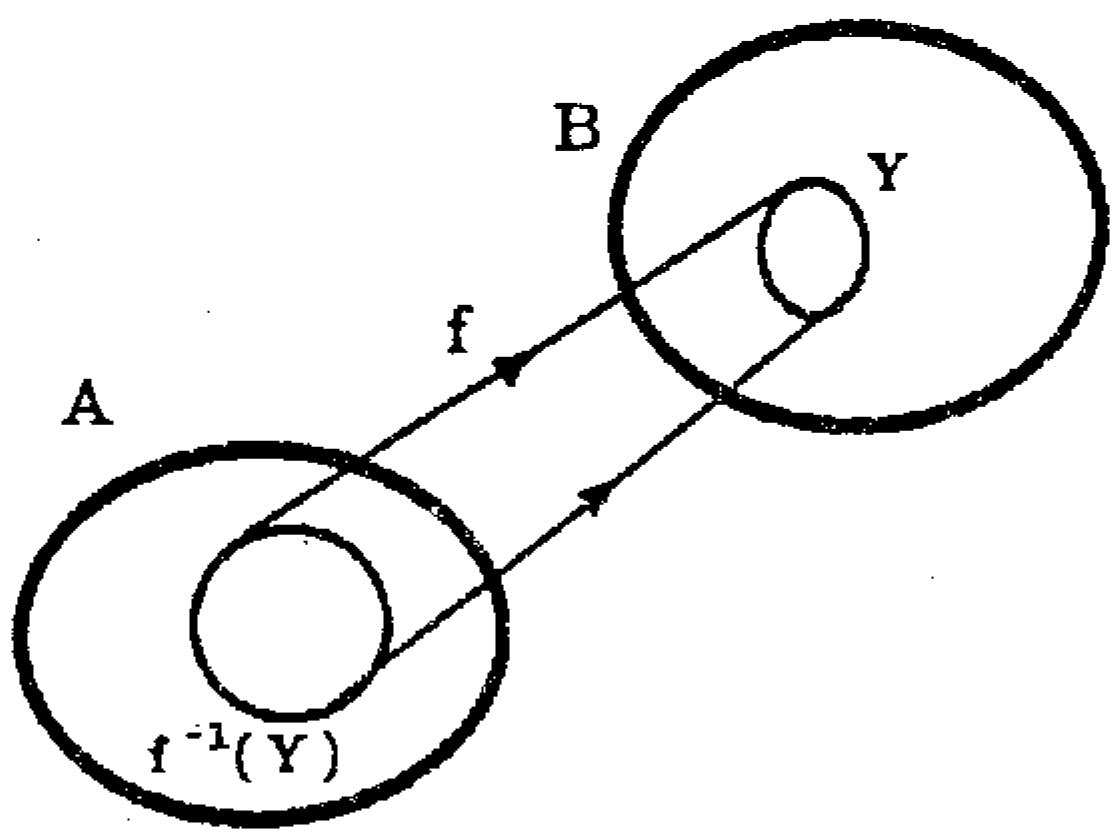
što je trebalo da se dokaže.

□

Inverzna funkcija

Neka je $f:A\to B$. Kako je $f\in\mathcal{R}(A\cup B)$ onda je inverzija relacije f data sa

$$f^{-1}=\{(b,a)\mid (a,b)\in f\}.$$



Naravno, f^{-1} *ne mora biti funkcija*, ali jeste relacija, $f^{-1}\subseteq B\times A$, tako da za proizvoljan skup $Y\subseteq B$ imamo sledeće:

$f^{-1}(Y)=\{a\mid a\in A \wedge (\exists b\in Y)(b,a)\in f^{-1}\}$ tj.

$$f^{-1}(Y)=\{a \mid a\in A \wedge (\exists b\in Y)f(a)=b\}=\{a \mid a\in A \wedge f(a)\in Y\}.$$

Za skup $f^{-1}(Y)$ kažemo da je *kompletna inverzna slika skupa* Y *u odnosu na* f.

Primer 1.22 Neka je $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ definisana sa $f(x)=x^2$. Tada relacija $f^{-1}\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nije funkcija. Ako je $Y=\{-5,1,3,4\}$, onda je $f^{-1}(Y)=\{1,-1,2,-2\}$.

□

Teorema 1.6 Neka je $f:A\to B$. Tada:

a) Relacija $f^{-1}\subseteq B\times A$ jeste funkcija skupa B u skup A akko je f bijekcija.

b) Ako je f bijekcija onda je i $f^{-1}:B\to A$ bijekcija i važi $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_A$, $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_B$.

Dokaz.

Dokaz sledi neposredno, koristeći definicije funkcije i bijekcije.

□

Direktan proizvod familije skupova

Neka su A i I neki skupovi. *Familija* $\langle x_i \mid i\in I\rangle$ *elemenata od* A jeste preslikavanje φ skupa I u skup A, gde je $\varphi(i)=x_i$. Ova oznaka se koristi ako je naglasak na *nabrajanju* elemenata $x_i(\,i\in I)$, među kojima možda *ima i jednakih.* U tom smislu oznaku $\{x_i \mid i\in I\}$ koristimo za označavanje slike $\varphi(I)$ skupa I . Skup I zovemo *indeksni skup* date familije.

Neka je $\langle A_i \mid i\in I\rangle$ familija podskupova nekog skupa A. *Direktan* (ili *Dekartov*) *proizvod* $\prod\langle A_i \mid i\in I\rangle$ definišemo kao skup svih funkcija $f:I\to\bigcup\langle A_i \mid i\in I\rangle$ za koje važi $f(i)\in A_i$, za sve $i\in I$.

Kakva je veza između direktnog proizvoda $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ (koji smo definisali u delu 1.1) i gore definisanog direktnog proizvoda familije skupova? Neka su $I=\{1,2,\ldots,n\}$ i $A_1,A_2,\ldots,A_n$ neki skupovi. Može se dokazati da postoji prirodna bijekcija između skupova $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ i $\prod\langle A_i \mid i\in I\rangle$. Naime, svakoj uređenoj n-torki $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ možemo pridružiti funkciju $f:I\to\bigcup\langle A_i \mid i\in I\rangle$ za koju važi $f(i)=x_i$, $i\in I$. Uobičajeno je da se uređena n-torka $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ shvati upravo kao funkcija $f\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \bigcup \langle A_i \mid i \in I \rangle$ kod koje je $f(i)=x_i, i \in I$. U tom smislu se ne pravi se razlika između skupova $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ i $\prod \langle A_i \mid i \in \{1,2,\ldots,n\} \rangle$. Analogno, ne pravi se razlika ni između skupova A^n i $A^{\{0,\ldots,n-1\}}$. Po dogovoru, A^0 se definiše kao $A^{\emptyset}$ (znamo da je $A^{\emptyset} = \{\emptyset\}$).

1.4 O algebrama

Neka je A neprazan skup i n nenegativan ceo broj. Svako preslikavanje $f\colon A^n \to A$ zovemo *n-arna operacija skupa A*; za n se kaže da je *dužina* (ili *arnost*) operacije f. Tako, n–arna operacija f svakoj n–torki $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$ pridružuje jedinstveni element $a \in A$, koji se označava sa $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tako, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$ znači da $f\colon (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto a$.

Primetimo da je 0–arna (nularna) operacija f skupa A preslikavanje $f\colon A^0 \to A$, tj. $f\colon A^{\emptyset} \to A$ odnosno $f\colon \{\emptyset\} \to A$. Svaka nularna operacija f je određena slikom $f(\emptyset)$ elementa $\emptyset$, te se nularna operacija f može izjednačiti sa tim jednim elementom skupa A. U daljem ćemo pod nularnom operacijom skupa A podrazumevati neki fiksirani element skupa A.

Operaciju dužine 1 zovemo *unarna operacija*, a operaciju dužine 2 *binarna operacija*. Za neke unarne operacije koristimo tzv. *eksponencijalnu notaciju* ; na primer, pišemo $\overline{X}$ za komplement skupa X, ili ρ^{-1} za inverziju relacije ρ. Za binarne operacije uobičajena je tzv. *infiksna notacija* ; na primer, pišemo $x+y$ umesto $+(x,y)$ ili $X \cap Y$ umesto $\cap(X,Y)$.

Univerzalne algebre

Jezik (ili *tip*) *algebri* jeste skup $\mathcal{F}$ funkcijskih simbola tako da svakom elementu $f \in \mathcal{F}$ odgovara nenegativan ceo broj n. Taj ceo broj n se zove *arnost* (ili *dužina*) od f (u oznaci $\mathrm{ar}(f)$), a za f kažemo da je *n-arni funkcijski simbol*. Skup svih n - arnih funkcijskih simbola iz $\mathcal{F}$ obeležavamo sa $\mathcal{F}_n$. Tako, $\mathcal{F} = \bigcup \{\mathcal{F}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ako je $\mathcal{F}$ neki tip algebri, onda *univerzalna algebra* $\mathcal{A}$ (ili samo *algebra*) *tipa*

$\mathcal{F}$ jeste uređen par (A,F) gde je A neprazan skup, a F familija operacija na A, tako da svakom n-arnom funkcijskom simbolu $f\in\mathcal{F}$ odgovara tačno jedna n-arna operacija $f^{\mathcal{A}}$.(Ako je iz konteksta jasno o kojoj algebri se radi, onda se često umesto $f^{\mathcal{A}}$piše samo f.) Za skup A kažemo da je *nosač* algebre (A, F), a elemente skupa F zovemo *osnovne* (ili *fundamentalne*) *operacije algebre*. Ako je F konačan, $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$, onda (A, F) obeležavamo sa $(A, f_1,f_2,\ldots,f_n)$. Algebra (A,F) je *konačna* ako je A konačan skup, a kažemo da je *trivijalna* ako je $|A|=1$. Nularnu operaciju algebre zovemo i *konstanta*. *Grupoid* je algebra (A, f), gde je f binarna operacija skupa A.

Neka su $\mathcal{A}=(A, F^{\mathcal{A}})$ i $\mathcal{B}=(B, F^{\mathcal{B}})$ algebre tipa $\mathcal{F}$. Tada se nizovi arnosti operacija algebre $\mathcal{A}$ odnosno algebre $\mathcal{B}$ poklapaju. Obratno, ako su dve algebre $(A,F^{\mathcal{A}})$ i $\mathcal{B}=(B, F^{\mathcal{B}})$ takve da se nizovi arnosti njihovih fundamentalnih operacija poklapaju, onda postoji tip algebri $\mathcal{F}$ tako da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre tipa $\mathcal{F}$. Tako, tip algebre je u suštini *određen nizom arnosti njenih fundamentalnih operacija* . Iz tog razloga, mi ćemo tip algebre $\mathcal{A}$ često zadavati samo nizom arnosti fundamentalnih operacija od $\mathcal{A}$.

Primer 1.23 Ako je A neki skup, a $\cup,\cap,-,\emptyset$ imaju svoja uobičajena značenja, onda je $(\mathcal{P}(A),\cup,\cap,-,\emptyset,A)$ algebra tipa $(2,2,1,0,0)$.

Primer 1.24 Ako sa $+$ i $\cdot$ označimo uobičajene operacije sabiranja i množenja u skupu realnih brojeva, onda su $(\mathbb{R},+)$ i $(\mathbb{R},\cdot)$ grupoidi, a $(\mathbb{R},+,\cdot)$ algebra sa dve binarne operacije tj. algebra tipa $(2,2)$.

Primer 1.25 Ako je A neprazan skup, a $\cup,\cap,-\ ,\circ\ ,^{-1}$ uobičajene operacije unije, preseka, komplementa (u odnosu na A^2), kompozicije i inverzije binarnih relacija iz $\mathcal{R}(A)$, onda je $(\mathcal{R}(A),\cup,\cap,-,\circ,^{-1})$ algebra tipa $(2,2,1,2,1)$.

$\square$

Neke poznate klase algebri

(1) *Grupe*. *Grupa* $\mathcal{G}$ jeste algebra $(G,\cdot,^{-1},1)$ tipa $(2,1,0)$, koja zadovoljava sledeće identitete (o *identitetima* videti D7.15 i D7.16):

(G1) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ (*asocijativnost*), (G2) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 *je neutralni* (ili *jedinični*) *element za operaciju* $\cdot$),

(G3) $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ (x^{-1} *je inverzni element za* x).

Za grupu $\mathcal{G}$ kažemo da je *komutativna* (ili *Abelova*) ako zadovaljava identitet

(G4) $x \cdot y = y \cdot x$.

(2) ***Semigrupe i monoidi***. *Semigrupa* je grupoid $(G, \cdot)$ u kojem važi (G1); ako sem toga važi i (G4), kažemo da je *komutativna semigrupa*. *Monoid* je algebra $(M, \cdot, 1)$ tipa $(2,0)$ gde važi (G1) i (G2).

(3) ***Prsteni***. *Prsten* je algebra $(R, +, \cdot, -, 0)$ tipa $(2,2,1,0)$ u kojoj važi

(R1) $(R, +, \cdot, -, 0)$ je Abelova grupa,

(R2) $(R, \cdot)$ je semigrupa,

(R3) $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,

$(x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ (*distributivnost* $\cdot$ prema $+$).

Prsten sa jedinicom jeste algebra $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ koja zadovoljava (R1)-(R3), i (G2).

(4) ***Mreže***. *Mreža* je algebra $(L, +, \cdot)$ tipa $(2,2)$ u kojoj važi

(L1) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$ (*komutativnost*),

(L2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, (*asocijativnost*),

(L3) $x + x = x$, $x \cdot x = x$ (*idempotentnost*),

(L4) $x = x + (x \cdot y)$, $x = x \cdot (x + y)$ (*apsorptivnost*).

Za mrežu kažemo da je *distributivna* ako zadovoljava

(D) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$, $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (*distributivnost*).

Mreža je *modularna* ako važi

(M) $(x \cdot y) + (y \cdot z) = y \cdot ((x \cdot y) + z)$ (*modularnost*).

Dve definicije mreže

U delu 1.2 definisali smo mrežu *kao parcijalno uređen skup* $(L,\leq)$ u kojem za svaka dva elementa a i b postoji $\sup(\{a,b\})$ i $\inf(\{a,b\})$. U ovom delu definisali smo mrežu *kao algebru* $(L,+,\cdot)$ u kojoj važe identiteti (L1)– (L4). Dokazaćemo da su te dve definicije ekvivalentne u sledećem smislu: ako je L mreža prema jednoj definiciji, onda na uniforman način možemo konstruisati na istom skupu L mrežu po drugoj definiciji. Te dve konstrukcije (koje nam omogućavaju prelazak sa jedne definicije na drugu) su uzajamno inverzne.

Teorema 1.7

(a) Neka je algebra $(L,+,\cdot)$ mreža. Definišimo na L relaciju $\leq$ na sledeći način:

$$(*) \qquad a\leq b \quad \text{akko } a+b=b.$$

Tada je parcijalno uređen skup $(L,\leq)$ mreža tako da važi $\sup(\{a,b\})=a+b$, $\inf(\{a,b\})=a\cdot b$.

(b) Neka je parcijalno uređen skup $(L,\leq)$ mreža. Definišimo na L binarne operacije $+$ i $\cdot$ na sledeći način:

$$(**) \qquad a+b=\sup(\{a,b\}) \text{ i } a\cdot b=\inf(\{a,b\}).$$

Tada je algebra $(L,+,\cdot)$ mreža tako da važi : $a\leq b$ akko $a+b=b$.

Dokaz.

(a) Primetimo da je uslov $a+b=b$ ekvivalentan sa uslovom $a\cdot b=a$. Zaista:

$$a+b=b \quad\Rightarrow\quad a\cdot b=a\cdot(a+b)=a \quad \text{(zbog apsorpcije).}$$

Slično, $a\cdot b=a \Rightarrow a+b=a\cdot b+b=b$. Tako definisana relacija $\leq$ je relacija parcijalnog uređenja. Zaista, neka su a, b, $c\in L$. Tada

$$\text{(R)} \qquad a\leq a \text{ jer je } a+a=a.$$

$$\text{(AS)} \qquad (a\leq b \wedge b\leq a)\Rightarrow(a+b=b \wedge b+a=a)$$

$$\Rightarrow a=b \qquad \text{(zbog komutativnosti).}$$

$$\text{(T)} \qquad (a\leq b \wedge b\leq c)\Rightarrow(a+b=b \wedge b+c=c)$$

$$\Rightarrow a+c=a+(b+c)$$

Iz toga sledi da je $a+(b+c)=(a+b)+c=b+c=c$ što znači da je $a\leq c$. Tako, $(L,\leq)$ je parcijalno uređen skup. Dokažimo još da za $a,b\in L$

$$\sup(\{a,b\})=a+b,\quad \inf(\{a,b\})=a\cdot b.$$

Zaista, $a\leq a+b$ i $b\leq a+b$, jer $a+(a+b)=a+b$ i $b+(a+b)=a+b$. Dalje, ako je $a\leq c$ i $b\leq c$ onda $a+b\leq c$ jer $(a\leq c\ \wedge\ b\leq c)\Rightarrow a+c=c\ \wedge\ b+c=c$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow a+c+b+c=c\\&\Rightarrow (a+b)+c=c\\&\Rightarrow a+b\leq c.\end{aligned}$$

Slično, $a\cdot b\leq a$ i $a\cdot b\leq b$. Ako je $c\leq a$ i $c\leq b$, onda

$$\begin{aligned}c\cdot a=c\ \wedge\ c\cdot b=c\quad &\Rightarrow c\cdot a\cdot c\cdot b=c\cdot c\\&\Rightarrow c\cdot(a\cdot b)=c\\&\Rightarrow c\leq a\cdot b.\end{aligned}$$

(b) Treba dokazati da ako operacije + i $\cdot$ definišemo sa (**), onda na $(L,+,\cdot)$ važe identiteti (L1)–(L4). Identiteti (L1)–(L3) se dokazuju neposredno, koristeći definiciju supremuma i infimuma. Takođe važi identitet (L4), naime, za sve $x,y\in L$ imamo sledeće:

$$x=\sup(\{x,\inf(\{x,y\})\}),\ \text{odnosno}\ x=\inf(\{x,\sup(\{x,y\})\}),$$

jer je $\inf(\{x,y\})\leq x$ odnosno $x\leq\sup(\{x,y\})$. Treba još dokazati da važi: $a\leq b$ akko $a+b=b$. No, ta ekvivalencija je tačna jer za sve $a,b\in L$ imamo

$$a\leq b\ \text{ akko }\ \sup(\{a,b\})=b.$$

□

U daljem tekstu, ako drugačije nije naglašeno, pod *mrežom* L ćemo podrazumevati mrežu *kao algebru*. Za odgovarajuću relaciju poretka $\leq$ (definisanu uslovom (*) u T1.7 (a)) kažemo da je *indukovana relacija poretka* i slično, za odgovarajući parcijalno uređen skup $(L,\leq)$ kažemo da je *indukovani parcijalno uređen skup*.

Booleove algebre

Definicija 1.5 *Booleova algebra* jeste algebra $(B,+\ ,\cdot\ ,^-,0,1)$ tipa $(2,2,1,0,0)$ koja zadovoljava sledeće uslove:

(B1) $(B,+,\cdot)$ je distributivna mreža,

(B2) $x\cdot 0=0$, $x+1=1$,

(B3) $x\cdot\overline{x}=0$, $x+\overline{x}=1$.

□

Klasu Booleovih algebri obeležavaćemo sa BA. Istu oznaku ćemo koristiti i kada je reč o *jednoj* Booleovoj algebri (iz konteksta će uvek biti jasno o čemu je reč).

Primer 1.26 Neka je S neki skup, i neka su $\cup,\cap,^-$ odgovarajuće skupovne operacije (komplement $^-$ je u odnosu na skup S). Tada je algebra $\mathcal{B}(S)=(\mathcal{P}(S),\cup,\cap,^-,\emptyset,S)$ Booleova algebra, tzv. *skupovna Booleova algebra.*

□

Kako svaka Booleova algebra $\mathcal{B}=(B,+\ ,\cdot\ ,^-,0,1)$ "sadrži u sebi" strukturu mreže (jer je $(B,+,\cdot)$ mreža), onda se u svakoj BA indukuje odgovarajuća relacija poretka $\leq$ (videti T1.7a) . U daljem tekstu, ako je reč o Booleovoj algebri, oznaka $\leq$ će uvek značiti *indukuvanu relaciju poretka* mrežnog dela Booleove algebre. Takođe je uobičajeno da se umesto $x\cdot y$ piše jednostavno xy.

Na primer, u skupovnoj Booleovoj algebri $\mathcal{B}(S)$ indukovana relacija poretka jeste baš $\subseteq$. Važi naime : $A\cup B=B$ akko $A\subseteq B$. Primetimo da u indukovanom parcijalno uređenom skupu $(\mathcal{P}(S),\subseteq)$ važi: $\sup(\{A,B\})=A\cup B$, $\inf(\{A,B\})=A\cap B$.

Neka je $\mathcal{B}=(B,+,\cdot,^-,0,1)$ Booleova algebra. Tada je u indukovanom parcijalno uređenom skupu $(B,\leq)$ element 0 najmanji, a element 1 najveći. Booleovu algebru $\mathcal{B}$ koja indukuje kompletnu mrežu $(B,\leq)$ zovemo *kompletna Booleova algebra.* Svaka skupovna Booleova algebra je kompletna.

Neke osobine Booleovih algebri

Evo nekih jednostavnih osobina BA, koje ćemo kasnije koristiti.

Teorema 1.8 U svakoj Booleovoj algebri važi: $x\leq y$ akko $x\,\overline{y}=0$

Dokaz.

Ako je $x \le y$ onda $x+y=y$. Tada je $0 = y\overline{y} = (x+y)\,\overline{y} = x\overline{y} + y\overline{y} = x\overline{y} + 0 = x\overline{y}$ tj. $x\overline{y}=0$. Obratno, ako $x\overline{y}=0$ onda

$$x = x\cdot 1 = x(y+\overline{y}) = xy + x\overline{y} = xy \quad \Rightarrow \quad x = xy \quad \Rightarrow \quad x \le y.$$

□

Posledica 1.1 U svakoj Booleovoj algebri važi : $x \le y$ akko $\overline{y} \le \overline{x}$.

Dokaz.

Direktna posledica prethodne teoreme, naime $x \le y$ akko $x\overline{y}=0$ akko $\overline{y}\,\overline{\overline{x}}=0$ akko $\overline{y} \le \overline{x}$.

□

Teorema 1.9 U svakoj BA operacije $\cdot$ i $+$ se slažu sa $\le$ tj. ako je $a \le b$ i $c \le d$ onda $a\cdot c \le b\cdot d$ i $a+c \le b+d$.

Dokaz.

Neka $a \le b$ i $c \le d$. Tada $a\cdot\overline{b}=0$ i $c\cdot\overline{d}=0$, pa

$$(a\,c)(\overline{b\,d}) = a\cdot c(\overline{b}+\overline{d}) = a\,c\,\overline{b} + a\,c\,\overline{d} = 0+0=0 \quad \Rightarrow \quad a\,c \le b\,d.$$

Slično, $(a+c)(\overline{b+d}) = (a+c)\,\overline{b}\cdot\overline{d} = a\,\overline{b}\,\overline{d} + c\,\overline{b}\,\overline{d} = 0+0=0 \Rightarrow a+c \le b+d$.

□

Teorema 1.10 U svakoj Booleovoj algebri važi $x \le y$ akko $(\forall z)(yz=0 \Rightarrow xz=0)$.

Dokaz.

$(\rightarrow)$. Neka je $x \le y$; onda važi $x\overline{y}=0$, zbog T1.8. Neka je z proizvoljan element. Tada, koristeći T1.8 i tranzitivnost relacije $\le$ imamo:

$$\begin{aligned} yz=0 \ &\Rightarrow \ y \le \overline{z} && (\text{zbog T1.8}),\\ &\Rightarrow \ x \le \overline{z} && (\text{zbog } x \le y \text{ i tranzitivnosti } \le),\\ &\Rightarrow \ xz=0 && (\text{zbog T1.8}). \end{aligned}$$

$(\leftarrow)$. Neka sada važi $(\forall z)(yz=0 \ \Rightarrow \ xz=0)$. Ako za z uzmemo element $\overline{y}$, dobijamo $y\overline{y}=0 \ \Rightarrow \ x\overline{y}=0$

$$\Rightarrow \ x \le y.$$

□

Posledica 1.2 U svakoj BA važi $x=y$ akko $(\forall z)(yz=0 \Leftrightarrow xz=0)$.
Dokaz.

Direktna posledica prethodne teoreme i osobine (AS) za $\leq$.

□

Po definiciji, u svakoj BA operacija $\cdot$ je distributivna u odnosu na $+$. Sledeća teorema govori o tzv. beskonačnoj distributivnosti.

Teorema 1.11 Neka je $\mathcal{B} \in$ BA, i $A \subseteq B$, $b \in B$. Tada, ako postoji element $b \cdot \Sigma\{a \mid a \in A\}$, onda postoji i element $\Sigma\{b \cdot a \mid a \in A\}$ i važi $b \cdot \Sigma\{a \mid a \in A\} = \Sigma\{ba \mid a \in A\}$.
Dokaz.

Primetimo prvo, da za proizvoljne elemente x, y, z važi

(1) $\quad x \cdot y \leq z \quad \Rightarrow \quad y \leq \overline{x} + z.$

Zaista, kako se $\cdot$ i $+$ slaže sa $\leq$ imamo $y = 1 \cdot y = (\overline{x} + x)y = (\overline{x} \cdot y) + (x \cdot y) \leq \overline{x} + z$.
Slično,

(2) $\quad z \leq \overline{x} + y \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y$, jer

$$x \cdot z \leq x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot \overline{x} + xy = 0 + xy \leq y.$$

Pretpostavimo sada da postoji $s = \Sigma\{a \mid a \in A\}$. Ako je $x \in A$, jasno je da

$$x \leq s \quad \Rightarrow \quad bx \leq bs$$

tako da je $bs = b \cdot \Sigma\{a \mid a \in A\}$ jedna gornja granica za $\Sigma\{ba \mid a \in A\}$. Neka je m neka gornja granica tog skupa, tj. neka je $ba \leq m$, za sve $a \in A$. Tada, zbog (1), imamo

$a \leq \overline{b} + m$, za sve $a \in A$

$\Rightarrow s \leq \overline{b} + m$ (jer je s najmanja gornja granica za A),

$\Rightarrow b \cdot s \leq m$ (zbog osobine (2)),

što dokazuje da je bs najmanja donja granica za skup $\{ba \mid a \in A\}$.

□

Elemente koji su "neposredno iznad" najmanjeg elementa 0 zovemo *atomima*.

Definicija 1.6 Za element b Booleove algebre $\mathcal{B}$ kažemo da je *atom* ako zadovoljava

$$(i)\ b \neq 0 \qquad (ii)\ (\forall x \in B)(x \leq b \Rightarrow (x = b \vee x = 0)).$$

□

Na osnovu definicije, za svaki element x i atom b važi $x \cdot b = b$ ili $x \cdot b = 0$. Na primer, u Booleovoj algebri $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, -, \emptyset, S)$ atomi su svi jednoelementni skupovi.

Teorema 1.12 U svakoj BA važi sledeće:

a) Ako su b i c različiti atomi onda $b \cdot c = 0$.

b) Ako je b atom i nije $b \leq x$ onda $b \leq \overline{x}$.

Dokaz.

a) Kako je b atom, $bc \leq b$ sledi da je $bc = b$ ili $bc = 0$. Element c je takođe atom, $bc \leq c$ pa $bc = c$ ili $bc = 0$. Ako bi bilo $bc \neq 0$, dobili bismo $bc = b = c$, što je kontradikcija sa $b \neq c$.

b) Kako ne važi $b \leq x$, onda je $b \cdot x \neq b$, tako da mora biti $b \cdot x = 0$. Odatle sledi $b \leq \overline{x}$.

□

Definicija 1.7 Za Booleovu algebru kažemo da je *atomična* ako za svaki $x \neq 0$ postoji atom b tako da je $b \leq x$.

□

Teorema 1.13 Svaka konačna BA je atomična.

Dokaz.

Neka je $x \neq 0$. Postoje dve mogućnosti: x je atom ili x nije atom. U prvom slučaju za traženi element b treba uzeti baš x. U drugom slučaju skup

$$A = \{ y \mid y \neq 0 \wedge y \neq x \wedge y \leq x \}$$

nije prazan. Kako se radi o konačnoj BA i skup A je konačan, te postoji $\inf A$. Iz same definicije atoma kao i skupa A sledi da je element $\inf A$ atom i da je $\inf A \leq x$.

□

2. ARITMETIKA RELACIONIH ALGEBRI

Ova glava sadrži pre svega "elementarni račun" sa binarnim relacijama. Prvo je detaljno dokazano nekoliko osobina binarnih relacija, da bi se izdvajanjem nekih od tih osobina i njihovim proglašenjem za aksiome definisala apstraktna klasa relacionih algebri. Posle navođenja glavnih modela (tzv. konkretne algebre relacija) dobijenog sistema aksioma, dokazuje se (takođe pomoću modela) da je taj sistem aksioma nezavisan. Glavni naglasak u ovoj glavi je na aritmetici ("računu") u teoriji relacionih algebri. Neke osobine se mogu dokazati direktno polazeći od aksioma, a za neke je potrebno proširiti razmatranja na Booleove algebre sa operatorima. U poslednjem delu ove glave nalaze se rezultati o klonu relacione algebre.

2.1 Neke osobine binarnih relacija

Jedan od karakterističnih zadataka matematike je da izdvoji, apstrahuje osobine konkretnih matematičkih sistema, da uoči zakonitosti, da otkrije opšte principe po kojima se ponašaju konkretni matematički objekti. Otkrivanjem opštih zakonitosti i principa matematičari uspevaju da sisteme koji se nalaze u "haosu" i koji su nepregledni i neuhvatljivi zbog mnoštva konkretnih (često nebitnih) detalja, svedu na "uredne", "čiste" matematičke objekte, koji se lakše kontrolišu i izučavaju.

Primetimo da su tako nastale mnoge poznate algebarske strukture. Na primer, grupe su nastale iz (konkretnih) grupa permutacija konačnog skupa, prsteni su ustvari apstraktna verzija prstena celih brojeva, a Booleove algebre su nastale izdvajanjem, apstrakcijom osobina skupova u odnosu na operacije $\cup, \cap, ^{-}$.

Izučavanjem binarnih relacija dolazimo do zaključka da neki identiteti važe bez obzira na kom skupu su relacije definisane. Ispostavilo se da polazeći od nekoliko identiteta, mnoge druge identitete možemo *izvesti samo na osnovu uobičajenih pravila zaključivanja, ne vodeći računa o tome da je reč o binarnim relacijama.* Drugim rečima, izdvajanjem nekih osobina binarnih relacija *za aksiome*, teorija binarnih relacija se *može deduktivno razvijati, kao formalna teorija, nezavisno od semantike.* Tako nastalu teoriju zovemo *aritmetika binarnih relacija.*

U ovom delu ćemo dokazati neke osobine binarnih relacija ; prvih pet osobina koje ćemo izdvojiti i dokazati poslužile su poljskom matematičaru Alfredu Tarskom kao aksiome za aritmetiku binarnih relacija.

"Prvih pet" osobina binarnih relacija

Kako su binarne relacije pre svega skupovi, onda na njih možemo "preneti" sve što znamo o skupovima.

Teorema 2.1 Neka je A neki skup, $\cup, \cap$ i $-$ uobičajene skupovne operacije (komplement je u odnosu na A^2). Tada je $\mathcal{B}(A^2) = (\mathcal{P}(A^2), \cup, \cap, -, \emptyset, A^2)$ Booleova algebra.

Dokaz.

Poznato je da je algebra $\mathcal{B}(S)$ Booleova algebra, za proizvoljan skup S, pa specijalno i za $S = A^2$.

□

Pored skupovnih operacija, na $\mathcal{P}(A^2)$ definisali smo operacije specifične za binarne relacije: kompoziciju $\circ$ i inverziju $^{-1}$. Sledeća teorema pokazuje da je operacija $\circ$ asocijativna, a dijagonalna relacija $\triangle_A$ igra ulogu jedinice (neutralnog elementa).

Teorema 2.2 Za svaki skup A, algebra $(\mathcal{P}(A^2), \circ, \triangle_A)$ jeste monoid.

Dokaz.

Dokažimo prvo da je $\triangle_A$ neutralni element operacije $\circ$ tj. da za sve $\rho \in \mathcal{P}(A^2)$ važi $\rho \circ \triangle_A = \triangle_A \circ \rho = \rho$. Prvo dokazujemo da je $\rho \circ \triangle_A \subseteq \rho$:

$$(x,y) \in \rho \circ \triangle_A \Rightarrow (\exists z \in A)((x,z) \in \rho \wedge (z,y) \in \triangle_A)$$

No, $(z, y) \in \triangle_A$ akko $z = y$, pa sledi da mora $(x, y) \in \rho$. Tako, $\rho \circ \triangle_A \subseteq \rho$. Obratno,

$$\begin{aligned}(x, y) \in \rho &\Rightarrow (x, y) \in \rho \wedge (y, y) \in \triangle_A \\ &\Rightarrow (\exists z \in A)((x,z) \in \rho \wedge (z,y) \in \triangle_A),\end{aligned}$$

jer za traženi z možemo uzeti element y. To znači da je $\rho \subseteq \rho \circ \triangle_A$, pa smo time dokazali da je $\rho \circ \triangle_A = \rho$. Jednakost $\triangle_A \circ \rho = \rho$ se dokazuje analogno. Dokažimo sada da je $\circ$ asocijativna operacija. Neka su ρ, σ, τ relacije skupa A. Tada, koristeći neke poznate zakone zaključivanja, tj. *valjane formule* (videti [Mil91]), imamo sledeće:

$$\begin{aligned}(x,y) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau \quad &\text{akko } (\exists z \in A)((x,z) \in \rho \circ \sigma \wedge (z,y) \in \tau) \\ &\text{akko } (\exists z \in A)\underline{((\exists t \in A)((x,t) \in \rho \wedge (t,z) \in \sigma) \wedge (z,y) \in \tau)}.\end{aligned}$$

Primetimo da podvučeni deo formule ima oblik : $(\exists t \in A)\varphi(x,t,z) \wedge \psi(z,y)$. Kako formula $\psi(z,y)$ ne sadrži promenljivu t, onda se kvantor $(\exists t \in A)$ može " izvući ispred zagrade " tj. podvučeni deo formule je ekvivalentan sa: $(\exists t \in A)(\varphi(x,t,z) \wedge \psi(z,y))$. Koristeći slične prelaze i u daljem, imamo sledeće:

$$\begin{aligned} & (\exists z \in A)(\exists t \in A)(((x,t) \in \rho \wedge (t,z) \in \sigma) \wedge (z,y) \in \tau) \\ \text{akko } & (\exists t \in A)(\exists z \in A)((x,t) \in \rho \wedge ((t,z) \in \sigma) \wedge (z,y) \in \tau)) \\ \text{akko } & (\exists t \in A)((x,t) \in \rho \wedge (\exists z \in A)((t,z) \in \sigma) \wedge (z,y) \in \tau)) \\ \text{akko } & (\exists t \in A)((x,t) \in \rho \wedge (t,y) \in \sigma \circ \tau) \\ \text{akko } & (x,y) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau),\end{aligned}$$

tj. $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$ što je i trebalo dokazati.

□

Neka je $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ neki grupoid. Za unarnu operaciju f skupa G kažemo da je *involucija grupoida* $\mathcal{G}$ ako za sve $x, y \in G$ važi: $f(x \cdot y) = f(y) \cdot f(x)$ i $f(f(x)) = x$.

Teorema 2.3 Operacija inverzije $^{-1}$ je involucija grupoida $(\mathcal{P}(A^2), \circ)$.

Dokaz.

Treba dokazati da za sve relacije ρ i σ skupa A važi $(\rho\circ\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\circ\rho^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in(\rho\circ\sigma)^{-1} &\text{ akko } (y,x)\in\rho\circ\sigma\\
&\text{ akko } (\exists z\in A)((y,z)\in\rho\wedge(z,x)\in\sigma)\\
&\text{ akko } (\exists z\in A)((z,y)\in\rho^{-1}\wedge(x,z)\in\sigma^{-1})\\
&\text{ akko } (\exists z\in A)((x,z)\in\sigma^{-1}\wedge(z,y)\in\rho^{-1})\\
&\text{ akko } (x,y)\in\sigma^{-1}\circ\rho^{-1},
\end{aligned}
$$

tj. $(\rho\circ\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\circ\rho^{-1}$. Dokažimo još da je $(\rho^{-1})^{-1}=\rho$:

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in(\rho^{-1})^{-1} &\text{ akko } (y,x)\in\rho^{-1}\\
&\text{ akko } (x,y)\in\rho,
\end{aligned}
$$

što je i trebalo dokazati.

□

Teorema 2.4 Za sve relacije ρ, σ i δ skupa A važi:

(a) $(\rho\cup\sigma)^{-1}=\rho^{-1}\cup\sigma^{-1}$

(b) $\rho\circ(\sigma\cup\delta)=(\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\delta)$.

Dokaz.

(a)
$$
\begin{aligned}
(x,y)\in(\rho\cup\sigma)^{1} &\text{ akko } (y,x)\in\rho\vee(y,x)\in\sigma\\
&\text{ akko } (x,y)\in\rho^{-1}\vee(x,y)\in\sigma^{-1}\\
&\text{ akko } (x,y)\in\rho^{-1}\cup\sigma^{-1}.
\end{aligned}
$$

(b) $(x,y)\in\rho\circ(\sigma\cup\delta)$ akko $(\exists z\in A)((x,z)\in\rho\wedge(z,y)\in\sigma\cup\delta)$

$$
\begin{aligned}
&\text{akko } (\exists z\in A)((x,z)\in\rho\wedge((z,y)\in\sigma\vee(z,y)\in\delta))\\
&\text{akko } (\exists z\in A)(((x,z)\in\rho\wedge(z,y)\in\sigma)\vee((x,z)\in\rho\wedge(z,y)\in\delta))\\
&\text{akko } (\exists z\in A)((x,z)\in\rho\wedge(z,y)\in\sigma)\vee(\exists z\in A)((x,z)\in\rho\wedge(z,y)\in\delta))\\
&\text{akko } (x,y)\in\rho\circ\sigma\vee(x,y)\in\rho\circ\delta\\
&\text{akko } (x,y)\in(\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\delta).
\end{aligned}
$$

□

Sledeća teorema govori o odnosu četiri operacije : inverzije, kompozicije, komplementa i preseka.

Teorema 2.5 Za sve relacije $\rho, \sigma \in \mathcal{P}(A^2)$ važi : $(\rho^{-1} \circ (\overline{\rho \circ \sigma})) \cap \sigma = \emptyset$.

Dokaz.

Pretpostavimo da postoji $(x,y) \in (\rho^{-1} \circ (\overline{\rho \circ \sigma})) \cap \sigma$ i dokažimo da nas ta pretpostavka dovodi do kontradikcije:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (\rho^{-1} \circ (\overline{\rho \circ \sigma}) \cap \sigma \ &\text{akko}\ (x,y) \in \rho^{-1} \circ (\overline{\rho \circ \sigma}) \wedge (x,y) \in \sigma \\
&\text{akko}\ (\exists z)((x,z) \in \rho^{-1} \wedge (z,y) \in \overline{\rho \circ \sigma}) \wedge (x,y) \in \sigma \\
&\text{akko}\ (\exists z)((z,x) \in \rho \wedge \neg (z,y) \in \rho \circ \sigma) \wedge (x,y) \in \sigma \\
&\text{akko}\ (\exists z)((z,x) \in \rho \wedge \neg (\exists t)((z,t) \in \rho \wedge (t,y) \in \sigma)) \wedge (x,y) \in \sigma \\
&\text{akko}\ (\exists z)((z,x) \in \rho \wedge (\forall t)((z,t) \notin \rho \vee (t,y) \notin \sigma)) \wedge (x,y) \in \sigma \\
&\text{akko}\ (\exists z)(\forall t)((z,x) \in \rho \wedge ((z,t) \in \rho \Rightarrow (t,y) \notin \sigma)) \wedge (x,y) \in \sigma.
\end{aligned}$$

Ako za element t uzmemo x, dobijamo da

$$(\exists z)((z,x) \in \rho \wedge ((z,x) \in \rho \Rightarrow (x,y) \notin \sigma)) \wedge (x,y) \in \sigma,$$

iz čega sledi $(x,y) \notin \sigma \wedge (x,y) \in \sigma$, što je kontradikcija. Sledi $(\rho^{-1} \circ (\overline{\rho \circ \sigma})) \cap \sigma = \emptyset$.

□

Još neke osobine binarnih relacija

U teoremama 2.3 i 2.4 videli smo odnos operacije $^{-1}$ prema kompoziciji odnosno prema uniji. Sledeća teorema govori o međusobnom odnosu operacija inverzije i komplementa odnosno inverzije i preseka.

Teorema 2.6 Za sve relacije ρ i σ skupa A važi:

(a) $(\overline{\rho})^{-1} = (\overline{\rho^{-1}})$;

(b) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad (x,y) \in (\overline{\rho})^{-1} \ &\text{akko}\ (y,x) \in \overline{\rho} \\
&\text{akko}\ (y,x) \in A^2 \wedge (y,x) \notin \rho
\end{aligned}$$

$$\text{akko } (x, y) \in A^2 \wedge (x, y) \notin \rho^{-1}$$

$$\text{akko } (x, y) \in (\overline{\rho^{-1}}).$$

(b) $(x,y) \in (\rho \cap \sigma)^{-1}$ akko $(y,x) \in \rho \cap \sigma$

$$\text{akko } (y,x) \in \rho \wedge (y,x) \in \sigma$$

$$\text{akko } (x,y) \in \rho^{-1} \wedge (x,y) \in \sigma^{-1}$$

$$\text{akko } (x,y) \in \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}.$$

□

Teorema 2.7 Za sve relacije ρ, σ i δ skupa A važi:

(a) $(\sigma \cup \delta) \circ \rho = (\sigma \circ \rho) \cup (\delta \circ \rho)$

(b) $\rho \circ (\sigma \cap \delta) \subseteq (\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \sigma)$

(c) $(\sigma \cap \delta) \circ \rho \subseteq (\sigma \circ \rho) \cap (\delta \circ \rho)$

Dokaz.

(a) Dokaz je analogan drugom delu dokaza T2.4.

(b) $(x, y) \in \rho \circ (\sigma \cap \delta)$ akko $(\exists z \in A)((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \sigma \cap \delta)$

akko $(\exists z \in A)((x, z) \in \rho \wedge ((z, y) \in \sigma \wedge (z, y) \in \delta))$

akko $(\exists z \in A)(((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \sigma) \wedge ((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \delta))$

sledi $(\exists z \in A)((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \sigma) \wedge (\exists z \in A)((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \delta))$

sledi $(x, y) \in \rho \circ \sigma \wedge (x, y) \in \rho \circ \delta$

sledi $(x, y) \in (\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \delta)$.

(c) Dokaz je analogan dokazu pod (b).

□

Primetimo da, u T 2.7 (b), (c) važi, u opštem slučaju, stroga inkluzija.

Primer 2.1 Neka je $A = \{a, b, c\}$, $\rho = \{(a, a), (a, c)\}$, $\sigma = \{(a, b)\}$, $\delta = \{(c, b)\}$. Onda $\sigma \cap \delta = \emptyset$, pa je $\rho \circ (\sigma \cap \delta) = \emptyset$. S druge strane, $\rho \circ \sigma = \{(a, b)\} = \rho \circ \delta$, pa je $(\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \delta) = \{(a, b)\}$. Tako, $\rho \circ (\sigma \cap \delta) \subseteq (\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \delta)$.

□

U opštem slučaju, ako je ρ binarna relacija nekog skupa S, a f n-arna operacija istog skupa, onda za f kažemo da se *slaže sa* ρ akko za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in S$ važi :

$$\text{ako } a_1 \rho b_1, a_2 \rho b_2, \ldots, a_n \rho b_n \text{ onda } f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \rho f(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Na primer, svaka operacija se slaže sa relacijom jednakosti (na proizvoljnom skupu).

Sledeća teorema nam pokazuje koje se od operacija $\cup, \cap, -, \circ, ^{-1}$ slažu, a koje ne, sa relacijom $\subseteq$.

Teorema 2.8 (1) Operacije $\cup$ i $\cap$ se slažu sa $\subseteq$. Ako su $A, B \subseteq S$ i $A \subseteq B$ onda $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

(2) Operacije $\circ$ i $^{-1}$ se slažu sa relacijom $\subseteq$.

Dokaz.

(1) Treba dokazati da za $A, B, C, D \in \mathcal{P}(S)$ važi

$$\text{ako } A \subseteq B \text{ i } C \subseteq D \text{ onda } A \cup C \subseteq B \cup D \text{ i } A \cap C \subseteq B \cap D,$$

što se lako dokazuje na osnovu definicije $\cup$, $\cap$ i $\subseteq$. Dalje, ako $A \subseteq B$ onda

$$\begin{aligned} x \in \overline{B} \quad & \text{akko } x \in S \wedge x \notin B \\ & \text{onda } x \in S \wedge x \notin A \\ & \text{onda } x \in \overline{A}, \text{ tj. } \overline{B} \subseteq \overline{A}. \end{aligned}$$

(2) Neka su $\rho, \sigma, \delta, \tau \in \mathcal{P}(A^2)$, i neka $\rho \subseteq \sigma$, $\delta \subseteq \tau$. Tada

$$\begin{aligned} (x,y) \in \rho \circ \delta \quad & \text{akko } (\exists z \in A)((x,z) \in \rho \wedge (z,y) \in \delta) \\ & \text{onda } (\exists z \in A)((x,z) \in \sigma \wedge (z,y) \in \tau) \\ & \text{onda } (x,y) \in \sigma \circ \tau, \text{ tj. } \rho \circ \delta \subseteq \sigma \circ \tau. \end{aligned}$$

Slično, $(x,y) \in \rho^{-1}$ akko $(y,x) \in \rho$, sledi $(y,x) \in \sigma$ tj. $(x,y) \in \sigma^{-1}$, što daje $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.

□

2.2 Relacione algebre

Fundamente aritmetike binarnih relacija postavio je C.S. Peirce. U nekoliko radova, koje je publikovao izmedu 1870. i 1882. godine on je uveo i precizirao sve osnovne pojmove teorije relacija i formulisao njene osnovne zakone. Peirceov rad je nastavljen i proširen na veoma potpun i sistematičan način od strane E. Schrödera. Njegova knjiga *"Algebra und Logic der Relative"*, koja se pojavila 1885. godine kao treći volumen publikacije *"Vorlesungen uber die Algebra der Logic"*, sadrži i čitavo bogatstvo nerešenih problema. Čudno je da Peirce i Schröder nisu imali puno sledbenika. Teorija relacija u knjizi *Principia mathematika* A. N. Whiteheada i B. Russela se spominje samo u vezi sa drugim delovima logike.

Definicija relacione algebre

Za početak modernog apstraktnog, aksiomatskog razvoja relacionih algebri smatra se godina 1941. i rad Tarskog [Ta 41]. On je u tom radu, pored aksioma aritmetike relacija, postavio i nekoliko metateorijskih pitanja koja su odredila pravac daljih istraživanja. Originalne aksiome Tarskog nisu sve bile u obliku identiteta. Aksiomatski sistem, koji se danas koristi (u kome su sve aksiome identiteti), prvi put su objavili L. Chin i A. Tarski 1951. godine.

Definicija 2.1 *Relaciona algebra* jeste algebra $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,\circ,1',^{-1})$ tipa $(2,2,1,0,0,2,0,1)$ koja zadovoljava sledeće aksiome:

(R 1) $(A,+,\cdot,-,0,1)$ je Booleova algebra;

(R 2) $(A,\circ,1')$ je monoid;

(R 3) Operacija $^{-1}$ je involucija semigrupe $(A,\circ)$ tj. za sve $x,y\in A$ važi

$$(x\circ y)^{-1}=y^{-1}\circ x^{-1},\ (x^{-1})^{-1}=x\ ;$$

(R 4) Za sve $x,y\in A$ važi

$$(x+y)^{-1}=x^{-1}+y^{-1}$$

$$x\circ(y+z)=(x\circ y)+(x\circ z)\ ;$$

(R 5) Za sve $x,y\in A$ važi

$$(x^{-1}\circ(\overline{x\circ y}))\cdot y=0\ .$$

□

Klasu relacionih algebri obeležavaćemo sa RA. U slučaju kad ne može doći do zabune, oznaku RA koristimo i za obeležavanje *jedne* relacione algebre.

Svaka relaciona algebra $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, \circ, 1', ^{-1})$ " sadrži u sebi " Booleovu algebru $\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A}) = (A, +, \cdot, -, 0, 1)$ koju zovemo *Booleov redukt od* $\mathcal{A}$. Za element a kažemo da je *atom* relacione algebre $\mathcal{A}$ ako je a atom redukta $\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A})$. Skup svih atoma od $\mathcal{A}$ označavamo sa $\mathrm{At}(\mathcal{A})$. Za relacionu algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je *atomična* (odnosno *kompletna*) ako je odgovarajući Booleov redukt atomična(odnosno kompletna) Booleova algebra. Kako su sve konačne BA atomične (videti T1.13) i kompletne (po definiciji kompletnosti) onda su i *sve konačne RA atomične i kompletne.* U delu 3.1 ćemo videti da svaka konačna BA ima 2^n elemenata ($n \in \mathbb{N}$), iz čega zaključujemo da isto važi i za relacione algebre.

Definicija 2.2 Za relacionu algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je

1) *komutativna* ako je $x \circ y = y \circ x$, za sve $x, y \in A$;

2) *simetrična* ako je $x^{-1} = x$, za sve $x \in A$;

3) *Booleova* ako je $x \circ y = x \cdot y$, za sve $x, y \in A$;

4) *integralna* ako $x \circ y \neq 0$, za sve $x \neq 0, y \neq 0, x, y \in A$.

□

Primetimo da je svaka simetrična RA komutativna. Zaista, ako je $\mathcal{A} \in \mathrm{RA}$ simetrična, onda na osnovu aksiome (R3) dobijamo da za sve $x, y \in A$ važi

$$x \circ y = (x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1} = y \circ x.$$

Takođe, svaka Booleova relaciona algebra je komutativna: $x \circ y = x \cdot y = y \cdot x = y \circ x$.

Dalje, na svakoj Booleovoj algebri $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ možemo definisati operacije $\circ$, $1'$, $^{-1}$ tako da algebra $(B, +, \cdot, -, 0, 1, \circ, 1', ^{-1})$ postane relaciona algebra. Jednostavno, dodatne operacije definišemo sa : $x \circ y = x \cdot y$, $1' = 1$, $x^{-1} = x$. Tako dobijena algebra je Booleova relaciona algebra.Kasnije (videti Osobinu 2.18) ćemo dokazati da su u svim Booleovim relacionim algebrama operacije $\circ$, $1'$ i $^{-1}$baš tako definisane.

Konkretne algebre relacija

Aksiome relacione algebre nastale su apstrakcijom nekih osobina binarnih relacija. Zbog toga važi sledeća teorema:

Teorema 2.9 Neka su $\cup, \cap, -, \circ, ^{-1}$ uobičajene operacije na skupu svih binarnih relacija $\mathcal{P}(A^2)$ skupa A (komplement je u odnosu na punu relaciju A^2). Tada je $(\mathcal{P}(A^2), \cup, \cap, -, \emptyset, A^2, \circ, \Delta_A, ^{-1})$ relaciona algebra.

Dokaz.

Videti teoreme 2.1– 2.5 .

□

Definicija 2.3 Neka su $\cup, \cap, -, \circ, ^{-1}$ uobičajene operacije na skupu svih binarnih relacija $\mathcal{P}(A^2)$ skupa A (komplement je u odnosu na punu relaciju A^2). Tada algebru $\mathcal{R}(A) = (\mathcal{P}(A^2), \cup, \cap, -, \emptyset, A^2, \circ, \Delta_A, ^{-1})$ zovemo *puna relaciona algebra.* Svaku podalgebru pune relacione algebre zovemo *prava relaciona algebra.*

□

Primetimo da pune odnosno prave relacione algebre u opštem slučaju nisu ni simetrične, ni komutativne, ni integralne.

Nosač pune relacione algebre $\mathcal{R}(A)$ je $\mathcal{P}(A^2)$. Uzmimo sada umesto pune relacije A bilo koju relaciju ekvivalencije ρ skupa A. Familija $\mathcal{P}(\rho)$ svih relacija $\sigma \subseteq \rho$ takođe je nosač relacione algebre.

Teorema 2.10 Neka je ρ relacija ekvivalencije skupa A; $\cup, \cap, \circ, ^{-1}$ uobičajene operacije među relacijama , a $\bar{\sigma}$, komplement relacije σ u odnosu na ρ (tj. $\bar{\sigma} = \rho \setminus \sigma$). Tada je algebra $\mathcal{E}(\rho) = (\mathcal{P}(\rho), \cup, \cap, -, \emptyset, \rho, \circ, \Delta_A, ^{-1})$ relaciona algebra. Svaka podalgebra algebre $\mathcal{E}(\rho)$ jeste relaciona algebra.
Dokaz.

Prvo dokažimo da je skup $\mathcal{P}(\rho)$ zatvoren u odnosu na operacije $\cup, \cap, \circ, ^{-1}$. Neka su σ i Θ relacije skupa A tako da je $\sigma \subseteq \rho$, $\Theta \subseteq \rho$. Tada na osnovu T2.8 (a)dobijamo $\sigma \cap \Theta \subseteq \rho \cap \rho = \rho$ i $\sigma \cup \Theta \subseteq \rho \cup \rho = \rho$, pa je $\sigma \cap \Theta \subseteq \rho$, odnosno $\sigma \cup \Theta \subseteq \rho$. Na osnovu T2.8(b) dobijamo da je $\sigma \circ \Theta \subseteq \rho \circ \rho$, a kako je $\rho \circ \rho = \rho$ (jer je ρ relacija ekvivalencije), sledi $\sigma \circ \Theta \subseteq \rho$. Kako se i operacija $^{-1}$ slaže sa inkluzijom $\subseteq$, iz pretpostavke $\sigma \subseteq \rho$ sledi $\sigma^{-1} \subseteq \rho^{-1}$,pa zbog $\rho = \rho^{-1}$ dobijamo $\sigma^{-1} \subseteq \rho$. Tako, skup $\mathcal{P}(\rho)$ je zatvoren u odnosu na operacije $\cup, \cap$, $\circ$ i $^{-1}$. Po definiciji koplementa direktno sledi da je $\mathcal{P}(\rho)$ zatvoren i u odnosu na komplementiranje. Dalje, istaknuti elementi $\emptyset$, ρ i Δ_A su elementi od $\mathcal{P}(\rho)$, tako da je $\mathcal{E}(\rho)$ zaista algebra. Na kraju dokažimo da algebra $\mathcal{E}(\rho)$ zadovoljava sve aksiome relacione algebre. No, kako je $\mathcal{P}(\rho)\subseteq\mathcal{P}(A^2)$, a identiteti u aksiomama (R1) −(R5) važe za sve elemente (šireg) skupa $\mathcal{P}(A^2)$, onda oni važe i za elemente skupa $\mathcal{P}(\rho)$. Sledi da je $\mathcal{E}(\rho)$ relaciona algebra. Kako su relacione algebre definisane identitetima, onda je svaka podalgebra relacione algebre ponovo relaciona algebra.

□

Definicija 2.4 Podalgebre algebre oblika $\mathcal{E}(\rho)$, gde je ρ relacija ekvivalencije nekog skupa A, zovemo *konkretne algebre relacija.*

□

Tako, svaka puna kao i svaka prava relaciona algebra jeste konkretna algebra relacija u smislu definicije D2.4. Teorema 2.11 dokazuje da su konkretne algebre relacija, na neki način, *najopštije algebre binarnih relacija.*

Teorema 2.11 Neka je $B\subseteq\mathcal{P}(A^2)$ neka familija binarnih relacija i $E\subseteq A^2$, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

(a) $(B,\cup,\cap,-,\emptyset,E)$ je Booleova algebra (komplement je u odnosu na E);

(b) Skup B je zatvoren u odnosu na operacije $\circ$, $^{-1}$ i sadrži relaciju $\triangle_A$.

Tada postoji relacija ekvivalencije ρ na A tako da je $(B,\cup,\cap,-,\emptyset,E,\circ,\triangle_A,^{-1})$ podalgebra od $\mathcal{E}(\rho)$.

Dokaz.

Dokažimo da za ρ možemo uzeti jedinicu Booleovog dela, E. Naravno, pošto je $\sigma\cap E=\sigma$, onda su sve relacije σ iz skupa B podskupovi od E. Dokažimo da je E relacija ekvivalencije.

Kako je $\triangle_A\in B$, onda $\triangle_A\subseteq E$ pa je E refleksivna. Familija B je po pretpostavci zatvorena u odnosu na operaciju $^{-1}$, pa je $E^{-1}\in B$. Sledi $E^{-1}\subseteq E$, što dokazuje da je E simetrična. Zatvorenost u odnosu na $\circ$ daje $E\circ E\in B$, tj. $E\circ E\subseteq E$, dakle, E je tranzitivna. Tako, E je relacija ekvivalencije. Pošto je $B\subseteq\mathcal{P}(E)$ i B je zatvoren u odnosu na sve operacije $\cup,\cap,-,\circ,^{-1}$ i sadrži istaknute elemente $\emptyset,E$, $\triangle_A$, onda je B podalgebra od $\mathcal{E}(\rho)$, za $\rho=E$.

□

2.3 Nezavisnost sistema aksioma relacione algebre

U delu 2.2 smo videli da je svaka algebra relacija relaciona algebra. Sve što uspemo da dokažemo u apstraktnoj teoriji relacionih algebri, važiće za *sve algebre relacija*. Time postižemo jedan od ciljeva zbog kojih smo krenuli u aksiomatizaciju teorije binarnih relacija. Radeći u apstraktnoj teoriji relacionih algebri dobijamo one osobine koje važe na *svim* algebrama relacija, dakle za sve binarne relacije.

Drugo pitanje koje se nameće jeste da li među predloženim aksiomama ima "suvišnih" ? Da li možda neka od njih sledi iz ostalih ? Kad bi to bio slučaj, takve aksiome (kažemo da su one "zavisne" od ostalih) bi smo mogli izbaciti i smanjeni sistem aksioma bi bio ekvivalentan (iste moći) sa polaznim. No, u sledećim teoremama ćemo videti da naš sistem ne možemo smanjiti tj. da je on *nezavisan*. Napomenimo da u našem razmatranju svaku od aksioma R1, R2, R3, R4, R5 smatramo za *jednu aksiomu* i nećemo se baviti njenim ekvivalentnim oblicima. (U literaturi je dosta prostora posvećeno izučavanju različitih sistema aksioma za Booleove algebre. Naša aksioma R1 je jedna moguća definicija BA i taj sistem aksioma za BA *nije nezavisan*.)

Kako, u opštem slučaju, dokazati nezavisnost jedne aksiome od ostalih? Koristićemo se tzv. *metodom kontraprimera*. Naime, kad bi recimo aksioma R3 sledila iz ostalih, to bi značilo da u svakom modelu (algebri) gde važe R1,R2,R4,R5 mora važiti i R3. Da to nije slučaj dokazuje se konstrukcijom modela (kontraprimera) u kome važe sve aksiome, sem R3.

U daljem ćemo prezentirati pet kontraprimera, koji nam pokazuju da su svih pet aksioma relacione algebre nezavisne od ostalih.

Kako će svi modeli za nosač imati skup $\mathcal{P}(\{a,b\})$ ili neki njegov podskup, umesto $\{a\},\{b\}$, i $\{a,b\}$ pisaćemo, redom, a, b odnosno ab (tj. izostavljaćemo zagrade).

Nezavisnost aksiome R1 od ostalih aksioma

Neka je $A=\{\emptyset,a,ab\}$, "+" unija skupova, "·" presek skupova, "-" data sa $\bar{x}=\emptyset$, "0" prazan skup, "1" skup ab, " $\circ$ " presek skupova, "1'" skup ab, a "$^{-1}$"

data sa $x^{-1}=x$.

Pokažimo da na ovom modelu važe aksiome R2 – R5, i $\neg$R1.

R2. $(A,\cap,ab)$ je monoid, pa je i $(A,\circ,1)$ monoid.

R3. $(x\circ y)^{-1}=x\circ y=x\cap y=y\cap x=y\circ x=y^{-1}\circ x^{-1}$

$(x^{-1})^{-1}=x^{-1}=x$

R4. $(x+y)^{-1}=x+y=x^{-1}+y^{-1}$

$x\circ(y+z)=x\cap(y\cup z)=(x\cap y)\cup(x\cap z)=(x\circ y)+(x\circ z)$

R5. $(x^{-1}\circ(\overline{x\circ y}))\cdot y=(x^{-1}\circ\emptyset)\cdot y=(x\circ\emptyset)\cdot y=(x\cap\emptyset)\cap y=\emptyset$.

$\neg$R1 važi jer je $|A|=3$ a konačne Booleove algebre imaju 2^nelemenata, $n\geq 0$.

Nezavisnost aksiome R2 od ostalih aksioma

Neka je $A=\{\emptyset,a,b,ab\}$, "$+$" unija skupova, "$\cdot$" presek skupova, "$-$" komplement skupa u odnosu na ab (tj. $\bar{x}=ab\setminus x$), "0" prazan skup, "1" skup ab, "$\circ$" data sa $x\circ y=\emptyset$, "$1'$" prazan skup, a "$^{-1}$" data sa $x^{-1}=x$.

Pokažimo da na ovom modelu važe aksiome R1, R3, R4, i R5, i $\neg$R2.

R1. Očigledno je $(A,+,\cdot,-,0,1)$ Booleova algebra.

R3. $(x^{-1})^{-1}=x^{-1}=x$

$(x\circ y)^{-1}=x\circ y=\emptyset=y\circ x=y^{-1}\circ x^{-1}$

R4. $(x+y)^{-1}=x+y=x^{-1}+y^{-1}$

$x\circ(y+z)=\emptyset=\emptyset\cap\emptyset=\emptyset+\emptyset=(x\circ y)+(x\circ z)$

R5. $(x^{-1}\circ(\overline{x\circ y}))\cdot y=\emptyset\cdot y=\emptyset\cap y=\emptyset=0$

$\neg$R2. Važi: "$\circ$" nema jedinicu, pa $(A,\circ,1')$ ne može biti monoid.

Nezavisnost aksioma R3 od ostalih aksioma

Neka je $A=\{\emptyset,a,b,ab\}$, "$+$" unija skupova, "$\cdot$" presek skupova, "$-$" komplement skupa u odnosu na ab (tj. $\bar{x} = ab \setminus x$), "0" prazan skup, "1" skup ab "$\circ$" presek skupova, "1'" skup ab, a "$^{-1}$" data sa $x^{-1} = \emptyset$.

Pokažimo da na ovom modelu važe aksiome R1, R2, R4 i R5, i $\neg$R3.

R1. Očigledno je $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$ Booleova algebra.

R2. Očigledno je $(A, \circ, 1')$ monoid.

R4. $(x+y)^{-1} = \emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset + \emptyset = x^{-1} + y^{-1}$

$$x \circ (y+z) = x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) = (x \circ y) + (x \circ z)$$

R5. $(x^{-1} \circ (\overline{x \circ y})) \cdot y = (\emptyset \cap (\overline{x \cap y})) \cap y = \emptyset = 0$

$\neg$R3. Ne važi $(x^{-1})^{-1} = x$: $((ab)^{-1})^{-1} = \emptyset \neq ab$.

(Primetimo da $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$ važi).

Nezavisnost aksiome R4 od ostalih aksioma

Neka je $A = \{\emptyset, a, b, ab\}$, "+" unija skupova, "$\cdot$" presek skupova, "$-$" komplement skupa u odnosu na ab (tj. $\bar{x} = ab \setminus x$), "0" prazan skup, "1" skup ab, "$\circ$" tzv. simetrična razlika skupova $x \circ y = x \nabla y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$, "1'" prazan skup, a "$^{-1}$" data sa $x^{-1} = x$.

Pokažimo da na ovom modelu važe aksiome R1, R2, R3 i R5 i $\neg$R4.

R1. Očigledno je $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$ Booleova algebra.

R2. Očigledno je $(A, \circ, 1')$ monoid (simetrična razlika skupova je asocijativna operacija, a $\emptyset$ joj je neutralni element).

R3. $(x^{-1})^{-1} = x^{-1} = x$

$$(x \circ y)^{-1} = x \circ y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x) = (y \setminus x) \cup (x \setminus y) = y \circ x = y^{-1} \circ x^{-1}$$

R5. $(x^{-1} \circ (\overline{x \circ y})) \cdot y = (x \nabla (\overline{x \nabla y})) \cap y = \emptyset = 0$

(jer za proizvoljan skup U važi: ako je $x, y \subseteq U$ onda $(x \nabla (U \setminus (x \nabla y))) \cap y = \emptyset$).

$\neg$R4. Za $x = ab$, $y = a$, $z = b$, distributivnost "$\circ$" prema "+" ne važi:

$$x \circ (y+z) = ab \nabla (a \cup b) = ab \nabla ab = \emptyset,$$

$$(x \circ y) + (x \circ z) = (ab \nabla a) \cup (ab \nabla b) = b \cup a = ab \neq \emptyset,$$

(mada $(x+y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$ važi, jer je $x^{-1} = x$).

