

Dragomir M. Simeunović

R A D O V I

Beograd, 2016.

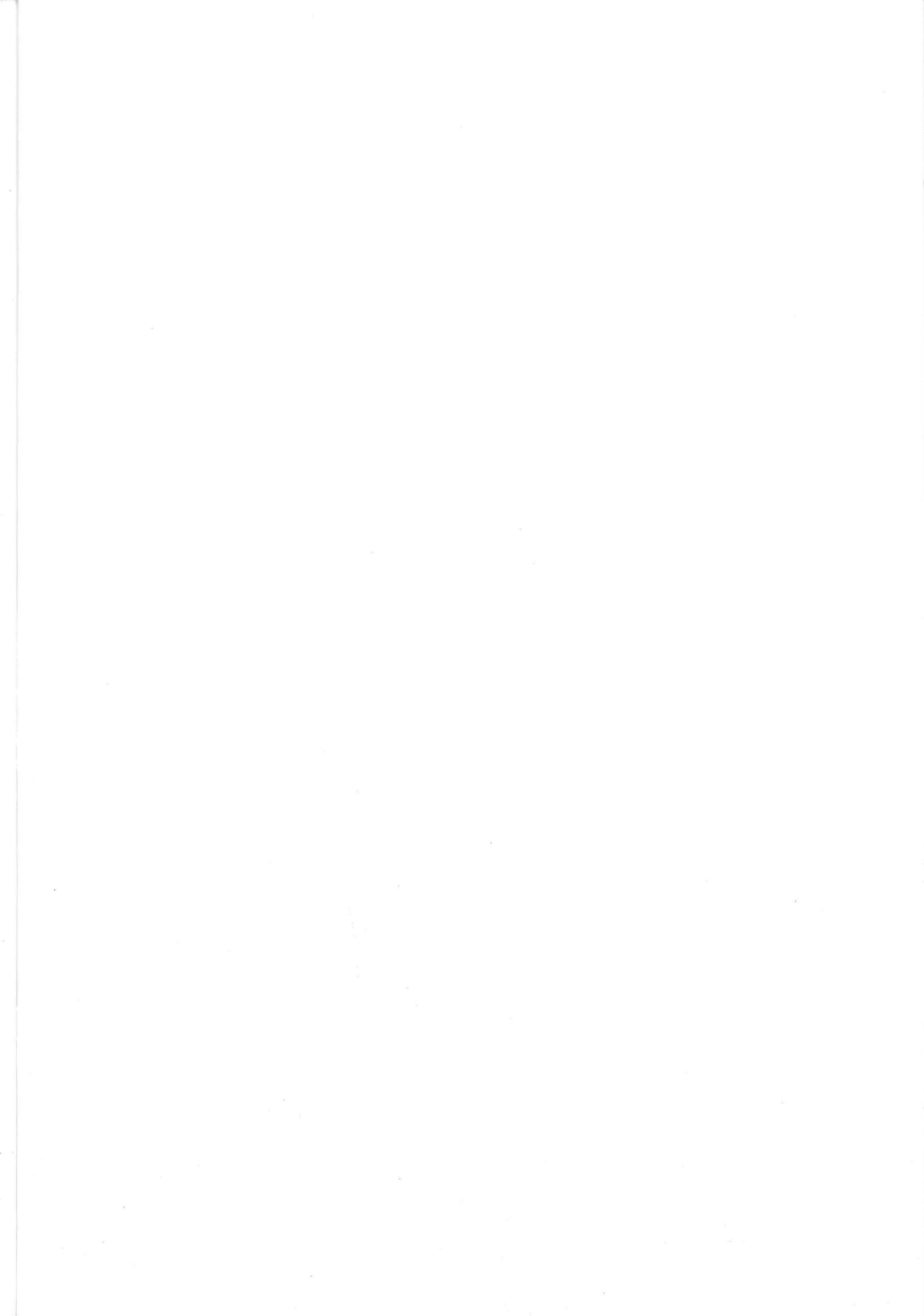
Dragomir M. Simeunović

RADOVI

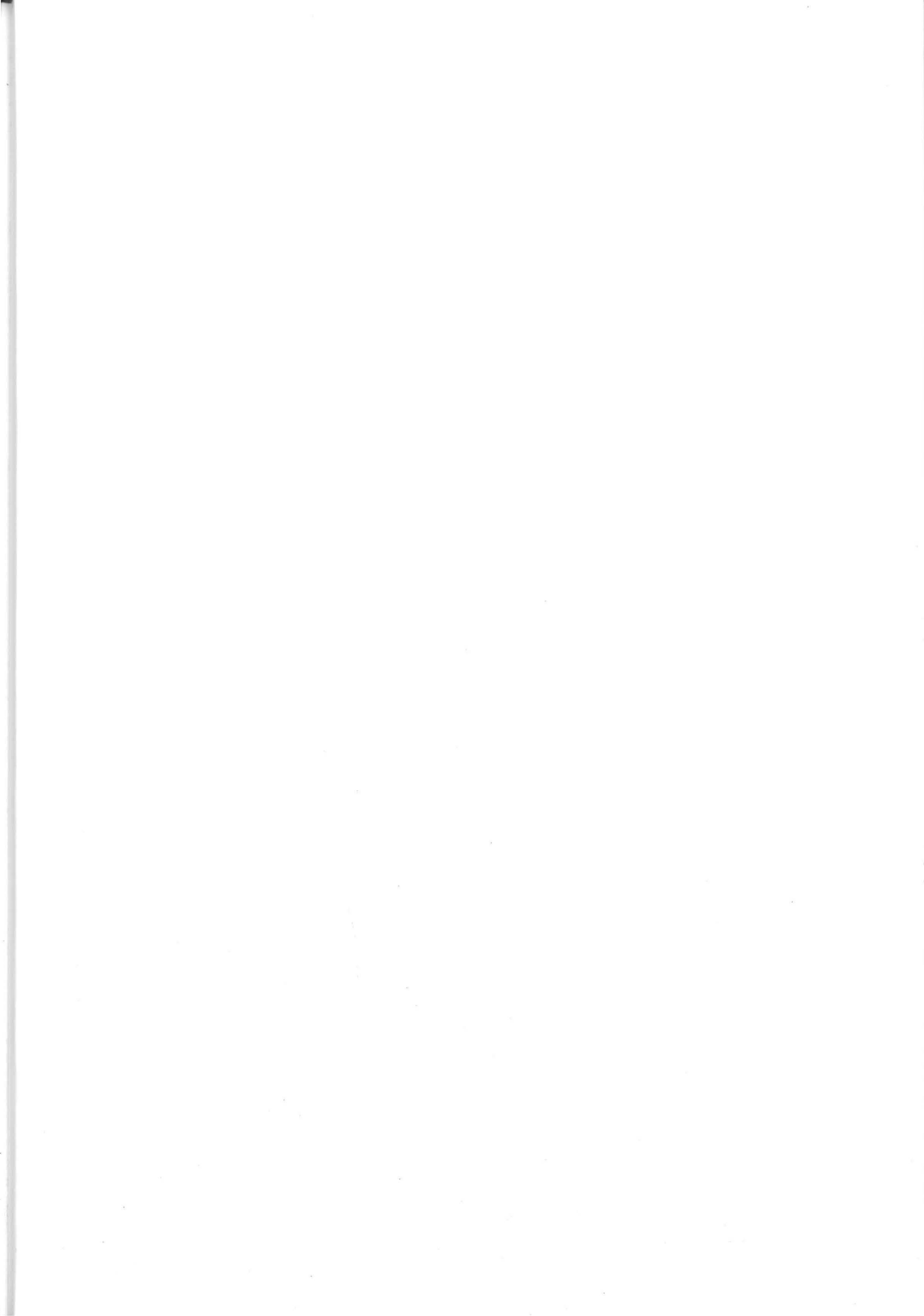
Поминутамај и грајој Нагау Трејсент
са посебног захвалности
Димитрије

Београд, 08.11.2017.

Beograd, 2016.



Mojoj
DARI



PRVI DEO

**ODABRANI
RADOVI**



U prvom delu ove knjige sadržana su trideset četiri rada koja su objavljena u raznim matematičkim časopisima

Д. М. СИМЕУНОВИЋ

О КРИТЕРИЈУМИМА ЗА РЕШАВАЊЕ РИССАТИ-ЕВЕ
ЈЕДНАЧИНЕ ПОМОЋУ КВАДРАТУРА

Прво, D. BERNOULLI, а затим EULER, показали су да се специјална Riccati-ева једначина

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + y^2 = \lambda x^\alpha$$

може решити квадратурама ако је у њој

$$(2) \quad \alpha = -\frac{4k}{2k \pm 1} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \text{ или } \alpha = -2 \quad (k \rightarrow +\infty).$$

ЛИУВИЛЛЕ је доказао да се за вредности параметра α различите од (2) решење једначине (1) не може добити помоћу квадратура нити да га је могуће изразити у коначном облику помоћу елементарних функција.

Што се тиче опште Riccati-еве једначине

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0, \quad (P \neq 0, \quad R \neq 0)$$

где су P, Q, R произвољне функције од x , познато је да се она може свести на линеарну једначину, па према томе и решити помоћу квадратура, ако јој се зна један, ма који, партикуларни интеграл.

Међутим, у литератури се могу наћи и многи специјални критеријуми када је могуће општу Riccati-еву једначину решити квадратурама. Ти критеријуми свде се на одређене релације које морају постојати између коефицијената P, Q, R Riccati-еве једначине (3).

Наводимо неке од тих критеријума:

$$(4) \quad R = CPe^{-2\int Qdx} \left(\int Pe^{-\int Qdx} dx \right)^{-\frac{4k}{2k \pm 1}}, \quad (C \text{ константа});$$

специјално, за $k=0$, следи одавде

$$(5) \quad R = CPe^{-2\int Qdx},$$

$$(6) \quad 4R = \frac{Q^2}{P} + 2 \left(\frac{Q}{P} \right)' + CP;$$

$$(7) \quad R = S^{-\frac{p}{2p+1}} \left(\frac{QS^{\frac{p}{2p+1}} + pPS^{\frac{p+1}{2p+1}}}{2P} \right)' + PS^{-\frac{2p}{2p+1}} \left(\frac{QS^{\frac{p}{2p+1}} + pPS^{\frac{p+1}{2p+1}}}{2P} \right)^2 + \\ + CPS^{-\frac{2p}{2p+1}}, \quad [S \equiv -(2p+1) \int P dx, \quad p \text{ константа}];$$

$$(8) \quad \begin{cases} P = \frac{1}{a} e^{-\int \frac{b}{a} dx}, & Q = \frac{1}{a} \left(b - 2e^{\int \frac{b}{a} dx} \cdot \int \frac{c}{a} e^{\int \frac{b}{a} dx} dx \right), \\ R = \frac{1}{a} \left[c + C - \left(\int \frac{c}{a} e^{\int \frac{b}{a} dx} dx \right)^2 \right]. \end{cases}$$

(a, b, c произвољне функције од x , а C константа);

$$(9) \quad P + Q + R = 0 \text{ и општије } a^2P + abQ + b^2R = 0, \text{ (} a \text{ и } b \text{ константе);}$$

$$(10) \quad \Psi' - P\Psi^2 - \Phi\Psi + R = 0, \text{ где је } \Phi = -(Q + 2P\Psi),$$

$$\left(\text{специјално са } \Phi = 0, \quad \Phi = -Q + 2\sqrt{PR}, \quad \Phi = -\frac{P'}{P} \right);$$

$$(11) \quad P(a' + Pa^2 + Qa + R) - \left(Q + 2Pa - \frac{P'}{P} \right)' = 0, \text{ (} a \text{ функција од } x \text{).}$$

Критеријум (4) потиче од Пејовић-а [1], (7) и (8) од Карапанчић-а [2], (6) од Бугаев-а [2], (5) од Авел-а [3], (9) од Куренског [3 стр. 23—24], (10) од Митриновић-а [3 стр. 23—24], док критеријум (11) потиче од Авделкадер-а [4].

У овом раду дајемо много општији критеријум, који наведене садржи као специјалне случајеве. Ипак, основни циљ нам је да укажемо да је сваки такав критеријум еквивалентан захтеву да општа Riccati-ева једначина има партикуларни интеграл одређеног типа; у суштини, дакле, једино познавање партикуларног интеграла омогућује интеграцију квадратурама.

II

Показаћемо сада да се сви горе наведени критеријуми могу добити као специјални случајеви једног општијег критеријума, из којег се може извести специјализацијом још бесконачно много других разних специјалних критеријума. При томе се нећемо обазирати на услове о egzистенцији интеграла, јер је извођење чисто формалног карактера.

Узећемо произвољну функцију $u(x)$ и извршити замену променљивих

$$(a) \quad \xi = \int P e^{-\int (Q+2Pu) dx} dx, \quad y = u + \eta e^{-\int (Q+2Pu) dx}.$$

На тај начин ће се општа Riccati-ева једначина свести на канонички облик

$$(\beta) \quad \frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = F(\xi),$$

где је

$$(\gamma) \quad F(\xi) = -\frac{1}{P} \left(\frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R \right) e^{2 \int (Q+2Pu) dx}.$$

Функцији $F(\xi)$ у (β) може се дати облик какав се хоће, одакле с обзиром на (α) и (γ) имамо

$$(\gamma') \quad \frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R = -Pe^{-2 \int (Q+2Pu) dx} \cdot F \left\{ \int Pe^{-\int (Q+2Pu) dx} dx \right\}.$$

Видимо да се из (γ') може наћи произвољно много веза за P, Q, R при којима се функцији $F(\xi)$ у (β) може дати унапред одређен облик. За то је довољно да се произвољној функцији $u(x)$ дају разне одређене вредности.

Ми ћемо се овде задржати на једном специјалном случају функције $F(\xi)$ у једначини (β) . Према напред реченом, једначина (β) моћи ће се решити квадратурама ако је у њој

$$F(\xi) = \lambda \xi^{-\frac{4k}{2k \pm 1}},$$

па ће се тада и дата општа Riccati-ева једначина моћи решити квадратурама.

Можемо, дакле, рећи: ако постоји функција $u(x)$, константа λ и цео позитиван број k , иако да је

$$(12) \quad \frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R = -\lambda Pe^{-2 \int (Q+2Pu) dx} \cdot \left[\int Pe^{-\int (Q+2Pu) dx} dx \right]^{-\frac{4k}{2k \pm 1}},$$

онда Riccati-ева једначина може се решити квадратурама; ири томе долази у обзир и $k=0$ и $k \rightarrow +\infty$.

III

Узимајући специјалне u, k и λ , добићемо из (12) разне специјалне критеријуме. Тако за $u=0$ добијамо критеријум (4)

$$(A) \quad R = -\lambda Pe^{-2 \int Q dx} \cdot \left(\int Pe^{-\int Q dx} dx \right)^{-\frac{4k}{2k \pm 1}}.$$

За $k=0$ излази одавде критеријум (5) док за свако друго $k=1, 2, \dots$ и $k \rightarrow +\infty$ добија се други.

Десна страна у (12) упростиће се ако у њој узмемо $u = -Q/2P$. Тада добијамо, извршивши све рачуне,

$$(B) \quad 4R = \frac{Q^2}{P} + 2 \left(\frac{Q}{P} \right)' - 4\lambda P \left(\int P dx \right)^{-\frac{4k}{2k \pm 1}}.$$

За $k=0$ имамо одавде критеријум (6), но за свако друго $k=1, 2, \dots$ и $k \rightarrow +\infty$ добиће се други.

Специјално за $k=0$, релација (12) гласи

$$(C) \quad \frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R = -\lambda P e^{-2\int(Q+2Pu)dx}.$$

Критеријум (7) ће се добити кад се узме $u = -\frac{Q}{2P} - \frac{p}{2S}$, а

критеријум (8) кад се узме $u = -e^{-\int \frac{b}{a} dx} \cdot \int \frac{c}{a} e^{\int \frac{b}{a} dx} dx$. Уосталом,

може се у (C) узети за u шта се хоће; свако ново u даће и нови критеријум.

Узмемо ли у (12) $\lambda=0$, добићемо

$$(D) \quad \frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R = 0,$$

што значи да за u треба узети ма какав партикуларни интеграл дате Riccati-еве једначине, што је позната ствар. У критеријуму (9) узето је да она има константу $y = a/b$ за партикуларни интеграл, специјално $y=1$. У (10) је узето да је партикуларни интеграл $y = -(Q+\Phi)/2P$, док је у (11) узет партикуларни интеграл $y = -a(x) - Q/P + P'/P^2$.

IV

На основи (D), јасно се види да критеријуми (9), (10) и (11) оперишу са унапред датим партикуларним интегралима опште Riccati-еве једначине: унапред дата функција $y = \varphi(x, P, Q, R)$ прогласи се партикуларним интегралом опште Riccati-еве једначине, па се онда добију услови за P, Q, R под којима ће то бити (критеријум). Пошто је једном један партикуларни интеграл познат, она се може свести на линеарну, тј. решити квадратурама.

Показаћемо да је у основи ово принцип и у критеријумима (5) до (8). Тада се општа Riccati-ева једначина своди на канонички облик

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \lambda,$$

за коју је лако уочити партикуларни интеграл. На тај начин критеријуми (5) до (8) не значе ништа друго него да су општој Riccati-евој једначини наметнути редом ови партикуларни интеграл:

$$\sqrt{\lambda} e^{-\int Q dx}; \quad -Q/2P + \sqrt{\lambda}; \quad -Q/2P + p/2S + \sqrt{\lambda} S^{-\frac{p}{2p+1}};$$

$$e^{-\int \frac{b}{a} dx} \left(\sqrt{\lambda} - \int \frac{c}{a} e^{\int \frac{b}{a} dx} dx \right).$$

Слично се може показати и за општије критеријуме (A), (B) и (C).

V

Р. Кашанин [5] у једном свом раду испитивао је да ли се може помоћу партикуларног интеграла диференцијалне једначине

$$(13) \quad \frac{du}{dx} = M_1 u^{m_1} + M_2 u^{m_2} + \dots + M_k u^{m_k}, \quad 0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k$$

свизити степен полинома на десној страни; овде су m_i цели бројеви, а M_i ма какве функције од x , но које нису идентички једнаке нули. При томе се може претпоставити да бројеви $m_i - 1$ немају заједничког делитеља (редукована једначина) јер, ако имају заједнички делитељ ν онда већ супституција $u = Y^{-\nu}$ смањује степен.

Резултат, до кога је дошао Р. Кашанин, је ово: да би, не претпостављајући ништа о функцијама M_i , постојала за сваки партикуларни интеграл u_1 супституција $u = \varphi(u_1, Y)$ којом ће се смањити степен полинома у редукованој једначини (13), потребно је и довољно да буде $m_k \leq 2$, тј. да једначина буде или Riccati-ева или линеарна. Иначе је то могуће постићи само код извесних специјалних једначина тога типа, и то са нарочитим партикуларним интегралима, а не са сваким.

Због свега овога је јасно откуда толики разноврсни и многобројни критеријуми за решавање опште Riccati-еве једначине помоћу квадратура: од свих редукованих једначина облика (13) само се код Riccati-еве партикуларни интеграл може употребити за снижавање степена полинома по u који у њој долази, тј. за свођење на линеарну једначину, тј. за решавање помоћу квадратура. Сви до сада дати критеријуми, ма којим начином да су добијени, нису ништа друго него везе између P, Q, R које се добијају када се извесна функција од x, P, Q, R прогласи партикуларним интегралом опште Riccati-еве једначине.

(Саопшћено 7-X-1959)

Б И Б Л И О Г Р А Ф И Ј А

- [1] Т. ПЕЈОВИЋ — Диференцијалне једначине. Егзистенција решења, Београд 1958.
- [2] Ђ. КАРАПАЊИЋ — Примена трансформација додира на интеграцију обичних диференцијалних једначина (теза). Посебно издање „Гласника“ Шумарског факултета у Београду, 1958.
- [3] Е. КАМКЕ — Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Chelsea Publishing Company, New York, 1948.
- [4] М. А. ABDELKADER — Solutions by quadrature of Riccati and second-order linear differential equations. *American Math. Monthly* 66, No 10 (1959).
- [5] Р. КАШАНИН — О упрошћавању диференцијалних једначина првог реда помоћу њихових партикуларних интеграла. *Глас Српске краљевске академије наука*, СХХХIV (1929).

SUR LA SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE
DE RICCATI À L'AIDE DE QUADRATURES

Par D. M. SIMEUNOVIĆ (Belgrade)

La transformation

$$(a) \quad \xi = \int P e^{-\int(Q+2Pu)dx} dx, \quad y = u + \eta e^{-\int(Q+2Pu)dx},$$

où u représente une fonction arbitraire de x , réduit l'équation générale de Riccati

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0,$$

à la forme

$$(c) \quad \frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = F(\xi),$$

où $F(\xi)$ est donnée par

$$(d) \quad F(\xi) = -\frac{1}{P} \left(\frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R \right) e^{2\int(Q+2Pu)dx}.$$

Étant donné que $F(\xi)$ est complètement arbitraire, on obtient, en tenant compte de (a), (b) et (d)

$$(e) \quad \frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R = -P e^{-2\int(Q+2Pu)dx} F \left\{ \int P e^{-\int(Q+2Pu)dx} dx \right\}.$$

En particulier, si $F(\xi) = \lambda \xi^\alpha$, $\lambda = \text{const}$, $\alpha = -\frac{4k}{2k \pm 1}$, $k = 0, 1, \dots$

(même pour $k = \infty$, c. à d. $\alpha = -2$), l'équation (c) se réduit à l'équation particulière de Riccati résoluble par quadratures. Dans ce cas la relation (e) prend la forme

$$(f) \quad \frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R = -\lambda P e^{-2\int(Q+2Pu)dx} \left[\int P e^{-(Q+2Pu)dx} dx \right]^{-\frac{4k}{2k \pm 1}}.$$

Autrement dit: s'il existe la fonction u , la constante λ et un entier positif k tel que la condition (f) soit satisfaite, l'équation générale de Riccati (b) peut-être résolue par quadratures (les valeurs $k=0$ et $k=\infty$ sont aussi admises).

De cette manière la relation (f) est un critère général donant la solution de l'équation de Riccati par quadratures. En choisissant u , k et λ d'une manière convenable, on obtient divers critères connus¹: de PIVO-VITCH (4), d'ABEL (5), de BOUGABFF (6), de KARAPANDŽITCH (7), (8), de KURENSKY (9), de MITRINOVITCH (10) et d'ABDELKADER (11).

Notre procédé général met en évidence que tout critère résulte en imposant à l'équation de Riccati une intégrale particulière. Autrement dit, si l'on impose une fonction donnée à l'avance $\varphi(x, P, Q, R)$ comme l'intégrale particulière de l'équation de Riccati, on obtient une relation entre P , Q et R et cette relation est le critère en question.

¹ Voir le texte en serbe.

Д. М. СИМБУНОВИЋ

ПРИМЕДБА О НУЛАМА ЈЕДНЕ КЛАСЕ ЦЕЛИХ ФУНКЦИЈА

(Примљено на IV скупу, од 22. V 1964, на основу реферата
академика Миодрага Томића и дописног члана Слободана Аљанчића)

1. У овом раду посматраћемо целу функцију

$$f(z) = 1 + \frac{z}{r_1} + \frac{z^2}{r_1 r_2} + \dots + \frac{z^m}{r_1 r_2 \dots r_m} + \dots \quad (1)$$

и распоред њених нула у комплексној равни под претпоставком да r_i задовољавају услове $1 < r_1 < r_2 < \dots$, или општије $1 < |r_1| < |r_2| < \dots$.

У специјалном случају, када је $r_1 = a$, $\frac{r_{m+1}}{r_m} = a^2$, ($m = 1, 2, \dots$) G. Pólya и G. Szegő [1, књига II, стр. 69, задатак 176] показали су:

1° да функција $\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n^2} z^n$, ($a \geq 2$) има само реалне негативне просте нуле. Овај став показује у извесном смислу везу између распореда нула у комплексној равни и величине $\limsup |a|^{\frac{1}{n^2}}$, $n \rightarrow \infty$, као што је то показао A. Erdős у раду [2]. С друге стране, Pólya и Szegő су показали [1, књига I, стр. 123, задатак 200]

2° за $|a| \geq 2,5$ функција $\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n^2} z^n$ на граници сваког кружног прстена

$$|a|^{2m-1} < |z| < |a|^{2m}, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

различита је од нуле и у унутрашњости сваког од ових прстенова има само по једну нулу.

Ми ћемо дати уопштење ова два става за функцију облика (1) и показаћемо да распоред нула те функције зависи од облика и правилности коефицијената r_i . Тако ћемо доказати овај став

СТАВ. (i). Ако је $r_1 > 1$, $\frac{r_{m+1}}{r_m} \geq 2$, ($m = 1, 2, \dots$), функција

(1) нема нула у $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$.

(ii). Ако је $r_1 > 1$, $\frac{r_{m+1}}{r_m} \geq 4$, ($m = 1, 2, \dots$), функција

(1) има само простије негативне нуле, и то само по једну у сваком од размака

$$(-2r_1, 0), (-2r_{m+1}, -2r_m), (m = 1, 2, \dots). \quad (\alpha)$$

(iii). Ако су r_i реални или комплексни и ако је $1 < |r_1| < |r_2| < \dots$, $\left| \frac{r_{m+1}}{r_m} \right| \geq 5$, ($m = 1, 2, \dots$), тада је функција (1) различита од нуле на граници сваког кружног пресека

$$\sqrt{|r_{m-1} r_m|} < |z| < \sqrt{|r_m r_{m+1}|}, (m = 1, 2, \dots), (r_0 = 1)$$

и има унутрашњости сваког од ових пресека само по једну нулу.

Последња два резултата (ii) и (iii) дају директно уопштење ставова 1° и 2° Рóбља-а и Szegő-а, ако се стави у 1° $r_1 = a$ и $\frac{r_{m+1}}{r_m} = a^2$ $a \geq 2$, односно у 2° $r_1 = a$, $\frac{r_{m+1}}{r_m} = a^2$ и $|a| \geq 2,5$ уместо $|a| \geq \sqrt{5}$, ($m = 1, 2, \dots$). Метода доказа за (ii) и (iii) у овом раду слична је доказу Рóбља-а и Szegő-а.

2. Доказ сјава. (i). За $0 \leq |z| \leq r_1$ (1) нема нула на основу Какеуа-овог става [1, књига I, одељак III, задатак 22].

Нека је $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$, $z = |z|e^{i\theta}$. За $r_m \leq |z| \leq r_{m+1}$,

($m = 1, 2, \dots$) напишамо (1) у облику

$$f(z) = \frac{z^m}{r_1 r_2 \dots r_m} \left[1 + \left(\frac{z}{r_{m+1}} + \frac{r_m}{z} \right) + \left(\frac{z^2}{r_{m+1} r_{m+2}} + \frac{r_m r_{m-1}}{z^2} \right) + \dots + \right. \\ \left. + \left(\frac{z^m}{r_{m+1} r_{m+2} \dots r_{2m}} + \frac{r_m r_{m-1} \dots r_1}{z^m} \right) + \left(\frac{z^{m+1}}{r_{m+1} r_{m+2} \dots r_{2m+1}} \right) + \dots \right]. \quad (2)$$

Реални део израза у средњој загради једнак је

$$\begin{aligned}
 & 1 + \left(\frac{|z|}{r_{m+1}} + \frac{r_m}{|z|} \right) \cos \theta + \left(\frac{|z|^2}{r_{m+1} r_{m+2}} + \frac{r_m r_{m-1}}{|z|^2} \right) \cos 2\theta + \dots + \\
 & + \left(\frac{|z|^m}{r_{m+1} r_{m+2} \dots r_{2m}} + \frac{r_m r_{m-1} \dots r_1}{|z|^m} \right) \cos m\theta + \\
 & + \left(\frac{|z|^{m+1}}{r_{m+1} r_{m+2} \dots r_{2m+1}} \right) \cos (m+1)\theta + \dots
 \end{aligned} \tag{3}$$

Показаћемо да је израз (3) позитиван.

Како су други изводи по $|z|$ сваке од функција

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(|z|) &= \left(\frac{|z|}{r_{m+1}} + \frac{r_m}{|z|} \right), \quad \varphi_2(|z|) = \left(\frac{|z|^2}{r_{m+1} r_{m+2}} + \frac{r_m r_{m-1}}{|z|^2} \right), \dots, \\
 \varphi_m(|z|) &= \left(\frac{|z|^m}{r_{m+1} r_{m+2} \dots r_{2m}} + \frac{r_m r_{m-1} \dots r_1}{|z|^m} \right), \\
 \varphi_{m+1}(|z|) &= \left(\frac{|z|^{m+1}}{r_{m+1} r_{m+2} \dots r_{2m+1}} \right), \dots
 \end{aligned} \tag{4}$$

позитивни, то су φ_i конвексне према доле и за $r_m \leq |z| \leq r_{m+1}$, ($m = 1, 2, \dots$) узимају највећу вредност било за $|z| = r_m$ или за

$|z| = r_{m+1}$. Због $\frac{r_k}{r_{k+1}} \leq \frac{1}{2}$, ($k = 1, 2, \dots$) функције φ_i нису у $[r_m, r_{m+1}]$

$$\begin{aligned}
 & \text{веће од } \varphi_1^* = \left(1 + \frac{1}{2} \right), \quad \varphi_2^* = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \right), \quad \varphi_3^* = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \right), \quad \varphi_4^* = \\
 & = \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{10}} \right), \dots
 \end{aligned}$$

Други члан у (3) је ненегативан за $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$, а збир наредних чланова није већи од збира

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{10}} \right) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots < \\
 & < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1,
 \end{aligned}$$

па је израз (3) позитиван и (1) нема нула.

(ii). За доказ дела (ii) става користићемо се овим познатим ставом А. Hurwitz-а [3, стр. 119].

Ако је $\{f_n(z)\}$ низ аналитичких функција у области D ограниченој простом контуром и ако $f_n(z) \rightarrow f(z)$ униформно у D и $f(z)$ није идентички нула, тада је $z_0 \in D$ нула функције $f(z)$, тада, и само тада, ако је z_0 тачка нагомилавања скупа нула функција $f_n(z)$, при чему се и тачке које су нуле за бескрајно много n рачунају у тачке нагомилавања.

Модул $2m$ -тога члана реда (1) биће максималан за

$$r_m < |z| < r_{m+1}, \quad (m=1, 2, \dots). \quad (5)$$

За ове вредности z модули чланова реда (1) непрестано расту од почетног члана до максималног, а затим опадају од максималног члана до бесконачности [1, књига I, стр. 20, задатак 117].

Нека је $(r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} (-x)^m$ максимални члан и $z = -x, x > 0$. Тада из (1) имамо

$$\begin{aligned} f(-x)(r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} (-x)^m &= \\ &= \left(1 - \frac{x}{r_{m+1}} + \frac{x^2}{r_{m+1} r_{m+2}} - \frac{x^3}{r_{m+1} r_{m+2} r_{m+3}} + \dots \right) - \\ &- \frac{r_m}{x} + \frac{r_m r_{m-1}}{x^2} - \dots + (-1)^m \frac{r_m r_{m-1} \dots r_1}{x^m} > 1 - \frac{x}{r_{m+1}} - \frac{r_m}{x}. \end{aligned} \quad (6)$$

За $x = 2r_m$ и за $\frac{r_{m+1}}{r_m} \geq 4$, односно за $\frac{r_m}{r_{m+1}} \leq \frac{1}{4}$, ($m=1, 2, \dots$) је

$$f(-2r_m)(r_1 r_2 \dots r_m) (-2r_m)^{-m} > \frac{1}{2} - \frac{2r_m}{r_{m+1}} \geq 0. \quad (7)$$

Посматрајмо сада полином

$$f_n(-x) = 1 - \frac{x}{r_1} + \frac{x^2}{r_1 r_2} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{r_1 r_2 \dots r_n}, \quad (1')$$

и нека је n фиксирано и m један од бројева $1, 2, \dots, n$. Тада имамо

$$\begin{aligned} f_n(-x)(r_1 r_2 \dots r_m) (-x)^{-m} &= \\ &= \left(1 - \frac{x}{r_{m+1}} + \frac{x^2}{r_{m+1} r_{m+2}} - \dots + (-1)^{n-m} \frac{x^{n-m}}{r_{m+1} r_{m+2} \dots r_n} \right) - \\ &- \left(\frac{r_m}{x} - \frac{r_m r_{m-1}}{x^2} + \dots - (-1)^m \frac{r_m r_{m-1} \dots r_1}{x^m} \right). \end{aligned}$$

За $x=2r_m$ биће због $\frac{r_{m+1}}{r_m} \geq 4$

$$f_n(-2r_m)(r_1 r_2 \cdots r_m)(-2r_m)^{-n} > \frac{1}{2} - \frac{2r_m}{r_{m+1}} \geq 0. \quad (6')$$

Из (1') видимо да је $f_n(0) > 0$, а из (6') да је

$$f_n(-2r_1) < 0, f_n(-2r_2) > 0, \dots, (-1)^n f_n(-2r_n) > 0. \quad (b)$$

(У другој неједначини (b) за $n=2$ и $r_2=4r_1$ знак $>$ прелази у знак једнакости). Из (b) произилази да $f_n(x)$ има само просте негативне нуле, и то тачно n нула, по једну у сваком од размака

$$(-2r_1, 0), (-2r_{m+1}, -2r_m), (m=1, 2, \dots, n-1). \quad (a')$$

На основу наведеног Hurwitz-овог става следи сада да су тачке нагомилавања нула од $f_n(x)$ и једине нуле функције $f(x)$.

Показаћемо да у сваком од размака (a) има само једна тачка нагомилавања нула низа полинома $f_n(x)$, тј. само једна нула од $f(x)$.

Пођимо од утврђеног броја $2n$, ($n > 0$) и посматрајмо низ парних полинома $f_{2n+2k}(-x)$, ($k=0, 1, 2, \dots$) у утврђеном размаку

$$I_{2n} = (-2r_{2n}, -2r_{2n-1}). \text{ Тада је на основу (6')} f_{2n}(-2r_{2n-1}) < 0,$$

$$f_{2n}(-2r_{2n}) > 0, \text{ одакле следи да је за неко } -\xi_{2n} \in (-2r_{2n}, -2r_{2n-1}),$$

$f_{2n}(-\xi_{2n}) = 0$. У специјалном случају, као што је већ наглашено, за $n=1$ и $r_2=4r_1$, биће $f_2(-2r_1) = 0$, тј. $-\xi_2 = -2r_1$.

С друге стране, према (5) видимо да ће модул $2n$ -тога члана реда (1), као и модул $2n$ -тога члана низа полинома $f_{2n+s}(-x)$, ($s=0, 1, 2, \dots$) бити максимални члан за

$$r_{2n} < x < r_{2n+1}. \quad (5')$$

Због $\frac{r_{m+1}}{r_m} \geq 4$, ($m=1, 2, \dots$) овај члан биће максимални и за свако

$$-x \in (-2r_{2n}, -2r_{2n-1}) = I_{2n}. \quad (5'')$$

Како модули чланова низа полинома $f_{2n+s}(-x)$, ($s=0, 1, 2, \dots$) од максималног члана па надаље непрестано опадају и како је $-\xi_{2n} \in I_{2n}$, то ће бити $f_{2n+2}(-\xi_{2n}) < 0$, а према (6') $f_{2n+2}(-2r_{2n}) > 0$, одакле произилази да је за неко $-\xi_{2n+2} \in (-2r_{2n}, -\xi_{2n})$, $f_{2n+2}(-\xi_{2n+2}) = 0$. Исто тако, пошто $-\xi_{2n+2} \in I_{2n}$ биће $f_{2n+4}(-\xi_{2n+2}) < 0$, а према (6')

$f_{2n+4}(-2r_{2n}) > 0$, одакле следи, опет, да је за неко $-\xi_{2n+4} \in (-2r_{2n}, -\xi_{2n+3})$, $f_{2n+4}(-\xi_{2n+4}) = 0$. Настављајући овај поступак долази се до закључка да је низ $\{-\xi_{2n+2k}\}$ нула парних полинома $f_{2n+2k}(-x)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) у фиксираним размаку $I_{2n} = (-2r_{2n}, -2r_{2n-1})$ опадајући, тј.

$$-2r_{2n-1} > -\xi_{2n} > -\xi_{2n+2} > -\xi_{2n+4} > \dots > -2r_{2n}.$$

Као монотони и ограничен овај низ има само једну тачку нагомилавања $-\xi''_{2n}$ и она се због (б') не поклапа са $-2r_{2n}$.

Посматрајмо сада низ непарних полинома $f_{2n+2k+1}(-x)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) у размаку I_{2n} . Према (б'), као и раније, биће $f_{2n+1}(-2r_{2n-1}) < 0$, $f_{2n+1}(-2r_{2n}) > 0$, одакле следи да је за неко $-\xi_{2n+1} \in (-2r_{2n}, -2r_{2n-1})$, $f_{2n+1}(-\xi_{2n+1}) = 0$. Користећи претходно резонување о максималном члану, биће $f_{2n+3}(-\xi_{2n+1}) > 0$, а према (б') $f_{2n+3}(-2r_{2n-1}) < 0$, одакле произилази да је за неко $-\xi_{2n+3} \in (-\xi_{2n+1}, -2r_{2n-1})$, $f_{2n+3}(-\xi_{2n+3}) = 0$. Даље је $f_{2n+5}(-\xi_{2n+3}) > 0$, јер $-\xi_{2n+3} \in I_{2n}$ а према (б') је $f_{2n+5}(-2r_{2n-1}) < 0$, па је за неко $-\xi_{2n+5} \in (-\xi_{2n+3}, -2r_{2n-1})$, $f_{2n+5}(-\xi_{2n+5}) = 0$. Настављајући овај поступак долази се до закључка да је низ $\{-\xi_{2n+2k+1}\}$ нула непарних полинома $f_{2n+2k+1}(-x)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) у размаку I_{2n} растући, тј.

$$-2r_{2n} < -\xi_{2n+1} < -\xi_{2n+3} < -\xi_{2n+5} < \dots < -2r_{2n-1}.$$

Као монотони и ограничен и овај низ има само једну тачку нагомилавања $-\xi'_{2n}$ и она се због (б') не поклапа са $-2r_{2n-1}$.

Најзад, покажимо да се тачке нагомилавања $-\xi''_{2n}$ и $-\xi'_{2n}$ поклапају. У размаку I_{2n} пада по једна, и само једна нула од $f_{2n+2s}(x)$ за довољно велико s . Ниска су, као и горе, $-\xi_{2n+2k+1}$ нуле од $f_{2n+2k+1}(x)$, а $-\xi_{2n+2k}$ нуле од $f_{2n+2k}(x)$ из тог размака. За $k \rightarrow \infty$ је

$$\begin{aligned} |f_{2n+2k+1}(-\xi_{2n+2k})| &= |f_{2n+2k+1}(-\xi_{2n+2k}) - f_{2n+2k}(-\xi_{2n+2k})| = \\ &= \frac{\xi_{2n+2k}^{2n+2k+1}}{r_1 r_1 \dots r_{2n+2k+1}} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (*)$$

при чему је $-2r_{2n} < -\xi_{2n+2k} < -2r_{2n-1}$ (I_{2n} утврђен размак). Како је $f_{2n+2k+1}(x)$ неспрекидна у I_{2n} и како је једина нула од $f_{2n+2k+1}(x)$ у I_{2n} , $-\xi_{2n+2k+1}$, то због (*), $-\xi_{2n+2k} \rightarrow -\xi_{2n+2k+1}$, $k \rightarrow \infty$ и зато се тачке нагомилавања $-\xi''_{2n}$ и $-\xi'_{2n}$ поклапају у сваком од размака $I_{2n} = (-2r_{2n}, -2r_{2n-1})$.

На исти начин се показује за нуле како из размака $I_{2n+1} = (-2r_{2n+1}, -2r_{2n})$, тако и из размака $I_1 = (-2r_1, 0)$ функције $f(x)$.

(iii). Нека је

$$\Phi(z) = \frac{f(z) - (r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m}{(r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m} = \left(\frac{z}{r_{m+1}} + \frac{z^2}{r_{m+1} r_{m+2}} + \dots \right) + \frac{r_m}{z} + \frac{r_m r_{m-1}}{z^2} + \dots + \frac{r_m r_{m-1} \dots r_1}{z^m}, \quad (8)$$

и нека је z у окрстку

$$\sqrt{|r_{m-1} r_m|} < |z| < \sqrt{|r_m r_{m+1}|}, \quad (r_0 = 1; m = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Тада је

$$|\Phi(z)| = \left| \frac{f(z) - (r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m}{(r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m} \right| < \left(\frac{|z|}{r_{m+1}} + \frac{|z|^2}{|r_{m+1} r_{m+2}|} + \dots \right) + \frac{|r_m|}{|z|} + \frac{|r_m r_{m-1}|}{|z|^2} + \dots + \frac{|r_m r_{m-1} \dots r_1|}{|z|^m}. \quad (10)$$

За

$$|z| = \sqrt{|r_m r_{m+1}|} \quad (11)$$

имамо из (10)

$$|\Phi| = \left(\sqrt{\frac{|r_m|}{|r_{m+1}|}} + \frac{|r_m|}{|r_{m+1}|} \cdot \frac{|r_{m+1}|}{|r_{m+2}|} + \dots \right) + \sqrt{\frac{|r_m|}{|r_{m+1}|}} + \frac{|r_{m-1}|}{|r_m|} \cdot \frac{|r_m|}{|r_{m+1}|} + \dots + \frac{|r_m r_{m-1} \dots r_1|}{\sqrt{|r_m r_{m+1}|^m}}.$$

Отуда стављајући

$$\left| \frac{r_k}{r_{k+1}} \right| = \frac{1}{a^2}, \quad (a > 1; k = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

добивамо

$$|\Phi| < \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^9} + \dots \right) + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^9} + \dots + \frac{1}{a^{m^2}} < 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^9} + \dots \right) = 2 \cdot \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{1}{a^3}} = \frac{2a^2}{a^3 - 1} < 1. \quad (13)$$

Последња неједначина је задовољена за $a \geq \sqrt{5}$.

Због (12) и дефиниције за Φ дате са (8), ако је $\left| \frac{r_{k+1}}{r_k} \right| \geq 5$, ($k = 1, 2, \dots$), за свако z на кругу (11) биће

$$\left| \frac{f(z) - (r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m}{(r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m} \right| < 1, \quad \text{односно} \quad \left| \frac{f(z)}{(r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m} - 1 \right| < 1,$$

одакле следи $\frac{f(z)}{(r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m} \neq 0$, тј. $f(z) \neq 0$. На основу

Rouché-овог става следи сада да функције $(r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m$ и $[f(z) - (r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m + (r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m]$, тј. функције $(r_1 r_2 \dots r_m)^{-1} z^m$ и $f(z)$ имају у кругу $|z| < \sqrt{|r_m r_{m+1}|}$, ($m = 1, 2, \dots$) једнак број нула, дакле m нула. То значи, у кругу $|z| < \sqrt{|r_{m-1} r_m|}$ функција $f(z)$ има $(m-1)$ нулу, што доказује да у унутрашњости сваког од кружних прстенова (9) пада по једна нула функције $f(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. Pólya und G. Szegő: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Vol. I, II, друго издање. Berlin 1954.
 [2] A. Erdrei: Power series having partial sums with zeros in a half-plane, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 9, № 2 (1958), стр. 320-324.
 [3] E. C. Titchmarsh: The Theory of Functions, Oxford Univ. Press, II издање. 1950.

D. M. SIMEUNOVIĆ

REMARQUE SUR LES ZÉROS D'UNE CLASSE DES FONCTIONS ENTIÈRES

Résumé

Dans cette note on démontre le théorème suivant:

Soit

$$f(z) = 1 + \frac{z}{r_1} + \frac{z^2}{r_1 r_2} + \dots + \frac{z^m}{r_1 r_2 \dots r_m} + \dots; \quad (1 < |r_1| < |r_2| < \dots)$$

alors,

(i). Si $r_1 > 1$ et $\frac{r_{m+1}}{r_m} \geq 2$, ($m = 1, 2, \dots$), $f(z)$ n'admet des zéros

dans le demi-plan $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$.

(ii). Soit $r_1 > 1$, $\frac{r_{m+1}}{r_m} \geq 4$, ($m = 1, 2, \dots$), alors $f(z)$ n'admet que des zéros simples négatifs et seulement un dans l'intervalle

$$(-2r_1, 0), (-2r_{m+1}, -2r_m), (m = 1, 2, \dots).$$

(iii) Si $1 < |r_1| < |r_2| < \dots$; $\left| \frac{r_{m+1}}{r_m} \right| \geq 5$, ($m = 1, 2, \dots$), $f(z)$ est différente de zéro sur la frontière des anneaux

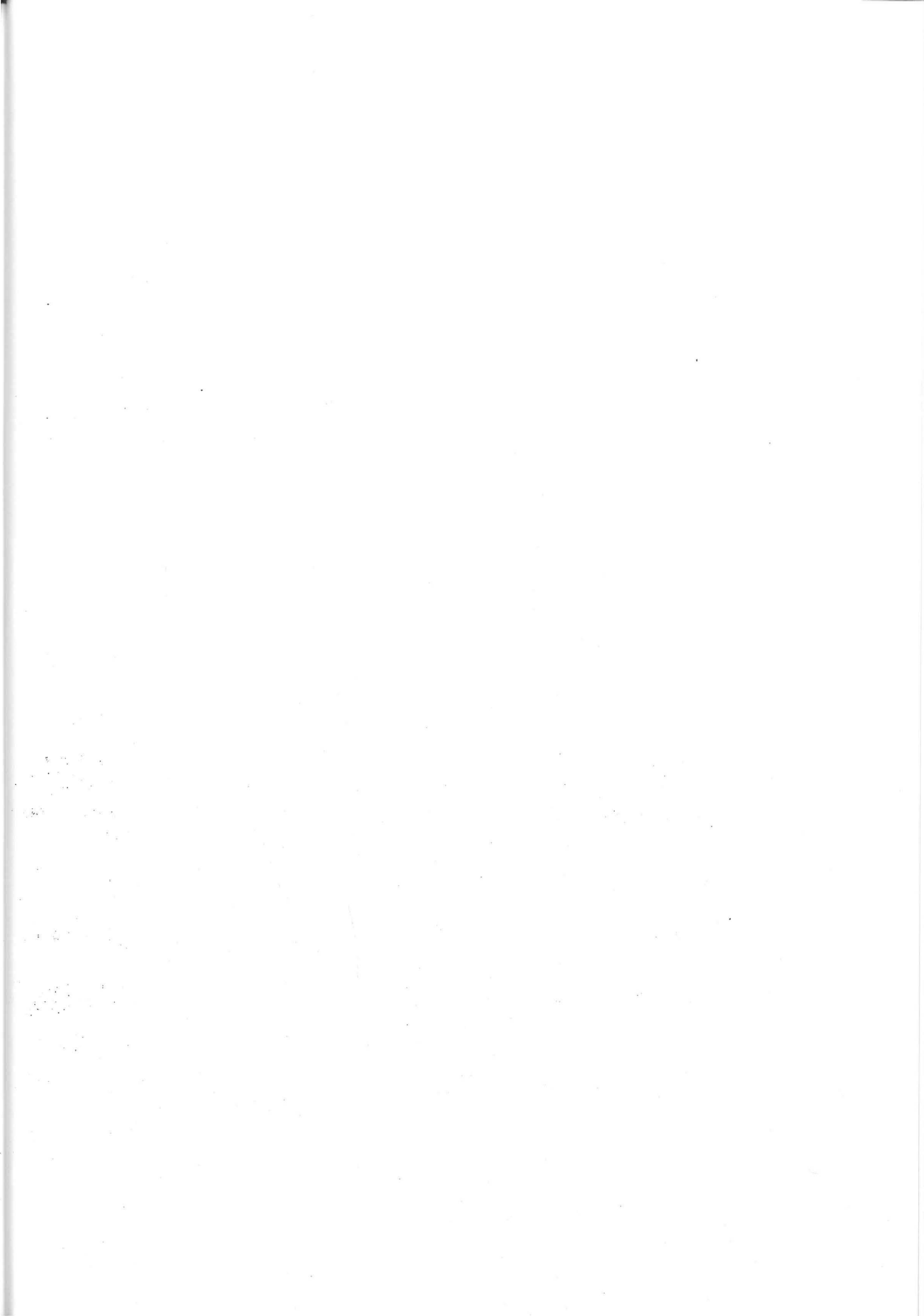
$$\sqrt{|r_{m-1} r_m|} < |z| < \sqrt{|r_m r_{m+1}|}, (r_0 = 1; m = 1, 2, \dots)$$

et admet seulement un zéro dans leur intérieur.

Les parts (ii) et (iii) généralisent les résultats de Pólya et Szegő [vol. II, ex. 176, p. 69; vol. I, ex. 200, p. 123]. Pour en déduire de

(ii) le résultat de Pólya et Szegő il faut prendre $r_1 = a$, $\frac{r_{m+1}}{r_m} = a^2$, $a \geq 2$,

et dans (iii) $r_1 = a$, $\frac{r_{m+1}}{r_m} = a^2$, et $|a| \geq 2,5$ au lieu de $|a| \geq \sqrt{5}$, ($m = 1, 2, \dots$).



МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
2 (17) 1965, стр. 259–261

SUR LES ZÉROS DU POLYNÔME $\sum_{v=0}^n \frac{z^v}{v!}$; $n=1, 2, \dots$

D. M. Simeunović

(Communiqué le 2 novembre 1965)

Dans cette note nous allons considérer le polynôme

$$(1) \quad \sum_{v=0}^n \frac{z^v}{v!}, \quad n=1, 2, \dots$$

et nous démontrerons le théorème suivant:

Tous les zéros du polynôme (1) sont situés dans l'anneau

$$(2) \quad \frac{n}{2e\sqrt[3]{3}} < |z| \leq n.$$

Soit donné le polynôme $Q_n(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n$. Dans ce cas le polynôme $Q_n(z) \cdot Q_n(-z)$ ne contient que des exposants pairs de z .

Considérons maintenant le polynôme de degré pair

$$P_{2k}(z) = \sum_{v=0}^{2k} \frac{z^v}{v!}, \quad k=1, 2, \dots$$

Alors on a

$$(3) \quad P_{2k}(z) \cdot P_{2k}(-z) = 1 + \sum_{i=1}^k a_{2k+2i} z^{2k+2i}$$

avec

$$a_{2s} = \frac{1}{2s!} (1-1)^{2s} = 0; \quad s=1, 2, \dots, k$$

et

$$(4) \quad \begin{cases} a_{2k+2} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{2k!} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!^2} + \dots + \frac{1}{2k!} - \frac{1}{2!} \\ a_{2k+4} = \frac{1}{4!} - \frac{1}{2k!} + \dots + (-1)^{k+2} \frac{1}{(k+2)!^2} + \dots + \frac{1}{2k!} - \frac{1}{4!} \\ \dots \\ a_{4k} = \frac{1}{2k!^2} \end{cases}$$

A l'exception du dernier coefficient a_{2k+2i} dans (4), les autres sont symétriques par rapport au terme moyen et leurs valeurs absolues décroissent d'une façon monotone. On en déduit

$$|a_{2k+2}| < \frac{2}{(k+1)!^2}, \quad |a_{2k+4}| < \frac{2}{(k+2)!^2}, \dots, \quad |a_{4k}| = \frac{2}{2k!^2}$$

ce qui donne de (3)

$$\begin{aligned} & |P_{2k}(z) \cdot P_{2k}(-z) - 1| \leq \\ & \leq \frac{2|z|^{2k+2}}{(k+1)!^2} \left(1 + \frac{|z|^2}{(k+2)^2} + \frac{|z|^4}{(k+2)^2(k+3)^2} + \dots + \frac{|z|^{2k-2}}{(k+2)^2(k+3)^2 \dots (2k)^2} \right) \leq \\ & \leq \frac{2|z|^{2k+2}}{(k+1)!^2} \left(1 + \frac{|z|^2}{(k+1)^2} + \frac{|z|^4}{(k+1)^4} + \dots + \frac{|z|^{2k-2}}{(k+1)^{2k-2}} \right). \end{aligned}$$

Pour

$$|z| \leq \frac{k+1}{\lambda e}, \quad \lambda > 1$$

on a toujours

$$1 + \frac{|z|^2}{(k+1)^2} + \frac{|z|^4}{(k+1)^4} + \dots + \frac{|z|^{2k-2}}{(k+1)^{2k-2}} < \frac{e^2}{e^2-1} < \frac{3}{2},$$

de sorte qu'on obtient dans ce cas

$$(5) \quad |P_{2k}(z) \cdot P_{2k}(-z) - 1| < \frac{3(k+1)^{2k+2}}{\lambda^{2k+2} e^{2k+2}} \cdot \frac{1}{(k+1)!^2}.$$

Vu que, d'après la formule de Stirling, on a

$$(k+1)! > (k+1)^{k+1} e^{-(k+1)}$$

l'inégalité (5) peut s'écrire alors sous la forme

$$|P_{2k}(z) \cdot P_{2k}(-z) - 1| < \frac{3}{\lambda^{2k+2}},$$

d'où il suit que

$$|P_{2k}(z) P_{2k}(-z) - 1| < 1$$

lorsque

$$\lambda \geq \sqrt[2k+2]{3},$$

ce qui montre que le polynôme $P_{2k}(z)$ n'admet pas de zéros dans le cercle

$$(6) \quad |z| < \frac{k+1}{e} \cdot 3^{-(2k+2)^{-1}}$$

De la même manière, on montre que le polynôme de degré impair

$$P_{2k+1}(z) = \sum_{v=0}^{2k+1} \frac{z^v}{v!}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

n'a pas, aussi, de zéros dans le cercle (6).

A cause de

$$\frac{k+1}{e \sqrt[2k+2]{3}} = \frac{2k+2}{2e \sqrt[2k+2]{3}} > \frac{n}{2e \sqrt[2k+2]{3}},$$

où n désigne $2k$, respectivement $2k+1$, c'est-à-dire le degré de (1), et en tenant compte de (6) on conclut que (1) n'a pas de zéros dans le cercle

$$(7) \quad |z| < \frac{n}{2e \sqrt[n]{3}}, \quad n=1, 2, \dots$$

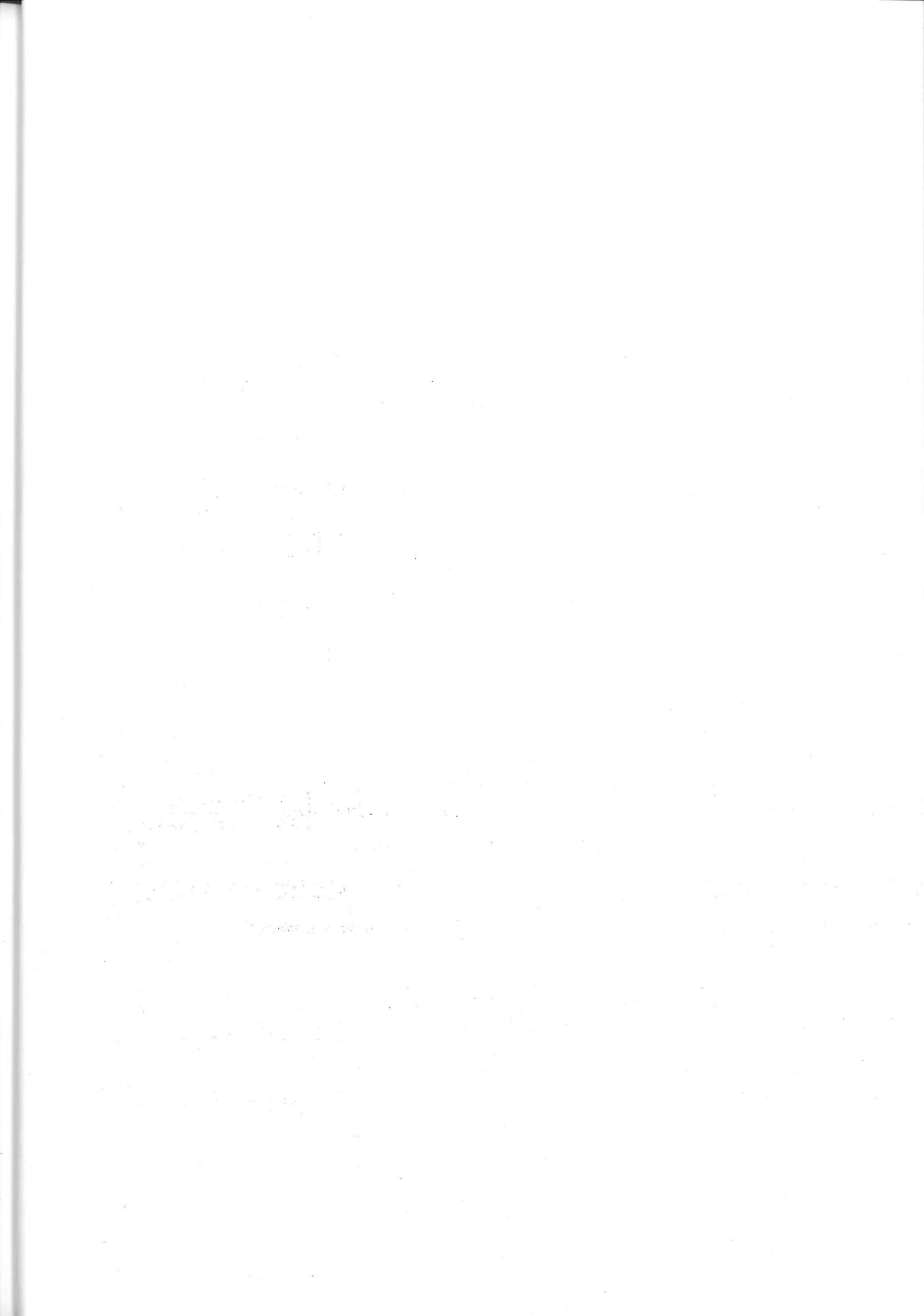
Quand $n \rightarrow \infty$, le polynôme $\sum_{v=0}^n \frac{z^v}{v!} \rightarrow e^z$, et ses zéros d'après (7) tendent

vers l'infini, ce qui donne le fait connu que e^z n'a pas de zéros dans le plan complexe.

D'après [1] (I partie, ex. 23) il résulte que tous les zéros de (1) sont dans $|z| \leq n$, de là, et de (7) il s'ensuit que tous les zéros de (1) sont dans l'anneau (2) ce qu'il fallait démontrer.

RÉFÉRENCE

[1] G. Pólya und G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, seconde édit. Berlin 1954.



D. M. Simeunović || SUR LES LIMITES DES MODULES
DES ZÉROS DES POLYNÔMES

(Communiqué le 21 mars 1966)

1. Dans cette note nous allons donner l'extension d'un procédé utilisé par D. Markovitch [1], [2], [3] dans l'estimation des limites des zéros des polynômes. Cette extension nous a conduit aux résultats plus précises concernant ces limites.

Il est bien connu que pour l'expression

$$(1) \quad S = \frac{\sum_{v=1}^n \alpha_v \lambda_v}{\sum_{v=1}^n \beta_v \lambda_v},$$

où α_v sont réels, β_v et λ_v réels et positifs les inégalités suivantes ont lieu

$$(2) \quad \text{Min}_{1 \leq v \leq n} \left(\frac{\alpha_v}{\beta_v} \right) < S < \text{Max}_{1 \leq v \leq n} \left(\frac{\alpha_v}{\beta_v} \right).$$

Nous allons préciser ces inégalités, en supposant que les coefficients λ_v ($v = 1, 2, \dots, n$) sont décroissantes. Dans ce but appliquons la transformée d'Abel sur le numérateur et dénominateur de (1), c'est-à-dire, posons

$$(3) \quad \sum_{v=1}^n c_v \lambda_v = \sum_{v=1}^{n-1} s_v(c) \Delta \lambda_v + s_n(c) \lambda_n,$$

avec

$$(4) \quad s_v(c) = \sum_{k=1}^v c_k, \quad \Delta \lambda_v = \lambda_v - \lambda_{v+1}, \quad (v = 1, 2, \dots, n-1).$$

On obtient alors

$$S = \frac{\sum_{v=1}^{n-1} s_v(\alpha) \Delta \lambda_v + s_n(\alpha) \lambda_n}{\sum_{v=1}^{n-1} s_v(\beta) \Delta \lambda_v + s_n(\beta) \lambda_n}$$

d'où, en vertu de (2) pour $\Delta \lambda_v > 0$ ($v = 1, 2, \dots, n-1$), il s'ensuit

$$(5) \quad \text{Min}_{1 \leq v \leq n} \left(\frac{s_v(\alpha)}{s_v(\beta)} \right) < S < \text{Max}_{1 \leq v \leq n} \left(\frac{s_v(\alpha)}{s_v(\beta)} \right).$$

D'après (2) pour $\lambda_\nu = 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) on a

$$\text{Min}_{1 \leq k \leq \nu} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) < \frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}, \quad \frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)} < \text{Max}_{1 \leq k \leq \nu} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

ce qui donne

$$\text{Min}_{1 \leq k \leq \nu} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) < \text{Min}_{1 \leq \nu \leq n} \left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)} \right), \quad \text{Max}_{1 \leq \nu \leq n} \left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)} \right) < \text{Max}_{1 \leq k \leq \nu} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right).$$

De là et de (5) on tire

$$(6) \quad \text{Min}_{1 \leq k \leq \nu} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) < \text{Min}_{1 \leq \nu \leq n} \left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)} \right) < S < \text{Max}_{1 \leq \nu \leq n} \left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)} \right) < \text{Max}_{1 \leq k \leq \nu} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right).$$

2. Soit $\rho e^{\theta i}$, $0 < \theta < 2\pi$ un zéro du polynome

$$(7) \quad P(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu, \quad a_0 a_n \neq 0,$$

c'est-à-dire

$$(8) \quad \sum_{\nu=0}^n a_\nu e^{\nu \theta i} \rho^\nu = 0.$$

De (8) résulte d'abord l'inégalité connu (de Cauchy)

$$|a_0| < \sum_{\nu=1}^n |a_\nu| \rho^\nu,$$

laquelle s'écrit sous la forme

$$(9) \quad |a_0| < \sum_{\nu=1}^n |b_\nu| t^\nu \left(\frac{\rho}{t} \right)^\nu, \quad t > 0,$$

où l'on suppose que $\left(\frac{\rho}{t} \right)^\nu$ décroît d'une façon monotone, c'est-à-dire $\rho < t$.

En appliquant au second membre de (9) la transformation d'Abel (3) et en tenant compte des notations (4), on obtient

$$|a_0| < \sum_{\nu=1}^n s_\nu(|a|t) \Delta \left(\frac{\rho}{t} \right)^\nu + s_n(|a|t) \left(\frac{\rho}{t} \right)^n.$$

En divisant ceci par

$$(10) \quad Q_1(\rho) = \sum_{\nu=1}^n b_\nu \rho^\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(b) \Delta \left(\frac{\rho}{t} \right)^\nu + s_n(b) \Delta \left(\frac{\rho}{t} \right)^n, \\ b_\nu > 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

et en vertu de (2) et (6) il en résulte

$$(11) \quad \frac{|a_0|}{Q_1(\rho)} < \mu_1 < \mu_2,$$

où l'on a posé

$$\mu_1 = \text{Max}_{1 \leq v \leq n} \left(\frac{s_v(|a|t)}{s_v(b)} \right), \quad \mu_2 = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{|a_k|t^k}{b_k} \right).$$

De (11) on déduit immédiatement le théorème suivant:

La limite inférieure des modules des zéros des polynômes (7) sera la racine positive ρ_1 de l'équation

$$\frac{|a_0|}{\mu_1} = Q_1(\rho).$$

En vertu de (11) cette racine n'est pas inférieure à la racine positive ρ_2 de l'équation

$$\frac{|a_0|}{\mu_2} = Q_1(\rho).$$

Exemple. Si l'on prend dans (10) $b_v = 1$ ($v = 1, 2, \dots, n$), ce qui implique, alors,

$$Q_1(\rho) = \sum_{v=1}^n \left(\frac{\rho}{t} \right)^v,$$

on obtient d'après (11)

$$\frac{|a_0|}{\sum_{v=1}^n \left(\frac{\rho}{t} \right)^v} < \mu_1(t) < \mu_2(t),$$

c'est-à-dire

$$(12) \quad \frac{|a_0|}{\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{t} \right)^v} < \mu_1(t) < \mu_2(t),$$

où $\mu_1(t)$ et $\mu_2(t)$ désignent respectivement

$$\mu_1(t) = \text{Max}_{1 \leq v \leq n} \left(\frac{\sum_{k=1}^v |a_k|t^k}{v} \right), \quad \mu_2(t) = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} (|a_k|t^k).$$

De (12) nous obtenons

$$(13) \quad \rho > \frac{|a_0|t}{|a_0| + \mu_1(t)} > \frac{|a_0|t}{|a_0| + \mu_2(t)}.$$

L'expression

$$(14) \quad \frac{|a_0|t}{|a_0| + \mu_2(t)},$$

comme la limite inférieure des modules des zéros des polynômes a été donnée par Landau [4], J. Karamata [5], et D. Markovitch [2].

On conclut, d'après (13) que la limite inférieure des modules des zéros des polynômes (7) donnée par

$$\frac{|a_0|t}{|a_0| + \mu_1(t)},$$

n'est pas plus petite que la limite de ses zéro données par (14).

Pour en déduire la limite supérieure des modules des zéros de (7) nous allons partir de l'inégalité

$$(15) \quad |a_n| < \sum_{v=1}^n \frac{|a_{n-v}|}{\rho^v},$$

laquelle résulte de (8).

On peut écrire (15) sous la forme

$$(16) \quad |A_0| < \sum_{v=1}^n \frac{|A_v|}{\alpha^v} \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^v = \sum_{v=1}^{n-1} s_v \left(\frac{|A|}{\alpha}\right) \Delta \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^v + s_n \left(\frac{|A|}{\alpha}\right) \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^n,$$

avec $A_v = a_{n-v}$ ($v=0, 1, 2, \dots, n$) α étant positif et tel que $\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^v$ soit une suite décroissante.

En divisant (16) par

$$(17) \quad Q_2(\rho) = \sum_{v=1}^n b_v \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^v = \sum_{v=1}^{n-1} s_v(b) \Delta \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^v + s_n(b) \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^n,$$

$b_v > 0$ ($v=1, 2, \dots, n$),

nous obtenons

$$(18) \quad \frac{|A_0|}{Q_2(\rho)} < M_1 < M_2,$$

où l'on a posé

$$M_1 = \text{Max}_{1 \leq v \leq n} \left(\frac{s_v \left(\frac{|A|}{\alpha}\right)}{s_v(b)} \right), \quad M_2 = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{\frac{|A_k|}{\alpha_k}}{b_k} \right)$$

De (18) on déduit le théorème.

La limite supérieure des zéros des polynômes (7) est la racine positive ρ_1 de l'équation

$$\frac{|A_0|}{M_1} = Q_2(\rho).$$

En vertu de (18) ρ_1 n'est pas plus grand que la racine positive ρ_2 de l'équation

$$\frac{|A_0|}{M_2} = Q_2(\rho).$$

Exemple. En prenant dans (17) $b_v = 1$ ($v = 1, 2, \dots, n$) ce qui signifie qu'on a

$$Q_2(\rho) = \sum_{v=1}^n \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^v,$$

pour $\rho > \alpha$, de (18) on obtient

$$\frac{|A_0|}{\sum_{v=1}^n \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^v} < M_1(\alpha) < M_2(\alpha),$$

c'est-à-dire

(19)
$$\frac{|A_0|}{\sum_{v=1}^n \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^v} < M_1(\alpha) < M_2(\alpha),$$

où l'on a posé

$$M_1(\alpha) = \text{Max}_{1 \leq v \leq n} \left(\frac{\sum_{k=1}^v |A_k|}{\alpha^k} \right), \quad M_2(\alpha) = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{|A_k|}{\alpha^k} \right).$$

A cause de $A_{n-k} = a_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), de (19) résulte

$$\rho < \alpha \left(1 + \frac{M_1(\alpha)}{|a_n|} \right) < \alpha \left(1 + \frac{M_2(\alpha)}{|a_n|} \right),$$

d'où, par exemple, pour $\alpha = 1$ on a

(20)
$$\rho < 1 + \frac{\bar{M}_1}{|a_n|} < 1 + \frac{\bar{M}_2}{|a_n|},$$

avec les notations

$$\bar{M}_1 = \text{Max}_{1 \leq v \leq n} \left(\frac{\sum_{k=1}^v |a_{n-k}|}{v} \right), \quad \bar{M}_2 = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} (|a_k|).$$

Enfin, de (20) on conclut que l'expression

$$1 + \frac{\bar{M}_1}{|a_n|},$$

comme la limite supérieure des modules des zéros des polynômes (7), n'est pas plus grande que l'expression

$$1 + \frac{\bar{M}_2}{|a_n|}$$

qui représente la forme classique (de Cauchy) de la limite supérieure des modules des zéros des polynômes (7).

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Markovitch, *Sur la limite supérieure des modules des zéros des polynômes*, Publ. Math. Univ. Belgrade vol. 6—7 (1938).

[2] D. Markovitch, *Sur la limite inférieure des modules des zéros d'un polynôme*, Acad. Serbe Sci. Publ. Inst Math. vol 2 (1948).

[3] D. Markovitch, *Une application de la méthode des polynômes comparatifs* Matematički vesnik 1 (16), 4, Belgrade, (1964).

[4] E. Landau, *Über eine Aufgabe aus der Funktionentheorie*, Tôhoku Math. J. vol. 5 (1914).

[5] J. Karamata, *Sur la limite inférieure des modules des zéros des fonctions analytiques*, Bull. Acad. Serbe vol. CXXVII (1927).

D. M. Simeunović || LES LIMITES DES MODULES DES ZÉROS DES
POLYNOMES ET DES SÉRIES DE TAYLOR

(Communiqué le 1 mars 1967)

1. Il en existe une série des résultats donnant les limites inférieures et supérieures des modules des zéros des polynomes et des fonctions. Ces limites sont exprimées moyennant des coefficients des polynomes, respectivement des séries de Taylor. Un de premier résultat de ce genre est dû à M. Petrovitch. Les problèmes de cette espèce ont été traités aussi par E. Landau et P. Montel.

Dans cette note nous allons donner dans 3 une nouvelle inégalité d'où il en résulte les nouvelles limites pour les modules des zéros des polynomes, et pour des fonctions représentées par les séries de Taylor (Les inégalités (15)). Ces limites subsistent aussi dans certains cas où les limites données par M. Petrovitch [1], E. Landau [2], P. Montel [3] et D. Markovitch [4] perdent leurs sens.

Cauchy a donné certains inégalités pour des zéros des polynomes auxquelles résultent les autres. Les inégalités mentionnées par Cauchy résultent du fait que chaque zéro t du polynome

$$(1) \quad P(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}, \quad a_0 a_n \neq 0,$$

satisfait à l'équation $P(t) = 0$ et par conséquent aussi les inégalités

$$|a_n| |t|^n < \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_{\nu}| |t|^{\nu}, \quad |a_0| < \sum_{\nu=1}^n |a_{\nu}| |t|^{\nu}.$$

De là, par exemple, on en déduit les limites de Cauchy:

Tous les zéros du polynome (1) se trouvent dans l'anneau

$$\zeta_1 < |z| < \zeta_2$$

où ζ_1 et ζ_2 sont des racines positives des équation

$$|a_0| = \sum_{\nu=1}^n |a_{\nu}| \zeta^{\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_{\nu}| \zeta^{\nu} = |a_n| \zeta^n$$

2. P. Montel a déduit un nouvel anneau dans lequel se trouvent tous les zéros du polynome (1).

Soit

$$(2) \quad M_s(P) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\varphi})|^s d\varphi \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Les relations suivantes sont connues

$$M_s(P) < M_r(P), \quad 0 < s < r < \infty$$

ainsi que

$$M_0(P) = \lim_{s \rightarrow 0} M_s(P) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |P(e^{i\varphi})| d\varphi \right),$$

$$M_{\infty}(P) = \lim_{s \rightarrow \infty} M_s(P) = \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Le résultat de Montel assure que tous les zéros du polynôme (1) se trouvent dans l'anneau

$$(3) \quad \frac{|a_0|}{M_s(P)} < |z| < \frac{M_s(P)}{|a_n|}.$$

Montel a déduit l'estimation (3) du théorème connu de Jensen de la théorie de fonctions [5, pp. 125].

3. En se basant seulement sur l'inégalité de Hölder et en utilisant la formule de Parseval, on peut déduire un nouvel anneau qui contient tous les zéros du polynôme (1).

Soit $\rho e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$, un zéro de (1) d'où on tire l'équation

$$|a_0| = \left| \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} e^{i\nu\theta} \rho^{\nu} \right|,$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$|a_0| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{a_{\nu}}{\lambda_{\nu}} e^{i\nu\varphi} \right) \left(\sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} e^{i\nu(\theta-\varphi)} \rho^{\nu} \right) d\varphi \right|.$$

De là résulte l'inégalité

$$(4) \quad |a_0| < \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{a_{\nu}}{\lambda_{\nu}} e^{i\nu\varphi} \right| \left| \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} e^{i\nu(\theta-\varphi)} \rho^{\nu} \right| d\varphi,$$

où $\{\lambda_{\nu}\}$ est une suite réelle ou complexe différente de zéro.

En appliquant au second membre de (4) l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$, on obtient

$$(5) \quad |a_0| < \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{a_{\nu}}{\lambda_{\nu}} e^{i\nu\varphi} \right|^p d\varphi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} e^{i\nu(\theta-\varphi)} \rho^{\nu} \right|^q d\varphi \right)^{\frac{1}{q}},$$

d'où évidemment résulte l'inégalité

$$(6) \quad |a_0| < \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{a_\nu}{\lambda_\nu} e^{\nu\varphi i} \right|^p d\varphi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^n |\lambda_\nu| \rho^\nu \right).$$

De (6) il s'ensuit, par exemple, pour $\lambda_\nu = 1 + \nu$ et $\rho < 1$

$$(7) \quad |a_0| < M_p(P_1) \frac{2\rho - \rho^2}{(1 - \rho)^2},$$

avec

$$(8) \quad M_p(P_1) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{a_\nu}{1 + \nu} e^{\nu\varphi i} \right|^p d\varphi \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'inégalité (7) sera satisfaite pour

$$(9) \quad \rho > 1 - \sqrt{\frac{M_p(P_1)}{|a_0| + M_p(P_1)}} = g_1$$

Le second membre de (9) représente une des limites inférieures de zéros du polynome (1).

En posant dans (1) $z = \frac{1}{t}$ on obtient

$$t^n P\left(\frac{1}{t}\right) = P^*(t) = \sum_{\nu=0}^n a_{n-\nu} t^\nu.$$

Soit $re^{\alpha i}$, $0 < \alpha < 2\pi$, un zéro du polynome $P^*(t)$. D'après (9) pour $r < 1$ on a alors

$$(10) \quad r > 1 - \sqrt{\frac{M_p(P_2)}{|a_n| + M_p(P_2)}}$$

où l'on a posé

$$(11) \quad M_p(P_2) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{a_{n-\nu}}{1 + \nu} e^{\nu\varphi i} \right|^p d\varphi \right)^{\frac{1}{p}},$$

Le zéro $re^{\alpha i}$ de plus petit module du polynome $P^*(t)$ sera le zéro $\rho e^{\theta i}$ de plus grand module de (1), ce qui donne à cause de $z = \frac{1}{t}$, $\rho = \frac{1}{r}$ et ceci en vertu de (10) donne

$$(12) \quad \rho < 1 \left/ \left(1 - \sqrt{\frac{M_p(P_2)}{|a_n| + M_p(P_2)}} \right) \right. = g_2$$

En tenant compte de (9) et (12) on conclut: *Tous les zéros du polynome (1) se trouvent dans l'anneau*

$$(13) \quad g_1 < |z| < g_2$$

4. Pour $s=2$, en vertu de la formule de Parseval, d'après (2), l'anneau de Montel prend la forme

$$(14) \quad \frac{|a_0|}{\sqrt{\sum_{v=0}^n |a_v|^2}} < |z| < \frac{\sqrt{\sum_{v=0}^n |a_v|^2}}{|a_n|},$$

tandis que l'anneau donné par (13), en tenant compte de (8) et (11) se réduit pour $p=2$, à

$$(15) \quad 1 - \sqrt{\frac{\left(\sum_{v=1}^n \left(\frac{|a_v|}{1+v}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{|a_0| + \left(\sum_{v=1}^n \left(\frac{|a_v|}{1+v}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} < |z| < 1 \left(1 - \sqrt{\frac{\left(\sum_{v=1}^n \left(\frac{|a_{n-v}|}{1+v}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{|a_n| + \left(\sum_{v=1}^n \left(\frac{|a_{n-v}|}{1+v}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

L'anneau de Montel (14) résulte de l'inégalité (5) pour $p=q=2$ et $\lambda_v=1$ ($v=1, 2, \dots, n$).

De (5), respectivement de (6) on peut obtenir des autres anneaux dans lesquels se trouvent tous les zéros de (1).

Pour les polynômes d'un grand degré n , les limites de l'anneau (15) peuvent être plus précises que celles de (14). L'estimation (15) a, en particulier, une valeur, si l'on s'agit des limites inférieures pour des fonctions représentées par les séries de Taylor.

La limite inférieure des modules des zéros de fonctions représentées par une série de Taylor $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ d'après M. Petrovitch, E. Landau, P. Montel et D. Markovitch est donnée par l'expression

$$(16) \quad \frac{|a_0|}{\sqrt{\sum_{v=0}^{\infty} |a_v|^2}},$$

tandis que dans notre cas, d'après (15) cette limite sera exprimée par

$$(17) \quad 1 - \sqrt{\frac{\left(\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{|a_v|}{1+v}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{|a_0| + \left(\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{|a_v|}{1+v}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

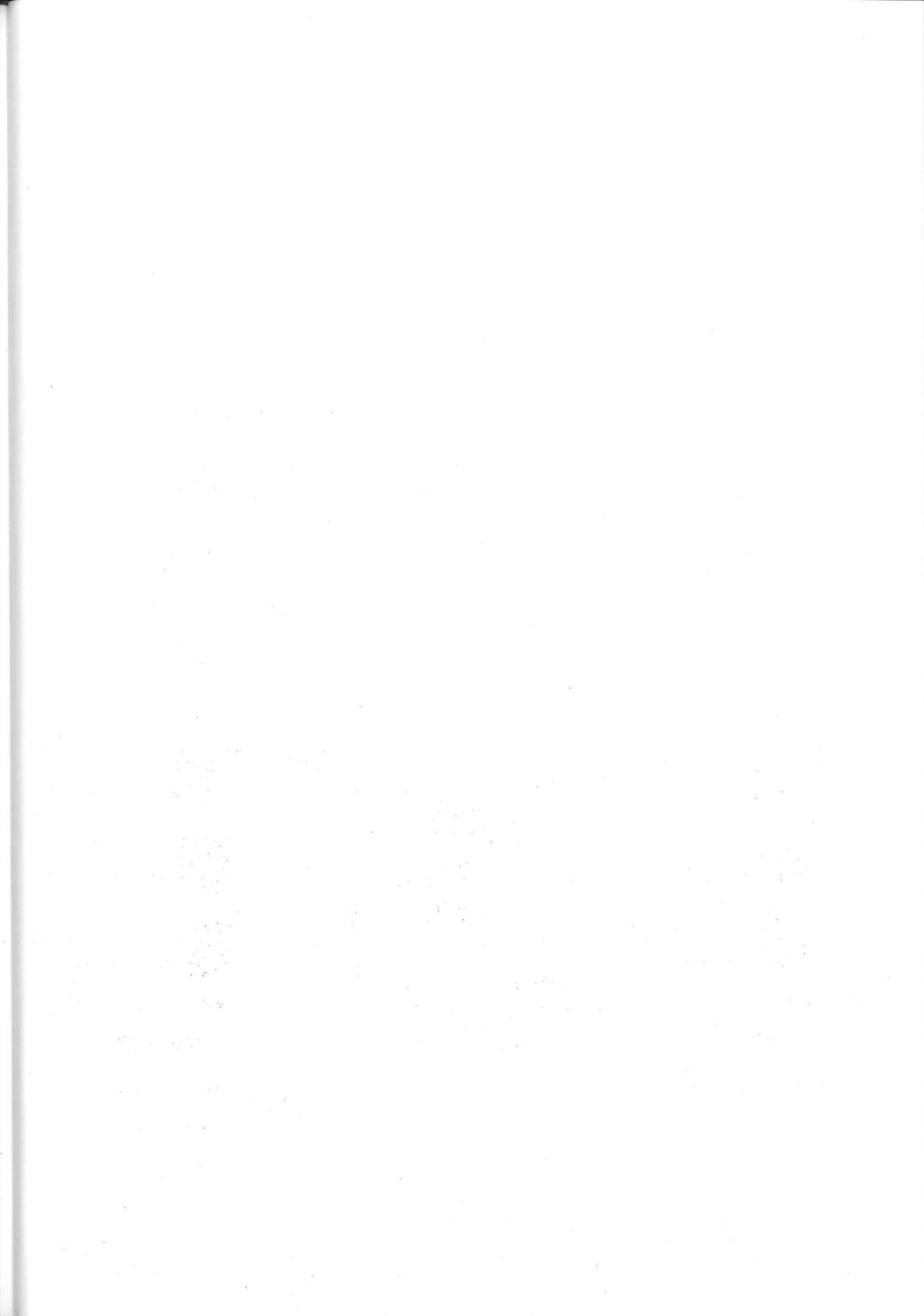
Remarquons que de $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{|a_v|}{1+v}\right)^2 < \sum_{v=1}^{\infty} |a_v|^2$, (17) a un sens toutes les fois que (16). Cependant, on peut se produire $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{|a_v|}{1+v}\right)^2 < \infty$ avec $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v|^2 = \infty$, ce qui montre, par exemple, la fonction

$$f(z) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\alpha_v}{\ln(1+v)} z^v, \quad |\alpha_v| = 1,$$

dans laquelle $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{ln^2(1+v)} = \infty$, tandis que $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(1+v)^2 ln^2(1+v)} < \infty$, de cette manière, pour cette fonction, l'expression (16) n'a pas le sens, car elle est égale à zéro, mais (17), comme la limite inférieure des modules de ses zéros, est différente de zéro.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Petrovitch *Remarque sur les zéros de Taylor*, Bull. Soc. Math. France Paris, XXIX, (1901).
- [2] E. Landau, *Über eine Aufgabe aus der Funktionentheorie*, Tôhoku Math. J. vol. 5 (1914).
- [3] P. Montel, *Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynômes*, Comm. Math. Helvetici, Zürich, 7, (1934).
- [4] D. Markovitch, *Sur la limite inférieure des modules des zéros d'un polynôme*, Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. Math. Belgrade, 2 (1948).
- [5] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, seconde édition.



D. M. Simeunović || SUR LE CERCLE QUI CONTIENT AU MOINS
UN ZÉRO D'UN POLYNÔME ET LES QUESTIONS
QUI S'Y RATTACHENT

(Communiqué le 9 février 1968)

1. Dans cette note nous allons considérer le rapport entre les zéros z_1, z_2, \dots, z_n d'un polynôme

$$(1) \quad P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n, \quad a_n \neq 0,$$

et la valeur de ce polynôme dans un point ξ fixe, mais arbitraire, du plan complexe. Nous démontrerons, tout d'abord, la proposition suivante:

Le cercle dont le centre est ξ et le rayon

$$r_P(\xi) = \sqrt[n]{\left| \frac{P(\xi)}{a_n} \right|}$$

contient au moins un zéro du polynôme (1).

Ceci est presque évident. La valeur du polynôme (1) au point ξ peut être aussi exprimée par la relation suivante

$$(2) \quad a_n (\xi - z_1) (\xi - z_2) \dots (\xi - z_n) = P(\xi).$$

Soit z le zéro du polynôme (1), le plus proche de ξ . Alors de (2), il résulte

$$|z - \xi|^n < \left| \frac{P(\xi)}{a_n} \right|,$$

d'où

$$(3) \quad |z - \xi| < \sqrt[n]{\left| \frac{P(\xi)}{a_n} \right|},$$

ce qui prouve l'assertion.

2. *Applications.* En prenant plusieurs différentes valeurs pour ξ , on obtient une suite de cercles contenant au moins un zéro du polynôme (1). Ces exemples donnent alors de divers résultats obtenus par des voies différentes.

Exemple 1. Si l'on prend pour ξ le zéro d'un polynôme dont on a retranché un terme (Abschnitts-Polynôme) du polynôme (1), par exemple un zéro de

$$Q(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1},$$

on aura, d'après (3), qu'au moins un zéro z du polynome (1), satisfait à la relation

$$|z - \xi| < |\xi|.$$

d'où

$$(4) \quad |z| < 2|\xi|.$$

Le résultat (4) a été obtenu par G. Szegő [1].

Si le polynome (1) a la forme

$$(5) \quad P(z) = 1 + z^p + a_n z^n, \quad n > p > 1,$$

et si α_i ($i = 1, 2, \dots, p$) désignent les zéros du polynome

$$Q(z) = 1 + z^p,$$

alors de (3) il s'ensuit que chacun des cercles

$$|z - \alpha_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

contient au moins un zéro de (5) (voir le résultat de D. Marković [2]).

Exemple 2. Considérons les polynomes

$$(6) \quad P(z) = z^n + A_k z^{n-k} + A_{k+1} z^{n-k-1} + A_{k+2} z^{n-k-2} + \dots + A_n \quad (A_k \neq 0),$$

$$(7) \quad Q(z) = A_{k+1} z^{n-k-1} + A_{k+2} z^{n-k-2} + \dots + A_n.$$

G. v. Sz. Nagy [3] a démontré le théorème suivant:

Si le polynome (7) admet au moins un zéro dans le cercle $|z| < r$, alors le polynome (6) aura au moins un zéro dans le cercle

$$(8) \quad |z| < 2r + |A_k|^{\frac{1}{k}}.$$

Nous allons montrer que (8) peut être précisé. En réalité, le théorème suivant sera valable:

Théorème I. Si le polynome (7) admet au moins un zéro dans le cercle $|z| < r$, alors le polynome (6) admet au moins un zéro dans le cercle

$$|z| < 2r + \left[\frac{|A_k|}{\binom{n}{k}} \right]^{\frac{1}{k}}.$$

Démonstration. Désignons par ξ le zéro du polynome (7). Alors, d'après (3), pour au moins un zéro de (6), on a

$$|z - \xi| < \sqrt[n]{|\xi^n + A_k \xi^{n-k}|} < \sqrt[n]{|\xi|^n + |A_k| |\xi|^{n-k}} < |\xi| + \left[\frac{|A_k|}{\binom{n}{k}} \right]^{\frac{1}{k}};$$

des lors:

$$|z| < 2|\xi| + \left[\frac{|A_k|}{\binom{n}{k}} \right]^{\frac{1}{k}},$$

c'est-à-dire, à cause de $|\xi| < r$, on a

$$|z| < 2r + \left[\frac{|A_k|}{\binom{n}{k}} \right]^{\frac{1}{k}},$$

ce qui prouve le théorème I.

Exemple 3. Soient

$$(9) \quad P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

$$(10) \quad Q(z) \equiv P(z) - z^n - a_k z^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Alors le théorème suivant a lieu:

Théorème II. *Si le polynome (10) admet au moins un zéro dans le cercle $|z| < r$, alors le polynome (9) aura au moins un zéro dans le cercle*

$$(11) \quad |z| < 2r + \left[\frac{|a_k|}{\binom{n}{k}} \right]^{\frac{1}{k}}.$$

Pour $k=n$, r est égal à zéro et (11) se réduit à

$$|z| < |a^n|^{\frac{1}{n}}.$$

La démonstration du théorème II est semblable à celle du théorème I. Enfin, voici encore un exemple.

Exemple 4. D'après notre proposition, chaque cercle

$$|z - \xi| < (e^{|\xi|} n!)^{\frac{1}{n}},$$

en particulier le cercle

$$|z| < (n!)^{\frac{1}{n}},$$

contient au moins un zéro du polynome

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Étant donné que l'on a, d'après la formule de Stirling,

$$(n!)^{\frac{1}{n}} < \frac{n}{e} (3\pi n)^{\frac{1}{2n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

on peut dire qu'au moins un zéro de $P_n(z)$ est contenu dans le cercle

$$|z| < \frac{n}{e} (3\pi n)^{\frac{1}{2n}},$$

pour tout $n = 1, 2, \dots$, et pour $n > 6$ dans le cercle

$$|z| < \frac{2}{e} n.$$

Les deux derniers résultats complètent ceux que nous avons obtenus dans [4].

Toutes les assertions précédentes sont aussi valables, évidemment, pour les polynomes

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} z^k \quad \text{avec} \quad |a_k| < 1 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

RÉFÉRENCES

[1] G. SZEGÖ, *Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace „Über die Wurzeln algebraischer Gleichungen“*, Math. Zeit. vol. 13 (1922) pp. 28—55.

[2] D. MARKOVIĆ, *Uopštenje jednog stava Hurwitz-a*, Vesnik Друштва Математичара и Физичара Н. Р. Србије 1 (1949), 113—115.

[3] G. v. SZ. NAGY, *Generalization of certain theorems of G. Szegö on the location of zeros of polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 53 (1947) pp. 1164—1169.

[4] D. M. SIMEUNOVIĆ, *Sur les zéros du polynôme $\sum_{v=0}^n \frac{z^v}{v}$; $n=1, 2, \dots$* , Математички весник 2 (17) 1965, 259—261.

SUR LES ZÉROS DES POLYNÔMES DE COMPOSITION

D. M. Simeunović

(Communiqué le 17 Décembre 1969)

Nous démontrerons plusieurs théorèmes sur les zéros des polynômes de composition, qui généralisent certains résultats connus, et permettent d'obtenir, dans certains cas, des limites plus précises pour les modules des zéros des polynômes.

Nous remarquons aussi que le théorème 4 concernant les polynômes de composition peut être formulé pour des fonctions entières donnés par leurs séries de Taylor.

D'après la règle de Descartes, l'équation

$$C_0 + C_1 z + \dots + C_{n-1} z^{n-1} - C_n z^n = 0, \quad C_0 C_n \neq 0, \quad C_k > 0 \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

n'a qu'une racine positive, tandis que l'équation

$$C_0 + C_1 z + \dots + C_{p-1} z^{p-1} - C_p z^p + C_{p+1} z^{p+1} + \dots + C_n z^n = 0$$

$$C_0 C_p C_n \neq 0, \quad 0 < p < n$$

peut avoir, au plus, deux racines positives (y compris le cas de racines doubles). En nous appuyant sur ces faits, nous démontrerons les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. Si R_1 est une racine positive de l'équation

$$(1) \quad \Phi_1(z) \equiv A_0 + A_1 z + \dots + A_{n-1} z^{n-1} - A_n z^n = 0, \quad A_0 A_n \neq 0, \quad A_k > 0,$$

la racine positive R_s de l'équation

$$(2) \quad \Phi_s(z) \equiv A_0^s + A_1^s z + \dots + A_{n-1}^s z^{n-1} - A_n^s z^n = 0 \quad (1 < s < \infty)$$

satisfera à la condition

$$(3) \quad R_s < R_1^s.$$

Démonstration. Pour $z = R_1$, il résulte de (1) que $A_n R_1^n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k R_1^k$, d'où

$$A_n^s R_1^{ns} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k R_1^k \right)^s > \sum_{k=0}^{n-1} A_k^s R_1^{ks},$$

c'est-à-dire

$$A_0^s + A_1^s R_1^s + \dots + A_{n-1}^s R_1^{(n-1)s} - A_n^s R_1^{ns} < 0,$$

ce qui, d'après (2), donne $\Phi_s(R_1^s) < 0$.

Les inégalités $\Phi_s(0) > 0$ et $\Phi_s(R_1^s) < 0$, ajoutées au fait que $\Phi_s(z) = 0$ possède une seule racine positive R_s , assurent que $0 < R_s < R_1^s$.

Théorème 2. Si l'équation

$$(4) \quad F_1(z) \equiv A_0 + A_1 z + \dots + A_{p-1} z^{p-1} - A_p z^p + A_{p+1} z^{p+1} + \dots + A_n z^n = 0,$$

$$A_0 A_p A_n \neq 0, \quad 0 < p < n$$

a deux racines positives r_1 et R_1 , $r_1 < R_1$, l'équation

$$(5) \quad F_s(z) \equiv A_0^s + A_1^s z + \dots + A_{p-1}^s z^{p-1} - A_p^s z^p + A_{p+1}^s z^{p+1} + \dots + A_n^s z^n = 0$$

$$(1 < s < \infty)$$

a également deux racines positives r_s et R_s , $r_s < R_s$, qui satisfont aux conditions

$$r_s < r_1^s, \quad R_1^s < R_s.$$

Démonstration. Pour $z = r_1$ il résulte de (4) que $A_p r_1^p = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k r_1^k$, d'où

$$A_p^s r_1^{ps} = \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k r_1^k \right)^s > \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k^s r_1^{ks},$$

c'est-à-dire

$$A_0^s + A_1^s r_1^s + \dots + A_{p-1}^s r_1^{(p-1)s} - A_p^s r_1^{ps} + A_{p+1}^s r_1^{(p+1)s} + \dots + A_n^s r_1^{ns} < 0,$$

ce qui, d'après (5), signifie que $F_s(r_1^s) < 0$.

Comme $F_s(0) > 0$ et $F_s(r_1^s) < 0$, il n'existe qu'un seul r_s , avec $0 < r_s < r_1^s$, pour lequel on a $F_s(r_s) = 0$.

De même, pour $z = R_1$ il résulte de (4) que $A_p R_1^p = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k R_1^k$, d'où

$$A_p^s R_1^{ps} = \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k R_1^k \right)^s > \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k^s R_1^{ks},$$

c'est-à-dire

$$A_0^s + A_1^s R_1^s + \dots + A_{p-1}^s R_1^{(p-1)s} - A_p^s R_1^{ps} + A_{p+1}^s R_1^{(p+1)s} + \dots + A_n^s R_1^{ns} < 0,$$

ce qui, d'après (5), signifie que $F_s(R_1^s) < 0$.

Enfin, manifestement, $F_s(0) > 0$ et $F_s(+\infty) > 0$.

Le fait que $0 < r_1 < R_1$, et les inégalités $F_s(0) > 0$, $F_s(r_1^s) < 0$, $F_s(R_1^s) < 0$ et $F_s(+\infty) > 0$ démontrent que $F_s(z) = 0$ possède au moins deux racines positives r_s et R_s , satisfaisant aux inégalités $0 < r_s < r_1^s < R_1^s < R_s < +\infty$, donc aussi à $r_s < R_s$. En vertu de la règle de Descartes, $F_s(z) = 0$ ne peut posséder d'autres racines positives.

Nous démontrerons maintenant encore deux théorèmes sur les polynômes de composition.

Théorème 3. Soit R_s la racine positive (unique) de l'équation

$$(6) \quad A_0^s + A_1^s R_s + \dots + A_{n-1}^s R_s^{n-1} - A_n^s R_s^n = 0, \quad A_n \neq 0, \quad s > 1.$$

Alors tous les zéros du polynôme de composition

$$(7) \quad P(z) = \sum_{k=0}^n a_k b_k z^k, \quad b_n \neq 0, \quad |a_k| = A_k, \quad |b_k| = B_k$$

sont contenus dans chacun des cercles

$$(8) \quad |z| < R_s^{\frac{1}{s}} (1 + M_1^t)^{\frac{1}{t}} < R_1 (1 + M_1^t)^{\frac{1}{t}},$$

$$(9) \quad |z| < R_s^{\frac{1}{s}} M_2 < R_1 M_2$$

où on a posé

$$M_1 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{B_k}{B_n} \right)$$

$$M_2 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{B_k}{B_n \alpha_k^t} \right)^{\frac{1}{n-k}}, \quad \alpha_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k < 1$$

avec $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$.

Démonstration. Soit

$$(10) \quad z = u \lambda$$

un zéro du polynôme (7). On aura alors

$$A_n B_n |u|^n |\lambda|^n < \sum_{k=0}^{n-1} A_k |u|^k B_k |\lambda|^k,$$

c'est-à-dire

$$(11) \quad A_n |u|^n < \sum_{k=0}^{n-1} A_k |u|^k \frac{B_k}{B_n} \frac{1}{|\lambda|^{n-k}}.$$

En appliquant au second membre de (11) l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$, on obtient

$$(12) \quad A_n^s |u|^{ns} < \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k^s |u|^{ks} \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{B_k}{B_n} \right)^t \cdot \frac{1}{|\lambda|^{(n-k)t}} \right)^{\frac{s}{t}}.$$

Soit $M_1 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{B_k}{B_n} \right)$ avec $|\lambda| > 1$. Il résulte alors de (12)

$$A_n^s |u|^{ns} < \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k^s |u|^{ks} \right) \left(\frac{M_1^t}{|\lambda|^t} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{tv}} \right)^{\frac{s}{t}},$$

c'est-à-dire

$$(13) \quad A_n^s |u|^{ns} < \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k^s |u|^{ks} \right) \left(\frac{M_1^t}{|\lambda|^t - 1} \right)^{\frac{s}{t}}.$$

Pour $|\lambda| = (1 + M_1^t)^{\frac{1}{t}}$, $|u| = \rho^{\frac{1}{s}}$ (13) se réduit à

$$A_n^s \rho^n < \sum_{k=0}^{n-1} A_k^s \rho^k$$

ce qui, d'après (6), signifie que $\rho < R_s$, d'où résulte, à la suite de (10), la première des inégalités de (8), tandis que la deuxième résulte de (3) (théorème 1).

Pour démontrer (9), supposons que nous ayons dans (12)

$$\left(\frac{B_k}{B_n} \cdot \frac{1}{|\lambda|^{n-k}} \right)^t < \alpha_k, \quad \alpha_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k < 1,$$

ce qui signifie que

$$|\lambda| < \left(\frac{B_k}{B_n \alpha_k^{\frac{1}{t}}} \right)^{\frac{1}{n-k}}.$$

Pour

$$(14) \quad |\lambda| = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{B_k}{B_n \alpha_k^{\frac{1}{t}}} \right)^{\frac{1}{n-k}}, \quad |u| = \rho^{\frac{1}{s}}$$

on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{B_k}{B_n} \cdot \frac{1}{|\lambda|^{n-k}} \right)^{\frac{1}{t}} < 1$$

et (12) se réduit à

$$A_n \rho^n < \sum_{k=0}^{n-1} A_k \rho^k,$$

ce qui, d'après (6), nous donne $\rho < R_s$, d'où résulte, à la suite de (10) et de (14), la première des inégalités (9), tandis que la seconde résulte également de (3) (théorème 1)

Lorsque $t \rightarrow \infty$, alors $s \rightarrow 1$ et (9) se réduit à

$$|z| < R_1 \bar{M}_2, \quad \bar{M}_2 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{B_k}{B_n} \right)^{\frac{1}{n-k}},$$

ce qui est un résultat connu, obtenu par D. Markovitch [4].

En particulier, pour $a_k = 1$ ($k=0, 1, \dots, n$) le polynôme (7) se réduit à

$$(15) \quad P(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k.$$

Dans ce cas, la racine positive de l'équation (6) est R_s , $1 < R_s < 2$, ce qui signifie que tous les zéros du polynôme (15) sont contenus dans chacun des cercles

$$(16) \quad |z| < 2^{\frac{1}{s}} (1 + M_1')^{\frac{1}{t}},$$

$$(17) \quad |z| < 2^{\frac{1}{s}} M_2.$$

Lorsque $s \rightarrow \infty$, on a $t \rightarrow 1$ et (16) se réduit à

$$|z| < 1 + M_1,$$

et ceci est le résultat classique de Cauchy [1], tandis que (17) se réduit, dans ce cas, à

$$|z| < M_2^* = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{B_k}{B_n \alpha_k} \right)^{\frac{1}{n-k}}. \quad \alpha_k < 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k < 1$$

ce qui est le résultat obtenu par Fujiwara [3] (méthode de Fujiwara).

Quand $t \rightarrow \infty$, on a $s \rightarrow 1$ et (17) se réduit à

$$|z| < 2 M^*, \quad M^* = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{B_k}{B_n} \right)^{\frac{1}{n-k}} \quad (\text{Montel [5], Dieudonné [2]}).$$

Exemple. Soient

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^5 a_k z^k = 9 + 6z + 3z^2 + 4z^3 + z^4 + z^5,$$

$$f_2(z) = \sum_{k=0}^5 b_k z^k = 1 + z + 3z^2 + 2z^3 + 4z^4 + 2z^5.$$

On aura alors

$$P(z) = \sum_{k=0}^5 a_k b_k z^k = 9 + 6z + 9z^2 + 8z^3 + 4z^4 + 2z^5.$$

L'équation (6) pour $s=1$ dans ce cas est

$$9 + 6R_1 + 3R_1^2 + 4R_1^3 + R_1^4 - R_1^5 = 0;$$

sa racine positive est $R_1 = 3$. Nous avons ensuite, dans notre cas

$$\bar{M}_2 = \max_{0 \leq k \leq 4} \left(\frac{B_k}{B_5} \right)^{\frac{1}{5-k}} = 2$$

d'où on a $R_1 \bar{M}_2 = 6$.

Pour $s=t=2$ l'équation (6) est

$$81 + 36R_2 + 9R_2^2 + 16R_2^3 + R_2^4 - R_2^5 = 0$$

avec la racine positive $R_2 < 5$. Nous avons $M_1 = \max_{0 \leq k \leq 4} \left(\frac{B_k}{B_5} \right) = 2$, ce qui donne d'après (8)

$$\frac{1}{R_2^2} (1 + M_1^2)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{25} = 5.$$

Donc, pour $s=t=2$ tous les zéros du polynôme de composition $P(z)$ sont contenus, pour l'exemple considéré, dans le cercle $|z| < 5$, tandis que du théorème de D. Markovitch [4] on aurait dans ce cas la conclusion que tous les zéros du polynôme donné $P(z)$ se trouvent dans le cercle $|z| < 6$.

Théorème 4. Si l'équation

$$(18) \quad A_0^s + A_1^s R_s + \dots + A_{s-1}^s R_s^{s-1} - A_p^s R_s^p + A_{p+1}^s R_s^{p+1} + \dots + A_n^s R_s^n = 0,$$

$$A_p \neq 0 \quad (1 < s < \infty)$$

a deux racines positives R'_s et R''_s , avec $R'_s < R''_s$, le polynôme de composition

$$(19) \quad f(z) = \sum_{k=0}^n a_k b_k z^k, \quad b_p \neq 0 \quad |a_k| = A_k, \quad |b_k| = B_k$$

admet alors exactement p zéros dans le cercle

$$(20) \quad |z| < R'_s \frac{1}{s} M$$

et pas de zéros dans l'anneau circulaire

$$(21) \quad R'_s \frac{1}{s} M < |z| < R''_s \frac{1}{s} M,$$

s'il existe un nombre positif M tel que

$$(22) \quad \max_{0 \leq k \leq p-1} \left(\frac{B_k}{B_p \alpha_k^{\frac{1}{t}}} \right)^{\frac{1}{p-k}} < M < \min_{p+1 \leq k \leq n} \left(\frac{B_p \alpha_k^{\frac{1}{t}}}{B_k} \right)^{\frac{1}{k-p}}$$

avec $\alpha_k > 0$, $\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n \alpha_k < 1$; $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$, $t > 1$.

Démonstration. Soit

$$z = u \lambda, \quad (|\lambda| = M)$$

et ε un nombre positif pour lequel on a

$$(23) \quad R'_s + \varepsilon < |u|^s < R''_s - \varepsilon.$$

Il résulte alors de (18) que

$$A_p^s |u|^{ps} > \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k^s |u|^{ks},$$

d'où

$$(24) \quad A_p |u|^p > \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k^s |u|^{ks} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Soit $M = |\lambda| > 1$ de façon que nous ayons

$$(25) \quad \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n \left(\frac{B_k}{B_p} \cdot \frac{1}{M^{p-k}} \right)^t \right)^{\frac{1}{t}} < 1.$$

Il résulte alors de (24), compte tenu de (25) et de l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$, $t > 1$ que

$$A_p |u|^p > \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k^s |u|^{ks} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n \left(\frac{B_k}{B_p} \cdot \frac{1}{M^{p-k}} \right)^t \right)^{\frac{1}{t}} > \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k |u|^k \left(\frac{B_k}{B_p} \cdot \frac{1}{M^{p-k}} \right),$$

d'où on a, à la suite de $M = |\lambda|$, que

$$(26) \quad A_p B_p |u \lambda|^p > \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k B_k |u \lambda|^k.$$

Soient

$$(27) \quad P(z) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n a_k b_k z^k, \quad Q(z) = a_p b_p z^p.$$

On a, sur le cercle $|z| = |u \lambda|$, de (27), compte tenu de (26), que

$$|P(z)| < \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n A_k B_k |u \lambda|^k < A_p B_p |u \lambda|^p = |Q(z)| \neq 0,$$

d'où il résulte, d'après le théorème de Rouché, que dans le cercle $|z| < |u \lambda|$, $f(z) = P(z) + Q(z)$ a le même nombre de zéros que $Q(z)$, donc p zéros. Étant donné que $|u|$, d'après (23), est un nombre arbitraire tel que

$$R_s'^{\frac{1}{s}} < |u| < R_s''^{\frac{1}{s}}$$

d'où

$$R_s'^{\frac{1}{s}} M < |u \lambda| < R_s''^{\frac{1}{s}} M, \quad (|\lambda| = M),$$

il en résulte que la fonction $f(z)$ a exactement p zéros dans le cercle $|z| < R_s'^{\frac{1}{s}} M$, et qu'elle n'a pas de zéros dans le domaine $R_s'^{\frac{1}{s}} M < |z| < R_s''^{\frac{1}{s}} M$, où M est nombre positif pour lequel sont satisfaites les relations (22).

Dans notre cas M est choisi dans (22) de manière que

$$\left(\frac{B_k}{B_p} \cdot \frac{1}{M^{p-k}}\right)^t < \alpha_k, \quad \alpha_k > 0, \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^n \alpha_k < 1.$$

Les dernières relations sont satisfaites si

$$M > \left(\frac{B_k}{B_p} \cdot \frac{1}{\alpha_k^t}\right)^{\frac{1}{p-k}}, \quad k=0, 1, \dots, p-1,$$

$$M < \left(\frac{B_p \alpha_k^t}{B_k}\right)^{\frac{1}{k-p}}, \quad k=p+1, p+2, \dots, n,$$

c'est-à-dire si les relations (22) sont satisfaites, ce qui démontre complètement le théorème 4.

Si l'équation (18) a deux racines positives distinctes R_1' et R_1'' pour $s=1$, elle a, d'après le théorème 2, deux racines positives distinctes également R_s' et R_s'' pour chaque $s > 1$. Pour cette raison nous avons que $t \rightarrow \infty$ quand $s \rightarrow 1$, et le polynôme (19) a, d'après (20), exactement p zéros dans le cercle

$$|z| < R_1' \bar{M}$$

et d'après (21), pas de zéros dans l'anneau circulaire

$$R_1' \bar{M} < |z| < R_1'' \bar{M}$$

où on a

$$\max_{0 \leq k \leq p-1} \left(\frac{B_k}{B_p}\right)^{\frac{1}{p-k}} < \bar{M} < \min_{p+1 \leq k \leq n} \left(\frac{B_p}{B_k}\right)^{\frac{1}{k-p}}.$$

Si on a encore $b_k = 1$ ($k=0, 1, \dots, n$), alors $\bar{M} = 1$, et on obtient dans ce cas le théorème classique de Pellet [6] pour le polynôme $\sum_{k=0}^n a_k z^k$.

Remarque. Par le même procédé utilisé dans la démonstration du théorème 4 on peut démontrer le

Théorème 4'. Soit la fonction donnée, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, converge absolument pour tous les z et soit la fonction $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ admet un rayon de convergence $r > 0$. Si l'équation

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{\infty} A_k' R_s^k - A_p' R_s^p = 0 \quad (A_p' \neq 0, \quad A_k = |a_k|; \quad 1 < s < \infty)$$

*) Je tiens à remercier le professeur Stojaković de l'Université de Novi Sad, de m'avoir suggéré l'extension du théorème 4 aux fonctions entières.

possède deux racines positives R'_s et R''_s , avec $R'_s < R''_s$, alors la fonction composée

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k \quad (b_p \neq 0, B_k = |b_k|)$$

a exactement p zéros dans le cercle

$$|z| < R'_s M$$

et pas de zéros dans l'anneau circulaire

$$R'_s M < |z| < R''_s M$$

à condition qu'il existe un nombre positif M tel que

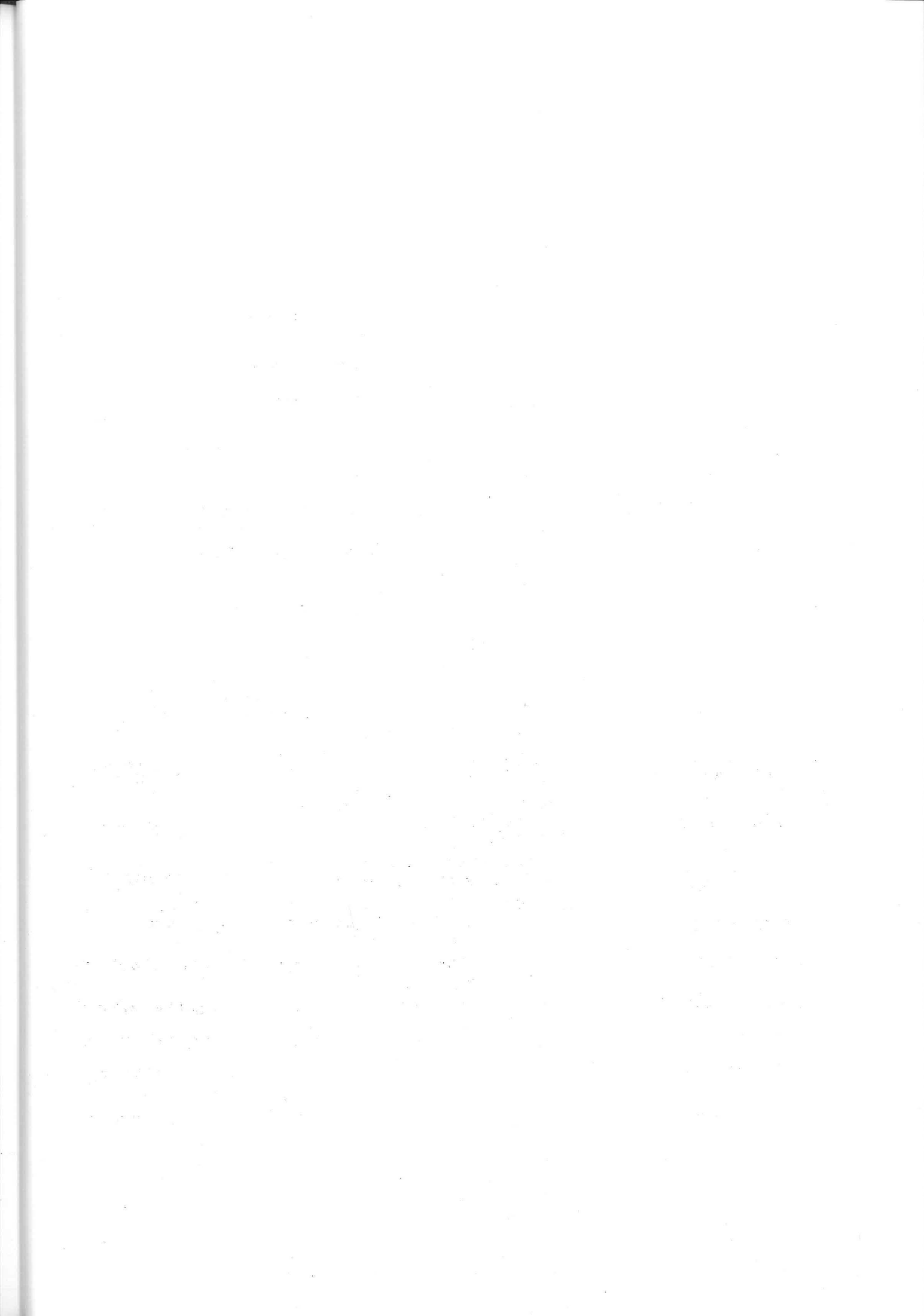
$$\max_{0 \leq k \leq p-1} \left(\frac{B_k}{B_p \alpha_k^{\frac{1}{t}}} \right)^{\frac{1}{p-k}} < M < \min_{k \geq p+1} \left(\frac{B_p \alpha_k^{\frac{1}{t}}}{B_k} \right)^{\frac{1}{k-p}}$$

avec

$$\alpha_k > 0, \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{\infty} \alpha_k < 1; \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1, \quad t > 1.$$

R É F É R E N C E S

- [1] Cauchy, A. L., *Exercices de mathématique*, Oeuvres (2), Vol. 9, 1829, 122. — *Calcul des indices des fonctions*, Oeuvres (2), Vol. 1, 1829, 416—446. — *Journ. Ecole Polytech.* 25 (1837), 176—229.
- [2] Dieudonné, J., *La théorie analytique des polynômes d'une variable*, *Mém. Sci. Math.* 93 (1938).
- [3] Fujiwara, M., *Ueber die obere Schranke des absoluten Betrages des Wurzeln einer algebraischen Gleichung*, *Tôhoku Math. Journ.* 10 (1916), 167—171.
- [4] Markovitch, D., *On the composite polynomials*, *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie* 3 (1951), No. 3—4, 11—14.
- [5] Montel, P., *Sur la limite supérieure du module des racines d'une équation algébrique*, *C. R. Soc. Sci. Varsovie* 24 (1932), 317—326, — *Sur la limite supérieure des modules des zéros des polynômes*, *C. R. Acad. Sci. Paris* 193 (1931), 974—976.
- [6] Pellet, M. A., *Sur une mode de séparation des racines des équations et la formule de Lagrange*, *Bull. Sci. Math.* 5 (1881), 393—395.



SUR CERTAINES INÉGALITÉS INTÉGRALES ET LEURS APPLICATIONS

D. M. Simeunović

(Communiqué le 27 Novembre 1970)

1. Le but de cet article est de donner une preuve unifiée pour une suite d'inégalités élémentaires habituellement obtenues par des procédés différents et quelquefois compliqués (voir [2]—[6]). Le procédé que nous exposons ici, nous permet également d'établir d'une manière simple la convexité logarithmique d'une classe générale de fonctions définies par des intégrales où figurent des paramètres. Cette convexité logarithmique de différentes fonctions est parfois démontrée d'une manière plus compliquée, comme par exemple dans le cas de la fonction $\Gamma(t)$ (voir, par exemple [7]).

Nous considérerons ici les propriétés des fonctions données par des intégrales définies où figurent des paramètres dans l'exposant. La forme générale des telles fonctions, considérées dans cet article, est donnée par les intégrales:

$$(a) \quad I(t) = \int_a^b [f(x)]^t g(x) dx,$$

$$(b) \quad I(t, u) = \int_a^b [f(x)]^t [g(x)]^u h(x) dx.^{1)}$$

Nous démontrerons, dans la section 2, deux théorèmes sur les intégrales (a) et (b), et ensuite, dans la section 3, nous donnerons certaines applications de ces inégalités, dans des cas où le choix des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est simple, ce qui nous permettra d'obtenir immédiatement une suite d'inégalités élémentaires.

2. Théorème 1. Soient $f(x)$ et $g(x)$ des fonctions non négatives sur le segment $[a, b]$, et soit t un paramètre réel, tels que nous avons

$$(1) \quad I(t) = \int_a^b [f(x)]^t g(x) dx.$$

Nous avons alors:

1° La fonction $I(t)$ satisfait à l'inégalité

$$(2) \quad I(s + \alpha + \beta) < [I(s + \alpha p)]^{\frac{1}{p}} [I(s + \beta q)]^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1 \right),$$

à condition qu'existent les intégrales au second membre.

¹⁾ Le segment $[a, b]$ peut être infini.

2° La fonction $I(t)$, définie par (1) jouit de la convexité logarithmique, c'est-à-dire que

$$(3) \quad I^2\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) < I(t_1) I(t_2).$$

Cette fonction est par suite également convexe au sens ordinaire du terme.