Nezavisnost aksiome R5 od ostalih aksioma

Neka je $A = \{\emptyset, a, b, ab\}$, " + " unija skupova, " $\cdot$ " presek skupova, " - " komplement skupa u odnosu na ab (tj. $\bar{x} = ab \setminus x$), "0" prazan skup, "1" skup ab, "$\circ$" presek skupova, "1'" skup ab, a "$^{-1}$" data sa: $\emptyset^{-1} = \emptyset$, $(ab)^{-1} = ab$, $a^{-1} = b$, $b^{-1} = a$.

Pokažimo da na ovom modelu važe aksiome R1 – R4 i $\neg$R5.

R1. Očigledno je $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$ Booleova algebra.

R2. Očigledno je $(A, \circ, 1')$ monoid.

R3. Da važi $(x^{-1})^{-1} = x$, vidi se iz ove tablice:

x	$\emptyset$	a	b	ab
x^{-1}	$\emptyset$	b	a	ab
$(x^{-1})^{-1}$	$\emptyset$	a	b	ab

Da važi $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$ vidi se iz ove tablice:

$(x \circ y)^{-1}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	b	$\emptyset$	b	$\emptyset$	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$	b	a	ab
$x \circ y$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	a	$\emptyset$	a	$\emptyset$	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$	a	b	ab
x	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	a	a	a	a	b	b	b	b	ab	ab	ab	ab
y	$\emptyset$	a	b	ab	$\emptyset$	a	b	ab	$\emptyset$	a	b	ab	$\emptyset$	a	b	ab
y^{-1}	$\emptyset$	b	a	ab	$\emptyset$	b	a	ab	$\emptyset$	b	a	ab	$\emptyset$	b	a	ab
x^{-1}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	b	b	b	b	a	a	a	a	ab	ab	ab	ab
$y^{-1} \circ x^{-1}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	b	$\emptyset$	b	$\emptyset$	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$	b	a	ab

R4. $x \circ (y + z) = x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) = (x \circ y) + (x \circ z)$

Da važi $(x + y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$ vidi se iz ove tablice:

$(x+y)^{-1}$	$\emptyset$	b	a	ab	b	b	ab	ab	a	ab	a	ab	ab	ab	ab	ab
$x+y$	$\emptyset$	a	b	ab	a	a	ab	ab	b	ab	b	ab	ab	ab	ab	ab
x	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	a	a	a	a	b	b	b	b	ab	ab	ab	ab
y	$\emptyset$	a	b	ab	$\emptyset$	a	b	ab	$\emptyset$	a	b	ab	$\emptyset$	a	b	ab
x^{-1}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	b	b	b	b	a	a	a	a	ab	ab	ab	ab
y^{-1}	$\emptyset$	b	a	ab	$\emptyset$	b	a	ab	$\emptyset$	b	a	ab	$\emptyset$	b	a	ab
$x^{-1}+y^{-1}$	$\emptyset$	b	a	ab	b	b	ab	ab	a	ab	a	ab	ab	ab	ab	ab

$\neg$R5. Za $x=a$ i $y=b$ je

$$(x^{-1} \circ (\overline{x \circ y})) \cdot y = (a^{-1} \circ (\overline{a \circ b})) \cdot b = b \cap \overline{a \cap b} \cap b = b \cap \bar{\emptyset} \cap b$$

$$= b \cap ab \cap b = b \neq 0$$

□

2.4 Aritmetika relacionih algebri

U prethodnom paragrafu smo videli da su aksiome za RA nezavisne. Koliko je taj sistem aksioma "jak" ? Da li smo izabrali "prave" , "bitne" osobine relacija i da li smo izdvojili dovoljno ?

Sledeća tvrdjenja će nam pokazati da mnoge poznate osobine binarnih relacija možemo izvesti samo iz aksioma koje je predložio Tarski. Neka se čitalac sam uveri da sve osobine (jednakosti) binarnih relacija, sa kojima se dosad sretao, može (sa manje ili više truda) izvesti samo iz aksioma Tarskog . Dužni smo reći da ipak postoje identiteti koji važe na algebrama relacija, a koji nisu posledice aksioma relacionih algebri. No, pošto su oni vrlo "veštački" i komplikovani, uvereni smo da su oni daleko od onih identiteta koji čoveku prvo "padnu na pamet". Njih ćemo razmatrati u četvrtom delu knjige.

Evo sada osobina koje važe u svakoj relacionoj algebri.

Osobina 2.1 $\quad 0^{-1}=0.$

Dokaz.

U svakoj relacionoj algebri važi $(x+y)^{-1}=x^{-1}+y^{-1}$. Neka je $x=0^{-1}, y=0$. Tada

$$(0^{-1}+0)^{-1}=(0^{-1})^{-1}+0^{-1} \quad \Rightarrow \quad 0=0+0^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad 0=0^{-1}$$

□

Osobina 2.2 $1^{-1}=1$.

Dokaz.

Uzmimo u identitetu $(x+y)^{-1}=x^{-1}+y^{-1}$ da je $x=1^{-1}$, $y=1$. Tada

$$(1^{-1}+1)^{-1}=(1^{-1})^{-1}+1^{-1} \quad \Rightarrow \quad 1^{-1}=1+1^{-1}=1.$$

□

Osobina 2.3 $(1')^{-1}=1'$.

Dokaz.

Stavimo $x=(1')^{-1}$ i $y=1'$ u identitetu $(x\circ y)^{-1}=y^{-1}\circ x^{-1}$. Tada

$$((1')^{-1}\circ 1')^{-1}=(1')^{-1}\circ 1' \quad \Rightarrow \quad 1'=(1')^{-1}.$$

□

Svaka relaciona algebra ima "Booleovski deo". Tako, u svakoj relacionoj algebri imamo indukovanu relaciju poretka $\leq$.

Osobina 2.4 Operacija $^{-1}$ se slaže sa $\leq$.

Dokaz.

$$x\leq y \Rightarrow \quad x+y=y \quad \Rightarrow \quad (x+y)^{-1}=y^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad x^{-1}+y^{-1}=y^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad x^{-1}\leq y^{-1}.$$

□

Osobina 2.5 Neka je $0'=\overline{1'}$. Tada $(0')^{-1}=0'$.

Dokaz.

U svakoj relacionoj algebri važi $x^{-1}\circ(\overline{x\circ y})\leq\overline{y}$. Uzmimo $x=0'$, $y=1'$. Tada imamo

$$(0')^{-1}\circ(\overline{0'\circ 1'})\leq 0' \Rightarrow (0')^{-1}\circ 1'\leq 0' \Rightarrow (0')^{-1}\leq 0'.$$

Na osnovu prethodne osobine imamo da je $0' \leq (0')^{-1}$, pa sledi $0' = (0')^{-1}$.

□

Osobina 2.6 $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$

Dokaz.

Kako se operacija $^{-1}$ slaže sa $\leq$ imamo da

$$xy \leq x \Rightarrow (xy)^{-1} \leq x^{-1} \text{ i } \quad xy \leq y \Rightarrow (xy)^{-1} \leq y^{-1}.$$

Tako, $(xy)^{-1}$ jeste donje ograničenje za x^{-1} i y^{-1}. Dokažimo da je $(xy)^{-1}$ najveće donje ograničenje za x^{-1} i y^{-1}. Neka je $z \leq x^{-1}$ i $z \leq y^{-1}$. Tada

$$z^{-1} \leq x \text{ i } z^{-1} \leq y \;\Rightarrow\; z^{-1} \leq xy \;\Rightarrow\; z \leq (xy)^{-1},$$

što je i trebalo dokazati.

□

Osobina 2.7 $\quad (\bar{x})^{-1} = (\overline{x^{-1}})$.

Dokaz.

$$(\bar{x})^{-1} \cdot x^{-1} = (\bar{x} \cdot x)^{-1} = 0^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\bar{x})^{-1} \leq (\overline{x^{-1}}).$$

Ako za x uzmemo x^{-1}, dobijamo

$$\left((\overline{x^{-1}})\right)^{-1} \leq \bar{x} \;\Rightarrow\; (\overline{x^{-1}}) \leq (\bar{x})^{-1},$$

pa smo time dokazali traženu jednakost.

□

Osobina 2.8 $\quad 1 \circ 1 = 1.$

Dokaz.

$1 \circ 1 = 1 \circ (1 + x) = (1 \circ 1) + (1 \circ x) \;\Rightarrow\; 1 \circ x \leq 1 \circ 1$, za svako x. Ako je $x = 1'$, dobijamo

$$1 \circ 1' \leq 1 \circ 1 \;\Rightarrow\; 1 \leq 1 \circ 1 \;\Rightarrow\; 1 = 1 \circ 1.$$

□

Osobina 2.9 $0 \circ 0 = 0$.

Dokaz.

Za svaki element x važi

$$0 \circ x = 0 \circ (x+0) = (0 \circ x) + (0 \circ 0) \quad \Rightarrow 0 \circ 0 \leq 0 \circ x.$$

Ako je $x = 1'$, dobijamo

$$0 \circ 0 \leq 0 \circ 1' \;\Rightarrow\; 0 \circ 0 \leq 0 \;\Rightarrow\; 0 \circ 0 = 0.$$

□

Aksioma (R4) kaže, izmedu ostalog, da je operacija $\circ$ levo distributivna u odnosu na $+$. Dokažimo da desna distributivnost takode važi u svakoj relacionoj algebri.

Osobina 2.10 $(x+y) \circ z = (x \circ z) + (y \circ z)$.

Dokaz.

$$\begin{aligned}
(x+y) \circ z = \left(((x+y) \circ z)^{-1}\right)^{-1} &= \left(z^{-1} \circ (x+y)^{-1}\right)^{-1} \\
&= \left(z^{-1} \circ (x^{-1} + y^{-1})\right)^{-1} \\
&= \left((z^{-1} \circ x^{-1}) + (z^{-1} \circ y^{-1})\right)^{-1} \\
&= (z^{-1} \circ x^{-1})^{-1} + (z^{-1} \circ y^{-1})^{-1} \\
&= \left((x^{-1})^{1} \circ (z^{-1})^{-1}\right) + \left((y^{-1})^{-1} \circ (z^{-1})^{-1}\right) \\
&= (x \circ z) + (y \circ z).
\end{aligned}$$

□

Osobina 2.11 Operacije $\circ$ i $^{-1}$ se slažu sa relacijom $\leq$.

Dokaz.

Neka je $x \leq y$ i $z \leq u$. Tada $x+y=y$ i $z+u=u$, pa imamo

$$y \circ z = (x+y) \circ z = (x \circ z) + (y \circ z) \quad \Rightarrow \quad x \circ z \leq y \circ z,$$

$$y \circ u = y \circ (z+u) = (y \circ z) + (y \circ u) \quad \Rightarrow \quad y \circ z \leq y \circ u.$$

Zbog tranzitivnosti relacije $\leq$ dobijamo $x \circ z \leq y \circ u$.

Ako je sada $x \leq y$, dokažimo da je $x^{-1} \leq y^{-1}$. Koristeći Osobinu 2.6 dobijamo $x y = x \Rightarrow (x y)^{-1} = x^{-1} \Rightarrow x^{-1} y^{-1} = x^{-1} \leq y^{-1}$.

Osobina 2.12 $\quad 1' \leq x \;\Rightarrow\; 1 \circ x \circ 1 = 1.$

Dokaz.

Jasno, $1 \circ x \circ 1 \leq 1$. Obratno, zbog Osobina 2.8 i 2.11 imamo

$$1 = 1 \circ 1 = 1 \circ 1' \circ 1 \leq 1 \circ x \circ 1$$

Osobina 2.13 Sledeći uslovi su ekvivalentni u svakoj relacionoj algebri:

$$(a \circ b)c = 0, \quad (a^{-1} \circ c)b = 0, \quad (c \circ b^{-1})a = 0.$$

Dokaz.

Dokažimo prvo da je $c \leq \overline{a \circ b}$ akko $a^{-1} \circ c \leq \overline{b}$.

$(\Rightarrow)$ $\quad c \leq \overline{a \circ b} \;\Rightarrow\; a^{-1} \circ c \leq a^{-1} \circ (\overline{a \circ b}) \leq \overline{b}$ $\qquad$ (zbog aksiome (R5))

$\qquad \Rightarrow\; a^{-1} \circ c \leq \overline{b}$ $\qquad$ (zbog tranzitivnosti $\leq$).

$(\Leftarrow)$ Prema prethodnom, ako za a uzmemo a^{-1}, dobijamo

$$c \leq \overline{a^{-1} \circ b} \Rightarrow a \circ c \leq \overline{b} \quad \text{tj.} \quad \overline{c} \geq a^{-1} \circ b \Rightarrow \overline{a \circ c} \geq b.$$

Ako sada zamenimo c sa b a b sa c:

$$\overline{b} \geq a^{-1} \circ c \;\Rightarrow\; \overline{a \circ b} \geq c,$$

što je drugi smer ekvivalencije. Tako smo dobili $c \leq \overline{a \circ b}$ akko $a^{-1} \circ c \leq \overline{b}$, tj.

(1) $\quad (a \circ b)c = 0$ akko $(a^{-1} \circ c)b = 0.$

Dalje, zbog Osobina 2.1 i 2.6. imamo

$$(a \circ b)c = 0 \text{ akko } (b^{-1} \circ a^{-1})c^{-1} = 0,$$

što je zbog (1) ekvivalentno sa $(b \circ c^{-1})a^{-1} = 0$. Ako sada ponovo primenimo Osobinu 2.6, dobijamo konačno da je

$$(a \circ b)c=0 \text{ akko } (c \circ b^{-1})a=0,$$

što je i trebalo dokazati.

□

Osobina 2.14 $0 \circ x = x \circ 0 = 0.$

Dokaz.

Prema prethodnoj osobini, imamo: $(a \circ b)c=0$ akko $(a^{-1} \circ c)b=0$, pa ako uzmemo da je $a=x^{-1}$, $b=1$, $c=0$, dobijamo

$$(x^{-1} \circ 1)0=0 \text{ akko } (x \circ 0)1=0.$$

Kako je leva strana ekvivalencije tačna, sledi $x \circ 0=0$. Slično, iz ekvivalencije

$$(a \circ b)c=0 \text{ akko } (c \circ b^{-1})a=0$$

dobijamo da je

$$(1 \circ x^{-1})0=0 \quad \text{akko} \quad (0 \circ x)1=0,$$

iz čega sledi $0 \circ x=0$.

□

Osobina 2.15 $(x \circ y)z=(x \circ ((x^{-1} \circ z)y))z.$

Dokaz.

U prvom delu (P1.2) smo dokazali da u svakoj BA važi

$(\forall w)(aw=0 \Leftrightarrow bw=0) \Rightarrow a=b$. U našem slučaju dovoljno je dokazati da za sve $w \in A$ važi $(x \circ y)zw=0$ akko $(x \circ ((x^{-1} \circ z)\, y))\, zw=0$

$(x \circ y)zw=0$ akko $(x^{-1} \circ (zw)))y=0$ (zbog Osobine 2.13)

akko $(x^{-1} \circ (zw))(x^{-1} \circ z)y=0$ (koristimo Osobinu 2.11 kao i osobinu $a \le b \Rightarrow a \cdot b=a$)

akko $(x \circ ((x^{-1} \circ z)y))z\mathrm{w}=0$ (zbog Osobine 2.13).

□

Osobina 2.16 $(x \le 1' \wedge y \le 1') \Rightarrow x \circ y = xy.$

Dokaz.

Zbog Osobine 2.11 i datih uslova imamo

$$x \circ y = (x \circ y)(x \circ y) \leq (x \circ 1')(1' \circ y) = xy \quad \Rightarrow \quad x \circ y \leq xy$$

Obratno, iz Osobine 2.15, dobijamo $(x \circ y)z \leq x \circ ((x^{-1} \circ z)y)$, pa za $y = 1'$ imamo

$$(x \circ 1')z \leq x \circ ((x^{-1} \circ z)1').$$

Tada, koristeći Osobine 2.3 i 2.4 dobijamo sledeće:

$$xy = (x \circ 1')y \leq x \circ ((x^{-1} \circ y)1') \leq x \circ ((1' \circ y)\, 1') = x \circ (y1') = x \circ y,$$

tj. $xy \leq x \circ y$, pa kako smo gore dokazali $x \circ y \leq xy$, sledi $x \circ y = xy$.

□

Osobina 2.17 $x \leq 1' \ \Rightarrow \ x^{-1} = x$.

Dokaz.

Iz Osobine 2.15 imamo da je $(x \circ y)z \leq x \circ ((x^{-1} \circ z)y)$. Ako je $y = z = 1'$, onda primenom Osobine 2.4 kao i uslova $x \leq 1'$, dobijamo

$$x = (x \circ 1')1' \leq x \circ ((x^{-1} \circ 1')1') = x \circ (x^{-1}1') = x \circ x^{-1} \leq 1' \circ x^{-1} = x^{-1},$$

Tako, $x \leq x^{-1}$ pa je i $x^{-1} \leq (x^{-1})^{-1} = x$, tj. $x = x^{-1}$.

□

Osobina 2.18 $x^{-1} \circ x \circ x^{-1} \geq x^{-1}$.

Dokaz.

Neka je z proizvoljan element iz A, i pretpostavimo da je $(x^{-1} \circ x \circ x^{-1})z = 0$. Na osnovu Teoreme 2.17 imamo da iz $(x^{-1} \circ x \circ x^{-1})z = 0$ sledi $(x \circ z) \cdot (x \circ x^{-1}) = 0$. Kako je $x \circ z \geq x \circ (zx^{-1})$ i $x \circ x^{-1} \geq x \circ (zx^{-1})$ onda

$$0 = (x \circ z) \cdot (x \circ x^{-1}) \geq x \circ (zx^{-1})$$

pa sledi $x \circ (zx^{-1}) = 0$. Tako imamo

$$(x \circ (zx^{-1}))1' = 0 \Rightarrow (x^{-1} \circ 1')(zx^{-1}) = 0$$
$$\Rightarrow x^{-1}zx^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad zx^{-1} = 0.$$

Tako smo dobili da za sve $z \in A$ važi: ako $(x^{-1} \circ x \circ x^{-1})z = 0$ onda $x^{-1}z = 0$, pa na osnovu Teoreme 1.10 dobijamo da u svakoj relacionoj algebri važi $x^{-1} \circ x \circ x^{-1} \geq x^{-1}$.

□

Osobina 2.19 Neka je $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,\circ,1',^{-1})$ relaciona algebra. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

1) $\mathcal{A}$ je Booleova relaciona algebra ;

2) $1=1'$;

3) Za sve $x,y\in A$ važi: $x\circ y=x\cdot y$, $1=1'$, $x^{-1}=x$.

Dokaz.

1)→ 2). Kako je $\mathcal{A}$ Booleova relaciona algebra, onda za sve $x,y\in A$ važi $x\circ y=x\cdot y$, pa specijalno za $x=1,y=1'$ imamo: $1=1\circ 1'=1\cdot 1'=1'$ tj. $1=1'$.

2)→3) Neka je $1=1'$. Tada za sve $x,y\in A$ važi $x\leq 1'$, $y\leq 1'$, pa na osnovu Osobine 2.17 dobijamo da je $x^{-1}=x$, a na osnovu Osobine 2.16 da je $x\circ y=x\cdot y$.

3)→1) Važi po Definiciji 2.2 Booleove relacione algebre.

□

2.5 Druga definicija relacione algebre

Osobina 2.13 je mnogo jača nego što nam se čini na prvi pogled. Dokazaćemo da ona, zajedno sa uslovima (R1) i (R2) iz Definicije 2.1 definiše relacionu algebru. No, da bismo to dokazali, potrebne su nam neke jednostavne činjenice iz teorije Booleovih algebri sa operatorima.

Booleove algebre sa operatorima

U matematici se često javljaju strukture koje su ustvari "obogaćene" Booleove algebre: zovemo ih Booelove algebre sa operatorima. Teorija Booleovih algebri sa operatorima je danas vrlo razvijena i obuhvata široke oblasti algebarske logike.

Definicija 2.5

(a) Neka je $\mathcal{B}$ Booleova algebra i $F:B^n\rightarrow B$. Kažemo da je F *operator* Booleove algebre $\mathcal{B}$ ako je F aditivan (distributivan) po svakom svom argumentu tj.

$$F(x_1, x_2, \ldots, y_1 + y_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, y_1, \ldots, x_n) + F(x_1, x_2, \ldots, y_2, \ldots, x_n)$$

(b) Za algebru $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1, F_j)_{j\in J}$ kažemo da je *Booleova algebra sa operatorima* (u oznaci BAO) ako je redukt $\mathrm{Rd}_B(\mathcal{B}) = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ Booleova algebra , i sve operacije F_j $(j \in J)$ su operatori Booleove algebre $\mathrm{Rd}_B(\mathcal{B})$. (Algebru $\mathrm{Rd}_B(\mathcal{B})$ zovemo *Booleov redukt od* $\mathcal{B}$).

(c) Za operator F kažemo da je *kompletno aditivan* ako za svaki indeksni skup I za koji postoji $\Sigma\{y_i \mid i \in I\}$ u $\mathcal{B}$, važi

$$F(x_1, \ldots, \Sigma\{y_i \mid i \in I\}, \ldots, x_n) = \Sigma\{F(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n) \mid i \in I\}.$$

□

Teorema 2.12 Svaka relaciona algebra je Booleova algebra sa operatorima.

Dokaz.

Treba samo dokazati da su operacije $\circ$ i $^{-1}$ aditivne tj. distributivne :

$x \circ (y + z) = (x \circ y) + (x \circ z)$ (aksioma (R4))

$(x + y) \circ z = (x \circ z) + (y \circ z)$ (osobina 2.10)

$(x + y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$ (aksioma (R4))

□

Definicija 2.6 Neka su F i G dve unarne operacije Booleove algebre $\mathcal{B}$.

a) Za F i G kažemo da su *konjugovane* ako za sve x, $y \in B$ važi

$$F(x) \cdot y = 0 \ \text{ akko } \ x \cdot G(y) = 0 .$$

b) Za F kažemo da *čuva poredak* (ili da je *izotona*) ako se slaže sa relacijom $\leq$, tj. ako iz $x \leq y$ sledi $F(x) \leq F(y)$.

□

Primetimo, da u svakoj relacionoj algebri operacija $^{-1}$ ima konjugovanu (to je ona sama) i da se ta činjenica može dokazati koristeći samo Osobinu 2.13 :

$$(a^{-1} \circ 1')b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1' \circ b^{-1})a = 0$$

$$a^{-1} b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^{-1} a = 0$$

tj. operacija $^{-1}$ je samokonjugovana.

Osobina 2.4 nam govori o tome da je operacija $^{-1}$ izotona u svakoj RA. Sledeća teorema govori o međusobnom odnosu osobina konjugovanosti i izotonosti.

Teorema 2.13 Unarna operacija F Booleove algebre $\mathcal{B}$ ima konjugovanu akko je F izotona i za sve $y \in B$ skup $K(y) = \{\, x \in B \mid F(x)\; y = 0 \}$ ima najveći element. Ako to važi, onda je konjugat G od F jedinstven i $\overline{G(y)}$ jeste najveći element u $K(y)$.

Dokaz.

$(\leftarrow)$. Neka je operacija F izotona i skup $K(y) = \{ x \in B \mid F(x)\, y = 0 \}$ ima najveći element $N(y)$. Dokažimo da je tada funkcija G definisana sa $G(y) = \overline{N(y)}$ konjugovana sa F.

$$F(x)y = 0 \;\Rightarrow\; x \in K(y) \;\Rightarrow\; x \leq N(y) \;\Rightarrow\; x \cdot \overline{N(y)} = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot G(y) = 0.$$

$$x \cdot G(y) = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot \overline{N(y)} = 0 \;\Rightarrow\; x \leq N(y) \;\Rightarrow\; F(x) \leq F(N(y))$$

$$\Rightarrow\; F(x)y \leq F(N(y)) \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; F(x)y \leq 0 \;\Rightarrow\; F(x)y = 0 .$$

Dokažimo jedinstvenost konjugovane operacije. Neka je H funkcija sa osobinom

$$F(x)y = 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot H(y) = 0 .$$

Tada imamo : $F(N(y)) \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; N(y) \cdot H(y) = 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; H(y) \leq \overline{N(y)} \;\Rightarrow\; H(y) \leq G(y).$$

S druge strane, $\overline{H(y)} \cdot H(y) = 0 \;\Rightarrow\; F(\overline{H(y)}) \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; \overline{H(y)} \leq N(y)$

$$\Rightarrow\; H(y) \geq \overline{N(y)} \;\Rightarrow\; H(y) \geq G(y).$$

Dakle, $H(y) = G(y)$.

$(\rightarrow)$. Pretpostavimo sada da F ima konjugovanu operaciju G . Dokažimo da skup $K(y) = \{ x \in B \mid F(x)y = 0 \}$ ima najveći element i to je $\overline{G(y)}$. Prvo,

$$\overline{G(y)} \in K(y) \text{ jer } F(\overline{G(y)})y = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{G(y)}G(y) = 0.$$

Da je najveći sledi iz : $F(x)y = 0 \;\Rightarrow\; xG(y) = 0 \;\Rightarrow\; x \leq \overline{G(y)}$.

Dokažimo da je F izotona. Neka je $x \leq y$. Znamo da $F(y) \cdot \overline{F(y)} = 0 \Rightarrow y \in K(\overline{F(y)})$

$$\Rightarrow\; y \leq \overline{G(\overline{F(y)})} \;\Rightarrow\; x \leq y \leq \overline{G(\overline{F(y)})} \;\Rightarrow\; x \leq \overline{G(\overline{F(y)})}$$

$$\Rightarrow\; x \cdot G(\overline{F(y)}) = 0 \;\Rightarrow\; F(x) \cdot \overline{F(y)} = 0 \;\Rightarrow\; F(x) \leq F(y).$$

□

Teorema 2.14 Ako unarna operacija F Booleove algebre $\mathcal{B}$ ima konjugat, onda je F kompletno aditivna i $F(0)=0$.

Dokaz.

Neka je G konjugovana operacija za F. Dokažimo prvo $F(0)=0$:

$$0\cdot G(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad F(0)\cdot x=0\ , \text{ za sve } x.$$

Za $x=1$ dobijamo $F(0)=0$. Dalje, neka je $x=\Sigma\{x_i \mid i\in I\},(x,x_i\in \mathrm{B})$. Treba dokazati

$$F(x)=\Sigma\{F(x_i)\mid i\in I\}.$$

Pošto za sve $i\in I$ važi $x_i\le x$, a operacija F je monotona, onda $F(x_i)\le F(x)$, pa je $F(x)$ jedno gornje ograničenje za sve $F(x_i)$. Dokažimo da je to najmanje gornje ograničenje. Neka je z jedna gornja granica tj. za sve $i\in I$.

$$F(x_i)\le z \;\Rightarrow\; F(x_i)\cdot\bar{z}=0 \;\Rightarrow\; x_iG(\bar{z})=0 \;\Rightarrow\; G(\bar{z})\cdot x_i=0\ , \text{ za sve } i\in I\,.$$

Sada se setimo jedne činjenice koja važi za sve Booleove algebre (videti prvi deo ove knjige): Ako u Booleovoj algebri $\mathcal{B}$ postoji element $x\cdot\Sigma\{u\mid u\in A\}$, za neki $A\subseteq B$, onda postoji i element $\Sigma\{x\cdot u\mid u\in A\}$, i ta dva elementa su jednaka. U našem slučaju

$$G(\bar{z})\cdot\Sigma\{x_i\mid i\in I\}=\Sigma\{G(\bar{z})\cdot x_i\mid i\in I\}=0 \Rightarrow \bar{z}\cdot F(\Sigma\{x_i\mid i\in I\})=0 \Rightarrow F(x)\le z,$$

što je i trebalo dokazati.

Teorema 2.15 U svakoj relacionoj algebri važi : ako postoji $\Sigma\{x_i\mid i\in I\}$ onda postoji $\Sigma\{x_i^{-1}\mid i\in I\}$ *i* važi $(\Sigma\{x_i\mid i\in I\})^{-1}=\Sigma\{x_i^{-1}\mid i\in I\}$.

Dokaz.

Direktna posledica T2.15 , jer je operacija ${}^{-1}$ u svakoj realcionoj algebri samokonjugovana.

Teorema 2.16 U svakoj relacionoj algebri važi: ako postoji $\Sigma\{x_i\mid i\in I\}$ onda postoji $a\circ\Sigma\{x_i\mid i\in I\}$ i važi $\Sigma\{a\circ x_i\mid i\in I\}=a\circ\Sigma\{x_i\mid i\in I\}$.

Dokaz.

Direktna posledica T2.14. Naime, ako je $\mathcal{A}\in\mathrm{RA}$ i $a\in A$ onda operacija $F(x)=a\circ x$

ima konjugovanu , $G(x) = a^{-1} \circ x$. Zaista, na osnovu Osobine 2.13 imamo

$$F(x)y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a \circ x)y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^{-1} \circ y)x=0 \quad \Leftrightarrow \quad xG(y)=0.$$

□

Druga definicija relacione algebre

Teorema 2.17 Neka je $\mathcal{A} = (A,+,\cdot,-,0,1,\circ,1',^{-1})$ algebra tipa $(2,2,1,0,0,2,0,1)$ koja zadovoljava

(1) $(A,+,\cdot,-,0,1)$ je Booleova algebra;

(2) $(A,\circ,1')$ je monoid;

(3) Za sve a,b,c A važi: $(a \circ b)c=0 \Leftrightarrow (a^{-1} \circ c)b=0 \Leftrightarrow (c \circ b^{-1})a=0$.

Tada je $\mathcal{A} \in \mathrm{RA}$.

Dokaz.

Uslovi (R1) i (R2) D2.1 direktno slede.

Na osnovu (3) možemo dokazati da operacija $^{-1}$ ima konjugovanu – to je ona sama:

$$a^{-1}b=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^{-1} \circ 1')b=0 \quad \Leftrightarrow \quad (1' \circ b^{-1})a=0 \quad \Leftrightarrow \quad b^{-1}a=0.$$

Takođe, na osnovu (3), možemo dokazati da u našoj algebri i sve operacije $\mathrm{F}(x) = a \circ x$ imaju konjugovane :

$$(a \circ x)y=0 \Leftrightarrow (a^{-1} \circ y)x=0.$$

Dakle, sve te operacije su kompletno aditivne (na osnovu T2.14), pa algebra zadovoljava uslov (R4) iz D2.1. Dokažimo da važi i uslov (R5) :

$$(x \circ y)(\overline{x \circ y})=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^{-1} \circ (\overline{x \circ y}))y=0 \qquad (\text{ zbog } (3)) .$$

Ostalo je da dokažemo uslov (R3) iz D2.1, tj. da je $^{-1}$ involucija monoida $(A,\circ,1')$.

Koristićemo činjenicu (videti T1.10) da u svakoj Booleovoj algebri važi:

$$a \le b \text{ akko } (\forall z)(z \cdot b=0 \Rightarrow z \cdot a=0) \text{ tj. } a=b \text{ akko } (\forall z)(z \cdot b=0 \Leftrightarrow z \cdot a=0).$$

Neka je $z \in A$. Tada:

$$zx=0 \Leftrightarrow (x \circ 1')z=0 \Leftrightarrow (x^{-1} \circ z)1'=0 \Leftrightarrow ((x^{-1})^{-1} \circ 1')z=0 \Leftrightarrow z \cdot (x^{-1})^{-1}=0,$$

što prema prethodnom znači da je $(x^{-1})^{-1}=x$.

Na kraju, dokažimo $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$. Neka $z \in A$. Tada:

$$
\begin{aligned}
(x \circ y)^{-1} z = 0 &\Leftrightarrow ((x \circ y)^{-1} \circ 1')z = 0 \\
&\Leftrightarrow (1' \circ z^{-1})(x \circ y) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x \circ y)z^{-1} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^{-1} \circ z^{-1})y = 0 \\
&\Leftrightarrow (y^{-1} \circ x^{-1})z = 0 .
\end{aligned}
$$

Dakle, $y^{-1} \circ x^{-1} = (x \circ y)^{-1}$. Time smo dokazali da je $\mathcal{A}$ relaciona algebra.

□

Sada možemo formulisati potreban i dovoljan uslov da neka algebra bude relaciona.

Teorema 2.18 Algebra $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, \circ, 1', ^{-1})$ tipa $(2,2,1,0,0,2,0,1)$ jeste relaciona algebra akko zadovoljava sledeće uslove :

(1) $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$ je Booleova algebra ;

(2) $(A, \circ, 1')$ je monoid ;

(3) Za sve $a, b, c \in A$ važi: $(a \circ b)c = 0 \Leftrightarrow (a^{-1} \circ c)b = 0 \Leftrightarrow (c \circ b^{-1})a = 0$.

Dokaz.

Dokaz direktno sledi iz Osobine 2.13 i T2.17.

□

Tako, uslove (1),(2),(3) Teoreme 2.17 možemo uzeti za *drugu, ekvivalentnu definiciju relacione algebre.*

2.6 O jeziku relacionih algebri

Jezik relacionih algebri sadrži 8 funkcijskih simbola. Prirodno je pitati, da li među njima ima nepotrebnih? Da li su neke operacije relacione algebre određene pomoću ostalih operacija? Da. Poznato je da semigrupa može imati najviše jednu jedinicu. Tako, ako je $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,^-,0,1,\circ,1',^{-1})$ relaciona algebra, onda je element 1' potpuno odreden operacijom $\circ$: to je jedinstven element y koji zadovoljava $x\circ y=y\circ x=x$. Tako, umesto da 1' stavimo u jezik relacionih algebri, mogli smo da aksiomama RA dodamo aksiomu

$$(\exists y)(\forall x)x\circ y=y\circ x=x.$$

No, tako definisana klasa algebri više nije jednakosna. Slično, možemo dokazati da se operacija $^{-1}$ u svakoj relacionoj algebri može izraziti pomoću ostalih operacija:

Teorema 2.19 U svakoj relacionoj algebri važi $x^{-1}=\Sigma\{y\mid(\bar{x}\circ y)1'=0\}$.

Dokaz.
Dokažimo da je x^{-1} najmanja gornja granica skupa $\{y\mid(\bar{x}\circ y)1'=0\}$.

$$(\bar{x}\circ y)1'=0 \;\Leftrightarrow\; (1'\circ y^{-1})\bar{x}=0 \;\Leftrightarrow\; y^{-1}\leq x \;\Leftrightarrow\; y\leq x^{-1}$$

pa je x^{-1} jedna gornja granica tog skupa. No, $x^{-1}\in\{y\mid(\bar{x}\circ y)1'=0\}$ jer

$$(\bar{x}\circ x^{-1})1'=0 \;\Leftrightarrow\; (1'\circ x)\bar{x}=0 \;\Leftrightarrow\; x\bar{x}=0.$$

Ako $t\leq z$ za sve $t\in\{y\mid(\bar{x}\circ y)1'=0\}$ onda $x^{-1}\leq z$, pa je x^{-1} najmanja gornja granica tog skupa, što je i trebalo dokazati.

□

No, kao i u slučaju elementa 1', ni operacija $^{-1}$ sa ne može definisati pomoću identiteta koristeći ostale operacije. Da razmotrimo problem definisanja operacija *pomoću identiteta koristeći ostale operacije*, definišimo u opštem slučaju pojam *klona operacija* neke algebre.

Šta je klon operacija

Ako nam je data neka algebra, onda kompozicijom njenih fundamentalnih operacija možemo konstruisati mnogo drugih operacija. Skup tako izvedenih operacija čini *klon*. Često je klon operacija date algebre mnogo korisniji za razumevanje strukture algebre nego fundamentalne operacije.

Pre nego što predemo na preciznu definiciju pojma klona, evo nekoliko primera. Od fundamentalnih operacija algebre $\mathcal{Z}=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ možemo konstruisati razne druge operacije na skupu $\mathbb{Z}$:

$$f_1(x,y)=(x+y)\cdot y,\ f_2(x,y,z)=x\cdot y+y\cdot z,\ f_3(x)=x\cdot x+x.$$

Kako možemo matematički precizno opisati "sve moguće operacije" koje mogu nastati na ovaj način? Pre svega, nove operacije nastaju *kompozicijom*. Ako su osnovne operacije $f(x,y)=x+y$, $g(x,y)=x\cdot y$, onda je

$$f_1(x,y)=g(f(x,y),y),$$

$$f_2(x,y,z)=f(g(x,y),g(y,z)),$$

$$f_3(x)=f(g(x,x),x).$$

Definicija 2.7 Neka je $f(x_1,\ldots,x_n)$ neka n-arna, a $g_1,\ldots,g_n$ m-arne operacije skupa A. *Kompozicija* (*superpozicija*) operacija $f,g_1,\ldots,g_n$ jeste m-arna operacija h definisana sa $h(x_1,\ldots,x_m)=f(g_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_n(x_1,\ldots,x_m))$.

□

Primetimo da smo u gornjim primerima negde umesto izraza $g_i(x_1,\ldots,x_m)$ zamenjivali samo promenljivu (na primer kod f_1). Takođe, negde nismo "pazili na promenljive" nego smo ih "izjednačavali" (na primer kod f_3). Tako, naše nove operacije ne nastaju od osnovnih operacija samo kompozicijom. Skupu fundamentalnih operacija treba dodati tzv. *projekcije* tj. trivijalne operacije čija je vrednost ustvari vrednost neke od njenih promenljivih.

Definicija 2.8 Neka su i, $n\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $i<n$. Kažemo da je operacija p_i^n skupa A *i-ta projekcija dužine n* ako za sve $x_1,\ldots,x_n\in A$, važi $p_i^n(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)=x_i$.

□

Nije teško videti da sve naše operacije f_1, f_2, f_3 nastaju kompozicijom fundamentalnih operacija f i g, kao i projekcija p_1^2, p_2^2, p_2^3, p_3^3:

$$f_1(x,y)=g(f(x,y),p_2^2(x,y))$$

$$f_2(x,y,z)=f(g(p_1^2(x,y),p_2^2(x,y)),g(p_2^3(x,y,z),p_3^3(x,y,z)))$$

$$f_3(x)=f(g(p_1^1(x),p_1^1(x)),p_1^1(x)).$$

Intuitivno, "ubacivanje projekcija u igru" nam omogućava da superpozicijom dobijemo sve kombinacije osnovnih operacija, bez obzira na poredak (raspodelu) i ujednačavanje promenljivih u tim kombinacijama. Precizna definicija klona jeste:

Definicija 2.9 *Klon* na nepraznom skupu A jeste skup izvesnih operacija skupa A koji sadrži sve projekcije skupa A, i zatvoren je u odnosu na kompoziciju.

$\square$

Primer 2.2 Skup svih mogućih operacija skupa A jeste klon - to je najveći klon skupa A. Najmanji klon na A jeste skup svih projekcija od A.

$\square$

Iz same definicije klona sledi da presek proizvoljnog *skupa klonova* na A jeste ponovo klon na A. Tako za svaki skup $\mathcal{F}$ operacija na A postoji *najmanji klon koji sadrži* $\mathcal{F}$: to je presek svih klonova koji sadrže $\mathcal{F}$.

Definicija 2.10 Neka je $\mathcal{F}$ skup operacija na A. Najmanji klon na A koji sadrži $\mathcal{F}$ zovemo *klon generisan sa* $\mathcal{F}$ i obeležavamo ga sa $[\mathcal{F}]_A$ (ili samo $[\mathcal{F}]$). *Klon algebre* $\mathcal{A}$ jeste klon fundamentalnih operacija od $\mathcal{A}$.

$\square$

Napomena 2.1 Kada je reč o klonovima, pogodnije je tretirati konstantu algebre kao unarnu operaciju (koja ima uvek istu vrednost).

Mi ćemo na ovom mestu da se zadržimo na klonovima generisanim raznim operacijama algebre binarnih relacija.

Booleov klon i klasičan klon

Neka je $F=\{\cup,\cap,^{-},\}$ skup Booleovskih operacija dužine veće od 0 algebre $\mathcal{B}(S^2)$. *Booleov klon* $\mathcal{C}\ell_B(S)$ jeste klon generisan sa F:

$$\mathcal{C}\ell_B(S)=[\{\cup,\cap,^{-},\}]_{\mathcal{P}(S^2)}$$

Na primer, operacije

$$F_1(X,Y)=(\overline{X\cap Y})\cup(X\cap\overline{Y}),\quad F_2(X)=X\cap\overline{X},$$
$$F_3(X)=X\cup\overline{X},\quad F_4(X,Y)=(X\cap\overline{Y})\cup(Y\cap\overline{X})$$

pripadaju klonu $\mathcal{C}\ell_B(S)$. Primetimo da se taj isti klon može generisati jednom jedinom operacijom (tzv. Šeferovom operacijom).

Teorema 2.20 Za svaki skup S, Booleov klon $\mathcal{C}\ell_B(S)$ je generisan jednom binarnom operacijom.

Dokaz.

Neka je $X \uparrow Y = \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dokažimo da je $\mathcal{Cl}_B(S) = [\{\uparrow\}]_{\mathcal{P}(S^2)}$. Naravno, zbog definicije $\uparrow$, imamo $[\{\uparrow\}] \subseteq \mathcal{Cl}_B(S)$. Obratno, dovoljno je dokazati da $\{\cup, \cap, -\} \subseteq [\{\uparrow\}]$:

$$\overline{X} = X \uparrow X, \quad X \cap Y = \overline{X} \uparrow \overline{Y}, \quad X \cup Y = \overline{\overline{X} \cap \overline{Y}},$$

tako da je i $\mathcal{Cl}_B(S) \subseteq [\{\uparrow\}]$.

□

Primetimo da analogna teorema važi za sve Booleove algebre. Dokaz te teoreme je takođe analogan dokazu prethodne teoreme.

Teorema 2.21 Klon svake Booleove algebre je generisan jednom binarnom operacijom.

Dokaz.

Ako je $\mathcal{B} \in BA, \mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ onda tražena binarna operacija jeste $f(x, y) = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

□

Pod ***klasičnim klonom*** podrazumevaćemo klon

$$\mathcal{Cl}_C(X) = [\{\cup, \cap, -, \circ, ^{-1}, \Delta_X\}]_{\mathcal{P}(X^2)}$$

Na primer, tom klonu pripadaju operacije

$$\mathrm{F}_1(R, S) = (\overline{R \circ S}) \cup S^{-1}, \ \mathrm{F}_2(R) = (\Delta_S \circ \overline{R})^{-1}, \ \mathrm{F}_3(R, S, T) = R \circ (S \cup T)^{-1}.$$

Naravno za sve skupove X $\mathcal{Cl}_B(X) \subseteq \mathcal{Cl}_C(X)$. Nije teško videti da je klasičan klon striktno veći od Booleovog, već za $|X| \geq 2$.

Teorema 2.22 Za svaki X, ako je $|X| \geq 2$, važi $\mathcal{Cl}_C(X) \setminus \mathcal{Cl}_B(X) \neq \emptyset$.

Dokaz.

Neka su $a, b \in X$, $a \neq b$, i neka je $R = \{(a, b)\}$. Tada je skup $A = \{R, \overline{R}, X^2, \emptyset\}$ zatvoren u odnosu na sve operacije iz $\mathcal{Cl}_B(X)$, a očigledno nije zatvoren u odnosu na operacije iz klasičnog klona (recimo, $R^{-1} \notin A$).

□

Klon relacione algebre

Prirodno je postaviti pitanje da li je klasični klon RA generisan jednom operacijom? Da! Mi ćemo dokazati više: u proizvoljnoj relacionoj algebri, sve operacije se mogu izraziti pomoću *jedne jedine binarne operacije*:

Teorema 2.23 (F. Börner, 1986) Klon svake relacione algebre generisan je binarnom operacijom

$$h(x,y)=(\bar{x}\cdot\bar{y})+(g_1(x,y)\circ g_2(x,y)\circ(g_3(x,y)+g_4(x,y))),$$

gde su

$$g_1(x,y)=(x\,\bar{y}\,\overline{1'})^{-1},\ g_2(x,y)=(x+y)\cdot 1',$$

$$g_3(x,y)=(1\circ(x\,y1')\circ 1)g_1(x,y),$$

$$g_4(x,y)=(\overline{1\circ(xy1')\circ 1})(((1\circ(y1')\circ 1)(\bar{x}\bar{y}\overline{1'})^{-1})+(\overline{1\circ(y1')\circ 1})1')$$

Dokaz.

Očigledno, h je operacija klona relacione algebre. Pokažimo da su osnovne operacije relacione algebre generisane sa h. Koristeći dokazane osobine relacionih algebri možemo sa uveriti, korak po korak, da važi

$$\bar{x}=h(x,x),\quad h(x,\bar{x})=(x^{-1}\cdot\overline{1'})\circ((\overline{1\circ(\bar{x}\cdot 1')\circ 1})1').$$

Koristeći osobinu da se $\circ$ slaže sa $\leq$ dobijamo $h(x,\bar{x})\leq\overline{1'}$, $\overline{h(x,\bar{x})}\geq 1'$ i prema tome (zbog Osobine 2.12) imamo $(\overline{1\circ(\overline{h(x,\bar{x})}1')\circ 1})=0$. Sledi da je $0=h(h(x,\bar{x}),\overline{h(x,\bar{x})})$.
Koristeći "$-$" i "0" možemo generisati sledeće operacije će operacije

$$1=\bar{0},\ \overline{1'}=h(1,0),\ 1'=(\overline{\overline{1'}}),\ \overline{1'}x=h(1',\bar{x}),\ 1'x=h(\bar{x},\overline{1'})$$

$$1'(x+y)=\overline{h(\overline{1'x},\overline{1'y})},\ \overline{1'}(x+y)=\overline{h(\overline{\overline{1'}x},\overline{\overline{1'}y})},$$

$$x+y=\overline{h(1'(x+y),\overline{1'}(x+y))},\ xy=(\overline{x+y}).$$

Prema tome iz h možemo dobiti skupovne operacije $\cdot$ i $1'$. Da generišemo $^{-1}$ koristimo Osobine 2.7 i 2.17: $x^{-1}=x1'+h(1,\bar{x}\overline{1'})$.

Na kraju generišimo operaciju "$\circ$". Zbog Osobine 2.16 imamo $(x1')\circ(y1')=xy1'$

$$(x\overline{1'})\circ(y1')=\overline{1'}h(\overline{1'}+y1',\overline{x^{-1}}\overline{1'})$$

$$(x1')\circ(y\overline{1'})=((y^{-1}\overline{1'})\circ(x^{-1}1'))^{-1}$$

$$(x\,y\,\overline{1'})\circ(x\,y\,\overline{1'})=(h(1,1'+\bar{x}+\bar{y}))^{-1}$$

$$(x\,y\,\overline{1'})\circ(y\,\overline{1'})=(h((x+y)1',(\bar{x}\,y+1')^{-1})\,h(\overline{y^{-1}\overline{1'}},\overline{x^{-1}}\,\overline{y^{-1}}+1')$$

$$(x\,\overline{1'})\circ(x\,y\,\overline{1'})=((y^{-1}\overline{x^{-1}\overline{1'}})\circ(x^{-1}\overline{1'}))^{-1}$$

$$(x\overline{1'})\circ(y\overline{1'})=((xy\overline{1'})\circ(x\,y\overline{1'}))+((x\,\overline{y1'})\circ(\overline{y1'}))+((x\overline{1'})\circ(x\,y\overline{1'}))$$

$$x\circ y=((x1')\circ(y1'))+((x1')\circ(y\overline{1'}))+((x\overline{1'})\circ(y1'))+((x\overline{1'})\circ(y\overline{1'})).$$

□

3. REPREZENTABILNOST

Dok se prethodna glava bavila pretežno "sintaktičkim" razmatranjima, ova glava je posvećena "semantici" teorije relacionih algebri. Problem reprezentabilnosti se razmatra prvo za semigrupe, grupe i Booleove algebre . Proučavanje klase reprezentabilnih relacionih algebri počinje sa tzv. malim relacionim algebrama (sa najviše 8 elemenata), i konstrukcijom najmanje nereprezentabilne relacione algebre (od 16 elemenata). Kako uobičajena teorema reprezentabilnosti ne važi za relacione algebre, u potpunosti je opisan jedan drugi pristup reprezentaciji: preko algebri kompleksa i atomičnih struktura. Posle opštih teorema o reprezentabilnosti Booleovih algebri sa operatorima, posebno se razmatraju atomične strukture RA, tzv. poli-grupe.

3.1 Šta je reprezentabilnost

Teoreme reprezentacije se u algebri, pa i uopšte u matematici, često prirodno pojavljuju. U najopštijem slučaju, svaka teorema reprzentacije je oblika:

X je objekat klase $A \Leftrightarrow (\exists Y)(Y$ je objekat klase B i Y je izomorfno sa $X)$.
U svakom konkretnom slučaju ova šema dobija sasvim određen smisao. U slučaju relacionih algebri pojam reprezentabilnosti je detaljno razrađen na primer u [HMTI 71]. Po tom pristupu, kratko rečeno, reprezentabilnost određenog apstraktnog pojma

znači da on "tačno pokriva" odgovarajući konkretan pojam, odnosno da je prilikom aksiomatizacije (tj. procesom apstrakcije) sačuvano "sve što je bitno".

Pojmovi *konkretno* odnosno *apstrakno* se u [HMTI71] definišu na sledeći način: Za algebru $\mathcal{A}$ se kaže da je *konkretna* ako je ona u potpunosti određena svojim nosačem. Drugim rečima, konkretne algebre karakteriše *uniformna definicija operacija*. Na primer, Booleova skupovna algebra $\mathcal{B}(S)$ jeste primer konkretne algebre. Odgovarajuća apstraktna klasa je klasa Booleovih algebri. U opštem slučaju, za klasu algebri K kažemo da je *apstraktna* ako je zatvorena u odnosu na izomorfizme, tj. ako je $I(K) \subseteq K$. Za apstraktnu klasu algebri K kažemo da je *reprezentabilna* (ili da važi *teorema reprezentabilnosti*) ako je svaka algebra iz K izomorfna sa nekom konkretnom algebrom iz K.

Pre nego što krenemo na problem reprezentabilnosti relacionih algebri, dokazaćemo nekoliko teorema reprezentabilnosti: za semigrupe, za grupe i za Booleove algebre.

Reprezentabilnost semigrupa

Pojam semigrupe definisali smo u delu 1.3. Za grupoid $(S,*)$ kažemo da je semigrupa ako je operacija $*$ asocijativna. Na primer, svi grupoidi $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\{\top,\bot\},\wedge)$, $(\{\top,\bot\},\Rightarrow)$ $(\mathcal{P}(S),\cup)$, $(\mathcal{P}(S),\cap)$, $(\mathcal{P}(S^2),\circ)$ su semigrupe. Dokazaćemo da je svaka semigrupa izomorfna tzv. semigrupi transformacija (funkcija).

Neka je A neki skup. Označimo sa $F(A)$ skup A^A tj. skup svih funkcija skupa A. Tada važi sledeća teorema:

Teorema 3.1 Za svaki skup A, grupoid $\mathcal{F}(A)=(F(A),\circ)$ jeste semigrupa.

Dokaz.

Kako smo funkcije definisali kao specijalne relacije, onda asocijativnost operacije $\circ$ sledi iz T 2.2.

□

Primetimo da je i svaki podgrupoid od $\mathcal{F}(A)$ semigrupa.

Definicija 3.1 Semigrupu $\mathcal{F}(A)=(F(A),\circ)$ zovemo *puna semigrupa transformacija skupa* A. Svaki podgrupoid od $\mathcal{F}(A)$ zovemo *semigrupa transformacija skupa* A.

□

Primetimo da su sve semigrupe transformacija konkretne algebre. Teorema reprezentabilnosti semigrupa dobija se kao posledica sledeće dve leme.

Lema 3.1 Svaka semigrupa sa jedinicom je izomorfna sa nekom semigrupom transformacija.

Dokaz.

Neka je $(M,\cdot)$ data semigrupa, sa jedinicom e. Definišimo preslikavanje $\psi: M \to F(M)$ na sledeći način: $\psi(a)=f_a$, $f_a(x)=x\cdot a$. Treba samo dokazati da je ψ potapanje, tj. da je homomorfizam i da je "1–1".

1. ψ je homomorfizam semigrupa $(M,\cdot)$ i $(F(A),\circ)$ jer je

$$\psi(a\cdot b)=f_{ab}=f_a\circ f_b=\psi(a)\circ\psi(b).$$

Zaista, za sve $x\in A$ važi:

$$f_{ab}(x)=x(ab)=(xa)b=f_b(xa)=f_b(f_a(x))=(f_a\circ f_b)(x).$$

2. ψ je "1–1", jer ako je $a\neq b$ onda je $f_a(e)\neq f_b(e)$, pa imamo da je $f_a\neq f_b$.

□

Lema 3.2 Svaka semigrupa se može potopiti u semigrupu sa jedinicom.

Dokaz.

Neka je $(S,\cdot)$ semigrupa i e neki element, $e\notin S$. Definišimo na $S\cup\{e\}$ operaciju $*$ tako da se na elementima iz S poklapa sa operacijom $\cdot$, i neka je $x*e=e*x=x$ za sve $x\in S\cup\{e\}$. Naravno, preslikavanje $\psi: S\to S\cup\{e\}$ definisano sa $\psi(x)=x$, za sve $x\in S$, jeste potapanje semigrupe $(S,\cdot)$ u semigrupu sa jedinicom $(S\cup\{e\},*)$.

□

Teorema 3.2 (o reprezentaciji semigrupa) Svaka semigrupa je izomorfna sa nekom semigrupom transformacija.

Dokaz.

Direktna posledica prethodne dve leme.

□

Reprezentabilnost grupa

Grupe smo definisali kao algebre $(G,*,e,^{-1})$ tipa $(2,0,1)$ tako da je $(G,*,e)$ monoid, a za operaciju $^{-1}$ važi $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$. Označimo skup svih permutacija (bijekcija) skupa A sa $\mathrm{Perm}(A)$. Primetimo da je skup $\mathrm{Perm}(A)$ zatvoren u odnosu na operacije $\circ$ i $^{-1}$ i sadrži identičnu funkciju id_A. Tako, $(\mathrm{Perm}(A),\circ,\mathrm{id}_A,^{-1})$ jeste algebra.

Teorema 3.3 Za svaki skup A, algebra $\mathcal{Perm}(A)=(\mathrm{Perm}(A),\circ,\mathrm{id}_A,^{-1})$ je grupa.

Dokaz.

Posledica T1.6 i T2.2.

□

Definicija 3.2 Svaku podgrupu grupe $\mathcal{Perm}(A)=(\mathrm{Perm}(A),\circ,\mathrm{id}_A,^{-1})$ zovemo *grupa permutacija skupa* A. Grupu svih permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ zovemo *simetrična grupa reda* n (u oznaci $\mathcal{S}_n$).

Teorema 3.4 (o reprezentabilnosti grupa) Svaka grupa je izomorfna sa nekom grupom permutacija.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{G}=(G,\cdot,e,^{-1})$ data grupa. Definišimo preslikavanje $\psi:G\to\mathrm{Perm}(G)$ na sledeći način: $\psi(g)=f_g$, $f_g(x)=x\cdot g$. U Lemi 3.1 smo već dokazali da je ψ potapanje semigrupe $(G,\cdot)$ u semigrupu $(\mathrm{Perm}(G),\circ)$. Jasno je da važi $\psi(e)=\mathrm{id}_G$. Treba još dokazati da je $\psi(a^{-1})=(\psi(a))^{-1}$.

Imamo da je $\psi(a^{-1})=f_{a^{-1}}$, $(\psi(a))^{-1}=(f_a)^{-1}$. Dokažimo da je $f_{a^{-1}}=(f_a)^{-1}$:

$$(x,y)\in f_{a^{-1}} \quad \text{akko} \quad y=xa^{-1} \quad \text{akko} \quad x=ya$$
$$\text{akko} \quad (y,x)\in f_a \quad \text{akko} \quad (x,y)\in(f_a)^{-1},$$

što je i trebalo dokazati. Tako, ψ je zaista potapanje, pa je grupa $\mathcal{G}$ izomorfna sa podgrupom grupe permutacija $\mathcal{Perm}(G)$.

□

Primetimo da iz dokaza T3.5 direktno sledi da se svaka konačna grupa od n elemenata može potopiti u simetričnu grupu $\mathcal{S}_n$.

Naravno, istorijski put razvoja teorije semigrupa i grupa išao je obrnutim smerom. Prvo su se izučavale semigrupe transformacija odnosno grupe permutacija (konačnih skupova). Posle su definisani pojmovi apstraktne semigrupe i grupe, za koje se ispostavilo da *tačno pokrivaju* odgovarajuće klase konkretnih struktura iz kojih su potekli.

Reprezentabilnost atomičnih Booleovih algebri

Podsetimo se da za element $b \neq 0$ Booleove algebre $\mathcal{B}$ kažemo da je *atom* ako važi: $(\forall x \in B)(x \leq b \Rightarrow (x = b \vee x = 0))$. Skup svih atoma algebre $\mathcal{B}$ označavamo sa $\mathrm{At}\ (\mathcal{B})$. Booleova algebra je *atomična* akko za svaki element $x \neq 0$ postoji atom b takav da je $b \leq x$. Teorema reprezentacije za atomične Booleove algebre je posledica sledeće leme:

Lema 3.3 Neka je $\mathcal{B}$ atomična BA. Tada preslikavanje $\psi : B \to \mathcal{P}(\mathrm{At}\ (\mathcal{B}))$ definisano sa: $\psi(x) = \{b \mid b \in \mathrm{At}\ (\mathcal{B}) \wedge b \leq x\}$, jeste "1–1".

Dokaz.

Ako je $x \neq y$, onda $x \not\leq y$ ili $y \not\leq x$. Neka važi $x \not\leq y$. Dokažimo da je $x \cdot \bar{y} \neq 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. $x \cdot \bar{y} = 0$; tada $x = x \cdot 1 = x \cdot (y + \bar{y}) = (x \cdot y) + (x \cdot \bar{y}) = x\ y + 0 = x y$ iz čega sledi $x \leq y$. No, to je kontradikcija sa našom pretpostavkom. Tako, važi $x \cdot \bar{y} \neq 0$, pa postoji atom $b \leq x \cdot \bar{y}$. Odatle jasno $b \leq x$, $b \leq \bar{y}$. Dokažimo sada da važi $b \not\leq y$. Pretpostavimo li suprotno, tj. da $b \leq y$, dobijamo $b = b + (y \bar{y}) = (b + y)(b + \bar{y}) = y \bar{y} = 0$, kontradikcija. Tako, $b \in \psi(x)$ i $b \notin \psi(y)$ tj. $\psi(x) \neq \psi(y)$ pa je ψ "1–1".

□

Teorema 3.5 (o reprezentaciji atomičnih BA) Svaka atomična Booleova algebra se može potopiti u neku Booleovu skupovnu algebru.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1) \in \mathrm{BA}$. Preslikavanje $\psi : \mathrm{B} \to \mathcal{P}(\mathrm{At}\ (\mathcal{B}))$ definišimo kao u Lemi 3.3 : $\psi(x) = \{b \in \mathrm{At}(\mathcal{B}) : b \leq x\}$. Dokazali smo u Lemi 3.3 da je ψ "1 – 1". Jasno, važi $\psi(0) = \emptyset$ i $\psi(1) = \mathrm{At}\ (\mathcal{B})$. Za dokaz da je ψ homomorfizam strukture $\mathcal{B}$ i $(\mathcal{P}(\mathrm{At}\ (\mathcal{B})), \cup, \cap, -, \emptyset, \mathrm{At}\ (\mathcal{B}))$, dovoljno je pokazati da je $\psi(\bar{x}) = \overline{\psi(x)}$ i

$\psi(x) \cap \psi(y)$. Neka je $b \in \mathrm{At}\ (\mathcal{B})$. Tada

$b \in \psi(\bar{x}) \Leftrightarrow b \leq \bar{x} \Leftrightarrow b \nleq x \Leftrightarrow b \in \overline{\psi(x)}$, tj. $\psi(\bar{x}) = \overline{\psi(x)}$.

$b \in \psi(xy) \Leftrightarrow b \leq x \cdot y \Leftrightarrow (b \leq x \wedge b \leq y) \Leftrightarrow b \in \psi(x) \cap \psi(y)$

$y) = \psi(x) \cap \psi(y)$. Tako, ψ je potapanje, a algebra $\mathcal{B}$ je izomorfna sa podal- Booleove skupovne algebre $(\mathcal{P}(\mathrm{At}\ (\mathcal{B})), \cup, \cap, -, \emptyset, \mathrm{At}\ (\mathcal{B}))$.

ica 3.1 Svaka konačna Booleova algebra ima 2^n elemenata $(n \in \mathbb{N})$. Svake ačne BA sa istim brojem elemenata su izomorfne.

$\mathcal{B}$ konačna BA . Kako je svaka konačna BA atomična (videti T1.), možemo T3.5 . Neka je ψ preslikavanje definisano u dokazu T3.5. Za dokaz ove teore- oljno je još pokazati da je preslikavanje $\psi: B \to \mathcal{P}(\mathrm{At}\ (\mathcal{B}))$ sirjekcija. Neka At $(\mathcal{B})$, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$. Tada, ako je $x = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$, onda je Zaista, ako je $c_i \in C$ onda $c_i \leq c_1 + c_2 + \ldots + c_k$ pa je $c_i \in \psi(x)$ tj. $C \subseteq \psi(x)$. neka je $b \in \psi(x)$ i pretpostavimo da $b \notin C$. Tada

$$b \leq x \Rightarrow b \leq c_1 + \ldots + c_k$$

$$\Rightarrow b = b \cdot x = b \cdot (c_1 + \ldots + c_k) = (b \cdot c_1) + \ldots + (b \cdot c_k) = 0 + \ldots + 0 = 0$$

c_j različiti atomi , kontradikcija. Naša pretpostavka nije dobra pa je $b \in B$. uje da je $\psi(x) = C$ tj. ψ je sirjekcija. Kako smo u T3.5 dokazali da je ψ "1–1" je ψ bijekcija. Prema tome, $|B| = |\mathcal{P}(\mathrm{At}\ (\mathcal{B}))|$, pa ako $|\mathrm{At}\ (\mathcal{B})| = n$, onda $|B| = 2^n$.

$\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dve konačne BA sa istim brojem elementata , onda na osnovu prethodno og sledi da imaju isti broj atoma. No, ako je $|\mathrm{At}(\mathcal{A})| = |\mathrm{At}(\mathcal{B})|$, onda su ajuće Booleove skupovne algebre sa nosačima $\mathcal{P}(\mathrm{At}(\mathcal{A}))$ i $\mathcal{P}(\mathrm{At}(\mathcal{B}))$ ne, iz čega sledi da su i algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ izomorfne.

ntabilnost kompletnih atomičnih Booleovih algebri

U Posledici 3.1 smo videli da je preslikavanje ψ (definisano u L3.3) sirjekcija konačnih algebri, pa je svaka konačna BA izomorfna sa nekom Booleovom skupovnom algebrom. Dokazaćemo da isti zaključak važi i za klasu svih kompletnih atomičnih Booleovih algebri.

Lema 3.4 Neka je $\mathcal{B}$ kompletna atomična BA. Tada preslikavanje $\psi: B \to \mathcal{P}(\mathrm{At}(\mathcal{B}))$ definisano sa $\psi(x) = \{b \in \mathrm{At}(\mathcal{B}) \mid b \leq x\}$ jeste sirjekcija.

Dokaz.

Neka je $C \subseteq \mathrm{At}(\mathcal{B})$. Dokažimo da za $a = \sum C$ važi $\psi(a) = C$. Jasno, za sve $c \in C$ važi $c \leq a$ tj. $C \subseteq \psi(a)$. Obratno , neka je $d \in \mathrm{At}(\mathcal{B}), d \leq a$ i pretpostavimo da $d \notin C$. Tada na osnovu T1.11 (infimum dva različita atoma je 0) i T1.12 (beskonačna distributivnost) imamo sledeće: $d = d \cdot a = d \cdot \sum\{c \mid c \in C\} = \sum\{d \cdot c \mid c \in C\} = 0$, što je kontradikcija. Sledi da važi $\psi(a) \subseteq C$. Tako dobijamo $\psi(a) = C$, tj. ψ je sirjekcija.

□

Na osonovu L3.3 i L3.4 možemo dokazati da je u svakoj kompletnoj, atomičnoj BA svaki element supremum atoma koji su manji od njega.

Posledica 3.2 U svakoj kompletnoj atomičnoj Booleovoj algebri $\mathcal{B}$, za sve elemente $b \in B$ važi: $b = \sum\{a \mid a \in \mathrm{At}(\mathcal{B}) \wedge a \leq b\}$.

Dokaz.

Neka je $C = \{a \mid a \in \mathrm{At}(\mathcal{B}) \wedge a \leq b\}$. Po definiciji preslikavanja ψ (videti L3.3) to znači da je $\psi(b) = C$. S druge strane, u L3.4 smo dokazali da je $\psi(\sum C) = C$ pa kako je prema L3.3 preslikavanje ψ injekcija dobijamo da je $b = \sum C$, što je i trebalo dokazati.

□

Teorema 3.6 (o reprezentabilnosti kompletnih atomičnih BA) Svaka kompletna atomična Booleova algebra je izomorfna sa nekom Booleovom skupovnom algebrom.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{B}$ kompletna atomična BA. Preslikavanje $\psi: B \to \mathcal{P}(\mathrm{At}(\mathcal{B}))$ definisano u L3.3 jeste (na osnovu L3.3 i L3.4) bijekcija, a kako smo u dokazu T3.5 videli da je ψ i homomorfizam, sledi da je ψ izomorfizam. Tako , algebra $\mathcal{B}$ je izomorfna skupovnoj Booleovoj algebri sa nosačem $\mathcal{P}(\mathrm{At}(\mathcal{B}))$.

□

Reprezentabilnost Booleovih algebri

Za dokazivanje opšte teoreme reprezentabilnosti Booleovih algebri potrebni su nam neki novi pojmovi.

Definicija 3.3 *Ideal* Booleove algebre $\mathcal{B}$ je neprazan skup $I \subseteq B$ tako da

(i) $(x \in I \wedge y \in I) \Rightarrow x+y \in I$

(ii) $(i \in I \wedge x \in B) \Rightarrow i \cdot x \in I$.

Svaki ideal $I \neq B$ je *pravi ideal*. Za ideal M kažemo da je *maksimalan* akko je M pravi ideal i ne postoji pravi ideal I u $\mathcal{B}$ tako da je $M \subseteq I$, $M \neq I$. Može se dokazati sledeće:

Lema 3.4 Ako je $x \neq 0$ neki element Booleove algebre $\mathcal{B}$, onda postoji maksimalni ideal od $\mathcal{B}$ koji *ne sadrži* x.

Dokaz.

Videti recimo u [Me 70].

Teorema 3.7 (Stoneova teorema o reprezentaciji BA) Svaka Booleova algebra se može potopiti u neku Booleovu skupovnu algebru.

Dokaz (*skica*).

Neka je $\mathcal{B}$ neka BA, a $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ skup svih maksimalnih ideala od $\mathcal{B}$. Može se dokazati da je preslikavanje $\psi : B \to \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{B}))$ dato sa $\psi(x) = \{M \in \mathcal{M}(\mathcal{B}) \mid x \notin M\}$ jedno potapanje algebre $\mathcal{B}$ u algebru $(\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{B})), \cup, \cap, -, \emptyset, \mathcal{M}(\mathcal{B}))$.

Primetimo da Stoneova teorema o reprezentaciji Booleovih algebri sledi i iz teoreme Birkhoffa o poddirektnom razlaganju (T1.25). Označimo sa $\mathbf{2}$ dvoelementnu Booleovu algebru sa nosačem $\{0,1\}$ u kojoj je $0<1$, $\overline{0}=1, \overline{1}=0$. Tada:

Lema 3.5 Algebra $\mathbf{2}$ jeste, do na izomorfizam, jedina netrivijalna direktno nerazloživa BA.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1) \in$ BA i neka je $a \in B$. Označimo sa $[0, a]$ skup svih elemenata između 0 i a tj. $[0, a] = \{b \in B \mid 0 \leq b \leq a\}$. Neka je $\mathcal{B}|_a$ algebra

$([0,a],+,\cdot,^*,0,a)$ tipa $(2,2,1,0,0)$ u kojoj su operacije $+$ i $\cdot$ restrikcije odgovarajućih operacija iz $\mathcal{B}$, i $b^*=\bar{b}\cdot a$. Nije teško dokazati da je $\mathcal{B}|_a$ Booelova algebra.

Dalje, preslikavanje $\varphi: B\to[0,a]\times[0,\bar{a}]$ definisano $\varphi(b)=(a\cdot b,\bar{a}\cdot b)$ jeste izomorfizam između $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}|_a\times\mathcal{B}|_{\bar{a}}$. Tako, svaku netrivijalnu algebru $\mathcal{B}$ koja ima bar tri elementa možemo razložiti na direktan proizvod netrivijalnih algebri (jer ako je $a\in B$ takav da je $0<a<1$ onda je i $0<\bar{a}<1$ pa su algebre $\mathcal{B}|_a$ i $\mathcal{B}|_{\bar{a}}$ netrivijalne).

□

Lema 3.6 Za svaki skup X, Booelova skupovna algebra $\mathcal{B}(X)$ je izomorfna sa direktnim stepenom $\mathbf{2}^X$.

Dokaz.

Neka je $\varphi:\mathcal{P}(X)\to\{0,1\}^X$ preslikavanje definisano na sledeći način:

$$\varphi(A)=\xi_A \text{ akko je } \xi_A(x)=\begin{cases}0 & \text{ako je } x\in A\\ 1 & \text{ako } x\notin A\end{cases}.$$

Lako se dokazuje da je $\varphi:\mathcal{B}(X)\to\mathbf{2}^X$ izomorfizam.

□

Teorema 3.7' (Stoneova teorema o reprezentaciji BA) Svaka BA se može potopiti u neku Booleovu skupovnu algebru.

Dokaz.

Na osnovu teoreme Birkhoffa (T1.25) svaka algebra je izomorfna poddirektnom proizvodu poddirektno nerazloživih algebri. Tako, na osnovu L3.5 svaka BA se poddirektno potapa u neki direktan stepen dvoelementne Booleove algebre $\mathbf{2}$. Primenom L3.6 dobijamo da se svaka Booleova algebra $\mathcal{B}$ može potopiti u neku skupovnu Booleovu algebru.

□

3.2 Reprezentabilnost relacionih algebri

Konkretne algebre relacija smo definisali kao podalgebre algebri oblika $\mathcal{E}(\rho)$, gde je ρ neka relacija ekvivalencije. Prirodno je da se reprezentabilnost, u slučaju relacionih algebri, definiše upravo u odnosu na te konkretne algebre.

Definicija 3.4 Za relacionu algebru kažemo da je *reprezentabilna* ako je izomorfna nekoj konkretnoj algebri relacija (tj. ako je izomorfna podalgebri algebre oblika $\mathcal{E}(\rho)$). Klasu svih *reprezentabilnih relacionih algebri* označavamo sa RRA.

□

Slično kao u slučaju oznaka RA i BA, oznaku RRA ćemo povremeno koristiti i za označavanje *jedne* reprezentabilne relacione algebre.

O klasi reprezentabilnih relacionih algebri

Iz definicije vidimo da je svaka puna kao i svaka prava relaciona algebra reprezentabilna. Označimo sa K klasu *svih punih relacionih algebri*. Dokazaćemo da se klasa RRA poklapa sa klasom $ISP(K)$.

Lema 3.7 Direktan proizvod proizvoljne familije punih relacionih algebri jeste reprezentabilna relaciona algebra.

Dokaz.

Neka je $\langle \mathcal{R}(S_i) \mid i \in I \rangle$ familija punih relacionih algebri. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su skupovi S_i disjunktni. Neka je $S = \bigcup \langle S_i \mid i \in I \rangle$, a ρ relacija skupa S definisana na sledeći način:

$$(x,y) \in \rho \text{ akko } (\exists i \in I)(x \in S_i \wedge y \in S_i).$$

Lako se dokazuje da je ρ relacija ekvivalencije skupa S. Dokazaćemo da je

$$\prod \langle \mathcal{R}(S_i) \mid i \in I \rangle \cong \mathcal{E}(\rho).$$

Definišimo preslikavanje $\varphi : \prod \langle \mathcal{P}(S_i^2) \mid i \in I \rangle \to \mathcal{P}(\rho)$ na sledeći način:

$$\varphi(\langle \rho_i \mid i \in I \rangle) = \bigcup \langle \rho_i \mid i \in I \rangle.$$

Kako su sve relacije ρ_i disjunktne međusobno, sledi da je φ injekcija. Takođe se lako dokazuje da je φ sirjekcija. Naime, ako je $\sigma \subseteq \rho$ onda $\varphi(\langle \sigma \cap S_i^2 \mid i \in I \rangle) = \sigma$. Tako, φ je bijekcija. Dokažimo da je φ homomorfizam odgovarajućih relacionih algebri. Prvo, φ se slaže sa Booleovim skupovnim operacijama. Dovoljno je dokazati da se φ slaže sa $\cup$ i $-$:

$$\varphi(\langle \rho_i \mid i \in I \rangle \cup \langle \sigma_i \mid i \in I \rangle) = \varphi(\langle \rho_i \cup \sigma_i \mid i \in I \rangle) = \bigcup \langle \rho_i \cup \sigma_i \mid i \in I \rangle =$$

$$=(\bigcup\langle\rho_i|i\in I\rangle)\cup(\bigcup\langle\sigma_i|i\in I\rangle)=$$

$$=\varphi(\langle\rho_i|\,i\in I\rangle)\cup\varphi(\langle\sigma_i|\,i\in I\rangle).$$

$$\varphi(\overline{\langle\rho_i|\,i\in I\rangle})=\varphi(\langle S_i^2\setminus\rho_i|\,i\in I\rangle)=\bigcup\langle S_i^2\setminus\rho_i|\,i\in I\rangle=\bigcup\overline{\langle\rho_i|\,i\in I\rangle}$$

$$=\overline{\varphi}(\overline{\langle\rho_i|\,i\in I\rangle}).$$

Lako je videti da je $\varphi(\langle\rho_i|\,i\in I\rangle^{-1})=(\varphi(\langle\rho_i|\,i\in I\rangle))^{-1}$ i da je $\varphi(\langle\Delta_{S_i}|\,i\in I\rangle)=\Delta_S$.

Kako je φ bijekcija, sledi da se φ slaže sa operacijom $\circ$ akko se φ^{-1} slaže sa $\circ$. Dokažimo da se φ^{-1} slaže sa operacijom $\circ$, tj. da za sve $\sigma,\delta\subseteq\rho$ važi

$$\varphi^{-1}(\sigma\circ\delta)=\varphi^{-1}(\sigma)\cup\varphi^{-1}(\delta).$$

Treba dokazati da je $\langle S_i^2\cap(\sigma\circ\delta)|\,i\in I\rangle=\langle S_i^2\cap\sigma\,|\,i\in I\rangle\circ\langle S_i^2\cap\delta\,|\,i\in I\rangle$ tj, da za sve $i\in I$ važi $S_i^2\cap(\sigma\circ\delta)=(S_i^2\cap\sigma)\circ(S_i^2\cap\delta)$. Neka je $(x,y)\in S_i^2\wedge(x,y)\in\sigma\circ\delta$. Tada postoji $z\in S$ tako da je $(x,z)\in\sigma$ i $(z,y)\in\delta$. Po definiciji relacije ρ, imajući u vidu da je $\sigma,\delta\subseteq\rho$, dobijamo da $z\in S_i$. Prema tome $(x,z)\in S_i^2\cap\sigma$ i $(z,y)\in S_i^2\cap\delta$, tako da

$$(x,y)\in(S_i^2\cap\sigma)\circ(S_i^2\cap\delta).$$

Ovim smo dokazali da je $S_i^2\cap(\sigma\circ\delta)\subseteq(S_i^2\cap\sigma)\circ(S_i^2\cap\delta)$. Slično se dokazuje i obratna inkluzija.

□

Lema 3.8 Svaka algebra oblika $\mathcal{E}(\rho)$ je izomorfna sa direktnim proizvodom familije punih relacionih algebri.

Dokaz.

Neka je ρ relacija ekvivalencije skupa S, a S_i $(i\in I)$ skup klasa ekvivalencije od ρ. Tada je $\mathcal{E}(\rho)\cong\langle\mathcal{R}(S_i|\,i\in I\rangle$. Naime, preslikavanje φ definisano u L3.7 jeste traženi izomorfizam. Dokaz je potpuno analogan dokazu L3.7.

□

Teorema 3.7 Neka je K klasa svih punih relacionih algebri. Tada je RRA $=ISP(K)$.

Dokaz.

Direktna posledica L3.7 i L3.8.

□

Konačne relacione algebre

Po definiciji, svaka relaciona algebra $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, \circ, 1', ^{-1})$ "sadrži u sebi" Booleovu algebru $\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A}) = (A, +, \cdot, -, 0, 1)$ koju smo nazvali *Booleov redukt od* $\mathcal{A}$. Mnoge osobine Booleovih algebri se na taj način prenose na relacione algebre. Na primer, poznato je da su sve konačne Booleove algebre atomične (videti T1.13) i kompletne (po definiciji kompletnosti) iz čega dobijamo da su *sve konačne RA atomične i kompletne*. Dalje, na osnovu P3.1 sve konačne Booleove algebre imaju 2^n elemenata ($n \in \mathbb{N}$), iz čega sledi da *sve konačne RA imaju* 2^n *elemenata*. Takođe smo videli da sve konačne BA sa istim brojem elemenata imaju isti broj atoma i sve su izomorfne međusobno. Prema tome, ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dve konačne relacione algebre sa istim brojem elemenata, onda se one, do na izomorfizam, *mogu razlikovati samo u operacijama* $\circ$, $1'$ i $^{-1}$.

Kako je svaka konačna relaciona algebra $\mathcal{A}$ kompletna, svaki element $a \in A$ jeste supremum atoma b, $b \le a$ (videti P3.2). Imajući u vidu da su operacije $\circ$ i $^{-1}$ u kompletnoj relacionoj algebri kompletno aditivne (videti T2.15 i T2.16), sledi da su operacije $\circ$ i $^{-1}$ u potpunosti određene ako ih znamo na skupu atoma, tj.

$$x \circ y = \sum \{a \mid a \in \mathrm{At}(\mathcal{A}) \wedge a \le x\} \circ \sum \{b \mid b \in \mathrm{At}(\mathcal{A}) \wedge b \le y\} =$$

$$= \sum \{a \circ b \mid a \in \mathrm{At}(\mathcal{A}) \wedge b \in \mathrm{At}(\mathcal{A}) \wedge a \le x \wedge b \le y\},$$

$$x^{-1} = \left(\sum \{a \mid a \in \mathrm{At}(\mathcal{A}) \wedge a \le x\}\right)^{-1} = \sum \{a^{-1} \mid a \in \mathrm{At}(\mathcal{A}) \wedge a \le x\}.$$

Ove činjenice ćemo u daljem koristiti prilikom konstrukcija relacionih algebri.

Male relacione algebre

Za relacionu algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je *mala* ako ima najviše 3 atoma tj. ako ima najviše 8 elemenata. Postoji 18 tipova neizomorfnih malih relacionih algebri, i može se dokazati da su *sve reprezentabilne*. Pogledajmo kako se određuju sve neizomorfne relacione algebre sa 2 atoma.

Booleova algebra $\mathcal{B}$ sa atomima $\{a, b\}$ ima 4 elemenata: $\{a, b, 0, 1\}$, gde je $a + b = 1$, $a \cdot b = 0$, $\bar{a} = b$, $\bar{b} = a$. U relacionoj algebri $\mathcal{A}$, koja za Booleov redukt ima $\mathcal{B}$, postoje sledeće mogućnosti:

a) $1' = 1$, b) $1' = a$, c) $1' = b$, d) $1' = 0$.

Primetimo da iz d) sledi $x = a \circ 1' = a \circ 0 = 0$, kontradikcija. Kako su elementi a i b ravnopravni, slučajevi b) i c) su potpuno analogni tj. dobijamo izomorfne relacione algebre. Ostaje dakle da ispitamo slučajeve a) i b).

Slučaj a) Iz $a \leq a$ i $b \leq 1 = 1'$ sledi $a \circ b \leq a$. Slično, $a \circ b \leq b$, pa je $a \circ b = 0$. Kako je $a \leq 1'$ i $b \leq 1'$, prema Osobini 2.17 sledi da je $a^{-1} = a, b^{-1} = b$. Tako, operacija $^{-1}$ je potpuno odredena (za sve x, $x^{-1} = x$). Iz $(a \circ b)^{-1} = 0^{-1} = 0$ sledi $b^{-1} \circ a^{-1} = 0$, tj. $b \circ a = a \circ b = 0$. Pretpostavimo da je $a \circ a = 0$. Aksioma R5 daje ($a^{-1} \circ (\overline{a \circ a})$)$a = 0$ tj. $(a \circ 1')a = 0$ odnosno $a\,a = 0$, kontradikcija. Neka je sada $a \circ a = 1' = 1$. Sledi $a \circ a \circ b = 1' \circ b = b$ tj. $0 = b$, kontradikcija. Ako bi bilo $a \circ a = b$, imali bismo da je $b \circ b = 0$, pa iz $(b^{-1} \circ (\overline{b \circ b}))b = 0$ dobijamo kontradikciju. Ostaje jedina mogućnost $a \circ a = a$.

Slično pokazujemo da je $b \circ b = b$. Tablica operacije $\circ$ izgleda ovako:

$\circ$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

Neposredno se proverava, da tako dobijena algebra $\mathcal{A}_3 = (\{a, b, 0, 1\}, +, \cdot, ^-, \circ, 1, ^{-1})$ jeste relaciona algebra.

Slučaj b) Neka je $1' = a$. Prva posledica ove pretpostavke je da $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$ (tako da je za sve $x, x^{-1} = x$). Dalje je $a \circ b = b \circ a = b$. Ako je $b \circ b = 0$, onda je $a(b \circ b) = 0$. Prema Teoremi 2.3 imamo $a(b \circ b) = 0 \Leftrightarrow (b^{-1} \circ a)b = 0 \Leftrightarrow b\,b = 0$, što je kontradikcija. Neka je $b \circ b = b$. Tada je, prema Aksiomi 5, $(b^{-1} \circ (\overline{b \circ b}))b = 0$, tj. $(b \circ a)b = 0$, odnosno $b\,b = 0$, što je kontradikcija. Ostaju, znači sledeće mogućnosti:

(i) $b \circ b = a$, (ii) $b \circ b = 1$.

Ispitajmo prvo slučaj (i) tj. $b \circ b = a$. Znamo da je $1 = a + b$ pa je $b \circ 1 = b \circ (a + b) = (b \circ a) + (b \circ b) = b + a = 1$. Analogno je $1 \circ b = 1$. Tako dobijamo tablicu operacije $\circ$:

$\circ$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	b	1
b	0	b	a	1
1	0	1	1	1

Direktno se proverava da je tako dobijena algebra $\mathcal{A}_4 = (\{a, b, 0, 1\}, +, \cdot, ^-, 0, 1, \circ, a, ^{-1})$ relaciona algebra.

Pogledajmo sada slučaj (ii), tj. $b \circ b = 1$. Tada je

$$b \circ 1 = b \circ (a + b) = (b \circ a) + (b \circ b) = b + 1 = 1.$$

Analogno dobijamo $1 \circ b = 1$, pa proveravanjem tablice operacije $\circ$

$\circ$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	b	1
b	0	b	1	1
1	0	1	1	1

dobijamo da je $\mathcal{A}_5 = (\{a, b, 0, 1\}, +, \cdot, ^-, 0\, 1, \circ, a, ^{-1})$ relaciona algebra. Neposredno se uveravamo da algebre $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ i $\mathcal{A}_5$ nisu izomorfne. S druge strane, sve ove algebre su reprezentabilne. Zaista, algebra $\mathcal{A}_3$ je izomorfna algebri $\mathcal{R}(\{t\}) \times \mathcal{R}(\{t\})$. Algebra $\mathcal{A}_4$ izomorfna je podalgebri pune relacione algebre $\mathcal{R}(U)$, gde je $|U| = 2$, generisanoj praznom relacijom $\emptyset$. Algebra $\mathcal{A}_5$ izomorfna je podalgebri algebre $\mathcal{R}(U)$, $|U| = 3$, generisanoj praznom relacijom $\emptyset$.

□

Navedimo sada sve male RA. Naravno, da bi relaciona algebra bila potpuno određena, dovoljno je navesti skup atoma, odrediti element 1' kao i rezultat operacija $\circ$ i $^{-1}$ na tom skupu.

1) $\mathcal{A}_1$, trivijalna relaciona algebra sa jednim elementom, nema atome, operacije su definisane na oubičajen način.

2) $\mathcal{A}_2$, simetrična, sa skupom atoma $\{1'\}$, $1' \circ 1' = 1'$.

3) $\mathcal{A}_3$, simetrična, sa skupom atoma $\{a, b\}$, $1' = a + b$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	a	b
a	a	0
b	0	b

4) $\mathcal{A}_4$, simetrična, sa skupom atoma $\{a,b\}$, $1'=a$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	a	b
a	a	b
b	b	a

5) $\mathcal{A}_5$, simetrična, sa skupom atoma $\{a,b\}$, $1'=a$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	a	b
a	a	b
b	b	1

6) $\mathcal{A}_6$, simetrična, sa skupom atoma $\{a,b,c\}$, $1'=a+b+c$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	a	b	c
a	a	0	0
b	0	b	0
c	0	0	c

7) $\mathcal{A}_7$, simetrična, sa skupom atoma $\{a,b,c\}$, $1'=\overline{c}$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	a	b	c
a	a	0	0
b	0	b	c
c	0	c	b

8) $\mathcal{A}_8$, simetrična, sa skupom atoma $\{a,b,c\}$, $1'=\overline{c}$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	a	b	c
a	a	0	0
b	0	b	c
c	0	c	$b+c$

9) $\mathcal{A}_9$, sa skupom atoma $\{1',a,b\}$, $a^{-1}=b$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	$1'$	a	b
$1'$	$1'$	a	b
a	a	b	$1'$
b	b	$1'$	a

10) $\mathcal{A}_{10}$, sa skupom atoma $\{1', a, b\}$, $a^{-1} = b$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	1'	a	b
1'	1'	a	b
a	a	a	1
b	b	1	b

11) $\mathcal{A}_{11}$, sa skupom atoma $\{1', a, b\}$, $a^{-1} = b$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	1'	a	b
1'	1'	a	b
a	a	0'	1
b	b	1	0'

12) $\mathcal{A}_{12}$, simetrična, sa skupom atoma $\{1', a, b\}$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	1'	a	b
1'	1'	a	b
a	a	1'	b
b	b	b	$\bar{b}$

13) $\mathcal{A}_{13}$, simetrična, sa skupom atoma $\{1', a, b\}$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	1'	a	b
1'	1'	a	b
a	a	$\bar{b}$	b
b	b	b	$\bar{b}$

14) $\mathcal{A}_{14}$, simetrična, sa skupom atoma $\{1', a, b\}$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	1'	a	b
1'	1'	a	b
a	a	1'	b
b	b	b	1

15) $\mathcal{A}_{15}$, simetrična, sa skupom atoma $\{1\ , a, b\}$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	1'	a	b
1'	1'	a	b
a	a	$\bar{b}$	b
b	b	b	1

16) $\mathcal{A}_{16}$, simetrična, sa skupom atoma $\{1', a, b\}$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	1'	a	b
1'	1'	a	b
a	a	$\bar{a}$	0'
b	b	0'	$\bar{b}$

17) $\mathcal{A}_{17}$, simetrična, sa skupom atoma $\{1', a, b\}$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	1'	a	b
1'	1'	a	b
a	a	$\bar{a}$	0'
b	b	0'	1

18) $\mathcal{A}_{18}$, simetrična, sa skupom atoma $\{1', a, b\}$, operacija $\circ$ definisana sa:

$\circ$	1'	a	b
1'	1'	a	b
a	a	1	0'
b	b	0'	1

□

Iz navedenih podataka, svaka algebra $\mathcal{A}_i$ ($i \leq 18$) se može rekonstruisati. Na primer, algebra $\mathcal{A}_{10}$ ima 8 elemenata $A_{10} = \{0, 1', a, b, 1'+a, 1'+b, a+b, 1\}$, komutativna je, ali nije simetrična ($a^{-1} \neq a$). Ta algebra je reprezentabilna, jer se može potopiti u punu relacionu algebru $\mathcal{R}(\mathbb{R})$. Potapanje dobijamo homomorfnim proširenjem preslikavanja $\varphi : \{1', a, b\} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, koje je dato sa:

$$1' \to \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$a \to \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \ \&\ x < y\}$$

$$b \to \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \ \&\ x > y\}$$

Algebra $\mathcal{A}_{16}$, čiji je skup atoma $\{1', a, b\}$, ima elemente $\{0, 1', a, b, \bar{a}, \bar{b}, 0', 1\}$. $\mathcal{A}_{16}$ je simetrična i komutativna, $\bar{a} = 1' + b$, $1' + a = \bar{b}$, $a + b = 0'$, $1 = 1' + a + b$. $\mathcal{A}_{16}$ je izomorfna podalgebri od $\mathcal{R}(U)$, gde je $|U|=5$. Izomorfizam je induciran sledećim preslikavanjem

$$1' \to \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$a \to \{(0,1),(1,0),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,0),(0,4)\}$$

$$b \to \{(0,2),(2,0),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(3,0),(0,3),(4,1),(1,4)\}.$$

Nereprezentabilne relacione algebre

Relacione algebre su definisane kao apstraktna verzija algebri binarnih relacija i u početku se mislilo da aksiome relacionih algebri tačno "pokrivaju" osobine binarnih relacija. Medutim godine 1950. R. Lyndon pronalazi algebru koja zadovoljava sve aksiome relacione, algebre a nije izomorfna ni jednoj konkretnoj algebri relacija. Drugim rečima, Lyndon je pronašao *nereprezentabilnu relacionu algebru*. Ta algebra ima 2^8 elemenata, i sve do 1966. to je bila najmanja poznata nereprezentabilna relaciona algebra. Na ovom mestu dajemo opis konstrukcije te algebre. Dokaz da Lyndonova algebra ne pripada klasi RRA sledi iz nekih poznatih stavova o tzv. *projektivnim ravnima*, i mi ćemo dati samo skicu tog dokaza. Godine 1966. R. McKenzie daje primer nereprezentabnilne relacione algebre $\mathcal{A}$ od 16 elemenata i ujedno dokazuje da su sve relacione algebre reda manjeg od 16 reprezentabilne. U daljem tekstu dajemo kompletan dokaz da algebra $\mathcal{A}$ nije reprezentabilna.

Lyndonov primer

Neka je S neprazan skup, $I \in S$. Za svaka dva elementa $p,q \in S\setminus\{I\}$ neka

$$\{p\}\circ\{q\} = \begin{cases} S\setminus\{p,q\} & \text{ako } p \neq q \\ \{p,I\} & \text{ako } p=q \end{cases}$$

Za sve $p \in S$ neka je $\{p\}\circ\{I\}=\{I\}\circ\{p\}=\{p,I\}$. Ako su $X,Y \subseteq S$, definišimo $X\circ Y$ i X^{-1} na sledeći način:

$$X\circ Y=\bigcup\{\{p\}\circ\{q\} \mid p\in X \wedge q\in Y\},\quad X^{-1}=X.$$

Označimo sa $\mathcal{L}[S,I]$ algebru $(\mathcal{P}(S),\cup,\cap,-,\emptyset,S,\circ,\{I\},^{-1})$. Tada:

Teorema 3.8 (R.Lyndon) Algebra $\mathcal{L}[S,I]$ jeste relaciona algebra akko je $|S|\neq 3$ i $|S|\neq 4$.

Dokaz.

Direktnom proverom aksioma relacione algebre.

□

Uslovi, pod kojima algebra $\mathcal{L}[S,I]$ jeste reperezentabilna relaciona algebra, u uskoj su vezi sa postojanjem tzv. projektivnih ravni (videti [Ba 86]).

Definicija 3.5 *Projektivna ravan* jeste uređen par (P, L) gde je P neki neprazan skup (*tačaka*), $L \subseteq \mathcal{P}(P)$ (tzv. *prave*) tako da je presek svake dve prave tačno jedna tačka, za svake dve tačke postoji tačno jedna prava koja ih sadrži i postoje bar 4 tačke od kojih nikoje tri ne pripadaju istoj pravoj.

□

Primer 3.1 Neka je $P=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $L=\{\{a,b,c\},\{c,d,e\},\{e,f,a\},\{f,b,d\},$ $\{a,g,d\},\{f,g,c\},\{e,g,b\}\}$. Tada je (P,L) projektivna ravan.

□

Može se dokazati, da u projektivnoj ravni svake dve prave imaju istu kardinalnost $n>0$, i *red projektivne ravni* jeste kardinal m takav da je $m+1=n$. Ako je q stepen prostog broja onda postoji projektivna ravan reda q. Godine 1907. C.R. Innes je dokazao da ne postoji projektivna ravan reda 6 (dokaz te činjenice dao je iste godine i F.H.Safford).

Teorema 3.9 (R.H. Bruck, H.J.Ryser) Postoji beskonačno mnogo brojeva $m\in\mathbb{N}$ takvih da ne postoji projektivna ravan reda m.

Dokaz.

Videti [Br 49].

□

Na primer, za sve $n\in\mathbb{N}$, ne postoji projektivna ravan reda $2\cdot 3^{2n+1}$.

Teorema 3.10 (R.Lyndon) Neka je $|S|\geq 5$. Tada, $\mathcal{L}[S,I] \in \mathrm{RRA}$ akko postoji projektivna ravan reda $|S|-2$.

Dokaz.

Videti [Ly 61].

□

Kako ne postoji projektivna ravan reda 6, onda najmanji skup S koji zadovoljava uslove T 3.10 ima 8 elemenata, tako da nereprezentabilna relaciona algebra dobijena na ovaj način ima $|\mathcal{P}(S)|=2^8$ elemenata.

Najmanja nereprezentabilna RA

Primer najmanje nereprezentabilne relacione algebre dao je R.McKenzie 1966. godine u radu [McK 66] . Ta algebra ima 4 atoma, dakle 16 elemenata.

Teorema 3.11 (R.McKenzie,1966.) Postoji nereprezentabilna relaciona algebra sa 16 elemenata.

Dokaz.

Neka je $S=\{0,1,2,3\}$, neka t_i označava jednočlan skup $\{i\}$, $i\in\{1,2,3\}$, a 1' skup $\{0\}$. Algebru $\mathcal{A}$ definišemo na sledeći način: $\mathcal{A}=(\mathcal{P}(S),\cup,\cap,-,\emptyset,S,\circ,1',^{-1})$, gde su $\cup,\cap,-$ uobičajene Booleove skupovne operacije, dok operacije $\circ$ i $^{-1}$ definišemo na sledeći način:

x	1'	t_1	t_2	t_3
x^{-1}	1'	t_2	t_1	t_3

$\circ$	1'	t_1	t_2	t_3
1'	1'	t_1	t_2	t_3
t_1	t_1	t_1	S	$t_1\cup t_3$
t_2	t_2	S	t_2	$t_2\cup t_3$
t_3	t_3	$t_1\cup t_3$	$t_2\cup t_3$	$\overline{t}_3$

(Napomenimo da su operacije $\circ$ i $^{-1}$ (zbog aditivnosti) potpuno određene.) Neposredno se može proveriti da je ovako definisana algebra $\mathcal{A}$ relaciona algebra. Dokažimo da ona nije reprezentabilna.

Pretpostavimo suprotno, da je $\mathcal{A}$ izomorfna podalgebri $\mathcal{D}$ neke algebre relacija $\mathcal{E}(\rho)=(\mathcal{P}(\rho),\cup,\cap,-,\emptyset,\rho,\circ,\Delta_Y,^{-1})$ i neka je $\varphi:\mathcal{P}(S)\to\mathcal{P}(\rho)$ odgovarajući izomorfizam. Označimo redom sa d_1,d_2,d_3 elemente $\varphi(t_1),\varphi(t_2)$ odnosno $\varphi(t_3)$. Kako je $d_1\neq d_2$, sledi da je $Y\neq\emptyset$. Neka je y neki fiksni element iz Y. Imamo da u algebri $\mathcal{A}$ važi $1'\subseteq t_3\circ t_3$, sledi da je $\Delta_Y\subseteq d_3\circ d_3$, pa možemo izabrati element $z\in Y$ tako da $(y,z)\in d_3$ i $(z,y)\in d_3$. Iz uslova $d_1\circ d_1^{-1}=d_1^{-1}\circ d_1=\rho$ i $d_3\subseteq\rho$ sledi da možemo izabrati elemente $u,v\in Y$ tako da $(y,u)\in d_1$, $(z,u)\in d_1$ odnosno $(v,y)\in d_1$, $(v,z)\in d_1$. Tada $(v,u)\in d_1\circ d_1=d_1$. Koristeći činjenicu da je $d_1\subseteq d_3\circ d_3$, možemo izabrati $t\in Y$ tako da je $(v,t)\in d_3$ i $(t,u)\in d_3$. Sada imamo

$$(t,z)\in(d_3\circ d_1)\cap(d_3\circ d_2)=d_3 \text{ i } t,y)\in(d_3\circ d_3)\cap(d\circ d_2)=d_2.$$

No kako je $(v,y)\in d_1$ i $(y,t)\in d_2^{-1}=d_1$, onda $(v,t)\in d_1\circ d_1=d_1$. Od ranije imamo da $(v,t)\in d_3$,pa sledi da $(v,t)\in d_1\cap d_3=\emptyset$, kontradikcija. Prema tome , naša pretpostavka je pogrešna, i algebra $\mathcal{A}$ nije reprezentabilna.

□

3.3 Algebra kompleksa i reprezentabilnost

U delu 3.2 smo videli da za relacione algebre ne važi teorema o reprezentabilnosti tj. postoje relacione algebre koje nisu izomorfne ni sa jednom algebrom relacija. U takvim slučajevima ima smisla tragati za nekim drugim oblicima reprezentabilnosti. Na ovom mestu ćemo se zadržati na reprezentabilnosti pomoću tzv. *algebri kompleksa*. Poznato je da se svaka normalna Booleova algebra sa operatorima $\mathcal{B}$ može potopiti u algebru kompleksa neke poli–algebre (koju zovemo *atomična struktura* od $\mathcal{B}$). Kako su relacione algebre normalne Booleove algebre sa operatorima, odgovarajuću teoremu reprezentabilnosti za RA dobijamo kao posledicu opšte teoreme reprezentabilnosti za normalne BAO. Prvo ćemo dokazati teoremu reprezentabilnosti za sve normalne BAO, a zatim ćemo u slučaju RA potpuno opisati odgovarajuće atomične strukture.

Dobre BAO

Booleove algebre sa operatorima definisali smo u delu 2.2, kao "proširene" Booleove algebre, tako da su sve dodatne operacije aditivne (videti D2.4).

Definicija 3.6 Neka je $\mathcal{A}$ Booleova algebra sa operatorima $\{F \mid F\in\mathcal{F}\}$.

a) Za $\mathcal{A}$ kažemo da je *atomična* ako je $\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A})$ atomična BA.

b) Za $\mathcal{A}$ kažemo da je *kompletna* ako je $\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A})$ kompletna BA i svi operatori $F\in\mathcal{F}$ su kompletno aditivni (videti D2.4).

c) Za $\mathcal{A}$ kažemo da je *normalna* ako su svi operatori iz $\mathcal{F}$ normalni tj. ako za sve n–arne operatore $F\in\mathcal{F}$ i sve $a_1, a_2,\dots, a_n\in A$ važi

ako postoji neki $k\le n$ tako da je $a_k=0$ onda $F(a_1,a_2,\dots,a_n)=0$.

d) Kompletnu, atomičnu i normalnu BAO zovemo *dobra* BAO.

□

Teorema 3.12 Svaka relaciona algebra jeste normalna BAO.

Dokaz.

Sledi iz T2.12, Osobine 2.1 i Osobine 2.14.

□

Teorema 3.13 Svaka reprezentabilna relaciona algebra jeste dobra BAO.

Dokaz.

Sledi direktno iz T3.12 i definicije reprezentabilne relacione algebre. Naime, kako je RRA⊆RA onda iz T3.12 sledi da je svaka RRA normalna BAO. Svaka RRA jeste podalgebra algebre $\mathcal{E}(\rho)$, pa je kompletna i atomična.

□

Reprezentabilnost normalnih Booleovih algebri sa operatorima sledi iz dve činjenice. Prvo, važi sledeća teorema:

Teorema 3.14 a) Svaka BAO se može potopiti u kompletnu, atomičnu BAO.
b) Svaka normalna BAO se može potopiti u dobru BAO.

Dokaz.

Videti [JTI 51].

□

Drugi deo teoreme reprezentabilnosti Booleovih algebri sa normalnim operatorima jeste činjenica da se svaka dobra BAO može potopiti u algebru kompleksa neke poli–algebre. Dokaz tog (drugog) dela dajemo u potpunosti.

Atomične strukture i algebre kompleksa

Videli smo (u delu 3.2) da je u slučaju kompletnih, atomičnih relacionih algebri za potpuno poznavanje operacija $\circ$, $^{-1}$ dovoljno znati *kao te operacije " rade na atomima"*.

Sasvim analogan zaključak važi u slučaju kompletnih, atomičnih Booleovih algebri sa operatorima. Naime, u takvim algebrama svaki element x jeste supremum atoma a takvih da je $a \leq x$. S druge strane, u takvim BAO svi operatori su kompletno aditivni, tako da se operatori "zadati" na skupu atoma jednoznačno proširuju na celu algebru. Naravno, kao i u slučaju relacionih algebri, operatori na skupu atoma *ne moraju biti prave operacije*: u opštem slučaju, rezultat primene operatora na atome ne mora dati kao rezultat atom. Rezultat je svakako neki element x date algebre koji je jednoznačno odreden *skupom atoma* a, $a\leq x$.

Definicija 3.7 Svako preslikavanje $f:A^n\to\mathcal{P}(A)$ zovemo *n-arna poli-operacija skupa* A. Ureden par $(A,\mathcal{F})$ jeste *poli-algebra* ako je A neprazan skup, a $\mathcal{F}$ skup poli-operacija na A.

□

Prema tome, ako je F neki n-arni operator kompletne, atomične algebre $\mathcal{A}\in$ BAO, onda je F u potpunosti odreden poli-operacijom $F^\alpha:(\mathrm{At}(\mathcal{A}))\to\mathcal{P}(\mathrm{At}(\mathcal{A}))$ koja je definisana na sledeći način:

$$(*)\qquad F^\alpha(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\{a\in\mathrm{At}(\mathcal{A})\mid a\leq F(a_1,a_2,\ldots,a_n)\}.$$

Definicija 3.8 Neka je $\mathcal{A}$ kompletna atomična BAO, sa skupom operatora $\mathcal{F}$. Za svaki n-arni operator $F\in\mathcal{F}$ definišemo poli-operaciju F^α: $(\mathrm{At}(\mathcal{A}))\to\mathcal{P}(\mathrm{At}(\mathcal{A}))$ kao:

$$F^\alpha(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\{a\in\mathrm{At}(\mathcal{A})\mid a\leq F(a_1,a_2,\ldots,a_n)\}.$$

Tada algebru $\mathcal{A}t(\mathcal{A})=(\mathrm{At}(\mathcal{A}),\{F^\alpha\mid F\in\mathcal{F}\})$ zovemo *atomična struktura od* $\mathcal{A}$.

□

Ako imamo atomičnu strukturu neke kompletne, atomične BAO, operatore dobijamo "kompletnim aditivnim proširivanjem" sa skupa atoma na celu algebru. To "aditivno proširivanje" možemo definisati u opštem slučaju, za sve poli-algebre.

Definicija 3.9 Neka je $\mathcal{A}=(A,\mathcal{H})$ poli-algebra. Za svaku n-arnu poli-operaciju $H\in\mathcal{H}$ definišimo preslikavanje $H^*:\mathcal{P}(A)^n\to\mathcal{P}(A)$ na sledeći način:

$$H^*(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\{y\in A\mid(\forall i\leq n)(\exists x_i\in X_i)\ y\in H(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}.$$

Tada algebru $\mathcal{C}m(\mathcal{A})=(\mathcal{P}(A),\cup,\cap,-,\emptyset,A,\langle H^*\mid H\in\mathcal{H}\rangle)$ zovemo *algebra kompleksa poli-algebre* $\mathcal{A}$.

□

Teorema 3.15 Za svaku poli-algebru $\mathcal{A}$, algebra kompleksa $\mathcal{C}m(\mathcal{A})$ jeste dobra BAO.

Dokaz.

Nosač algebre $\mathcal{C}m(\mathcal{A})$ jeste $\mathcal{P}(A)$ iz čega slede osobine atomičnosti i kompletnosti

Booleovog redukta algebre $\mathcal{C}m(\mathcal{A})$. Neka je H n–arna poli–operacija poli–algebre $\mathcal{A}$. Po D3.9, operacija $H^*:\mathcal{P}(A)^n \to \mathcal{P}(A)$ jeste kompletno aditivna:

$$H^*(X_1,X_2,\ldots,\bigcup\{Y_i \mid i\in I\},\ldots,X_n)=\bigcup\{H^*(X_1,X_2,\ldots,Y_i,\ldots,X_n) \mid i\in I\}.$$

Naravno, $H^*(X_1,X_2,\ldots,\emptyset,\ldots,X_n)=\emptyset$, pa je operator H^* normalan. Prema tome, $\mathcal{C}m(\mathcal{A})$ jeste dobra Booleova algebra sa operatorima.

□

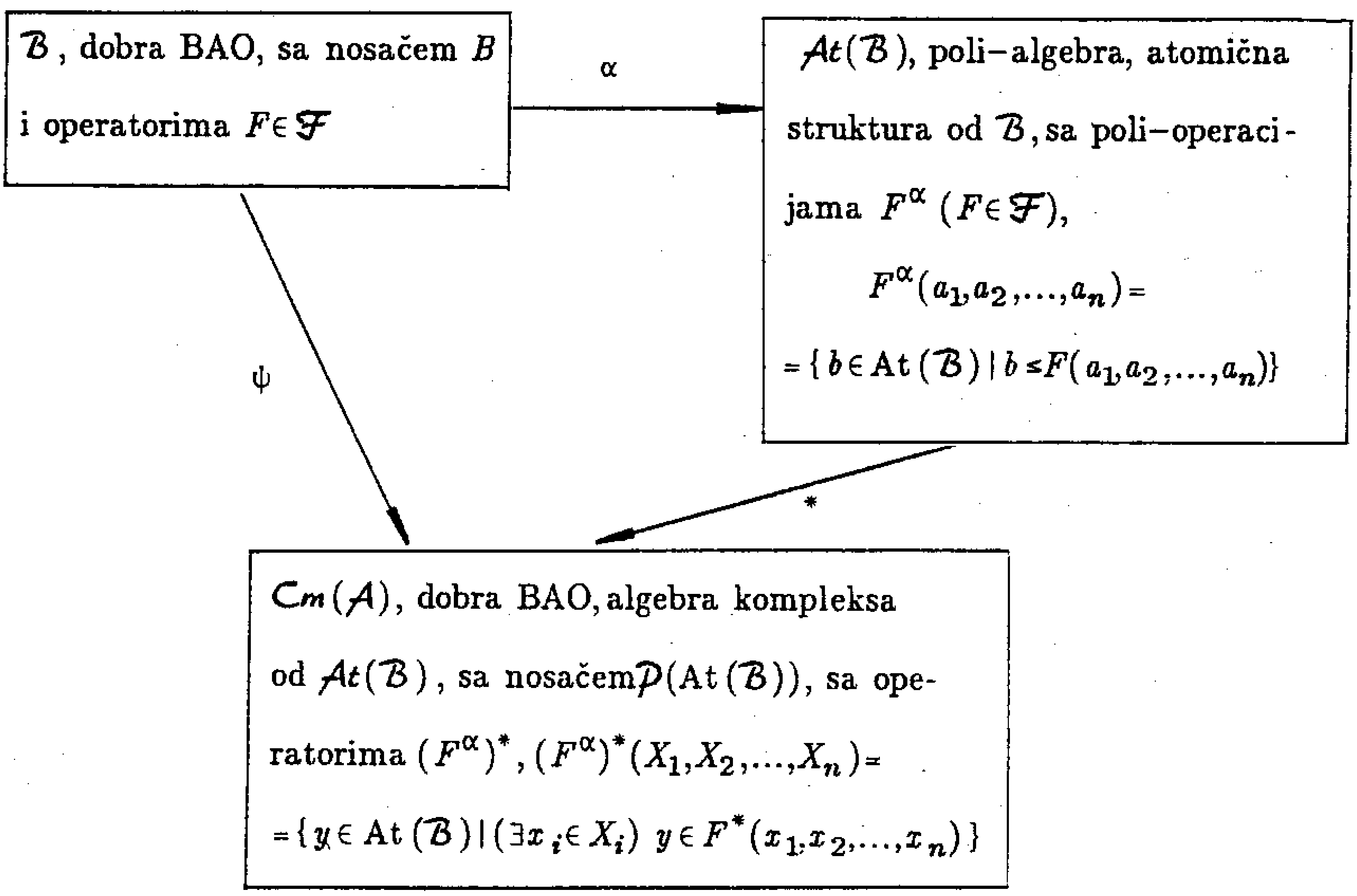
Važi i obrat Teoreme 3.15 : svaka dobra BAO jeste algebra kompleksa neke poli–algebre. Dokaz te činjenice ujedno pokazuje kako se određena dobra BAO može konstruisati (ili rekonstruisati) znajući samo njenu atomičnu strukturu.

Teorema 3.16 (reprezentacija dobrih BAO) Svaka dobra Booleova algebra sa operatorima $\mathcal{B}$ izomorfna je algebri kompleksa poli–algebre $\mathcal{A}t(\mathcal{B})$.

Dokaz.

Neka je ψ: $B\to\mathcal{P}(\mathrm{At}(\mathcal{B}))$ preslikavanje definisano sa $\psi(b)=\{a \mid a\in \mathrm{At}(\mathcal{B}) \wedge a\le b\}$.

Tada imamo sledeću situaciju:



Na osnovu L3.3 i L3.4 ψ je bijekcija. U T3.5 smo dokazali da se ψ slaže sa svim Booleovim skupovnim operacijama, tako da je ψ homomorfizam Booleovog redukta algebre $\mathcal{B}$. Treba još dokazati da se ψ slaže sa svim operatorima algebre $\mathcal{B}$ tj. ako je F neki n-arni operator algebre $\mathcal{B}$ onda za sve $b_1,b_2,\ldots,b_n \in B$ važi

$$\psi(F(b_1,b_2,\ldots,b_n)) = (F^\alpha)^*(\psi(b_1),\psi(b_2),\ldots,\psi(b_n)). \tag{1}$$

Ako postoji $i \in \{1,2\ldots,n\}$ tako da je $b_i=0$, onda zbog normalnosti operatora F sledi da (1) trivijalno važi. Pretpostavimo da za sve $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ važi $b_i \neq 0$.

Neka je $a \in \psi(F(b_1,b_2,\ldots,b_n))$; onda

$$a \in \mathrm{At}(\mathcal{B}) \text{ i } a \leq F(b_1,b_2,\ldots,b_n). \tag{2}$$

Primetimo da je $\psi(b_i) \neq \emptyset$, kao i da na osnovu P2.3 važi $b_i = \sum \psi(b_i)$, za sve $i \leq n$. Tako,

$$a \leq F(\sum\psi(b_1),\sum\psi(b_2),\ldots,\sum\psi(b_n)). \tag{3}$$

Element a je atom, tako da za sve $c_k \in \psi(b_k)$, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, važi

$$a \cdot F(c_1,c_2,\ldots,c_n) = a \quad \text{ili} \quad a \cdot F(c_1,c_2,\ldots,c_n) = 0.$$

Ako bi za sve $c_k \in \psi(b_k)$, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, važilo $a \cdot F(c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$, onda bi zbog uslova (3) i kompletne aditivnosti operatora F dobili

$$a \cdot F(\sum\psi(b_1),\sum\psi(b_2),\ldots,\sum\psi(b_n)) = \sum\{a \cdot F(c_1,c_2,\ldots,c_n) \mid c_i \in \psi(b_i), i \leq n\} = 0.$$

Iz toga sledi da je $a \cdot F(b_1,\ldots,b_n)=0$, što je kontradikcija sa (2). Prema tome, postoje $d_i \in \psi(b_i)$, $k \leq n$, tako da je $a \cdot F(d_1,d_2,\ldots,d_n)=a$ tj. $a \leq F(d_1,d_2,\ldots,d_n)$. Po definiciji poli-operacije F^α odnosno operacije $(F^\alpha)^*$ u algebri kompleksa, sledi

$$a \in F^\alpha(d_1,d_2,\ldots,d_n) \quad \text{tj.} \quad a \in (F^\alpha)\ (\psi(b_1),\psi(b_2),\ldots,\psi(b_n))$$

što je trebalo dokazati.

Obratno, ako $a \in (F^\alpha)\ (\psi(b_1),\psi(b_2),\ldots,\psi(b_n))$ onda, po definiciji operacije $(F^\alpha)^*$ u algebri kompleksa, dobijamo da je a atom i postoje $d_i \in \psi(b_i)$, $i \leq n$, tako da je $a \in F^\alpha(d_1,d_2,\ldots,d_n)$. To znači da je $a \leq F(d_1,d_2,\ldots,d_n)$. Kako je F aditivna operacija, sledi da je i monotona, pa iz $d_k \leq b_k$ ($k \leq n$) dobijamo

$$a \leq F(d_1,d_2,\ldots,d_n) \leq F(b_1,b_2,\ldots,b_n) \quad \text{sledi} \quad a \in \psi(F(b_1,b_2,\ldots,b_n))$$

što je trebalo dokazati. Prema tome, ψ je izomorfizam i $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}m(\mathcal{A}t(\mathcal{B}))$.

□

Napomenimo da se može dokazati: za svaku poli–algebru $\mathcal{A}$ važi da je

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{A}t(\mathcal{C}m(\mathcal{A})).$$

Teorema 3.17 (reprezentacija normalnih BAO) Svaka normalna Booleova algebra sa operatorima se može potopiti u algebru kompleksa neke poli-algebre.

Dokaz.

Direktna posledica T3.16 i T3.14(b).

□

Poli-grupe i relacione algebre

Veza poli-algebri i relacionih algebri data je u radu [Co 84] S. Comera. Interesantno je da poli-algebre, čije algebre kompleksa daju R A, predstavljaju prirodno uopštenje grupa.

Definicija 3.10 (S. Comer). Poli-grupa je poli algebra $\mathcal{M}=(M, \circ, I, {}^{-1})$, gde je $\circ$ binarna poli-operacija, $I \subseteq M$, i ${}^{-1}$ unarna operacija tako da za sve $x, y, z \in M$ važi

(i) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

(ii) $x \circ I = I \circ x = x$

(iii) $x \in y \circ z \Leftrightarrow y \in x \circ z^{-1} \Leftrightarrow z \in y^{-1} \circ x.$

□

Napomena. U gornjoj definiciji primenjujemo neke očigledne konvencije:

(1) Za $A, B \subseteq M$, $A \circ B = \bigcup \{ a \circ b : a \in A, b \in B \}$

(2) Elementi skupa M poistovećuju se sa odgovarajućim singltonima tj. $a = \{ a \}$ za svako $a \in M$.

Primer 3.2 Algebre dvostrukih koseta. Pretpostavimo da su G i H grupe i da je H podgrupa od G. Formiramo sistem $\mathcal{M}=(M, \circ, H, {}^{-1})$, gde je $M = \{ HgH : g \in G \}$ skup dvostrukih koseta, $(HgH)^{-1} = Hg^{-1}H$, i $(Hg_1H) \circ (Hg_2H) = \{ Hg_1\ h\ g_2\ H : h \in H \}$. Lako se proverava da je navedeni sistem poli-grupa.

□

Lema 3.9 Neka je $\mathcal{M}=(M, \circ, I, ^{-1})$ poli-grupa. Tada:

(i) $x \circ x = x$, $x \in I$.

(ii) $x^{-1} = x$, $x \in I$.

(iii) Ako je $x \neq x'$, onda $x \circ x' = \emptyset$ za sve $x, x' \in I$.

(iv) $y \in I$ i $x \circ y \neq \emptyset$, onda $x \circ y = x$. Slično $x \circ y = y$ ako $x \in I$ i $x \circ y \neq \emptyset$.

(v) $x \circ x^{-1} \cap I \neq \emptyset$ i $x^{-1} \circ x \cap I \neq \emptyset$.

(vi) $x \circ y \cap I \neq \emptyset \Rightarrow y = x^{-1}$.

(vii) $(x^{-1})^{-1} = x$.

(viii) $|x \circ x^{-1} \cap I| = 1$ i $|x^{-1} \circ x \cap I| = 1$.

(ix) Za svako $x \in M$ postoje jedinstveni $e, e' \in I$ tako da je $e \circ x = x \circ e' = x$.

(x) $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.

Dokaz.

(i) $e \in x \circ x \Rightarrow e \in x \circ I = I \circ x = x \Rightarrow e = x$.

(ii) $x^{-1} \circ I = I \circ x^{-1} = x^{-1} \Rightarrow x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = x^{-1}$ Kako je $x \in x \circ x$ (tj. $x = x \circ x$ prema (i)) iz definicije poli-grupe sledi da je $x \in x \circ x \Leftrightarrow x \in x \circ x^{-1} \Leftrightarrow x \in x^{-1} \circ x$. Sledi $x = x^{-1}$.

(iii) Pretpostavimo da postoji $e \in x \circ x'$ (tj. da je $x \circ x' \neq \emptyset$). Sledi da $e \in x \circ I = I \circ x = x$, pa je $e = x$. Analogno dobijamo $e = x'$, što je kontradikcija.

(iv) $x \circ I = I \circ x = x \Rightarrow x \circ y = x$ jer je $x \circ y \neq \emptyset$. Analogno $x \circ y = y$, ako $x \in I$ i $x \circ y \neq \emptyset$.

(v) Za svako $x \in M$ važi $x \circ I = I \circ x = x$ pa postoji $i \in I$ takvo da je $x \circ i \neq \emptyset$. Prema (iv) sledi da je $x \circ i = x$. Iz definicije poli-grupe imamo $x \in x \circ i \Leftrightarrow i \in x^{-1} \circ x$. Analogno za neko $j \in I$ važi $j \circ x = x$ pa sledi $j \in x^{-1} \circ x$.

(vi) Pretpostavimo da $e \in x \circ y \cap I$. Tada je $e \in x \circ y \Leftrightarrow y \in x^{-1} \circ e \subseteq \subseteq x^{-1} \circ I = I \circ x^{-1} = x^{-1}$. Sledi $y = x^{-1}$.

(vii) $x^{-1} \circ x \cap I \neq \emptyset$ (prema (v)) pa iz (vi) sledi $x = (x^{-1})^{-1}$.

(viii) Pretpostavimo da postoje $e_1, e_2 \in I$, $e_1 \neq e_2$, takvi da je $e_1, e_2 \in x \circ x^{-1}$. Iz $e_1 \in x \circ x^{-1}$ sledi $x \in e_1 \circ x$ tj. $x = e_1 \circ x$. Analogno $x = e_2 \circ x$. Iz (iii) sledi $e_2 \circ e_1 = \emptyset$. Dalje je $x = e_2 \circ x = e_2 \circ (e_1 \circ x) = (e_2 \circ e_1) \circ x = \emptyset \circ x = \emptyset$, što je kontradikcija.

(ix) Kako važi da je $x \circ I = I \circ x = x$ za sve $x \in M$, sledi da postoje $e, e' \in I$ takvi da je $e \circ x = x \circ e' = x$. Pretpostavimo da postoji $e'' \in M$ takvo da je $e'' \circ x = x$. Imamo sada sledeće $e \circ x = x \Leftrightarrow e \in x \circ x^{-1}$ tj. $e = x \circ x^{-1}$. Analogno $e'' \in x \circ x^{-1}$ zj. $e'' = x \circ x^{-1}$, pa sledi jedinstvenost.

(x) Pokažimo da je $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$. Neka $a \in (x \circ y)^{-1}$; tada $a = b^{-1}$ za neko $b \in x \circ y$. Dalje, $b \in x \circ y \Leftrightarrow x \in b \circ y^{-1} \Leftrightarrow y \in x^{-1} \circ b \Leftrightarrow x^{-1} \in y \circ b^{-1} \Leftrightarrow b^{-1} \in y^{-1} \circ x^{-1}$, iz čega sledi $a \in y^{-1} \circ x^{-1}$. Obratno, $c \in y^{-1} \circ x^{-1} \Leftrightarrow y^{-1} \in c \circ x \Leftrightarrow x \in c^{-1} \circ y^{-1} \Leftrightarrow c^{-1} \in x \circ y$, iz čega sledi $c \in (x \circ y)^{-1}$.

□

Konstruišimo sada algebru kompleksa date poli-grupe $\mathcal{M} = (M, \circ, I, ^{-1})$. Dobijamo sistem $\mathcal{C}m\,(\mathcal{M}) = (\mathcal{P}(M), \cup, \cap, -, \emptyset, M, \square, I, ^{\triangledown})$, gde za $X, Y \subseteq M$ važi:

$$X \square Y = \{z \in M : z \in x \circ y \text{ za neke } x \in X \text{ i } y \in Y\},\quad X^{\triangledown} = \{x^{-1} : x \in X\}$$

Teorema 3.18 Algebra kompleksa poli-grupe $\mathcal{M} = (M, \circ, I, ^{-1})$ je kompletna, atomična relaciona algebra.

Dokaz.

$\mathcal{C}m(\mathcal{M})$ je očigledno atomična Booleova algebra. Iz tačke (ii) definicije poli-grupe sledi da je $I \neq \emptyset$. Potrebno je pokazati da važe i ostale aksiome RA. Asocijativnost direktno sledi iz tačke (i) definicije poli-grupe. Multiplikativna jedinica biće I, jer je $X \square I = \bigcup\{x \circ I : x \in X\} = \bigcup\{\{x\} : x \in X\} = X$. Pretpostavimo da je $(X \square Y) \cap Z = \emptyset$ i pokažimo da je tada $(X^{\triangledown} \square Z) \cap Y = \emptyset$. Ako pretpostavimo da je $(X^{\triangledown} \square Z) \cap Y \neq \emptyset$, onda postoji $a \in (X^{\triangledown} \square Z) \cap Y$ tj. $a \in X^{\triangledown} \square Z$ i $a \in Y$. Sledi da je $a = x^{-1} \circ z$ za neko $x \in X$ i $z \in Z$ i $a = y$ za neko $y \in Y$. Imamo da je $y = x^{-1} \circ z \Leftrightarrow z \in x \circ y$ tj. $z \in (X \square Y) \cap Z$, što je kontradikcija. Obratno, neka je $(X^{\triangledown} \square Z) \cap Y = \emptyset$, a $(X\Box Y)\cap Z\neq\emptyset$. Tada postoji $a\in(X\Box Y)\cap Z$ tj. $a=x\circ y$ i $a=z$, za neke $x\in X, y\in Y$ i $z\in Z$. Iz $z=x\circ y$ sledi da $y\in x^{-1}\circ z$, tj. $(X^{\triangledown}\Box Z)\cap Y\neq\emptyset$, što je kontradikcija. Analogno pokazujemo da je $(X\Box Y)\cap Z=\emptyset$ ekvivalentno sa $(Z\Box Y^{\triangledown})\cap X=\emptyset$. Iz Teoreme 2.3 sledi da je $\mathcal{C}m(\mathcal{M})$ relaciona algebra.

□

Teorema 3.19 Ako je $\mathcal{M}=(M,+,\cdot,-,0,1,\circ,1',^{-1})$ kompletna, atomična RA sa $0\neq 1$, onda je atomična struktura $\mathcal{A}t(\mathcal{M})=(\mathrm{At}(\mathcal{M}),\circ,I,^{-1})$ poli-grupa i važi $\mathcal{M}\cong\mathcal{C}m(\mathcal{A}t(\mathcal{M}))$.

Dokaz.

Primetimo da na osnovu T3.16 sledi da je $\mathcal{M}\cong\mathcal{C}m(\mathcal{A}t(\mathcal{M}))$.Treba dokazati da je $\mathcal{A}t(\mathcal{M})$ poli-grupa. Po definiciji atomične strukture (D3.8) imamo da važi:

$$I=\{x\in \mathrm{At}(\mathcal{M})\mid x\leq 1'\},\quad a\circ b=\{u\in\mathrm{At}(\mathcal{M})\mid u\leq a\circ b\},$$

$$a^{-1}=\{v\in\mathrm{At}(\mathcal{M})\mid v\leq a^{-1}\}.$$

Primetimo da ako je a atom, onda je i a^{-1} atom, tako da je $a^{-1}=\{a^{-1}\}$. Pokažimo prvo da za sve $a,b,c\in\mathrm{At}(\mathcal{M})$ važi $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$. Neka je $x\in a\circ(b\circ c)$. Sledi $x\in a\circ\{u\mid u\leq b\circ c\}\Rightarrow x\in\bigcup\{a\circ u\mid u\leq b\circ c\}\Rightarrow x\in\{v\in\mathrm{At}(\mathcal{M})\mid v\leq a\circ u\ \wedge$ $\wedge\ u\leq b\circ c\}\Rightarrow x\leq a\circ b\circ c$. Kako je $a\circ b=\sum\{t\mid t\leq a\circ b\}$, sledi $x\leq(\sum\{t\mid t\leq a\circ b\})\circ c=$ $=\sum\{t\circ c\mid t\leq a\circ b\}$. Množenjem sa x leve i desne strane nejednakosti dobijamo $xx=x\leq x(\sum\{t\circ c\mid t\leq a\circ b\})$, tj. $x\leq\sum\{x(t\circ c)\mid t\leq a\circ b\}$. Element $x(t\circ c)$ je ili 0 ili x jer $x\in\mathrm{At}(\mathcal{M})$. Ako bi bilo $x(t\circ c)=0$ za svako $t\leq a\circ b$, sledilo bi da je $x=0$, što je kontradikcija. Sledi da postoji $t_0\leq a\circ b$ takvo da je $x\leq t_0\circ c$. Kako je $t_0\in a\circ b$ sledi da je $x\in(a\circ b)\circ c$, tj. $a\circ(b\circ c)\subseteq(a\circ b)\circ c$ Analogno dokazujemo da je $(a\circ b)\circ c\subseteq a\circ(b\circ c)$, pa važi asocijativnost. Dalje imamo da je

$$a\circ I=a\circ\{u\mid u\leq 1'\}=\bigcup\{a\circ u\mid u\leq 1'\}=\{v\mid v\leq a\circ u \text{ i } u\leq 1'\}.$$

Ako je $u\leq 1'$, onda je $a\circ u\leq a$, tj. $v=0$ ili $v=a$. Slučaj $v=0$ otpada, jer $0\notin\mathrm{At}(\mathcal{M})$. Ne može biti $a\circ u=0$ za svako $u\leq 1'$ jer bi bilo

$$a=a\circ 1'=a\circ\sum\{u\mid u\leq 1'\}=\sum\{a\circ u\mid u\leq 1'\}=0,$$

što je kontradikcija. Sledi $a\circ I=a$. Analogno pokazujemo da je $I\circ a=a$. Pokažimo da je $x\in y\circ z\ \Leftrightarrow\ y\in x\circ z^{-1}\ \Leftrightarrow\ z\in y^{-1}\circ x$. Neka je $x\in y\circ z$. Tada

$(*) \qquad x \leq y \circ z$ tj. $x(y \circ z) = x$.

Ako pretposatvimo da $y \notin x \circ z^{-1}$, dobijamo sledeće :

$$y \nleq x \circ z^{-1} \Rightarrow y(x \circ z^{-1}) = 0 \Leftrightarrow x(y \circ z) = 0,$$

što je protivurečno sa $(*)$. Analogno, iz $y \in x \circ z^{-1}$ zaključujemo da je $y(x \circ z^{-1}) = y$. Ako $x \notin y \circ x$ tj. $x \nleq y \circ z$ sledi da je $x(y \circ z) = 0$, što je ekvivalentno sa $y(x \circ z^{-1}) = 0$, kontradikcija. Tako smo dobili da je $x \in y \circ z \Leftrightarrow y \in x \circ z^{-1}$. Ekvivalencija poslednje dve formule sa $z \in y^{-1} \circ x$ pokazuje se slično prethodnom.

□

Teorema 3.20 Svaka kompletna, atomična relaciona algebra jeste izomorfna sa algebrom kompleksa neke poli-grupe.

Dokaz.

Direktna posledica Teoreme 3.19.

□

Teorema analogna T3.14 jeste sledeća:

Teorema 3.21 Svaka relaciona algebra se može potopiti u kompletnu, atomičnu relacionu algebru.

Dokaz.

Videti [JTII 52].

□

Teorema 3.22 Svaka relaciona algebra se može potopiti u algebru kompleksa neke poli-grupe.

Dokaz.

Direktna posledica T3.20 i T3.21.

□

4. UNIVERZALNO ALGEBARSKA ISPITIVANJA RELACIONIH ALGEBRI

Izučavanje strukturnih osobina relacionih algebri počinje izučavanjem odgovarajućih osobina klase Booleovih algebri. Prvo se razmatraju mreže kongruencija. Pomoću specijalnih elemenata relacione algebre dolazimo do opisa prostih relacionih algebri, poddirektno nerazloživih relacionih algebri, da bi dokazali rezultat da je varijetet relacionih algebri poluprost. Razmatranja se zatim usmeravaju na mrežu podvarijeteta varijeteta relacionih algebri. U ovoj glavi se takođe može naći kompletan dokaz rezultata Tarskog da je klasa reprezentabilnih relacionih algebri varijetet. Posle razmatranja nekih karakterističnih identiteta relacionih algebri daje se univerzalno algebarsko ispitivanje tzv. klase semigrupnih relacionih algebri.