Remarque. L'intégrale $I(t)$ définie par (a) peut être donnée dans une forme plus générale, comme une intégrale de Stieltjes:

$$I_1(t) = \int_a^b [f(x)]^t g(x) dh(x)$$

où $h(x)$ est une fonction non décroissante sur $[a, b]$. Les affirmations 1° et 2° sont alors valables dans une forme analogue.

Démonstration de 1°. Étant donné que

$$f^{s+\alpha+\beta} g = \left(f^{\frac{s}{p}+\alpha} g^{\frac{1}{p}}\right) \left(f^{\frac{s}{q}+\beta} g^{\frac{1}{q}}\right),$$

nous aurons dans notre cas, d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_a^b f^{s+\alpha+\beta} g dx = \int_a^b \left(f^{\frac{s}{p}+\alpha} g^{\frac{1}{p}}\right) \left(f^{\frac{s}{q}+\beta} g^{\frac{1}{q}}\right) dx < \left(\int_a^b f^{s+\alpha p} g dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b f^{s+\beta q} g dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

ce qui, d'après (1), représente l'inégalité (2).

Pour la preuve de 2° il faut poser, dans (2), $s=0$, $p=q=2$, $\alpha=\frac{t_1}{2}$, $\beta=\frac{t_2}{2}$.

Théorème 2. Soient $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ des fonctions non négatives sur le segment $[a, b]$, et t, u , des paramètres réels tels qu'existe la fonction

$$(4) \quad I(t, u) = \int_a^b [f(x)]^t [g(x)]^u h(x) dx.$$

Nous avons alors:

3° La fonction $I(t, u)$ satisfait à l'inégalité

$$(5) \quad I(s+\alpha+\beta, r+\gamma+\delta) < [I(s+\alpha p, r+\gamma p)]^{\frac{1}{p}} [I(s+\beta q, r+\delta q)]^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1\right),$$

à condition qu'existent les intégrales au second membre.

4° La fonction $I(t, u)$ possède la convexité logarithmique, c'est-à-dire

$$(6) \quad I^2\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{u_1+u_2}{2}\right) < I(t_1, u_1) I(t_2, u_2).$$

La démonstration de 3° s'obtient par l'application de l'inégalité de Hölder à l'identité

$$f^{s+\alpha+\beta} g^{r+\gamma+\delta} h = \left(f^{\frac{s}{p}+\alpha} g^{\frac{r}{p}+\gamma} h^{\frac{1}{p}} \right) \left(f^{\frac{s}{q}+\beta} g^{\frac{r}{q}+\delta} h^{\frac{1}{q}} \right).$$

Pour prouver 4° il faut poser dans (5) $s=r=0$, $p=q=2$, $\alpha = \frac{t_1}{2}$, $\beta = \frac{t_2}{2}$,

$$\gamma = \frac{u_1}{2}, \quad \delta = \frac{u_2}{2}.$$

Des exemples de fonctions de la forme (1), respectivement (4), sont donnés par les fonctions $\Gamma(t)$ et $B(t, u)$:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^t \cdot \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \quad (t > 0),$$

$$B(t, u) = \int_0^1 x^t (1-x)^u \cdot \frac{1}{x(1-x)} dx = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{u-1} dx \quad (t > 0, u > 0).$$

D'après le théorème 1, respectivement 2, ce sont des fonctions qui ont la convexité logarithmique.

Pour $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $p = q = 2$, $s = t$, on obtient de (2) l'inégalité

$$(2') \quad I^2(t+1) < I(t)I(t+2).$$

Pour $t = n-1 = 0, 1, 2, \dots$, (2') se réduit à l'inégalité

$$(2'') \quad I^2(n) < I(n-1)I(n+1), \quad n = 1, 2, \dots$$

obtenue par G. Pólya et G. Szegő [1, vol. I, sect. II, problème 199] en prenant des fonctions positives et continues $f(x)$ et $g(x)$ sur le segment $[a, b]$.

3. Applications. De (2), (3) et (2'), ainsi que de (5) et (6) on peut obtenir une suite d'inégalités particulières. Nous nous bornerons ici à un cas simple quant au choix des fonctions $f(x)$ et $g(x)$. Nous obtiendrons une inégalité et nous démontrerons, entre autre, qu'elle contient plusieurs résultats connus.

Exemple. Soient $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Nous avons alors, pour $t \neq 0$, d'après (1)

$$I(t) = \int_a^b x^t \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{b^t - a^t}{t}.$$

Pour $b > a > 0$ et $t > 0$ de (2') nous avons l'inégalité

$$\left(\frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{t+1} \right)^2 < \frac{(b^t - a^t)(b^{t+2} - a^{t+2})}{t(t+2)},$$

qu'on peut écrire dans la forme

$$\frac{(b^{t+1} - a^{t+1})^2}{(t+1)^2} < \frac{(b^{t+1} - a^{t+1})^2 - (b-a)^2 (ab)^t}{t(t+2)},$$

d'où

$$(7) \quad b^{t+1} - a^{t+1} > (t+1)(b-a)(ab)^{\frac{t}{2}}.$$

Si nous posons, dans (7), $t+1=r$, nous obtenons l'inégalité

$$(8) \quad b^r - a^r > r(b-a)(ab)^{\frac{r-1}{2}} \quad (b > a > 0; r > 1).$$

Cette relation devient une égalité pour $b=a$ ou $r=1$.

Si nous posons, dans (8), $b=y^{\frac{1}{s}}$, $a=x^{\frac{1}{s}}$ et $r=\frac{1}{s}$ ($0 < s < 1$) nous obtenons l'inégalité

$$(9) \quad y^s - x^s < s(y-x)(xy)^{\frac{s-1}{2}} \quad (y > x > 0; 0 < s < 1).$$

Ceci se réduit à l'égalité pour $y=x$ ou bien $s=0$, respectivement $s=1$.

De (8) et (9) on peut obtenir une suite d'inégalités particulières. Nous nous bornerons ici à l'inégalité (8) dont nous tirerons, entre autre, plusieurs résultats connus. Certains d'entre eux seront généralisés, d'autre seront rendus plus précis. Nous exposons certains de ces résultats, où n est un entier positif:

$$(10) \quad 1 - x^{2n} > 2nx^n(1-x) \quad (0 < x < 1) \quad [2, \text{ p. } 139]$$

$$(11) \quad \frac{x^{\alpha+1} - x^{-(\alpha+1)}}{x^\alpha - x^{-\alpha}} > \frac{\alpha+1}{\alpha x} \quad (\alpha > 0; x > 1) \quad [2, \text{ p. } 181]$$

$$(12) \quad \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}} > \frac{n+1}{n-1} \quad (a > 0; n > 2) \quad [2, \text{ p. } 142]$$

$$(13) \quad \frac{1 - x^{n+1}}{n+1} > \frac{1 - x^n}{n} \sqrt{x} \quad (0 < x < 1) \quad [3, \text{ p. } 123]$$

En posant $b=1$, $a=x$ ($0 < x < 1$) et $r=2n$ dans (8), on obtiendra l'inégalité

$$(14) \quad 1 - x^{2n} > 2nx^{n-\frac{1}{2}}(1-x) \quad (0 < x < 1).$$

Cette inégalité est plus précise que (10).

Si on pose, dans (8), $b=x^\alpha$, $a=x^{-\alpha}$ ($\alpha > 0; x > 1$) et $r=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$); donc $r > 1$) on obtient l'inégalité

$$(15) \quad \frac{x^{\alpha+\beta} - x^{-(\alpha+\beta)}}{x^\alpha - x^{-\alpha}} > \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \quad (\alpha > 0, \beta > 0; x > 1).$$

En substituant, dans (15) x par $\frac{1}{x}$, où on a maintenant $0 < x < 1$, on aura de nouveau l'inégalité (15), ce qui signifie qu'on a la relation

$$(16) \quad \frac{x^{\alpha+\beta} - x^{-(\alpha+\beta)}}{x^\alpha - x^{-\alpha}} > \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \quad (\alpha > 0, \beta > 0; x > 0 \text{ et } x \neq 1).$$

L'inégalité (16) peut être écrite dans la forme

$$(17) \quad \frac{x^{2\alpha+2\beta}-1}{x^\beta(x^{2\alpha}-1)} > \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \quad (\alpha > 0, \beta > 0; x > 1),$$

c'est-à-dire dans la forme

$$(18) \quad \frac{1-x^{2\alpha+2\beta}}{x^\beta(1-x^{2\alpha})} > \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \quad (\alpha > 0, \beta > 0; 0 < x < 1).$$

Pour $\beta = 1$ il résulte de (15)

$$(19) \quad \frac{x^{\alpha+1}-x^{-(\alpha+1)}}{x^\alpha-x^{-\alpha}} > \frac{\alpha+1}{\alpha} \quad (\alpha > 0; x > 1).$$

L'inégalité (19) est plus précise que (11).

Remarquons que le signe d'égalité dans (12) est valable pour $a = 1$. Pour cette raison nous considérerons le cas pour $a > 0$ et $n \neq 1$. Si on pose, dans (17), $\alpha = \frac{n-1}{2}$, $\beta = 1$ et $x = a > 1$ et en divisant le premier membre par $(a-1)$ on obtient l'inégalité (12) pour $a > 1$. On obtient la même inégalité de (18) pour $0 < a < 1$.

L'inégalité (13) résulte de (18) pour $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$.

On peut aussi obtenir, de (8), les inégalités suivantes:

$$2^n > 1 + n 2^{\frac{n-1}{2}} \quad [2, \text{ p. 119}]$$

$$\frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}} < \frac{1}{2n+1} \quad [2, \text{ p. 144}]$$

$$\alpha^n - 1 > n \left(\alpha^{\frac{n+1}{2}} - \alpha^{\frac{n-1}{2}} \right) \quad (\alpha > 1) \quad [2, \text{ p. 162}]$$

de même qu'une suite d'autres résultats. Ainsi, par exemple, pour $b = x^s$, $a = x^{-s}$ ($x > 1$, $s > 0$) on obtient de (8) l'inégalité

$$(20) \quad x^{rs} - x^{-rs} > r(x^s - x^{-s}) \quad (x > 1; r > 1, s > 0).$$

Si nous posons $x = e$ dans (20), nous obtiendrons l'inégalité

$$\text{sh } rs > r \text{ sh } s \quad (r > 1, s > 0).$$

En partant de (8) on peut obtenir d'autres résultats. Ainsi: Pour la fonction

$$(21) \quad f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k x^{r_k} \quad (c_k > 0, k = 1, 2, \dots, n; r_k > 1)$$

on a l'inégalité

$$(22) \quad f(b) - f(a) > (b-a) f'(\sqrt{ab}) \quad (b > a > 0).$$

Démonstration. De (21) on a

$$(23) \quad f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^n c_k (b^{r_k} - a^{r_k}).$$

D'après (8) on a les relations

$$b^k - a^k > r_k (b-a) (\sqrt{ab})^{k-1}, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

et d'après cela on peut écrire (23) sous la forme

$$f(b) - f(a) > (b-a) \sum_{k=1}^n c_k r_k (\sqrt{ab})^{k-1},$$

ce qui, en d'autres termes, représente (22) étant donné que

$$f'(\sqrt{ab}) = \sum_{k=1}^n c_k r_k (\sqrt{ab})^{k-1}.$$

Soit $r_k = k = 1, 2, \dots$, et soit la série

$$(24) \quad f(x) = c_0 + c_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k \quad (c_k > 0, k=2, 3, \dots)$$

convergente pour $|x| < R$. On a alors, pour $a, b \in [0, R]$, l'inégalité

$$f(b) - f(a) > (b-a) f'(\sqrt{ab}) \quad (b > a > 0).$$

Exemple. Étant donné que

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} x^{2k-1} \quad (c_{2k-1} > 0, k=1, 2, \dots; 0 < x < \frac{\pi}{2}),$$

on a

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha > (\beta - \alpha) (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{\alpha\beta}) \quad \left(\frac{\pi}{2} > \beta > \alpha > 0\right).$$

Considérons de nouveau la fonction

$$I(t) = \int_a^b x^t \cdot \frac{1}{x} dx \quad (b > a > 0),$$

d'où il résulte que $I(0) = \ln b - \ln a$, $I(1) = b - a$, $I(2) = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

L'inégalité (2'), pour $t=0$ se réduit à $I^2(1) < I(0)I(2)$, ce qui, pour notre exemple, mène à l'inégalité

$$(b-a)^2 < (\ln b - \ln a) \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \quad (b > a > 0),$$

qui pour $b > a > 0$ peut être écrite dans la forme

$$(25) \quad \frac{b+a}{2} > \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \quad (b > a > 0).$$

Il existe plusieurs preuves de l'inégalité (25). L'une d'elles est donnée dans [4], une autre dans [5, p. 158], une troisième dans [2, p. 192], et encore deux preuves dans [6, p. p. 273 et 274].

Partant du théorème 2 nous avons tiré la conclusion que la fonction $B(t, u)$ a la propriété de convexité logarithmique, d'où résulte, d'après (6), l'inégalité

$$B^2\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{u_1+u_2}{2}\right) < B(t_1, u_1) B(t_2, u_2),$$

qui se réduit, pour $t_1=p+r, t_2=p-r, u_1=q+s, u_2=q-s$ ($p>r>0, q>s>0$) à

$$(26) \quad B^2(p, q) < B(p+r, q+s) B(p-r, q-s).$$

Soit $f(x) = x^r(1-x)^s$ ($r>0, s>0$). On a alors

$$M = \max_{0 < x < 1} \{f(x)\} = \left(\frac{r}{r+s}\right)^r \left(\frac{s}{r+s}\right)^s.$$

A la suite de

$$\begin{aligned} B(p+r, q+s) &= \int_0^1 x^{p+r-1} (1-x)^{q+s-1} dx = \int_0^1 f(x) x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &< M \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \left(\frac{r}{r+s}\right)^r \left(\frac{s}{r+s}\right)^s B(p, q), \end{aligned}$$

(26) se réduit à l'inégalité

$$B(p, q) < \left(\frac{r}{r+s}\right)^r \left(\frac{s}{r+s}\right)^s B(p-r, q-s) \quad (p>r>0, q>s>0)$$

obtenue par P. Kesava Menon [8] (cf. [6], p. 289).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Pólya und G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, 1925. Traduction russe D. A. Raikov, Moscou, 1956.
- [2] D. S. Mitrinović, *Nejednakosti*, Beograd 1965.
- [3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge 1934. Traduction russe V. I. Levin, complétée par V. I. Levin et S. B. Steckin, Moscou 1948.
- [4] B. Ostle and H. L. Terwillinger, *Proceedings of the Montana Academy of Sciences*, 17 (1957), 69—70.
- [5] D. S. Mitrinović, *Elementary Inequalities*, Groningen 1964.
- [6] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.
- [7] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, 1927.
- [8] P. Kesava Menon, *Some inequalities involving the Γ - and ζ -functions*. *Math. Student* 11, 10—12 (1943).

Partant du théorème 2 nous avons tiré la conclusion que la fonction $B(t, u)$ a la propriété de convexité logarithmique, d'où résulte, d'après (6), l'inégalité

$$B^2\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{u_1+u_2}{2}\right) < B(t_1, u_1) B(t_2, u_2),$$

qui se réduit, pour $t_1 = p+r, t_2 = p-r, u_1 = q+s, u_2 = q-s$ ($p > r > 0, q > s > 0$) à

$$(26) \quad B^2(p, q) < B(p+r, q+s) B(p-r, q-s).$$

Soit $f(x) = x^r(1-x)^s$ ($r > 0, s > 0$). On a alors

$$M = \max_{0 < x < 1} \{f(x)\} = \left(\frac{r}{r+s}\right)^r \left(\frac{s}{r+s}\right)^s.$$

A la suite de

$$\begin{aligned} B(p+r, q+s) &= \int_0^1 x^{p+r-1} (1-x)^{q+s-1} dx = \int_0^1 f(x) x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &< M \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \left(\frac{r}{r+s}\right)^r \left(\frac{s}{r+s}\right)^s B(p, q), \end{aligned}$$

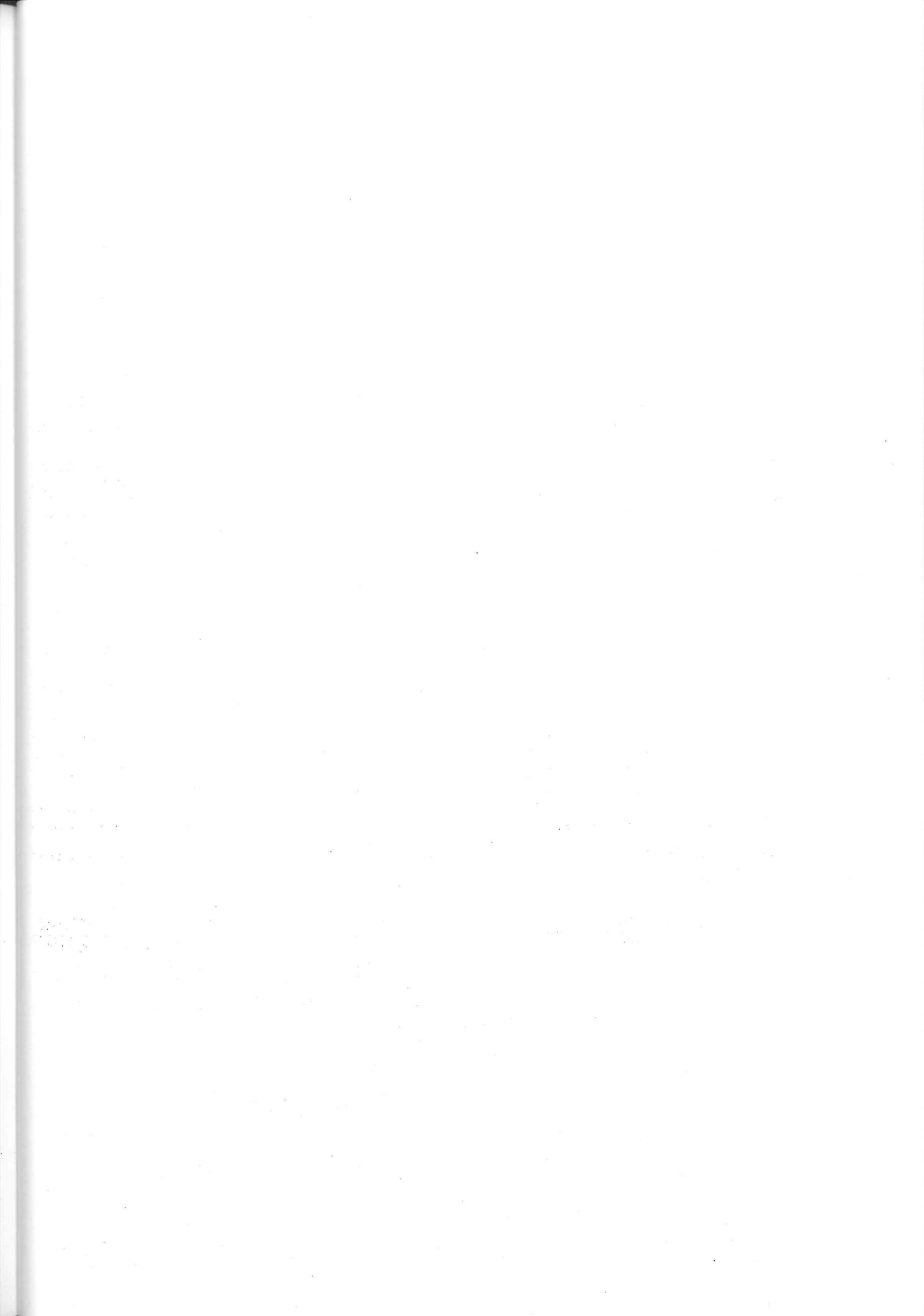
(26) se réduit à l'inégalité

$$B(p, q) < \left(\frac{r}{r+s}\right)^r \left(\frac{s}{r+s}\right)^s B(p-r, q-s) \quad (p > r > 0, q > s > 0)$$

obtenue par P. Kesava Menon [8] (cf. [6], p. 289).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Pólya und G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, 1925. Traduction russe D. A. Raikov, Moscou, 1956.
- [2] D. S. Mitrinović, *Nejednakosti*, Beograd 1965.
- [3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge 1934. Traduction russe V. I. Levin, complétée par V. I. Levin et S. B. Steckin, Moscou 1948.
- [4] B. Ostle and H. L. Terwillinger, *Proceedings of the Montana Academy of Sciences*, 17 (1957), 69—70.
- [5] D. S. Mitrinović, *Elementary Inequalities*, Groningen 1964.
- [6] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.
- [7] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, 1927.
- [8] P. Kesava Menon, *Some inequalities involving the Γ - and ζ -functions*. *Math. Student* 11, 10—12 (1943).



ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА, ФИЗИЧАРА И АСТРОНОМА СРС
И
МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ — БЕОГРАД

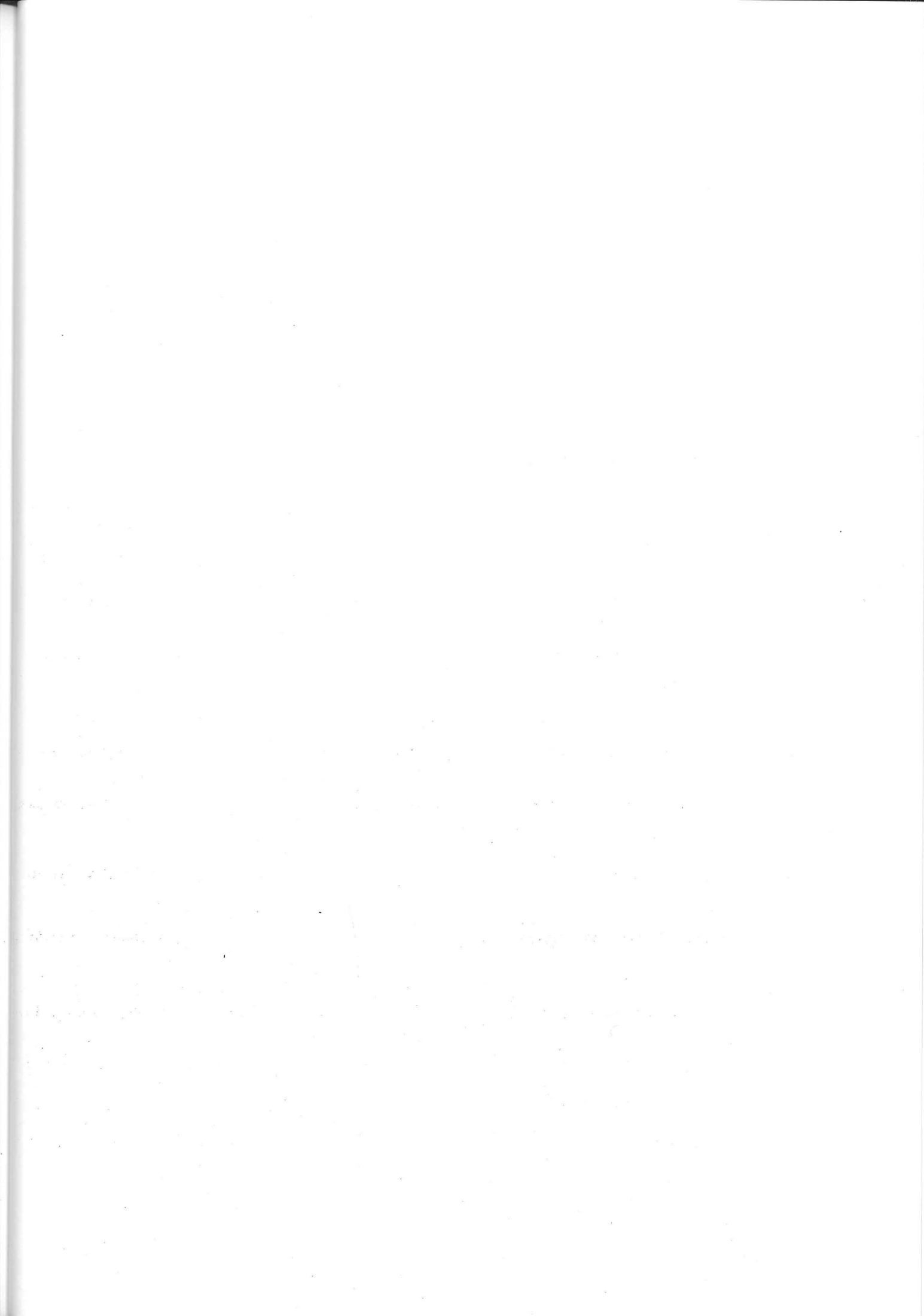
МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК

НОВА СЕРИЈА

КЊИГА 8 (23)

СВЕСКА 3

БЕОГРАД
1971



ПРОБЛЕМИ

Својим проблемима, који треба да буду оригинални, пожељно је да предлагачи прикључе решење и друга обавештења, нарочито о литератури. Решења се објављују шест месеци после објављивања проблема.

PROBLÈMES

Il est désirable d'adjoindre aux problèmes, qui doivent être originaux, leurs solutions ainsi que d'autres informations, surtout sur la littérature. Les solutions seront publiées dans six mois après leurs parutions.

РЕШЕНИ ПРОБЛЕМИ

199. Proposed by Alexandru Lupas, Institut de calcul, Cluj, Roumanie

Let $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ be a polynomial with the roots x_1, x_2, \dots, x_n , and such that $|a_k| \leq k^2 - \frac{4}{3}k + 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Prove that, for each real or complex root, holds the inequality

$$|x_j| < 3, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Solution with generalization by D. M. Simeunović and D. D. Adamović, University of Belgrade

For every zero $x = \rho e^{i\theta} \neq 0$ ($\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) of the polynomial P the following inequality

$$\rho^n \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \rho^{n-k}$$

holds. By the supposition

$$|a_k| \leq k^2 - \frac{4}{3}k + 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

we have further

$$\rho^n \leq \sum_{k=1}^n \left(k^2 - \frac{4}{3}k + 1 \right) \rho^{n-k},$$

or

$$1 \leq \sum_{k=1}^n \left(k^2 - \frac{4}{3}k + 1 \right) \rho^{-k}.$$

This means, since the function $g(t) = \sum_{k=1}^n \left(k^2 - \frac{4}{3}k + 1 \right) t^{-k}$ decreases for $t > 0$, that

$$\sum_{k=1}^n \left(k^2 - \frac{4}{3}k + 1 \right) t^{-k} < 1 \text{ implies } \rho < t.$$

Putting

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^n \left(k^2 - \frac{4}{3}k + 1 \right) t^{-k},$$

we obtain, for $t > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 - \frac{4}{3}k + 1 \right) t^{-k} = \frac{2t^2 + t + 3}{3(t-1)^3} = s(t).$$

Hence,

$$s_n(3) < s(3) = 1 \quad (n=1, 2, \dots);$$

i. e., by the above conclusion, we have, for each zero x of the polynomial P ,

$$|x| = \rho < 3,$$

what was to be proved.

We note that the upper bound 3 is the best possible obtainable by the above procedure. Namely, 3 is the unique root of the equation

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 - \frac{4}{3}k + 1 \right) t^{-k} = 1 \quad (t > 1),$$

because $s(t)$ decreases strictly for $t > 1$.

Generalization. The preceding considerations lead immediately to the following proposition:

Let $a_k (k=1, 2, \dots)$ be complex numbers such that

$$|a_k| \leq \alpha_k \quad (k=1, 2, \dots),$$

where the series

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k$$

has the positive radius of convergence R and infinitely many positive coefficients.

Then: if $f(R) \geq 1$, the equality $f\left(\frac{1}{t}\right) = 1$ has for $t \geq \frac{1}{R}$ the unique root t_0 , and for every zero ζ of the polynomial

$$P(z) = z^n + \sum_{k=1}^n a_k z^{n-k}$$

holds $|\zeta| < t_0$; if $f(R) < 1$, we have $|\zeta| < \frac{1}{R}$ for every zero ζ .

Examples. 1° If

$$|a_k| \leq \frac{1}{k!} \quad (k=1, 2, \dots),$$

then $|\zeta| < \frac{1}{\log 2}$, since in this case

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k! t^k} = e^{\frac{1}{t}} - 1 = 1$$

for $t = t_0 = \frac{1}{\log 2}$.

2° If

$$|a_k| \leq \alpha k \quad (k=1, 2, \dots; \alpha > 0),$$

then

$$|\zeta| < 1 + \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2},$$

because now

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} k t^{-k} = \frac{\alpha t}{(t-1)^2} = 1 \quad (t > 1)$$

$$\text{for } t = t_0 = \frac{\alpha + 2 + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}.$$

(Especially, for $\alpha = 1$ we have

$$|\zeta| < \frac{3 + \sqrt{5}}{2};$$

this result is due to *P. Montel*.)

3° If

$$|a_k| \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \quad (k=1, 2, \dots),$$

then

$$f(R) = f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1 < 1$$

and hence $|\zeta| < 1$.

Solution by the author

If $|x_j| \leq 1$ then $|x_j| < 3$; let us suppose that $|x_j| > 1$. Because

$$0 = |P(x_j)| = \left| x_j^n + \sum_{k=1}^n a_k x_j^{n-k} \right| \geq |x_j|^n - \left| \sum_{k=1}^n a_k x_j^{n-k} \right|$$

we observe that

$$(1) \quad 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|x_j|^k}.$$

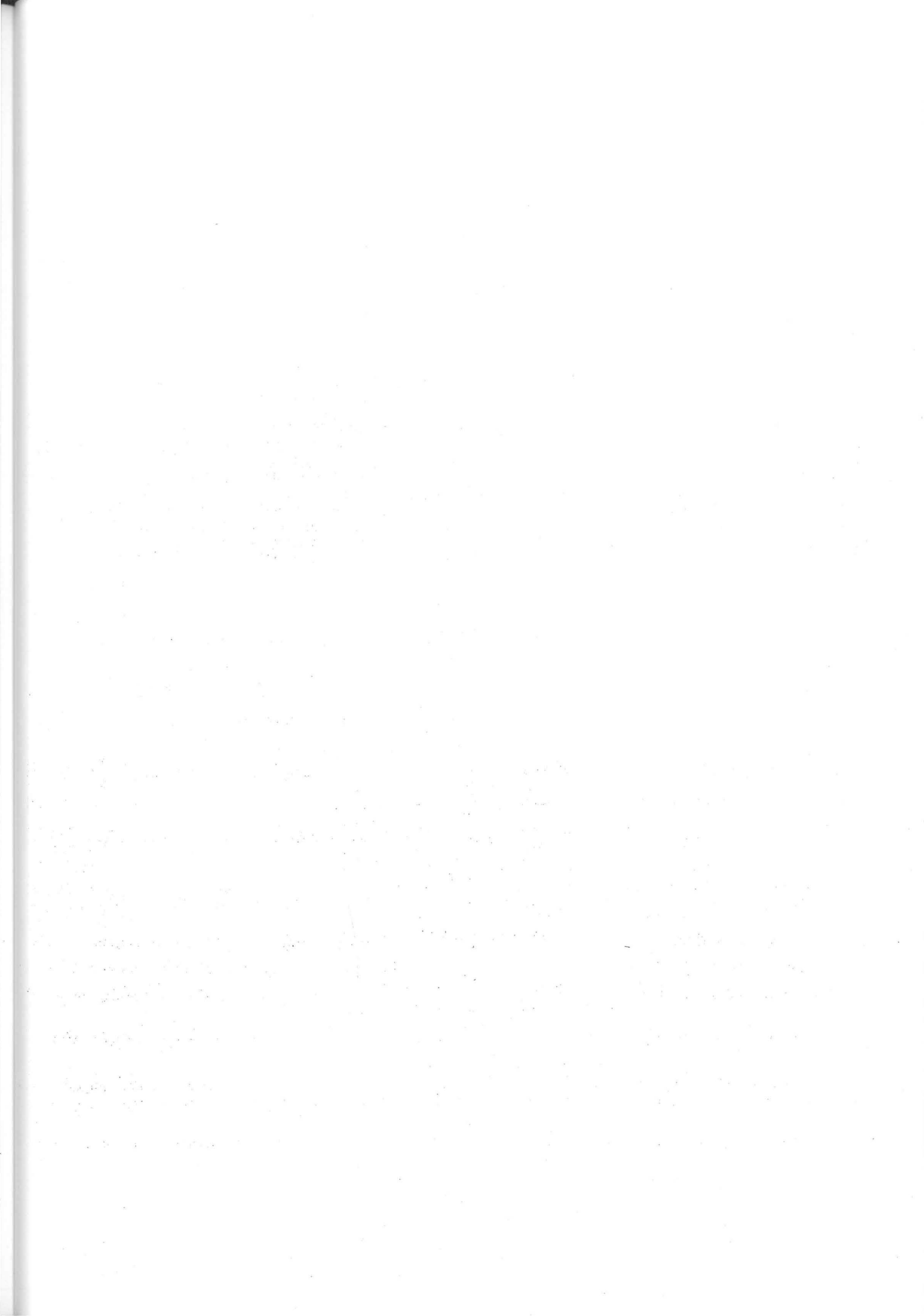
Taking into account that $|a_k| \leq k^2 - \frac{4}{3}k + 1$, $k=1, 2, \dots, n$, from (1), one obtains

$$1 < \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 - \frac{4}{3}k + 1 \right) \frac{1}{|x_j|^k}$$

which is the same with

$$(2) \quad \frac{t(1+t)}{(1-t)^3} - \frac{4t}{3(1-t)^2} + \frac{t}{1-t} > 1, \quad t = \frac{1}{|x_j|} < 1.$$

It is easy to see that (2) implies that $t > \frac{1}{3}$, more precisely $|x_j| < 3$, and the solution is complete.



SUR CERTAINES INÉGALITÉS PARTICULIÈRES

D. M. Simeunović

(Communiqué le 23 Mai 1975)

Nous démontrons, dans ce travail, certaines inégalités particulières à partir d'une inégalité intégrale obtenue dans [1]. Celles-ci renforcent, entre autres, certaines inégalités connues.

On considère, dans [1], une fonction de la forme

$$(a) \quad I(t) = \int_a^b \{f(x)\}^t g(x) dx^{1)}$$

et on y démontre que:

Etant donné, sur le segment $[a, b]$, deux fonctions non négatives, $f(x)$ et $g(x)$, et un paramètre réel t , tels qu'existe la fonction

$$I(t) = \int_a^b \{f(x)\}^t g(x) dx,$$

nous avons pour $I(t)$ l'inégalité

$$(1) \quad I(s + \alpha + \beta) \leq \{I(s + \alpha p)\}^{\frac{1}{p}} \{I(s + \beta q)\}^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1 \right)$$

à condition qu'existent les intégrales du second membre.

Remarque. Nous aurions des inégalités contraires à (1) pour $p < 0$ ou $q < 0$.

L'inégalité (1) était appliquée à des choix simples de fonctions $f(x)$ et $g(x)$, et au cas $p = q = 2$, ce qui a permis d'obtenir plusieurs inégalités particulières, entre autres

$$(2) \quad b^r - a^r \geq r(b-a)(\sqrt{ab})^{r-1} \quad (b \geq a > 0, r \geq 1)$$

et

$$(3) \quad b^r - a^r \leq r(b-a)(\sqrt{ab})^{r-1} \quad (b \geq a > 0, 0 \leq r \leq 1)$$

L'inégalité (2) devient une égalité pour $b = a$ ou $r = 1$.

L'inégalité (3) se réduit à égalité pour $b = a$ ou $r = 0$, respectivement $r = 1$.

¹⁾ Le segment $[a, b]$ peut être infini.

On peut obtenir, à partir de (1), pour un choix différent de fonctions $f(x)$ et $g(x)$, diverses inégalités. Nous nous arrêterons ici sur un cas simple, quant au choix des fonctions $f(x)$ et $g(x)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $p > 1$.

Nous considérerons ici l'inégalité (1) pour $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Dans ce cas on a d'après (a)

$$(a_1) \quad I(t) = \int_a^b x^t \cdot \frac{1}{x} dx = \int_a^b x^{t-1} dx.$$

De (a₁) on a

$$I(s + \alpha + \beta) = \frac{b^{s+\alpha+\beta} - a^{s+\alpha+\beta}}{s + \alpha + \beta} \quad (s + \alpha + \beta \neq 0)$$

$$I(s + \alpha p) = \frac{b^{s+\alpha p} - a^{s+\alpha p}}{s + \alpha p} \quad (s + \alpha p \neq 0)$$

$$I(s + \beta q) = \frac{b^{s+\beta q} - a^{s+\beta q}}{s + \beta q} \quad (s + \beta q \neq 0)$$

D'après (1) on a dans ce cas

$$(4) \quad \frac{b^{s+\alpha+\beta} - a^{s+\alpha+\beta}}{s + \alpha + \beta} \leq \left(\frac{b^{s+\alpha p} - a^{s+\alpha p}}{s + \alpha p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b^{s+\beta q} - a^{s+\beta q}}{s + \beta q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(b \geq a > 0, \quad s + \alpha + \beta \neq 0, \quad s + \alpha p \neq 0, \quad s + \beta q \neq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1 \right).$$

Pour $b = a$ ou $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, (4) se réduit à une égalité.

De (4) on peut obtenir une suite d'inégalités particulières.

Pour $s = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $p = r - 1$ ($r > 2$), $q = \frac{r-1}{r-2}$, $b \geq a > 0$, on obtient de

(4) l'inégalité

$$(4.1) \quad b^r - a^r \geq r(b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right)^{r-1} \quad (b \geq a > 0, \quad r \geq 2)$$

L'expression ci-dessus devient une égalité pour $b = a$ ou $r = 2$.

L'inégalité (4.1) est aussi valable pour $r = 1$, elle devient alors une égalité.

L'inégalité (4.1) est plus précise que (2) pour $r > 2$.

Pour $r \leq 2$ (4.1) devient l'inégalité de sens contraire, c'est-à-dire

$$(4.2) \quad b^r - a^r \leq r(b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right)^{r-1} \quad (b \geq a > 0, \quad r \leq 2)$$

L'inégalité (4.2) se réduit à égalité pour $b = a$ ou $r = 2$, respectivement $r = 1$.

D'après (2) et (4.2) on obtient

$$r(b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right)^{r-1} \geq b^r - a^r \geq r(b-a) (\sqrt{ab})^{r-1} \quad (b \geq a > 0, 1 \leq r \leq 2).$$

On peut obtenir de (4.1) et (4.2) diverses inégalités particulières.

Pour $b = 2n + 1$, $a = 2n - 1$, $r = n > 2$ (n entier positif) l'inégalité (4.1) se réduit à

$$(2n-1)^n + (2n)^n < (2n+1)^n \quad (n = 3, 4, \dots).$$

La dernière inégalité est donnée, comme problème, par C.M. Frye [2] (voir également [3], p. 190). Une solution de ce problème est donnée dans [4].

En posant, dans (4.1) $b = x^s$, $a = x^{-s}$ ($x \geq 1$, $s \geq 0$), on obtient l'inégalité

$$x^{rs} - x^{-rs} \geq r(x^s - x^{-s}) \left(\frac{x^s + x^{-s}}{2} \right)^{r-1} \quad (x \geq 1, r \geq 2, s \geq 0)$$

laquelle se réduit pour $x = e$, à l'inégalité

$$shrs \geq rshs (chs)^{r-1} \quad (r \geq 2, s \geq 0).$$

La dernière inégalité est plus précise que

$$shrs \geq rshs \quad (r \geq 1, s \geq 0),$$

pour $r > 2$ (voir [1] p. 103).

L'application de l'inégalité (4.1) permet de démontrer que:

Pour une fonction $f(x)$, représentée par la série de Taylor

$$(5) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

convergente pour $|x| < R$, avec les coefficients $c_k \geq 0$ ($k = 2, 3, \dots$), nous avons l'inégalité

$$(6) \quad f(b) - f(a) \geq (b-a) f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \quad (R > b \geq a \geq 0).$$

Démonstration. On a, d'après (5)

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (b^k - a^k).$$

Mais, puisque d'après (4.1),

$$b^k - a^k \geq k(b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k-1} \quad (k = 1, \dots)$$

il résulte que (7) se réduit à

$$(8) \quad f(b) - f(a) \geq (b-a) \sum_{k=0}^{\infty} k c_k \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k-1}.$$

A cause de

$$f' \left(\frac{a+b}{2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k-1},$$

l'inégalité (8) se réduit, en fait, à (6).

Exemple. Etant donné que

$$chx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} \left(c_k = \frac{1}{2k!} > 0, \quad k=0, 1, 2, \dots; |x| < \infty \right)$$

nous avons

$$chb - cha \geq (b-a)sh \left(\frac{a+b}{2} \right) \quad (b \geq a \geq 0).$$

Pour $b \geq a > 0$, on obtient de (a₁):

$$I(0) = \ln b - \ln a$$

$$I(p-1) = \frac{b^{p-1} - a^{p-1}}{p-1} \quad (p \neq 1)$$

$$I(-1) = \frac{b-a}{ab}.$$

L'inégalité (1), pour $s = -1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$, se réduit à

$$I(0) \leq \left\{ I(p-1) \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ I(-1) \right\}^{\frac{p-1}{p}},$$

c'est-à-dire à

$$\ln b - \ln a \leq \left(\frac{b^{p-1} - a^{p-1}}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b-a}{ab} \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

d'où on obtient, pour $b > a > 0$, l'inégalité suivante

$$(9) \quad \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \left(\frac{b^{p-1} - a^{p-1}}{(p-1)(b-a)(ab)^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (b > a > 0, p > 1)$$

En posant, dans (9). $b = x > 1$, $a = 1$, on obtient

$$(9.1) \quad \frac{\ln x}{x-1} < \left(\frac{x^{p-1} - 1}{(p-1)(x-1)x^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (x > 1, p > 1)$$

En substituant, dans (9.1), $\frac{1}{x}$ à x , on obtient de nouveau l'inégalité (9.1), ce que signifie que nous avons aussi

$$(9.2) \quad \frac{\ln x}{x-1} < \left(\frac{x^{p-1} - 1}{(p-1)(x-1)x^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (x > 0, x \neq 1, p > 1)$$

Pour $p=2$ l'inégalité (9.2) se réduit à

$$(9.3) \quad \frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0, x \neq 1),$$

l'expression obtenue par J. Karamata [5].

Pour $1 < p < 2$ l'inégalité (9.2) est plus stricte que l'inégalité (9.3). En effet, si on substitue, dans (3), x à b , 1 à a , et $p-1$ à r ($0 < p-1 < 1$), on obtiendra

$$x^{p-1} - 1 < (p-1)(x-1)(\sqrt{x})^{p-2} \quad (x > 1, 1 < p < 2)$$

d'où

$$\frac{x^{p-1} - 1}{(p-1)(x-1)x^{p-1}} < \frac{1}{(\sqrt{x})^p},$$

donc

$$(10) \quad \left(\frac{x^{p-1} - 1}{(p-1)(x-1)x^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{1}{(\sqrt{x})^p} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(\sqrt{x})} \quad (x > 1, 1 < p < 2).$$

Si on substitue, dans (10), $\frac{1}{x}$ à x , on obtient de nouveau l'inégalité (10), à la suite de quoi on a

$$\left(\frac{x^{p-1} - 1}{(p-1)(x-1)x^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0, x \neq 1, 1 < p < 2).$$

Pour $b \geq a > 0$, on obtient de (a₁)

$$I(1) = b - a$$

$$I(p) = \frac{b^p - a^p}{p} \quad (p \neq 0)$$

$$I(0) = \ln b - \ln a.$$

L'inégalité (1), pour $s=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$, $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$, se réduit à

$$I(1) \leq \{I(p)\}^{\frac{1}{p}} \{I(0)\}^{\frac{p-1}{p}},$$

c'est-à-dire à

$$b - a \leq \left(\frac{b^p - a^p}{p} \right)^{\frac{1}{p}} (\ln b - \ln a)^{\frac{p-1}{p}},$$

d'où on obtient, pour $b > a > 0$, l'inégalité

$$(11) \quad \frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \left(\frac{p(b-a)}{b^p - a^p} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (b > a > 0, p > 1).$$

Pour $p=2$, (11) se réduit à

$$(11.1) \quad \frac{\ln b - \ln a}{b-a} > \frac{2}{b+a} \quad (b > a > 0)$$

Il existe plusieurs preuves de l'inégalité (11.1). L'une d'elles est donnée dans [6], une autre dans [7, p. 158], une troisième dans [8, p. 192], deux autres preuves dans [9, pp. 273 et 274], et une enfin dans [1].

Pour $1 < p < 2$ l'inégalité (11) est plus précise que (11.1). En effet, d'après (4.2) on a

$$b^p - a^p < p(b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right)^{p-1} \quad (b > a > 0, 1 < p < 2)$$

d'où

$$\frac{p(b-a)}{b^p - a^p} > \left(\frac{2}{b+a} \right)^{p-1},$$

donc

$$\left(\frac{p(b-a)}{b^p - a^p} \right)^{\frac{1}{p-1}} > \frac{2}{b+a} \quad (b > a > 0, 1 < p < 2).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. M. Simeunović, *Sur certaines inégalités intégrales et leurs applications*. Publ. Inst. Math. (Beograd) 11 (25) (1971), 99—105.
- [2] C. M. Frye, *Problem E 1264*, Amer. Math. Monthly 70 (1963), 891.
- [3] D. S. Mitrinović (Saradnik P. M. Vasić), *Analitičke nejednakosti* Beograd 1970,
- [4] Amer. Math. Monthly 71(1964), 683.
- [5] J. Karamata, *Vesnik Društva matematičara i fizičara SRS*, knjiga I, sveska 1 (1949), 78—79, Pitanja i zadaci.
- [6] B. Ostle and H. L. Terwillinger, *Proceedings of the Montana Academy of Sciences*, 17 (1957), 69—70.
- [7] D. S. Mitrinović, *Elementary Inequalities*, Groningen 1964.
- [8] D. S. Mitrinović, *Nejednakosti*, Beograd 1965.
- [9] D. S. Mitrinović *Analytic inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

D. M. Simeunović

||| SUR UNE EVALUATION DES VALEURS
APPROXIMATIVES DES ZEROS COMPLEXES
DES POLYNOMES

(Communiqué le 20 Février 1976)

On donne, dans cet article, une évaluation des valeurs approchées des zéros complexes des polynomes. L'avantage de cette évaluation peut consister dans le fait qu'elle dépend, outre le degré n du polynome $P(z)$, encore et uniquement, de la valeur du polynome et de sa dérivée première dans le zéro approximatif. On souligne également la possibilité d'obtenir d'autres évaluations de ce genre.

Soit un polynome complexe ou réel de degré $n \geq 1$

$$(1) \quad P(z) = z^n = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

Soit $\zeta = x + iy$ un zéro simple de (1); il en résulte que $P(\zeta) = 0$, $P'(\zeta) \neq 0$. Soit U un voisinage convexe du zéro complexe ζ où le polynome (1) n'a pas d'autres zéros.

On sait que si nous prenons une valeur approchée $z_0 = x_0 + iy_0$ dans le voisinage U (voir, par exemple, [1], pp. 153—155, également [2] pp. 1054—1059), en appliquant la méthode de Newton

$$(2) \quad z_k = z_{k-1} - \frac{P(z_{k-1})}{P'(z_{k-1})} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

nous pourrons obtenir des valeurs plus approchées de ζ . Dans des conditions déterminées (voir [3], pp. 59—60, également [1], p. 155) la suite (2) converge vers le zéro complexe ζ du polynome (1).

En particulier, si la condition

$$\min_{z \in U} |P'(z)| = m > 0$$

est remplie dans le voisinage U qui contient la suite z_k , nous aurons l'évaluation

$$(3) \quad |z_k - \zeta| \leq \frac{|P(z_k)|}{m}$$

(voir [1], également [2], loc. cit.).

Lors de l'évaluation de l'erreur de la valeur approchée de z_k au moyen de (3), nous rencontrons le problème de la détermination du nombre $m = \min_{z \in U} |P'(z)|$.

De même, dans un voisinage U , $\min_{z \in U} |P'(z)|$ peut être un très petit nombre, sans que cela soit le cas de $|P'(z_k)|$.

Nous donnerons une évaluation de $|z_k - \zeta|$ qui dépend du degré n du polynôme donné, de la valeur du polynôme et de la valeur de sa dérivée au point z_k ; nous donnerons quelques autres évaluations de $|z_k - \zeta|$. Préalablement voici un lemme.

L e m m e. Soit un polynôme complexe de degré $n \geq 1$

$$(4) \quad P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

s étant un des nombres $1, 2, \dots, n$ et α un nombre complexe arbitraire pour lequel on a

$$P(\alpha) \neq 0 \text{ et } P^{(s)}(\alpha) \neq 0.$$

Alors le cercle du centre en α et de rayon

$$R = \left| \frac{n! P(\alpha)}{(n-s)! P^{(s)}(\alpha)} \right|^{\frac{1}{s}}$$

contient au moins un zéro du polynôme $P(z)$. En d'autres termes nous aurons, pour un zéro ζ au moins le polynôme $P(z)$:

$$(5) \quad |\alpha - \zeta| \leq \left| \frac{n! P(\alpha)}{(n-s)! P^{(s)}(\alpha)} \right|^{\frac{1}{s}}.$$

Le cas $s=1$ se réduit à:

$$(6) \quad |\alpha - \zeta| \leq \left| \frac{n P(\alpha)}{P'(\alpha)} \right|,$$

tandis que le cas $s=n$ se réduit à:

$$(7) \quad |\alpha - \zeta| \leq |P(\alpha)|^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration. Nous démontrerons d'abord (7), c'est-à-dire (5), pour $s=n$. Soient $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ les zéros du polynôme (4). Alors

$$(8) \quad (\alpha - \zeta_1)(\alpha - \zeta_2) \dots (\alpha - \zeta_n) = P(\alpha).$$

Soit ζ le zéro du polynôme $P(z)$ qui est le plus proche du point α dans le plan complexe. Nous aurons alors de (8)

$$|\alpha - \zeta|^n \leq |P(\alpha)|,$$

d'où

$$|\alpha - \zeta| \leq |P(\alpha)|^{\frac{1}{n}}.$$

Pour la démonstration de (6), respectivement (5), dans le cas $s=1$, partons de l'égalité:

$$(9) \quad \frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} = \frac{1}{\alpha - \zeta_1} + \frac{1}{\alpha - \zeta_2} + \dots + \frac{1}{\alpha - \zeta_n},$$

d'où

$$(10) \quad \left| \frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} \right| \leq \frac{1}{|\alpha - \zeta_1|} + \frac{1}{|\alpha - \zeta_2|} + \dots + \frac{1}{|\alpha - \zeta_n|}.$$

Soit ζ le zéro du polynome $P(z)$ qui est le plus proche de α dans le plan complexe. Nous aurons alors de (10):

$$\left| \frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} \right| \leq \frac{n}{|\alpha - \zeta|},$$

d'où

$$|\alpha - \zeta| \leq \left| \frac{nP(\alpha)}{P'(\alpha)} \right|.$$

Il suffit, pour prouver (5) dans le cas où s est un des nombres $2, 3, \dots, n-1$ (également pour $s=1$), de trouver la dérivée d'ordre s du polynome $P(z)$ au point α , et de la diviser par $P(\alpha)$, en appliquant un raisonnement analogue à celui que nous avons pour $s=1$.

Remarque. L'inégalité (7) est démontrée également dans [4]. L'inégalité (6) peut être également démontrée à partir du théorème bien connu de Laguerre (voir, par exemple [2], pp. 991—992) dont l'énoncé est:

Soit $P(z)$ un polynome complexe de degré $n \geq 1$ et soit α un nombre complexe arbitraire pour lequel $P(\alpha) \neq 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$. Soit K un cercle arbitraire sur lequel se trouvent les points

$$\alpha \text{ et } \alpha - \frac{nP(\alpha)}{P'(\alpha)}.$$

Alors le disque de K contient au moins un zéro de $P(z)$.

En effet, si nous considérons le cercle K , passant par α et $\alpha - \frac{nP(\alpha)}{P'(\alpha)}$, dont le centre est au point $\alpha - \frac{nP(\alpha)}{2P'(\alpha)}$, le rayon de K est égal à $\left| \frac{nP(\alpha)}{2P'(\alpha)} \right|$, de telle manière que nous ayons, pour un zéro ζ au moins de $P(z)$:

$$\left| \alpha - \frac{nP(\alpha)}{2P'(\alpha)} - \zeta \right| \leq \left| \frac{nP(\alpha)}{2P'(\alpha)} \right|,$$

d'où on obtient

$$|\alpha - \zeta| \leq \left| \frac{nP(\alpha)}{P'(\alpha)} \right|.$$

L'inégalité (5), pour s qui est un des nombres $2, 3, \dots, n-1$ et également pour $s=1$, peut être obtenue également du théorème de D. Marković [5] (voir aussi [2], pp. 995—996) dont l'énoncé est:

Etant donné un polynome

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

s étant un des nombres $1, 2, \dots, n-1$ et α un nombre complexe arbitraire pour lequel $P(\alpha) \neq 0$ et $P^{(s)}(\alpha) \neq 0$. Alors chaque cercle fermé qui contient α et les points

$$\beta_k = \alpha - e^{\frac{2k\pi i}{s}} \left\{ \frac{n! P(\alpha)}{(n-s)! P^{(s)}(\alpha)} \right\}^{\frac{1}{s}} \quad (k=0, 1, \dots, s-1)$$

contient au moins un zéro du polynome $P^{(s)}(z)$. (Le cas $s=1$ se réduit au théorème de Laguerre).

En effet, si on prend, dans le théorème de D. Marković, le cercle sur lequel se trouvent α et β_k , ayant pour centre

$$\alpha - \frac{1}{2} e^{\frac{2k\pi i}{s}} \left\{ \frac{n! P(\alpha)}{(n-s)! P^{(s)}(\alpha)} \right\}^{\frac{1}{s}},$$

nous obtiendrons pour le rayon de ce cercle la valeur

$$\frac{1}{2} \left| \frac{n! P(\alpha)}{(n-s)! P^{(s)}(\alpha)} \right|^{\frac{1}{s}},$$

de manière que nous ayons, pour un zéro ζ au moins de $P(z)$:

$$\left| \alpha - \frac{1}{2} e^{\frac{2k\pi i}{s}} \left\{ \frac{n! P(\alpha)}{(n-s)! P^{(s)}(\alpha)} \right\}^{\frac{1}{s}} - \zeta \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{n! P(\alpha)}{(n-s)! P^{(s)}(\alpha)} \right|^{\frac{1}{s}},$$

d'où

$$|\alpha - \zeta| \leq \left| \frac{n! P(\alpha)}{(n-s)! P^{(s)}(\alpha)} \right|^{\frac{1}{s}}.$$

On peut démontrer pour $|\alpha - \zeta|$ d'autres évaluations aussi. Ainsi, par exemple, en dérivant (9) en α on obtiendra

$$\frac{P'^2(\alpha) - P(\alpha) P''(\alpha)}{P^2(\alpha)} = -\frac{1}{(\alpha - \zeta_1)^2} - \frac{1}{(\alpha - \zeta_2)^2} - \dots - \frac{1}{(\alpha - \zeta_n)^2},$$

d'où

$$(11) \quad \left| \frac{P'^2(\alpha) - P(\alpha) P''(\alpha)}{P^2(\alpha)} \right| \leq \frac{1}{|\alpha - \zeta_1|^2} + \frac{1}{|\alpha - \zeta_2|^2} + \dots + \frac{1}{|\alpha - \zeta_n|^2}.$$

Soit ζ le zéro de $P(z)$ le plus proche de α dans le plan complexe. De (11) nous aurons alors

$$(12) \quad \left| \frac{P'^2(\alpha) - P(\alpha) P''(\alpha)}{P^2(\alpha)} \right| \leq \frac{n}{|\alpha - \zeta|^2} \quad (P(\alpha) \neq 0).$$

Si nous avons encore $P'^2(\alpha) - P(\alpha) P''(\alpha) \neq 0$, nous obtiendrons de (12)

$$(13) \quad |\alpha - \zeta| \leq \left| \frac{n P^2(\alpha)}{P'^2(\alpha) - P(\alpha) P''(\alpha)} \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème. Soit ζ un zéro complexe simple du polynome

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

de degré $n > 1$. Soit U un voisinage convexe du zéro ζ , dans lequel il n'y a pas d'autres zéros de $P(z)$. Soit ensuite z_k la valeur approchée de ζ déterminée par la formule de Newton

$$(14) \quad z_k = z_{k-1} - \frac{P(z_{k-1})}{P'(z_{k-1})} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Si $z_k \in U$ et si la suite z_k converge vers ζ , alors, pour k suffisamment grand ($k > N$), nous aurons l'évaluation

$$(15) \quad |z_k - \zeta| \leq \left| \frac{n P(z_k)}{P'(z_k)} \right|.$$

Démonstration. Soit z_k la valeur approchée du zéro complexe simple ζ du polynôme $P(z)$, déterminée au moyen de (14). Vu que ζ est un zéro simple de $P(z)$, c'est-à-dire $P(\zeta) = 0$ et $P'(\zeta) \neq 0$, il existe un voisinage convexe U de ζ où le polynôme $P(z)$ n'a pas d'autres zéros, avec $P'(z) \neq 0$ pour $z \in U$. Etant donné que la suite z_k dans (14) converge vers ζ , nous aurons pour un k ($k > N$) suffisamment grand que $z_k \in U$ et aussi que le zéro le plus proche du point z_k est ζ . Si nous posons dans (6) la valeur z_k approchée du zéro complexe ζ , déterminée de cette manière, à la place de α , nous obtiendrons (15), ce que démontre notre théorème.

L'évaluation (15) peut être mise sous une autre forme aussi. D'après (14) on a:

$$(16) \quad |z_{k+1} - z_k| = \left| \frac{P(z_k)}{P'(z_k)} \right|$$

et aussi

$$z_{k+1} - \zeta = z_k - \zeta - \frac{P(z_k)}{P'(z_k)},$$

d'où

$$(17) \quad |z_{k+1} - \zeta| \leq |z_k - \zeta| + \left| \frac{P(z_k)}{P'(z_k)} \right|.$$

Partant de (15) et (16) l'inégalité (17) peut être mise sous la forme

$$|z_{k+1} - \zeta| \leq (n+1) |z_{k+1} - z_k|.$$

Pour $|z_k - \zeta|$, on peut obtenir, de (5) et (13), les évaluations

$$(18) \quad |z_k - \zeta| \leq \left| \frac{n! P(z_k)}{(n-s)! P^{(s)}(z_k)} \right|^{\frac{1}{s}}$$

et

$$(19) \quad |z_k - \zeta| \leq \left| \frac{P^2(z_k)}{P'^2(z_k) - P(z_k) P''(z_k)} \right|^{\frac{1}{2}}$$

en posant, dans (5) et (13), α au lieu de z_k .

Remarque 1. Si z_k est la valeur approchée du zéro complexe ζ du polynôme $P(z)$ et si ζ est le zéro de $P(z)$ qui est la plus proche du point z_k dans le plan complexe, alors les évaluations (18) et (19) sont valables indépendamment de la manière dont z_k est déterminé.

Remarque 2. Si la suite

$$(20) \quad z_{k+1} = z_k - \frac{P(z_k)}{P'(z_k)} \left[1 - \frac{P(z_k) P''(z_k)}{P'^2(z_k)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (k = 1, 0, 2, \dots)$$

converge vers ζ , on peut donner à l'évaluation (19) la forme

$$|z_{k+1} - \zeta| \leq (1 + \sqrt{n}) |z_{k+1} - z_k|.$$

Le cas de la suite (20), quand le polynôme réel $P(x)$ a des zéros réels a été considéré dans [3], pp. 117—119.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Б. П. Демидович и И. А. Марон, *Основы вычислительной математики*, Москва, 1970.
- [2] Ђ. Курера, *Viša algebra*, knjiga druga, drugo izdanje, Beograd 1971.
- [3] A. M. Ostrowski, *Solutions of equations and systems of equations*, second edition, New York and London 1966.
- [4] D. M. Simeunović, *Sur le cercle qui contient au moins un zéro d'un polynôme et les questions qui s'y rattachent*, Matematički vesnik 5 (20) Sv. 3, 1968. pp. 339—342, Beograd.
- [5] D. Marković, *O teoremi Grace-a* (Prvi kongres matematičara i fizičara Jugoslavije, Bled, 1949; Izveštaji, Beograd 1951 Sv. II, str. 67—71).

SUR LA RÉPARTITION DES ZÉROS D'UNE CLASSE DE POLYNÔMES

D. M. Simeunović

(Communiqué le 28. X 1977.)

On considère, dans cet article, le polynôme

$$(1) \quad P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \quad (n > 2)$$

et la répartition de ses zéros dans le plan complexe sous l'hypothèse que ses coefficients a_k satisfont aux conditions

$$a_k > 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n) \quad \text{et} \quad 0 < \frac{a_0}{a_1} < \frac{a_1}{a_2} < \dots < \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

ou plus généralement

$$|a_k| > 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n) \quad \text{et} \quad 0 < \left| \frac{a_0}{a_1} \right| < \left| \frac{a_1}{a_2} \right| < \dots < \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|.$$

On démontre, sous ces conditions, les théorèmes suivants, quant au polynôme (1).

Théorème 1. Si l'on a, dans (1), $a_k > 0$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) et

$$(2) \quad a_k^2 \geq 4 a_{k-1} a_{k+1} \quad (k=1, 2, \dots, n-1),$$

le polynôme (1) ne possède que des zéros négatifs simples, un seul dans chacun des intervalles

$$(3) \quad \left(-\frac{2a_0}{a_1}, 0 \right), \left(-\frac{2a_1}{a_2}, -\frac{2a_0}{a_1} \right), \dots, \left(-\frac{2a_{n-1}}{a_n}, -\frac{2a_{n-2}}{a_{n-1}} \right).$$

Théorème 2. Si on a, dans (1), $a_k > 0$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) et

$$(4) \quad a_k^2 \geq 2 a_{k-1} a_{k+1} \quad (k=1, 2, \dots, n-1),$$

le polynôme (1) n'a pas de zéros dans le domaine

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg \{z\} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Théorème 3. Si on a, dans (1), $|a_k| > 0$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$)

$$(5) \quad |a_k|^2 \geq 5 |a_{k-1} a_{k+1}| \quad (k=1, 2, \dots, n-1),$$

alors le polynôme (1) est différent de zéro à la limite de chaque anneau circulaire

$$(6) \quad \sqrt{5} \left| \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}} \right| < |z| < \sqrt{5} \left| \frac{a_{k-1}}{a_k} \right| \quad (k=2, 3, \dots, n)$$

et n'a qu'un zéro à l'intérieur de chacun d'eux.

Les théorèmes 1, 2 et 3 qui ont trait au polynôme (1) sont valables, sous les mêmes conditions, pour la fonction entière

$$(7) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

La démonstration des théorèmes 2 et 3, dans le cas de la fonction entière (7) est identique à celle du polynôme (1). Pour démontrer le théorème 1 dans le cas de la fonction entière (7) on considère la suite des polynômes

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \quad (n=3, 4, \dots)$$

c'est-à-dire la suite des sommes partielles de la série (7).

On considère, dans [1], la fonction entière

$$(8) \quad f(z) = 1 + \frac{z}{r_1} + \frac{z^2}{r_1 r_2} + \dots + \frac{z^n}{r_1 r_2 \dots r_n} + \dots$$

et la répartition, dans le plan complexe, des ses zéros, sous l'hypothèse que les r_k satisfont aux conditions $1 < r_1 < r_2 < \dots < r_n \dots$ ou plus généralement $1 < |r_1| < |r_2| < \dots < |r_n| < \dots$. Les théorèmes sont démontrés pour la fonction (8):

(i) Si $r_1 > 1$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 2$ ($k=1, 2, \dots$), la fonction (8) n'a pas de zéros dans le région

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg \{z\} \leq \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Si $r_1 > 1$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 4$ ($k=1, 2, \dots$), la fonction (8) n'a que des zéros simples négatifs, un dans chaque intervalle

$$(-2r_1, 0), (-2r_{k+1}, -2r_k), \quad (k=1, 2, \dots).$$

(iii) Si les r_k sont réels ou complexes, et si $|r_1| < 1$ et $\left| \frac{r_{k+1}}{r_k} \right| \geq 5$ ($k=1, 2, \dots$), la fonction (8) est différente de zéro sur la limite de chaque anneau circulaire

$$(9) \quad \sqrt{|r_{k-1} r_k|} < |z| < \sqrt{|r_k r_{k+1}|} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (|r_0| = 1)$$

et n'a qu'un zéro à l'intérieur de chacun d'eux.

Si on pose, dans (8), $r_1 = a$, $\frac{r_{k+1}}{r_k} = a^2$, on obtient la fonction

$$(10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k^2} z^k.$$

Dans [2, tome II, p. 69, problème 176], c'est-à-dire [2, tome I, p. 123, problème 200], G. Pólya et G. Szegő on démontré que

- 1) pour $a \geq 2$ la fonction (10) n'a que des zéros négatifs réels,
- 2) pour $|a| \geq 2,5$ la fonction (10) est différente de zéro à la limite de chaque anneau circulaire

$$|a|^{2k-2} < |z| < |a|^{2k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

et n'a, à l'intérieur de chacun d'eux, qu'un zéro.

Les théorèmes (ii) et (iii) représentent la généralisation des résultats 1) et 2) de G. Pólya et G. Szegő. Les méthodes de démonstration des théorèmes (ii) et (iii) données dans [1] sont semblables aux méthodes de démonstration de 1) et 2) de G. Pólya et G. Szegő [2].

Remarque. On peut prendre, dans les théorèmes (i), (ii) et (iii), $r_1 > 0$, respectivement $|r_1| > 0$, alors qu'on peut prendre, dans (iii), c'est-à-dire dans (9) l'anneau

$$\sqrt{5} |r_{k-1}| < |z| < \sqrt{5} |r_k| \quad (k = 1, 2, \dots), (|r_0| = 1).$$

Les théorèmes (i), (ii) et (iii) qui considèrent la fonction entière (8), sont valable, sous les mêmes conditions, pour chaque somme partielle

$$(11) \quad f_n(z) = 1 + \frac{z}{r_1} + \frac{z^2}{r_1 r_2} + \dots + \frac{z^n}{r_1 r_2 \dots r_n} \quad (n = 3, 4, \dots).$$

Les théorèmes 1, 2 et 3 que se rapportent au polynôme (1) s'obtiennent simplement des théorèmes (i), (ii) et (iii), démontrés dans [1], avec la différence qu'on y prend, au lieu de $r_1 > 1$, resp. $|r_1| > 1$, $r_1 > 0$, resp. $|r_1| > 0$, en ramenant au préalable le polynôme (1) à la forme (11).

Afin de pouvoir obtenir d'autres conclusions sur les zéros du polynôme (1), nous démontrerons ici complètement les théorèmes 1, 2 et 3.

Démonstration du théorème 1. Considerons un polynôme de la forme

$$(12) \quad Q(z) = 1 + \frac{z}{r_1} + \frac{z^2}{r_1 r_2} + \dots + \frac{z_n}{r_1 r_2 \dots r_n} \quad (n > 2)$$

où on a $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n$. Les module du k -ième terme de (12) est maximal pour $r_k < |z| < r_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Les modules des termes de (12) croissent continument, du premier jusqu'au terme maximal, pour ces valeurs de z , et décroissent ensuite du terme maximal jusqu'au dernier [2, tome I, p. 20, problème 117].

Soit $(r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} (-x)^k$ le terme maximal dans (12) pour $z = -x$ ($x > 0$).
Nous avons alors

$$(13) \quad Q(-x)(r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} (-x)^k = \\ = \left(1 - \frac{x}{r_{k+1}} + \frac{x^2}{r_{k+1} r_{k+2}} - \dots + (-1)^{n-k} \frac{x^{n-k}}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_n} \right) \\ - \frac{r_k}{x} + \frac{r_k r_{k-1}}{x^2} - \dots + (-1)^k \frac{r_k r_{k-1} \dots r_1}{x^k} > 1 - \frac{x}{r_{k+1}} - \frac{r_k}{x}.$$

Pour $x = 2r_k$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 4$, c'est-à-dire $\frac{r_k}{r_{k+1}} \leq \frac{1}{4}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) il résulte de (13)

$$(14) \quad Q(-2r_k)(r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} (-2r_k)^k > \frac{1}{2} - \frac{2r_k}{r_{k+1}} \geq 0.$$

De (12) on a $Q(0) > 0$ et de (14)

$$(15) \quad Q(-2r_1) < 0, Q(-2r_2) > 0, \dots, (-1)^n Q(-2r_n) > 0.$$

(Dans la deuxième inégalité (15), pour $n=2$ et $r_2 = 4r_1$ la signe $>$ devient $=$).
Il résulte de (15) que $Q(z)$ n'a que des zéros négatifs simples, exactement n ($n > 2$), à raison d'un par intervalle

$$(16) \quad (-2r_1, 0), (-2r_{k+1}, -2r_k), (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Si on divise par a_0 le polynôme (1), on obtient

$$(17) \quad \frac{P(z)}{a_0} = 1 + \frac{z}{\frac{a_0}{a_1}} + \frac{z^2}{\frac{a_0}{a_2}} + \dots + \frac{z^n}{\frac{a_0}{a_n}}.$$

Le polynôme (17) peut se mettre sous la forme

$$(18) \quad \frac{P(z)}{a_0} = 1 + \frac{z}{\frac{a_0}{a_1}} + \frac{z^2}{\frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2}} + \dots + \frac{z^n}{\frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \dots \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n}}.$$

Si on pose, dans (18) $\frac{a_0}{a_1} = r_1, \frac{a_n}{a_2} = r_2, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n} = r_n$ et $\frac{P(z)}{a_0} = Q(z)$, on obtient le polynôme (12). Les conditions

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n$$

et

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 4 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

se réduisent maintenant aux conditions $a_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $0 < \frac{a_0}{a_1} <$

$< \frac{a_1}{a_2} < \dots < \frac{a_{n-1}}{a_n}$ et conditions (2), et les intervalles (16) aux intervalles (3), ce qui démontre le théorème 1.

Conséquence du théorème 1. Si on a, dans le polynôme (1) $a_k > 0$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) et $a_k^2 > a_{k-1} a_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) et si la condition

$$a_s^2 \geq 4 a_{s-1} a_{s+1}$$

est satisfaite pour un nombre impair $k=s < n$, le polynôme (1) a au moins un zéro dans l'intervalle $\left(-\frac{2a_{s-1}}{a_s}, 0\right)$.

Démonstration. Si dans (12) $\frac{r_{k+1}}{r_k} > 1$ ($k=1, 2, \dots, n-1$), et si la condition $\frac{r_{s+1}}{r_s} \geq 4$ est remplie pour un nombre impair $k=s < n$, on obtient pour $x = -2r_s$, de (13)

$$\begin{aligned} Q(-2r_s)(r_1 r_2 \dots r_s)^{-1} (-2r_s)^s &= \left[1 - \frac{2r_s}{r_{s+1}} + \left(\frac{2r_s}{r_{s+1}}\right)^2 \left(\frac{r_{s+1}}{r_{s+2}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2r_s}{r_{s+1}}\right)^3 \left(\frac{r_{s+1}}{r_{s+2}}\right)^2 \left(\frac{r_{s+2}}{r_{s+3}}\right) + \dots \right] - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{r_{s-1}}{r_s}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{8} \left(\frac{r_{s-1}}{r_s}\right)^2 \left(\frac{r_{s-2}}{r_{s-1}}\right) + \dots > \frac{1}{2} - \frac{2r_s}{r_{s+1}} \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui signifie que $Q(-2r_s) < 0$. Etant donné que $Q(0) > 0$, le polynôme $Q(z)$ a au moins un zéro dans l'intervalle $(-2r_s, 0)$. Les conditions $r_1 > 0$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k} > 1$ ($k=1, 2, \dots, n-1$), avec $\frac{r_{s+1}}{r_s} \geq 4$ pour un $k=s < n$ impair, valables pour $Q(z)$, se réduisent, dans ce cas du polynôme (1), à $a_k > 0$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) et $a_k^2 > a_{k-1} a_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$), et pour $k=s < n$ impair, à la condition $a_s^2 \geq 4 a_{s-1} a_{s+1}$, alors que l'intervalle $(-2r_s, 0)$ qui se rapporte à $Q(z)$, se réduit à la suite de $r_s = \frac{a_{s-1}}{a_s}$, dans le cas du polynôme (1), à l'intervalle $\left(-\frac{2a_{s-1}}{a_s}, 0\right)$, ce qui démontre la conséquence du théorème 1.

Démonstration du théorème 2. Pour $0 \leq |z| \leq r_1$ (12) n'a pas zéros, ainsi que l'établit le théorème de Kakeya [2, tome I, section III, problème 22].

Soient $-\frac{\pi}{2} \leq \arg \{z\} \leq \frac{\pi}{2}$, $z = |z| e^{i\theta}$. Pour $r_k < |z| < r_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) nous écrivons (12) dans la forme

$$\begin{aligned} (19) \quad Q(z) &= \frac{z^k}{r_1 r_2 \dots r_k} \left[1 + \left(\frac{z}{r_{k+1}} + \frac{r_k}{z}\right) + \left(\frac{z^2}{r_{k+1} r_{k+2}} + \frac{r_k r_{k-1}}{z^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{z_k}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_{2k}} + \frac{r_k r_{k-1} \dots r_1}{z^k}\right) + \left(\frac{z^{k+1}}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_{2k+1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots + \frac{z^{n-k}}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_n}\right) \right]. \end{aligned}$$

La partie réelle entre les crochets (19) est égale à

$$(20) \quad 1 + \left(\frac{|z|}{r_{k+1}} + \frac{r_k}{|z|} \right) \cos \theta + \left(\frac{|z|^2}{r_{k+1} r_{k+2}} + \frac{r_k r_{k-1}}{|z|^2} \right) \cos 2\theta + \\ \dots + \left(\frac{|z|^k}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_{2k}} + \frac{r_k r_{k-1} \dots r_1}{|z|^k} \right) \cos k\theta + \\ \left(+ \frac{|z|^{k+1}}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_{2k+1}} \right) \cos (k+1)\theta + \dots + \left(\frac{|z|^{n-k}}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_n} \right) \cos (n-k)\theta.$$

Nous démontrons que l'expression (20) est positive pour $-\frac{\pi}{2} \leq \arg \{z\} = \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 2$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Etant donné que les dérivées secondes par rapport à $|z|$, de chacune des fonctions

$$\varphi_1(|z|) = \left(\frac{|z|}{r_{k+1}} + \frac{r_k}{|z|} \right), \quad \varphi_2(|z|) = \left(\frac{|z|^2}{r_{k+1} r_{k+2}} + \frac{r_k r_{k-1}}{|z|^2} \right), \dots,$$

$$\varphi_k(|z|) = \left(\frac{|z|^k}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_{2k}} + \frac{r_k r_{k-1} \dots r_1}{|z|^k} \right),$$

$$\varphi_{k+1}(|z|) = \left(\frac{|z|^{k+1}}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_{2k+1}} \right), \dots,$$

$$\varphi_{n-k}(|z|) = \left(\frac{|z|^{n-k}}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_n} \right)$$

sont non négatives, les φ_i sont des fonctions convexes vers le bas, et pour $r_k \leq |z| \leq r_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) elles prennent les valeurs maximales, soit pour $|z| = r_k$, soit pour $|z| = r_{k+1}$. A cause de $\frac{r_k}{r_{k+1}} \leq \frac{1}{2}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) les fonctions φ_i ne dépassent pas, dans l'intervalle $[r_k, r_{k+1}]$ les valeurs

$$\varphi_1^* = \left(1 + \frac{1}{2} \right), \quad \varphi_2^* = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \right), \quad \varphi_3^* = \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} \right), \quad \varphi_4^* = \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{10}} \right), \dots$$

Le second terme, dans (20), est non négatif pour $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, et la somme des termes suivants ne dépasse pas

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} \right) + \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{10}} \right) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \\ \dots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1,$$

ce qui rend l'expression (20) positive, et fait que (12) n'a pas de zéros dans le domaine $-\frac{\pi}{2} \leq \arg \{z\} \leq \frac{\pi}{2}$ quand $r_1 > 0$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 2$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Ceci signifie que le polynôme (18), c'est-à-dire (1), n'a pas de zéros dans le domaine $-\frac{\pi}{2} \leq \arg \{z\} \leq \frac{\pi}{2}$ quand $a_k^2 \leq 2 a_{k-1} a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) puisque (1) se réduit à (18) pour $a_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), $\frac{a_{k-1}}{a_k} = r_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) et le condition $\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 2$ se réduit à $a_k^2 \geq 2 a_{k-1} a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), c'est-à-dire à (4), ce qui démontre le théorème 2.

Démonstration du théorème 3. Soit

$$(21) \quad \Phi(z) = \frac{Q(z) - (r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} z^k}{(r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} z^k} = \left(\frac{z}{r_{k+1}} + \frac{z^2}{r_{k+1} r_{k+2}} + \dots + \frac{z^{n-k}}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_n} \right) + \frac{r_k}{z} + \frac{r_k r_{k-1}}{z^2} + \dots + \frac{r_k r_{k-1} \dots r_1}{z^k}$$

et que z appartienne à l'anneau circulaire

$$(22) \quad \sqrt{5} |r_{k-1}| < |z| < \sqrt{5} |r_{k+1}| \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (|r_0| = 1).$$

On a alors

$$(23) \quad |\Phi(z)| = \left| \frac{Q(z) - (r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} z^k}{(r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} z^k} \right| \leq \left(\frac{|z|}{|r_{k+1}|} + \frac{|z|^2}{|r_{k+1} r_{k+2}|} + \dots + \frac{|z|^{n-k}}{|r_{k+1} r_{k+2} \dots r_n|} \right) + \frac{|r_k|}{|z|} + \frac{|r_k r_{k-1}|}{|z|^2} + \dots + \frac{|r_k r_{k-1} \dots r_1|}{|z|^k}.$$

Pour $|z| = s |r_k|$ ($s > 1$) il résulte de (23)

$$|\Phi| \leq s \left| \frac{r_k}{r_{k+1}} \right| + s^2 \left| \frac{r_k}{r_{k+1}} \right|^2 \cdot \left| \frac{r_{k+1}}{r_{k+2}} \right| + s^3 \left| \frac{r_k}{r_{k+1}} \right|^3 \cdot \left| \frac{r_{k+1}}{r_{k+2}} \right|^2 \cdot \left| \frac{r_{k+2}}{r_{k+3}} \right| \dots + s^{n-k} \left| \frac{r_k}{r_{k+1}} \right|^{n-k} \cdot \left| \frac{r_{k+1}}{r_{k+2}} \right|^{n-k-1} \dots \left| \frac{r_{n-1}}{r_n} \right| + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \left| \frac{r_{k-1}}{r_k} \right| + \frac{1}{s^3} \left| \frac{r_{k-1}}{r_k} \right|^2 \cdot \left| \frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} \right| + \dots + \frac{1}{s^k} \left| \frac{r_{k-1}}{r_k} \right|^{k-1} \cdot \left| \frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} \right|^{k-2} \dots \left| \frac{r_1}{r_2} \right|.$$

Pour

(24)

$$s = \sqrt{5}$$

et

$$\left| \frac{r_k}{r_{k+1}} \right| \leq \frac{1}{5} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2},$$

on a

$$\begin{aligned} |\Phi| &\leq \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{(\sqrt{5})^4} + \frac{1}{(\sqrt{5})^9} + \dots \\ &+ \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{(\sqrt{5})^4} + \frac{1}{(\sqrt{5})^9} + \dots = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{(\sqrt{5})^4} + \frac{2}{(\sqrt{5})^9} + \dots \leq \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{(\sqrt{5})^4} + \frac{2}{(\sqrt{5})^9} = \frac{10}{(\sqrt{5})^3 - 1} < 1. \end{aligned}$$

A cause de (24), et de la définition (21) de $\Phi(z)$, on aura pour chaque z sur le cercle $|z| = \sqrt{5} |r_k|$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\left| \frac{Q(z) - (r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} z^k}{(r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} z^k} \right| < 1 \text{ c'est-à-dire } \left| \frac{Q(z)}{(r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} z^k} - 1 \right| < 1,$$

d'où il résulte que $\frac{Q(z)}{(r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} z^k} \neq 0$, c'est-à-dire $Q(z) \neq 0$. A la suite du théorème de Rouché il résulte maintenant que les fonctions $(r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} z^k$ et $[Q(z) - (r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} z^k]$, c'est-à-dire $(r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} z^k$ et $Q(z)$ ont, dans le cercle $|z| < \sqrt{5} |r_k|$ ($k = 1, 2, \dots, n$) un nombre égal de zéros, donc k . Ceci signifie que dans le cercle $|z| < \sqrt{5} |r_{k-1}|$ la fonction $Q(z)$ a $(k-1)$ zéros, ce qui prouve qu'à l'intérieur de chacun des anneaux circulaires (22) se trouve un zéro du polynôme $Q(z)$.

Les conditions $|r_1| > 0$ et $\left| \frac{r_{k+1}}{r_k} \right| \geq 5$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) qui se rapportent au polynôme $Q(z)$, se réduisent, pour polynôme $P(z)$, à $|a_k| > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) et $|a_k|^2 \geq 5 |a_{k-1} a_{k+1}|$, c'est-à-dire à (5), ce qui prouve le théorème 3.

RÉFÉRENCES

- [1] D. M. Simeunović, *Remarque sur les zéros d'une classe des fonctions entières*, GLAS de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts, t. CCLX, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, N° 26 (1965), 75-83.
 [2] G. Pólya und G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin 1954.

SUR LES LIMITES DES ZÉROS DU POLYNÔME

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

D. M. Simeunović

(Communiqué le 9. XI 1979)

G. Pólya et G. Szegő ont considéré, dans [1] (tome, I, p. 109), le polynôme

$$(1) \quad 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

de degré impair n , et démontré, que $n \rightarrow \infty$, on a pour son unique racine réelle $-x_n$

$$(2) \quad x_n = ns + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln n + \frac{s}{1+s} \ln \left(\sqrt{2\pi} \frac{1+s}{s} \right) + o(1),$$

où s est la racine positive de l'équation

$$se^{1+s} = 1.$$

Dans cet article on considère le polynôme (1) de degré n impair ou pair et on va démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Tout zéro z_k ($k=1, 1, \dots, n$) du polynôme (1) satisfait à l'inégalité*

$$(3) \quad (n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} < |z_k| \leq n,$$

où s est la racine positive de l'équation

$$(4) \quad se^{1+s} = 1 \quad (0,278 < s < 0,279)$$

et où on a

$$\alpha_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}.$$

Corollaire 1. Pour tout zéro z_k ($k=1, 2, \dots, n$) du polynôme (1) on a les inégalités

$$(5) \quad (n+1)s + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s\alpha_n} \ln(n+1) + \frac{s}{1+s\alpha_n} \ln[\sqrt{2\pi}(1-s\alpha_n)] < |z_k| \leq n.$$

Corollaire 2. Pour tout zéro z_k ($k=1, 2, \dots, n$) du polynôme (1) on a les inégalités

$$(6) \quad ns + \frac{s}{1+s} \ln n + \frac{s}{1+s} \ln\left(\sqrt{2\pi} \frac{1+s}{s}\right) - \frac{0,25}{\sqrt{n+1}} - 0,25 < |z_k| \leq n$$

et les inégalités

$$(7) \quad ns + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln n < |z_k| \leq n.$$

Démonstration du théorème. Soit $z_k = x_k + iy_k$ un zéro arbitraire du polynôme (1). D'après [1] (tome I, p. 116, problème 23), il résulte que

$$(8) \quad |z_k| \leq n.$$

(Voir aussi [2]).

Pour chaque zéro du polynôme (1) on a ensuite

$$\begin{aligned} |e^{z_k}| = e^{x_k} &= \left| \frac{z_k^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{z_k^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{z_k^{n+3}}{(n+3)!} + \dots \right| \\ &\leq \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|z_k|}{n+2} + \frac{|z_k|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|z_k|}{n+2} + \frac{|z_k|^2}{(n+2)^2} + \dots \right) = \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z_k|}{n+2}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(9) \quad e^{x_k} \leq \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z_k|}{n+2}}.$$

Démontrons que

$$(10) \quad |z_k| > (n+1)s [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}$$

Supposons qu'on a

$$(11) \quad |z_k| \leq (n+1)s [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} = \frac{n+1}{e^{1+s}} [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}$$

On obtient de (9)

$$(12) \quad e^{2k} \leq \frac{(n+1)^{n+1} [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)}}}{(n+1)! e^{n+1} \cdot e^{(n+1)s} \left\{ 1 - \frac{(n+1)s}{n+2} [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(2+s\alpha_n)(n+1)}} \right\}}$$

D'après la formule de Stirling

$$(n+1)! > \frac{(n+1)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}}{e^{n+1}}$$

on aura, de (12)

$$(13) \quad e^{2k} < \frac{1}{[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{s\alpha_n}{2(1+s\alpha_n)}} \cdot e^{(n+1)s} \cdot \frac{1 - \frac{(n+1)s}{n+2} [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}}{1-s\alpha_n}}$$

où on a posé

$$\sqrt{2\pi(n+1)} = \frac{[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)}} \cdot [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{s\alpha_n}{2(1+s\alpha_n)}}}{1-s\alpha_n}$$

On va démontrer maintenant que

$$(14) \quad [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(2+s\alpha_n)(n+1)}} < e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \alpha_n$$

De l'inégalité

$$\frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (t > 0 \text{ et } t \neq 1)$$

obtenue par J. Karamata dans [3] (voir aussi [4]), on a l'inégalité

$$(15) \quad t \leq e^{\frac{t-1}{\sqrt{t}}} \quad (t > 1).$$

Si on pose, dans l'inégalité (15) $t = 2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)$, on obtient

$$2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1) \leq e^{\frac{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)-1}{\sqrt{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}}} < e^{\frac{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}{\sqrt{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}}} = e^{\frac{\sqrt{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}}{\sqrt{n+1}}}$$

d'où

$$(16) \quad x = [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} < e^{\frac{\sqrt{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}}{2(1+s\alpha_n)\sqrt{n+1}}} < e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \alpha_n$$

puisque $\frac{\sqrt{2\pi}(1-s\alpha_n)}{2(1+s\alpha_n)} = \frac{\sqrt{2\pi}\left(1-se^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right)}{2\left(1+se^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right)} < 1$, ce qui signifie que l'inégalité (14)

est valable.

A la suite de (16) on a

$$\frac{1 - \frac{(n+1)s}{n+2} \cdot x}{1 - s\alpha_n} > \frac{1 - \frac{(n+1)s}{n+2} \cdot \alpha_n}{1 - s\alpha_n} > \frac{1 - s\alpha_n}{1 - s\alpha_n} = 1, \text{ c'est-à-dire}$$

$$(17) \quad \frac{1 - \frac{(n+1)s}{n+2} [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}}{1 - s\alpha_n} > 1.$$

Nous démontrerons aussi que

$$(18) \quad [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{s\alpha_n}{2(1+s\alpha_n)}} e^{(n+1)s} \geq e^{(n+1)s [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}}.$$

Pour obtenir l'inégalité (18), nous démontrerons d'abord l'inégalité

$$(19) \quad x^{\alpha_n} e \geq e^x \quad (1 \leq x \leq \alpha_n).$$

Considérons la fonction

$$f(x) = x^{\alpha_n} e^{1-x} - 1$$

qui donne $f'(x) = x^{\alpha_n-1} e^{1-x} (\alpha_n - x)$. Comme $f'(x) \geq 0$ pour $1 \leq x \leq \alpha_n$ et comme $f(1) = 0$, nous avons $f(x) \geq 0$ pour $1 \leq x \leq \alpha_n$, ce qui signifie que l'inégalité (19) est valable.

En utilisant (19) on obtient

$$(20) \quad x^{\alpha_n(n+1)s} e^{(n+1)s} \geq e^{(n+1)sx} \quad (1 \leq x \leq \alpha_n).$$

En posant, dans (20) $x = [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}$, pour $1 \leq x \leq \alpha_n$ on obtient l'inégalité (18).

En prenant en considération les inégalités (17) et (18), l'inégalité (13) se réduit à

$$(21) \quad e^{x_k} < \frac{1}{e^{(n+1)s [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}}}.$$

Il résulte de l'inégalité (21)

$$x_k < -(n+1)s [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}},$$

c'est-à-dire

$$(22) \quad |x_k| > (n+1)s [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}.$$

En supposant que (11) est valable, nous avons obtenu (22), c'est-à-dire $|x_k| > |z_k|$, ce qui est impossible. Cette contradiction démontre (10).

On obtient, de (8) et de (10), l'inégalité (3), d'où il résulte que le théorème est démontré.

Démontrons encore les corollaires 1 et 2.

Si on pose, dans l'inégalité $e^y \geq y$ ($y \geq 0$)

$$y = \ln [2\pi (1 - s\alpha_n)^2 (n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}$$

on obtiendra

$$(23) \quad [2\pi (1 - s\alpha_n)^2 (n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} \geq 1 + \frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)} \ln [2\pi (1 - s\alpha_n)^2 (n+1)].$$

A la suite de l'inégalité (23), l'inégalité (10) se réduit à

$$(24) \quad |z_k| > (n+1) s + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s\alpha_n} \ln (n+1) + \frac{s}{1+s\alpha_n} \ln [\sqrt{2\pi} (1 - s\alpha_n)],$$

ce qui, avec (8), donne (5).

Pour démontrer (6) nous ferons usage des inégalités suivantes:

$$(25) \quad e^t \leq 1 + 2t \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$(26) \quad \frac{\ln p}{p} \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (p \geq 1),$$

$$(27) \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Pour $t = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, on obtiendra, de (25)

$$(28) \quad \alpha_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}},$$

d'où

$$1 + s\alpha_n \leq 1 + s + \frac{2s}{\sqrt{n+1}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1+s\alpha_n} \geq \frac{1}{1+s+\frac{2s}{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{1+s} \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}}} \geq \frac{1}{1+s} \left[1 - \frac{s}{1+s} \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right],$$

de sorte que

$$(29) \quad \frac{1}{2} \frac{s}{1+s\alpha_n} \geq \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

On a, de (28) $-s\alpha_n \geq -s - \frac{2s}{\sqrt{n+1}}$, d'où

$$1 - s\alpha_n \geq 1 - s - \frac{2s}{\sqrt{n+1}} = (1+s) - 2s - \frac{2s}{\sqrt{n+1}},$$

c'est-à-dire

$$(30) \quad 1 - s\alpha_n \geq (1+s) \left[1 - \frac{2s}{1+s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right].$$

On obtient de (29)

$$(31) \quad \frac{s}{1+s\alpha_n} \geq \frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

En usant des inégalités (29), (30) et (31), on obtient de (24)

$$(32) \quad |z_k| > (n+1)s + \left[\frac{1}{2} \frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] \ln(n+1) + \\ + \left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right] \ln \left\{ \sqrt{2\pi}(1+s) \left[1 - \frac{2s}{1+s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right] \right\} = \\ = (n+1)s + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln(n+1) + \frac{s}{1+s} \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] - \\ - 2 \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \left[\frac{\ln \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\ln \sqrt{2\pi}(1+s)}{\sqrt{n+1}} \right] + \\ + \left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right] \ln \left[1 - \frac{2s}{1+s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right].$$

On obtient, de l'inégalité (26), pour $p = \sqrt{n+1}$

$$(33) \quad \frac{\ln \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

En considérant les inégalités (27) et (33), on obtient ensuite de (32)

$$|z_k| > (n+1)s + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln(n+1) + \frac{s}{1+s} \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] - \\ - 2 \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \{ 1 + \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] \} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \\ + \left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right] \ln \left[1 - \frac{2s}{1+s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right],$$

c'est-à-dire

$$(34) \quad |z_k| > (n+1)s + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln(n+1) + \frac{s}{1+s} \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] - \frac{0,25}{\sqrt{n+1}} - 0,25$$

puisque

$$-2\left(\frac{s}{1+s}\right)^2 \{1 + \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)]\} > -0,25,$$

$$\left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right] \ln\left[1 - \frac{2s}{1+s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right] > -0,25$$

On obtient de (34)

$$(35) \quad |z_k| > ns + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln n + \frac{s}{1+s} \ln\left(\sqrt{2\pi} \frac{1+s}{s}\right) - \frac{0,25}{\sqrt{n+1}} - 0,25,$$

où on a posé $s = \frac{s}{1+s} \ln e^{1+s} = \frac{s}{1+s} \ln \frac{1}{s}$, à la suite de $\ln(n+1) > \ln n$. Les inégalités (35) et (8) donnent (6).

À la suite de

$$\frac{s}{1+s} \ln\left(\sqrt{2\pi} \frac{1+s}{s}\right) > \frac{0,25}{\sqrt{n+1}} + 0,25$$

on obtient de (35)

$$|z_k| > ns + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln n,$$

ce qui, avec (8), donne (7).

Nous avons démontré, de cette manière, le corollaire 2.

Comme on a

$$\frac{0,25}{\sqrt{n+1}} < 0,25,$$

on obtient de (35)

$$|z_k| > ns + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln n + \frac{s}{1+s} \ln\left(\sqrt{2\pi} \frac{1+s}{s}\right) - 0,5.$$

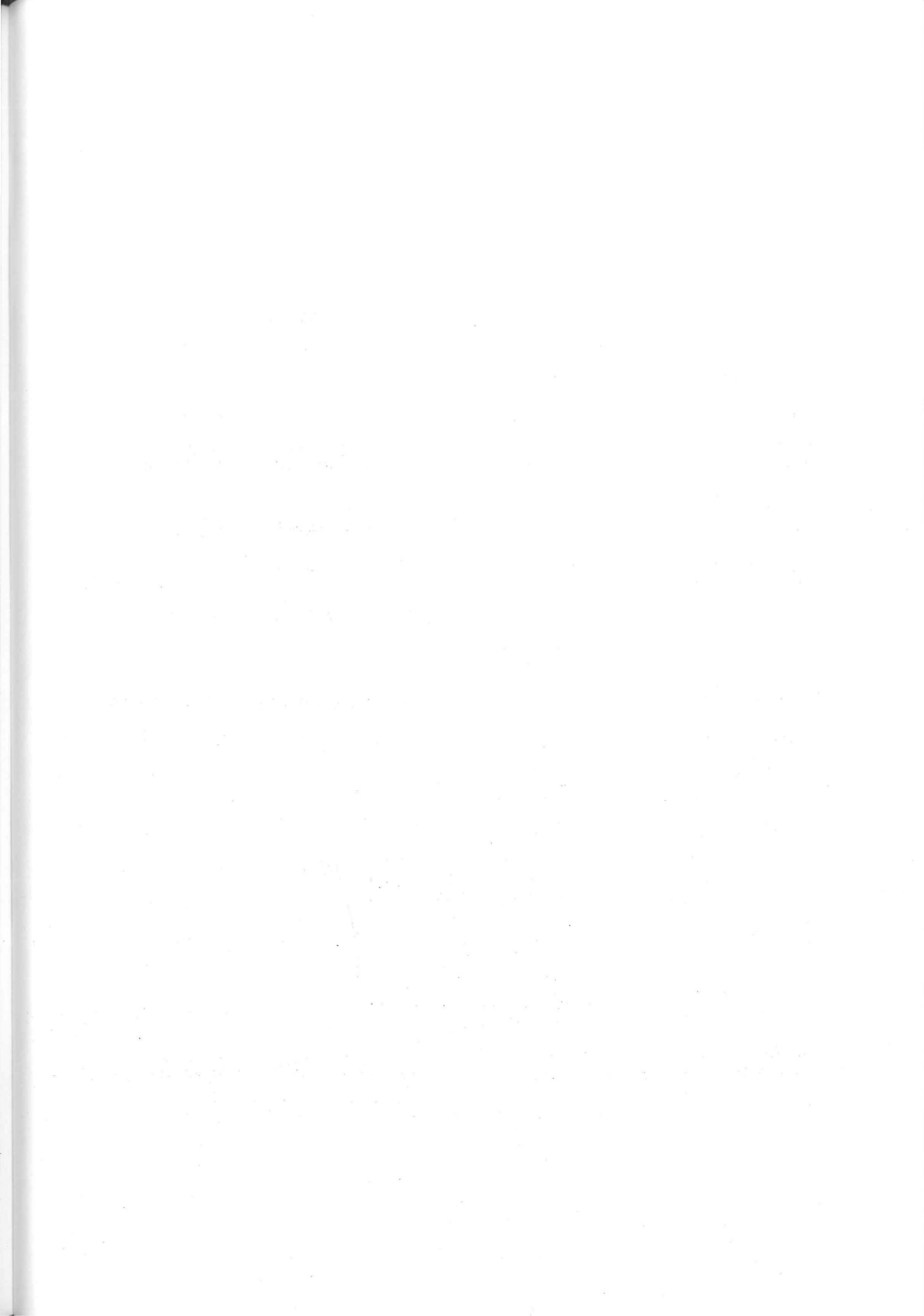
RÉFÉRENCES

[1] G. Pólya und G. Szegő: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Zadaci i teoremi iz analiza, perevod s nemeckogo D. A. Rajkova, Moskva 1956)*.

[2] D. M. Simeunović: *Sur les zéros du polynôme $\sum_{v=1}^n \frac{z^v}{v}$; $n=1, 2, \dots$* Matematički vesnik 2 (17) 1965, 259—261.

[3] I. Karata: *Vesnik Društva matematičara i fizičara SRS, knjiga I, sveska 1 (1949), 78—79, Pitanja i zadaci.*

[4] D. S. Mitrović (saradnik P. M. Vasić): *Analitičke nejednakosti, Beograd 1970*



ON A PROCEDURE FOR THE SIMULTANEOUS
DETERMINATION OF ALL ZEROS OF A POLYNOMIAL (*)

by D.M. SIMEUNOVIĆ (in Belgrade) (**)

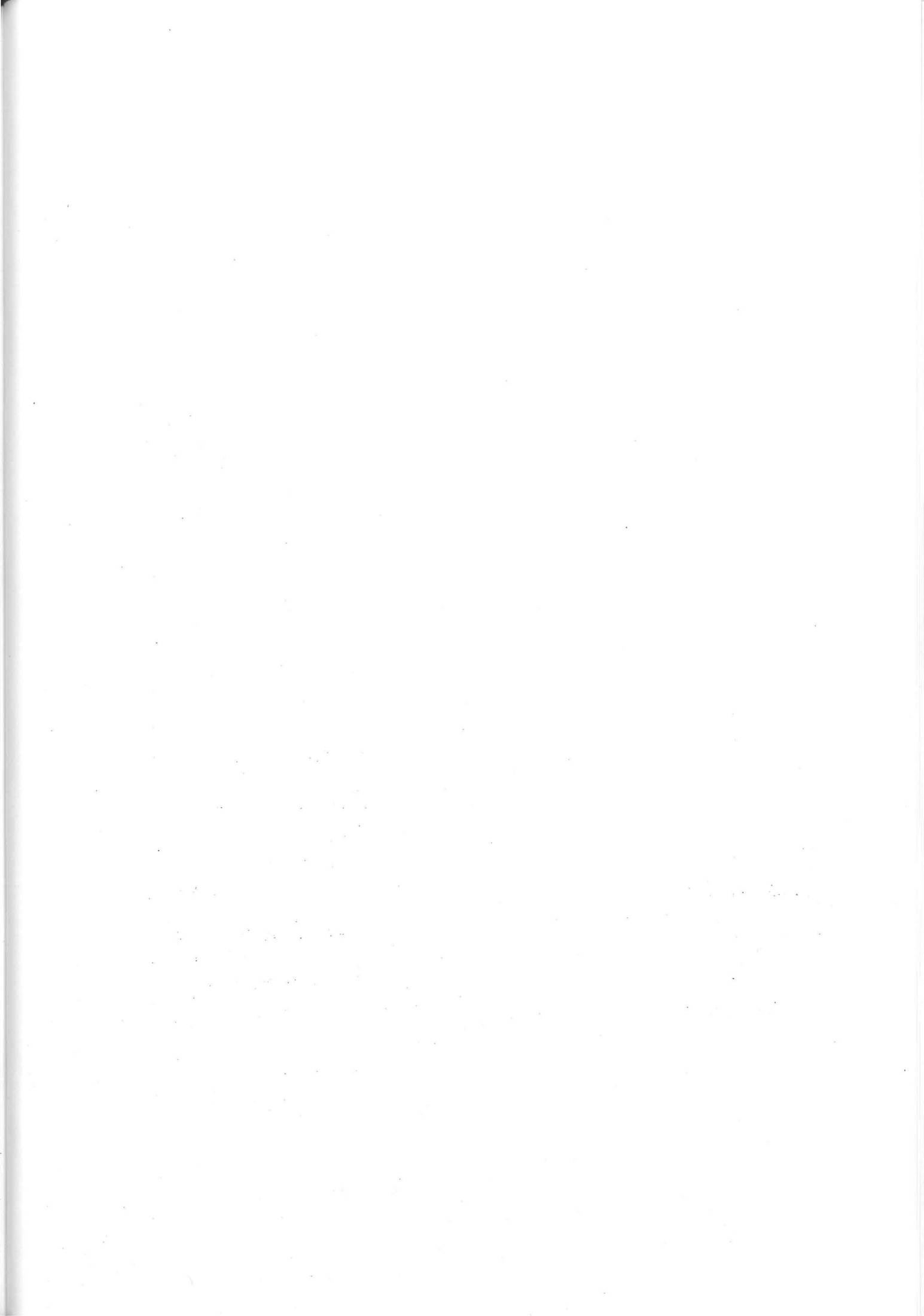
Estratto da

RENDICONTI

DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITÀ DI TRIESTE

VOL. XXI - FASC. I - 1989

EDIZIONI LINT TRIESTE





ON A PROCEDURE FOR THE SIMULTANEOUS DETERMINATION OF ALL ZEROS OF A POLYNOMIAL (*)

by D.M. SIMEUNOVIĆ (in Belgrade) (**)

SOMMARIO. - *In questo lavoro si considera una procedura d'iterazione per la simultanea determinazione di tutti gli zeri di un polinomio nel caso che essi siano reali e distinti. Si ottengono condizioni sufficienti per la convergenza di una tale procedura.*

SUMMARY. - *We consider in this paper an iteration procedure for the simultaneous determination of all zeros of a polynomial in the case when they are real and distinct. The sufficient conditions for the convergence of that procedure are obtained.*

Let us consider the system of equations

$$(1) \quad x_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

where the f_i and their derivatives $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) are real and continuous functions for $A_i \leq x_i \leq B_i$, where A_i and B_i are given numbers. Let x'_1, x'_2, \dots, x'_n be an isolated solution of (1), with $A_i \leq x'_i \leq B_i$. As is known, the quoted isolated solution of the system (1) can be obtained by the iteration method. In order to obtain it we start with a given initial approximate solution $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, with $A_i \leq x_i^{(0)} \leq B_i$, and form the iteration sequences

$$(2) \quad x_i^{(k+1)} = f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots)$$

(*) Pervenuto in Redazione il 9 gennaio 1990.

(**) Indirizzo dell'Autore: Mining and Geology Faculty - Djuškina 7 - 11000 Belgrade (Yugoslavia).

If we set

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{bmatrix},$$

then the system (1) and the iteration sequences (2) can be written as

$$(1') \quad X = f(X)$$

and

$$(2') \quad X^{(k+1)} = f(X^{(k)}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

For the derivative $f'(X)$ we now have

$$f'(X) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right].$$

The domain of X , $f(X)$ and $f'(X)$ is $D\{A_i \leq x_i \leq B_i\}$, where A_i and B_i are given real numbers.

Here we use the norm notation

$$\|X\|_m = \max_i |x_i|.$$

With respect to domain D we shall introduce the norm

$$(3) \quad \|f'(X)\|_I = \max_{X \in D} \|f'(X)\|_m,$$

where

$$(4) \quad \|f'(X)\|_m = \max_i \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \right|.$$

In our paper we shall use the following theorem related to the convergence of the iterative procedure (2'), that is (2), and which may be found in [1].

THEOREM 1. *Let the functions $f(X)$ and $f'(X)$ be continuous in the domain D , and, in D , let the inequality*

$$(5) \quad \|f'(X)\|_r \leq q < 1,$$

where q is a constant, hold true.

If the successive approximations

$$(6) \quad X^{(k+1)} = f(X^{(k)}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

lie in D , then the iteration process (6) converges and the limiting vector

$$X' = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)}$$

is the sole solution of system (1) in domain D .

COROLLARY 1. *The iteration process (6) converges if*

$$(7) \quad \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \right| \leq q_i < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

when $X \in D$.

Obviously, from the system of inequalities (7) follows condition (5) of Theorem 1.

NOTE 1. For the approximation of $X^{(k)}$ the following estimate holds:

$$(8) \quad \|X' - X^{(k)}\|_m \leq \frac{q^k}{1 - q} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_m \quad (k = 1, 2, \dots),$$

where $X^{(1)} = f(X^{(0)})$.

NOTE 1'. The convergence of the iterative process (2) (or (2')) in the general case is linear.

Here a proof of Note 1' will be given.

If the iterative process (2') converges to the solution X' of the equation (1'), then

$$(9) \quad X' = f(X').$$

Let $X^{(k)}$ be an approximate solution of equation (1') obtained by the process (2') for k large enough. Setting $X' = X^{(k)} + (X' - X^{(k)})$ and using Taylor's formula we obtain

$$(10) \quad f(X') = f(X^{(k)}) + f'(\bar{X})(X' - X^{(k)})$$

whence $\bar{X} = X^{(k)} + \theta(X' - X^{(k)})$, $0 < \theta < 1$.

Keeping in mind (2') and (9), we obtain from (10)

$$X' - X^{(k+1)} = f'(\bar{X})(X' - X^{(k)}),$$

whence

$$(11) \quad \|X' - X^{(k+1)}\|_m \leq \max_{X \in D} \|f'(X)\|_m \|X' - X^{(k)}\|_m.$$

Because of (3), (4) and (5) we see that (11) is reduced to

$$(12) \quad \|X' - X^{(k+1)}\|_m \leq q \|X' - X^{(k)}\|_m.$$

From (12) we deduce that the convergence of the iterative process (2') (or (2)) is linear, that is of the order 1.

1. Consider a real polynomial

$$(13) \quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0, n \geq 3)$$

with all zeros x_1, x_2, \dots, x_n real and distinct.

Let us set then

$$d = \min_{i \neq j} |x_i - x_j| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

For d one usually takes an estimate of the form

$$d \geq m \quad (m > 0),$$

(see for example [2], also [3]).

When discussing a real polynomial whose all zeros x_i are real and distinct, which is our case, the lower bound for d can be also determined if

all the zeros of the polynomial (13) are sufficiently separated using corresponding intervals.

Let

$$(14) \quad [b_i, d_i], \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad b_1 < d_1 < b_2 < d_2 < \dots < b_n < d_n$$

denote intervals which contain the respective zeros x_i of the polynomial (13). Then

$$(d_i, b_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

are intervals in which the polynomial (13) has no zeros. It is obvious that

$$d \geq \min_i (b_{i+1} - d_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

We shall write polynomial (13) in the form

$$\alpha_n \prod_{j=1}^n (x - x_j) = P(x), \quad \text{whence} \quad \frac{1}{x - x_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x - x_j} = \frac{P'(x)}{P(x)} \quad \text{and}$$

$$(15) \quad \frac{1}{(x - x_i)^3} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(x - x_j)^3} = Q(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

where

$$(16) \quad Q(x) = \frac{P'''(x)P^2(x) - 3P''(x)P'(x)P(x) + 2(P'(x))^3}{2P^3(x)}.$$

We shall take respectively from each of the intervals (14) one point. Let these points be c_i ($i = 1, 2, \dots, n$), no one of them being a zero of (13). We then have from (15), for $x = c_i$,

$$(17) \quad \frac{1}{(c_i - x_i)^3} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(c_i - x_j)^3} = Q(c_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

We shall consider (17) as a system of n equations in n unknowns x_1, x_2, \dots, x_n which can be written in the form

$$(18) \quad x_i = c_i - \left[Q(c_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(c_i - x_j)^3} \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

The system (18) is of the form (1). We shall apply the method of iteration for its solution. Let $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ be initial approximate values of zeros of the polynomial (13), with $x_i^{(0)} \in [b_i, d_i]$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Applying the iteration procedure (2) to the system (18) we obtain

$$(19) \quad x_i^{(k+1)} = c_i - \left[Q_i(c_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(c_i - x_j^{(k)})^3} \right]^{-\frac{1}{3}},$$

($i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots$).

We shall demonstrate the following theorem, related to the convergence of iteration sequences (19).

THEOREM 2. *Let the polynomial (13) have all its zeros x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) real and distinct contained in the intervals (14), respectively. If in every interval (14) we choose arbitrarily c_i and $x_i^{(0)}$ and if then all the approximations $x_i^{(k+1)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) obtained by the procedure (19) remain in the intervals (14), then the iteration sequences (19) converge respectively to the zeros x_i of the polynomial (13), when*

$$(20) \quad \max_i (d_i - b_i) \leq \frac{d}{s},$$

where

$$d = \min_{i \neq j} |x_i - x_j|,$$

s is a number greater than 2 for which

$$(21) \quad \left[\left(\frac{s}{s-1} \right)^4 + \frac{\pi^4}{45} \right] \cdot \frac{1}{s^4} \leq q < 1$$

and q is a constant.

Proof. The system (18) is of the form (1). Denoting its right sides by f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) respectively, we shall have

$$(22) \quad \frac{\partial f_i}{\partial f_j} = \begin{cases} 0 & \text{for } j = i \\ -(c_i - x_i)^{-4} & \end{cases} \left[Q_i(c_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(c_i - x_j)^3} \right]^{-\frac{4}{3}} \quad \text{for } j \neq i.$$

Substituting in the relation (22) the quantities $Q(c_i)$ by the corresponding values from (17) we shall obtain

$$(23) \quad \frac{\partial f_i}{\partial f_j} = \begin{cases} 0 & \text{for } j = i \\ \frac{-(c_i - x_i)^4}{(c_i - x_j)^4} & \text{for } j \neq i \end{cases}$$

By (23), the left sides in (7) reduce to

$$(24) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|c_i - x_j|^4}{|c_i - x_i|^4} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

By hypothesis, the zeros x_1, x_2, \dots, x_n of (13) are real and distinct and the minimal distance between neighbouring zeros is $d > 0$. Let zeros x_1, x_2, \dots, x_n be in order

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

If $x_i, c_i, x_i^{(0)} \in [b_i, d_i]$, then, having in mind (20)

$$(25) \quad |c_i - x_i| \leq \max_i (d_i - b_i) \leq \frac{d}{s}$$

and

$$(25') \quad |x_i^{(0)} - x_i| \leq \max_i (d_i - b_i) \leq \frac{d}{s} \quad (s > 2), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

If $c_i < x_i$, because of (25), we now have

$$(26) \quad \begin{aligned} |c_i - x_j| &> (j - i)d \text{ for } j - i > 0, \\ |c_i - x_j| &> (i - j - 1)d \text{ for } i - j - 1 > 0, \\ |c_i - x_j| &\geq \frac{s-1}{s}d \text{ for } i - j - 1 = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

If $c_i > x_i$, then, having in mind (25)

$$(27) \quad \begin{aligned} |c_i - x_j| &> (j - i - 1)d \text{ for } j - i - 1 > 0, \\ |c_i - x_j| &\geq \frac{s-1}{s}d \text{ for } j - i - 1 = 0, \\ |c_i - x_j| &> (i - j)d \text{ for } i - j > 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

From (26) and (27) one obtains

$$(28) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{|c_i - x_j|^4} < \frac{1}{d^4} \left[\left(\frac{s}{s-1} \right)^4 + 2 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n-2}{2}\right)^4} \right) \right], \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

for n even ≥ 4 , and

$$(29) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{|c_i - x_j|^4} < \frac{1}{d^4} \left[\left(\frac{s}{s-1} \right)^4 + 2 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^4} \right) \right], \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

for n odd ≥ 3 .

Since

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90},$$

relations (28) and (29) reduce to

$$(30) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{|c_i - x_j|^4} < \frac{1}{d^4} \left[\left(\frac{s}{s-1} \right)^4 + \frac{\pi^4}{45} \right].$$

Multiplying (30) by $|c_i - x_i|^4$, one obtains, keeping in mind (25)

$$(31) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|c_i - x_i|^4}{|c_i - x_j|^4} < \left[\left(\frac{s}{s-1} \right)^4 + \frac{\pi^4}{45} \right] \cdot \frac{1}{s^4} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Because of (21) we see that (31) reduces to

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|c_i - x_i|^4}{|c_i - x_j|^4} \leq q < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

which by (23) and (24) represents the conditions (7). The condition (20) implies that (7) is satisfied. In view of Corollary 1 and Theorem 1, the preceding fact proves Theorem 2.

NOTE 2. For the approximations of $x_i^{(k)}$ the following estimates hold (32)

$$|x_i^{(k)} - x_i| \leq \frac{q^k}{1-q} \max_i |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots).$$

NOTE 2'. The convergence of the iterative process (19) is linear.

COROLLARY 2. The iteration process (19) converges if

$$(32') \quad \max_i (d_i - b_i) \leq 0.4915563988 d.$$

The estimate (32) follows from the estimate (8), while the conclusion in Note 2' follows from the conclusion of Note 1'.

Set

$$(33) \quad F(s) = \left[\left(\frac{s}{s-1} \right)^4 + \frac{\pi^4}{45} \right] \cdot \frac{1}{s^4}.$$

For $s \in (0, 1)$ we have $F(s) > 2$. For $s \in (1, \infty)$ the function $F(s)$ is continuous and monotonically decreasing, where $F(s) \rightarrow \infty$ when $s \rightarrow 1$ and $F(s) \rightarrow 0$ when $s \rightarrow \infty$. Thus there is only one value $s' \in (1, \infty)$ for which $F(s') = 1$, which means that s' is the positive root of the equation

$$(34) \quad \left[\left(\frac{s}{s-1} \right)^4 + \frac{\pi^4}{45} \right] \cdot \frac{1}{s^4} = 1.$$

It is not hard to establish that for s' we have the bounds

$$2.034354556 < s' < 2.034354557.$$

Besides that, for $s > s'$ one has

$$(35) \quad F(s) = q < F(s') < 1.$$

In view of (33) the relation (35) represents the condition (21), which means that (20) holds for $s > s'$.

REMARK. We saw that the condition (20) is fulfilled for $s > s'$, where s' is the positive root of the equation (34). Therefore in (20) one may take $s = 2.034354557$. In that case (20) reduces to

$$(36) \quad \max_i (d_i - b_i) \leq 0.4915563988 d,$$

so that Corollary 2 is proved.

For given $s > s'$, in view of (21), one has

$$(37) \quad q = \left[\left(\frac{s}{s-1} \right)^4 + \frac{\pi^4}{45} \right] \cdot \frac{1}{s^4} < 1,$$

and according to (20) one should have

$$(38) \quad \max_i (d_i - b_i) \leq \frac{d}{s}.$$

The constant q obtained in this way serves in (32) for the valuation of the approximations $x_i^{(k)}$.

From (37) we may deduce that q quickly decreases as s gets larger, which in view of (38) means that q decreases quickly when $\max_i (d_i - b_i)$ decreases.

For a given $q < 1$ one can find s from (37), and then from (38) determine how large $\max_i (d_i - b_i)$ should be. In the following table we give some cases:

q	s	$\max_i (d_i - b_i)$	q	s	$\max_i (d_i - b_i)$
0.5	2.246	$\leq 0.4452 d$	0.001	7.900	$\leq 0.1265 d$
0.1	2.940	$\leq 0.3401 d$	0.0001	13.698	$\leq 0.0730 d$
0.01	4.677	$\leq 0.2138 d$	0.00001	24.390	$\leq 0.0410 d$

In practice $\max_i (d_i - b_i)$ should be determined so that (36) holds. Then from (38) one takes $s = \frac{d}{\max_i (d_i - b_i)}$. With this value of s one determines the constant q from (37).

As mentioned, for the quantity d one usually gives the bound of the form $d \geq m$ ($m > 0$), so that the condition (20) will be satisfied for

$$(39) \quad \max_i (d_i - b_i) \leq \frac{m}{g},$$

while the condition (36) will be satisfied when

$$(40) \quad \max_i (d_i - b_i) \leq 0.4915563988 m.$$

In practice instead of d one most often operates with the quantity m .