4.1 Strukturne osobine klase RA

Prilikom ispitivanja relacionih algebri fundamentalnu ulogu igraju rezultati teorije Booleovih algebri. To sledi pre svega iz činjenice da svaka relaciona algebra $\mathcal{A}$ " sadrži u sebi" Booleovu algebru $Rd_B(\mathcal{A})$. S druge strane, svaka BA se može proširiti do relacione algebre. U trećoj glavi smo videli kako su pitanja reprezentabilnosti za RA tesno povezana sa pitanjima reprezentabilnosti Booleovih algebri. Slično, pre nego što pristupimo ispitivanju strukturnih osobina relacionih algebri, razmotrimo analogna pitanja za klasu Booleovih algebri.

Mreže kongruencija Booleovih algebri

Teorija kongruencija Booleovih algebri je potpuno ekvivalentna sa teorijom ideala Booleovih algebri. *Ideal* Booleove algebre $\mathcal{B}$ smo definisali (vidi D3.3) kao neprazan skup $I \subseteq B$ tako da važi:

i) ako $x, y \in I$ onda $x+y \in I$; ii) ako $i \in I$ i $x \in B$ onda $i \cdot x \in I$.

Primetimo da element 0 pripada svakom idealu, i da iz $i \in I$ i $a \le i$ sledi $a \in I$.

Teorema 4.1 Neka je $\mathcal{B}$ Booleova algebra, i neka $x \nabla y$ označava simetričnu razliku elemenata x i y (tj. $x \nabla y = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y$). Tada:

(i) Ako je relacija $\rho \subseteq B^2$ kongruencija algebre $\mathcal{B}$ onda je skup $0/\rho = \{x \in B \mid (x,0) \in \rho\}$ ideal u $\mathcal{B}$ i za sve $a, b \in B$ važi:

(*) $(a,b) \in \rho$ akko $a \nabla b \in 0/_\rho$.

(ii) Neka je I ideal algebre $\mathcal{B}$. Relacija ρ definisana sa (*) jeste kongruencija od $\mathcal{B}$ tako da je $I = 0/\rho$.

Dokaz.

(i) Kako je ρ kongruencija, onda iz $(a, 0) \in \rho$ i $(b, 0) \in \rho$ sledi $(a+b, 0) \in \rho$, tako da $(a \in 0/\rho \wedge b \in 0/\rho) \Rightarrow a+b \in 0/\rho$. Neka je $a \in 0/\rho$ i $x \in B$. Tada

$$((a, 0) \in \rho \wedge (x, x) \in \rho) \Rightarrow (a \cdot x, 0) \in \rho \quad \text{tj.} \quad a \cdot x \in 0/\rho.$$

Tako, $0/\rho$ je ideal. Dokažimo sada uslov (*). Kako je ρ kongruencija, imamo da iz $(a, b) \in \rho$ sledi $(a \nabla b, b \nabla b) \in \rho$, tj. $(a \nabla b, 0) \in \rho$, što daje $a \nabla b \in 0/\rho$. Obratno, ako $a \nabla b \in 0/\rho$, onda $(a \nabla b, 0) \in \rho$, pa $((a \nabla b) \nabla b, 0 \nabla b) \in \rho$, što daje $(a, b) \in \rho$.

(ii) Slično kao (i).

□

Teorema 4.2 Za svaku Booleovu algebru $\mathcal{B}$, mreža kongruencija $\mathcal{C}on(\mathcal{B})$ je izomorfna sa mrežom ideala $\mathcal{I}d(\mathcal{B})$.

Dokaz.

Koristeći prethodnu teoremu nije teško dokazati da je preslikavanje $\varphi : \mathrm{Con}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Id}(\mathcal{B})$ definisano sa $\varphi(\rho) = 0/\rho$, traženi izomorfizam između mreža $\mathcal{C}on(\mathcal{B})$ i $\mathcal{I}d(\mathcal{B})$.

□

Kakve osobine ima mreža kongruencija proizvoljne Booleove algebre? Možemo dokazati da je je varijetet BA kongruencijski distributivan i kongruencijski permutabilan (za definicije ovih pojmova videti Dodatak).

Definicija 4.1 Za varijetet V kažemo da je *aritmetički* ako je V kongruencijski distributivan i kongruencijski permutabilan.

□

Da dokažemo da je varijetet BA aritmetički, koristićemo kriterijum Pixleya. Teorema T4.3 spada u grupu teorema u kojima sa osobine varijeteta karakterišu pomoću egzistencije nekog terma koji zadovoljava izvesne identitete. Takve karakterizacije su u literaturi poznati pod imenom *uslovi Maljceva*, po A. Maljcevu koji je 1950-tih godina dobio prve rezultate takvog oblika.

Teorema 4.3 (Pixley) Varijetet V je aritmetički akko postoji term $m(x,y,z)$ takav da važi

$$V \models m(x,y,x) = m(x,y,y) = m(y,y,x) = x.$$

Dokaz.

Videti [BS 81].

□

Teorema 4.4 Varijetet BA je aritmetički varijetet.

Dokaz.

Lako se možemo uveriti da term $m(x,y,z) = (x \cdot z) + (x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) + (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z)$ zadovoljava uslove teoreme T4.3.

□

Dalje, možemo dokazati da je varijetet BA *diskriminatorski*.

Definicija 4.2 Za varijetet V kažemo da je *diskriminatorski* ako postoji term $D(x,y,z)$ na jeziku varijeteta V takav da za sve proste algebre $\mathcal{A}$ iz V važi :

$$D(x,x,z)=z \quad \text{i} \quad D(x,y,z)=x \ \text{za} \ x \neq y.$$

□

Teorema 4.5 Varijetet BA je diskriminatorski varijetet.

Dokaz.

U klasi BA jedina netrivijalna prosta algebra jeste dvoelementna Booleova algebra $\mathbf{2}$ (videti L3.5). No, poznato je da se u toj algebri svaka funkcija može predstaviti termom, pa i funkcija sa osobinom diskriminatorskog terma.

□

Primetimo da se u opštem slučaju može dokazati da je svaki diskriminatorski varijetet aritmetički (videti [BS 81]). Takođe, u opštem slučaju, u svakom diskriminatorskom varijetetu važi da je svaka algebra izomorfna sa poddirektnim proizvodom prostih algebri.

Definicija 4.3 Varijetet V u kome je svaka algebra izomorfna poddirektnom proizvodu prostih algebri zovemo *poluprost varijetet*.

□

Teorema 4.6 Varijetet BA je poluprost.

Dokaz.

Svaka BA je poddirektan proizvod dvoelementnih BA koje su proste.

□

Naravno, T4.6 sledi i iz opšteg rezultata da je svaki diskriminatorski varijetet poluprost i činjenice da je BA diskriminatorski.

U daljem ćemo dokazati da i varijetet RA ima sve tri navedene osobine varijeteta BA: varijetet RA je aritmetički, diskriminatorski i poluprost.

Osobine varijeteta relacionih algebri

Svaka kongruencija relacione algebre $\mathcal{A}$ jeste, pre svega, kongruencija Booleovog redukta $\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A})$. Tako, $\mathrm{Con}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Con}(\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A})$. Tako, važi:

Teorema 4.7 Varijetet RA je permutabilan.

Dokaz.

Sledi iz T4.4 i činjenice da za sve relacione algebre $\mathcal{A}$ važi $\mathrm{Con}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Con}(\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A}))$.

□

Što se tiče distributivnosti mreže kongruencija relacionih algebri, nije dovoljna činjenica da je $\mathrm{Con}(\mathcal{A})$ podskup od $\mathrm{Con}(\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A})$, za sve $\mathcal{A} \in \mathrm{RA}$. Potrebno je dokazati da je $\mathcal{C}on(\mathcal{A})$ *podmreža* mreže $\mathcal{C}on(\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A}))$. Da to dokažemo, ispitajmo koje dodatne uslove treba da zadovoljava kongruencija Booleovog redukta $\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A})$ da bi bila kongruencija cele algebre $\mathcal{A}$.

Definicija 4.4 Neka je $\mathcal{A} \in \mathrm{RA}$ i I ideal od $\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A})$. Kažemo da je I *kongruencijski ideal* ako postoji $\rho \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$ tako da je $0/\rho = I$.

□

Teorema 4.8 Za Booleov ideal N neke relacione algebre $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, \circ, 1', ^{-1})$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

i) N je kongruencijski ideal;

ii) N je ideal semigrupe $(A, \circ)$ tj. za sve $n \in N$, $a \in A$ važi $n \circ a \in N$ i $a \circ n \in N$;

iii) Za sve $x \in N$, $1 \circ x \circ 1 \in N$.

Dokaz.

Dokažimo (i) → (ii) → (iii) → (ii) → (i).

(i) → (ii).

Neka je $N = 0/\Theta$, $\Theta \in \mathcal{C}on(\mathcal{A})$.

Treba dokazati da ako $n \in N$, $a \in A$, onda $n \circ a \in N$ i $a \circ n \in N$.

$$n \in N \;\Rightarrow\; n \Theta 0 \;\Rightarrow\; (a \circ n) \Theta (a \circ 0) \;\Rightarrow\; (a \circ n) \Theta 0 \;\Rightarrow\; a \circ n \in N.$$

Slično, $n \circ a \in N$.

$(ii) \rightarrow (iii)$. Ako je N ideal semigrupe $(A, \circ)$ i $x \in N$, onda $1 \circ x \in N$, pa $1 \circ x \circ 1 \in N$.

$(iii) \rightarrow (ii)$. Neka $n \in N$, $a \in A$. Tada: $n \circ a = 1' \circ n \circ a \leq 1 \circ n \circ 1 \in N \Rightarrow n \circ a \in N$. Slično, $a \circ n \in N$.

$(ii) \rightarrow (i)$. Definišimo relaciju Θ na A: $a \Theta b \Leftrightarrow a\overline{b} + b\overline{a} \in N$. Jasno, Θ je kongruencija od $\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A})$. Ranije smo videli (osobina 2.18) da u svakoj relacionoj algebri važi

$$(\forall x)(x^{-1} \circ x \circ x^{-1} \geq x^{-1}).$$

Dakle, ako $n \in N$ onda $n^{-1} \circ n \circ n^{-1} \in N$, jer je N ideal od $(A, \circ)$. Tako

$$n^{-1} \leq n^{-1} \circ n \circ n^{-1} \;\Rightarrow\; n^{-1} \in N.$$

Sledi, ako $a \Theta b \rightarrow a\overline{b} + \overline{a}b \in N$ onda $a^{-1} \Theta b^{-1}$. Ostalo je još da dokažemo da se Θ slaže sa $\circ$. Neka je $x \Theta y$, onda $x \nabla y = x\overline{y} + y\overline{x} \in N$. Kako je ∇ asocijativna operacija, imamo : $x \nabla y = n \Rightarrow x \nabla (x \nabla y) = x \nabla n \Rightarrow y = x \nabla n$.

Dalje,

$$y = x\overline{n} + \overline{x}n \;\Rightarrow\; (x\overline{n}) \circ u + (\overline{x}n) \circ u = y \circ u \;\Rightarrow\; \overline{x}n \in N, (\overline{x}n) \circ u \in N,$$

pa za neki $n_1 \in N$ imamo $(x\overline{n}) \circ u + n_1 = y \circ u$. Pošto je $x\overline{n} \leq x$, onda

$$(x\overline{n}) \circ u \leq x \circ u \;\Rightarrow\; (x\overline{n}) \circ u + n_1 = y \circ u \leq x \circ u + n_1.$$

Ako pomnožimo obe strane poslednje nejednakosti sa $\overline{x \circ u}$, dobijamo

$$(y \circ u)(\overline{x \circ u}) \leq n_1(\overline{x \circ u}) \;\Rightarrow\; (y \circ u)(\overline{x \circ u}) \in N.$$

Slično, $(x \circ u)(\overline{y \circ u}) \in N$ pa $(x \circ u) \nabla (y \circ u) \in N$ tj. $(x \circ u) \Theta (y \circ u)$.

Analogno se pokazuje da je $(u \circ x) \Theta (u \circ y)$, za $u \in A$.

□

Teorema 4.9 Za svaku $\mathcal{A} \in \mathrm{RA}$ važi: $Con(\mathcal{A})$ je podmreža mreže $Con(\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A}))$.

Dokaz.

Jasno je da je u obe mreže infimum dve kongruencije njihov presek. S obzirom na direktne veze kongruencija sa odgovarajućim idealima, dovoljno je dokazati da se supremum S_1 dva kongruencijska ideala I_1 i I_2 poklapa sa njihovim supremumom S_2 ako I_1 i I_2 posmatramo kao Booleove ideale. Nije teško videti da je u mreži $Con(\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A}))$ supremum dat sa: $S_2 = \{ a \in A \mid a \leq x + y$, za neke $x \in I_1, y \in I_2 \}$. Dokažimo da je S_2 kongruencijski ideal. Na osnovu prethodne teoreme dovoljno je dokazati da za sve $a \in S_2$ važi $1 \circ a \circ 1 \in S_2$. Neka je $a \in S_2$ i neka su $x \in I_1$ i $y \in I_2$ takvi da je $a \leq x+y$. Tada je $1 \circ (x+y) \circ 1 = 1 \circ x \circ 1 + 1 \circ y \circ 1 = b + c \in S_2$, jer $b \in I_1, c \in I_2$. Kako je $a \leq x+y$ onda $1 \circ a \circ 1 \leq 1 \circ (x+y) \circ 1$, pa je i element $1 \circ a \circ 1$ iz S_2 , što je i trebalo dokazati.

□

Teorema 4.10 Varijetet RA je kongruencijski distributivan.

Dokaz.

Direktna posledica T4.9 i T4.4.

□

Posledica 4.1 Varijetet RA je aritmetički varijetet.

Dokaz.

Sledi iz T4.7 i T4.10.

□

Za dokaz da je RA diskriminatorski i poluprost varijetet, moramo se upoznati sa još nekim pojmovima iz teorije relacionih algebri.

Specijalni elementi RA

Definicija 4.5 Kažemo da je neki element e relacione algebre *ekvivalencijski element* ako je $e^{-1} \circ e = e$.

□

Primetimo da ako je e ekvivalencijski element, onda $e^{-1} = e$ i $e \circ e = e$. U algebri relacija $\mathcal{E}(\rho)$, gde je ρ relacija ekvivalencije skupa X, ekvivalencijski elementi su tačno relacije ekvivalencije $\delta, (\delta \subseteq \rho)$, skupova $Y \subseteq X$.

Definicija 4.6 Kažemo da je neki element f relacione algebre *funkcionalni element* ako je $f^{-1} \circ f \leq 1'$.

□

Funkcionalni elementi algebre $\mathcal{E}(\rho)$, $\rho \subseteq X^2$, su funkcije F skupova $Y \subseteq X$, tako da $F \subseteq \rho$.

Definicija 4.7 Za element x neke relacione algebre kažemo da je *idealni element* ako važi $1 \circ x \circ 1 \leq x$.

□

Nije teško videti da idealni element x zadovoljava $1 \circ x \circ 1 = x$, jer $1 \circ x \circ 1 \geq 1' \circ x \circ 1' = x$.

Lema 4.1 Neka je ρ relacija ekvivalencije skupa X. Tada, relacija δ skupa X jeste idealni element algebre $\mathcal{E}(\rho)$ akko postoji $Y \subseteq X$ tako da je

$$\delta = \bigcup \{ (a/\rho) \times (a/\rho) \mid a \in Y \}.$$

Dokaz.

Treba dokazati da su idealni elementi tačno restrikcije relacije ρ do unije nekih svojih klasa ekvivalencije. Zaista, ako je $\delta = \bigcup \{(a/\rho) \times (a/\rho) \mid a \in Y\}$, onda $\rho \circ \delta \circ \rho \subseteq \delta$ jer ako $(x,y) \in \rho$, $(y,z) \in \delta$, $(z,u) \in \rho$ onda su elementi x i u u istoj klasi ekvivalencije kao elementi y i z, pa pošto δ po konstrukciji sadrži kvadrate "celih" klasa ekvivalencije od ρ, onda $(x,u) \in \delta$.

Obratno, neka je δ idealni element algebre $\mathcal{E}(\rho)$ i neka $\delta \neq \emptyset$. Tada

$$\delta = \bigcup \{ (a/\rho) \times (a/\rho) \mid (\exists x \in X)(a,x) \in \delta \}.$$

Naravno, inkluzija $\subseteq$ je jasna. Neka je sada $(x,y) \in \delta$; dokažimo da δ sadrži ceo kvadrat klase u kojoj se nalaze elementi x i y. Neka su z i v u toj klasi; onda $(z,x) \in \rho$, $(x,y) \in \delta$, $(y,v) \in \rho \Rightarrow (z,v) \in \rho \circ \delta \circ \rho \Rightarrow (z,v) \in \delta$.

□

Svoje ime idealni elementi zahvaljuju ulozi koju igraju u teoriji homomorfizama relacione algebre. U sledećoj lemi ćemo dokazati neke važne osobine idealnih elemenata, koje ćemo kasnije koristiti:

Lema 4.2 Neka je $I = \{ x \in A \mid 1 \circ x \circ 1 = x \}$ skup svih idealnih elemenata relacione algebre A. Tada:

(i) I je nosač neke Booleove podalgebre od $\mathrm{Rd_B}(\mathcal{A})$, tj.

$$(I, +, \cdot, ^-, 0, 1) < (A, +, \cdot, ^-, 0, 1);$$

(ii) Za $x, y \in I$ važi $x \circ y = x \cdot y$, $x^{-1} = x$, pa je svaki idealni element ujedno i ekvivalencijski element;

(iii) Za $x \in I$, i sve $a, b \in A$ važi

$$(a \cdot x) \circ (b \cdot x) = (a \circ b) \cdot x \quad \text{i} \quad (a \cdot x)^{-1} = a^{-1} x.$$

Dokaz.

(i) Jasno, $0, 1 \in I$ pa $I \neq \emptyset$. Dalje, ako $x, y \in I$ onda

$1 \circ (x+y) \circ 1 = (1 \circ x \circ 1) + (1 \circ y \circ 1) = x + y$, tj. $x + y \in I$. Pošto za $x \in I$ imamo $(1 \circ (1 \circ x \circ 1 \circ 1)) \cdot \bar{x} = 0$ onda

$$(1 \circ \bar{x}) \cdot (1 \circ x \circ 1 \circ 1) = 0 \Rightarrow ((1 \circ x \circ 1) \circ 1) \cdot (1 \circ \bar{x}) = (1 \circ \bar{x} \circ 1) \cdot (1 \circ x \circ 1) = 0$$
$$\Rightarrow 1 \circ \bar{x} \circ 1 \leq \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \in I.$$

Tako, I je nosač Booleove algebre.

(ii) Dokažimo $x = x^{-1}$.

Pošto je $x = 1 \circ x \circ 1 \geq x^{-1} \circ x \circ x^{-1}$, onda, koristeći Osobinu 2.18, imamo

$$x^{-1} \circ x \circ x^{-1} \geq x^{-1} \quad \text{tj.} \quad x \geq x^{-1}.$$

Koristeći Osobinu 2.18 dobijamo $x \geq 1 \circ x \circ 1 \geq x^{-1} \circ x \circ x^{-1} \geq x^{-1}$ tj. $x \geq x^{-1}$. S druge strane, iz $x \geq x^{-1}$ dobijamo $x^{-1} \geq (x^{-1})^{-1} = x$, što daje $x = x^{-1}$.

Dokažimo da je $x \circ x = x$.

$x = 1 \circ x \circ 1 \geq 1' \circ x \circ x = x \circ x$. Obratno, $x \circ x = (1 \circ x \circ 1) \circ x \geq (1 \circ x \circ 1') \circ x = = 1 \circ x \circ x^{-1} \geq x^{-1} \circ x \circ x^{-1}$.

Gore smo dokazali da je $(\forall y)(y^{-1} \circ y \circ y^{-1} \geq y^{-1})$; onda $x^{-1} \circ x \circ x^{-1} \geq \geq x^{-1} = x \Rightarrow x \circ x \geq x$. Dakle, $x \circ x = x$.

Dokažimo da za $x, y \in I$ važi $x \circ y = x \cdot y$.

Jasno, $(xy) \circ (xy) \leq x \circ y$ pa $xy \leq x \circ y$. Obratno,
$x \circ y \leq x \circ 1 \wedge x \circ y \leq 1 \circ y \Rightarrow x \circ y \leq (x \circ 1)(1 \circ y) =$

$= (1' \circ x \circ 1)(1 \circ y \circ 1') \leq (1 \circ x \circ 1)(1 \circ y \circ 1) = x \cdot y$.

(iii) Ako je $a \in A$, $x \in I$, tada $(ax)^{-1} = a^{-1} \cdot x$. Naime, zbog Osobine 6 i zbog $x = x^{-1}$, imamo $(ax)^{-1} = a^{-1} x^{-1} = a^{-1} x$.

Dokažimo još $(ax)\circ(bx)=(a\circ b)\cdot x$, *gde* $x\in I$, $a, b\in A$.

Kako je $(ax)\circ(bx)\le a\circ b$ i $(ax)\circ(bx)\le x\circ x$, dobijamo

$$(ax)\circ(bx)\le(a\circ b)(x\circ x)=(a\circ b)x.$$

S druge strane, za sve $u\in A$, imamo

$$u\cdot((ax)\circ(bx))=0 \Rightarrow (u\circ(b^{-1}x))(ax)=0.$$

Pošto je $u\circ(b^{-1}x)\le u\circ x\le 1\circ x\circ 1=x$, onda $(u\circ(b^{-1}x))a=0$.
Tako, $(u^{-1}\circ a)b^{-1}x=0$, pa kako je $x\circ a\le 1\circ x\circ 1=x$, onda

$$(u^{-1}\circ a)b^{-1}(x\circ a)=0.$$

Dalje, $(u^{-1}x)\circ a\le u^{-1}\circ a$ i $(u^{-1}x)\circ a\le x\circ a$, pa je

$$(u^{-1}x)\circ a\le(u^{-1}\circ a)(x\circ a).$$

Tako, $(u^{-1}\circ a)(x\circ a)b^{-1}=0 \Rightarrow ((u^{-1}x)\circ a)b^{-1}=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (b^{-1}\circ a^{-1})u^{-1}x=0 \Rightarrow (a\circ b)x^{-1}u=0 \Rightarrow (a\circ b)xu=0$$

tj. $(ax)\circ(bx)\ge(a\circ b)x$.

□

Apstraktna varijanta relacione algebre $\mathcal{E}(\rho)$ jeste sledeća algebra. Neka je $\mathcal{A}\in$ RA, i e ekvivalencijski element algebre $\mathcal{A}$; definišimo novu relacionu algebru $\mathcal{A}e=(Ae, +, \cdot, {}^{\sim}, 0, e, \circ, 1'\cdot e, {}^{-1})$ sa nosačem $Ae=\{a\in A \mid a\le e\}$, gde su $+, \cdot, \circ, {}^{-1}$ restrikcije odgovarajućih operacija iz algebre $\mathcal{A}$ na skup Ae, Booleova jedinica je e, jedinica operacije $\circ$ je $1'\cdot e$, a operacija $\sim$ se definiše sa $\tilde{a}=e\cdot\overline{a}$. Nije teško proveriti, da je ovako definisana algebra $\mathcal{A}e$ zaista relaciona algebra. Ona se zove *relativizacija od* $\mathcal{A}$ *po* e. Mi ćemo kasnije koristiti specijalni slučaj, kada je e idealni element.

Lema 4.3 Neka je $\mathcal{A}\in$ RA, i e idealni element od $\mathcal{A}$. Preslikavanje $\varphi_e: A\to Ae$, definisano sa $\varphi_e(x)=e\cdot x$ jeste homomorfizam $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}e$.

Dokaz.

Jasno je da je φ_e preslikavanje "na". Dalje,

$$\varphi_e(xy)=e\cdot x\cdot y=e\cdot x\cdot e\cdot y=\varphi_e(x)\varphi_e(y).$$

$$\varphi_e(\overline{x})=e\cdot\overline{x}=e\cdot(\overline{e}+\overline{x})=\overline{\varphi_e(x)}$$

$$\varphi_e(0)=e\cdot 0=0$$

$$\varphi_e(1) = e \cdot 1 = e$$

$$\varphi_e(x \circ y) = e(x \circ y) = (ex) \circ (ey) = \varphi_e(x) \circ \varphi_e(y)$$

$$\varphi_e(x)^{-1} = ex^{-1} = (ex)^{-1} = (\varphi_e(x))^{-1}$$

$$\varphi_e(1') = e \cdot 1',$$

gde smo više puta koristili prethodnu lemu L4.2.

□

Proste relacione algebre

U dokazu da je klasa RRA varijetet, važnu ulogu igraju tzv. proste RA. Podsetimo se da za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je *prosta* ako ima samo trivijalne kongruencije (Δ_A i A^2).

Koje relacione algebre imaju samo trivijalne kongruencije? Da bismo dali odgovor na to pitanje, podsetimo se uzajamno jednoznačne korespondencije između kongruencija i homomorfizama neke algebre. Svaki homomorfizam φ određuje kongruenciju ($\ker \varphi$) i svaka kongruencija ρ određuje (tzv. prirodni) homomorfizam date algebre ($\mathrm{nat}\ \rho$). Algebra ima netrivijalne kongruencije akko ima netrivijalne homomorfizme.

Tako, relaciona algebra $\mathcal{A}$ je *prosta* ako nema prave homomorfizme, tj. svaki homomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ jeste ili potapanje ili je $|\mathrm{codom}\ \varphi| = 1$.

U L4.3 smo videli da svaki idealni element e određuje homomorfizam φ_e. Zaključujemo da važi:

Teorema 4.11 Relaciona algebra je prosta akko ima najviše dva idealna elementa.

Dokaz.

($\leftarrow$). U svakoj relacionoj algebri elementi 0 i 1 su idealni (u jednoelementnoj RA je $0=1$). Neka su to jedini idealni elementi algebre $\mathcal{A} \in$ RA, i neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ($\mathcal{B} \in$ RA) homomorfizam. Ako φ nije potapanje, onda postoji neki $x \in A$, $x \neq 0$, tako da je $\varphi(x) = 0$. Jasno, $1 \circ x \circ 1$ je idealni element različit od 0 (jer $1 \circ x \circ 1 \geq 1' \circ x \circ 1' = x \neq 0$) pa mora $1 \circ x \circ 1 = 1$. No, $\varphi(1 \circ x \circ 1) = 0$ pa $\varphi(1) = 0$, sledi $|\mathrm{codom}\ \varphi| = 1$.

($\rightarrow$). Ako algebra $\mathcal{A}$ ima više od dva idealna elementa, onda postoji idealni element $e \notin \{0, 1\}$. No, po L4.2 preslikavanje φ_e jeste pravi homomorfizam od $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}e$.

□

Posledica 4.2 Podalgebra proste RA je prosta.

Dokaz.

Sledi iz T 4.11 .

□

Teorema 4.12 Varijetet RA je diskriminatorski varijetet.

Dokaz.

Može se proveriti da $D(x,y,z) = x\cdot(1\circ(x\nabla y)\circ 1)+z\cdot\overline{(1\circ(x\nabla y)\circ 1)}$ jeste traženi term (videti D4.2). Naime, ako je u prostoj algebri $x \neq 0$ onda $1\circ x\circ 1=1$, jer je $1\circ x\circ 1$ idealni element, a u prostoj RA imamo samo dva idealna elementa : 1 i 0.

□

Kako izgledaju proste reprezentabilne relacione algebre? Možemo dati potpun opis:

Teorema 4.13 Neka je $\mathcal{A} \in$ RA . $\mathcal{A}$ je prosta reprezentabilna RA akko je $\mathcal{A}$ izomorfna sa pravom relacionom algebrom.

Dokaz.

($\leftarrow$). U svakoj pravoj relacionoj algebri važi $(\forall x)(x \neq 0 \Rightarrow 1 \circ x \circ 1 = 1)$. To znači da $\mathcal{A}$ ima najviše dva idealna elementa, pa je prema T4.1 $\mathcal{A}$ prosta.

($\rightarrow$). Neka je $\mathcal{A}$ prosta reprezentabilna RA i neka je $\mathcal{A} \cong \mathcal{D} < \mathcal{E}(\rho)$, gde je ρ relacija ekvivalencije skupa Y. Ako je $|A|=1$, onda je $\mathcal{A} \cong \mathcal{R}(\emptyset)$. Ako je $|A|>1$, onda $|D|>1$, pa $Y \neq \emptyset$. Izaberimo $y \in$ Y. Element $x = (y/\rho)\times(y/\rho) \in \mathcal{P}(\rho)$ jeste idealni element algebre $\mathcal{E}(\rho)$ (vidi L4.1). Ako je φ izomorfizam koji $\mathcal{A}$ preslikava na $\mathcal{D}$, onda preslikavanje $\psi = \varphi \circ \varphi_x$ jeste homomorfizam, $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}(\rho)$, koji zadovoljava $|\text{codom } \psi| > 1$, jer $\psi(1) = \varphi_x(\varphi(1)) = \varphi_x(\rho) = x \neq \emptyset = \psi(0)$. Dakle ψ je potapanje, jer je $\mathcal{A}$ prosta. Tako, $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{R}(y/\rho)$, pa je $\mathcal{A} \cong \mathcal{R}(y/\rho)$.

□

Označimo sa $\mathcal{R}(n), n \in \mathbb{N}$, punu relacionu algebru nad skupom $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$. Naravno, svaka puna relaciona algebra $\mathcal{R}(X), |X|=n$, izomorfna je sa $\mathcal{R}(n)$. Prema prethodnoj teoremi, svaka algebra $\mathcal{R}(n)$ je prosta. No, nije svaka prosta relaciona algebra izomorfna sa nekom algebrom $\mathcal{R}(n)$. Može se dokazati sledeće:

Teorema 4.14 Za svaki pozitivan broj n, relaciona algebra $\mathcal{A}$ je izomorfna sa $\mathcal{R}(n)$ akko postoji element $a \in A$ tako da je $a \circ a \leq a$, $a + a^{-1} = 0'$, $a^n = 0$ i $a^{n-1} \neq 0$.

Dokaz.

Videti [Jo 82].

□

Poddirektno nerazložive RA

U slučaju relacionih algebri klasa prostih algebri se poklapa sa jednom drugom važnom klasom – klasom poddirektno nerazloživih relacionih algebri (videti D1.17). Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je *poddirektno nerazloživa* ako za svaku familiju kongruencija $\langle \rho_i \mid i \in I \rangle$ na $\mathcal{A}$ važi:

Ako $\bigcap \langle \rho_i \mid i \in I \rangle = \Delta_A$ onda postoji $i \in I$ tako da je $\rho_i = \Delta_A$.

Lema 4.4 Relaciona algebra $\mathcal{A}$, gde je $|A| > 1$, jeste poddirektno nerazloživa akko postoji element $x \in A (x \neq 0)$, tako da za svaki homomorfizam $\varphi\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ važi

φ je potapanje akko $\varphi(x) \neq 0$.

Dokaz.

Iz D1.17 vidimo da je $\mathcal{A}$ poddirektno nerazloživa akko postoji kongruencija $\Theta \neq \Delta_A$ takva da za svaku kongruenciju $\rho \neq \Delta_A$ važi $\Theta \subseteq \rho$. To znači da postoje bar dva različita elementa $a, b \in A$ takva da za svaku kongruenciju $\rho \neq \Delta_A$ algebre $\mathcal{A}$ važi $(a, b) \in \rho$. U slučaju relacionih algebri to znači da postoji element $x \neq 0$ takav da za svaku kongruenciju $\rho \neq \Delta_A$ važi $(0, x) \in \rho$. Ekvivalentno, postoji element $x \neq 0$ takav da za svaki homomorfizam $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ važi: $\varphi(x) \neq 0$ akko je φ potapanje.

□

Teorema 4.15 Relaciona algebra je poddirektno nerazloživa akko je prosta.

Dokaz.

($\leftarrow$). Neka je $\mathcal{A} \in$ RA. Ako je $|A| \neq 1$ i $\mathcal{A}$ je prosta, onda element $x = 1$

zadovoljava uslove prethodne leme L4.4.

($\rightarrow$). Ako je $|A|=1$, onda je $\mathcal{A}$ prosta. Ako je $|A|>1$ neka je x element koji zadovoljava uslove L4.4 . Pretpostavimo da je $1 \neq 1 \circ x \circ 1$. Onda preslikavanje $\varphi=\varphi_{1 \circ x \circ 1}$ (videti L4.3) nije potapanje (jer je $\varphi(1)=1 \circ x \circ 1=\varphi(1 \circ x \circ 1)$), pa bi moralo biti $\varphi(x)=0$. No, $\varphi(x)=x \neq 0$ (jer $1 \circ x \circ 1 \geq 1' \circ x \circ 1'=x$), pa mora biti $1=1 \circ x \circ 1$. Dakle, za svaki homomorfizam ψ na $\mathcal{A}$, ψ je potapanje akko je $\psi(x) \neq 0$ (jer je $\mathcal{A}$ poddirektno nerazloživa) akko $\psi(1 \circ x \circ 1) \neq 0$ (jer $1 \circ x \circ 1 \geq x$, pa $\psi(1 \circ x \circ 1) \geq \psi(x)$, pa ako $\psi(1 \circ x \circ 1)=0$ onda $\psi(x)=0$. Obrat je jasan.) akko $\psi(1) \neq 0$. To znači ako ψ nije potapanje, onda $\psi(1)=0$, pa je $|\mathrm{codom}\,(\psi)|=1$, što daje da je algebra $\mathcal{A}$ prosta.

□

Posledica 4.3 Svaka RA je izomorfna sa poddirektnim proizvodom prostih relacionih algebri.

Dokaz.

Posledica teoreme Birkhoffa o poddirektnom razlaganju (T7.12) i teoreme T4.15.

□

Teorema 4.16 Varijetet RA je poluprost.

Dokaz.

Sledi iz P4.2.

□

Posledica 4.4 Svaka reprezentabilna relaciona algebra $\mathcal{A}$ je izomorfna sa podalgebrom direktnog proizvoda prostih reprezentabilnih relacionih algebri $\mathcal{A}_i$, $i \in$ I.

Dokaz.

Na osnovu T4.13 svaka puna RA jeste prosta. S druge strane, RRA $=ISP($ K $)$, gde je K klasa svih punih realcionih algebri.

□

Svaka poddirektno nerazloživa algebra je i direktno nerazloživa (tj. nije izomorfna sa direktnim proizvodom dve netrivijalne algebre). U slučaju relacionih algebri važi i obrat, jer su oba pojma ekvivalentna sa pojmom proste algebre.

Teorema 4.17 Relaciona algebra je prosta akko je direktno nerazloživa.

Dokaz.

Neka $\mathcal{B} \in RA$. Jasno, ako je $\mathcal{B}$ direktno razloživa (recimo $\mathcal{B} = \mathcal{E} \times \mathcal{D}$) onda ona nije prosta, jer postoji netrivijalan homomorfizam – projekcija na neki od faktora. Ako $\mathcal{B}$ nije prosta, onda ima idealni element $a \notin \{0,1\}$ i preslikavanje $\psi : x \to (ax, \overline{a}x)$ je izomorfizam $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}_a \times \mathcal{B}_{\overline{a}}$. Jasno, φ je homomorfizam, i jeste "na". Preslikavanje φ je "1–1" jer:

$$\psi(x) = \psi(y) \Rightarrow (ax = ay \wedge \overline{a}x = \overline{a}y) \Rightarrow (a + \overline{a})x = (a + \overline{a})y \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

□

Možemo, dakle, sumirati sve ove strukturne osobine relacionih algebri:

Posledica 4.5 Za netrivijalnu relacionu algebru $\mathcal{B}$ sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) $\mathcal{B}$ je prosta;

(ii) $\mathcal{B}$ je poddirektno nerazloživa;

(iii) $\mathcal{B}$ je direktno nerazloživa;

(iv) $\mathcal{B}$ ima tačno dva idealna elementa;

(v) $\mathcal{B} \models (\forall x)(x \neq 0 \Rightarrow 1 \circ x \circ 1 = 1)$.

Dokaz.

Direktno iz T4.11, T4.15 i T4.17.

□

O mrežama podvarijeteta

Pored varijeteta relacionih algebri u Glavi II smo definisali klasu komutativnih, simetričnih i Booleovih relacionih algebri. Sve tri klase su (po definiciji) jednakosne klase tj. varijeteti. Šta možemo reći o familiji *svih* podvarijeteta varijeteta relacionih algebri? Razmotrimo prvo šta važi u opštem slučaju za klasu podvarijeteta proizvoljnog varijeteta V.

Prvo, nije teško videti da važi sledeće:

Teorema 4.18 Neka je $\mathcal{F}$ neki tip algberi. Tada svi varijeteti algebri tipa $\mathcal{F}$ formiraju mrežu u odnosu na inkluziju $\subseteq$.

Dokaz.

Nije teško videti da je presek proizvoljne familije varijeteta tipa $\mathcal{F}$ ponovo varijetet. Tako, ako su K_1 i K_2 dva varijeteta tipa $\mathcal{F}$ onda je njihov infimum $\wedge$ i supremum $\vee$ dat sa

$$K_1 \wedge K_2 = K_1 \cap K_2,$$

$$K_2 \vee K_2 = \bigcap \{K \mid K_1 \cup K_2 \subseteq K, \text{ gde je } K \text{ varijetet tipa } \mathcal{F}\}.$$

□

U daljem ćemo sa $\mathfrak{Var}(\mathcal{F}) = (\mathrm{Var}(\mathcal{F}), \wedge, \vee)$ označavati mrežu svih varijeteta tipa $\mathcal{F}$. Ako je K neki varijetet tipa $\mathcal{F}$, onda skup

$$\mathrm{Var}(K) = \{V \mid V \subseteq K \text{ i } V \text{ je varijetet tipa } \mathcal{F}\}$$

tj. skup svih podvarijeteta od K jeste zatvoren u odnosu na operacije $\wedge$ i $\vee$. Mrežu $\mathfrak{Var}(K) = (\mathrm{Var}(K), \wedge, \vee)$ zovemo *mreža podvarijeteta od* K.

Kako su pojmovi varijeteta i jednakosne klase potpuno ekvivalentni (videti Dodatak) , prirodno je da se prilikom izučavanja mreže podvarijeteta ekvivalentno može izučavati i mreža tzv. *jednakosnih teorija od* K.

Definicija 4.8 Neka je $\mathcal{F}$ neki tip algebri, X skup promenljivih. Za skup identiteta $\Sigma \subseteq \mathrm{Eq}^{\mathcal{F}}(X)$ kažemo da je *jednakosna teorija* (*tipa* $\mathcal{F}$ *nad* X) ako postoji klasa K algebri tipa $\mathcal{F}$ tako da je $\Sigma = \mathrm{Eq}_X(K)$.

□

Teorema 4.19 Neka je $\mathcal{F}$ tip algebri, a X skup promenljivih. Jednakosne teorije tipa $\mathcal{F}$ nad X čine mrežu u odnosu na inkluziju $\subseteq$.

Dokaz.

Neka su $\Sigma_1 = \mathrm{Eq}_X(K_1)$ i $\Sigma_2 = \mathrm{Eq}_X(K_2)$ jednakosne teorije. Tada su njihov infimum $\wedge$ i supremum $\vee$ dati sa

$$\Sigma_1 \wedge \Sigma_2 = \mathrm{Eq}_X(K_1 \cup K_2), \quad \Sigma_1 \vee \Sigma_2 = \mathrm{Eq}_X(K_1 \cap K_2).$$

□

Mrežu $(\mathrm{Eq}_X(\mathcal{F}), \wedge, \vee)$ svih jednakosnih teorija tipa $\mathcal{F}$ nad X obeležavamo sa $\mathcal{E}q_X(\mathcal{F})$.

Kakva je veza između mreža varijeteta jednakosnih teorija? Možemo dokazati da su one *dualno-izomorfne*. U opštem slučaju definicija glasi:

Definicija 4.9 *Dualna mreža* mreže $\mathcal{L}=(L, \wedge, \vee)$ jeste mreža $\mathcal{L}^d = (L, \vee, \wedge)$. Za dve mreže $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ kažemo da su *dualno izomorfne*, u oznaci $\mathcal{L}_1 \doteqdot \mathcal{L}_2$, ako su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2^d$ izomorfne.

□

Teorema 4.20 Neka je X neki prebrojivo beskonačan skup. Tada su mreže $\mathcal{V}ar(\mathcal{F})$ i $\mathcal{E}q_X(\mathcal{F})$ dualno izomorfne.

Dokaz.

Definišimo preslikavanje $\mathrm{eq}: \mathrm{Var}(\mathcal{F}) \to \mathrm{Eq}_X(\mathcal{F})$ sa: $\mathrm{eq}(K) = \mathrm{Eq}_X(K)$. Tada je eq traženi dualni-izomorfizam:

$$\mathrm{eq}(K_1 \wedge K_2) = \mathrm{eq}(K_1) \vee \mathrm{eq}(K_2),$$

$$\mathrm{eq}(K_1 \vee K_2) = \mathrm{eq}(K_1) \wedge \mathrm{eq}(K_2).$$

□

Po dogovoru, ako je X neki prebrojiv skup promenljivih, onda umesto $\mathrm{Eq}_X(\mathcal{F})$ i $\mathcal{E}q_X(\mathcal{F})$ pišemo $\mathrm{Eq}(\mathcal{F})$ odnosno $\mathcal{E}q(\mathcal{F})$. Ako je Σ neka jednakosna teorija tipa $\mathcal{F}$ nad X, onda sa $[\Sigma)$ označavamo skup svih jednakosnih teorija Θ tipa $\mathcal{F}$ nad X takvih da je $\Sigma \subseteq \Theta$. Naravno, skup $[\Sigma)$ jeste nosač podmreže u $\mathcal{E}q_X(\mathcal{F})$.

Teorema 4.21 Neka je K neki varijetet tipa $\mathcal{F}$. Tada je mreža $\mathcal{V}ar(K)$, svih podvarijeteta od K, dualno izomorfna podmreži $\mathcal{E}q(K) = ([\mathrm{Eq}(K)), \wedge, \vee)$ mreže svih jednakosnih teorija $\mathcal{E}q(\mathcal{F})$.

Dokaz.

Sledi iz prethodne tri teoreme.

□

Interesantno je primetiti da su mreže podvarijeteta i jednakosnih teorija tesno povezane i sa mrežom kongruencija.

Definicija 4.10 Za kongruenciju ρ algebre $\mathcal{A}$ kažemo da je *potpuno invarijantna* ako za sve homomorfizme $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ i sve $a,b\in A$, ako $(a,b)\in\rho$ onda $(\varphi(a),\varphi(b))\in\rho$.

□

Označimo sa $\mathrm{Con}^*(\mathcal{A})$ mrežu svih potpuno invarijantnih kongruencija algebre $\mathcal{A}$. Nije teško videti da $\mathrm{Con}^*(\mathcal{A})$ čini podmrežu mreže kongruencija algebre $\mathcal{A}$. Može se dokazati i više:

Teorema 4.22 Mreža jednakosnih teorija $\mathcal{E}q_X(\mathcal{F})$ je izomorfna mreži $\mathcal{C}on^*(\mathcal{T}(X))$ potpuno invarijantnih kongruencija termovske algebre $\mathcal{T}(X)$.

Dokaz.

Videti [BS 81].

□

Navedene teoreme nam omogućavaju da prelazimo sa mreže varijeteta na mrežu jednakosnih teorija ili na mrežu kongruencija. Navedimo još sledeću činjenicu:

Teorema 4.23 (Teorema o korespondenciji) Neka je $\mathcal{A}$ algebra, ρ kongruencija algebre $\mathcal{A}$ i $[\rho)=\{\partial \mid \partial\in \mathrm{Con}(\mathcal{A}) \wedge \rho\subseteq\partial\}$. Tada je $[\rho)=([\rho),\wedge,\vee)$ podmreža od $\mathcal{C}on(\mathcal{A})$ i važi $[\rho)\cong\mathcal{C}on(\mathcal{A}/\rho)$.

Dokaz.

Videti [BS 81].

□

Posledica 4.6 Neka je $\mathcal{F}$ neki tipa algebri, ρ kongruencija odgovarajuće termovske algebre $\mathcal{T}(X)$. Tada je podmreža $[\rho)$ mreže $\mathcal{C}on(\mathcal{T}(X))$ izomorfna sa mrežom $\mathcal{C}on(\mathcal{T}(X)/\rho)$.

Dokaz.

Posledica prethodne teoreme.

□

Lema 4.5 Neka je K kongruencijski distributivan varijetet,

$$\rho=\{(u,v)\mid (u,v)\in \mathrm{T}(X)\times\mathrm{T}(X) \wedge K\models u=v\}.$$

Tada je $\mathcal{C}on(\mathcal{T}(X)/\rho)$ distributivna mreža.

Dokaz.

Neposredno sledi, jer $\mathcal{T}(X)/\rho \in K$; primetimo da je ta algebra zapravo slobodna algebra za K nad X.

□

Primetimo da u prethodnoj lemi umesto distributivnosti možemo uzeti bilo koji mrežni identitet.

Lema 4.6 Ako je K neki kongruencijski distributivan varijetet i relacija ρ definisana kao u prethodnoj lemi, onda je podmreža $[\rho)$ mreže potpuno invarijantnih kongruencija $\mathcal{C}on^*(\mathcal{T}(X))$ takođe distributivna.

Dokaz.

Po Teoremi o korespondenciji, mreža $[\rho)$ je izomorfna podmreži od $\mathcal{C}on(\mathcal{T}(X)/\rho)$, koja je po prethodnoj lemi distributivna.

□

Teorema 4.24 Neka je K kongruencijski distributivan varijetet. Tada je mreža podvarijeteta $\mathcal{V}ar(K)$ takođe distributivna.

Dokaz.

Neka je ρ relacija definisana kao ranije, X prebrojivo beskonačan skup promenljivih, $[\rho)$ podmreža mreže potpuno invarijantnih kongruencija $\mathcal{C}on^*(\mathcal{T}(X))$. Iz ranijih tvrđenja imamo da je $\mathcal{V}ar(K) \cong \mathcal{E}q(K) \cong [\rho)$, pa, prema tome, $\mathcal{V}ar(K)$ je distributivna mreža.

□

Primetimo da se na isti način prenose sa mreže kongruencija na mrežu podvarijeteta i svi drugi mrežni identiteti koji su samo-dualni.

Varijeteti relacionih algebri

Prvo što možemo zaključiti o varijetetu RA jeste:

Teorema 4.25 Mreža podvarijeteta $\mathcal{V}ar(\mathrm{RA})$ je distributivna.

Dokaz.

Sledi iz prethodne teoreme i činjenice da je RA kongruencijski distributivan varijetet(T4.10).

□

Sa $\mathcal{R}(n), n \in \mathbb{N}$, smo označili punu relacionu algebru nad skupom $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Označimo sa B_1, B_2, B_3 varijetete relacionih algebri koji (pored aksioma RA) zadovoljavaju redom sledeće identitete:

$$0' \circ 0' = 0, \; 0' \circ 0' = 1', \; 0' \circ 0' = 1.$$

Direktnom proverom možemo utvrditi da je

$$\mathcal{R}(1) \in B_1, \mathcal{R}(2) \in B_2, \mathcal{R}(n) \in B_3, \text{ za sve } n \geq 3.$$

Primetimo takođe da iz $0' \circ 0' = 0$ sledi $1' = 1$. Zaista, koristeći T2.18, imamo

$$0' \circ 0' = 0 \Leftrightarrow (0' \circ 0')1' = 0 \Leftrightarrow (0' \circ 1')0' = 0 \Leftrightarrow 0' = 0 \Leftrightarrow 1' = 1.$$

Tako zaključujemo da varijetet B_1 nije ništa drugo nego varijetet Booleovih relacionih algebri.

Važnost varijeteta B_1, B_2, B_3 za RA uočili su još Jonsson i Tarski 1952. godine.

Teorema 4.26 Svaka relaciona algebra je izomorfna sa direktnim proizvodom $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3$, gde je $\mathcal{A}_i \in B_i, i = 1,2,3$.

Dokaz.

Videti [JT II 52].

□

Posledica 4.7 $\mathrm{RA} = B_1 \vee B_2 \vee B_3$.

Dokaz.

Sledi iz prethodne teoreme.

□

Posledica 4.8 Najmanja podalgebra neke netrivijalne relacione algebre ima kardinalnost 2,4,8,16 ili 32.

Dokaz.

Sledi iz gornje teoreme i činjenice da algebra $\mathcal{B} \in B_1$ ima najmanju podalgebru kardinalnosti 2 (jer je $1 = 1'$, $0 = 0'$), dok najmanje podalgebre algebri iz varijeteta B_2 i B_3 imaju po 4 elementa $(0, 1, 1', 0')$.

□

Označimo sa $\mathcal{E}_n$ najmanju podalgebru algebre $\mathcal{R}(n)$, ($n = 1, 2, 3$). Neka je A_n varijetet generisan sa $\mathcal{E}_n, n = 1,2,3$. Pojam *atoma* smo definisali u slučaju Booleovih algebri – potpuno isto se definišu i u slučaju bilo koje mreže $\mathcal{L}$ sa najmanim elementom 0 : Element $a \in L$ jeste *atom* ako je $a \neq 0$ i za sve $b \in L$ ako $b \leq a$ onda $b = 0$ ili $b = a$. Tada se može dokazati :

Teorema 4.27 $\mathcal{V}ar$ (RA) ima tačno tri atoma: A_1, A_2, A_3.

Dokaz.

Videti [JT II 52].

□

Može se dokazati da varijeteti B_i, A_i, $i = 1, 2, 3$, generišu podmrežu mreže $\mathcal{V}ar$(RA) od 18 elemenata. U radu [Jo82] ispituje se ta podmreža. Na primer, dokazuje se da se varijeteti A_1 i B_1 poklapaju, kao i da je $B_1 \vee B_2 \leq$ RRA. Navedimo na ovom mestu (bez dokaza) baze identiteta varijeteta koji pripadaju toj podmreži. Označimo sa $\tau(x)$ term $(0'x) \circ 1 \circ (0'\overline{x})$. Tada jednakosne baze navedenih varijeteta glase:

A_1:	$1' = 1$ ili $x \circ y = x \cdot y$ ili $x \circ x = x$
A_2:	$0' \circ 0' = 1'$ i $x \circ y = y \circ x$
A_3:	$0' \circ 0' = 1$ i $\tau(x) = 0$
$A_1 \vee A_2$:	$x \circ x \circ x = x$
$A_1 \vee A_3$:	$0' \leq 0' \circ 0'$ i $\tau(x) = 0$
$A_2 \vee A_3$:	$1' \leq 0' \circ 0'$ i $\tau(x) = 0$
$B_2 \vee A_3$:	$1' \leq 0' \circ 0'$ i $\tau(x) \leq 1 \circ (\overline{0' \circ 0'})$
$A_2 \vee B_3$:	$1' \leq 0' \circ 0'$ i $x \circ y \leq (y \circ x) + (0' \circ 0')$

$B_2 \vee B_3$: $1' \leq 0' \circ 0'$

$A_1 \vee B_2$: $0' \circ 0' \leq 1'$

$A_1 \vee B_3$: $0' \leq 0' \circ 0'$

$A_1 \vee A_2 \vee B_3$: $x \circ y \leq (y \circ x) + (0' \circ 0')$

$A_1 \vee B_2 \vee A_3$: $\tau(x) \leq 1 \circ (\overline{0' \circ 0'})$

U radu [Jo 82] se dokazuje i sledeća teorema:

Teorema 4.28 Postoji $2^{\aleph_0}$ varijeteta simetričnih, reprezentabilnih relacionih algebri.

Dokaz.

Videti [Jo 82].

□

4.2 Aksiomatizabilnost klase RRA

RRA je varijetet

Rezultat da je RRA varijetet, prvi je dobio A. Tarski u [Ta 53]. Mi ćemo ovde slediti dokaz R. McKenzieja iz [McK 66] . Fundamentalnu ulogu u tom dokazu igraju proste relacione algebre. Sve pojmove iz teorije modela koje ćemo ovde koristiti, čitalac može naći u [Me 70] i [CK 73].

Teorema 4.29 Neka je K klasa svih atomičnih relacionih algebri u kojima je svaki atom funkcionalni element. Tada $\mathrm{RRA} = S(K)$.

Dokaz.

Relaciona algebra $\mathcal{A}$ je atomična ako je $\mathrm{Rd}_B(\mathcal{A})$ atomična Booleova algebra. Jasno, svaka algebra $\mathcal{E}(\rho)$ jeste atomarna: atomi algebre $\mathcal{E}(\rho)(\rho \subseteq Y^2)$ su relacije $\{(y, z)\}$ $(y, z \in Y)$ i svaki od njih jeste funkcionalni element. Tako, $\mathrm{RRA} \subseteq S(K)$. Dokažimo obrnutu inkluziju. Neka je $\mathcal{B} \in K$ i neka je $Y = \mathrm{At}(\mathcal{B})$. Definišimo relaciju ρ na skupu Y na sledeći način:

$$\rho = \{(b_0, b_1) \mid b_0, b_1 \in Y, b_0 \leq 1 \circ b_1\}.$$

Nije teško proveriti da je ρ relacija ekvivalencije na Y. Preslikavanje $\varphi : B \to \mathcal{P}(\rho)$ definisano sa $\varphi(x) = \{(b_o, b_1) \mid b_o, b_1 \in Y,\ b_o \le x \circ b_1\}$ jeste potapanje, što se može direktno verifikovati (detaljan dokaz se može naći u [McK 66]).

□

Posledica 4.9 RRA je univerzalna klasa.

Dokaz.

Primetimo da je klasa svih atomičnih RA u kojima je svaki atom funkcionalni element, elementarna klasa. Zaista, skup aksioma za klasu atomarnih RA dobija se ako skupu aksioma relacionih algebri dodamo aksiome koje tvrde da za svaki element x različit od nule postoji atom b tako da je $b \le x$, kao i aksiomu da je svaki atom funkcionalni element :

$$(\forall x)(x=0 \vee (\exists b)(\mathrm{at}(b) \wedge b \le x),\ (\forall b)(\mathrm{at}(b) \Rightarrow b^{-1} \circ b \le 1'),$$

gde je $\mathrm{at}(b)$ oznaka za formulu: $b \neq 0 \wedge (\forall x)(x \cdot b = 0 \vee x \cdot b = b)$. S druge strane, u teoriji modela se dokazuje sledeća teorema: Ako je K elementarna klasa, onda je $S(K)$ univerzalno aksiomatizabilna. Tako, klasa svih atomičnih relacionih algebri u kojima je svaki atom funkcionalni element, jeste univerzalna klasa, što na osnovu T4.29 dokazuje da je RRA univerzalna klasa.

□

Dokazaćemo sada jednu važnu osobinu prostih relacionih algebri koju je dokazao Tarski, 1941. godine.

Teorema 4.30 Za svaku otvorenu formulu ψ na jeziku RA možemo konstruisati term ψ^* tako da u svakoj prostoj relacionoj algebri $\mathcal{A}$ važi: $\mathcal{A} \models \psi \Leftrightarrow (\psi^* = 1)$.

Dokaz.

Sve atomarne formule na jeziku RA su oblika $u = v$, gde su u i v termi na jeziku RA. Primetimo da je svaki identitet $u = v$ ekvivalentan sa identitetom $u + \bar{v} = 1$. Tako, bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da su sve atomarne potformule otvorene formule ψ oblika $w = 1$, i da su jedini logički veznici $\wedge$ i $\neg$. Definišimo formulu ψ^* indukcijom po složenosti formule ψ:

1) ako je ψ formula $w = 1$, onda $\psi^* = w$;

2) ako je $\psi = \varphi \wedge \tau$, onda $\psi^* = \varphi^* \cdot \tau^*$;

3) ako je $\psi = \neg\varphi$, onda $\psi^* = 1 \circ \overline{\varphi^*} \circ 1$.

Dokaz sada ide indukcijom po složenosti ψ. Baza indukcije sledi direktno iz definicije formule ψ^*. Pretpostavimo da je $\psi = \varphi \wedge \tau$, i da za φ i τ važi indukcijska pretpostavka. Neka je $\mathcal{A}$ prosta relaciona algebra. Tada važi

$$\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \tau) \Leftrightarrow (\varphi^* = 1 \wedge \tau^* = 1) \text{ akko } \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \tau) \Leftrightarrow (\varphi^* \cdot \tau^* = 1)$$
$$\text{akko } \mathcal{A} \models \psi \Leftrightarrow (\psi^* = 1).$$

Neka je sada $\psi = \neg\varphi$, i za φ važi indukcijska pretpostavka. Neka je $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i pretpostavimo da za neke $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ imamo $\mathcal{A} \models \neg\varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Onda $\mathcal{A} \not\models \varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, pa $\varphi^*(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 1$. Tako, $\overline{\varphi^*(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \neq 0$, pa je na osnovu P4.4(v), $1 \circ \overline{\varphi^*(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \circ 1 = 1$, a to znači da je $\psi^*(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Potpuno analogno se dobija i obrat, tako da zaista, u slučaju prostih RA, važi

$$\mathcal{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow ((\neg\varphi)^* = 1),$$

što kompletira dokaz teoreme.

□

Teorema 4.31 (Tarski, 1954) RRA je jednakosna klasa.

Dokaz.

Označimo sa Γ skup svih identiteta koji važe u svim reprezentabilnim relacionim algebrama: $\Gamma = \mathrm{Eqv}\,(\mathrm{RRA})$. Želimo da pokažemo da je $\mathrm{RRA} = \mathrm{mod}(\Gamma)$.

Jasno, $\mathrm{RRA} \subseteq \mathrm{mod}(\Gamma)$. Neka je $\mathcal{A} \in \mathrm{mod}(\Gamma)$. Onda jasno $\mathcal{A} \in \mathrm{RA}$, jer su sve aksiome relacione algebre uključene u Γ. Svaka homomorfna slika od $\mathcal{A}$ je element od $\mathrm{mod}(\Gamma)$, jer homomorfizam "čuva identitete". Tako, na osnovu P4.2 imamo

$$\mathcal{A} \in \mathrm{SP}(\mathrm{Pr}(\mathrm{RA}) \cap \mathrm{mod}(\Gamma)),$$

gde smo sa $\mathrm{Pr}(\mathrm{RA})$ označili klasu prostih relacionih algebri. Kako je $\mathrm{RRA} = \mathit{ISP}(K)$, gde je K klasa punih RA, imamo $\mathrm{RRA} = \mathrm{SP}(\mathrm{RRA})$. Dovoljno je dokazati da je

$$\mathrm{Pr}(\mathrm{RA}) \cap \mathrm{mod}(\Gamma) = \mathrm{Pr}(\mathrm{RRA}),$$

jer ako $\mathcal{A} \in \mathrm{SP}(\mathrm{Pr}(\mathrm{RRA})) \subseteq \mathrm{SP}(\mathrm{RRA}) = \mathrm{RRA}$, onda $\mathcal{A} \in \mathrm{RRA}$. Dokažimo, dakle,

$$\Pr(RA) \cap \mathrm{mod}(\Gamma) = \Pr(RRA).$$

Znamo (P4.9) da je RRA univerzalna klasa. Neka je Σ skup univerzalnih rečenica tako da RRA = mod(Σ). Ako je $\psi \in \Sigma$, onda ψ važi i na svim prostim reprezentabilnim relacionim algebrama, pa i $\psi^* = 1$ važi na svim prostim reprezentabilnim relacionim algebrama. No, onda $\psi^* = 1$ važi na svim reprezentabilnim relacionim algebrama, jer je svaka RRA podalgebra direktnog proizvoda prostih RRA (P4.3).

Dakle, $\psi^* = 1 \in \Gamma$. Neka je sada $\mathcal{A} \in \Pr(RA) \cap \mathrm{mod}(\Gamma)$, onda $\mathcal{A} \models \Sigma$, jer za sve $\psi \in \Sigma$ $\mathcal{A} \models \psi$ akko $\mathcal{A} \models \psi^* = 1$; Kako je $\psi^* = 1 \in \Gamma$ i $\mathcal{A} \models \Gamma$ onda stvarno $\mathcal{A} \models \psi$. Sledi

$$\mathcal{A} \in \mathrm{mod}(\Sigma) \cap \Pr(RA) = \Pr(RRA), \text{ tj. } \Pr(RA) \cap \mathrm{mod}(\Gamma) \subseteq \Pr(RRA).$$

Inkluzija $\Pr(RRA) \subseteq \Pr(RA) \cap \mathrm{mod}(\Gamma)$ je jasna, pa smo time i završili dokaz.

□

Jednakosna teorija klase RRA

U delu 3.2 smo videli da klase RA i RRA nisu iste: postoji relaciona algebra koja nije reprezentabilna. To znači da je skup aksioma za relacione algebre preslab za opisivanje klase reprezentabilnih relacionih algebri. No, postojanje nereprezentabilne relacione algebre još ne znači da skup aksioma za RA ne opisuje *jednakosnu teoriju klase* RRA. Naime, u opštem slučaju može da se desi da dve različite klase algebri imaju *istu jednakosnu teoriju*. Na primer, ako je $\mathcal{A}$ neka netrivijalna algebra, onda $\{\mathcal{A}\} \neq HSP(\{\mathcal{A}\})$ ali $Eq(\{\mathcal{A}\}) = Eq(HSP(\{\mathcal{A}\}))$. Tako, u našem slučaju činjenica da je RRA $\neq$ RA još ne znači da je odgovor na pitanje " *Da li je* $Eq(RRA) = Eq(RA)$ *?*" negativan. Međutim, na osnovu teoreme Tarskog (T4.31) koja tvrdi da je RRA jednakosna klasa, negativan odgovor nužno sledi.

Teorema 4.32 Postoji identitet na jeziku relacionih algebri koji važi na svim reprezentabilnim relacionim algebrama a ne važi na klasi RA.

Dokaz.

Kako je RRA $\subseteq$ RA onda $Eq(RA) \subseteq Eq(RRA)$. Pretpostavimo da je $Eq(RA) = Eq(RRA)$, i neka je Σ jednakosna baza klase RRA tj. RRA = mod(Σ). Neka je $\mathcal{A} \in RA \setminus RRA$. Tada

$$\mathcal{A} \in RA \Rightarrow \mathcal{A} \models Eq(RA) \Rightarrow \mathcal{A} \models Eq(RRA) \Rightarrow \mathcal{A} \models \Sigma \Rightarrow \mathcal{A} \in RRA,$$

što je kontradikcija. Tako, naša pretpostavka da je Eq(RA)=Eq(RRA) bila je pogrešna, i postoji identitet koji važi na klasi RRA a ne važi na RA.

□

Prethodna teorema je egzistencijalnog tipa: tvrdi se postojanje identiteta koji važi na RRA, a ne važi na RA. No, da li se takav identitet može eksplicitno odrediti? Da! Primer jednog takvog identiteta dat je u sledećoj teoremi.

Teorema 4.33 Neka je $p(x)=\overline{(\bar{x}\,x^{-1}\circ\bar{x}\,x^{-1})}$. Tada identitet

(1) $\quad (x\circ x^{-1})(x^{-1}\circ x)p(x)\overline{(1\circ((x\circ x)(\bar{x}+p(x)))\circ 1)}=0$

važi na svim reprezentabilnim relacionim algebrama, a ne važi na klasi RA.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{A}$ McKenziejeva nereprezentabilna algebra (videti T 3.11). Tada identitet (1) ne važi na $\mathcal{A}$: dovoljno je za x uzeti element $1+t_1$, (gde je t_1 atom, sa osobinom da $t_1\neq t_1{}^{-1}$).

Kako je RRA $=ISP(K)$, gde je K klasa punih RA, da bismo dokazali da (1) važi na RRA, dovoljno je dokazati da (1) važi na svim punim relacionim algebrama. Treba dokazati da za sve relacije $x\in\mathcal{R}(S)$ važi

(2) $\quad (x\circ x^{-1})\cap(x^{-1}\circ x)\cap p(x)\subseteq S^2\circ((x\circ x)\cap(\bar{x}\cup p(x)))\circ S^2.$

Ako je $x=\emptyset$, (2) očigledno važi. Neka je $x\neq\emptyset$. Posmatraćemo dva slučaja:

Slučaj 1) Relacija $x\in\mathcal{R}(S)$ nije tranzitivna. Tada $x\circ x\not\subseteq x$ tj. $(x\circ x)\cap\bar{x}\neq\emptyset$. No, nije teško videti da za sve relacije $\rho\in\mathcal{R}(S)$ važi da

(3) $\quad$ ako $\rho\neq\emptyset$ onda $S^2\circ\rho\circ S^2=S^2$.

Tako, u slučaju da x nije tranzitivna, dobijamo $S^2\circ((x\circ x)\cap\bar{x})\circ S^2=S^2$, i (2) trivijalno važi.

Slučaj 2) Relacija x je tranzitivna, tj. $(x\circ x)\cap\bar{x}=\emptyset$.

Primetimo da u slučaju da je $(x\circ x^{-1})\cap(x^{-1}\circ x)\cap p(x)=\emptyset$, inkluzija (2) trivijalno važi. Pretpostavimo u daljem da je $(x\circ x^{-1})\cap(x^{-1}\circ x)\cap p(x)\neq\emptyset$.

Dokazaćemo da u tom slučaju važi $(x\circ x)\cap p(x)\neq\emptyset$, tako da će desna strana inkluzije (2) ponovo dobiti vrednost S^2, iz čega će slediti da (2) važi na $\mathcal{R}(S)$. Kako je $(x \circ x^{-1}) \cap (x^{-1} \circ x) \cap p(x) \neq \emptyset$, postoje $a, b \in S$, tako da je

$$(a, b) \in p(x) \Leftrightarrow \neg(a, b) \in (\bar{x} \cap \overline{x^{-1}}) \circ (\bar{x} \cap \overline{x^{-1}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(\exists c)((a, c) \in (\bar{x} \cap \overline{x^{-1}}) \wedge (c, b) \in (\bar{x} \cap \overline{x^{-1}})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall c)(\neg(a, c) \in (\bar{x} \cap \overline{x^{-1}}) \vee \neg(c, b) \in (\bar{x} \cap \overline{x^{-1}})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall c)((a, c) \in x \vee (a, c) \in x^{-1} \vee (c, b) \in x \vee (c, b) \in x^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall c)(axc \vee cxa \vee cxb \vee bxc) \tag{4}$$

Dalje, $(a, b) \in x \circ x^{-1}$ i $(a, b) \in x^{-1} \circ x$ i $(a, b) \in p(x)$. Ovo znači da postoje $e, d \in X$ tako da važi $(a, e) \in x$ i $(e, b) \in x^{-1}$ i $(a, d) \in x$ i $(d, b) \in x^{-1}$. Tako imamo da važi axe i bxe i dxa i dxb. Iz dxa i axe sledi $(d, e) \in x \circ x$. Da pokažemo da važi $(d, e) \in p(x)$ koristimo uslov (4). Ako za dato $c \in X$ važi cxa ili cxb, onda je cxe (jer zbog tranzitivnosti relacije) x imamo: $cxa \wedge axe \Rightarrow cxe$ i $cxb \wedge bxe \Rightarrow cxe$. Slično, ako je axc ili bxc, onda $dxa \wedge axc \Rightarrow dxc$ i $dxb \wedge bxc \Rightarrow dxc$. Kako jedno od cxa, cxb, axc, bxc mora da važi (videti (4)) sledi da za svako $c \in X$ važi cxe ili dxc. Po definiciji $p(x)$ imamo da

$$(d, e) \in p(x) \Leftrightarrow (\forall c)(dxc \vee cxd \vee cxe \vee exc).$$

Kako smo dokazali da za proizvoljno c važi $(c, e) \in x$ ili $(d, c) \in x$ onda imamo $(d, e) \in (x \circ x) \cap p(x)$, što je itrebalo dokazati.

□

Poslednje dve teoreme pokazuju da aksiome relacionih algebri date u definiciji D2.1 nisu dovoljne za potpuno opisivanje klase reprezentabilnih relacionih algebri. Na primer, identitet dat u T4.33 ne sledi iz tih aksioma, pa bi taj identitet trebalo *dodati aksiomama RA*. Koliko identiteta bi trebalo dodati aksiomama RA da dobijemo aksiome za RRA ? Nažalost, beskonačno mnogo.

Teorema 4.34 (Monk, 1964) Klasa RRA nije konačno aksiomatizabilna.

Dokaz. (*ideja*)

Može se dokazati da postoji ultraproizvod familije nereprezentabilnih relacionih algebri koji jeste reprezentabilna RA. Tako, na osnovu poznate teoreme iz teorije modela (videti [CK 73]) sledi da RRA nije konačno aksiomatizabilna.

□

U radu [Jo 86] je dokazana i stroža verzija Monkove teoreme: Svaka jednakosna baza za RRA sadrži identitete sa proizvoljno mnogo promenljivih. Eksplicitni aksiomi za RRA mogu se naći u [Ly 56]. McKenzie je u [McK 66] dokazao da je RRA = mod(Γ_0), gde je Γ_0 skup onih identiteta Θ iz Eqv(RRA) koji ne sadrže simbol 1' ili su iz skupa aksioma za relacione algebre. U radu [Jo 86] su dati još neki identiteti koji važe u RRA, a ne važe na svim relacionim algebrama.

O još jednom identitetu

Interesantno je da postoji identitet koji važi na svim konačnim RA, a ne važi na $\mathcal{R}(X)$, čim je X beskonačan ([Jo 82]). Napomenimo da u slučaju relacionih algebri (zbog T1.8), svaki identitet oblika $p(x)\cdot\overline{q(x)}=0$ možemo zapisati u ekvivalentnom obliku $p(x)\leq q(x)$. Kao i ranije, neka ∇ označava simetričnu razliku tj. $x \nabla y = x\overline{y}+\overline{x}y$.

Teorema 4.35 Identitet

(i) $\quad (x^{-1}\circ x)0' \leq 1\circ((x\circ x^{-1})\nabla 1')\circ 1$

važi u svim konačnim relacionim algebrama, ali ne važi u $\mathcal{R}(X)$, kada je X beskonačan skup.

Dokaz.

Poznato je da je u konačnom monoidu svaki levi inverzni element proizvoljnog elementa a ujedno i desni inverzni element od a. Prema tome u konačnim RA važi formula

$$x\circ y=1' \Rightarrow y\circ x=1'.$$

Označimo ovu implikaciju sa φ. Neka RA_{fin} označava klasu konačnih RA. Tada

$$\mathrm{RA}_{fin} \models \varphi \Leftrightarrow \varphi^* = 1.$$

Pogledajmo kako izgleda φ^*. Lako se pokazuje da je formula $x\circ y=1'$ ekvivalentna sa $(x\circ y)\nabla 1'=0$. Analogno, $y\circ x=1'$ ekvivalentno je sa $(y\circ x)\nabla 1'=0$, pa polazna implikacija ima oblik

(1) $(x \circ y)\nabla 1' = 0 \Rightarrow (y \circ x)\nabla 1' = 0$ tj.

$\overline{(x \circ y)\nabla 1'} = 1 \Rightarrow \overline{(y \circ x)\nabla 1'} = 1$

Označimo $\overline{(x \circ y)\nabla 1'} = 1$ sa α i $\overline{(y \circ x)\nabla 1'} = 1$ sa β. Implikacija (1) ekvivalentna je sa

(2) $\neg\alpha \vee \beta$

tj. imamo $RA_{fin} \models \neg\alpha \vee \beta$.

Za proizvoljnu otvorenu formulu Ψ, neka je Ψ^* term definisan u T4.30. Analogno kao u T4.30 možemo dokazati da na svim prostim relacionim algebrama $\mathcal{A}$ za sve otvorene formule φ_1 i φ_2, važi

$$\mathcal{A} \models \varphi_1 \vee \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1^* + \varphi_2^* = 1).$$

U našem slučaju to implicira da

$$RA_{fin} \models (\neg\alpha)^* + \beta^* = 1, \text{ tj.}$$

$$RA_{fin} \models 1 \circ (\overline{\overline{(x \circ y)\nabla 1'}}) \circ 1 + (\overline{(y \circ x)\nabla 1'}) = 1 \text{ ili}$$

$$RA_{fin} \models 1 \circ ((x \circ y)\nabla 1') \circ 1 + (\overline{(y \circ x)\nabla 1'}) = 1.$$

Ovo je ekvivalentno sa

$$RA_{fin} \models (y \circ x)\nabla 1' \leq 1 \circ ((x \circ y)\nabla 1') \circ 1.$$

Primetimo da (i) sledi iz poslednjeg identiteta, specijalno za $y = x^{-1}$.

Neka je X beskonačan skup. Dokažimo da

$$\mathcal{R}(X) \not\models (x^{-1} \circ x)\, 0' \leq 1 \circ ((x \circ x^{-1})\nabla 1') \circ 1.$$

Naime, ako je f preslikavanje "na" koje nije 1-1 uzmimo za x baš f^{-1}. Ako bi data formula važila na $\mathcal{R}(X)$, imali bismo

(3) $(f \circ f^{-1}) \cap \overline{\Delta}_X \subseteq X^2 \circ (((f^{-1} \circ f) \cap \overline{\Delta}_X) \cup (\overline{(f^{-1} \circ f)} \cap \Delta_X)) \circ X^2.$

Dokažimo da to nije tačno. Pretpostavimo da neki par (x, y) pripada $f \circ f^{-1} \cap \overline{\Delta}_X$. To znači da $(x, y) \in f \circ f^{-1}$ i $x \neq y$. Onda

$$(x, y) \in f \circ f^{-1} \Leftrightarrow (\exists z)((x, z) \in f \wedge (z, y) \in f^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists z)(f(x) = z \wedge f(y) = z).$$

Očigledno je da postoji takvo z obzirom da je f preslikavanje "na". Ako bi $(x, y) \in X^2 \circ ((f^{-1} \circ f) \cap \overline{\Delta}_X) \cup ((\overline{f^{-1} \circ f}) \cap \Delta_X)) \circ X^2$ imali bi da

$(\exists u, v \in X)\, ((x, u) \in X^2 \wedge (u, v) \in ((f^{-1} \circ f) \cap \overline{\Delta}_X) \cup ((\overline{f^{-1} \circ f}) \cap \Delta_X) \wedge (v, y) \in X^2)$

Pogledajmo šta znači da $(u, v) \in ((f^{-1} \circ f) \cap \overline{\Delta}_X) \cup ((\overline{f^{-1} \circ f}) \cap \Delta_X)$. Ovo je ekvivalentno sa

$(a)\ (u, v) \in f^{-1} \circ f \cap \overline{\Delta}_X$ ili $(b)\ (u, v) \in \overline{f^{-1} \circ f} \cap \Delta_X$.

Iz (a) imamo

$$(\exists w)((u, w) \in f^{-1} \wedge (w, v) \in f \wedge u \neq v),$$

tj. $(w, u) \in f$ i $(w, v) \in f$ i $u \neq v$ pa je $f(w) = u$ i $f(w) = v$ i $u \neq v$ što je kontradikcija (jer je f preslikavanje). Iz (b) imamo

$$\neg (\exists w)((u, w) \in f^{-1} \wedge (w, v) \in f \wedge u = v),$$

odnosno $\neg (\exists w)\ f(w) = u = v = f(w)$, što nije tačno.

Iz svega sledi da je desna strana inkluzije (3) prazan skup, pa identitet (i) ne važi na beskonačnoj $\mathcal{R}(X)$.

□

Posledica 4.10 Varijeteti RA i RRA nisu generisani svojim konačnim članovima.

□

Zašto relacione algebre?

Šta je razlog tome da su klase RA i RRA tako "nezgodne" ? Možda bi trebalo pored operacija unije, preseka, komplementa, kompozicije i inverzije uzeti još neke operacije nad binarnim relacijama? Ni to nam ne bi puno pomoglo. Naime, B. Biró i R. Maddux su 1988. godine ([Bi 87]) dokazali da (slobodno rečeno) *ne postoji konačno "lepo" proširenje jezika relacionih algebri tako da odgovarajuća klasa (konkretnih) relacionih algebri ima konačnu bazu* .

Neko bi mogao reći: ako se već pokazalo da su relacione algebre tako nezgodne, da li ih vredi uopšte izučavati ? Da, vredi! Naime, još su 1951. godine Chin i Tarski primetili da relacione algebre mogu odigrati veoma važnu ulogu u matematičkim istraživanjima uopšte. Citirajmo njihovo mišljenje iz rada [CT 51]:

" Pokazano je da se svaki problem koji se tiče izvodljivosti matematičkog tvrđenja iz datog skupa aksioma može svesti na problem *da li neka jednakost važi identički u svakoj relacionoj algebri*. Tako se može reći da, u principu, *celo matematičko istraživanje možemo izvesti izučavajući identitete u aritmetici relacionih algebri.* "

Ovaj program je i realizovan u knjizi [TG 87]. Tu je dat jedan nov, jednostavan formalizam $\mathcal{L}^X$ koji je blisko povezan sa jednakosnom teorijom relacionih algebri. $\mathcal{L}^X$ ne sadrži promenljive, kvantore, iskazne veznike. Ima dva osnovna simbola ($\mathit{1}$ i E). Izrazi se prave od četiri operacijska simbola: $\circ$, *, $+$, $^\sim$. Matematička tvrđenja u $\mathcal{L}^X$ su formulisana kao jednakosti takvih izraza. Deduktivni aparat od $\mathcal{L}^X$ zasniva se na deset logičkih šema aksioma (sličnih aksiomama RA). Pravilo izvođenja je zamena jednakih izraza. Pokazuje se da je taj formalizam tako jak, da se u njemu može formulisati teorija skupova, aritmetika..., možemo dakle reći "cela matematika" !

4.3 Semigrupne relacione algebre

Semigrupe i relacione algebre

U Glavi II smo videli da se svaka Booleova algebra može "proširiti" do relacione algebre. Naime, ako je $\mathcal{B}=(B,+,\cdot,-,0,1)$ neka Booleova algebra i ako operacije $\circ$, $1'$, $^{-1}$ definišemo sa $x\circ y = x\cdot y$, $1'=1$ i $x^{-1}=x$, onda dobijena struktura $(B,+,\cdot,-,0,1,\circ,1',^{-1})$ jeste relaciona algebra (tzv. Booleova relaciona algebra). S druge strane, svaka RA "sadrži u sebi" strukturu semigrupe.

Definicija 4.11 Neka je $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,\circ,1,^{-1})$ relaciona algebra. *Semigrupni redukt od* $\mathcal{A}$, u oznaci $\mathrm{Rd}_S(\mathcal{A})$, jeste semigrupa $(A,\circ)$.

□

Prirodno je postaviti pitanje : Da li se svaka semigrupa može "obogatiti" do relacione algebre? Drugim rečima, da li je svaka semigrupa izomorfna semigrupnom reduktu neke relacione algebre? Odgovor je, naravno, *ne*. Za negativan odgovor postoji nekoliko razloga. Prvo, znamo da svaka konačna relaciona algebra ima 2^n elemenata ($n \in \mathbb{N}$). Tako, ni jedna konačna semigrupa kardinalnosti k, gde k nije stepen dvojke, nije semigrupni redukt relacione algebre. Dalje, semigrupni redukt svake relacione algebre jeste semigrupa sa jedinicom (1') i nulom (Booleova nula zadovoljava $x \circ 0 = 0 \circ x = 0$). Čak i medu semigrupama sa nulom i jedinicom postoje semigrupe koje se ne mogu obogatiti do relacione algebre.

Teorema 4.35 Za svaki kardinalni broj $\lambda \geq 3$ postoji semigrupa $\mathcal{S}$ sa jedinicom i nulom kardinalnosti λ, takva da $\mathcal{S}$ nije semigrupni redukt ni jedne relacione algebre.

Dokaz.

Neka je λ neki beskonačni kardinalni broj, C skup kardinalnosti λ i $\mathcal{C} = (C, *)$ konstantna semigrupa tj. semigrupa u kojoj postoji element c takav da za sve $x, y \in C$ važi $x * y = c$. Označimo sa $\mathcal{S}$ semigrupu dobijenu iz $\mathcal{C}$ dodavanjem jedinice $1' \notin C$ i nule $0 \notin C$. Pretpostavimo da postoji relaciona algebra $\mathcal{A}$ takva da je $\mathcal{S} = \mathrm{Rd_S}(\mathcal{A})$. Tada je 0 Booleova nula od $\mathcal{A}$, a 1' jedinica od $\mathrm{Rd_S}(\mathcal{A})$. Znamo da je $0^{-1} = 0$ i $(1')^{-1} = 1'$ pa sledi da je $x^{-1} \in C$ za svako $x \in C$. Za element $\bar{c}$ postoje dve mogućnosti: (1) $\bar{c} \in C \cup \{1'\}$ ili 2) $\bar{c} = 0$. Pokazaćemo da i (1) i (2) daju kontradikciju.

(1) Pretpostavimo $\bar{c} \in C \cup \{1'\}$. Kako je $c \circ c = c \Rightarrow (c \circ c)^{-1} = c^{-1} \Rightarrow c = c^{-1} \circ c^{-1} = c^{-1}$ tj. $c^{-1} = c$. Razmotrimo aksiomu R5 relacionih algebri. Uzmimo $x = y = c$. Imamo tada

$$(c^{-1} \circ (\overline{c \circ c}))c = (c \circ \bar{c})c = cc = c = 0,$$

što je kontradikcija.

(2) Pretpostavimo da je $\bar{c} = 0$. Neka je $b \in C \setminus \{1, c\}$. Tada $\bar{b} \in C$. U aksiomi R5 stavimo $x = b, y = 1$. Tada imamo

$$(b^{-1} \circ (\overline{b \circ 1'}))1' = (b^{-1} \circ \bar{b})1' = c1' = 0 \;\Rightarrow\; 1' \leq \bar{c} \;\Rightarrow\; 1' \leq 0 \;\Rightarrow\; 1' = 0,$$

što je kontradikcija.

Primetimo da analogan dokaz važi i za konačno $\lambda \geq 3$ s tom razlikom što za skup C treba uzeti skup kardinalnosti $\lambda - 2$.

□

Prema tome, primorani smo da postavimo " slabije" pitanje. Da li se svaka semigrupa može potopiti u semigrupni redukt neke relacione algebre? Lako se možemo uveriti da je odgovor pozitivan.

Konstrukcija Φ

Konstrukcija se direktno oslanja na činjenicu da je svaka semigrupa izomorfna sa nekom semigrupom transformacija (videti 3.1).

Teorema 4.36 Svaka semigrupa se može potopiti u semigrupni redukt neke relacione algebre.

Dokaz.

Kako se svaka semigrupa može potopiti u neku semigrupu sa jedinicom (L 3.2), možemo pretpostaviti da je $\mathcal{S}$ semigrupa sa jedinicom. U L 3.1 smo videli da je preslikavanje $\Psi : S \to F\ (S)$ definisano sa $\Psi(a) = f_a$, gde je $f_a(x) = x \cdot a$, potapanje semigrupe $\mathcal{S}$ u punu semigrupu transformacija $\mathcal{F}(S)$. No, svaka funcija f_a je ustvari binarna relacija (koju obeležavamo sa ρ_a), pa možemo smatrati da je $\Psi(S) \subseteq \mathcal{P}(S^2)$. Posmatrajmo sada podalgebru $\mathcal{A} = \langle \Psi(S) \rangle$ relacione algebre $\mathcal{R}(S)$ generisanu skupom $\Psi(S)$. Naravno, $\mathcal{S} \cong \Psi(\mathcal{S}) < Rd_S(\mathcal{A})$, što je itrebalo dokazati.

□

Za proizvoljnu semigrupu $\mathcal{S}$ sa jedinicom, označimo sa $\Phi(\mathcal{S})$ relacionu algebru $\mathcal{A}$ opisanu u prethodnoj teoremi. Ako $\mathcal{S}$ nema jedinicu, onda je prvo potopimo u monoid $\mathcal{S}_1$ (videti L 3.2) i definišemo $\Phi(\mathcal{S}) = \Phi(\mathcal{S}_1)$. Ako je a element date semigrupe sa jedinicom $\mathcal{S}$ onda ćemo sa ρ_a označavati "relacijsku reprezentaciju" $\Psi(a)$ elementa a tj. $\rho_a = \{(x, x \cdot a) \mid x \in S\}$.

Definicija 4.12 Za relacionu algebru algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je *semigrupna relaciona algebra* ako postoji semigrupa $\mathcal{S}$ tako da je $\Phi(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$.

□

Nije teško videti da jednoelementna relaciona algebra nije semigrupna relaciona algebra. Možemo dokazati sledeće:

Teorema 4.37 Za bilo koji kardinal $\lambda \geq 3$, postoji prava relaciona algebra $\mathcal{A}$ nad skupom od λ elemenata, takva da $\mathcal{A}$ nije semigrupna relaciona algebra.

Dokaz.

Neka je X skup, $|X| = \lambda \geq 3$, i $\mathcal{A}$ minimalna podalgebra pune relacione algebre $\mathcal{R}(X)$.

Tada je $A=\{\Delta_X, \overline{\Delta_X}, \emptyset, X^2\}$. Lako se uveravamo da ne postoji semigrupa $\mathcal{S}$ takva da je $\Phi(\mathcal{S})=\mathcal{A}$.

□

Interesantno je da su sve (netrivijalne) konačne pune relacione algebre semigrupne RA, ali ni jedna beskonačna puna RA nije semigrupna RA.

Teorema 4.38 Puna relaciona algebra $\mathcal{R}(n)$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, jeste semigrupna relaciona algebra.

Dokaz.

Za $n=1$ očigledno. Neka je $n\geq 2$ i neka je S_0 polugrupa desnih nula (tj. $x\cdot y=y$ za sve elemente x, y) na skupu $S_0=\{0, 1, \ldots, n-2\}$. Označimo sa S monoid dobijen iz S_0 dodavanjem jedinice e. Tada je $S=\{0, 1, \ldots, n-2, e\}$,

$$\rho_k=\{(x, x\cdot k)\mid x\in S\}=\{(x, k)\mid x\in S\} \quad \text{za } k\in S_0,$$

$$\rho_s^{-1}\circ\rho_k=\{(s, k)\} \text{ za } s, k\in S_0.$$

Uzmimo neko $k\in S_0$ i $\sigma_k=\bigcup\{\rho_s^{-1}\circ\rho_k \mid s\in S_0\}$. Tada je $\rho_k\cap\overline{\sigma_k}=\{(e, k)\}$ i $(\rho_k\cap\overline{\sigma_k})\circ(\rho_k\cap\overline{\sigma_k})=\{(e, e)\}$. Na taj način dobijamo sve atome $\mathcal{R}(n)$. Prema tome $\Phi(S)=\mathcal{R}(n)$.

□

Videli smo da postoje prave RA koje su semigrupne RA i postoje neke koje nisu. Prirodno je postaviti pitanje karakterizacije klase semigrupnih relacionih algebri. Potreban nam je nov pojam:

Definicija 4.13 Za element $a\in A$ relacione algebre $\mathcal{A}$ kažemo da je *pravi funkcionalni element* ako važi

(i) $a^{-1}\circ a\leq 1'$, (ii) $a\circ a^{-1}\geq 1'$.

□

Primetimo da je svaki pravi funkcionalni element ujedno i funkcionalni element. Ako je $\mathcal{A}<\mathcal{R}(X)$ prava relaciona algebra, onda je element $f\in X$ pravi funkcionalni element od $\mathcal{A}$ akko je f funkcija skupa X. Za takve elemente f pišemo $f(x)=y$ ako $(x,y)\in f$.

Teorema 4.39 Neka je $\mathcal{A}$ podalgebra pune relacione algebre $\mathcal{R}(B)$, $B\neq\emptyset$. Sledeći uslovi su ekvivalentni :

(i) $\mathcal{A}$ je semigrupna relaciona algebra;

(ii) Postoji skup pravih funkcionalnih elemenata $\{f_b \mid b\in B\}$ koji generiše $\mathcal{A}$ tako da

(a) $(\exists e\in B)(\forall x\in B) f_e(x)=f_x(e)=x$;

(b) $(\forall j\in B)(\forall k\in B)(f_k(j)=t \Rightarrow f_j\circ f_k=f_t)$.

Dokaz.

(ii)$\Rightarrow$(i). Definišimo na skupu B operaciju $*$ na sledeći način $x*y=f_y(x)$. Tada je $(B, *)$ monoid sa jedinicom e, jer

$$(i*j)*k=f_k(i*j)=f_k(f_j(i))=(f_j\circ f_k)(i)=f_{f_k(j)}(i)=f_{j*k}(i)=i*(j*k),$$

$$x*e=f_e(x)=f_x(e)=e*x=x.$$

Dalje, za sve $b\in B$ imamo $\rho_b=\{(x,x*b)\mid x\in B\}=\{(x,f_b(x))\mid x\in B\}$ tj. $\rho_b=f_b$. Prema tome $\mathcal{A}=<\{f_b\mid b\in B\}> = <\{\rho_b\mid b\in B\}>$ i $\Phi(\mathcal{B})=\mathcal{A}$.

(i)$\Rightarrow$(ii). Ako je $\Phi(\mathcal{B})=\mathcal{A}$, možemo uzeti da je $\mathcal{B}$ monoid. Definišimo elemente $f_b(b\in B)$ na sledeći način: $f_b=\{(x, x\cdot b)\mid b\in B\}$. Tada su svi f_b pravi funkcionalni elementi za koje važi uslov (ii). Naime, ako je e jedinica u $\mathcal{B}$, onda je

$$f_e(x)=xe=ex=f_x(e)=x,$$

$$(f_j\circ f_k)(i)=f_k(f_j(i))=f_k(i\cdot j)=(i\cdot j)\cdot k=i\cdot(j\cdot k)=f_{f_k(j)}(i).$$

□

Posledica 4.11 Neka je X beskonačan skup. Puna relaciona algebra $\mathcal{R}(X)$ nije semigrupna relaciona algebra.

Dokaz.

Ako je $\mathcal{R}(X)$ semigrupna relaciona algebra. Prema prethodnoj teoremi ima generatorni skup kardinalnosti $|X|$. Međutim, ako je X beskonačan, onda $|X|$ elemenata generiše $|X|$ elemenata. Ali, $|X|<|\mathcal{R}(X)|$. Sledi da $\mathcal{R}(X)$ nije semigrupna relaciona algebra.

□

Koje semigrupne osobine ostaju očuvane preslikavanjem Φ ? Na primer, ako je $\mathcal{S}$ komutativna semigrupa, da li je $\mathrm{Rd_S}(\Phi(\mathcal{S}))$ komutativna? Sledeći primer pokazuje da je odgovor u opštem slučaju negativan.

Primer 4.1 Neka je $\mathcal{S}=(\{a,b\},\cdot)$ komutativna semigrupa sa jedinicom a, u kojoj je $b\cdot b=b$. Tada je

$$\rho_a=\{(a,a),(b,b)\},\ \rho_b=\{(a,b),(b,b)\},\ \rho_b\cap(\rho_b)^{-1}=\{(b,b)\},\{(b,b)\}\circ\overline{\rho_a}=\{(b,a)\},$$

tako da u relacionoj algebri $\Phi(\mathcal{S})$ važi $\{(b,a)\}\circ\{(b,b)\}\neq\{(b,b)\}\circ\{(b,a)\}$.

□

U daljem ćemo detaljnije ispitati kako se osobina regularnosti prenosi sa semigrupe $\mathcal{S}$ na relacionu algebru $\Phi(\mathcal{S})$.

Regularnost

Definicija 4.14 Za semigrupu $\mathcal{S}=(S,\cdot)$ kažemo da je *regularna*, ako

$$\mathcal{S}\models(\forall x)(\exists y)\ x\cdot y\cdot x=x\quad .$$

□

Postoji više načina da dokažemo, da semigurpa $\mathcal{B}_x=(\mathcal{P}(X^2),\circ)$ svih binarnih relacija skupa X *nije* regularna, čim je $|X|>2$. Mi ćemo dati jedan *elementaran* dokaz te činjenice.

Teorema 4.40 Semigrupa $\mathcal{B}_A=(\mathcal{P}(A^2),\circ)$ svih binarnih relacija skupa A u odnosu na kompoziciju relacije *nije* regularna, čim je $|A|>2$. (Napomena: Ako je $|A|\leq 2$, semigrupa $\mathcal{B}_A$ jeste regularna, što se može direktno proveriti .)

Dokaz.

Kako je $|A|\geq 3$, izaberimo tri različita elementa: a, b, $c\in A$. Posmatrajmo relaciju $\rho=\{(a,b),(b,c),(c,b),(c,a),(a,c)\}$. Dokažimo da za ρ ne postoji relacija δ tako da

$$\rho\circ\delta\circ\rho=\rho.\qquad (*)$$

Neka je $\Theta=\rho\circ\delta$; onda se uslov $(*)$ može zapisati kao $\Theta\circ\rho=\rho$. Kako $(a,b)\in\rho$ onda $(\exists t)((a,t)\in\Theta\wedge(t,b)\in\rho)$, i za t možemo uzeti $t=a$ ili $t=c$. Ako bi bilo $t=c$, onda $(a,c)\in\Theta$, pa zbog $(c,a)\in\rho$ sledi $(a,a)\in\rho$, kontradikcija. Dakle mora biti $t=a$, pa $(a, a) \in \Theta$. Primetimo dve činjenice:

1) $(c, a) \notin \Theta$ jer bi zbog $(a, c) \in \rho$ bilo $(c, c) \in \rho$.

2) $(b, a) \notin \Theta$ jer bi zbog $(a, b) \in \rho$ bilo $(b, b) \in \rho$.

Kako $(a, a) \in \Theta$, onda $(\exists u)((a, u) \in \rho \wedge (u, a) \in \delta)$, jer $\Theta = \rho \circ \delta$. Pošto $(a, u) \in \rho$, onda $u = b$ ili $u = c$. Ako bi bilo $u = b$, onda $(b, a) \in \delta$, pa zbog $(c, b) \in \rho$ sledi $(c, a) \in \Theta$, kontradikcija sa činjenicom 1).

No, i druga mogućnost, $u = c$, dovodi nas u kontradikciju, jer bi $(c, a) \in \delta$ pa bi zbog $(b, c) \in \rho$ sledilo $(b, a) \in \Theta$.

□

Za neki elment x semigrupe $\mathcal{S}$ kažemo da je *regularan* ako postoji $y \in S$ tako da je $x \cdot y \cdot x = x$. (Tako, semigrupa je regularna akko su svi njeni elementi regularni.) Prvu karakterizaciju regularnih elemenata semigrupe $\mathcal{B}_x$ dao je Zareckij (1962, 1963), ali njegov kriterijum nije baš pogodan za praktične primene (svodi se na određivanje da li je neka mreža kompletno distributivna). B. Schein u radu [Sch 76] daje nov, mnogo jednostavniji kriterijum za određivanje da li je data binarna relacija regularna.

Teorema 4.41 (B. Schein, 1976). Binarna relacija $\rho \subseteq X^2$ je regularna u semigrupi $\mathcal{B}_x$ akko $\rho \subseteq \rho \circ \overline{(\rho^{-1} \circ \bar{\rho} \circ \rho^{-1})} \circ \rho$.

Dokaz.

Ako je $\rho \circ \delta \circ \rho \subseteq \rho$ onda za δ kažemo da je *podinverz* od ρ. Jasno, skupovna unija familije podinverza od ρ je ponovo podinverz od ρ. Tako, postoji najveći podinverz $\tilde{\rho}$ od ρ; δ je podinverz od ρ akko $\delta \subseteq \tilde{\rho}$. Dokažimo prvo da je $\tilde{\rho} = \overline{\rho^{-1} \circ \bar{\rho} \circ \rho^{-1}}$. Za sve $x, y \in X$, $(x, y) \in \tilde{\rho}$ podrazumeva da $\rho \circ \{(x, y)\} \circ \rho \subseteq \rho$, tj. za sve elemente $u, v \in X$, ako $(u, v) \in \rho \circ \{(x, y)\} \circ \rho$, onda $(u, v) \in \rho$. Dakle, $(x, y) \in \tilde{\rho}$ znači da iz $((u, x) \in \rho \wedge (y, v) \in \rho)$ sledi $(u, v) \in \rho$, pa $(x, y) \notin \tilde{\rho}$ akko postoje $u, v \in X$ tako da $(u, x) \in \rho$, $(y, v) \in \rho$ i $(u, v) \notin \rho$, tj. akko $(x, u) \in \rho^{-1}$, $(u, v) \in \bar{\rho}$, $(v, y) \in \rho^{-1}$. Tako, $(x, y) \notin \tilde{\rho}$ akko $(x, y) \in \rho^{-1} \circ \bar{\rho} \circ \rho^{-1}$ tj. $\tilde{\rho} = \overline{\rho^{-1} \circ \bar{\rho} \circ \rho^{-1}}$. Dakle, uslov naše teoreme glasi $\rho \subseteq \rho \circ \tilde{\rho} \circ \rho$, ili eventualno, $\rho = \rho \circ \tilde{\rho} \circ \rho$, što implicira regularnost od ρ. Obratno, ako je ρ regularna relacija, tj. za neki $\delta \subseteq X^2$ imamo $\rho = \rho \circ \delta \circ \rho$, onda $\delta \subseteq \tilde{\rho}$, pa $\rho \subseteq \rho \circ \delta \circ \rho \subseteq \rho \circ \tilde{\rho} \circ \rho$, tj. $\rho \subseteq \rho \circ \tilde{\rho} \circ \rho$ što je i trebalo dokazati.

□

Zašto su nam interesantni regularni elementi? Između ostalog, regularne relacije nas dovode do vrlo važnih specijalnih binarnih relacija - do relacija parcijalnog uređenja. Teoremu koja govori o tome prvi je dokazao Wolk 1969. godine. Dokaz je bitno pojednostavio Sinkevič 1974. godine ([Si 74]), i mi na ovom mestu dajemo taj dokaz.

Teorema 4.42 (Wolk, 1969) Refleksivna i antisimetrična relacija je tranzitivna akko je regularna.

Dokaz.

$(\rightarrow)$. Neka je ρ refleksivna i tranzitivna relacija skupa X; onda $\rho=\rho^2$ i $\rho= =\rho\circ\rho\circ\rho$, pa je ρ regularna.

$(\leftarrow)$. Neka je ρ refleksivna $(\Delta\subseteq\rho)$, antisimetrična $(\rho\cap\rho^{-1}\subseteq\Delta)$ i regularna, tj. postoji $\delta\subseteq X^2$ tako da je $\rho\circ\delta\circ\rho=\rho$. Dokažimo da je ρ onda tranzitivna, tj. $\rho^2\subseteq\rho$. Kako $\Delta\subseteq\rho$, onda

$$(\delta\subseteq\delta\circ\rho \;\wedge\; \delta\subseteq\rho\circ\delta) \Rightarrow$$
$$(\rho\circ\delta\subseteq\rho\circ\delta\circ\rho=\rho \;\wedge\; \delta\circ\rho\subseteq\rho\circ\delta\circ\rho=\rho) \Rightarrow$$
$$(\rho\circ\delta\subseteq\rho \;\wedge\; \delta\circ\rho\subseteq\rho) \Rightarrow$$
$$((\rho\circ\delta)\cap\rho^{-1}\subseteq\rho\cap\rho^{-1}\subseteq\Delta \;\wedge\; (\delta\circ\rho)\cap\rho^{-1}\subseteq\rho\cap\rho^{-1}\subseteq\Delta) \Rightarrow$$
$$((\rho\circ\delta)\cap\rho^{-1}\subseteq\Delta \;\wedge\; (\delta\circ\rho)\cap\rho^{-1}\subseteq\Delta.$$

Primetimo da je dovoljno dokazati refleksivnost relacije δ. Zaista, ako $\Delta\subseteq\delta$, onda

$$\rho^2=\rho\circ\Delta\circ\rho\subseteq\rho\circ\delta\circ\rho=\rho \Rightarrow \rho^2\subseteq\rho.$$

Pretpostavimo da $\Delta\not\subseteq\delta$ tj. $(\exists a\in X)(a,a)\notin\delta$; onda $(a,a)\in\rho=\rho\circ\delta\circ\rho$,pa, dakle

$$(\exists x,y\in X)((a,x)\in\rho \;\wedge\; (x,y)\in\delta \;\wedge\; (y,a)\in\rho) \Rightarrow$$
$$((a,y)\in(\rho\circ\delta)\cap\rho^{-1} \;\wedge\; (x,a)\in(\delta\circ\rho)\cap\rho^{-1}) \Rightarrow$$
$$((a,y)\in\Delta \;\wedge\; (x,a)\in\Delta) \Rightarrow a=x=y \Rightarrow (a,a)\in\delta, \text{ kontradikcija.}$$

Dakle, $\Delta\subseteq\delta$.

□

Definicija 4.15 Za relacionu algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je *regularna* ako je $\mathrm{Rd}_s(\mathcal{A})$ regularna semigrupa.

□

Vratimo se našem preslikavanju Φ.

Sledeći primer dokazuje da preslikavanje Φ ne čuva regularnost: postoji semigrupa $\mathcal{S}$ koja je regularna, tako da $\Phi(\mathcal{S})$ nije regularna.

Primer 4.2 Neka je semigrupa $\mathcal{S}$ zadata tablicom:

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\rho_a=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}=\Delta_S=\Delta$

$\rho_b=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$

$\rho_c=\{(a,c),(b,a),(c,b)\}$.

Pošto je to grupa, onda je ona regularna semigrupa. Ako je $\Phi(\mathcal{S})=\mathcal{A}$ onda $\rho_b\in A$ i $\Delta\in A$, pa sledi $\rho_b\cup\Delta\in A$. Neka je

$$\rho=\rho_b\cup\Delta=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(c,a)\}.$$

Ta relacija ρ je refleksivna i antisimetrična. Nije tranzitivna jer $(a,b)\in\rho$, $(b,c)\in\rho$, ali $(a,c)\notin\rho$. Po teoremi Wolka sledi da ta relacija nije regularni element od $\mathrm{Rd}_s(\Phi(\mathcal{S}))$.

□

Ovaj primer možemo *uopštiti*:

Teorema 4.43 Neka je $\mathcal{S}$ semigrupa. Ako je $\Phi(\mathcal{S})$ regularna onda
$$\mathcal{S}\models(\forall y)(\exists x)xy^2=x.$$

Dokaz.
Neka $\mathcal{S}\not\models(\forall y)(\exists x)xy^2=x$, dokažimo da $\Phi(\mathcal{S})$ nije regularna semigrupa. Imamo $\mathcal{S}\models(\exists y)(\forall x)xy^2\neq x$ i neka je taj y, koji postoji, element a. Tada, ako je $\mathcal{A}=\Phi(\mathcal{S})$, $\rho_a\in A$ pa i $\rho=\rho_a\cup\Delta_S\in A$. Dokažimo da ρ nije regularni element u $\mathrm{Rd}_s(\Phi(\mathcal{S}))$. Primetimo da je ρ refleksivna (jer $\Delta_S\subseteq\rho$). Relacija ρ je antisimetrična jer ako $(x,y)\in\rho$ i $(y,x)\in\rho$, onda $x=y$. Zaista, ako bi bilo $x\neq y$, onda $(x,y)\in\rho_a$ i $(y,x)\in\rho_a$, pa $y=xa$, $x=ya$. Sledi $y=ya^2$, ali to je kontradikcija sa uslovom $(\forall z)\ za^2\neq z$.

Dokažimo još da ρ nije tranzitivna. Jasno je da za sve x važi $xa\neq x$ (jer ako $xa=x$, onda $xaa=x$). Izaberimo neki $x\in S$. Tada $(x,xa)\in\rho_a\subseteq\rho$ i $(xa,xaa)\in\rho_a\subseteq\rho$

ali $(x, xa^2) \notin \rho_a$ (jer $xa \neq xa^2$) i $(x, xa^2) \notin \Delta_S$ (jer $x \neq xa^2$) . Tako, $(x, xa^2) \notin \rho$ i relacija ρ nije tranzitivna. Po teoremi Wolka, relacija ρ nije regularna.

Definicija 4.16 Za grupu $\mathcal{G}$, sa neutralnim elementom e, kažemo da je *Booleova* ako za sve $x \in G$ važi $x^2 = e$.

Posledica 4. 11 Neka je $\mathcal{G}$ grupa. Ako je $\Phi(\mathcal{G})$ regularna, onda je $\mathcal{G}$ Booleova grupa.

Dokaz.

U Booleovoj grupi za sve elemente $x \in G$ važi $x^2 = e$, gde je e neutralni element grupe $\mathcal{G}$. Ako $\mathcal{G}$ nije Booleova grupa, onda postoji element a tako da je $a^2 \neq e$. Tada

$$\mathcal{G} \models (\forall x)\, xa^2 \neq x.$$

Zaključak sada direktno sledi iz T4.43.

Dakle, od grupa jedino Booleove grupe mogu dati regularnu relacionu algebru. Da li važi da svaka Booleova grupa daje regularnu relacionu algebru? Sledeći primer dokazuje, da to nije tačno. Postoji Booleova grupa $\mathcal{G}$ tako da $\Phi(\mathcal{G})$ nije regularna.

Primer 4.3 Posmatrajmo tzv. Kleinovu grupu $\mathcal{G}$:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$$\rho_e = \Delta_G$$

$$\rho_a = \{(e, a), (a, e), (b, c), (c, b)\}$$

$$\rho_b = \{(e, b), (a, c), (b, e), (c, a)\}$$

$$\rho_c = \{(e, c), (a, b), (b, a), (c, e)\}$$

Neka je $\rho = \rho_a \cup \rho_b \cup \Delta_G$. Jasno, ako je $\Phi(\mathcal{G}) = \mathcal{A}$, onda $\rho \in A$. Dokažimo da ρ nije regularna. Koristićemo Scheinov kriterijum. Ako bi ρ bila regularna relacija, imali bismo sledeće :

$$\rho \subseteq \rho \circ \overline{(\rho^{-1} \circ \overline{\rho} \circ \rho^{-1})} \circ \rho$$

$$\rho^{-1}\circ\overline{\rho}\circ\rho^{-1}=(\rho_a\cup\rho_b\cup\Delta_G)\circ\rho_c\circ(\rho_a\cup\rho_b\cup\Delta_G)$$
$$=(\rho_b\cup\rho_a\cup\rho_c)\circ(\rho_a\cup\rho_b\cup\Delta_G)$$
$$=\rho_c\cup\Delta\cup\rho_b\cup\rho_a \Rightarrow \overline{\rho^{-1}\circ\overline{\rho}\circ\rho^{-1}}=\emptyset,$$

pa bi važilo $\rho\subseteq\rho\circ\emptyset\circ\rho=\emptyset$, što nije tačno. Tako, ρ nije regularna relacija, pa $\Phi(\mathcal{G})$ nije regularna relaciona algebra.

□

Ovo znači da uslov u Posledici 4.11 nije potreban. Da li uopšte postoji Booleova grupa $\mathcal{G}$ tako da je $\Phi(\mathcal{G})$ regularna ? Da! Recimo ona dvoelementna grupa iz dokaza Teoreme 4.43. No, sem trivijalne grupe, ona je jedina (do na izomorfizam) sa tom osobinom. Važi naime:

Teorema 4.44 Neka je $\mathcal{G}$ Booleova grupa reda većeg od dva. Tada $\Phi(\mathcal{G})$ nije regularna relaciona algebra.

Dokaz.

Dokaz ćemo dati u nekoliko koraka.

1) Neka je $\mathcal{G}=(G,\cdot)$ grupa, i za sve $a\in G$ (kao i ranije), $\rho_a=\{(x,x\cdot a)\mid x\in G\}$. Tada je $\{\rho_a\mid a\in G\}$ disjunktna familija relacija koja pokriva G^2 tj. $\rho_a\cap\rho_b=\emptyset$ za $a\neq b$ i $\bigcup\{\rho_a\mid a\in G\}=G^2$. Zaista,

$$(x,y)\in\rho_a\cap\rho_b \Rightarrow (y=x\cdot a \wedge y=x\cdot b) \Rightarrow xa=xb \Rightarrow a=b.$$
$$(x,y)\in G^2 \Rightarrow (\exists a\in G)y=xa \Rightarrow (x,y)\in\rho_a.$$

2) Ako je $\mathcal{G}$ Booleova grupa, onda su sve relacije oblika $\bigcup\{\rho_a\mid a\in X\}$, $X\subseteq G$, simetrične. Zaista,

$$(x,y)\in\rho_a \Rightarrow y=xa \Rightarrow ya=xaa \Rightarrow x=ya \Rightarrow (y,ya)\in\rho_a \text{ tj. } (y,x)\in\rho_a.$$
$$(\bigcup\{\rho_a\mid a\in X\})^{-1}=\bigcup\{\rho_a^{-1}\mid a\in X\}=\bigcup\{\rho_a\mid a\in X\}.$$

3) Kako je operacija $\circ$ kompletno aditivna, imamo da

$$\rho\circ\bigcup\{\rho_i\mid i\in I\}=\bigcup\{\rho\circ\rho_i\mid i\in I\}.$$

4) Neka je $\mathcal{G}$ Booleova grupa, i neka je a element različit od neutralnog ($a\neq e$). Dokažimo da element $\rho=\overline{\rho}_a$ nije regularan u $\mathrm{Rd}_s(\Phi(\mathcal{G}))$. Koristićemo Scheinov kriterijum. Dokažimo da je

$$\rho^{-1} \circ \overline{\rho} \circ \rho^{-1} = G^2 \quad \text{(onda je komplement te relacije } \emptyset\text{)}.$$

$$\rho^{-1} \circ \overline{\rho} \circ \rho^{-1} = (\overline{\rho}_a)^{-1} \circ \overline{\overline{\rho}}_a \circ (\overline{\rho}_a)^{-1} =$$

$$(\bigcup\{\rho_b \mid b \neq a,\ b \in G\})^{-1} \circ \rho_a \circ (\bigcup\{\rho_c \mid c \neq a,\ c \in G\})^{-1} =$$

$$(*) \qquad (\bigcup\{\rho_b \mid b \neq a,\ b \in G\}) \circ \rho_a \circ (\bigcup\{\rho_c \mid c \neq a,\ c \in G\}).$$

Dokažimo, prvo da za svaki ρ_d, $d \neq a$, $d \neq e$ važi

$$\rho_d \subseteq (\bigcup\{\rho_b \mid b \neq a,\ b \in G\}) \circ \rho_a \circ (\bigcup\{\rho_c \mid c \neq a,\ c \in G\}).$$

Pošto $a \neq e$, onda se i u levoj i u desnoj uniji pojavi relacija $\rho_e = \Delta$, pa recimo u levoj uočimo Δ, a u desnoj, pošto $d \neq a$, pojaviće se ρ_{ad}. Imamo

$$\rho_d \subseteq \Delta \circ \rho_a \circ \rho_{ad} = \rho_d \subseteq (\bigcup\{\rho_b \mid b \neq a\}) \circ \rho_a \circ (\bigcup\{\rho_c \mid c \neq a\}).$$

Da li proizvod $(*)$ sadrži Δ? Da! Neka je $b \neq e$, $b \neq a$ (tu koristimo pretpostavku da je $|G| > 2$), onda $ab \neq a$, pa imamo

$$\Delta = \rho_e = \rho_b \circ \rho_a \circ \rho_{ab} \subseteq (\bigcup\{\rho_c \mid c \neq a\}) \circ \rho_a \circ (\bigcup\{\rho_d \mid d \neq a\}).$$

Da li proizvod $(*)$ sadrži ρ_a? Da!

$$\rho_a = \Delta \circ \rho_a \circ \Delta \subseteq (\bigcup\{\rho_b \mid b \neq a\}) \circ \rho_a \circ (\bigcup\{\rho_c \mid c \neq a\}).$$

Time smo dobili da je $\bigcup\{\rho_d \mid d \in G\}$ podskup relacije

$$(\bigcup\{\rho_b \mid b \neq a\}) \circ \rho_a \circ (\bigcup\{\rho_c \mid c \neq a\}),$$

pa je ona jednaka sa G^2. Po Scheinovom kriterijumu sledi da relacija ρ nije regularna.

□

Posledica 4. 12 Neka je $\mathcal{G}$ grupa. Tada je $\Phi(\mathcal{G})$ regularna akko $|G| \leq 2$.

Dokaz.

$(\rightarrow)$. Neka je $\Phi(\mathcal{G})$ regularna RA. Na osnovu Posledice 4.11 sledi da je $\mathcal{G}$ Booleova grupa. Na osnovu prethodnog tvrđenja sledi da red grupe ne može biti veći od dva.

$(\leftarrow)$. Ako je $|G| = 1$, $\Phi(\mathcal{G}) \cong \mathcal{R}(\{a\})$, a ta RA je regularna. Ako je $|G| = 2$ onda $\Phi(\mathcal{G}) = \mathcal{A}$, gde $A = \{\Delta_G, \overline{\Delta}_G, \emptyset, G^2\}$. Direktno se proverava da je $(A, \circ)$ regularna semigrupa.

□

Na osnovu rezultata ovog dela možemo zaključiti da preslikavanje Φ dosta *deformiše* polaznu semigrupu, bar što se tiče osobine komutativnosti i regularnosti.

Interesantno je da semigrupa $\mathcal{S}$ *nikad* nije izomorfna sa semigrupom $\mathrm{Rd}_s(\Phi(\mathcal{S}))$. Naime, ako je $\Phi(\mathcal{S})=\mathcal{A}$, onda relacije $\rho_a=\{(x,\ x\cdot a)\,|\,x\in S\}$ i $\rho_b=\{(x,\ x\cdot b\,|\,x\in S\}$ pripadaju skupu A, za sve $a,\ b\in S$. Ali onda i $\rho_a\cup\rho_b\in A$. Ako je $\mathcal{S}\cong(A,\circ)$, onda postoji $c\in S$ tako da je $\rho_a\cup\rho_b=\rho_c$. Međutim, ρ_c jeste pravi funkcionalni element u $\mathcal{A}$ pa sledi da je $(x,\ x\cdot a\ )=(x,\ x\cdot b\ )$ za sve $x\in S$. Ako $\mathcal{S}$ nema jedinicu, onda $\mathcal{S}\not\cong(A,\circ)$. Ako $\mathcal{S}$ ima jedinicu onda sledi $a=b$, pa $|S|=1$. No, i za trivijalnu(jednoelementnu) semigrupu $\mathcal{S}$ važi $\mathcal{S}\not\cong\mathrm{Rd}_s(\Phi(\mathcal{S}))$ jer algebra $\Phi(\mathcal{S})$ ima dva elementa.

Aksiomatizabilnost semigrupnih RA

Potreban i dovoljan uslov da neka klasa K modela jezika $\mathcal{L}$ bude elementarna jeste da je K zatvorena u odnosu na ultraproizvode i elementarnu ekvivalentnost. Već smo u [Ma 86] dokazali da S_Φ nije ni varijetet ni kvazivarijetet (posl. 9 na str. 64). Što se tiče ultraproizvoda, u [Ma 86] smo dokazali (pozitivan!) rezultat da je ultraproizvod elemenata klase S_Φ izomorfan sa pravom relacionom algebrom (tvrđenje 12. na str. 66), što je govorilo u prilog hipotezi da je S_Φ zatvorena u odnosu na ultraproizvode. Međutim, u daljem ćemo dokazati da S_Φ nije zatvorena u odnosu na ultrastepene. Da bismo to dokazali, potrebni su nam neki novi pojmovi.

Niveliranje i karakterističan broj

Definicija 4.16 Neka je π skup svih termova na jeziku relacionih algebri. Za familiju $\{\pi_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathcal{P}(\pi)$ ćemo reći da je *niveliranje* skupa π ako važi

$$(1)\ n\le m\to\pi_n\subseteq\pi_m,\qquad(2)\ \bigcup\{\pi_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}=\pi.$$

Primer 4.4 Neka je π_n skup onih termova iz π koji imaju najviše n promenljivih. Tada je $\{\pi_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ niveliranje od π.

□

Primer 4.5 Neka je π_n skup onih termova iz π koji imaju najviše n funkcionalnih simbola. Tada je $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ niveliranje od π.

□

Neka je $\mathcal{A}$ relaciona algebra, $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ niveliranje skupa π i $X \subseteq A$. Označimo sa $\pi_n(X)$ skup svih onih elemenata iz A, koji se mogu dobiti kao vrednost nekog terma iz π_n nad skupom X, tj.

$$a \in \pi_n(X) \quad \text{akko} \quad (\exists t \in \pi_n)(\exists a_1, \ldots, a_k \in X)\; t[a_1, \ldots, a_k] = a.$$

Ako je $a \in \pi_n(X)$, kažemo da se element a može konstruisati od elementa skupa X *u najviše n koraka* (u odnosu na niveliranje $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$).

Lema 4.7 Neka je $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ neko niveliranje, $\mathcal{A}$ relaciona algebra, $T \subseteq A$. Tada T generiše $\mathcal{A}$ akko $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi_n(T)$.

Dokaz.

Sledi iz definicije niveliranja i definicije generatornog skupa neke algebre.

□

Lema 4.8 Neka je $\mathcal{A}$ relaciona algebra, $PF(\mathcal{A})$ skup svih pravih funkcionalnih elemenata od $\mathcal{A}$. Ako je $\Phi(S)$ nosač algebre $\Phi(\mathcal{S})$, tada za svako niveliranje $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ važi

$$\Phi(S) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi_n(PF(\Phi(\mathcal{S}))).$$

Dokaz.

Sledi iz Leme 4.7 i definicije preslikavanja Φ.

□

Glavna ideja dokaza neaksiomatizabilnosti klase S_Φ jeste da se nađe

1) niveliranje $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ i 2) semigrupa $\mathcal{S}$,

tako da za sve $n \in \mathbb{N}$ postoji relacija σ_n iz $\Phi(S)$ za koju važi $\sigma_n \notin \pi_n(PF(\Phi(\mathcal{S})))$.

Sledeća teorema pokazuje da, ukoliko nađemo takvo niveliranje i takvu semigrupu, možemo konstruisati ultrastepen semigrupne relacione algebre koji ne pripada S_Φ. Taj ultrastepen će biti prava relaciona algebra (vidi Tvrđenja 12. u [Ma 86]), ali neće biti generisan skupom pravih funkcionalnih elemenata.

Teorema 4.45 Neka je $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ niveliranje od π, a $\mathcal{S}$ semigrupa sa osobinom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji relacija σ_n iz $\Phi(S)$ tako da je

$$(*) \qquad \sigma_n \notin \pi_n(PF(\Phi(\mathcal{S}))).$$

Tada, za svaki neglavni ultrafiltar D, ultrastepen $\prod_{\mathbb{N}} \Phi(S)/D$ nije semigrupna relaciona algebra.

Dokaz.

Neka je D neki neglavni ultrafiltar nad $\mathbb{N}$, i $\mathcal{A} = \prod_{\mathbb{N}} \Phi(\mathcal{S})/D$. Dokazaćemo da $\mathcal{A} \notin S_\Phi$. Pretpostavimo da $\mathcal{A} \in S_\Phi$. Zbog uslova teoreme imamo da $\sigma = \langle \sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle /D \in A$. Tada, zbog Leme 4.8, postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\sigma \in \pi_n(PF(\mathcal{A}))$. To znači da je

$$\sigma = t[f^1, f^2, \ldots, f^k]$$

za neki term $t \in \pi_n$ i $f^1, f^2, \ldots, f^k \in PF(\mathcal{A})$. Zbog definicije ultraproizvoda

$$B = \{ i \in \mathbb{N} \mid \sigma_i = t[f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^k]\} \in D.$$

Elementi $f^1, f^2, \ldots, f^k$ su pravi funkcionalni elementi. Osobina "biti pravi funkcionalni element" je izraziva preko formule prvog reda. To znači da imamo

$$A_1 = \{ i \mid f_i^1 \in PF(\Phi(\mathcal{S}))\} \in D,$$

$$A_2 = \{ i \mid f_i^2 \in PF(\Phi(\mathcal{S}))\} \in D$$

$$\vdots$$

$$A_k = \{ i \mid f_i^k \in PF(\Phi(\mathcal{S}))\} \in D.$$

Neka je $C = \bigcap \{A_s \mid s \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$. Tada zbog osobine ultrafiltra imamo da $C \in D$, pa pošto je i $B \in D$ onda $B \cap C \in D$. Obzirom da je svaki element neglavnog ultrafiltra D beskonačan skup, imamo da postoji beskonačno mnogo indeksa j takvih da je

$$f_j^1, f_j^2, \ldots, f_j^k \in PF(\Phi(\mathcal{S})) \quad \text{i} \quad \sigma_j = t[f_j^1, f_j^2, \ldots, f_j^k].$$

Tako,

$$(1) \qquad \sigma_j \in \pi_n(PF(\Phi(\mathcal{S}))), \text{ za beskonačno mnogo indeksa } j.$$

Medutim, po pretpostavci teoreme imamo da $\sigma_s \notin \pi_s(PF(\Phi(\mathcal{S})))$, za $s > n$. Pošto je $\pi_n \subseteq \pi_s$, to implicira $\sigma_s \notin \pi_n(PF(\Phi(\mathcal{S})))$, za sve $s > n$, što je kontradikcija sa (1). Time smo dokazali da je $\mathcal{A} \in S_\Phi$.

□

U našem slučaju nije zgodno koristiti "standardna" niveliranja po broju promenljivih ili funkcionalnih simbola u termu. Definisaćemo jedan novi tip niveliranja.

Definicija 4.18 Neka je t term na jeziku relacionih algebri. *Karakterističan broj* terma t jeste prirodan broj $\mathrm{ch}(t)$ takav da

(i) ako je t promenljiva ili $t = 1'$ onda $\mathrm{ch}(t) = 1$;

(ii) ako je $t = 0$ ili $t = 1$ onda $\mathrm{ch}(t) = 0$;

(iii) ako je $t = t_1 \cdot t_2$ tada $\mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}(t_1) + \mathrm{ch}(t_2)$;

(iv) ako je $t = t_1 + t_2$ tada $\mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}(t_1) + \mathrm{ch}(t_2)$;

(v) ako je $t = \overline{t_1}$ tada $\mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}(t_1)$;

(vi) ako je $t = t_1 \circ t_2$ tada $\mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}(t_1) \cdot \mathrm{ch}(t_2)$;

(vii) ako je $t = t_1^{-1}$ tada $\mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}(t_1)$.

□

Primer 4.6 Neka je $t = (x \circ (y + \overline{z})) \cdot (1' + y^{-1})$.

Tada $\mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}(x \circ (y + \overline{z})) + \mathrm{ch}(1' + y^{-1}) = \mathrm{ch}(x) \cdot \mathrm{ch}(y + \overline{z}) + \mathrm{ch}(1') + \mathrm{ch}(y^{-1}) =$
$= \mathrm{ch}(x) \cdot (\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(\overline{z})) + \mathrm{ch}(1') + \mathrm{ch}(y) = 1(1+1) + 1 + 1 = 4.$

□

Lema 4.9 Neka je $\pi_n = \{t \in \pi \mid \mathrm{ch}(t) < n\}$. Tada je $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jedno niveliranje od π.

Dokaz.

Sledi iz definicije niveliranja i karakterističnog broja.

□

Aksiomatizabilnost klase S_Φ

Da bismo dokazali neaksiomatizabilnost klase S_Φ, ostalo je da nađemo semigrupu $\mathcal{S}$ tako da je za neko niveliranje $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zadovoljen uslov $(*)$ Teoreme 4.45.

U daljem, ako je $\mathcal{S}$ semigrupa i $s\in S$, onda $\rho_s=\{(x,\ x\cdot s)\mid x\in S\}$ i $T(S)=\{\rho_s\mid s\in S\}$. Dokazaćemo da za semigrupu $\mathcal{S}$ možemo uzeti beskonačnu Booleovu grupu. Naime, svaka takva grupa $\mathcal{S}$ ima sledeću važnu osobinu: skup pravih funkcionalnih elemenata $PF(\Phi(\mathcal{S}))$ se poklapa sa skupom $T(S)$ generatornih elemenata od $\Phi(\mathcal{S})$. Dakle, za *svako* niveliranje $\{\pi_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ važi $\pi_n(PF(\Phi(\mathcal{S})))=\pi_n(T(S))$.

Lema 4.10 Neka je $\mathcal{S}$ Booleova grupa i neka je $\mathcal{F}_0$ Booleova podalgebra Booleove skupovne algebre $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ tako da je $\mathcal{F}_0$ generisana skupom svih konačnih podskupova od S. Tada $\Phi(S)=\{\bigcup\{\rho_a\mid a\in X\}\mid X\in F_0\}$.

Dokaz.

Označimo sa R skup $\{\bigcup\{\rho_a\mid a\in X\}\mid X\in F_0\}$. Jasno, svaka relacija iz R pripada skupu $\Phi(S)$. Pošto za sve različite elemente $a,b\in S$ važi $\rho_a\cap\rho_b=\emptyset$ i $\bigcup\{\rho_a\mid a\in S\}=S^2$ onda imamo

$$(\bigcup\{\rho_a\mid a\in X\})\cap(\bigcup\{\rho_b\mid b\in Y\})=\bigcup\{\rho_c\mid c\in X\cap Y\},$$

$$(\overline{\bigcup\{\rho_a\mid a\in X\}})=\bigcup\{\rho_a\mid a\in\overline{X}\}.$$

Dakle, skup R je zatvoren u odnosu na Booleove operacije. Takođe, R je zatvoren u odnosu na $^{-1}$, jer za sve $X\subseteq S$, relacije $\sigma_X=\bigcup\{\rho_a\mid a\in X\}$ su simetrične. Na kraju, dokažimo da je R zatvoren u odnosu na kompoziciju relacija.

Za sve X, Y u F_0 važi

$$(\bigcup\{\rho_a\mid a\in X\})\circ(\bigcup\{\rho_b\mid b\in Y\})=\bigcup\{\rho_d\mid d\in XY\},$$

gde je $XY=\{xy\mid x\in X,\ y\in Y\}$. Tako, dovoljno je dokazati da je $XY\in F_0$ ako je $X\in F_0$, $Y\in F_0$. Primetimo da se F_0 sastoji od svih konačnih i kofinitnih podskupova od S (za $X\subseteq S$ kažemo da je ***kofinitan*** ako je $\overline{X}$ konačan). Lako je videti da ako je X ili Y prazan skup, onda je i XY prazan i ako su X i Y konačni, onda je i XY konačan. Ako su X, $Y\neq\emptyset$ i X ili Y je kofinitan, recimo X je kofinitan, tada je $XY\supseteq Xy$ za sve $y\in Y$. Tada $\overline{XY}\subseteq\overline{Xy}$. Međutim, $|\overline{Xy}|=|\overline{X}|$, jer je $\mathcal{S}$ grupa. Tako, i XY je kofinitan. Sledi da je R zatvoren u odnosu na sve relaciono-algebarske operacije. Dakle, $\Phi(S)=R$.

□

Lema 4.11 Neka je $t\in\pi_n$, gde je $\{\pi_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ niveliranje po karakterističnim brojevima, i neka je $\mathcal{S}$ beskonačna Booleova grupa. Tada, za sve $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_k\in T(S)$

važi

(1) ako $t[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k] = \bigcup\{\rho_a \mid a \in X\}$, onda $|X| < n$ ili $|\overline{X}| < n$.

Dokaz.

Dokazaćemo indukcijom po složenosti termova u π da za sve $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k \in T(S)$ važi

(2) ako $t[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k] = \bigcup\{\rho_a \mid a \in X\}$, onda $|X| \leq \mathrm{ch}(t)$ ili $|\overline{X}| \leq \mathrm{ch}(t)$.

To je dovoljno za dokaz (1) jer po pretpostavci $t \in \pi_n$, a to znači $\mathrm{ch}(t) < n$.

Ako je t neka promenljiva ili neki simbol konstante, tada je tvrdenje očigledno. Pretpostavimo da (2) važi za sve terme manje složenosti od t i dokažimo da (2) važi za t. Tada imamo sledeće mogućnosti:

$$t = t_1 \cap t_2,\ t = t_1 \cup t_2,\ t = \overline{t_1},\ t = t_1^{-1} \text{ ili } t = t_1 \circ t_2.$$

Ako je $t_i[\rho_1, \ldots, \rho_k] = \bigcup\{\rho_a \mid a \in X_i\}$, $i = 1, 2$, tada, na osnovu dokaza prethodne leme imamo da je $t = \bigcup\{\rho_c \mid c \in X\}$, gde je $X = X_1 \cap X_2$, $X = X_1 \cup X_2$, $X = \overline{X_1}$, $X = X_1$ ili $X = X_1 X_2$ respektivno. Po indukcijskoj hipotezi imamo

$$(|X_1| \leq \mathrm{ch}(t_1) \text{ ili } |\overline{X_1}| \leq \mathrm{ch}(t_1)) \text{ i } (|X_2| \leq \mathrm{ch}(t_2) \text{ ili } |\overline{X_2}| \leq \mathrm{ch}(t_2)).$$

Nije teško dokazati da zbog definicije karakterističnog broja, u svakom slučaju $|\overline{X}| \leq \mathrm{ch}(t)$ ili $|X| \leq \mathrm{ch}\,(t)$.

Lema 4.12 Neka je $\mathcal{S}$ beskonačna Booleova grupa i neka je $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ niveliranje po karakterističnim brojevima. Tada, za svako $n \in \mathbb{N}$, postoji relacija $\sigma_n \in \Phi\,(S)$ tako da je $\sigma_n \notin \pi_n(PF(\Phi(\mathcal{S})))$.

Dokaz.

Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ niz različitih elemenata iz S. Neka je $X_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $\sigma_n = \bigcup\{\rho_a \mid a \in X_n\}$. Prema Lemi 4.11 imamo da ako $\bigcup\{\rho_a \mid a \in X_n\} \in \pi_n(PF(\Phi(\mathcal{S}))$ tada $|X| < n$ ili $|\overline{X}| < n$. Pošto je $|X_n| = n$, zaključujemo da $\sigma_n \notin \pi_n(PF(\Phi(\mathcal{S})))$.

□

Teorema 4.46 Klasa S_Φ semigrupnih relacionih algebri nije elementarna.

Dokaz.

Iz Teoreme 4.45 i Leme 4.12 sledi da klasa S_{Φ} nije zatvorena u odnosu na ultrastepene, pa dakle nije elementarna.

□

5. NEKE DRUGE RELACIONE ALGEBRE

U ovoj glavi se mogu naći rezultati o reduktima relacionih algebri Tarskog, o reprezentaciji struktura pomoću specijalnih relacija, da bi se glavni naglasak stavio na jednu specifičnu klasu relacionih algebri - na tzv. Kleenejeve algebre. Ta klasa algebri je zanimljiva pre svega zbog primene u teoriji programiranja i formalnih jezika. Polazeći od Kleenejevih algebri dolazimo do tzv. dinamičkih algebri, koje takođe u novije vreme nalaze primenu u konkretnim problemima programiranja.