In iterative procedures for simultaneous determination of all zeros x_i of a polynomial (when the zeros are all distinct) the initial values $x_i^{(0)}$ must be chosen so that

$$|x_i^{(0)} - x_i| \leq h \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

To prove the convergence of these iterative procedures, the constant h , in the general case must satisfy the condition

$$h < \frac{d}{2}.$$

In some iterative procedures one requires that h be much smaller than $\frac{d}{2}$.

We mention here the procedure

$$(41) \quad x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{P(x_i^{(k)})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i^{(k)} - x_j^{(k)})} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots)$$

which is used more than 20 years. The appearance of the procedure (41) is linked with the papers [4] and [5].

For the iterative procedure (41), K. Dočev [4] proved the following proposition:

If $d = \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$ and

$$(41') \quad |x_i^{(0)} - x_i| < h \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

where

$$(42) \quad h = d \cdot \frac{(1+q)^{1/(n-1)}}{2(1+q)^{1/(n-1)} - 1} \quad (0 < q < 1),$$

then the iterative procedure (41) is convergent, where

$$|x_i^{(k)} - x_i| \leq hq^{2^k-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots).$$

By the procedure (41), we deduce from (42) that the quantity h must be much smaller than $\frac{d}{2}$ and it decreases with the increase of the degree n of the polynomial. Thus for $n = 3$ we must have $h < 0.2265409197 d$, for $n = 6$ we must have $h < 0.1146128658 d$, and for $n = 10$ we must have $h < 0.0690099084 d$. A similar situation arises with some interval methods for simultaneous determination of all zeros of a polynomial (see [6]).

Good aspects of the procedure (19) are in the following:

- 1) one can take wider intervals $[b_i, d_i]$ containing initial values $x_i^{(0)}$,
- 2) the widths of the intervals $[b_i, d_i]$, depending on (20), do not depend on the degree n of the polynomial,
- 3) a relatively small decrease of the intervals $[b_i, d_i]$ enables one to arrive at the approximations $x_i^{(k)}$ with a satisfying precision,
- 4) the calculation of the values $x_i^{(k+1)}$ are not complicated, since the quantities c_i and $Q(c_i)$ are not changed.

2. EXAMPLE. The procedure (19) will be applied to the Legendre polynomial of degree 6

$$(43) \quad P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

It is known that the Legendre polynomial of degree n

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

has all zeros real and different and that they all lie in the interval $(-1, 1)$.

The zeros of the polynomial (43) are the zeros of the polynomial

$$(44) \quad P(x) = 231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5$$

and they are symmetrically distributed with respect to the point 0. Since $P(-0.95) > 0$, $P(-0.92) < 0$; $P(-0.67) < 0$, $P(-0.64) > 0$; $P(-0.25) > 0$, $P(-0.21) < 0$; $P(0.21) < 0$, $P(0.25) > 0$; $P(0.64) > 0$, $P(0.67) < 0$; $P(0.92) < 0$, $P(0.95) > 0$; then in every interval $[b_i, d_i]$:

$$(45) \quad [-0.95, -0.92], [-0.67, -0.64], [-0.25, -0.21], \\ [0.21, 0.25], [0.64, 0.67], [0.92, 0.95]$$

lies a zero of the polynomial (44). Here

$$(46) \quad \max_i (d_i - b_i) = 0.04$$

and

$$(47) \quad \min_i (b_{i+1} - d_i) = 0.25 = m \leq d.$$

According to (47) we have

$$0.4915563988 m = 0.1228890997$$

which in view of (46) means that

$$(48) \quad \max_i (d_i - b_i) < 0.4915563988 m.$$

Taking into account (47) we obtain from (48)

$$\max_i (d_i - b_i) < 0.4915563988 d,$$

so that also the condition (32') is fulfilled. According to (39), we now have $s = \frac{m}{\max_i (d_i - b_i)} = 6.25$. For $s = 6.25$ from (37) we obtain

$$q < 0.002735.$$

If for quantities $c_i \in [b_i, d_i]$ and $x_i^{(0)} \in [b_i, d_i]$ we take for example:

$$c_1 = -0.94, c_2 = -0.63, c_3 = -0.23, c_4 = 0.22, c_5 = 0.65, c_6 = 0.93,$$

$$x_1^{(0)} = -0.93, x_2^{(0)} = -0.65, x_3^{(0)} = -0.24, \\ x_4^{(0)} = 0.24, x_5^{(0)} = 0.66, x_6^{(0)} = 0.94,$$

then by applying the procedure (19), taking into account (16), we set approximations:

$$x_1^{(1)} = -0.9324695197, x_1^{(2)} = -0.9324695142, x_1^{(3)} = -0.9324695142 \\ x_2^{(1)} = -0.6612096179, x_2^{(2)} = -0.6612093865, x_2^{(3)} = -0.6612093865 \\ x_3^{(1)} = -0.2386191882, x_3^{(2)} = -0.2386191861, x_3^{(3)} = -0.2386191861 \\ x_4^{(1)} = 0.2386191878, x_4^{(2)} = 0.2386191861, x_4^{(3)} = 0.2386191861 \\ x_5^{(1)} = 0.6612093679, x_5^{(2)} = 0.6612093865, x_5^{(3)} = 0.6612093865 \\ x_6^{(1)} = 0.9324695142, x_6^{(2)} = 0.9324695142, x_6^{(3)} = 0.9324695142$$

According to (32), in our case

$$|x_i^{(2)} - x_i| < 0.0000000841 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

For the application of the procedure (41), according to (41') and (42) we must have $|x_i^{(0)} - x_i| < 0.1146128658$ $m = 0.0286532165$, that is $\max_i (d_i - b_i) < 0.0286532165$, which is not fulfilled here. This means that in applying the procedure (41) the initial values $x_i^{(0)}$ must be taken from smaller intervals than the intervals (45).

When dealing with a complex or real polynomial $P(z)$ of degree n , whose all zeros z_1, z_2, \dots, z_n are distinct, then we have the following proposition:

If \bar{z}_i is an approximate value of a zero z_i of a polynomial $P(z)$ and if

$$(49) \quad \left| \frac{nP(\bar{z}_i)}{P'(\bar{z}_i)} \right| < \frac{m}{2} \leq \frac{d}{2},$$

then

$$(50) \quad |\bar{z}_i - z_i| < \frac{|P(\bar{z}_i)|}{|P'(\bar{z}_i)| - \frac{2n-2}{m}|P(\bar{z}_i)|}$$

independently of the way we obtained the approximate value \bar{z}_i . The proposition (50) may be found in [7].

In our case, for $\bar{z}_i = x_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), the conditions (49) are fulfilled. According to (50) we have

$$|x_i^{(2)} - x_i| < 0.000000000036 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Let us state at the end that there exist several procedures for the simultaneous determination of all zeros of a polynomial. Some of them may be found in [8] and [9].

REFERENCES

- [1] DEMIDOVICH B.P. and MARON I.A., *Computational mathematics*, translated from russian by George Yankovsky, Mir publishers Moscow, Third printing 1981.
- [2] BEREZIN I.S. and ŽIDKOV N.P., *Metodi vičislenij*, tom II, p. 89, Moscow 1960 (in Russian).
- [3] PREŠIĆ S.B., *On the minimal distance of the zeros of a polynomial*, Publ. Inst. Math. 38 (52) (1985), 35-38.
- [4] DOČEV K., *A modified Newton method for the simultaneous approximation of all roots of the given algebraic equation* (in Bulgarian), Fiz.-Math.Spis. Bulgar, Akad. Nauk 5 (1962), 136-139.
- [5] PREŠIĆ S.B., *Un procédé itératif pour la factorisation des polynomes*, C.R. Acad. Sci. Paris 262 (1966), 862-863.
- [6] KJURKCHIEV N.V. and MARKOV S.M., *Two interval methods for algebraic equations with real roots*, PLISKA Studia mathematica bulgarica, Vol.5 (1983), 118-131.
- [7] SIMEUNOVIĆ D.M., *On some estimates of approximate values of zeros of polynomials* (to appear in ZAMM-Z. angew. Math. Mech. 70 (1990)).
- [8] EHRLICH L.W., *A modified Newton method for polynomials*, Comm. ACM 10 (1967), 107-108.
- [9] NOUREIN A.W., *An improvement on two iteration methods for simultaneous determination of the zeros of a polynomial*, Internat. J. Comput. Math. 3 (1977), 241-252.

SIMEUNOVIĆ, D. M.

On the Convergence of an Iterative Procedure for the Simultaneous Determination of all Zeros of a Polynomial

In this paper one considers an iteration procedure for the simultaneous determination of all zeros of a polynomial in case they are real and distinct. Sufficient conditions for the convergence of that procedure are obtained.

There exist more than one procedure for the simultaneous determination of all zeros of a polynomial. An exhaustive list of works related to that problem can be found in [1].

Let us consider the system of equations

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

where the f_i and $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, are real and continuous functions for $A_i \leq x_i \leq B_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, with A_i and B_i given numbers. Let $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ be an isolated solution of (1), with $A_i \leq x_i^0 \leq B_i$. As is known, the quoted isolated solution of system (1) can be obtained by the iteration method. In order to obtain it we start with a given initial approximate solution $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, with $A_i \leq x_i^{(0)} \leq B_i$, and form the iteration sequences

$$x_i^{(k+1)} = f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

As is known (cf. [2]), sequences (2) converge to the quoted isolated solution of system (1) when

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq q_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

for $A_i \leq x_i \leq B_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Consider a real polynomial

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad n \geq 3, \tag{4}$$

with all zeros x_1, x_2, \dots, x_n real and distinct. We shall write (4) in the form $\prod_{j=1}^n (x - x_j) = P(x)$, wherefrom

$$\frac{1}{x - x_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x - x_j} = \frac{P'(x)}{P(x)}. \tag{5}$$

Let

$$(b_i, d_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

be intervals containing respectively each a zero of (4). We shall take respectively from each of the intervals (6) one point. Let these points be c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, no one of them being a zero of (4). We then have from (5), for $x = c_i$,

$$\frac{1}{c_i - x_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{c_i - x_j} = \frac{P'(c_i)}{P(c_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{7}$$

We shall consider (7) as a system of n equations in n unknowns x_1, x_2, \dots, x_n which we can write in the form

$$x_i = c_i - 1 \left/ \left(\frac{P'(c_i)}{P(c_i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{c_i - x_j} \right) \right., \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{8}$$

The system (8) is of the form (1). We shall apply the method of iteration for its solution. Let $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ be the initial approximate values of zeros of the polynomial (4), with $x_i^{(0)} \in (b_i, d_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Applying the iteration procedure (2) to system (8) we obtain

$$x_i^{(k+1)} = c_i - 1 \left/ \left(\frac{P'(c_i)}{P(c_i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{c_i - x_j^{(k)}} \right) \right., \quad i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots \tag{9}$$

We shall demonstrate the next theorem, related to the convergence of iteration sequences (9).

Theorem 1: *The iteration sequences (9) converge respectively to zeros x_1, x_2, \dots, x_n of the polynomial (4) when*

$$|c_i - x_i| \leq \frac{d}{r}, \quad \text{and} \quad |x_i^{(0)} - x_i| \leq \frac{d}{r}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{10, (11)}$$

where

$$d = \min_{\substack{i, j \\ i \neq j}} |x_i - x_j|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{12}$$

r being either a positive root of the equation

$$\left(\frac{s}{s-1}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}\right) = s^2 \quad (13)$$

for n even ≥ 4 , or a positive root of the equation

$$\left(\frac{s}{s-1}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\right) = s^2 \quad (14)$$

for n odd ≥ 3 .

Proof: The system (8) is of the form (1). Denoting its right sides in order by f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) we have

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & \text{for } j = i \\ -(c_i - x_j)^{-2} \left[\frac{P'(c_i)}{P(c_i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{c_i - x_j} \right]^{-2} & \text{for } j \neq i. \end{cases} \quad (15)$$

Substituting in the relations (15) the quantities $P'(c_i)/P(c_i)$ by the corresponding values from (7) we obtain

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & \text{for } j = i \\ -\frac{(c_i - x_j)^2}{(c_i - x_j)^2} & \text{for } j \neq i. \end{cases} \quad (16)$$

By (16), the left sides in (3) reduce to

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|c_i - x_j|^2}{|c_i - x_j|^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

By hypothesis, the zeros x_1, x_2, \dots, x_n of (4) are real and distinct and the minimal distance between two neighbouring zeros is $d > 0$. Let the zeros x_1, x_2, \dots, x_n be in order

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

If $c_i < x_i$ and if

$$|c_i - x_j| \leq \frac{d}{s}, \quad s > 2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

then

$$\left. \begin{aligned} |c_i - x_j| &> (j-i)d \text{ for } j-i > 0, & |c_i - x_j| &> (i-j-1)d \text{ for } i-j-1 > 0, \\ |c_i - x_j| &\geq \frac{s-1}{s}d \text{ for } i-j-1 = 0, & i, j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

If $c_i > x_i$, then, having (18) in mind,

$$\left. \begin{aligned} |c_i - x_j| &> (j-i-1)d \text{ for } j-i-1 > 0, & |c_i - x_j| &\geq \frac{s-1}{s}d \text{ for } j-i-1 = 0, \\ |c_i - x_j| &> (i-j)d \text{ for } i-j > 0, & i, j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

From (19) and (20) one obtains

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{|c_i - x_j|^2} < \frac{1}{d^2} \left[\left(\frac{s}{s-1}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}\right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (21)$$

with n even ≥ 4 , or

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{|c_i - x_j|^2} < \frac{1}{d^2} \left[\left(\frac{s}{s-1}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (22)$$

with n odd ≥ 3 .

Denoting by r a positive root of (13) or (14), respectively relations (21) and (22) reduce to

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{|c_i - x_j|^2} < \frac{r^2}{d^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Multiplying (23) by $|c_i - x_i|^2$ one obtains, on account of (10),

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|c_i - x_i|^2}{|c_i - x_j|^2} < \frac{r^2}{d^2} |c_i - x_i|^2 \leq \frac{r^2}{d^2} \cdot \frac{d^2}{r^2} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

or

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|c_i - x_j|^2}{|c_i - x_i|^2} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

which by (16) and (17) represents conditions (3).

Conditions (10) imply that conditions (3) are satisfied. Taking into account also conditions (11), the demonstration of Theorem 1 would be completed.

Equations (13) and (14) can be written in the form

$$s^4 - 2s^3 - 2Ss^2 + 4Ss - 2S = 0, \quad (25)$$

where

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2} \quad (26)$$

for n even ≥ 4 or

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}, \quad (27)$$

respectively, for n odd ≥ 3 . In both cases S is subject to the limitations

$$1 \leq S < \frac{\pi^2}{6}.$$

Equation (25) has only one positive root r , with

$$2 < r < 2,5. \quad (28)$$

The increase of S in (25) or the increase of the degree n of the polynomial (4), respectively, which appears in (26) and (27), implies the increase of the positive root r , which remains in the limits (28). Having in mind (28), the conclusion results from Theorem 1:*The iteration sequences (9) respectively converge to zeros x_1, x_2, \dots, x_n of the polynomial (4) when*

$$|c_i - x_i| \leq 0,4d \quad \text{and} \quad |x_i^{(0)} - x_i| \leq 0,4d, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

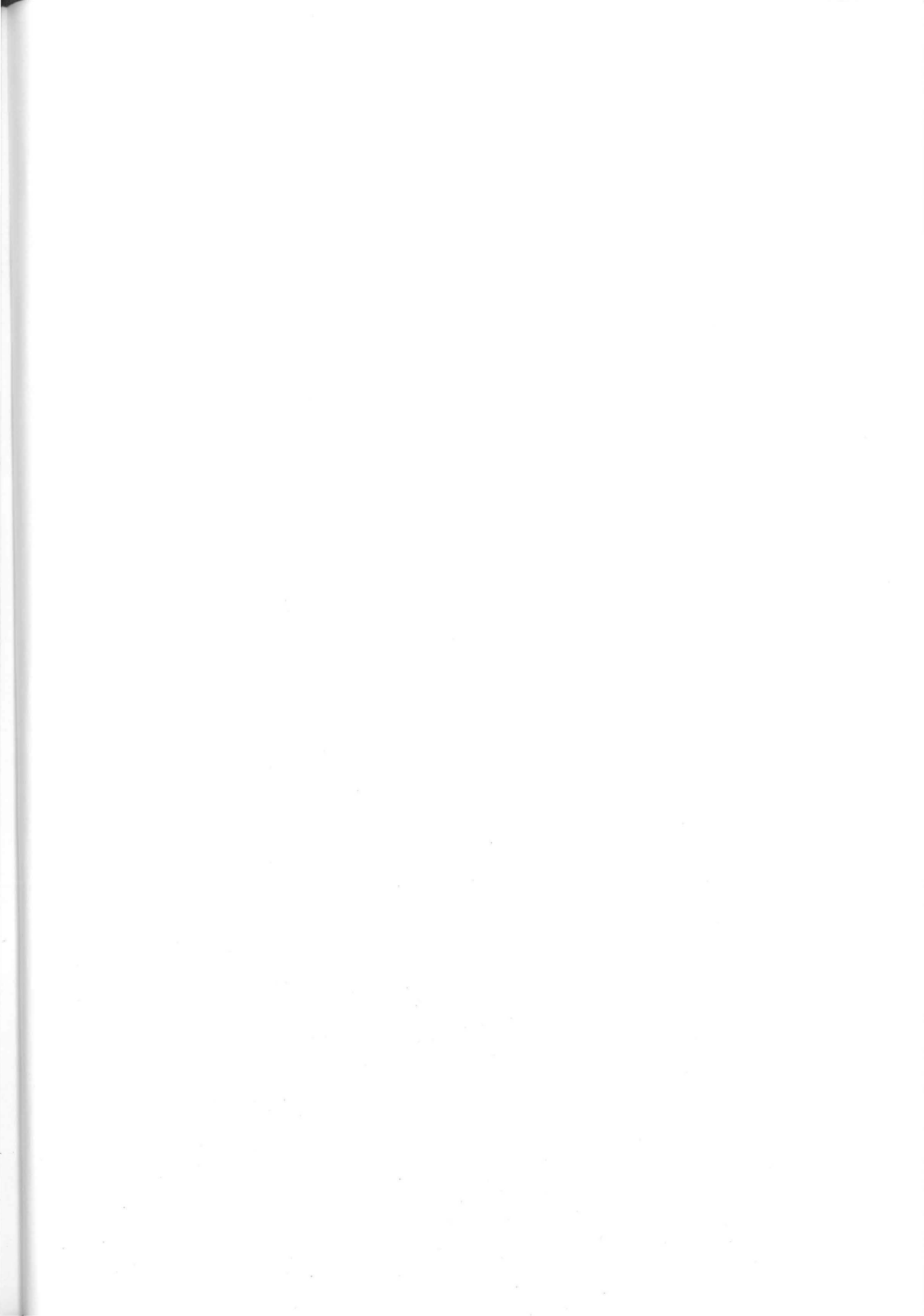
where

$$d = \min_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |x_i - x_j|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

References

- 1 MILOVANOVIĆ, G.: Numerička analiza, Beograd 1985 (in Serbo-croatian).
- 2 DEMIDOVICH, B. P.; MARON, I. A.: Osnovy vychislitel'noy matematiki, Moscow 1970 (in Russian).

Address: Dr. DRAGOMIR SIMBURIĆ, Mining and Geology Faculty, Džušina 7, YU-11000 Belgrade, Yugoslavia



On Some Estimates of Approximate Values of Zeros of Polynomials

Considering the polynomial as a specific function one can give some particular estimates for the approximate values of its zeros. The establishing of such estimates is the purpose of this paper.

Consider the polynomial

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

and let z_1, z_2, \dots, z_n be its zeros. We can write then the polynomial (1) in the form $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$, whence

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{z - z_n}. \quad (2)$$

Before further exposition we shall prove the following theorem.

Theorem 1: Let c_1 be any point in the complex plane for which $P(c_1) \neq 0$ and $P'(c_1) \neq 0$. Then the closed circle C_1 , having its center in c_1 and a radius $r_1 = \left| \frac{nP(c_1)}{P'(c_1)} \right|$, contains at least one zero of the polynomial (1).

Proof: For $z = c_1$ one obtains from (2)

$$\frac{P'(c_1)}{P(c_1)} = \frac{1}{c_1 - z_1} + \frac{1}{c_1 - z_2} + \dots + \frac{1}{c_1 - z_n}. \quad (3)$$

Let z_1 be a zero of the polynomial (1) which is nearest to c_1 . It is clear that such a zero of (1) exists. One then has from (3)

$$\left| \frac{P'(c_1)}{P(c_1)} \right| \leq \frac{1}{|c_1 - z_1|} + \frac{1}{|c_1 - z_2|} + \dots + \frac{1}{|c_1 - z_n|} \leq \frac{n}{|c_1 - z_1|},$$

hence the relation

$$|c_1 - z_1| \leq \left| \frac{nP(c_1)}{P'(c_1)} \right|, \quad (4)$$

which is the statement of Theorem 1.

Theorem 1 is the particular case of a more general theorem mentioned in [5], where several proofs have been given in addition to the above proof. Theorem 1 can be also deduced from Laguerre's Theorem (see [5]).

Let us now consider the case when all the zeros z_1, z_2, \dots, z_n of (1) are distinct. Let us then put

$$d = \min_{i \neq j} |z_i - z_j|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

For d one usually takes an estimate of the form

$$d \geq m, \quad m > 0 \quad (6)$$

(see for example [2], also [6]).

If we have, for the point c_1 which is near to zero z_1 of the polynomial (1)

$$\left| \frac{nP(c_1)}{P'(c_1)} \right| < \frac{d}{2}, \quad (7)$$

namely

$$r_1 < \frac{d}{2},$$

then the closed circle C_1 contains, by Theorem 1, only one zero of the polynomial (1), which is z_1 , so that one has by (4)

$$|c_1 - z_1| \leq \left| \frac{nP(c_1)}{P'(c_1)} \right|. \quad (8)$$

In the case when the condition (7) is satisfied one has by (8)

$$|c_1 - z_1| < \frac{d}{2}. \quad (9)$$

Under the condition (7), having in mind (9), we shall give for $|c_1 - z_1|$ an estimate which is more precise than (8). Write first (3) in the form

$$\frac{P'(c_1)}{P(c_1)} = \frac{1}{c_1 - z_1} + \frac{1}{(z_1 - z_2) + (c_1 - z_2)} + \dots + \frac{1}{(z_1 - z_n) + (c_1 - z_1)}. \quad (10)$$

Keeping in mind (5), (7) and (9), one obtains from (10)

$$\begin{aligned} \left| \frac{P'(c_1)}{P(c_1)} \right| &\leq \frac{1}{|c_1 - z_1|} + \frac{1}{|z_1 - z_2| - |c_1 - z_1|} + \dots + \frac{1}{|z_1 - z_n| - |c_1 - z_1|} \leq \\ &\leq \frac{1}{|c_1 - z_1|} + \frac{n-1}{d - |c_1 - z_1|} < \frac{1}{|c_1 - z_1|} + \frac{n-1}{d - \frac{d}{2}} = \frac{1}{|c_1 - z_1|} + \frac{2n-2}{d}, \end{aligned}$$

hence

$$|c_1 - z_1| < \frac{|P(c_1)|}{|P'(c_1)| - \frac{2n-2}{d} |P(c_1)|}. \quad (11)$$

When the condition (7) is satisfied one has $|P(c_1)| < \frac{|P'(c_1)| d}{2n}$. Hence

$$\frac{|P(c_1)|}{|P'(c_1)| - \frac{2n-2}{d} |P(c_1)|} < \frac{|P(c_1)|}{|P'(c_1)| - \frac{2n-2}{d} \cdot \frac{|P'(c_1)| d}{2n}} = \frac{|nP(c_1)|}{|P'(c_1)|}. \quad (12)$$

From (12) we draw the conclusion that the estimate (11) for $|c_1 - z_1|$ is more precise than the estimate (8) when the condition (7) is satisfied. If

$$\left| \frac{nP(c_1)}{P'(c_1)} \right| < \frac{m}{2} \leq \frac{d}{2}, \quad (13)$$

then

$$\frac{|P(c_1)|}{|P'(c_1)| - \frac{2n-2}{d} |P(c_1)|} \leq \frac{|P(c_1)|}{|P'(c_1)| - \frac{2n-2}{m} |P(c_1)|}. \quad (14)$$

Under the condition (13), having in mind (14), one obtains from (11)

$$|c_1 - z_1| < \frac{|P(c_1)|}{|P'(c_1)| - \frac{2n-2}{m} |P(c_1)|}. \quad (15)$$

If the condition (13) is satisfied one has $|P(c_1)| < \frac{|P'(c_1)| m}{2n}$. In that case

$$\frac{|P(c_1)|}{|P'(c_1)| - \frac{2n-2}{m} |P(c_1)|} < \frac{|P(c_1)|}{|P'(c_1)| - \frac{2n-2}{m} \cdot \frac{|P'(c_1)| m}{2n}} = \frac{|nP(c_1)|}{|P'(c_1)|}. \quad (16)$$

From (16) we conclude that the estimate (15) for $|c_1 - z_1|$ is more precise than (8) when the condition (13) is satisfied.

On the basis of what has been said, now we can formulate the following theorem relating to estimates of approximate values of zeros of a polynomial.

Theorem 2: Let all zeros z_1, z_2, \dots, z_n of the polynomial (1) be different and let

$$d = \min_{i \neq j} |z_i - z_j|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Let z_1 be any zero of the polynomial (1) and let \bar{z}_1 be its approximate value. If

$$\left| \frac{nP(\bar{z}_1)}{P'(\bar{z}_1)} \right| < \frac{d}{2}, \tag{17}$$

then

$$|\bar{z}_1 - z_1| \leq \left| \frac{nP(\bar{z}_1)}{P'(\bar{z}_1)} \right| \tag{18}$$

and

$$|\bar{z}_1 - z_1| < \frac{|P(\bar{z}_1)|}{|P'(\bar{z}_1)| - \frac{2n-2}{d} |P(\bar{z}_1)|}. \tag{19}$$

If we have

$$\left| \frac{nP(\bar{z}_1)}{P'(\bar{z}_1)} \right| < \frac{m}{2} \leq \frac{d}{2}, \tag{20}$$

then

$$|\bar{z}_1 - z_1| < \frac{|P(\bar{z}_1)|}{|P'(\bar{z}_1)| - \frac{2n-2}{m} |P(\bar{z}_1)|}. \tag{21}$$

The estimates (19) and (21) are more precise than the estimate (18). When $|P(\bar{z}_1)|$ is sufficiently small, then

$$|\bar{z}_1 - z_1| \approx \left| \frac{P(\bar{z}_1)}{P'(\bar{z}_1)} \right|. \tag{22}$$

Proof: If we put in (7), (8), (11), (13) and (15) $c_1 = \bar{z}_1$, we obtain (17), (18), (19), (20) and (21), respectively, which proves Theorem 2.

From (12), that is from (16) for $c_1 = \bar{z}_1$, we can conclude that the estimates (19) and (20) are more precise than estimate (18). That (22) is valid when $|P(\bar{z}_1)|$ is sufficiently small, can be easily concluded from the right-hand side of (19), or from the right-hand side of (20).

The estimates (18), (19) and (21) are valid independently of the way we obtained the approximate value \bar{z}_1 of zero z_1 of the polynomial (1).

We can apply Newton's method for the determination of approximate values of simple complex zeros of polynomials. Let z_1 be a simple complex zero of the polynomial (1). Let subsequently U_1 be a convex neighbourhood of the zero z_1 , where the polynomial (1) has no other zeros. As is known, taking the initial approximate value $z_1(0)$ from the neighbourhood of U_1 , using Newton's method,

$$z_1(k+1) = z_1(k) - \frac{P(z_1(k))}{P'(z_1(k))}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{23}$$

we can get new, more precise approximations of the zero z_1 of polynomial (1). Under certain conditions (see [4], p. 155), the sequence (23) converges to the zero z_1 of the polynomial (1). Specially, if we have

$$\min_{z \in U_1} |P'(z)| \geq m_1 > 0,$$

where the neighbourhood U_1 contains the sequence $z_1(k)$, then the estimate

$$|z_1(k) - z_1| \leq \frac{|P(z_1(k))|}{m_1} \tag{24}$$

is valid.

Concerning estimate (24), in practice it often appears that there are difficulties in determining the value of m_1 .

When we speak about the estimates (18), (19) and (21) all values that appear in them (the degree n of a polynomial, the value of a polynomial and its derivative at the point \bar{z}_1 and the value d , that is its lower bound m) can be determined without any special difficulties. This fact underlines the practical significance of these estimates.

The use of the estimates (18) and (19), that is the estimate (21) will be shown concretely. There are several expressions which represent the upper bound M of the modulus of zeros of a polynomial (see for example [3]). We are giving here one Cauchy's result [1], according to which for every zero z_k , $k = 1, 2, \dots, n$, of polynomial (1) one has

$$|z_k| \leq \max (n |a_k|)^{1/k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{25}$$

For the value d , usually we give an estimate of the form (6). We are giving here the estimate presented in [2], p. 89, according to which

$$d \geq \frac{|D|}{(2M)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}} = m, \tag{26}$$

where M is the upper bound of the modulus of the zeros of the polynomial (1), which means that $|z_i| \leq M$, $i = 1, 2, \dots, n$, and where

$$D^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad s_k = \sum_{i=1}^n z_i^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

the values s_k are determined by the equations

$$s_k + a_1 s_{k-1} + \dots + a_{n-1} s_1 + k a_n = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad s_0 = n,$$

that is, from the equations

$$s_{n+m} + a_1 s_{n+m-1} + \dots + a_{n-1} s_{m+1} + a_n s_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

For the number m which represents a lower bound for d , using (26), usually we get a diminished value. This diminution is more expressed in the case when the degree n of the polynomial (1) is larger.

We want to mention that for d we can get more precise estimates than (26) when $n > 3$. Besides, the lower bound for d can be also determined if in the complex plane all the zeros of the polynomial (1) are sufficiently separated using corresponding circles.

Example: The polynomial

$$P(z) = z^3 + 3z - 5 \tag{27}$$

has two complex zeros z_1 and z_2 , and one real zero z_3 . For its zeros, according to (25), one has $|z_k| \leq 3 = M$. If the value d is estimated using the formula (26) with $M = 3$, we shall get $d > 0,7772 = m$. If for the initial approximate value of the zero z_1 of the polynomial (27) we have taken $z_1(0) = -0,6 + 2i$, then applying Newton's method (23), we have

$$z_1(1) = -0,577224736 + 1,999497235i, \quad z_1(2) = -0,5770856931 + 1,999770968i,$$

where $|P(z_1(2))| = 0,0000005883$, $|P'(z_1(2))| = 10,57902297$. If we put $\bar{z}_1 = z_1(2)$, then

$$\left| \frac{3P(z_1(2))}{P'(z_1(2))} \right| = 0,000000167 < 0,3886 = \frac{m}{2} < \frac{d}{2},$$

which means that the conditions (17) and (20) are satisfied. Therefore, for $|z_1(2) - z_1|$ we can take the estimates (18) and (21). According to (18) we have

$$|z_1(2) - z_1| \leq 0,000000167,$$

and according to (21) we have

$$|z_1(2) - z_1| < 0,000000056.$$

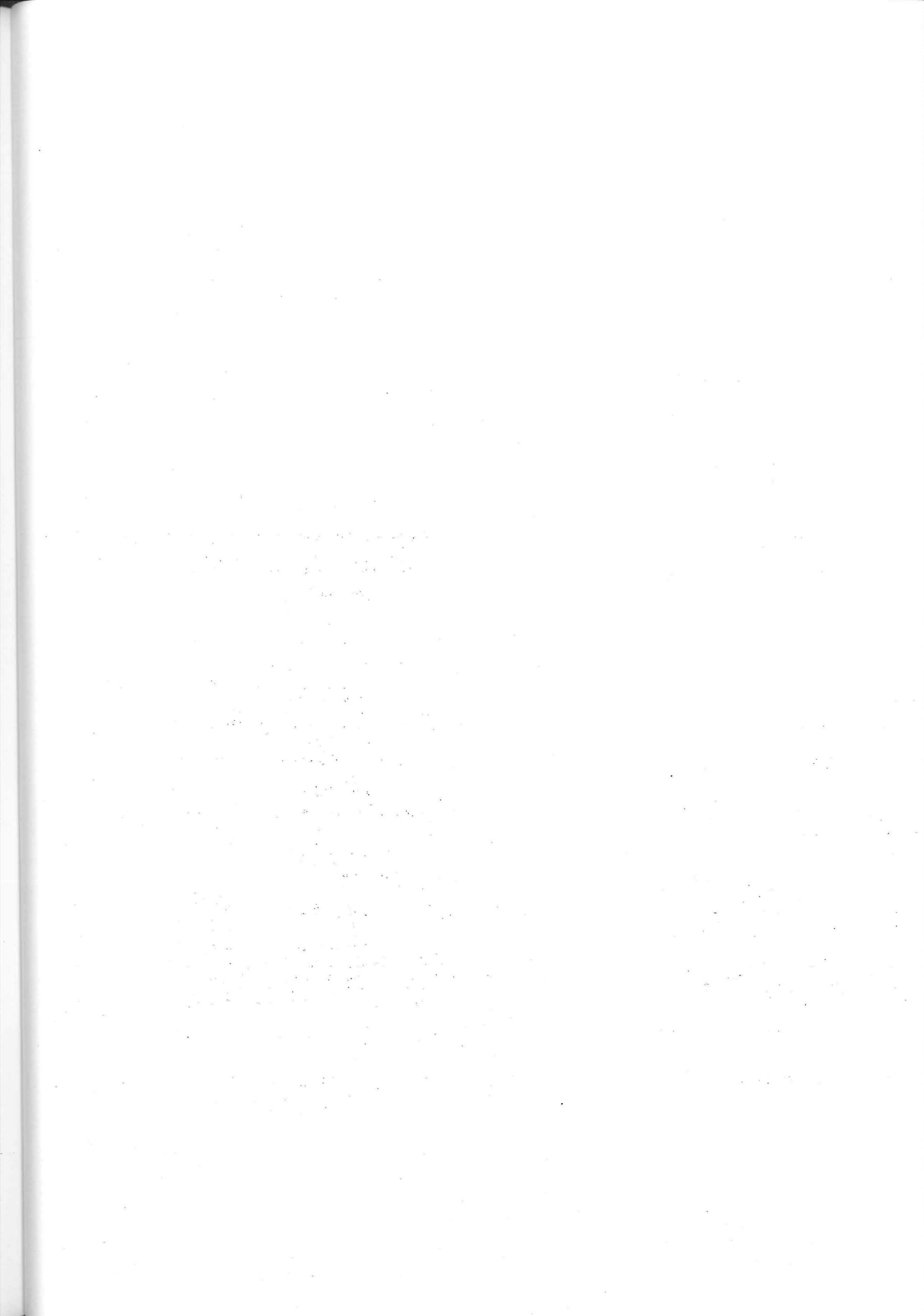
Remark: From Theorem 1 we can conclude the following: Let z_1 be one isolated simple zero of the polynomial (1) and let \bar{z}_1 be its approximate value. If then all other zeros z_2, z_3, \dots, z_n of the polynomial (1) lie outside the circle with center \bar{z}_1 and radius $r_1 = \left| \frac{nP(\bar{z}_1)}{P'(\bar{z}_1)} \right|$, then we have the estimate

$$|z_1 - z_1| \leq \left| \frac{nP(\bar{z}_1)}{P'(\bar{z}_1)} \right|. \tag{28}$$

References

- 1 CAUCHY, A. L.: Exercices de mathématique. Oeuvres (2) Vol. 9, 1829.
- 2 BEREZIN, I. S. (Березин, И. С.); ŽIDKOV, N. P. (Жидков, Н. П.): Методы вычислений. Москва 1960.
- 3 MARDEN, M.: Geometry of polynomials. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1966.
- 4 DEMIDOVIC, B. P. (Демидович, Б. П.); MARON, I. A. (Марон, И. А.): Основы вычислительной математики. Москва 1970.
- 5 SIMEUNOVIĆ, D. M.: Sur une évaluation des valeurs approximatives des zéros complexes des polynômes. Mat. Vesnik 13 (28) (1976), 449–454.
- 6 PREŠIĆ, S. B.: On the minimal distance of the zeros of a polynomial. Publ. Inst. Math. 38 (52) (1985), 35–38.

Address: Prof. Dr. DRAGOMIR SIMEUNOVIĆ, Mining and Geology Faculty, Djušina 7, 11000 Belgrade, Yugoslavia



SIMEUNOVIĆ, D. M.

A Remark on the Zeros of a Polynomial

In this paper we determine in the complex plane circular domains containing all zeros of the polynomial

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad n \geq 3, \quad (1)$$

where we also obtain several expressions which represent an upper bound for the moduli of the zeros of $P(z)$.

The place of the zeros of the polynomial (1) in the complex plane, depending on its coefficients a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, was investigated by many authors (see e.g. [1]). Here we quote a result due to Cauchy [1, p. 123] which is as follows:

All zeros of the polynomial (1) lie in the circular domain

$$|z| < 1 + M \quad (2)$$

where

$$M = \max |a_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

M. TOMIĆ [2] considered the zeros of the polynomial (1) in the halfplanes $|z + a_1| \geq |z - 1|$, $|z + a_1| < |z - 1|$ and the halfplanes $|z + a_1| \geq |z|$, $|z + a_1| < |z|$ of the complex plane and obtained interesting results. Here we quote three of M. TOMIĆ's results:

(A₁) In the halfplane

$$|z + a_1| \geq |z - 1| \quad (4)$$

all the zeros of the polynomial (1) lie in the circular domain

$$|z| < 1 + \sqrt{M_1} \quad (5)$$

where

$$M_1 = \max \frac{|a_2 + a_3 + \dots + a_k|}{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (6)$$

(A₂) In the halfplane

$$|z + a_1| < |z - 1| \quad (7)$$

all the zeros of the polynomial (1) lie in the union of the circular domains

$$|z + a_1| < 1, \quad |z| < 1 + M_2 \quad (8)$$

where

$$M_2 = \max \frac{|a_2| + |a_3| + \dots + |a_k|}{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (9)$$

(A₃) All the zeros of the polynomial (1) lie in the union of the circular domains

$$|z + a_1| < 1, \quad |z| < 1 + M_2. \quad (10)$$

The result (A₂) is contained in the result (A₃), but it was especially pointed out by M. TOMIĆ in order to be considered together with the result (A₁).

In view of the inequalities

$$|a_1| \leq M \quad (11)$$

and

$$M_1 \leq M_2 \leq M, \quad (12)$$

M. TOMIĆ proved that the union of the circular domains (10) lies inside Cauchy's circular domain (2), except when $M_2 = M$ in which case the union of the domains (10) coincides with the domain (2).

When $M_1 > 1$, then $1 + \sqrt{M_1} < 1 + M_1 \leq 1 + M_2 \leq 1 + M$. In this case the part of the circular domain (5) which is contained in the halfplane (4) lies inside Cauchy's circular domain (2). Concerning the zeros of the polynomial (1) which lie in the halfplane (7), according to (A₂) they lie in the union of the circular domains (8) where this union does not have points outside Cauchy's domain (2).

In this paper the zeros of the polynomial (1) are considered in certain circular domains, and one theorem is proved. For the proof of the theorem we shall use the method that M. TOMIĆ used in proving the results (A₂) and (A₃), respectively.

Theorem: All the zeros of the polynomial (1) lie in the union of the circular domains

$$|z + a_1| < A, \quad |z| < 1 + M_2/A, \quad (13)$$

where M_2 is given by (9) and A is an arbitrary positive number.

Proof: We write (1) in the form

$$P(z) = z^{n-1}(z + a_1) + a_2 z^{n-2} + a_3 z^{n-3} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad (14)$$

hence

$$|P(z)| \geq |z|^{n-1} |z + a_1| - [|a_2| |z|^{n-2} + |a_3| |z|^{n-3} + \dots + |a_{n-1}| |z| + |a_n|]. \quad (15)$$

Since

$$\begin{aligned} & |a_2| |z|^{n-2} + |a_3| |z|^{n-3} + \dots + |a_{n-1}| |z| + |a_n| = |a_2| (|z|^{n-2} - |z|^{n-3}) \\ & \quad + (|a_2| + |a_3|) (|z|^{n-3} - |z|^{n-4}) + \dots + (|a_2| + |a_3| + \dots + |a_{n-1}|) (|z| - 1) \\ & \quad + (|a_2| + |a_3| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|) \\ & = (|z| - 1) \left[|a_2| |z|^{n-3} + \frac{|a_2| + |a_3|}{2} \cdot 2 |z|^{n-4} + \dots + \frac{|a_2| + |a_3| + \dots + |a_{n-1}|}{n-2} \cdot (n-2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{|a_2| + |a_3| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|}{n-1} \cdot \frac{n-1}{|z|-1} \right] \\ & \leq (|z| - 1) M_2 \left[|z|^{n-3} + 2 |z|^{n-4} + \dots + (n-2) + \frac{n-1}{|z|-1} \right], \end{aligned}$$

the relation (15) reduces to

$$|P(z)| \geq |z|^{n-1} |z + a_1| - (|z| - 1) M_2 \left[|z|^{n-3} + 2|z|^{n-4} + \dots + (n-2) + \frac{n-1}{|z|-1} \right],$$

hence

$$|P(z)| \geq |z|^{n-1} \left\{ |z + a_1| - \frac{(|z| - 1) M_2}{|z|^2} \left[1 + \frac{2}{|z|} + \dots + \frac{n-2}{|z|^{n-3}} + \frac{n-1}{|z|^{n-2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|}} \right] \right\}. \tag{16}$$

For $|z| > 1$ we have

$$\frac{n-1}{|z|^{n-2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|}} = \frac{n-1}{|z|^{n-2}} \left(1 + \frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|^2} + \dots \right) < \frac{n-1}{|z|^{n-2}} + \frac{n}{|z|^{n-1}} + \frac{n+1}{|z|^n} + \dots \tag{17}$$

and

$$1 + \frac{2}{|z|} + \dots + \frac{n-2}{|z|^{n-3}} + \frac{n-1}{|z|^{n-2}} + \frac{n}{|z|^{n-1}} + \dots = \frac{|z|^2}{(|z| - 1)^2}. \tag{18}$$

Taking (17) and (18) into account, we obtain from (16)

$$|P(z)| > |z|^{n-1} \left[|z + a_1| - \frac{M_2}{|z| - 1} \right]. \tag{19}$$

For $|z + a_1| \geq A$, that is, for points in the complex plane which do not lie in domain $|z + a_1| < A$, we obtain from (19)

$$|P(z)| > |z|^{n-1} \left[A - \frac{M_2}{|z| - 1} \right]. \tag{20}$$

According to (20), for $|z| > 1$, in the domain $|z + a_1| \geq A$ we have $|P(z)| > 0$ for $|z| \geq 1 + M_2/A$. This means that $|P(z)| \neq 0$ at the points of the complex plane which do not lie in the circular domains $|z + a_1| < A$ and $|z| < 1 + M_2/A$. From this we deduce that all zeros of the polynomial (1) must lie in the union of circular domains $|z + a_1| < A$ and $|z| < 1 + M_2/A$, which finishes the proof of the Theorem.

Taking for A different positive values we can obtain from the theorem particular results. Here we list some particular cases.

1. For $A = 1$ one obtains the result (A₃) of M. TOMIĆ.
2. For $A = \sqrt{M_2}$ (the case when the sum $A + (1 + M_2/A)$ has minimal value):

(D₁) All the zeros of the polynomial (1) lie in the union of the circular domains

$$|z + a_1| < \sqrt{M_2}, \quad |z| < 1 + \sqrt{M_2}. \tag{21}$$

3. For $A = \frac{-(|a_1| - 1) + \sqrt{(|a_1| - 1)^2 + 4M_2}}{2}$ (when $1 + M_2/A = |a_1| + A$, i.e. the case when the circle

$|z + a_1| = A$ is contained in the circle $|z| = 1 + M_2/A$ and touches it):

(D₂) All the zeros of the polynomial (1) lie in the circular domain

$$|z| < \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(|a_1| - 1)^2 + 4M_2}}{2}. \tag{22}$$

4. For $A = \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(|a_1| + 1)^2 + 4M_2}}{2}$ (when $|a_1| + 1 + M_2/A = A$, i.e. the case when the circle $|z| =$

$1 + M_2/A$ is contained in the circle $|z + a_1| = A$ and touches it):

(D₃) All the zeros of the polynomial (1) lie in the circular domain

$$|z + a_1| < \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(|a_1| + 1)^2 + 4M_2}}{2}. \tag{23}$$

From (D₂) and (D₃) we can conclude:

(D₄) All the zeros of the polynomial (1) lie in the intersection of the circular domains (22) and (23).

Because of (11) and (12) we have

$$\begin{aligned} \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(|a_1| - 1)^2 + 4M_2}}{2} &\leq \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{|a_1|^2 - 2|a_1| + 1 + 4M}}{2} \\ &= \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(1 - |a_1| + 2M)^2 - 4M(M - |a_1|)}}{2} \\ &\leq \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(1 - |a_1| + 2M)^2}}{2} = 1 + M, \end{aligned}$$

that is

$$\frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(|a_1| - 1)^2 + 4M_2}}{2} \leq 1 + M. \quad (24)$$

In (24) we have the = -sign when $M = |a_1| = M_2$.

Taking into account (24) we conclude that the circular domain (22) is contained in Cauchy's circular domain (2), except when $M = |a_1| = M_2$ in which case two domains coincide.

5. For $A = \frac{|a_1| - 1 \pm \sqrt{(|a_1| - 1)^2 + 4M_2}}{2}$ (when $A + 1 + M_2/A = |a_1|$, i.e. the case when the circle $|z + a_1| = A$ touches the circle $|z| = 1 + M_2/A$):

(D₃) If

$$|a_1| \geq 1 + 2\sqrt{M_2}, \quad (25)$$

then all the zeros of the polynomial (1) lie in the union of the circular domains

$$|z + a_1| < \frac{|a_1| - 1 - \sqrt{(|a_1| - 1)^2 - 4M_2}}{2}, \quad |z| < \frac{|a_1| + 1 - \sqrt{(|a_1| - 1)^2 - 4M_2}}{2}. \quad (26)$$

Interesting results on the bounds of the moduli of the zeros of polynomials were obtained by F. G. BOESE and W. J. LUTHER in [3].

References

- 1 MARDEN, M.: Geometry of polynomials. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1966.
- 2 TOMIĆ, M.: Sur la borne supérieure des modules des zéros des polynômes. Bull. Acad. serbe Sci. et Arts, Cl. Sci. math. natur., Sci. math. 76 (1981) 11.
- 3 BOESE, F. G.; LUTHER, W. J.: A note on a classical bound for the moduli of all zeros of a polynomial. IEEE AC-34 (1989) 9.

Adresse: Prof. Dr. DRAGOMIR SIMEUNOVIĆ, Mining and Geology Faculty, Djušina 7, 11000 Belgrade, Yugoslavia

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 72 (1992) 6, T 643–T 646

Akademie Verlag

SIMEUNOVIĆ, D. M.

Note on the Location of Zeros of a Polynomial

MSC (1980): 65H05, 65D05

In this note we determine in the complex plane regions containing the zeros of the polynomial

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad n \geq 3. \quad (1)$$

We also obtain one expression which represents an upper bound for the moduli of the zeros of $P(z)$.

The location of the zeros of the polynomial (1) in the complex plane, depending on its coefficients a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, was investigated by many authors (see e.g. [1]). Here we quote a result due to Cauchy [1, p. 123] which is as follows:

All the zeros of the polynomial (1) lie in the circular region

$$|z| < 1 + M, \quad (2)$$

where

$$M = \max |a_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Representing the polynomial (1) in the form

$$P(z) = z^{n-1}(z + a_1) + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

hence

$$|P(z)| \geq |z|^{n-1} \left\{ |z + a_1| - \left[\frac{|a_2|}{|z|} + \frac{|a_3|}{|z|^2} + \dots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|^{n-2}} + \frac{|a_n|}{|z|^{n-1}} \right] \right\}, \tag{3}$$

M. TOMIĆ [2] considered the zeros of the polynomial (1) in the halfplanes $|z + a_1| \geq |z - 1|$, $|z + a_1| < |z - 1|$ and the halfplanes $|z + a_1| \geq |z|$, $|z + a_1| < |z|$ of the complex plane and obtained interesting results. Here we quote two of M. TOMIĆ's results:

(A₁): In the halfplane $|z + a_1| \geq |z|$ all the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$|z| < (1 + A_{pq}^{q/2p})^{1/q} \leq (1 + \max |a_k|^{q/2} C_n)^{1/q}, \quad k = 2, 3, \dots, n, \tag{a_1}$$

where

$$A_{pq} = |a_2|^p + \frac{|a_3|^p}{2^{p/q}} + \dots + \frac{|a_n|^p}{(n-1)^{p/q}}, \quad C_n(p, q) = C_n = \left[1 + \frac{1}{2^{p/q}} + \frac{1}{3^{p/q}} + \dots + \frac{1}{(n-1)^{p/q}} \right]^{q/2p}$$

and $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$.

In the halfplane $|z + a_1| < |z|$ all the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$|z + a_1| < (1 + A_{pq}^{q/2p})^{1/q}. \tag{a'_1}$$

(A₂): In the halfplane $|z + a_1| \geq |z|$ all the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$|z| < \sqrt{1 + 4B/\pi}, \tag{a_2}$$

where

$$B = \frac{|a_2|}{2} + \frac{|a_3|}{3} + \dots + \frac{|a_n|}{n}.$$

In the halfplane $|z + a_1| < |z|$ all the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$|z + a_1| < \sqrt{1 + 4B/\pi}. \tag{a'_2}$$

In this paper, using the procedure of M. TOMIĆ, the zeros of the polynomial (1) are considered in certain circular regions and also in the halfplanes $|z + a_1| \geq |z|$, $|z + a_1| < |z|$ and the following theorem is proved.

Theorem: All the zeros of the polynomial (1) lie in the union of the circular regions

$$|z + a_1| < A, \quad |z| < 1 + \frac{M_1}{A}, \tag{4}$$

where

$$M_1 = \max |a_k|, \quad k = 2, 3, \dots, n, \tag{5}$$

and A is an arbitrary positive number.

Proof: For $|z| > 1$, from (3) we have

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |z|^{n-1} \left\{ |z + a_1| - M_1 \left[\frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|^2} + \dots + \frac{1}{|z|^{n-2}} + \frac{1}{|z|^{n-1}} \right] \right\} \\ &> |z|^{n-1} \left\{ |z + a_1| - M_1 \left[\frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|^2} + \dots + \frac{1}{|z|^{n-2}} + \frac{1}{|z|^{n-1}} + \frac{1}{|z|^n} + \dots \right] \right\} \\ &= |z|^{n-1} \left\{ |z + a_1| - \frac{M_1}{|z| - 1} \right\}, \end{aligned}$$

that is

$$|P(z)| > |z|^{n-1} \left\{ |z + a_1| - \frac{M_1}{|z| - 1} \right\}. \tag{6}$$

For $|z + a_1| \geq A$, that is, for points in the complex plane which do not lie in the region $|z + a_1| < A$, we obtain from (6)

$$|P(z)| > |z|^{n-1} \left\{ A - \frac{M_1}{|z| - 1} \right\}. \tag{7}$$

According to (7), for $|z| > 1$ in the region $|z + a_1| \geq A$ we have $|P(z)| > 0$ for $|z| \geq 1 + M_1/A$. This means that $|P(z)| \neq 0$ at the points of the complex plane which do not lie in circular regions $|z + a_1| < A$ and $|z| < 1 + M_1/A$. From this we deduce that all zeros of the polynomial (1) must lie in the union of the circular regions $|z + a_1| < A$ and $|z| < 1 + M_1/A$, which finishes the proof of the Theorem.

Taking for A different positive values we can obtain from the theorem particular results. Here we list some particular cases:

1. For $A = \frac{-(|a_1| - 1) + \sqrt{(|a_1| - 1)^2 + 4M_1}}{2}$ (when $1 + \frac{M_1}{A} = |a_1| + A$, i.e. the case when the circle $|z + a_1| = A$ is contained in the circle $|z| = 1 + \frac{M_1}{A}$ and touches it):

(C₁): All the zeros of the polynomial (1) lie in the circular region

$$|z| < \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(|a_1| - 1)^2 + 4M_1}}{2}. \quad (8)$$

In view of the inequalities $M_1 \leq M$ and $|a_1| \leq M$, we have

$$\begin{aligned} \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(|a_1| - 1)^2 + 4M_1}}{2} &\leq \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{|a_1|^2 - 2|a_1| + 1 + 4M}}{2} \\ &= \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(1 - |a_1| + 2M)^2 - 4M(M - |a_1|)}}{2} \\ &\leq \frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(1 - |a_1| + 2M)^2}}{2} \leq 1 + M, \end{aligned}$$

that is

$$\frac{|a_1| + 1 + \sqrt{(|a_1| - 1)^2 + 4M_1}}{2} \leq 1 + M. \quad (9)$$

In (9) we have = -sign when $M = |a_1| = M_1$.

Taking into account (9) we conclude that the circular region (8) is contained in Cauchy's circular region (2), except when $M = |a_1| = M_1$ in which case the two regions coincide.

2. For $A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4M_1}}{2}$ (when $A = 1 + \frac{M_1}{A}$):

(C₂): All the zeros of the polynomial (1) lie in the union of the circular regions

$$|z + a_1| < \frac{1 + \sqrt{1 + 4M_1}}{2}, \quad |z| < \frac{1 + \sqrt{1 + 4M_1}}{2}. \quad (10)$$

If $a_1 = 0$, then according to (10) it follows that all the zeros of the polynomial (1) lie in the circular region

$$|z| < \frac{1 + \sqrt{1 + 4M_1}}{2}.$$

It is not hard to see that

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4M_1}}{2} < 1 + \sqrt{M_1} \leq 1 + \sqrt{M}$$

and

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4M_1}}{2} < 1 + M_1 \leq 1 + M. \quad (11)$$

The circular regions (10) are symmetric with respect to the line $|z + a_1| = |z|$. Taking this into account, the result (C₂) can be given in the following form:

(C'₂): In the halfplane

$$|z + a_1| \geq |z| \quad (12)$$

all the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$|z| < \frac{1 + \sqrt{1 + 4M_1}}{2}, \quad (13)$$

but in halfplane

$$|z + a_1| < |z| \quad (14)$$

all the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$|z + a_1| < \frac{1 + \sqrt{1 + 4M_1}}{2}. \quad (15)$$

Let us consider the halfplane (12). On account of (11), the region (13) is contained in the Cauchy region (2).

If we consider the complex plane as the union of the halfplanes (12) and (14), then according to (C_1) and (C_2) we can conclude that:

In the halfplane (12) all the zeros of the polynomial (1) lie in the region (13), but in the halfplane (14) all the zeros of the polynomial (1) lie in the region (8).

Both the regions (8) and (13) are contained in the Cauchy region (2).

Remark: Taking into account the theorem proved in [3], we can conclude that all the results given in this paper hold also if instead of the quantity M_1 from (5) one sets $M_2 = \max \frac{|a_2| + \dots + |a_k|}{k-1}$, $k = 2, 3, \dots, n$.

References

- 1 MARDEN, M.: Geometry of polynomials. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1966.
- 2 TOMIĆ, M.: Sur la borne supérieure des modules des zéros des polynômes. Bull. Acad. serbe Sci. et Arts, Cl. Sci. math. natur., Sci. math. 76 (1981) 11, 11–19.
- 3 SIMEUNOVIĆ, D. M.: Remark on the zeros of a polynomial. ZAMM 71 (1991) 6, T 832–T 835.

Address: Prof. Dr. DRAGOMIR SIMEUNOVIĆ, Mining and Geology Faculty, Djušina 7, YU-11000 Belgrade, Yugoslavia

ACADÉMIE ROUMAINE

FILIALE DE CLUJ-NAPOCA

REVUE
D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE
DE L'APPROXIMATION

TOME 24 • N° 1 - 2 • 1995

TIRAGE À PART

CLUJ-NAPOCA

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE ROUMAINE



ON A PROCESS FOR OBTAINING ITERATIVE FORMULAS
OF HIGHER ORDER FOR ROOTS OF EQUATIONS

D.M. SIMEUNOVIĆ
(Belgrad)

1. Let

$$(1) \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

be an iterative method for finding the root $x = a$ of the real or complex equation $F(x) = 0$.

For the iterative method (1) which converges to $x = a$, we say it is of order k if

$$(2) \quad |x_{n+1} - a| = O(|x_n - a|^k), \quad n \rightarrow \infty.$$

If the function $f(x)$ is k times differentiable in a neighborhood of the limit point $x = a$, then the iterative method (1) is of order k if and only if

$$(3) \quad f(a) = a, f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0, f^{(k)}(a) \neq 0.$$

2. In [6] Theorem 1 is given which represents the consequence of a theorem proved in [1]. In [2] Theorem 2 is proved. We state here these theorems.

THEOREM 1. *Let (1) be an iterative method of order k (≥ 2), and let the function $f(x)$ be $k+1$ times differentiable in a neighborhood of the limit point $x = a$. Then*

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - \frac{1}{k} f'(x_n)(x_n - f(x_n)) = \\ &= x_n - \left(1 + \frac{1}{k} f'(x_n)\right)(x_n - f(x_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

is an iterative method of order at least $k+1$.

THEOREM 2. *Let (1) be an iterative method of order k . Let the function $f(x)$ be $k+1$ times differentiable in a neighborhood of the limit point $x = a$ and let $f'(a) \neq k$. Then*

$$(5) \quad x_{n+1} = \frac{f(x_n) - \frac{1}{k} f'(x_n) x_n}{1 - \frac{1}{k} f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - f(x_n)}{1 - \frac{1}{k} f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

is an iterative method of order at least $k+1$.

3. In this paper we also give an iterative process by which, starting from an iterative method of order k , one obtains an iterative method of order at least $k+1$. In this connection the following theorem is proved here.

THEOREM 3. Let (1) be an iterative method of order k . Let the function $f(x)$ be $k+1$ times differentiable in a neighbourhood of the limit point $x = a$ and let $f'(a) \neq 1$. Then

$$(6) \quad x_{n+1} = f(x_n) - \frac{1}{k} f'(x_n) \left(\frac{x_n - f(x_n)}{1 - f'(x_n)} \right),$$

that is

$$(7) \quad x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{k} \left(\frac{f'(x_n)}{1 - f'(x_n)} \right) \right) (x_n - f(x_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

is an iterative method of order at least $k+1$.

Proof of Theorem 3. In the method (1) the iterative function is $f(x)$, and in the method (6) the iterative function is

$$(8) \quad g(x) = f(x) - \frac{1}{k} f'(x) \left(\frac{x - f(x)}{1 - f'(x)} \right).$$

For the function $g(x)$ we shall prove that

$$(9) \quad g(a) = a, \quad g'(a) = g''(a) = \dots = g^{(k)}(a) = 0.$$

By hypothesis, (1) is an iterative method of order k and therefore relations (3) hold.

In view of, we obtain from (8)

$$(10) \quad g(a) = a.$$

From (8) we have

$$(11) \quad g^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) - \frac{1}{k} \left[f^{(r+1)}(x) \left(\frac{x - f(x)}{1 - f'(x)} \right) + \binom{r}{1} f^{(r)}(x) \left(\frac{x - f(x)}{1 - f'(x)} \right)' + \binom{r}{2} f^{(r-1)}(x) \left(\frac{x - f(x)}{1 - f'(x)} \right)'' + \dots + f'(x) \left(\frac{x - f(x)}{1 - f'(x)} \right)^{(r)} \right].$$

In view of relations (3), we obtain from (11)

$$(12) \quad g^{(r)}(a) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, \dots, k-1.$$

Since

$$\left(\frac{x-f(x)}{1-f'(x)} \right)' = \frac{(1-f'(x))^2 + (x-f(x))f''(x)}{(1-f'(x))^2}$$

and keeping in mind relations (3), from (11) for $r=k$ we obtain

$$(13) \quad g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - \frac{1}{k} [k f^{(k)}(a)] = 0.$$

From (10), (12) and (13) we conclude that conditions (9) are fulfilled, which means that the iterative method (6) is of order at least $k+1$, which ends the proof of Theorem 3.

For $k=1$ the iterative methods (5) and (6) coincide and reduce to

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - f(x_n)}{1 - f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

4. *An example.* If (1) represents Newton's method for finding simple roots of the equation $F(x) = 0$, namely

$$(14) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

which means that

$$f(x_n) = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

then from (4), (5), (6) we obtain the following methods, respectively:

$$(15) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \cdot \frac{2(F'(x_n))^2 + F(x_n)F''(x_n)}{2(F'(x_n))^2},$$

$$(16) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \cdot \frac{2(F'(x_n))^2}{2(F'(x_n))^2 - F(x_n)F''(x_n)},$$

$$(17) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \cdot \frac{2(F'(x_n))^2 - F(x_n)F''(x_n)}{2(F'(x_n))^2 - 2F(x_n)F''(x_n)},$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

According to the preceding theorems, the iterative methods (15), (16), (17) are of order 3, since as we know Newton's method, (14) is of order 2.

Method (15) is known as Chebyshev's iterative method (see [3]). The asymptotic error constant for the iterative method (15) is

$$C_3 = \frac{3(F''(a))^2 - F'(a)F'''(a)}{6(F'(a))^2}.$$

Method (16) represents Halley's iterative method (see [4] and [5]). The asymptotic error constant for the iterative method (16) is

$$C_3 = \frac{3(F''(a))^2 - 2F'(a)F'''(a)}{12(F'(a))^2}.$$

For the iterative method (17) the asymptotic error constant is

$$C_3 = \frac{-F'''(a)}{6(F'(a))^2}.$$

5. Methods (15), (16), (17) are special cases of family iterative methods

$$(18) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \cdot \frac{2(F'(x_n))^2 - sF(x_n)F''(x_n)}{2(F'(x_n))^2 - (s+1)F(x_n)F''(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

where s is a finite parameter.

For simple roots of the equation $F(x) = 0$ the order of the iterative method (18) is 3 for every fixed finite value of the parameter s , which is easily verified.

The asymptotic error constant for the iterative method (18) is

$$C_3 = \frac{3(1-s)(F''(a))^2 - 2F'(a)F'''(a)}{12(F'(a))^2}.$$

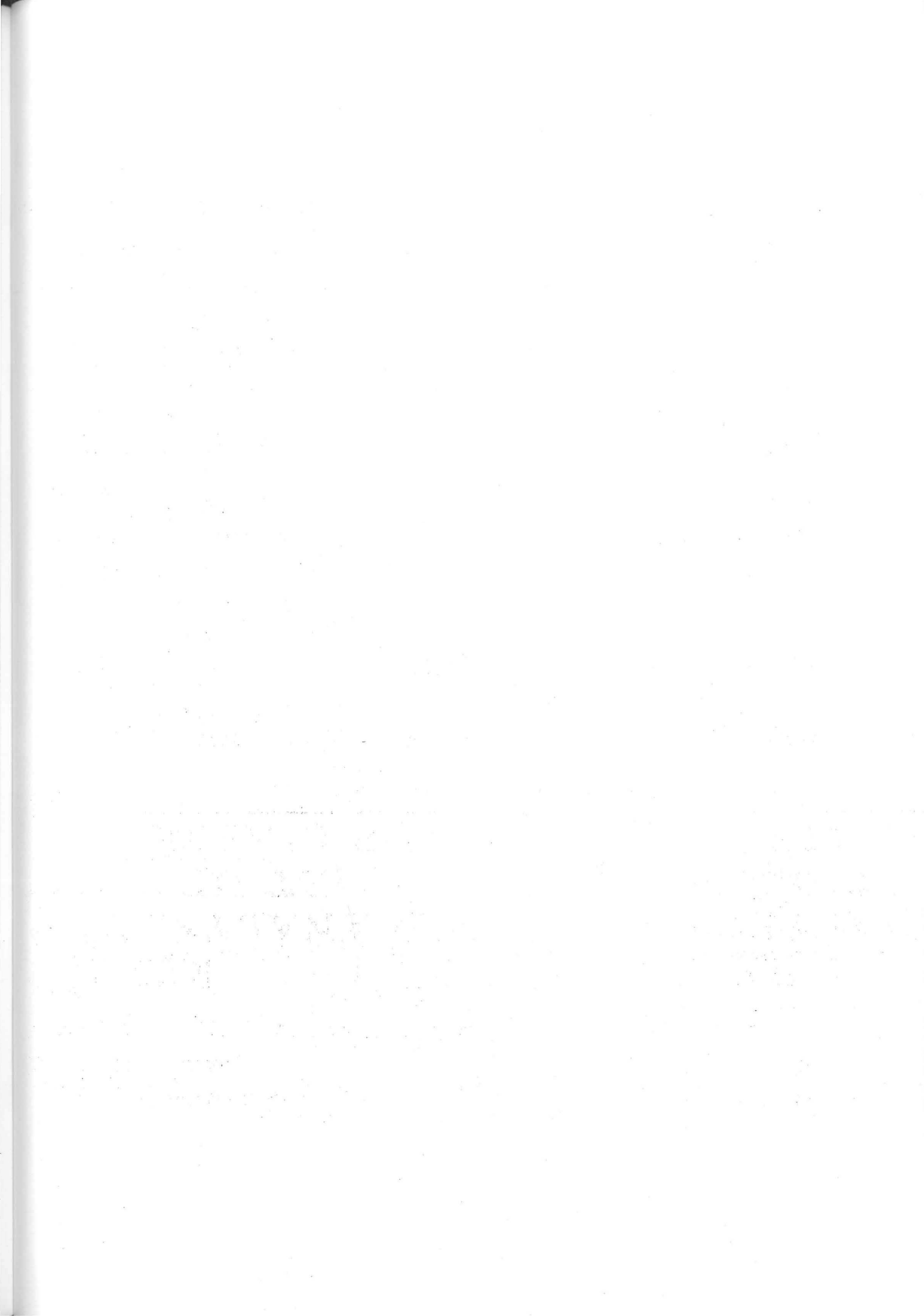
For $s = -1$ from (18) we obtain Chebyshev's method (15), and for $s = 0$ from (18) we obtain Halley's method (16). For $s = 1$ from (18) we obtain method (17).

REFERENCES

1. Milovanović, G.V., *A method to accelerate iterative processes in Banach space*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 461-497 (1974), 67-71.
2. Jovanović, B., *A method for obtaining iterative formulas of higher order*. Mat. Vesnik 9 (24) (1972). 365-369.
3. Berezin, I. S., Židkov, N. P., *Metodi včislenij*. Moscow 1960 (in Russian).
4. Davies, M., Dawson, B., *On the global convergence of Halley's iteration formula*. Numer. Math. 24, 133-135 (1975).
5. Hansen, E., Patrick, M., *A family of root finding methods*. Numer. Math. 27, 257-269 (1977)
6. Milovanović, G.V., *Numerička analiza*, I deo. Beograd 1985 (in Serbian).

Received 1 V 1994

*Faculty of Mining and Geology
University of Belgrade
Džušina 7
11000 Belgrade
Yugoslavia*



ON THE LOCATION OF THE ZEROS OF POLYNOMIALS

D. M. Simaunović

Summary. In this paper we determine in the complex plane regions containing the zeros of the polynomial

$$(1) \quad P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \quad n \geq 3.$$

We also obtain an expression which represents an upper bound for the moduli of the zeros of $P(z)$.

1. The location of the zeros of the polynomial (1) in the complex plane, depending on its coefficients a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, was investigated by many authors (see e.g. [1] and [2]). Here we quote a result due to P. Montel [3] which is as follows:

(R₁): All the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(2) \quad |z| < 2M,$$

where

$$(3) \quad M = \max |a_k|^{\frac{1}{k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Representing the polynomial (1) in the form

$$(4) \quad P(z) = z^{n-1}(z - a_1) + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

M. Tomić [4] considered the zeros of the polynomial (1) in the halfplanes $|z + a_1| \geq |z - 1|$, $|z + a_1| < |z - 1|$ and the halfplanes $|z + a_1| \geq |z|$, $|z + a_1| < |z|$ of the complex plane and obtained interesting results.

AMS Subject Classification 1991. Primary: 12D10.

Key words and phrases: regions of the zeros, upper bound for the moduli of the zeros, the zeros in the halfplanes.

2. In this paper, the zeros of the polynomial (1) are considered in certain circular regions and also in the halfplanes $|z+a_1| \geq |z|$, $|z+a_1| < |z|$ of the complex plane and the following theorem is proved.

Theorem. For fixed positive parameter s , let

$$(5) \quad M_s = \max |a_k|^{\frac{1}{s+k-2}}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Then all the zeros of the polynomial (1) lie in the union of the regions

$$(6) \quad |z + a_1| < B, \quad |z| < M_s + (M_s^s)B^{-1},$$

where B is an arbitrary positive constant.

Proof: From (5) we have

$$(7) \quad |a_2| \leq M_s^s, \quad |a_3| \leq M_s^{s+1}, \dots, |a_n| \leq M_s^{s+n-2}.$$

Taking into account (7), from (4) for $|z| > M_s$ we have

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |z|^{n-1} \left\{ |z + a_1| - |z|^{s-1} \left[\frac{|a_2|}{|z|^s} + \frac{|a_3|}{|z|^{s+1}} + \dots + \frac{|a_n|}{|z|^{s+n-2}} \right] \right\} > \\ &> |z|^{n-1} \left\{ |z + a_1| - |z|^{s-1} \left[\left(\frac{M_s}{|z|} \right)^s + \left(\frac{M_s}{|z|} \right)^{s+1} + \dots + \left(\frac{M_s}{|z|} \right)^{s+n-2} + \dots \right] \right\} = \\ &= |z|^{n-1} \left\{ |z + a_1| - \frac{M_s^s}{|z| - M_s} \right\}, \end{aligned}$$

that is

$$(8) \quad |P(z)| > |z|^{n-1} \left\{ |z + a_1| - \frac{M_s^s}{|z| - M_s} \right\}.$$

For $|z + a_1| \geq B$, that is, for points in the complex plane which do not lie in the region $|z + a_1| < B$, we obtain from (8)

$$(9) \quad |P(z)| > |z|^{n-1} \left\{ B - \frac{M_s^s}{|z| - M_s} \right\}.$$

According to (9), for $|z| > M_s$ in the region $|z + a_1| \geq B$ we have $|P(z)| > 0$ for $|z| \geq M_s + (M_s^s)B^{-1}$. This means that $|P(z)| \neq 0$ at points of the

complex plane which do not lie in the regions $|z + a_1| < B$ and $|z| < M_s + (M_s^s)B^{-1}$. From this we deduce that all the zeros of the polynomial (1) must lie in the union of the circular regions (6), which finishes the proof of Theorem.

3. Taking for B and s different positive values we can obtain from Theorem several particular results. Here we list some particular cases.

3.1. For $B = \frac{1}{2} [M_s - |a_1| + \sqrt{(M_s - |a_1|)^2 + 4M_s^s}]$ (when $M_s + (M_s^s)B^{-1} = |a_1| + B$, i.e. the case when the circle $|z + a_1| = B$ is contained in the circle $|z| = M_s + (M_s^s)B^{-1}$ and touches it):

(R_{31}): All the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(10) \quad |z| < \frac{1}{2} [M_s + |a_1| + \sqrt{(M_s - |a_1|)^2 + 4M_s^s}].$$

3.2. For $B = \frac{1}{2} [M_s + \sqrt{M_s^2 + 4M_s^s}]$ (when $B = M_s + (M_s^s)B^{-1}$):

(R_{32}): All the zeros of the polynomial (1) lie in the union of the regions

$$(11) \quad \begin{aligned} |z + a_1| &< \frac{1}{2} [M_s + \sqrt{M_s^2 + 4M_s^s}], \\ |z| &< \frac{1}{2} [M_s + \sqrt{M_s^2 + 4M_s^s}]. \end{aligned}$$

It is not difficult to see that

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} [M_s + \sqrt{M_s^2 + 4M_s^s}] &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} [M_s + |a_1| + \sqrt{(M_s - |a_1|)^2 + 4M_s^s}], \end{aligned}$$

where in (12) we have the equality sign when $a_1 = 0$.

If $a_1 = 0$, then according to (11) it follows that all the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(13) \quad |z| < \frac{1}{2} [M_s + \sqrt{M_s^2 + 4M_s^s}].$$

The circular regions (11) are symmetric with respect to the line $|z + a_1| = |z|$, for $a_1 \neq 0$. Taking this into account, the result (R_{32}) can be given in the form:

(R'_{32}) : In the halfplane

$$(14) \quad |z + a_1| \geq |z|$$

the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(15) \quad |z| < \frac{1}{2} \left[M_s + \sqrt{M_s^2 + 4M_s^s} \right].$$

In the halfplane

$$(16) \quad |z + a_1| < |z|$$

the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(17) \quad |z + a_1| < \frac{1}{2} \left[M_s + \sqrt{M_s^2 + 4M_s^s} \right].$$

Let us consider the halfplane (14). On account of (12), the region (15) is contained in the circular region (10).

If we consider the complex plane as the union of the halfplanes (14) and (16), then according to (R_{31}) and (R'_{32}) we can conclude that:

(R'_3) : In the halfplane (14) the zeros of the polynomial (1) lie in the region (15), but in the halfplane (16) the zeros of the polynomial (1) lie in the region (10).

4. For $s = 2$, from (5) we obtain

$$(18) \quad M_2 = \max |a_k|^{\frac{1}{k}}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

In this case the results (R_{31}) and (R'_{32}) reduce, respectively, to:

(R_{41}) : All the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(19) \quad |z| < \frac{1}{2} \left[M_2 + |a_1| + \sqrt{(M_2 - |a_1|)^2 + 4M_2^2} \right].$$

(R'_{42}) : In the halfplane (14) the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(20) \quad |z| < \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) M_2.$$

In the halfplane (16) the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(21) \quad |z + a_1| < \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) M_2.$$

Because of $M_2 \leq M$ and $|a_1| \leq M$, we obtain

$$(22) \quad \frac{1}{2} \left[M_2 + |a_1| + \sqrt{(M_2 - |a_1|)^2 + 4M_2^2} \right] \leq 2M,$$

where in (22) we have the equality sign when $M_2 = |a_1| = M$.

We also obtain

$$(23) \quad \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) M_2 \leq \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) M < 2M.$$

Taking into account (22) we conclude that the region (19) is contained in Montel's region (2), except when $M_2 = M = |a_1|$ in which case the two regions coincide.

In view of (R_{41}) and (R'_{42}) we can also conclude that:

(R'_4) : In the halfplane (14) the zeros of the polynomial (1) lie in the region (20), but in the halfplane (16) the zeros of the polynomial (1) lie in the region (19).

Both the regions (19) and (20) are contained in Montel's region (2).

5. The case when $s \rightarrow \infty$. From (5) we have

$$\lim_{s \rightarrow \infty} M_s = 1; \quad \lim_{s \rightarrow \infty} M_s^s = A_2 = \max |a_k|, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

In this case the results (R_{31}) , (R_{32}) and (R'_{32}) reduce to the results given in [5].

6. References

- [1] M. Marden: *Geometry of Polynomials*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1966.
- [2] S. Zervos: *Aspects modernes de la localisation des zéros des polynômes d'une variable*, Ann. Sci. École Norm. Sup., (3) 77 (1960), 303-410.
- [3] P. Montel: *Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynômes*, Comment. Math. Helv., 7 (1934-35), 178-200.

- [4] M. Tomić: *Sur la borne supérieure des modules des zéros des polynômes*, Bull. Acad. serbe Sci. et Arts, Cl. Sci. math. natur., Sci. math., 76 (1981), 11-19.
- [5] D. M. Simeunović: *Note on the location of zeros of a polynomial*, ZAMM, 72 (1992), 643-646.

Mike Alasa 8
11000 Belgrade
Yugoslavia

Received November 21, 1997.

A REMARK CONCERNING ZEROS OF ONE CLASS OF POLYNOMIALS

D. M. Simeunović

Abstract. In this paper the distribution of zeros of a class of real polynomials is considered. In some cases the intervals, each one containing one zero, are determined with more accuracy.

1. One considers in [2] the polynomial

$$(1) \quad P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \quad (n \geq 3)$$

with coefficients a_k satisfying the conditions

$$(2) \quad a_k > 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n) \text{ and } 0 < \frac{a_0}{a_1} < \frac{a_1}{a_2} < \dots < \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} < \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

or more generally

$$|a_k| > 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n) \text{ and } 0 < \left| \frac{a_0}{a_1} \right| < \left| \frac{a_1}{a_2} \right| < \dots < \left| \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \right| < \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|,$$

where next theorems are proved.

A) If $a_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) and if

$$(3) \quad \frac{a_k^2}{a_{k-1}a_{k+1}} \geq 4 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

the polynomial (1) has only simple real negative zeros, one in each of the intervals

$$(3a) \quad \left(-\frac{2a_0}{a_1}, 0 \right), \left(-\frac{2a_1}{a_2}, -\frac{2a_0}{a_1} \right), \dots, \left(-\frac{2a_{n-1}}{a_n}, -\frac{2a_{n-2}}{a_{n-1}} \right).$$

AMS Subject Classification 1991. Primary: 12D10.

Key words and phrases: distribution of the zeros, intervals of the zeros, zeros of a class of real polynomials.

B) If $a_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) and if

$$\frac{a_k^2}{a_{k-1}a_{k+1}} \geq 2 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

the polynomial (1) has no zeros in the domain

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg\{z\} \leq \frac{\pi}{2}.$$

C) If $|a_k| > 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$) and if

$$\left| \frac{a_k^2}{a_{k-1}a_{k+1}} \right| \geq 5 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

the polynomial (1) is different from zero at the boundary of every circular ring

$$\sqrt{5} \left| \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}} \right| < |z| < \sqrt{5} \left| \frac{a_{k-1}}{a_k} \right| \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

and has one zero inside each one of them.

2. In this paper we shall consider the polynomial (1), with coefficients a_k satisfying, in addition to (2), the conditions

$$(4) \quad \frac{a_k^2}{a_{k-1}a_{k+1}} \geq s \quad (s > 1) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

where s is a constant.

The theorem A) holds for $s = 4$ and the theorem B) holds for $s = 2$.

The purpose of this paper is to establish some conditions on the coefficients a_k for which 1) some, or all, of zeros of the polynomial (1) will be real and negative also for the values of the constant $s < 4$, and 2) intervals containing zeros of the polynomial (1) in the case $s > 4$ are determined with more accuracy.

Let us first make a constatation.

If the coefficients of the polynomial

$$F_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (a_k > 0; k = 0, 1, 2, 3)$$

satisfy condition

$$\frac{a_2^2}{a_1a_3} < 3,$$

F_3 has one real negative and two complex zeros.

If $\frac{a_2^2}{a_1 a_3} = 3$, $\frac{a_1^2}{a_0 a_2} \neq 3$, F_3 has also one real negative and two complex zeros.

If $\frac{a_2^2}{a_1 a_3} = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} = 3$, F_3 has a triple real negative zero $x = -\frac{a_2}{3a_3}$.

Having in mind the preceding constation about F_3 , we conclude that for the value $s \leq 3$ the polynomial (1) has not necessarily all zeros simple, real and negative. In order to have, in the polynomial (1), all zeros simple and negative, there must be $s > 3$ in (4). In relation to that we shall demonstrate next theorems.

Theorem 1. *If in (1) $a_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) and if*

$$(5) \quad \frac{a_1^2}{a_0 a_2} \geq \frac{a_2^2}{a_1 a_3} \geq \dots \geq \frac{a_{n-2}^2}{a_{n-3} a_{n-1}} \geq \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_n} \geq \frac{10}{3},$$

the polynomial (1) has at least $n - 2$ real negative zeros, at least one in each of the intervals

$$(6) \quad \left(-\frac{2a_0}{a_1}, 0\right), \left(-\frac{2a_1}{a_2}, -\frac{2a_0}{a_1}\right), \dots, \left(-\frac{2a_{n-3}}{a_{n-2}}, -\frac{2a_{n-4}}{a_{n-3}}\right).$$

Theorem 2. *If in (1) $a_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) and if*

$$(7) \quad \frac{a_1^2}{a_0 a_2} \geq \frac{a_2^2}{a_1 a_3} \geq \dots \geq \frac{a_{n-2}^2}{a_{n-3} a_{n-1}} \geq \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_n} \geq \frac{10}{3},$$

and further

$$(7a) \quad 0 \leq \frac{a_{n-2}^2}{a_{n-3} a_{n-1}} - \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_n} \leq \frac{1}{5},$$

the polynomial (1) has all zeros real and negative, one in each of the intervals

$$(8) \quad \left(-\frac{2a_0}{a_1}, 0\right), \left(-\frac{2a_1}{a_2}, -\frac{2a_0}{a_1}\right), \dots, \left(-\frac{2a_{n-3}}{a_{n-2}}, -\frac{2a_{n-4}}{a_{n-3}}\right), \\ \left(-\frac{3a_{n-2}}{2a_{n-1}}, -\frac{2a_{n-3}}{a_{n-2}}\right), \left(-\frac{3a_{n-1}}{2a_n}, -\frac{3a_{n-2}}{2a_{n-1}}\right). \quad 1)$$

¹⁾ For $n = 3$ one takes $a_{-1} = 0$ in (6) and (8).

Proof of Theorem 1. As in [2], consider the polynomial

$$(9) \quad Q(z) = 1 + \frac{z}{r_1} + \frac{z^2}{r_1 r_2} + \dots + \frac{z^n}{r_1 r_2 \dots r_n} \quad (n \geq 3)$$

where $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n$ and moreover

$$(10) \quad \frac{r_2}{r_1} \geq \frac{r_3}{r_2} \geq \dots \geq \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \geq \frac{r_n}{r_{n-1}} > 3.$$

Let

$$(11) \quad \frac{r_2}{r_1} = 3 + c_1, \quad \frac{r_3}{r_2} = 3 + c_2, \dots, \quad \frac{r_n}{r_{n-1}} = 3 + c_{n-1},$$

with

$$(12) \quad c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_{n-1} > 0.$$

The modulus of the k -th term in (9) is maximal for $r_k < |z| < r_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$). For these values of z , the moduli of the terms of the polynomial (9) continuously increase from the initial term 1 to the maximal one, then decrease from the maximal term to the last one [1] (volume I, part I, problem 117).

Let us first consider the case when $n > 3$ in (9). Let $(r_1 r_2 \dots r_k)^{-1} \cdot (-x)^k$ be the maximal term in (9) for $z = -x$ ($x > 0$). One then obtains from (9)

$$(13) \quad \begin{aligned} Q(-x)(r_1 r_2 \dots r_k)(-x)^{-k} &= \left(1 - \frac{x}{r_{k+1}} + \frac{x^2}{r_{k+1} r_{k+2}} - \frac{x^3}{r_{k+1} r_{k+2} r_{k+3}} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{n-k} \frac{x^{n-k}}{r_{k+1} r_{k+2} r_{k+3} \dots r_n} \right) - \\ &\quad - \frac{r_k}{x} + \frac{r_k r_{k-1}}{x^2} - \dots + (-1)^k \frac{r_k r_{k-1} \dots r_1}{x^k}, \end{aligned}$$

with

$$(14) \quad \begin{aligned} &Q(-x)(r_1 r_2 \dots r_k)(-x)^{-k} \geq \\ &\geq 1 - \frac{x}{r_{k+1}} + \frac{x^2}{r_{k+1} r_{k+2}} - \frac{x^3}{r_{k+1} r_{k+2} r_{k+3}} - \frac{r_k}{x}. \end{aligned}$$

For $x = 2r_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-3$), having in mind (11) and (12), one obtains from (14)

$$(15) \quad Q(-2r_k)(r_1 r_2 \dots r_k)(-2r_k)^{-k} \geq \\ \frac{1}{2} - \frac{2r_k}{r_{k+1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2r_k}{r_{k+1}} \right)^2 \left(\frac{2r_{k+1}}{r_{k+2}} \right) - \left(\frac{2r_k}{r_{k+1}} \right)^3 \left(\frac{r_{k+1}}{r_{k+2}} \right)^2 \left(\frac{r_{k+2}}{r_{k+3}} \right) = \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{3+c_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3+c_k} \right)^2 \left(\frac{2}{3+c_{k+1}} \right) - \left(\frac{2}{3+c_k} \right)^3 \left(\frac{1}{3+c_{k+1}} \right)^2 \left(\frac{1}{3+c_{k+2}} \right) > \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{3+c_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3+c_k} \right)^3 - \frac{1}{27} \left(\frac{2}{3+c_{k+1}} \right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3+c_k} + \frac{25}{54} \left(\frac{2}{3+c_k} \right)^3.$$

If we put

$$(16) \quad \frac{2}{3+c_k} = t_k, \\ \frac{1}{2} - t_k + \frac{25}{54} t_k^3 = h(t_k)$$

we obtain from (15)

$$(17) \quad Q(-2r_k)(r_1 r_2 \dots r_k)(-2r_k)^{-k} > h(t_k).$$

The function $h(t_k)$ has zeros $u_1 = \frac{-3-\sqrt{189}}{10}$, $u_2 = \frac{3}{5}$ and $u_3 = \frac{-3+\sqrt{189}}{10}$, with $h(t_k) \geq 0$ for $t_k \leq \frac{3}{5}$. The condition $t_k \leq \frac{3}{5}$, by (16), reduces to $\frac{2}{3+c_k} \leq \frac{3}{5}$, wherefrom one obtains $c_k \geq \frac{1}{3}$. Now, by (12), conditions (11) reduce to

$$(18) \quad \frac{r_2}{r_1} \geq \frac{r_3}{r_2} \geq \dots \geq \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \geq \frac{r_n}{r_{n-1}} \geq \frac{10}{3}.$$

When conditions (18) are satisfied, with $r_1 > 0$, for $x = 2r_{n-2}$ one obtains from (13)

$$(19) \quad Q(-2r_{n-2})(r_1 r_2 \dots r_{n-2})(-2r_{n-2})^{-(n-2)} \geq \\ \frac{1}{2} - \frac{2r_{n-2}}{r_{n-1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2r_{n-2}}{r_{n-1}} \right)^2 \left(\frac{2r_{n-1}}{r_n} \right) \geq \frac{1}{2} - \frac{2r_{n-2}}{r_{n-1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right)^3 > 0.$$

For $n = 3$, one obtains from (19)

$$(20) \quad Q(-2r_1)(r_1)(-2r_1)^{-1} > 0.$$

Having in mind (15), (17), (19) and (20), we conclude that

$$(21) \quad Q(-2r_k)(r_1 r_2 \dots r_k)(-2r_k)^{-k} > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-2).$$

As $Q(0) > 0$ and as by (21) $Q(-2r_1) < 0$, $Q(-2r_2) > 0, \dots, (-1)^{n-2} \cdot Q(-2r_{n-2}) > 0$, we conclude that the polynomial (9) has at least $n-2$ real negative zeros, at least one in each of the intervals

$$(22) \quad (-2r_1, 0), (-2r_2, -2r_1), \dots, (-2r_{n-2}, -2r_{n-3}), ^2)$$

if conditions (18) are satisfied and $r_1 > 0$.

Dividing (1) by a_0 one obtains the polynomial

$$\frac{P(z)}{a_0} = 1 + \frac{1}{\frac{a_0}{a_1}} + \frac{z^2}{\frac{a_0}{a_2}} + \dots + \frac{z^n}{\frac{a_0}{a_n}},$$

which can be written in the form

$$(23) \quad \frac{P(z)}{a_0} = 1 + \frac{1}{\frac{a_0}{a_1}} + \frac{z^2}{\frac{a_0}{a_1} \frac{a_1}{a_2}} + \dots + \frac{z^n}{\frac{a_0}{a_1} \frac{a_1}{a_2} \dots \frac{a_{n-1}}{a_n}}.$$

If putting in (23)

$$(23a) \quad \frac{a_0}{a_1} = r_1, \quad \frac{a_1}{a_2} = r_2, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n} = r_n, \quad \frac{P(z)}{a_0} = Q(z)$$

one should obtain the polynomial (9). Conditions (18) then reduce to (5) and the intervals (22) reduce to (6), which completes the proof of Theorem 1.

Proof of Theorem 2. Let us consider the polynomial (9) with $r_1 > 0$,

$$(24) \quad \frac{r_2}{r_1} \geq \frac{r_3}{r_2} \geq \dots \geq \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \geq \frac{r_n}{r_{n-1}} \geq \frac{10}{3}$$

and

$$(24a) \quad 0 \leq \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} - \frac{r_n}{r_{n-1}} \leq \frac{1}{5}.$$

²⁾ For $n = 3$ the intervals (22) reduce to $(-2r_1, 0)$.

From (24) and (24a) one obtains

$$(25) \quad \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \geq \frac{r_{n-1}}{r_n} - \frac{9}{500}.$$

Under conditions (24) relations (21) hold. For $k = n - 1$ and $x = \frac{3}{2}r_{n-1}$, by (24) and (25), one obtains, from (13)

$$(26) \quad Q\left(-\frac{3}{2}r_{n-1}\right)(r_1 r_2 \dots r_{n-1})\left(-\frac{3}{2}r_{n-1}\right)^{-(n-1)} \geq \\ \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \frac{r_{n-1}}{r_n} + \frac{4}{9} \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} - \frac{8}{27} \left(\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}\right)^2 \left(\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}}\right) \geq \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \frac{r_{n-1}}{r_n} + \\ + \frac{4}{9} \left(\frac{r_{n-1}}{r_n} - \frac{9}{500}\right) - \frac{8}{27} \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{1}{3} - \frac{19}{18} \frac{r_{n-1}}{r_n} - \frac{4}{500} - \frac{1}{125} \geq \\ \geq \frac{1}{3} - \frac{19}{18} \cdot \frac{3}{10} - \frac{4}{500} - \frac{1}{125} = \frac{1}{1500}.$$

For $k = n$ and $x = \frac{3}{2}r_n$, there follows from (13)

$$(27) \quad Q\left(-\frac{3}{2}r_n\right)(r_1 r_2 \dots r_n)\left(-\frac{3}{2}r_n\right)^{-n} \geq \frac{1}{3}.$$

We see, from the polynomial (9) and the relations (21), (26) and (27), that $Q(0) > 0$, $Q(-2r_1) < 0$, $Q(-2r_2) > 0$, ..., $Q(-2r_{n-2})(-1)^{n-2} > 0$, $Q\left(-\frac{3}{2}r_{n-1}\right)(-1)^{n-1} > 0$, $Q\left(-\frac{3}{2}r_n\right)(-1)^n > 0$, wherefrom we conclude that the polynomial (9) has only simple real negative zeros, one in each of the intervals

$$(28) \quad (-2r_1, 0), (-2r_2, -2r_1), \dots, (-2r_{n-2}, -2r_{n-3}), \\ \left(-\frac{3}{2}r_{n-1}, -2r_{n-2}\right), \left(-\frac{3}{2}r_n, -\frac{3}{2}r_{n-1}\right)^3$$

when conditions (24), (24a) are satisfied and $r_1 > 0$.

By (23) and (23a), conditions (24) and (24a) reduce to conditions (7) and (7a), and intervals (28) to intervals (8), by which the proof of Theorem 2 is completed.

³⁾For $n = 3$ intervals (28) reduce to intervals $(-2r_1, 0)$, $(-\frac{3}{2}r_2, -2r_1)$, $(-\frac{3}{2}r_3, -\frac{3}{2}r_2)$, and intervals (8) reduce to intervals $(-\frac{2a_1}{a_1}, 0)$, $(-\frac{3a_1}{2a_2}, -\frac{2a_1}{a_1})$, $(-\frac{3a_2}{2a_3}, -\frac{3a_1}{2a_2})$.

Theorem 3. *If in (1) $a_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) and if*

$$(29) \quad \frac{a_k^2}{a_{k-1}a_{k+1}} \geq 4 + 2h \quad (h > 0), \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

the polynomial (1) is different from zero in each of the intervals

$$(30) \quad \left[-\frac{(2+h)a_{k-1}}{a_k}, -\frac{2a_{k-1}}{a_k} \right] \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Proof. Consider the polynomial (9) where $r_1 > 0$ and where

$$(31) \quad \frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 4 + 2h \quad (h > 0), \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

If dividing (9) by $\frac{z^k}{r_1 r_2 \dots r_k}$ ($z \neq 0$), one obtains

$$(32) \quad \begin{aligned} & Q(z)(r_1 r_2 \dots r_k) z^{-k} = \\ & = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{r_{k+1}} + \frac{z^2}{r_{k+1} r_{k+2}} + \dots + \frac{z^{n-k}}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_n} \right) + \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{r_k}{z} + \frac{r_k r_{k-1}}{z^2} + \dots + \frac{r_k r_{k-1} \dots r_1}{z^k} \right) \end{aligned}$$

Let $z = |z|e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Then the real part in the first bracket, at the right hand side of (32), is

$$(33) \quad A = \frac{1}{2} + \frac{|z|}{r_{k+1}} \cos \theta + \frac{|z|^2}{r_{k+1} r_{k+2}} \cos 2\theta + \dots + \frac{|z|^{n-k}}{r_{k+1} r_{k+2} \dots r_n} \cos(n-k)\theta$$

and the real part in the second bracket at the right hand side of (32) is

$$(34) \quad B = \frac{1}{2} + \frac{r_k}{|z|} \cos \theta + \frac{r_k r_{k-1}}{|z|^2} \cos 2\theta + \dots + \frac{r_k r_{k-1} \dots r_1}{|z|^k} \cos k\theta.$$

We shall prove that

$$A + B > 0$$

for every θ and every z for which

$$(35) \quad 2r_k \leq |z| \leq (2+h)r_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

when conditions (31) are satisfied and where $n \geq 3$.

Let

$$(36) \quad S = c_0 + c_1 \cos \theta + c_2 \cos 2\theta + \dots + c_m \cos m\theta.$$

If we put

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 1 + \cos \theta, \quad S_2 = 1 + \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2}, \dots \\ \dots, S_v = 1 + \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} + \dots + \frac{\cos v\theta}{v},$$

(36) can be written in the form

$$(37) \quad S = (c_0 - c_1)S_0 + (c_1 - 2c_2)S_1 + \dots + [(m-1)c_{m-1} - mc_m]S_{m-1} + mc_m S_m.$$

By [1] (vol. II, part VI, problem 28), for every θ and every $v = 2, 3, \dots$, there is

$$(38) \quad S_v = 1 + \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} + \dots + \frac{\cos v\theta}{v} > 0,$$

whereas

$$(39) \quad 1 + \cos \theta \geq 0.$$

If we have in (36)

$$(40) \quad c_0 \geq c_1 > 2c_2 > 3c_3 > \dots > (m-1)c_{m-1} > mc_m > 0,$$

then, by (37), because of (38) and (39), there is

$$S \geq 0.$$

If one puts in (36)

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{|z|}{r_{k+1}}, \quad c_2 = \frac{|z|^2}{r_{k+1}r_{k+2}}, \dots \\ \dots, c_m = c_{n-k} = \frac{|z|^{n-k}}{r_{k+1}r_{k+2} \dots r_n},$$

one obtains $S = A$. Further

$$c_{v+1} = c_v \cdot \frac{|z|}{r_{k+v+1}}, \quad (v = 1, 2, \dots, n - k - 1).$$

By (31) and (35), for every $v = 1, 2, \dots, n - k - 1$, one has

$$\begin{aligned} vc_v - (v+1)c_{v+1} &= c_v \left[v - (v+1) \frac{|z|}{r_{k+v+1}} \right] \geq c_v \left[v - (v+1) \frac{(2+h)r_k}{r_{k+v+1}} \right] = \\ &= c_v \left[v - (v+1)(2+h) \frac{r_k}{r_{k+1}} \cdot \frac{r_{k+1}}{r_{k+2}} \dots \frac{r_{k+v}}{r_{k+v+1}} \right] \geq \\ &\geq c_v \left[v - (v+1)(2+h) \frac{1}{2^{v+1}(2+h)^{v+1}} \right] = \\ &= c_v \left[v - (v+1) \frac{1}{2^{v+1}(2+h)^v} \right] > c_v \left(v - \frac{v+1}{2^{2v+1}} \right) > 0. \end{aligned}$$

As we have further

$$c_0 - c_1 = \frac{1}{2} - \frac{|z|}{r_{k+1}} \geq \frac{1}{2} - \frac{(2+h)r_k}{r_{k+1}} \geq \frac{1}{2} - \frac{2+h}{2(2+h)} = 0,$$

conditions (40) hold, and therefrom $A \geq 0$.

If putting in (36)

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{r_k}{|z|}, \quad c_2 = \frac{r_k r_{k-1}}{|z|^2}, \dots, c_m = c_k = \frac{r_k r_{k-1} \dots r_1}{|z|^k},$$

one shall obtain $S = B$. In this case

$$c_{v+1} = c_v \cdot \frac{r_{k-v}}{|z|}, \quad (v = 1, 2, \dots, k-1).$$

By (31) and (35), for every $v = 1, 2, \dots, k-1$, one has

$$\begin{aligned} vc_v - (v+1)c_{v+1} &= c_v \left[v - (v+1) \frac{r_{k-v}}{|z|} \right] \geq c_v \left[v - (v+1) \frac{r_{k-v}}{2r_k} \right] = \\ &= c_v \left[v - \frac{v+1}{2} \frac{r_{k-1}}{r_k} \cdot \frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} \dots \frac{r_{k-v}}{r_{k-v+1}} \right] \geq \\ &\geq c_v \left[v - \frac{v+1}{2} \frac{1}{2^v(2+h)^v} \right] > \\ &> c_v \left(v - \frac{v+1}{2^{2v+1}} \right) > 0. \end{aligned}$$

As we have further

$$c_0 - c_1 = \frac{1}{2} - \frac{r_k}{|z|} \geq \frac{1}{2} - \frac{r_k}{2r_k} = 0,$$

conditions (40) hold also in this case; therefrom $B \geq 0$.

For $n \geq 3$ one has $A \geq 0$ and $B \geq 0$, but

$$(41) \quad A + B > 0.$$

Having in mind (32), (33) and (34), we conclude, from (41), that the polynomial $Q(z)$ in (9) is different from zero in the domains (35) when conditions (31) are satisfied for $n \geq 3$. The domains (35) now become

$$(42) \quad \frac{2a_{k-1}}{a_k} \leq |z| \leq \frac{(2+h)a_{k-1}}{a_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

We conclude, from (42), that the polynomial (1) is different from zero in every of the intervals (30), which completes the proof of Theorem 3.

3. The Theorem A) holds also under conditions (29), which means that the polynomial (1) has also only simple real negative zeros, one in each of the intervals (3a). By Theorem 3, the polynomial (1) has no zeros in the intervals (30). These two facts will be stated by the next theorem.

Theorem 4. *If in (1) $a_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) and if*

$$\frac{a_k^2}{a_{k-1}a_{k+1}} \geq 4 + 2h \quad (h > 0), \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

the polynomial (1) has only simple real negative zeros, one in each of the intervals

$$\left(-\frac{2a_0}{a_1}, 0\right), \left(-\frac{2a_1}{a_2}, -\frac{(2+h)a_0}{a_1}\right), \left(-\frac{2a_2}{a_3}, -\frac{(2+h)a_1}{a_2}\right), \dots, \\ \left(-\frac{2a_{n-1}}{a_n}, -\frac{(2+h)a_{n-2}}{a_{n-1}}\right).$$

4. References

1. G. Pólya und G. Szegő: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin 1954.
2. D. M. Simeunović: *Sur la répartition des zéros d'une classe de polynômes*, Publ. Inst. Math., 28 (42), 1980, 187-194.

Mike Alasa 8
11000 Belgrade
Yugoslavia

Received January 20, 1998.

A REMARK ON THE LOCATION OF THE ZEROS OF POLYNOMIALS

D. M. Simeunović

Abstract. In this paper we determine, in the complex plane, regions containing the zeros of the polynomial

$$(1) \quad P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \quad n \geq 3.$$

We also obtain two expressions which represent upper bounds for the moduli of the zeros of $P(z)$ with greater precision than those obtained by Cauchy and P. Montel.

1. The location of the zeros of the polynomial (1) in the complex plane, depending on its coefficients a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, was investigated by many authors (see e.g. [1] and [2]). Here we quote a result due to Cauchy [1, p.123] and a result due to P. Montel [3] which are respectively as follows:

(R_1): All the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(2) \quad |z| < 1 + A,$$

where

$$(3) \quad A = \max |a_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

(R_2): All the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(4) \quad |z| < 2M,$$

where

$$(5) \quad M = \max |a_k|^{\frac{1}{k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

2. In this paper, for the polynomial (1), the following theorem is proved.

Theorem. For fixed positive parameter s , let

$$(6) \quad M = \max |a_k|^{\frac{1}{s+k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$(7) \quad M_1 = \max |a_j|^{\frac{1}{s+j-1}}, \quad j = 1, 3, \dots, n,$$

AMS (MOS) Subject Classification 1991. Primary: 12D10.

Key words and phrases: Zeros of polynomials, upper bounds for zeros moduli.

$$(8) \quad M_2 = \max |a_m|^{\frac{1}{s+m-1}}, \quad m = 2, 4, \dots, v,$$

where $u = n$, $v = n - 1$, when n is odd, respectively, $u = n - 1$, $v = n$, when n is even. Then all the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(9) \quad |z| < \frac{M_1^s + \sqrt{M_1^{2s} + 4M^2 + 4M_2^{s+1}}}{2}.$$

Proof. From (7) and (8) we have

$$(10) \quad |a_1| \leq M_1^s, |a_3| \leq M_1^{s+2}, \dots, |a_u| \leq M_1^{s+u-1},$$

$$(11) \quad |a_2| \leq M_2^{s+1}, |a_4| \leq M_2^{s+3}, \dots, |a_v| \leq M_2^{s+v-1}.$$

On account of $M = \max(M_1, M_2)$, we have

$$(12) \quad M_1 \leq M \quad \text{and} \quad M_2 \leq M.$$

Taking into account (10), (11) and (12), from (1) for $|z| > M$ we have

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |z|^n \left\{ 1 - |z|^{s-1} \left(\left[\frac{|a_1|}{|z|^s} + \frac{|a_3|}{|z|^{s+2}} + \dots + \frac{|a_u|}{|z|^{s+u-1}} \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\frac{|a_2|}{|z|^{s+1}} + \frac{|a_4|}{|z|^{s+3}} + \dots + \frac{|a_v|}{|z|^{s+v-1}} \right] \right) \right\} > \\ &> |z|^n \left\{ 1 - |z|^{s-1} \left(\left[\left(\frac{M_1}{|z|} \right)^s + \left(\frac{M_1}{|z|} \right)^{s+2} + \dots \right] + \left[\left(\frac{M_2}{|z|} \right)^{s+1} + \left(\frac{M_2}{|z|} \right)^{s+3} + \dots \right] \right) \right\} = \\ &= |z|^n \left\{ 1 - \frac{M_1^s |z|}{|z|^2 - M_1^2} - \frac{M_2^{s+1}}{|z|^2 - M_2^2} \right\} \geq |z|^n \left\{ 1 - \frac{M_1^s |z| + M_2^{s+1}}{|z|^2 - M^2} \right\}, \end{aligned}$$

that is

$$(13) \quad |P(z)| > |z|^n \left\{ 1 - \frac{M_1^s |z| + M_2^{s+1}}{|z|^2 - M^2} \right\}.$$

From (13) we have $|P(z)| > 0$ for $|z| \geq \frac{M_1^s + \sqrt{M_1^{2s} + 4M^2 + 4M_2^{s+1}}}{2}$. This means that $|P(z)| \neq 0$ at the points of the complex plane not contained in the region (9). From this we deduce that all the zeros of the polynomial (1) must be in the region (9), thus completing the proof of this Theorem.

3. Taking for parameter s different positive values we can obtain from the Theorem several particular results. Here we list two particular cases.

3.1. For $s = 1$ from the Theorem we obtain the following result:

(R₃₁): All the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(14) \quad |z| < \frac{M_1 + \sqrt{M_1^2 + 4M^2 + 4M_2^2}}{2},$$

where

$$(15) \quad M = \max |a_k|^{\frac{1}{k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$(16) \quad M_1 = \max |a_j|^{\frac{1}{j}}, \quad j = 1, 3, \dots, u,$$

$$(17) \quad M_2 = \max |a_m|^{\frac{1}{m}}, \quad m = 2, 4, \dots, v,$$

and where $u = n$, $v = n - 1$, when n is odd, respectively, $u = n - 1$, $v = n$, when n is even.

In view of (15), (16) and (17), we have

$$(18) \quad M_1 \leq M \quad \text{and} \quad M_2 \leq M.$$

Keeping in mind (18), we see that

$$(19) \quad \frac{M_1 + \sqrt{M_1^2 + 4M^2 + 4M_2^2}}{2} \leq 2M.$$

Taking into account (19) we conclude that the region (14) is contained in the Montel's region (4), except when $M_1 = M_2 = M$, in what case the two regions coincide.

3.2. The case when $s \rightarrow \infty$. From (6), (7) and (8) we have

$$(20) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} M = \lim_{s \rightarrow \infty} M_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} M_2 = 1,$$

$$(21) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} M_1^s = A_1 = \max |a_j|, \quad j = 1, 3, \dots, u,$$

$$(22) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} M_2^{s+1} = A_2 = \max |a_m|, \quad m = 2, 4, \dots, v,$$

where $u = n$, $v = n - 1$, when n is odd, respectively, $u = n - 1$, $v = n$, when n is even.

Hawing in mind (20), (21) and (22), from the Theorem we obtain the following result:

(R₃₂): All the zeros of the polynomial (1) lie in the region

$$(23) \quad |z| < \frac{A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4 + 4A_2}}{2},$$

where

$$(24) \quad A_1 = \max |a_j|, \quad j = 1, 3, \dots, u,$$

$$(25) \quad A_2 = \max |a_m|, \quad m = 2, 4, \dots, v,$$

$$(26) \quad A = \max |a_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

and where $u = n$, $v = n - 1$, when n is odd, respectively, $u = n - 1$, $v = n$, when n is even.

In view of (24), (25) and (26), we have

$$(27) \quad A_1 \leq A \quad \text{and} \quad A_2 \leq A.$$

Having in mind (27), we see that

$$(28) \quad \frac{A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4 + 4A_2}}{2} \leq 1 + A.$$

Taking into account (28) we conclude that the region (23) is contained in the Cauchy's region (2), except when $A_1 = A_2 = A$ in what case the two regions coincide.

4. References

- [1] M. Marden: *Geometry of Polynomials*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1966.
- [2] S. Zervos: *Aspects modernes de la localisation des zéros des polynômes d'une variable*, Ann. Sci. École Norm. Sup., (3) 77 1960), 303-410.
- [3] P. Montel: *Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynômes*, Comment. Math. Helv., 7 (1934-35), 178-200.

Mike Alasa 8
11000 Belgrade
Yugoslavia

Received February 22, 1999.

A PROCEDURE FOR OBTAINING ITERATIVE FORMULAS OF HIGHER ORDER

D. M. Simeunović

Abstract. In this paper a procedure for obtaining iterative formulas of higher order is obtained. In particular, a family of iterative formulas of higher order is given. The family includes several already known results.

1. Introduction

Let

$$(1) \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

be an iterative method for finding the root $x = \alpha$ of the real or complex equation $F(x) = 0$.

For the iterative method (1) which converges to $x = \alpha$, we say it is of order k if

$$(2) \quad |x_{n+1} - \alpha| = O(|x_n - \alpha|^k), \quad n \rightarrow \infty.$$

If the function $f(x)$ is k times differentiable in a neighbourhood of the limit point $x = \alpha$, then the iterative method (1) is of order k if and only if

$$(3) \quad f(\alpha) = \alpha, \quad f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

This paper deals with a general procedure for obtaining iterative formulas of higher order.

2. A Theorem for Iterative Formulas of Higher Order

Starting from an iterative method of order k for finding the root $x = \alpha$ of the real or complex equation $F(x) = 0$, we give, in this paper, a procedure for obtaining iterative methods of order $\geq k + 1$. In this connection the following theorem is proved here.

AMS (MOS) Subject Classification 1991. Primary: 65H05.

Key words and phrases: Iteration formulae, approximate solutions of equations.

Theorem 1. Let (1) be an iterative method of order $k \geq 2$. Let the function $f(x)$ be $k + 1$ times differentiable in a neighbourhood of the limit point $x = \alpha$. Then for the function $g(x)$ of the form

$$(4) \quad g(x) = G(f'(x))$$

k times differentiable in the neighbourhood of the limit point $x = \alpha$ such that

$$(5) \quad g(\alpha) = 0,$$

$$(6) \quad g'(x) = \frac{1}{k} h(x) f''(x)$$

and

$$(7) \quad h(\alpha) = 1,$$

formula

$$(8) \quad x_{n+1} = f(x_n) - g(x_n)(x_n - f(x_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

is an iterative method of order $\geq k + 1$.

Proof. In the method (1) the iteration function is $f(x)$, and in the method (8) the iteration function is

$$(9) \quad \varphi(x) = f(x) - g(x)(x - f(x)).$$

For the function $\varphi(x)$ we shall prove that

$$(10) \quad \varphi(\alpha) = \alpha, \quad \varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \dots = \varphi^{(k)}(\alpha) = 0.$$

By hypothesis, (1) is an iterative method of order $k \geq 2$ and therefore the relations (3) hold.

From (9) and (6) we have, respectively

$$(11) \quad \begin{aligned} \varphi^{(r)}(x) &= f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)(x - f(x)) - r g^{(r-1)}(x)(1 - f'(x)) + \\ &+ \binom{r}{2} g^{(r-2)}(x) f''(x) + \dots + r g'(x) f^{(r-1)}(x) + g(x) f^{(r)}(x) \end{aligned}$$

and

$$(12) \quad \begin{aligned} g^{(r-1)}(x) &= \frac{1}{k} \left(h^{(r-2)}(x) f''(x) + (r-2) h^{(r-3)}(x) f'''(x) + \right. \\ &\left. + \binom{r-2}{2} h^{(r-4)}(x) f^{(4)}(x) + \dots + (r-2) h'(x) f^{(r-1)}(x) + h(x) f^{(r)}(x) \right). \end{aligned}$$

For $k \geq 2$, in view of (3), we obtain from (9)

$$(13) \quad \varphi(\alpha) = \alpha.$$

Because of (3) and (5), for $r = 1$, we obtain from (11)

$$(14) \quad \varphi'(\alpha) = 0.$$

For $k = 2$, in view of (3) and (7), we have from (6)

$$(15) \quad g'(\alpha) = \frac{1}{2}f''(\alpha).$$

Taking into account (3), (5) and (15), we obtain from (11)

$$(16) \quad \varphi''(\alpha) = f''(\alpha) - 2 \cdot \frac{1}{2}f''(\alpha) = 0.$$

In view of (13), (14) and (16), we conclude that the relations (10) are satisfied for $k = 2$.

For $k \geq 3$, having in mind (3) and (7), we obtain from (12)

$$(17) \quad g^{(r-1)}(\alpha) = 0, \quad \text{for } 2 \leq r \leq k-1$$

and

$$(18) \quad g^{(k-1)}(\alpha) = \frac{1}{k}f^{(k)}(\alpha), \quad \text{for } r = k.$$

On account of (3), (5) and (17), for $r = 1, 2, \dots, k-1$, from (11) we have, respectively

$$(19) \quad \varphi'(\alpha) = 0, \quad \varphi''(\alpha) = 0, \dots, \varphi^{(k-1)}(\alpha) = 0.$$

Keeping in mind (3), (5), (17) and (18) for $r = k$, we obtain from (11)

$$(20) \quad \varphi^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha) - k \cdot \frac{1}{k}f^{(k)}(\alpha) = 0.$$

In view of (13), (14), (19) and (20), we conclude that the relations (10) are satisfied for $k \geq 3$. Since the relations (10) are satisfied for $k = 2$, it follows that they are satisfied for $k \geq 2$, which means that the iterative method (8) is of order $\geq k + 1$ for $k \geq 2$.

3. Determination of the Function $g(x)$

From (4), it follows that the function $h(x)$ has the form $h(x) = H(f'(x))$. For $k \geq 2$, in view of (3), the condition $f'(\alpha) = 0$ is satisfied. Therefore, it is not difficult to determine the function of the form $h(x) = H(f'(x))$ for which we have $h(\alpha) = H(f'(\alpha)) = H(0) = 1$.

For every given function $h(x)$, we can obtain from (6) the corresponding function $g(x)$ as

$$(21) \quad g(x) = \frac{1}{k} \int_{\alpha}^x h(t)f''(t)dt = \frac{1}{k} \int_{\alpha}^x H(f'(t))df'(t) = G(f'(x))$$

for which we have $g(\alpha) = G(f'(\alpha)) = G(0) = 0$.

The function $g(x)$ can also be directly given.

4. Some Forms of the Function $g(x)$

Here we give several functions $g(x)$ obtained from (21) for corresponding functions $h(x)$. These are

$$(22) \quad g(x) = \frac{1}{k} f'(x), \quad \text{for } h(x) = 1,$$

which is the result obtained by G. Milovanović [5];

$$(23) \quad g(x) = \frac{1}{k} \frac{f'(x)}{(1 - f'(x))}, \quad \text{for } h(x) = \frac{1}{(1 - f'(x))^2},$$

which is the result obtained in [7];

$$(24) \quad g(x) = \frac{f'(x)}{k - f'(x)}, \quad \text{for } h(x) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{k} f'(x))^2},$$

which is the result obtained by B. Jovanović [4];

$$(25) \quad g(x) = -\frac{1}{k} \ln(1 - f'(x)), \quad \text{for } h(x) = \frac{1}{1 - f'(x)};$$

$$(26) \quad g(x) = \frac{1}{k} (e^{f'(x)} - 1), \quad \text{for } h(x) = e^{f'(x)};$$

$$(27) \quad g(x) = e^{\frac{f'(x)}{k}} - 1, \quad \text{for } h(x) = e^{\frac{f'(x)}{k}};$$

$$(28) \quad g(x) = \frac{1}{k} \sin f'(x), \quad \text{for } h(x) = \cos f'(x);$$

$$(29) \quad g(x) = \frac{1}{k} (f'(x) - (f'(x))^2), \quad \text{for } h(x) = 1 - 2f'(x).$$

Now we shall give some more forms of the function $g(x)$ for which the conditions (4), (5), (6) and (7) from Theorem 1 are also satisfied. These are

$$(30) \quad g(x) = \frac{1}{k} \left(\left(\frac{stuv - 1 + [2 - (1 - sf'(x))^t]^u}{stuv} \right)^v - 1 \right),$$

$$(31) \quad g(x) = \frac{1}{k} \left(e^{\frac{[2 - (1 - sf'(x))^t]^u - 1}{stuv}} - 1 \right),$$

$$(32) \quad g(x) = \frac{1}{k} \left(\left(\frac{stv + \ln[2 - (1 - sf'(x))^t]}{stv} \right)^v - 1 \right),$$

$$(33) \quad g(x) = \left(\frac{kstuv - 1 + [2 - (1 - sf'(x))^t]^u}{kstuv} \right)^v - 1,$$

$$(34) \quad g(x) = e^{\frac{[2 - (1 - sf'(x))^t]^u - 1}{kstuv}} - 1,$$

$$(35) \quad g(x) = \left(\frac{kstv + \ln[2 - (1 - sf'(x))^t]}{kstuv} \right)^v - 1,$$

where s, t, u and v are finite parameters $\neq 0$.

We shall consider in particular the function $g(x)$ from (33). In this case Theorem 1 reduces to next theorem.

Theorem 2. Let (1) be an iterative method of order $k \geq 2$. Let the function $f(x)$ be $k+1$ times differentiable in a neighbourhood of the limit point $x = \alpha$. Then

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - \left(\left(\frac{kstuv - 1 + [2 - (1 - sf'(x_n))^t]^u}{kstuv} \right)^v - 1 \right) \cdot (x_n - f(x_n)) = \\ (36) \quad &= x_n - \left(\frac{kstuv - 1 + [2 - (1 - sf'(x_n))^t]^u}{kstuv} \right)^v (x_n - f(x_n)), \\ & \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

is an iterative method of order $\geq k+1$, where s, t, u and v are finite parameters $\neq 0$. If $f'(\alpha) \neq 1$, $s = u = 1$ and $tv = -1$ or $ktv = -1$, then the method (36) holds for $k \geq 1$.