5.1. Redukti relacionih algebri

Posmatraćemo sledeće operacije na binarnim relacijama: $\cup, \cap, -, \emptyset, \circ, ^{-1}$. Ako je $F \subseteq \{\cup, \cap, -, \emptyset, \circ, ^{-1}\}$, onda sa $\mathcal{R}el(F)$ označavamo *klasu svih algebri izomorfnih algebrama čiji elementi su binarne relacije nekog skupa S, a skup fundamentalnih operacija jeste F*. Drugi rečima, algebra $\mathcal{A}$ pripada klasi $\mathcal{R}el(F)$ akko je $\mathcal{A} = (A, F)$, gde je $A \subseteq \mathcal{P}(S^2)$. Naravno, kako je $\mathcal{A}$ algebra, podrazumeva se da je skup A *zatvoren u odnosu na operacije iz skupa F* (komplement " $-$" se uzima u odnosu na najveću relaciju u skupu A). Da izbegnemo nepotrebne komplikacije, iz oznake $\mathcal{R}el\ (F)$ redovno ćemo izostavljati vitičaste zagrade (na primer, umesto $\mathcal{R}el(\{\cup\})$ pisaćemo $\mathcal{R}el(\cup)$).

Booleove operacije

Ako je skup fundamentalnih operacija $F \subseteq \{\cup, \cap, -\}$, onda nas problem aksiomatizacije klase $\mathcal{R}el\ (F)$ dovodi do polumreža i Booleovih algebri.

Definicija 5.1 Za grupoid $(G, \cdot)$ kažemo da je *polumreža* ako je komutativna idempotentna semigrupa tj. ako zadovoljava sledeće identitete:

$$x \cdot x = x, \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Klasu svih polumreža označavamo sa SL (*semilattices*).

□

Sve algebre klase $\mathcal{R}el(\cap)$ jesu polumreže. No, važi i obratno: sve polumreže se mogu predstaviti kao polumreže binarnih relacija.

Teorema 5.1 Klasa $\mathcal{R}el(\cap)$ se poklapa sa klasom svih polumreža.

Dokaz.

Smer $\mathcal{R}el(\cap) \subseteq SL$ je jasan. Obratno, poznato je (videti [HK71]) da se svaka polumreža $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ može potopiti u neku polumrežu skupova $(\mathcal{P}(S), \cap)$: potapanje $\varphi : A \to \mathcal{P}(S)$ je dato sa $\varphi(a) = \{x \mid x \in A \wedge a \leq x\}$. Dalje, polumreža skupova $\varphi(\mathcal{A})$ je izomorfna polumreži binarnih relacija: dovoljno je svakom skupu $X \in \varphi(\mathcal{A})$ pridružiti relaciju $X \times \{c\}$, gde je c proizvoljan element. To preslikavanje ψ jeste izomorfizam izmedu polumreža $\varphi(\mathcal{A})$ i $\varphi(\mathcal{A}) \times \{c\}$, jer je ψ bijekcija i za sve $X, Y \in \varphi(\mathcal{A})$ važi:

$$\psi(X \cap Y) = (X \cap Y) \times \{c\} = (X \times \{c\}) \cap (Y \times \{c\}) = \psi(X) \cap \psi(Y).$$

□

Naravno, slučaj $\mathcal{R}el(\cup)$ je dualan.

Što se tiče algebri $\mathcal{R}el(\cup, \cap)$, one su sve distributivne mreže. Da bismo dokazali i obratno, dovoljno je koristiti rezultat G. Birkhoffa, po kojem je svaka distributivna mreža izomorfna sa nekim *poljem skupova* tj. algebrom oblika $(A, \cup, \cap)$, gde je A skup nekih podskupova nekog skupa S.

Teorema 5.2 Klasa $\mathcal{R}el(\cup,\cap)$ se poklapa sa klasom svih distributivnih mreža.

Dokaz.

Dokaz se zasniva na gore navedenom rezultatu G.Birkhoffa. Primetimo da je svako polje skupova izomorfno polju binarnih relacija : konstrukcija je potpuno ista kao u T5.1.

□

Slično se dokazuje i sledeća teorema:

Teorema 5.3 Klasa $\mathcal{R}el(\cup,\cap,-)$ se poklapa sa klasom svih Booleovih algebri.

Dokaz.

Smer $\mathcal{R}el(\cup,\cap,-)\subseteq$ BA je jasan (podsetimo se da konstante 0 i 1, koje se javjlaju u definiciji BA, možemo izraziti pomoću ostalih operacija). Po Stoneovoj teoremi o reprezentaciji BA (T3.6) dobijamo da se svaka Booelova algebra može potopiti u neku Booleovu skupovnu algebru. No, kao i ranije, svaka Booleova skupovna algebra je izomorfna sa Booleovom algebrom čiji je nosač skup binarnih relacija.

□

Ostali redukti

Na osnovu teoreme o reprezentaciji semigrupa (T3.2) odmah dobijamo da se klasa $\mathcal{R}el(\circ)$ poklapa sa klasom svih semigrupa. U daljem ćemo razmatrati one klase $\mathcal{R}el(F)$ kod kojih $\circ\in F$.

Razmotrimo prvo klasu $\mathcal{R}el(\circ,^{-1})$. Jasno, svaka algebra $\mathcal{A}=(A,\cdot,^{\smallsmile})$ koja pripada toj klasi jeste *involutivna semigrupa*, tj. $(A,\cdot)$ je semigrupa i na algebri $\mathcal{A}$ važe identiteti: $(x^{\smallsmile})^{\smallsmile}=x$, $(x\cdot y)^{\smallsmile}=y^{\smallsmile}\cdot x^{\smallsmile}$. Aksiome klase $\mathcal{R}el(\circ,^{-1})$ dao je prvi R. McKenzie 1966. god. B. Schein je u radu [Sch74] dokazano je da klasa $\mathcal{R}el(\circ,^{-1})$ *nije varijetet*. U tom radu je takode dat jedan (dosta komplikovan) skup aksioma za tu klasu.

Posmatrajmo sada klasu $\mathcal{R}el(\cup,\circ)$. Ako je $\mathcal{A}=(A,+,*)\in\mathcal{R}el(\cup,\circ)$ onda je $(A,+)$ polumreža (sa indukovanom relacijom poretka $\le$), $(A,*)$ semigrupa i operacija $*$ se slaže sa $\le$ tj za sve $a,b,c\in A$ važi:

ako $a\le b$ onda $a*c\le b*c$ i $c*a\le c*b$.

Definicija 5.2 Za algebru $(A, \cdot, *)$ kažemo da je *polumrežno uređena semigrupa* ako važi:

i) $(A, \cdot)$ je polumreža;

ii) $(A, *)$ je semigrupa;

iii) Ako je $\leq$ indukovana relacija poretka u polumreži $(A, \cdot)$ onda za sve $a, b, c \in A$ važi: ako $a \leq b$ onda $a * c \leq b * c$ i $c * a \leq c * b$. Klasu svih polumrežno uređenih semigrupa označavamo sa SOS (semilattice-ordered semigroups).

□

U radu [BSc 78] je dokazano sledeće:

Teorema 5.4 Klasa $\mathcal{R}el(\cap, \circ)$ se poklapa sa klasom SOS.

Dokaz.

Videti [BSc 78].

□

Klasa $\mathcal{R}el(\cup, \circ)$ je razmatrana u radu [An 91].

Definicija 5.3 Za algebru $\mathcal{A} = (A, +, *)$ kažemo da je *aditivna polumrežno uređena semigrupa* ako važi:

i) $(A, +)$ je polumreža;

ii) $(A, *)$ je semigrupa;

iii) Algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava sledeće identitete:

$$x * (y + z) = (x * y) + (x * z), \quad (x + y) * z = (x * z) + (y * z).$$

Klasu svih aditivnih polumrežno uređenih semigrupa označavamo sa ASOS.

□

Teorema 5.5 Za klasu $\mathcal{R}el(\cup, \circ)$ važi sledeće:

i) $\mathrm{HSP}(\mathcal{R}el(\cup, \circ)) = \mathrm{ASOS}$;

ii) $\mathcal{R}el(\cup, \circ) \neq \mathrm{ASOS}$;

iii) Klasa $\mathcal{R}el(\cup, \circ)$ nije konačno aksiomatizabilna.

Dokaz.

Činjenica i) je bila poznata još Scheinu, 1988. godine. Dokazi za ii) i iii) se mogu naći u [An88].Primetimo da iz i) i ii) sledi da klasa $\mathcal{R}el(\cup, \circ)$ nije varijetet.

□

Na osnovu T5.5 ii) vidimo da postoji aditivna polumrežno uređena semigrupa koja se ne može predstaviti u klasi $\mathcal{R}el(\cup, \circ)$. U radu [An 91] dat je jedan potreban uslov da neka ASOS bude reprezentabilna u klasi $\mathcal{R}el(\cup, \circ)$.

Definicija 5.4 Neka je $\mathcal{A} = (A, +)$ polumreža, sa indukovanom relacijom poretka $\leq$. Za $\mathcal{A}$ kažemo da je *distributivna* ako za sve $x, y, z \in A$ važi:

ako $x \leq y + z$, onda postoje $u, v \in A$ takvi da je $u \leq y$, $v \leq z$ i $x = u + v$.

□

Teorema 5.6 Neka je $\mathcal{A} = (A, +, *) \in$ ASOS tako da je polumreža $(A, +)$ distributivna. Tada je $\mathcal{A}$ reprezentabilna, tj. $\mathcal{A} \in \mathcal{R}el(\cup, \circ)$.

Dokaz.

Videti [An 91].

□

Definicija 5.5 Za algebru $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, *)$ kažemo da je *distributivna mrežno uređena semigrupa* ako važi sledeće:

i) $(A, +, \cdot)$ je distributivna mreža;

ii) $(A, *)$ je semigrupa;

iii) Operacija $*$ je aditivna u odnosu na $+$ tj. na $\mathcal{A}$ važe identiteti

$$x * (y + z) = (x * y) + (x * z), \quad (x + y) * z = (x * z) + (y * z).$$

Klasu svih distibutivnih mrežno uređenih semigrupa označavamo sa DLOS.

□

Sledeće dve teoreme su dokazane u [An 91].

Teorema 5.7 Za klasu $\mathcal{R}el(\cup, \cap, \circ)$ važi sledeće:

i) $HSP(\mathcal{R}el(\cup, \cap, \circ)) = DLOS$;

ii) $\mathcal{R}el\,(\cup,\cap,\circ) \neq$ DLOS;

iii) Klasa $\mathcal{R}el\,(\cup,\cap,\circ)$ nije konačno aksiomatizabilna.

Dokaz.

Videti [An 91].

□

Teorema 5.8 Ako je $\{\cup,\cap,\circ\}\subseteq F\subseteq\{\cup,\cap,\circ,\emptyset,^{-1},\Delta,-\}$, gde Δ označava dijagonalnu relaciju, onda klasa $\mathcal{R}el\,(F)$ nije konačno aksiomatizabilna.

Dokaz.

Videti [An 91].

□

Algebre oblika $(A,\cap,\circ,^{-1},\mathrm{I})$, gde je A skup binarnih relacija zatvoren u odnosu na operacije $\cap,\circ,^{-1}$, $\mathrm{I}\in A$ tako da važi $\rho\circ\mathrm{I}=\rho$ za svako $\rho\in A$, razmatrane su u radu B. Jonssona [Jo 59]. U ovom radu Jonsson je dao potreban i dovoljan uslov da algebra $\mathcal{A}=(A,\cdot,*,\breve{},1')$ *bude izomorfna algebri binarnih relacija oblika* $(B,\cap,\circ,^{-1},\mathrm{I})$. Kako je ovaj uslov dat u dosta komplikovanoj formi, navedimo samo nekoliko *potrebnih* uslova:

i) $(A,\cdot)$ je polumreža;

ii) $(A,*)$ je semigrupa;

iii) Operacija $\breve{}$ je involucija semigrupa $(A,*)$ i $(A,\cdot)$;

iv) 1' je desna jedinica operacije $*$;

v) Na $\mathcal{A}$ važi identitet $((a\cdot b)*c)\cdot(b*c)=(a\cdot b)*c$.

Algebre specijalnih binarnih relacija

Literatura je vrlo bogata radovima koji razmatraju reprezentaciju polugrupa pomoću *specijalnih relacija.* U radu [Sch 70] je dat pregled rezultata ovog tipa. Navedimo na ovom mestu samo neke teoreme (bez dokaza):

Teorema 5.9 (Zareckij, 1988) Semigrupa $\mathcal{S}$ je izomorfna semigrupi refleksivnih binarnih relacija akko sa na $\mathcal{S}$ može definisati relacija poretka $\leq$ takva da za sve

$a,b,c,d \in S$ važi:

$$(a \leq b \wedge c \leq d) \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot d, \quad a \leq a \cdot b, \quad b \leq a \cdot b.$$

□

Interesantno je da je svaka semigrupa refleksivnih binarnih relacija izomorfna semigrupi tranzitivnih relacija. Što se tiče simetričnih relacija može se dokazati sledeće :

Teorema 5.10 (Schein,1964) Semigrupa $\mathcal{S}$ je izomorfna semigrupi simetričnih binarnih relacija akko za sve $x,y,z \in S$ važi: $x = x y^2 z^2 \Rightarrow x = x y^2$.

□

Teorema 5.11 (Schein,1964) Semigrupa $\mathcal{S}$ je izomorfna semigrupi simetričnih i refleksivnih binarnih relacija akko je $\mathcal{S}$ komutativna i za sve $x,y,z \in S$ važi:

$$x = xyz \Rightarrow x = xy.$$

□

Teorema 5.12 (Schein,1964) Semigrupa $\mathcal{S}$ je izomorfna semigrupi relacija ekvivalencije akko je $\mathcal{S}$ polumreža.

□

Videli smo u T5.1 da je svaka polumreža izomorfna nekoj polumreži relacija. U radu [Br 84] za slučaj $\mathcal{Rel}(\cap)$ je dokazano i više. Neka u daljem Parc(X) označava skup svih realcija parcijalnog uređenja skupa X. Poznato je da je Parc(X) zatvoren u odnosu na $\cap$. Algebru (Parc$(X),\cap$) zovemo *polumreža parcijalnih uređenja na* X. Naravno, svaka polumreža parcijalnih uređenja jeste polumreža. Može se dokazati sledeće:

Teorema 5.13 Svaka polumreža se može potopiti u neku polumrežu parcijalnih uređenja nekog skupa X.

Dokaz.

Neka je $(A,\cdot)$ data polumreža. U svakoj polumreži se na prirodan način indukuje relacija parcijalnog uređenja: $x \leq y$ akko $x \cdot y = x$. Traženo potapanje φ: $A \to$ Parc(A) je dato sa : $\varphi(a) = \{(x,y) \in A \times A \mid x \leq y \wedge x \leq a \wedge y \leq a\} \cup \Delta_A$.

□

U radu [Sch72]se daje teorema o reprezentaciji mreža pomoću relacija parcijalnog uređenja.

Teorema 5.14 Ako je A neki skup parcijalnih uređenja nekog skupa X takav da je A zatvoren u odnosu na operaciju $\circ$, onda je $(A, \circ, \cap)$ mreža. Obratno, svaka mreža $(L, +, \cdot)$ je izomorfna sa mrežom $(A, \circ, \cap)$, gde je $A \subseteq \mathrm{Parc}(X)$ za neki skup X.

Dokaz.

Videti [Sch 72].

□

U radu [Si 78] se daju neki uslovi pod kojima se konačna mreža može reprezentovati parcijalnim uređenjima na *konačnom* skupu. U radu [Jo59] se razmatraju algebre relacija ekvivalencije sa fundamentalnim operacijama $\circ$, $\cap$ i Δ(kao najmanja relacija ekvivalencije). U tom radu je dat i skup aksioma za klasu svih algebri koje su izomorfne takvim algebrama relacija.

U literaturi se može naći veliki broj radova na temu reprezentabilnosti algebri pomoću relacija kongruencije ili relacija koje su "bliske" kongruencijama. Među te rezultate spada svakako poznata teorema Grätzera i Schmidta (T1.20) po kojoj se *svaka algebarska mreža može reprezentovati kao mreža kongruencija neke algebre*. Teorema Iskandera tvrdi da se *svaka algebarska mreža može reprezentovati kao mreža kompatibilnih (saglasnih) relacija neke alegbre* . U radu [VŠ 88] ispituju se tzv. *slabe kongruencije*. Neka je $C_w(\mathcal{A})$ skup kongruencija svih podalgebri od $\mathcal{A}$. Skup $C_w(\mathcal{A})$ čini mrežu u odnosu na skupovnu inkluziju i tu mrežu zovemo *mreža slabih kongruencija* date algebre. Koristeći teoremu Grätzera i Schmidta u [VŠ 89] se dokazuje teorema o reprezentaciji: *Svaka algebarska mreža je izomorfna mreži slabih kongruencija neke algebre* $\mathcal{A}$. U radu [Voj] se ispituje algebra slabih kongruencija $\mathcal{K}_w(\mathcal{A})$ sa proširenim skupom fundamentalnih operacija: $\{\wedge, \vee, \circ, ^{-1}, \Delta_A, \circ, A^2\}$, gde su $\wedge$ i $\vee$ odgovarajuće mrežne operacije , $\circ$ je dijagonalna relacija najmanje podalgebre date algebre $\mathcal{A}$ (ostale oznake imaju uobičajeno značenje). Pitanja aksiomatizacije odnosno reprezentabilnosti ovakvih algebri slabih kongruencija zasad su otvorena.

Mi ćemo u daljem da se zadržimo na jednoj klasi algebri koja nastaje takođe iz algebri binarnih relacija i ima važne primene u teoriji formalnih jezika i računarstva uopšte.

5.2. Kleenejeve i dinamičke algebre

Kleenejeve algebre

Postoji nekoliko algebarskih struktura koje odgovaraju pojmovima iz računarstva. Jedna od njih je Kleenejeva algebra. Naime, jedan nedeterministički kompjuterski program možemo shvatiti kao binarnu relaciju R na skupu U svih stanja: u tom smislu sRt znači da ako se program R primeni na stanje s, onda je t jedno od mogućih terminalnih (završnih) stanja. Tako, metodama konstrukcije novih programa iz nekih datih, odgovaraju operacije na binarnim relacijama. Operacije koje se u tom kontekstu najviše koriste jesu: unija, kompozicija, refleksivni i tranzitivni operator zatvorenja. Dva programa igraju specijalnu ulogu: identični program E i nul-program $\emptyset$. Nekad se posmatra i inverzija – to odgovara realizaciji programa *unazad.*

Definicija 5.6

a) *Kleenejeva relaciona algebra* je algebra

$$\mathcal{K}(U)=(\mathcal{P}(U^2),\cup,\emptyset,\circ,\Delta_U,{}^{-1},{}^{rtc})$$

gde je U neki skup, a R^{rtc} refleksivno i tranzitivno zatvorenje relacije R tj.

$$R^{rtc}=\Delta_U\cup R^1\cup R^2\cup\ldots\cup R^n\cup\ldots.$$

b) *Kleenejeva algebra* jeste algebra

$$\mathcal{B}=(B,+,0,;,e,\check{}\ ,*)$$

tipa (2, 0, 2, 0, 1, 1) koja pripada varijetetu generisanom algebrama $\mathcal{K}(U)$.

□

Ako iz skupa operacija Kleenejeve algebre izostavimo operaciju $\check{}$, odgovarajući redukt zovemo $\check{}$-*slobodna Kleenejeva algebra.* Na analogan način definišemo i $*$-*slobodnu Kleenejevu algebru.* Za Kleenejevu algebru $\mathcal{B}$ kažemo da je *standardna* ako je izomorfna podalgebri neke Kleenejeve relacione algebre $\mathcal{K}(U)$. Standardna $\check{}$-slobodna, odnosno $*$-slobodna Kleenejeva algebra se definiše na sličan način.

Jedna varijanta konstrukcije algebri kompleksa sugeriše metod konstrukcije Kleenejevih algebri.

Neka je $\mathcal{U}=(U,R,E,S)$ poli-algebra tipa (2, 0, 1). Definišemo *Kleenejev kompleks* $\mathcal{KC}(\mathcal{U})$ na sledeći način: iz algebre kompleksa $\mathcal{C}m(\mathcal{U})$ izostavimo operacije preseka i komplementa, ali dodamo unarnu operaciju $*$, gde je Y^* zatvorenje od Y u odnosu na poli-operacije R i E. Dakle,

$$\mathcal{KC}(\mathcal{U})=(\mathcal{P}(U),\cup,\emptyset,\tilde{R},E,\tilde{S},*)$$

gde je

$$X\tilde{R}Y=\{z\in U \mid (\exists x\in X)(\exists y\in Y)z\in R(x,y)\},$$

$$\tilde{S}(X)=\{y\in U \mid (\exists x\in X)y\in S(x)\},$$

$$Y^*=\bigcap\{X\subseteq U \mid (\forall x,y\in X)R(x,y)\subseteq X \wedge Y\cup E\subset X\}.$$

Pomoću analogne konstrukcije dobijamo Kleenejev kompleks poli-algebre $\mathcal{U}=(U,R,E)$. Do sada se ne znaju potrebni i dovoljni uslovi da Kleenejev kompleks poli-algebre $\mathcal{U}$ bude Kleenejeva ili $\check{}$-slobnodna Kleenejeva algebra, ali neki najvažniji primeri nastaju na taj način.

Algebre jezika

U daljem ćemo uspostaviti vezu izmedu algebri jezika i Kleenejevih algebri. Neka je Σ skup. Označimo sa Σ^* skup svih reči nad Σ (Σ^* se može shvatiti i kao skup svih konačnih nizova nad Σ). Sa λ ćemo označiti praznu reč. Svaki podskup $L\subseteq\Sigma$ zovemo *jezik* nad Σ. Dakle, $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ jeste skup svih jezika nad Σ.

U skupu svih jezika nad istom azbukom definišu se sledeće operacije: unija $\cup$, konkatencija $\cdot$, i iteracija *. Ako su A, B dva jezika nad Σ, onda

$$A\cup B=\{W \mid W\in A \text{ ili } W\in B\},$$

$$A\cdot B=\{W_1W_2 \mid W_1\in A \wedge W_2\in B\},$$

$$A^*=\bigcap\{S\subseteq\Sigma^* \mid \{\lambda\}\cup A\subseteq S \wedge S\cdot S=S\}.$$

Algebru $\mathcal{L}_\Sigma=(\mathcal{P}(\Sigma^*),\cup,\emptyset,\cdot,\{\lambda\},{}^*)$ zovemo *algebra jezika nad* Σ. U toj algebri izdvajamo podalgebru generisanu jednoelementnim jezicima:

$$\mathcal{R}eg_\Sigma=\langle\{\{a\} \mid a\in\Sigma\}\rangle.$$

Ovu algebru zovemo *algebra regularnih jezika* (ili *regularnih dogadaja*) nad Σ. Direktna veza izmedu algebri jezika i Kleenejevih algebri vidi se iz sledećih tvrdenja:

Teorema 5.15 Za svaki skup Σ, algebra jezika $\mathcal{L}_\Sigma$ jeste algebra Kleenejevih kompleksa neke poli - algebre.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{U} = (\Sigma^*, \cdot, \{\lambda\})$ poli - algebra nad skupom svih reči od Σ, sa operacijom konkatencije $\cdot$, i konstantnom $\{\lambda\}$, λ je prazna reč. Tada, po definiciji,

$$\mathcal{KC}(\mathcal{U}) = (\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \emptyset, \cdot, \{\lambda\}, ^*\},$$

gde su operacije $\cdot$ i $*$ definisane na sledeći način:

$$X \cdot Y = \{W_1\ W_2 \mid W_1 \in X \wedge W_2 \in Y\},$$
$$X^* = \{\lambda\} \cup X \cup X \cdot X \cup \ldots \cup X^n \cup \ldots .$$

Dakle, $\mathcal{KC}(\mathcal{U}) = \mathcal{L}_\Sigma$.

□

Teorema 5.16 Za svaki skup Σ, algebra jezika $\mathcal{L}_\Sigma$ jeste standardna, $\check{}$ - slobodna Kleenejeva algebra.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{L}_\Sigma = (\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \emptyset, \cdot, \{\lambda\}, ^*)$. Definišimo preslikavanje $\varphi : \mathcal{P}(\Sigma^*) \to \Sigma^* \times \Sigma^*$ na sledeći način: $\varphi(X) = \{(u, u \cdot v) \mid u \in \Sigma^* \wedge v \in X\}$.

Dokažimo da je φ potapanje algebre $\mathcal{L}_\Sigma$ u $\check{}$ - slobodnu Kleenejevu algebru

$$\mathcal{K}'(\Sigma^*) = (\mathcal{P}(\Sigma^* \times \Sigma^*), \cup, \emptyset, \circ, \Delta, ^{rtc}).$$

Prvo, jasno je da je $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ i da je

$$\varphi(\{\lambda\}) = \{(u, u \cdot \lambda) \mid u \in \Sigma^*\} = \Delta_{\Sigma^*}.$$

Dalje,

$$\begin{aligned}
\varphi(A \cup B) &= \{(u, u \cdot v) \mid u \in \Sigma^* \wedge v \in A \cup B\} = \\
&= \{(u, u \cdot v) \mid u \in \Sigma^* \wedge v \in A\} \cup \{(u, u \cdot v) \mid u \in \Sigma^* \wedge v \in B\} = \\
&= \varphi(A) \cup \varphi(B),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(A \cdot B) &= \{(u, u \cdot w) \mid u \in \Sigma^* \wedge w \in A \cdot B\} = \\
&= \{(u, u \cdot v_1 \cdot v_2) \mid u \in \Sigma^* \wedge v_1 \in A,\ v_2 \in B\} = \\
&= \{(u, z) \mid u \in \Sigma^*,\ z = u \cdot v_1 v_2,\ v_1 \in A,\ v_2 \in B\} =
\end{aligned}$$

$$= \{(u, z) \mid (\exists v_1 \in A)((u, u\cdot v_1) \in \varphi(A) \ \wedge \ (u\cdot v_1, z) \in \varphi(B))\}$$

$$= \{(u, z) \mid (\exists y \in \Sigma^*)((u, y) \in \varphi(A) \ \wedge \ (y, z) \in \varphi(B))\}$$

$$= \varphi(A) \circ \varphi(B),$$

$$\varphi(A^*) \ = \varphi(\bigcup_{n\in \mathbb{N}} A^n) =$$

$$= \{(u, u\cdot v) \mid u \in \Sigma^* \ \wedge \ (v \in \{\lambda\} \vee (\exists n \in \mathbb{N}) v \in A^n)\} =$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\varphi(A))^n = (\varphi(A))^{rtc}.$$

φ je 1-1.

□

Kakva je veza izmedu algebri regularnih jezika i Kleenejevih algebri ? Može se dokazati da je algebra regularnih jezika nad Σ slobodna, $\check{}$ - slobodna Kleenejeva algebra nad skupom Σ kao skupom slobodnih generatora. Taj rezultat se može naći u [Ne 82], gde se taj rezultat pripisuje Kozenu(1979). Da bismo to dokazali, primetimo da u opštem slučaju važi sledeće:

Lema 5.1 Neka je varijetet V generisan algebrama iz klase K, tj. $V = HSP(K)$. Ako je algebra $\mathcal{F}$ slobodna nad X za klasu K, onda je ona slobodna nad X i za celu klasu V.

Dokaz.

Videti recimo [Gr 79].

□

Teorema 5.17 Algebra $\mathcal{R}eg_X$ je slobodna, $\check{}$-slobodna Kleenejeva algebra nad skupom X.

Dokaz.

Zbog gornje leme dovoljno je dokazati da se svako preslikavanje $f : X \to \mathcal{P}(Y^2)$ može proširiti do homorfizma $\overline{f} : \mathcal{R}eg_X \to \mathcal{K}'(Y)$, gde je

$$\mathcal{K}'(Y) = (\mathcal{P}(Y^2), \cup, \emptyset, \circ, \Delta_Y, {}^{rtc}).$$

Primetimo da, strogo uzevši, X ustvari nije podskup od Reg_X. No, njemu ekvivalentan skup $G = \{\{a\} \mid a \in X\}$ jeste podskup od Reg_X i generiše algebru $\mathcal{R}eg_X$. Tako, po strogoj definiciji slobodne algebre, treba dokazati da se svako preslikavanje

$f : G \to \mathcal{P}(Y^2)$ može proširiti do homomorfizma $\overline{f} : \mathcal{R}eg_X \to \mathcal{K}'(Y)$. Jasno je da je monoid $\mathcal{G}^* = (G^*, \cdot, \lambda)$ slobodan mononoid nad skupom G^* i da je on podmonoid monoidnog redukta algebre $\mathcal{R}eg_X$. Tačnije, $\mathcal{G}^*$ se potapa u monoidni redukt od $\mathcal{R}eg_X$ pomoću preslikavanja $j : G^* \to \mathrm{Reg}_X$,

$$j(w) = j(\{x_1\}\{x_2\} \ldots \{x_n\}) = \{x_1 x_2 \ldots x_n\}.$$

Dakle, $\mathcal{R}eg_X$ sadrži slobodan monoid $(\{\{w\} \mid w \in X^*\}, \cdot, \{\lambda\}) = \langle G \rangle$. Pošto je $(\mathcal{P}(Y^2), \circ, \Delta_Y)$ monoid, onda se svako preslikavanje $f : G \to \mathcal{P}(Y^2)$ može proširiti do homomorfizma $g : (\{\{w\} \mid w \in X^*\}, \cdot, \{\lambda\}) \to (\mathcal{P}(Y^2), \circ, \Delta_Y)$.

Definišimo sada $\overline{g} : \mathrm{Reg}_X \to \mathcal{P}(Y^2)$ na sledeći način: ako je $L \in \mathrm{Reg}_X$ onda

$$\overline{g}(L) = \bigcup \{ g(\{w\}) \mid w \in L \}.$$

Sada preostaje da se (proverom) uverimo u sledeće :

1) $\overline{g}$ proširuje preslikavanje g pa i preslikavanje $f : G \to \mathcal{P}(Y^2)$;

2) $\overline{g} : \mathcal{R}eg_X \to \mathcal{K}'(Y)$ jeste homomorfizam.

□

O jednakosnim bazama Kleenejevih algebri

Univerzalna algebra je deo algebre koja izučava strukturna svojstva konkretnih algebri ali, takođe, ispituje i algebarske osobine čitavih klasa algebri. Problemi *jednakosnih teorija* algebri i jednakosnih teorija različitih klasa algebri spadaju u najinteresantnije probleme univerzalne algebre. U takve probleme spadaju: problemi baza jednakosnih teorija, problemi mreža podteorija datih jednakosnih teorija, problemi odlučivosti jednakosnih teorija itd.

Ranije smo videli da klasa RRA nema konačnu bazu, tj. ne postoji konačan skup identiteta iz koga možemo izvesti sve identitete na RRA.

U radu [Jo 86] B. Jónsson je postavio sledeće pitanje:

Problem [Jo 86]. Da li jednakosna teorija klase Kleenejevih (odnosno klase $\check{}$ - slobodnih Kleenejevih algebri) ima konačnu bazu?

Veza $\check{}$ - slobodnih Kleenejevih algebri i algebri jezika pruža nam mogućnost da, u slučaju $\check{}$ - slobodnih Kleenejevih algebri, nađemo lako odgovor. Iz univerzalne algebre je poznato da, za svaki varijetet V, jednakosna teorija od V jeste jednakosna teorija njegove slobodne algebre generisane sa prebrojivo mnogo generatora. Ranije smo videli da je, za svaki skup Σ, $\mathcal{R}eg_{\Sigma}$ slobodna, $\check{}$ - slobodna Kleenejeva algebra na Σ. Prema tome, problem baze jednakosne teorije varijeteta $\check{}$ - slobodnih Kleenejevih algebri svodimo na problem baze jednakosne teorije $\mathcal{R}eg_{\Sigma}$, za prebrojivo Σ. Do jednakosne teorije algebri regularnih jezika dolazimo koristeći ono što se u literaturi naziva *aksiomatizacija* algebri regularnih jezika. U opštem slučaju, kažemo da je $[A, R]$ *aksiomatizacija* za neku teoriju, ako je A neki rekurzivan skup formula (tzv. *aksioma*), R rekurzivan skup *pravila izvođenja*, tako da se sve formule date teorije (i samo one) mogu dobiti iz A pomoću konačno mnogo primena pravila izvodjenja iz R. U tom smislu, problem aksiomatizacije klase regularnih jezika ima trivijalno rešenje, s obzirom na to da postoji algoritam koji utvrđuje koja su dva regularna izraza jednaka (videti [Sa 69]). Za A možemo uzeti skup svih tačnih jednakosti među regularnim izrazima, a za R prazan skup. Ova aksiomatizacija nije zadovoljavajuća jer je skup A nepregledan. U literaturi se uglavnom daju aksiomatizacije za tačne jednakosti među regularnim izrazima i pravila izvođenja nad njima (videti [Sa 69],[Con 71] , [Ei 74], [GP 72], [St 72]). Većina od tih aksiomatizacija ništa ne govori o bazi jednakosne teorije klase algebri regularnih jezika. Pravila R, koja se u literaturi navode kao pravila izvođenja, *nisu* pravila izvođenja jednakosne logike. Ako bismo u R imali pravila jednakosne logike koja se odnose na jednakosti (tj. identitete bez promenljivih), ni onda činjenica o kardinalnosti skupa aksioma A (koje su jednakosti) ništa ne znače za bazu jedakosti. Naime, postoje primeri algebri koje imaju konačnu bazu identiteta, a nemaju konačnu bazu jedankosti, i obratno, postoje primeri algebri koje imaju konačnu bazu jednakosti, a nemaju konačnu bazu identiteta.

Označimo sa Σ_n n-elementnu azbuku, tj. $\Sigma_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Neka $\mathcal{S}_n$ označava skup svih *identiteta* u jeziku $\{\cup, \emptyset, \cdot, \{\lambda\}, ^*\}$ koji važe u algebri $\mathcal{R}eg_{\Sigma_n}$ i neka je $\mathcal{S} = \bigcap \{\mathcal{S}_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$. U [Sa 69] skup pravila izvođenja R čine pravilo *zamene* i pravilo *supstitucije*.

Teorema 5.18 (Salomaa, Redko) $\mathcal{S}$ nema konačnu bazu.

Dokaz.

Videti [Sa 69].

□

Posledica 5.1 Neka je Σ prebrojiv skup. Jednakosna teorija algebre $\mathcal{R}eg_\Sigma$ nema konačnu bazu.

Dokaz.

Primetimo da u [Sa 69] nisu sva pravila jednakosne logike uzeta za pravila izvođenja. Međutim, pravilo tranzitivnosti može se izvesti iz pravila zamene i simetrije. Ovo poslednje, kao i pravilo refleksivnosti, implicitno se koriste u [Sa 69]. Drugim rečima, dokaz u [Sa 69] može se tako transformisati da se koriste pravila izvođenja jednakosne logike.

Dalje, po definiciji, $\mathcal{S} = \mathrm{Eq}(\{\mathcal{R}eg_{\Sigma_n} \mid n = 1,2,\ldots\})$. Treba pokazati da je $\mathcal{S} = \mathrm{Eq}(\mathcal{R}eg_\Sigma)$, gde je Σ prebrojiv skup. Možemo uzeti da je $\Sigma = \bigcup \{\Sigma_n \mid n = 1,2,\ldots\}$. Ako $e \in \mathrm{Eq}(\mathcal{R}eg_\Sigma)$ onda $e \in \mathrm{Eq}(\mathcal{R}eg_{\Sigma_n})$ za sve $n = 1,2,\ldots$. Kako je $\mathcal{R}eg_{\Sigma_n}$ podalgebra od $\mathcal{R}eg_\Sigma$, sledi da $e \in \mathcal{S}$. Obratno, neka identitet $e \in \mathcal{S}$ i pretpostavimo da e ne važi na $\mathcal{R}eg_\Sigma$. Pošto e sadrži samo konačno mnogo promenljivih, postoji prirodan broj n tako da e ne važi na $\mathcal{R}eg_{\Sigma_n}$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da $e \in \mathcal{S}$.

□

Teorema 5.19 Klasa $\check{\ }$- slobodnih Kleenejevih algebri nema konačnu bazu jednakosne teorije.

Dokaz.

Prema rezultatu Kozena (Nemetija) $\mathcal{R}eg_\Sigma$ je slobodna algebra za varijetet $\check{\ }$-slobodnih Kleenejevih algebri, za bilo koji skup Σ. Jednakosna teorija varijeteta $\check{\ }$-slobodnih Kleenejevih algebri jeste jednakosna teorija algebre $\mathcal{R}eg_\Sigma$, kada je Σ prebrojiv skup. Dokaz sada sledi iz prethodne posledice.

□

Primetimo da iz prethodne teoreme ne sledi da jednakosna teorija varijeteta Kleenejevih algebri nema konačnu bazu. Naime, nije teško dati primer varijeteta V takvog da neki redukt od V nema konačnu bazu jednakosne teorije, a sam V ima.

Primer 5.1

Neka je $A=\{0,1,2\}$, i neka je $\mathcal{A}=(A,\cdot,M)$, gde je $\cdot$ binarna, a M ternarna operacija, definisane na sledeći način: $0\cdot x=x\cdot 0=0$, za sve $x\in A$,

$$1\cdot 1=0,\ 1\cdot 2=1,\ 2\cdot 1=2\cdot 2=2;$$

$$M(x,x,y)=M(x,y,x)=M(y,x,x)=x, \text{ za sve } x\in A,$$

$$M(x,y,z)=0, \text{ ako su } x,y,z \text{ različiti medusobno.}$$

Tada: 1) Varijetet $V=\mathrm{HSP}(\mathcal{A})$ ima konačnu jednakosnu bazu.

2) Varijetet $\mathrm{Red}_{\{\cdot\}}(V)=\mathrm{HSP}((A,\cdot))$ nema konačnu jednakosnu bazu.

Zaista:

2) sledi direktno iz rezultata Murskog da grupoid $(A,\cdot)$ nema konačnu jednakosnu bazu.

1) sledi iz teorema:

Teorema (Pixley) Ako za varijetet V postoji ternarni term $M(x,y,z)$ takav da $V\models M(x,x,y)=M(x,y,x)=M(y,x,x)=x$, tada je V kongruencijski distributivan.

Teorema (Baker) Ako je V konačno generisan, kongruencijski distributivan varijetet konačnog tipa, onda V ima konačnu jednakosnu bazu.

□

Dinamičke algebre

Polazeći od Kleenejeve algebre dolazimo do pojma dinamičke logike i dinamičke algebre.

Dinamička logika se dobija iz klasične iskazne logike dodavanjem nekih modalnih operatora $\langle a\rangle$, indeksiranih elementima neke Kleenejeve algebre.

Neka je $\mathcal{K}=(K,+,0,;,e,\breve{},{}^*)$ neka (fiksirana) Kleenejeva algebra. *Iskazne K-formule* su elementi apsolutno slobodne formulske algebre

$$\mathcal{F}_{\mathcal{K}}=(F_{\mathcal{K}},\vee,t,\wedge,f,\neg,\langle a\rangle(a\in K))$$

nad nekim beskonačnim skupom P (iskaznih promenljivih). Binarne operacije $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ se definišu na uobičajen način, a $[a]$ je oznaka za operator $\neg\langle a\rangle\neg$.

Definicija 5.9 Neka je $\mathcal{K}$ neka Kleenejeva algebra. Za skup $\Gamma \subseteq F$ iskaznih $\mathcal{K}$- formula kažemo da je (*iskazna*) dinamička $\mathcal{K}$- logika ako za sve a, $b \in K$ i sve x, $y \in F_{\mathcal{K}}$ važi

(i) Sve klasične tautologije pripadaju Γ;

(ii) $x \Rightarrow y \in \Gamma$ onda $<a>x \Rightarrow <a>y \in \Gamma$;

(iii) $[a]t \in \Gamma$ i $<a>(x \vee y) \Leftrightarrow (<a>x \vee <a>y) \in \Gamma$;

(iv) Γ je zatvoren u odnosu na modus ponens;

(v) Γ je zatvoren u odnosu na supstituciju;

(vi) Sledeće formule su u Γ:

(vi_1) $<a+b>x \Leftrightarrow (<a>x \vee <b>x)$

(vi_2) $<0>x \Leftrightarrow f$

(vi_3) $<a;b>x \Leftrightarrow <a><b>x$

(vi_4) $<e>x \Leftrightarrow x$

(vi_5) $<a^{\vee}>[a]x \Rightarrow x$

(vi_6) $<a^*>x \Leftrightarrow (x \vee <a><a^*>x)$

(vi_7) $<a^*>x \Leftrightarrow (x \vee <a^*>(\neg x \wedge <a>x))$.

□

Kao i u slučaju klasičnog iskazanog računa, možemo definisati relaciju ekvivalentnosti $\approx_{\Gamma}$ medu formulama.

Definicija 5.10 Neka je $\mathcal{K}$ Kleenejeva algebra, a $\Gamma \subseteq F_{\mathcal{K}}$ dinamička $\mathcal{K}$- logika. Relacija $\approx_{\Gamma}$ je definisana na sledeći način: za sve x, $y \in \Gamma$

$x \approx_{\Gamma} y$ akko $x \Leftrightarrow y \in \Gamma$.

□

Algebarska verzija dinamičkih logika su tzv. dinamičke algebre. Dinamička algebra je Booleova algebra sa normalnim unarnim operatorima koji su indeksirani elementima neke Kleenejeve algebre. Podsetimo se da ako je $\mathcal{B}_0 = (B,+,\cdot,-,0,1)$ Booleova algebra, onda za $F: B \rightarrow B$ kažemo da je *operator* na $\mathcal{B}_0$ ako je aditivan, tj. ako za sve x, $y \in B$ važi $F(x+y) = F(x)+F(y)$. Operator F je *normalan* ako je $F(0) = 0$.

Definicija 5.11 Neka je $\mathcal{K}$ Kleenejeva algebra. *Dinamička $\mathcal{K}$- algebra $\mathcal{B}$* je Booleova algebra $\mathcal{B}_o$ sa normalnim unarnim operatorima $F_a(a \in K)$

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_o, F_a(a \in K))$$

ako da za sve $a, b \in K$ i $x, y \in B$ važi

(i) $F_{a+b}(x) = F_a(x) + F_b(x)$

(ii) $F_0(x) = 0$

(iii) $F_{a;b}(x) = F_a F_b(x)$

(iv) $F_e(x) = x$

(v) $F_{a^\smile} \overline{F_a(x)} \leq X$

(vi) $F_a{}^*(x) = x + F_a{}^*(x \cdot F_a(x))$.

]

Teorema 5.20 Neka je $\mathcal{K}$ Kleenejeva algebra, a $\Gamma \subseteq F_{\mathcal{K}}$ skup iskaznih $\mathcal{K}$- formula. Tada je Γ dinamička $\mathcal{K}$- logika akko je $\approx_\Gamma$ potpuno invarijantna kongruencija na $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ tako da je $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}/\approx_\Gamma$ dinamička $\mathcal{K}$- algebra.

Dokaz.

Iz klasične iskazne logike je poznato da je konjunkcija uslova (i) i (iv) iz Definicije 5.9 ekvivalentna sa uslovom da je $\approx_\Gamma$ relacija kongruencije na reduktu $\mathcal{F}'$ od $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ koji se dobija izostavljanjem operacija $<a>(a \in K)$, i da je $\mathcal{F}'/\approx_\Gamma$ Booleova algebra. Uslov (ii) nam daje da $\approx_\Gamma$ čuva operacije $<a>(a \in K)$, pa je $\approx_\Gamma$ kongruencija na $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$. Uslov (v) znači da je kongruencija $\approx_\Gamma$ potpuno invarijantna. Iz uslova (iii) dobijamo da su operacije $<a>/\approx_\Gamma$ normalni operatori. Aksiome (vi_1)-(vi_7) iz Definicije 5.9 nam daju aksiome (i)- (vii) u Definiciji 5.11. Dokaz u suprotnom smeru je potpuno analogan.

]

Primetimo da nam ova teorema omogućava da uspostavimo vezu između klase svih dinamičkih $\mathcal{K}$- logika i klase svih varijeteta dinamičkih $\mathcal{K}$- algebri (videti [Jo 86]).

Do glavnih modela dinamičkih $\mathcal{K}$- algebri dolazimo tehnikom algebri kompleksa. Pre nego što pređemo na dokaz sledećeg tvrđenja, primetimo da ako je R neka unarna poli-operacija na nekom skupu S, onda se R može smatrati binarnom operacijom na S tako da je:

$$(x, y) \in R \quad \text{akko} \quad y \in R(x).$$

Tako, svaku unarnu poli-operaciju $R: S \to \mathcal{P}(S)$ možemo smatrati za element Kleenejeve relacione algebre $\mathcal{K}(S)$.

Teorema 5.21 ([Jo86]). Neka je $\mathcal{K}$ Kleenejeva algebra. Za multiunarnu poli-algebru $\mathcal{U} = (U, R_a(a \in K))$ algebra kompleksa $\mathcal{C}m(\mathcal{U})$ je dinamička algebra akko je preslikavanje $a \to R_a$ homomorfizam iz $\mathcal{K}$ u $\mathcal{K}(U)$.

Dokaz.

Dokazaćemo samo smer ($\leftarrow$). (Za smer ($\to$) videti [Jo86, str. 54.])

Neka je $\varphi: K \to \mathcal{P}(U^2)$ definisano sa $\varphi(a) = R_a$, gde je

$$(x, y) \in R_a \Leftrightarrow y \in R_a(x).$$

Znamo da je φ homomorfizam između $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}(U)$ pa dakle imamo:

$$R_{a+b} = R_a \cup R_b, \quad R_0 = \emptyset, \quad R_{a;b} = R_a \circ R_b,$$

$$R_e = \triangle_U, \quad R_{a^{\smile}} = (R_a)^{-1}, \quad R_{a^*} = (R_a)^{rtc}.$$

Napravimo sada algebru kompleksa $\mathcal{C}m(\mathcal{U}) = (\mathcal{P}(U), \cup, \cap, -, \emptyset, \mathcal{U}, \widetilde{R}_a(a \in K))$, gde je $\widetilde{R}_a(X) = \{y \in U \mid (\exists x \in X)(x, y) \in R_a\}$.

Znamo da je $\mathcal{C}m(\mathcal{U})$ kompletna i atomična Booleova algebra sa normalnim unarnim operatorima (vidi Tvrđenje 6, Glava I). Treba samo proveriti aksiome dinamičke algebre.

1) $\widetilde{R}_{a+b}(X) = \widetilde{R}_a(X) \cup \widetilde{R}_b(X)$, za sve $X \subseteq U$.

$$\begin{aligned}
y \in \widetilde{R}_{a+b}(X) &\Leftrightarrow (\exists x \in X)\, y \in R_{a+b}(x) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in X)\, y \in R_a(x) \cup R_b(x) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in X)(y \in R_a(x) \vee y \in R_b(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in X)\, y \in R_a(x) \vee (\exists x \in X)\, y \in R_b(x) \\
&\Leftrightarrow y \in \widetilde{R}_a(X) \vee y \in \widetilde{R}_b(X) \\
&\Leftrightarrow y \in \widetilde{R}_a(X) \cup \widetilde{R}_b(X).
\end{aligned}$$

2) $\widetilde{R}_0(X)=\emptyset$ jer znamo da je $R_0=\emptyset$

3) $\widetilde{R}_{a;b}(X)=\widetilde{R}_a(\widetilde{R}_b(X))$

$$
\begin{aligned}
y\in \widetilde{R}_{a;b}(X) &\Leftrightarrow (\exists x\in X)(x,y)\in R_{a;b}\\
&\Leftrightarrow (\exists x\in X)(x,y)\in R_a\circ R_b\\
&\Leftrightarrow (\exists x\in X)(\exists z\in \mathcal{U})((x,z)\in R_b\wedge(z,y)\in R_a)\\
&\Leftrightarrow (\exists z\in \mathcal{U})((\exists x\in X)(x,z)\in R_b\wedge(z,y)\in R_a)\\
&\Leftrightarrow (\exists z\in \mathcal{U})(z\in \widetilde{R}_b(X)\wedge(z,y)\in R_a)\\
&\Leftrightarrow y\in \widetilde{R}_a(\widetilde{R}_b(X)).
\end{aligned}
$$

4) $\widetilde{R}_e(X)=X$, jer je $R_e=\Delta_U$

5) $\widetilde{R}_{a^\smile}(\widetilde{R}_a^\delta(X))\subseteq X$

gde je $\widetilde{R}_a^\delta(X)=(\overline{\widetilde{R}_a(\overline{X})})$ dual od R_a. Zbog definicije konjugovanosti, dovoljno je dokazati da su $\widetilde{R}_{a^\smile}$ i $\widetilde{R}_a$ uzajamno konjugovani. Na osnovu Teoreme 4.22 u [Jo 86] pošto je $R_{a^\smile}=(R_a)^{-1}$ onda su $\widetilde{R}_{a^\smile}$ i $\widetilde{R}_a$ uzajamno konjugovani.

6) $\widetilde{R}_{a^*}(X)=X\cup\widetilde{R}_a\widetilde{R}_{a^*}(X)$.

Može se dokazati ([Jo 86, Teorema 4.22.]) da u svakoj Kleenejevoj algebri važi $a^*=e+a;a^*$, dakle

$$\widetilde{R}_{a^*}=\widetilde{R}_{e+a;a^*}=\widetilde{R}_e\cup\widetilde{R}_{a;a^*}=\widetilde{R}_e\cup\widetilde{R}_a\widetilde{R}_{a^*}.$$

7) $\widetilde{R}_{a^*}(X)=X\cup\widetilde{R}_{a^*}(\overline{X}\cap\widetilde{R}_a(X))$.

Znamo da je $R_{a^*}=R_a^{rtc}=\Delta_U\cup R_a\cup R_a^2\cup\ldots\cup R_a^n\cup\ldots$ Jedan smer inkluzije $(\supseteq)$ je jasan, jer

(1) $X\subseteq\widetilde{R}_a^{rtc}(X)$

$$\overline{X}\cap\widetilde{R}_a(X)\subseteq\widetilde{R}_a(X)\subseteq\widetilde{R}_a^{rtc}(X)\Rightarrow\overline{X}\cap\widetilde{R}_a(X)\subseteq\widetilde{R}_a^{rtc}(X)\Rightarrow$$

$$\widetilde{R}_a^{rtc}(\overline{X}\cap\widetilde{R}_a(X))\subseteq\widetilde{R}_a^{rtc}(\widetilde{R}_a^{rtc}(X))\Rightarrow$$

(2) $\widetilde{R}_a^{rtc}(\overline{X}\cap\widetilde{R}_a(X))\subseteq\widetilde{R}_a^{rtc}(X)$.

Iz (1) i (2) sledi

$$X\cup\widetilde{R}_a^{rtc}(\overline{X}\cap\widetilde{R}_a(X))\subseteq\widetilde{R}_a^{rtc}(X).$$

Treba još dokazati smer ($\subseteq$).

$$y \in \tilde{R}_a^{rtc}(X) \Rightarrow y \in X \cup \tilde{R}_a^{rtc}(\overline{X} \cap \tilde{R}_a(X)).$$

Dovoljno je dokazati sledeće:

$$y \in \overline{X} \text{ i } y \in \tilde{R}^{rtc}(X) \Rightarrow y \in \tilde{R}^{rtc}(\overline{X} \cap \tilde{R}(X)).$$

Pošto $y \in \tilde{R}^{rtc}(X)$ onda $(\exists x \in X)(x, y) \in R^n$ za neko n tj.

$$(\exists x \in X) x_0 = x R x_1 R x_2 R \dots R x_{n-1} R y = x_n, \text{ za neke } x_i.$$

Neka je i najveći indeks ($i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$) tako da $x_i \in X$ (takvo i sigurno postoji jer recimo $x_0 \in X$). Tada

$$x_0 R x_1 R \dots R x_{i-1} R x_i R x_{i+1} R \dots R x_{n-1} R y,$$

$$x_0 \in X, \dots, x_{i-1} \in X, \dots, x_i \in X, x_{i+1} \in \overline{X}, \dots, x_{n-1} \in \overline{X}, y \in \overline{X}$$

pa je $\quad x_{i+1} \in \overline{X} \cap R(X)$ i $y \in \tilde{R}^{rtc}(\overline{X} \cap R(X))$, što je i trebalo dokazati.

□

Napomenimo da se može dokazati da je svaka konačna dinamička algebra reprezentabilna kao algebra kompleksa neke poli-algebre (videti [Jo86]).

U 6. delu knjige koristićemo sledeći specijalni slučaj gornjeg tvrđenja:

Neka je $\mathcal{K} = \mathcal{K}(U)$ Kleenejeva relaciona algebra, a $\varphi : \mathcal{K}(U) \to \mathcal{K}(U)$ identičko preslikavanje; onda je φ trivijalno homomorfizam. Na osnovu Teoreme 5.12, ako Kleenejevu relacionu algebru posmatramo kao poli-algebru

$$\mathcal{U} = (U, R_\rho(\rho \in \mathcal{P}(U^2))),$$

gde za R_ρ uzimamo relaciju ρ, $R_\rho(X) = \{y \mid (x, y) \in \rho\}$, onda je algebra kompleksa $\mathcal{C}m(\mathcal{U})$ sigurno dinamička algebra.

6. PROBLEMI ODLUČIVOSTI

U ovoj glavi su opisani glavni tipovi problema odlučivosti u univerzalnoj algebri. Dati su kompletni dokazi o njihovoj međusobnoj povezanosti, da bi se kasnije opisao tzv. semigrupni pristup. Ovaj pristup se pokazao dobar pri dokazivanju raznih neodlučivih problema za slučaj relacionih algebri.

6.1 Definicije i istorijski pregled

Pojam *algoritma* u matematici ima dugu predistoriju. Međutim, uprkos svemu tome, tek u ovom veku – a u vezi sa raspravljanjem pitanja paradoksa Cantorove teorije skupova – činjeni su napori u strogom definisanju (uvođenju) pojma algoritma. Jedan takav vredan pokušaj je sadržan u radu Kurta Gödela o neodlučivosti aritmetike iz godine 1931. Tokom tridesetih godina, u radovima matematičara Alonza Churcha, Stephena Kleeneja, Barkleya Rossera i Alfreda Tarskog, Gödelova ideja dovela do pojma rekurzivne funkcije.

U opštem slučaju, za neki skup A kažemo da je *odlučiv* ako postoji algoritam koji za bilo koji element x odlučuje da li x pripada ili ne pripada skupu A. Naravno, u ovoj definiciji pojam *algoritma* jeste intuitivan. Postoji nekoliko matematičkih pojmova koji odgovaraju intuitivnom (i dakle nepreciznom) pojmu algoritma: rekurzivna funkcija, Turingova mašina itd. Pokazalo se da su svi ti formalni, strogi matematički pojmovi medusobno ekvivalentni. No, da li oni pokrivaju intuitivni pojam algoritma? Naravno, samim tim što *ne znamo tačno šta jeste intuitivni pojam algoritma*, suštinski je nemoguće odgovoriti na to pitanje. Kako do sada nije prona đen ni jedan efektivan algoritam koji nije mogao da se opiše postojećim matematičkim ekvivalentom algoritma (tj. recimo Turingovom mašinom ili rekurzivnim funkcijama), u matematici je opšte prihvaćena tzv. *teza Churcha*, po kojoj je, slobodno govoreći, *intuitivan pojam algoritma ekvivalentan pojmu rekurzivne funkcije.*

Sa takvim konceptima postalo je moguće dokazati da su mnoge poznate teorije neodlučive tj. da ne postoji algoritam koji bi omogućio da se odredi koje rečenice (zatvorene formule) pripadaju datoj teoriji, a koje ne.

Svi pojmovi iz teorije modela koji se ovde koriste mogu se naći u [CK 73] ili [Me 64].

Odlučivost elementarne teorije

Prva vrsta problema odlučivosti koju ćemo navesti jeste problem odlučivosti elementarne teorije.

Definicija 6.1 Neka je K klasa modela jezika $\mathcal{L}$ prvog reda. Kažemo da je *elementarna teorija klase K odlučiva* ako je skup $\mathrm{Th}(K)=\{\varphi \mid K \models \varphi,\ \varphi$ je rečenica na jeziku $\mathcal{L}\}$ odlučiv.

□

Još je 1936. godine Rosser dokazao da je teorija aritmetike prirodnih brojeva neodlučiva. Od 1950-tih godina postalo je jasno da je većina poznatih elementarnih teorija neodlučiva (vidi Tabelu 1). Zaključak da je svaka iole sadržajnija teorija neodlučiva, bio bi donet brzopleto. Naime, postoje odlučive teorije čiji modeli nisu nimalo trivijalni (vidi Tabelu 2).

NEODLUČIVE TEORIJE

1.	Aritmetika prirodnih brojeva	Rosser,	1936.
2.	Predikatski račun	Church,	1936.
3.	Grupe	Tarski,	1949.
4.	Proste grupe	Eršov,	1964.
5.	Polugrupe	Tarski,	1949.
6.	Komutativne polugrupe	Tarski,	1949.
7.	Prsteni	Tarski,	1949.
8.	Integralni domeni	Tarski,	1949.
9.	Polja	J. Robinson	1949.
10.	Mreže	Tarski,	1949.
11.	Modularne mreže	Tarski,	1949.
12.	Distributivne mreže	Grzegorczyk,	1951.

Tabela 1

ODLUČIVE TEORIJE

1.	Abelove grupe	Smeleva,	1949.
2.	Algebarski zatvorena polja	Tarski,	1949.
3.	Realno zatvorena polja	Tarski,	1949.
4.	Booleove algebre	Tarski,	1949.
5.	Linearno uređeni skupovi	Erenfojht,	1959.
6.	Sabiranje prirodnih brojeva	Presburger,	1929.
7.	Vektorski prostori nad konač. poljem	Eklof, Fisher	1972.
8.	Varijetet generisan primalnom algeb.	Eršov,	1964.
9.	Prsteni koji zadovoljavaju $x^m = x$	Comer,	1974.
10.	Rezidualno kon. var. monadičnih alg.	Comer,	1974.
11.	Rezidualno kon. var. relacionih algeb.	Burris, Werner,	1979.
12.	Rezidualno kon. varijeteti CA_α, $\alpha < \omega$	Burris, Werner,	1979.

Tabela 2

Problem opisivanja odlučivih klasa algebri je daleko od konačnog rešenja. Problem nije potpuno rešen ni u slučaju varijeteta. Nedavno je dat opis odlučivih lokalno konačnih varijeteta (vidi [BMc 81] i [McKV 89]).

Odlučivost jednakosne teorije

Druga vrsta problema odlučivosti je problem odlučivosti jednakosne teorije.

Definicija 6.2 Neka je V varijetet na jeziku $\mathcal{L}$. Kažemo da V ima *odlučivu jednakosnu teoriju* ako je skup $\mathrm{Eq}(V) = \{ e \mid V \models e,\ e \text{ je identitet na } \mathcal{L} \}$ odlučiv.

□

Može se reći da su izučavanja jednakosnih teorija i tzv. jednakosne logike u suštini počela 1935. godine, radovima Birkhoffa. Te godine Birkhoff je dokazao dve značajne teoreme. Prva teorema govori o ekvivalentnosti varijeteta i jednakosnih klasa. Druga je analogon Gödelove teoreme o potpunosti i daje potpun sistem aksioma za jednakosnu logiku (videti recimo [BS 81]).

O tome ko je dao prve rezultate o neodlučivosti jednakosnih teorija sa konačnom bazom (tj. teorija sa konačno mnogo aksioma), mišljenja su podeljena – uglavnom zbog toga što pedesetih godina mnogi matematičari nisu redovno objavljivali svoje rezultate u časopisima (o tome videti u [TG 87, Sect. 8.7.]). Neki smatraju da pravo prvenstva ima rezultat Tarskog iz 1953. godine o neodlučivosti jednakosne teorije relacionih algebri. Drugi daju prednost Markovu i Postu čiji rezultati iz 1947. godine sadrže implicitno i rezultate o neodlučivosti nekih jednakosnih teorija sa jednom binarnom operacijom i konačno mnogo konstanti. Međutim, njihovi rezultati su dati u terminima problema reči, a veza između problema reči i jednakosne teorije nije bila prepoznata još dugo vremena. Maljcev je 1966. godine pokazao da postoje neodlučive jednakosne teorije sa konačnom bazom sa samo dve unarne operacije, i da su razne jednakosne teorije grupa i kvazigrupa sa konačnom bazom neodlučive. Perkins je 1966. godine dao primer neodlučive jednakosne teorije grupoida, a Murskij je 1968. godine prezentirao neodlučivu teoriju semigrupa sa konačnom bazom. Napomenimo, da je jednakosna teorija grupa odlučiva.

Što se tiče novijih rezultata dokazano je da je jednakosna teorija cilindričnih algebri dimenzije 2 odlučiva (Henkin, Scott). Ako je $3 \leq \alpha \leq \omega$, jednakosna teorija od CA_α je neodlučiva (Tarski, Maddux). Jedan od najnovijih rezultata dobio je R. Freese: jednakosna teorija modularnih mreža je neodlučiva. Interesantno je, da je jednakosna teorija varijeteta svih mreža odlučiva (Whitman).

Problem reči

Sledeći problem odlučivosti koji ćemo navesti, problem reči, jeste nešto drugačiji od prethodna dva. Za preciznu definiciju problema reči potrebni su nam neki novi pojmovi.

U daljem ćemo sa $\mathcal{L}$ označiti neki jezik prvog reda koji sadrži simbol jednakosti $=$ i nema relacijskih simbola. Ako je G skup novih simbola konstanti ($\mathcal{L} \cap G = \emptyset$), onda sa $\mathcal{L}_G$ označavamo jezik $\mathcal{L} \cup G$. U opštem slučaju, simbol iz G i njegovu interpretaciju označavamo istim slovom. Neka je $\mathcal{A}$ algebra i $G \subseteq A$. Tada sa $\mathcal{A}_G$ označavamo algebru $(\mathcal{A}, x)_{x \in G}$. Ako je R skup identiteta na jeziku $\mathcal{L}_G$, bez promenljivih, onda uređen par (G, R) zovemo *prezentacija* u $\mathcal{L}_G$.

Definicija 6.3 Neka je Θ skup formula na jeziku $\mathcal{L}$, $K = \mathrm{mod}(\Theta)$, i (G, R) neka prezentacija u $\mathcal{L}_G$. Za neku algebru $\mathcal{A}$ na jeziku $\mathcal{L}$ kažemo da je *prezentirana* sa (G, R) u K ako važe sledeći uslovi:

(i) $\mathcal{A}$ je generisana sa G

(ii) $\mathcal{A}_G \models \Theta \cup R$

(iii) Za svaki identitet e u $\mathcal{L}_G$, bez promenljivih, važi ako $\mathcal{A}_G \models e$ onda $\Theta \cup R \models e$.

□

Ako je neka algebra $\mathcal{A}$ prezentirana sa (G, R) u K, onda ćemo pisati $\mathcal{A} = \mathcal{P}_K(G, R)$. Za algebru $\mathcal{B}$ kažemo da je *konačno prezentirana u K* ako postoje konačni skupovi G i R tako da je $\mathcal{B}$ prezentirana sa (G, R) u K. Primetimo da je algebra prezentirana sa (G, R) u K jedinstvena do na izomorfizam.

Primer 6.1 Neka je (G, R) prezentacija u $\mathcal{L}_G$. Neka je Θ skup identiteta jezika $\mathcal{L}$ i $\hat{V}$ varijetet definisan sa $\Theta \cup R$. Tada, redukt slobodne algebre (videti Dodatak T7.32) $\mathcal{F}_{\hat{V}}(\emptyset)$ do jezika $\mathcal{L}$ jeste algebra prezentirana sa (G, R) u $V = \mathrm{mod}(\Theta)$.

□

U ovom primeru Θ ne mora biti skup identiteta. Ako je Θ skup formula na jeziku $\mathcal{L}$ i ako je $\hat{V} = \mathrm{mod}(\Theta \cup R)$ onda, pod uslovom da $\mathcal{F}_{\hat{V}}(\emptyset)$ postoji, njen redukt do jezika $\mathcal{L}$ je algebra prezentirana sa (G, R) u $V = \mathrm{mod}(\Theta)$. Međutim, $\mathcal{F}_{\hat{V}}(\emptyset)$ ne postoji uvek.

Definicija 6.4 Neka je Θ skup identiteta na jeziku $\mathcal{L}$, $K = \mathrm{mod}(\Theta)$, $\mathcal{A}$ algebra konačno prezentirana sa (G, R) u K. *Problem reči za* $\mathcal{A} = \mathcal{P}_K\ (G, R)$ u K pita da li postoji algoritam koji za svaki identitet e na $\mathcal{L}_G$, bez promenljivih, odlučuje da li važi $\mathcal{A}_G \models e$ ili ne. Ako takav algoritam postoji, problem reči za $\mathcal{A}$ je *rešiv*; u suprotnom, kažemo da je problem reči za $\mathcal{A}$ *nerešiv*.