Proof. On basis of Theorem 1 it follows that Theorem 2 holds for $k \geq 2$. If $f'(\alpha) \neq 1$, $s = u = 1$ and $tv = -1$, the iteration function on the right hand side of (36) reduces to

$$(37) \quad \varphi(x) = f(x) - \left(\left(\frac{k-1 + (1-f'(x))^t}{k} \right)^{-\frac{1}{t}} - 1 \right) (x - f(x)).$$

If $f'(\alpha) \neq 1$, $s = u = 1$ and $ktv = -1$, the iteration function on the right hand side of (36) reduces to

$$(38) \quad \varphi(x) = f(x) - \left((1-f'(x))^{-\frac{1}{k}} - 1 \right) (x - f(x)).$$

It is not difficult to see that functions (37) and (38) satisfy (10) for $k = 1$, which means that they satisfy it also for $k \geq 1$. This way we have completed the proof of the Theorem 2.

Four parameters, s, t, u and v , stand in the formula (36). Giving these parameters fixed finite values $\neq 0$, one obtains particular iterative formulas.

5. Special Cases of the Formula (36)

5.1. For $s = t = u = v = 1$ and $k \geq 2$, formula (36) reduces to

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - \frac{1}{k} f'(x_n) (x_n - f(x_n)) = \\ (39) \quad &= x_n - \left(1 + \frac{1}{k} f'(x_n) \right) (x_n - f(x_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

which is the result obtained by G. Milovanović [5].

5.2. For $s = u = 1$, $tv = -1$ and if $f'(\alpha) \neq 1$, the formula (36), which in this case holds for $k \geq 1$, reduces to

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - \left(\left(\frac{k-1 + (1-f'(x_n))^t}{k} \right)^{-\frac{1}{t}} - 1 \right) \cdot (x_n - f(x_n)) = \\ (40) \quad &= x_n - \left(\frac{k-1 + (1-f'(x_n))^t}{k} \right)^{-\frac{1}{t}} (x_n - f(x_n)), \\ & \qquad \qquad \qquad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

5.2.1. For $t = 1$, from (40) we obtain

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - \frac{f'(x_n)}{k - f'(x_n)} (x_n - f(x_n)) = \\ (41) \quad &= x_n - \frac{x_n - f(x_n)}{1 - \frac{1}{k}f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

which is the result obtained by B. Jovanović [4].

5.2.2. For $t = -1$, from (40) we have

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - \frac{1}{k} f'(x_n) \frac{x_n - f(x_n)}{1 - f'(x_n)} = \\ (42) \quad &= x_n - \left(1 + \frac{1}{k} \frac{f'(x_n)}{1 - f'(x_n)} \right) (x_n - f(x_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

which is the result obtained in [7].

5.3. For $s = u = 1$, $ktv = -1$ and if $f'(\alpha) \neq 1$, the formula (36), which in this case holds for $k \geq 1$, reduces to

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - \left((1 - f'(x_n))^{-\frac{1}{k}} - 1 \right) (x_n - f(x_n)) = \\ (43) \quad &= x_n - \frac{x_n - f(x_n)}{(1 - f'(x_n))^{\frac{1}{k}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

6. Examples

If (1) represents Newton's method for finding a simple root $x = \alpha$ of the equation $F(x) = 0$, namely

$$(44) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

which means that

$$(45) \quad f(x_n) = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

and $k = 2$, then we obtain from (36) for $u = 1$ the following method

$$(46) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \left(\frac{2stv + 1 - \left(1 - \frac{sF(x_n)F''(x_n)}{(F'(x_n))^2} \right)^t}{2stv} \right)^v,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

According to Theorem 2, the iterative method (46) for fixed finite parameters s , t and v ($stv \neq 0$) is of order ≥ 3 , since as we know Newton's method (44) is of order 2.

The asymptotic error constant for the iterative method (46) is

$$(47) \quad C_3 = \frac{3(3 + 2(t-1)s + \frac{1}{v})(F'''(\alpha))^2 - 4F'(\alpha)F''''(\alpha)}{24(F'(\alpha))^2}.$$

6.1. For $s = t = 1$, $v = -1$, we obtain from (46)

$$(48) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \cdot \frac{2(F'(x_n))^2}{2(F'(x_n))^2 - F(x_n)F''(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

which is Halley's method (see [2], [3]).

6.2. For $s = 2$, $t = \frac{1}{2}$, $v = -1$, we have from (46) Euler's method (see [3])

$$(49) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \cdot \frac{2}{1 + \left(1 - \frac{2F(x_n)F''(x_n)}{(F'(x_n))^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

6.3. For $s = t = v = 1$, we obtain from (46)

$$(50) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \cdot \frac{2(F'(x_n))^2 + F(x_n)F''(x_n)}{2(F'(x_n))^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

which represents Chebyshev's method (see [1]).

6.4. For $s = \frac{m}{m-1}$, $t = \frac{1}{2}$, $v = -1$, when $F(x)$ is a polynomial of degree $m \geq 2$, we have from (46)

$$(51) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \cdot \frac{m}{1 + (m-1) \left(1 - \frac{m}{m-1} \cdot \frac{F(x_n)F''(x_n)}{(F'(x_n))^2} \right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

which is the Laguerre method (see [3]).

6.5. For $s = 1$, $t = -\frac{1}{2}$, $v = 1$, we obtain from (46)

$$(52) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \left(1 - \frac{F(x_n)F''(x_n)}{(F'(x_n))^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

which represents Ostrowski's square root method (see [6]).

6.6. For $s = \beta + 1$, $t = \frac{1}{2}$, $v = -1$, we have from (46)

$$(53) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \cdot \frac{\beta + 1}{\beta + \left(1 - (\beta + 1) \cdot \frac{F(x_n)F''(x_n)}{(F'(x_n))^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

which represents a one parameter family of iterative formulas obtained by E. Hansen and M. Patrick [3].

6.7. For $s = 1$, $t = -1$, $v = 1$, we have from (46)

$$(54) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \cdot \frac{2(F'(x_n))^2 - F(x_n)F''(x_n)}{2(F'(x_n))^2 - 2F(x_n)F''(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

which is the method obtained in [7].

6.8. For $s = \frac{m}{m-1}$, $t = \frac{m-1}{m}$, $v = -\frac{1}{2}$, when $F(x)$ is a polynomial of degree $m \geq 2$, we obtain from (46) the method

$$(55) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \left(1 - \frac{m}{m-1} \cdot \frac{F(x_n)F''(x_n)}{(F'(x_n))^2} \right)^{\frac{1-m}{2m}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

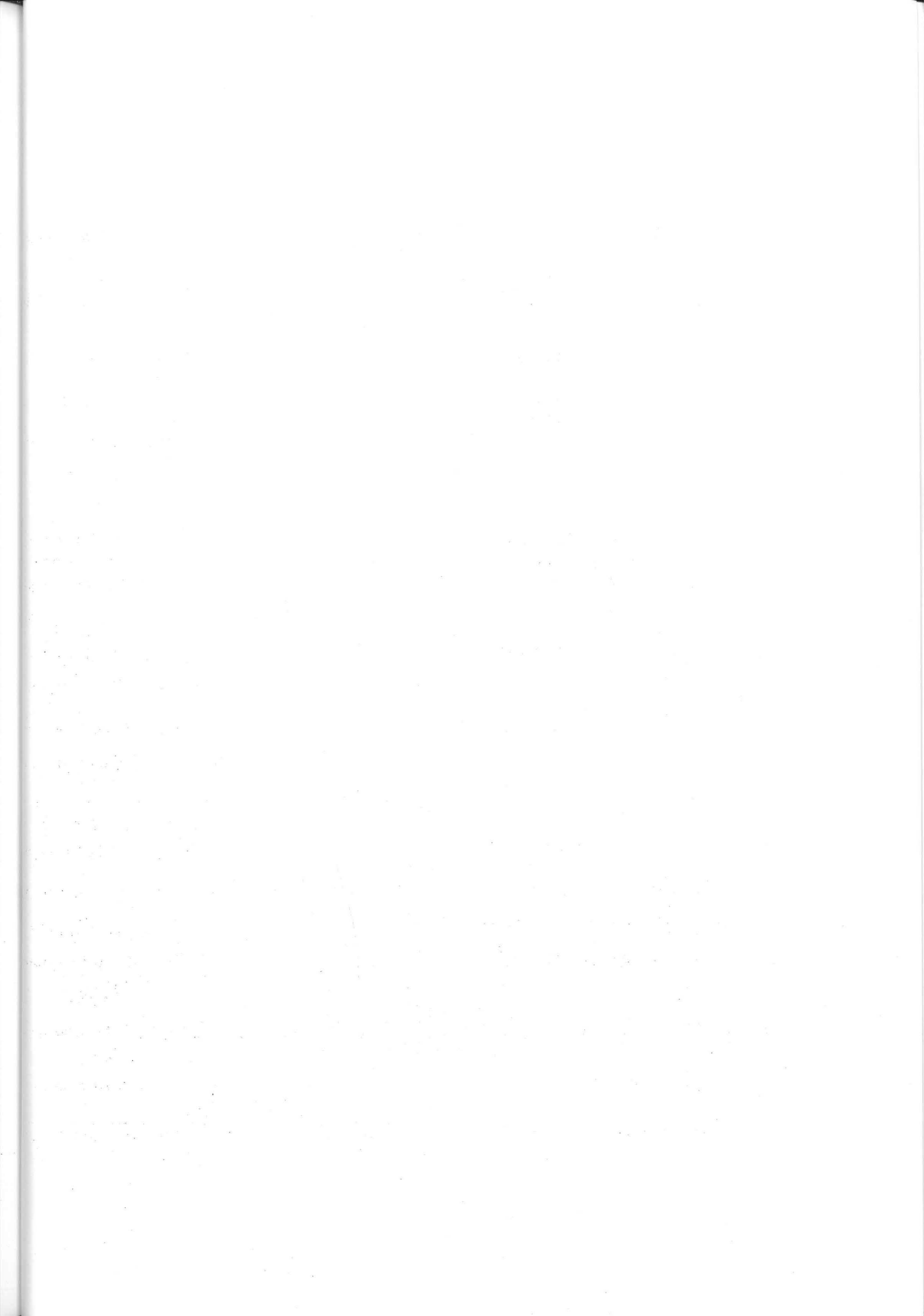
7. References

- [1] И. С. Березин, Н. П. Жидков: *Методы вычислений*, том II. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1960.
- [2] M. Davies, B. Dawson: *On the global convergence of Halley's iteration formula*, Numer. Math., 24 (1975), 133-135.
- [3] E. Hansen, M. Patrick: *A family of root finding methods*, Numer. Math., 27 (1977), 257-269.
- [4] B. Jovanović: *A method for obtaining iterative formulas of higher order*, Mat. Vesnik, 9 (24) (1972), 365-369.
- [5] G. V. Milovanović: *A method to accelerate iterative processes in Banach space*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., N° 461 - N° 497 (1974), 67-71.

-
- [6] A. M. Ostrowski: *Solution of equations and systems of equations*, Second edition, Academic Press, New York and London 1966.
- [7] D. M. Simeunović: *On a process for obtaining iterative formulas of higher order for roots of equations*, *Anal. Num. Theor. Approx.*, 24 (1995), 225-229.

Dragomir Simeunović
Mike Alasa 8
11000 Belgrade
Yugoslavia

Received March 24, 1999.



On a Method for Obtaining Iterative Formulas of Higher Order

DRAGOMIR SIMEUNOVIĆ

ABSTRACT. In this paper a method for obtaining iterative formulas of higher order for finding roots of equations is obtained. These formulas include several already known results.

1. INTRODUCTION

Let

$$(1) \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

be an iterative method for finding the root $x = \alpha$ of the real or complex equation $F(x) = 0$.

For the iterative method (1) which converges to $x = \alpha$, we say it is of order k if

$$(2) \quad |x_{n+1} - \alpha| = O(|x_n - \alpha|^k), \quad n \rightarrow \infty.$$

If the function $f(x)$ is k times differentiable in a neighborhood of the limit point $x = \alpha$, then the iterative method (1) is of order k if and only if

$$(3) \quad f(\alpha) = \alpha, \quad f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

This paper deals with a general method for obtaining iterative formulas of higher order.

2. A THEOREM FOR ITERATIVE FORMULAS OF HIGHER ORDER

Starting from an iterative method of order $k \geq 1$ for finding the root $x = \alpha$ of the real or complex equation $F(x) = 0$, we give, in this paper, a method for obtaining iterative formulas of order $\geq k + 1$. In this connection the following theorem is proved here.

Theorem 1. *Let (1) be an iterative method of order $k \geq 1$. Let the function $f(x)$ be $k + 1$ times differentiable in a neighborhood of the limit point $x = \alpha$ and let*

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 65H05.

Key words and phrases. Iteration formulas, approximate solutions of equations.

$f'(\alpha) \neq 1$. Then for the function $h(x)$ k times differentiable in the neighborhood of the limit point $x = \alpha$ such that

$$(4) \quad h(\alpha) = 0$$

and

$$(5) \quad h'(\alpha) = 1,$$

formula

$$(6) \quad x_{n+1} = f(x_n) - \frac{1}{k} f'(x_n) h(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

is an iterative method of order $\geq k + 1$.

Proof. In the method (1) the iteration function is $f(x)$, and in the method (6) the iteration function is

$$(7) \quad g(x) = f(x) - \frac{1}{k} f'(x) h(x).$$

For the function $g(x)$ we shall prove that

$$(8) \quad g(\alpha) = \alpha, \quad g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(k)}(\alpha) = 0.$$

By hypothesis, (1) is an iterative method of order $k \geq 1$ and therefore the relations (3) hold.

From (7) we have

$$(9) \quad g^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) - \frac{1}{k} \left(f^{(r+1)}(x) h(x) + r f^{(r)}(x) h'(x) + \binom{r}{2} f^{(r-1)}(x) h''(x) + \dots + f'(x) h^{(r)}(x) \right).$$

For $k \geq 1$, in view of (3) and (4), we obtain from (7)

$$(10) \quad g(\alpha) = \alpha.$$

Because of (3) and (4), we obtain from (9)

$$g^{(r)}(\alpha) = 0, \quad \text{for } 1 \leq r \leq k-1,$$

that is

$$(11) \quad g'(\alpha) = 0, \quad g''(\alpha) = 0, \dots, g^{(k-1)}(\alpha) = 0.$$

On account of (3), (4) and (5), for $r = k$, we obtain from (9)

$$(12) \quad g^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha) - \frac{1}{k} \cdot k f^{(k)}(\alpha) = 0.$$

In view of (10), (11) and (12), we conclude that the relations (8) are satisfied for $k \geq 1$, which means that the iterative method (6) is of order $\geq k + 1$. \square

3. SOME FORMS OF THE FUNCTION $h(x)$

Taking for the function $h(x)$ different forms, we can obtain from (6) several particular results. Here we give some forms for the function $h(x)$.

3.1. For

$$(13) \quad h(x) = \frac{u(x)}{u'(x)}v(x),$$

where the functions $u(x)$ and $v(x)$ are $k+1$ times differentiable in a neighborhood of the limit point $x = \alpha$ such that $u(\alpha) = 0$, $u'(\alpha) \neq 0$ and $v(\alpha) = 1$, we have $h(\alpha) = 0$ and $h'(\alpha) = 1$. In this case formula (6) reduces to

$$(14) \quad x_{n+1} = f(x_n) - \frac{1}{k}f'(x_n)\frac{u(x_n)}{u'(x_n)}v(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

For different forms of the function $u(x)$ and $v(x)$, from (14) we can obtain the particular results.

3.1.1. For $u(x) = x - f(x)$ and $v(x) = 1$, where $u(\alpha) = 0$, $u'(\alpha) \neq 0$, from (14) we obtain the iterative method

$$(15) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - \frac{1}{k}f'(x_n)\frac{x_n - f(x_n)}{1 - f'(x_n)} = \\ &= x_n - \left(1 + \frac{1}{k}\frac{f'(x_n)}{1 - f'(x_n)}\right)(x_n - f(x_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

which is the result obtained in [7].

3.1.2. For $u(x) = x - f(x)$ and

$$v(x) = \frac{1 - f'(x)}{1 - \frac{1}{k}f'(x)},$$

where $u(\alpha) = 0$, $u'(\alpha) \neq 0$ and $v(\alpha) = 1$, from (14) we obtain the iterative method

$$(16) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - f'(x_n)\frac{x_n - f(x_n)}{k - f'(x_n)} = \\ &= x_n - \frac{x_n - f(x_n)}{1 - \frac{1}{k}f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

which is the result obtained by B. Jovanović [4].

3.2. Let $x = \alpha$ is single root of the equation $F(x) = 0$ and let the function $F(x)$ is $k+1$ times differentiable in a neighbourhood of the limit point $x = \alpha$. Then we have $F(\alpha) = 0$ and $F'(\alpha) \neq 0$.

For $u(x) = F(x)$, from (13) we obtain

$$(17) \quad h(x) = \frac{F(x)}{F'(x)}v(x),$$

where $h(\alpha) = 0$ and $h'(\alpha) = 1$. In this case formula (6) reduces to

$$(18) \quad x_{n+1} = f(x_n) - \frac{1}{k}f'(x_n)\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}v(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3.2.1. For $v(x) = 1$, from (18) we obtain the iterative method

$$(19) \quad x_{n+1} = f(x_n) - \frac{1}{k} f'(x_n) \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3.3. For $h(x) = x - f(x)$ and for $k \geq 2$ we have $h(\alpha) = 0$ and $h'(\alpha) = 1$. In this case formula (6) reduces to

$$(20) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - \frac{1}{k} f'(x_n) (x_n - f(x_n)) = \\ &= x_n - \left(1 + \frac{1}{k} f'(x_n)\right) (x_n - f(x_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

which is the result obtained by G. Milovanović [5].

4. EXAMPLES

1) Let (1) be regula falsi, which means

$$(21) \quad x_{n+1} = \frac{aF(x_n) - x_nF(a)}{F(x_n) - F(a)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

where

$$f(x) = \frac{aF(x) - xF(a)}{F(x) - F(a)}.$$

The method (21) is of order $k = 1$.

For $v(x) = \frac{F(x) - F(a)}{-F(a)}$, where $v(\alpha) = 1$, from (18) we obtain Newton's iterative method of order $k = 2$ for finding of the single root $x = \alpha$ of the equation $F(x) = 0$, namely

$$(22) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2) If (1) represents Newton's method (22) for finding a single root $x = \alpha$ of the equation $F(x) = 0$, which means that

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

and $k = 2$, then we obtain from (18) the iterative method

$$(23) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \left(1 + \frac{F(x_n)F''(x_n)}{2(F'(x_n))^2} v(x_n)\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

According to Theorem 1, the iterative method (23) is of order $k \geq 3$, since as we know Newton's method (22) is of order 2.

For different forms of the function $v(x)$, from (23) we can obtain particular results.

a) For $v(x) = 1$, we obtain from (23)

$$(24) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \frac{2(F'(x_n))^2 + F(x_n)F''(x_n)}{2(F'(x_n))^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

which is Chebyshev's method (see [1]).

b) For

$$v(x) = \frac{2(F'(x))^2}{2(F'(x))^2 - F(x)F''(x)},$$

we obtain from (23)

$$(25) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \frac{2(F'(x_n))^2}{2(F'(x_n))^2 - F(x_n)F''(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

which represents Halley's method (see [2, 3]).

c) For

$$v(x) = \frac{(F'(x))^2}{(F'(x))^2 - F(x)F''(x)},$$

we obtain from (23)

$$(26) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \frac{2(F'(x_n))^2 - F(x_n)F''(x_n)}{2(F'(x_n))^2 - 2F(x_n)F''(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

which is the method obtained in [7].

d) For

$$v(x) = \frac{2}{\left(1 - \frac{F(x)F''(x)}{(F'(x))^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \left(1 - \frac{F(x)F''(x)}{(F'(x))^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)},$$

we obtain from (23)

$$(27) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \left(1 - \frac{F(x_n)F''(x_n)}{(F'(x_n))^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

which represents Ostrowski's square root method (see [6]).

e) For

$$v(x) = \frac{2m}{\left(1 + (m-1) \left(1 - \frac{m}{m-1} \frac{F(x)F''(x)}{(F'(x))^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \left(1 + \left(1 - \frac{m}{m-1} \frac{F(x)F''(x)}{(F'(x))^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)},$$

when $F(x)$ is a polynomial of degree $m \geq 2$, we obtain from (23)

$$(28) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \frac{m}{1 + (m-1) \left(1 - \frac{m}{m-1} \frac{F(x_n)F''(x_n)}{(F'(x_n))^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

which is the Laguerre's method (see [3]).

f) For

$$v(x) = \frac{2(\beta+1)}{\left(\beta + \left(1 - (\beta+1) \frac{F(x)F''(x)}{(F'(x))^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \left(1 + \left(1 - (\beta+1) \frac{F(x)F''(x)}{(F'(x))^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)},$$

where β is fixed finite parameter, we obtain from (23)

$$(29) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \frac{\beta+1}{\beta + \left(1 - (\beta+1) \frac{F(x_n)F''(x_n)}{(F'(x_n))^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

which represents a one parameter family of iterative formulas obtained by E. Hansen and M. Patrick [3].

In all previous cases we have $v(\alpha) = 1$.

REFERENCES

- [1] И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений, том II*. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1960.
- [2] M. Davies, B. Dawson, *On the global convergence of Halley's iteration formula*, Numer. Math. 24(1975), 133-135.
- [3] E. Hansen, M. Patrick, *A family of root finding methods*, Numer. Math. 27(1977), 257-269.
- [4] B. Jovanović, *A method for obtaining iterative formulas of higher order*, Mat. Vesnik 9(24)(1972), 365-369.
- [5] G. V. Milovanović, *A method to accelerate iterative processes in Banach space*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. N°461 - N°497(1974), 67-71.
- [6] A. M. Ostrowski, *Solution of equations and systems of equations, Second edition*, Academic Press, New York and London 1966.
- [7] D. M. Simeunović, *On a process for obtaining iterative formulas of higher order for roots of equations*, Anal. Num. Theor. Approx., 24(1995), 225-229.

MIKE ALASA 8
11000 BELGRADE
SERBIA AND MONTENEGRO

A Remark on the Moduli of the Roots of Algebraic Equations

DRAGOMIR M. ŠIMEUNOVIĆ

ABSTRACT. In this paper we obtain several upper bounds of the moduli of the roots of the algebraic equations.

The bounds of the moduli of the roots of the algebraic equations were investigated by many authors (see e.g. [1], [2], [3], [4]).

In this paper, for the algebraic equation

$$(1) \quad z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

the following theorems are proved. In the next let

$$(2) \quad A_k = |a_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Theorem 1. *Let*

$$(3) \quad M_1 = \max(A_k - A_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Then the upper bound for the moduli of the roots of the equation (1) is

$$(B_1) \quad 1 + A_1, \text{ if } M_1 \leq 0,$$

$$(B_2) \quad \frac{2 + A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4M_1}}{2}, \text{ if } M_1 > 0.$$

Theorem 2. *Let*

$$(4) \quad M_2 = \max(A_k - A_1), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

and

$$(5) \quad M_3 = \max\left(\frac{A_k - A_1}{k-1}\right), \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Then the upper bound for the moduli of the roots of the equation (1) is

$$(B_3) \quad 1 + A_1, \text{ if } M_2 \leq 0,$$

$$(B_4) \quad \frac{1 + A_1 + \sqrt{(1 + A_1)^2 + 4M_2}}{2}, \text{ if } M_2 > 0,$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 12D10.

Key words and phrases. Roots of algebraic equations, Upper bounds for roots moduli.

$$(B_5) \quad 1 + A_1, \text{ if } M_3 \leq 0,$$

$$(B_6) \quad \frac{2 + A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4M_3}}{2}, \text{ if } M_3 > 0.$$

Proof of Theorem 1. First, note that for $r > 1$ we have the following relations

$$(6) \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n} + \cdots = \frac{1}{r-1},$$

$$(7) \quad \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \cdots + \frac{n}{r^n} + \cdots = \frac{r}{(r-1)^2},$$

$$(8) \quad \frac{1}{r^k} = \frac{1}{(r-1)r^{k-1}} - \frac{1}{(r-1)r^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

which we shall use in the proof of the previous theorems.

Let $z = re^{\theta i}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) the root of the equation (1), where

$$(9) \quad |z| = r.$$

Taking into account (2) and (9), from (1) we obtain the inequality

$$(10) \quad 1 \leq \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{r^{n-1}} + \frac{A_n}{r^n}.$$

In view of (8), the inequality (10) reduces to

$$1 \leq \frac{A_1}{r-1} + \frac{1}{r-1} \left(\frac{A_2 - A_1}{r} + \frac{A_3 - A_2}{r^2} + \cdots + \frac{A_n - A_{n-1}}{r^{n-1}} \right) - \frac{A_n}{(r-1)r^n}$$

wherefrom we obtain

$$(11) \quad 1 < \frac{A_1}{r-1} + \frac{1}{r-1} \left(\frac{A_2 - A_1}{r} + \frac{A_3 - A_2}{r^2} + \cdots + \frac{A_n - A_{n-1}}{r^{n-1}} \right).$$

For $M_1 \leq 0$, because of (3), (11) reduces to

$$1 < \frac{A_1}{r-1},$$

wherefrom follows

$$r < 1 + A_1,$$

which represents the proof of (B_1) .

For $M_1 > 0$, in view of (3) and (6), (11) reduces to

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_1}{r-1} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}} \right) \\ &< \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_1}{r-1} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}} + \cdots \right) = \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_1}{(r-1)^2}, \end{aligned}$$

wherefrom follows that

$$(12) \quad 1 < \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_1}{(r-1)^2}.$$

From (12) we obtain

$$r < \frac{2 + A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4M_1}}{2},$$

which represents the proof of (B_2) . □

Proof of Theorem 2. Inequality (10) can be written in the form

$$1 \leq \frac{A_2 - A_1}{r^2} + \frac{A_3 - A_1}{r^3} + \dots + \frac{A_n - A_1}{r^n} + A_1 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^n} \right),$$

wherefrom, because of (6) we have

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{1}{r} \left(\frac{A_2 - A_1}{r} + \frac{A_3 - A_1}{r^2} + \dots + \frac{A_n - A_1}{r^{n-1}} \right) \\ &\quad + A_1 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^n} + \dots \right) \\ &= \frac{A_1}{r-1} + \frac{1}{r} \left(\frac{A_2 - A_1}{r} + \frac{A_3 - A_1}{r^2} + \dots + \frac{A_n - A_1}{r^{n-1}} \right), \end{aligned}$$

which means that

$$(13) \quad 1 < \frac{A_1}{r-1} + \frac{1}{r} \left(\frac{A_2 - A_1}{r} + \frac{A_3 - A_1}{r^2} + \dots + \frac{A_n - A_1}{r^{n-1}} \right).$$

For $M_2 \leq 0$, (13) reduces to

$$1 < \frac{A_1}{r-1},$$

wherefrom we obtain

$$r < 1 + A_1,$$

which concludes the proof of (B_2) .

For $M_2 > 0$, because of (4) and (6), from inequality (13) we obtain

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_2}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{n-1}} \right) \\ &< \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_2}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{n-1}} + \dots \right) = \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_2}{r(r-1)}, \end{aligned}$$

that is

$$(14) \quad 1 < \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_2}{r(r-1)}.$$

From (14) we obtain

$$r < \frac{1 + A_1 + \sqrt{(1 + A_1)^2 + 4M_2}}{2},$$

which represents the proof of (B_4) .

The inequality (13) can be written in the form

$$(15) \quad 1 < \frac{A_1}{r-1} + \frac{1}{r} \left(\frac{A_2 - A_1}{1} \frac{1}{r} + \frac{A_3 - A_1}{2} \frac{2}{r^2} + \cdots + \frac{A_n - A_1}{n-1} \frac{n-1}{r^{n-1}} \right).$$

For $M_3 \leq 0$, from (15) we have

$$1 < \frac{A_1}{r-1},$$

wherefrom we obtain

$$r < 1 + A_1,$$

which represents the proof of (B_5) .

For $M_3 > 0$, because (5) and (7), (15) reduces to

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_3}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \cdots + \frac{n-1}{r^{n-1}} \right) \\ &< \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_3}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \cdots + \frac{n-1}{r^{n-1}} + \cdots \right) = \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_3}{(r-1)^2}, \end{aligned}$$

that is

$$(16) \quad 1 < \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_3}{(r-1)^2}.$$

From (16) we obtain

$$r < \frac{2 + A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4M_3}}{2},$$

which represents the proof of (B_6) . □

Theorem 3. *Let*

$$(17) \quad M_4 = \max \left(\frac{A_k - A_{k-1}}{k-1} \right), \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Then the upper bound of the moduli of the roots of the equation (1) is

$$(B_7) \quad 1 + A_1, \quad \text{if } M_4 \leq 0,$$

$$(B_8) \quad s, \quad \text{if } M_4 > 0,$$

where $s > 1$ is the root of the equation

$$(18) \quad (r-1)^3 - A_1(r-1)^2 - M_4(r-1) - M_4 = 0.$$

Proof. Inequality (11) can be written in the form

$$(19) \quad 1 < \frac{A_1}{r-1} + \frac{1}{r-1} \left(\frac{A_2 - A_1}{1} \frac{1}{r} + \frac{A_3 - A_2}{2} \frac{2}{r^2} + \cdots + \frac{A_n - A_{n-1}}{n-1} \frac{n-1}{r^{n-1}} \right).$$

For $M \leq 0$, from (19) we have

$$1 < \frac{A_1}{r-1},$$

wherefrom we obtain

$$r < 1 + A_1,$$

which represents the proof of (B_7) .

For $M_4 > 0$, because (17) and (7), (19) reduces to

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_4}{r-1} \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \dots + \frac{n-1}{r^{n-1}} \right) \\ &< \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_4}{r-1} \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \dots + \frac{n-1}{r^{n-1}} + \dots \right) = \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_4 r}{(r-1)^3}, \end{aligned}$$

that is

$$(20) \quad 1 < \frac{A_1}{r-1} + \frac{M_4 r}{(r-1)^3}.$$

From (20) we obtain

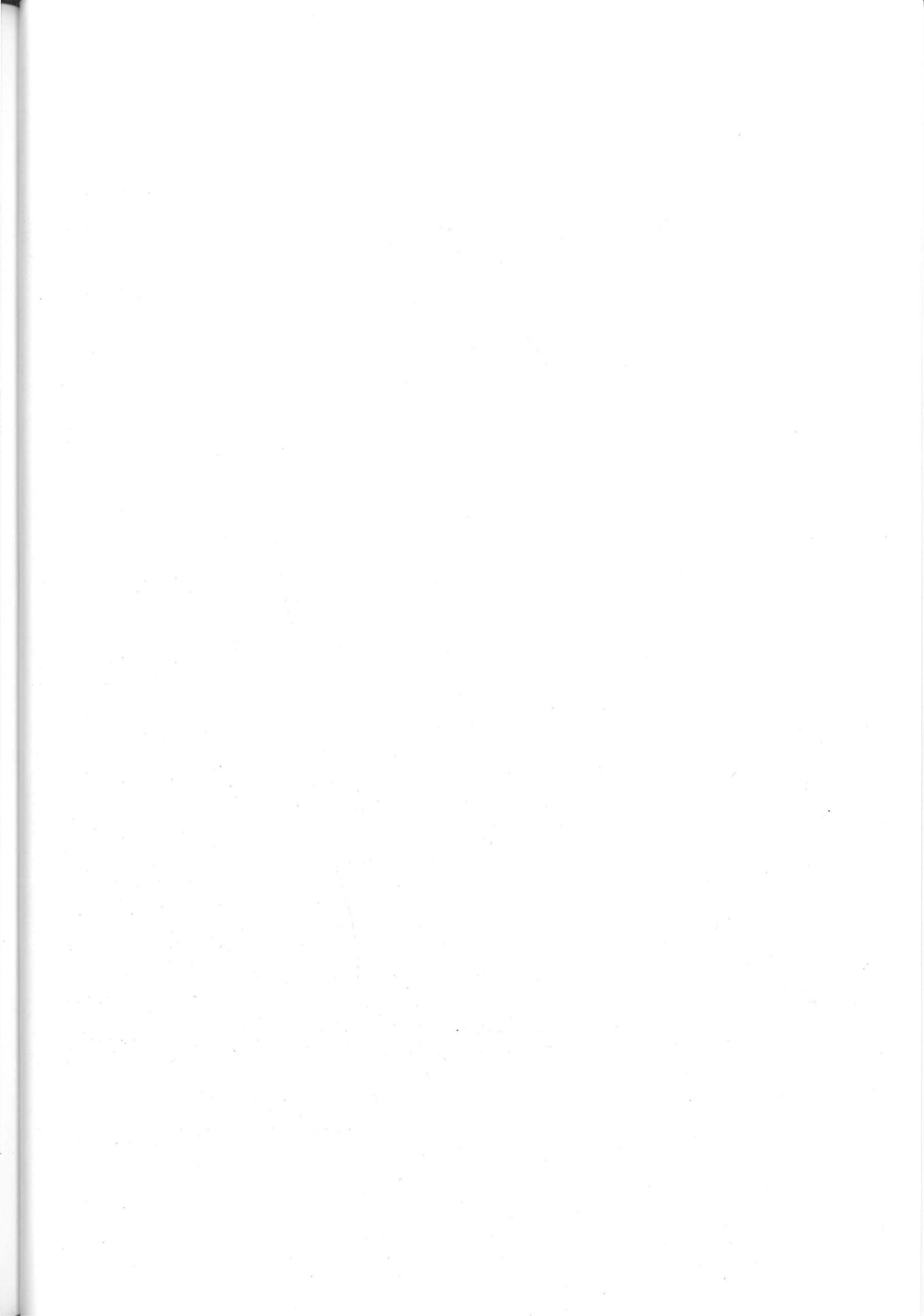
$$(r-1)^3 - A_1(r-1)^2 - M_4(r-1) - M_4 < 0,$$

wherefrom we conclude that root $s > 1$ of the equation (18) is the upper bound of the moduli of the roots of the equation (1), which represents the proof of (B_8) . \square

REFERENCES

- [1] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1966.
- [2] S. Zervos, *Aspects modernes de la localisation des séros des polynômes d'une variable*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (3) 77 (1960), 303-410.
- [3] P. Montel, *Sur quelques limites pour les modules des séros des polynômes*, Comment. Math. Helv., 7 (1934-35), 178-200.
- [4] D. Marković, *Granice korena algebarskih jednačina*, Srpska Kraljevska Akademija, Glas CLXXXI, prvi razred 90, A. Matematičke nauke, Beograd 1939, 117-130.

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ
MIKE ALASA 8.
11000 BELGRADE
SERBIA



A Procedure for Obtaining a Family of Iterative Formulas of Higher Order

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ

ABSTRACT. In this paper a procedure for obtaining iterative formulas of higher order for finding zeros is obtained. The family includes several already known results.

In this paper, starting from Halley's iterative formula (see [1], [2]) for finding zeros of the functions, a family of iterative formulas of the third order has been obtained.

Halley's iterative formula for finding the simple zero of the function $F(x)$ is

$$(1) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{2F(x_k)F'(x_k)}{2(F'(x_k))^2 - F(x_k)F''(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

where $F(x)$ is three times differentiable function.

Formula (1) we can write in the form

$$(2) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{F(x_k)F''(x_k)}{2(F'(x_k))^2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Expression

$$(3) \quad 1 - \frac{F(x_k)F''(x_k)}{2(F'(x_k))^2}$$

can be written in the form

$$(4) \quad 1 - \frac{F(x_k)F''(x_k)}{2(F'(x_k))^2} = 1 - s + s \left(1 - \frac{F(x_k)F''(x_k)}{2s(F'(x_k))^2} \right),$$

where s is a real parameter $\neq 0$.

As it is known, for small values $|h|$ of the real number h and real parameter $v \neq 0$, the following relation is valid

$$(5) \quad 1 - h \approx \left(1 - \frac{h}{v} \right)^v.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 65H05.

Key words and phrases. Iteration formulas, Approximate solutions of equations.

If x_k is an approximative value of the simple zero α of the function $F(x)$ that is near enough to the zero α , then the value of $F(x_k)$ is small, and so the absolute value of the expression

$$(6) \quad \frac{F(x_k)F''(x_k)}{2s(F'(x_k))^2}$$

is also small.

If we put expression (6) into (5) instead of h , we will get a relation

$$(7) \quad 1 - \frac{F(x_k)F''(x_k)}{2s(F'(x_k))^2} \approx \left(1 - \frac{F(x_k)F''(x_k)}{2sv(F'(x_k))^2}\right)^v,$$

because of which (4) is reduced to a relation

$$(8) \quad 1 - \frac{F(x_k)F''(x_k)}{2(F'(x_k))^2} \approx 1 - s + s \left(1 - \frac{F(x_k)F''(x_k)}{2sv(F'(x_k))^2}\right)^v.$$

If in the formula (2) instead of expression (3) we put

$$1 - s + s \left(1 - \frac{F(x_k)F''(x_k)}{2sv(F'(x_k))^2}\right)^v$$

we will get an iterative formula

$$(9) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \cdot \frac{1}{1 - s + s \left(1 - \frac{F(x_k)F''(x_k)}{2sv(F'(x_k))^2}\right)^v}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

where s and v are real parameters $\neq 0$.

It is not difficult to prove for formula (9) that it represents an iterative formula of the third order.

By formula (9) it is given one family of iterative methods of the third order, where s and v are real parameters $\neq 0$.

The asymptotic error constant for the iterative method (9) is

$$(10) \quad C_3 = \frac{3(3 + 2(v-1)(2sv)^{-1} - 1)(F'''(\alpha))^2 - 4F'(\alpha)F''(\alpha)}{24(F'(\alpha))^2},$$

where α is a simple zero of the function $F(x)$.

Taking for parameters s and v different values, we can obtain from (9) particular iterative formulas. Here we list some of the particular cases:

1) For $s = 1, v = 1$, (9) reduces to Halley's method (2).

2) For $s = v = \frac{1}{2}$, we have from (9) Euler's method (see [1])

$$(11) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \cdot \frac{2}{1 \pm \left(1 - \frac{2F(x_k)F''(x_k)}{(F'(x_k))^2}\right)^{1/2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3) For $s = 1$, $v = -1$, from (9) we obtain

$$(12) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \cdot \frac{2(F'(x_k))^2 + F(x_k)F''(x_k)}{2(F'(x_k))^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

which represents Chebyshev's method (see [7]).

4) For $s = \frac{n-1}{n}$, $v = \frac{1}{2}$, when $F(x)$ is a polynomial of degree $n \geq 2$, we have from (9)

$$(13) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \cdot \frac{n}{1 \pm (n-1) \left(1 - \frac{n}{n-1} \cdot \frac{F(x_k)F''(x_k)}{(F'(x_k))^2} \right)^{1/2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

which is the Laguerre method (see [1], [3]).

5) For $s = 1$, $v = \frac{1}{2}$, (9) reduces to

$$(14) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \cdot \frac{1}{\pm \left(1 - \frac{F(x_k)F''(x_k)}{(F'(x_k))^2} \right)^{1/2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

which represents Ostrowski's square root method (see [4]).

6) For $s = \frac{1}{w+1}$, $v = \frac{1}{2}$, the formula (9) reduces to

$$(15) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \cdot \frac{w+1}{w \pm \left(1 - (w+1) \cdot \frac{F(x_k)F''(x_k)}{(F'(x_k))^2} \right)^{1/2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

where w is a real parameter $\neq -1$.

The family of iterative formulas (15) are obtained by E. Hansen and M. Patrick [1].

7) For $s = v = -1$, we have from (9) the formula

$$(16) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \cdot \frac{2(F'(x_k))^2 - F(x_k)F''(x_k)}{2(F'(x_k))^2 - 2F(x_k)F''(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

which is obtained in [5].

8) For $s = 1$, $v = \frac{n-1}{2n}$, when $F(x)$ is a polynomial of degree $n \geq 2$, we obtain from (9)

$$(17) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \cdot \left(1 - \frac{n}{n-1} \cdot \frac{F(x_k)F''(x_k)}{(F'(x_k))^2} \right)^{\frac{1-n}{2n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

which represents the method obtained in [6].

The family of iterative method (9) is one particular case of one more general family of iterative methods obtained in [6].

REFERENCES

- [1] E. Hansen, M. Patrick, *A family of root finding methods*, Numer. Math., 27 (1977), 257-269.
- [2] M. Davies, B. Dawson, *On the global convergence of Halley's iteration formula*, Numer. Math., 24 (1975), 133-135.
- [3] E.N. Laguerre, *Oeuvres de Laguerre*, Vol. 1, pp. 87-103.
- [4] A.M. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations*, Second edition, Academic Press, New York and London, 1966.
- [5] D. M. Simeunović, *On a process for obtaining iterative formulas of higher order for roots of equations*, Anal. Num. Theor. Approx., 24 (1995), 225-229.
- [6] D. M. Simeunović, *A procedure for obtaining iterative formulas of higher order*, Math. Moravica, Vol. 3 (1999), 67-75.
- [7] И.С. Березин, Н.П. Житков, *Методы вычислений*, том II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1960.

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ
MIKE ALASA 8
11000 BELGRADE
SERBIA

A Procedure for Obtaining a Family of Iterative Formulas for Finding Zeros of Functions

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ

ABSTRACT. In this paper a family of iterative formulas for finding zeros of functions is obtained. The family includes the Laguerre method. All the methods of the family are cubically convergent for a simple zero. The superior behavior of Laguerre method when starting from the point x_k for which $|x_k|$ is large, is also explained.

In this paper for finding the real simple zero of the function $f(x)$ we use the function

$$(1) \quad F(x) = \frac{f(x)}{(x+c)^s},$$

where c and s ($s \neq 0$) are real parameters, because the zero of $F(x)$ is also the zero of $f(x)$.

For finding a real simple zero r of the function $F(x)$ we apply the Newton method (method of the tangents)

$$(2) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

with the condition

$$(3) \quad F''(x_k) = 0,$$

where x_k is the approximative value of the zero r of the function $F(x)$, that is, the zero r of the function $f(x)$.

From (1) we obtain

$$(4) \quad F'(x) = \frac{(x+c)f'(x) - sf(x)}{(x+c)^{s+1}},$$

$$(5) \quad F''(x) = \frac{(x+c)^2 f''(x) - 2s(x+c)f'(x) + s(s+1)f(x)}{(x+c)^{s+2}}.$$

The condition (3) reduces to equation

$$(6) \quad (x_k+c)^2 f''(x_k) - 2s(x_k+c)f'(x_k) + s(s+1)f(x_k) = 0,$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 65H05.

Key words and phrases. Iterative formulas, approximative solutions of equations.

where x_k is the approximative value of the zero r of the function $f(x)$.

From equation (6) on obtain

$$(7) \quad x_k + c = \frac{sf'(x_k) \pm \sqrt{s^2(f'(x_k))^2 - s(s+1)f(x_k)f''(x_k)}}{f''(x_k)},$$

that is

$$(8) \quad x_k + c = \frac{s(s+1)f(x_k)}{sf'(x_k) \mp \sqrt{s^2(f'(x_k))^2 - s(s+1)f(x_k)f''(x_k)}}.$$

From (1) and (4) we obtain

$$(9) \quad \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{sf(x_k)}{x_k + c}}.$$

If $x_k + c$ from (8) we put in (9) we obtain

$$\frac{F(x_k)}{F'(x_k)} = \frac{(s+1)f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{s^2(f'(x_k))^2 - s(s+1)f(x_k)f''(x_k)}}.$$

In this case the formula (2) reduces to

$$(10) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{(s+1)f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{s^2(f'(x_k))^2 - s(s+1)f(x_k)f''(x_k)}},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

The formula (10) represents one family of iterative formulas for finding a real simple zero of the function $f(x)$.

All the methods of the family (10) are cubically convergent for a simple zero of the function $f(x)$.

The asymptotic error constant for family (10) is

$$(11) \quad C_3 = \frac{3\left(1 - \frac{1}{s}\right)(f''(r))^2 - 4f'(r)f'''(r)}{24(f'(r))^2}.$$

For $s = \frac{1}{\alpha}$ from (10) on obtain the family

$$(12) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{(\alpha+1)f(x_k)}{\alpha f'(x_k) \pm \sqrt{(f'(x_k))^2 - (\alpha+1)f(x_k)f''(x_k)}},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

The family (12) was derived by Eldon Hansen and Merrell Patrick in [2].

Now we consider the real polynomial

$$(13) \quad P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

whose zeros are all real and different.

For $s = n - 1$ and $f(x) = P(x)$, the function (1) reduces to

$$(14) \quad F(x) = \frac{P(x)}{(x+c)^{n-1}}.$$

In this case the iterative formula (10) reduces to the Laguerre formula [1], for $k = 0, 1, 2, \dots$

$$(15) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{nP(x_k)}{P'(x_k) \pm \sqrt{(n-1)^2(P'(x_k))^2 - n(n-1)P(x_k)P''(x_k)}}$$

We can write (15) in the form

$$(16) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)} \cdot \frac{n}{1 \pm (n-1) \sqrt{1 - \frac{n}{n-1} \frac{P(x_k)P''(x_k)}{(P'(x_k))^2}}},$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

As we can see, the Laguerre formula (15), respectively formula (16) represent the Newton method (the method of tangents) applied to function (14), with the condition (3), respectively condition (6), which now reduces to condition

$$(17) \quad (x_k + c)^2 P''(x_k) - 2(n-1)(x_k + c)P'(x_k) + n(n-1)P(x_k) = 0,$$

where x_k is the approximative value of the zero r of the polynomial $P(x)$.

For $s = n - 1$ and $f(x) = P(x)$ from (7) we obtain

$$(18) \quad c = \frac{(n-1)P'(x_k) - x_k P''(x_k) \pm \sqrt{(n-1)^2(P'(x_k))^2 - n(n-1)P(x_k)P''(x_k)}}{P''(x_k)}$$

If we put in (18) the corresponding values for $P(x_k)$, $P'(x_k)$ and $P''(x_k)$ obtained from (13), then for large $|x_k|$ we have

$$(19) \quad c = \frac{a_1}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{n}\right)^2 - \frac{2a_2}{n(n-1)}} + O\left(\frac{1}{x_k}\right).$$

For $|x_k| = \infty$ from (19) for c we obtain

$$(20) \quad c_a = \frac{a_1}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{n}\right)^2 - \frac{2a_2}{n(n-1)}}.$$

The tangent of the curve (14) at the point $|x_k| = \infty$ is its asymptote whose equation is

$$(21) \quad y = x + a_1 - (n-1)c_a,$$

because $c = c_a$ for $|x_k| = \infty$.

According to (20) the equation (21) reduces to

$$(22) \quad y = x + \frac{a_1}{n} \mp (n-1) \sqrt{\left(\frac{a_1}{n}\right)^2 - \frac{2a_2}{n(n-1)}}.$$

The intersection by the straight line (22) on the x -axis is the point

$$(23) \quad x_a = -\frac{a_1}{n} \pm (n-1) \sqrt{\left(\frac{a_1}{n}\right)^2 - \frac{2a_2}{n(n-1)}}.$$

We have two points on x -axis:

$$(24) \quad x_a^- = -\frac{a_1}{n} - (n-1) \sqrt{\left(\frac{a_1}{n}\right)^2 - \frac{2a_2}{n(n-1)}}$$

and

$$(25) \quad x_a^+ = -\frac{a_1}{n} + (n-1) \sqrt{\left(\frac{a_1}{n}\right)^2 - \frac{2a_2}{n(n-1)}}.$$

If all zeros of polynomial (13) are real, it is known that they lie on x -axis between x_a^- and x_a^+ .

The tangent of the curve (14) at the point x_k for large $|x_k|$ intersects with the x -axis at the point

$$x_t = -\frac{a_1}{n} \pm (n-1) \sqrt{\left(\frac{a_1}{n}\right)^2 - \frac{2a_2}{n(n-1)}} + O\left(\frac{1}{x_k}\right),$$

where for c we used the relation (19).

We can show the above result in the form:

If the initial approximative value for zero r of the polynomial (13) takes value x_k for large $|x_k|$, then in the first following step of Laguerre formula (15), respectively (16), we obtain the value

$$(26) \quad \begin{aligned} x_{k+1} = x_t &= -\frac{a_1}{n} \pm (n-1) \sqrt{\left(\frac{a_1}{n}\right)^2 - \frac{2a_2}{n(n-1)}} + O\left(\frac{1}{x_k}\right) \\ &\approx -\frac{a_1}{n} \pm (n-1) \sqrt{\left(\frac{a_1}{n}\right)^2 - \frac{2a_2}{n(n-1)}}, \end{aligned}$$

that is the value which is relatively close to the value of its largest, also the smallest zero of polynomial (13).

This way, we give an explanation of known characteristics of Laguerre formula (15), respectively (16).

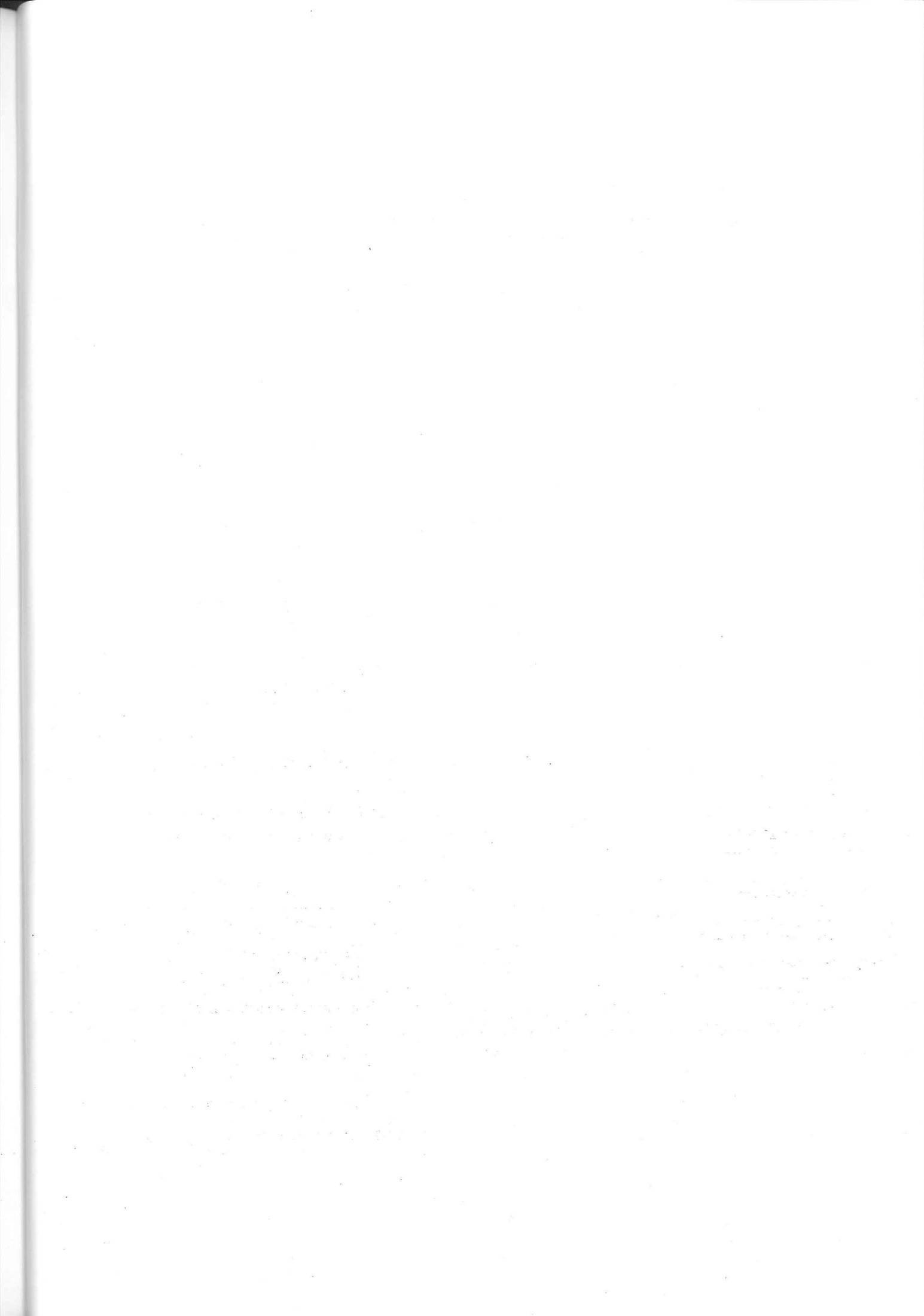
It is known that the Laguerre method converges globally and monotonically to roots of polynomials if all the roots are real and different.

The Laguerre method (16) is obtained also in [3] as a particular case of a family of iterative formulas.

REFERENCES

- [1] E.N. Laguerre, *Oeuvres de Laguerre*, Vol. 1, Paris 1898, 87-103.
- [2] E.Hansen, M. Patrick, *A family of root finding methods*, Numer. Math. 27(1977), 257-269.
- [3] D.M. Simeunović, *A procedure for obtaining a family of iterative formulas of higher order*, Math. Moravica 13-2(2009), 23-26.

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ
MIKE ALASA 8
11000 BELGRADE
SERBIA



A remark on the Upper Bounds of the Moduli of the Roots of Algebraic Equations

DRAGOMIR M. SIMŠUNOVIĆ

ABSTRACT. In this paper we obtain one upper bound of the moduli of the roots of the algebraic equations.

The bounds of the moduli of the roots of algebraic equations were researched by many authors (see e.g. [1,2,3,4]).

For the algebraic equation

$$(1) \quad z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

let

$$(2) \quad |a_k| = A_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

In this paper, for the equation (1) the following theorem is proved.

Theorem. Let C_k , $k = 1, 2, \dots, n$ be positive parameters for which

$$(3) \quad (C_1 + A_1)^2 - 4C_2 \geq 0; \quad (2C_k + A_k)^2 - 4C_{k-1}C_{k+1} \geq 0; \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Then

$$(4) \quad R = \max \left(\begin{array}{l} \frac{C_1 + A_1 + \sqrt{(C_1 + A_1)^2 - 4C_2}}{2}, \\ \frac{2C_k + A_k + \sqrt{(2C_k + A_k)^2 - 4C_{k-1}C_{k+1}}}{2C_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1; \\ \frac{C_n + A_n}{C_{n-1}} \end{array} \right)$$

is one upper bound for the moduli of the roots of the equation (1).

Proof. Let $z = re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) be the root of the equation (1), where

$$(5) \quad |z| = r.$$

Taking into account (2) and (5), from (1) we obtain the inequality

$$(6) \quad r^n \leq A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \dots + A_{n-1} r + A_n.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 12D10.

Key words and phrases. Roots of algebraic equations, upper bounds for roots moduli.

Let R be a positive number for which

$$(7) \quad R^n \geq A_1 R^{n-1} + A_2 R^{n-2} + \dots + A_{n-1} R + A_n.$$

Then, according to Cauchy's theorem (see [1], p. 122) for the moduli of the roots of the equation (1) we have the following relation

$$(8) \quad r \leq R.$$

Let the parameters $C_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ satisfy the following inequalities

$$(9) \quad \begin{cases} R^n - C_1 R^{n-1} + C_2 R^{n-2} \geq A_1 R^{n-1} \\ C_1 R^{n-1} - 2C_2 R^{n-2} + C_3 R^{n-3} \geq A_2 R^{n-2} \\ \vdots \\ C_{n-2} R^2 - 2C_{n-1} R + C_n \geq A_{n-1} R \\ C_{n-1} R - C_n \geq A_n. \end{cases}$$

The sum of all inequalities in (9) gives the inequality (7).

The inequalities (9) are satisfied for

$$(10) \quad R \geq \frac{C_1 + A_1 + \sqrt{(C_1 + A_1)^2 - 4C_2}}{2},$$

$$(11) \quad R \geq \frac{2C_k + A_k + \sqrt{(2C_k + A_k)^2 - 4C_{k-1}C_{k+1}}}{2C_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$(12) \quad R \geq \frac{C_n + A_n}{C_{n-1}}.$$

The relations (10), (11) and (12) are satisfied for R represented by (4), which completes the proof of the theorem, from whence follows the relation (8). \square

By giving the parameters C_k , $k = 1, 2, \dots, n$ different positive values, we obtain from (4) the particular results.

For

$$(13) \quad C_k = k + \sqrt{5}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

and in case that

$$(14) \quad A_k \leq k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

having in mind that

$$3k + k\sqrt{5} + 2 + 2\sqrt{5} = (k-1 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}),$$

we obtain the Montel's result from (4)

$$(15) \quad R = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Remark. The result (15) also holds if

$$A_k \leq k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

and

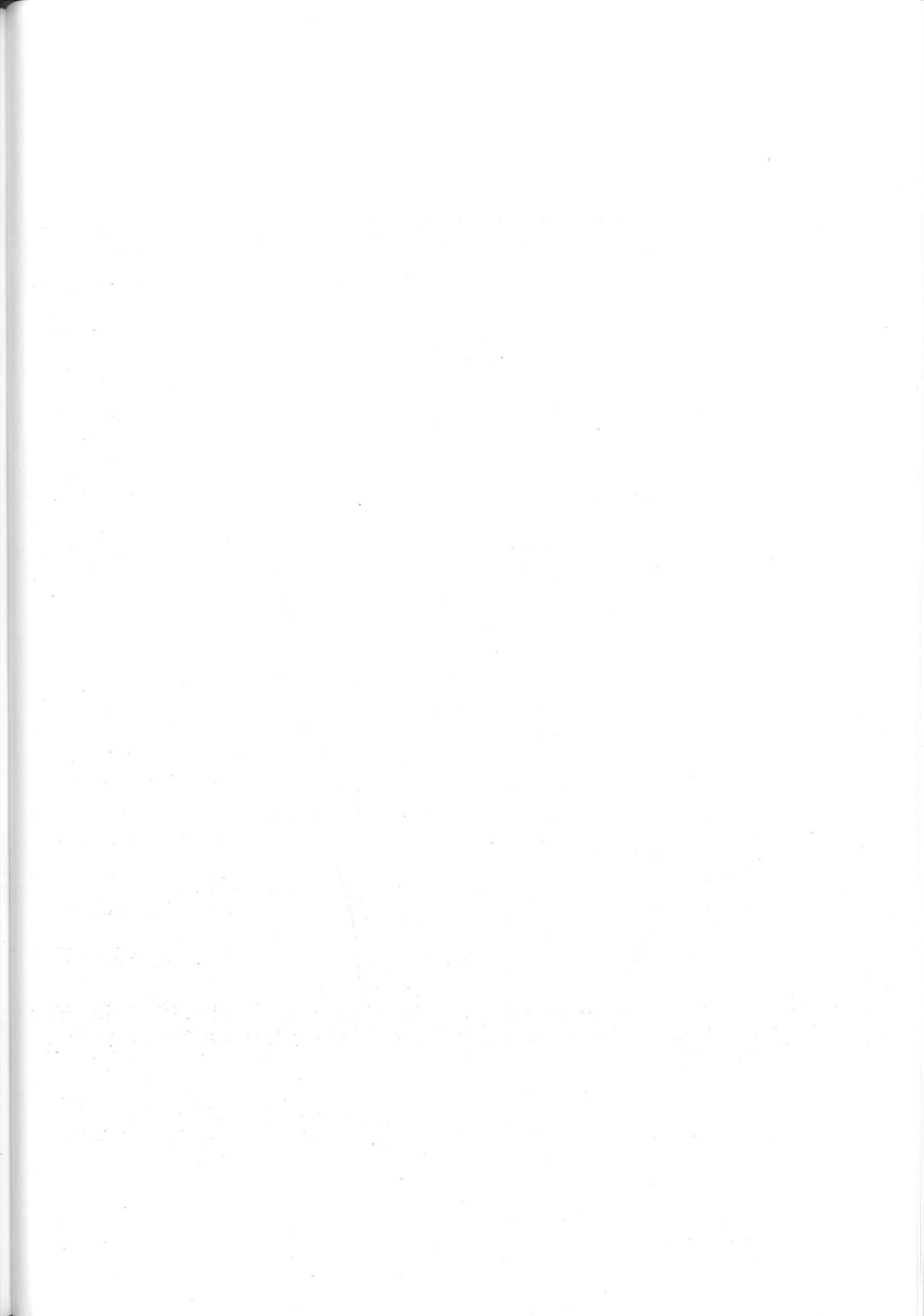
$$A_n \leq 1 + \frac{(1 + \sqrt{5})n}{2}.$$

In this paper the result (15) is obtained without using the infinite series.

REFERENCES

- [1] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1966.
- [2] S. Zervos, *Aspects modernes de la localisation des zéros des polynômes d'une variable*, Ann. Sci. École Norm. Sup., (3) 77(1960), 303-410.
- [3] P. Montel, *Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynômes*, Comment. Math. Helv., 7(1934-35), 173-200.
- [4] D. Marković, *Granice korena algebarskih jednačina*, Srpska Kraljevska Akademija, Glas CLXXXI, prvi razred 90, A. Matematičke nauke, Beograd 1939, 117-130.

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ
MIKE ALASA 8
11000 BELGRADE
SERBIA



A Note on the Zeros of One Form of Composite Polynomials

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ

ABSTRACT. In this paper we consider one form of composite polynomials. Several relations concerning their zeros are obtained.

Let $P(z)$ be a polynomial

$$(1) \quad P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n, \quad a_n \neq 0,$$

whose zeros z_1, z_2, \dots, z_n are arranged so that

$$(2) \quad |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$$

and a polynomial

$$(3) \quad Q(z) = P(z) - c_kz^k$$

where k is a fixed integer ($1 \leq k \leq n$), c_k is an arbitrary constant and it holds that $c_n \neq a_n$.

Let u_1, u_2, \dots, u_n be the zeros of the polynomial $Q(z)$ arranged so that

$$(4) \quad |u_1| \leq |u_2| \leq \dots \leq |u_n|.$$

Then:

$$(A) \quad |P(u_1)| \leq |P(u_2)| \leq \dots \leq |P(u_n)|.$$

$$(B) \quad |Q(z_1)| \leq |Q(z_2)| \leq \dots \leq |Q(z_n)|.$$

(C) Besides every zero u_i of the polynomial $Q(z)$ there exists at least one zero z_j of the polynomial $P(z)$ such that

$$(5) \quad |z_j - u_i| \leq \left(\left| \frac{c_k}{a_n} \right| |u_i|^k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\left| \frac{c_k}{a_n} \right| M_q^k \right)^{\frac{1}{n}},$$

where u_q is the upper bound of the moduli of zeros of the polynomial $Q(z)$.

(D) Besides every zero z_i of the polynomial $P(z)$ there exists at least one zero u_s of the polynomial $Q(z)$ such that

$$(6) \quad |u_s - z_i| \leq \left(\left| \frac{c_k}{a_n} \right| |z_i|^k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\left| \frac{c_k}{a_n} \right| M_p^k \right)^{\frac{1}{n}},$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 12D10.

Key words and phrases. Roots of algebraic equations, upper bounds for roots moduli.

where u_p is the upper bound of the moduli of zeros of the polynomial $P(z)$.

Before we give proofs of (A)–(D), we represent polynomials $P(z)$ and $Q(z)$ in the following form

$$(7) \quad P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

$$(8) \quad Q(z) = a_n(z - u_1)(z - u_2) \cdots (z - u_n).$$

Proof (A). From the equation (7), it follows that

$$P(u_i) = c_k u_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

that is

$$(9) \quad |P(u_i)| = |c_k| |u_i|^k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

wherefrom, because of (4), we conclude that (A) holds.

Proof (B). From the equation (3), it follows that

$$Q(z_i) = -c_k z_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

that is

$$(10) \quad |Q(z_i)| = |c_k| |z_i|^k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

wherefrom, because of (2), we conclude that (A) holds.

Proof (C). The equation (9), according to (7), is reduced to the equation

$$(11) \quad |a_n| |u_i - z_1| |u_i - z_2| \cdots |u_i - z_n| = |c_k| |u_i|^k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Let z_j be a zero of the polynomial $P(z)$ that is closest to the zero u_i of the polynomial $Q(z)$. Then, from (11) we get

$$|a_n| |u_i - z_j|^n \leq |c_k| |u_i|^k,$$

wherefrom (C) follows.

Proof (D). The equation (10), according to (8), is reduced to the equation

$$(12) \quad |a_n| |z_i - u_1| |z_i - u_2| \cdots |z_i - u_n| = |c_k| |z_i|^k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Let u_s be a zero of the polynomial $Q(z)$ that is closest to the zero z_i of the polynomial $P(z)$. Then, from (12) we get

$$|a_n| |z_i - u_s|^n \leq |c_k| |z_i|^k,$$

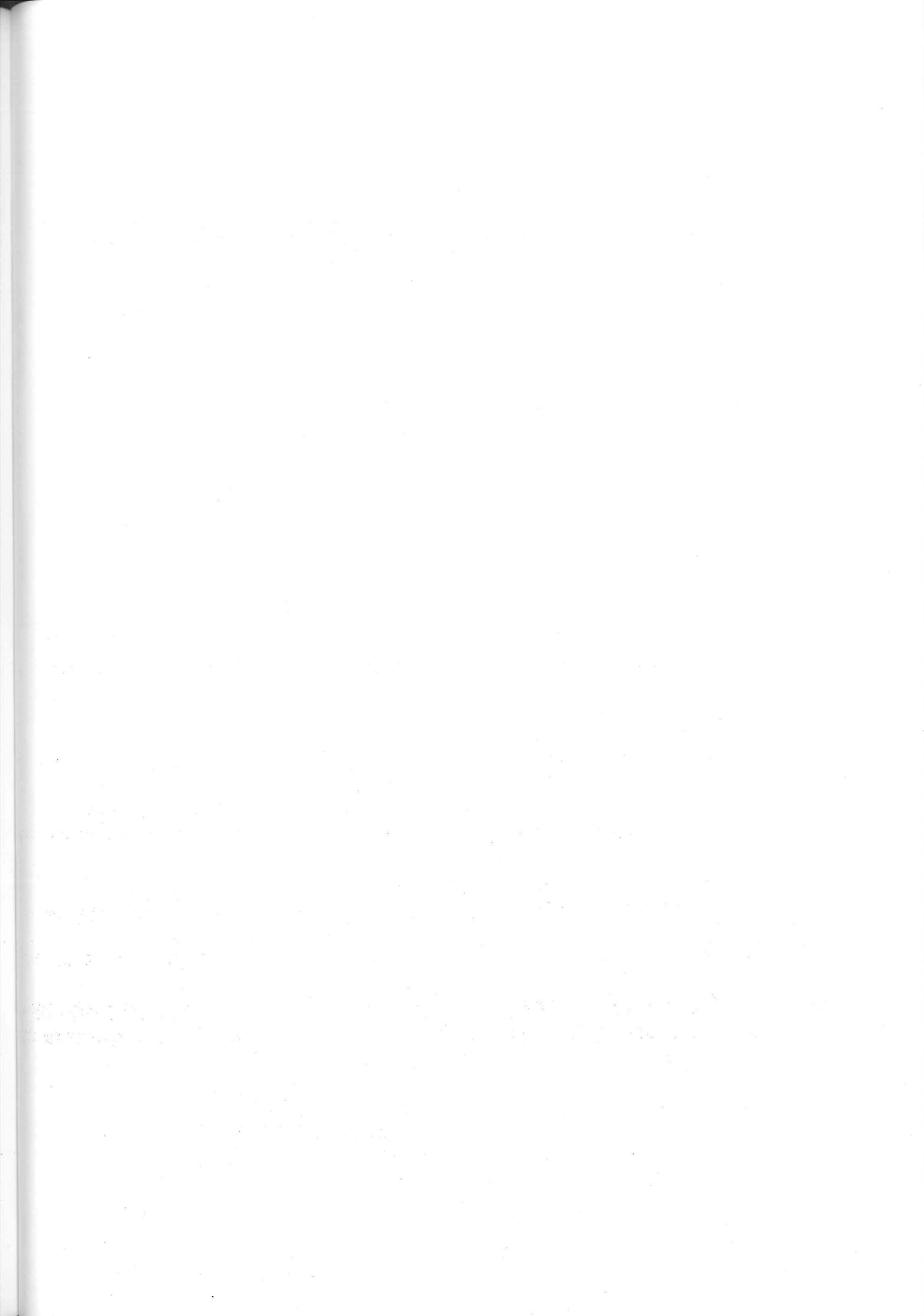
wherefrom (D) follows.

The case where $k = 0$ and $c_0 = c$ is given in [1, p. 80]. The case where $k = n$ and $c_n = a_n$ is given in [1, p.80], and also in [2] and [3].

REFERENCES

- [1] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 2005.
- [2] G. Szegő, *Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen*, Math. Zeit., Vol. 13, 1922, 28-55.
- [3] D. M. Simeunović, *Sur le cercle qui contient au moins un zéro d'un polynôme et les questions qui s'y rattachent*, Mat. Vesnik, Vol. 5, No. 20, 1968, 339-342.

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ
MIKE ALASA 8
11000 BELGRADE
SERBIA



A Remark on One Family of Iterative Formulas

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ

ABSTRACT. In this paper we obtain one family of iterative formulas of the second order for finding zeros of a given function $F(x)$.

In this paper, starting from the Newton's iterative formula

$$(1) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

which we write in the form

$$(2) \quad x_{k+1} = x_k \left(1 - \frac{F(x_k)}{x_k F'(x_k)} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

we obtain a family of iterative formulas of the second order.

If, instead of

$$1 - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)},$$

we put

$$\left(1 - \frac{F(x_k)}{s x_k F'(x_k)} \right)^s,$$

in formula (2), where $s \neq 0$ is a real parameter, we get an iterative formula

$$(3) \quad x_{k+1} = x_k \left(1 - \frac{F(x_k)}{s x_k F'(x_k)} \right)^s, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

The expression (3) represents one family of iterative formulas, i.e. one iterative method, of the second order.

If we now consider different real values for the parameter s , we obtain particular iterative formulas from (3).

For $s = 1$, (3) reduces to Newton's method (2).

For finding zeros of the polynomial

$$(4) \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 65H05.

Key words and phrases. Iteration formulas, Approximate solutions of equations.

of the degree n , we take $s = \frac{1}{n}$ if n is odd. In this case, the formula (3) reduces to

$$(5) \quad x_{k+1} = x_k \left(1 - \frac{nP(x_k)}{x_k P'(x_k)} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

If n is even, then we take $s = \frac{1}{n-1}$. In that case, (3) becomes

$$(6) \quad x_{k+1} = x_k \left(1 - \frac{(n-1)P(x_k)}{x_k P'(x_k)} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

The location of the zeros of the polynomial (4) in the complex plane, depending on its coefficients a_k , where $k = 0, 1, 2, \dots, n$, were studied by many authors (see, e.g. [1]). Here we cite two results due to Cauchy [1, pp. 122-123] and a result due to P. Montel [2] which are, respectively, as follows:

(R_1) All the zeros of the polynomial (4) lie in the circle

$$(7) \quad |x| \leq r,$$

where r is a positive root of the equation

$$(8) \quad P_1(x) = |a_n|x^n - |a_{n-1}|x^{n-1} - \dots - |a_1|x - |a_0| = 0.$$

(R_2) All the zeros of the polynomial (4) lie in the region

$$(9) \quad |x| < 1 + A,$$

where

$$(10) \quad A = \max \left| \frac{a_k}{a_n} \right|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

(R_3) All the zeros of the polynomial (4) lie in the region

$$(11) \quad |x| < 2M,$$

where

$$(12) \quad M = \max \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right|^{\frac{1}{k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

For determining the upper bound for the moduli of zeros of the polynomial (4), we can use the formula

$$(13) \quad x_{k+1} = x_k \left(1 - \frac{nP_1(x_k)}{x_k P_1'(x_k)} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

The method (13), for $x_0 > 1 + A$, converges monotonically to r .

Example. We determine the upper bound for the moduli of zeros of the polynomial

$$P(x) = x^5 - 5x + 22$$

using the formula (13), where

$$P_1(x) = x^5 - 5x - 22,$$

for $x_0 > 1 + A$.

Taking $x_0 = 30$, we obtain

Newton's method

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P_1(x_k)}{P_1'(x_k)}$$

$$x_0 = 30$$

$$x_1 = 24.00003506$$

$$\vdots$$

$$x_5 = 7.866439195$$

$$\vdots$$

$$x_{10} = 2.675267821$$

$$\vdots$$

$$x_{14} = 2.000013231$$

$$x_{15} = 2.000000000$$

Method using formula (13)

$$x_{k+1} = x_k \left(1 - \frac{5P_1(x_k)}{x_k P_1'(x_k)} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$x_0 = 30$$

$$x_1 = 2.69437266$$

$$x_2 = 2.017339895$$

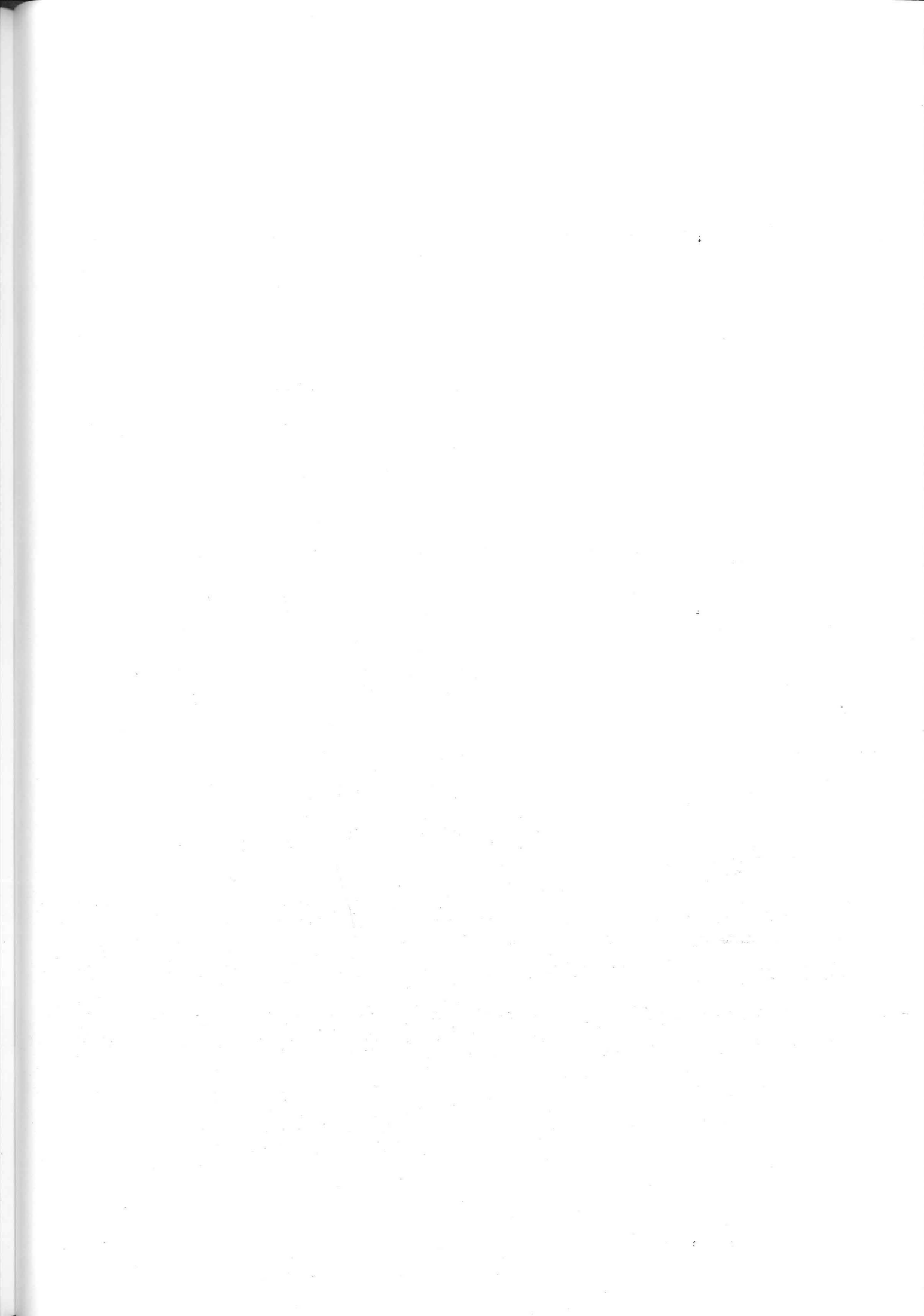
$$x_3 = 2.000019658$$

$$x_4 = 2.000000000$$

REFERENCES

- [1] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 2005.
 [2] P. Montel, *Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynômes*, Comment. Math. Helv., Vol. 7, 1934-35, 178-200.

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ
 MIKE ALASA 8
 11000 BELGRADE
 SERBIA



A Remark on One Iterative Process for Finding the Roots of Equations

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ

ABSTRACT. In this paper we consider the convergence of one iterative formula for finding the roots of equations.

It is well known that, if the equation

$$(1) \quad x = f(x)$$

has only one root $x = r$ in the interval $[a, b]$, and if the derivative $f'(x)$ of the function $f(x)$ satisfies the condition

$$(2) \quad \max |f'(x)| = M < 1, \quad \text{for } x \in [a, b],$$

then the iterative method

$$(3) \quad x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

converges to the root $x = r$ of the equation (1), where the initial value x_0 can be any number from the interval $[a, b]$. The convergence of the process (3) is more rapid if M has a small value.

In this paper we consider the values $f'(a)$ and $f'(b)$ and use it to determine $\max |f'(x)|$.

Let $f'(x)$ be a negative increasing function. Therefore, we have

$$(4) \quad f'(a) \leq f'(x) \leq f'(b) < 0, \quad \text{for } x \in [a, b].$$

From (4), we see that

$$(5) \quad \max |f'(x)| = |f'(a)|$$

and

$$(6) \quad 1 - f'(a) > 0.$$

In (5), we have either

$$(7) \quad \max |f'(x)| = |f'(a)| < 1$$

or

$$(8) \quad \max |f'(x)| = |f'(a)| \geq 1.$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 65H05.

Key words and phrases. Iteration formulas, approximate solutions of equations.

In both of these cases, we write the equation (1) in the form

$$(9) \quad x = \frac{1}{1 - f'(a)} (f(x) - f'(a)x),$$

that is, in the form

$$(10) \quad x = f_1(x),$$

where

$$(11) \quad f_1(x) = \frac{1}{1 - f'(a)} (f(x) - f'(a)x).$$

From (11) we obtain

$$(12) \quad f_1'(x) = \frac{1}{1 - f'(a)} (f'(x) - f'(a)).$$

As $f'(x)$ is an increasing function, considering (6), we conclude from (12) that the function $f_1'(x)$ is also increasing.

From (12) we obtain

$$(13) \quad f_1'(a) = 0, \quad f_1'(b) = \frac{f'(b) - f'(a)}{1 - f'(a)} < \frac{-f'(a)}{1 - f'(a)} < 1.$$

From (13) follows that

$$(14) \quad \max |f_1'(x)| = \frac{f'(b) - f'(a)}{1 - f'(a)} < 1.$$

Let $f'(x)$ be a negative decreasing function. Therefore, we have

$$(15) \quad 0 > f'(a) \geq f'(x) \geq f'(b), \quad \text{for } x \in [a, b].$$

From (15), we see that

$$(16) \quad \max |f'(x)| = |f'(b)|$$

and

$$(17) \quad 1 - f'(b) > 0.$$

In (16), we have either

$$(18) \quad \max |f'(x)| = |f'(b)| < 1$$

or

$$(19) \quad \max |f'(x)| = |f'(b)| \geq 1.$$

In both of these cases, we write the equation (1) in the form

$$(20) \quad x = \frac{1}{1 - f'(b)} (f(x) - f'(b)x),$$

that is, in the form

$$(21) \quad x = f_2(x),$$

where

$$(22) \quad f_2(x) = \frac{1}{1 - f'(b)} (f(x) - f'(b)x).$$

From (22) we obtain

$$(23) \quad f'_2(x) = \frac{1}{1 - f'(b)} (f'(x) - f'(b)).$$

As $f'(x)$ is a decreasing function, considering (17), we conclude from (23) that the function $f'_2(x)$ is also decreasing.

From (23) we obtain

$$(24) \quad f'_2(a) = \frac{f'(a) - f'(b)}{1 - f'(b)} < \frac{-f'(b)}{1 - f'(b)} < 1, \quad f'_2(b) = 0.$$

From (24) follows that

$$(25) \quad \max |f'_2(x)| = \frac{f'(a) - f'(b)}{1 - f'(b)} < 1.$$

If the function $f'(x)$ satisfies the condition (4), having (9) in mind, we can use the following iterative process for finding the root $x = r$ of the equation (1):

$$(26) \quad x_{k+1} = \frac{1}{1 - f'(a)} (f(x_k) - f'(a)x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

when $\max |f'(x)| < 1$ and when $\max |f'(x)| \geq 1$.

If the function $f'(x)$ satisfies the condition (15), having (20) in mind, we can use the following iterative process for finding the root $x = r$ of the equation (1):

$$(27) \quad x_{k+1} = \frac{1}{1 - f'(b)} (f(x_k) - f'(b)x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

when $\max |f'(x)| < 1$ and when $\max |f'(x)| \geq 1$.

In [1, p. 145], the equation

$$(28) \quad F(x) = 0$$

is considered, which has the root $x = r$ in the interval $[a, b]$ in the case

$$(29) \quad 0 < m_1 \leq F'(x) \leq M_1, \quad \text{for } x \in [a, b],^1$$

where we can take

$$(30) \quad m_1 = F'(a), \quad M_1 = F'(b).$$

Now the condition (29) is reduced to

$$(31) \quad F'(a) \leq F'(x) \leq F'(b).$$

¹If $F'(x) < 0$ instead of equation $F(x) = 0$ we consider the equation $-F(x) = 0$.

In this case the equation (28) can be written in the form

$$(32) \quad x = x - \frac{1}{F'(b)} F(x),$$

that is, in the form

$$x = \varphi(x)$$

where

$$(33) \quad \varphi(x) = x - \frac{1}{F'(b)} F(x),$$

wherefrom

$$(34) \quad \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{F'(b)} F'(x).$$

Having (30) and (31) in mind, it follows from (34) that

$$(35) \quad \max |\varphi'(x)| = 1 - \frac{F'(a)}{F'(b)} = q < 1.$$

Example 1. *The equation*

$$(a) \quad F(x) = 8x^3 - 6x - 3 = 0$$

has a root $x = r \in [1, 2] = [a, b]$.

We can write the equation (a) in the form

$$(a_1) \quad x = \frac{3}{4x} + \frac{3}{8x^2},$$

that is, in the form

$$x = f(x),$$

where

$$(a_2) \quad f(x) = \frac{3}{4x} + \frac{3}{8x^2}.$$

From (a₂) we obtain

$$(a_3) \quad f'(x) = -\frac{3}{4x^2} - \frac{3}{4x^3}.$$

For $x \in [1, 2] = [a, b]$ the function $f'(x)$ is negative and increasing, and it holds that

$$(a_4) \quad f'(1) = f'(a) = -\frac{3}{2}, \quad f'(2) = f'(b) = -\frac{9}{32},$$

which means that we can apply the formula (26) for finding the root $x = r \in [1, 2]$ of the equation (a₁).

According to (5) and (a₄), we have

$$(a_5) \quad \max |f'(x)| = |f'(1)| = |f'(a)| = \frac{3}{2} > 1.$$

Having (a₄) in mind, we obtain from (14)

$$(a_6) \quad \max |f_1(x)| = \frac{39}{80}.$$

From (a) we obtain

$$(a_7) \quad F'(x) = 24x^2 - 6,$$

wherefrom

$$(a_8) \quad F'(1) = F'(a) = 18, \quad F'(2) = F'(b) = 90,$$

which means that the condition (31) is satisfied.

For $x \in [1, 2] = [a, b]$ the function $F'(x)$ is increasing, and it holds that

$$(a_9) \quad F'(1) = F'(a) = 18, \quad F'(2) = F'(b) = 90.$$

The function $\varphi(x)$ in (34) is decreasing and having (a₉) in mind, we obtain from (34)

$$(a_{10}) \quad \max |\varphi'(x)| = \frac{4}{5}.$$

Now the formula (32) is reduced to

$$(a_{11}) \quad x = x - \frac{1}{90}F(x),$$

from which follows the iterative process

$$(a_{12}) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{1}{90}(8x_k^3 - 6x_k - 3), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Having (a₂) and (a₄) in mind, the iterative process (26) is reduced to

$$(a_{13}) \quad x_{k+1} = \frac{3}{5} \left(x_k + \frac{1}{2x_k} + \frac{1}{4x_k^2} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

which converges more rapidly than the process (a₁₂) for finding the root $x = r \in [1, 2]$ of the equation (a), having (a₅) and (a₁₀) in mind. The initial value x_0 can be any number from the interval $[1, 2]$.

REFERENCES

- [1] Б.П. Демидович, И.А. Марон, Основы вычислительной математики (in Russian), Наука, Москва, 1970.
 [2] Đuro Kurepa, *Viša Algebra*, 2. knjiga, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1970.

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ
 MIKE ALASA 8
 11000 BELGRADE
 SERBIA



On the Location of Zeros of Some Polynomials

DRAGOMIR M. ŠIMEUNOVIĆ

ABSTRACT. In this paper we determine the regions in the complex plane containing zeros of some polynomials.

In this paper we consider the polynomial

$$(1) \quad P(z) = z^n + a_p z^{n-p} + a_{p+1} z^{n-p-1} + \dots + a_n, \quad a_p \neq 0, \quad p < n.$$

The location of zeros of the polynomials in the complex plane, depending on its coefficients was studied by many authors. Here we cite a result obtained by P. Montel [1] and a result by H. Guggenheimer [2] which are, respectively, as follows:

(R_1): All the zeros of the polynomial (1) are in the region

$$(2) \quad |z| < 2 \max |a_k|^{\frac{1}{k}}, \quad p \leq k \leq n.$$

(R_2): All the zeros of the polynomial (1) are in the region

$$(3) \quad |z| < r,$$

where $r > 1$ is the root of the equation

$$(4) \quad r^p - r^{p-1} - |a_q| = 0$$

and where

$$(5) \quad |a_q| = \max |a_k|, \quad p \leq k \leq n.$$

In this paper we prove the following theorem.

Theorem 1. *Let $c_k, p \leq k \leq n$ be the positive parameters, where*

$$(6) \quad A_c = \max \left(\frac{|a_k|}{c_k} \right), \quad p \leq k \leq n,$$

and

$$(7) \quad M_c = \max(c_k)^{\frac{1}{k}}, \quad p \leq k \leq n.$$

Then all zeros of the polynomial (1) are in the region

$$(8) \quad |z| < r_c M_c,$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 12D10.

Key words and phrases. Zeros of the polynomials, region of zeros.

where $r_c > 1$ is the root of the equation

$$(9) \quad r^p - r^{p-1} - A_c = 0.$$

Proof of Theorem 1. From (7) we have

$$c_k^{\frac{1}{k}} \leq M_c$$

that is

$$(10) \quad c_k \leq M_c^k, \quad p \leq k \leq n.$$

From (1), for $|z| > M_c$, having (6) and (10) in mind, we obtain

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z|^n \left(1 - \left(\frac{|a_p|}{|z|^p} + \frac{|a_{p+1}|}{|z|^{p+1}} + \dots + \frac{|a_n|}{|z|^n} \right) \right) \\ &= |z|^n \left(1 - \left(\frac{|a_p|}{c_p} \cdot \frac{c_p}{|z|^p} + \frac{|a_{p+1}|}{c_{p+1}} \cdot \frac{c_{p+1}}{|z|^{p+1}} + \dots + \frac{|a_n|}{c_n} \cdot \frac{c_n}{|z|^n} \right) \right) \\ &\geq |z|^n \left(1 - A_c \left(\frac{c_p}{|z|^p} + \frac{c_{p+1}}{|z|^{p+1}} + \dots + \frac{c_n}{|z|^n} \right) \right) \\ &> |z|^n \left(1 - A_c \left(\frac{M_c^p}{|z|^p} + \frac{M_c^{p+1}}{|z|^{p+1}} + \dots + \frac{M_c^n}{|z|^n} + \dots \right) \right) \\ &= |z|^n \left(1 - \frac{A_c M_c^p}{|z|^p} \left(1 + \frac{M_c}{|z|} + \left(\frac{M_c}{|z|} \right)^2 + \dots + \left(\frac{M_c}{|z|} \right)^{n-p} + \dots \right) \right) \\ &= |z|^n \left(1 - \frac{A_c M_c^p}{|z|^p - |z|^{p-1} M_c} \right), \end{aligned}$$

that is

$$(11) \quad |P(z)| > |z|^n \left(1 - \frac{A_c M_c^p}{|z|^p - |z|^{p-1} M_c} \right).$$

For

$$(12) \quad |z| \geq r_c M_c$$

from (11) we have $|P(z)| > 0$, that is $|P(z)| \neq 0$.

This means that all zeros of the polynomial (1) are in the region (8). \square

Taking different positive values for parameters c_k , we obtain several particular results from Theorem 1.

For

$$(13) \quad c_k = \frac{|a_k|}{2^{p-1}}, \quad p \leq k \leq n,$$

the following result from Theorem 1 is obtained:

(R_3): All zeros of the polynomial (1) are in the region

$$(14) \quad |z| < 2 \max \left(\frac{|a_k|}{2^{p-1}} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad p \leq k \leq n.$$

Proof of (R₃). Having (13) in mind, from (6) and (7) we obtain

$$(15) \quad A_c = 2^{p-1}$$

and

$$(16) \quad M_c = \max \left(\frac{|a_k|}{2^{p-1}} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad p \leq k \leq n.$$

In this case the equation (9) reduces to equation

$$(17) \quad r^p - r^{p-1} - 2^{p-1} = 0,$$

whose positive root is

$$(18) \quad r_s = 2$$

and region (3) reduces to region (14).

The region (14) for $p \geq 2$ is smaller than the region (2). For $p = 1$ the region (14) reduces to the region (2). \square

We demonstrate the other case by giving an example.

Example 1. *The zeros of the polynomial*

$$(19) \quad P(z) = z^5 - 8z^2 + 11z + 20,$$

where $p = 3$, according to result (R₂) are in the region

$$(20) \quad |z| < 3.1,$$

where $r > 1$ is the root of the equation

$$(21) \quad r^3 - r^2 - 20 = 0, \quad (3 < r < 3.1),$$

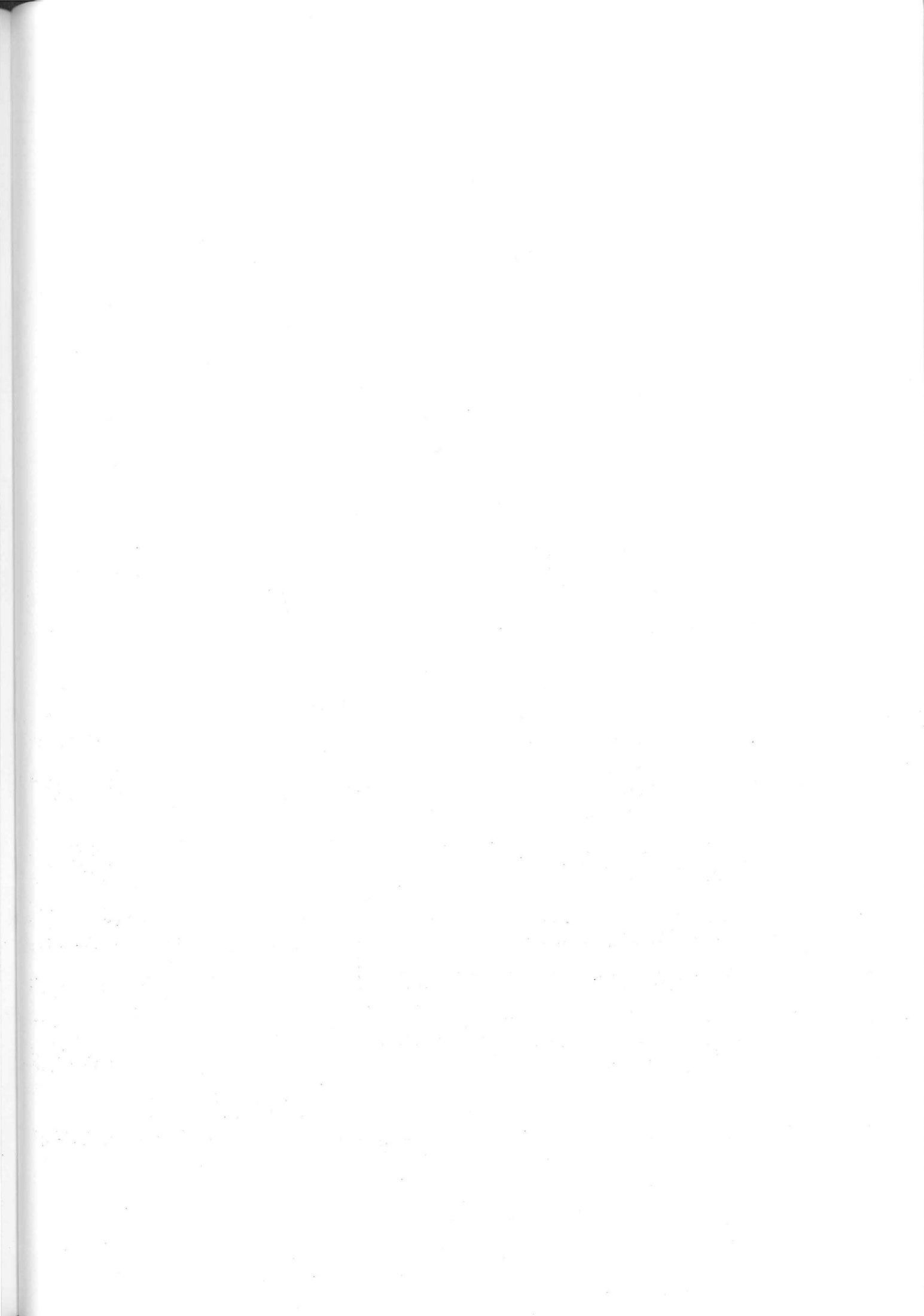
and from (14) follows that all zeros of the polynomial (19) are in the region

$$(22) \quad |z| < 2.76.$$

REFERENCES

- [1] P. Montel, *Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynomes*, Comment. Math. Helv., Vol. 7 (1934-35), 178-200.
- [2] H. Guggenheimer, *On a note by Q.G. Mohammad*, Amer. Math. Monthly, 71 (1964), 54-55.
- [3] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2005.

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ
MIKE ALASA 8
11000 BELGRADE
SERBIA



Acceleration of Convergence of One Iterative Method for Finding the Roots of Equations

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ

ABSTRACT. In this paper we consider two iterative methods which accelerate the finding of the roots of equations.

It is well known that, if the equation

$$(1) \quad x = f(x)$$

has only one root $x = r$ in the interval $[a, b]$, and if the derivative $f'(x)$ of the function $f(x)$ satisfies the condition

$$(2) \quad \max |f'(x)| = M < 1, \quad \text{for } x \in [a, b],$$

then the iterative method

$$(3) \quad x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

converges to the root $x = r$ of the equation (1), where the initial value x_0 can be any number from the interval $[a, b]$. The convergence of method (3) is more rapid if M has a small value.

In this paper we consider the values $f'(a)$ and $f'(b)$ and use it to determine $\max |f'(x)|$.

We consider two iterative methods for finding the root $x = r$ of the equation (1) in cases when

$$(4) \quad f'(a) \neq 0, \quad f'(b) \neq 0$$

$$(5) \quad \max |f'(x)| = M < 1$$

and when $f'(x)$ is increasing or decreasing.

If the conditions (4) and (5) are satisfied, then

$$(6) \quad |f'(a)| < 1 \quad \text{and} \quad |f'(b)| < 1.$$

We put

$$(7) \quad f'(a) = \alpha, \quad f'(b) = \beta.$$

Because of (6) and (7), we have

$$(8) \quad 1 - \alpha > 0 \quad \text{and} \quad 1 - \beta > 0.$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 65H05.

Key words and phrases. Iteration formulas, approximate solutions of equations.

If the function $f'(x)$ is increasing on the interval $[a, b]$, then we consider the following two cases

$$(C_1) \quad -1 < \alpha \leq f'(x) \leq \beta < 0,$$

$$(C_2) \quad 0 < \alpha \leq f'(x) \leq \beta < 1.$$

In these cases, we write the equation (1) in the form

$$(9) \quad x = \frac{1}{1-\alpha}(f(x) - \alpha x),$$

that is, in the form

$$(10) \quad x = f_1(x),$$

where

$$(11) \quad f_1(x) = \frac{1}{1-\alpha}(f(x) - \alpha x).$$

From (11) we obtain

$$(12) \quad f_1'(x) = \frac{1}{1-\alpha}(f'(x) - \alpha).$$

As $f'(x)$ is an increasing function, considering (8), we conclude from (12) that the function $f_1'(x)$ is also increasing.

For the case (C_1) , we have

$$(13) \quad \max |f'(x)| = |\alpha|.$$

Considering (7), we obtain from (12)

$$(14) \quad f_1'(a) = 0, \quad f_1'(b) = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} < \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} < |\alpha|.$$

From (14) we conclude that

$$(15) \quad \max |f_1'(x)| = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} < \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} < |\alpha|.$$

For the case (C_2) , we have

$$(16) \quad \max |f'(x)| = \beta.$$

Considering (7), we obtain from (12)

$$(17) \quad f'(a) = 0, \quad f'(b) = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha}.$$

From (17) we conclude that

$$(18) \quad \max |f_1'(x)| = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} < \beta.$$

When $f'(x)$ is decreasing, we consider the other two cases

$$(C_3) \quad 0 > \alpha \geq f'(x) \geq \beta > -1,$$

$$(C_4) \quad 1 > \alpha \geq f'(x) \geq \beta > 0.$$

In these cases, we write the equation (1) in the form

$$(19) \quad x = \frac{1}{1-\beta}(f(x) - \beta x),$$

that is, in the form

$$(20) \quad x = f_2(x),$$

where

$$(21) \quad f_2(x) = \frac{1}{1-\beta}(f(x) - \beta x).$$

From (21) we obtain

$$(22) \quad f_2'(x) = \frac{1}{1-\beta}(f'(x) - \beta).$$

As $f'(x)$ is a decreasing function, considering (8), we conclude from (22) that the function $f_2'(x)$ is also decreasing.

For the case (C_3) , we have

$$(23) \quad \max |f'(x)| = |\beta|.$$

In view of (7), we obtain from (22)

$$(24) \quad f_2'(a) = \frac{\alpha - \beta}{1 - \beta} < \frac{|\beta|}{1 + |\beta|} < |\beta|, \quad f_2'(b) = 0.$$

From (24) we conclude that

$$(25) \quad \max |f_2'(x)| = \frac{\alpha - \beta}{1 - \beta} < |\beta|.$$

For the case (C_4) , we have

$$(26) \quad \max |f'(x)| = \alpha.$$

In view of (7), we obtain from (22)

$$(27) \quad f_2'(a) = \frac{\alpha - \beta}{1 - \beta} < \alpha, \quad f_2'(b) = 0.$$

From (27) we conclude that

$$(28) \quad \max |f_2'(x)| = \frac{\alpha - \beta}{1 - \beta} < \alpha.$$

From the conditions (4), (5) and (7), as well as from (13), (15) and (16), (18), we see that

$$(29) \quad \max |f_1'(x)| < \max |f'(x)|$$

when $f'(x)$ is increasing, which satisfies (C_1) or (C_2) . Then, from (9) we obtain the iterative method

$$(30) \quad x_{k+1} = \frac{1}{1-\alpha}(f(x_k) - \alpha x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Analogously, from the conditions (4), (5) and (7), as well as from (23), (25) and (26), (28), we see that

$$(31) \quad \max |f_2'(x)| < \max |f'(x)|$$

when $f'(x)$ is decreasing, which satisfies (C_3) or (C_4) . Then from (19) we obtain the iterative method

$$(32) \quad x_{k+1} = \frac{1}{1-\beta} (f(x_k) - \beta x_k), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Because of (29) and (31), the method (30) or the method (32) converges more rapidly than the method (3).

We demonstrate the methods (31) and (32) on the following examples.

Example 1. *The equation*

$$(A) \quad x^3 - 8x + 5 = 0$$

has only one root $x = r$ in the interval $[2, 3]$.

We can write the equation (A) in the form

$$(A_1) \quad x = \frac{8}{x} - \frac{5}{x^2},$$

that is, in the form

$$(A_2) \quad x = f(x),$$

where

$$(A_3) \quad f(x) = \frac{8}{x} - \frac{5}{x^2}.$$

From (A_3) we obtain

$$(A_4) \quad f'(x) = -\frac{8}{x^2} + \frac{10}{x^3}.$$

On $[2, 3]$ the function $f'(x)$ is increasing, and

$$(A_5) \quad f'(a) = f'(2) = \alpha = -\frac{3}{4} = -0.75, \quad f'(b) = f'(3) = \beta = -\frac{14}{27},$$

which means that we can apply the formula (30) in the case (C_1) . According to (13), from (A_5) we have

$$\max |f'(x)| = |\alpha| = 0.75$$

and according to (15), we have from (A_5)

$$\max |f_1'(x)| = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} = 0.132275132.$$

Now, the formula (30) is reduced to

$$(A_6) \quad x_{k+1} = \frac{1}{1.75} \left(\frac{8}{x_k} - \frac{5}{x_k^2} + 0.75x_k \right), \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

and the formula (3) to

$$(A_7) \quad x_{k+1} = \frac{8}{x_k} - \frac{5}{x_k^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

The values x_k are listed in Table 1. Both formulas (A_6) and (A_7) start from the same initial value $x_0 = 3$.

TABLE 1.

Formula (A_6)	Formula (A_7)
$x_0 = 3$	$x_0 = 3$
$x_1 = 2.492063492$	$x_1 = 2.111111111$
$x_2 = 2.442362884$	$x_2 = 2.667590028$
$x_3 = 2.439477086$	$x_3 = 2.296323254$
$x_4 = 2.439320604$	$x_5 = 2.377364738$
$x_5 = 2.439312154$	$x_{10} = 2.446868841$
$x_6 = 2.439311698$	$x_{20} = 2.439422287$
$x_7 = 2.439311673$	$x_{30} = 2.439313292$
$x_8 = 2.439311672$	$x_{40} = 2.439311695$
$x_9 = 2.439311672$	$x_{49} = 2.439311671$
	$x_{50} = 2.439311672$
	$x_{51} = 2.439311672$

Example 2. The equation

$$(B) \quad x + e^x - 2 = 0$$

has only one root $x = r$ in the interval $[0, 0.8]$.

We can write the equation (B) in the form

$$(B_1) \quad x = \ln(2 - x),$$

that is, in the form

$$(B_2) \quad x = f(x),$$

where

$$(B_3) \quad f(x) = \ln(2 - x).$$

From (B_3) we obtain

$$(B_4) \quad f'(x) = \frac{1}{x - 2}.$$

On $[0, 0.8]$ the function $f'(x)$ is decreasing, and

$$(B_5) \quad f'(a) = f'(0) = \alpha = -\frac{1}{2}, \quad f'(b) = f'(0.8) = \beta = -\frac{5}{6},$$

which means that we can apply the formula (32) in the case (C_3). According to (23), from (B_5) we have

$$\max |f'(x)| = |\beta| = \frac{5}{6}$$

and according to (25), we have from (B_5)

$$\max |f_2'(x)| = \frac{\beta - \alpha}{1 - \beta} = 0.181818182.$$

Now, the formula (32) is reduced to

$$(B_6) \quad x_{k+1} = \frac{1}{11}(6 \ln(2 - x_k) + 5x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

and the formula (3) to

$$(B_7) \quad x_{k+1} = \ln(2 - x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

The values x_k are listed in Table 2. Both formulas (B_6) and (B_7) start from the same initial value $x_0 = 0.8$.

TABLE 2.

Formula (B_6)	Formula (B_7)
$x_0 = 0.8$	$x_0 = 0.8$
$x_1 = 0.463084485$	$x_1 = 0.182321557$
$x_2 = 0.444917036$	$x_2 = 0.597560106$
$x_3 = 0.44306896$	$x_3 = 0.338213501$
$x_4 = 0.442876765$
$x_5 = 0.442856732$	$x_5 = 0.400189062$
$x_6 = 0.442854644$
$x_7 = 0.442854426$	$x_{10} = 0.447472609$
$x_8 = 0.442854404$
$x_9 = 0.442854401$	$x_{20} = 0.442909554$
$x_{10} = 0.442854401$
	$x_{30} = 0.442853978$

	$x_{40} = 0.442854409$

	$x_{46} = 0.442854402$

	$x_{47} = 0.442854401$

	$x_{48} = 0.442854401$

REFERENCES

- [1] Б.П. Демидович, И.А. Марон, Основы вычислительной математики (in Russian), Наука, Москва, 1970.
- [2] Đuro Kurepa, *Viša Algebra*, 2. knjiga, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1970.

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ
MIKE ALASA 8
11000 BELGRADE
SERBIA

A Remark with Regard to Inequalities for Some Sums

DRAGOMIR M. ŠIMEUNOVIĆ

ABSTRACT. In this paper we consider some inequalities that are regarded to certain sums.

Inequalities that we shall use in this paper and that are proved in [1] are the following:

$$(1) \quad b^r - a^r \geq r(b-a)(ab)^{\frac{r-1}{2}}, \quad b > a > 0, r \geq 1$$

and

$$(2) \quad b^s - a^s \leq s(b-a)(ab)^{\frac{s-1}{2}}, \quad b > a > 0, 0 < s \leq 1.$$

If in the inequality (1) we put

$$(3) \quad b = \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2 + x^2 - \frac{1}{4}}, \quad a = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2 + x^2 - \frac{1}{4}}, \quad x \neq 0,$$

we shall get the inequality

$$\begin{aligned} & \frac{1}{((n - \frac{1}{2})^2 + x^2 - \frac{1}{4})^r} - \frac{1}{((n + \frac{1}{2})^2 + x^2 - \frac{1}{4})^r} \\ & \geq \frac{2nr}{((n^2 + x^2)^2 - n^2)^{\frac{r+1}{2}}} > \frac{2nr}{(n^2 + x^2)^{r+1}}, \end{aligned}$$

where summing for $n = 1, 2, \dots$, we get

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + x^2)^2} < \frac{1}{r(x^2)^r}, \quad r \geq 1, x \neq 0.$$

For $r = 1$, from (4) we obtain

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + x^2)^2} < \frac{1}{x^2}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 49A35, 90C30.
Key words and phrases. Inequalities for some sums.

If in the inequality (2) we put

$$(6) \quad b = \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2 + x^2 + \frac{1}{4}}, \quad a = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2 + x^2 + \frac{1}{4}}, \quad x \neq 0,$$

we get the inequality

$$(7) \quad \frac{1}{((n - \frac{1}{2})^2 + x^2 + \frac{1}{4})^s} - \frac{1}{((n + \frac{1}{2})^2 + x^2 + \frac{1}{4})^s} \\ \leq \frac{2ns}{((n^2 + x^2 + \frac{1}{2})^2 - n^2)^{\frac{s+1}{2}}} < \frac{2ns}{(n^2 + x^2)^{s+1}},$$

as it is

$$\frac{1}{(n^2 + x^2 + \frac{1}{2})^2 - n^2} < \frac{1}{(n^2 + x^2)^2}.$$

Summing for $n = 1, 2, \dots$, from (7) we get

$$(8) \quad \frac{1}{s(x^2 + \frac{1}{2})^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + x^2)^{s+1}}, \quad 0 < s \leq 1, \quad x \neq 0.$$

For $s = 1$, from (8) we obtain

$$(9) \quad \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + x^2)^2}.$$

Inequalities (5) and (9) written in the form

$$(10) \quad \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + x^2)^2} < \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

represent Mathieu's inequalities (see [2, p. 629]).

For $s = \frac{1}{r}$, $r \geq 1$ ($0 < s \leq 1$), the inequality (8) reduces to

$$(11) \quad \frac{r}{(x^2 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{r}}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + x^2)^{\frac{r+1}{r}}}, \quad r \geq 1.$$

From (4) and (11) we obtain inequality

$$(12) \quad \frac{r}{(x^2 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{r}}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + x^2)^{\frac{r+1}{r}}} < \frac{1}{r(x^2)^r}, \quad r \geq 1, \quad x \neq 0.$$

If in the inequality (1) we put

$$(13) \quad b = \frac{1}{n - \frac{1}{2} + x^2}, \quad a = \frac{1}{n + \frac{1}{2} + x^2},$$

for $r \geq 1$ and x real number, we get inequality

$$(14) \quad \frac{1}{(n - \frac{1}{2} + x^2)^r} - \frac{1}{(n + \frac{1}{2} + x^2)^r} \\ \geq \frac{r}{((n + x^2)^2 - \frac{1}{4})^{\frac{r+1}{2}}} > \frac{r}{(n + x^2)^{r+1}},$$

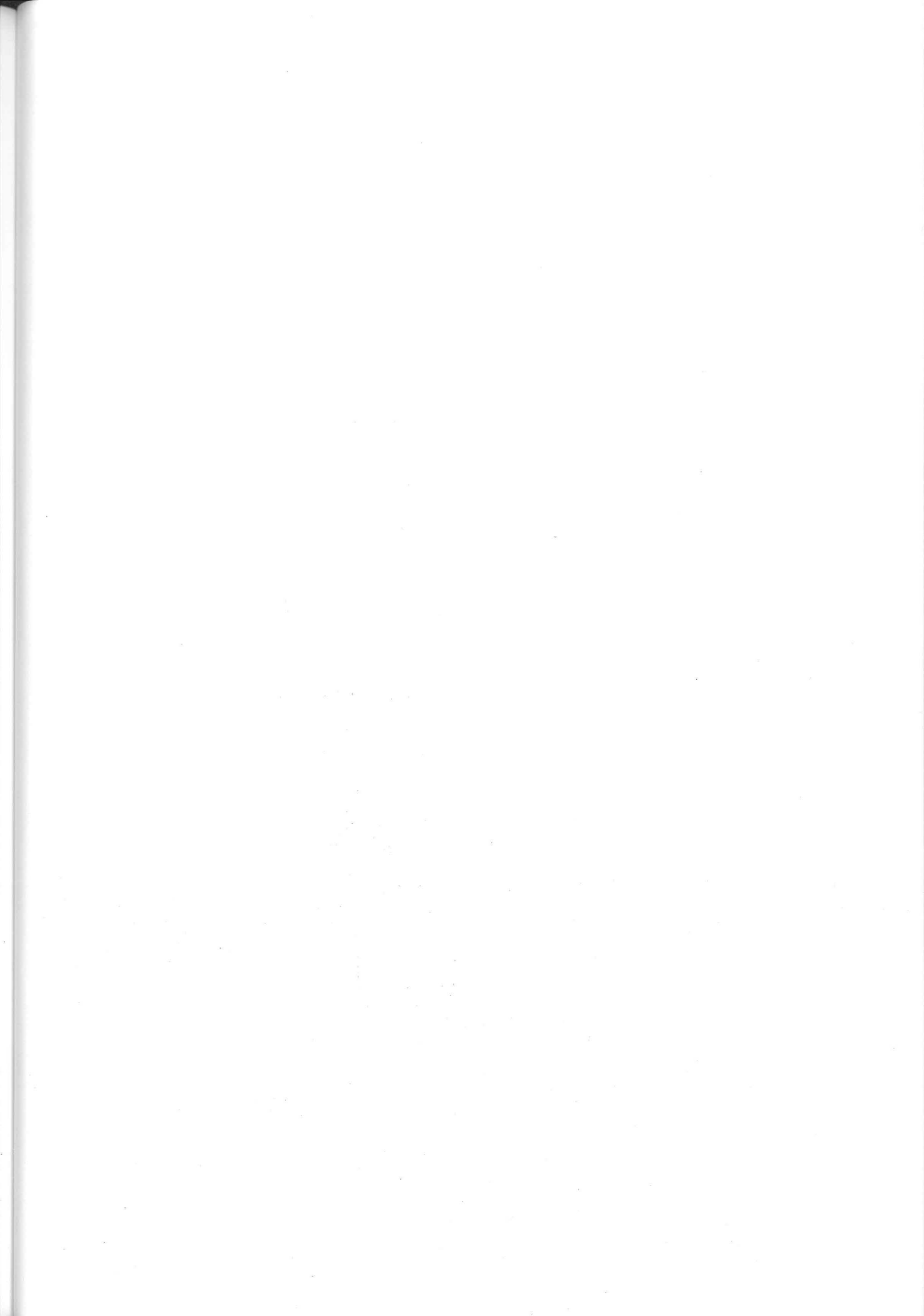
where summing for $n = 1, 2, \dots$, we get inequality

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + x^2)^{r+1}} < \frac{1}{r(x^2 + \frac{1}{2})^{r+1}}, \quad r \geq 1, \quad x \text{ is real number.}$$

REFERENCES

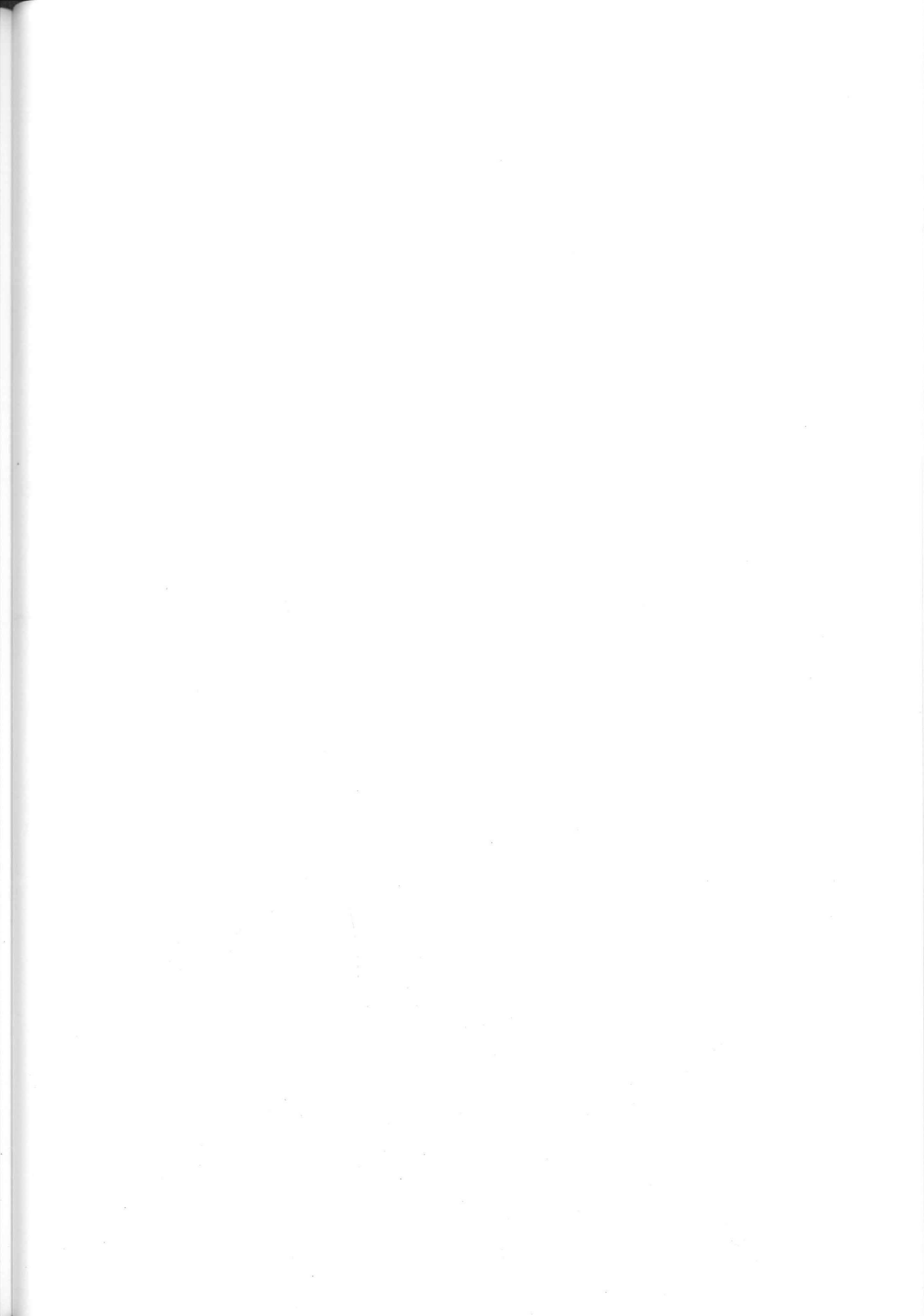
- [1] D.M. Simeunović, *Sur certaines inégalités intégrales et leurs applications*, Publ. Inst. Math. **11** (25) (1971), 99–105.
- [2] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht – Boston – London, 1993.

DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ
MIKE ALASA 8
11000 BELGRADE
SERBIA



DRUGI DEO

**OSTALI
RADOVI**



U drugom delu ove knjige sadržano je trideset šest radova koji su objavljeni u raznim Časopisima i Zbornicima radova sa različitih Savetovanja, Simpozijuma i Kongresa



Посебни отисак из ГЛАСНИКА ХИГИЈЕНСКОГ ИНСТИТУТА
Св. 3-4 (1957)

Драгомир М. Симиуновић

**ИЗРАЧУНАВАЊЕ СРЕДЊЕ ТЕМПЕРАТУРЕ ЗРАЧЕЊА
ПОМОЋУ ГЛОБУС-ТЕРМОМЕТРА УПОТРЕБОМ НОМОГРАМА**

БЕОГРАД, 1957



ИЗРАЧУНАВАЊЕ СРЕДЊЕ ТЕМПЕРАТУРЕ ЗРАЧЕЊА НОМОЋУ ГЛОБУС - ТЕРМОМЕТРА УПОТРЕБОМ НОМОГРАМА

ДРАГОМИР М. СИМЕЊУОВИЋ

Топлотно зрачење

Под топлотним зрачењем подразумева се зрачење које настаје услед загрејаности неког тела, и чија јачина зависи једино од степена загрејаности и особине дотичног тела. Тело се услед зрачења хлади зато што се један део његове молекуларне енергије претвара у зрачну енергију, док повишење температуре некога тела услед зрачења настаје отуда што се зрачна енергија која на њега падне претвара у молекуларну енергију, дакле у топлоту. Свако тело зрачи на свакој температури, само што се на вишој температури ово зрачење запажа.

Топлотно зрачење у радним просторијама

Честа су радна места где се јавља зрачна топлота. Таква су сва она места где се ради са угрејаним предметима или у њиховој непосредној близини. У таквим просторијама јачина топлотног зрачења може бити велика и негативно деловати на људе који у њој раде. Због тога је у медицини рада потребно одредити јачину зрачења која са угрејаних околних површина допире на место где људи раде. Може се десити да зрачење на неком радном месту буде тако јако да отежава нормалан рад, чак и да превазиђе границе издржљивости, што, разуме се, веома штетно делује по здравље радника.

Јачина зрачења неке површине може се мерити и директним путем, али је овај начин прилично тежак. Много је лакше увести у рачун средњу температуру зрачења околине. Под овом се подразумева температура црног тела код које би оно зрачило истом јачином као и околина. Како црно тело има највећу моћ зрачења, то је средња температура зрачења, овако дефинисана, увек нижа од средње температуре околине. За укупно зрачење E , које емитује један квадратни сантиметар површине црнога тела у једној секунди, важи Стефан-Болцманов закон који гласи:

$$E = \delta T^4 \quad (1)$$

где је T апсолутна температура, а $\delta = 5,73 \cdot 10^{-5} \text{ erg. cm}^{-2} \text{ grad}^{-4} \text{ sec}^{-1}$

Инструментат

За израчунавање средње температуре зрачења околине употребљава се у медицини рада глобус-термометар. То је шупља бакарна кугла (глобус) пречника 15,3 см, превучена споља црном бојом без сјаја. У ту куглу се уметне живин термометар тако да резервоар термометра дође у центар кугле.

Ако се глобус-термометар унесе у простор у коме се јавља топлотно зрачење, он ће се под дејством зрачења загревати, и то уколико више уколико је јачина зрачења околине већа, и глобус-термометар показиваће вишу температуру од околног ваздуха. На температуру глобуса утиче и кретање ваздуха, тако да ће овај тежити да хлади или загрева глобус. У једном тренутку хлађење глобуса изазвано кретањем ваздуха изједначиће се са загревањем услед топлотног зрачења. То обично бива после 20 минута од тренутка када је глобус изложен. Тада се средња температура зрачења израчунава по обрасцу.

(Образац 2)*

где је

$$T_r^4 = T_g^4 + 2,47 \cdot 10^8 \sqrt{w} (t_g - t_v)$$

T_r средња температура зрачења у апсолутним степенима

T_g температура глобус-термометра, такође у апсолутним степенима

W брзина струјања ваздуха у m/sec

t_g температура глобус-термометра у °C

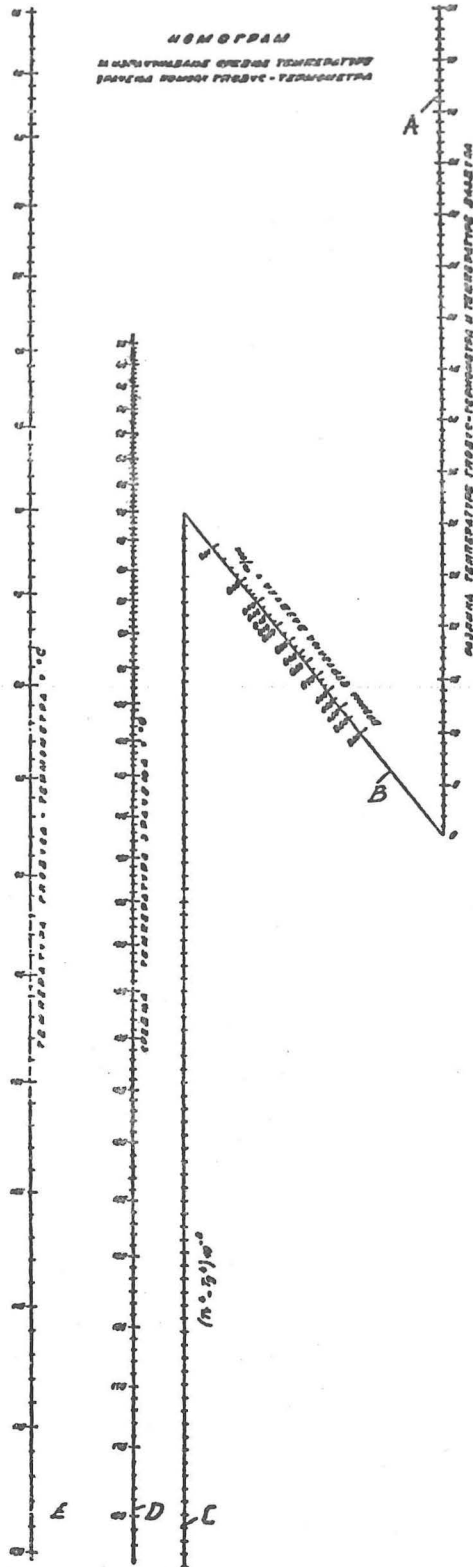
t_v температура ваздуха у °C

Из обрасца (2) види се да ће средња температура зрачења бити утолико већа уколико је већа температура глобуса, даље, уколико је већа брзина струјања ваздуха и што је већа разлика између температуре глобус-термометра и температуре ваздуха где се мерење врши.

Поступак при мерењу

Глобус се постави на посебан сталак на месту где треба мерити температуру и остави се 15 до 20 минута. Тада се чита температура глобус-термометра, и то је t_g . Затим се ката-термометром одреди брзина струјања ваздуха, који обележавамо са W , а психометром се измери температура ваздуха, који обележавамо са t_v . Ове добијене вредности унесемо у образац (2), помоћу којег израчунавамо средњу температуру зрачења. При мерењу се забележи радно место где се мерење врши и време када је мерење извршено; затим се измери температура спољњег ваздуха и релативна влажност, као и релативна влажност радног места.

* T. Bedford



П р и м е р. Радно место: посматрачница стаклене траке (лева страна) пећи II, Индустрије стакла Панчево:

температура глобус-термометра	tg = 42°C
температура ваздуха	tv = 30°C
брзина струјања ваздуха	W = 0,55 m/sec

температура спољног ваздуха 23°C са релативном влажношћу од 55%, док је релативна влажност у самој просторији износила 39%.
Мерење извршено 26. VII. 1957 г. у 10 часова.

Ако горње вредности унесемо у образац (2) имаћемо

$$T_r^4 = (273 + 42)^4 + 2,47 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{0,55} \cdot (42 - 30)$$

одакле добијамо $T_r = 331,2$ апс. степени = 58,2°C.

Како је израчунавање средње температуре зрачења по образцу отежано због низа рачунских операција које захтевају више времена, поготову када треба вршити већи број мерења, као што је то случај код нас у нашој пракси, и што те операције нису увек доступне свима који раде са глобус-термометром, израдио сам номограм за израчунавање средње температуре зрачења употребом глобус-термометра. Номограм је израђен првенствено за потребе Одељења медицине рада Хигијенског института НРС — односно за потребе лабораторије за физичка и микроклиматска мерења.

Постојећи номограми ове врсте код нас не обухватају оне најчешће случајеве који се у свакодневној пракси јављају, те се осећала потреба за једним таквим номограмом. Израђени номограм обухвата случајеве где се температура глобуса креће између 35°C и 120°C, брзина струјања ваздуха од 0 м у сек. до 3 м у сек., и код којих разлике температуре глобус-термометра и температуре ваздуха иду до 80°C.

Номограм је намењен свима који се баве оценом топлотног зрачења, као фабричким лекарима, потребама хигијенских завода, санитарним инспекцијама и инспекцијама рада. Помоћу њега се долази брзо до доста тачног резултата. Тачност зависи од правилности рада и моћи оцењивања на номограму.

Номограм је израђен тако што су на скалу А пренесене разлике температуре глобус-термометра и температуре ваздуха. Скала В (брзина струјања ваздуха) издељена је по образцу

$$U = \frac{2,47 \sqrt{w}}{2,47 \sqrt{w} + 2} \cdot L$$

где је W брзина струјања ваздуха, L дужина скале В. Скала С пропорционална је изразу $(T_r^4 - T_g^4)$. Скала В дели растојање скале С и Е у размери 1:3.

Употреба номограма

На скалу А пренесе се разлика температуре глобус-термометра и температуре ваздуха. Одатле се иде правом преко брзине струјања ваздуха до помоћне скале С. Од тачке на скали С иде се правом до температуре глобус-термометра на скали Е. Ова пра-

ва сече скалу D, на којој налазимо средњу температуру зрачења. Горе наведени пример у потпуности се слаже са резултатом добијеним рачунским путем.

За рад номограмом потребно је имати дужи лењир. Најбоље је на лењиру од провидног каучука запарати иглом једну праволинијску бразду. Место на лењиру где је бразда премазати црним тушем. Када се овај осуши скинути га са површине лењира, док ће бразда остати напуњена тушем у виду танке црне праве линије. Приликом рада лењир окренути тако да црна линија буде до папира. Оваквим лењиром се избегавају грешке које иначе при раду са номограмима у другим случајевима могу да настану.

Н а п о м е н а. — Како понекад околни зидови могу бити хладнији од ваздуха у самој просторији (као у ледарама), то је у овом случају разлика температуре глобус-термометра и температуре ваздуха негативна. За потребе наше лабораторије израдио сам и један такав номограм.

Резиме

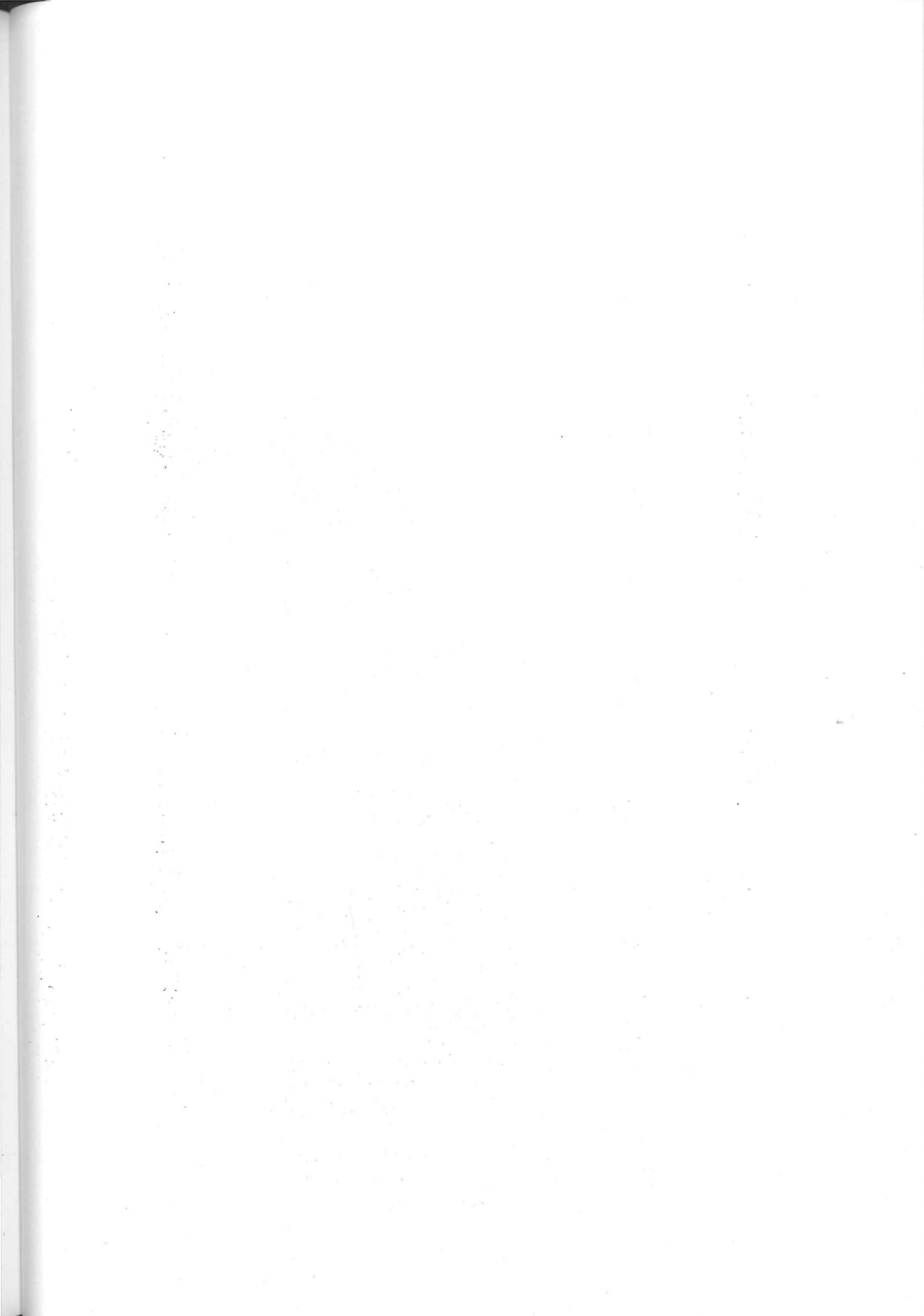
Овде је разматрано питање топлотног зрачења у радним просторијама, његово одређивање помоћу глобус-термометра, као и поступак при мерењу. За брзо израчунавање средње температуре зрачења израђен је опширан номограм, који обухвата случајеве који се у пракси јављају, те претставља проширење постојећих номограма ове врсте у којима најчешћи случајеви из праксе нису били обухваћени.

THE CALCULATION OF THE MEDIUM TEMPERATURE OF HEAT RADIATION WITH GLOBE-THERMOMETER USING THE NOMOGRAM

by

D. Simeunović

The author discusses the question of heat radiation in working rooms, its calculation by the globe-thermometer and the measuring procedure. For a quick calculation of the medium radiation temperature a detailed nomogram was made, including cases appearing in practice; it represents the enlargement of previous nomograms of this kind which were unable to embrace what happens in practice.



SEPARAT

HIGIJENA

Časopis za preventivnu medicinu i sanitarnu tehniku

VOL. XI

BEOGRAD 1959

BROJ 4

M. Savičević, D. Simeunović, M. Živkov, S. Radoničić i B. Babić

**PRILOG POZNAVANJU REŽIMA PIJENJA VODE
U USLOVIMA VISOKE TEMPERATURE RADNE SREDINE**



M. SAVICEVIC, D. SIMEUNOVIC, M. ZIVKOV,
S. RADONICIC I B. BABIC

PRILOG POZNAVANJU REŽIMA PIJENJA VODE U USLOVIMA VISOKE TEMPERATURE RADNE SREDINE

Pitanje gubitka natrijumhlorida i režima pijenja vode pri radu u uslovima visoke temperature radne sredine odavno je aktuelno za medicinu rada. To je razumljivo kad se ima na umu da u savremenoj industriji i rudarstvu, i pored svih higijenskih mera koje se sprovode na planu opšte i individualne zaštite, znatan broj ljudi često radi pod nekonformnim uslovima visoke toplote, koji izazivaju obilno znojenje, gubljenje natrijumhlorida, drugih soli i vitamina i pijenje veće količine tečnosti. Kakva treba da bude voda za piće u takvim uslovima, da li s njom treba unositi izvesne količine znojem izgubljene soli, ili na koji drugi način, — to su pitanja koja se sve češće postavljaju u teoriji i praksi medicine rada i koja do danas nisu dobila jedan opšteprihvaćen odgovor (1).

Poznato je da znojenje može zavistiti ne samo od temperature i vlažnosti vazduha, već da u tome mogu igrati određenu ulogu i psihički, razni morbogeni i drugi činioci. Prema A. Baetjer-u kod zdravih ljudi kad rade lakši posao vidljivo znojenje se javlja već na temperaturi od 31,1° C (2). Prema Letavet-u u mirovanju pri relativnoj vlažnosti od 22% vidljivo znojenje se konstatuje tek pri temperaturi od 30° C, a pri 60% relativne vlažnosti već na 25—26° C. (3). I dok pri tim uslovima i lakšem mišićnom radu čovek izluči za 24 časa prosečno oko 600 cm³ (od 400 cm³ do 1 lit.) znoja, s porastom temperature i vlage okoline i mišićnog rada povećava se i znojenje (3). Ukoliko su temperatura i vlaga više od okoline, utoliko je znojenje intenzivnije što može dovesti do gubitka više litara u toku osmočasovnog rada. Za nas je ovde od značaja činjenica da se pri tom znojenju (pošto znoj sadrži prosečno od 0,006—0,5% natrijumhlorida [2,3]) izlučuju i znatne količine natrijumhlorida, — prema A. M. Baetjer-u (2), u ekstremnom znojenju, i do 25 g a prema Letavet-u (3) i do 40 g za 24 h. Polazeći od činjenica da se pri običnoj ishrani hranom unese dnevno prosečno 15—25 g natrijumhlorida, često i daleko manje (4), došlo se do zaključka da obilno znojenje može dovesti do smanjivanja koncentracije natrijumhlorida u krvi i tkivima, kao i do opadanja osmotskog pritiska „ekstracelularne teritorije“ (kretanje vode u pravcu celularnog sektora, koji je postao relativno hipertoničan [5]), i do nastanka izvesnih patoloških stanja, u prvom redu u oblasti neuromuskularnog aparata — kao tzv. toplotni grčevi. Po Hanns-u (5), gubitak hlorida

može dovesti do hloropeničke azotemije, anoreksije, malaksalosti, adinamije, apatije, vomitusa, dijareja i tzv. toplotnih grčeva. Ističe se da davanje natrijumhlorida u takvim slučajevima brzo otklanja sve navedene poteškoće. Da bi se one izbegle, i fabrički lekari odavno su insistirali na sprovođenju mera za obezbeđenje bilansa natrijumhlorida, i u tom smislu danas gotovo u svim privredno razvijenim zemljama postoje higijenski propisi o obaveznom unošenju natrijumhlorida (s vodom, hranom ili u obliku tableta) u toku rada. *Beathsler* (prema 5) preporučuje za piće hladnu slanu vodu u koncentraciji 0.1—0.15% NaCl; *Metz* (6) je za nešto veću koncentraciju (2% NaCl). *Hanns* je za koncentraciju 2—3 g natrijevog hlorida na litar vode. U SAD i nekim drugim državama preporučuju se tablete soli, dok se u Pensilvaniji radnici snabdevaju zasoljenim pivom (5). U SSSR-u je sanitarni propis da se onima koji rade u uslovima visoke temperature radne sredine za piće obezbeđuje 0,5% slana gazirana voda. Sličan propis postoji i kod nas, kao i u mnogim drugim zemljama.

Poslednjih godina, međutim, u Nemačkoj (7), Francuskoj (8), Italiji (1), a i kod nas (9), češće se stavljaju primedbe na takve koncepcije. *Lehman* ističe da ne postoji opasnost od deficita bilansa natrijumhlorida za radnike nemačkog podneblja, i ne preporučuje pijenje slane vode, „jer je ono ne samo neprijatno radnicima, već može biti i štetno po njihovu radnu sposobnost” (7).

Iz izloženog proističe da je još uvek sporno pitanje korisnosti pijenja slane vode. Zato smo se odlučili da to pitanje proučimo u našim uslovima rada. Posle višegodišnjeg proučavanja uslova rada u nekim toplim odeljenjima jedne fabrike stakla, odlučili smo da tamo ispitamo problem kvaliteta i kvantiteta vode za piće raznih osobina u svetlu navedenih novih podataka i literaturi.

Metod rada. — U fabrici stakla u Pančevu, jula 1957, ispitivanja su vršena kod 15 radnika-dobrovoljaca koji su radili u uslovima visoke konvekcije i radijacije. Broj radnika po radnim mestima bio je sledeći: mesto posmatrača trake — 4; hranjenje peći — 3; lomačka bina — 4; rezačka bina — 3; oni koji rade na svim pomenutim mestima — 1 radnik. Broj radnika prema godinama starosti: 20—25 jedan radnik; 25—30 sedam radnika; 30—35 dva radnika; 35—40 dva radnika; 40—45 jedan radnik 50—55 jedan radnik; 55—60 jedan radnik. *Radni staž:* 1 godina — 2 radnika; 2 godine — jedan radnik; 3 godine — 2 radnika; 4 godine — jedan radnik; 5 godina — 2 radnika; 6 godina — 2 radnika; 7 godina — 1 radnik; preko 10 godina — 4 radnika.

Posle uzimanja opšte i radne anamneze, kliničkim pregledom je utvrđeno njihovo dobro zdravstveno stanje, koje je praćeno kroz celo vreme desetodnevnog ispitivanja (jula 1957 god.) Posebno su svakodnevno višeput, pomoću termopara, vršena ispitivanja temperature kože čela, nosa, obraza, prstiju, leđa (oblasti lopatice), regiona prve falange velikog prsta ruke i dorzuma stopala, kao i palca

Tabela I
Rezultati mikroklimatskih ispitivanja — peč II

Radno mesto	Klimatski elementi											Van preduzeća u hladu			
	\bar{t}	σt	\bar{rv}	σrv	\bar{H}	σH	W	\bar{tr}	σtr	e. t.	Zona komfora	\bar{t}	σt	\bar{rv}	σrv
Mesto posmatrača trake	27,3	2,1	48	8,8	4,2	0,6	0,35	58,9	7,2	31,5	Iznad gornje granice zone komfora	21,9	1,2	64	10,0
Hranjenje peći	29,4	1,7	42	8,9	3,7	0,3	0,65	103,0	5,4	35,0	Daleko iznad gornje granice zone komfora	22,4	1,4	61	7,8
Lomačka bina	34,0	2,6	30	3,4	1,3	0,2	0,64	43,0	1,2	28,5	Iznad gornje granice zone komfora	21,4	1,8	63	8,1
Rezačka bina	32,3	2,3	38	8,6	1,7	0,3	0,50	45,0	1,6	29,0	Iznad gornje granice zone komfora	22,0	1,7	64	11,0

Objašnjenje; t —temperatura vazduha, rv —relativna vlažnost, H —katavrednost, W —brzina strujanja vazduha u metrima na sekundu, tr —srednja temperatura zračenja, e. t.—efektivna temperatura (korigovana e. t.). Ovde su date srednje vrednosti pomenutih veličina, što je i označeno crtom iznad pojedinih oznaka; σ s indeksom označava standardnu devijaciju za tu veličinu.

desne noge. Kontrolisano je stanje kardio-vaskularnog sistema (puls, krvni pritisak) i ispitivano subjektivno stanje radnika u toku rada. Od laboratoriskih ispitivanja, pored pregleda krvne slike, u krvnom serumu je određivana koncentracija natrijumhlorida, natrijuma, kalijuma, ureje i ukupnih proteina.

U prvom delu našeg rada ispitivane osobe pile su za vreme rada običnu vodu, a u drugom delu prvih osam (prema rednom broju u našem radu) pilo je mesto vode jabukov sok, dok je preostalih sedam pilo slanu gaziranu vodu (0,5% NaCl). Analiza pomenutih materija u krvi vršena je kod svih radnika, kako pri piću obične tako i slane gazirane i slatke vode. U mokraći je posebna pažnja obraćena koncentracijama Na, NaCl i ureje.

Merena je težina tela na početku i na kraju radnog dana. Upravo s kliničkim i laboratoriskim ispitivanjima vršena su higijenska merenja u radnoj sredini, u prvom redu merenja temperature vazduha i psihometrija (termografom i higrografom, kao i Assmanovim psihrometrom), srednje temperature zračenja (globus termometrom) i katatermometrija.

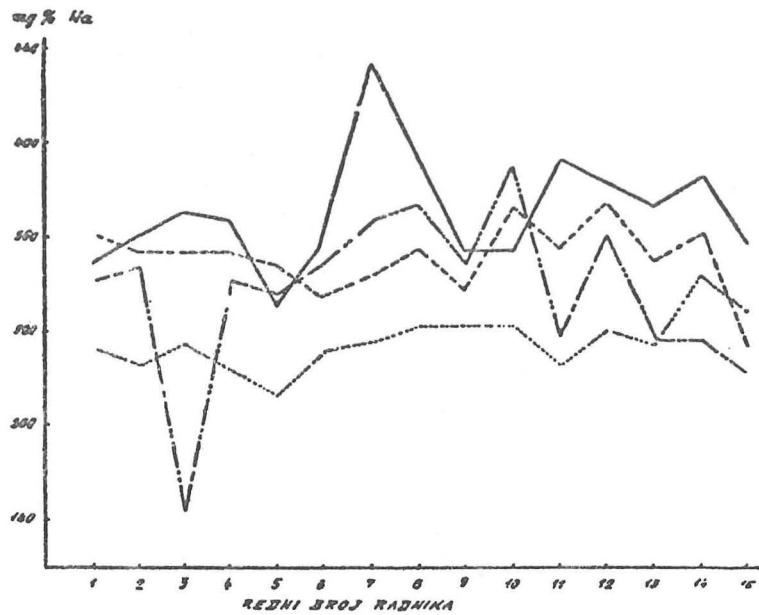
Kratka higijenska karakteristika radnih mesta vidi se iz tabele 1.

Kao što se vidi, na svim ispitivanim radnim mestima klimatsko stanje bilo je van zone komfora.

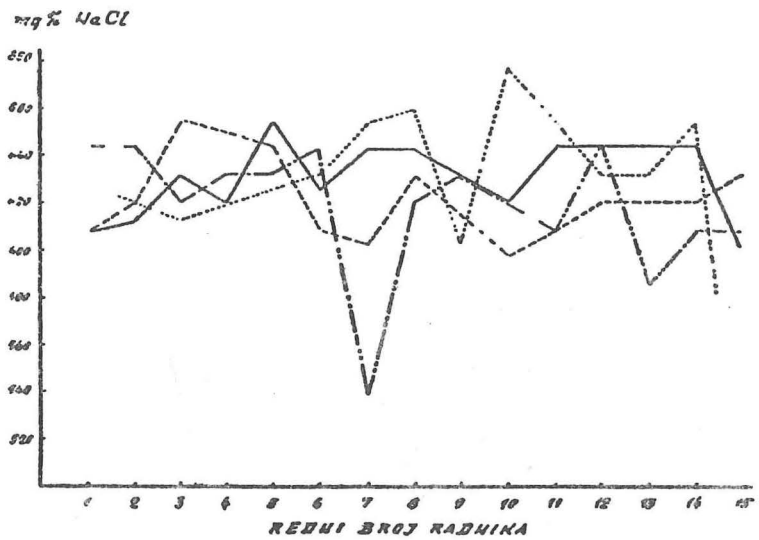
Klinički i laboratoriski nalazi: U toku celog perioda ispitivanja nije od strane radnika bilo žalbi na tegobe, sem od strane jednog radnika (broj 6) sa četvorogodišnjim radnim stažom, koji je patio od neurotičke glavobolje već više godina i koji je i pre ovih ispitivanja objektivno pokazivao brojne tegobe tipa neurovegetativne distonije.

Količina popijene vode varirala je u veoma širokim razmerama, kako po pojedinim danima tako i kod pojedinaca. Oni s manjim stažom pili su prosečno pri radu nešto više vode (2,5—4,5 lit. za 8 sati rada) no oni s dužim stažom (1,400—3,200 lit.). Težina tela na kraju rada, u poređenju s onom na početku rada, kod onih s manjim radnim stažom nije pokazivala znatnije gubitke (u 15% slučajeva pokazivala je da je čak i povećana od 100—350 g.), dok je kod onih s dužim radnim stažom više bila izražena tendencija smanjenja telesne težine na kraju rada (od 300—1300 g). Količina mokraće je kod onih s dugim radnim stažom bila nešto manja i nešto koncentrovanija (spec. težina od 1026 do 1034) u toku prvih osam časova, dok je kod onih s kraćim radnim stažom, iako neregularno, bila više izražena tendencija lakog smanjenja. Specifična težina mokraće uzeta pre početka rada kretala se u granicama normale.

Ispitivanja natrijuma, natrijumhlorida, ureje i ukupnih belančevina u krvnom serumu bila su u centru naše pažnje. Rezultate tih ispitivanja dajemo u sledećim grafikonima:



Grafikon 1



Grafikon 2

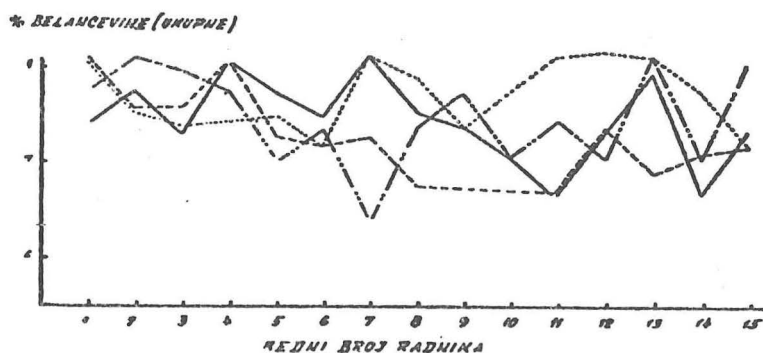
Objašnjenje oznaka:

- . . . — Pijenje obične vode (pre rada u početku ispitivanja).
- — — — — Trećeg dana pijenja obične vode (na kraju rada).
- Prvog dana režima slatke vode (jabukov sok) za prvih 8 osoba i 7 (od 8-15) slana gazirana voda.
- Na kraju radnog dana, na kraju ispitivanja (režim pijenja kao i prethodni).

U drugom delu naših ispitivanja, prvih osam radnika pilo je jabukov sok a ostalih sedam (na našim grafikonima brojevi od 8 do 15) 0,5% slanu gaziranu vodu.

Grafikon 1 pokazuje da se koncentracija natrijuma u krvnom serumu [rađeno po metodu Richard-a R., Overman-a i A. K. Devis-a (10)] kod svih radnika, bez obzira na kvalitet tečnosti za piće, kretala pretežno u granicama normale ili nešto iznad nje (radnik 3 je hranilac peći, star 33 godine, sa stažom u staklari od 10 godina, a radnik 7 rezač ivica, star 25 godina, sa stažom u staklari od 6 godina). Te se vrednosti kreću u granicama normale, kao što se vidi i kod grupe koja je pila jabukov sirup* pri radu.

Veoma slično stoji stvar sa natrijumhloridom [rađeno po metodu Van Slyke-a (11)]. Sve su vrednosti u granicama normale, a delom, čak, preko gornje granice. Kao što se vidi na grafikonu 2, to važi i za grupu koja je pila slatko piće.



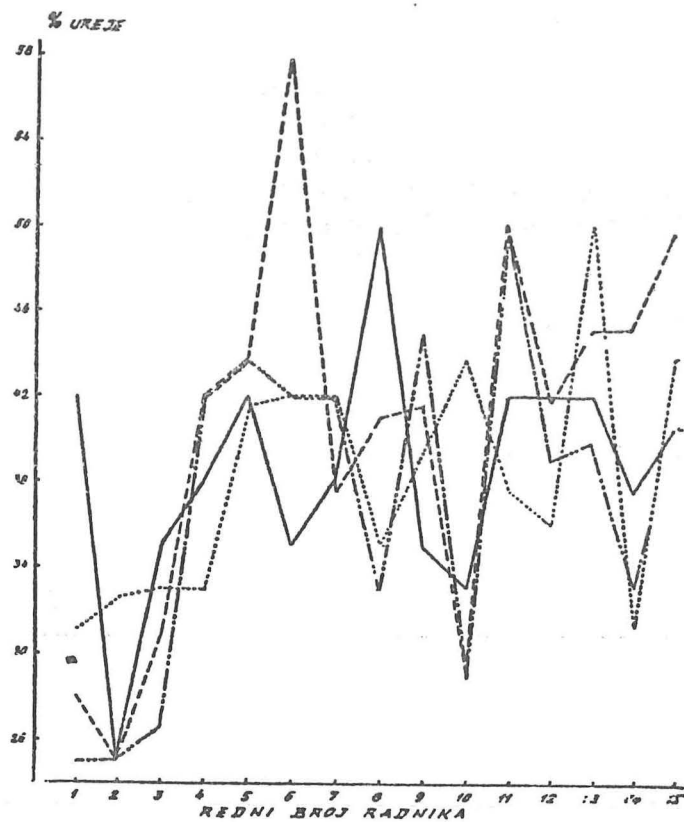
Grafikon 3

Ukupne belančevine u serumu (grafikon 3) takođe su se kretale u granicama normale kod svih radnika i svih režima pijenja vode pri radu [metod Van Slyke (11)].

Koncentracija ureje u serumu bila je na gornjoj granici normale, pa čak i iznad nje; to se slabije odražavalo kod grupa koje su pile slatko piće (12).

Ispitivanja mokraće nisu pokazala patološke osobitosti, sem u nekoliko slučajeva neznatnog povišenja kalijuma. Koncentracije natrijumhlorida i ureje merene na početku, usred i na kraju rada bile su u granicama normale. Ureje i natrijum su pokazivali tendenciju porasta pred kraj rada, ali ipak u okviru tolerantnog.

* Sastojci jabukovog sirupa (izračunato na 100 cm³ soka): Na — 8,03 mg%; K — 285 mg%, ukupan šećer (kao invertni) 8,84%; NaCl — 0,05%. Sastojci obične vode bili su u okvirima higijenskog standarda.

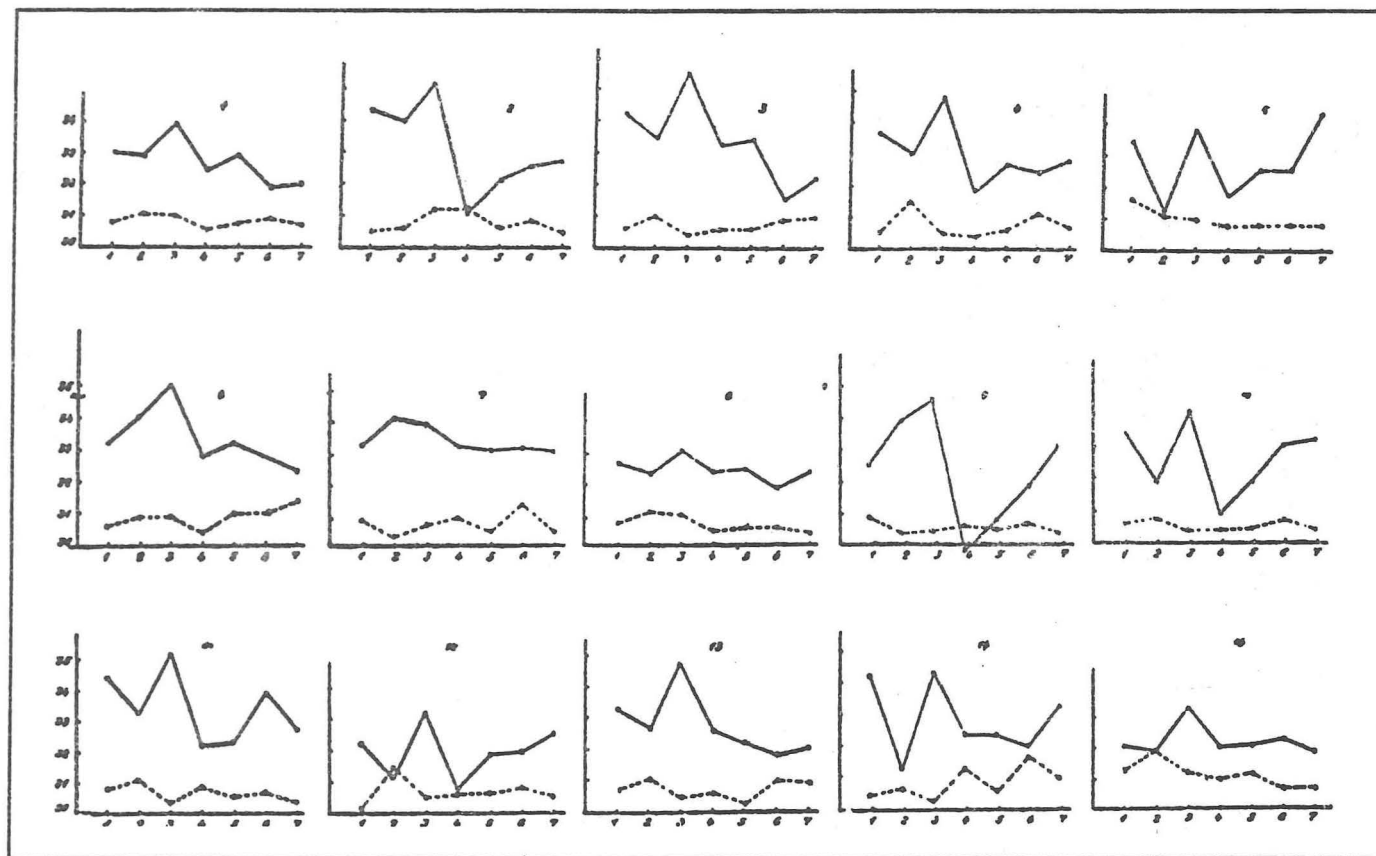


Grafikon 4

Kožne temperature (merene termoelektričnim priborom) dajemo na str. 300 s 15 grafikona koji odgovaraju pojedinim radnicima.

Kao što se iz navedenih grafikona prikazanih na tabli vidi, i pored izvesnih individualnih razlika u vrednostima temperature pojedinih delova kože tela kod raznih osoba, jasno je izražena tendencija najvećih vrednosti za obraz (3) i najmanjih za prsa (radnici su nosili za vreme rada gusto tkano, prostrano pamučno odelo, koje je sprečavalo znatno dejstvo radijacije). To u izvesnoj, nešto slabijoj formi važi i za standardne devijacije tih srednjih vrednosti. Uporedo s tim grafikonom dajemo, poređenja radi, vrednosti temperature kože kod kontrolne grupe u konformnim uslovima i fizičkom miru.

Grafikon 5 predstavlja aritmetičke sredine i standardne devijacije istih merenja kao i kod ostalih grafikona od 1—15, samo se ovaj odnosi na grupu ljudi koji rade kancelariske poslove pri temperaturi od 23° C, relativnoj vlažnosti 35 %, brzini strujanja vazduha od 0,03 m/sek, i efektivnoj od 20° C, dakle u zoni komfora.

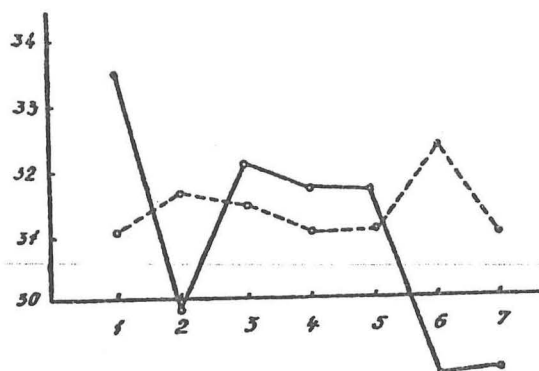


Objašnjenje uz tablu grafikona: Tačke na apscisi označavaju redom: 1 — čelo; 2 — nos; 3 — obraz; 4 — prsa; 5 — plećka; 6 — treća falanga srednjeg prsta desne ruke; 7 — dorsum pedis (desno). Ordinate ovih tačaka predstavljaju aritmetičke sredine temperature čela, nosa itd. (gore navedenim redom), merenih u toku šest dana (svakom podeoku na ordinati treba dodati 30° C).

Ordinate tačaka isprekidanih linija predstavljaju standardne devijacije temperature gore navedenih delova tela, i navedene su istim redom kao i aritmetičke sredine. Kod tih se ordinata računaju od 0° C. Brojevi na apscisi odgovaraju rednom broju radnika navedenih u grafikonima 1 i 2.

Krvna slika nije pokazala većih osobenosti u toku rada. Broj eritrocita se kretao u granicama od 3,5—4,000.000 (srednje vrednosti 3,700.000), a hemoglobina u granicama od 70—80% (prema ispitivanju kontrolnih grupa kod radnika drugih zanimanja u istom mestu, te vrednosti se bitnije ne razlikuju od njih). Najveća koncentracija čeličnih elemenata u krvi bila je izražena na kraju rada kod radnika s dužim stažom, a nešto smanjena koncentracija, takođe na kraju rada, kod radnika s radnim stažom od tri godine.

Krvni pritisak se za vreme rada kretao od 95/70 do 120/70. Tendencija sniženja TA postojala je kod svih radnika, bez obzira na životnu dob i radni staž, i, s malim povećanjem (10—15 mm Hg), održavala se i van rada.



Grafikon 5

Puls nije pokazivao naročite osobitosti (sem lake tahikardije) za vreme rada, i za vreme odmora brzo se vraćao na normalu.

Ispitivanjem radnika utvrdili smo da oni upotrebljavaju jače zasoljenu hranu (na radu često slaninu), da svoje jelo kući redovno dosoljavaju. Mišljenja smo da time oni, pri navedenim klimatskim uslovima, obezbeđuju dovoljne količine natrijumhlorida i da ne trpe od toplotnih grčeva ili drugih poteškoća koje proizvodi povišena toplota (izuzev žalbi na umor i subjektivno teže podnošenje velike toplote). Nije zapažen gubitak apetita.

Napominjemo da su radnici radije pili običnu no zasoljenu vodu pri radu i da su od obe radije pili slatki jabukov sok.

ZAKLJUČAK

Na osnovu naših ispitivanja režima pijenja raznih sastava vode pri radu u određenim, nekonformnim uslovima povišene konvekcione i radijacione toplote, možemo doneti sledeće zaključke:

1. U navedenim uslovima rada, gde znojenje radnika ne prelazi granicu od 4,5 lit. tečnosti za 8 časova rada, ne dolazi do

smanjenja koncentracije natrijuma i natrijumhlorida u krvnom serumu ispitivanih osoba, bez obzira da li za vreme rada piju običnu, zasoljenu gaziranu ili zaslađenu vodu (voćni sok).

2. Ukupna proteinemija nije pokazivala abnormalnosti ni za vreme rada ni posle njega.
3. Koncentracije ureje u krvi pokazivale su tendenciju porasta, naročito kod osoba koje su pile običnu vodu, dok su kod onih koje su pile rastvor jabukovog soka bile najbliže normalni.
4. Radnici su pri datim uslovima radije pili običnu vodu i jabukov sok no zasoljenu gaziranu vodu.
5. Ako se naši zaključci potvrde na većem broju radnika, valjalo bi insistirati na promeni propisa o obaveznom snabdevanju takvih radnika zasoljenom gaziranom vodom.

Veoma smo zahvalni prof. dr I. Đuričiću, čija nam je pomoć u oceni i definitivnoj obradi dobijenog materijala bila od velike koristi.

REZIME

Vršena su ispitivanja stanja zdravlja, subjektivnog osećanja, uslova rada i koncentracije natrijuma, natrijumhlorida, belančevine i ureje u krvnom serumu u osobe koje rade u uslovima povišene konvekcije i radijacije, kod kojih se znojenjem za osam sati rada gubilo prosečno 2—3 lit. vode (maksimalno 4,5 lit.), i pritom s eksperimentisalo s režimom pijenja obične zasoljene gazirane i zaslađene vode (voćni sok).

Nađeno je da koncentracije natrijuma, natrijumhlorida i ukupnih belančevina u serumu ne pokazuju odstupanje od normale ni pri jednom od navedenih režima pijenja tečnosti pri radu, dok je ureja kod jednog broja pokazivala tendenciju porasta preko normale. Došlo se do zaključka da pijenje slane gazirane vode u datim klimatskim uslovima nema prednosti nad pijenjem obične ili zaslađene vode. Ističe se potreba za daljim ispitivanjem, na većem broju osoba koje rade u uslovima povećane toplote, kako bi se eventualno stvorila naučna baza za izmenu propisa o snabdevanju slanom gaziranom vodom osoba koje rade u uslovima povišene toplote.

Higijenski institut NRS

Zdravstvena stanica fabrike stakla — Pančevo

LITERATURA

1. L. Permezziani: Sull' Azione profilattica della Bevanda Saline nel lavoro alle alte temperature, *La Medicina Del Lavoro*, Vol. 49, 4, (1958).
2. M. A. Baetjer: Effects of Temperature and Humidity on Industrial Workers, u knjizi: *The Principle and Practice of Industrial Medicine* (red. Fred Wampler). London 1943.

3. A. A. Letavet: Higijena rada, I tom, Med. knjiga, Beograd 1949.
4. L. Permezzani: Intraduzione alimentare di Sodio, potassio, cloro e aqua negli operai italiani che lavorano al caldo, La Medicina del Lavoro. Vol. 49, 4, (1958).
5. A. Hanns: Froid—Chaleur—Humidité, u knjizi Médecine du Travail (II édition), Maloine, Paris 1956 (red. Simonin C.).
6. B. Metz: Problèmes thermiques du travail musculaire, u knjizi Médecine du Travail, Maloine, Paris 1956.
7. G. Lehmann: Praktische Arbeitsphysiologie, Georg Thieme, Stuttgart 1953.
8. B. Metz et G. Lambert: Conditions physiologiques d'aménagement des postes de travail au chaud Arch. Mal. Profess. 6 (1957).
9. I. Đurđić: Medicina rada (Fiziologija rada), Med. knjiga 1958.
10. R. R. Overman, A. K. Davis: J. Biol. Chem. (1947), 168, 641.
11. Austin und Van Slyke: J. Biol. Chem., 41, (1920), 345.
12. V. P. Dole, R. D. Archibald: Eder H. A., J. Biol. Chem., 183, (1950), 331.

(Redakcija je primila rad 3-X-1958)

Summary

CONTRIBUTION TO THE KNOWLEDGE OF THE DRINKING OF WATER IN A MILIEU WITH HIGH TEMPERATURE

M. Savićević, D. Simeunović, M. Zivkov, S. Radoničić and B. Babić

The authors examined the state of health, subjective feelings, working-conditions and concentrations of sodium, sodium-chlorid, albumins and urea in the blood-serum in persons working under augmented convection and radiation and who, by perspiration, lost on an average 2—3 liters of water. Experiments were carried out with drinking of salty-gas and sweetened water (fruit-juice).

The authors established that concentrations of sodium, sodium chlorid and the total amount of albumins in the serum do not diverge from normal values when drinking liquids during work. In some of these persons urea was increased over the normal. They concluded that drinking of salty-gas water in determined climatic conditions had no advantages over drinking of ordinary or sweetened water. They point out the importance of further examinations of a greater number of persons who are working in premises with high temperature, in order to make a scientific basis for the modification of regulations of supplying of salty-gas water of persons working in a milieu with high temperature.

*Institute of Hygiene, Beograd
Health Center of the Glass-Factory, Pančevo*



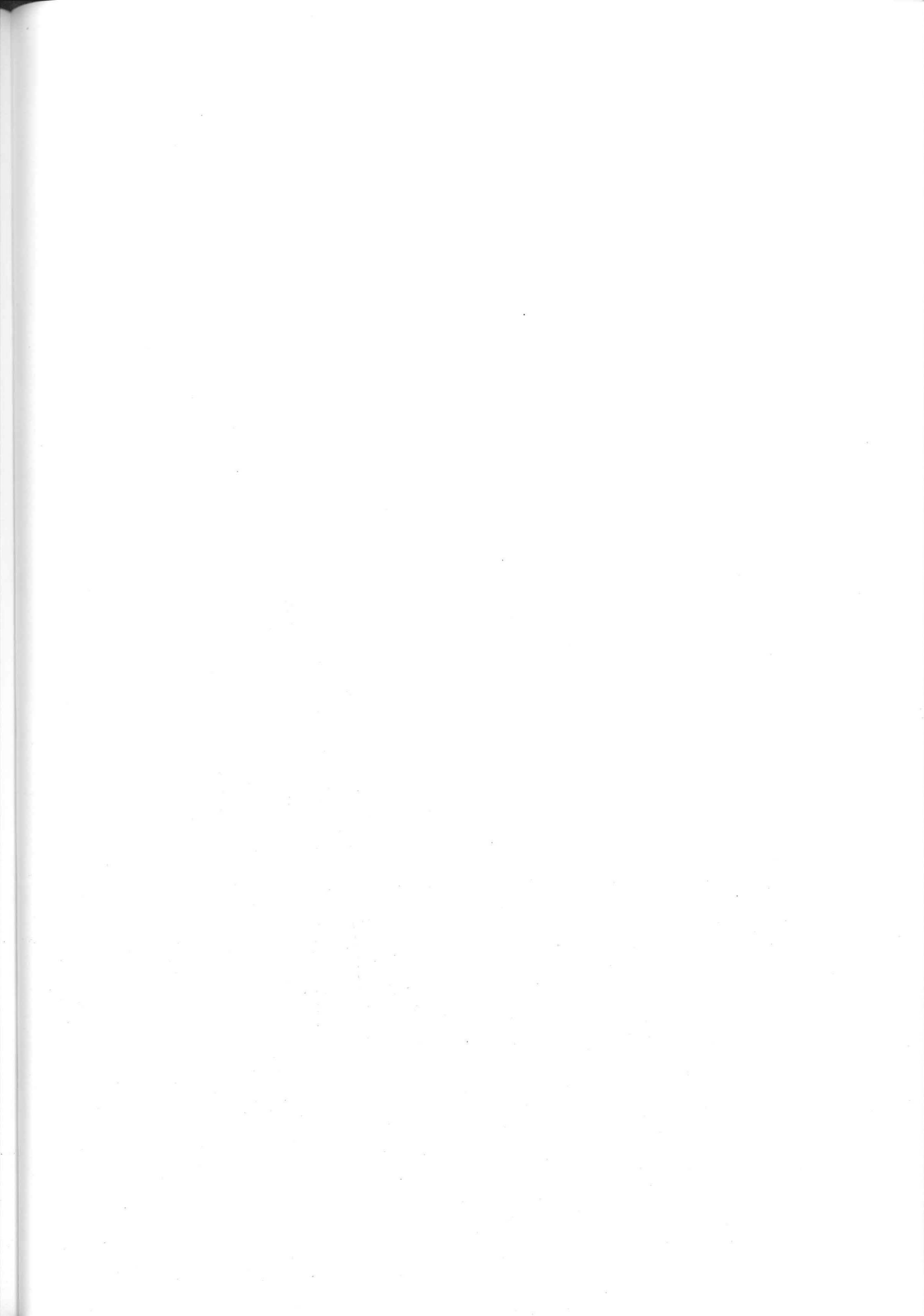
SAVEZ INŽENJERA I TEHNIČARA JUGOSLAVIJE

Dragomir Simeunović
Milovan Krenić

Zona komfora i produktivnosti rada

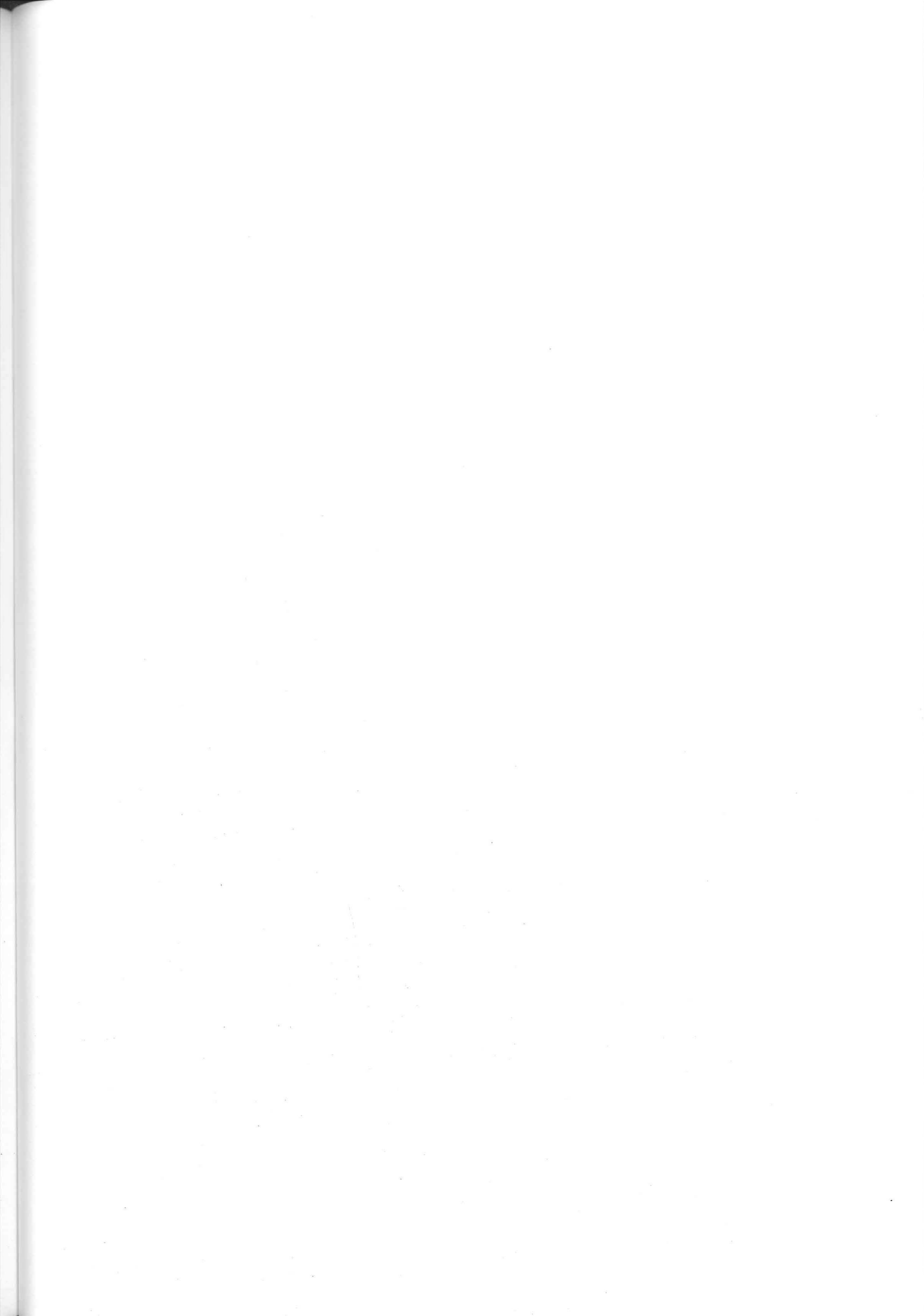
Koreferat podnet na Savetovanju o produktivnosti rada,
u Beogradu, — mart 1959.

Štampa „Geokarta“ — Beograd



DRAGOMIR SIMEUNOVIĆ
MILOVAN KREMIĆ
Odeljenja medicine rada
Higijenskog instituta NRS,
Beograd

ZONA KONFORA I PRODUKTIVNOST RADA



ZONA KONFORA I PRODUKTIVNOST RADA

Postoji niz fizikalnih faktora koji se mogu javiti u sredini gde ljudi rade. Takvi faktori su: temperatura vazduha, vlažnost vazduha, strujanje vazduha i njegova ohladjujuća moć, toplotno zračenje zagrejanih površina, osvetljenost, buka, prašina, jonizirajuća zračenja i dr. Ovi faktori često mogu biti takvi da ometaju normalan rad ljudi. Zbog toga ljudi pri radu jedna deo svoje radne sposobnosti ulažu na suprotstavljanje ovim činiocima. Ima i takvih slučajeva gde radnici nisu u stanju da se duže vremena zadrže na jednom radnom mestu, pa makar upotrebili sve svoje fizičke i psihičke sposobnosti.

Da bi se izvršila ocena delovanja pomenutih faktora, mora se, pre svega, reći kakvi treba da budu oni u izvesnoj prostoriji da bi se čovek radeći odredjenu vrstu posla pritom osećao najugodnije. Kako se navedeni faktori nikada ne javljaju pojedinačno, već više njih istovremeno, to se mora voditi računa o njihovom udruženom dejstvu. Zbog toga se obično vrši grupacija pojedinih faktora. Ovo je i pravdano, jer se pokazalo da se njihova delovanja uzajamno dopunjuju. Ispitivanja su dalje pokazala da čoveku pri datoj vrsti posla /na primer, koji radi fizički lak posao i lako je obučen/ može biti toplije pri temperaturi vazduha, recimo do 20°C s relativnom vlažnošću većom od 83% i brzinom strujanja vazduha manjom od 0,10 m/sek, nego pri temperaturi vazduha od 25°C s relativnom vlažnošću manjom od 33% i brzinom strujanja vazduha većom od 1,50 m/sek. Radniku će biti ugodno da radi slične poslove kao i gore i na temperaturi od 30°C ako je relativna vlažnost manja od 39% a brzina strujanja vazduha veća od 0,50 m/sek. Zato kao posebnu grupu fizikalnih faktora čine temperatura vazduha, njegova relativna vlažnost, strujanje vazduha i toplotno zračenje. Oni zajedno karakterišu mikroklimatsko stanje u radnoj prostoriji. Takvo mikroklimatsko stanje u

radnoj prostoriji pri kome se većina radnika radeći određenu vrstu posla oseća ugodno, pretstavlja zona konfora. Za njenu ocenu služe nam efektivne i korigovano-efektivne temperature. Pod efektivnom temperaturom podrazumeva se temperatura mirnog i vodenom parom zasićenog vazduha. U ovakvom stanju mikroklima ljudi će se, radeći određenu vrstu posla, osećati na izvestan način. Na isti takav način ljudi se, radeći istu vrstu posla, mogu osećati i u uslovima gde vazduh ima izvesnu brzinu strujanja i nije potpuno zasićen vodenom parom, pa ovakvo stanje mikroklima pretstavlja ekvivalent date efektivne temperature. Ako se još u prostoriji javlja i toplotno zračenje, onda imamo korigovani ekvivalent za datu efektivnu temperaturu.

Česta su radna mesta gde mikroklima nije u zoni konfora. Ima slučajeva gde su zbog samog tehnološkog procesa povećani i temperatura i vlažnost vazduha. Kao primer navodimo odeljenje za bojenje tkanina u tekstilnoj industriji. Da bismo ovakvo stanje popravili, na mestima gde nema dobre ventilacije radnici otvaraju prozore, tako da za vreme hladnih dana u prostoriju ulazi hladan vazduh i dolazi do tačke rose. Tako se vodena para kondenzuje po zidovima i tavanicama i palje radnicima na glavu i za vrat, pri čemu se oni vrlo nelagodno osećaju. U samom vazduhu stvara se magla usled čega se smanjuje vidljivost u prostoriji, često puta u tolikoj meri da se dva radnika ne mogu videti na jednom metru razdaljine. Svakako se ovako ne-normalni mikroklimatski uslovi odražavaju i na produktivnost rada.

Ima i takvih radnih mesta gde se javlja intenzivno toplotno zračenje. Ovo može biti tako jako da radnici ne mogu u neposrednoj blizini izvora da izdrže više od nekoliko minuta, što je često nedeovoljno da bi pravilno obavili potreban posao. Svakako da ovo ide na uštrb kvaliteta materijala koji se pritom izradjuje. Kao primer uzmimo ručno dodavanje primesa u cilju popravljivanja kvaliteta čelika u zagrevnim pećima železare. Često puta se ponavlja već jednom svršeni posao, pa i ovo deluje na smanjenje produktivnosti. Sličnih primera ima mnogo i nećemo

ih ovde navoditi. Pored iznetog, nenormalni mikroklimatski uslovi dovode do čestih prehladjivanja radnika /velike promaje s hladnim vazduhom, kretanje radnika iz suviše zagrejanog dela prostorije u hladne delove ili u druge prostorije što je povezano s procesom proizvodnje itd. i njihovog odsustvovanja s posla. Šta se može da učini u smislu poboljšanja mikroklimatskih uslova zavisi i od samog radnog mesta, od faktora koji je posebno izražen, kao i od tehnološkog procesa.

I slaba osvetljenost u radnoj prostoriji utiče na smanjenje produktivnosti rada. To je očigledno, jer se pri tom preciznost izrade smanjuje, povećava se greška u izradi, ponavlja se isti posao. Dalje, nepravilna i slaba osvjetljenost dovode do loše orijentacije, zatim do čestih povreda, naprezanja organa vida, kao i do njegovog slabljenja.

Ima i takvih radnih mesta gde se javlja velika zaprašenost. Zbog njene povećane koncentracije radnici su prinudjeni da nose lična zaštitna sredstva, a ova ih čine nedovoljno komotnim pri radu. Oni moraju pritom da ulažu veće fizičke napore za savladjivanje otpora pri disanju. Usled zaprašenosti dolazi do oboljevanja radnika i do čestih odsustvovanja s posla. Pored toga, velika zaprašenost stvara apatiju prema poslu, pa i ovo ima uticaja na produktivnost rada. Prašina ne samo da deluje na radnika vrlo rdjavo, već i na same mašine. Ona se taloži na razne delove mašina i nagriza ih trenjem ili hemiski te ove brže postaju neupotrebljive. Zbog toga je potrebno prašinu otklanjati još na samom izvoru i ne dozvoliti njeno širenje po celoj radnoj prostoriji. Nije redak slučaj da usled velike zaprašenosti dolazi i do zastoja pojedinih osetljivih mašina. Zbog toga se mašine moraju češće čistiti, a sve to ide na smanjenje produktivnosti.

Kao sledeći faktor u radnim prostorijama uzećemo buku. Ova se javlja u većini radnih prostorija, a često u povećanom iznosu. Ovakva buka ima štetno dejstvo na čulo sluha. Pored toga, povećana buka onemogućava normalno sporazumevanje

pri radu i zvučnu signalizaciju koja je u većini slučajeva jedino sredstvo ove vrste. Kao primer uzmimo pogibiju dvojice radnika u leto 1957 g. u fabrici "Jugoviskoza" - Loznica. Usled suviše jake buke koju je stvarala vodena para pri izlasku iz jedne cevi, ovi radnici krećući se prugom nisu čuli pisak lokomotive i nisu se sklonili, već ih je ova pregazila. Ima mnogo primera gde je povećana buka bila uzrok mnogim nesrećama na poslu. Povećana buka onemogućava još i praćenje takta pojedinih mašina, kao i njihovo pravilno funkcionisanje. Usled ovoga dolazi do većih oštećenja mašina, koja bi se, inače, da su na vreme otkrivena mogla izbeći.

Dalje, gde se god javlja povećana buka ista je praćena i vibracijama podloge, te ova dva elementa deluju na smanjenje koncentracije pažnje na poslu. Osim toga, jaka buka kod radnika /naročito koji se nisu navikli/ stvara neku vrstu ošamućenosti. Monotona buka deluje i uspavljujuće na one radnike koji su manje pokretni /naprimer, čija je dužnost da prate merne instrumente u mašinskim salama i na drugim radnim mestima/.

Cilj ovoga rada nije da iznosi primere mikroklimatskih i ostalih uslova pri radu, već samo da ukaže na njihovo delovanje u pogledu produktivnosti kao i da bi se to stanje obavezno uzelo u obzir radi stalnog poboljšanja. Ovde takodje nisu mogli biti izneti i istali činioci: pare, gasovi i druge materije koje štetno deluju na zdravlje radnika i odražavaju se na povećanje poboljevanja, a s tim u vezi i na izostajanje s posla. Svakako da će se sve ovo u velikoj meri odraziti na produktivnost rada.

Radi ilustracije daćemo tabelarni prikaz o stanju mikroklimatike, osvetljenosti i buke u nekim preduzećima na teritoriji NR Srbije sa kraćim komentarom.

Prilog: tabele 1-5.

Oznake u tabelama:

t - temperatura vazduha

Rv - relativna vlažnost u %

W - brzina strujanja vazduha
tr - srednja temperatura zračenja
et - efektivna temperatura.

Iz tabele 1. vidi se da je u letnjem periodu za vreme ispitivanja temperatura spoljnog vazduha bila 22°C sa relativnom vlažnošću od 60%. Jasno je da je spoljna klima imala uticaja na stanje mikroklimе u radnim prostorijama. Iz iste tabele vidi se da bi efektivna temperatura, ukoliko bi se otklonilo toplotno zračenje na radnim mestima a smanjila vlažnost vazduha, bila u zoni komfora, pa bi svim radnicima, izuzev nove valjaonice i radnog mesta vozača kрана, u njoj bilo ugodno. Medjutim, usled dejstva toplotnog zračenja stanje mikroklimе u radionicama gde se ovo javlja daleko je iznad gornje granice zone komfora, što u tabeli nije naznačeno /u tabeli je data efektivna temperatura za čije izračunavanje nije uzeto u obzir toplotno zračenje/. Prema tome, u pomenutim prostorijama zaštitom od toplotnog zračenja i izmenama pojedinih faktora mikroklimе ventilacijom stanje bi se dovelo u zonu komfora, pri čemu bi radnici mogli da imaju znatno veći učinak pri radu. Dalje, se iz tabele vidi da je osvetljenost uglavnom zadovoljavajuća na svim radnim mestima, dok je buka bila u povećanom iznosu, a u nekim odeljenjima prelazila je i preko sto fona.

Iz priloženih ostalih tabela može se videti da je stanje mikroklimе, osvetljenosti i buke bilo u pojedinim odeljenjima slično kao u tabeli 1, pa se i ovde mogu primeniti slični postupci za njihovo poboljšanje. Interesantno je, medjutim, navesti da je mikroklimatsko stanje u fabrici "Ivo Lola Ribar" /tabela 5/ u Železniku, ispitivano u zimskim uslovima, daleko ispod donje granice zone komfora. To je još interesantnije i zbog toga što je ovo novije preduzeće, a pitanje grejanja u hladnim danima nije u potpunosti rešeno. Jasno je da će ovakvo stanje imati uticaja na produktivnost rada.

Veliki broj ispitivanja mikroklimatskih i ostalih faktora obavljenih u raznim privrednim granama u NR Srbiji i drugim republikama pokazao je da je njihovo stanje u velikom broju slučajeva bilo van zone komfora ma u koje doba godine. Iz svega ovoga može se zaključiti da bi se poboljšanjem uslova rada povećala u mnogome i sama produktivnost.

ŽELJEZARA SMEDEREVO
U letnjem periodu t-22; Rv-60%

Tabela 1

Naziv odeljenja	t	Rv	W	tr	e.t.	Zona konfora	Osvetljenost u luksima	Buka u fonima
Kovačnica zagrevne peći	27	65	0,45	94	23,5	u z.k.	50	94 - 100
Čelična (peć)	28	78	0,55	80	25,5	iznad gornje granice z.k.	180	86 - 94
Valjaonica lima I	28	72	0,70	69	25	—	55	100- 102
Nova valjaonica	36	75	0,10	61	33	Daleko iznad gornje granice z.k.	150	93 / 105
Pocinkovaonica	25	75	0,40	-	23	u z.k.	250	74 - 86
Gasgenerator	26	64	0,56	-	23	u z.k.	180	78 - 95
Kabina vezača kрана u novoj valjaonici	34	50	0,05	-	30	Daleko iznad gornje granice z.k.	250	86 - 94

R U D N I K I T O P I O N I C A " T R E P Č A "
U letnjem periodu t-25; Rv-44

Tabela 2

Naziv odeljenja	t	Rv	W	tr	e.t.	Zona konfora	Osvetljenost u luksima	Buka u fonima
Fletacija	17	72	0,16	-	16	Ispod donje granice z.k.	36	86,- 90
Drobitlice flotacija	20	51	0,20	-	18	u z.k.	240	92 - 104
Visoka peć izlivanje	32	41	0,92	62	25	Iznad gornje granice z.k.	140	80 - 94
Pržionica	28	37	0,20	38	23	u z.k.	320	98 - 99
Koritaste peći	26	34	0,10	80	22	-"-	64	92 - 98
Mehanički filtri	22,5	41	0,22	-	19	-"-	50	84 - 95
Gasgenerator	18	58	0,40	-	16,5	Ispod donje granice z.k.	1.100	76 - 98
Rafinerija	32	41	0,80	65	24,5	Na gornjoj granici z.k.	125	78 - 90
Rudnik Stari Trg jama-horizont 9	28	96	0,09	-	27,5	Iznad gornje granice z.k.	2,5	92 - 116
Horizont 6	23,5	92	0,29	-	22	u z.k.	2,0	90 - 104
Radilište 3	28,5	45	0,25	-	23,2	u z.k.	2,5	92 - 116

"MAGNOHROM" KRALJEVO

Tabela 3

Naziv odeljenja	t	Rv	W	tr	e.t.	Zona konfora	Osvetljenost u luksima	Buka u fonima
Rotaciona peć (glavna)	38	28	0,10	92,5	28,5	Iznad gornje granice z.k.	90	82
Rotaciona peć sinteriši	35	28	0,08	92	27	-"-	95	82
Hladnjak otprašna komora	36	45	1,60	-	28,5	-"-	92	94
Mlinovi - predajna traka	24	43	0,50	-	20	u z.k.	50	86
Mlinovi kuglični i cevasti	22	47	0,27	-	18	u z.k.	59	96 - 106
Komorna peć i pražnjenje	31	40	0,20	102	25,5	Iznad gornje granice z.k.	68	72
Sušara komorne peći pri radu vent.	24	37	6,25	-	16	Iznad donje granice z.k.	47	84 - 93
Sušara posle dva sata otvaranja i bez rada ventilatora	26	40	0,20	42	25	Iznad gornje granice z.k.	47	72
Punjenje komorne peći	24,5	47	0,25	55	30	-"-	60	72
Tunelske peći sušara	70	28	0,56	94	55	-"-	48	70 - 82
Tunelske peći kanal	42	35	0,20	44	30	-"-	26	76 - 84
Pražnjenje opeka sa vrućih vagoneta	20	47	0,08	-	19	u z.k.	54	80

F A B R I K A V A G O N A
"K R A L J E V O"
Lenji period t-27; Rv-55%

Tabela 4

Naziv odeljenja	t	Rv	W	tr	e.t.	Zona komfora	Osvetljenost u luksima	Buka u fonima
Kovačnica plamene peći	33	30	0,98	98	26	Iznad gornje granice z.k.	240	92 - 100
Gibnjara naftne peći	33,5	42	0,10	70	29,2	-"-	1.100	101 - 104
Kalionica	31	40	0,10	-	26	-"-	1.150	92 - 100
Obrada topkova	34	41	0,12	83	27,2	-"-	1.420	86
Vagonsko odeljenje	25,5	70	0,15	-	23,5	u z.k.	1.500	98 - 104
Obrada alata	27	59	0,30	-	23,5	u z.k.	1.500	85 - 88
Odeljenje za izradu konstrukcija	26	69	0,20	-	23,6	u z.k.	1.430	96 - 104
Strugarsko odeljenje	25	57	0,17	-	22,5	u z.k.	320	97 - 102

"IVO LOLA RIBAR" ŽELEZNIK

Zimski period t-2; Rv-65%

Tabela 5

Naziv odeljenja	t	Rv	W	tr.	e.t.	Zona komfora	Osvetljenost u luksima	Buka u fonima
Livnica - formeraj	6	93	0,30	-	4	Ispod donje granice z.k.	160	96
Brusilica	9	76	0,22	-	8	-"-	850	94 - 104
Frezeraaj	10	70	0,27	-	8,5	-"-	180	100
Strugarnica	11,5	77	0,30	-	10	-"-	1.350	94
Montaža	12	76	0,36	-	10,5	-"-	240	84 - 98
Hobleraj	12	83	0,35	-	10,2	-"-	250	92 - 96
Alatnica	14	74	0,28	-	12	-"-	1.500	83 - 92
Bravarnica	10,5	76	0,40	-	8,5	-"-	380	79 - 104



JUGOSLOVENSKI KOMITET ZA OSVETLJENJE
COMITÉ YOUGOSLAVE DE L'ÉCLAIRAGE

V SAVJETOVANJE O RASVJETI

DRAGOMIR SIMEUNOVIĆ

OSVETLJENJE U INDUSTRIJI
NR SRBIJE

OPATIJA 1., 2., 3. DECEMBRA 1961.



OSVETLJENJE U INDUSTRIJI NR SRBIJE

Cilj ove teme je da prikaže stanje osvetljenosti u pojedinim granama industrije NRS s osvrtom na sigurnost pri radu.

Podaci izneti ovde predstavljaju samo deo rezultata višegodišnjih ispitivanja osvetljavanja i merenja osvetljenosti u pojedinim preduzećima NRS. Osvetljavanje radnih prostorija obavlja se prirodnom i veštačkom svetlošću. Veštačkim osvetljenjem koristi se uglavnom noću i u toku dana gde je prirodno osvetljavanje nedovoljno. Isto tako njim se koristi u zatvorenim kao i podzemnim prostorijama.

Dnevno osvetljavanje pojedinih prostorija zavisi od niza činilaca. Oni mogu da se podele na:

- astronomsko-geografske,
- meteorološke,
- tehničke.

U astronomsko-geografske činioce spadaju položaj sunca na nebu, geografska širina mesta, orijentacija zgrade i providnih površina na njoj; kao i relief okoline gde je zgrada postavljena.

U meteorološke činioce dolaze jasnost atmosfere — naoblacenje, sadržaj vodene pare, prašine, dimova u atmosferi i dr.

Tehnički činioci su mnogobrojni, a mogu se podeliti na spoljašnje i unutrašnje. Spoljašnji se odnose na zaklonjenost od susednih zgrada i drveća, kao i njihovu veličinu i udaljenost. Unutrašnji činioci okoline radnog mesta i prostorije koji utiču na dnevno osvetljavanje su najvažniji. Ovde navodimo neke od njih, kao što su:

- dimenzije i oblik same prostorije,
- veličina i položaj zastakljenih površina,
- položaj radnog mesta u prostoriji,
- raspored ostalih radnih mesta i predmeta,
- zakrčenost prostorije i prenatrpanost samog radnog mesta,
- boja zidova, tavanice i poda,
- koncentracija prašine, dimova i para u vazduhu prostorije.

Što se tiče veštačkog osvetljavanja radnih prostorija, ono takođe zavisi od niza činilaca. Tako na

primer zavisi od položaja sijaličnih mesta, jačine i vrste sijalica, rasporeda sijaličnih mesta, udaljenosti sijalica, čistoće samih sijalica i mnogih drugih činilaca.

Za sigurnost pri radu zaposlenog čoveka ipak je najvažnije pravilno osvetljavanje radnog mesta i okoline, bilo prirodnom ili veštačkom svetlošću.

Tokom ispitivanja opšte osvetljenosti prostorija stručna lica su na očitu pažnju posvećivala ispitivanju osvetljenosti samog radnog mesta i njegove neposredne okoline.

Za merenje osvetljenosti upotrebljavan je luksmetar po Dr. B. Lange Photo-Element S 145. Osvetljenost je merena direktno na radnom mestu — odnosno na površini gde se obavljaju poslovi. Isto tako merena je i odbojna svetlost u visini očiju radnika na radnim mestima.

Pored osvetljenosti, u radnim prostorijama su ispitivani i ostali faktori kao mikroklima, industrijska buka, industrijska prašina, gasovi i dr.

Isto tako ispitivano je i stanje higijensko-tehničke zaštite i sigurnosti pri radu s obzirom na sve gore pomenute činioce.

Imajući u vidu proces rada u dotičnom preduzeću i na radnom mestu, kao i celokupno nađeno stanje s obzirom na sve gore pomenute faktore, stručnjaci odeljenja medicine rada Higijenskog instituta NRS u svom elaboratu uvek su davali konkretne predloge i načine da se obezbedi sigurnost pri radu. Posebno mesto u ovim elaboratima posvećivano je pitanju pravilnog osvetljavanja radnih prostorija. Pri tome se vodilo računa o vrstama poslova koji se u dotičnoj prostoriji i na radnom mestu obavljaju kao i o uticaju osvetljenosti na zdravlje zaposlenih ljudi.

Zbog ograničenosti prostora i vremena ovde iznosimo samo neke podatke u vezi osvetljavanja i sigurnosti pri radu u industriji NR Srbije.

Usled velikog broja preduzeća u kojima je ispitivano stanje osvetljavanja, kao i velikog broja činilaca koji na ovo utiču, u prikazu koji se ovde prilaže dajemo stvarno stanje osvetljenosti me-

reno na pojedinim radnim mestima i prostorijama na licu mesta i to u:

- 5 tekstilnih preduzeća
- 5 grafičkih preduzeća
- 5 preduzeća metalne industrije
- 2 preduzeća hemijske industrije
- 4 rudnika (2 metalna i 2 rudnika uglja)
- 1 fabrici stakla
- 1 fabrici obuće i
- 1 fabrici prehrambene industrije (fabrici piva i kvasca) što ukupno obuhvata 24 preduzeća na teritoriji NR Srbije.

U ovom prikazu može se videti razlika u osvetljenosti na pojedinim radnim mestima gde se obavljaju isti poslovi ali u raznim preduzećima, kao i razlike u osvetljenosti gde se obavljaju različiti poslovi počev od kopanja i utovara rude pa do najfinijih poslova kao što je na primer graviranje. Iz tabela prikaza osvetljenosti može se videti za svako preduzeće naziv radne prostorije, jačina osvetljenosti izražena u luksima na površini radnog mesta, odbojna osvetljenost merena u visini očiju kao i vrsta osvetljenja. Iz samog naziva prostorija lako se zaključuje kakvi se u njoj poslovi obavljaju.

Napominjemo da je u pojedinim prostorijama vršeno više merenja osvetljenosti, ali je u tabelama dato uglavnom samo po jedno karakteristično merenje za svaku radnu prostoriju.

Za svako preduzeće dat je i datum merenja. Sva merenja obavljena su danju između 8 i 13 časova. Jedino je u štamparskom preduzeću »Politika« merenje obavljeno noću između 20 i 23 časa.

Kao što se iz prikazanih rezultata merenja vidi, osvetljenost na pojedinim radnim mestima i prostorijama u industriji NR Srbije je veoma različita. Razlozi za ovo su raznovrsni, a dolaze od raznih u početku navedenih čimilaca.

Da bi se u potpunosti moglo prići pravilnom osvetljavanju radnih mesta i prostorija bilo bi potrebno sve čimice koji na ovo utiču uzeti u obzir još pri građenju fabrika i pri određivanju rasporeda pojedinih radnih operacija i radnih mesta u

njima. Isto tako i za ocenjivanje trenutne situacije u pogledu osvetljavanja radnih prostorija i mesta neophodno je uzeti u obzir mnoge čimice što predstavlja jedan veoma obiman posao, pogotovu ako se želi takvo ispitivanje sprovesti u velikom broju i po prirodi posla različitih preduzeća. Ovaj posao zahteva veliku stručnost i iskustvo u radu kao i duži vremenski period.

Poznato je da se bez svetlosti ne bi mogao ni zamisliti normalan život i rad ljudi uopšte. Zato je jedan od glavnih elemenata za sigurnost pri radu dovoljno i pravilno osvetljavanje radnih mesta i prostorija.

Nedovoljno i nepravilno osvetljavanje radnih mesta, prostorija i okoline može da ima teške posledice kao na primer:

- veoma teške pa čak i smrtne povrede,
- delimično ili potpuno oštećenje organa vida,
- jako naprezanje i zamaranje na poslu koje povlači i niz drugih posledica,
- loše psihičko delovanje na raspoloženje i rad itd.

Pored toga što nepravilno osvetljavanje utiče na sigurnost pri radu, ono ima i veliki utjecaj na produktivnost rada.

Da bi se osiguralo pravilno osvetljavanje u industriji i uopšte, potrebno je što pre doneti izvesne propise i norme o tome. Norme treba naročito da obezbede dovoljan početni nivo za osvetljenost uopšte ispod koga se ne bi smelo ići. Ovo je veoma značajno i treba mu posvetiti naročitu pažnju. Pored stručnog tehničkog osoblja i stručnjaka za medicinu rada, u izradi predloga i davanja potrebnih normi za osvetljenje treba da učestvuju fiziolozi, okulisti, kao i psiholozi.

Iz navedenih merenja na radnim mestima u industriji NR Srbije, a i onih koja ovde nisu izneta, može se zaključiti da je stanje osvetljenosti u velikom broju slučajeva zadovoljavajuće, izuzev kod osvetljavanja u rudnicima i drugim podzemnim prostorijama kao i izvesnim sporednim prostorijama uopšte.

PRIKAZ OSVETLJENOSTI U POJEDINIM GRANAMA INDUSTRIJE NR SRBIJE

TEKSTILNA INDUSTRIJA

Redni broj	Radna prostorija	Nađena osvetljenost lux		Vrsta osvetljenja
		Na površini radnog mesta	Odbojna u visini očiju	
I »Branko Krsmanović« — Paraćin (mereno 11 XI 1959. g.)				
1	Prepredanje	90	25	prirodna
2	Stara predionica	130	35	prirodna
3	Farbara pri predionici	210	26	prirodna
4	Prepredanje — velika prostorija	330	70	prirodna
5	Predionica vlačne vune	150	60	prirodna
6	Predionica — druga zgrada	110	40	prirodna
7	Vunovlačare	90	20	kombinovana
8	Češljaonica na spratu	190	80	prirodna
9	Farbara	300	60	prirodna
10	Končano-snovačko	1300	120	prirodna
11	Tkačnica	1700	260	prirodna
II »Oktobarska sloboda« — Beograd (mereno 15 VII 1957. g.)				
1	Farbara	300	40	prirodna
2	Presovanje vune	250	30	prirodna
3	Predionica — nova	1600	150	prirodna
4	Predionica/I	1200	150	prirodna
5	Predionica/II	2100	250	prirodna
6	Stare vlačare	500	150	prirodna
7	Nove vlačare	900	50	prirodna
8	Tkačnica nova	250	100	prirodna
9	Tkačnica »Dunav«	450	20	prirodna
10	Tkačnica »Široko«	200	50	prirodna
11	Tkačnica »Brzo«	285	20	prirodna
III Tekstilna industrija »Beograd« (mereno 21 I 1959. g.)				
1	Vlačare — donje	62	31	kombinovana
2	Vlačare — gornje	98	35	kombinovana
3	Predionica — nova	180	40	prirodna
4	Špuleraj	1200	72	prirodna
5	Premotavanje	540	48	prirodna
6	Uvođenje	1150	100	kombinovana
7	Tkačnica	400	28	prirodna
8	Farbara I	900	80	prirodna
9	Farbara II	220	120	prirodna
10	Belionica	560	170	prirodna
11	Čišćenje komada	1200	200	prirodna
IV »Raška« — Novi Pazar (mereno 26 IV 1960. g.)				
1	Predionica I	2000	150	prirodna
2	Predionica II	900	60	prirodna
3	Priprema — premotavanje	1400	150	prirodna
4	Namotavanje	600	100	prirodna
5	Tkačnica	1700	60	prirodna
6	Čišćenje komada	2200	150	prirodna
7	Pegleraj	900	150	prirodna
8	Krojačnica	2200	370	prirodna
9	Trikotaža	1600	100	prirodna
10	Konfekcija	1200	250	prirodna
11	Pakovanje	1700	300	prirodna

Redni broj	Radna prostorija	Nadena osvetljenost lux		Vrsta osvetljenja
		Na površini radnog mesta	Odbojna u visini očiju	
V »Kosovka« — Priština (mereno 25 IV 1960. g.)				
1	Regeneracija	380	90	prirodna
2	Predionica	2100	300	prirodna
3	Kontaonica	1200	250	prirodna
4	Tkačnica	900	200	prirodna
5	Dubliranje	900	190	prirodna
6	Veštačko vlakno	600	220	prirodna
7	Pakeraj	1400	200	prirodna

GRAFIČKA INDUSTRIJA

I Beogradski grafički zavod — Beograd (mereno 6 III 1959. g.)

1	Ručna slagačnica	150	95	prirodna
2	Mašinska slagačnica	200	30	prirodna
3	Duboka štampa	240	170	prirodna
4	Ofset štampa	120	55	prirodna
5	Tipomašinarica	300	105	prirodna
6	Stereotipija	68	20	kombinovana
7	Monotip	1100	105	prirodna
8	Papirnica	80	50	prirodna
9	Knjigoveznica	1300	60	prirodna
10	Rotacija — štampa	170	65	prirodna
11	Eceraj	120	30	kombinovana
12	Livnica olova	100	26	kombinovana

II Štamparsko izdavačko preduzeće »Borba« Beograd (mereno 11. IV 1960. g.)

1	Ručna slagačnica/IV	950	60	prirodna
2	Ručna slagačnica/V	650	160	prirodna
3	Mašinska slagačnica	150	62	kombinovana
4	Flah štampa	62	17	kombinovana
5	Stereotipija	150	20	kombinovana
6	Rotacija — štampa (stare mašine)	165	32	veštačka
7	Rotacija — štampa (nove mašine)	160	30	veštačka
8	Monotip	240	9	prirodna
9	Eceraj	60	12	kombinovana

III Štamparsko preduzeće »Novi dani« — Beograd (mereno 29. IV 1959. g.)

1	Ručna slagačnica	240	96	prirodna
2	Livnica olova	66	18	kombinovana
3	Ofset štampa	155	92	prirodna
4	Knjigoveznica	90	40	kombinovana
5	Cinkografija	60	30	kombinovana
6	Kopirnica	500	40	prirodna

IV Zavod za izradu novčanica — Beograd (mereno 23. V 1959. g.)

1	Ručna slagačnica	420	95	prirodna
2	Tipomašinarica	300	40	prirodna
3	Monotip	400	90	prirodna
4	Djori mašine — štampa	1500	300	prirodna
5	Knjigoveznica	280	40	prirodna
6	Sortirnica	550	150	prirodna
7	Brojačnica novca I	1500	400	prirodna
8	Brojačnica novca II	600	100	prirodna
9	Obrada klišeja	300	90	prirodna
10	Cinkografija	700	200	prirodna
11	Gravirnica	1300	700	prirodna

Redni broj	Radna prostorija	Nađena osvetljenost lux		Vrsta osvetljenja
		Na površini radnog mesta	Odbojna u visini očiju	
V Novinsko izdavačko »Politika« — Beograd (mereno 16 XI 1957. g.)				
1	Ručna slagačnica	220	25	veštačka
2	Linotip	400	20	veštačka
3	Frez mašine	70	5	veštačka
4	Stereotipija	350	20	veštačka
5	Rotacija — stara mašina	250	30	veštačka
6	Rotacija — nova mašina	260	30	veštačka
7	Cinkografija	300	75	veštačka

METALNA INDUSTRIJA

I »Ivo Lola Ribar« — Železnik (mereno 6. V 1958. g.)

1	Obrada čeličnih konstrukcija	1430	120	prirodna
2	Kovačnica	560	70	prirodna
3	Metalna obrada — zapadno	300	15	prirodna
4	Metalna obrada — severno	280	14	prirodna
5	Metalna obrada — sredina	1700	200	prirodna
6	Alatnica — sredina	320	20	prirodna

II Brodogradilište »Tito« — Beograd (mereno 3. VIII 1961. g.)

1	Jezgrarnica	58	15	kombinovana
2	Livnica ispred sušare	2600	98	prirodna
3	Livnica ispred čistionice	450	31	prirodna
4	Čistionica odlivaka	250	32	prirodna
5	Alatnica	300	95	prirodna
6	Mašinsko I	140	25	prirodna
7	Mašinsko II	450	50	prirodna
8	Mašinsko III	290	20	prirodna
9	Mašinsko IV	350	68	prirodna
10	Mašinsko V	300	42	prirodna
11	Kovačnica	120	35	prirodna
12	Brodo-kovačko — južno	1000	95	prirodna
13	Brodo-kovačko — sredina	495	85	prirodna

III »Jugostroj« Rakovica — (mereno 8. III 1957. g.)

1	Farbara	30	11	kombinovana
2	Montaža	330	110	prirodna
3	Stolarnica	320	120	prirodna
4	Modelarnica	200	20	prirodna
5	Kovačnica	250	20	prirodna
6	Livnica — formeraj	150	15	prirodna
7	Livnica — topionica	250	15	prirodna
8	Mašinsko	600	100	prirodna
9	Limarsko	250	15	prirodna
10	Ložionica	30	11	kombinovana
11	Niklarnica	60	15	prirodna

IV Fabrika kablova — Svetozarevo (mereno 24. X 1960. g.)

1	Livnica — prizemlje	300	45	prirodna
2	Prva platforma gas generatori	620	40	prirodna
3	Druga platforma — livna peć	360	150	prirodna
4	Treća platforma — šaržeri	600	200	prirodna
5	Gas-generatori	700	30	prirodna
6	Valjački stan I	650	40	prirodna
7	Pruga 260	960	60	prirodna

Redni broj	Radna prostorija	Nađena osvetljenost lux		Vrsta osvetljenja
		Na površini radnog mesta	Odbojna u visini očiju	
8	Na mostu — sredina	340	20	prirodna
9	Mašinska radionica valjaonice	1100	450	prirodna
10	Kalajdžinica	400	62	prirodna
11	Zičara — sredina	200	22	prirodna
12	Impregnacija kablova kod olovne prese	400	30	prirodna
13	Pletara	450	30	prirodna
14	Gumara — sredina	430	27	prirodna
15	Lakirnica — sredina	1000	100	prirodna
16	Farbara	190	40	prirodna
17	Polirnica — sredina	2550	550	prirodna
18	Kovačnica	325	25	prirodna
V Fabrika automobila — Priboj (mereno 22. X 1959. g.)				
1	Karoserica	750	55	prirodna
2	Montaža autobusa	420	110	prirodna
3	Električno odeljenje	320	47	prirodna
4	Gumara	655	60	prirodna
5	Linijska montaža I	120	5	prirodna
6	Linijska montaža II	220	27	prirodna
7	Nitovanje šasija	210	30	prirodna
8	Kod mašine »TOS« 34359	430	55	prirodna
9	Kod mašine »TOS« 3602	450	40	prirodna
10	Kod mašine »MAS« 3586	550	30	prirodna
11	Brusilica 1138	420	32	prirodna
12	Mašina »MAS« 3590	625	25	prirodna
13	Kovačnica	22	5	kombinovana
14	Kalionica	12	5	kombinovana
15	Karoserica — limarnica	900	42	prirodna
16	Karoserica — vazdušni čekići	850	50	prirodna
17	Karoserica — krupna limarija	820	90	prirodna
18	Lakirnica	850	300	prirodna
19	Alatnica	980	200	prirodna

HEMIJSKA INDUSTRIJA

I »Zorka« Subotica (mereno 25. VI 1956. g.)

1	Pržionica	360	90	prirodna
2	Gornja platforma	250	30	prirodna
3	Ispiranje gasova	300	30	prirodna
4	Kontaktne peći — platforma	350	60	prirodna
5	Sumporni dioksid	180	20	prirodna
6	Kristalni pogon	60	20	prirodna
7	Aluminijum sulfat	75	35	prirodna
8	Natrium sulfat	35	6	kombinovana
9	Super fosfat — podrum	15	4	veštačka

II »Viskoza« — Loznica (mereno 6. XI 1958. g.)

1	Retortne peći — šaržiranje	35	3,5	kombinovana
2	Retortne peći — probijanje	280	44	kombinovana
3	Retortne peći — kondenzacija	35	3,5	kombinovana
4	Topionica sumpora	380	42	prirodna
5	Destilacija — prizemlje	150	40	kombinovana
6	Destilacija / I	130	40	kombinovana
7	Destilacija / II	1115	141	kombinovana
8	Doziranje sirovina	64	10	kombinovana
9	Kotlarnica	25	2	kombinovana

Redni broj	Radna prostorija	Nađena osvetljenost lux		Vrsta osvetljenja
		Na površini radnog mesta	Odbojna u visini očiju	
10	Alkalizacija	140	14	kombinovana
11	Matiranje cel vlakna	87	6,5	kombinovana
12	Pranje kiselih otpadaka	69	4	kombinovana
13	Filter prese	39	4	kombinovana
14	Lužna stanica	60	4	kombinovana

RUDARSTVO

I Rudnik i topionica olova i cinka »Trepča« — Zvečan Rudnik Stari Trg (mereno 5. II 1959. g.)

1	Prilaz starom oknu — 730	30	8	veštačka
2	Sipka u hodniku — 730	6	0,5	veštačka
3	IV horizont — 735	6	1	veštačka
4	Otkop 90/15 — karbitna lampa	3	0,1	veštačka
5	V horizont — centralna sipka (električno)	35	15	veštačka
6	IX horizont — pumpna stanica (električno)	35	16	veštačka
7	Drobnica ispod izvoznog postrojenja	7,5	1	veštačka

Topionica — Zvečan (mereno 10. II 1959. g.)

8	Drobnica I — prizemlje	200	30	kombinovana
9	Rešetka na platformi	250	60	kombinovana
10	Magneti	280	54	kombinovana
11	Rešetka drobnice II	260	32	kombinovana
12	Platforma drobnice II	260	28	kombinovana
13	Male drobnice — prizemlje	120	14	kombinovana
14	Okrugli bunker	290	63	prirodna
15	Zičara — bunker	409	87	prirodna
16	Istovar korpi	420	90	prirodna
17	Sahtne peći 2-3	60	30	kombinovana
18	Šaržiranje peći platforma	380	20	prirodna
19	Koritaste peći-stare	35	5	kombinovana
20	Koritaste peći-nove	38	7	kombinovana

II Rudnik antimona — Zajača (mereno 5. X 1957 g.)

Okno — Mamutovac

1	Radilište broj 3	25	5	veštačka
2	Radilište broj 6	12	7	veštačka
3	Radilište broj 183	20	5	veštačka
4	Glavna izvozna rešetka	25	5	veštačka
5	Glavna izvozna rešetka s druge strane	21	4	veštačka

Okno — Zavorje

6	Radilište broj 131	12	5	veštačka
7	Radilište broj 109	15	9	veštačka
8	Radilište broj 111	15	7	veštačka
9	Radilište broj 127	15	6	veštačka

Okno — Stolica

10	Radilište br. 7C	30	10	veštačka
11	Radilište br. 7A	30	10	veštačka
12	Radilište br. 13	20	5	veštačka
13	Radilište br. 16A	15	5	veštačka
14	Radilište br. 56	20	10	veštačka

Okno — Veliki Majdan

15	Okno — centralni šut	15	7	veštačka
16	Radilište br. 808	15	5	veštačka
17	Radilište br. 701	20	10	veštačka
18	Radilište br. 802	15	7	veštačka

Redni broj	Radna prostorija	Nađena osvetljenost lux		Vrsta osvetljenja
		Na površini radnog mesta	Odbojna u visini očiju	
Topionica				
19	Priprema šarže	50	20	kombinovana
20	Brener	30	20	kombinovana
21	Flotacija	650	50	prirodna
III Rudnik uglja »Podvis« — Knjaževac (mereno 29-X-1957 g.)				
1	Radilište br. 515	3	0,2	veštačka
2	Radilište br. 516	2,5	0,1	veštačka
3	Radilište br. 920-B	2,6	0,1	veštačka
4	Radilište br. 926	3,2	0,3	veštačka
5	Bunker-separacije	150	15	kombinovana
6	Bacanje uglja u bunker	150	17	kombinovana
IV Rudnik uglja »Dobra Sreća« — Knjaževac (mereno 30-X-1957 g.)				
1	Vetrena stanica trećeg horizonta	2,8	0,1	veštačka
2	Radilište br. 54	6	0	veštačka
3	Radilište br. 52	5	0,1	veštačka
4	Radilište br. 501	3,5	0,2	veštačka
5	Sipanje uglja na traku	30	2	veštačka

OSTALA PREDUZEĆA

Srpska fabrika stakla — Paraćin (mereno 28. X 1960 g.)				
1	Peć I na platou — stari pogon	500	60	prirodna
2	Bubanj peć	105	40	prirodna
3	Hladnjača 7 za peć 4	300	68	prirodna
4	Gravirnica	2000	500	prirodna
5	Lončana peć	650	40	prirodna
6	Radilište br. 3	650	40	prirodna
7	Radilište br. 5	600	38	prirodna
8	Kadna peć II	140	60	prirodna
9	Kadna peć br. 5	95	52	prirodno
10	Volof mašina — birači stakla	200	25	prirodna
11	P-1 izrada flaša	200	25	prirodna
12	Nova mešaonica	420	240	prirodna
13	Hranjenje peći	1700	300	prirodna
14	Slikarnica	400	120	prirodna
15	Automatsko dekorisanje	115	40	prirodna
16	Dekopir mašina	38	4	kombinovana
Fabrika obuće »Proleter« — Beograd (mereno 22-V-1959 g.)				
1	Štanceraj	550	115	prirodna
2	Štanceraj — dovršavanje	120	17	prirodna
3	Štanceraj — lepljenje	45	15	prirodna
4	Kružna obrada-krug 1	420	12	prirodna
5	Krug 3	145	92	prirodna
6	Krug C	88	54	prirodna
7	Krojačnica	300	115	prirodna
8	Mašinsko	60	30	prirodna
9	Krug 5 i 2	120	80	prirodna
Fabrika piva i kvasca — Svetozarevo (mereno 13-XI-1959. g.)				
1	Čišćenje ječma — trijeri	250	10	prirodno
2	Potapanje ječma	30	13	prirodno
3	Bazeni za klijanje	5	1,5	kombinovana
4	Otakanje piva	12	4	kombinovana

RUPARSKI INSTITUT, BEOGRAD - INSTITUTE OF MINES, BEOGRAD, YUGOSLAVIA

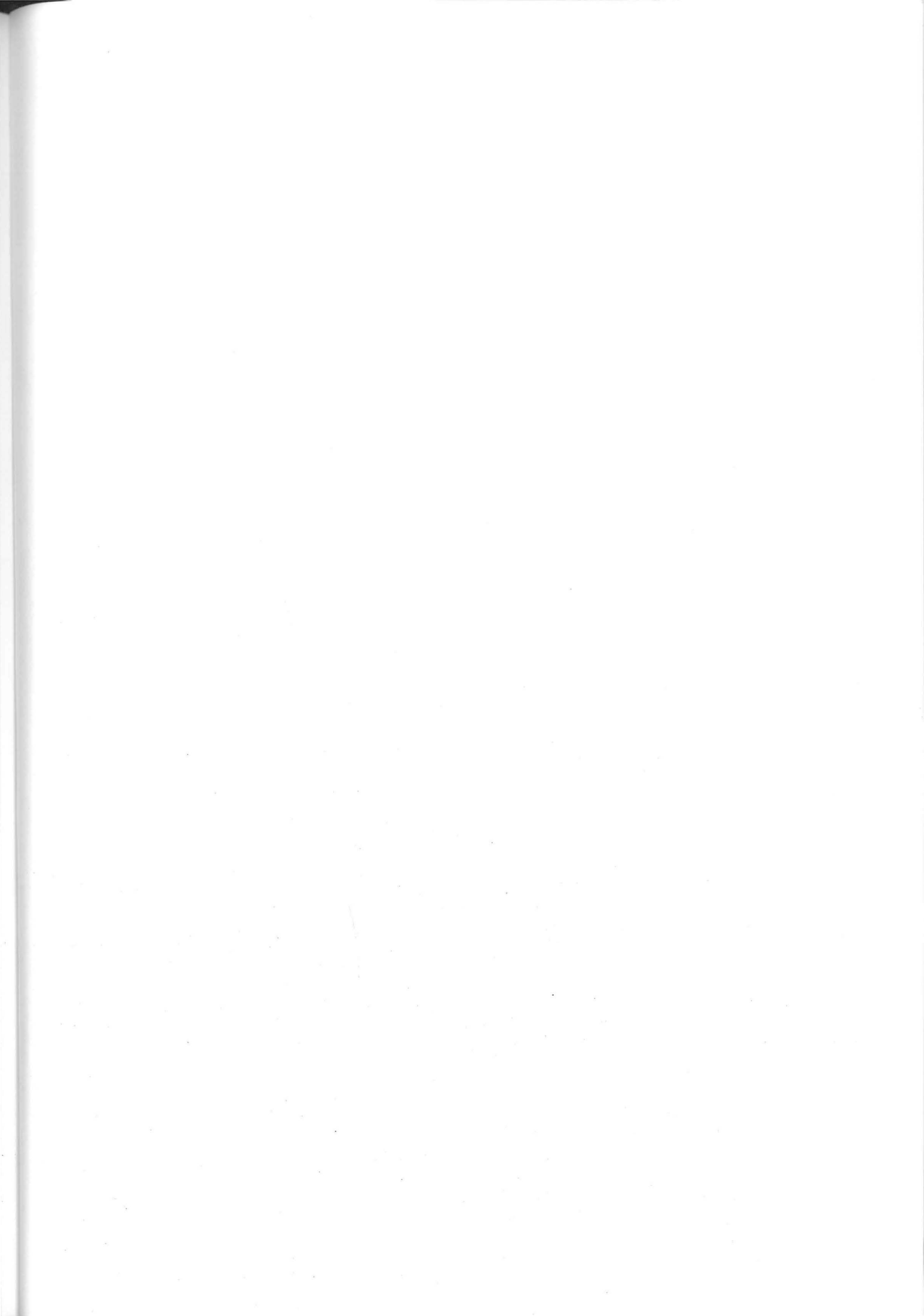


Separat

GOD. IV (1965) SVESKA 2

REPRINTED FROM
BULLETIN OF MINES
vol. 4 (1965) Nr. 2

BEOGRAD, 1965. GODINE



Metoda sukcesivne aproksimacije primenjena u prostom dijagonalnom sistemu razvođenja vazduha po jami

(sa 2 slike)

Dipl. mat. Dragomir Simeunović

Ovde ćemo se osvrnuti na primenu metode sukcesivne aproksimacije za rešavanje skupa jednačina, koje su od osnovnog značaja pri prostom dijagonalnom sistemu razvođenja vazduha po jami. Vodeći računa o uslovima pri kojima postoje rešenja koja odgovaraju prirodni postavljenog problema, daćemo postupak da se do približnog rešenja brže dođe i ocenu greške približnog u odnosu na tačno rešenje.

Sistem jednačina o kojima je ovde reč, dat je u [1] i ima oblik:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{M_2 + M_4(1+y)^2}{M_1}} & (1) \\ y &= \sqrt{\frac{M_3 + M_5(1+x)^2}{M_3}} & (2) \end{aligned} \right\} (I)$$

gde su M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 pozitivni brojevi.

Rešenja x^* i y^* sistema (I) moraju biti pozitivna da bi odgovarala prirodni postavljenog problema.

Kad stavimo:

$$\frac{M_2}{M_1} = a_1, \frac{M_4}{M_1} = a_2; \frac{M_3}{M_3} = b_1, \frac{M_5}{M_3} = b_2 \quad (3)$$

sistem (I) možemo da napišemo u obliku:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{a_1 + a_2(1+y)^2} & (1') \\ y &= \sqrt{b_1 + b_2(1+x)^2} & (2') \end{aligned} \right\} (I')$$

Međutim, kako rešavanje sistema (I') do- vodi do rešavanja opšte jednačine četvrtog stepena, to se u praksi primenjuju metode koje daju njihova približna rešenja.

Postupak nalaženja približnih rešenja si- stema (I) odnosno (I') izložen je u [1], a u obimu koji odgovara nameni ovakvog udžbe- nika. Zato ćemo u ovom radu izvršiti de- taljniju analizu problema nalaženja pribli- žnih rešenja, koristeći Banach-ov stav [2] o invarijabilnoj tački preslikavanja.

Na osnovu Banachovog stava, da bi jedna- čina

$$x = f(x) \quad (4)$$

imala jedno i samo jedno rešenje u interva- lu $[a, b]$ potrebno je i dovoljno da funkcija $f(x)$ ima vrednosti u tome intervalu i da je kontrakcija; a da bi funkcija $f(x)$ bila kon- trakcija dovoljno je da je ona diferencija- bilna u $[a, b]$ i da je:

$$|f'(x)| \leq q < 1 \quad (5)$$

U ovom slučaju se do rešenja jednačine (4) dolazi metodom sukcesivne aproksimacije kad se za početnu vrednost uzme proizvoljno x_0 iz $[a, b]$ i formira niz:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots \quad (6)$$

Za odstupanje tačnog rešenja x^* od n-tog približnog rešenja x_n jednačine (4), važi ne- jednačina:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{q^n |x_1 - x_0|}{1 - q} \quad (7)$$

odakle vidimo da ova razlika zavisi od koeficijenta q , od broja n i od početne vrednosti x_0 . Ukoliko je q bliže nuli, postupak (8) brže konvergira, a sporije ako je q bliže jedinici

Iz (7) se vidi da kada $n \rightarrow \infty$, $x_n \rightarrow x^*$ jer je $0 < q < 1$.

Primenimo sada izloženu metodu na rešavanje sistema (I'). Kad vrednost nepoznate y iz (2') zamenimo u (1') dobijamo jednačinu:

$$x = \sqrt{a_1 + a_2 [1 + \sqrt{b_1 + b_2 (1+x)^2}]^2} \quad (8)$$

odakle sledi da je

$$x = f(x),$$

tj.

$$f(x) = \sqrt{a_1 + a_2 [1 + \sqrt{b_1 + b_2 (1+x)^2}]^2} \quad (9)$$

Funkcija $f(x)$ data sa (9), za vrednosti x iz intervala $[0, \infty)$ ima vrednost takođe u intervalu $[0, \infty)$. Za njen prvi izvod u $[0, \infty)$ možemo dokazati da je

$$f'(x) \leq \sqrt{a_2 b_2} = q, \quad (10)$$

a da bi funkcija $f(x)$ bila kontrakcija treba da je

$$\sqrt{a_2 b_2} = q < 1 \quad (11)$$

tj. da je $a_2 b_2 < 1$, ili što prema (3) daje

$$a_2 b_2 = \frac{M_4 M_5}{M_1 M_3} < 1 \quad (12)$$

odakle je

$$\frac{M_4}{M_5} > \frac{M_1}{M_3} \quad (13)$$

Uslov (13) poklapa se sa uslovom (93c) datim u [1], str. 120.

Za prvi izvod funkcije $f(x)$ iz (9) u intervalu $[0, \infty)$ možemo dokazati da važi nejednakost:

$$f'(x) > \frac{a_2 b_2}{\sqrt{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}} = p, \quad (14)$$

što zajedno sa (10) daje:

$$p < f'(x) \leq q \quad (15)$$

Videli smo da niz (6) sve brže konvergira, što je q bliže nuli, a sporije kada je q bliže jedinici. Prvi slučaj prikazan je na slici 1 a) a drugi na slici 1 b).

Kako primena postupka (6) za nalaženje približnog rešenja jednačine (8) u slučaju kada je q bliže jedinici zahteva duži račun, to ćemo ovde izložiti metod koji ubrzava postupak sukcesivne aproksimacije. Radi toga jednačinu (8) napišemo u obliku

$$x - f(x) = 0 \quad (16)$$

i stavimo

$$F(x) = x - f(x), \quad (17)$$

odakle je

$$F'(x) = 1 - f'(x) \quad (18)$$

pa na osnovu (15) važi nejednakost

$$0 < 1 - q \leq F'(x) < 1 - p \quad (19)$$

Obrazujmo sada funkciju

$$\varphi(x) = x - \lambda F(x) \quad (20)$$

gde je λ pozitivan broj koji ćemo naknadno odrediti. Tada se rešenje jednačine

$$F(x) = 0$$

tj. rešenje jednačine (16) svodi na rešenje jednačine

$$x = \varphi(x) \quad (21)$$

Za prvi izvod funkcije $\varphi(x)$ iz (20) dobijamo

$$\varphi'(x) = 1 - \lambda F'(x) \quad (22)$$

odakle na osnovu (19) zaključujemo da je

$$1 - \lambda(1 - p) < \varphi'(x) \leq 1 - \lambda(1 - q) \quad (23)$$

Kako je prema (15) $p < q$, to će $\varphi'(x)$ imati najmanju vrednost kada je

$$\lambda = \frac{2}{2 - (q + p)} \quad (24)$$

U tom slučaju je

$$|\varphi(x)| \leq q_1 \quad (25)$$

gde je

$$q_1 = \frac{q-p}{2-(q+p)} < q < 1, \quad (26)$$

pa funkcija $\varphi(x)$ ispunjava uslove Banahovog stava.

Do rešenja jednačine (21), a tim i jednačine (16) dolazi se na taj način, što se uzme proizvoljna vrednost x_0 iz intervala $[0, \infty)$ i formira niz

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \dots \quad (27)$$

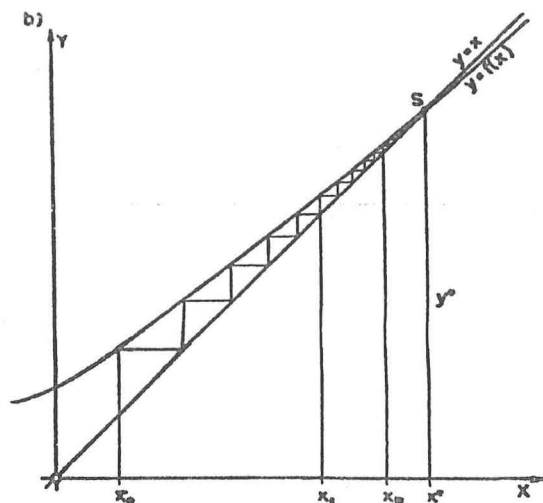
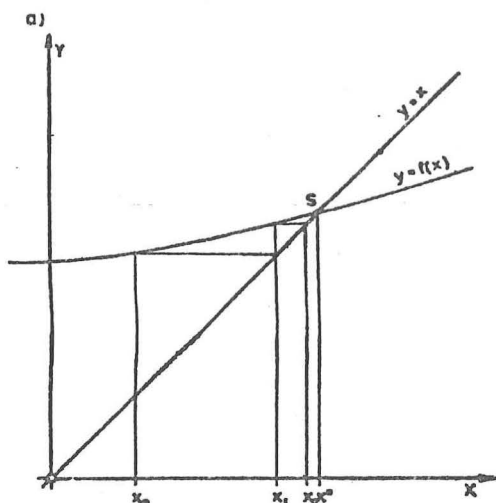
Sad ćemo na jednom konkretnom primeru pokazati dobijanje približnih rešenja sistema (I) primenom ovog drugog postupka. Upoređenja radi, daćemo i niz približnih rešenja dobijenih na prvi način.

Neka veličine otpora izražene u mijurzima imaju sledeće vrednosti:

$$M_1 = 40, M_2 = 10, M_3 = 100, M_4 = 20, M_5 = 50$$

Tada sistem (I') postaje

$$\begin{cases} x = \sqrt{0,25 + 0,5(1+y)^2} & (a) \\ y = \sqrt{0,1 + 0,5(1+x)^2} & (b) \end{cases} \quad (S)$$



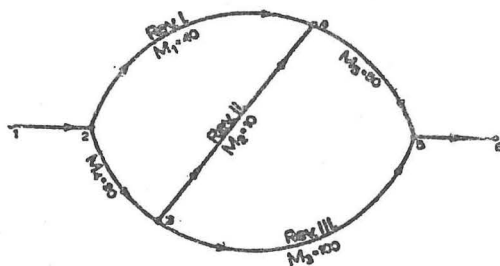
Sl. 1a) i b) — Brzina konvergencije traženog rešenja x^* u zavisnosti od početne vrednosti x_0 i veličine koeficijenta q .

Рис. 1 а) и б) — Скорость конвергенции искомого решения x^* в зависимости от начальной величины x_0 и величины коэффициента q .

Zbog toga što je $q_1 < q$, niz (27) brže konvergira od niza (8). Koliko je to puta brže pokazuje nam koeficijent

$$k = \frac{q}{q_1} \quad (28)$$

Rešavanje jednačine (8) izloženo na prvi način podudara se sa postupkom izloženim u [1]. Međutim, ovaj drugi postupak ubrzava dobijanje rešenja jednačine (8), jer je $q_1 < q$, u čemu se i sastoji njegova praktična vrednost.



Sl. 2 — Šema dijagonalnog sistema provetranja.
Рис. 2. — Схема диагональной системы вентрирования.

Ovde je prema obrascima (11), (14), (24), (26) i (28)

$$q = 0,5; p = 0,37; \lambda = 1,77; q_1 = 0,12; k = 4,17$$

što znači da će se postupkom (27) do rešenja sistema (S) doći četiri puta brže nego postupkom (8). U ovom slučaju jednačina (20) glasi

$$\varphi(x) = x - 1,77 \left(x - \sqrt{0,25 + 0,5 \left[1 + \sqrt{0,1 + 0,5(1+x)^2} \right] k} \right) \quad (c)$$

Ako za početnu vrednost uzmemo

$$x_0 = 1$$

dobićemo iz (c)

$$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(1) = 2,42.$$

Pri ovome smo izračunali i vrednost y_1 pošto je desna strana jednačine (b) sadržana u jednačini (c), pa imamo par približnih vrednosti

$$x_1 = 2,42 \quad y_1 = 1,45$$

Nastavljajući postupak dobijamo:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2,52 & y_2 &= 2,44 \\ x_3 &= 2,53 & y_3 &= 2,51 \\ x_4 &= 2,53 & y_4 &= 2,51 \end{aligned}$$

Imamo dakle za $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,42 & y_1 &= 1,45 \\ x_2 &= 2,52 & y_2 &= 2,44 \\ x_3 &= 2,53 & y_3 &= 2,51 \\ x_4 &= 2,53 & y_4 &= 2,51 \end{aligned}$$

Međutim, primenjujući prvi postupak po osnovnim jednačinama (I') i uzimajući istu početnu vrednost $x_0 = 1$ dobićemo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,80 & y_1 &= 1,45 \\ x_2 &= 2,18 & y_2 &= 2,00 \\ x_3 &= 2,36 & y_3 &= 2,27 \\ x_4 &= 2,45 & y_4 &= 2,39 \\ x_5 &= 2,48 & y_5 &= 2,46 \\ x_6 &= 2,50 & y_6 &= 2,51 \\ x_7 &= 2,53 & y_7 &= 2,51 \\ x_8 &= 2,53 & y_8 &= 2,51 \end{aligned}$$

Na kraju ćemo izračunati grešku približnog rešenja x_3 nepoznate x u odnosu na stvarno rešenje x^* . Ovo ćemo postići kada u obrascu (7) veličinu q zamenimo sa q_1 . Pri tome dobijamo:

$$|x^* - x_3| < 0,002.$$

što znači da približno rešenje $x_3 = 2,53$ ne odstupa od stvarnog rešenja x^* više od 0,002

Na sličan način se može dati ocena greške približnog rešenja $y_3 = 2,51$.