Napomena 6.1 Primetimo da, zbog definicije konačno prezentirane algebre, imamo da za svaki identitet e u $\mathcal{L}_G$, bez promenljivih, važi: $\mathcal{A}_G \models e$ akko $\Theta \cup R \models e$. Zbog teoreme kompletnosti jednakosne logike (videti Glavu 7.) umesto *semantičke rampe* $\models$ možemo staviti *sintaktičku rampu* $\vdash$.

□

Napomena 6.2 Neka je Θ skup identiteta na jeziku $\mathcal{L}$ i V varijetet definisan sa Θ. Neka je $\mathcal{A}$ algebra prezentirana sa $(G, \emptyset)$ u V, gde je G neki prebrojiv skup (novih) simbola konstanti. Algebra $\mathcal{A}$ nije konačno prezentirana sa $(G, \emptyset)$, ali se problem reči za $\mathcal{A}$ u V može definisati na isti način kao da je $\mathcal{A}$ konačno prezentirana. Tada je problem reči za $\mathcal{A}$ u V ekvivalentan sa problemom odlučivosti jednakosne teorije varijeteta V. Pošto je algebra $\mathcal{A}$ izomorfna sa slobodnom algebrom $\mathcal{F}_V(\mathbb{N})$, često se problem jednakosne teorije za V zove i problem reči za *slobodne objekte* u V.

□

Definicija 6.5 Neka je Θ skup identiteta na jeziku $\mathcal{L}$ i $K = \mathrm{mod}(\Theta)$. Tada:

(W.P.I) *Problem reči za K na prvom nivou* pita da li postoji jedan univerzalan algoritam koji rešava problem reči za sve konačno prezentirane algebre u K.

(W. P. II) *Problem reči za K na drugom nivou* pita da li za svaku konačno prezentiranu algebru $\mathcal{A}$ u K postoji algoritam koji rešava problem reči za $\mathcal{A}$ u K.

□

Prvi rezultati o problemu reči dobijeni su na drugom nivou. Godine 1947. Post i Markov su dokazali da postoji konačno prezentirana semigrupa sa nerešivim problemom reči. Kasnije je Cejtin dao jednostavniji primer.

Primer 6.2 (Cejtin) Neka je $G=\{a, b, c, d, e\}$ i $R=\{ac=ca,\ ad=da,\ bc=cb,\ bd=db,\ abac=abace,\ eca=ac,\ edb=be\}$. Neka je $\mathcal{A}$ semigrupa prezentirana sa (G, R) u varijetetu svih semigrupa. Cejtin je dokazao da $\mathcal{A}$ ima nerešiv problem reči.

□

1955. godine Boone i Novikov su dali primer konačno prezentirane grupe sa nerešivim problemom reči. Hutchinson i Lipshitz su dokazali da ni modularne mreže nemaju rešiv problem reči na drugom nivou. Zanimljivo je da varijetet svih mreža ima rešiv problem reči na prvom (pa znači i na drugom) nivou (Evans). Zar to ne znači da i svaka modularna mreža ima reživ problem reči? Ne! Objašnjenje te prividne protivrečnosti jeste sledeće: rešivost problema reči za mreže znači da svaka konačno prezentirana mreža ima rešiv problem reči. Činjenica da postoji konačno prezentirana modularna mreža $\mathcal{L}$ sa nerešivim problemom reči znači samo da ta mreža $\mathcal{L}$ nije konačno prezentirana u varijetetu svih mreža.

Interesantno je kako dodavanje komutativnog i asocijativnog zakona utiče na rešivost problema reči.

NEREŠIV W. P. I	REŠIV W. P. I
grupe	Abelove grupe kvazigrupe
prsteni	komutativni prsteni neasocijativni prsteni
semigrupe	komutativne semigrupe
modularne mreže	mreže

Tabela 3

6.2. Veza među problemima odlučivosti

Kakva je veza među problemima elementarne teorije, jednakosne teorije i problema reči? Ono što je jasno iz samih definicija, jeste da rešivost problema elementarne teorije nekog varijeteta povlači i odlučivost jednakosne teorije. Obratno ne važi. Na primer, grupe imaju odlučivu jednakosnu teoriju, a elementarna teorija je neodlučiva. Dalje, ako je za neki varijetet problem reči rešiv na prvom nivou, on je rešiv i na drugom nivou. Obrat ne važi, ali tu činjenicu nije lako dokazati (videti [MNS]).

Dva nivoa problema reči

Primer klase (koja nije varijetet) konačno prezentiranih algebri za koju je problem reči rešiv na drugom nivou, a na prvom nije, navodi Mostowski u [Mos 73]: ako sa $\mathfrak{U}$ označimo skup svih konačno prezentiranih grupa sa rešivim problemom reči, onda postoji skup $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{U}$ za koji ne postoji univerzalan algoritam za rešavanje problema reči, a time ni za $\mathfrak{U}$. No, klasa $\mathfrak{U}$ nije varijetet.

U radu [MNS] se navode tri varijeteta koji imaju osobinu da je problem reči na drugom nivou rešiv, a na prvom nije. Prvi varijetet je konačnog tipa (ima konačno mnogo operacija) i ima konačnu bazu (definisan je sa konačno mnogo aksioma). Drugi varijetet je konačnog tipa sa rekurzivnom bazom, s tim da definicione jednakosti ne sadrže promenljive. Na kraju se navodi primer varijeteta koji ima jednu konstantu, jednu binarnu operaciju i prebrojivo mnogo unarnih operacija. Taj poslednji varijetet je zapravo nešto modifikovan primer koji je preuzet od Wellsa (Wells, B., *Pseudorecursive varieties and their word problems*, Ph. D. thesis, University of California, Berkley, 1982, str. 161). Pošto je ovaj poslednji varijetet neuporedivo jednostavnije definisan od prethodna dva, navodimo njega.

Primer 6.3 (Wells, videti [MNS]) Neka je V varijetet sa konstantom 0, binarnom operacijom $\cdot$, i prebrojivo mnogo unarnih operacija $h_n (n \in \mathbb{N})$, koji zadovoljava sledeće identitete:

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad x \cdot 0 = 0, \quad x^2 = 0,$$

$$x \cdot h_n(y) = 0 \quad \text{i} \quad h_n(h_n(x)) = h_n(x), \text{ za sve } n \in \mathbb{N},$$

$$h_n(h_k(x)) = 0, \text{ za sve } n \neq k, n \in \mathbb{N},$$

$$h^n_{m_n}(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{m_n}) = 0,$$

gde je $\{ m_n : n \in \mathbb{N} \}$ jedno rekurzivno nabrajanje (*recursive listing*) nekog nerekurzivnog skupa X. Tada varijetet V ima nerešiv problem reči na prvom nivou, a rešiv problem reči na drugom nivou.

Jednakosna teorija, problem reči i elementarna teorija

Kakva je veza između problema jednakosne teorije i problema reči? U opštem slučaju iz činjenice da je problem reči za V nerešiv (na prvom ili drugom nivou) još ne sledi neodlučivost jednakosne teorije od V. Za primer možemo uzeti recimo varijetet svih grupa (W. P. I i W. P. II su nerešivi, a jednakosna teorija je odlučiva). Međutim, ta implikacija važi recimo za sve varijetete sa EDPC (vidi [BP 82]). Da li važi obratno? Da li iz neodlučivosti jednakosne teorije sledi nerešivost problema reči na drugom nivou? U opštem slučaju ne sledi, jer neodlučivost jednakosne teorije varijeteta V znači da je *problem reči za* $\mathcal{F}_V(\mathbb{N})$ nerešiv, ali ta algebra nije konačno prezentirana u V.

Za kontraprimer koji potvrđuje da iz neodlučivosti jednakosne teorije ne sledi nerešivost problema reči na drugom nivou, možemo uzeti gore pomenuti Primer 6.3 (videti [MNS], str. 60).

R E Š I V O S T

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathrm{Th}(V)} \arrow[r, shift left, "\text{da}"] & \boxed{\mathrm{Eq}(V)} \arrow[l, shift left, "\text{ne}"] \\
\boxed{\mathrm{W.P.I}} \arrow[r, shift left, "\text{da}"] & \boxed{\mathrm{W.P.II}} \arrow[l, shift left, "\text{ne}"] \\
\boxed{\mathrm{Eq}(V)} \arrow[r, shift left, "\text{da}"] & \boxed{\mathrm{W.P.II}} \arrow[l, shift left, "\text{ne}"] \\
\boxed{\mathrm{W.P.I}} \arrow[r, shift left, "\text{da}"] & \boxed{\mathrm{Th}(V)} \arrow[l, shift left, "\text{ne}"]
\end{tikzcd}$$

Slika 1

Primer varijeteta koji pokazuje da iz neodlučivosti elementarne teorije ne sledi nerešivost problema reči jeste varijetet komutativnih semigrupa (elementarna teorija je neodlučiva, a W. P. I rešiv). Da li obratno važi? Da li iz nerešivosti problema reči sledi neodlučivost elementarne teorije? Da! Da bismo to dokazali, problem reči na prvom nivou ćemo transformisati u takav oblik, koji će biti pogodan za razmatranje. U tom ekvivalentnom obliku W. P. I je mnogo sličniji problemima elementarne, odnosno jednakosne teorije.

Problem kvazi-identiteta

Definicija 6.6 (i) Ako su $e_1, e_2, \ldots, e_n$, e identiteti na jeziku $\mathcal{L}$, onda formulu $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n \Rightarrow e$ zovemo *kvazi - identitet*. $Q(\mathcal{L})$ je oznaka za skup svih kvazi - identiteta na jeziku $\mathcal{L}$.

(ii) Neka je V varijetet na jeziku $\mathcal{L}$. Kažemo da je problem kvazi-identiteta za V *rešiv* (*odlučiv*) ako je skup $Q(V) = \{q \mid V \models q,\ q$ je kvazi-identitet na $\mathcal{L}\}$ odlučiv.

□

Ono što se može dokazati jeste da za svaki varijetet, problem kvazi-identiteta je ekvivalentan sa problemom reči na prvom nivou (videti [Mal 58]). U daljem dajemo jedan dokaz te činjenice.

Glavna ideja dokaza te ekvivalencije je sledeća: Svakom $q \in Q(\mathcal{L})$ pridružujemo uređenu trojku $\Gamma(q) = (G^q, R^q, i^q)$, gde je R^q konačan skup identiteta, a i^q identitet na jeziku $\mathcal{L}_{G^q}$, bez promenljivih. Pokazaćemo da je problem da li kvazi-identitet q važi u svakoj algebri iz K ekvivalentan sa problemom da li identitet i^q važi u algebri prezentiranoj sa (G^q, R^q) u K.

U daljem neka je $G^\infty = \{g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots\}$ beskonačan prebrojiv skup novih konstantnih simbola ($G^\infty \cap \mathcal{L} = \emptyset$). Možemo pretpostaviti da ako je (G, R) konačna prezentacija, tada $G \subseteq G^\infty$. Neka je $t = t(x_0, \ldots, x_n)$ term čije su promenljive iz skupa $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Označimo sa $t(g_0, \ldots, g_n)$ term konstruisan iz t zamenom svakog pojavljivanja promenljive x_i u t odgovarajućim simbolom g_i ($i \in \{0, 1, \ldots, n\}$). Preslikavanje γ skupa Eq ($\mathcal{L}$) tj. identiteta na jeziku $\mathcal{L}$, u skup Eq ($\mathcal{L}_{G^\infty}$) definišemo na sledeći način: ako je $t_1 = t_1(x_0, \ldots, x_n)$ i $t_2 = t_2(x_0, \ldots, x_n)$ onda

$$\gamma(t_1 = t_2) = t_1(g_0, \ldots, g_n) = t_2(g_0, \ldots, g_n).$$

Drugim rečima, preslikavanje γ zamenjuje u datom identitetu svaku promenljivu odgovarajućim konstantnim simbolom. Primetimo da je preslikavanje γ definisano sintaktički i da se term $t(g_0, \ldots, g_n)$ razlikuje od vrednosti $t[g_0, \ldots, g_n]$ terma t u valuaciji $(g_0, \ldots, g_n)$.

Sada ćemo definisati preslikavanje Γ koje svakom kvazi-identitetu $q \in Q(\mathcal{L})$ pridružuje uređenu trojku (G^q, R^q, i^q).

Definicija 6.7 Neka je $q \in Q(\mathcal{L})$ tako da je $q = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n \Rightarrow e$; $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $e \in \mathrm{Eq}(\mathcal{L})$ i neka je $X = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}, i_j \in \mathbb{N}$, skup svih promenljivih formule q. Tada, neka je $\Gamma(q) = (G^q, R^q, i^q)$, gde je $G^q = \{g_{i_0}, g_{i_1}, \ldots, g_{i_k}\}$, $R^q = \{\gamma(e_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$, $i^q = \gamma(e)$.

□

Iz definicije preslikavanja Γ se vidi da je $G^q \subseteq G^\infty$, $R^q \subseteq \mathrm{Eq}(\mathcal{L}_{G^q})$ i $i^q \in \mathrm{Eq}(\mathcal{L}_{G^q})$. Primetimo takođe da je Γ dobro definisano i da je "1-1"(do na poredak formula e_i u q). Dalje, Γ je *na* u sledećem smislu. Neka je (G, R) konačna prezentacija, a i identitet bez promenljivih na jeziku $\mathcal{L}_G$. Pretpostavimo da se svaki simbol iz G javlja u identitetima skupa $R \cup \{i\}$. Tada postoji kvazi-identitet $q \in Q(\mathcal{L})$ tako da je $\Gamma(q) = (G, R, i)$. Naime, ako je $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ onda možemo definisati $e = \gamma^{-1}(i)$, $e_k = \gamma^{-1}(r_k)$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ako je $q = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \Rightarrow e$, onda $\Gamma(q) = (G, R, i)$.

Dokaz ekvivalentnosti se zasniva na sledećoj lemi koja daje vezu između kvazi-identiteta q i uređene trojke (G^q, R^q, i^q).

Lema 6.1 Neka je $q \in Q(\mathcal{L})$, Θ skup formula od $\mathcal{L}$, i $\Gamma(q) = (G^q, R^q, i^q)$. Tada $\Theta \vdash q$ akko $\Theta \cup R^q \vdash i^q$.

Dokaz.

Videti [Ma 89].

□

Sada, za slučaj varijeteta možemo dokazati gore pomenutu ekvivalenciju.

Teorema 6.1 Neka je Θ skup identiteta na jeziku $\mathcal{L}$ i $K = \mathrm{mod}(\Theta)$. Tada je problem reči na prvom nivou za K ekvivalentan sa problemom kvazi-identiteta za K.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{A}$ univerzalan algoritam koji rešava problem reči za K na prvom nivou. Treba da konstruišemo algoritam $\mathcal{B}$ koji za svaki $q \in Q(\mathcal{L})$ odlučuje o tome da li je $K \models q$ ili nije. To je ekvivalentno sa pitanjem da li $\Theta \vdash q$ ili ne. Zbog prethodne leme, za algoritam $\mathcal{B}$ možemo uzeti sledeće:

1. Konstruisati skup R^q i identitet i^q.

2. Koristeći algoritam $\mathcal{A}$, odrediti da li je $\Theta \cup R^q \vdash i^q$. (Vidi Napomenu 6.1)

3. Ako je odgovor u 2. DA, onda $\mathcal{B}$ daje odgovor DA. Ako je u 2. NE, onda i $\mathcal{B}$ daje odgovor NE.

Obratno, neka je $\mathcal{B}$ algoritam koji rešava problem kvazi - identiteta za K. Treba da konstruišemo algoritam $\mathcal{A}$, koji za svaku konačnu prezentaciju (G, R) u K i za svaki identitet i od $\mathcal{L}_G$ bez promenljivih, daje odgovor da li je $\Theta \cup R \vdash i$ ili nije. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da se svi simboli iz G pojavljuju u $R \cup \{i\}$. Tada, zbog prethodne leme, za algoritam $\mathcal{A}$ možemo uzeti sledeće:

1. Za prezentaciju (G, R) i identitet i konstruisati (vidi diskusiju posle Definicije 7) kvazi-identitet $q \in Q(\mathcal{L})$ tako da je $\Gamma(q) = (G, R, i)$.

2. Koristeći algoritam $\mathcal{B}$, odrediti da li je $\Theta \vdash q$.

3. Ako je odgovor u 2. DA, onda $\mathcal{A}$ daje odgovor DA. Ako je odgovor u 2. NE, onda $\mathcal{A}$ daje odgovor NE.

□

Posledica 6.1 Za svaki varijetet V, nerešivost problema reči na prvom nivou implicira neodlučivost elementarne teorije.

Dokaz.

Direktna posledica prethodne teoreme i činjenice da za svaki varijetet V, $Q(V) \subseteq \mathrm{Th}(V)$. Naime, ako je W. P. I nerešiv za V, onda je nerešiv i problem kvazi - identiteta za V, pa je skup $Q(V)$ neodlučiv. Pošto je skup $Q(V)$ odlučiv relativno u odnosu na $\mathrm{Th}(V)$, onda je $\mathrm{Th}(V)$ neodlučiv.

□

Zaključak

Sada možemo kompletirati tabelu koja pokazuje međusobnu vezu problema odlučivosti (Tabela 4), kao i tabelu koja daje kontraprimere za slučajeve kada neka implikacija ne stoji. (Tabela 5).

ODLUČIVOST

$\Rightarrow$	Th(V)	Q(V)	Eq(V)	W.P.I	W.P.II
Th(V)		DA	DA	DA	DA
Q(V)	NE		DA	DA	DA
Eq(V)	NE	NE		NE	NE
W.P.I	NE	DA	DA		DA
W.P.II	NE	NE	NE	NE	

Tabela 4

ODLUČIVOST	KONTRAPRIMER
$Q(V) \not\Rightarrow \mathrm{Th}(V)$	komutativne semigrupe
$\mathrm{Eq}(V) \not\Rightarrow \mathrm{Th}(V)$	grupe
$\mathrm{Eq}(V) \not\Rightarrow Q(V)$	grupe
$\mathrm{Eq}(V) \not\Rightarrow$ W. P. I	grupe
$\mathrm{Eq}(V) \not\Rightarrow$ W. P. II	grupe
W. P. I $\not\Rightarrow \mathrm{Th}(V)$	komutativne semigrupe
W. P. II $\not\Rightarrow \mathrm{Th}(V)$	komutativne semigrupe
W. P. II $\not\Rightarrow Q(V)$	Mekler, Nelson,Shelah [MNS]
W. P. II $\not\Rightarrow \mathrm{Eq}(V)$	Wels, [MNS]
W. P. II $\not\Rightarrow$ W. P. I	Mekler, Nelson, Shelah [MNS]

Tabela 5

U Teoremi 6.1 dobili smo ekvivalentnu formu problema reči na prvom nivou koja se uklapa u opštu šemu problema odlučivosti: treba odlučiti da li neka rečenica pripada nekom skupu ili ne. U svojim radovima T. Evans daje drugi potreban i dovoljan uslov za rešivost problema reči na prvom nivou (videti [Ev 53]). Definiše se tzv. problem potapanja za varijetet K: Da li postoji algoritam za odlučivanje da li se konačna parcijalna algebra može potopiti u neku algebru iz K? Može se dokazati sledeće:

Teorema 6.2 (Evans) Problem potapanja za varijetet K je ekvivalentan sa problemom reči za K na prvom nivou.

Dokaz.

Videti [Ev 51], [Ev 53] ili [Gr 79].

□

U radu [CM 87] je uspostavljena veza izmedu problema reči na prvom nivou i nekih problema odlučivosti kod parcijalnih algebri.

6.3 Semigrupni pristup

Postoji nekoliko metoda dokazivanja neodlučivosti, medutim sve te metode možemo podeliti u dve grupe:

1. *direktne metode*, koje koriste najdublje rezultate teorije algoritama i rekurzivnih funkcija;

2. *indirektne metode*, koje koriste potapanja i interpretacije nekih osnovnih neodlučivih teorija.

Naravno, indirektne metode su se pojavile tek posle rada na razvijanju direktnih metoda (Gödel, Church, Rosser, Turing). Dokazi druge vrste uglavnom koriste potapanje prirodnih brojeva (metoda Tarskog) ili potapanje konačnih grafova (Eršhov i Rabin). Na primer, u [TMR 53] se koriste potapanja strukture $(N, +, \cdot, 1)$ da bi se dokazala neodlučivost elementarne teorije prstena i elementarne teorije grupa. J. Robinson je takode koristila potapanje prirodnih brojeva da bi dokazala neodlučivost elementarne teorije polja. Grzegorczyk je koristio potapanje klase konačnih grafova za dokazivanje neodlučivosti elementarne teorije distributivnih mreža. Rubinov rezultat o neodlučivosti teorije CA_1 (monadičkih algebri) u krajnjoj konsekvenci takode koristi potapanje klase konačnih grafova.

U literaturi takođe postoji nekoliko dokaza neodlučivosti koji koriste rezultat Posta i Markova o postojanju konačno prezentirane semigrupe sa nerešivim problemom reči. Na primer, R. Maddux je u [Mad 80] iskoristio tu činjenicu da bi dokazao neodlučivost jednakosne teorije CA_3. Ova metoda se može koristiti i u dokazu neodlučivosti jednakosne teorije klase K, ako je $IGs_\alpha \subseteq K \subseteq CA_\alpha$, za $3 \le \alpha \le \omega$ (videti [HMTII]). (Primetimo da je originalni dokaz Tarskog za $\alpha \ge 4$ duži i koristi pojam *pairing* elemenata iz teorije relacionih algebri).

"Prenos" problema reči na prvom nivou

Što se tiče problema reči za RA na prvom nivou, lako možemo dokazati sledeću činjenicu (implicitno se može naći u [Mal70]).

Lema 6.2 Ako su K_1 i K_2 klase algebri tako da je

(i) $K_1 \subseteq K_2$,

(ii) svaka algebra iz K_2 se može potopiti u neku algebru iz K_1,

onda se teorije kvazi-identiteta klasa K_1 i K_2 poklapaju.

Dokaz.

Pošto je $K_1 \subseteq K_2$ onda jasno $Q(K_2) \subseteq Q(K_1)$. Obratno, ako je $\varphi \in Q(K_1)$, dokažimo da je $\varphi \in Q(K_2)$. Pretpostavimo suprotno, da $\varphi \notin Q(K_2)$. Tada postoji algebra $\mathcal{A} \in K_2$ tako da je $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Pošto važi (ii), onda postoji algebra $\mathcal{B} \in K_1$ tako da se $\mathcal{A}$ može potopiti u $\mathcal{B}$. Ali $\mathcal{B} \models \varphi$ i φ je univerzalna formula, dakle mora $\mathcal{A} \models \varphi$ što je kontradikcija. Time smo dokazali i $Q(K_1) \subseteq Q(K_2)$.

□

Na osnovu Leme 6.2 i ranije dokazane ekvivalentnosti problema kvazi-identiteta i W. P. I (Teorema 6.1), imamo sledeće:

Posledica 6.2 Neka su K_1 i K_2 klase algebri tako da je $K_1 \subseteq K_2$ i svaka algebra iz K_2 se može potopiti u neku algebru iz K_1. Tada su problemi reči na prvom nivou za K_1 i K_2 ekvivalentni.

Dokaz.

Direktna posledica Leme 6.2 i Teoreme 6.1.

□

Na primer, ako je K_2 klasa semigrupa i K neka klasa algebri tako da klasa K_1 nekih redukata algebri iz K zadovoljava uslove Posledice 6.2, onda K ima nerešiv problem reči na prvom nivou.

Kao posledicu Tvrđenja 5. iz [Ma 86] i Posledice 6.2 dobijamo sledeće:

Posledica 6.3 Problem reči na prvom nivou za relacione algebre je nerešiv.

Dokaz.

U Tvrđenju 5 iz [Ma 86] dokazali smo da se svaka semigrupa može potopiti u semigrupni redukt neke relacione algebre. Dakle, ako za klasu K_1 uzmemo klasu svih semigrupa, a za K_2 klasu svih semigrupnih redukata klase RA, onda na osnovu Posledice 6.2 dobijamo da klasa K_2 ima nerešiv problem reči na prvom nivou, a to znači da isto važi i za klasu RA.

□

Jednakosna teorija i problem reči na drugom nivou

Primetimo da se dokaz za P6.3 razlikuje od dokaza te činjenice u [Ma 86]. Tamo smo zapravo u Tvrđenju 17 dokazali jaču propoziciju: da je W. P. II nerešiv za klasu RA. No, već je i ovo slabije tvrđenje, iskazano u Posledici 6.3, dovoljno da dobijemo nov, jednostavan dokaz teoreme Tarskog o neodlučivosti jednakosne teorije RA.

Teorema 6.3 (Tarski) Jednakosna teorija klase relacionih algebri je neodlučiva.
Dokaz.

Na osnovu T4.30 znamo da postoji algoritam kojim se za svaki kvazi - identitet koji važi na RA konstruiše ekvivalentan identitet. Iz toga sledi da su problem kvazi - identiteta i problem jednakosne teorije ekvivalentni u slučaju RA. S druge strane, u Teoremi 6. 1 smo dokazali da je za svaki varijetet problem kvazi - identiteta ekvivalentan sa W. P. I. Pošto je u slučaju RA problem reči na prvom nivou nerešiv (Posledica 6.3), onda je i jednakosna teorija klase RA neodlučiva.
□

Primetimo da se ovaj dokaz razlikuje od dokaza u [Ta 53] i u [TG 87]. Posledica 6.2 nam ništa ne govori o problemu reči na drugom nivou. Da bismo dobili rezultat o tome, potrebne su nam dodatne pretpostavke. Sledeća teorema nam daje, u slučaju da je klasa K_2 klasa svih semigrupa, nešto više od Posledice 6.2. Takođe, naredna teorema uopštava metode koje su korišćene u [Ma 86] u slučaju varijeteta RA na bilo koji varijetet univerzalnih algebri.

Teorema 6.4 Neka je V varijetet na jeziku $\mathcal{L}$, koji sadrži binarnu asocijativnu operaciju $*$. Ako se svaka semigrupa može potopiti u $*$– redukt neke algebre iz V, tada V ima nerešiv problem reči na drugom nivou.

Dokaz.

Označimo sa *SEM* varijetet svih semigrupa. Znamo da *SEM* ima nerešiv W. P. II. Neka je $\mathcal{S} = \mathcal{P}_{SEM}(G, R)$ Konačno prezentirana semigrupa sa nerešivim problemom reči. Neka je Σ skup definicionih identiteta varijeteta V tj. $V = \mathrm{mod}(\Sigma)$. Neka je $\hat{V}$ varijetet na jeziku $\mathcal{L}_G$ tako da je $\hat{V} = \mathrm{mod}(\Sigma U R)$, a $F_{\hat{V}}(\emptyset)$ slobodna algebra od $\hat{V}$ nad praznim skupom generatora. Konačno, neka je $\mathcal{A}$ redukt od $F_{\hat{V}}(\emptyset)$ do jezika $\mathcal{L}$.

Naš cilj je da dokažemo da je $\mathcal{A}$ konačno prezentirana algebra u V sa nerešivim problemom reči. Na osnovu Definicije 6.3 vidimo da je $\mathcal{A} = \mathcal{P}_V(G, R)$. Dokažimo da $\mathcal{A}$ ima nerešiv problem reči. Pretpostavimo suprotno tj. pretpostavimo da postoji algoritam koji za svaki identitet $u = v$ bez promenljivih, na jeziku $\mathcal{L}_G$, odlučuje da li je $\mathcal{A}_G \models u = v$. Tada bismo imali algoritam i za identitete na jeziku $\{*\} \cup G$. No, tada bi problem reči za $\mathcal{S}$ bio rešiv. Naime, možemo dokazati da za sve identitete $u = v$ na jeziku $\{*\} \cup G$ važi sledeće:

(1) $\qquad \mathcal{S}_G \models u = v$ akko $\mathcal{A}_G \models u = v$.

Dokažimo (1).

$$(\leftarrow).\ \mathcal{A}_G \models u = v \ \Rightarrow\ F_{\hat{V}}(\emptyset) \models u = v$$
$$\Rightarrow\ \hat{V} \models u = v$$
$$(2) \qquad \Rightarrow\ \Sigma \cup R \models u = v.$$

Pretpostavimo $\mathcal{S}_G \not\models u = v$. Zbog uslova teoreme, semigrupu $\mathcal{S}$ možemo potopiti u neku algebru $\mathcal{B} \in V$. Ako odgovarajuće elemente od $G \subseteq S$ označimo istim simbolima i u B onda imamo

$$\mathcal{B}_G \models R \ \text{ i } \ \mathcal{B}_G \not\models u = v.$$

Ovo znači da

$$\mathcal{B}_G \models \Sigma \cup R \quad \text{ali} \quad \mathcal{B}_G \not\models u = v$$

što je kontradikcija sa (2).

$(\rightarrow)$. $\mathcal{S}_G \models u = v$ onda (asocijativnost $+R$) $\models u = v$.

Pošto $\Sigma \models$ asocijativnost, sledi da $\Sigma \cup R \models u = v$.

Kako imamo da je $\mathcal{A} = \mathcal{P}_V(G, R)$, onda $\mathcal{A}_G \models \Sigma \cup R$ i $\mathcal{A}_G \models u = v$. Time smo dokazali (1), što znači da u slučaju pretpostavke da $\mathcal{A}$ ima rešiv problem reči dobijamo da bi i $\mathcal{S}$ imao rešiv problem reči. Dobijena kontradikcija dokazuje tvrđenje teoreme.

□

Napomena 6.3 Naravno, postoje varijeteti V sa binarnom asocijativnom operacijom $*$ tako da se ne može svaka semigrupa potopiti u $*$-redukt neke algebre iz V. Na primer takav varijetet je varijetet svih grupa. Takođe, postoje varijeteti V takvi da se svaka semigrupa može potopiti u $*$-redukt neke algebre iz V, ali $*$ nije asocijativna operacija na svim algebrama iz V. Na primer, za V možemo uzeti klasu svih grupoida.

□

Primetimo takođe da uslove T6.4 možemo oslabiti.

Teorema 6.5 Neka je V varijetet na jeziku $\mathcal{L}$, koji sadrži binarnu asocijativnu operaciju $*$. Ako se neka konačno prezentirana semigrupa sa nerešivim problemom reči može potopiti u $*$-redukt neke algebre iz V, tada V ima nerešiv problem reči na drugom nivou.

Dokaz.

Videti dokaz T6.4.

□

Tako, T6.4 je trivijalna posledica T6.5. Zašto smo ipak T6.4 iskazali i dokazali kao *teoremu*, a ne kao *posledicu*? Razlog je taj, što se u konkretnim slučajevima koje razmatramo kasnije koristi upravo T6.4. Teškoća koja se javlja prilikom namere da se koristi T6.5 jeste često nedostatak instrumenata da se provere uslovi T6.5. Semigrupe sa nerešivim problemom reči su "neuhvatljive" baš zbog nepostojanja algoritma da se proveri koja dva terma predstavljaju isti element u semigrupi.

Samim tim, često je vrlo teško dati odgovor na pitanje da li se jedna takva semigrupa može potopiti u $*$-redukt neke algebre iz datog varijeteta V.

Neki opšti uslovi pod kojima se data semigrupa može potopiti u neku drugu algebru (na bogatijem jeziku) slede iz poznate teoreme A. Maljceva o potapanju semigrupe u grupu.

Teorema 6.6 Semigrupa $\mathcal{S}=(S,\cdot)$ se može potopiti u neku grupu akko $\mathcal{S}$ zadovoljava sve kvazi-identitete na jeziku $\{\cdot\}$ koji su posledice aksioma grupa.

Dokaz.

$(\rightarrow)$ Neka je $\varphi: S\rightarrow G$ potapanje semigrupe $\mathcal{S}$ u neku grupu $\mathcal{G}$. Tada, trivijalno, kako su kvazi-identiteti univerzalne formule, $\mathcal{S}$ zadovoljava sve kvazi-identitete koje zadovoljava $\mathcal{G}$.

$(\leftarrow)$ Označimo sa Σ aksiome grupe, K varijetet grupa, i sa $\mathrm{Diag}(\mathcal{S})$ dijagram semigrupe $\mathcal{S}$ (tj. skup svih atomarnih formula i njihovih negacija na jeziku $\{\cdot\}\cup S$ koje važe na $\mathcal{S}$). Neka je $\mathcal{G}=\mathcal{P}_K(S,\mathrm{Diag}(\mathcal{S}))$ tj. grupa prezentirana sa $(S,\mathrm{Diag}(\mathcal{S}))$. Dokažimo da je preslikavanje $\varphi: S\rightarrow G$ definisano kao $\varphi(s)=s$, za sve $s\in S$, traženo potapanje. Kako $\mathcal{G}_S\models \mathrm{Diag}(\mathcal{S})$, onda je φ homomorfizam, pa je ostalo još da se dokaže da je φ injekcija. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje elementi $a,\ b\in S$ takvi da:

(1) $\quad \mathcal{S}_S\models a\neq b$ ali $\mathcal{G}_S\models a=b$.

Kako je $\mathcal{G}=\mathcal{P}_K(S,\mathrm{Diag}(\mathcal{S})_S)$ i $\mathcal{G}_S\models a=b$ onda po D6.3 (iii) sledi da

$$\Sigma\cup \mathrm{Diag}(\mathcal{S})\models a=b\ ,$$

tj. zbog potpunosti jednakosne logike $\Sigma\cup\mathrm{Diag}(\mathcal{S})\vdash a=b$. To znači da postoji konačno mnogo identiteta $e_1,e_2,\ldots,e_n$ na jeziku $\{\cdot\}\cup S$ bez promenljivih, takvih da

$$\mathrm{Diag}(\mathcal{S})\vdash e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_n \text{ i } \Sigma\vdash (e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_n)\Rightarrow a=b.$$

Zbog uslova teoreme imamo da tada

$$\mathcal{S}_S\models e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_n \Rightarrow a=b,$$

pa pošto $\mathcal{S}_S\models\mathrm{Diag}(\mathcal{S})$ i $\mathrm{Diag}(\mathcal{S})\vdash e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_n$ dobijamo $\mathcal{S}_S\models a=b$, što je kontradikcija sa (1). Time smo dokazali da je φ injekcija, pa se $\mathcal{S}$ stvarno potapa u grupu $\mathcal{G}$.

□

Primetimo da se T6.6 lako može uopštiti i za slučaj proizvoljna dva varijeteta V i K, gde je jezik $\mathcal{L}_1$ varijeteta V podskup jezika $\mathcal{L}_2$ varijeteta K.

Teorema 6.7 Neka su V i K varijeteti na jeziku $\mathcal{L}_1$ odnosno $\mathcal{L}_2$, takvi da je $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$. Tada se algebra $\mathcal{A} \in V$ može potopiti u neki ($\mathcal{L}_1$-redukt) algebre iz K akko $\mathcal{A}$ zadovoljava sve kvazi- identitete na jeziku $\mathcal{L}_1$ koji su posledice definicionih identiteta varijeteta K.

Dokaz.

Analogan dokazu T6.6.

□

Potapanje jedne algebre u drugu igra značajnu ulogu u problemima odlučivosti. Stoga ćemo se zadržati još malo na ovim pitanjima.

U vezi sa teoremom Maljceva

Ovaj deo teksta sadrži jedan zanimljiv pristup problemima potapanja. Iz dokaza teorema čitalac se upoznaje sa novom metodologijom i idejama koje vode ka rešavanju opštijih problema ovog tipa.

Autor ovog dela teksta je profesor Slaviša B. Prešić. Zbog celovitosti teksta ponovljene su neke definicije iz ranijih delova knjige. Napomenimo, da se u ovom tekstu umesto naziva *identitet* koristi naziv *jednakost* (*jednakosna formula*).

Ukratko iz jednakosne logike

Neka je $\mathcal{L}$ neki tip (jezik) algebri i X skup promenljivih. Sa $T_{\mathcal{L}}(X)$ označavamo skup svih odgovarajućih termova (videti D7.13). Tzv. *jednakosna logika jezika* $\mathcal{L}$ je formalna teorija čije

Formule su reči oblika $T_1 = T_2$, gde $T_1, T_2 \in T_{\mathcal{L}}(X)$

Aksioma je svaka formula oblika $T = T$

Pravila izvođenja su ($A, B, \ldots$ su ma koji članovi skupa $T_{\mathcal{L}}(X)$)

$$(\mathrm{Sim})\ \frac{A=B}{B=A}, \qquad (\mathrm{Tranz})\ \frac{A=B,\ B=C}{A=C}$$

$$(\text{Saglasnost} = \text{sa } f)\quad \frac{A_1 = B_1, \ldots, A_k = B_k}{f(A_1, \ldots, A_k) = f(B_1, \ldots, B_k)},$$

gde je $f \in \mathcal{L}$ ma koji operacijski znak dužine k

$$(\text{Pravilo o promenljivoj})\quad \frac{A = B[x_1, x_2, \ldots]}{A = B[t_1, t_2, \ldots]}$$

gde su $x_1, x_2, \ldots$ neke od promenljivih koje učestvuju u identitetu $A = B$, a $t_1, t_2, \ldots$ su njihove "zamene", ma koji članovi iz $T_{\mathcal{L}}(X)$. (Znači, po ovom pravilu promenljive se smeju zamenjivati ma kojim termima.)

Pojmovi *dokaz, dokaz iz hipoteza* se definišu na uobičajen način. (Definiciju jednakosne logike videti u Dodatku ove knjige.)

Važan slučaj upoznajemo najpre na jednom primeru.

Primer 6.4 Date su sledeće hipoteze

$$x * (y * z) = (x * y) * z, \quad a * b = c, \quad b * c = d, \quad c * c = c,$$

gde su a, b, c, d znaci konstanti (tj. operacijski znaci dužine 0). Na osnovu njih se lako dokazuje jednakost $a * d = c$. Evo jednog dokaza (koji se dopunom detalja lako može pretočiti u pravi formalni dokaz u jednakosnoj logici).

$$\begin{aligned} a * d &= a * (b * c) && \text{jer } b * c = d \text{ je hipoteza} \\ &= (a * b) * c && \text{po asocijativnom zakonu,} \\ &= c * c && \text{jer } a * b = c, \\ &= c && \text{jer } c * c = c. \end{aligned}$$

Dobijeni zaključak napišimo i ovako:

$$x * (y * z) = (x * y) * z, \quad a * b = c, \quad b * c = d, \quad c * c = c \ \vdash \ a * d = c.$$

Primetimo, što je bitno, da se hipoteze dele u dve grupe:

Jednakosti $a * b = c$, $b * c = d$, $c * c = c$ sadrže samo konstante i te konstante su "nove" u odnosu na preostale hipoteze (tj. ne učestvuju u njima), što je ovde samo jednakost $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Blagodareći toj okolnosti možemo ovako reći:

Uz hipotezu $x*(y*z)=(x*y)*z$, *za ma koje elemente* a, b, c, d važi:

Ako važe jednakosti $a*b=c$, $b*c=d$, $c*c=c$, onda važi jednakost $a*d=c$.

Drugim rečima, intuitivno možemo smatrati da:

Na osnovu hipoteze $x*(y*z)=(x*y)*z$ je dokaziv kvazi-identitet

$$A*B=C \wedge B*C=D \wedge C*C=C \Rightarrow A*D=C,$$

gde su A, B, C, D promenljive.

□

Taj primer je naveden da bi se lakše shvatio smisao naredne definicije:

Definicija 6.8 Neka su date izvesne jednakosti Σ na jeziku $\mathcal{L}$ i na istom jeziku uočimo kvazi-identitet

(∗) $\quad t_1=T_1 \wedge \ldots \wedge t_k=T_k \Rightarrow t=T$

čije su sve promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Neka su $a_1, \ldots, a_s$ u odnosu na $\mathcal{L}$ neke nove konstante. Zamenimo u $t_1, T_1, \ldots, t_k, T_k, t, T$ promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_s$ redom sa $a_1, \ldots, a_s$. Neka tako nastanu termi $t_1', T_1', \ldots, t_k', T_k', t', T'$. Tada kažemo da je kvazi-identitet (∗) jednakosna posledica jednakosti Σ ukoliko važi ovaj "sled"

$$\Sigma,\ t_1'=T_1',\ \ldots,\ t_k'=T_k' \vdash t'=T' .$$

□

Lep primer te vrste je kad želimo da iz aksioma grupe

AxGr $\quad x*e=x,\ x*x^{-1}=e,\ x*(y*z)=(x*y)*z$

izvedemo zakon skraćivanja:

$$x*y=x*z \Rightarrow y=z.$$

U duhu upravo rečenog valja ovako postupiti

Poći od hipoteza:

AxGr i jednakosti $a*b=c$

gde su a, b, c dogovorno znaci konstanti (koji ne učestvuju u jeziku grupe) i onda dokazati jednakost $b=c$.

Naravno, u praksi koristimo taj postupak (doduše bez isticanja nekih logičkih detalja).

Slobodna algebra jezika $\mathcal{L}$, nad jednakostima Σ, generisana skupom Γ

Reč dve o tom uobičajenom pojmu, zbog veze sa ostatkom teksta.

Neka su dati operacijski jezik $\mathcal{L}$, skup Σ izvesnih jednakosti (algebarskih zakona) i skup Γ izvesnih znakova konstanti.

Tada odgovarajuća slobodna algebra $\mathcal{F}_{\Sigma}^{\mathcal{L}}(\Gamma)$ kratko se može ovako opisati:

U skupu $T_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ svih konstantnih (tj. bez promenljivih) termova građenih iz $\mathcal{L}$ i Γ uočimo relaciju ρ

$$t_1 \rho t_2 \quad \text{akko} \quad \Sigma(T_{\mathcal{L}}(\Gamma)) \vdash t_1 = t_2$$

tj. t_1 je u relaciji ρ sa t_2 upravo ako jednakost $t_1 = t_2$ jednakosno sledi iz zakona Σ interpretiranih na skupu $T_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ (to znači promenljive "trče" po tom skupu).

Lako se dokazuje da je ρ relacija ekvivalencije saglasna sa svim operacijskim znacima iz $\mathcal{L}$.

Odgovarajuća količnička algebra, čiji članovi su oblika t/ρ tj. klase ekvivalencije, je pomenuta slobodna algebra $\mathcal{F}_{\Sigma}^{\mathcal{L}}(\Gamma)$.

Za tu algebru je bitno da se u njoj, slobodnije rečeno, poklapaju pojmovi "važivosti" i dokazivosti. Naime, ma koja jednakost u toj algebri je "gledljiva" u obliku

$$\text{izraz}_1\ (a_1/\rho,\ a_2/\rho, \ldots, a_k/\rho) = \text{izraz}_2\ (b_1/\rho,\ b_2, \ldots, b_l/\rho)$$

gde su izraz$_1$, izraz$_2$ ma koji izrazi (termi) jezika $\mathcal{L}$, s tim da njihovi osnovni sastavci (tj. term-jedinke) su izvesne klase

$$a_1/\rho,\ a_2/\rho, \ldots, a_k/\rho,\ b_1/\rho,\ b_2, \ldots, b_l/\rho$$

gde $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_l$ su članovi iz Γ. Međutim, po definiciji slobodne algebre gornja jednakost je ekvivalentna sa ovom

$$\text{izraz}_1(\ a_1, \ldots, a_k)/\rho = \text{izraz}_2(\ b_1, \ldots, b_l)/\rho$$

i to najzad sa ovim "sledom"

$$\Sigma(T_{\mathcal{L}}(\Gamma)) \vdash\ \text{izraz}_1(\ a_1, \ldots, a_k) = \text{izraz}_2(\ b_1, \ldots, b_l).$$

d jednakosti i različitosti imaju zajednički model ?

a su date ove jednakosne hipoteze

$$a=b,\ c=a,\ d=b,$$

njih još i ova "različitost" $c \neq d$ (znači jednakosnu logiku proširujemo dopuštajući će i različitosti). Da li ukupan skup hipoteza

$$a=b,\ c=a,\ d=b,\ c\neq d$$

model? Odgovor je *ne*, jer u tom primeru

Na osnovu datih jednakosti se *jednakosno* izvodi jednakost $c=d$ koji "se svađa" sa jednom od datih različitosti, odnosno baš sa različitošću $c \neq d$.

a nije mogla da nastupi takva "svađa" ? E, onda jedan odgovor daje sledeće čajno tvrđenje.

orema 6.8 (Jednakosti i različitosti imaju model)

Neka je Σ skup nekih jednakosti na jeziku $\mathcal{L}$, i neka je Raz skup izvesnih ličitosti oblika $c_1 \neq c_2$ gde su c_1, c_2 (iz $\mathcal{L}$) znaci konstanata. Tada skup $\Sigma\cup$Raz model ako i samo ako

Iz jednakosti Σ jednakosno ne sledi nikoja jednakost $c_1=c_2$ pri čemu različitost $c_1 \neq c_2 \in$ Raz.

az.

er $(\rightarrow)$ je trivijalan.

er $(\leftarrow)$:

Neka važi (ψ). Iz jezika $\mathcal{L}$ pokupimo sve konstante i tako napravimo skup Γ. Recimo, pominjani c_1,c_2 su njegovi članovi. Dalje, napravimo slobodnu algebru $\mathcal{F}_{\Sigma}^{\mathcal{L}}(\Gamma)$. Tvrdimo da je ona model za $\Sigma\cup$Raz. Za Σ jeste po svojoj definiciji. Uočimo ma koju različitost

$$c_1 \neq c_2$$

iz Raz. Da bi smo dokazali njeno važenje u $\mathcal{F}_{\Sigma}^{\mathcal{L}}(\Gamma)$ pretpostavimo suprotno, tj.

$$c_1/\rho = c_2/\rho$$

što je ekvivalentno sa $\Sigma \vdash c_1=c_2$. Dokaz se završava jer smo stigli do suprotnog od (ψ).

Navodimo jedan primer primene koji je veoma opšte prirode, odnosno koji sadrži čitavu novu metodologiju (većim delom Maljcevljevu).

Primer 6.5

Da li se grupoid $\mathcal{G} = (G, *)$ određen tablicom

$*$	a	b	c
a	b	b	c
b	b	a	c
c	c	c	a

može potopiti u dvo-grupoid jezika $\{*, \Delta\}$ koji zadovoljava ove zakone.

Σ: $x * (y \Delta z) = y \Delta (z * x)$, $\quad (x * y) \Delta (u * v) = (x \Delta y) * (u \Delta v)$?

(Dvo-grupoid koji zadovoljava i Σ zvaćemo Σ-*algebra*.)

Primetimo da su grupoid $\mathcal{G}$ i zakoni Σ izabrani skoro slučajno, jer oni nisu bitni za viđenje osnovne ideje.

Rasuđivanje: Rečenica

(Maljcev 1) $\quad$ *$\mathcal{G}$ se može potopiti u neku Σ- algebru*

je logički ekvivalentna sa

(Maljcev 2) $\quad$ *$\mathcal{G}$ se može proširiti u neku Σ-algebru,*

gde proširiti znači dopuna skupa G novim članovima, "naddefinisanje" operacije $*$ i definisanje nove operacije Δ.

Međutim, dalje rečenica (Maljcev 2) je ekvivalentna - *to je najbitniji deo* - sa rečenicom

(Maljcev 3) $\quad$ *Skup ovih jednakosti i različitosti*

(Deo 1) $\quad a * a = b, \quad a * b = b, \quad a * c = c$

$b * a = b, \quad b * b = a, \quad b * c = c$

$c * a = c, \quad c * b = c, \quad c * c = a$

(Deo 2) $\quad a \neq b, \quad a \neq c, \quad b \neq c$

(Deo 3) $\quad x * (y \Delta z) = y \Delta (z * x)$

$(x * y) \Delta (u * v) = (x \Delta y) * (u \Delta v)$

ima bar jedan model.

Primetimo da je (Deo 1) skup jednakosti koji opisuje tablicu datog grupoida $\mathcal{G}$. To je tzv. *pozitivni dijagram*, u oznaci $\mathrm{Diag}_+(\mathcal{G})$. (Deo 2) izražava različitost članova datog grupoida. (Unija delova 1 i 2 je tzv. *dijagram* tog grupoida. Slično se uvodi pojam pozitivnog dijagrama i dijagrama *za ma koju algebru nekog jezika* $\mathcal{L}$ i naravno u čitavom ovom izlaganju (u duhu Maljceva) ti pojmovi imaju najveći značaj.)

Tako smo očigledno došli "u blizinu" T6.8. Na osnovu njega dokazaćemo sledeće tvrđenje *Maljcevljevog tipa*.

Teorema 6.9 Grupoid $\mathcal{G}=(G, *)$ se može potopiti u neku Σ algebru akko važi:

(Maljcev 4) *Taj grupoid zadovoljava svaki, na jeziku* $\{*\}$, *kvazi-identitet koji je jednakosna posledica i* Σ.

Dokaz.

Smer ($\rightarrow$) je trivijalan. Da dokažemo smer ($\leftarrow$) pođimo od (Maljcev 3) i dokažimo da skup jednakosti i različitosti

(&) (Deo 1) $\cup$ (Deo 2) $\cup$ (Deo 3)

ima bar jedan model.

Pretpostavimo suprotno. Po T6.8 to znači da iz jednakosti u (&) sledi neka jednakost $c_1=c_2$ koji "se svađa" sa nekom različitošću iz (Deo 2) (tj. i c_1 i c_2 su međusobno različiti članovi polazne algebre). Da bismo odmah uvideli i opšti slučaj uočimo onda ovaj "sled" (*data algebra* je ovde grupoid $\mathcal{G}$)

$$\mathrm{Diag}_+(\text{date algebre}) \cup \Sigma \vdash c_1=c_2$$

koji je onda tačan. Zamišljeni dokaz jednakosti $c_1=c_2$ budući da je *konačan* sadrži samo konačno mnogo članova iz Diag. Recimo, to su ovi (namerno navodimo kao da je opšti slučaj):

$$a_1 * b_1 = d_1, \ldots, a_k * b_k = d_k.$$

Sledstveno imamo ovaj jednakosni sled

$$\Sigma, a_1 * b_1 = d_1, \ldots, a_k * b_k = d_k \vdash c_1 = c_2$$

Budući da a_1, b_1, $d_1, \ldots, a_k$, b_k, d_k, c_1, c_2 ne pripadaju jeziku $\{*, \Delta\}$ to na osnovu D6.8 zaključujemo da iz Σ sledi kvazi-identitet

$$A_1 * B_1 = C_1 \wedge \ldots \wedge A_k * B_k \Rightarrow C_1 = C_2$$

gde su $A_1, \ldots C_2$ promenljive. Po uslovu (Maljcev 4) polazna algebra mora da zadovolji tu formulu. Dokaz će se završiti ako dokažemo da je to nemoguće. Zaista, uočimo ovu zamenu promenljivih

$$A_1 \to a_1,\ B_1 \to b_1,\ D_1 \to d_1, \ldots\ A_k \to a_k,\ B_k \to b_k,\ D_k \to d_k,\ C_1 \to c_1,\ C_2 \to c_2.$$

Taj kvazi-identitet ne može važiti u toj tački jer u polaznoj algebri važe sve jednakosti $a_1 * b_1 = d_1, \ldots, a_k * b_k = d_k$, ali, uz to, važi i različitost $c_1 \neq c_2$. Kraj dokaza.

□

Zaključak

Nije teško videti da prethodno izloženi dokaz *uopšte ne zavisi od* posebnosti date tablice, tj. od date algebre kao ni od naloženih zakona Σ. Sledstveno skoro ponavljanjem gornjeg dokaza dobija se dokaz ovog opšteg stava Maljceva:

Teorema 6.10 Neka je $\mathcal{A}$ algebra jezika $\mathcal{L}$ i neka je Σ skup izvesnih jednakosti na izvesnom širem jeziku $\mathcal{L}'$. Tada, algebra $\mathcal{A}$ se može proširiti do neke Σ-algebre ako i samo ako algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava ovaj uslov:

Ona zadovoljava svaki, na jeziku $\mathcal{L}$, kvazi-identitet koji je jednakosna posledica jednakosti Σ.

□

Jedan poseban, ali istorijski veoma važan slučaj je kada je $\mathcal{A}$ data semigrupa, a Σ su aksiome grupe.

Neke posledice

Teorema 6.4 nam omogućava da dobijemo čitav niz rezultata o neodlučivosti na *uniforman način*. Na primer, ta teorema daje rezultate o nerešivosti problema reči na drugom nivou za neke klase koje su dobijene iz algebri binarnih relacija.

Neka je Ω neki skup operacija definisanih nad binarnim relacijama. Kao u Glavi 5, sa $\mathcal{Rel}(\Omega)$ označavamo klasu svih algebri izomorfnih algebrama čiji elementi su binarne relacije nekog skupa S, a skup fundamentalnih operacija je Ω. Elemente klase $\mathcal{Rel}(\Omega)$ zovemo *algebre binarnih relacija* (*sa skupom operacija* Ω).

Teorema 6.11 Neka je $\mathcal{R}el(\Omega)$ klasa svih algebri binarnih relacija sa skupom operacija Ω, gde Ω sadrži operaciju kompozicije dve relacije ($\circ$). Tada varijetet $HSP(\mathcal{R}el(\Omega))$ ima nerešiv problem reči na prvom i drugom nivou, kao i neodlučivu elementarnu teoriju.

Dokaz.

Pošto operacija $\circ$ kompozicije dve binarne relacije asocijativna, onda da bismo mogli primeniti prethodnu teoremu, dovoljno je dokazati da se svaka semigrupa može potopiti u $\circ$ – redukt neke algebre iz $\mathcal{R}el(\Omega)$.

Neka je $\mathcal{S}$ neka semigrupa. Pošto se svaka semigrupa može potopiti u semigrupu sa jedinicom, možemo pretpostaviti da $\mathcal{S}$ ima jedinicu. Za sve $s \in S$ definišemo $\rho_s = \{(x, x \cdot s) \mid x \in S\}$. Preslikavanje $\Psi : s \to \rho_s$ jeste traženo potapanje semigrupe $\mathcal{S}$ u $\circ$ – redukt algebre $(\mathcal{P}(\mathcal{S}^2), \Omega)$ iz $\mathcal{R}el(\Omega)$. Ψ je "1– 1" jer $\mathcal{S}$ sadrži jedinicu, a da je Ψ homomorfizam, dokazuje se direktnom proverom.

□

Tako, Teorema 6.5 nam daje nerešivost problema reči i problema kvazi-identiteta kao i neodlučivost elementarne teorije na primer za sledeće klase:

a) semigrupe binarnih relacija ($\Omega = \{ \circ \}$);

b) involutivne semigrupe binarnih relacija ($\Omega = \{ \circ , ^{-1} \}$);

c) (reprezentabilne) relacione algebre Tarskog ($\Omega = \{ \cup, \cap, -, \circ, ^{-1}, \Delta \}$);

d) relacione algebre Jonssona ($\Omega = \{ \cap, \circ, ^{-1}, \Delta \}$);

e) Kleenejeve algebre ($\Omega = \{ \cup, \emptyset, \circ, \Delta, ^{-1}, ^{rtc} \}$)

i tako dalje. (Neke od njih nemaju specijalno ime, recimo za $\Omega = \{ \cup, \circ \}$ ili $\Omega = \{ \cap, \circ \}$.)

Pomoću Teoreme 6.4 možemo dobiti nov dokaz za neke klasične teoreme o neodlučivosti. Na primer, možemo dokazati sledeće:

Teorema 6.12 a) Problem reči na drugom nivou za prstene je nerešiv.

b) Elementarna teorija prstena je neodlučiva. (Tarski)

Dokaz.

a) Poznato je (videti [Ku 63]) da se svaka semigrupa može potopiti u multiplikativni redukt nekog prstena. Na osnovu Teoreme 6.4 dobijamo nerešivost W. P. II.

b) Iz nerešivosti W. P. II sledi i nerešivost W. P. I, pa zbog Posledice 6.1 dobijamo neodlučivost elementarne teorije prstena.

□

Napominjemo da originalan dokaz činjenice b) koji je dao Tarski , koristi potapanje strukture prirodnih brojeva. Činjenicu a) iz prethodne teoreme možemo iskoristiti da dokažemo sledeće:

Posledica 6.4 Neki varijeteti modula imaju neodlučivu jednakosnu teoriju.

Dokaz.

Poznato je da se svaki prsten $\mathcal{R} = (R,+,\cdot,0)$ može posmatrati kao $\mathcal{R}$-modul $\mathcal{M} = (R,+,\cdot,0,(f_r)_{r\in R})$, gde je $f_r(x) = r\cdot x$ za sve $x \in R$.

Pošto se svaki prsten može potopiti u prsten sa jedinicom (videti [Ku 63]) možemo pretpostaviti da $\mathcal{R}$ ima jedinicu. Svakoj jednakosti među rečima koje od operacijskih simbola sadrže samo množenje, odgovara jedan identitet u $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{R} \models a_1 a_2 \dots a_n = b_1 b_2 \dots b_m \text{ akko}$$

$$\mathcal{M} \models \forall x(f_{a_1} f_{a_2} \cdots f_{a_n}(x) = f_{b_1} f_{b_2} \cdots f_{b_m}(x)).$$

Ako specijalno za $\mathcal{R}$ uzmemo neki prsten sa nerešivim problemom reči (videti Teoremu 6.6 a)), onda će jednakosna teorija odgovarajućeg modula $\mathcal{M}$ biti neodlučiva. Isto važi i za jednakosnu teoriju varijeteta $HSP(\mathcal{M})$.

□

Upravo ideja iz dokaza Posledice 6.4 može se iskoristiti u slučaju Kleenejevih i dinamičkih algebri.

Kleenejeve i dinamičke algebre

Pojmove Kleenejeve i dinamičke algebre smo definisali u 5. delu knjige (D5.6 odnosno D5.11). Na osnovu T6.4 možemo dokazati sledeće:

Teorema 6.13 Problem reči na drugom nivou za varijetet Kleenejevih algebri je nerešiv. Isto važi za varijetet $\check{}$- slobodnih i *- slobodnih Kleenejevih algebri. Ti varijeteti imaju i neodlučivu elementarnu teoriju.

Dokaz.

Neka je $\Omega=\{\cup,\emptyset,\circ,\Delta,^{-1},^{rtc}\}$. Tada, klasa svih Kleenejevih relacionih algebri jeste klasa $\mathcal{R}el(\Omega)$ iz Teoreme 6.5. Klasa svih Kleenejevih algebri jeste $HSP(\mathcal{R}el(\Omega))$. Tako, naše tvrdenje sledi iz Teoreme 6.5.

□

Naš cilj je sada da prenesemo rezultate neodlučivosti sa Kleenejevih algebri na dinamičke algebre. Iz Teoreme 6.7 znamo da postoji Kleenejeva algebra $\mathcal{K}_o$ sa nerešivim problemom reči. Prva ideja koja se nameće jeste da se posmatra neka dinamička algebra $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_o,F_a\,(a\in K_o))$ tj. neka dinamička algebra sa operatorima koji su indeksirani elementima te Kleenejeve algebre $\mathcal{K}_o$. Ali, iz dokaza Teoreme 6.7 je jasno, da ta Kleenejeva algebra $\mathcal{K}_o$ nije Kleenejeva *relaciona* algebra. Za takve apstraktne Kleenejeve algebre ne znamo kako treba definisati operatore $F_a\,(a\in K_o)$ tako da važe uslovi Teoreme 5.21, tj. tako da $\mathcal{B}$ postane dinamička algebra. Zato, ako hoćemo da iskoristimo nerešivost problema reči za Kleenejeve algebre, onda to moramo činiti na drugi način.

Teorema 6.14 Neki varijeteti dinamičkih algebri imaju neodlučivu jednakosnu teoriju.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{S}$ neka semigrupa sa nerečivim problemom reči, $\mathcal{S}=\mathcal{P}_{SEM}(G,R)$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da $\mathcal{S}$ ima jedinicu e. Neka je

$$\mathcal{T}r(\mathcal{S})=\{f_s\mid s\in S,\ f_s \text{ je leva translacija u } \mathcal{S}\},(f_s(x)=s\cdot x,\ \forall x\in\mathcal{S})$$

Tada je $\mathcal{T}r(\mathcal{S})=(Tr\,(\mathcal{S}),\circ\,)$ semigrupa koja je izomorfna sa $\mathcal{S}$. Neka je $G'=\{f_g{:}g\in G\}$. Znamo da svaki element iz $Tr(\mathcal{S})$ oblika $f_{x_1}\circ f_{x_2}\circ\ldots\circ f_{x_n}$ za neke $x_1,x_2,\ldots,x_n\in G$, jer je G' skup generatora za $\mathcal{T}r(\mathcal{S})$. Takođe, ako

$$x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_k\in G \quad \text{i} \quad x_1x_2\ldots x_n=y_1y_2,\ldots,y_k\in R$$

onda odgovarajući identitet $f_{x_1}\circ f_{x_2}\circ\ldots\circ f_{x_n}=f_{y_1}\circ\ldots\circ f_{y_k}$ važi u $\mathcal{T}r(\mathcal{S})$. Zbog izomorfizma semigrupe $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}r(\mathcal{S})$, skup

$$R' = \{ f_{x_1} \circ f_{x_2} \circ \ldots \circ f_{x_n} = f_{y_1} \circ \ldots \circ f_{y_k} : x_1 \ldots x_n = y_1 \ldots y_k \in R \}$$

jeste skup definicionih relacija za $\mathcal{T}r(\mathcal{S})$. Semigrupa $\mathcal{T}r(\mathcal{S})$ je ustvari prezentirana sa (G', R') i ima nerešiv problem reči.

Posmatrajmo sada u Kleenejevoj relacionoj algebri $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ podalgebru generisanu sa $Tr(\mathcal{S})$. Označimo tu algebru sa $\psi(\mathcal{S})$. Primetimo da je $\psi(\mathcal{S})$ generisano i skupom G', pa je $\mathcal{T}r(\mathcal{S})$ konačno generisano. Medutim, ne znamo da li je $\psi(\mathcal{S})$ konačno prezentirana u varijetetu Kleenejevih algebri. Zato nema smisla postaviti pitanje rešivosti problema reči za $\psi(\mathcal{S})$.

Medutim, mi možemo posmatrati samo one elemente iz $\psi(\mathcal{S})$ koji su u $\mathcal{T}r(\mathcal{S})$. Ako su dve reči $f_{x_1} \circ f_{x_2} \circ \ldots \circ f_{x_n}$ i $f_{y_1} \circ f_{y_2} \ldots \circ f_{y_k}$ iz $Tr(\mathcal{S})$, jednake u $\mathcal{T}r(\mathcal{S})$, onda su one jednake i u $\psi(\mathcal{S})$ i obratno. Tako, ne postoji algoritam koji bi za bilo koje dve reči

$$f_{x_1} \circ f_{x_2} \circ \ldots \circ f_{x_n},\ f_{y_1} \circ f_{y_2} \circ \ldots \circ f_{y_k} \quad (x_i, y_j \in G)$$

odlučivao da li je

$$\psi(\mathcal{S})_{G'} \models f_{x_1} \circ f_{x_2} \circ \ldots \circ f_{x_n} = f_{y_1} \circ f_{y_2} \circ \ldots \circ f_{y_k}$$

ili nije, jer to važi akko

$$\mathcal{T}r(\mathcal{S})_{G'} \models f_{x_1} \circ f_{x_2} \circ \ldots \circ f_{x_n} = f_{y_1} \circ f_{y_2} \circ \ldots \circ f_{y_k},$$

a u $\mathcal{T}r(\mathcal{S})$ takav algoritam ne postoji.

Konstruišimo sada, polazeći od Kleenejeve relacione algebre

$$\psi(\mathcal{S}) = (\psi(S), \cup, \emptyset, \circ, \Delta, {}^{-1}, {}^{rtc})$$

multi- unarnu poli-algebru

$$\pi(\mathcal{S}) = (S, R_\sigma (\sigma \in \psi(S)))$$

gde za unarne poli-operacije $R_\sigma : S \to \mathcal{P}(S)$ uzimamo $R_\sigma = \{ y \in S \mid (x, y) \in \sigma \}$. Zbog Teoreme 5.21 mi znamo da je algebra

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}) = \mathcal{C}m(\pi(\mathcal{S})) = (\mathcal{P}(S), \cup, \cap, -, \emptyset, S, \widetilde{R}_\sigma (\sigma \in \psi(S)))$$

dinamička algebra. Naravno, preslikavanja $\widetilde{R}_\sigma : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ su definisana kao

$$\widetilde{R}_\sigma(X) = \{ y \in S \mid (\exists x \in X)(x, y) \in \sigma \}.$$

Pošto je $G' \subseteq \psi(S)$, onda za sve $f_g \in G'$, R_{f_g} je operator u $\mathcal{D}(\mathcal{S})$. Takođe, svaki $\tilde{R}_{f_{x_1}} \circ \tilde{R}_{f_{x_2}} \circ \ldots \circ \tilde{R}_{f_{x_n}}$ $(f_{x_i} \in G')$ jeste operator u $\mathcal{D}(\mathcal{S})$. Zbog aksiome (iii) u definiciji dinamičke algebre (Def. 5.11) i zbog činjenice da je $\mathcal{S} \cong \mathcal{T}z(\mathcal{S})$ imamo da za sve $X \subseteq S$ važi

$$(\tilde{R}_{f_{x_1}} \circ \ldots \circ \tilde{R}_{f_{x_n}})(X) = \tilde{R}_{f_{x_1} \circ \ldots \circ f_{x_n}}(X) = \tilde{R}_{f_{x_1 \ldots x_n}}(X).$$

Zbog toga, ako je $\mathcal{S}_G \models x_1 x_2 \ldots x_n = y_1 y_2 \ldots y_k$ onda

$$\mathcal{T}z(\mathcal{S})_{G'} \models f_{x_1} \circ f_{x_2} \circ \ldots \circ f_{x_n} = f_{y_1} \circ f_{y_2} \circ \ldots \circ f_{y_k}$$

pa je $\mathcal{D}(\mathcal{S}) \models \tilde{R}_{f_{x_1 \ldots x_n}}(X) = \tilde{R}_{f_{y_1 \ldots y_k}}(X)$.