РЕЗЮМЕ

Метод сукцессивной аппроксимации примененный в простой диагональной системе распределения воздуха в шахте

Д. М. Симеунович*)

В этой статье дан метод который ускоряет процесс нахождения приближенного решения системы уравнений которые появляются в диагональной системе распределения воздуха в шахте. Метод применен на конкретном примере и дано сравнение с обычным способом нахождения приближенных решений, которыми пользуются в таких случаях горной практики.

Literatura

1. Jokanović, B., 1960: Provetranje rudnika. — „Građevinska knjiga“, Beograd.
2. Aljančić, S., 1963: Uvod u funkcionalnu analizu. — „Građevinska knjiga“, Beograd.

*) Dragomir Simeunović, asistent na Rudarsko-geološkom fakultetu, Beograd.

RUDARSKI INSTITUT, BEOGRAD - INSTITUTE OF MINES, BEOGRAD, YUGOSLAVIA



S e p a r a t

SIGURNOST U RUDNICIMA

GODINA VII (1972.) SVESKA 3

REPRINTED FROM

SAFETY IN MINES

Vol. 7 (1972) Nr. 3

BEOGRAD 1972. GODINE



O primeni Njutnove metode na rešavanje složenog dijagonalnog sistema u ventilaciji rudnika

(sa 1 slikom)

Dragomir Simeunović, docent -- Branko Vulićević, asistent

U radu se izlaže Njutnova metoda i njena modifikacija za približno rešavanje nelinearnih sistema algebarskih ili transcendentnih jednačina i daje primena ovih metoda kod složenog dijagonalnog sistema u ventilaciji rudnika. Pri tome se iznose uslovi pod kojima se ove metode mogu primeniti i daje ocena greške, što je za praksu od posebnog značaja.

Kod provetravanja rudnika postoji više metoda za rešavanje složenih dijagonalnih sistema. Jedna od njih poznata je kao metoda konvergentnog približavanja. Ova metoda se zasniva na činjenici da je algebarski zbir depresija u jednom zatvorenom poligonu p , u kome nema izvora depresije, jednak nuli, što se može napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{m_p} M_{ip} y_{ip}^a = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

gde su M_{ip} otpori u mijurzima pojedinih ogranaka datog poligona p , y_{ip} odgovarajuće količine vazduha u tim ograncima, a m_p broj ogranaka poligona p . Prema tome, u (1) p označava redni broj poligona, a m_p broj strana toga poligona, videti [1].

Za date otpore M_{ip} treba u ograncima svakog poligona odrediti odgovarajuće količine vazduha y_{ip} . Ovaj problem se svodi na rešavanje jednog sistema od n kvadratnih jednačina sa isto toliko nepoznatih. Pri tome su za praksu od interesa samo ona rešenja x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) datoga sistema jednačina koja ispunjavaju uslove

$$0 < x_i < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i < 1 \quad (3)$$

Za rešavanje ovoga sistema jednačina obično se koristi Njutnova metoda sukcesivnih aproksimacija, kao što je to učinjeno u [1].

Njutnova metoda

Neka je dat sistem od n nelinearnih jednačina

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

sa isto toliko nepoznatih x_1, x_2, \dots, x_n .

Leve strane u (4) predstavljaju sistem od n funkcija sa n argumenata. Argumente x_1, x_2, \dots, x_n i funkcije f_1, f_2, \dots, f_n možemo napisati kao matrice kolone, odnosno kao n -dimenzione vektore, tj.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Na ovaj način sistem jednačina (4) možemo napisati u obliku

$$f(x) = 0 \quad (4')$$

Sistem jednačina (4), odnosno (4') rešavaćemo ovde metodom sukcesivnih aproksimacija pri čemu ćemo prvo izložiti Njutnovu metodu a zatim modifikaciju Njutnove metode.

Neka su $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ približna rešenja sistema (4) dobijena u k -tom približavanju i neka su $d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_n^{(k)}$ redom njihova odstupanja od tačnih rešenja. Tada su tačna rešenja sistema (4)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(k)} + d_1^{(k)} \\ x_2 &= x_2^{(k)} + d_2^{(k)} \\ &\vdots \\ x_n &= x_n^{(k)} + d_n^{(k)} \end{aligned}$$

što možemo napisati u obliku

$$x = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1^{(k)} \\ d_2^{(k)} \\ \vdots \\ d_n^{(k)} \end{bmatrix} = x^{(k)} + d^{(k)} \quad (5)$$

Zamenom (5) u (4') dobija se

$$f(x) = f(x^{(k)} + d^{(k)}) = 0 \quad (6)$$

Neka su funkcije f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sistema (4) definisane i neprekidne u nekoj zatvorenoj oblasti D , koja sadrži x i $x^{(k)}$, i neka ove funkcije u ovoj oblasti imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u odnosu na sve argumente. Tada se ove funkcije u okolini $x^{(k)}$ oblasti D mogu predstaviti Taylorovim obrascem, pa iz (6) imamo da je

$$f(x^{(k)} + d^{(k)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})d^{(k)} + R = 0 \quad (7)$$

gde je R ostatak. Za dovoljno mali vektor $d^{(k)}$ ostatak R u (7) možemo zanemariti pa, umesto jednačine (7), možemo pisati jednačinu

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})d^{(k)} = 0 \quad (8)$$

Jednačina (8) je sistem jednačina

$$\begin{aligned} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j} d_j^{(k)} &= 0 \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_j} d_j^{(k)} &= 0 \quad (8') \\ \dots &\dots \\ f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial x_j} d_j^{(k)} &= 0 \end{aligned}$$

napisan u matičnom obliku, pri čemu je

$$f'(x) = W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

za $x = x^{(k)}$.

Jednačina (8) se zbog (9) može napisati u obliku

$$f(x^{(k)}) + W(x^{(k)})d^{(k)} = 0 \quad (10)$$

Ako je matrica $W(x^{(k)})$ regularna, tada se jednačina (10) može rešiti po $d^{(k)}$, odakle je

$$d^{(k)} = -W^{-1}(x^{(k)}) f(x^{(k)}) \quad (11)$$

gde je $W^{-1}(x^{(k)})$ inverzna matrica matrice $W(x^{(k)})$.

Zbog zanemarivanja ostatka R u jednačini (7) rešenje $d^{(k)}$ dato sa (11) dovodi do sledećeg približnog rešenja sistema (4), odnosno (4'), tj.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$$

koje zbog (11) možemo pisati u obliku

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)}) f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Ova metoda približavanja naziva se Njutnova metoda.

Egzistencija rešenja sistema (4), odnosno (4') i konvergencija Njutnovog procesa (12) osigurani su sledećom teoremom, čiji se dokaz može naći, na primer, u [2], glava XIII.

Teorema 1. — Neka je dat sistem nelinearnih algebarskih ili transcendentnih jednačina (4), gde su funkcije f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog i drugog reda definisane i neprekidne u nekoj zatvorenoj oblasti D . Neka tačka $x^{(0)}$ zajedno sa svojom zatvorenom okolinom \bar{V}_h leži u D , tj.

$$\bar{V}_h(x^{(0)}) = \{ \|x - x^{(0)}\| \leq h \} \subset D^*$$

pri čemu su ispunjeni sledeći uslovi:

1^o matrica $W(x)$ za $x = x^{(0)}$ ima inverznu matricu $W^{-1}(x^{(0)})$,

gde je

$$\|W^{-1}(x^{(0)})\| \leq a_0 \quad (13)$$

$$2^o \quad \|W^{-1}(x^{(0)}) f(x^{(0)})\| \leq b_0 \leq \frac{h}{2} \quad (14)$$

$$3^o \quad \max_{i,j} \sum_{s=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_s} \right| \leq c; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

$$i \ x \in \bar{V}_h(x^{(0)});$$

4^o konstante a_0 , b_0 i c zadovoljavaju nejednačinu

$$q_0 = 2na_0b_0c \leq 1. \quad (16)$$

Tada Njutnov proces (12) pri početnom približnom rešenju $x^{(0)}$ konvergira ka

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}$$

Pod normom $\|A\|$ matrice $A = [a_{ij}]$ ovde ćemo uzimati n -normu,

$$tj. \|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|. \text{ Tako, na pr, za matricu } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \\ -7 & 9 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{je } \|A\| = \max \{ |2| + |-3| + |5| + |4|, |1| + |4| + |-6| + |2|, |-7| + |9| + |2| + |-8| \} = \max \{ 14, 13, 26 \} = 26. \text{ Za matricu } B = \begin{bmatrix} -5 \\ 23 \\ 19 \end{bmatrix}$$

njena norma je $\|B\| = \max \{ |-5|, |23|, |19| \} = 23$

što predstavlja rešenje sistema (4). Pri tome je

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} q_0^{k-1} b_0 \quad (17)$$

Modifikacija Njutnove metode

Kako kod Njutnove metode (12) za rešavanje sistema jednačina (4) u svakom novom koraku približavanja treba ponovo određivati inverznu matricu $W^{-1}(x^{(k)})$, to ćemo ovde izneti modifikaciju Njutnove metode.

Zapravo, ako je matrica $W(x^{(0)})$ neprekidna u okolini traženog rešenja x^* i ako je početno rešenje $x^{(0)}$ dovoljno blisko rešenju x^* , to se umesto

$$W^{-1}(x^{(k)})$$

u (12) može uzeti

$$W^{-1}(x^{(0)})$$

Na taj način rešenje x^* sistema jednačina (4) određujemo sukcesivnim aproksimacijama oblika

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - W^{-1}(x^{(0)}) f(z^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

gde je:

$$z^{(0)} = x^{(0)} \text{ i pri čemu je još } z^{(1)} = x^{(1)}$$

Pri ovome važi teorema 2. Ako su ispunjeni uslovi 1^o–4^o teoreme 1 i

$$q_0 = 2na_0b_0c < 1 \quad (19)$$

to je modifikovani proces Njutna (18) sa početnim približnim rešenjem $z^{(0)} = x^{(0)}$ konvergira rešenju x^* sistema jednačina (4), pri čemu je

$$\|x^* - z^{(k)}\| \leq 2b_0 q_0^k \quad (20)$$

gde je norma uzeta u istom smislu kao i kod teoreme 1.

Dokaz teoreme 2 može se takođe naći u [2], glava XIII.

Njutnovu metodu i njenu modifikaciju primenićemo za rešavanje jednog konkretnog primera. Posmatrajmo kanonsku šemu (slika 1).

Prvi poligon čini trougao sa ograncima 1—2, 1—6 i 6—2. Neka su na ovim ograncima dati redom otpori $M_{11} = 3$, $M_{21} = 1$ i $M_{31} = 12$ sa odgovarajućim količinama vazduha $y_{11} = x_1$, $y_{21} = 1 - x_1$ i $y_{31} = x_2$.

Drugi poligon čini četvorougao sa ograncima 6—2, 2—3, 6—5 i 5—3. Neka su na ovim ograncima dati redom otpori $M_{12} = 12$, $M_{22} = 2$, $M_{32} = 2$ i $M_{42} = 3$ sa odgovarajućim količinama vazduha $y_{12} = x_2$, $y_{22} = 1 - x_1 - x_2$, $y_{32} = x_1 + x_2$ i $y_{42} = x_3$.

Treći poligon čini trougao sa ograncima 5—3, 3—4 i 5—4. Neka su na ovim ograncima dati redom otpori $M_{13} = 3$, $M_{23} = 6$ i $M_{33} = 34$ sa odgovarajućim količinama vazduha $y_{13} = x_3$, $y_{23} = x_1 + x_2 + x_3$ i $y_{33} = 1 - x_1 - x_2 - x_3$.

Prema (1) i s obzirom na datu kanonsku šemu za data tri poligona, imamo sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} f_1 &= 3x_1^2 - (1 - x_1)^2 - 12x_2^2 = 0 \\ f_2 &= 12x_2^2 + 2(x_1 + x_2)^2 - 2(1 - x_1 - x_2)^2 - 3x_3^2 = 0 \quad (21) \\ f_3 &= 3x_3^2 + 6(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 34(1 - x_1 - x_2 - x_3)^2 = 0 \end{aligned}$$

Za sistem (21) je

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - (1 - x_1)^2 - 12x_2^2 \\ 12x_2^2 + 2(x_1 + x_2)^2 - 2(1 - x_1 - x_2)^2 - 3x_3^2 \\ 3x_3^2 + 6(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 34(1 - x_1 - x_2 - x_3)^2 \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 4x_1 + 4, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -24x_2, & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 4, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 24x_2 + 4, & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= -6x_3 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= -56(x_1 + x_2 + x_3) + 68, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= -56(x_1 + x_2 + x_3) + 68, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= -56(x_1 + x_2 + x_3) + 6x_3 + 68, \end{aligned}$$

pa je

$$W(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 4 & 4 & -56(x_1 + x_2 + x_3) + 68, \\ -24x_2 & 24x_2 + 4 & -56(x_1 + x_2 + x_3) + 68, \\ 0 & -6x_3 & -56(x_1 + x_2 + x_3) + 6x_3 + 68, \end{bmatrix}^T$$

4

Vodeći računa o relacijama (2) i (3) i uslovima teoreme 1, uzimajući za početno približno rešenje $x_1^{(0)} = 0,404$; $x_2^{(0)} = 0,096$; $x_3^{(0)} = 0,198$, tj.

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,404 \\ 0,096 \\ 0,198 \end{bmatrix}$$

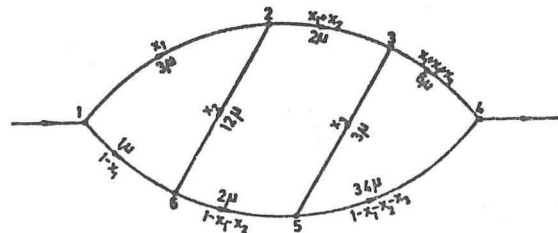
imaćemo

$$W(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 5,616 & -2,304 & 0,000 \\ 4,000 & 6,304 & -1,188 \\ 28,912 & 28,912 & 30,100 \end{bmatrix}$$

odakle je

$$\det W(x^{(0)}) = 1615,07169792,$$

$$W^{-1}(x^{(0)}) = \frac{\begin{bmatrix} 224,097856 & 69,35040 & 2,737152 \\ -154,747456 & 169,04160 & 6,671808 \\ -66,613248 & -228,98304 & 44,619264 \end{bmatrix}}{1615,07169792}$$



Sl. 1 — Kanonska šema.

Fig. 1 — Canonic scheme.

$$\|W^{-1}(x^{(0)})\| = \frac{340,215552}{1615,07169792} = 0,21065044.$$

Kako je

$$f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0,02384 \\ -0,00702 \\ -0,06010 \end{bmatrix}$$

i

$$W^{-1}(x^{(0)})f(x^{(0)}) = \frac{1}{1615,07169792} \begin{bmatrix} 4,69115024 \\ -5,27682704 \\ -2,66221666 \end{bmatrix}$$

to je

$$\|W^{-1}(x^{(0)})f(x^{(0)})\| = \frac{5,27682704}{1615,07169792} = 0,00326724.$$

U našem slučaju je

$$\max_{i,j} \sum_{s=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_s} \right| = 168.$$

Prema (13), (14) i (15) uzimajući $a_0 = 0,21065044$; $b_0 = 0,00326724$; $c = 168$ i $n = 3$, iz (16) je

$$q_0 = 2 \cdot 3 \cdot 0,21065044 \cdot 0,00326724 \cdot 168 < 0,69450024 < 1,$$

pa Njutnov proces (12), kao i njegova modifikacija (18) s obzirom na (19) konvergiraju.

Prva dva približna rešenja sistema (21), sa gore uzetim početnim rešenjem

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,404 \\ 0,096 \\ 0,198 \end{bmatrix}$$

izračunata Njutnovom metodom (12) su

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40109539 \\ 0,09926724 \\ 0,19964836 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40030266 \\ 0,09979389 \\ 0,19990733 \end{bmatrix}$$

Greška dobijenog približnog rešenja $x^{(2)}$ prema (17) je

$$\|x^* - x^{(2)}\| < 0,00054769 < 0,0006.$$

Prvih 10 približnih rešenja sistema (21) sa istim početnim rešenjem $z^{(0)} = x^{(0)}$, određenih modifikovanom metodom Njutna (18) su:

$$\begin{array}{ll} x_1^{(1)} = 0,40109539 & x_2^{(1)} = 0,09926724 \\ x_1^{(2)} = 0,40029987 & x_2^{(2)} = 0,09980103 \\ x_1^{(3)} = 0,40008203 & x_2^{(3)} = 0,09994571 \\ x_1^{(4)} = 0,40002243 & x_2^{(4)} = 0,09998517 \\ x_1^{(5)} = 0,40000613 & x_2^{(5)} = 0,09999595 \\ x_1^{(6)} = 0,40000168 & x_2^{(6)} = 0,09999889 \\ x_1^{(7)} = 0,40000046 & x_2^{(7)} = 0,09999969 \\ x_1^{(8)} = 0,40000013 & x_2^{(8)} = 0,09999991 \\ x_1^{(9)} = 0,40000003 & x_2^{(9)} = 0,09999998 \\ x_1^{(10)} = 0,40000001 & x_2^{(10)} = 0,09999999 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_3^{(1)} = 0,19964836 \\ x_3^{(2)} = 0,19990325 \\ x_3^{(3)} = 0,19997341 \\ x_3^{(4)} = 0,19999271 \\ x_3^{(5)} = 0,19999800 \\ x_3^{(6)} = 0,19999945 \\ x_3^{(7)} = 0,19999985 \\ x_3^{(8)} = 0,19999996 \\ x_3^{(9)} = 0,19999999 \\ x_3^{(10)} = 0,20000000 \end{array}$$

Prema (20), greška u 20-om približavanju bila bi manja od 0,00000004.

Napomenimo da je tačno rešenje sistema (21) koje ispunjava uslove (2) i (3)

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,1 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

*) Računanje je vršeno na mašini MONROE 990.

SUMMARY

About the Application of Newton's Method for Solving Complex Diagonal Systems of Mine Ventilation

D. Simeunović, docent — B. Vulićević, assistant*)

The work outlines Newton's method and its modification for approximate solution of nonlinear systems of algebraic or transcendent equations, and further application of such methods in complex diagonal systems of mine ventilation. The conditions under which the methods may be applied are presented, as well as an assessment of the error for both methods, this being very important for practice. Both methods are illustrated in a single example, but a particular importance is given to the modification of Newton's method, having in view that its application in practice often is more simple.

Literatura

1. Jovičić, V., 1971: Ventilacija rudnika — skripta, Rudarsko-geološko-metalurški fakultet, Beograd.
2. Demidovič, B. P., Maron, J. A., 1970: Osnovy vyčislitel'noj matematiki, Moskva.

*) Dragomir Simeunović, docent Rudarsko-geološko-metalurškog fakulteta, Beograd
Branko Vulićević, asistent Ekonomskog fakulteta, Beograd.

Savez inženjera i tehničara rudarske,
geološke i metalurške struke Jugoslavije

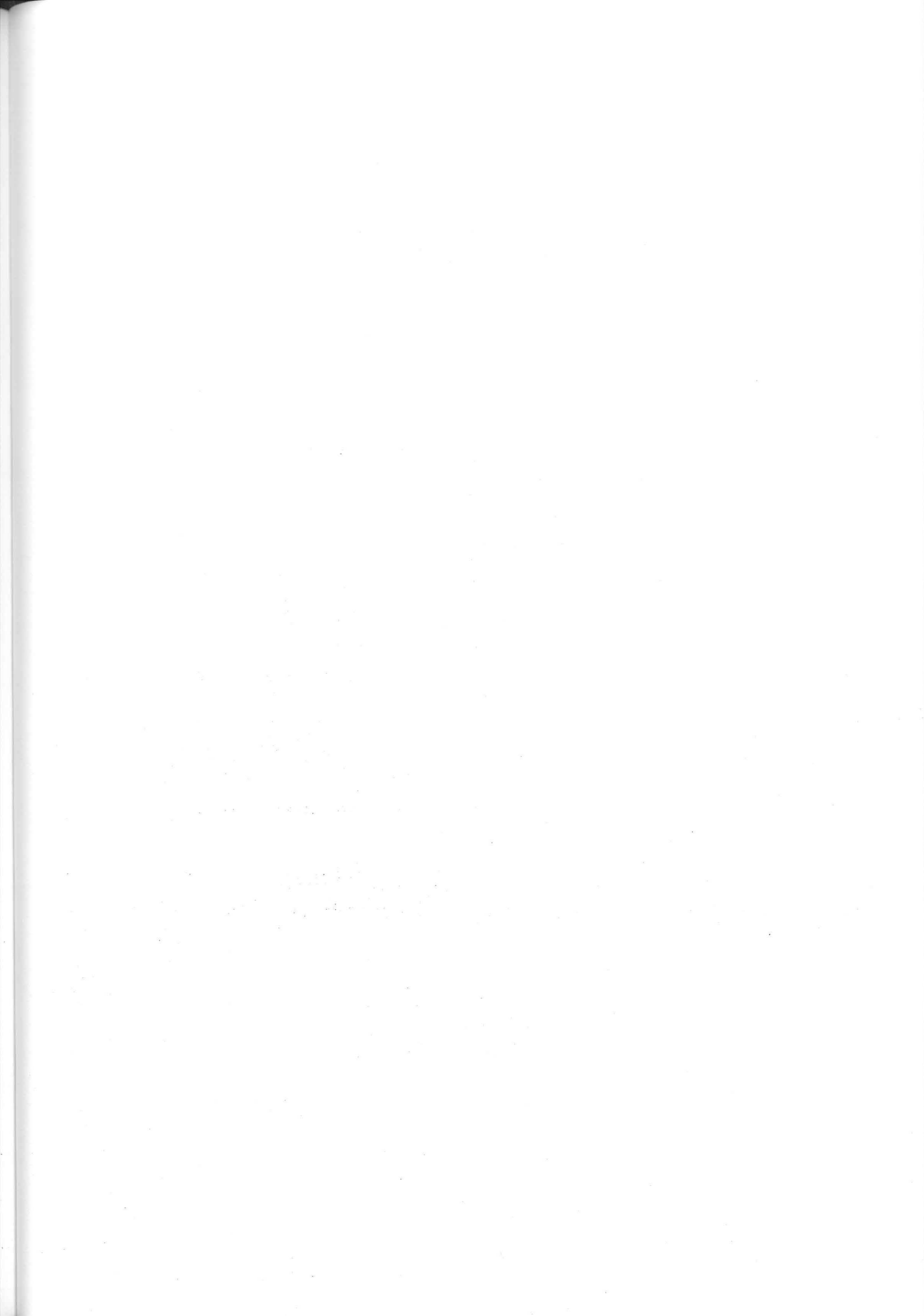
JUGOSLOVENSKI KOMITET ZA PODZEMNU
EKSPLOATACIJU MINERALNIH SIROVINA

II JUGOSLOVENSKI SIMPOZIJUM O PODZEMNOJ
EKSPLOATACIJI MINERALNIH SIROVINA

**VISOKOPRODUKTIVNE
METODE I MEHANIZACIJA
U PODZEMNOJ
EKSPLOATACIJI
MINERALNIH
SIROVINA**

ZBORNİK RADOVA

STRUGA
20. - 24. novembra 1979. godine



Prof. dr Branislav GENČIĆ, dipl. inž. rud.
Asistent Mr Dušan GAGIĆ, dipl. inž. rud. */
Prof. dr Dragomir SIMEUNOVIĆ

PLANIRANJE TEHNOLOŠKIH PARAMETARA OTKOPA KOD PRIMENE METODA OTKOPAVANJA ŠIROKIM ČELOM SA ZARUŠAVANJEM KROVNE PLOČE UGLJA

Uvod

Kao što je poznato, metoda otkopavanja širokim čelom sa zarušavanjem krovne ploče uglja ima većma široku primenu u jugoslovenskoj rudarskoj praksi. Naime, složeni rudarsko-geološki uslovi eksploatacije, u prvom redu geološke i tektonske strukture i promenljive debljine slojeva, daju prioritet ovoj grupi metoda u odnosu na metode otkopavanja širokim čelom u normalnoj visini otkopa. U rudnicima mrkog uglja Srbije, može se slobodno konstatovati, osnovna je orijentacija u pravcu uvodjenja ovih metoda uz primenu mehanizovane hidraulične podgrade (MHP) i tehnologije mehanizovanog otkopavanja.

Uvodjenje pomenutih tehničko-tehnoloških rešenja na otkopima predstavlja složen problem sa stručnog i naučnog stanovišta. Ovde imamo u vidu veliku grupu uticajnih faktora koji utiču na izbor otkopne mehanizacije i MHP, složeno medjusobno dejstvo MHP i radne sredine, pitanje "uhodavanja" tehnologije u fazi probnog rada otkopa, planiranje i optimizaciju tehnologije otkopavanja i dr. Sve ovo naročito postavlja u vrlo delikatan položaj rudarske stručnjake u neposrednoj proizvodnji odgovorne za primenu izabranih tehničko-tehnoloških rešenja, a posebno kada se imaju u vidu kvalifikaciona i starosna struktura rudara u našim rudnicima i drugi faktori vezani za radnu snagu.

Težak ekonomski položaj koji prati rudnike uglja sa podzemnom eksploatacijom u dužem vremenskom periodu odrazio se i na materijalnu bazu naučno-istraživačkog rada u ovoj oblasti i suzio mogućnost organizo-

*/ Rudarsko-geološki fakultet u Beogradu

vanijeg koordiniranog rada na zajedničkim projektima u kojima bi se ova problematika kompleksno i sistematski izučavala, a rezultati istraživanja dali značajne smernice rudnicima, odnosno stručnjacima neposredno angažovanim u njima. Do sada su ipak ostvareni zapaženi rezultati od strane pojedinih stručnih i naučnih timova na parcijalnom istraživanju pojedinih delova celokupne problematike i stvorena solidna osnova za dalji razvoj naučnoistraživačkog rada.

U ovom radu izložićemo neke aspekte planiranja tehničko-tehnoloških parametara otkopa širokog čela sa zarušavanjem krovne ploče uglja koji su uočeni i izučavaju se u timu pri Katedri za podzemnu eksploataciju ležišta Rudarsko-geološkog fakulteta u Beogradu.

Polazne osnove

U fazi pripreme otkopnog polja i formiranja otkopa moguće je detaljno izučiti karakter radne sredine, promene u elementima zaleganja i debljini sloja uglja, kvalitativno i kvantitativno prisustvo jalovih proslojaka, tektonskih zona i drugih faktora relevantnih za dimenzionisanje i planiranje razvoja kapaciteta otkopa, odnosno korigovanje kapaciteta u odnosu na projektovani. Samo po sebi se rameće da se ove mogućnosti moraju iskoristiti kao preduslov uspešnom vođenju otkopa i planiranju svih parametara i elemenata koji karakterišu njegov rad u smislu istraživanja pomenutih uticajnih faktora i analize njihovog dejstva na rad otkopa. To dalje zahteva formiranje posebne tehničke dokumentacije otkopnog polja tj. detaljnu grafičku dokumentaciju i odgovarajuće tehničke proračune.

Jedno od važnih pitanja, ako ne i najvažnije, je promenljivost debljine sloja uglja, odnosno debljine krovne ploče. Debljina krovne ploče ne utiče samo na rezerve uglja u otkopnom polju već se neposredno odražava na celokupnost rada otkopa, iskrišćenje natkopnog dela sloja i sve druge tehničke i ekonomske parametre otkopa. U pripremljenom otkopnom polju moguće je bušenjem kratkih bušotina iz pripremljenih prostorija utvrditi debljinu sloja, odnosno izvršiti proveru i korekciju osnova iz polazne tehničke dokumentacije (to se često u praksi i čini) i na bazi toga kontaktnu površinu krovine i ugljenog sloja izraziti matematičkom jednačinom pogodnom za analitičko istraživanje zavisnosti tehničko-tehnoloških parametara otkopa i položaja otkopnog fronta.

Jasno je da se postupak odnosi na horizontalna i blago nagnuta ležišta.

Matematička interpretacija

Ako koordinatni sistem OXYZ postavimo tako da X-osa stoji u pravcu napredovanja čela otkopa, a Y-osa normalno na ovaj pravac u ravni podine sloja uglja, kako je to na slici 1. naznačeno, a Z-osa upravno na ravan podine tada se jednačina kontakta krovina-ugalj posmatrana kao jedna površ može izraziti funkcijom

$$Z = f(X, Y)$$

Ako se dužina otkopa označi sa l , a iznos napredovanja čela otkopa od početne tačke sa h to će u ravni XOY otkopna površina imati oblik pravougaonika dužine l i širine h pri čemu su njegove osnovice paralelne sa osom Y odnosno X. Količina uglja sadržana iznad ovog pravougaonika dobija se pomoću dvostrukog integrala

$$V = \iint_D f(X, Y) \, dX dY$$

gde je D-domen unutrašnjosti (površina) uočenog pravougaonika. Ako je h_0 rastojanje polazne linije otkopnog fronta od Y-ose, a l_0 rastojanje desnog ruba otkopa od X-ose tada će pomenuta zapremina V iznositi

$$V = \int_{l_0}^{l_0+l} dY \int_{h_0}^{h_0+h} f(X, Y) \, dX$$

Vrednost ovog integrala zavisi kako od $f(X, Y)$ tako i od veličina l_0, l, h_0 i h . Tako za zapreminu V dobijamo funkciju

$$V = F(l, h, l_0, h_0)$$

Kako su l_0 i h_0 konstante za dato otkopno polje to vrednost zapremine zavisi od veličina l i h pa imamo da je

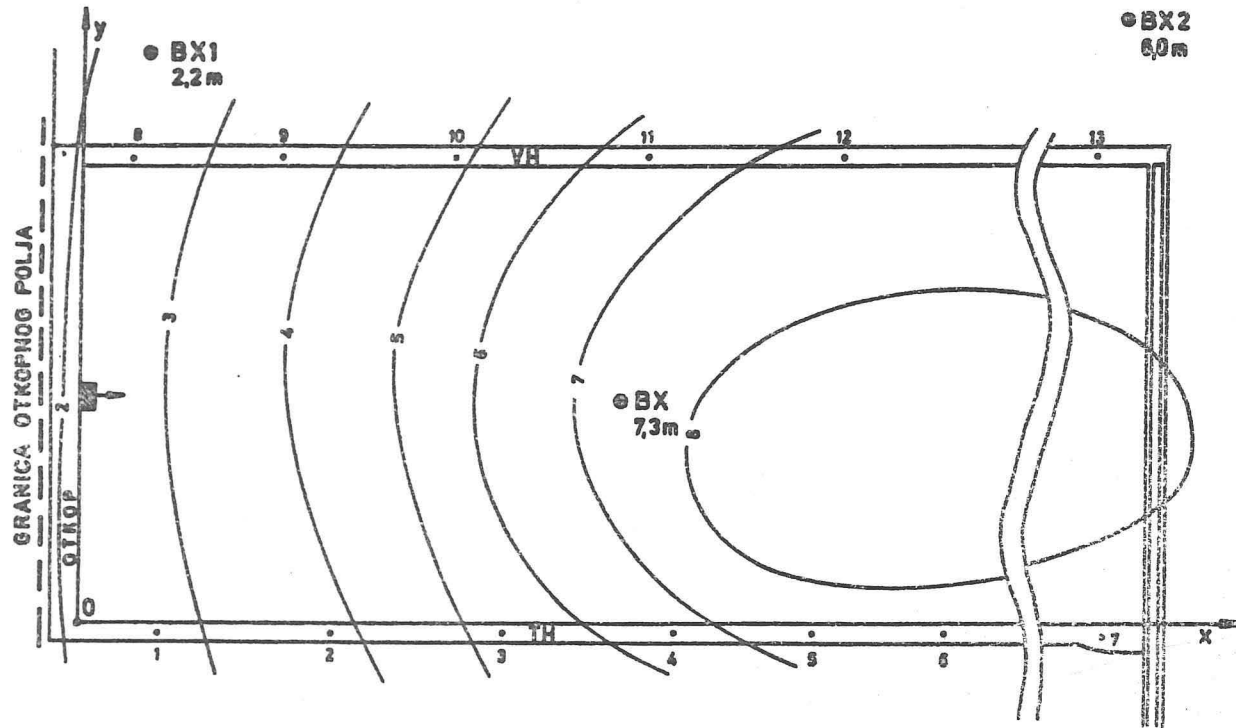
$$V = F_1(l, h)$$

Usvajanjem dužine otkopa kao konstante l uočena zapremina menja se sa veličinom h pa imamo da je

$$V = F_2(h) \tag{1}$$

Poslednja jednačina nam neposredno omogućava da odredimo zapreminu V kad znamo veličinu h tj. položaj čela otkopa.

Ako se postavi zahtev da količina otkopanog uglja u jedinici vremena



SLIKA 1. ŠEMATSKI PRIKAZ PROBLEMA

LEGENDA :  PRAVAC NAPREDOVANJA OTKOPA

1,2,3...n KONTROLNE BUŠOTINE

x,0,y KOORDINATNI SISTEM

bude konstantna ili promenljiva kao funkcija vremena čija vrednost je $Q(t)$, tada će biti

$$\frac{dV}{dt} = Q(t)$$

Kako je

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

to se prema prethodnoj jednačini dobija

$$Q(t) = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \quad (2)$$

Iz relacije (1) je

$$\frac{dV}{dh} = \frac{dF_2}{dh}$$

pa zamenom vrednosti u (2) se dobija

$$Q(t) = \frac{dF_2}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \quad (3)$$

Jednačina (3) može se napisati i u obliku

$$F_2(h) = Q_2(t)$$

odakle je

$$F_2(h) = \int_{t_0}^t Q(t) dt = Q_1(t) \Big|_{t_0}^t = Q_1(t) - Q_1(t_0)$$

tj.

$$F_2(h) = Q_2(t) \quad (4)$$

gde je stavljeno

$$Q_1(t) - Q_1(t_0) = Q_2(t)$$

Ako se jednačina (4) reši po h dobija se

$$h = Q_3(t) \quad (5)$$

Jednačina (5) nam omogućava da u svakom trenutku t odredimo položaj čela otkopa.

Iz jednačine (5) se dobija

$$\frac{dh}{dt} = Q_3'(t)$$

čime je određena brzina napredovanja otkopa u svakom trenutku t .

Ako se jednačina (4) reši po t dobija se

$$t = F_3(h) \quad (6)$$

Jednačina (6) nam omogućava da odredimo vreme kada će se čelo otkopa pomeriti za veličinu h .

Tehnološka svrsishodnost

Izvedena matematička zavisnost brzine napredovanja i količina uglja u otkopnom polju (bloku) omogućava da se za projektovani proizvodni kapacitet otkopa odredi njegov položaj u posmatranom vremenskom periodu i potrebna brzina dnevnog napredovanja za realizaciju projektom postavljenog cilja. Tom prethodi istraživanje iskorišćenja ugljene supstance u otkopnom polju koje se takođe može preciznije odrediti nakon formiranja jednačine površine kontakta krovina-ugalj. Tako određenu potrebnu brzinu napredovanja nužno je proveriti sa stanovišta odgovarajućih tehnološko-organizacionih faktora i tek tada doneti konačan zaključak o realnosti planiranog kapaciteta.

Predloženi postupak pruža mogućnost i za realno i sistematsko praćenje iskorišćenja (gubitaka) i njihovo izučavanje u funkciji uticajnih čimnilaca (tehničko-tehnoloških parametara otkopa) kao i za istraživanje uzajamnog dejstva podgrada-radna sredina i drugih faktora koji utiču na iskorišćenje krovne ploče uglja i stabilnost otkopa.

Zaključak

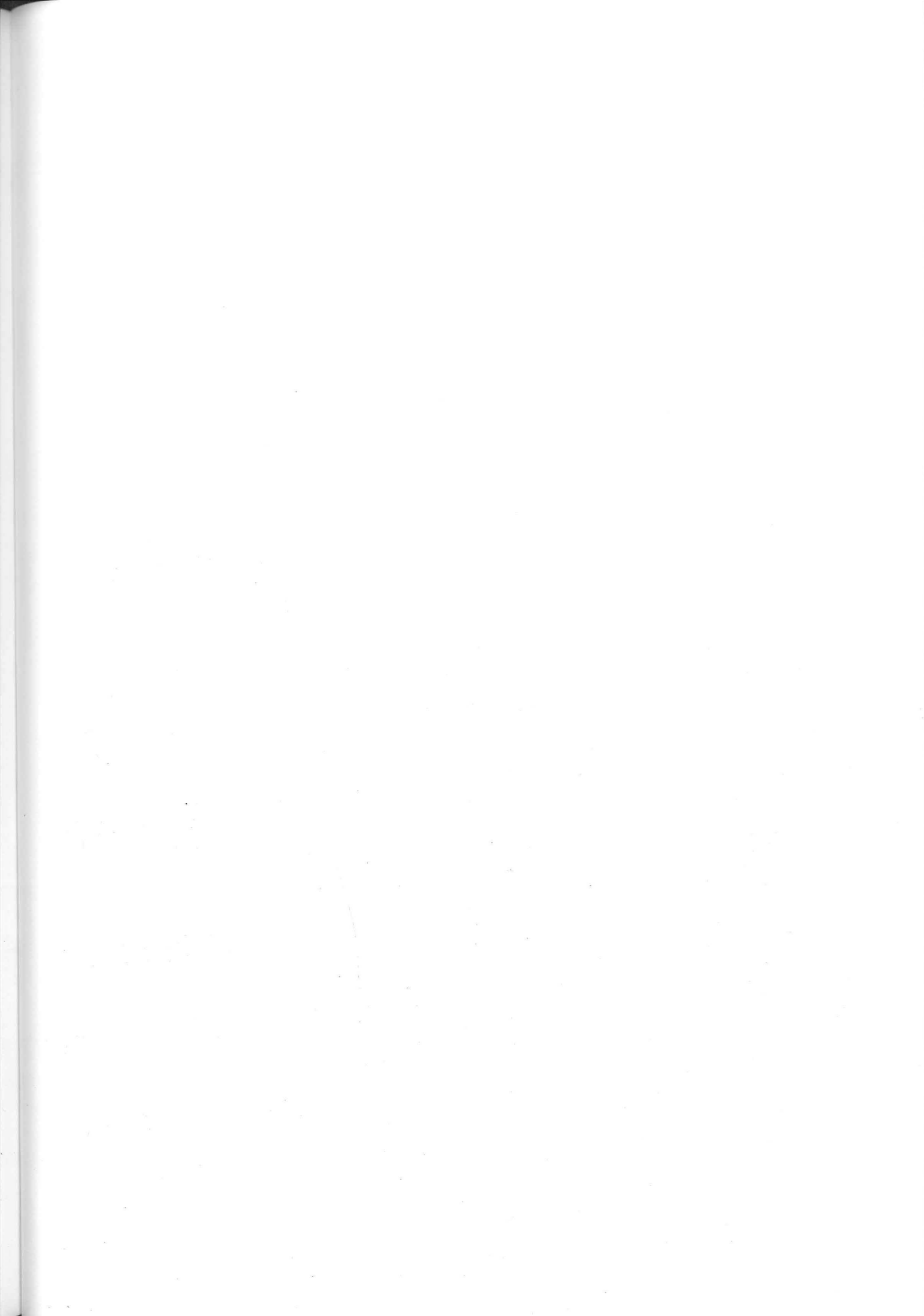
Osnovna postavka ovog rada je da metoda otkopavanja širokim čelom sa zarušavanjem krovne ploče uglje mora biti predmet stalne stručne ocene i naučne analize i usavršavanja, naročito kada se u otkopu primenjuje tehnologija mehanizovanog otkopavanja i MHP. Kao baza za istraživanje i planiranje tehničko-tehnoloških parametara otkopa, predložen je matematički metod koji dovodi u vezu te parametre i karakter promene debljine sloja, odnosno raspored masa uglja u otkopnom polju. U daljem toku problem se izučava, na osnovu sistematski i svrsishodno prikupljenih podataka (opažanjima i merenjima) u jami, u kompleksnim istraživačkim timovima.

**IV SIMPOSIUM
SOBRE
MOLIENDA**

12-16 DE NOV. 1984

VIÑA DEL MAR - CHILE

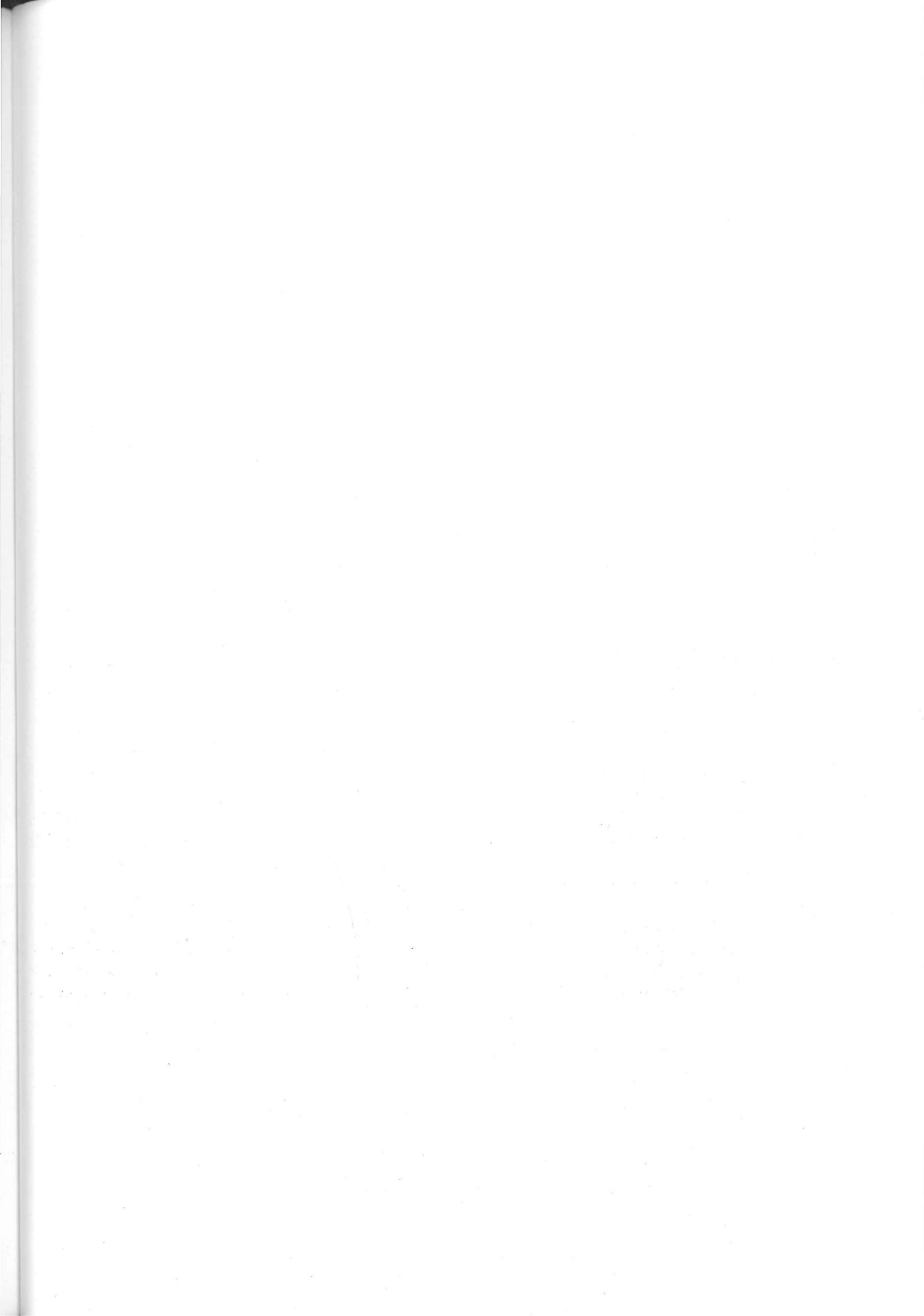
ARMCO CHILE S.A.



TEMA XXI

**DESARROLLO DE ECUACIONES PARA LA
CALCULACION DE LA OPTIMA POTENCIA
DE ELECTROMOTORES DE MOLINOS
SEMI-AUTOGENOS**

**M. Grujić
D. Salatić
D. Ocepek
Z. Stanišić
D. Simeunović
S. Deušić**



DESARROLLO DE ECUACIONES PARA LA CALCULACION DE LA OPTIMA POTENCIA DE ELECTROMOTORES DE MOLINOS SEMIAUTOGENOS

- * Dr. Milorad Grujić, profesor adjunto.
- ** Dr. Dušan Salatić, profesor de la Universidad de Belgrado.
- *** Dr. Drago Ocepck, profesor de la Universidad de Ljubljana
- **** Zivorad Stanišić, ingeniero.
- ***** Dr. Dragomir Simeunović, profesor de la Universidad de Belgrado
- ***** Licenciado Slaven Deušić, ingeniero.

INTRODUCCION

Los procesos de atenuación de distintos materiales tienen gran aplicación en todo el mundo y también en Yugoslavia. Se conoce que hoy en día se gasta entre 2,8 y 3,4% del total de consumo de energía eléctrica en los procesos de atenuación. Teniendo eso en cuenta y sabiendo que el grado de eficiencia de la energía utilizada en los procesos de moler es muy baja se puede entender la importancia de la determinación de la potencia óptima de los electromotores al proyectar los molinos y las plantas correspondientes. Muy a menudo observamos molinos con la potencia de electromotores inadecuada, muy alta o muy baja.

Hay varias ecuaciones para calcular la potencia de electromotores en molinos. Sin embargo, averiguamos la potencia necesaria de los electromotores, dependiendo de sus dimensiones y otros parámetros influyentes en el proceso de moler, se consiguen grandes diferencias de la potencia calculada según las fórmulas ya conocidas.

Teniendo en cuenta la importancia de la proyección y fijación de los molinos con la óptima potencia de los electromotores, se ha programado un experimento para calcular la energía y otros importantes parámetros en el molino semiindustrial y semiautógeno con dimensiones de 1,83 ϕ x 0,61 m.

Las investigaciones han sido muy precisas, subrayando el cálculo de la potencia y de número de vueltas.

La segunda parte de la investigación está basada tanto en los resultados de los cálculos efectuados en la mina de cobre de Majdanpek como en los datos de minas en distintas partes del mundo y también en los conocimientos teóricos de este campo de la ciencia.

En esta investigación primeramente se han fundado interdependencias lineales matemáticas entre la potencia interior y exterior de electromotores y luego se han calculado las pérdidas de electroenergía. Después se ha estudiado la energía absorbida de electromotores dependiendo de la carga del molino con bolas y el total de alimentación (bolas + mineral + agua), la densidad, etc. Al final se han estudiado en forma matemática la influencia de todos los parámetros en la fijación de la potencia de electromotores. Gradualmente se han ido eliminando de la ecuación algunos factores menos influyentes, para llegar al final a ecuación bastante simple, según la cual los valores adquiridos resultan muy similares a los anteriores valores de la potencia de los electromotores, es decir, hemos conseguido la ecuación para determinar la óptima potencia de los electromotores.

1.0. INVESTIGACIONES HECHAS SOBRE LA TORSION Y LA POTENCIA BAJO DISTINTAS CONDICIONES EN EL FUNCIONAMIENTO DEL MOLINO

De acuerdo con las instalaciones experimentales de medida y la instrumentación, se ha efectuado la investigación sobre las torsiones y la potencia del molino semiautógeno experimental durante su funcionamiento bajo diferentes condiciones. Para cada tipo de funcionamiento, es decir, para cada carga del molino, se han fijado los cambios de las torsiones y de la potencia. Se investigaron las torsiones y la potencia bajo las siguientes condiciones:

- i) cuando funciona sólo el reductor, mientras está parada la transferencia en cadena de la torsión hasta el molino,
- ii) cuando funciona el molino vacío,
- iii) cuando el molino está cargado con 312 kilos de bolas,
- iv) cuando el molino está cargado con 513 kilos de bolas,
- v) cuando el molino está cargado con 784 kilos de bolas,
- vi) cuando el molino está funcionando con el 30% de su volumen,
- vii) cuando el molino está cargado con el 30% de su volumen con mineral y con 312 kilos de bolas,
- viii) cuando el 30% del volumen del molino está cargado con mineral y con 513 kilos de bolas, y
- ix) cuando el 30% del volumen del molino está cargado con minerales y con 784 kilos de bolas.

Para cada una de las nombradas condiciones se han hecho las correspondientes anotaciones sobre el tiempo de las torsiones y de la potencia. Primeramente se ha fijado el momento del comienzo del funcionamiento del molino en cada una de las condiciones. El momento inicial se ha fijado con el aumento $A=M(P)$ que ofrece buen arreglo de las señales en la cinta de apuntes. En estos apuntes se ha fijado también el proceso de transferencia del cambio de la torsión y de la potencia desde el momento del comienzo hasta la obtención de un valor medio. Los siguientes apuntes conseguidos fueron los de las señales medidas con la misma amplificación $A=M(P)$ teniendo, esta vez, la información de tiempo alargada en la cinta. La fijación de señales bajo las mencionadas condiciones se ha efectuado también con el aumento $A=M(P)$ 500 con la normal base de tiempo y con la alargada.

En ciertas condiciones de funcionamiento se ha efectuado una fijación de las señales medidas en distintos intervalos de tiempo: en el momento del comienzo, después de cinco minutos, después de diez minutos, 15 y 20 minutos del funcionamiento. Estas investigaciones se han efectuado también con la amplificación de $A=M(P) 1000$ y $A=M(P) 500$ con la base temporal normal y prolongada en los apuntes.

En la cinta de anotaciones domina el fijado cambio de señales medidas como un diagrama en el cual en la abscisa está anotado el tiempo $t(\text{sec})$, y en la ordenada el cambio de la torsión $M(\text{Nm})$, es decir, de la potencia necesaria (P_{kw}) en el funcionamiento del molino. En cada anotación están señaladas las correspondientes condiciones en el funcionamiento del molino. En la parte superior de las anotaciones aparecen los números de las torsiones del reductor y del molino. De esta manera se puede hacer un análisis de los cambios en las señales medidas dentro de cada torsión del reductor y del molino. Así, se pueden explicar las influencias del electromotor y de las cadenas en el cambio de las señales medidas en la torsión y en la potencia.

2.0 CONSUMO DE LA ENERGIA

Para fijar las pérdidas en el motor del molino se han medido las potencias interior y exterior en el eje del reductor bajo distintas condiciones en el funcionamiento del molino. Los resultados de estos cálculos están demostrados en el cuadro N° 1. En los tres casos, entre la potencia interior señalada con la " χ " y la exterior señalada con la " y " existe una clara dependencia de forma lineal. Así que para los datos en la columna a esta dependencia está fijada de la siguiente forma:

$$y = 0,9023 \chi - 1,197 \quad (1)$$

con el factor de correlación $r = 0,9999$.

Para los datos en la columna b se ha fijado la dependencia en la siguiente forma:

$$y = 0,8451 \chi - 0,776 \quad (2)$$

con el factor de correlación lineal $r = 0,9979$.

Para los datos en la columna c se ha encontrado la dependencia de tipo:

$$y = 0,8261 \chi - 0,25 \quad (3)$$

con el factor de correlación lineal $r = 0,9997$.

CUADRO N° 1
Potencia de los electromotores

Potencia interior, kw		Potencia exterior kw		
	a	a	b	c
1	2	3	4	
9,0	6,9	6,8	6,5	
10,5	8,3	8,1	7,8	
12,0	9,6	9,4	9,0	
13,4	10,9	10,6	10,2	
14,9	12,3	12,0	11,2	
16,4	13,6	13,1	12,7	
17,9	14,9	13,8	13,8	
19,4	16,4	15,7	15,1	
20,9	17,6	17,1	16,4	

Condiciones de funcionamiento del molino:

— Motor: Potencia $P = 25 \text{ kw}$

Voltaje $N = 220 \text{ V}$

Número de torsiones $n = 870^{-1}$

Rapidez de las torsiones:

a : $n_s = 0,606 \text{ n}_{kr} = 19,5^{-1}$

b : $n_s = 0,730 \text{ n}_{kr} = 23,5^{-1}$

c : $n_s = 0,854 \text{ n}_{kr} = 27,5^{-1}$

— Reductor: $21,5/1,0$

En el cuadro Nº 2 hemos mostrado los valores de la potencia para dos condiciones del funcionamiento, calculados según las ecuaciones dadas para el correspondiente valor de la potencia interior.

CUADRO Nº 2
Potencia calculada de los electromotores

Potencia interior; kw	Potencia exterior; kw		
	a	b	c
9,0	6,9	6,8	6,5
10,5	8,3	8,1	7,8
12,0	9,6	9,4	9,0
13,4	10,9	10,6	10,2
14,9	12,2	12,0	11,2
16,4	13,6	13,1	12,7
17,9	15,8	13,8	13,8
19,4	16,3	15,7	15,1
20,9	17,7	17,1	16,4

La diferencia entre las potencias interior y exterior representa la pérdida de la potencia. Basándose en los datos del cuadro Nº 1, se han conseguido datos relacionados a la pérdida de la potencia, los que, a su vez, hemos mostrado en el cuadro Nº 3.

En cuando a los datos del cuadro Nº 3, la dependencia entre la pérdida de la potencia "y" y de la potencia interior "x" se ha conseguido para las condiciones y en la forma

$$y = 0,0977 x + 1,197 \quad (4)$$

con la correlación lineal $r = 0,992$;

Relacionado a los datos del mismo cuadro y para las condiciones b, esta dependencia está en la forma de

$$y = 0,1549 x + 0,776 \quad (5)$$

con la correlación lineal $r = 0,943$;

Relacionado a los datos del cuadro Nº 3, y para las condiciones c, la dependencia entre la pérdida de la potencia y la potencia interior está en forma de:

$$a = 0,1739 x + 0,925 \quad (6)$$

con la correlación lineal $r = 0,993$

Según los datos obtenidos para la correlación lineal se puede observar que los tres casos relacionados a la potencia interior y a la pérdida de la potencia existe una muy fuerte dependencia expresada en la forma de las funciones lineales conseguidas.

CUADRO Nº 3
Pérdidas de la potencia

Potencia interior; kw	Pérdidas de la potencias; kw		
	a	b	c
1	2	3	4
9,0	2,1	2,2	2,5
10,5	2,2	2,4	2,7
12,0	2,4	2,6	3,0
13,4	2,5	2,8	3,2
14,9	2,6	2,9	3,7
16,4	2,8	3,3	3,7
17,9	3,0	4,1	4,1
19,4	3,0	3,7	4,3
20,9	3,0	3,8	4,5

CUADRO Nº 4
Calculadas pérdidas de la potencia

Potencia interior; kw	Pérdida de la potencia; kw		
	a	b	c
9,0	2,1	2,2	2,5
10,5	2,2	2,4	2,7
12,0	2,4	2,6	3,0
13,4	2,5	2,9	3,3
14,9	2,7	3,1	3,5
16,4	2,8	3,3	3,8
17,9	2,9	3,5	4,0
19,4	3,1	3,8	4,3
20,9	3,2	4,0	4,6

En el cuadro Nº 4 están los valores de la pérdida de la potencia "y" calculados según las ecuaciones (4), (5) y (6) para los correspondientes valores de la potencia interior "x".

También en la imagen Nº 1 hemos mostrado las líneas de la potencia exterior para las condiciones "a", "b" y "c" en función de la potencia interior, igual que las líneas de las pérdidas de la potencia en función de la potencia interior, también para las condiciones "a", "b" y "c".

3.0 POTENCIA ABSORBIDA EN SU FUNCION CONTRIBUYENTE DE LA CARGA DEL MOLINO

En el cuadro Nº 5 los resultados de los cálculos de la potencia absorbida dada en kw que depende de la carga dada en porcentajes. Basándose en esos resultados se ha designado, entre la potencia absorbida "y" y el porcentaje de la carga "x", la correspondiente dependencia en la forma de la función lineal:

$$y = 0,0213 x + 0,608 \quad (7)$$

con la correlación lineal $r = 0,9967$. La correlación lineal conseguida indica que entre la carga del molino y la potencia absorbida existe una fuerte dependencia lineal en la forma de la función (7). El gráfico de la línea (7) está en la imagen 2.

En el mismo cuadro hemos dado también el valor de la potencia absorbida "y" calculada según la ecuación (7) para la correspondiente carga.

4.0 LA MASA DE LA CARGA DEL MOLINO

La densidad de carga del molino cambia según el volumen de carga y con el cambio del tonelaje alimentado. Los resultados de los cálculos de la densidad de la carga para los distintos grados de volumen de carga están dados en el cuadro Nº 6.

CUADRO Nº 5
Potencia absorbida

Carga del molino con bolas %	Medida	Potencia absorbida: kw Calculada
2	0,64	0,65
3	0,67	0,67
4	0,70	0,69
5	0,74	0,74
6	0,74	0,74
7	0,76	0,76
8	0,78	0,78
9	0,80	0,80
10	0,82	0,80
11	0,84	0,84
12	0,86	0,86

Imagen 1:

- a) Potencia exterior en función de potencia interior (1), (2) y (3)
- b) Pérdida de la función en función de potencia interior de la línea: (4), (5), (6)

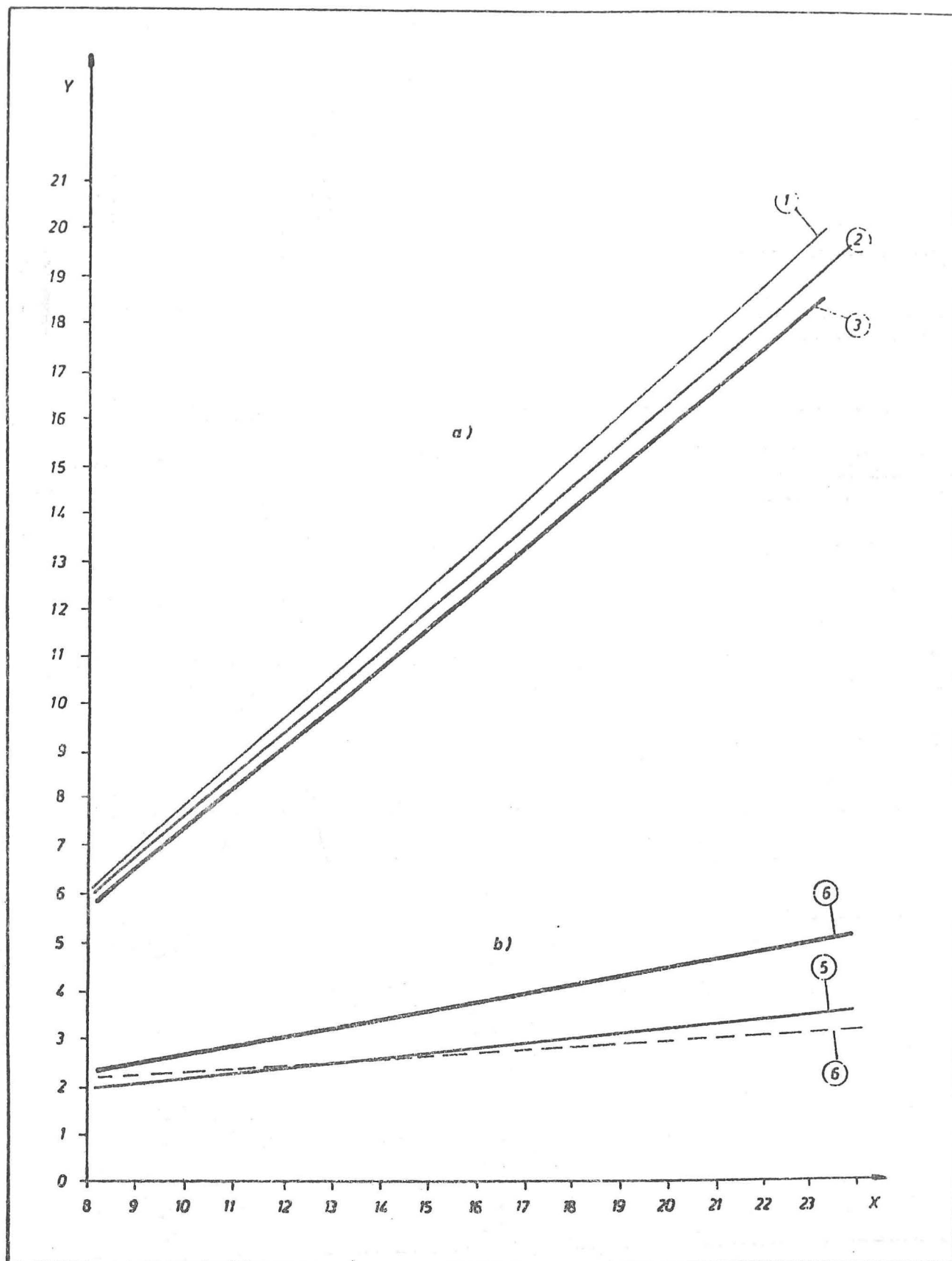
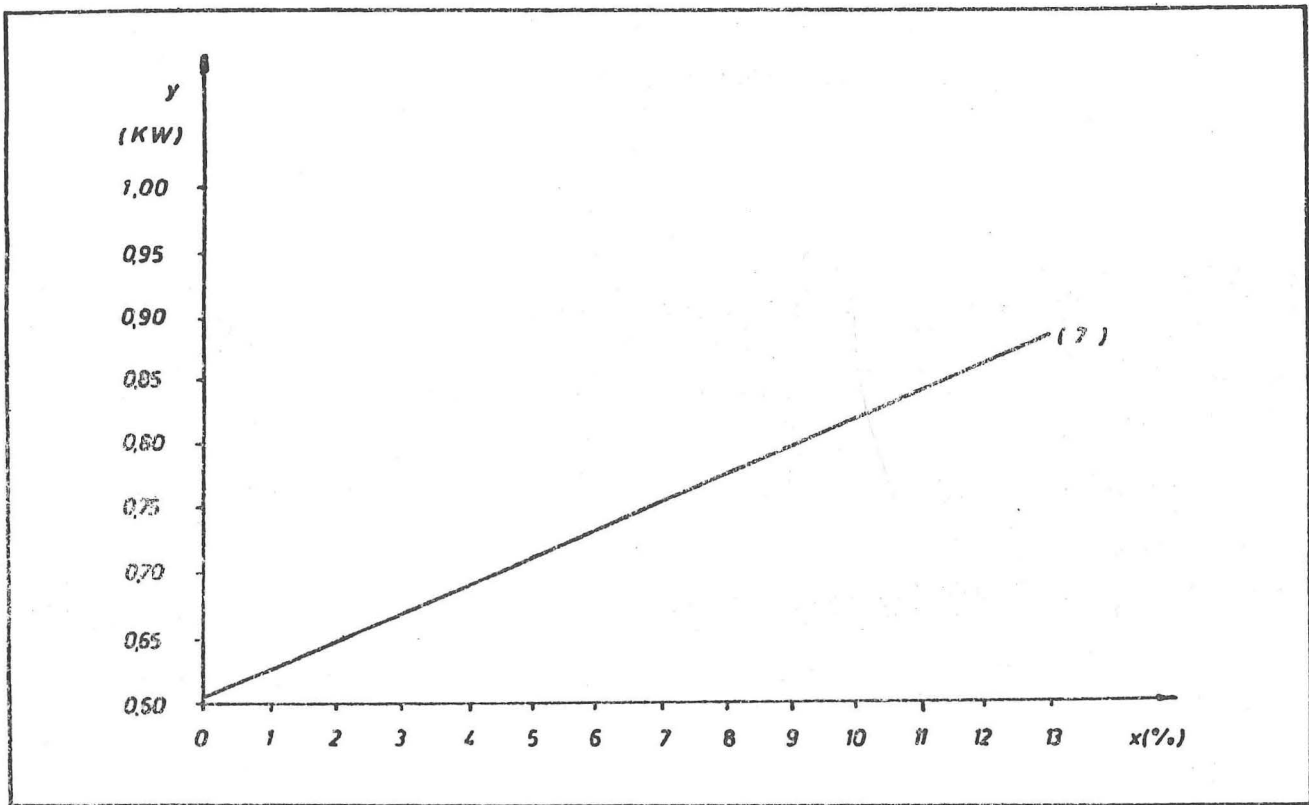


Imagen 2
Potencia absorbida en función de la carga



CUADRO Nº 6

La densidad de la carga en función de la carga volumétrica y de la contribución de la carga de bolas

La carga volumétrica %	La densidad de la carga bajo distinta participación de las bolas: kg/m ³				
	2	4	6	8	10
20	2.700	2.970	3.320	3.600	3.900
22	2.685	2.950	3.290	4.510	3.800
24	2.670	2.930	3.270	3.420	3.700
26	2.650	2.910	3.250	3.350	3.600
28	2.630	2.900	3.230	3.280	3.500
30	2.610	2.870	3.200	3.200	3.420
32	2.600	2.850	3.120	3.160	3.340
34	2.590	2.820	3.040	3.130	3.290
36	2.570	2.800	2.960	3.090	3.240
38	2.530	2.760	2.920	3.070	3.190
40	2.510	2.760	2.840	3.040	3.150

Matemáticamente la densidad de la carga podría expresarse de la siguiente forma:

$$\gamma = \frac{a_1 \lambda_k + b \lambda_m}{V_p} \quad (8)$$

donde λ_k es el porcentaje del volumen de carga con bolas, λ_m es el porcentaje del volumen con mineral y el agua, V_p es el porcentaje del total volumen de carga del molino. Puesto que $\lambda_k + \lambda_m = V_p$, de ahí $\lambda_m = V_p - \lambda_k$ y la fórmula (8) podemos presentar de la siguiente forma:

$$\gamma = \frac{a\lambda_k + b V_p}{V_p} \quad (9)$$

donde aparece $a = a_1 - b$. La fórmula (9) puede escribir también así:

$$= \frac{\lambda_k}{V_p} + b \quad (10)$$

De la ecuación (10) puede observarse que con el constante porcentaje de la carga volumétrica de bolas (λ_k) la densidad de la carga (γ) va decreciendo al aumentar el porcentaje de la total carga volumétrica (V_p), y va creciendo con la disminución del porcentaje de la misma (V_p). Al mantener un constante porcentaje de la carga volumétrica (V_p) la densidad de la carga (γ) va incrementando al aumentar el porcentaje de la carga volumétrica de bolas (λ_k), y va disminuyendo al disminuir el porcentaje de la carga volumétrica de bolas (λ_k). La ecuación (10) se tomaría para hacer el cálculo de la densidad de la carga (γ) si se tuvieran exactas relaciones de los porcentajes en la carga volumétrica de bolas, agua y mineral. Aunque, en principio, se tiende a obtener las mismas relaciones entre el mineral y el agua, en la práctica ocurre que estas van variando dentro de ciertos límites. Durante el funcionamiento del molino, las bolas se van gastando disminuyendo así su diámetro y, a pesar de su constante renovación, aparece cierta variación en el porcentaje de su contenido volumétrico. Estas variaciones en la carga volumétrica que constituyen bolas, mineral y el agua provocan ciertos cambios en la densidad de carga. De esta forma, los valores creados en la densidad de la carga (γ) difieren, aunque mínimamente, de los correspondientes valores de la densidad de la carga que se calcularía según la ecuación (10), conociéndose los coeficientes a y b , además de los valores dados para el k y el V_p .

Basándose en los datos del cuadro N° 6, se han designado coeficientes a y b con la condición de corresponde los valores de la densidad de la carga (γ) calculados según esas ecuaciones 10 más posible con los valores de la densidad de la carga mencionada en el cuadro N° 6 que se han conseguido midiéndolos. Al determinar los coeficientes a y b en la ecuación (10) se han analizado especialmente los casos en que:

Basándose en los datos del cuadro N° 6, de acuerdo con la ecuación (10), para $\lambda_k = 2$, la dependencia entre la densidad de la carga (γ) y el porcentaje de la total carga volumétrica (V_p) se ha encontrado en la fórmula:

$$\gamma = \frac{7230,52}{V_p} + 2360,51 \quad (11)$$

con el factor de la dependencia no-lineal $\lambda = 0,9615$.

Basándose en los datos del mismo cuadro N° 6, donde $\lambda_k = 4$, entre la densidad de la carga del molino y el porcentaje de la total carga volumétrica se ha encontrado la dependencia de tipo

$$\gamma = \frac{8710,71}{V_p} + 2561,07 \quad (12)$$

con el factor de la dependencia no-lineal $\lambda = 0,9656$

Según los datos del cuadro N° 6, donde $\lambda_k = 6$, entre γ y V_p se ha encontrado la dependencia de tipo

$$\gamma = \frac{18473,07}{V_p} + 2485,38 \quad (13)$$

con el factor de la dependencia no-lineal $\lambda = 0,9082$

Basándose en los datos del cuadro N° 6, donde $\lambda_k = 8$, entre γ y V_p se ha obtenido la dependencia de tipo

$$\gamma = \frac{22517,09}{V_p} + 2481,34 \quad (14)$$

con el factor de la dependencia no-lineal $\lambda = 0,9894$

Al final, según los datos del cuadro N° 6, donde $\lambda_k = 10$, entre γ y V_p se ha encontrado la dependencia de tipo

$$\gamma = \frac{31149,58}{V_p} + 2377,87 \quad (15)$$

con el factor de la dependencia no-lineal $\gamma = 0,9978$

Según los valores obtenidos referentes al factor de la dependencia no-lineal (λ), se observa que en todos los casos analizados entre γ y V_p existe una fuerte dependencia de tipo (11) (15).

Por eso las obtenidas ecuaciones referentes a la densidad de la carga para distintos porcentajes de la carga volumétrica de bolas y distintos porcentajes de la carga total volumétrica pueden ser utilizados en la práctica con alto grado de seguridad.

En el cuadro N° 7 hemos presentado los valores de la densidad de la carga (γ) calculados mediante las ecuaciones (11) - (15) para los correspondientes valores de la carga volumétrica (V_p).

Además de las ecuaciones individuales (11) - (15) para el cálculo de la densidad de la carga dependientemente del porcentaje de la total carga volumétrica, conseguidos a base de datos del cuadro N° 6, $\lambda_k = 2, \lambda_k = 4, \lambda_k = 6, \lambda_k = 8, \lambda_k = 10$, aquí, tomando en cuenta, al mismo tiempo, todos los datos contenidos en el cuadro N° 6, se ha determinado la ecuación para el cálculo de la densidad de la carga.

$$\gamma = 3000 \frac{\lambda_k}{V_p} + 2440 \quad (16)$$

CUADRO N° 7

Densidad calculada de la carga en función de la carga volumétrica

Carga volumétrica %	Densidad de la carga en				
	2	4	6	8	10
20	2.722	2.997	3.409	3.607	3.935
22	2.689	2.957	3.325	3.505	3.794
24	2.662	2.924	3.255	3.420	3.676
26	2.639	2.896	3.196	3.347	3.576
28	2.619	2.872	3.145	3.286	3.490
30	2.602	2.851	3.101	3.232	3.416
32	2.586	2.833	3.063	3.185	3.351
34	2.573	2.817	3.029	3.144	3.294
36	2.561	2.803	2.999	3.107	3.243
38	2.551	2.790	2.972	3.074	3.198
40	2.541	2.779	2.947	3.044	3.157

Los valores para γ , conseguidos mediante la ecuación (16), en general, concuerdan bastante bien con los valores dados en el cuadro N° 6, es decir, con los valores referentes a la densidad de la carga conseguida con la medición.

Si en la ecuación (10) ponemos $\frac{\lambda_k}{V_p} = \chi$, entre γ y χ se consigue la dependencia lineal:

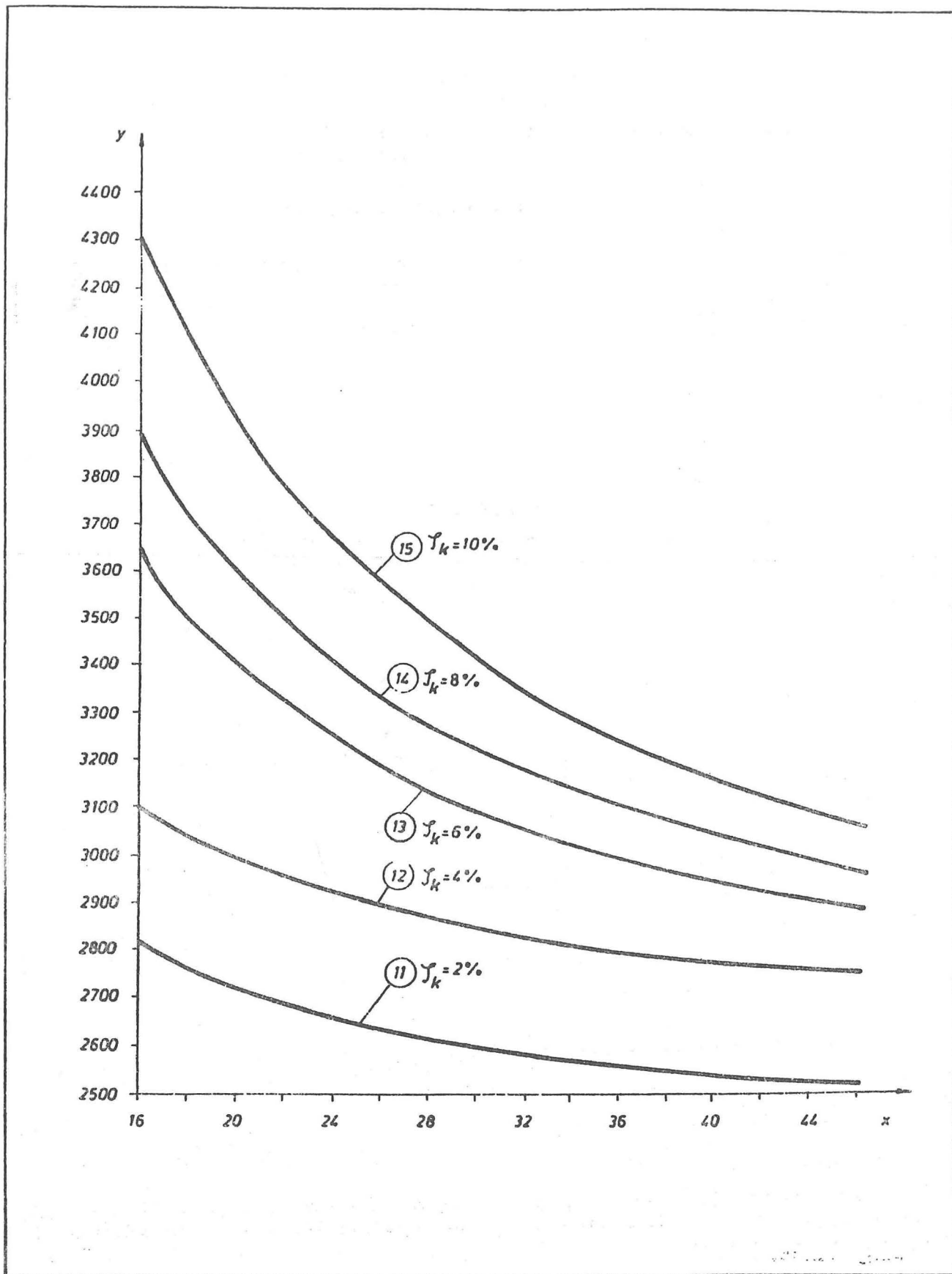
$$a) \gamma = 3000 \chi + 2440 \quad (16)$$

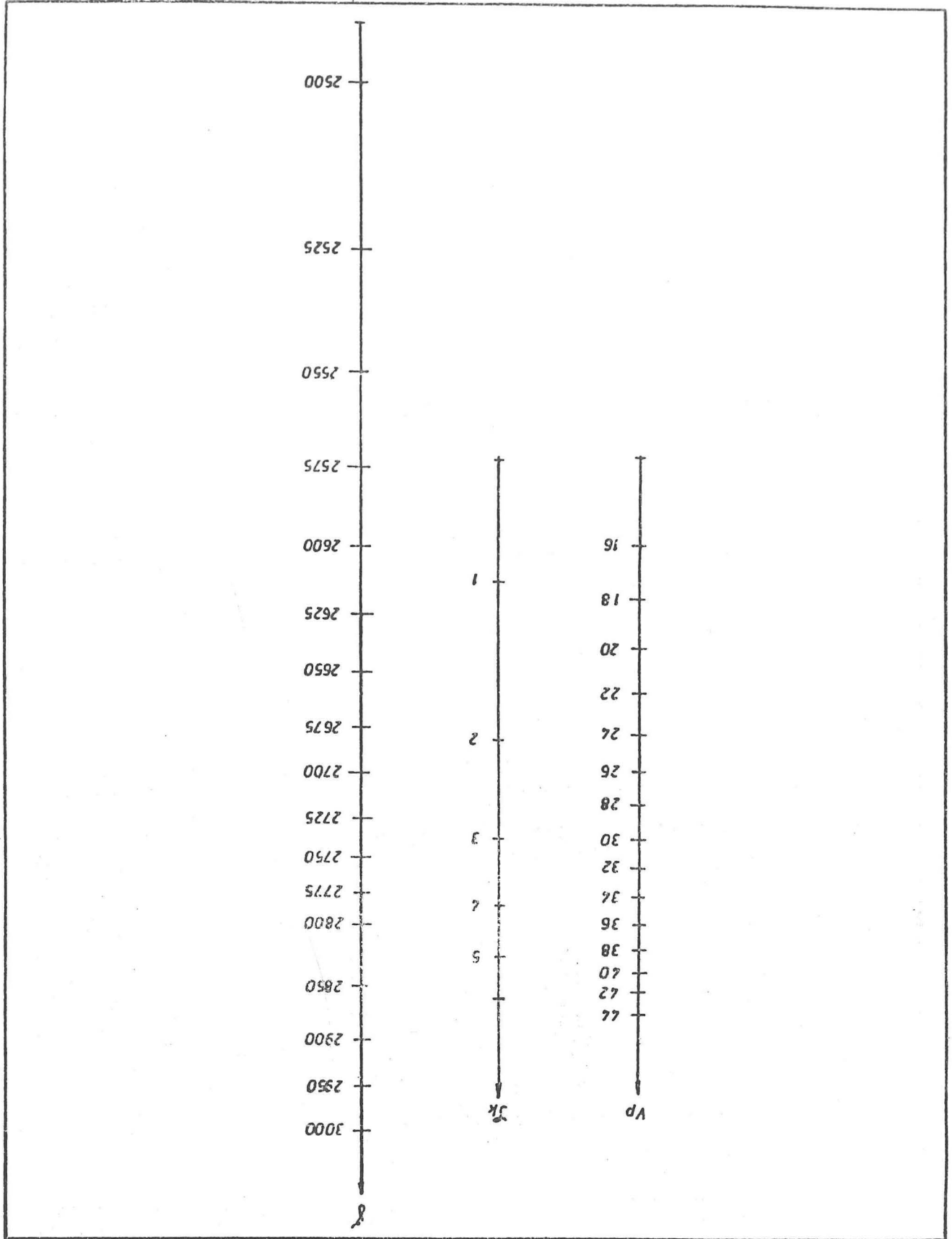
con el factor de la dependencia lineal $r_1 = 0,9892$

En el cuadro N° 8 están dados los valores referentes a la densidad de la carga calculados según la ecuación (16) para distintos valores del porcentaje de la carga volumétrica o la de las bolas (λ_k) y distintos valores de porcentajes de la total carga volumétrica (V_p).

Imagen 3

Densidad de la carga (y) en función del total volumen de la carga (x)



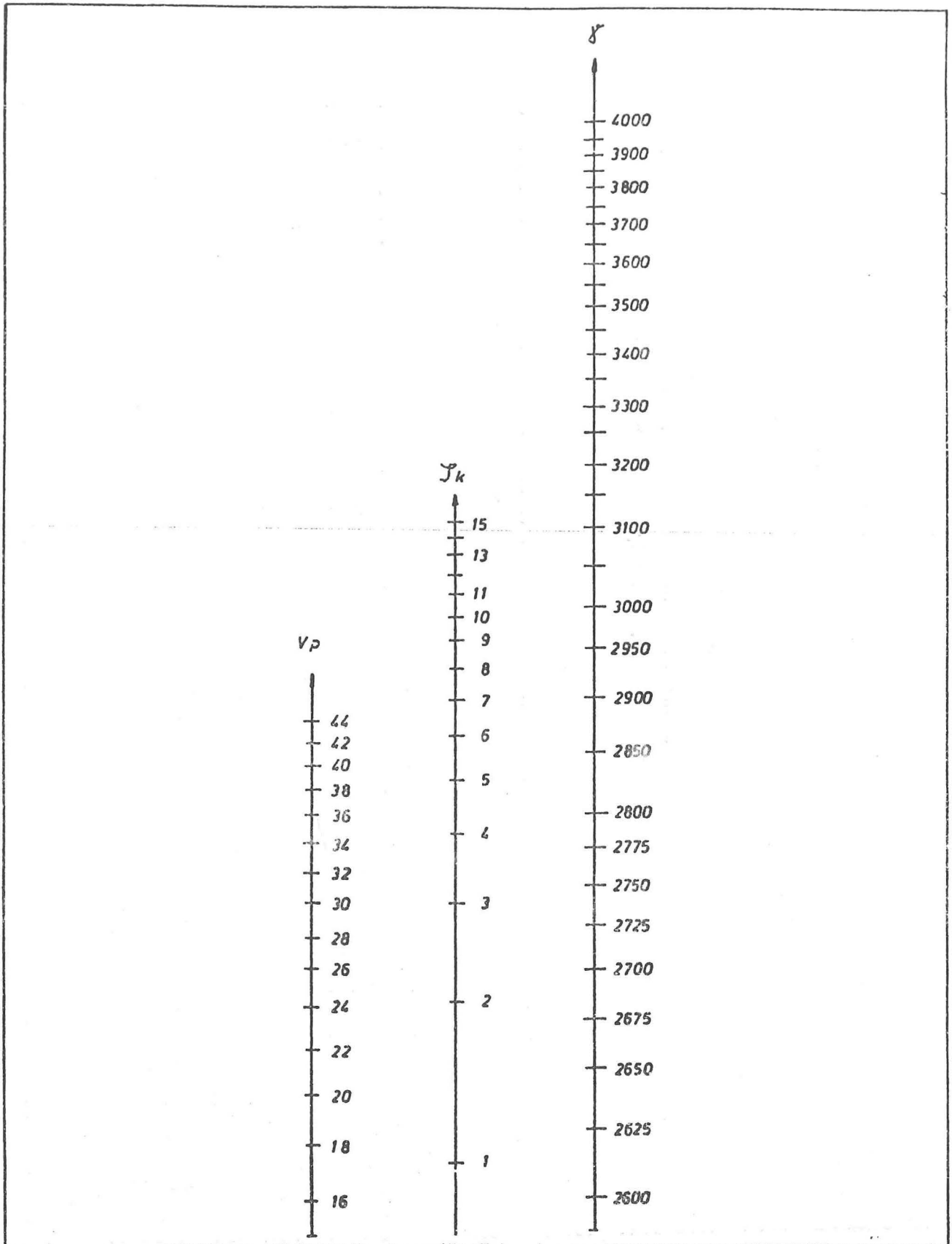


Monograma para el cálculo de la carga dependiendo de la carga volumétrica de bolas (λ_k) y del total volumen de la carga (V_p)

Imagen 4

Imagen 5

Monograma para el cálculo de la densidad de la carga (γ) dependiendo de la carga volumétrica de bolas (λ_k) el total volumen de la carga del molino (V_p)



CUADRO N° 8

Total carga volumétrica $V_p \%$	Carga volumétrica de bolas (%)				
20	2.740	3.040	3.340	3.640	3.940
22	2.713	2.985	3.258	3.531	3.804
24	2.690	2.940	3.190	3.440	3.690
26	2.671	2.902	3.132	3.353	3.594
28	2.654	2.869	3.083	3.297	3.511
30	2.640	2.840	3.040	3.240	3.440
32	2.627	2.815	3.003	3.190	3.378
34	2.616	2.793	2.969	3.146	3.322
36	2.607	2.772	2.940	3.107	3.273
38	2.598	2.756	2.914	3.072	3.229
40	2.590	2.740	2.890	3.040	3.190

Para el cálculo de la densidad de la carga (γ), y de acuerdo con la ecuación (16), dependientemente de λ_k y de V_p , se ha elaborado aquí un especial monograma. Para conseguir la densidad de la carga (γ) se extiende una línea atravesando el punto que corresponde al porcentaje de la total carga volumétrica (en la escala V_p), y atravesando el punto que corresponde al porcentaje de la carga volumétrica de las bolas (en la escala λ_k). El punto donde esta línea corta la escala λ representa la buscada densidad de la carga. Ejemplo: para $V_p = 30$, $k = 8$ se consigue que $\gamma = 3240$.

5.0 LA CARGA DEL MOLINO EN FUNCION DE LA CARGA VOLUMETRICA DE DISTINTA DENSIDAD

En los cuadros N°s 9 y 10 están presentadas las cargas del molino en función de la carga volumétrica de distinta densidad. En el cuadro N° 9 las cargas están dadas en kW, mientras que el cuadro N° 10 están dadas en pascales.

Basándose en los datos del cuadro N° 9, entre la carga del molino dada en kW, que hemos señalado con la "y", y la carga volumétrica en porcentajes que hemos señalado con la "x", se han descubierto las siguientes dependencias:

1. Referente a la densidad de la carga $\gamma = 3000 \text{ kg/m}^3$ se ha descubierto dependencia de tipo:

$$y = 14 + 1,353 (46 - x)e^{0,142 (x - 46)} \tag{17}$$

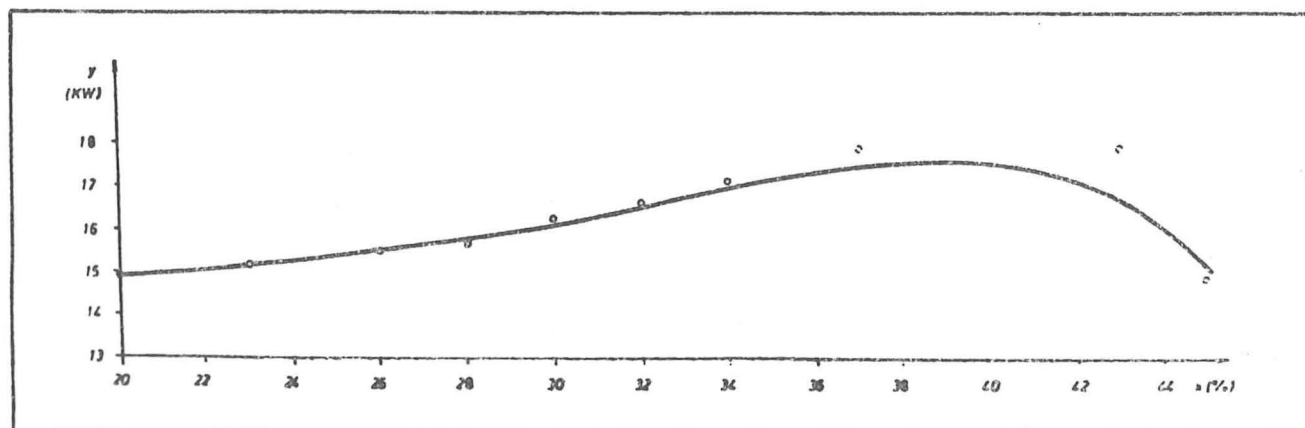
con el factor de la dependencia no-lineal $\lambda = 0,923$. Según el valor conseguido para λ se puede observar que hay una fuerte dependencia entre la carga del molino y la carga volumétrica expresada en porcentajes. Esta dependencia es no-lineal tipo (17). De la ecuación (17) podemos concluir que la carga va incrementando con el aumento del porcentaje de la carga volumétrica hasta $x = 38,96$. Para el caso $x = 38,96 \approx 39$ la carga del molino llega a su óptimo valor $y = y_{\text{max}} = 17,51 \text{ kW}$. Con el aumento del porcentaje de la carga volumétrica, la carga del molino empieza a decaer, lo cual se observa en la imagen número 6, donde está presentada la línea (17).

2. Con la densidad de la carga $\gamma = 3400 \text{ kg/m}^3$ se ha descubierto la dependencia de tipo:

$$y = 15 + 2,88 (46 - x)e^{0,1475 (x - 46)} \tag{18}$$

Imagen 6

Carga del molino (y) en función de la carga volumétrica (x) y densidad $\gamma = 3000 \text{ kg/m}^3$



con el factor de dependencia no-lineal $\lambda = 0,990$. Según el valor de λ podemos observar que existe una fuerte dependencia no-lineal entre la carga del molino y la carga volumétrica expresada en porcentajes de tipo (18). De la ecuación (18) podemos concluir que la carga va incrementando con el aumento del porcentaje de la carga volumétrica $\chi = 39,22$. Cuando $\chi = 39,2239$ la carga lleva a su óptimo valor $y = y_{\max} 222,18$ kW. Aumentando más el porcentaje de la carga volumétrica la carga del molino empieza a decaer.

CUADRO Nº 9

La carga en función de la carga volumétrica con distinta densidad

Carga volumétrica %	Carga del molino: kW		
	$\gamma = 3000$ kg/m ³	$\gamma = 3400$ kg/m ³	$\gamma = 3800$ kg/m ³
20	14,9	16,5	18,2
23	15,2	17,2	19,3
26	15,5	18,1	20,4
28	15,7	18,9	22,0
30	16,2	19,6	23,4
32	16,6	20,2	24,2
34	17,1	20,8	25,5
37	17,8	21,3	26,9
43	17,8	21,4	27,0
45	14,8	17,2	21,3

CUADRO Nº 10

La carga del molino en función de la carga volumétrica y la densidad

Carga volumétrica %	Carga del molino: Pa		
	$\gamma = 3000$ kg/m ³	$\gamma = 3400$ kg/m ³	$\gamma = 3800$ kg/m ³
20	625.000	690.000	780.000
23	650.000	715.000	800.000
26	680.000	750.000	830.000
28	720.000	785.000	860.000
30	745.000	805.000	870.000
32	775.000	835.000	930.000
34	800.000	910.000	1.025.000
37	875.000	980.000	1.103.000
43	950.000	1.000.000	1.120.000
45	765.000	815.000	900.000

3. Con la densidad de la carga $\lambda = 3800$ kg/m³ la dependencia es de tipo

$$y = 16 + 5,865(46 - \chi)e^{0,1626(\chi - 46)} \quad (19)$$

con el factor de dependencia no-lineal $\lambda = 0,981$. De valor conseguido de la λ se observa que hay una fuerte dependencia no lineal de tipo (19) entre la carga del molino y la carga volumétrica expresada en porcentajes. Con el incremento de la carga volumétrica hasta $\chi = 39,85$, la carga del molino crece. Cuando $\chi = 39,85 \approx 40$, la carga llega a su óptimo valor $y = y_{\max} = 29,29$ kW. Aumentando más la carga volumétrica la carga del molino empieza a decaer.

En el cuadro Nº 11 están dados los valores de la carga (y) calculados según la ecuación (17), (18) y (19) para los correspondientes valores de la carga volumétrica (χ).

Basándose en los datos del cuadro Nº10 se han descubierto las siguientes dependencias entre la carga del molino dada en pascales, señalada con la "y" y la carga volumétrica dada en porcentajes, señalada con la " χ ":

1. Con la densidad de la carga $\gamma = 300$ kg/m³ se ha descubierto dependencia de tipo

$$y = 550.000 + 200.859(46 - \chi)e^{0,171(\chi - 46)} \quad (20)$$

con el factor de dependencia no-lineal $\lambda = 0,927$.

CUADRO N° 11

La carga del molino calculada en función de la carga volumétrica para las distintas densidades

Carga volumétrica %	Carga del molino: kW		
	$\gamma = 3000$ kg/m ³	$\gamma = 3400$ kg/m ³	$\gamma = 3800$ kg/m ³
20	14,9	16,6	18,2
23	15,6	18,0	20,5
28	15,9	18,6	21,7
30	16,2	19,4	23,0
32	16,6	20,1	24,4
34	17,0	20,9	26,0
37	17,4	21,9	28,2
43	16,7	20,6	26,8
45	15,2	16,1	21,0

Según el valor conseguido para la λ se observa que existe una fuerte dependencia no-lineal de tipo (20) entre la carga del molino y la carga volumétrica expresada en porcentajes. De la ecuación (20) podemos concluir que la carga del molino va incrementando con el aumento del porcentaje de la carga volumétrica $\chi = 40,152$. Para la $\chi = 40,152 \approx 40$ la carga del molino llega a su valor óptimo $y = y_{\max} = 981973$ kW. Aumentando más el porcentaje de la carga volumétrica, la carga del molino empieza a decaer.

2. Con la densidad de la carga $\gamma = 3400$ kg/m³ se ha descubierto la dependencia de tipo

$$y = 600.000 + 205.487 (46 - \chi) e^{0,165 (\chi - 46)} \quad (21)$$

con el factor de la dependencia no-lineal $\lambda = 0,955$.

Según el mencionado valor de la λ observamos que existe una fuerte dependencia de tipo (21) entre la carga del molino y la carga volumétrica expresada en porcentajes. De la ecuación (21) se puede concluir que la carga del molino va incrementando con el aumento del porcentaje de la carga volumétrica $\chi = 39,939$. Cuando $\chi = 39,939$, la carga del molino llega a su óptimo valor $y = y_{\max} = 1058125$ Pa. Aumentando más el porcentaje de la carga volumétrica, la carga empieza a decaer, lo cual se ve en la imagen N° 10 con la línea (21).

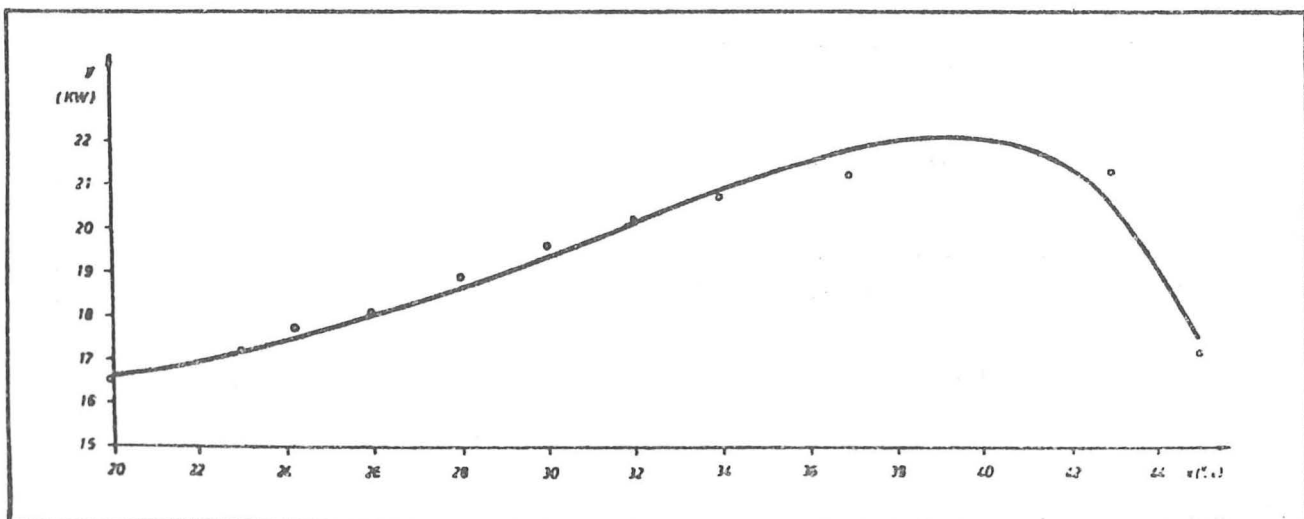
3. Con la densidad de la carga $\gamma = 3800$ kg/m³ se ha descubierto la dependencia de tipo

$$y = 700000 + 212850 (46 - \chi) e^{0,172 (\chi - 46)} \quad (22)$$

con el factor de la dependencia no-lineal $\lambda = 0,976$. Con el valor conseguido para la λ observamos que existe una muy fuerte dependencia de tipo (22) entre la carga del molino y la carga volumétrica expresada en porcentajes. De la ecuación

Imagen 7

Carga del molino (y) en función de la carga volumétrica con la densidad $\gamma = 3400$ kg/m³



ción (22) podemos concluir que la carga va aumentando con el incremento de la carga volumétrica expresada en porcentajes $\chi = 40,186$. Cuando la $\chi = 40,1986 \approx 40$, la carga llega a su óptimo valor $y = y_{\max} = 1155023$ Pa. Aumentando más el porcentaje de la carga volumétrica.

En el cuadro N° 12 están dados los valores de la carga del molino calculadas según la ecuación N°s (20), (21) y (22) para los correspondientes valores del porcentaje de la carga volumétrica.

CUADRO N° 12

La carga del molino calculada en función de la carga volumétrica y la densidad

Carga volumétrica %	Carga del molino: Pa		
	$\gamma = 300$ kg/m ³	$\gamma = 3400$ kg/m ³	$\gamma = 3800$ kg/m ³
20	611.234	673.221	763.224
23	640.477	706.259	793.689
26	681.412	751.580	836.499
28	716.497	789.759	873.289
30	758.344	834.621	917.278
32	806.636	885.557	968.176
34	859.671	940.457	1.024.243
37	937.931	1.018.890	1.107.407
43	910.761	975.777	1.081.153
45	719.288	774.231	879.215

Imagen 8

Carga del molino (y) en función de la carga volumétrica con densidad $\gamma = 3800$ kg/m³

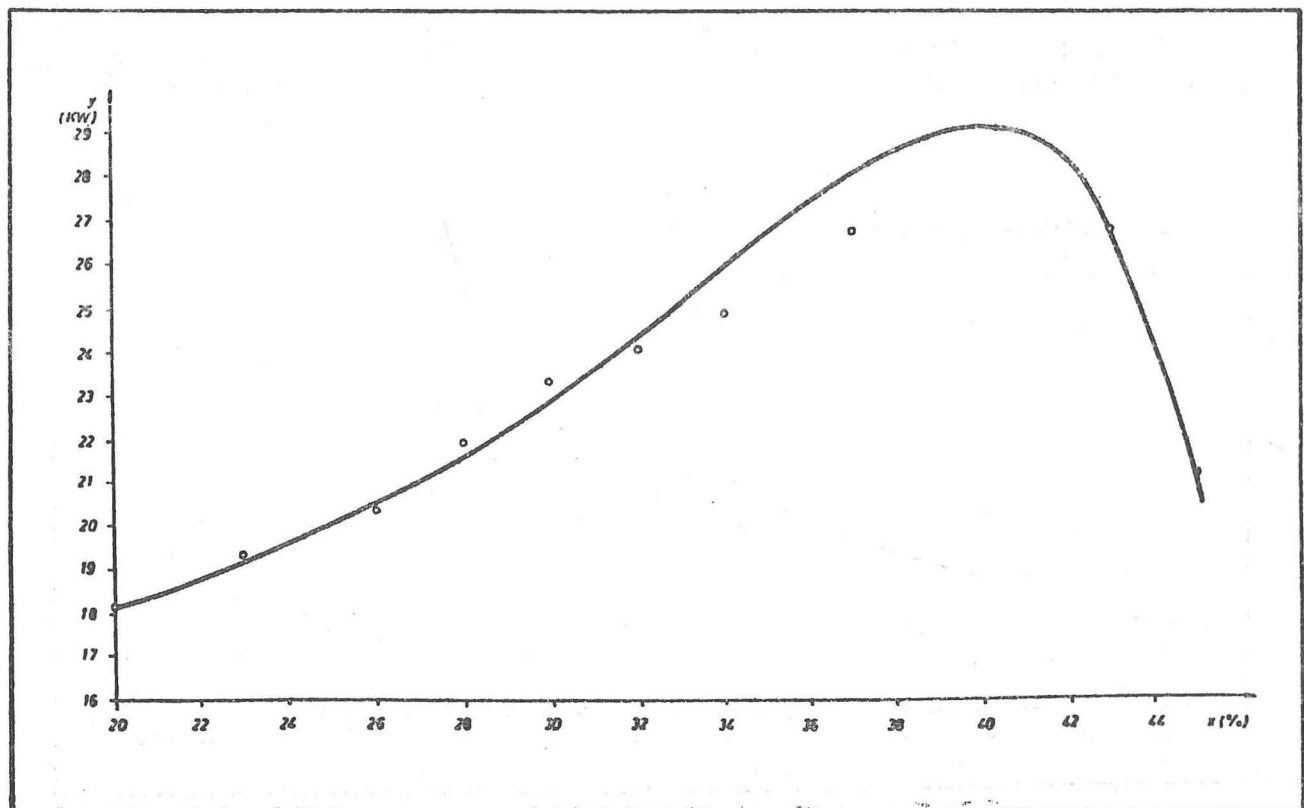


Imagen 9

Carga del molino (y) en función de la carga volumétrica (x) y densidad $\gamma = 3000 \text{ kg/m}^3$

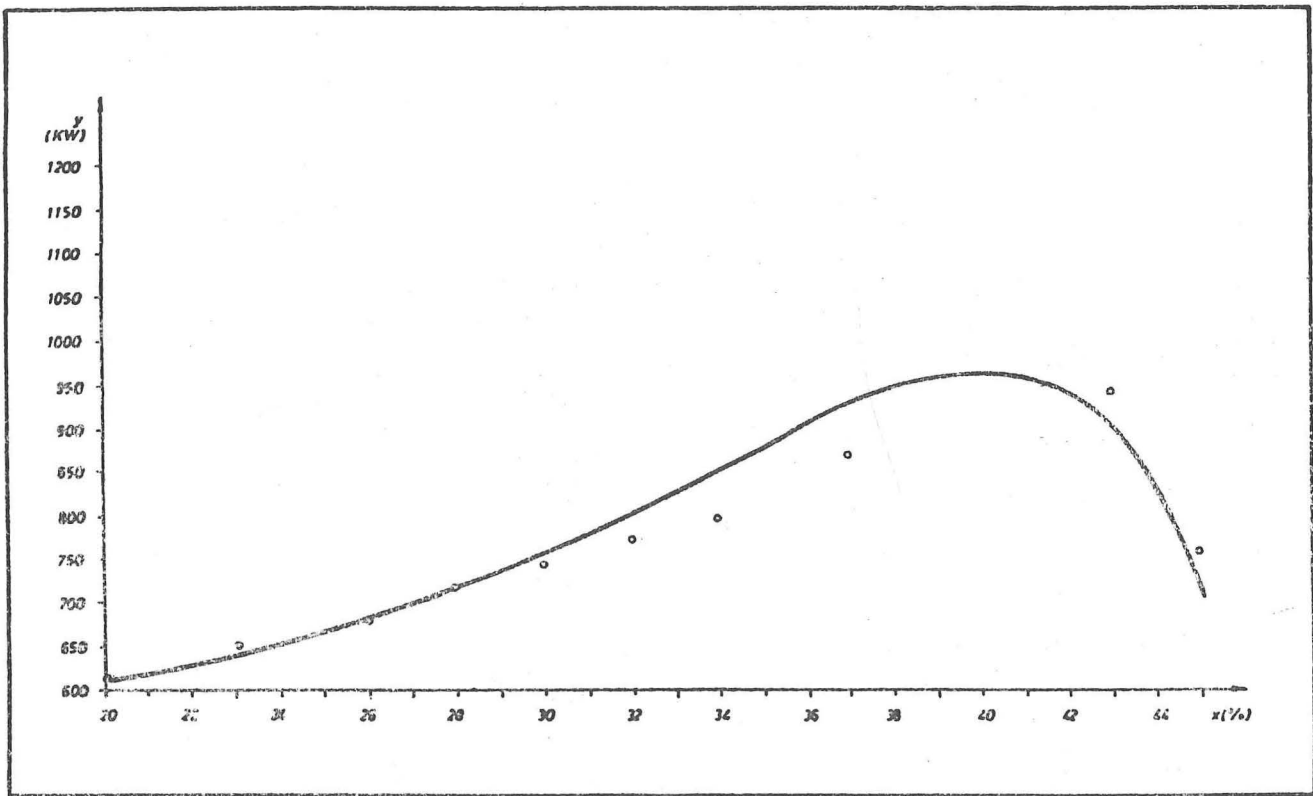


Imagen 10

Carga del molino (y) en función de la carga volumétrica (x) y densidad $\gamma = 3400 \text{ kg/m}^3$

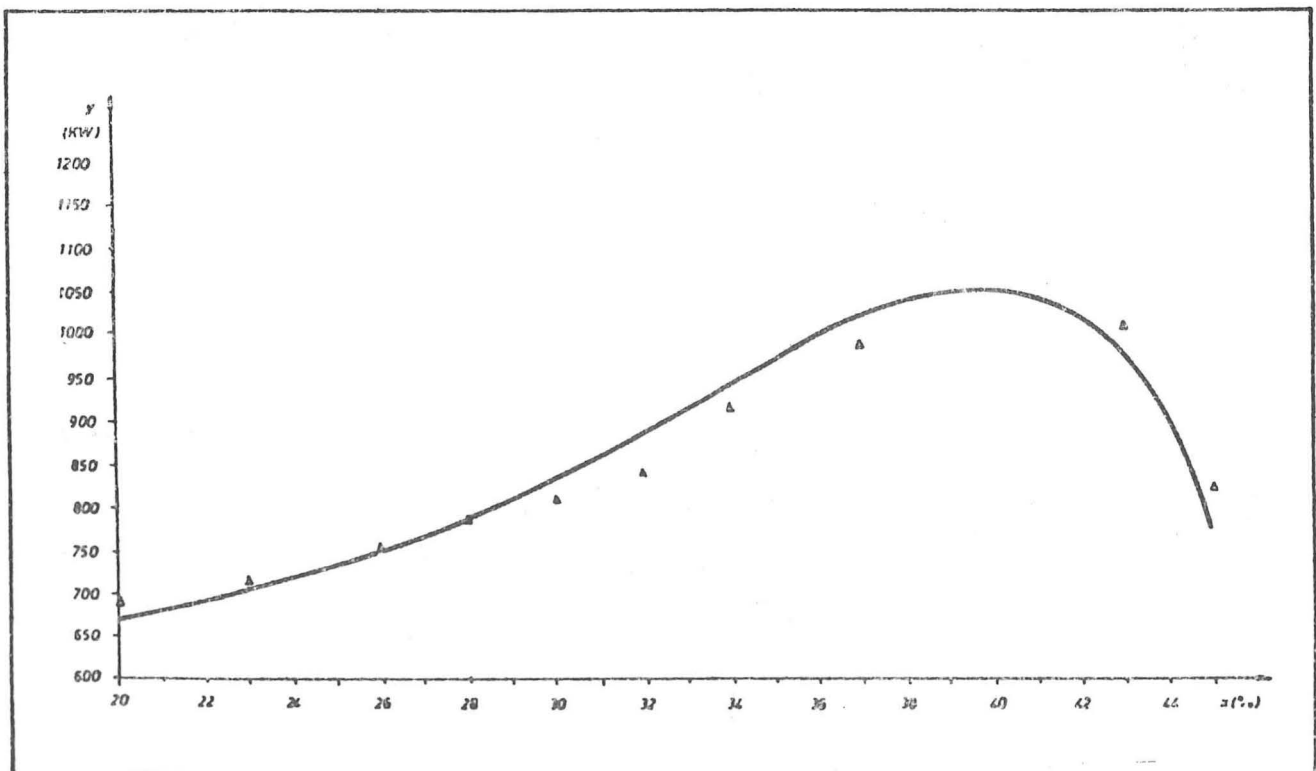
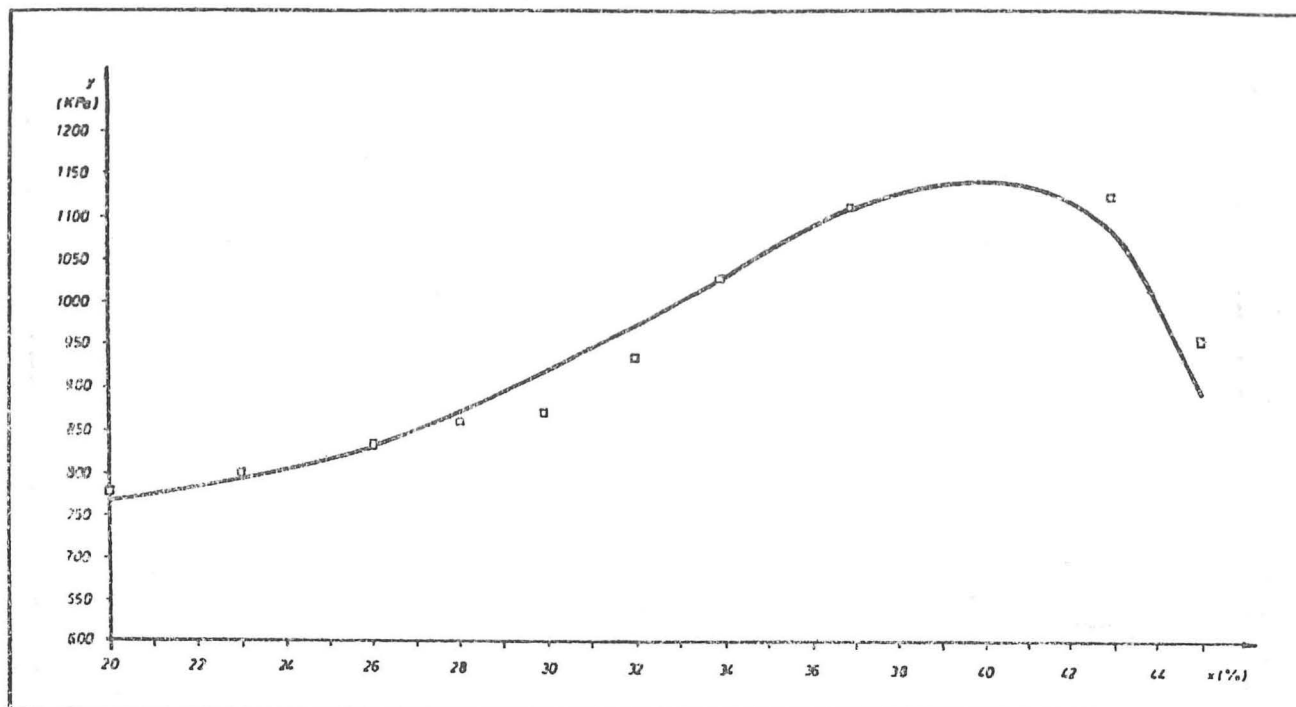


Imagen 11

Carga del molino (γ) en función de la carga volumétrica (χ) densidad $\gamma = 3800 \text{ kg/m}^3$



6.0 OPTIMIZACION DE LA POTENCIA DEL MOTOR EN EL MOLINO

Ya hemos visto que el proceso de atenuación tiene una amplia aplicación y puede servir para distintos propósitos. De la total energía que hoy en día se emplea en el mundo, 2,8 y 3,4% es parte del proceso de la atenuación. Por eso, la designación de la óptima potencia del motor del molino y, con esa capacidad, representa un importante problema tecnológico, puesto que la total capacidad de la planta y el gasto específico de la energía dependen de la correcta elección de las dimensiones del molino y del régimen de su funcionamiento.

Para designar la necesaria potencia del motor del molino industrial generalmente se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$(A) P = 1,36 \cdot D^{2,6} \cdot L \cdot \gamma$$

donde la P representa la potencia del motor en kW, la D es el diámetro efectivo del molino expresado en metros, la L es la longitud del molino también expresada en metros y la γ es la densidad de la carga expresada en toneladas según m^3 .

La segunda ecuación para la designación de la potencia necesaria en el motor del molino industrial es la siguiente:

$$(B) P = W_i \left(\frac{D_i}{D_p} \right)^{2,85} \frac{L_i}{L_p} / 0,95$$

donde la P es la potencia del motor en kW, la D_i es el diámetro efectivo del molino industrial, la D_p es el diámetro efectivo del molino semindustrial, la L_i es la longitud del molino industrial, la L_p es la longitud del molino semindustrial y la W_i es el factor funcional. En la ecuación (B) los D_i , D_p , L_i y L_p están dados en metros.

Al designar la potencia del motor del molino industrial mediante la ecuación (A) no se toma en cuenta la carga volumétrica como parámetro muy influyente, lo cual resulta ser una desventaja. La designación de la potencia del motor del molino industrial mediante la ecuación (B) está relacionado con el funcionamiento del molino semindustrial donde, además de la potencia efectiva del molino industrial y semindustrial, también aparece el factor funcional.

Para poder comparar los valores de la potencia de los electromotores calculados mediante las mencionadas ecuaciones con la realmente necesaria potencia, se han recogido datos de unas cuantas minas del mundo donde han sido colocados molinos semiautógenos de grandes dimensiones. Por otra parte, las mediciones efectuadas en los molinos semindustriales y semiautógenos en la mina de cobre de Majdampok, han facilitado fijar ciertas dependencias matemáticas entre algunos parámetros influyentes en cuanto a la potencia de los electromotores y, basándose en ellos, buscar la ecuación para el cálculo de la potencia óptima de los electromotores. De esa forma fue posible comparar los valores consecui-

dos de la nueva ecuación y de las primeras dos, igual que compararles con los auténticos valores de la potencia de los electromotores mencionados en el cuadro N° 13.

Los auténticos valores de la potencia de los electromotores de los molinos industriales determinados experimentalmente fueron en casi todos los casos menores de los valores correspondientes calculados mediante las ecuaciones (A) y (B). Estas diferencias se notan especialmente en la ecuación (B).

Estas diferencias aparecen generalmente por los altos valores de los exponentes con los que se gradúa en las ecuaciones el diámetro y la longitud del molino. Esto se destaca más en la ecuación (B).

En cuanto al gasto de la energía en el funcionamiento del molino, la mayor influencia la ejerce la total carga del molino. Si con la M designamos la masa de la total carga del molino, con la V el volumen del molino, con la V_p la carga volumétrica expresada en partes de la unidad y con la γ la densidad de la total carga, entonces, relacionado a la masa tenemos:

$$M = V \cdot V_p \cdot \gamma$$

Puesto que el volumen del molino

$$V = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot L$$

donde la D presenta el diámetro efectivo del molino, la L la longitud efectiva del molino. Ahora, para la masa M , tenemos:

$$M = \frac{\pi}{4} D^2 L V_p \gamma$$

Para la determinación de la potencia del motor del molino industrial dependientemente de la masa de la carga total, hemos empezado con la ecuación:

$$P = a_1 M^k$$

es decir, de la ecuación

$$(C_1) P = a (D^2 L V_p \gamma)^k$$

donde la a y la k son constantes.

Basándose en los resultados conseguidos mediante los experimentos y bajo distintas condiciones del funcionamiento de la mina de cobre de Majdanpek, se han determinado los valores para las constantes a y k que figuran en la ecuación (C₁). Así, se ha conseguido la ecuación para el cálculo de la potencia de los electromotores necesaria para su funcionamiento:

$$(C_2) P = 111,15 (D^2 L V_p \gamma)^{0,66}$$

donde la P se potencia del electromotor en kW, la D — diámetro efectivo del molino expresado en metros, la L — longitud efectiva del molino también expresada en metros, la V_p —total carga volumétrica expresada en partes de la unidad, γ — densidad de la carga total expresada en toneladas por metro cúbico.

Si en la ecuación (C₂) expresamos la total carga volumétrica en porcentajes, se conseguirá la ecuación:

$$(C) P = 5,32 (D^2 L V_p \gamma)^{0,66}$$

Los valores de la potencia de los electromotores de los molinos industriales calculados según la ecuación (C) concuerdan perfectamente con los valores conseguidos con la medición.

Aquí destacan las características y las condiciones del funcionamiento de los cuatro molinos elegidos de distintas dimensiones.

Las dimensiones y las condiciones del funcionamiento del primer molino:

$$D_1 = 8,54 \text{ m}, L = 3,66 \text{ m}; F_{80} = 150 \text{ m}, n_s = 0,70, n_{kr} = 9,91^{-1}. a = a_1/a_2 = 127/71 \text{ mm (nuevo cambio)}$$

$$b = 6 \text{ mm}, \gamma_1 = 2700 \text{ kg/m}^3; \lambda_k = 8\%, V_p = 30\%, \gamma = 3200 \text{ kg/m}^3.$$

Las dimensiones y condiciones del funcionamiento del segundo molino:

$D_1 = 9,150 \text{ m}$, $L = 3,660 \text{ m}$, $F_{80} = 150 \text{ mm}$, $n_s = 0,80$, $n_{kr} = 9,91^{-1}$, $a = a_1/a_2 = 59/44 \text{ mm}$ (viejos cambios), $b = 6 \text{ mm}$, $\gamma_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$.