Obratno, ako $\mathcal{S}_G \not\models x_1 x_2 \ldots x_n = y_1 y_2 \ldots y_k$, onda

$$\mathcal{T}z(\mathcal{S})_{G'} \not\models f_{x_1 x_2 \ldots x_n} = f_{y_1 y_2 \ldots y_k}.$$

Tako ni identitet $\tilde{R}_{f_{x_1 x_2 \ldots x_n}}(X) = \tilde{R}_{f_{y_1 y_2 \ldots y_k}}(X)$ ne važi u $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ jer

$$\tilde{R}_{f_{x_1 x_2 \ldots x_n}}(\{e\}) = \{y \in S \mid (e, y) \in f_{x_1 x_2 \ldots x_n}\} = \{x_1 x_2 \ldots x_n\}$$
$$\tilde{R}_{f_{y_1 y_2 \ldots y_k}}(\{e\}) = \{y \in S \mid (e, y) \in f_{y_1 y_2 \ldots y_k}\} = \{y_1 y_2 \ldots y_k\}.$$

Dakle, za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k \in G$

$$\mathcal{S}_G \models x_1 x_2 \ldots x_n = y_1 y_2 \ldots y_k \quad \text{akko}$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{S}) \models \tilde{R}_{f_{x_1 \ldots x_n}}(X) = \tilde{R}_{f_{y_1 \ldots y_k}}(X).$$

To znači da ne postoji algoritam koji odlučuje o tome koji identitet važi u $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ a koji ne. Tako, $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ ima neodlučivu jednakosnu teoriju, pa i varijetet *HSP*($\mathcal{D}(\mathcal{S})$) ima neodlučivu jednakosnu teoriju.

□

7. DODATAK

Elementi univerzalne algebre

Možemo reći da je Univerzalna algebra (kao deo Algebre) nastala tridesetih godina ovog veka zahvaljujući, uglavnom, nekolicini matematičara koji su uočili zajedničke koncepte, konstrukcije i rezultate u prividno nezavisnim oblastima algebre, a pre svega u *teoriji grupa, prstena i polja*. Potreba za izgradnjom jedne *sveobuhvatne teorije* pojavila se naročito posle objavljivanja radova matematičara A.N. Whitheada, E. Noether, W. Krulla, B.L. Van der Waerdena, E. Artina i drugih. Jedna od mogućih realizacija te ideje o sveobuhvatnoj teoriji jeste *univerzalna algebra*.

Prvi rezultati iz univerzalne algebre dobijeni su u radovima G. Birkhoffa o slobodnim strukturama, o mrežama podalgebri i varijeteta. Za kasniji razvoj univerzalne algebre zaslužni su mnogi, a pre svega matematičari G. Grätzer, P. Cohn, B. Jónsson, C.S. Peirce . Nov zalet razvoju univerzalne algebre dali su rezultati iz logike koji su dobijeni u radovima L. Löwenheima, T. Skolema, K. Gödela a kasnije i A. Maljceva, L. Henkina, A. Robinsona, D. Monka i A. Tarskog.

Na ovom mestu mi ćemo izneti samo nekoliko najosnovnijih pojmova i konstrukcija univerzalne algebre.

Izomorfizam i homomorfizam

Pre nego što definišemo pojam izomorfizma, napomenimo da ćemo u daljem tekstu štampanim velikim slovom označavati nosač algebre, a odgovarajućim pisanim velikim slovom samu algebru. Tako, ako drugačije nije naglašeno, podrazumevaćemo da algebre $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E} \ldots$ imaju redom nosače $A, B, C, D, E \ldots$.

Definicija 7.1 Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dve algebre istog tipa $\mathcal{F}$. Tada za funkciju $\varphi : A \to B$ kažemo da je *izomorfizam iz* $\mathcal{A}$ *u* $\mathcal{B}$ ako je φ bijekcija iz A u B i za sve $f \in \mathcal{F}_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ važi

$$\varphi(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)).$$

Kažemo da je $\mathcal{A}$ *izomorfna* sa $\mathcal{B}$ (u oznaci $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) ako postoji izomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$. Činjenicu da je φ neki izomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ćemo zapisivati kao "$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je izomorfizam".

□

Primetimo da ako je $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, onda važi i $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$, tako da je opravdano u tom slučaju reći "algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ *su izomorfne*". Kako je kompozicija bijekcija ponovo bijekcija, zaključujemo da iz $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ i $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$ sledi $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$.

Pojam izomorfizma je jedan od fundamentalnih pojmova algebre. Po široko prihvaćenom mišljenju, zadatak algebre je izučavanje onih osobina algebre (tzv. *algebarskih osobina*) koje su invarijantne (nepromenljive) u odnosu na izomorfizme. Algebristi često ne prave razliku među izomorfnim algebrama. Naravno, izomorfne algebre ne moraju biti *potpuno iste*, njihovi elementi mogu imati različite (unutrašnje) osobine, ali te osobine su na "nižem nivou" i izomorfizam ih "ne oseća". Izomorfne algebre imaju iste algebarske osobine i u tom smislu treba shvatiti i frazu *jednaki do na izomorfizam*.

Do homomorfizma dolazimo "oslabljenjem" pojma izomorfizma.

Definicija 7.2 Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dve algebre istog tipa $\mathcal{F}$. Za preslikavanje $\varphi : A \to B$ kažemo da je *homomorfizam iz* $\mathcal{A}$ *u* $\mathcal{B}$ ako za sve $f \in \mathcal{F}_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ važi

$$\varphi(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)).$$

U tom slučaju pišemo "$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je homomorfizam". Ako je pored toga φ i sirjekcija, onda za $\mathcal{B}$ kažemo da je *homomorfna slika od* $\mathcal{A}$, a za φ kažemo da je *epimorfizam*.

Ako je homomorfizam φ preslikavanje "1-1" onda za φ kažemo da je *monomorfizam* ili *potapanje*. *$\mathcal{A}$ se potapa u $\mathcal{B}$* ako postoji monomorfizam $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$. U slučaju da je $\mathcal{A}=\mathcal{B}$, homomorfizam φ zovemo *endomorfizam*, a ako je φ izomorfizam, zovemo ga *automorfizam*.

□

Teorema 7.1 Neka su $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $\psi:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ homomorfizmi. Tada je kompozicija $\varphi\circ\psi$ homomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{C}$. Ako su φ i ψ izomorfizmi, onda je i $\varphi\circ\psi$ izomorfizam.

Dokaz.

Sledi direktno po definiciji homomorfizma i izomorfizma.

□

Podalgebre i poduniverzumi

Definicija 7.3 Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dve algebre istog tipa $\mathcal{F}$. Za $\mathcal{B}$ kažemo da je *podalgebra od $\mathcal{A}$* (u oznaci $\mathcal{A} < \mathcal{B}$) ako je $B\subseteq A$ i sve fundamentalne operacije algebre $\mathcal{B}$ su restrikcije odgovarajućih operacija algebre $\mathcal{A}$, tj. za sve funkcijske simbole $f\in\mathcal{F}_n$ važi $f^{\mathcal{B}}=f^{\mathcal{A}}|_{B^n}$. *Poduniverzum* od $\mathcal{A}$ jeste svaki podskup B skupa A koji je zatvoren u odnosu na fundamentalne operacije algebre $\mathcal{A}$, tj. ako je $f\in\mathcal{F}_n$, $a_1,a_2,\ldots,a_n\in B$ onda je $f^{\mathcal{A}}(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in B$.

□

Naravno, ako je $\mathcal{B}<\mathcal{A}$, onda je B poduniverzum od $\mathcal{A}$; prazan skup može da bude poduniverzum ali nikad nije nosač podalgebre. Ako $\mathcal{A}$ ima konstante, onda ih svaki poduniverzum od $\mathcal{A}$ sadrži.

Označimo sa $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ skup svih poduniverzuma od $\mathcal{A}$. Tada se može dokazati sledeća teorema:

Teorema 7.2 Parcijalno uređen skup $\mathcal{S}ub(\mathcal{A})=(\mathrm{Sub}(\mathcal{A}),\subseteq)$ je kompletna mreža.

Dokaz.

Nije teško videti da za $B,C\in\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$ važi:

$$\inf(\{B,C\})=B\cap C \quad \text{i} \quad \sup(\{B,C\})=\bigcap\{D\in\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) \mid B\subseteq D \wedge C\subseteq D\}.$$

Može se dokazati da je infimum neprazne familije poduniverzuma presek te familije, dok se supremum dobija kao presek familije onih poduniverzuma koji sadrže sve elemente date familije, tj. ako je $I \neq \emptyset$, $A_i \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A})$, onda

$$\inf(\{A_i \mid i \in I\}) = \bigcap \{A_i \mid i \in I\}, \quad \sup(\{A_i \mid i \in I\}) = \bigcap \{B \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}) \mid \bigcup \{A_i \mid i \in I\} \subseteq B\})$$

□

Ako je $\mathcal{A}$ algebra i $X \subseteq A$, onda *algebra generisana sa* X (u oznaci $\langle X \rangle_{\mathcal{A}}$) jeste *najmanja podalgebra algebre* $\mathcal{A}$ *čiji nosač sadrži skup* X tj.

$$\langle X \rangle_{\mathcal{A}} = \bigcap \{A_i \mid \mathcal{A}_i \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}) \wedge X \subseteq A_i \}.$$

Ako ne može doći do zabune, onda se umesto $\langle X \rangle_{\mathcal{A}}$ piše samo $\langle X \rangle$.

Interesanto je da se može dokazati na neki način obrat T1.15 , koja kaže da se *sve* tzv. *algebarske mreže* (specijalne kompletne mreže) mogu dobiti kao mreže poduniverzuma neke algebre:

Teorema 7.3 (Birkhoff, Frink)

Ako je $\mathcal{L}$ algebarska mreža, onda postoji algebra $\mathcal{A}$ tako da je $\mathcal{L} \cong \mathcal{S}ub(\mathcal{A})$.

Dokaz.

Videti [BS 81].

□

Sledeća teorema pokazuje da, grubo rečeno, homomorfizam "čuva podalgebre".

Teorema 7.4 Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam. Tada je homomorfna slika nekog poduniverzuma od $\mathcal{A}$ poduniverzum od $\mathcal{B}$. Kompletna inverzna slika nekog poduniverzuma od $\mathcal{B}$ je poduniverzum od $\mathcal{A}$.

Dokaz.

Direktno iz definicije homomorfizma i poduniverzuma.

□

Kongruencije

Definicija 7.4 Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$ i ρ relacija ekvivalencije skupa A. Za ρ kažemo da je *kongruencija na* $\mathcal{A}$ ako se ρ slaže sa svim fundamentalnim operacijama algebre $\mathcal{A}$, tj. ako zadovoljava sledeći *uslov saglasnosti* (*kompatibilnosti*):

Za svaki funkcijski simbol $f \in \mathcal{F}_n$, i elemente $a_i, b_i \in A$ $(1 \leq i \leq n)$, ako $a_i \rho b_i$ za sve $i, 1 \leq i \leq n$, onda važi $f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \rho f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Skup svih kongruencija na $\mathcal{A}$ obeležavamo sa $\mathrm{Con}(\mathcal{A})$.

□

Na primer, dijagonalna relacija Δ_A (tj. relacija "$=$" na A) i puna relacija A^2 su kongruencije proizvoljne algebre $\mathcal{A}$.

Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam. *Jezgro od* φ (u oznaci $\ker\varphi$) jeste relacija skupa A definisana sa: $\ker\varphi = \{(x,y) \in A^2 \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}$. Sledeća teorema daje jednu vezu izmedu homomorfizama i kongruencija.

Teorema 7.5 Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam. Jezgro $\ker\varphi$ jeste kongruencija na $\mathcal{A}$.

Dokaz.

Direktno se dokazuje da je $\ker\varphi$ relacija ekvivalencije skupa A. Dalje, neka su $(a_i, b_i) \in \ker\varphi$, $1 \leq i \leq n$, $f^{\mathcal{A}}$ n-arna operacija algebre $\mathcal{A}$. Tada

$$\begin{aligned}\varphi(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) &= f^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)) \\ &= f^{\mathcal{B}}(\varphi(b_1), \varphi(b_2), \ldots, \varphi(b_n)) \\ &= \varphi(f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)),\end{aligned}$$

pa je $(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)) \in \ker\varphi$, što je trebalo da se dokaže.

□

Teorema 7.6 Neka je $\mathcal{A}$ algebra. Parcijalno ureden skup $(\mathrm{Con}(\mathcal{A}), \subseteq)$ jeste kompletna mreža.

Dokaz.

Može se dokazati da je infimum neprazne familije kongruencija algebre $\mathcal{A}$ presek te familije, dok se supremum dobija kao presek familije onih kongruencija algebre $\mathcal{A}$

koje sadrže sve elemente date familije, tj. ako je $I \neq \emptyset$, $\rho_i \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$, onda

$$\inf(\{\rho_i \mid i \in I\}) = \bigcap\{\rho_i \mid i \in I\}, \quad \sup(\{\rho_i \mid i \in I\}) = \bigcap\{\rho \in \mathrm{Con}(\mathcal{A}) \mid \bigcup\{\rho_i \mid i \in I\} \subseteq \rho\}).$$

Tako, $\inf(\{\rho, \sigma\}) = \rho \cap \sigma$ i $\sup(\{\rho,\sigma\}) = \bigcap\{\delta \in \mathrm{Con}(\mathcal{A}) \mid \rho \subseteq \delta \wedge \sigma \subseteq \delta\}$.

□

Primetimo da je mreža $\mathcal{C}on(\mathcal{A}) = (\mathrm{Con}(\mathcal{A}), \wedge, \vee)$, gde su $\wedge$ i $\vee$ indukovane mrežne operacija (infimum i supremum), *podmreža* mreže svih ekvivalencija skupa A. Spomenimo, takođe, da su god. 1963. G.Grätzer i E.T. Scmidt dokazali teoremu analognu Teoremi Birkhoffa i Frinka:

Teorema 7.7 (Grätzer, Schmidt)

Za svaku algebarsku mrežu $\mathcal{L}$ postoji algebra $\mathcal{A}$ tako da je $\mathcal{L} \cong \mathcal{C}on(\mathcal{A})$.

Dokaz.

Videti [Gr 79].

□

Izučavajući mreže kongruencija raznih algebri, može se primetiti da one često zadovoljavaju neke mrežne identitete. Na primer, mreža kongruencija proizvoljne mreže zadovoljava zakon distributivnosti, dok na mreži kongruencija proizvoljne grupe (ili prstena) važi modularni zakon.

Definicija 7.5 Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je *kongruencijski distributivna* (*kongruencijski modularna*) ako je mreža $\mathcal{C}on(\mathcal{A})$ distributivna (odnosno modularna). Ako su $\rho, \sigma \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$ i važi $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$, za ρ i σ kažemo da su *permutabilne*. $\mathcal{A}$ je *kongruencijski permutabilna* ako je svaki par kongruencija na $\mathcal{A}$ permutabilan. Klasa algebri K je *kongruencijski distributivna, kongruencijski modularna*, odnosno *kongruencijski permutabilna* ako svaka algebra iz K ima odgovarajuću osobinu.

□

Može se dokazati da je u kongruencijski permutabilnoj algebri $\mathcal{A}$ supremum dve kongruencije upravo njihova kompozicija. U tom slučaju algebra $\mathcal{A}$ je i kongruencijski modularna. Kako je svaka distributivna mreža ujedno i modularna, sledi da je svaka kongruencijski distributivna algebra i kongruencijski modularna. (Za dokaze navedenih tvrđenja videti recimo [BS 81] ili [Gr 79].)

Faktor - algebra

Pojam faktor- algebre je usko povezan sa pojmovima homomorfizma i kongruencije.

Definicija 7.6 Neka je ρ kongruencija algebra $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$. *Faktor-algebra od* $\mathcal{A}$ *po* ρ (u oznaci $\mathcal{A}/\rho$) jeste algebra tipa $\mathcal{F}$ sa nosačem A/ρ čije fundamentalne operacije zadovoljavaju uslov

$$f^{\mathcal{A}/\rho}(a_1/\rho,\ldots,a_n/\rho)=f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)/\rho$$

za sve $f\in\mathcal{F}_n$, $a_1,a_2,\ldots,a_n\in A$.

□

Može se dokazati (koristeći uslov kompatibilnosti za ρ) da su tako definisane operacije $f^{\mathcal{A}/\rho}$ *dobro definisane*, tj. da ne zavise od izbora predstavnika klasa a_i/ρ, $1\le i\le n$.

Neka je $\mathcal{A}$ algebra, $\rho\in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$. Preslikavanje $nat\,\rho$: $A\to A/\rho$ koje svaki element $a\in A$ preslikava na "svoju klasu" a/ρ nazivamo *prirodno preslikavanje.*

Teorema 7.8 Prirodno preslikavanje algebre u faktor - algebru jeste epimorfizam.

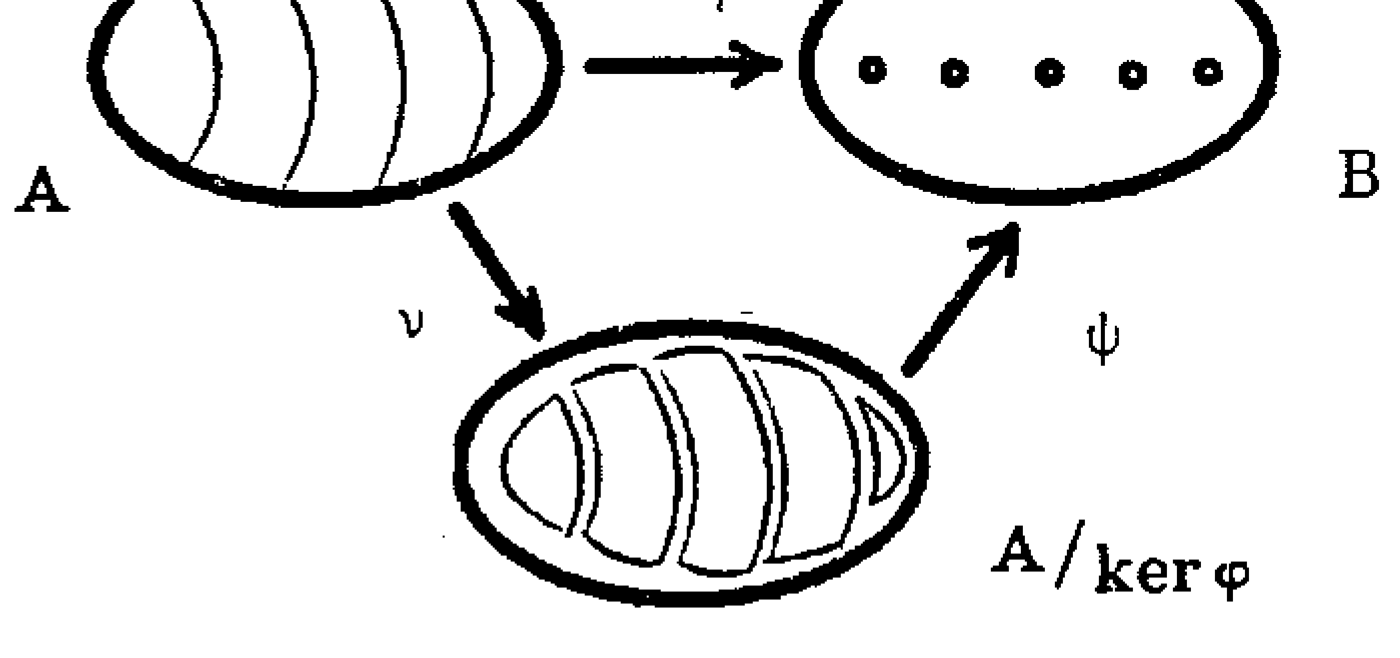
Dokaz.

Direktno po definiciji homomorfizma, prirodnog preslikavanja i operacija u faktor algebri.

□

Prirodno preslikavanje $nat\,\rho:\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\rho$ zovemo često i *prirodni homomorfizam.*

Teorema 7.9 (Teorema o homomorfizmu) Neka je $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ epimorfizam, i neka je $\nu:\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\ker\varphi$ prirodni homomorfizam. Tada postoji izomorfizam $\psi:\mathcal{A}/\ker\varphi\to\mathcal{B}$ tako da je $\varphi=\nu\circ\psi$



Dokaz.

Definišimo $\psi : A/\ker\varphi \to B$ sa $\psi(a/\ker\varphi) = \varphi(a)$. Tada se lako dokazuje da je ψ dobro definisano, da je bijekcija i da je homomorfizam iz $\mathcal{A}/\ker\varphi$ u $\mathcal{B}$. Jednakost $\varphi = \nu \circ \psi$ se takođe lako dokazuje. Naime, za sve $a \in A$ imamo

$$(\nu \circ \psi)(a) = \psi(\nu(a)) = \psi(a/\ker\varphi) = \varphi(a).$$

□

Kombinujući T2.21 i T2.22 dobijamo da je $\mathcal{B}$ homomorfna slika algebre $\mathcal{A}$ akko je $\mathcal{B}$ izomorfna sa nekom faktor-algebrom od $\mathcal{A}$.

Direktni proizvodi

Definicija 7.7 Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dve algebre istog tipa $\mathcal{F}$. *Direktan proizvod algebri* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ (u oznaci $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$) jeste algebra tipa $\mathcal{F}$, sa nosačem $A\times B$, tako da za sve $f \in \mathcal{F}_n$, $a_i \in A$, $b_i \in B, 1 \le i \le n$ važi

$$f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)) = (f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n), f^{\mathcal{B}}(b_1,\ldots,b_n)).$$

□

U slučaju konačnih algebri direktan proizvod "podseća" na obično množenje prirodnih brojeva. Ulogu prostih brojeva igraju tzv. *direktno nerazložive* (*nesvodljive*) algebre.

Definicija 7.8 Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je *direktno nerazloživa* (*nesvodljiva*) ako $\mathcal{A}$ nije izomorfna sa direktnim proizvodom dve netrivijalne algebre.

□

Znamo da se svaki prirodan broj veći od 1 može razložiti na proizvod prostih faktora. Analognu osobinu možemo dokazati za konačne algebre:

Teorema 7.10 Svaka konačna algebra je izomorfna direktnom proizvodu direktno nerazloživih algebri.

Dokaz.

Indukcijom po kardinalnosti skupa A.

□

Kao u slučaju skupova, možemo definisati direktan proizvod proizvoljne familije algebri:

Definicija 7.9 Neka je $\langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$ familija algebri tipa $\mathcal{F}$. *Direktan proizvod* te familije jeste algebra $\mathcal{A} = \prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$ sa nosačem $\prod \langle A_i \mid i \in I \rangle$ tako da su sve operacije definisane "po komponentama", tj. za sve $f \in \mathcal{F}_n, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \prod \langle A_i \mid i \in I \rangle$ važi

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)).$$

Po dogovoru, $\prod \emptyset$ jeste trivijalna algebra sa nosačem $\{\emptyset\}$.

□

Ako je $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, direktan proizvod $\prod \langle A_i \mid i \in I \rangle$ označavamo i sa $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Neka je I proizvoljan skup indeksa. Ako za sve $i \in I$ važi $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i$, direktan proizvod $\prod \langle A_i \mid i \in I \rangle$ obeležavamo sa $\mathcal{A}^I$ i zovemo *direktan stepen od* $\mathcal{A}$. Algebra $\mathcal{A}^{\emptyset}$ je trivijalna algebra.

Preslikavanja $\pi_j : \prod \langle A_i \mid i \in I \rangle \rightarrow A_j, j \in I$, definisana sa $\pi_j(a) = a(j)$ zovemo *projekcije*. Tako, projekcija π_j preslikava svaki element a u njegovu j–tu koordinatu. Može se dokazati da su sve projekcije $\pi_j : \prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle \rightarrow \mathcal{A}_j$ epimorfizmi.

Poddirektan proizvod

Videli smo da u slučaju konačnih algebri ulogu "prostih faktora" igraju direktno nerazložive algebre (vidi T 2.23). Međutim, to nije tačno u slučaju beskonačnih algebri. U potrazi za pravim analogonom "prostih faktora" G. Birkhoff je došao do pojma *poddirektno nerazloživih algebri*.

Za razliku od direktnog proizvoda familije $\langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$, poddirektan proizvod date familije u opštem slučaju nije jednoznačno određen.

Definicija 7.10 Algebra $\mathcal{A}$ je *poddirektan proizvod* familije algebri $\langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$ ako zadovoljava sledeće uslove:

(i) $\mathcal{A}$ je podalgebra od $\prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$;

(ii) Za sve projekcije π_j, $j \in I$, važi : $\pi_j(A) = A_j$.

Kažemo da je potapanje $\varphi : \mathcal{A} \to \prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$ *poddirektno* ako je $\varphi(\mathcal{A})$ poddirektan proizvod od $\langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$.

□

Po definiciji, za $I = \emptyset$, algebra $\mathcal{A}$ je poddirektan proizvod od $\emptyset$ akko je $\mathcal{A} = \prod \emptyset$, tj. ako je $\mathcal{A}$ trivijalna algebra.

Primetimo da ako je $\mathcal{A}$ poddirektan proizvod algebri $\langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$, onda je $\mathcal{A} / \ker \pi_i \cong \mathcal{A}_i$ i $\bigcap \langle \ker \pi_i \mid i \in I \rangle = \Delta_A$. Može se dokazati da važi na neki način i obrat:

Teorema 7.11 Neka je $\langle \rho_i \mid i \in I \rangle$ familija kongruencija algebre $\mathcal{A}$ tako da je $\bigcap \langle \rho_i \mid i \in I \rangle = \Delta_A$. Tada se $\mathcal{A}$ poddirektno potapa u $\prod \langle \mathcal{A} / \rho_i \mid i \in I \rangle$.

Dokaz.

Traženo poddirektno potapanje jeste preslikavanje $\nu : \mathcal{A} \to \prod \langle \mathcal{A} / \rho_i \mid i \in I \rangle$ definisano sa $\nu(a)(i) = a / \rho_i$.

□

Tako, algebra $\mathcal{A}$ je izomorfna sa poddirektnim proizvodom nekih algebri akko algebra $\mathcal{A}$ ima familiju kongruencija $\langle \rho_i \mid i \in I \rangle$ tako da je $\bigcap \langle \rho_i \mid i \in I \rangle = \Delta_A$. Odgovarajuće poddirektno razlaganje nazivamo *netrivijalnim* ako su sve kongruencije ρ_i različite od Δ_A. Primetimo da ako je $\rho_i = \Delta_A$, onda sledi $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_i$. Ta primedba ujedno i opravdava sledeću definiciju:

Definicija 7.11 Algebra $\mathcal{A}$ je ***poddirektno nerazloživa*** **ako za svaku familiju kongruencija $\langle \rho_i \mid i \in I \rangle$ algebre $\mathcal{A}$ važi: ako je $\bigcap \langle \rho_i \mid i \in I \rangle = \Delta_A$ onda $(\exists j \in I)\ \rho_j = \Delta_A$.**

□

Drugim rečima, $\mathcal{A}$ je poddirektno nerazloživa ako za svako poddirektno potapanje $\varphi : \mathcal{A} \to \prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$ postoji $j \in I$ tako da je preslikavanje $\varphi \circ \pi_j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_j$ izomorfizam. Odgovarajuća teorema o razlaganju glasi:

Teorema 7.12 (G.Birkhoff) Svaka algebra $\mathcal{A}$ je izomorfna sa poddirektnim proizvodom poddirektno nerazloživih algebri.

Dokaz.

Videti [BS 81].

□

Varijeteti

U daljem tekstu ako je K klasa algebri, podrazumevaćemo da su sve algebre iz K istog tipa. Uvedimo prvo neke operatore na klasama algebri. Neka je K neka klasa algebri. Tada:

$\mathcal{A} \in I(K)$ akko je $\mathcal{A}$ izomorfna sa nekom algebrom iz K;

$\mathcal{A} \in S(K)$ akko je $\mathcal{A}$ podalgebra neke algebre iz K;

$\mathcal{A} \in H(K)$ akko je $\mathcal{A}$ homomorfna slika neke algebre iz K;

$\mathcal{A} \in P(K)$ akko je $\mathcal{A}$ direktan proizvod neprazne familije algebri iz K;

$\mathcal{A} \in P_S(K)$ akko je $\mathcal{A}$ poddirektan proizvod neprazne familije algebri iz K.

Ako su O_1 i O_2 dva operatora na klasama algebri onda pišemo O_1O_2 za kompoziciju ta dva operatora, tj. $O_1O_2(K)=O_1(O_2(K))$. Za klasu algebri K kažemo da je *zatvorena* u odnosu na operator O ako je $O(K)\subseteq K$.

Definicija 7.12 Za nepraznu klasu K algebri tipa $\mathcal{F}$ kažemo da je *varijetet* ako je zatvorena u odnosu na podalgebre, homomorfne slike i direktne proizvode tj.

$$S(K)\subseteq K,\ H(K)\subseteq K\ ,\ P(K)\subseteq K.$$

□

Ako je K klasa algebri, označimo sa $\mathrm{V}(K)$ *najmanji varijetet koji sadrži K.*

Teorema 7.13 (A. Tarski)

Ako je K klasa istotipnih algebri onda $\mathrm{V}(K)=HSP(K)$.

Dokaz.

Videti [BS 81], [Ta 68].

□

Teorema 7.14 Ako je K varijetet, onda je svaka algebra iz K izomorfna poddirektnom proizvodu nekih poddirektno nerazloživih algebri iz K.

Dokaz.

Koristeći Teoremu 7.12 kao i činjenicu da ako je $\mathcal{A}$ poddirektan proizvod familije $\langle \mathcal{A}_i \mid i\in I\rangle$ onda za sve $i\in I$, $\mathcal{A}_i\in H(\mathcal{A})$.

□

Termi

Definicija 7.13 Neka je X skup objekata (tzv. *promenljivih*), $\mathcal{F}$ tip algebri. *Skup termova tipa* $\mathcal{F}$ *nad* X definišemo na sledeći način:

1) Svi elementi skupa $X \cup \mathcal{F}_0$ su termi;

2) Ako su $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termi i $f \in \mathcal{F}_n$ onda je i $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ term;

3) Termi se mogu dobiti samo konačnom primenom pravila 1) i 2).

Skup svih termova tipa $\mathcal{F}$ nad X obeležavamo sa $T_{\mathcal{F}}(X)$ ili, ako je iz konteksta jasno o kom tipu se radi, samo $T(X)$.

□

Iz D1.19 vidimo da term može imati samo konačno mnogo promenljivih. Ako je $t \in T(X)$ i ako su sve promenljive terma t u skupu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ onda term t obeležavamo sa $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definicija 7.14 Neka je $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ term tipa $\mathcal{F}$ nad X i neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$. *Termovsko preslikavanje* $t^{\mathcal{A}}: A^n \to A$ definišemo na sledeći način:

1) Ako je t promenljiva x_i, $1 \le i \le n$, onda $t^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i$, za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$;

2) Ako je $t = c$, $c \in \mathcal{F}_0$ onda $t^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}}$;

3) Ako je $t = f(t_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, t_k(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, gde je $f \in \mathcal{F}_k$, onda

$$t^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \ldots, t_k^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)),$$

za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Za element $t^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kažemo da je *vrednost terma t u algebri $\mathcal{A}$ u tački* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

□

Primetimo da postoji suštinska razlika između pojmova "term" i "termovsko preslikavanje". Term je skup simbola (tj. *sintaktički objekt*), a termovsko preslikavanje je, naravno, preslikavanje.

Identiteti

U delu 1.4 smo već imali primere raznih konkretnih identiteta: asocijativnost, komutativnost, distributivnost itd. U opštem slučaju identitet se definiše na sledeći način:

Definicija 7.15 Neka je X skup promenljivih, $\mathcal{F}$ tip algebri. *Identitet tipa* $\mathcal{F}$ *nad* X jeste izraz oblika $t_1 = t_2$, gde su t_1 i t_2 termi tipa $\mathcal{F}$ nad X. Skup svih identiteta tipa $\mathcal{F}$ nad X obeležavamo sa $\mathrm{Eq}_{\mathcal{F}}(X)$ ili samo sa $\mathrm{Eq}(X)$.

□

Definicija 7.16 Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$, $p=p(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ i $q=q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ termi tipa $\mathcal{F}$. Za $\mathcal{A}$ kažemo da *zadovoljava identitet* $p=q$ (ili *na* $\mathcal{A}$ *važi* $p=q$) ako su odgovarajuća termovska preslikavanja $p^{\mathcal{A}}$ i $q^{\mathcal{A}}$ ista, tj. ako za sve $a_1,a_2,\ldots,a_n \in A$ važi $p^{\mathcal{A}}(a_1,a_2,\ldots,a_n) = q^{\mathcal{A}}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Ako na $\mathcal{A}$ važi $p=q$, pišemo $\mathcal{A} \models p=q$. U suprotnom pišemo $\mathcal{A} \not\models p=q$ ili $\mathcal{A} \models p \neq q$.

□

Važno je uočiti suštinsku razliku između *jednakosti* dva terma p i q odnosno *identiteta* $p=q$. U prvom slučaju su p i q *oznake za isti objekat* (*term*), dok oznaka $\mathcal{A} \models p=q$ *ne znači da su termi* p *i* q *jednaki*, već da termi (sa oznakama p i q) indukuju *ista termovska preslikavanja u algebri* $\mathcal{A}$. Često se iz tog razloga koriste dve različite oznake: jedna za *jednakost* dva terma ($p=q$), a druga za *identitet* ($p \approx q$ ili $p \equiv q$).

Definicija 7.17 Neka je K klasa algebri tipa $\mathcal{F}$, p i q termi tipa $\mathcal{F}$. Kažemo da K *zadovoljava identitet* $p=q$ (i pišemo $K \models p=q$) ako svaka algebra iz K zadovoljava $p=q$. Ako je Σ skup identiteta tipa $\mathcal{F}$, na klasi K *važi skup identiteta* Σ ako klasa K zadovoljava svaki identitet iz Σ. Ako je X skup promenljivih, *jednakosna teorija klase* K *nad* X *je skup* $\mathrm{Eq}_X(K) = \{p=q \in \mathrm{Eq}(X) \mid K \models p=q\}$. U slučaju da je X neki prebrojivo beskonačan skup, umesto $\mathrm{Eq}_X(K)$ pišemo i $\mathrm{Eq}(K)$.

□

Teorema 7.15 Neka je K klasa istotipnih algebri. Sve klase $K, I(K), S(K), H(K), P(K)$ zadovoljavaju iste identitete (nad bilo kojim skupom promenljivih X).

Dokaz.

Direktnom proverom se lako uveravamo da ako $\mathcal{A}\in K$ i $\mathcal{A}\models p=q$, onda svaka algebra izomorfna sa $\mathcal{A}$, odnosno svaka podalgebra od $\mathcal{A}$ kao i svaka homomorfna slika algebre $\mathcal{A}$, zadovoljava identitet $p=q$. To znači da je $\mathrm{Eq}(K)\subseteq\mathrm{Eq}(I(K))$, $\mathrm{Eq}(K)\subseteq\mathrm{Eq}(S(K))$, $\mathrm{Eq}(K)\subseteq\mathrm{Eq}(H(K))$. Neka je $\langle\mathcal{A}_i|i\in I\rangle$ familija algebri iz K. Kako su operacije u direktnom proizvodu $\prod\langle\mathcal{A}_i|\ i\in \mathrm{I}\rangle$ definisane "po komponentama", onda svaki identitet koji važi na svim algebrama familije $\langle\mathcal{A}_i|\ i\in I\rangle$ važi i na odgovarajućem direktnom proizvodu. Tako, $\mathrm{Eq}(K)\subseteq\mathrm{Eq}(P(K))$.

S druge strane, trivijalno važi da je $K\subseteq I(K)$, $K\subseteq S(K)$, $K\subseteq H(K)$, $K\subseteq P(K)$ iz čega sledi da svi identiteti koji važe na klasama $I(K), S(K), H(K), P(K)$ važe i na klasi K.

□

Definicija 7.18 Neka je Σ skup identiteta tipa $\mathcal{F}$. Tada sa $\mathrm{mod}(\Sigma)$ označavamo klasu svih algebri (tipa $\mathcal{F}$) koje zadovoljavaju Σ. Za klasu K kažemo da je *jednakosna klasa* ako postoji skup identiteta Σ tako da je $K=\mathrm{mod}(\Sigma)$.

□

Kako su grupe (kao i semigrupe, prsteni, mreže, Booleove algebre) definisane identitetima, sledi da je klasa svih grupa (odnosno klasa svih semigrupa, prstena, mreža, Booleovih algebri) jednakosna klasa.

Jedna od najpoznatijih teorema u univerzalnoj algebri jeste tzv. *HSP* –teorema Birkhoffa, koja tvrdi da su jednakosne klase tačno varijeteti, tj. klase koje su zatvorene u odnosu na homomorfizme, podalgebre i direktne proizvode.

Teorema 7.16 (G. Birkhoff) Klasa K je varijetet akko je K jednakosna klasa.

Dokaz.

$(\leftarrow)$ Ako je K jednakosna klasa onda $K=\mathrm{mod}(\Sigma)$ za neki skup identiteta Σ. Na osnovu T1.28 imamo da i na klasama $S(K)$, $H(K)$ i $P(K)$ važi Σ. To znači da je $S(K)\subseteq K$, $H(K)\subseteq K$, $P(K)\subseteq K$ tj. K je varijetet.

$(\rightarrow)$ U slučaju da je K varijetet, može se dokazati da važi $K=\mathrm{mod}(\mathrm{Eq}(K))$. Za detaljan dokaz videti [BS 81].

□

Slobodne algebre

Slobodne algebre igraju veoma važnu ulogu u univerzalnoj algebri. Opisivanje slobodne algebre se u nekim slučajevima pokazalo kao suštinsko, često vrlo teško pitanje. Na ovom mestu iznosimo samo osnovne definicije i činjenice o slobodnim algebrama. Detaljni dokazi navedenih teorema se mogu naći na primer u [BS 81] ili u [Gr 79].

Definicija 7.19 Neka je K klasa algebri tipa $\mathcal{F}$ i neka je $\mathcal{U}(X)$ algebra tipa $\mathcal{F}$ koja je generisana sa X. Kažemo da $\mathcal{U}(X)$ ima *osobinu univerzalnog preslikavanja za K nad X* ako za svaku algebru $\mathcal{A}\in K$ i svako preslikavanje $\varphi: X\to A$ postoji homomorfizam $\overline{\varphi}:\mathcal{U}(X)\to\mathcal{A}$ koji proširuje φ (tj. za sve $x\in X$, $\varphi(x)=\overline{\varphi}(x)$). Tada za X kažemo da je *skup slobodnih generatora za $\mathcal{U}(X)$*, a za $\mathcal{U}(X)$ da je *slobodno generisana sa X*.

□

Najjednostavnija algebra koja ima osobinu univerzalnog preslikavanja jeste tzv. *termovska algebra.*

Definicija 7.20 Neka je $\mathcal{F}$ tip algebri, X skup promenljivih i neka je $T_{\mathcal{F}}(X)\neq\emptyset$. *Termovska algebra tipa $\mathcal{F}$ nad X* jeste algebra $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$ (ako je tip algebri jasan iz konteksta, koristimo oznaku $\mathcal{T}(X)$) sa nosačem $T_{\mathcal{F}}(X)$ i fundamentalnim operacijama definisanim na sledeći način: ako je $f\in\mathcal{F}_n$, $t_1,t_2,\ldots,t_n\in T_{\mathcal{F}}(X)$ onda

$$f^{\mathcal{T}(X)}(t_1,t_2,\ldots,t_n)=f(t_1,t_2,\ldots,t_n).$$

□

Primetimo da je $T_{\mathcal{F}}(X)\neq\emptyset$ ako je bar jedan od skupova X ili $\mathcal{F}_0$ neprazan.

Teorema 7.17 Neka je $\mathcal{F}$ neki tip algebri i X skup promenljivih tako da je $\mathcal{F}_0\cup X\neq\emptyset$. Tada termovska algebra $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$ ima osobinu univerzalnog preslikavanja za klasu svih algebri tipa $\mathcal{F}$ nad X.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$ i $\varphi: X\to A$. Preslikavanje $\overline{\varphi}: T_{\mathcal{F}}(X)\to A$ definišimo na sledeći način:

1) ako je $t\in X$, onda $\overline{\varphi}(t)=\varphi(t)$;

2) ako je $f\in\mathcal{F}_n$, $t_1,t_2,\ldots,t_n\in T(X)$, onda

$$\overline{\varphi}(f(t_1,t_2,\ldots,t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\overline{\varphi}(t_1),\overline{\varphi}(t_2),\ldots,\overline{\varphi}(t_n))$$

Nije teško dokazati da je $\overline{\varphi}$ homomorfizam algebre $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$ u algebru $\mathcal{A}$.

□

Sledeća teorema pokazuje da za dati kardinalni broj $\varkappa$ postoji do na izomorfizam jedna jedina algebra sa osobinom univerzalnog preslikavanja za K nad skupom slobodnih generatora kardinalnosti $\varkappa$:

Teorema 7.18 Neka su $\mathcal{U}_1(X_1)$ i $\mathcal{U}_2(X_2)$ dve algebre iz klase K sa osobinom univerzalnog preslikavanja za K nad odgovarajućim skupovima. Ako je $|X_1| = |X_2|$ onda $\mathcal{U}_1(X_1) \cong \mathcal{U}_2(X_2)$.

Dokaz.

Videti [BS81].

□

Jedan način konstrukcije algebre sa osobinom univerzalnog preslikavanja nad klasom K daje sledeća teorema:

Teorema 7.19 Neka je K neka klasa algebri tipa $\mathcal{F}$, X skup promenljivih tako da je $\mathcal{F}_0 \cup X \neq \emptyset$, i $\Theta_K = \{(p,q) \in T(X) \times T(X) \mid K \models p = q\}$. Tada algebra $\mathcal{F}_K(X) = \mathcal{T}(X)/\Theta_K$ ima osobinu univerzalnog preslikavanja za K nad X.

Dokaz.

Videti [BS81].

□

Algebru koja je izomorfna sa $\mathcal{F}_K(X)$ zovemo *K-slobodna algebra nad X* (skup X zovemo *skup slobodnih generatora* te algebre). Tako, imajući u vidu T1.31, sve K-slobodne algebre nad prebrojivim skupom slobodnih generatora izomorfne su sa algebrom $\mathcal{F}_K(\mathbb{N})$. Uobičajeno je da se ta oznaka koristi kao oznaka za K-slobodnu algebru nad prebrojivim skupom slobodnih generatora:

Prirodno je postaviti pitanje kada K-slobodna algebra pripada klasi K? Iz sledeće teoreme sledi da u slučaju kada je K varijetet, K-slobodna algebra *uvek pripada klasi K.*

Teorema 7.20 Neka je K neprazna klasa istotipnih algebri i neka postoji odgovarajuća termovska algebra $\mathcal{T}(X)$. Tada $\mathcal{F}_K(X) \in ISP(K)$.

Dokaz.

Videti [BS 81].

□

Jedna od ključnih osobina slobodne algebre jeste da ona zadovoljava *iste identitete kao klasa K.*

Teorema 7.21 Neka je K klasa algebri tipa $\mathcal{F}$ i neka $p, q \in T_{\mathcal{F}}(X)$. Tada važi:

$$K \models p = q \quad \text{akko} \quad \mathcal{F}_K(X) \models p = q.$$

Dokaz.

Videti [BS 81].

□

Identiteti i potpuno invarijantne kongruencije

U T7.16 smo videli da su klase algebri koje se mogu definisati identitetima baš varijeteti, tj. klase koje su zatvorene u odnosu na homomorfizme, podalgebre i direktne proizvode.

Postavimo sad obratno pitanje: koji su to skupovi identiteta Σ, za koje postoji klasa algebri K tako da je $\Sigma = \mathrm{Eq}_X(K)$, za neki skup promenljivih X? Može se dokazati da su takvi skupovi identiteta u tesnoj vezi sa nekim specijalnim kongruencijama.

Definicija 7.21 Za skup identiteta Σ kažemo da je *jednakosna teorija* ako postoji klasa algebri K i skup promenljivih X tako da je

$$\Sigma = \mathrm{Eq}_X(K).$$

□

Definicija 7.22 Za kongruenciju Θ neke algebre $\mathcal{A}$ kažemo da je *potpuno invarijantna* ako za svaki endomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, i sve $a, b \in A$ važi $(a, b) \in \Theta \Rightarrow (\varphi(a), \varphi(b)) \in \Theta$.

□

Može se dokazati da skup potpuno invarijantnih kongruencija neke algebre čini mrežu (u odnosu na $\subseteq$), koja je algebarska.

Neka je u daljem fiksiran neki tip algebri $\mathcal{F}$. Iz tehničkih razloga definišimo preslikavanje τ: $\mathrm{Eq}_{\mathcal{F}}(X) \to T_{\mathcal{F}}(X) \times T_{\mathcal{F}}(X)$ na sledeći način: $\tau(p=q) = (p, q)$. Tada je τ, naravno, bijekcija.

Teorema 7.22 Neka je K neka klasa algebri (tipa $\mathcal{F}$) i X neki skup promenljivih. Tada je $\tau(\mathrm{Eq}_X(K))$ potpuno invarijantna kongruencija termovske algebre $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$.

Dokaz.

Direktno po definiciji potpuno invarijantne kongruencije.

□

To je ujedno i jedan smer korespondencije izmedu jednakosnih teorija i potpuno invarijantnih kongruencija.

Lema 7.1 Neka je X skup promenljivih, a Θ potpuno invarijantna kongruencija termovske algebre $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$. Tada je faktor algebra $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)/\Theta$ slobodna algebra za varijetet $HSP\,(\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)/\Theta)$ nad skupom generatora X.

Dokaz.

Po definiciji slobodne algebre (videti T7.19) treba da za sve terme p, q važi

$$(p, q) \in \Theta \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)/\Theta \models p=q.$$

Za detaljan dokaz videti [BS 81].

□

Sledeća teorema pokazuje kakva je veza izmedu pojmova jednakosne teorije i potpuno invarijantnih kongruencija.

Teorema 7.23 Ako je $\Sigma \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathcal{F}}(X)$ neki skup identiteta, onda Σ je jednakosna teorija akko je $\tau(\Sigma)$ potpuno invarijantna kongruencija termovske algebre $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$.

Dokaz.

Smer $(\to)$ je ustvari T7.22.

$(\leftarrow)$. Neka je $\tau(\Sigma)=\Theta$, i $K=\{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)/\Theta\}$. Tada na osnovu prethodne leme imamo

$$K \models p = q \Leftrightarrow (p, q) \in \Theta, \text{ tj. } \tau(\mathrm{Eq}_X(K)) = \tau(\Sigma)$$

što znači da je $\Sigma = \mathrm{Eq}_X(K)$, pa je Σ jednakosna teorija.

□

Jednakosna logika

Neka je u daljem fiksiran neki tip algebri $\mathcal{F}$. Ako je Σ neka jednakosna teorija (tj. $\Sigma = \mathrm{Eq}_X(K)$, za neku klasu algebri, i neki skup promenljivih X), onda nije teško videti da za proizvoljan identitet e imamo: $e \in \Sigma$ akko e važi na svim algebrama na kojima važe svi identiteti iz Σ.

Definicija 7.23 Neka je Σ neki skup identiteta, a e neki identitet (tipa $\mathcal{F}$). Kažemo da je e *semantička posledica od* Σ, u oznaci $\Sigma \models e$, ako za sve algebre $\mathcal{A}$ (tipa $\mathcal{F}$) važi: ako $\mathcal{A} \models \Sigma$ onda $\mathcal{A} \models e$.

□

Ispostavilo se da se semantička posledica, kao i u slučaju kvantifikatorskog računa, može opisati pomoću formalnih pravila.

Definicija 7.24 Neka je $\mathcal{F}$ neki tip algebri, X skup promenljivih. *Jednakosna logika* (tipa $\mathcal{F}$, nad X) jeste uređena četvorka

$$\mathrm{Eq}(\mathcal{F}, X) = (A, Form, Ax, R)$$

gde je $A = \mathcal{F} \cup X \cup \{=\}$, tzv. *azbuka*,

$Form = \mathrm{Eq}_{\mathcal{F}}(X) = \{t = s \mid t, s \in T_{\mathcal{F}}(X)\}$, tzv. *formule*,

$Ax = \{t = t \mid t \in T_{\mathcal{F}}(X)\}$, tzv. *aksiome*,

$R = \{\mathrm{Sim}, \mathrm{Tranz}, \mathrm{Sagl}, \mathrm{Zam}\}$, tzv. *pravila izvođenja*,

tako da su pravila izvođenja redom data na sledeći način:

Sim: $\dfrac{t = s}{s = t}$, gde su $t, s \in T_{\mathcal{F}}(X)$;

Tranz: $\dfrac{t = s, s = u}{t = u}$, gde su $t, s, u \in T_{\mathcal{F}}(X)$;

Sagl: $\dfrac{t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n}{f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n)}$, gde su $t_i,\ s_i \in T_{\mathcal{F}}(X)$, a $f \in \mathcal{F}_n$;

Zam: $\dfrac{t(x_1, \ldots, x_n) = s(x_1, \ldots, x_n)}{t(u_1, \ldots, u_n) = s(u_1, \ldots, u_n)}$, gde su $t,\ s,\ u_i \in T_{\mathcal{F}}(X)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

□

Kako je jednakosna logika data kao *formalna teorija* (videti [Mil 91]), sintaktička posledica se definiše na uobičajeni način.

Definicija 7.25 Neka je $\mathcal{F}$ neki tip algebri, X skup promenljivih. Tada, *relaciju konsekvencije* $\vdash$ u jednakosnoj logici $\mathrm{Eq}(\mathcal{F}, X)$ definišemo na sledeći način: za ma koji skup identiteta $\Sigma \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathcal{F}}(X)$, i identitet $e \in \mathrm{Eq}_{\mathcal{F}}(X)$ važi $\Sigma \vdash e$ ako postoji konačan niz identiteta $e_1, e_2, \ldots, e_n = e$ (tzv. *dokaz za* e), $e_i \in \mathrm{Eq}_{\mathcal{F}}(X)$, takav da su svi identiteti u tom nizu ili aksiome, ili iz Σ, ili se mogu dobiti pomoću nekog pravila izvodenja primenjenog na neke ranije identitete u nizu.

□

Napomenimo, da ako je neko pravilo izvodenja oblika $\dfrac{e_1, \ldots, e_k}{e}$, onda se to pravilo *primenjuje* na $e_1, \ldots, e_k$, a *rezultat je* (*izvodi se*) e.

G. Birkhoff je 1935. godine dokazao da tako definisan pojam sintaktičke posledice potpuno pokriva relaciju semantičke posledice. Drugim rečima, za jednakosnu logiku važi tzv. *teorema potpunosti*:

Teorema 7.24 (Birkhoff) U svakoj jednakosnoj logici $\mathrm{Eq}(\mathcal{F}, X)$, za sve $\Sigma \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathcal{F}}(X)$ važi $\Sigma \models e$ akko $\Sigma \vdash e$.

Dokaz.

Videti [BS 81]

□

Spomenimo na kraju, da su pored poznate teoreme potpunosti za kvantifikatorski račun (Gödel), analogne teoreme potpunosti dokazane za kvazi-identitete (Selman, 1972; nezavisno D. Kelly, H. Andréka, I. Németi).

LITERATURA

[An 88] Andréka, H., *On the "union-relation composition" reducts of relation algebras*, (u štampi).

[An 91] Andréka, H., *Representation of distributive lattice-ordered semigroups with binary relations*, Algebra Universalis 28 (1991), 12-25.

[AM 88] Andréka, H. and Maddux, R., *Representations of small relation algebras*, (u štampi).

[Ba 86] Batten, L. M., *Combinatorics of finite geometries*, Cambridge Univ. Press , 1986, ix + 173 pp.

[Bi 87] Biró, B., *Non-finite-axiomatizability results in algebraic logic*, Math. Inst. Hungar. Acad. Sci., Preprint No. 22/1987.

[BP 82] Blok, W. J. and Pigozzi, D., *On the structure of varieties with equationally definable principal congruences I*, Algebra Universalis, 15 (1982), 195-227.

[Bö 86] Börner, F., *One-generated clones of operations on binary relations*, Beiträge Algbra Geom. 23 (1986), 73-84.

[Bre 84] Bredikhin, D. A., *A representation theorem for semilattices*, Proc. AMS, 90, (1984), 219-220.

[BSc 78] Bredikhin, D. A. and Schein, B. M., *Representations of ordered semigroups and lattices by binary relations*, Colloq. Math. 39 (1978), 1-12.

[Br 49] Bruck, R. H. and Ryser, H. J., *The non-existence of certain finite projective planes*, Canad. J. Math. 1 (1949), 88-93.

[BMc 81] Burris, S. and Mc Kenzie, R., *Decidability and Boolean Representations*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. Vol. 32, Num. 246, vii+104 pp.

[BS 81] Burris, S. and Sankappanavar, H. P., *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981, xv+276 pp.

[CK 73] Chang, C. C. and Keisler, H. J., *Model theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 73, North-Holland Amsterdam-London, 973, x+554 pp.

[CT 51] Chin, L. H. and Tarski, A., *Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras*, University of California Publications in Mathematics, new series, Vol. 1, no. 9, (1951), 341-384.

[Co 84] Comer, S. D., *Combinatorial aspects of relations*, Algebra Universalis, 18 (1984), 77-94.

[Con 71] Conway, J. H., *Regular Algebra and Finite Machines*, Chapman and Holl, 1971, vii+143 pp.

[CM 87] Crvenković, S. and Madarász, Sz. R., *On semigroup relation algebras*, Zbornik konferencije Algebra i Logika, Sarajevo, Inst. za matem. Novi Sad, 1987, 17-28.

[CM 88] Crvenković, S. and Madarász, Sz. R., *A non-axiomatizability result in algebraic logic*, Algebra Universalis 28 (1991), 487-494.

[CM 89] Crvenković, S. and Madarász, Sz. R., *On a problem of partial algebras*, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat. 17 (2) (1989), pp. 39-55.

[CM 91] Crvenković, S. and Madarász, Sz. R., *On equational base for Kleene relation algebras*, Proceedings of the International Conference on Words, Languages, Combinatorics, Kyoto, (1990), 64-71

[CM 92] Crvenković, S. and Madarász, Sz. R., *On Kleene algebras*, Theoret. Comput. Sci. A, Algorithms, automata, complexity and games, 108. (u štampi)

[ČT 73] Čupona, G. i Trpenovski, B., *Predavanja po algebra, knjiga II*, Univerzitet Kiril i Metodij, Skopje, 1973, iii+339 pp.

[Ei 74] Eilenberg, S., *Automata, Languages and Machines*, Volume A, Academic Press, New York, 1974, xiii+447 pp.

[ELTT 65] Eršov, Ju. L., Lavrov, I. A., Tajmanov, A. D. and Tajclin, M. A., *Elementarnie teorii*, Uspehi matemat. nauk, XX, Vol. 4 (124) (1965), 37-103.

[Ev 51] Evans, T., *The word problem for abstract algebras*, J. London Math. Soc. 26 (1951), 64-71.

[Ev 53] Evans, T., *Embeddability and the word problem*, J. London Math. Soc. 26 (1953), 76-80.

[Ev 80] Evans, T., *Some solvable word problems*, in *Word Problems II* (eds. Adjan, S. I., Boone, W.W., Higman, G.), North-Holand, Amsterdam 1980, 87-100.

[GP 72] Gécseg, F. and Peák, I., *Algebraic Theory of Automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972, ix+321 pp.

[Gr 79] Grätzer, G., *Universal Algebra*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1979, xviii+581 pp.

[HP 79] Hardy, D. and Pastijn, F., *The maximal regular ideal of the semigroup of binary relations*, Proceedings of a Symposium on Regular Semigroups, Northern Illinois University, De Kalb, Illinois, (1979), 83-91.

[HM 75] Hartfiel, D. J. and Maxson, C. J., *A characterization of the maximal monoids and maximal groups in βx*, Pacific Math. 58 (1975), 437-444.

[HMTI 71] Henkin, L., Monk, J. D. and Tarski, A., *Cylindric algebras. Part I* North-Holland, Amsterdam, 1971, vi+508 pp.

[HMTII 85] Henkin, L., Monk, J. D. and Tarski, A., *Cylindric algebras. Part II*, North-Holland, Amsterdam, 1985, vii+302 pp.

[HK 71] Horn, A. and Kimura, N., *The category of semilattices*, Algebra Universalis 1 (1971), 26-38.

[Jo 59] Jónsson, B., *Representation of modular lattices and of relation algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959), 449-464.

[Jo 82] Jónsson, B., *Varietes of relation algebras*, Algebra Universalis 15 (1982), 273-198.

[Jo 86] Jónsson, B., *The theory of binary relations*, A first draft, (u štampi).

[JTI 51] Jónsson, B. and Tarski, A., *Boolean algebras with operators. Part I*, Amer. J. Math. 73 (1951), 891-939.

[JTII 52] Jónsson, B. and Tarski, A., *Boolean algebras with operators. Part II*, Amer. J. Math. 74 (1952), 127-162.

[Ku 63] Kurosh, A. G., *Lectures on General Algebra*, Chelsea, New York, 1963, vii + 353 pp.

[Ly 50] Lyndon, R. C., *The representation of relation algebras*, Ann. of Math. (2) 51 (1950), 707-729.

[Ly 56] Lyndon, R. C., *The representation of relation algebras II*, Ann. of Math. 63 (1956), 294-307.

[Ly 61] Lyndon, R. C., *Relation algebras and projective geometries*, Michigan Math. J. 8 (1961), 21-28.

[Ma 86] Madarász, R., *Relacione algebre*, magistarski rad, Novi Sad, 1986, v+88 pp.

[Ma 89] Madarász, Sz. R., *Univerzalno algebarski prilozi algebarskoj logici*, doktorska disertacija, Novi Sad, 1989, v+138 pp.

[Ma 90] Madarász, Sz. R., *Some results on axiomatizability*, Univ. u Novom Sadu. Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat., (u štampi).

[Mad 78] Maddux, R., *Some sufficient conditions for the representability of relation algebras*, Algebra Universalis 8 (1978), 162-172.

[Mad 78] Maddux, R., *Topics in relation algebras*, Doctoral dissertation, Univ. of California, Berkley, 1978, iii + 239 pp.

[Mad 80] Maddux, R., *The equational theory of CA_3 is undecidable*, J. Symbolic Logic 2 (1980), 311-316.

[Mal 58] Maljcev, A. I., *O gomomorfizmah na konečnje gruppi*, Učen. Zap. Ivanov. Gos. Ped. Inst. 28 (1958), 49-60.

[Mal 70] Maljcev, A. I., *Algebraičeskie sistemi*, Nauka, Moskva, (1970), 388 pp.

[Mal 71] Maljcev, A. I., *The Metamatematics of Algebraic System*, Collected Papers: 1936-1967, North-Holland, Amsterdam, 1971, xi+490 pp.

[McK 66] Mc Kenzie, R., *The representation of relation algebras*, Doktorska disertacija, Univ. Colorado, 1966, 127 pp.

[McKV89] Mc Kenzie, R. and Valeriote, M., *The structure of decidable locally finite varieties*, Birkhäuser, Boston, MA, iii+205 pp (u štampi).

[MNS] Mekler, A., Nelson, E. and Shelah, S., *A variety with Solvable, but not Uniformly Solvable, Word Problem*, (u štampi).

[Me 64] Mendelson, E., *Introduction to mathematical logic*, Van Nostrand, Princeton, 1964, x+300 pp.

[Me 70] Mendelson, E., *Boolean Algebra and Switching Circuits*, Schaum's Outline Series, Mc Grow-Hill, New York, 1970, iv + 213 pp.

[Mi 87] Mijajlović, Ž., *An introduction to model theory*, Inst. za matem. Novi Sad, 1987 i+165 pp.

[Mil 84] Milić, S., *Elementi algebre*, Inst. za matem. Novi Sad, 1984, i+222 pp.

[Mil 91] Milić, S., *Elementi matematičke logike i teorije skupova*, Beograd, 1991, i+131 pp.

[Mo 64] Monk, J. D., *On representable relation algebras*, Michigan Math. J. 11 (1964), 207-210.

[Mos 73] Mostowski, A. W., *Uniform algorithms for deciding group theoretic problems*, u: *Word Problems* (eds. Boone, Cannonito, Lyndon), North-Holland, Amsterdam, 1973, 525-553.

[Ne 82] Németi, I., *Every free algebra in the variety generated by the separable dynamic algebras is seperable and representable*, Theoret. Comput. Sci. 17 (1982), 343-347.

[Ne 86] Németi, I., *Free algebras and decidability in algebraic logic*, Dissert. with Hungarian Acad. of Sciences, Budapest, 1986, xviii+183 pp.

[Ne 87] Németi, I., *Decidability of relation algebras with weakened associativity*, Proc. AMS 100 (1987), 340-344.

[Pr 74] Prešić, B. S., *Elementi matematičke logike*, Matematička biblioteka, sv. 34, Zavod za izdavanje udžbenika Beograd, (1974), v+143 pp.

[Sa 69] Salomaa, A., *Theory of Automata*, Pergamon press, Oxford, 1969, xii+257 pp.

[Sch 64] Schein, B., *Involutirovanie polugruppi polnih binarnih otnošenii*, Dokladi AN SSSR 156 (1964), 1300-1303.

[Sch 70] Schein, B., *Relation algebras and function semigroups*, Semigroup Forum, 1 (1970), 1-62.

[Sch 72] Schein, B., *A representation theorem for lattices*, Algebra Universalis, 2 (1972), 177-178.

[Sch 74] Schein, B., *Representation of involuted semigroups by binary relations*, Fund. Math. 82 (1974), 121-141.

[Sch 76] Schein, B., *Regular elements of the semigroups of all binary relations*, Semigroup Forum 13 (1976), 95-102.

[Sch] Schein, B., *Semigroups of tolerance relations*, Discrete Math. 64 (1987) 253-262.

[Sie18] Sierpinski, W., *L'axiome de M. Zermelo et son role dans la theorie des ensembles et l'analyse*, Bull. Acad. Sci. Cracovie (1918), 97-152.

[Si 74] Sinkevič, V. K., *Elementarnoe dokazateljstvo odnoj teoremi E. S. Wolka*, Teorija polugrupp i ee priloženia, Meževuzovskii naučnij sbornik 3 (1974), 107-108.

[Siv 78] Sivák, B., *Representation of finite lattices by orders on finite sets*, Math. Slovaca 28 (1978), 203-215.

[St 72] Starke, P. H., *Abstract Automata*, North-Holland, Amsterdam, 1972, 419 pp.

[Su 72] Suppes, P., *Axiomatic Set Theory*, Dover, New York, 1972, ix + 267 pp.

[Ta 41] Tarski, A., *On the calculus of relations*, J. Symbolic Logic 6 (1941), 73 - 89.

[Ta 53] Tarski, A., *Some metalogical results concering the calculus of relations*, Symbolic Logic 18 (1953), 188 - 189.

[Ta 55] Tarski, A., *Contributions to the theory of models. III*, Indag, Math. 17 (1955), 56 - 64.

[Ta 68] Tarski, A., *Equational logic and equational theories of algebras*, in: *Contribution to Mathematical Logic* (eds: K. Schütte) North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 275 -288.

[TG 87] Tarski, A., and Givant, S., *A Formalization of Set Theory Without Variables*, American Math. Soc. Colloq. Publ. 41 (1987), xi+318 pp.

[TMR 53] Tarski, A., Mostowski, A. and Robinson, R., *Undecidable Theories*, North-Holland, Amsterdam, 1953, ix + 98 pp.

[Tay 75] Taylor, W., *Equational logic*, *Contributions to universal algebra*, Proc. Coll. held in Szeged, 17 (1975), North-Holland, Amsterdam, 465 - 501.

[Voj] Vojvodić, G., *On weak congruence algebras*, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat., Novi Sad, (u štampi).

[VŠ 88] Vojvodić, G. i Šešelja, B., *On the lattice of weak congruence relations*, Algebra Universalis 25 (1988), 121 - 130.

[VŠ 89] Vojvodić, G. i Šešelja, B., *The diagonal relation in the lattice of weak congruences and the representation of lattices*, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat. 19 (1989), 167 - 178.

INDEKS

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

512.579(075.8)

МАДАРАС, Розалија С.
Relacione algebre / Rozália Sz. Madarász,
Siniša Crvenković. - Beograd: Matematički
institut, 1992. - XIII, 227 str. ; 25 cm

Tiraž 300. - Bibliografija: str. 217.
Regisrtar.
ISBN 86-80593-12-5
1. Црвенковић, Синиша

а) Релационе алгебре
9401100

RELACIONE ALGEBRE **MADARÁSZ CRVENKOVIĆ**