De esa forma se han conseguido los diámetros efectivos:

$D = 8,358 \text{ m}$ para el primer molino

$D = 9,042 \text{ m}$ para el segundo molino

$D = 9,328 \text{ m}$ para el tercer molino, y

$D = 9,328 \text{ m}$ para el cuarto molino.

En el cuadro N° 13, referente a los cuatro mencionados molinos, se han dado las características y las condiciones del funcionamiento, la potencia calculada de los electromotores según las ecuaciones (A), (B) y (C).

CUADRO N° 13
Datos comparativos

Características del molino					Potencia medida		Potencia calculada según la ecuación	
D; m	L; m	V_p %	γ_k %	$\gamma t/m^3$	P; kW	(A); kW	(B); kW	(C); kW
8,358	3,66	30	8	3,20	4200	3978	6979	4200
9,042	3,66	32	10	3,34	5000	5094	8500	5002
9,328	4,27	28	8	3,28	5230	6328	10836	5221
9,328	4,73	30	10	3,42	6000	7309	12004	6009

Como puede observarse del cuadro N° 13, los valores de la potencia de los electromotores calculados según la ecuación (C) concuerdan perfectamente con los valores conseguidos con la medición. Los valores calculados de la potencia de electromotores con la aplicación de la ecuación (A), difieren menos de los valores medidos en los molinos con dimensiones inferiores, mientras que esta diferencia es algo mayor en los molinos más grandes. Los valores calculados de la potencia de los electromotores mediante la ecuación (B), como puede observarse en el cuadro mencionado, difieren mucho de la potencia de los motores conseguida con la medición.

Mediante la ecuación (C) puede calcularse la potencia del electromotor del molino dependientemente del diámetro efectivo del molino (D), de la longitud efectiva del molino (L), del porcentaje de la total carga volumétrica (V_p) y de la densidad de la carga (γ).

En los cuadros N°s 14 y 15 están dados los valores para la potencia de los electromotores de molinos cuyo diámetro $D_1 = 9,150 \text{ m}$ y la longitud $L = 3,66 \text{ m}$, que están calculados según la ecuación (C) con las mencionadas densidades de la carga tomadas del cuadro N° 6, determinadas con las mediciones.

CUADRO N° 14
Potencia de los electromotores y la densidad de la carga en función de V_p para los distintos λ_k

Carga volumétrica V_p %	Potencia de los electromotores y la densidad de la carga							
	$\lambda_k = 6\%$		$\lambda_k = 8\%$		$\lambda_k = 10\%$			
	P; kW	γ ; t/m ³	P; kW	γ ; t/m ³	P; kW	γ ; t/m ³	P; kW	γ ; t/m ³
20	3614	3,32	3812	3,60	4019	3,90		
22	3826	3,29	3993	3,51	4207	3,80		
24	4036	3,27	4157	3,42	4378	3,70		
26	4237	3,25	4323	3,35	4533	3,60		
28	4432	3,23	4477	3,28	4673	3,50		
30	4610	3,20	4610	3,20	4816	3,42		
32	4731	3,12	4770	3,16	4948	3,34		

Condicionamientos:

$D = 8,968$, $L = 3,66$; $F_{80} = 150 \text{ mm}$, $n_s = 0,70$.

$n_{kr} = 9,91^{-1}$, $\gamma_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$, $a = a_1/2 = 127/71$

(nuevos recambios), $b = 6 \text{ mm}$

CUADRO N° 15

Potencia de los electomotores y la densidad de la carga en función V_p para los distintos λ_k

Carga volumétrica V_p ; %	Potencia de los electomotores y la densidad de la carga						
	P ; kW	$\lambda_k = 6\%$ γ ; t/m ³	P ; kW	$\lambda_k = 8\%$ γ ; t/m ³	γ ; kW	$\lambda_k = 10\%$ γ ; t/m ³	
20	3654	3,32	3854	3,60	4063	3,90	
22	3867	3,29	4036	3,51	4253	3,80	
24	4080	3,27	4202	3,42	4426	3,70	
26	4284	3,25	4370	3,35	4583	3,60	
28	4480	3,23	4526	3,28	4724	3,50	
30	4660	3,20	4660	3,20	4869	3,42	
32	4782	3,12	4822	3,16	5002	3,34	

Condicionamientos:

$D = 9,042 \text{ m}; L = 3,66 \text{ m}; F_{80} = 150 \text{ mm},$

$n_s = 0,70, \cdot n_{kr} = 9,91^{-1}, \gamma_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$

$a = a_1/a_2 = 59/44$ (nuevos recambios), $n = 6 \text{ mm}$

En el cuadro N° 16 están dados los valores para la potencia de electomotores de molinos cuyo diámetro $D_1 = 9,150 \text{ m}$ y la longitud $L = 3,66 \text{ m}$, calculados según la ecuación (C) bajo mencionadas condiciones en el funcionamiento del molino. En cuanto a la densidad de la carga se han tomado los valores conseguidos de las ecuaciones de (11) – (15) para el caso $V_p = 30\%$

CUADRO N° 16

Potencia de los electomotores para distintos k_i

$\lambda_k = 6\%$	$\gamma = 3.101 \text{ kg/m}^3$	$\lambda_k = 8\%$	$\gamma = 3.232 \text{ kg/m}^3$	$\lambda_k = 10\%$	$\gamma = 3.416 \text{ kg/m}^3$
4.564 kW		4.691 kW		4.865 kW	

Condicionamientos:

$D = 8.968 \text{ m}, L = 3,66 \text{ m}, F_{80} = 150 \text{ mm},$

$n_s = 0,70 \cdot n_{kr} = 9,91^{-1}, \gamma_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$

$a = a_1/a_2 = 127/71$ (nuevos recambios), $b = 6 \text{ m}.$

En el cuadro N° 17 están dados los valores para la potencia de los electomotores vistos en el caso anterior, consiguiendo los valores de la densidad de la carga de la ecuación N° 16. Mencionados valores de la potencia de los motores están calculados según la ecuación (C).

CUADRO N° 17

Potencia del electomotor para los distintos k_i

$\lambda_k = 6\%$	$\gamma = 3.040 \text{ kg/m}^3$	$\lambda_k = 8\%$	$\gamma = 3.240 \text{ kg/m}^3$	$\lambda_k = 10\%$	$\gamma = 3.440 \text{ kg/m}^3$
4.505		4.698		4.888	

Al final de este trabajo hemos querido exponer la ecuación para el cálculo de la potencia de los electomotores de molinos, además de la ecuación:

$$(C') P = 4,97 (D^2 LV_p \gamma) \frac{2}{3}$$

Los calculados valores de la potencia de motores mediante la ecuación (C') también concuerdan satisfactoriamente

te con los valores conseguidos con la medición. Esta ecuación resulta ser de interés por los valores del exponente que es

$$\frac{2}{3} \text{ En la ecuación (C) el valor del exponente es } 0,66 \approx \frac{2}{3}$$

En el cuadro N° 18, para los cuatro molinos ya mencionados, se dan los valores de la potencia del electromotor conseguida con la medición y los valores de la potencia calculada mediante la ecuación (C').

CUADRO N° 18
Potencia electromotora según la ecuación (C')

Características del molino		Potencia medida		Potencia calculada según (C')		
D, m	L, m	V _p %	λ _k	γ, t/m ³	p, kW	P, kW
8,358	3,66	30	8	3,20	4200	4.198
9,042	3,66	32	10	3,34	5000	5.008
9,328	4,27	28	8	3,28	5230	5.229
9,328	4,73	30	10	3,42	6000	6.027

CONCLUSION

El trabajo científico y de investigación ha mostrado, a través de la labor experimental y análisis teórico de los resultados, que se puede conseguir la ecuación para el cálculo de la potencia óptima electromotora de los molinos semiautógenos.

Las investigaciones han mostrado que las ya existentes fórmulas $P = 1,36 \cdot D^{2,6} L$ y $P = \frac{Wi (Di/Dp 2,85 Li/Lp)}{0,95}$

dan resultados que difieren bastante de los reales, especialmente en los molinos de grandes dimensiones. Esas diferencias de los resultados llegan a ser mayores del 100%. Las diferencias son especialmente grandes en la aplicación de la segunda ecuación.

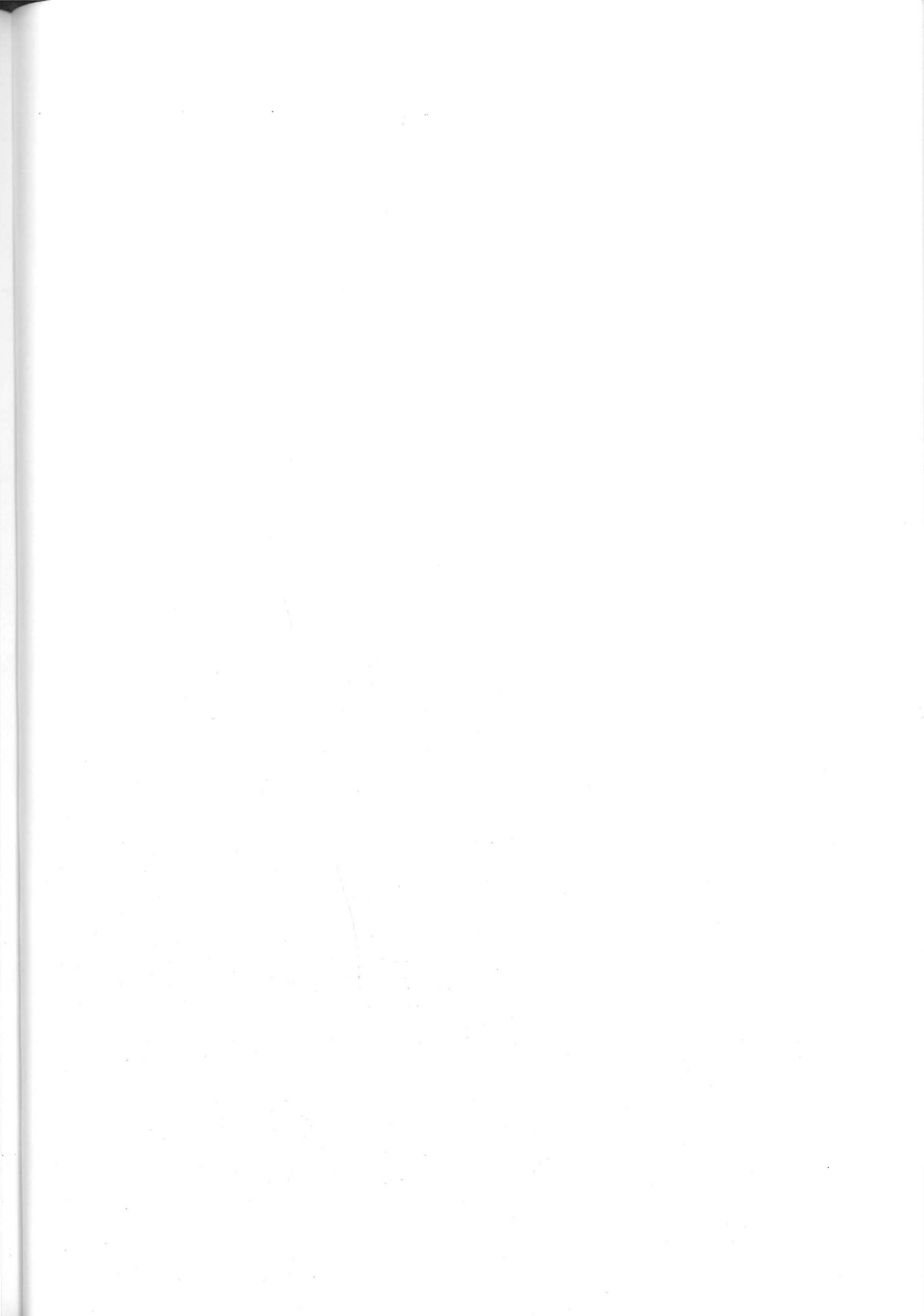
Nuestras investigaciones han permitido determinar la ecuación para calcular las óptimas potencias electromotoras de los molinos semiautógenos a base de numerosos experimentos y resultados conseguidos en los molinos semindustriales y semiautógenos:

$$P = 5,32 (D^2 \cdot L \cdot V_p \cdot \gamma)^{0,66}; kW$$

donde:

- P = potencia electromotora; kW
- D — diámetro efectivo del molino; m
- L — longitud efectiva del molino; m
- V_p — carga volumétrica del molino (mineral + agua + bolas); %
- γ — densidad de la carga; t/m³

Los valores de la potencia electromotora de los molinos semiautógenos conseguidos mediante esta ecuación concuerdan perfectamente con los valores de la potencia electromotora conseguida con la medición en varias minas del mundo en molinos semiautógenos de distintas dimensiones.





**KOMITET ZA PODZEMNU EKSPLOATACIJU
MINERALNIH SIROVINA**

Saveza inženjera i tehničara rudarske,
geološke i metalurške struke Jugoslavije

**!
SAVEZ RUDARSKIH INŽENJERA I TEHNIČARA
POLJSKE**

XII.

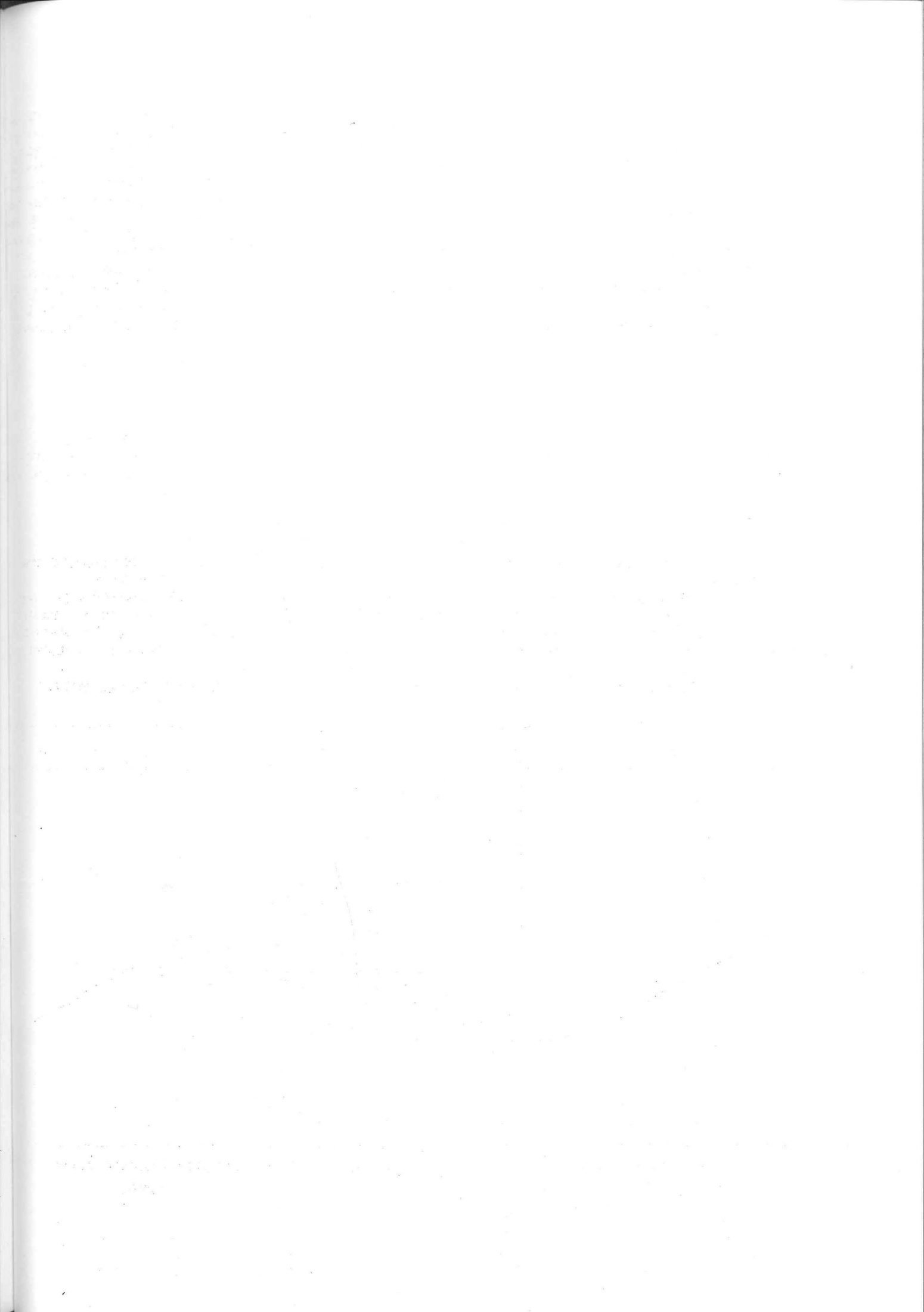
**JUGOSLOVENSKO-POLJSKI
SIMPOZIJUM O PODZEMNOJ
EKSPLOATACIJI MINERALNIH
SIROVINA**

**ISKORIŠĆENJE LEŽIŠTA MINERALNIH
SIROVINA U PROCESU PODZEMNE
EKSPLOATACIJE**

ZBORNİK RADOVA

ZAKOPANE—POLJSKA

20.-28. 4. 1985. godine



Prof.dr Branislav Genčić
Prof.dr Dragomir Simeunović
Prof.dr Ante Gluščević
Prof.dr Miodrag Lilić
Prof.dr Ljubomir Vukajlović
dr Zoran Petković
Mr Dušan Gagić

Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

UTICAJ DUZINE OTKOPA NA ISKORIŠĆENJE UGLJA U USLOVIMA MALIH LEŽIŠTA SA SLOŽENIM EKSPLOATACIONIM KARAKTERISTIKAMA

1. U V O D

Sva ležišta uglja na području SFRJ karakterišu složeni geološko-rudarski uslovi u smislu uticaja velikog broja faktora koji mogu imati negativno dejstvo na mogućnost i efekte primene širokog čela sa tehnologijom mehanizovanog otkopavanja. U ovom slučaju pod pojmom tehnologije mehanizovanog otkopavanja podrazumeva se primena kombinovanih otkopnih mašina uz podgrađjivanje otkopa mehanizovanom hidrauličnom podgradom (MHP), s obzirom na činjenicu da je to osnovna orijentacija u proizvodnji uglja podzemnim načinom u uslovima jugoslovenskih ležišta uglja.

Dominantni geološki oblici su tabličaste nagnute strukture ili sinklinale sa izraženim tektonskim deformacijama plikativnog i disjunktivnog karaktera, čije su posledice nepravilni oblici ograničenih eksploatacionih područja i moguće kratke dužine otkopnih polja i blokova sa čestim promenama pravca pružanja i padnih uglova slojeva. Gro proizvodnje ostvaruje se iz slojeva uglja sa padnim uglom do 30° i sa debljinom većom od 3,0 m. Pri tome je promenljivost debljine slojeva znatna, što u pojedinim slučajevima predstavlja ograničavajući faktor za unificiranje tehničkih rešenja konstrukcije podzemnog proizvodnog sistema i posebno konstruktivnih karakteristika ot-

kopnih jedinica. Ako se prathodnom doda činjenica da su osnovna fizičko-mehanička svojstva radne sredine nepovoljna jer preovladjuju ležišta u kojima su vrednosti čvrstoće na pritisak krovine i podine niže ili znatno niže u odnosu na ugalj, onda je jasno da prirodne karakteristike ležišta u mnogome sužavaju mogućnosti izgradnje velikih proizvodnih sistema i koncentracije proizvodnje u istim. Posebno je pitanje uvođenja tehnologije mehanizovanog otkopavanja u uslovima malih ležišta, odnosno u eksploatacionim područjima rudnika sa geološkim rezervama od nekoliko miliona pa do nekoliko desetina miliona tona uglja u kojima je potrebno istražiti mogućnost uvođenja samo jedne, eventualno dve, mehanizovane otkopne jedinice.

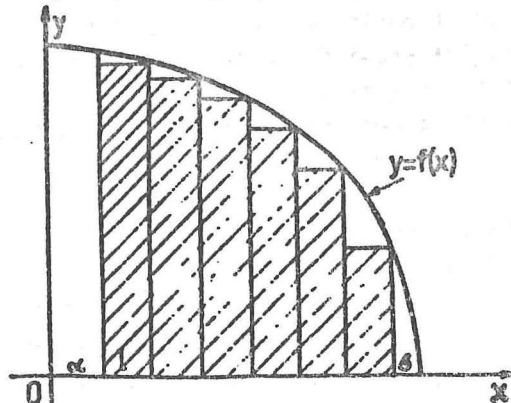
Kada se zna da prelaz na tehnologiju mehanizovanog otkopavanja i odgovarajuća rekonstrukcija podzemnog proizvodnog sistema predstavlja veliki investicioni zahvat u smislu angažovanja znatnog obima sredstava i da je ograničena mogućnost industrijskog eksperimenta, jasno je da u fazi predinvesticione analize moraju biti kompleksno istražene uzajamne zavisnosti svih relevantnih geološko-rudarskih, proizvodno-tehničkih faktora i ekonomskih efekata proizvodnje. U tom sklopu višestruki značaj ima pitanje gubitaka, odnosno iskorišćenje ležišta. Za razliku od ležišta uglja u kojima rezerve omogućavaju dugi period eksploatacije uz optimizaciju proizvodnog kapaciteta, kada povećanje iskorišćenja ima naglašen globalni privredno-strategijski karakter, u uslovima malih ležišta iskorišćenje rezervi bitno utiče na ekonomiju eksploatacije i može biti presudan faktor koji opravdava ili pak ne opravdava zamenu tehnologije.

Polazeći od navedenih uslova, kao i činjenice da na području SFRJ, a naročito u SR Srbiji ima veći broj ležišta kvalitetnog mrkog uglja sa relativno malim rezervama uglja i nepravilnim oblicima eksploatacionih polja, u kojima se primenjuje ili planira primena tehnologije mehanizovanog otkopavanja na širokom čelu, na Katedri za podzemnu eksploataciju ležišta

u saradnji sa Katedrom za matematiku i šire u okviru Rudarsko-geološkog fakulteta u Beogradu razvija se metodologija za tehničko-ekonomsku ocenu takvih ležišta sa stanovišta mogućnosti zamene tehnologije. Po toj metodologiji posebna se pažnja posvećuje istraživanju gubitaka uglja u funkciji prirodnih karakteristika ležišta, konstrukcije podzemnog proizvodnog sistema i metode i tehnologije otkopavanja. U ovom radu date su samo osnovne postavke pri izučavanju kategorije iskorišćenja ležišta u funkciji oblika površine eksploatacionog polja i dužine otkopa sa ciljem da se dokaže značaj istraživanja te veze, s obzirom da se ovom aspektu problema najčešće ne posvećuje pažnja pri rešavanju praktičnih zadataka.

2. ISKORIŠĆENJE REZERVE UGLJA U ZAVISNOSTI OD OBLIKA LEŽIŠTA I DUŽINE OTKOPA

U bilo kom konkretnom slučaju eksploataciona granica otkopnog bloka (dela ležišta) u horizontalnoj projekciji može biti aproksimirana analitičkom funkcijom u odnosu na izabrani koordinatni sistem vezan za položaj podzemnih prostorija osnovne pripreme. U odnosu na izabrani koordinatni sistem XOY, neka je linija granice (granica otkopnog bloka) data jednačinom $y=f(x)$ (sl.1).



Slika br.1

Površina ograničena delom x-ose između α i β , pravama $x=\alpha$, $x=\beta$, i lukom krive $y=f(x)$ data je kao

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Površina koju čine šrafirani pravougaonici (otkopna polja) ima vrednost

$$P_2 = l [f(\beta) + f(\beta-l) + f(\beta-2l) + \dots + f(\alpha+l)]$$

tj. vrednost

$$P_1 = l [f(\alpha+l) + f(\alpha+2l) + \dots + f(\alpha+nl)]$$

Površina P_1 predstavlja iskorišćeni deo površine P prilikom otkopavanja širokim čelom dužine l . Ova površina zavisi od oblika krive $y=f(x)$, tj. od oblika granice ležišta u ravni otkopavanja XOY i od dužine čela l za utvrđene fiksne vrednosti veličine α i β .

Odnos $\frac{P_1}{P}$ izražen u procentima, tj. $K = \frac{P_1}{P} \cdot 100$ predstavlja koeficijent pokrivenosti površine P prilikom otkopavanja, odnosno koeficijent korekcije bilansnih rezervi uglja kao posledica geometrizacije ležišta za potrebe primene metode otkopavanja širokim čelom, pod uslovom da se ne vrši otkopavanje ovih delova ležišta nekim drugim tehničkim rešenjem metode otkopavanja i da je prosečna debljina sloja u celom tretiranom području ista. Iako je a priori uočiti da otkopavanje ovih, perifernih, delova ležišta predstavlja kompleksan problem u smislu prostornog i vremenskog povezivanja sa osnovnim proizvodnim sistemom. Tu se, pre svega, postavlja pitanje veze za sistem transporta i provetravanja kao i uticaja na intenzitet podzemnog pritiska u zoni mehanizovanog otkopa. Ekonomsku opravdanost je nužno ispitati u svakom odredjenom slučaju ali, na osnovu nekih praktičnih iskustava kao i naših istraživanja, došlo se do saznanja da najčešće ove delove ležišta nije racionalno ni ekonomski opravdano

otkopavati. Neovisno o tome, u prvoj fazi ispitivanja uslova za zamenu tehnologije korisno je utvrditi pokrivenost površine sloja pri različitim dužinama otkopa kako bi se stvorila sigurna osnova za ekonomsko-matematičku optimizaciju podzemnog proizvodnog sistema kao celine, odnosno odredile industrijske rezerve u ležištu koje mogu biti zahvaćene mehanizovanim otkopom širokog čela.

U slučaju da je prosečna debljina sloja u celom tretiranom delu ležišta ista to će, kao što je već istaknuto, koeficijent korekcije bilansnih rezervi biti jednak koeficijentu K pa su tada industrijske rezerve uglja

$$R_i = R_D \cdot K$$

Logično je da pri promenljivim debljinama sloja treba korigovati koeficijent K odgovarajućim odnosom debljine slojeva, tj.

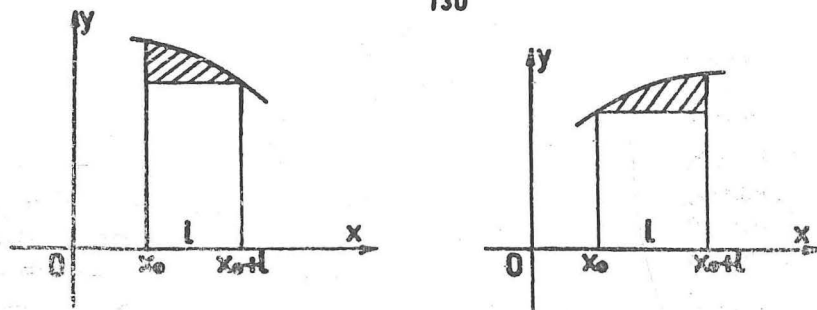
$$K_k = K \cdot \frac{d_s}{d_{sp}}$$

gde je: d_s - debljina sloja u otkopnom bloku,
 d_{sp} - debljina sloja u perifernom delu.

Gubitke ugljene supstance u opštem slučaju moguće je takođe odrediti analitički kao funkciju dužine otkopa i oblika granične krive. Naime, ako je $y=f(x)=Y(x)$ jednačina krive, tada je površina koju ograničava luk krive, deo x-ose između tačaka x_0 i x_0+l i pravih $x=x_0$ i $x=x_0+l$ data sa

$$\int_{x_0}^{x_0+l} y(x) dx.$$

a površina pravougaonika je $l \cdot y(x_0+l)$ odnosno $l \cdot y(x_0)$ u zavisnosti da li je $y=y(x)$ opadajuća ili rastuća funkcija (sl.br.2).



Slika br.2

Šraflirani deo koji smo označili sa $R(l)$ ima vrednost

$$R(l) = \int_{x_0}^{x_0+l} y(x) dx - l \cdot y(x_0+l)$$

odnosno

$$R(l) = \int_{x_0}^{x_0+l} y(x) dx - l \cdot y(x_0)$$

U prvom slučaju za $R(l)$ se dobija

$$R(l) = \frac{l^2}{2} \cdot y'(c_1), \quad x_0 < c_1 < x_0+l$$

a u drugom slučaju

$$R(l) = \frac{l^2}{2} y'(\bar{c}_1), \quad x_0 < \bar{c}_1 < x_0+l$$

Ako stavimo $M_1 = \max |y'(x)|$, tada za $R(l)$ u oba slučaja važi
 $x_0 < x < x_0+l$

ocena

$$|R(l)| < \frac{l^2}{2} \cdot M_1$$

Za slučaj kada u intervalu $[a, \beta]$ imamo n pravougaonika, tada za $R(l)$ važi ocena

$$(a) \quad |R(l)| < \frac{l^2}{2} (M_1 + M_2 + \dots + M_n)$$

gde je $M_1 = \max |y'(x)|$

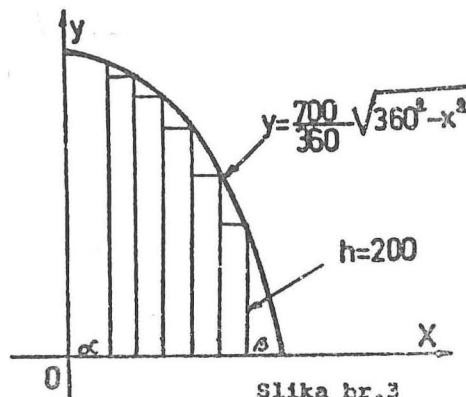
$$x_0 + iL < x < x_0 + (i+1)L ; \quad i=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ako se stavi $M = \max(M_1, M_2, \dots, M_n) = \max |y'(x)|$
 $\alpha < x < \beta \quad (x_0 = \alpha, x_0 + nL = \beta)$

tada se izraz pod (a) svodi na

$$(b) \quad |R(L)| \leq \frac{L^2}{2} \cdot nM.$$

Ilustracije radi, daće se jedan jednostavniji slučaj kada ležište ima elipsasti oblik čije su poluose $a=360$ m i $b=700$ m (slika br.3). Koordinatni sistem XOY smestimo u centar elipse.



Jednačina ove elipse je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tj.

$$y = \frac{700}{360} \sqrt{360^2 - x^2}$$

Za $h=200$ m dobija se $\beta=345$ m. Uzmimo da je $\alpha=45$ m. Za različite vrednosti L , tj. za različite dužine otkopa dobiće se različiti odnosi $\frac{P_1}{P}$. U cilju analize posmatrani su slučajevi za $L=50$, $L=60$, $L=75$ i $L=100$ m.

	l=50		l=60		l=75		l=100	
x_1	$y_1=f(x_1)$	x_1	$y_1=f(x_1)$	x_1	$y_1=f(x_1)$	x_1	$y_1=f(x_1)$	
$a=45$	695	45	695	45	695	45	695	
$a+l=95$	675	105	670	120	660	145	641	
$a+2l=145$	641	165	652	195	588	245	513	
$a+3l=195$	588	225	546	270	463	345	200	
$a+4l=245$	513	285	428	345	200			
$a+5l=295$	401	345	200					
$a+8l=345$	200							

U našem slučaju je

$$P = \frac{\beta}{\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{700}{360} \int_{45}^{345} \sqrt{360^2 - x^2} dx = 164.494,5$$

$$\begin{aligned} P(50) &= 150.900 \\ P(60) &= 147.000 \\ P(75) &= 143.325 \\ P(100) &= 135.400 \end{aligned}$$

Za odnos $K = \frac{P_1}{P} \cdot 100$ dobijeno je redom:

$$\begin{aligned} K(50) &= 91,74\% \\ K(60) &= 89,95\% \\ K(75) &= 87,13\% \\ K(100) &= 82,31\% \end{aligned}$$

Za iste vrednosti a i b pri $a=25$ i $\beta=345$ dobijeno je:

$$\begin{aligned} P &= 178.426 \\ P(40) &= 167.640 \\ P(40) &= 93,95\% \end{aligned}$$

Dati primer i dobijene brojne vrednosti za koeficijent K u potpunosti potvrđuju polaznu pretpostavku o znatnom uticaju dužine otkopa na iskorišćenje rezervi uglja jer se vidi da pri promeni dužine otkopa od 40 do 100 m gubici se povećavaju za 11,6% ili, za svakih 10 m povećanja dužine otkopa smanjuje se iskorišćenje ležišta po osnovi geometrizacije proizvodnih jedinica oko 2%.

Logički je moguće zaključiti da će gubici rasti ukoliko su granice eksploatacionog područja nepravilnije i celoviti tektonski sklop složeniji. U vezi sa ovim je i pitanje istraženosti ležišta, odnosno tačnosti ograničenja koje takođe može delovati negativno na gubitke ugljene supstance. Isto tako, da se zaključiti da se pri povećanju dimenzija otkopnih polja po padu i pružanju procentualni udeo ovih gubitaka smanjuje.

Kada se ima u vidu činjenica da su u nekim našim ležištima metode otkopavanja širokim čelom sa zarušavanjem krovne ploče uglja (vertikalna koncentracija) jedina alternativa za primenu tehnologije mehanizovanog otkopavanja, a kod kojih se eksploatacioni gubici kreću od 10 do 30%, lako je izračunati da se u pojedinim slučajevima ukupno iskorišćenje može svesti na svega 50 do 60%.

3. TEHNIČKO-EKONOMSKE IMPLIKACIJE PROBLEMA

Porast gubitaka ugljene supstance sa povećanjem dužine otkopa ima višestruki uticaj na integralne tehničko-ekonomske faktore otkopavanja u uslovima malih ležišta sa složenim geološkim karakteristikama i nepravilnim granicama. U ovom slučaju vreme eksploatacije na najneposredniji način povezuje tehničko-ekonomske efekte eksploatacije, konstrukciju podzemnog proizvodnog sistema i prirodne uslove u ležištu. Naime, vreme eksploatacije takvog ležišta (dela ležišta) mora biti toliko da se reprodukuju sva uložena sredstva, pa je njegovu povezanost i međusobnu uslovljenost sa tehničkim rešenjima nužno posebno analizirati već u prvoj fazi ispitivanja mogućnosti zamene tehnologije prelazom na mehanizovano otkopavanje. Bolje rečeno, ako se vrši ispitivanje opravdanosti zamene tehnologije i optimizira izbor tehničkih rešenja onda proces optimizacije mora imati višestapni karakter, tako da se već u prvoj etapi ocenjuju geološko-rudarski uslovi

u ležištu, preliminarno definišu tehničko-tehnološka rešenja i određuju globalni tehničko-ekonomski efekti. U tom postupku svrsishodno je poći od analitičke zavisnosti iskorišćenja ležišta u funkciji dužine otkopa, s obzirom da je moguće i sve osnovne kategorije troškova eksploatacije iskazati kao funkciju dužine otkopa za izabrana tehnička rešenja metode i tehnologije otkopavanja. Primena savremene računске tehnike omogućuje da se analitičkim matematičkim modelom odredi optimalni interval dužine otkopa i analizira uticaj velikog broja faktora na kapacitet otkopa i troškove proizvodnje i na taj način stvori osnova za detaljno istraživanje i optimizaciju podzemnog proizvodnog sistema kao celine.

Ako se podje od činjenice da veća dužina otkopa zahteva veća investiciona ulaganja i istovremeno uzrokuje povećanje za ovu kategoriju gubitaka uglja, jasno je da će u uslovima malih ležišta optimalna dužina opadati sa smanjenjem iskorišćenja ležišta, bez obzira što se pri tom povećava koeficijent pripreme i manifestuju neka druga negativna dejstva na troškove proizvodnje. Posledica može biti i ta da u nekim slučajevima zamena tehnologije i ne daje odgovarajuće poboljšanje ekonomskih efekata što, opet, ne mora isključiti primenu tehnologije mehanizovanog otkopavanja. Ovde se imaju u vidu prednosti koje takva tehnologija donosi u domenu zaštite i sigurnosti rada.



**Savez inženjera i tehničara rudarske,
geološke i metalurške struke Jugoslavije**

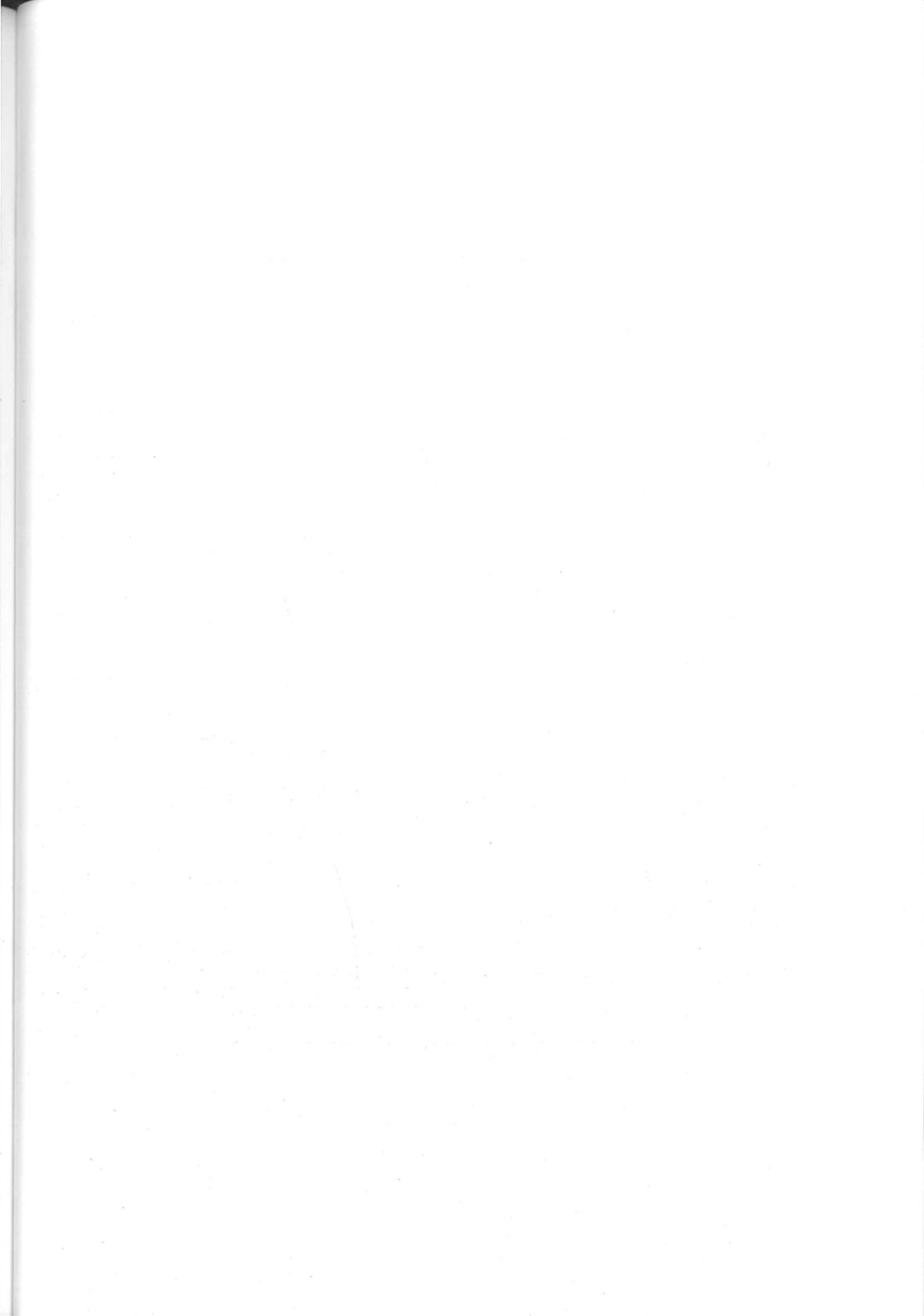
KOMITET ZA PRIPREMU MINERALNIH SIROVINA

**X JUGOSLOVENSKI SIMPOZIJUM
O PRIPREMI
MINERALNIH SIROVINA**

ZBORNİK RADOVA

STRUGA

17. do 20. septembra 1985. godine



KORELACIJA OSNOVNIH PARAMETARA RADA MLINOVA I
NJIHOV UTICAJ NA KAPACITET I UTROŠAK ENERGIJE

M. Grujić¹, D. Salatić², D. Simeunović³,
D. Ocepek⁴, J. Milošević⁵ i S. Deušić⁶

IZVOD

Istraživačkim radom uspostavljena je korelacija između nekih osnovnih parametara u radu mlinova kao što su: masa rude u mlinu, broj obrtaja mlina, specifična potrošnja električne energije, specifična potrošnja meljućih tela i veličina zrna materijala u mlinu. Utvrđena je efikasnost rada mlina u zavisnosti od apsorpcije snage. Date su i neke matematičke zavisnosti.

UVOD

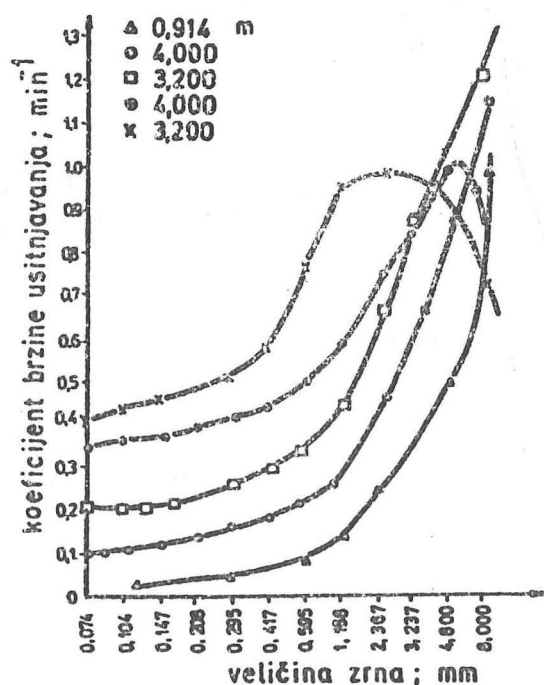
Do kretanja pulpe kroz mlin dolazi usled strujanja i disperzije, te je za povećanje specifične proizvodnosti, pored ostalog, veoma važno optimiranje pražnjenja mlina, jer je brzina protoka pulpe kroz mlin direktno proporcionalna brzini pražnjenja mlina.

Poznavanje zavisnosti između količine pražnjenja pulpe iz mlina i parametara koji utiču na to omogućuje stvaranje optimalnih uslova za povećanje brzine usitnjavanja rude u mlinu. To je posebno karakteristično za mlinove velikih dimenzija kada se melje ruda velike tvrđine, jer kao posledica nastaje smanjenje koeficijenta brzine usitnjavanja mineralnih zrna veličine iznad 1,2 mm, što se jasno vidi na grafikonima slike 1.

Istraživanja u cilju povećanja kinetike mlevenja izvedena su u mlinovima poluindustrijskih i industrijskih razmera. Rezultati istraživanja omogućili su da se dobiju potrebni podaci za uspo-

1. Rukovodilac razvoja u Rudniku bakra Majdanpek i docent Tehničkog fakulteta u Boru, Maršala Tita 2, 19250 Majdanpek.
2. Redovni profesor Rudarsko-geološkog fakulteta u Beogradu, Džušina 7, 11000 Beograd.
3. Redovni profesor Rudarsko-geološkog fakulteta u Beogradu, Džušina 7, 11000 Beograd.
4. Redovni profesor Fakultete za naravoslovje in tehnologijo u Ljubljani, Aškerčeva 20, 61000 Ljubljana.
5. Predsednik Poslovnog odbora Basena Bor, 19210 Bor.
6. Stručni saradnik Rudarsko-geološkog fakulteta u Beogradu, Džušina 7, 11000 Beograd.

stavljanje matematičkih zavisnosti između zapunjenosti mlina i specifične proizvodnosti mlevenja i specifične potrošnje električne energije, a u funkciji tvrđine rude.



Sl. 1.- Koficijenti brzine usitnjavanja zrna različite krupnoće u mlinovima Rudnika bakra u Majdanpeku

Rezultati istraživanja omogućili su definisanje optimalnih uslova mlevenja vezanih za smanjenje specifične potrošnje električne energije, smanjenje habanja meljućih tela i poboljšanje granulometrijskog sastava proizvoda mlevenja. Istovremeno istraživanja ukazuju na prednost ugradnje rešetke u mlinu, koja reguliše protok pulpe kroz mlin sa kuglama pomoću mehanizma sa promenljivom brzinom pražnjenja.

IZNALAŽENJE JEDNAČINE ZA OPTIMIRANJE MLEVENJA

Na osnovu brojnih eksperimentalnih podataka, prikupljenih u radu poluindustrijskog i industrijskih mlinova u Rudniku bakra Majdanpek, pristupilo se iznalaženju matematičke zavisnosti između pojedinih parametara. Ti parametri bili su: potrošnja energije, obloga, šipki, kugla, te specifični kapaciteti mlina sa šipkama i mlina sa kuglama, sve u funkciji kapaciteta mlinova,

zatim udeo veličine zrna u proizvodu mlevenja d_{95} , d_{74} i d_{10} i kapacitet mlina u funkciji broja obrtaja mlina, te potrošnju energije i apsorpciju snage u funkciji zapunjenosti mlina i , na kraju, specifični kapaciteti mlina sa šipkama i mlina sa kuglama u funkciji veličine zrna D_{95} .

Svaka teorijski nađjena jednačina zavisnosti pojedinih parametara grafički je prikazana linijom u čijoj se blizini nalaze i eksperimentalno dobijeni podaci.

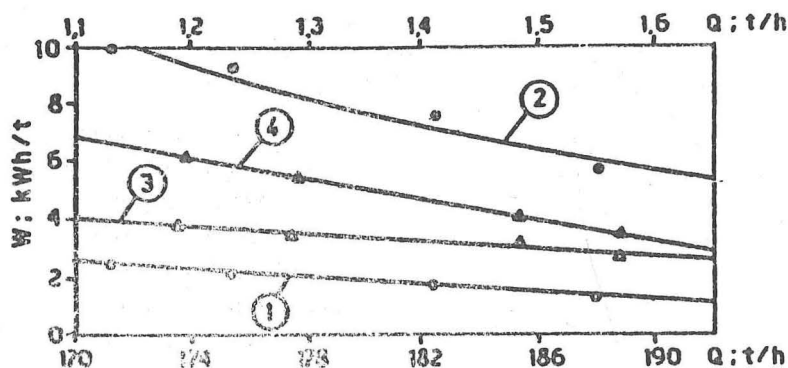
S obzirom da grafički prikazane jednačine u veoma visokom stepenu aproksimiraju eksperimentalne podatke to su dobijeni koeficijenti korelacije, takodje, veoma visoki. U svim slučajevima taj koeficijent je iznad 0,90, a u većini slučajeva i iznad 0,97. Zbog toga se dobijene jednačine mogu smatrati veoma pouzdanim za optimiranje uslova rada industrijskih mlinova.

POTROŠNJA ENERGIJE I MELJUĆIH TELA I SPECIFIČNI KAPACITET MLEVENJA U FUNKCIJI KAPACITETA MLINA

Potrošnja energije i meljućih tela i specifični kapacitet mlevenja u funkciji kapaciteta mlina mogu se izraziti zajedničkom opštom jednačinom: $y = a/x + b$, gde je x časovni kapacitet mlina u t/h a y jedan od navedenih parametara, dok su a i b konstante.

Potrošnja električne energije u industrijskom mlinu sa šipkama izražava se jednačinom: $y = 1\,031,195/x - 2,76$; kWh/t, a u mlinu sa kuglama jednačinom: $y = 3\,939,058/x - 12,88$; kWh/t. Za prvu jednačinu koeficijent korelacije je: $r = 0,986$, a za drugu $r = 0,991$. Kada su u pitanju poluindustrijski mlinovi onda jednačina za mlin sa šipkama ima oblik: $y = 2,348/x + 1,99$; kWh/t, a za mlin sa kuglama: $y = 6,042/x + 3,07$; kWh/t. Odgovarajući koeficijenti korelacije su 0,947 i 0,994. Sve 4 jednačine grafički su prikazane na slici 2. Jasno je uočljivo da je potrošnja električne energije po toni samlevene rude u svim slučajevima obrnuto proporcionalna kapacitetu mlina.

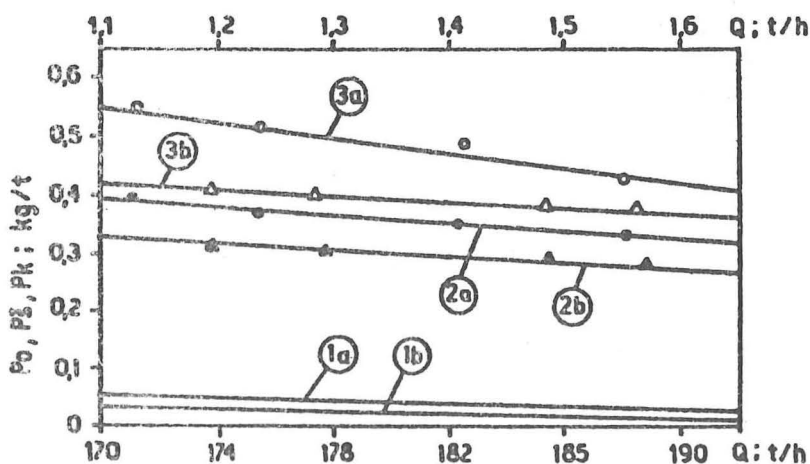
Kao što smo već rekli ista opšta jednačina važi i za potrošnju meljućih tela u funkciji kapaciteta. Kada su u pitanju industrijski mlinovi potrošnja obloga može se izraziti jednačinom: $y = 32,373/x - 0,138$; kg/t, potrošnja šipki: $y = 109,668/x - 0,249$; kg/t i potrošnja kugla: $y = 200,097/x - 0,624$; kg/t. Odgovarajući koeficijenti korelacije su: 0,997, 0,987 i 0,964. Iste zavisnosti kod poluindustrijskih mlinova izražavaju se jednačinama:



Sl. 2.- Potrošnja energije u funkciji kapaciteta u industrijskim mlinovima sa šipkama (1) i kuglama (2) i poluindustrijskim mlinovima sa šipkama (3) i kuglama (4)

$y = 0,0336/x + 0,001$; kg/t, za obloge, $y = 0,140/x + 0,196$; kg/t, za šipke i $y = 0,171/x + 0,269$; kg/t, za kugle. Vrednosti respektivnih koeficijenata korelacije su: 0,981, 0,922 i 0,921.

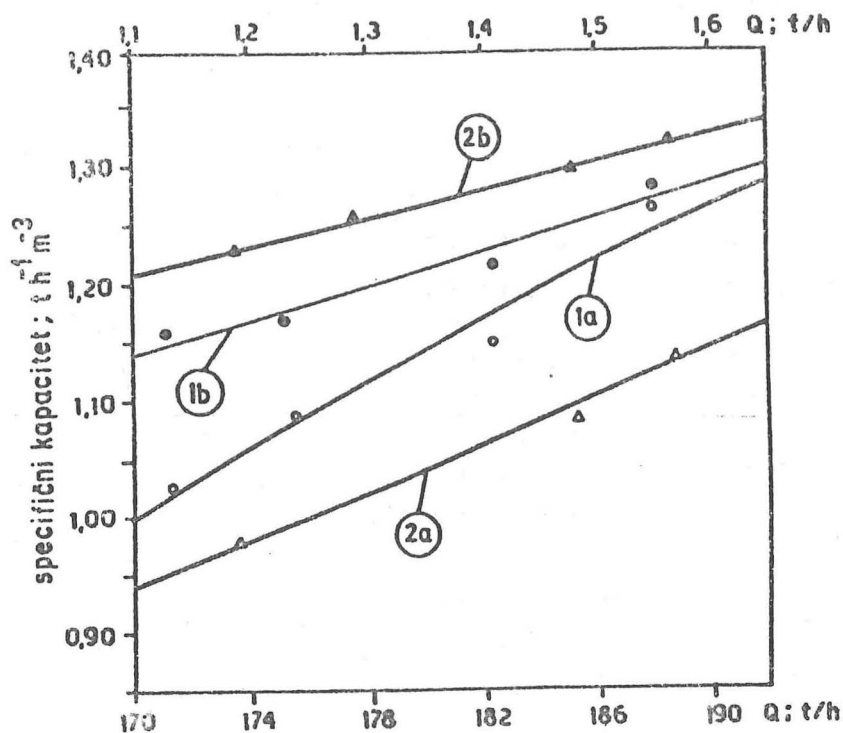
Svih 6 jednačina grafički je prikazano na slici 3. I ovde se uočava direktna zavisnost izmedju potrošnje čelika i kapaciteta, koja je u obrnutoj proporciji, tj. sa porastom časovnog kapaciteta smanjuje se potrošnja obloga, šipki i kugla.



Sl. 3.- Potrošnja obloga (1), šipki (2) i kugla (3) u industrijskim (a) i poluindustrijskim (b) mlinovima u funkciji kapaciteta mlevenja

Vrednosti specifičnog kapaciteta mlevenja u funkciji kapaciteta, takodje, mogu se izraziti jednačinom: $y = a/x + b$. Prema tome za mlin sa šipkama industrijskih razmera jednačina glasi:

$y = -170,425/x + 1,865$; $\text{th}^{-1}\text{m}^{-3}$, a za mlin sa kuglama istih razmera: $y = -352,689/x + 2,507$; $\text{th}^{-1}\text{m}^{-3}$. Odgovarajuće jednačine za poluindustrijski mlin glase: $y = -0,283/x + 1,189$; $\text{th}^{-1}\text{m}^{-3}$ i $y = -0,417/x + 1,581$; $\text{th}^{-1}\text{m}^{-3}$. Grafički prikaz navedene 4 jednačine dat je na slici 4.



Sl. 4.- Specifični kapacitet u funkciji kapaciteta mlina u industrijskom (1) i poluindustrijskog (2) mlinu sa šipkama (a) i kuglama (b)

Grafički prikaz jednačina na slici 4 jasno ukazuje da sa porastom kapaciteta mlina raste i specifični kapacitet mlevenja, kao u industrijskim, tako i u poluindustrijskim mlinovima.

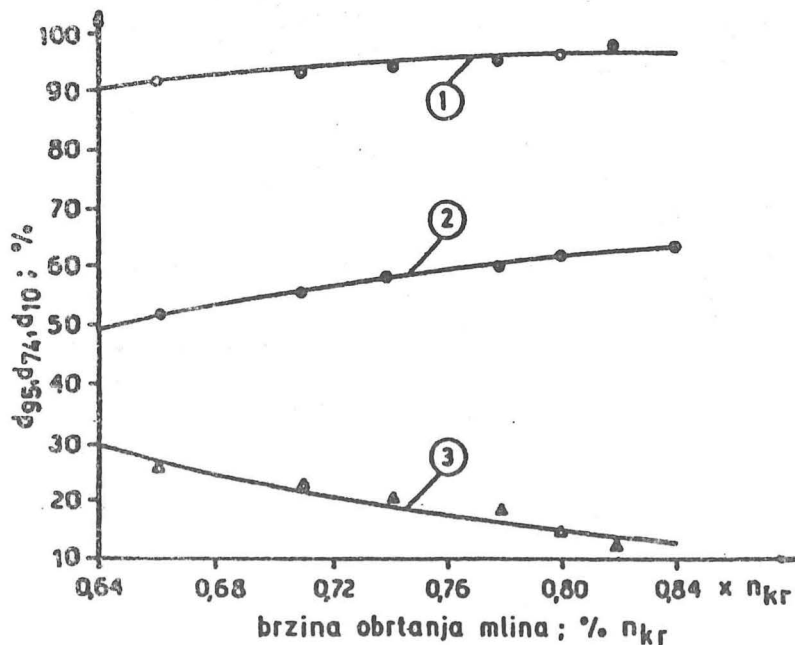
UDEO ZRNA d_{95} , d_{74} I d_{10} U IZLAZU IZ MLINA I KAPACITET U FUNKCIJI BRZINE OBRATANJA MLINA

Brzina obrtanja mlina bitno utiče na granulometrijski sastav izlaza iz mlina. Sa promenom brzine obrtanja mlina menja se i časovni kapacitet mlina. U Rudniku bakra u Majdanpeku proučavano

je dejstvo promene brzine obrtanja mlina na granulometrijski sastav izlaza iz mlina i kapacitet mlevenja. Dobijeni eksperimentalni rezultati poslužili su za iznalaženje matematičke zavisnosti pojedinih parametara. Konstatovano je da i ovde važi opšta jednačina: $y = a/x + b$, kako za granulometrijski sastav izlaza iz mlina, tako i za njegov kapacitet. Pri tom x označava brzinu obrtanja mlina.

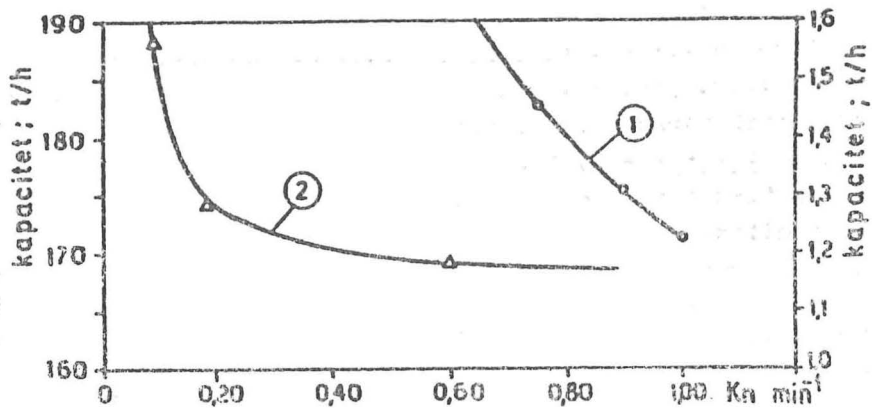
Za udeo zrna d_{95} jednačina glasi: $y = 18,869/x + 119,74$; %, za zrna d_{74} : $y = 36,062/x + 106,70$; %, a za veličinu zrna d_{10} : $y = 47,363/x - 44,48$; %. I ovde su ostvareni veoma visoki koeficijenti korelacije i to: 0,976, 0,998 i 0,967.

Sve 3 jednačine grafički su prikazane na slici 5, gde su tačkama nanete i eksperimentalno dobijene vrednosti.



Sl. 5.- Finoća izlaza iz mlina d_{95} (1), d_{74} (2) i d_{10} (3) u funkciji brzine obrtanja industrijskog mlina

Kapacitet mlina, takodje, zavisi od brzine obrtanja mlina. U ovom radu utvrdjivo je kapacitet poluindustrijskog i industrijskog mlina u zavisnosti od brzine njegovog obrtanja. Za industrijski mlin jednačina glasi: $y = 33,364/x + 138$; t/h, a za poluindustrijski: $y = 0,0408/x + 1,097$; t/h. Odgovarajući koeficijenti korelacije su: 0,999 i 0,985. Grafički prikaz jednačina dat je na slici 6. Kriva 2, na slici 6, pokazuje da kapacitet

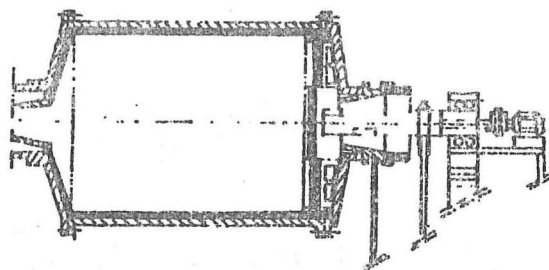


Sl. 6.- Kapacitet u funkciji brzine obrtanja industrijskog (1) i poluindustrijskog (2) mlina

poluindustrijskog mlina više zavisi od brzine obrtanja mlina, nego industrijskog (kriva 1).

POTROŠNJA ENERGIJE I APSORPCIJA SNAGE U FUNKCIJI ZAPREMINSKE ZAPUNJENOSTI MLINA

Prikazani rezultati istraživanja u ovom radu omogućili su da se utvrde međuzavisnosti pojedinih osnovnih parametara mlevenja kod poluindustrijskih i industrijskih mlinova. Da bi se navedeni osnovni parametri u mlevenju održavali u okviru optimalnih vrednosti, ugradjena je rešetka sa podešavajućim mehanizmom za pražnjenje mlina u poluindustrijski mlin (slika 7).



Sl. 7.- Rešetka sa podešavajućim mehanizmom za pražnjenje pulpe iz mlina

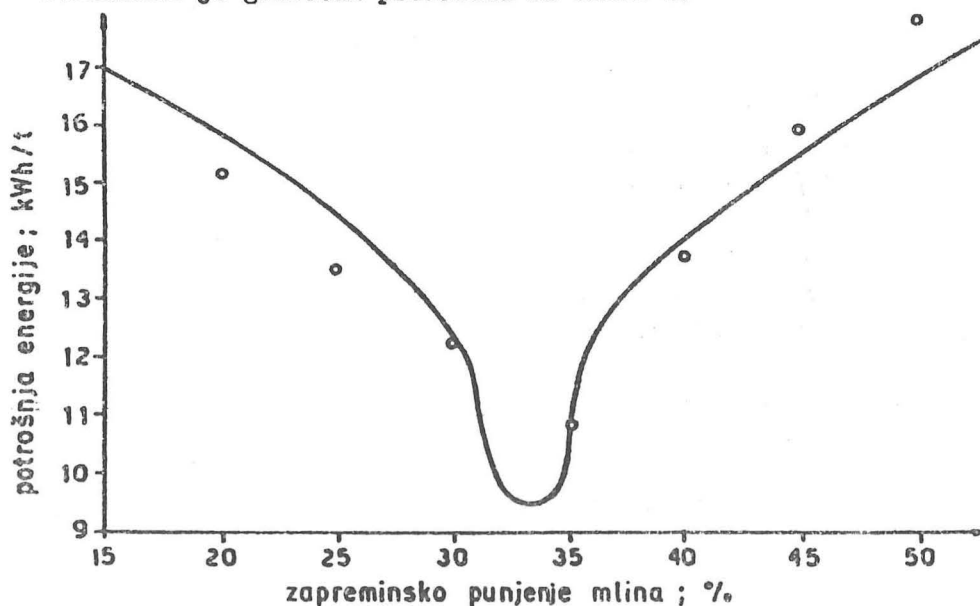
Ugrađeni mehanizam omogućuje regulisanje protoka pulpe u širokom rasponu, što omogućuje održavanje konstantnog nivoa pulpe u mlinu bez obzira na karakteristike rude. S obzirom da je mehanizam za regulisanje nezavisan od mlina, promene su vršene bez zaustavljanja mlina. Brzina obrtanja mlina bila je $0,80 \times n_{kr}$. Granulosastav i količina kugla u mlinu formirani su u zavisnosti od granulosastava i tvrdine rude.

Na osnovu eksperimentalnih rezultata o potrošnji energije u zavisnosti od zapreminskog punjenja mlina uspostavljena je matematička zavisnost jednačinom oblika: $y = a + \sqrt[3]{b(x - c)^2 + d(x - c)}$, gde je y potrošnja energije, x zapreminsko punjenje mlina u %, a a , b , c i d konstante.

U pomenutom slučaju jednačina zavisnosti ima sledeći oblik:

$y = 10,8 + \sqrt[3]{0,75(x - 35)^2 + 3(x - 35)}$; kWh/h sa koeficijentom korelacije $r = 0,960$.

Jednačina je grafički prikazana na slici 8.

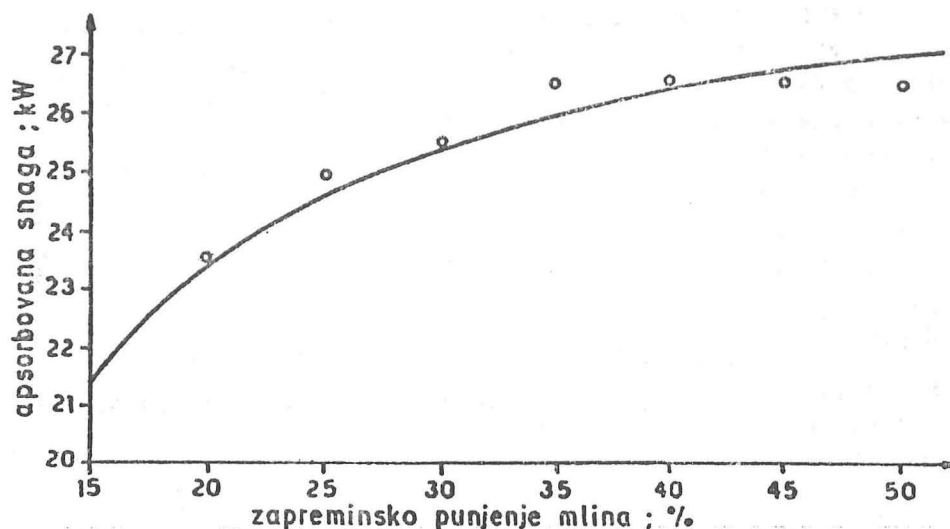


Sl. 8.- Potrošnja energije u funkciji zapreminskog punjenja mlina

Oblik krive na slici 8 jasno ukazuje da sa porastom zapreminskog punjenja mlina do blizu 35 % opada potrošnja električne energije po toni samlevene rude. Sa daljim porastom zapreminskog punjenja mlina raste i specifična potrošnja energije.

Na slici 9 grafički je predstavljena matematička zavisnost između apsorbirane snage i zapreminskog punjenja mlina. Ova za-

visnost izražava se jednačinom: $y = -121,863/x + 29,5$; kW, koja daje koeficijent korelacije $r = 0,984$.



Sl. 9.- Apsorbovana snaga u funkciji zapreminskog punjenja mlina

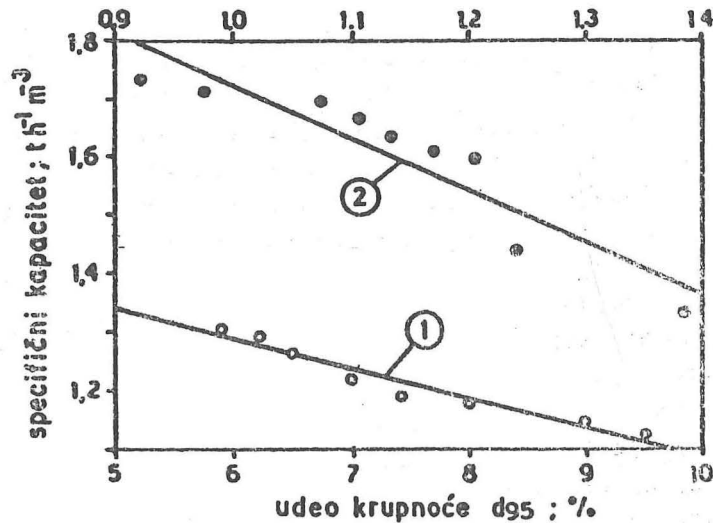
Kriva na slici 9 pokazuje da apsorbovana snaga raste sa porastom zapreminskog punjenja mlina. U početku nešto brže, a potom sporije.

SPECIFIČNI KAPACITET U FUNKCIJI KRUPNOĆE D_{95}

Ova serija opita obuhvatila je ispitivanje zavisnosti specifičnog kapaciteta mlevenja od krupnoće ulazne rude, odnosno od masenog udela zrna krupnijih od D_{95} μm . Ispitivanja su izvođena dvostepenim mlevenjem u poluindustrijskom mlinu sa kuglama.

Dobiveni parametri u eksperimentalnom radu iskorišćeni su za iznalaženje matematičke zavisnosti između specifičnog kapaciteta i krupnoće ulazne rude, kako u prvi, tako i u drugi stepen mlevenja. Ta zavisnost u prvom stepenu mlevenja predstavljena je jednačinom: $y = -0,0505x + 1,594$; $\text{th}^{-1}\text{m}^{-3}$, a u drugom jednačinom: $y = -0,878x + 2,602$; $\text{th}^{-1}\text{m}^{-3}$. Za prvu jednačinu koeficijent korelacije iznosi 0,979, a za drugu 0,936.

Obe jednačine grafički su prikazane na slici 10, gde prava 1 daje zavisnost u prvom, a prava 2 u drugom stepenu mlevenja u poluindustrijskom mlinu sa kuglama.



Sl. 10.- Specifični kapacitet u funkciji krupnoće D₉₅

Posmatrajući prave 1 i 2 na slici 10 jasno se uočava da specifični kapacitet opada sa porastom udela krupnoće D₉₅. Takođe, uočava se da je taj uticaj veći u drugom stepenu mlevenja.

ZAKLJUČAK

Sva praktična i teorijska istraživanja u ovom radu imala su za cilj da se pronadje zavisnost izmedju pojedinih osnovnih parametara u procesu mlevenja u cilju uspostavljanja optimalnih uslova mlevenja pri kojima se za usitnjavanje ostvaruje maksimalna kinetika mlevenja.

Paralelna istraživanja u radu poluindustrijskih i industrijskih mlinova pokazala su da postoje osetno razlike u rezultatima, tako da se može tvrditi da indeks meljivosti, kao parametar mlevenja ne može biti dovoljan za definisanje tehnološkog procesa mlevenja u industrijskim mlinovima. Rezultati su pokazali da je medjuzavisnost osnovnih faktora mlevenja u industrijskim mlinovima složenija nego u poluindustrijskim. Poseban značaj ima brzina proticanja pulpe kroz mlin, definisanje mase pulpe koja se prazni iz mlina u jedinici vremena. Poseban značaj ima održavanje optimalnog nivoa zapunjenosti mlina, a što se može postići ugradnjom podešavajućeg mehanizma za promerljivo pražnjenje pulpe iz mlina kroz rešetku.

Istraživanja su ukazala na posebno značajnu ulogu časovnog

kapaciteta, brzine obrtanja mlina, zapreminske zapunjenosti mlina, brzine protoka pulpe kroz mlin i načina pražnjenja pulpe iz mlina na ostvarivanje maksimalne kinetičke energije pri padanju meljućih tela i na ostvarivanje optimalnih tehnoloških pokazatelja mlevenja, pro svega na granulometrijski sastav proizvoda mlevenja, na stepen otvaranja, na časovni kapacitet mlina i na troškove mlevenja.

SUMMARY

THE CORRELATION BETWEEN MAIN OPERATIONAL MILL PARAMETERS AND THEIR INFLUENCE ON THE MILL CAPACITY AND POWER CONSUMPTION

As it can be seen from the obtained results, some technological and structural operational parameters differ between semi-industrial and industrial conditions. It means that all process features which effect grinding process can not be expressed by one parameter only.

The problem is that all operational factors are more dependant on each other for large mills than from smaller semi-industrial mills. This especially relates to material flow which depends on discharge rate.

To investigate the filling level of the mill we used the discharging mechanism (Fig. 7) which showed very good results.

From the data shown on Fig. 1 it can be seen that input energy can vary with changes of RPM, capacity and flow of the pulp.

The increase of grinding rate coefficient for grains larger than 1,2 mm in industrial mill, has similar value as coefficient which relates to semi-industrial mill running at 80 % of critical speed, 75 % solids content, circulating load of 500 % and filling level of 35 %. On the basis of this we can conclude that in order to reach optimal kinetic energy, grinding speed must be constant all the time which can be achieved by setting a number of mill rotations so that kinetic energy of filling balls has its maximum value, and by controlling the flow of material which depends on filling level (Fig. 6).

This will help to achive good product finenes, liberation degree and good capacity with minimal costs.

An investigation was made about mill efficiency as a function of absorbed energy in operational conditions. The relationship between the speed of mill rotations, specific power consumption, specific steel consumption and grain size was also analyzed. The transfer of pulp in the mill is caused by two reasons: the convection and the dispersion. In that sense, for good efficiency of the mill it is also important to have good discharging rate and related parameters which can affect it, provides the conditions for improving the grinding process in the mill. This especially relates to larger mills and to harder ore as grinding rate coefficient can be reduced for grains larger than 1,2 mm.

The possibilities for increasing grinding kinetics were also explored in semi-industrial mill.

On the basis of gained results mathematical interdependence was obtained between the filling ratio, specific grinding efficiency and specific consumption versus different ore hardness. The most economical power consumption and minimum wearing rate as a function of filling level were defined on that way, giving very good grain size distribution. At the same time this investigation showed the advantages of using mill grates with the device for setting the discharge capacity which controls the material flow in the mill.

Recenzija: M. Grbović



**SAVEZ RUDARSKIH INŽENJERA I TEHNIČARA
POLJSKE**

i

KOMITET ZA POVRŠINSKU EKSPLOATACIJU
Saveza inženjera i tehničara rudarske,
geološke i metalurške struke Jugoslavije

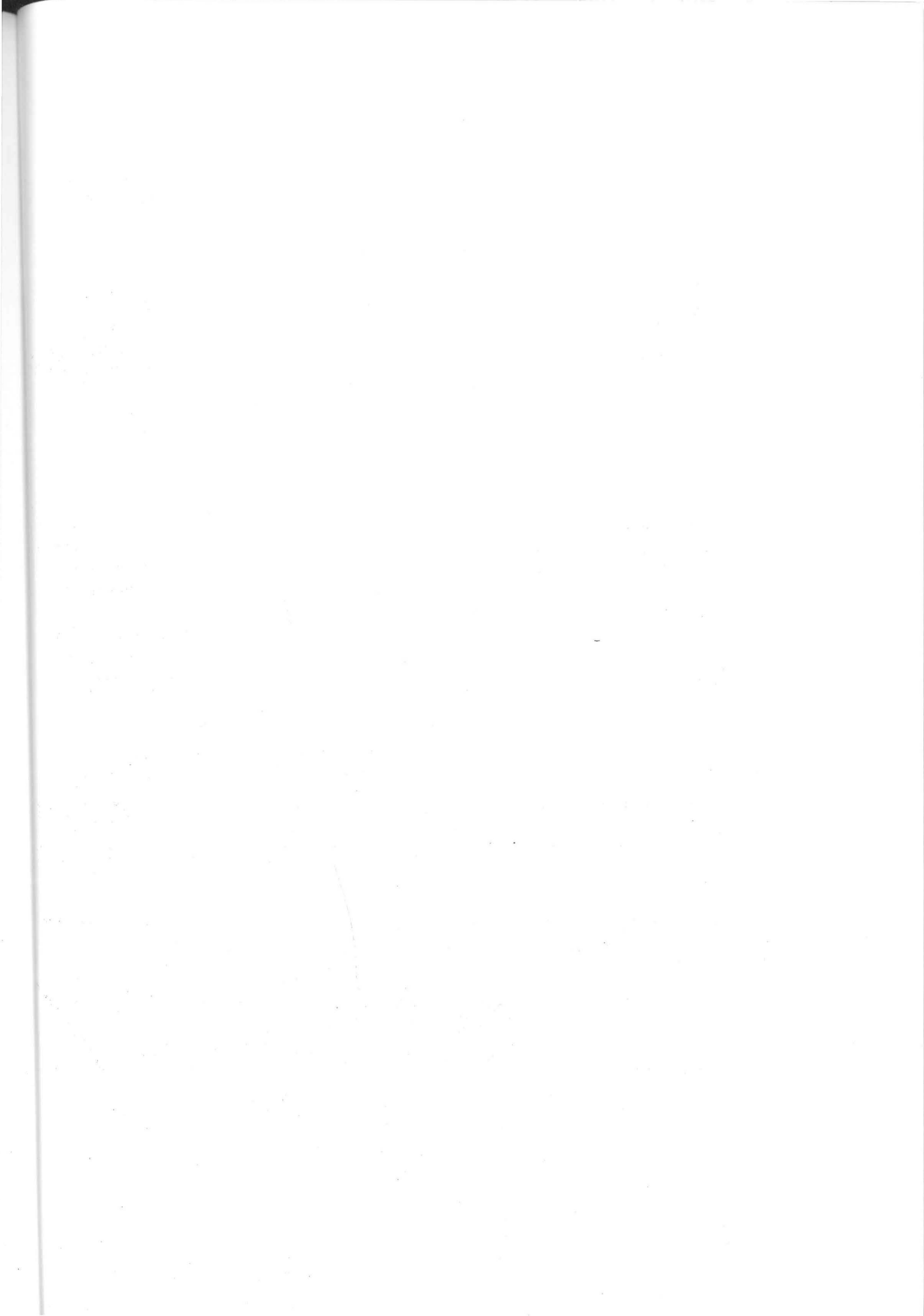


13.

**POLJSKO - JUGOSLOVENSKI
SIMPOZIJUM**

**o površinskoj eksploataciji
mineralnih sirovina**

VARŠAVA, juna 1987.



Dragomir Simeunović
 Andrija Lazić
 Dušan Simić
 Miodrag Milovanović

Rudarsko-geološki
 fakultet - Beograd

USKLADJIVANJE KAPACITETA PROIZVODNJE KVARNOG PESKA SA LEZIŠTA "SLATINA" I "ČUČUGE" U SLOŽENIM GEOLOŠKIM USLOVIMA

UVOD

Pitanje racionalnog iskorišćenja rezervi mineralnih sirovina, obzirom na njihov ograničen karakter, kvalitet i strukturu zauzima značajno mesto kod projektovanja sistema i tehnoloških zahvata u površinskoj eksploataciji.

Da bi se smanjili troškovi oplemenjivanja sirovine u procesu pripreme, a na taj način i ukupni troškovi proizvodnje, teži se direktnoj homogenizaciji u procesu otkopavanja tako da se postigne ujednačeni kvalitet ulaza za pripremu mineralnih sirovina.

Rezultati detaljnih istraživanja ukazuju da je kvarcni pesak ležišta "Slatina" i "Čučuge" dobrog kvaliteta u pogledu hemijskog sastava, dok za granulometrijski sastav postoje ograničenja kod uslova srednje krupnoće zrna kada se ležišta tretiraju pojedinačno.

Zbog toga su oba ležišta otvorena i praktično se istovremeno vrši eksploatacija na dva površinska kopa, čime se postiže znatno veće iskorišćenje rezervi, nego da se ukupni kapacitet obezbedjuje samo sa jednog kopa.

Osnovne rudarsko-geološke karakteristike ležišta

Na osnovu geoloških interpretacija, kvarcni pesak u ležištima "Čučuge" i "Slatina" pojavljuje se naizmenično u obliku slojeva i vrlo izduženih sočiva različitog hemijskog i granulometrijskog sastava.

Već u fazi istraživanja, imajući u vidu dobar kvalitet peska i osnovne zahteve potrošača u pogledu sadržaja SiO₂ i srednje krupnoće zrna, izdvojene su tri klase peska ekonomski značajne za eksploataciju:

KLASA	1	2	3
min SiO ₂ (%)	97	98	98.8
Sv (mm)	0.26	0.32	0.32

Takođe, u pojedinim delovima ležišta registrovani su tanki proslojci peska koji ne zadovoljavaju navedene zahteve i izdvojeni su kao jalovina.

Prve dve izdvojene klase peska koriste se u livačkoj, a treća u staklarskoj industriji i isporučuju se u različitim količinama.

Sa aspekta rasporeda slojeva kao i prisustva jalovih proslojaka, ležišta su predisponirana za selektivnu eksploataciju. Prisutna komponenta koja ističe značaj selektivne eksploatacije kod sagledavanja kapaciteta proizvodnje kvarcnog peska sa ova dva ležišta je srednji granulometrijski sastav (Sv), koji se mora obezbeđiti kod isporuke peska.

Karakteristično je da je granulometrijski sastav različit kod iste klase peska u ova dva ležišta, kao i u različitim delovima istog ležišta i kreće se u opsegu $+0,1 - 1,0$ mm.

Sa tog stanovišta razmotreno je pitanje ujednačavanja granulometrijskog sastava u fazi eksploatacije ležišta, obezbeđenjem potrebnih količina peska otkopavanjem različitih delova sa jednog ili oba površinska kopa.

Ovakvo opredeljenje proizilazi iz potrebe maksimalnog iskorišćenja rezervi, produženja veka eksploatacije površinskih kopova a samim tim ostvaruje se i dugoročnije snabdevanje potrošača.

Takve okolnosti su diktirale da se obzirom na strukturu ležišta, front radova na otkopavanju projektuje tako da su istovremeno po vertikalni otvorene i zahvaćene sve tri klase peska, što otvara šire mogućnosti u pogledu ujednačavanja granulometrijskog sastava.

Za tačno definisanje količinskog odnosa učešća pojedinih frakcija u ukupnom kapacitetu u funkciji granulometrijskog sastava (Sv), konstruisan je nomogram (slika 1).

Obrazloženje matematičkog modela

U ležištu kvarcnog peska zastupljen je granulometrijski sastav između a i b mm. Ako se krupnoća zrna peska označi sa X , tada je $a < X < b$. Interval (a, b) podeli se na "n" jednakih podintervala tačkama $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ pri čemu je $X_0 = a$ i $X_n = b$. Čestice peska čije veličine X zadovoljavaju uslov $X_{k-1} < X < X_k$, pripadaju intervalu (X_{k-1}, X_k) .

Od uočene količine peska posmatrane kao celine, učešće peska krupnoće između X_{k-1} i X_k označimo sa U_k ($k=1, 2, \dots, n$) sa kojima se može formirati odgovarajući histogram (slika 2.), pri čemu je:

$$\sum_{k=1}^n U_k = 1.$$

Učešće peska krupnoće između a i β mm, u ovom slučaju je jednako površini navedenog histograma duž intervala (a, β) . U fazi eksploatacije pojedinih delova ležišta "L" uzima se da su poznati njihovi granulometrijski sastavi peska.

Iz granulometrijskog sastava peska u dva ležišta "L1" i "L2" može se u svakoj fazi njihovog otkopavanja utvrditi učešće peska određene krupnoće između α i β mm.

Ako sa p_1 označimo udeo peska krupnoće od α_1 do β_1 mm u delu ležišta "L1" koji se otkopava, a sa p_2 udeo peska krupnoće od α_2 do β_2 mm u delu ležišta "L2" koji se otkopava, tada na otkopanu količinu Q_1 peska iz ležišta "L1" dolazi količina q_1 peska krupnoće od α_1 do β_1 mm, a na otkopanu količinu Q_2 peska iz ležišta "L2" dolazi količina q_2 peska krupnoće od α_2 do β_2 mm.

Pri tome je:

$$q_1 = p_1 Q_1 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$q_2 = p_2 Q_2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

Ako se zahteva da zbir količina q_1 i q_2 sa oba kopa bude konstantan čija vrednost je q , tada je prema (1) i (2):

$$q_1 + q_2 = q$$

ili

$$p_1 Q_1 + p_2 Q_2 = q \quad \dots \dots \dots (3)$$

Navedene međusobne zavisnosti veličina Q_1 , p_1 , q_1 , Q_2 , p_2 , q_2 , i q date jednačinama (1), (2), (3) prikazane su na nomogramu.

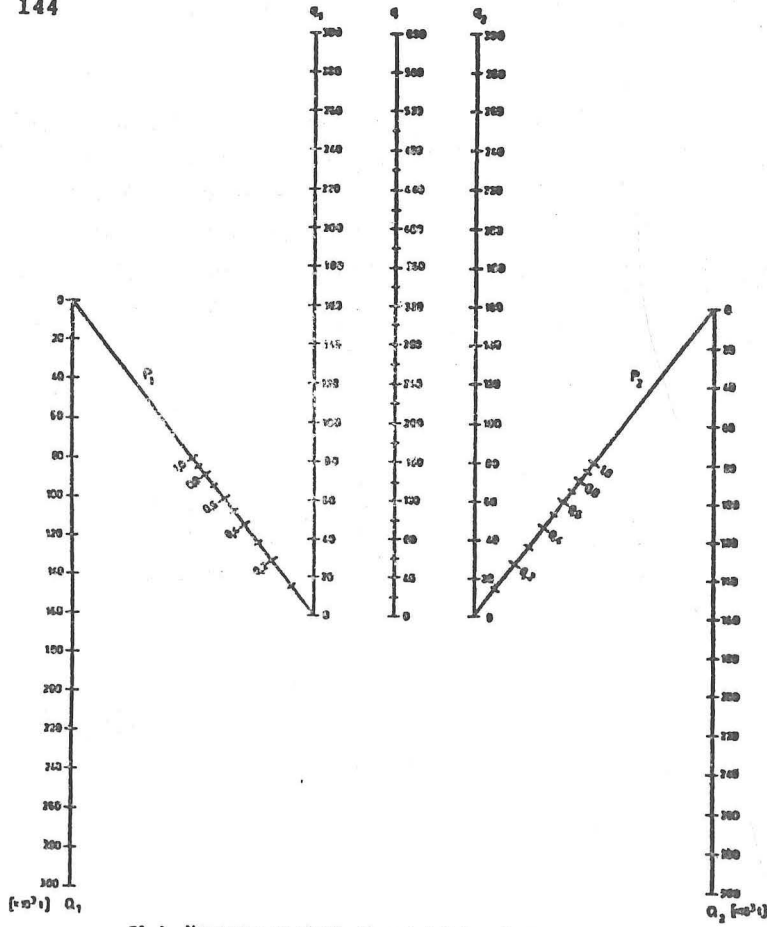
Pomoću navedenog nomograma mogu se odrediti veličine: na primer Q_1 kada su poznate veličine p_1 i q_1 ili q_2 kada su poznate veličine p_2 i Q_2 ili pak veličina q_2 kada su poznate veličine Q_1 , p_1 i q .

U poslednjem slučaju, pomoću veličina Q_1 i p_1 povlačenjem prave do preseka sa skalom q_1 , dobijamo q_1 i pomoću nadjene veličine q_1 i poznate veličine q povlačenjem prave do preseka na skali q_2 određuje se veličina q_2 .

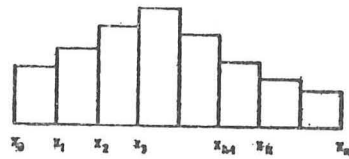
Zaključak

Na konkretnom primeru površinskih kopova kvarcnog peska "Slatina" i "Čučuge", obradjeno je uskladjeno kapaciteta proizvodnje u funkciji granulometrijskog sastava, sa osnovnim ciljem da se postigne maksimalno iskorišćenje rezervi selektivnim otkopavanjem na osnovu matematičkog modela i nomograma sa koga se tačno mogu odrediti odnosi količina sa granulometrijskim sastavom prema zahtevima srednje vrednosti krupnoće zrna.

Ovakvim načinom rada pored većeg iskorišćenja rezervi i produženja veka eksploatacije ležišta povećana je i sigurnost isporuke i u pogledu količina i asortimana kvarcnog peska pošto se istovremeno eksploatacija izvodi na više radilišta.



Sl. 1. Nomogram za određivanje potrebnih kapaciteta površinskih kopova u zavisnosti od granulometrijskog sastava kvarcnog peska



Sl. 2. Histogram

L i t e r a t u r a:

Investiciono-tehnička dokumentacija izgradnje površinskih kopova kvarcnog peska "Slatina" i "Čučuge", Rudarsko-geološki fakultet - Beograd, Beograd 1986. god.

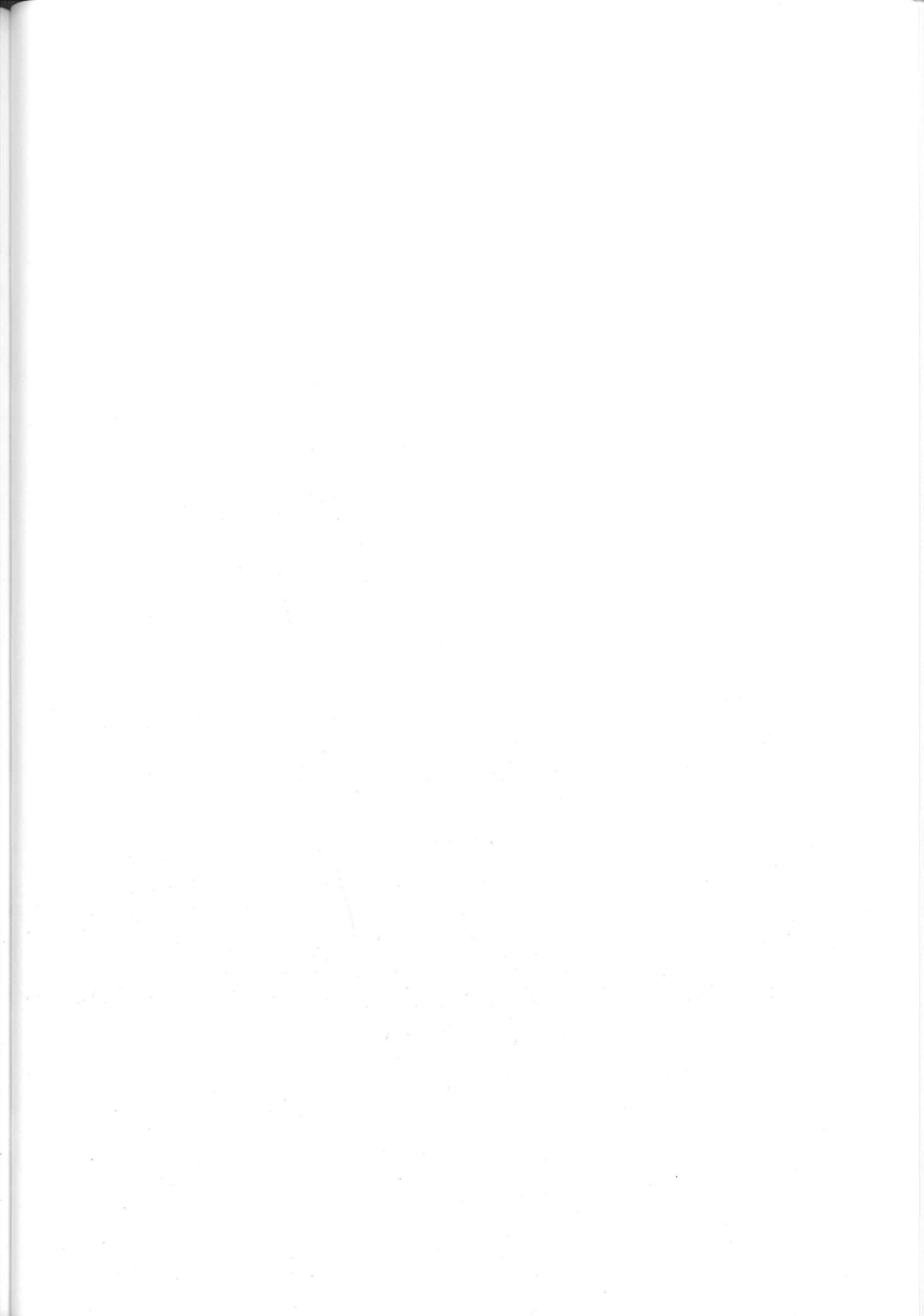
PROCEEDINGS OF THE
**III. INTERNATIONAL MINERAL PROCESSING
SYMPOSIUM**



**III. ULUSLARARASI CEVHER HAZIRLAMA
SEMPOZYUMU
MAKALELERİ**

Sept. 11-13, 1990
Istanbul - Turkey





PROCEEDINGS OF THE
III. INTERNATIONAL MINERAL PROCESSING
SYMPOSIUM



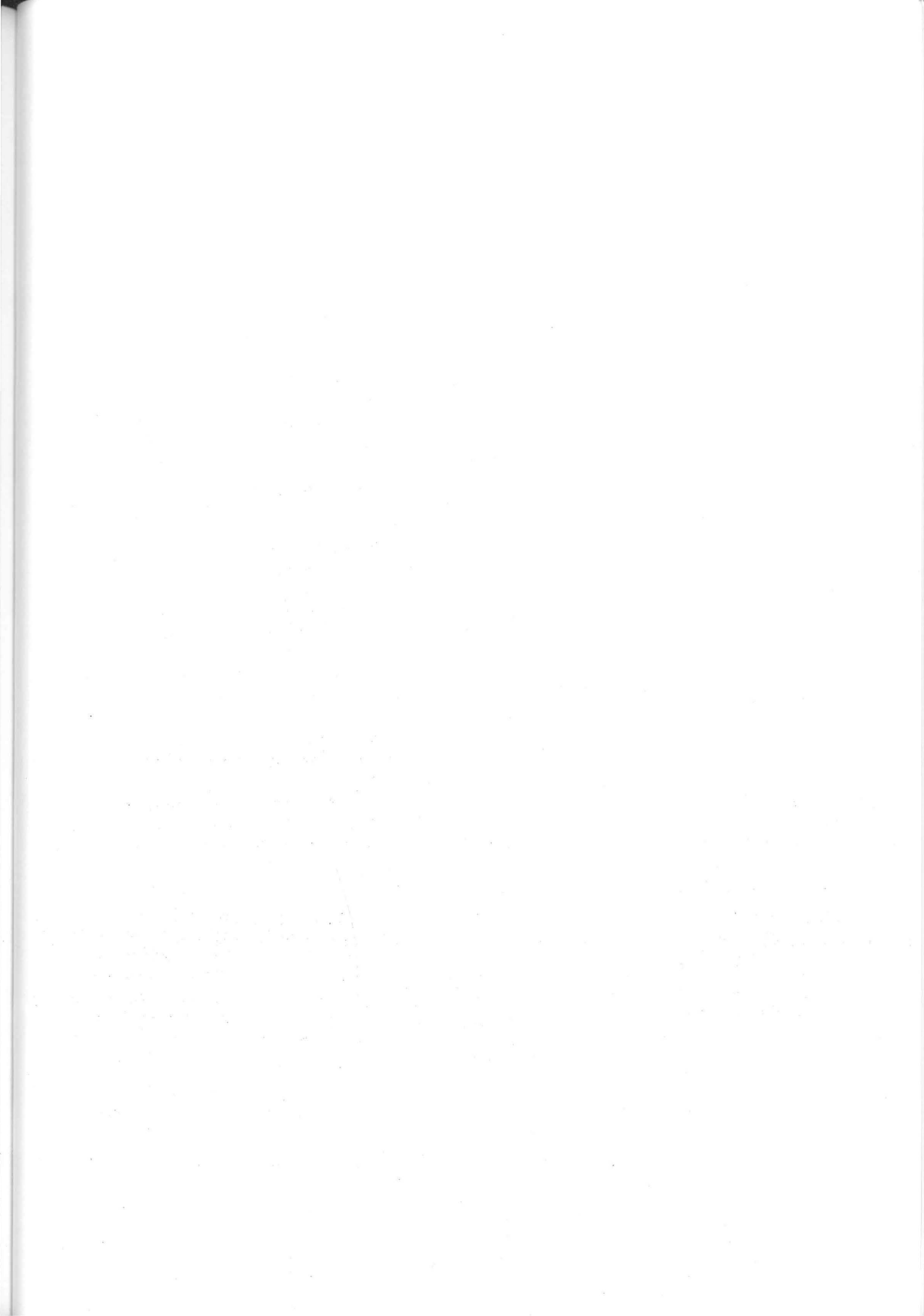
III. ULUSLARARASI CEVHER HAZIRLAMA
SEMPOZYUMU
MAKALELERİ

SEP, 11 - 13, 1990
ISTANBUL, TURKEY

Editor
Güven ÖNAL

Co- Editors
M. Zeki DOĞAN
Yalçın KAYTAZ
Mehmet Sabri ÇELİK

Istanbul Technical University, Ayazağa, Istanbul, TURKEY



BESLENEN CEVHER BOYUTU BİR FONKSİYON OLARAK BİLYALI DEĞİRMENİN GÜÇ
VE KAPASİTESİNİN HESABI

D. Salatic*, S. Deusic*, D. Simeunovic*, M. Grujic**

* Faculty of Mining and Geology, Belgrade, Yugoslavia

** Majdanpek Copper Mine, Majdanpek, Yugoslavia

ÖZET

Dünya elektrik enerjisinin %3.5'u boyut küçültme işlemlerinde sarfedilmektedir. Bu bakımdan boyut küçültmede güç sarfiyatını azaltmak için yoğun olarak araştırmalar yapılmaktadır. Benzer durumda elektrik güç sarfiyatını azaltmak üzere değirmen kapasitesini artırma yönünden araştırmalar önem kazanmaktadır.

Bu araştırmada, Majdanpek bakır madeninden değirmene beslenen cevher boyutunun değirmen güç ve kapasitesine etkisi incelenmiştir. Bu araştırma sonucu bu parametrelerin tayini için bazı formüller geliştirilmiştir.

Değirmene beslenen cevher boyutu arttırıldığında değirmen kapasitesi azalmakta ve değirmen gücü artmaktadır. Bu üç parametre, yalnızca değirmen çapı ve uzunluğuna bağlı olmayıp formüllerin değerlendirilmesinde beslenen cevher boyutu da önemli rol oynar.

CAPACITY AND POWER CALCULATION OF BALL MILL IN FUNCTION OF ORE
FEED SIZE

D. Salatić^x, S. Deušić^x, D. Simeunović^x, M. Grujić^{xx}

^x Faculty of Mining and Geology, Belgrade, Yugoslavia

^{xx} Majdanpek Copper Mine, Majdanpek, Yugoslavia

ABSTRACT

Temporarily, 3,5 % of the world electric energy consumption, are used in comminution processes. That is the main reason, why still exist intensive research of possibilities for decreasing of power consumption in comminution processes. On the same way, there are many investigations in increasing of mill capacity in aim of decreasing specific consumption of electric power.

In our research in copper mine Majdanpek, we investigated the influence of mill feed size on mill capacity and required power. As a result of our investigations, we got some modificate equations for determination of mentioned parameters.

With increasing of mill feed size, decreases the mill capacity and increases the required mill power. So we concluded, that these two parameters are not only in dependence of mill diameter and length. Beside the mill dimensions, it is necessary, to input the ore feed size in evaluated equations.

INTRODUCTION

The largest share in production costs of mineral processing today accounts for the consumption of the electric power. It is our task to investigate the possibility of reduction in energy consumption with the aim to decrease the production costs. A large consumption of energy appears particularly in the grinding processes.

The world wide economic crisis continuing over a number of years had a quite unfavourable influence to the development of mining. It reflected particularly to the mineral processing. That forced majority of mines to engage themselves in reduction of production costs primarily through reducing of the electric power consumption, which being, as regards the mineral processing, the largest share in production costs. This appears particularly in grinding process costs.

The efforts to reduce the electric power consumption had positive results. Installing of modern grinding equipment and reducing the particle feed size, the specific energy consumption had been considerably reduced. Introduction of computerized grinding processes and flotation to the great extent reduced electric power consumption and improved the results of technological processes.

INVESTIGATIONS PERFORMED DURING THE LAST DECADE

In Majdanpek copper mine for the last ten years intensified activities towards the reduction of electric power consumption particularly in crushing and grinding processes have been undertaken. First, testing of influence in the volume of the balls charge and finding the optimum mass of the balls in the mill has been completed. Thus, the specific electric power consumption has been reduced by 0,85 kWh/t (1). Then, testing of influence of the mill rotation rate on electric power consumption and the mill capacity has been made. Through increase in rotation mill rate from 60 to 80 % of the critical rate, electric power consumption has been reduced by 1,08 kWh/t (2). Further investigations encompassed testing of the influence of supplementing mills by various size of balls. In this way supplementing the mills by balls diameters of 60 and 40 mm in ratio of 60:40 led to new reduction of energy consumption by 0,51 kWh/t (3). The next step to the same effect was closing

of the tertiary crushing by installing the screen having an aperture of 15 mm. Thus, the feed particle size in the grinding process was reduced from 25 to 15 mm. This led to the reduction of the total electric power consumption in the crushing processes by 1,16 kWh/t (4). Finally, the two-stage classification in the grinding process has been introduced and caused the further reduction in specific electric power consumption by 0,94 kWh/t (5).

All the stated reductions in electric power consumption during crushing, grinding and classification processes allowed Majdanpek copper mine the further exploitation of the copper ore, the content of which for the last 15 years decreased from 0,83 to 0,50 % Cu in a quite profitable way.

Also, fairly extensive investigations of possible application of semiautogeneous grinding in Majdanpek copper mine have been performed. Investigations indicated that there is a possibility to apply semi-autogeneous mills using the ore from the Majdanpek deposit. Simultaneously, modified forms for calculating the electromotor force for such kind of mills (6) have been found.

EXPERIMENTAL

Based on the results effected during the said investigations for reduction of electric power consumption in Majdanpek copper mine, the capacity of which is 13 million ore tons per a year, we have started the testing of the influence of ore feed particle size on mill capacity and required mill electromotor force.

The most delicate technological problem appeared in connection with optimization of the installed electromotor force and consequently the mill capacity in plants for ore flotation concentration. The flotation capacity depends on the proper mill dimensions.

Grounded on the theoretical knowledge and data from the world literature supported by our experimental investigations performed in Majdanpek copper mine flotation, for different mill dimensions, we have established the forms for calculating the mill capacity and electromotor force.

The general form of the equation for the mill capacity is as follows:

$$Q = a(D^2 L)^b$$

The constant "a" ranges from 0,46 to 0,56 and the constant "b" from 1,19 to 1,20.

In the same way we have established the mathematical interdependence between the required mill electromotor force and its dimensions. This interdependence reads as follows:

$$P = a_1 (D^2 L)^{b_1}$$

The constant "a₁", ranges from 10,50 to 1,15.

The coefficient of correlation for capacity proved to be a rather high one ($r = 0,99917$), the same being for the electromotor force ($r_1 = 99905$).

The interdependence between the mill capacity and electromotor force may be expressed by the following equations:

$$Q = cP - d \quad \text{i.e.}$$

$$P = c_1 Q - d_1$$

Thus, the applied constants are of the following values:

$c = 0,05 \dots 0,08$; $d = 3,0 \dots 4,0$; $c_1 = 12,5 \dots 18,5$; $d_1 = 53,0 \dots 62,0$

In this case the coefficients of correlation exceed 0,999 as well.

Thereafter, maintaining all the relevant parameters as constants, we have changed the feed particle size (F_{80}) in a range 20; 10; 5; 2; 0,5 and 0,25. The constant parameters were as follows:

$n = 0,75 n_{cr}$ - number of mill rotation

$\mathcal{P} = 45\%$ - volume of balls charge

$AI = 15,10 \text{ kWh/t}$ - Work index

$P_{80} = 74 \mu\text{m}$ - Product particle size

Taking into consideration the results obtained by experimental work together with literature data (7) we have come to the following forms for the mill capacity and electromotor force:

Mill capacity

$$Q = a(D^2 L)^b \cdot (5 + F_{80}^{0,2})^{-1}$$

"a" = 5,40; "b" = 1,199

Electromotor force

$$P = a_1 (D^2 L)^{b_1} \cdot (10 + F_{80}^{0,1})$$

$$"a_1" = 0,94; "b_1" = 1,144$$

CONCLUSION

The literature abundances with numerous forms for calculation of the mill capacity and electromotor force. They all are connected with the mill dimensions and other parameters of the mill activity and the Bond's working index as well. Our investigations were focused to the influence of the feed grain size on the mill capacity and required electromotor force. The investigations show that the feed particle size influences on both the mill capacity and required electromotor force. By increasing the feed grain size the mill capacity reduces and the required force for mill rotation increases.

REFERENCES

1. D. Salatić, D. Ocepek, M. Grujić, Energieverbrauch und Füllungsvolumen der Kugelmühle, Summary: Kolloquium über Aufbereitung und Veredlung, Aachen (1986).
2. M. Grujić, D. Ocepek, D. Salatić, Einfluss der Mühlendrehzahl auf die Zerkleinerung in der Anlage Majdanpek, Summary: IX Symposium für Mechanoemission und Mechanochemie, Berlin (1983).
3. M. Grujić, D. Ocepek, D. Salatić, Intensification of Majdanpek copper ore flotation plant, Summary: Conference of Mineral Processing and Extractive Metallurgy, Kunming (1984).
4. D. Ocepek, D. Salatić, M. Grujić, Energy Saving in Comminution Processes, Summary: First Congress Particle Technology, Nürnberg (1986).
5. D. Salatić, M. Grujić, D. Ocepek, Travaux de recherches sur la valorisation complete des mineraux de cuivre et sur l'augmentation de la capacité de la flottation à Majdanpek, Summary: XV^e Congrès International de la Minéralurgie, Cannes (1985).
6. M. Grujić, D. Salatić, D. Ocepek, Desarrollo de ecuaciones para de la calculacion la optima potencia de electromotores de molinos semiautogenos, Summary: International Symposium of Grinding, Santiago (1984).
7. C.A. Rowland, Grinding Calculations Related to the Application of Large Rod and Ball Mills, Allis-Chalmers Publication 22P4704.

Glina

Prvo savetovanje o površinskoj eksploataciji

Zbornik radova

Komiteet za površinsku eksploataciju
Saveza inženjera rudarstva i geologije
Jugoslavije

Kanjiža, 29. 06. - 02. 07. 1995.





ODREĐIVANJE LINIJA NAJVEĆEG NAGIBA KORISNIH KOMPONENTI LEŽIŠTA MINERALNIH SIROVINA

Prof. dr Dragomir Simeonović

RUDARSKO GEOLOŠKI FAKULTET
Beograd

[131] REZIME

U ovom radu daje se jedan postupak za određivanje linija najvećeg nagiba korisnih komponenti ležišta mineralnih sirovina, čime je omogućeno bolje sagledavanje pojedinih karakteristika ležišta.

Sadržaj jedne korisne komponente u datom ležištu mineralnih sirovina, koji ćemo označiti sa S , najčešće nije ravnomerno raspoređen već zavisi od mesta, odnosno od tačke M u kojoj se posmatra. U pravouglom koordinatnom sistemu $OXYZ$ u prostoru veličina S je funkcija položaja tačke $M(x, y, z)$, što znači da je

$$S = F_1(x, y, z).$$

U ravni otkopavanja OXY veličina S je takođe funkcija položaja tačke $N(x, y)$, odnosno

$$S = F(x, y) \quad (1)$$

Geometrijski, jednačina (1) u pravouglom koordinatnom sistemu OXY u prostoru predstavlja jednu površ. Ako se ova površ preseca ravnima paralelnim sa ravni OXY dobiće se na površi (1) linije koje se zovu *izolinije* prema ravni OXY .

Linije povučene na površi (1) koje su upravne na izolinijama zovu se *linije najvećeg nagiba* prema ravni OXY . Prema tome, linije najvećeg nagiba površi (1) predstavljaju ortogonalne trajektorije izolinija površi (1) prema ravni OXY . Iz definicije izolinija i linija najvećeg nagiba površi (1) prema ravni OXY sledi da su i njihove odgovarajuće projekcije na ravan OXY takođe uzajamno normalne.

Izolinije površi (1) prema ravni OXY date su jednačinama

$$S = F(x, y), \quad S = a, \quad (2)$$

gde je a parametar.

Eliminacijom promenjive S iz jednačina (2) dobijaju se projekcije izolinija površi (1) na ravan OXY čija je jednačina

$$F(x, y) - a = 0. \quad (3)$$

Varijacijom parametara a dobijaju se na površi (1) razne izolinije predstavljene jednačinama (2) kao i njihove projekcije na ravan OXY predstavljene jednačinom (3). Kako projekcije linija najvećeg nagiba površi (1) na ravan OXY predstavljaju ortogonalne trajektorije projekcija izolinija na ravan OXY , tj. ortogonalne trajektorije linija (3) u ravni OXY , to projekcije linija najvećeg nagiba površi (1) na ravan OXY treba tražiti u ravni OXY kao ortogonalne trajektorije familije krivih (3).

Diferencijalna jednačina familije krivih (3) je

$$y' = -(\partial F/\partial x)/(\partial F/\partial y) = f_1(x, y), \quad (4)$$

a diferencijalna jednačina njenih ortogonalnih trajektorija je

$$y' = (\partial F/\partial y)/(\partial F/\partial x) = f_2(x, y). \quad (5)$$

Opšti integral

$$y = f(x, C), \quad (6)$$

[132] diferencijalne jednačine (5), gde je C proizvoljna konstanta, predstavlja jednu familiju krivih linija u ravni OXY. Te krive su zapravo projekcije na ravan OXY linija najvećeg nagiba površi (1).

Linije najvećeg nagiba na površi (1) date su prema tome jednačinama

$$S = F(x, y), \quad y = f(x, C). \quad (7)$$

Varijacijom proizvoljne konstante C iz (6) se mogu dobiti pojedine ortogonalne trajektorije. Za nalaženje ortogonalne trajektorije koja prolazi kroz datu tačku $N_0(x_0, y_0)$, konstantu C treba odrediti iz uslova

$$y_0 = f(x_0, C). \quad (8)$$

Kroz datu tačku $N_0(x_0, y_0)$ u ravni OXY prolazi jedna ortogonalna trajektorija. Koficijent pravca njene tangente u tački $N_0(x_0, y_0)$, prema (5), iznosi

$$y_0 = f_2(x_0, y_0), \quad (9)$$

čime je određen i pravac ortogonalne trajektorije u tački $N_0(x_0, y_0)$.

Pravac ortogonalne trajektorije u njenoj tački $N_0(x_0, y_0)$ predstavlja pravac u kojem veličina S ima najveću promenu.

Ako u jednačini (5) stavimo $y' = k$ dobićemo jednačinu

$$f_2(x, y) = k. \quad (10)$$

Jednačina (10) u ravni OXY daje jednu krivu koja se zove izoklina. Ortogonalne trajektorije koje prolaze kroz tačke na izoklini imaju u tim tačkama isti pravac.

Navedena svojstva ortogonalnih trajektorija omogućavaju da se bolje sagledaju pojedine karakteristike ležišta mineralnih sirovina.

LITERATURA:

T. Pejović: Diferencijalne jednačine, Naučna knjiga, 1971.

Earl D. Rainville: Elementary differential equations, third edition, The Macmillan Company, New York, 1964.

Glina

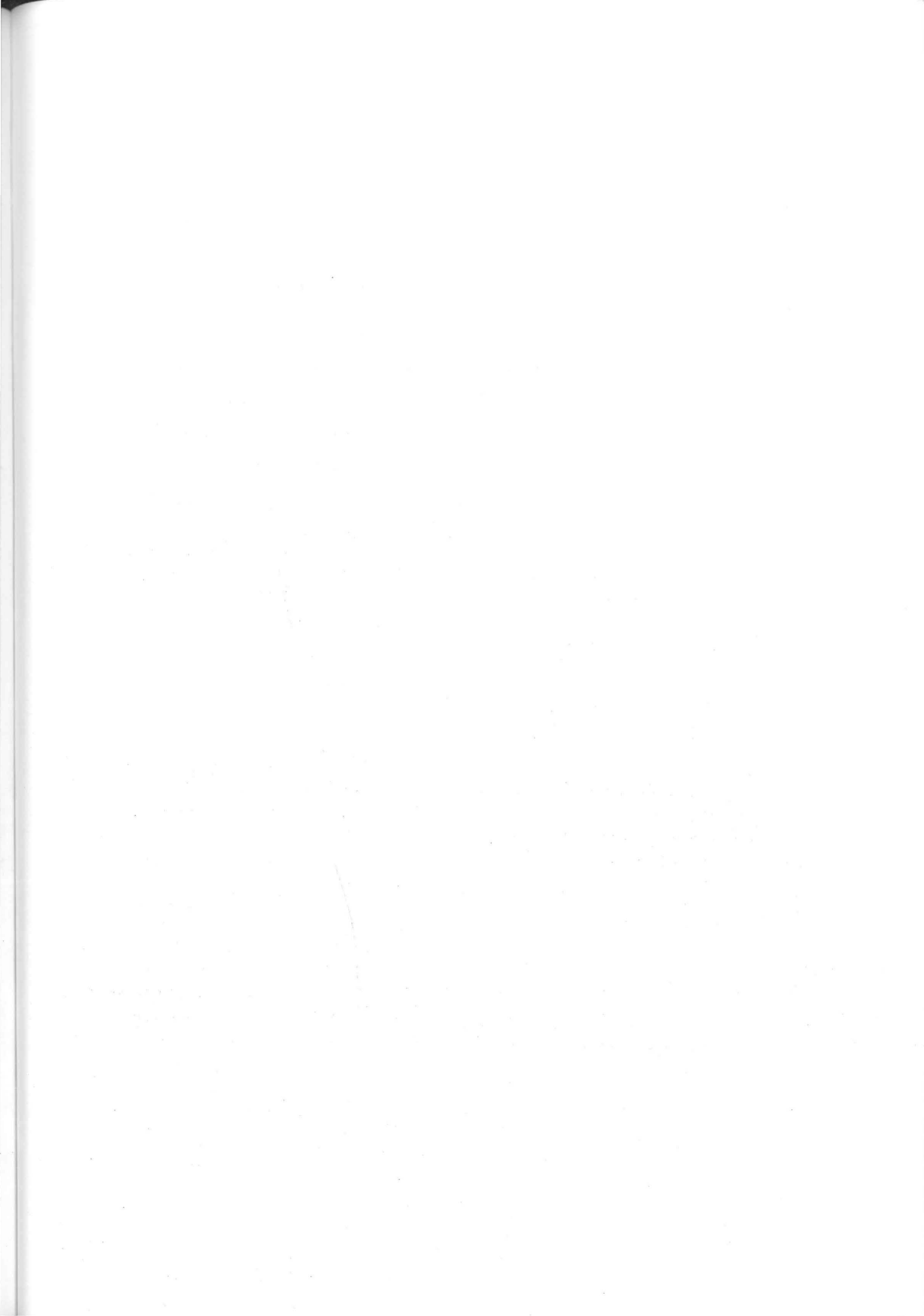
Prvo savetovanje o površinskoj eksploataciji

Zbornik radova

Komiteet za površinsku eksploataciju
Saveza inženjera rudarstva i geologije
Jugoslavije

Kanjiža, 29. 06. - 02. 07. 1995.





ODREĐIVANJE SREDNJEG SADRŽAJA KARAKTERISTIKA KVALITETA U FUNKCIJI RAZVOJA RADOVA NA POVRŠINSKIM KOPOVIMA

Prof. dr Dragomir Simeunović

RUDARSKO GEOLOŠKI FAKULTET
Beograd

[217] REZIME

U ovom radu daje se jedan postupak za određivanje srednjeg sadržaja karakteristika kvaliteta u pojedinim zonama ležišta mineralnih sirovina u fukciji površinske eksploatacije.

• • •

Sadržaj jedne karakteristike kvaliteta u ležištu mineralnih sirovina, koji ćemo označiti sa S , zavisi od mesta, odnosno od tačke gde se posmatra. U pravouglom koordinatnom sistemu OXYZ u prostoru veličina S je funkcija položaja tačke $M(x, y, z)$, što znači da je

$$S = F_1(x, y, z). \quad (1)$$

U ravni otkopavanja OXY veličina S je takođe funkcija položaja tačke $N(x, y)$ u kojoj se posmatra, gde je sada

$$S = F(x, y). \quad (2)$$

Jedan od osnovnih zadataka je određivanje srednje vrednosti veličine S u posmatranoj oblasti D ravni OXY.

Ako je sadržaj S posmatrane karakteristike kvaliteta dat u vidu jednačine (2), tada se određivanje srednje vrednosti veličine S u oblasti D svodi na nalaženje srednje vrednosti funkcije $F(x, y)$ u oblasti D ravni OXY.

Srednja vrednost F_m funkcije $F(x, y)$ u oblasti D dobija se po formuli

$$F_m = \frac{1}{P} \iint_D F(x, y) dx dy, \quad (3)$$

gde je:

P - površina oblasti D u ravni OXY.

Kako srednja vrednost funkcije $F(x, y)$ u oblasti D predstavlja u toj oblasti srednju vrednost sadržaja karakteristike kvaliteta, koju ćemo označiti sa S_m , to iz (3) dobijamo

$$S_m = \frac{1}{P} \iint_D F(x, y) dx dy. \quad (4)$$

Površina P oblasti D u ravni OXY može se izračunati i po formuli

[218]
$$P = \iint_D dx dy. \quad (5)$$

Kada se u datom ležištu javlja više karakteristika kvaliteta, onda se određivanje srednjeg sadržaja u oblasti D, po napred navedenom postupku, obavlja posebno za svaku od njih, gde sada $F(x, y)$ predstavlja sadržaj uočene karakteristike u oblasti D.

U fazi otkopavanja oblast D u ravni OXY predstavlja određenu zonu predviđenu za površinsko otkopavanje ležišta u narednom periodu. Usmerenje, oblik i površina oblasti D određuju se u funkciji razvoja radova na površinskom kopu. Pri izboru oblasti D, kao jedan izvor informacija o ležištu, važnu ulogu imaju izolacije i linije najvećeg nagiba posmatrane karakteristike kvaliteta.

Ako se u datom ležištu javlja više karakteristika kvaliteta, onda otkopavanje treba obavljati po takvoj oblasti D kako bi se dobili što je moguće bolji efekti.

Oblast D po kojoj se u ravni OXY obavlja otkopavanje ležišta u većini slučajeva nema komplikovan oblik. Njen rub C najčešće je sastavljen od jednostavnih linija, čime je olakšano izračunavanje dvostrukog integrala u formulama (4) i (5).

Profesoru dr Vladimiru Pavloviću i Doc. dr Andriji Laziću posebno se zahvaljujem na podršci, korisnim sugestijama i razumevanju prilikom pisanja ovog rada.

LITERATURA:

1. T. Pejović, Matematička analiza III, Beograd 1972.

Drugi međunarodni simpozijum
o površinskoj eksploataciji
i kvalitetu sirovina
za proizvodnju cementa

Cement '96

2nd International Symposium
on Opencast Mining
and Grade of Mineral Materials
for Cement Production

Komitet za površinsku eksploataciju
Saveza inženjera rudarstva i geologije Jugoslavije

Opencast Mining Committee
Society of Mining and Geology Engineers of Yugoslavia

Kosjerić, 29 - 31. 05. 1996. godine

Drugi međunarodni simpozijum o površinskoj eksploataciji
i kvalitetu sirovina za proizvodnju cementa

2nd International Symposium on Opencast Mining
and Grade of Mineral Materials for Cement Production

Izdavač:

Komitet za površinsku eksploataciju
Saveza inženjera rudarstva i geologije Jugoslavije

Publisher:

Opencast Mining Committee
Society of Mining and Geology Engineers of Yugoslavia

Urednik / Editor

Prof. dr Vladimir Pavlović

Tehnička priprema / Technical design

Mirjana Bošković, dipl.inž.rud.

Saša Stepanović, dipl.inž.rud.

Bojan Dimitrijević, dipl.inž.rud.

Tiraž:

200 primeraka

Circulation:

200 Copies

© Sva prava zadržava Izdavač

JEDNA INTERPOLACIONA FORMULA I NJENA PRIMENA U POVRŠINSKOJ EKSPLOATACIJI

Dragomir Simeunović*

APSTRAKT

U ovom radu posmatrana je jedna interpolaciona formula koja se upotrebljava u površinskoj eksploataciji kod modeliranja ležišta mineralnih sirovina. Za tu formulu naveden je niz svojstava koja pored teorijskog imaju i svoj praktični značaj. U radu je određena jedna gornja granica apsolutne greške koja se može učiniti kada se umesto osnovne interpolacione formule upotrebi njen kraći oblik. Sa druge strane razmatran je i obrnuti problem i pri tome je dat način na koji se može odrediti skraćeni oblik interpolacione formule a da apsolutna greška koja se može pojaviti njenom upotrebom umesto osnovne interpolacione formule ne prelazi unapred datu vrednost.

UVOD

Neka su $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ vrednosti jedne veličine S u tačkama $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_m(x_m, y_m), M_{m+1}(x_{m+1}, y_{m+1}), \dots, M_n(x_n, y_n)$ ravni OXY, tj. neka je:

$$S(M_j) = S_j \quad j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n. \quad (1)$$

Ako uzmemo da je veličina S funkcija položaja tačke $M(x, y)$ u ravni OXY, tada je:

$$S(M) = S(x, y). \quad (2)$$

Za određivanje vrednosti $S(M)$ u tački $M \neq M_j, j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n$ često se koristi neka interpolaciona formula. Mi ćemo ovde posmatrati interpolacionu formulu prema kojoj se za $S(M)$ uzima

$$S(M) = \frac{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k S_1 + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k S_2 + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k S_m + \left(\frac{1}{d_{m+1}}\right)^k S_{m+1} + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k S_n}{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k + \left(\frac{1}{d_{m+1}}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k}, \quad (3)$$

gde su $d_1, d_2, \dots, d_m, d_{m+1}, \dots, d_n$ rastojanja tačke M od tačaka $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ i gde je k pozitivna konstanta.

* Dr Dragomir Simeunović, red. prof., Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

Ako stavimo

$$\left(\frac{1}{d_j}\right)^k = q_j, \quad \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{d_j}\right)^k = q,$$

tada je $\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{q} = 1$. Veličine $\frac{q_j}{q}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) predstavljaju težine sa kojima vrednosti S_j utiču na vrednost $S(M)$, zbog čega je formula (3) jedina težinska interpolaciona formula. Interpolaciona formula oblika (3) našla je svoju primenu u rudarstvu i geologiji kod modeliranja ležišta mineralnih sirovina [1], [2]. Tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ koje se nalaze u jednoj ravni OXY, a koja predstavlja zonu otkopavanja, su mesta u datom ležištu u kojima su poznate vrednosti $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ njegove posmatrane karakteristike S .

NEKA SVOJSTVA FORMULE (3)

Sada ćemo navesti neka svojstva formule (3):

1° Za bilo koji broj $k > 0$ je

$$S(M_j) = S_j \quad j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n. \quad (4)$$

Ovo osnovno svojstvo formule (3) dokazuje se kada se razlomak na desnoj strani (3) proširi sa $(d_j)^k$ a zatim uzme da $d_j \rightarrow 0$, što znači da $M \rightarrow M_j$, pri čemu se dobija $S(M) = S_j$, $j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n$.

2° Za svaki broj $k > 0$ i bilo koju tačku M je

$$g \leq S(M) \leq G, \quad (5)$$

gde je

$$g = \min S_j, \quad G = \max S_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n. \quad (6)$$

Svojstvo 2° se dobija kada se u brojiocu na desnoj strani (3) prvo uzme u obzir da je $S_j \geq g$ a zatim da je $S_j \leq G$ za svako $j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n$.

3° Ako je $S_1 = S_2 = \dots = S_m = S_{m+1} = \dots = S_n = S_0$, tada je

$$S(M) = S_0. \quad (7)$$

4° Za bilo koji realan broj H je

$$S(M) = H + \frac{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k (S_1 - H) + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k (S_2 - H) + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k (S_m - H) + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k (S_n - H)}{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k} \quad (8)$$

5° Za $d_1 = d_2 = \dots = d_m = d_{m+1} = \dots = d_n$ i bilo koji broj $k > 0$ je

$$S(M) = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m + S_{m+1} + \dots + S_n}{n} \quad (9)$$

6° Kada $k \rightarrow 0$, tada

$$S(M) \rightarrow \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m + S_{m+1} + \dots + S_n}{n} \quad (10)$$

što znači da u bilo kojoj tački $M \neq M_1$ u ovom slučaju $S(M)$ teži aritmetičkoj sredini vrednosti $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$.

7° Slučaj kada $k \rightarrow \infty$. Neka je

$$d_1 = d_2 = \dots = d_e < d_{e+1} \leq \dots \leq d_n \quad (11)$$

Tada proširivanjem razlomka na desnoj strani (3) sa $(d_1)^k$, posle čega uzmemo da $k \rightarrow \infty$ dobijamo

$$S(M) = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_e}{e} \quad (12)$$

8° Za $d_1 < d_2 \leq \dots \leq d_n$, kada $k \rightarrow \infty$, iz (3) se dobija

$$S(M) = S_1 \quad (13)$$

Slučaj 8° je slučaj 7° za $e = 1$, tj. kada je $d_1 < d_2 \leq \dots \leq d_n$ jer je tada $e+1 = 2$, tj. $e = 1$.

9° Slučaj kada $M \rightarrow \infty$. Neka su tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ sadržane u konačnoj oblasti D ravni OXY . Kada se tačka M sve više udaljava od oblasti D i pri tome $M \rightarrow \infty$, tada

$$S(M) \rightarrow \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m + S_{m+1} + \dots + S_n}{n} \quad (14)$$

U daljem izlaganju smatraćemo da su tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ u odnosu na tačku M raspoređene tako da su ispunjeni uslovi

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m \leq d_{m+1} \leq \dots \leq d_n. \quad (15)$$

Proširivanjem razlomka na desnoj strani (3) sa $(d_1)^k$, formula (3) dobija oblik

$$S(M) = \frac{S_1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k \cdot S_2 + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k \cdot S_m + \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k \cdot S_{m+1} + \dots + \left(\frac{d_1}{d_n}\right)^k \cdot S_n}{1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k + \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_n}\right)^k}. \quad (16)$$

Kada $M \rightarrow \infty$, tada $\frac{d_1}{d_j} \rightarrow 1$ a takođe i $\left(\frac{d_1}{d_j}\right)^k \rightarrow 1$ za svaki konačni broj $k > 0$ i $j = 2, \dots, m, m+1, \dots, n$ čime se dokazuje svojstvo 9° formule (16), odnosno formule (3).

Iz interpolacione formule (16) vidimo da vrednost $S(M)$ zavisi od vrednosti $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ u odgovarajućim tačkama $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ od rastojanja $d_1, d_2, \dots, d_m, d_{m+1}, \dots, d_n$ tih tačaka od tačke M i od eksponenta k . Sa povećanjem rastojanja tačke M_j od tačke M smanjuje se uticaj S_j na vrednost $S(M)$ i obratno. Sa povećanjem eksponenta k uticaj udaljenijih tačaka na vrednost $S(M)$ se smanjuje, a uticaj najbliže tačke se povećava. Kada se eksponent k smanjuje i kada $k \rightarrow 0$, tada pojedine vrednosti S_j imaju podjednaku težinu uticaja na vrednost $S(M)$, što se vidi iz svojstva 6° formule (3).

Neka je

$$A = S_1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k \cdot S_2 + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k \cdot S_m, \quad A_1 = \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k \cdot S_{m+1} + \dots + \left(\frac{d_1}{d_n}\right)^k \cdot S_n, \quad (17)$$

$$B = 1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k, \quad B_1 = \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_n}\right)^k, \quad (18)$$

i neka je

$$S^*(M) = \frac{S_1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k \cdot S_2 + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k \cdot S_m}{1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k}. \quad (19)$$

Tada je

$$S(M) = \frac{A + A_1}{B + B_1}, \quad (20)$$

$$S^*(M) = \frac{A}{B}. \quad (21)$$

Formula (19) predstavlja kraći oblik formule (16).

Formula (19) sastoji se od prvih m članova formule (16). Pomoću nje se može takođe odrediti vrednost veličine S u tački M , koju smo označili sa $S^*(M)$, koristeći pri tome manji broj tačaka iz bliže okoline tačke M .

U opštem slučaju, vrednosti $S(M)$ i $S^*(M)$ razlikuju se među sobom.

Sada ćemo odrediti granice u kojima se nalazi razlika koja se javlja kada se umesto formule (3), odnosno formule (16), za dobijanje vrednosti S u tački M koristi formula (19). Drugim rečima, daćemo jednu ocenu za $|S(M) - S^*(M)|$.

Imajući u vidu (6) i (15) nije teško zaključiti da za $1 \leq m < n$ važe sledeće nejednakosti

$$A \geq g \cdot B, \quad A \leq G \cdot B, \quad (22)$$

$$A_1 \leq (n-m) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k \cdot G, \quad B_1 \leq (n-m) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k. \quad (23)$$

Pored toga važi i nejednakost

$$B + B_1 > 1. \quad (24)$$

10° Između $S(M)$ i $S^*(M)$ važe nejednakosti

$$S^*(M) - (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k < S(M) < S^*(M) + (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k. \quad (25)$$

Za dokaz nejednakosti (25) korišćemo jednakost

$$\frac{A+A_1}{B+B_1} = \frac{A}{B} + \frac{A_1}{B+B_1} - \frac{A \cdot B_1}{B \cdot (B+B_1)}. \quad (26)$$

Zbog (22) je

$$\frac{A \cdot B_1}{B \cdot (B+B_1)} \geq \frac{g \cdot B_1}{B+B_1}. \quad (27)$$

Imajući u vidu (23), (24) i (27), zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \frac{A+A_1}{B+B_1} &= \frac{A}{B} + \frac{A_1}{B+B_1} - \frac{A \cdot B_1}{B \cdot (B+B_1)} \leq \frac{A}{B} + \frac{1}{B+B_1} \cdot (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k < \\ &\frac{A}{B} + (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k, \end{aligned}$$

što prema (20) i (21) znači da je

$$S(M) < S^*(M) + (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k, \quad (28)$$

čime je dokazana desna strana (25).

Zbog (22) je

$$\frac{A \cdot B_1}{B \cdot (B + B_1)} \leq \frac{G \cdot B_1}{B + B_1}. \quad (29)$$

Imajući ponovo u vidu (23), (24) kao i (29), sada zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \frac{A + A_1}{B + B_1} &= \frac{A}{B} + \frac{A_1}{B + B_1} - \frac{A \cdot B_1}{B \cdot (B + B_1)} \geq \frac{A}{B} - \frac{1}{B + B_1} \cdot (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k > \\ &= \frac{A}{B} - (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k, \end{aligned}$$

što prema (20) i (21) znači da je

$$S(M) > S^*(M) - (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k, \quad (30)$$

čime je dokazana i leva strana (25).

Nejednakosti (25) mogu se napisati u obliku

$$|S(M) - S^*(M)| < (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k, \quad 1 \leq m < n. \quad (31)$$

U jednom delu D posmatranog ležišta broj poznatih tačaka $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ je ograničen.

Prema formuli (16), vrednost $S(M)$ dobija se uzimanjem u obzir svih n poznatih tačaka iz bliže i dalje okoline tačke M , dok se kod upotrebe formule (19) za dobijanje vrednosti $S^*(M)$ koristi $m < n$ poznatih tačaka iz bliže okoline tačke M .

Nejednakošću (31) data je jedna gornja granica greške koja se može učiniti kada se za određivanje vrednosti veličine S u tački M umesto formule (16) upotrebi formula (19).

Nejednakost (31) možemo posmatrati i tako što ćemo postaviti uslov da bude

$$(n-m) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k \leq p, \quad (32)$$

gde je p unapred dati mali broj. U tom slučaju nejednakost (31) možemo napisati u obliku

$$|S(M) - S^*(M)| < p \cdot (G - g), \quad (33)$$

čime je gornja granica greške data u vidu jednog malog dela p od $(G - g)$.

Ako uzmemo da je

$$n \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}} \right)^k \leq p, \quad (34)$$

tada će važiti i uslov (32).

Neka je

$$\frac{d_1}{d_{m+1}} \leq \frac{1}{s}, \quad s > 1. \quad (35)$$

Ako sada uzmemo da je

$$n \cdot \left(\frac{1}{s} \right)^k \leq p, \quad (36)$$

tada će zbog (35) važiti i uslov (34), a samim tim važiće i uslov (32).

Za unapred dati mali broj p i dati broj $s > 1$, iz (36) se može odrediti eksponent k . U praksi se za k nađeno iz (36) uzima najmanji ceo broj.

Sa druge strane, za dati broj $k > 0$ (u praksi najčešće ceo broj) i unapred dati mali broj p , iz (36) se može odrediti broj s . U praksi se za s nađeno iz (36) uzima najmanji ceo broj.

Sa ovako nađenom vrednošću za s , iz (35) se može odrediti odnos $\frac{d_1}{d_{m+1}}$.

UPOTREBA FORMULA (16) I (19)

Neka u posmatranom ležištu mineralnih sirovina imamo n donekle ravnomerno raspoređenih tačaka $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ u ravni OXY u kojima su poznate vrednosti $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ njegove karakteristike S . Vrednost karakteristike S u tački M posmatranog ležišta možemo odrediti kao $S(M)$ upotrebom formule (16) ili kao $S^*(M)$ upotrebom formule (19).

Formula (16) se obično koristi kada broj poznatih tačaka nije veliki. U slučaju kada imamo veliki broj poznatih tačaka, tada možemo koristiti formulu (19). Razlog za ovo sastoji se u tome što udaljenije tačke kojih ima $(n - m)$, počev od tačke M_{m+1} za koju je $\frac{d_1}{d_{m+1}} \leq \frac{1}{s} < 1$ sve manje utiču na vrednost $S(M)$ što naročito dolazi do izražaja sa povećanjem eksponenta k .

Neka je M tačka u kojoj želimo da odredimo vrednost karakteristike S . Tada prvo izračunavamo rastojanje d_1 tačke M od njoj najbliže poznate tačke M_1 . Zatim oko tačke M u ravni OXY u kojoj leže poznate tačke opisujemo krug C poluprečnika

$$r = s \cdot d_1, \quad s > 1, \quad (37)$$

gde je s dati broj. Pri tome, tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$, kojih ima ukupno n , krugom C biće podeljene na dva dela: na tačke koje leže u krugu C , čiji ćemo broj označiti sa m i tačke koje leže na krugu C i izvan kruga C , kojih ima $(n - m)$. U ovom slučaju tačka M_{m+1} ne leži u krugu C , pa je zato

$$d_{m+1} \geq r. \quad (38)$$

Imajući u vidu (37), iz (38) zaključujemo da je

$$\frac{d_1}{d_{m+1}} \leq \frac{1}{s}, \quad (39)$$

pa kada je

$$(n - m) \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^k \leq p, \quad (40)$$

gde je p unapred dati mali broj, tada će biti ispunjen i uslov (32). Iz (40) sada određujemo eksponent k pošto su nam sve ostale veličine poznate. Naposljetku izračunavamo i rastojanja d_2, \dots, d_m tačke M od tačaka M_2, \dots, M_m . Na taj način odredili smo sve veličine potrebne za primenu formule (19).

Umesto uslova (32) možemo koristiti uslov (36), jer kada je ispunjen uslov (36) tada važi i uslov (32). U ovom slučaju se za eksponent k dobija neznatno povećana vrednost.

Ako se dogodi da krug C , čiji je poluprečnik r dat jednačinom (37), obuhvati sve poznate tačke, tada se može koristiti formula (16) ili se smanjiti poluprečnik kruga C kako bi se opisivanjem novog kruga oko tačke M neke od poznatih tačaka našle na tom krugu i van njega, čime bi bila omogućena primena formule (19).

Broj poznatih tačaka M_1, M_2, \dots , koje se mogu naći u krugu C zavisi od njegovog poluprečnika r , odnosno od d_1 i s i kreće se od 1 do n .

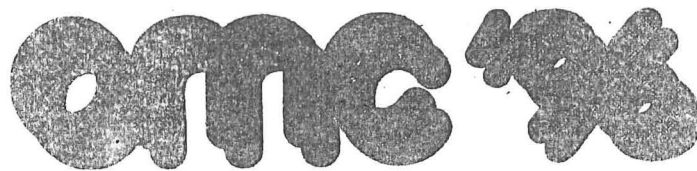
Rastojanje d_1 tačke M od njoj najbliže poznate tačke M_1 ispunjava uslov $0 < d_1 < t$, gde je $t = \max d_i$. Ako su poznate tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ raspoređene tako da čine

jednu kvadratnu mrežu, gde strana svakog kvadrata ima dužinu h , tada je $t = \frac{h \cdot \sqrt{2}}{2}$ što odgovara slučaju kada se tačka M poklapa sa centrom kvadrata uočene mreže.

LITERATURA

- [1] David M. Geostatistical Ore Reserve Estimation, 1977, Elsevier,
- [2] Drill Hole Interpolation: Mineralized Interpolation Techniques, William E. Hugges, Roderick K. Davey, Society of Mining Engineers, New York, 1979.

Treća međunarodna naučna konferencija
o površinskoj eksploataciji



Third International Scientific
Opencast Mining Conference

Jugoslovenski Komitet za površinsku eksploataciju
Rudarsko geološki fakultet u Beogradu

Yugoslav Opencast Mining Committee
Faculty of Mining and Geology, Belgrade

50 godina Rudarsko geološkog fakulteta u Beogradu

50 Years of Mining and Geology Faculty, Belgrade

Beograd, 25-27. 09. 1996.

**Treća međunarodna naučna konferencija
o površinskoj eksploataciji**

**Third International Scientific
Opencast Mining Conference**

**Izdavač
Jugoslovenski Komitet za površinsku eksploataciju
Rudarsko geološki fakultet u Beogradu**

**Publisher
Yugoslav Opencast Mining Committee
Faculty of Mining and Geology, Belgrade**

**Urednik/Editor
Prof. dr Vladimir Pavlović**

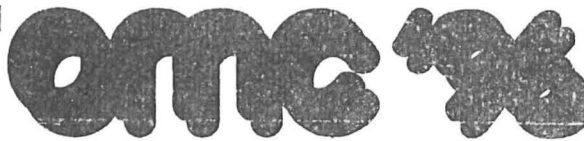
**Tehnička priprema/Technical design
Mirjana Bošković, dipl.inž.rud.
Saša Stepanović, dipl.inž.rud.
Bojan Dimitrijević, dipl.inž.rud.
Vojkan Tošić, dipl.inž.rud.**

**Grafičko rešenje korica
Nenad Pavlović**

**Tiraž
200 primeraka**

**Circulation
200 copies**

© Sva prava zadržava Izdavač



**JEDNA INTERPOLACIONA FORMULA REDA r I NJENA
PRIMENA U POVRŠINSKOJ EKSPLOATACIJI**

**AN INTERPOLATION FORMULA OF r ORDER AND
ITS APPLICATION IN OPENCAST MINING**

Dragomir Simeunović

APSTRAKT

U ovom radu posmatrana je jedna interpolaciona formula reda r koja se može primeniti u površinskoj eksploataciji kod modeliranja ležišta mineralnih sirovina. Za tu formulu navedena su neka svojstva koja pored teorijskog imaju i svoj praktični značaj. U radu su navedeni i neki posebni slučajevi koji proizilaze iz posmatrane formule.

ABSTRACT

In this paper an interpolation formula of r order that may be applied in opencast mining, is considered. Some characteristics of this formula, being of both theoretical and practical significance, are presented, and special cases emerging from this formula are presented, as well.

UVOD

Neka su S_1, S_2, \dots, S_n pozitivne vrednosti jedne veličine S u tačkama $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ ravni OXY, tj. neka je

$$S(M_j) = S_j \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Ako uzmemo da je veličina S funkcija položaja tačke $M(x, y)$ u ravni OXY, tada je

$$S(M) = S(x, y). \quad (2)$$

Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko geološki fakultet, Đušina 7, Beograd

Za određivanje vrednosti $S(M)$ u tački $M \neq M_j, j = 1, 2, \dots, n$ često se koristi neka interpolaciona formula. Mi ćemo ovde posmatrati interpolacionu formulu:

$$S(M) = \left(\frac{d_1^{-k} \cdot S_1^r + d_2^{-k} \cdot S_2^r + \dots + d_n^{-k} \cdot S_n^r}{d_1^{-k} + d_2^{-k} + \dots + d_n^{-k}} \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (3)$$

gde su d_1, d_2, \dots, d_n rastojanja tačke M od tačaka M_1, M_2, \dots, M_n gde je k pozitivna konstanta i r realan broj.

Ako stavimo

$$d_j^{-k} = q_j, \quad \sum_{j=1}^n d_j^{-k} = q,$$

tada je $\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{q} = 1$. Veličine $\frac{q_j}{q}, j = 1, 2, \dots, n$ predstavljaju težine sa kojima vrednosti S_j utiču na vrednost $S(M)$, zbog čega je formula (3) jedna težinska interpolaciona formula reda r .

Interpolaciona formula oblika (3) može se primeniti u rudarstvu i geologiji kod modeliranja ležišta mineralnih sirovina. Tačke M_1, M_2, \dots, M_n koje se nalaze u jednoj ravni OXY, a koja predstavlja zonu otkopavanja, su mesta u datom ležištu u kojima su poznate vrednosti S_1, S_2, \dots, S_n njegove posmatrane karakteristike S .

NEKA SVOJSTVA FORMULE (3)

Sada ćemo navesti neka svojstva formule (3):

1° Za bilo koji broj, $k > 0$, i realan broj $r, (-\infty < r < +\infty)$, je:

$$S(M_j) = S_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

2° Za svaki broj $k > 0$, svaki realan broj r i bilo koju tačku M je:

$$g \leq S(M) \leq G, \quad (5)$$

gde je

$$g = \min S_j, \quad G = \max S_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

3° Ako je $S_1 = S_2 = \dots = S_n = S_0 > 0$, tada je:

$$S(M) = S_0. \quad (7)$$

4° Veličina $S(M)$ definisana formulom (3) je striktno rastuća funkcija po r .

5° Za $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d > 0$ i bilo koji broj $k > 0$ je:

$$S(M) = \left(\frac{S_1^k + S_2^k + \dots + S_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (8)$$

6° Kada $k \rightarrow 0$, tada

$$S(M) \rightarrow \left(\frac{S_1^k + S_2^k + \dots + S_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (9)$$

7° Slučaj kada $k \rightarrow +\infty$. Neka je:

$$d_1 = d_2 = \dots = d_c < d_{c+1} \leq \dots \leq d_n. \quad (10)$$

Tada je

$$S(M) = \left(\frac{S_1^k + S_2^k + \dots + S_c^k}{c} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (11)$$

8° Za $d_1 < d_2 \leq \dots \leq d_n$, kada $k \rightarrow +\infty$ iz (11) se dobija:

$$S(M) = S_1. \quad (12)$$

Slučaj 8° je slučaj 7° za $c = 1$.

9° Slučaj kada $M \rightarrow \infty$. Neka su tačke M_1, M_2, \dots, M_n sadržane u konačnoj oblasti D ravni OXY . Kada se tačka M sve više udaljava od oblasti D i pri tome $M \rightarrow \infty$, tada

$$S(M) \rightarrow \left(\frac{S_1^k + S_2^k + \dots + S_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (13)$$

10° Kada $r \rightarrow -\infty$, tada

$$S(M) \rightarrow \min S_j = g, \quad M \neq M_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

11° Kada $r \rightarrow +\infty$, tada

$$S(M) \rightarrow \max S_j = G, \quad M \neq M_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

12° Za $r = 0$ je:

$$S(M) = \left(S_1^{d_1^{-r}} \cdot S_2^{d_2^{-r}} \cdot \dots \cdot S_n^{d_n^{-r}} \right)^{\frac{1}{d_1^{-r} + d_2^{-r} + \dots + d_n^{-r}}}. \quad (16)$$

13° Za $r = 1$ je:

$$S(M) = \frac{d_1^{-k} \cdot S_1 + d_2^{-k} \cdot S_2 + \dots + d_n^{-k} \cdot S_n}{d_1^{-k} + d_2^{-k} + \dots + d_n^{-k}} \quad (17)$$

Formula (17) je poznata interpolaciona formula koja se primenjuje u površinskoj eksploataciji [1], [2], [3].

ZAKLJUČAK

Iz interpolacione formule (3) vidimo da vrednost $S(M)$ zavisi od vrednosti S_1, S_2, \dots, S_n u odgovarajućim tačkama M_1, M_2, \dots, M_n , od rastojanja d_1, d_2, \dots, d_n tih tačaka od tačke M i d vrednosti k i r . Sa povećanjem rastojanja tačke M_j od tačke M smanjuje se uticaj S_j na vrednost $S(M)$ i obratno. Sa povećanjem eksponenta k uticaj udaljenijih tačaka na vrednost $S(M)$ se smanjuje, a uticaj najbliže tačke se povećava. Kada se vrednost za r ($-\infty < r < +\infty$) smanjuje, tada se $S(M)$ takođe smanjuje, a kada se vrednost za r povećava tada se i $S(M)$ povećava. Podesnim izborom vrednosti za k i r mogu se u praksi dobiti zadovoljavajući rezultati.

LITERATURA

- [1] David M.: Geostatistical Ore Reserve Estimation, Elsevier, 1977;
- [2] Hugge E. William, Davey K. Roderick: Drill Hole Interpolation: Mineralized Interpolation Techniques, Society of Mining Engineers, New York, 1979.
- [3] Simeunović D.: Jedna interpolaciona formula i njena primena u površinskoj eksploataciji, Zbornik radova, Drugi međunarodni simpozijum o površinskoj eksploataciji i kvalitetu sirovina za proizvodnju cementa, Kosjerić, 1996.



ODREĐIVANJE ZAPRAŠENOSTI PRIMENOM TEŽINSKŌ-DALJINSKE INTERPOLACIONE FORMULE

Dragomir Simeunović

IZVOD

U ovom radu posmatrana je jedna interpolaciona formula koja se može upotrebiti za određivanje sadržaja prašine u datom prostoru. Za tu formulu navedeno je više svojstava koja pored teorijskog imaju i svoj praktični značaj. U radu se daje jedna gornja granica apsolutne greške koja se može učiniti kada se umesto osnovne interpolacione formule upotrebi njen kraći oblik. Razmatran je, takođe, i obrnuti problem i pri tome je dat način na koji se može odrediti skraćeni oblik interpolacione formule, a da apsolutna greška koja se može učiniti njenom upotrebom umesto osnovne interpolacione formule bude manja od unapred date vrednosti.

UVOD

Neka su $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ vrednosti jedne veličine S u tačkama $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \dots, M_m(x_m, y_m, z_m), M_{m+1}(x_{m+1}, y_{m+1}, z_{m+1}), \dots, M_n(x_n, y_n, z_n)$ prostora OXYZ, tj. neka je:

$$S(M_j) = S_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n. \quad (1)$$

Ako uzmemo da je veličina S funkcija položaja tačke $M(x, y, z)$ u prostoru OXYZ, tada je:

$$S(M) = S(x, y, z) \quad (2)$$

Za određivanje vrednosti $S(M)$ u tački $M \neq M_j, j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n$ često se koristi neka interpolaciona formula. Mi ćemo ovde posmatrati interpolacionu formulu prema kojoj se za $S(M)$ uzima

Dr Dragomir Simeunović, red. prof., Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

$$S(M) = \frac{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k \cdot S_1 + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k \cdot S_2 + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k \cdot S_m + \left(\frac{1}{d_{m+1}}\right)^k \cdot S_{m+1} + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k \cdot S_n}{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k + \left(\frac{1}{d_{m+1}}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k}, \quad (3)$$

gde su $d_1, d_2, \dots, d_m, d_{m+1}, \dots, d_n$ rastojanja tačke M od tačaka $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ i gde je k pozitivna konstanta.

Ako stavimo

$$\left(\frac{1}{d_i}\right)^k = q_i, \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{d_i}\right)^k = q,$$

tada je $\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{q} = 1$. Veličina $\frac{q_i}{q}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) predstavljaju težine sa kojima vrednosti S_i utiču

na vrednost $S(M)$. Vrednost $S(M)$ zavisi i od rastojanja $d_1, d_2, \dots, d_m, d_{m+1}, \dots, d_n$ tačke M od tačaka $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$. Zbog toga formula (3) predstavlja jednu težinsko-daljinsku interpolacionu formulu.

Interpolaciona formula oblika (3) našla je svoju primenu u rudarstvu i geologiji kod modeliranja ležišta mineralnih sirovina [1], [2]. Tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ su mesta u datom ležištu u kojima su poznate vrednosti $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ njegove posmatrane karakteristike S . Za te tačke najčešće se uzima da leže u ravni OXY, pri čemu ta ravan predstavlja zonu otkopavanja.

U tački $M \neq M_j, j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n$, vrednost karakteristike S možemo dobiti kao $S(M)$ primenom interpolacione formule (3).

Kao što ćemo videti, interpolaciona formula (3) može se koristiti pri određivanju sadržaja prašine u posmatranom prostoru.

NEKA SVOJSTVA FORMULE (3)

Sada ćemo navesti neka svojstva formule (3):

1° Za bilo koji broj $k > 0$ je

$$S(M_j) = S_j \quad j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n. \quad (4)$$

2° Za svaki broj $k > 0$ i bilo koju tačku M je

$$g \leq S(M) \leq G, \quad (5)$$

gde je

$$g = \min S_j, \quad G = \max S_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n. \quad (6)$$

3° Ako je $S_1 = S_2 = \dots = S_m = S_{m+1} = \dots = S_n = S_0$ tada je

$$S(M) = S_0. \quad (7)$$

4° Za bilo koji realan broj H je

$$S(M) = H + \frac{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k (S_1 - H) + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k (S_2 - H) + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k (S_m - H) + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k (S_n - H)}{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k} \quad (8)$$

5° Za $d_1 = d_2 = \dots = d_m = d_{m+1} = \dots = d_n$ i bilo koji broj $k > 0$ je

$$S(M) = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m + S_{m+1} + \dots + S_n}{n} \quad (9)$$

6° Kada $k \rightarrow 0$, tada se iz (3) dobija

$$S(M) = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m + S_{m+1} + \dots + S_n}{n} \quad (10)$$

7° Neka je

$$d_1 = d_2 = \dots = d_c < d_{c+1} \leq \dots \leq d_n \quad (11)$$

Kada $k \rightarrow \infty$, tada iz (3) dobijamo

$$S(M) = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_c}{c} \quad (12)$$

8° Za $d_1 < d_2 \leq \dots \leq d_n$, kada $k \rightarrow \infty$, iz (3) se dobija

$$S(M) = S_1 \quad (13)$$

U daljem izlaganju smatraćemo da su tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ u odnosu na tačku M rasporedene tako da su ispunjeni uslovi

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m \leq d_{m+1} \leq \dots \leq d_n \quad (14)$$

Proširivanjem razlomka na desnoj strani (3) sa $(d_i)^k$, formula (3) dobija oblik

$$S(M) = \frac{S_1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k \cdot S_2 + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k \cdot S_m + \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k \cdot S_{m+1} + \dots + \left(\frac{d_1}{d_n}\right)^k \cdot S_n}{1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k + \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_n}\right)^k} \quad (15)$$

iz interpolacione formule (15) vidimo da vrednost $S(M)$ zavisi od vrednosti $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ u odgovarajućim tačkama $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ od rastojanja $d_1, d_2, \dots, d_m, d_{m+1}, \dots, d_n$ tih tačaka od tačke M i od eksponenta k . Sa povećanjem rastojanja tačke M_i od tačke M smanjuje se uticaj S_i na vrednost $S(M)$ i obratno. Sa povećanjem eksponenta k uticaj udaljenijih tačaka na vrednost $S(M)$ se smanjuje, a uticaj najbliže tačke se povećava. Kada se eksponent k smanjuje i kada $k \rightarrow 0$, tada pojedine vrednosti S_i imaju podjednaku težinu uticaja na vrednost $S(M)$, što se vidi iz svojstva 6° formule (3)

Neka je

$$S^*(M) = \frac{S_1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k \cdot S_2 + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k \cdot S_m}{1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k}. \quad (16)$$

Formula (16) predstavlja kraći oblik formule (15).

Formula (16) sastoji se od prvih m članova formule (15). Pomoću nje se može takođe odrediti vrednost veličine S u tački M , koju smo označili sa $S^*(M)$, koristeći pri tome manji broj tačaka iz bliže okoline tačke M .

U opštem slučaju, vrednosti $S(M)$ i $S^*(M)$ razlikuju se među sobom.

Sada ćemo navesti granice u kojima se nalazi razlika koja se javlja kada se umesto formule (3), odnosno formule (15), za dobijanje vrednosti S u tački M koristi formula (16). Drugim rečima, daćemo jednu ocenu za $|S(M) - S^*(M)|$.

9° Između $S(M)$ i $S^(M)$ važe nejednakosti*

$$S^*(M) - (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k < S(M) < S^*(M) + (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k. \quad (17)$$

Nejednakosti (17) mogu se napisati u obliku

$$|S(M) - S^*(M)| < (n-m) \cdot (G-g) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k, \quad 1 \leq m < n. \quad (18)$$

O navedenim svojstvima 1°-9° opširnije se može videti u [3].

U jednom delu D posmatranog prostora broj poznatih tačaka $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ je ograničen.

Prema formuli (15), vrednost $S(M)$ dobija se uzimanjem u obzir svih n poznatih tačaka iz bliže i dalje okoline tačke M , dok se kod upotrebe formule (16) za dobijanje vrednosti $S^*(M)$ koristi $m < n$ poznatih tačaka iz bliže okoline tačke M .

Nejednakošću (18) data je jedna gornja granica greške koja se može učiniti kada se za određivanje vrednosti veličine S u tački M umesto formule (15) upotrebi formula (16).

Nejednakost (18) možemo posmatrati i tako što ćemo postaviti uslov da bude

$$(n-m) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k \leq p, \quad (19)$$

gde je p unapred dati mali broj. U tom slučaju nejednakost (18) možemo napisati u obliku

$$|S(M) - S^*(M)| < p \cdot (G-g), \quad (20)$$

čime je gornja granica greške data u vidu jednog malog dela p od $(G-g)$.

Ako uzmemo da je

$$n \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k \leq p, \quad (21)$$

tada će važiti i uslov (19).

Neka je

$$\frac{d_i}{d_{m+1}} \leq \frac{1}{s}, \quad s > 1. \quad (22)$$

Ako sada uzmemo da je

$$n \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^k \leq p, \quad (23)$$

tada će zbog (22) važiti i uslov (21), a samim tim važiće i uslov (19).

Za unapred dati mali broj p i dati broj $s > 1$, iz (23) se može odrediti eksponent k . U praksi se za k nađeno iz (23) uzima najmanji ceo broj.

Sa druge strane, za dati broj $k > 0$ (u praksi najčešće ceo broj) i unapred dati mali broj p , iz (23) se može odrediti broj s . U praksi se za s nađeno iz (23) uzima najmanji ceo broj. Sa ovako nađenom vrednošću za s , iz (22) se može odrediti odnos $\frac{d_i}{d_{m+1}}$.

UPOTREBA FORMULA (15) I (16)

Neka u oblasti D prostora $OXYZ$ imamo n donekle ravnomerno raspoređenih tačaka $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ u kojima su poznate vrednosti $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ njegove karakteristike S . Vrednost karakteristike S u tački M oblasti D možemo odrediti kao $S(M)$ upotrebom formule (15) ili kao $S^*(M)$ upotrebom formule (16).

Formula (15) se obično koristi kada broj poznatih tačaka nije veliki. U slučaju kada imamo veliki broj poznatih tačaka, tada možemo koristiti formulu (16). Razlog za ovo sastoji se u tome što udaljenije tačke kojih ima $(n - m)$, počev od tačke M_{m+1} za koju je $\frac{d_i}{d_{m+1}} \leq \frac{1}{s} < 1$ sve

manje utiču na vrednost $S(M)$ što naročito dolazi do izražaja sa povećanjem eksponenta k .

Neka je M tačka u kojoj želimo da odredimo vrednost karakteristike S . Tada prvo izračunavamo rastojanje d_i tačke M od njoj najbliže poznate tačke M_1 . Zatim oko tačke M u prostoru $OXYZ$ u kome leže poznate tačke opisujemo loptu L poluprečnika

$$r = s \cdot d_i, \quad s > 1, \quad (24)$$

gde je s dati broj. Pri tome, tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ kojih ima ukupno n , loptom L biće podeljene na dva dela: na tačke koje leže u lopti L , čiji ćemo broj označiti sa m i tačke koje leže na lopti L i izvan lopte L , kojih ima $(n - m)$. U ovom slučaju tačka M_{m+1} ne leži u lopti L , pa je zato

$$d_{m+1} \geq r. \quad (25)$$

Imajući u vidu (24), iz (25) zaključujemo da je

$$\frac{d_i}{d_{m+1}} \leq \frac{1}{s}, \quad (26)$$

pa kada je

$$(n - m) \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^k \leq p, \quad (27)$$

gde je p unapred dati mali broj, tada će biti ispunjen i uslov (19). Iz (27) sada određujemo eksponent k pošto su nam sve ostale veličine poznate. Naposljetku izračunavamo i rastojanja d_2, \dots, d_m tačke M od tačaka M_2, \dots, M_m . Na taj način odredili smo sve veličine potrebne za primenu formule (16).

Umesto uslova (19) možemo koristiti uslov (23), jer kada je ispunjen uslov (23) tada važi i uslov (19). U ovom slučaju se za eksponent k dobija neznatno povećana vrednost.

Ako se dogodi da lopta L , čiji je poluprečnik r dat jednačinom (24), obuhvati sve poznate tačke, tada se može koristiti formula (15) ili se smanjiti poluprečnik lopte L kako bi se opisivanjem nove lopte oko tačke M neke od poznatih tačaka našle na toj lopti i van nje, čime bi bila omogućena primena formule (16).

Broj poznatih tačaka M_1, M_2, \dots , koje se mogu naći u lopti L zavisi od njenog poluprečnika r , odnosno od d_1 i s i kreće se od 1 do n .

Rastojanje d_1 tačke M od njoj najbliža poznate tačke M_1 ispunjava uslov $0 < d_1 \leq t$, gde je $t = \max d_i$.

PRIMENA FORMULA

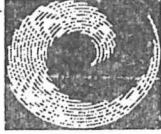
Neka se u posmatranom prostoru $OXYZ$ javlja prašina i neka je S veličina kojom se izražava stepen njegove zaprašenosti. Veličina S može se iskazati u miligramima prašine po kubnom metru vazduha, u broju čestica prašine po kubnom centimetru vazduha koje su, na primer, manje od 5 mikrona ili u količini nataložene prašine po jedinici površine u toku određenog vremena. Za veličinu S kazaćemo jednostavno da predstavlja sadržaj prašine u zaprašenom prostoru.

Neka u delu D zaprašenog prostora $OXYZ$ tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ predstavljaju mesta u kojima su ustanovljeni sadržaji $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ uočene prašine.

Sadržaj prašine u nekoj tački $M \neq M_j, j=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n$, u posmatranom delu D zaprašenog prostora možemo dobiti kao $S(M)$ primenom interpolacione formule (15) ili kao $S^*(M)$ primenom interpolacione formule (16) na način opisan u prethodnom odeljku. Znači, pored poznatih sadržaja prašine dobijenih na n odabranih tačaka zaprašenog prostora, upotrebom formule (15) ili formule (16) možemo odrediti zaprašenost i u drugim tačkama prostora.

LITERATURA

1. David M.: GEOSTATISTICAL ORE RESERVE ESTIMATION, Elsevier, 1977;
2. William E. Hugag, Roderick K. Davey: DRILL HOLE INTERPOLATION, Mineralized Interpolation Techniques, Society of Mining Engineers, New York, 1979;
3. Simeunović D.: JEDNA INTERPOLACIONA FORMULA I NJENA PRIMENA U POVRŠINSKOJ EKSPLOATACIJI, Zbornik radova, Drugi međunarodni simpozijum o površinskoj eksploataciji i kvalitetu sirovina za proizvodnju cementa, Kosjerić, 1996.



PROSTORNA INTERPOLACIJA KARAKTERISTIKA LEŽIŠTA MINERALNIH SIROVINA

Dragomir Simeunović

IZVOD

U ovom radu posmatrana je prostorna interpolacija karakteristika ležišta mineralnih sirovina. U tu svrhu korišćena je jedna interpolaciona formula reda r . Za tu formulu navedena su neka svojstva koja pored teorijskog imaju i svoj praktični značaj. U radu je, takođe, posmatran i kraći oblik interpolacione formule.

UVOD

Neka su $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ vrednosti jedne veličine S u tačkama $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \dots, M_m(x_m, y_m, z_m), M_{m+1}(x_{m+1}, y_{m+1}, z_{m+1}), \dots, M_n(x_n, y_n, z_n)$ prostora OXYZ, tj. neka je:

$$S(M_j) = S_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n. \quad (1)$$

Ako uzmemo da je veličina S funkcija položaja tačke $M(x, y, z)$ u prostoru OXYZ, tada je:

$$S(M) = S(x, y, z) \quad (2)$$

Za određivanje vrednosti $S(M)$ u tački $M \neq M_j, j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n$ često se koristi neka interpolaciona formula. Mi ćemo ovde posmatrati interpolacionu formulu prema kojoj se za $S(M)$ uzima

^{*} Dr Dragomir Simeunović, red. prof., Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

$$S(M) = \left[\frac{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k \cdot S_1' + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k \cdot S_2' + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k \cdot S_m' + \left(\frac{1}{d_{m+1}}\right)^k \cdot S_{m+1}' + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k \cdot S_n'}{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k + \left(\frac{1}{d_{m+1}}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k} \right]^{\frac{1}{r}}, \quad (3)$$

gde su $d_1, d_2, \dots, d_m, d_{m+1}, \dots, d_n$ rastojanja tačke M od tačaka $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$, gde je k pozitivna konstanta i r realan broj.

Ako stavimo

$$\left(\frac{1}{d_j}\right)^k = q_j, \quad \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{d_j}\right)^k = q,$$

tada je $\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{q} = 1$. Veličine $\frac{q_j}{q}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) predstavljaju težine sa kojima vrednosti S_j utiču

na vrednost $S(M)$, zbog čega je formula (3) jedna težinska interpolaciona formula reda r .

Interpolaciona formula oblika (3) može se primeniti u rudarstvu i geologiji kod modeliranja ležišta mineralnih sirovina. Tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ koje se nalaze u prostoru OXYZ su mesta u datom ležištu u kojima su poznate vrednosti $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ njegove posmatrane karakteristike S .

U tački $M \neq M_j, j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n$ vrednost karakteristike S možemo dobiti kao $S(M)$ primenom interpolacione formule (3).

NEKA SVOJSTVA FORMULE (3)

Sada ćemo navesti neka svojstva formule (3):

1° Za bilo koji broj $k > 0$ i realan broj $r, (-\infty < r < +\infty)$, je:

$$S(M) = S_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

2° Za svaki broj $k > 0$, svaki realan broj r i bilo koju tačku M je:

$$g \leq S(M) \leq G, \quad (5)$$

gde je

$$g = \min S_j, \quad G = \max S_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n. \quad (6)$$

3° Ako je $S_1 = S_2 = \dots = S_n = S_0 > 0$, tada je:

$$S(M) = S_0. \quad (7)$$

4° Veličina $S(M)$ definisana formulom (3) je striktno rastuća funkcija po r .

5° Za $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d > 0$ i bilo koji broj $k > 0$ je:

$$S(M) = \left(\frac{S_1' + S_2' + \dots + S_n'}{n} \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (8)$$

6° Za $k = 0$, iz (3) se dobija

$$S(M) = \left(\frac{S_1' + S_2' + \dots + S_n'}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (9)$$

7° Slučaj kada je $k = +\infty$. Neka je:

$$d_1 = d_2 = \dots = d_c < d_{c+1} \leq \dots \leq d_n \quad (10)$$

Tada je

$$S(M) = \left(\frac{S_1' + S_2' + \dots + S_c'}{c} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (11)$$

8° Za $d_1 < d_2 \leq \dots \leq d_n$, i za $k = +\infty$ iz (11) se dobija:

$$S(M) = S_1 \quad (12)$$

Slučaj 8° je slučaj 7° za $c = 1$.

9° Za $r = -\infty$, iz (3) se dobija

$$S(M) \rightarrow \min S_j = g, \quad M \neq M_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

10° Za $r = +\infty$, (3) se svodi na

$$S(M) = \max S_j = G, \quad M \neq M_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

11° Za $r = 0$ je:

$$S(M) = \left(S_1^{d_1^{-1}} \cdot S_2^{d_2^{-1}} \cdot \dots \cdot S_n^{d_n^{-1}} \right)^{\frac{1}{d_1^{-1} + d_2^{-1} + \dots + d_n^{-1}}} \quad (15)$$

12° Za $r = 1$ je:

$$S(M) = \frac{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k \cdot S_1 + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k \cdot S_2 + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k \cdot S_m + \left(\frac{1}{d_{m+1}}\right)^k \cdot S_{m+1} + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k \cdot S_n}{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_m}\right)^k + \left(\frac{1}{d_{m+1}}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k} \quad (16)$$

Formula (16) je poznata interpolaciona formula koja se primenjuje u površinskoj eksploataciji [1], [2], [3].

U daljem izlaganju smatraćemo da su tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ u odnosu na tačku M raspoređene tako da su ispunjeni uslovi

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m \leq d_{m+1} \leq \dots \leq d_n \quad (17)$$

Proširivanjem razlomka na desnoj strani (3) sa $(d_j)^k$, formula (3) dobija oblik

$$S(M) = \left(\frac{S_1' + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k \cdot S_2' + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k \cdot S_m' + \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k \cdot S_{m+1}' + \dots + \left(\frac{d_1}{d_n}\right)^k \cdot S_n'}{1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k + \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_n}\right)^k} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (18)$$

iz interpolacione formule (3) vidimo da vrednost $S(M)$ zavisi od vrednosti $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ u odgovarajućim tačkama $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$, od rastojaranja $d_1, d_2, \dots, d_m, d_{m+1}, \dots, d_n$ tih tačaka od tačke M i od vrednosti k i r . Sa povećanjem rastojaranja tačke M_i od tačke M smanjuje se uticaj S_i na vrednost $S(M)$ i obratno. Sa povećanjem eksponenta k uticaj udaljenijih tačaka na vrednost $S(M)$ se smanjuje, a uticaj najbliže tačke se povećava. Kada se veličina r ($-\infty < r < +\infty$) smanjuje, tada se $S(M)$ takođe smanjuje, a kada se veličina r povećava tada se i $S(M)$ povećava. Podesnim izborom vrednosti za k i r mogu se u praksi dobiti zadovoljavajući rezultati.

Neka je

$$S^*(M) = \left(\frac{S_1' + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k \cdot S_2' + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k \cdot S_m'}{1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_m}\right)^k} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (19)$$

Formula (19) predstavlja kraći oblik formule (18).

Formula (19) sastoji se od prvih m članova formule (18). Pomoću nje se može takođe odrediti vrednost veličine S u tački M , koju smo označili sa $S^*(M)$, koristeći pri tome manji broj tačaka iz bliže okoline tačke M .

U opštem slučaju, vrednosti $S(M)$ i $S^*(M)$ razlikuju se među sobom.

U daljem tekstu posmatraćemo slučajeve kada je $r > 0$.

13° Između $S(M)$ i $S^*(M)$ važi relacija:

$$\left| [S(M)]^r - [S^*(M)]^r \right| < (n-m) \cdot (G^r - g^r) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k, \quad 1 \leq m < n. \quad (20)$$

Kada je r ceo pozitivan broj, tada se iz (20) može dobiti nejednakost

$$|S(M) - S^*(M)| < \frac{(n-m) \cdot (G^r - g^r)}{r \cdot g^{r-1}} \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k, \quad r = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Za $r = \frac{1}{v}$, gde je v ceo pozitivan broj, iz (20) se može izvesti nejednakost

$$|S(M) - S^*(M)| < (n-m) \cdot v \cdot G^{\frac{v-1}{v}} \cdot \left(G^{\frac{1}{v}} - g^{\frac{1}{v}}\right) \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}}\right)^k, \quad v = 1, 2, \dots \quad (22)$$

U jednom delu D posmatranog prostora broj poznatih tačaka $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ je ograničen.

Prema formuli (18), vrednost $S(M)$ dobija se uzimanjem u obzir svih n poznatih tačaka iz bliže i dalje okoline tačke M , dok se kod upotrebe formule (18) za dobijanje vrednosti $S^*(M)$ koristi $m < n$ poznatih tačaka iz bliže okoline tačke M .

Nejednaošću (21) data je jedna gornja granica greške koja se može učiniti kada se za određivanje vrednosti veličine S u tački M umesto formule (18) upotrebi formula (19).

Nejednakost (21) možemo posmatrati i tako što ćemo postaviti uslov da bude

$$\frac{(n-m) \cdot (G' - g')}{r \cdot g^{r-1}} \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}} \right)^k \leq p, \quad (23)$$

gde je p unapred dati mali broj. U tom slučaju nejednakost (21) možemo napisati u obliku

$$|S(M) - S^*(M)| < p, \quad (24)$$

Ako uzmemo da je

$$\frac{n \cdot (G' - g')}{r \cdot g^{r-1}} \cdot \left(\frac{d_1}{d_{m+1}} \right)^k \leq p, \quad (25)$$

tada će važiti i uslov (23).

Neka je

$$\frac{d_1}{d_{m+1}} \leq \frac{1}{s}, \quad s > 1. \quad (26)$$

Ako sada uzmemo da je

$$\frac{n \cdot (G' - g')}{r \cdot g^{r-1}} \cdot \left(\frac{1}{s} \right)^k \leq p, \quad (27)$$

tada će zbog (26) važiti i uslov (25), a samim tim važiće i uslov (23).

Za unapred dati mali broj p i dati broj $s > 1$, iz (27) se može odrediti eksponent k . U praksi se za k nađeno iz (27) uzima najmanji ceo broj.

Sa druge strane, za dati broj $k > 0$ (u praksi najčešće ceo broj) i unapred dati mali broj p , iz (27) se može odrediti broj s . U praksi se za s nađeno iz (27) uzima najmanji ceo broj. Sa

ovako nađenom vrednošću za s , iz (26) se može odrediti odnos $\frac{d_1}{d_{m+1}}$.

UPOTREBA FORMULA (18) I (19)

U jednom ležištu mineralnih sirovina koje se nalazi u oblasti D prostora $OXYZ$ imamo n donekle ravnomerno raspoređenih tačaka $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ u kojima su poznate vrednosti $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$ njegove karakteristike S . Vrednost karakteristike S u tački M oblasti D možemo odrediti kao $S(M)$ upotrebom formule (18) ili kao $S^*(M)$ upotrebom formule (19).

Formula (18) se obično koristi kada broj poznatih tačaka nije veliki. U slučaju kada imamo veliki broj poznatih tačaka, tada možemo koristiti formulu (19). Razlog za ovo sastoji se u tome što udaljenije tačke kojih ima $(n - m)$, počev od tačke M_{m+1} za koju je $\frac{d_1}{d_{m+1}} \leq \frac{1}{s} < 1$ sve

manje utiču na vrednost $S(M)$ što naročito dolazi do izražaja sa povećanjem eksponenta k .

Neka je M tačka u kojoj želimo da odredimo vrednost karakteristike S . Tada prvo izračunavamo rastojanje d_1 tačke M od njoj najbliže poznate tačke M_1 . Zatim oko tačke M u prostoru $OXYZ$ u kome leže poznate tačke opisujemo loptu L poluprečnika

$$r = s \cdot d_1, \quad s > 1, \quad (28)$$

gde je s dati broj. Pri tome, tačke $M_1, M_2, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$ kojih ima ukupno n , loptom L biće podeljeno na dva dela: na tačke koje leže u lopti L , čiji ćemo broj označiti sa m i tačke koje leže na lopti L i izvan lopte L , kojih ima $(n - m)$. U ovom slučaju tačka M_{m+1} ne leži u lopti L , pa je zato

$$d_{m+1} > r. \quad (29)$$

Imajući u vidu (24), iz (25) zaključujemo da je

$$\frac{d_1}{d_{m+1}} \leq \frac{1}{s}, \quad (30)$$

pa kada je

$$\frac{(n - m) \cdot (G' - g')}{r \cdot g'^{-1}} \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^k \leq p, \quad (31)$$

gde je p unapred dati mali broj, tada će biti ispunjen i uslov (23). Iz (31) sada određujemo eksponent k pošto su nam sve ostale veličine poznate. Naposljetku izračunavamo i rastojanja d_2, \dots, d_m tačke M od tačaka M_2, \dots, M_m . Na taj način odredili smo sve veličine potrebne za primenu formule (19).

Umesto uslova (23) možemo koristiti uslov (27), jer kada je ispunjen uslov (27) tada važi i uslov (19). U ovom slučaju se za eksponent k dobija neznatno povećana vrednost.

Ako se dogodi da lopta L , čiji je poluprečnik r dat jednačinom (28), obuhvati sve poznate tačke, tada se može koristiti formula (18) ili se smanjiti poluprečnik lopte L kako bi se opisivanjem nove lopte oko tačke M neke od poznatih tačaka našle na toj lopti i van nje, čime bi bila omogućena primena formule (19).

Broj poznatih tačaka M_1, M_2, \dots , koje se mogu naći u lopti L zavisi od njenog poluprečnika r , odnosno od d_1 i s i kreće se od 1 do n .

Rastojanje d_1 tačke M od njoj najbliže poznate tačke M_1 ispunjava uslov $0 < d_1 \leq r$, gde je $t = \max d_1$.

Na sličan način može se koristiti i nejednakost (22).

LITERATURA

1. David M.: Geostatistical Ore Reserve Estimation, Elsevier, 1977;
2. William E. Hugges, Roderick K. Davey: Drill Hole Interpolation, Mineralized Interpolation Techniques, Society of Mining Engineers, New York, 1979;
3. Simeunović D.: Jedna interpolaciona formula i njena primena u površinskoj eksploataciji, Zbornik radova, Drugi međunarodni simpozijum o površinskoj eksploataciji i kvalitetu sirovina za proizvodnju cementa, Kosjerić, 1996.



Jugoslovenski komitet za površinsku eksploataciju Saveza inženjera i tehničara Jugoslavije
Rudarsko geološki fakultet - Katedra za površinsku eksploataciju, Beograd
PIM "Ivan Milutinović" PC "Kamenolom", Golubac
Skupština opštine Golubac

S A V E T O V A N J E

POVRŠINSKA EKSPLOATACIJA KAMENA

G O L U B A C
26-27. septembar 1997.

Površinska eksploatacija kamena

Izdavač

Jugoslovenski komitet za
površinsku eksploataciju

Urednik

Prof. dr Vladimir Pavlović

Tehnička priprema

Mirjana Bošković dipl. inž. rud.,
Saša Stepanović dipl. inž. rud.
Vojkan Tošić, dipl. inž. rud.
Vojislav Krstić dipl. inž. rud.

Grafičko rešenje korica

GTP "Grafomark" - Beograd

Tiraž

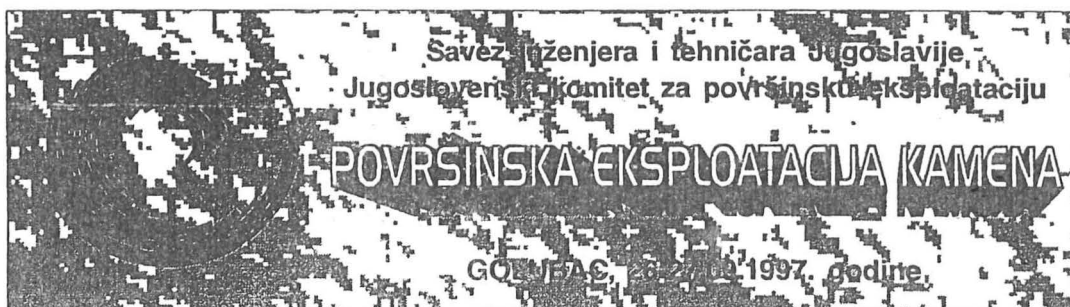
200 primeraka

Štampa

GTP "Grafomark" - Beograd

© Sva prava zadržava Izdavač

Štampanje Zbornika radova Savetovanja "Površinska eksploatacija kamena" pomogli su:
*PIM "Ivan Milutinović" PC "Kamenolom" - Golubac, Rudarski Institut - Zemun, DD
"Putevi" - Požega, DP Rudnici nemetala "Rakovac" - Rakovac, DP Fabrika cementa
"Kosjerić" - Kosjerić, Ministarstvo za nauku i tehnologiju Republike Srbije, Ministarstvo
za rudarstvo i energetiku Republike Srbije, Ministarstvo industrije, energetike i rudarstva
Republike Crne Gore, Ministarstvo za zaštitu životne sredine Republike Srbije i
Ministarstvo ekologije i životne sredine Republike Crne Gore.*



OCENA KARAKTERISTIKA POUZDANOSTI RADA SISTEMA POVRŠINSKE EKSPLOATACIJE

Vladimir Pavlović¹, Dragomir Simeunović²

STATISTIČKI PODACI PARAMETARA POUZDANOSTI

U teoriji pouzdanosti statistički podaci o radu i otkazima sistema u površinskoj eksploataciji razlikuju se po planu praćenja, a rezultati koji se dobijaju po načinu kontrole radnih mogućnosti sistema u procesu eksploatacije. Planom praćenja rada utvrđuje se broj elemenata, redosled sprovođenja praćenja i kriterijumi prekida ili završetka praćenja. Kontrola rada sistema u eksploataciji može biti neprekidna ili periodična. U Tabeli 1, dati su osnovni faktori koji karakterišu eksploatacione statističke podatke po planu praćenja i vidu kontrole rada sistema.

Tabela 1.

<i>Osnovni faktori koji karakterišu eksploatacione statističke podatke o pouzdanosti sistema</i>	
1. Broj elemenata sistema	
2. Redosled aktivnosti posle otkaza pojedinog elementa	2.1. Prekid praćenja rada elementa
	2.2. Obnavljanje (ili zamena novim) i produžetak praćenja rada
3. Kriterijumi prekida praćenja rada sistema (po svim elementima)	3.1. Do zadatog ukupnog broja otkaza
	3.2. Do otkaza svakog elementa ili po dostizanju zadatog vremena rada
	3.3. Do zadatog broja otkaza ili vremena rada
	3.4. Do proizvoljnog slučajnog vremena rada po svakom elementu (uzorak)

¹ Prof. Dr Vladimir Pavlović, Rudarsko-geološki fakultet, Đušina 7, 11000 Beograd

² Prof. Dr Dragomir Simeunović, Rudarsko-geološki fakultet, Đušina 7, 11000 Beograd

Podaci o radu elemenata sistema su specifični. Elementi po pravilu rade sa promenljivim intezitetom u različitim vremenskim periodima. Intervali prikupljanja podataka o radu elemenata su slučajni i promenljivih vrednosti, a broj dobijenih intervala vremena rada proizvoljan. Ovakvi uzorci statističkih podataka su ograničeni u odnosu na osnovni skup i realizuju se po kriterijumu slučajnog vremena. Oni su opštiji u odnosu na uzorke koji se dobijaju sa prekidima praćenja po kriterijumima zadanog ukupnog broja otkaza, zadanog vremena rada ili prve realizacije od ova dva kriterijuma.

Pojam elementa sistema površinske eksploatacije obuhvata širok spektar od složenih pod sistema do prostih detalja. Po karakteru statističkih podataka elementi sistema se uslovno mogu podeliti na dve grupe. Prvu grupu čine osnovni pod sistemi koji obezbeđuju normalno funkcionisanje i obično se kontrolišu neprekidno. Ovi pod sistemi su uobičajeno obnovljivi pa se sa mogućom modernizacijom produžava vreme rada i njihov vek. Uzroci otkaza pod sistema mogu biti različiti, a zavise od složenosti njihove strukture. Zakoni raspodele rada takvih pod sistema su složeni pa se teško mogu predstaviti standardnim raspodelama. Drugu grupu čine konstruktivno prosti elementi sistema sa različitim vidovima kontrole radnih sposobnosti. Zakoni raspodele vremena rada takvih elemenata dobro se aproksimiraju standardnim raspodelama.

Metode ocene pokazatelja pouzdanosti po statističkim podacima dele se na parametarske i neparametarske. Parametarske metode koriste statističke hipoteze o vidu zakona raspodele. Metode se nakon statističke obrade podataka svode na ocenu parametara teoretskog zakona i proveru hipoteze o saglasnosti sa eksperimentalnim podacima. Neparametarskim metodama ocene moguće je neposredno dobiti ocenu parametara pouzdanosti i empirijski zakon raspodele vremena rada.

METOD NAJVEĆE VERODOSTOJNOSTI

Osnovni metod određivanja parametara teoretskog zakona je metod najveće verodostojnosti koji je zasnovan na pretpostavci da su sakupljeni podaci u toku eksploatacije najverovatnija realizacija. Ako su elementi uzorka t_1, t_2, \dots, t_n izvučeni sa vraćanjem, promenljive T_1, T_2, \dots, T_n su nezavisne medjusobno. Ako je L nepoznati parametar osnovnog skupa koga treba oceniti, tada će svako t_i imati zakon verovatnoće $f(t_i, L)$. Zakon verovatnoće uzorka:

$$V(t_1, t_2, \dots, t_n; L) = f(t_1|L) f(t_2|L) \dots f(t_n|L) \text{ je verodostojnost uzorka.}$$

Metoda najveće verodostojnosti svodi se na određivanje one ocene L_0 parametra L za koji funkcija V dostiže svoj maksimum. Određivanje maksimuma funkcije V svodi se na analiziranje njenog parcijalnog izvoda po nepoznatom parametru L . Realno rešenje L_0 jednačine $dV/dL = 0$ za koju V dostiže svoj maksimum predstavlja najefikasniju ocenu L .

Ako je u uzorku od n elemenata k različitih vrednosti t_i sa odgovarajućim frekvencijama f_i pri čemu je $\sum f_i = n$; $i = 1, \dots, k$, za verodostojnost uzorka važi:

$$V = \prod (p_i(L))^{f_i}.$$

Kako funkcija $\ln V$ dostiže svoj maksimum za iste vrednosti nezavisne promenljive za koje dostiže i funkcija V , to je praktičnije tražiti maksimum funkcije:

$$\ln V = \sum f_i \ln p_i(L) \text{ kod prekidnog rasporeda, a funkcije:}$$

$$\ln V = \sum \ln f(t_i | L); i = 1, \dots, n, \text{ kod neprekidnog rasporeda.}$$

Ako za realno rešenje $L = L_0(t_1, t_2, \dots, t_n)$ jednačine $d(\ln V)/dL = 0$, funkcija $\ln V$ dostiže maksimum, rešenje $L_0(t_1, \dots, t_n)$ je najefikasnija ocena parametra L .

Kod prekidnog rasporeda jednačina $d(\ln V)/dL = 0$ svodi se na

$$\sum \frac{f_i}{p_i(L)} \frac{d p_i(L)}{d L} = 0$$

a kod neprekidnog rasporeda na

$$\sum \frac{f_i}{f(t_i | L)} \frac{d (f(t_i | L))}{d L} = 0$$

Ako se u zakonu verovatnoće osnovnog skupa nalazi više nepoznatih parametara L_1, L_2, \dots, L_r , verodostojnost uzorka je funkcija:

$$V(t_1, t_2, \dots, t_n; L_1, \dots, L_r) = \prod (p_i(L_1, \dots, L_r))^{f_i}; i = 1, \dots, k,$$

kod prekidnog rasporeda, dok je kod neprekidnog rasporeda:

$$V(t_1, \dots, t_n; L_1, \dots, L_r) = \prod f(t_i | L_1, \dots, L_r); i = 1, \dots, n.$$

Određivanje maksimuma svodi se na rešenje sistema od r jednačina sa r nepoznatih:

$$\frac{\partial \ln V}{\partial L_i} = 0, i = 1, \dots, r. \text{ Svako rešenje ovog sistema za koje } V \text{ dostiže svoj maksimum daje}$$

najefikasnije ocene parametara L_1, \dots, L_r .

NEPARAMETARSKA OCENA KARAKTERISTIKA POUZDANOSTI

Zakon pouzdanosti $F(t)$ i osnovne karakteristike (vreme rada, obnavljanja i vek) mogu biti odredjeni eksperimentalno u toku eksploatacije sistema ukoliko je uzorak realizacija odgovarajućih slučajnih veličina T oblika:

$$t_1, t_2, \dots, t_p, \dots, t_n \text{ gde je: } t_j > t_{j-1} \text{ i } n > 20.$$

Tada se verovatnoća rada $P_0(t)$ za $0 < t < \infty$, može oceniti na osnovu definicije statističke verovatnoće po formuli:

$$P_0(t) = m_t / n$$

gde je: m_t - broj realizacija slučajne veličine.

Empirijska vrednost gustine raspodele $f(t)$ odredjuje se deljenjem intervala (t_n, t_j) na $r = 4$ in n intervala dužine $h = (t_n - t_1)/r$, kada je srednja vrednost intervala: $t_j = t_1 + h(j - 0.5)$; $j = 1, \dots, r$ - broj intervala od 1 do r , pa je:

$$f_o(t_j) = m_j/n h$$

gde je m_j - broj realizacija rada uzorka t_j koji padnu u j -ti interval. Očigledno je:

$$\sum f_o(t_j) h = (1/n) \sum m_j = n/n = 1.$$

Kada $n \rightarrow \infty$ i $h \rightarrow 0$ je $f_o(t_j) = f(t)$.

Intenziteti rada i obnavljanja za sredine intervala t_j dobijaju se iz izraza:

$$L_o(t_j) = m_j / h (n - \sum m_k)$$

gde je $k = 1, \dots, j-1$ - broj intervala od 1 do $j-1$, m_k - broj realizacija rada t_k uzorka koji pada u k -ti interval.

Srednja vrednost vremena rada sistema iznosi:

$$T_{so} = (1/n) \sum t_i, i = 1, \dots, n.$$

Kako se formiranje osnovnog skupa ovog tipa vrši na osnovu velikog obima ispitivanja sistema i u praksi je veoma složeno zbog dugog potrebnog vremena praćenja, često se istraživana slučajna veličina (vreme rada do otkaza sistema) dobija na osnovu uzorka veličine n :

$$t_{11}, t_{21}, \dots, t_{m1}, t_{12}, t_{22}, \dots, t_{n-m}$$

gde je: $t_j, j = 1, \dots, n-m$ - vreme mogućeg rada elementa koji nije otkazao u momentu prekida praćenja njegovog rada mereno od momenta poslednjeg obnavljanja ukoliko je obnavljanje izvršeno, $t_{ij}, i = 1, \dots, m$ - vreme rada elementa koji je otkazao do momenta otkaza pri neprekidnoj kontroli ili do momenta otkrivanja skrivenog otkaza pri periodičnoj kontroli, a koje se meri od momenta poslednjeg obnavljanja ukoliko je element obnovljiv.

Uvećanje broja analiza novih uzoraka omogućava efikasno praćenje parametara pouzdanosti sistema i podsistema površinske eksploatacije koji u realnom vremenu imaju česte eksploatacione i strukturne promene koje mogu umanjiti vrednosti prethodnih analiza.

Izračunavanje srednjeg vremena rada T_r u ovom slučaju nije tako jednostavno jer se iz ograničenog uzorka ne dobija pouzdanost svih n elemenata sistema površinske eksploatacije. Za $n-m$ elemenata se ne zna koliko bi vremena radili da nisu uslovno isključeni, pa je potrebno naći pokazatelje pouzdanosti koji bi što približnije opisivali sistem površinske eksploatacije. Najracionalnije je zadati teoretski zakon raspodele vremena rada sistema i preko najveće verodostojnosti odrediti parametre na osnovu ograničenog uzorka ispitivanja.

Za eksponencijalnu raspodelu verovatnoće rada $P(t) = \exp(-t/T_r)$ sa bezuslovnom gustinom raspodele $f(t) = (1/T_r) \exp(-t/T_r)$, može se dobiti srednje vreme rada metodom najveće verodostojnosti. Za ograničeno ispitivanje preko funkcije verodostojnosti datog uzorka V koja za bilo koji uzorak slučajne veličine predstavlja verovatnoću pojave konkretnog uzorka:

$$\begin{aligned} V &= \left(\prod (1/T_r) \exp(-t_i/T_r) \right) \left(\prod \exp(-t_j/T_r) \right) = \\ &= (1/T_r^n) \exp(- (1/T_r) (\sum t_i + \sum t_j)) \end{aligned}$$

gde je: $\exp(-t_j/T_r)$ - verovatnoća rada u toku vremena rada t_j .

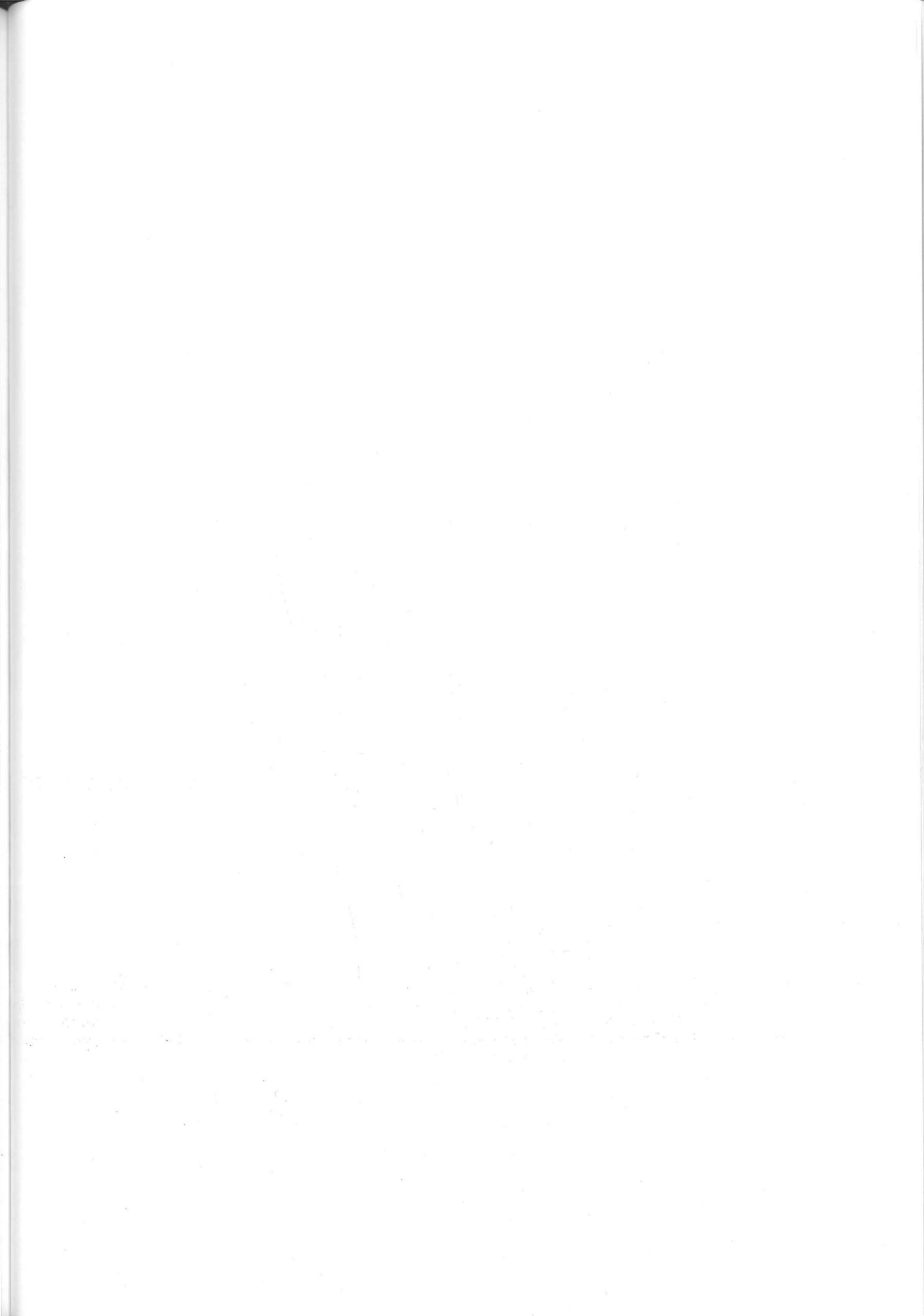
Jednačina verovatnoće za dobijanje nepoznatog parametra funkcije raspodele nakon logaritmovanja i anuliranja funkcije V po L je:

$$\frac{d(\ln V)/d T_r = (-m/T_r) + (1/T_r) (\sum t_i + \sum t_j) = 0, \text{ pa je:}$$
$$T_r = (\sum t_i + \sum t_j) / m .$$

Odatde se može izvesti jasan zaključak da je za eksponencijalnu raspodelu verovatnoće rada sistema, pri analizi ograničenog uzorka srednje vreme rada jednako odnosu ukupnog vremena rada svih elemenata i broja onih koji su otkazali.

LITERATURA

1. Ivanović B.: TEORIJSKA STATISTIKA, Naučna Knjiga, Beograd, 1979.
2. Pavlović V.: POUZDANOST DISKONTINUALNIH SISTEMA, RGF, Beograd, 1989.
3. Simonović V.: UVOD U TEORIJU VEROVATNOĆE I MATEMATIČKU STATISTIKU, Tekon, Beograd, 1995.



Jugoslovenski komitet za površinsku eksploataciju Saveza inženjera i tehničara Jugoslavije
Rudarsko geološki fakultet - Katedra za površinsku eksploataciju, Beograd
PIM "Ivan Milutinović" PC "Kamenolom", Golubac
Skupština opštine Golubac

S A V E T O V A N J E

POVRŠINSKA EKSPLOATACIJA KAMENA

G O L U B A C
26-27. septembar 1997.

Površinska eksploatacija kamena

Izdavač

Jugoslovenski komitet za
površinsku eksploataciju

Urednik

Prof. dr. Vladimir Pavlović

Tehnička priprema

Mirjana Bošković dipl. inž. rud.,
Saša Stepanović dipl. inž. rud.
Vojkan Tošić, dipl. inž. rud.
Vojislav Krstić dipl. inž. rud.

Grafičko rešenje korica

GTP "Grafomark" - Beograd

Tiraž

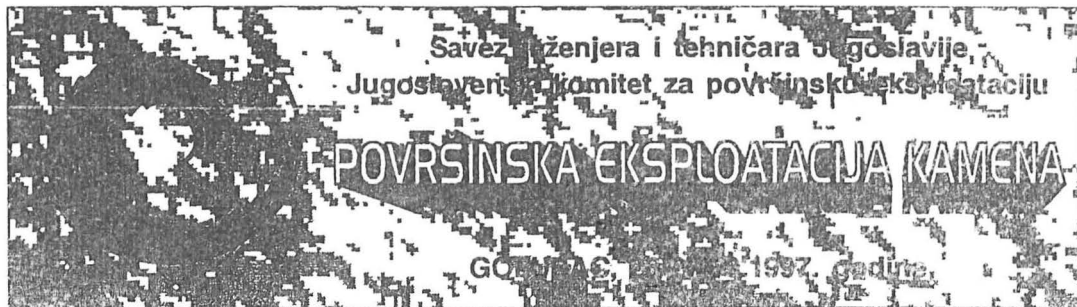
200 primeraka

Štampa

GTP "Grafomark" - Beograd

© Sva prava zadržava izdavač

Štampanje Zbornika radova Savetovanja "Površinska eksploatacija kamena" pomogli su:
*PIM "Ivan Milutinović" PC "Kamenolom" - Golubac, Rudarski Institut - Zemun, DD
"Putevi" - Požega, DP Rudnici nemetala "Rakovac" - Rakovac, DP Fabrika cementa
"Kosjerić" - Kosjerić, Ministarstvo za nauku i tehnologiju Republike Srbije, Ministarstvo
za rudarstvo i energetiku Republike Srbije, Ministarstvo industrije, energetike i rudarstva
Republike Crne Gore, Ministarstvo za zaštitu životne sredine Republike Srbije i
Ministarstvo ekologije i životne sredine Republike Crne Gore.*



PRIMENA TEŽINSKE INTERPOLACIONE FORMULE REDA r ZA ODREĐIVANJE ZAPRAŠENOSTI

Dragomir Simeunović

APSTRAKT

Za određivanje sadržaja prašine na pojedinim mestima u zaprašenom prostoru u ovom radu primenjena je težinska interpolaciona formula reda r . Za tu formulu prethodno je navedeno više svojstava koja pored teorijskog imaju i svoj praktični značaj.

UVOD

Neka su S_1, S_2, \dots, S_n pozitivne vrednosti jedne veličine S u tačkama $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \dots, M_n(x_n, y_n, z_n)$ prostora OXYZ, tj. neka je:

$$S(M_j) = S_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Ako je veličina S funkcija položaja tačke $M(x, y, z)$ u prostoru OXYZ, tada je:

$$S(M) = S(x, y, z) \quad (2)$$

Za određivanje vrednosti $S(M)$ u tački $M \neq M_j, j = 1, 2, \dots, n$ često se koristi neka interpolaciona formula. Mi ćemo ovde posmatrati interpolacionu formulu prema kojoj se za $S(M)$ uzima

* Dr Dragomir Simeunović, red. prof., Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

$$S(M) = \left[\frac{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k \cdot S_1' + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k \cdot S_2' + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k \cdot S_n'}{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k} \right]^{\frac{1}{r}}, \quad (3)$$

gde su d_1, d_2, \dots, d_n rastojanja tačke M od tačaka M_1, M_2, \dots, M_n , gde je k pozitivna konstanta i r realan broj.

Ako stavimo

$$\left(\frac{1}{d_j}\right)^k = q_j, \quad \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{d_j}\right)^k = q,$$

tada je $\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{q} = 1$. Veličine $\frac{q_j}{q}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) predstavljaju težine sa kojima vrednosti S_j utiču na vrednost $S(M)$, zbog čega je formula (3) jedna težinska interpolaciona formula reda r .

Interpolaciona formula (3) može se primeniti za određivanje sadržaja prašine na pojedinim mestima u zaprašenom prostoru. Pri tome veličina S predstavlja zaprašenost u uočenom prostoru. Tačke M_1, M_2, \dots, M_n u prostoru $OXYZ$ su mesta u kojima zaprašenost S ima vrednosti S_1, S_2, \dots, S_n .

U tački $M \neq M_j$, $j=1, 2, \dots, n$ zaprašenost S možemo odrediti kao $S(M)$ primenom interpolacione formule (3).

NEKA SVOJSTVA FORMULE (3)

Sada ćemo navesti neka svojstva formule (3):

1° Za bilo koji broj $k > 0$ i realan broj r , ($-\infty < r < +\infty$), je:

$$S(M) = S_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

2° Za svaki broj $k > 0$, svaki realan broj r i bilo koju tačku M je:

$$g \leq S(M) \leq G, \quad (5)$$

gde je

$$g = \min S_j, \quad G = \max S_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

3° Ako je $S_1 = S_2 = \dots = S_n = S_0 > 0$, tada je:

$$S(M) = S_0. \quad (7)$$

4° Veličina $S(M)$ definisana formulom (3) je striktno rastuća funkcija po r .

5° Za $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d > 0$ i bilo koji broj $k > 0$ je:

$$S(M) = \left(\frac{S_1' + S_2' + \dots + S_n'}{n} \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (8)$$

6° Za $k = 0$, iz (3) se dobija

$$S(M) = \left(\frac{S_1' + S_2' + \dots + S_n'}{n} \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (9)$$

7° Slučaj kada je $k = +\infty$. Neka je:

$$d_1 = d_2 = \dots = d_c < d_{c+1} \leq \dots \leq d_n. \quad (10)$$

Tada je

$$S(M) = \left(\frac{S_1' + S_2' + \dots + S_c'}{c} \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (11)$$

8° Za $d_1 < d_2 \leq \dots \leq d_n$, i za $k = +\infty$ iz (11) se dobija:

$$S(M) = S_1. \quad (12)$$

Slučaj 8° je slučaj 7° za $c = 1$.

9° Za $r = -\infty$, iz (3) se dobija

$$S(M) = \min S_j = g, \quad M \neq M_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

10° Za $r = +\infty$, (3) se svodi na

$$S(M) = \max S_j = G, \quad M \neq M_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

11° Za $r = 0$ je:

$$S(M) = \left(S_1^{d_1} \cdot S_2^{d_2} \cdot \dots \cdot S_n^{d_n} \right)^{\frac{1}{d_1 + d_2 + \dots + d_n}}. \quad (15)$$

12° Za $r = 1$ je:

$$S(M) = \frac{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k \cdot S_1 + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k \cdot S_2 + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k \cdot S_n}{\left(\frac{1}{d_1}\right)^k + \left(\frac{1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{d_n}\right)^k}. \quad (16)$$

Formula (16) je poznata interpolaciona formula koja se primenjuje u površinskoj eksploataciji [1], [2], [3].

U daljem izlaganju smatraćemo da su tačke M_1, M_2, \dots, M_n u odnosu na tačku M raspoređene tako da su ispunjeni uslovi

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n. \quad (17)$$

Proširivanjem razlomka na desnoj strani (3) sa $(d_i)^k$, formula (3) dobija oblik

$$S(M) = \left(\frac{S_1^r + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k \cdot S_2^r + \dots + \left(\frac{d_1}{d_n}\right)^k \cdot S_n^r}{1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{d_1}{d_n}\right)^k} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (18)$$

Iz interpolacione formule (18) koja predstavlja drugi oblik formule (3) vidimo da vrednost $S(M)$ zavisi od vrednosti S_1, S_2, \dots, S_n u odgovarajućim tačkama M_1, M_2, \dots, M_n , od rastojanja d_1, d_2, \dots, d_n tih tačaka od tačke M i od vrednosti k i r . Sa povećanjem rastojanja tačke M_j od tačke M smanjuje se uticaj S_j na vrednost $S(M)$ i obratno. Sa povećanjem eksponenta k uticaj udaljenijih tačaka na vrednost $S(M)$ se smanjuje, a uticaj najbliže tačke se povećava. Kada se veličina r ($-\infty < r < +\infty$) smanjuje, tada se $S(M)$ takođe smanjuje, a kada se veličina r povećava tada se i $S(M)$ povećava. Podesnim izborom vrednosti za k i r mogu se u praksi dobiti zadovoljavajući rezultati.

PRIMENA FORMULA

Neka se u posmatranom prostoru OXYZ javlja prašina i neka je S veličina kojom se izražava stepen njegove zaprašenosti. Veličina S može se iskazati u miligramima prašine po kubnom metru vazduha, u broju čestica prašine po kubnom centimetru vazduha koje su, na primer, manje od 5 mikrona ili u količini nataložene prašine po jedinici površine u toku određenog vremena. Za veličinu S kazaćemo jednostavno da predstavlja sadržaj prašine u zaprašenom prostoru.

Neka u delu D zaprašenog prostora OXYZ tačke M_1, M_2, \dots, M_n predstavljaju mesta u kojima su ustanovljeni sadržaji S_1, S_2, \dots, S_n uočene prašine.

Sadržaj prašine u nekoj tački $M \neq M_j, j=1, 2, \dots, n$, u posmatranom delu D zaprašenog prostora možemo dobiti kao $S(M)$ primenom interpolacione formule (3) odnosno formule (18). Znači, pored poznatih sadržaja prašine dobijenih na n odabranih tačaka zaprašenog prostora, upotrebom formule (3) ili formule (18) možemo odrediti zaprašenost i u drugim tačkama prostora.

LITERATURA

1. David M.: GEOSTATISTICAL ORE RESERVE ESTIMATION, Elsevier, 1977;
2. William E. Hugge, Roderick K. Davey: DRILL HOLE INTERPOLATION, Mineralized Interpolation Techniques, Society of Mining Engineers, New York, 1979;
3. Simeunović D.: JEDNA INTERPOLACIONA FORMULA I NJENA PRIMENA U POVRŠINSKOJ EKSPLOATACIJI, Zbornik radova, Drugi međunarodni simpozijum o površinskoj eksploataciji i kvalitetu sirovina za proizvodnju cementa, Kosjerić, 1996.

Glina

Drugo međunarodno savetovanje
o površinskoj eksploataciji glina
Požarevac, 14-16. maj 1998. godine

ANALIZA MODELA FUNKCIONISANJA DISKONTINUALNIH SISTEMA ANALYSIS OF A MODEL OF OPERATION OF DISCONTINUOUS SYSTEMS

Vladimir Pavlović¹, Dragomir Simeunović²

APSTRAKT

Analitički modeli koji se koriste za proračun kapaciteta diskontinualnih sistema dele se na determinističke i stohastičke i daju različite rezultate. Kod velikih površinskih kopova se opslužuje više bagera sa velikim brojem kamiona koji se kreću između utovarnih i istovarnih mesta formirajući veliki zatvoreni dinamički sistem. Čak i kod jednostavnih sistema sa jednim bagerom i ograničenim brojem kamiona, koji su uobičajeni u površinskoj eksploataciji glina, metode kojima se opisuje funkcionisanje sistema daju različite rezultate. Razlike se ne pojavljuju zbog nedostataka metoda već zbog činjenice da je teško dati dobar analitički opis procesa sistema. Sa druge strane one su toliko male da se postavlja pitanje racionalnosti simulacije stohastičkih procesa diskontinualnih kako složenih tako i jednostavnih sistema. Da bi se uporedile dve osnovne metode izvršena je uporedna analiza sa jednakim ulaznim podacima i uslovima.

ABSTRAKT

Analytic models which are used for calculation of capacity of discontinuous systems are divided into deterministic and stochastic ones and they offer differing results. In large opencast

¹ Prof. dr Vladimir Pavlović, Katedra za površinsku eksploataciju Rudarsko-geološkog fakulteta u Beogradu

² Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko-geološki fakultet u Beogradu

mines are operating several excavators and a large number of trucks, which are driving between loading and dumping places, forming a big closed dynamic system. Even in case of simple systems, consisting of one excavator and a limited number of trucks, what is common in opencast exploitation of clays, methods which describe operation of the system yield differing results. These differences do not appear because of shortcomings of the methods applied but due to the fact that it is hard to give a good analytic description of the system's process. On the other side, the differences are so minute that a question of rationality of simulation of stochastic processes of both discontinuous and simple systems could be posed. In order to compare these two basic methods a comparative analysis with even input data and conditions is carried out.

MODELI FUNKCIONISANJA DISKONTINUALNIH SISTEMA

Kod determinističkog modela, raspodela svih događaja ima deterministički karakter. Tako maksimalni kapacitet sistema, sa jednim bagerom intenziteta utovara $b = 20$ i četiri kamiona nosivosti $q = 50$ t, sa intenzitetom dolazaka u sistem $a = 15$ iznosi: $Q_{max} = 50 \cdot 60/3 = 1000$ t/h i dobija se pod uslovom da se uvek sigurno vrši utovar kamiona. Ovaj uslov ne obuhvata radna stanja i broj kamiona i pouzdanost mašina.

Stohastički modeli, za razliku od determinističkog, su realniji. Sistem u modelu Palma sadrži samo dva od četiri moguća stanja sa eksponencijalnim raspodelama verovatnoća stanja. Objedinjavanje tri faze u jednu automatski podrazumeva da nema čekanja u bilo kojoj fazi. Ovaj uslov nije održiv u slučaju kada je i utovar i istovar opsluživanje u sistemu. Analizirana je prva mogućnost da je utovar opsluživanje dok su ostale tri faze objedinjene. Model Takača obuhvata, takodje, dva stanja diskontinualnog sistema ali bez uslovljavanja da je vreme opsluživanja eksponencijalno raspodeljeno. U ovom slučaju je verovatnoća raspodele vremena vožnje eksponencijalna, a vreme opsluživanja ima bilo koju raspodelu. U modelu sa četiri stanja verovatnoće raspodela svih stanja su eksponencijalne, nema čekanja u toku vožnje i mogući su redovi čekanja na utovar i istovar. Za dobijanje kapaciteta sistema određuju se verovatnoće raspodela za n_i kamiona u stanju i ; ($i = 1, 2, 3, 4$) ako stanja imaju c_i elemenata opsluživanja. U modelu redova čekanja sa ograničenim brojem kamiona u sistemu se uobičajeno koriste eksponencijalne verovatnoće raspodela svih stanja. U praksi se precizniji rezultati dobijaju sa normalnom verovatnoćom raspodele vremena opsluživanja i vožnje. U proračun se uključuju verovatnoće pojave n kamiona u sistemu: $P_n = k! \cdot (a/b)^n \cdot P_0 / (k-n)!$, $n = 1, \dots, k$, gde je: $P_0 = \left(\sum_{n=0}^k k! \cdot (a/b)^n \cdot P_0 / (k-n)! \right)^{-1}$, $n = 0, 1, \dots, k$. Simulaciona analiza kao i u determinističkom slučaju daje sledeće rezultate:

$$\begin{aligned} P_0 &= 0,03513 \\ P_1 &= 0,10538 \\ P_2 &= 0,23710 \\ P_3 &= 0,35565 \\ P_4 &= 0,26674 \end{aligned}$$

Očekivani broj kamiona u redu:	1,7486
Očekivani broj kamiona u sistemu:	2,7135
Očekivano vreme čekanja (h):	0,0906
Očekivano vreme boravka kamiona u sistemu (h):	0,1406
Kapacitet sistema (t/h):	965

Kapacitet sistema se značajnije menja i umanjuje tek uvodjenjem pouzdanosti rada opreme. Svaki bager zahteva vreme za pomoćne tehnološke operacije kada se ne vrši utovar što čak i uz dobru organizaciju daje skraćenje časovnog efektivnog vremena rada na oko 45 minuta. Odatle je časovno iskorišćenje vremena rada $K_b = 0,75$ pa maksimalni tehnički kapacitet iznosi:

$$Q_{teh} = 50 \cdot 60 \cdot 0,75/3 = 750 \text{ t/h.}$$

Rezultat se može prikazati preko uvećanja srednjeg vremena utovara za jedan minut jer je $3/0,75 = 4$ kao u determinističkom modelu. Uvodjenje vremenskog iskorišćenja pretpostavlja duže srednje vreme utovara koje sadrži srednje vreme utovara i vreme pomoćnih tehnoloških operacija. Za promenjeni intenzitet utovara $b = 15$ u stohastičkom modelu se simulacijom dobijaju sledeći rezultati:

$$\begin{aligned} P_0 &= 0,01538 \\ P_1 &= 0,06154 \\ P_2 &= 0,18462 \\ P_3 &= 0,36923 \\ P_4 &= 0,36923 \end{aligned}$$

Očekivani broj kamiona u redu:	2,0308
Očekivani broj kamiona u sistemu:	3,0154
Očekivano vreme čekanja kamiona (h):	0,1375
Očekivano vreme boravka u sistemu (h):	0,2042
Kapacitet sistema (t/h):	738

Potpunije sagledavanje efektivnog vremena rada bagera dobija se uvodjenjem pouzdanosti rada opreme izražene preko verovatnoće rada u vremenu t :

$$P_r(t) = (B/(L + B)) \cdot (1 + (L/B) \cdot \exp(-(L + B) \cdot t)),$$

gde su: L i B - intenziteti rada i obnavljanja elemenata sistema.

Za simulacijom dobijenu vrednost $P_r(1) = 0,9$, eksploatacioni kapacitet sistema u determinističkom modelu iznosi: $Q_b = 750 \cdot 0,9 = 675 \text{ t/h}$. Na ovaj način se vreme utovara produžava i iznosi $4/0,9 = 4,4$ minute što daje intenzitet utovara $b = 14$. U stohastičkom modelu se dobijaju sledeći rezultati:

$$\begin{aligned} P_0 &= 0,01247 \\ P_1 &= 0,05343 \\ P_2 &= 0,17175 \\ P_3 &= 0,36803 \\ P_4 &= 0,39432 \end{aligned}$$

Očekivani broj kamiona u redu:	2,0908
Očekivani broj kamiona u sistemu:	3,0783
Očekivano vreme čekanja u redu (h):	0,1512
Očekivano vreme boravka u sistemu (h):	0,2227
Kapacitet sistema (t/h):	691

Može se pretpostaviti da istovarno mesto ne uslovljava kašnjenje i da je srednja raspoloživost kamiona, takodje, 0,75 i da nema rezervnih jedinica. Nasuprot ovome, uobičajeno je

u eksploataciji da se, u zavisnosti od uslova, na svakih četiri do deset kamiona uvodi po jedan rezervni. Srednji broj kamiona u radu u sistemu za dati primer je $0,75 \cdot 4 = 3$ što znači da će redovi čekanja na utovar i istovar biti kraći. Intenzitet dolazaka kamiona se smanjuje zbog povećanja vremena ciklusa na $4/0,75 = 5,3$ minute i iznosi $a = 11$. Simulacionom analizom u stohastičkom modelu se dobijaju sledeći rezultati:

$$\begin{aligned} P_0 &= 0,03092 \\ P_1 &= 0,09718 \\ P_2 &= 0,22908 \\ P_3 &= 0,35998 \\ P_4 &= 0,28284 \end{aligned}$$

Očekivani broj kamiona u redu:	1,7976
Očekivani broj kamiona u sistemu:	2,7866
Očekivano vreme čekanja u redu (h):	0,1325
Očekivano vreme boravka u sistemu (h):	0,2059
Kapacitet sistema uz raspoloživost kamiona (Q_{sk}), (t/h):	678

Ovome treba dodati i analizu pouzdanosti za dobijanje verovatnoća raspodele broja kamiona u radu. Broj kamiona u radu je slučajna promenljiva verovatnoće raspodele R_n ; $n=1, \dots, 4$. Za uvođenje pouzdanosti rada kamiona potrebno je naći verovatnoću raspodele kamiona u radu po bageru u radu i izvršiti simulaciju za stohastički model koji obuhvata i pouzdanost sistema. Verovatnoće raspodele broja kamiona u radu se mogu dobiti na osnovu pravila množenja verovatnoća nezavisnih događaja koje glasi:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n),$$

i znači da je verovatnoća proizvoda nezavisnih događaja jednaka proizvodu njihovih verovatnoća. Ako se izvodi n nezavisnih eksperimenata kod kojih se u svakom događaj A pojavljuje sa verovatnoćom p , tada je verovatnoća da se događaj A realizuje tačno m puta u datom eksperimentu data izrazom:

$$P_{mn} = n \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} / m!(n-m)!$$

Verovatnoća da se događaj A dogodi ne manje od m puta u seriji od n nezavisnih eksperimenata je data formulom:

$$R_{mn} = \sum_{k=m}^n n! \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} / k!(n-k)!, \quad k = m, \dots, n.$$

Verovatnoća $P_{m,n}$ da se u n nezavisnih eksperimenata događaj A , čija je verovatnoća realizacije u i -tom eksperimentu jednaka p_i ($0 \leq p_i \leq 1$), $i = 1, \dots, n$, realizuje m puta jednaka je zbiru svih mogućih proizvoda u kojima se simbol p sa različitim indeksima pojavljuje m puta, a simbol q ($q_i = 1 - p_i$) sa različitim indeksima pojavljuje $n - m$ puta:

$$P_{mn} = p_1 p_2 \dots p_m q_{m+1} \dots q_n + p_1 q_2 p_3 \dots q_{n-1} p_n + \dots + q_1 q_2 \dots q_{n-m} p_{n-m+1} \dots p_n$$

Za nalaženje verovatnoće $P_{m,n}$ potrebno je obrazovati sve moguće proizvode koji sadrže m simbola p i $n - m$ simbola q sa različitim indeksima. Zbog toga se obrazuje sledeća funkcija:

$$Q(t) = (q + p_1 \cdot t) \cdot \dots \cdot (q + p_n \cdot t) = \prod (q + p_i \cdot t), \quad i = 1, \dots, n,$$

Gde je t proizvoljan realan parametar. Za nalaženje koeficijenta t^m u datom proizvodu potrebno je izvršiti sva množenja i svesti sve članove sa istim stepenom od t . Tako se dolazi do teoreme da je verovatnoća da se u n nezavisnih eksperimenata, događaj A čija je verovatnoća realizacije u i -tom eksperimentu jednaka p_i ($i = 1, 2, \dots, n$), realizuje m puta jednaka koeficijentu uz t^m posle množenja datog proizvoda, pa važi jednakost:

$$\prod (q + p_i \cdot t) = \sum P_{i,n} \cdot t^i.$$

Leva i desna strana jednakosti predstavljaju istu funkciju samo što je na levoj strani predstavljena kao proizvod, a na desnoj kao polinom posle množenja i svodjenja koeficijenata sa istim stepenom od t . Množenjem leve strane, razvijanjem zbira na desnoj i izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene od t dobiju se verovatnoće $P_{0,n}, P_{1,n}, \dots, P_{n,n}$, da se u n nezavisnih eksperimenata događaj A ne realizuje nijedanput, realizuje jedanput, ..., realizuje n puta.

Za dati primer sa četiri kamiona postavlja se sledeća jednačina:

$$\prod (q + p_i \cdot t) = \sum P_{i,4} \cdot t^i.$$

Leva strana jednačine je:

$$\begin{aligned} \prod (q + p_i \cdot t) &= (q + p_1 \cdot t) \cdot (q + p_2 \cdot t) \cdot (q + p_3 \cdot t) \cdot (q + p_4 \cdot t) = \\ &= q_1 q_2 q_3 q_4 + (q_1 q_2 (p_3 q_4 + q_3 p_4) + q_1 q_3 (p_2 q_4 + q_2 p_4)) \cdot t + \\ &+ (q_1 q_2 p_3 p_4 + (p_1 q_2 + q_2 p_1) \cdot (p_3 q_4 + q_3 p_4) + p_1 p_2 q_3 q_4 \cdot t^2) + \\ &+ (p_1 p_2 (p_3 q_4 + q_3 p_4) + p_1 p_2 (p_3 q_4 + q_3 p_4)) \cdot t^3 + p_1 p_2 p_3 p_4 \cdot t^4, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Desna strana je:

$$\sum P_{i,4} \cdot t^i = P_{0,4} + P_{1,4} \cdot t + P_{2,4} \cdot t^2 + P_{3,4} \cdot t^3 + P_{4,4} \cdot t^4, \quad i = 0, \dots, 4.$$

Transportni deo diskontinualnog sistema sastoji se od četiri kamiona koji su međusobno nezavisni u vremenu t rada. Pouzdanost (verovatnoća rada) svakog kamiona je p_i . Verovatnoća otkaza je $q_i = 1 - p_i$, ($i = 1, 2, 3, 4$). Verovatnoće rada elemenata sistema su:

- Svi kamioni rade

$$P_{4,4} = p_1 p_2 p_3 p_4,$$

- Tri kamiona rade

$$P_{3,4} = q_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 q_4,$$

- Dva kamiona rade

$$P_{2,4} = q_1 q_2 p_3 p_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + p_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4,$$

- Jedan kamion radi

$$P_{1,4} = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4,$$

- Ne radi ni jedan kamion

$$P_{0,4} = 1 - (P_{1,4} + P_{2,4} + P_{3,4} + P_{4,4}).$$

Za verovatnoće rada kamiona $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0,9$ i verovatnoće otkaza $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0,1$, dobijaju se sledeće vrednosti realizacija:

$$P_{4,4} = 0,6561$$

$$P_{3,4} = 0,2916$$

$$P_{2,4} = 0,0486$$

$$P_{1,4} = 0,0036$$

$$P_{0,4} = 0,0001$$

Ukoliko se u stohastički model ugradi pouzdanost onda je uz svodjenje sume na jedinicu, verovatnoća raspodele nekog broja kamiona u bilo kojoj tački opsluživanja u sistemu se dobija iz izraza:

$$P_{(\text{broj u sistemu} > x)} = \sum (q/b)^n \cdot k! R_n \cdot P_0 / (k - n)!, \quad n = x + 1, \dots, k,$$

$$P_0 + P_1 + \dots + P_k = 1.$$

Unošenjem vrednosti datih u primeru dobija se verovatnoća raspodele više od jednog kamiona u sistemu koja iznosi: $P_{n>1} = 0,9987$ pa se konačno dobija sledeći kapacitet sistema: $Q_{sp} = 677$ t/h.

Sagledavanjem rezultata modela datih u Tabeli 1., uočljivo je da su razlike izuzetno male i praktično ne odstupaju više od 3%. Uporedno dobijeni kapaciteti ukazuju da se do dobrih rezultata može doći korišćenjem jednostavnih proračuna kod relativno malih površinskih kopova koji su i najprisutniji u eksploataciji gline.

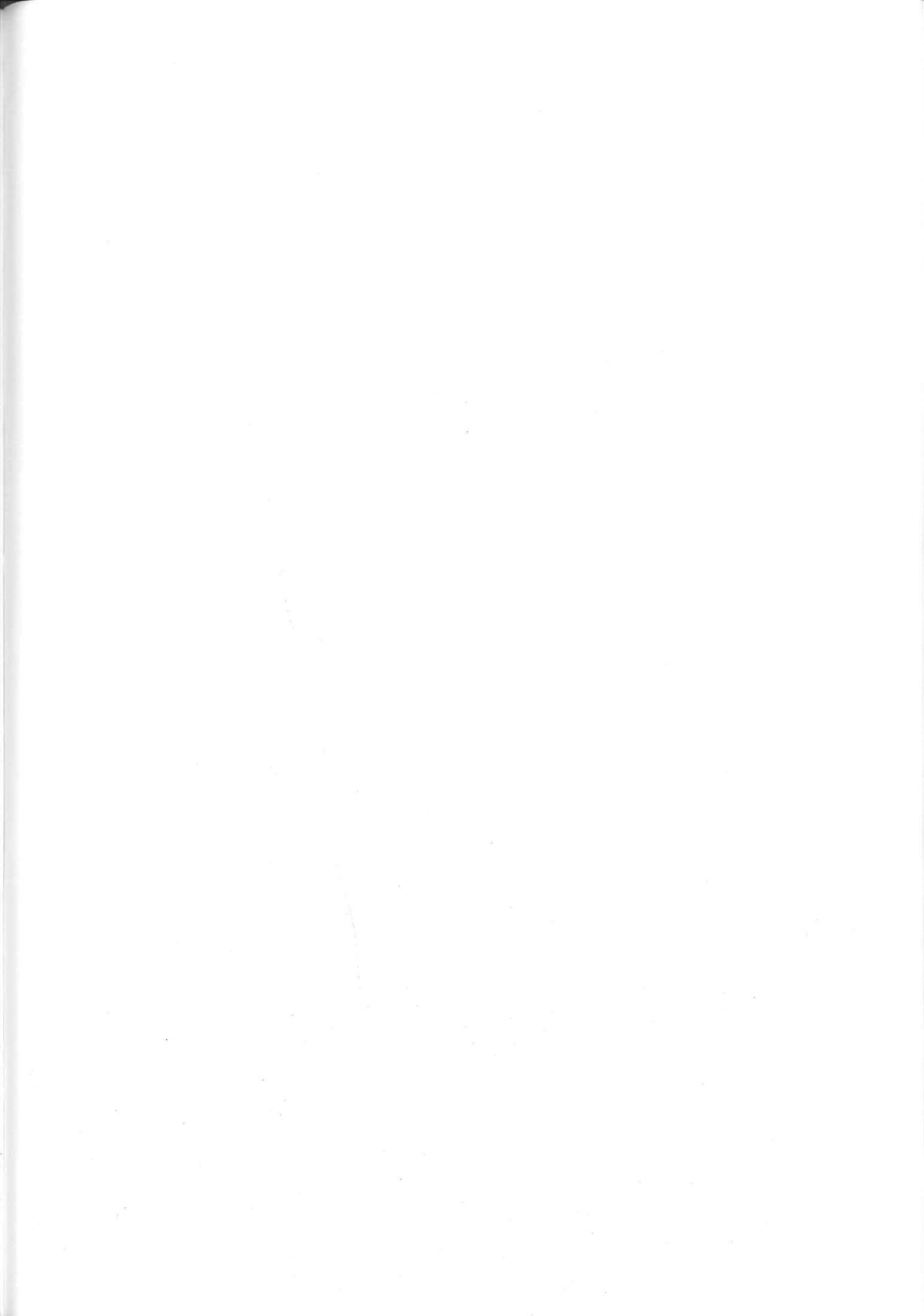
Tabela 1.

Kapacitet	Deterministički model	Stohastički model	Odstupanje (%)	Broj kamiona u sistemu
Q_{max}	1000	965	- 3,6	2,7
Q_{teh}	750	738	- 1,6	3,0
Q_0	675	691	+ 2,4	3,1
Q_{sk}	-	678	+ 0,4	2,8
Q_{sp}	-	677	+ 0,2	-

Praksa je pokazala da je uvođenje parametara pouzdanosti i simulacija rada u modelu sa ograničenim brojem kamiona u sistemu složen i osetljiv posao. Komplikovana situacija se brzo može pojaviti na utovaru i početni uslovi se moraju postaviti pre analize uvođenjem determinističkog broja kamiona čiji se kapacitet i vreme rada simulacijom koriguje u realniju vrednost. Verovatnoće stanja sistema se mogu izračunati ukoliko je broj kamiona mali ali se i tada mogu zbog nagomilavanja dobiti pogrešni rezultati. Zbog toga su i ove analize za složene diskontinualne sisteme samo približne.

LITERATURA

1. Milošević V.; Osnovi računa verovatnoće, Ekonomski Fakultet, Beograd, 1973. (Str. 123-128)
2. Moder J.; Elmaghraby S.; Handbook of Operations Research, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1978. (Str. 391-419)
3. Pavlović V.; Pouzdanost diskontinualnih sistema, Rudarsko-geološki Fakultet, Beograd, 1989. (Str. 118-134)



Glina

Drugo međunarodno savetovanje
o površinskoj eksploataciji glina
Požarevac, 14-16. maj 1998. godine

INTERPOLACIONE FORMULE U POVRŠINSKOJ EKSPLOATACIJI INTERPOLATION FORMULAS IN OPENCAST MINING

Dragomir Simeunović¹

APSTRAKT

U ovom radu razmatrane su neke interpolacione formule koje se mogu primeniti u površinskoj eksploataciji.

ABSTRAKT

In this paper some interpolation formulas, which could be applied in opencast mining, are considered.

UVOD

Neka su za datu funkciju $f(x)$ u tačkama x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) koje pripadaju intervalu $[a, b]$ poznate njene vrednosti $f(x_i)$. Funkcija $F(x)$, takva da je

$$F(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (1)$$

naziva se interpolaciona funkcija funkcije $f(x)$.

Za interpolacionu funkciju $F(x)$ uzima se funkcija oblika

$$F(x) = F(x; q_0, q_1, \dots, q_n) \quad (2)$$

¹ Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko-geološki fakultet u Beogradu

u kojoj se parametri a_0, a_1, \dots, a_n određuju iz uslova

$$F(x_i; a_0, a_1, \dots, a_n) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (3)$$

Tačke x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) nazivaju se interpolacioni čvorovi. Čvorovi x_i su takvi da je

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b. \quad (4)$$

Jedan opštiji problem interpolacije javlja se kada su pored vrednosti funkcije $f(x)$ u interpolacionim čvorovima poznate i vrednosti njenih izvoda.

Za interpolacionu funkciju $F(x)$ najčešće se uzima algebarski polinom

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (5)$$

koji zadovoljava uslove

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (6)$$

U površinskoj eksploataciji interpolacija se uglavnom koristi kod proučavanja karakteristika ležišta mineralnih sirovina.

LAGRANGE-ov INTERPOLACIONI POLINOM

Polinom (5) koji zadovoljava uslove (6) je jedinstven i može se predstaviti u obliku

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x), \quad (7)$$

gde je

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (8)$$

Polinomi (8) koji su stepena ne višeg od n nazivaju se Lagrange-ovi polinomi. Za njih važe sledeća svojstva:

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{za } k = i \\ 0 & \text{za } k \neq i \end{cases} \quad (9)$$

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1 \quad \text{za svako } x. \quad (10)$$

Kako je svaki Lagrange-ov polinom $L_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) stepena ne višeg od n , to je i polinom $P_n(x)$ iz (7) takođe stepena ne višeg od n . Zbog (9) je

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (11)$$

Zato polinom (7) predstavlja jedan interpolacioni polinom za funkciju $f(x)$.

Formula (7) naziva se Lagrange-ova interpolaciona formula, a polinom (7) Lagrange-ov interpolacioni polinom.

Primer. Za podatke

x	1	2	4
f(x)	2	1	6

Lagrange-ov interpolacioni polinom je

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(x_0) \cdot \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)} + f(x_1) \cdot \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2)} + f(x_2) \cdot \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1)} \\
 &= 2 \cdot \frac{(x-2) \cdot (x-4)}{(1-2) \cdot (1-4)} + 1 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-4)}{(2-1) \cdot (2-4)} + 6 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(4-1) \cdot (4-2)},
 \end{aligned}$$

tj.

$$P_2(x) = \frac{7x^2 - 27x + 32}{6}. \quad (12)$$

Na primer, za $x = 3$ iz (12) dobijamo $P_2(3) = 2.333$.

Neka je d bilo koja realna konstanta. Tada se polinom (7) može napisati u obliku

$$P_n(x) = d + \sum_{i=0}^n (f(x_i) - d) L_i(x). \quad (13)$$

Jednakost (13) dokazuje se na osnovu svojstva (10).

Za $d = f(x_0)$ polinom (13) svodi se na

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_0)) L_i(x). \quad (14)$$

Iz (14) za $n = 1$ dobijamo

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} (f(x_1) - f(x_0)), \quad (15)$$

što predstavlja formulu za linearnu interpolaciju.

Za $n = 0$ polinom (7) postaje $P_0(x)$, pri čemu se uzima

$$P_0(x) = f(x_0) \text{ za svako } x. \quad (16)$$

Interpolacioni polinom $P_n(x)$ može se predstaviti i u obliku

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} (f(x_n) - P_{n-1}(x_n)), \quad (17)$$

gde je $P_{n-1}(x)$ interpolacioni polinom koji je dobijen na osnovu podataka o funkciji $f(x)$ u čvorovima x_0, x_1, \dots, x_{n-1} i gde je $P_{n-1}(x_n)$ vrednost polinoma $P_{n-1}(x)$ u čvoru x_n .

Imajući u vidu (16), iz (17) se za $n = 1$ dobija

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (f(x_1) - f(x_0)). \quad (18)$$

Formule (13), (14), (17) i (18) mogu se u praksi koristiti za nalaženje interpolacionog polinoma $P_n(x)$.

Kod prethodnog primera, prema datim podacima za prva dva čvora, primenom formule (18) dobijamo:

$$P_1(x) = 2 + \frac{x-1}{2-1}(1-2) = 2 - (x-1), \text{ odakle je } P_1(4) = -1.$$

Sada, za date podatke, primenom formule (17) dobijamo

$$P_2(x) = 2 - (x-1) + \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} \cdot (6+1) = 2 - (x-1) + (x-1)(x-2) \cdot \frac{7}{6} = \frac{7x^2 - 27x + 32}{6}.$$

HERMITE-OVA INTERPRETACIJA

Sada ćemo posmatrati interpolaciju kada su za funkciju $f(x)$ u čvorovima poznate njene vrednosti i vrednosti njenih izvoda.

Neka su za funkciju $f(x)$ poznate sledeće vrednosti:

$$f(x_i), f'(x_i), \dots, f^{(k_i-1)}(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, m) \quad (19)$$

Ako broj poznatih podataka o funkciji $f(x)$ označimo sa $n + 1$, tada je

$$n + 1 = k_0 + k_1 + \dots + k_m.$$

Broj k_i naziva se višestrukost čvora x_i . Interpolacija funkcije $f(x)$ algebarskim polinomom u ovom slučaju, poznata je kao Hermite-ova interpolacija. Kako broj podataka o funkciji $f(x)$ iznosi $n + 1$, Hermite-ov interpolacioni polinom u opštem slučaju je polinom:

$$H_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (20)$$

koji zadovoljava uslove

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, k_i - 1) \quad (21)$$

Određivanje koeficijenata polinoma $H_n(x)$ iz sistema jednačina (21) može biti dosta komplikovano. Zbog toga se u praksi Hermite - ov interpolacioni polinom najčešće traži u obliku

$$H_n(x) = P_m(x) + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m) H_k(x), \quad (22)$$

gde je $P_m(x)$ Lagrange-ov interpolacioni polinom dobijen na osnovu poznatih parova $(x_i, f(x_i))$, $(i = 0, 1, \dots, m)$ o funkciji $f(x)$ i gde je $H_k(x)$ za sada nepoznati polinom, čiji je stepen takav da je $m + 1 + k = n$. U ovom slučaju potrebno je odrediti polinom $H_k(x)$. Za nalaženje Lagrange-ovog interpolacionog polinoma $P_m(x)$, za koji je $P_m(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \dots, m)$ koristi se $m + 1$ podataka o funkciji $f(x)$. Za određivanje polinoma $H_k(x)$ koriste se preostali podaci o vrednostima izvoda funkcije $f(x)$. Prema interpolacionim zahtevima (21) potrebne uslove za određivanje polinoma $H_k(x)$ dobijamo diferenciranjem polinoma (22) uz korišćenje podataka (21) o izvodima funkcije $f(x)$ u

čvorovima x_i . Na ovaj način dolazimo do podataka o polinomu $H_k(x)$ koji su opet tipa (21), a koji se sada odnose na polinom $H_k(x)$. Određivanje polinoma $H_k(x)$ obavlja se na isti način kao što je to činjeno za $H_n(x)$. Pri pojavi polinoma $H_0(x)$, stavlja se $H_0(x) = a$, gde je a konstanta, koja se određuje iz odgovarajućeg interpolacionog uslova.

Nalaženje Hermite-ovog interpolacionog polinoma prikazaćemo na sledećem primeru.

Primer: Naći Hermite-ov interpolacioni polinom za funkciju $f(x)$ čije su vrednosti date u tabeli 1.

tabela 1.

x	0	1	2
f(x)	6	2	4
f'(x)	-3		1
f''(x)	10		

tabela 2.

x	0	2
$H_2(x)$	2	-2
$H_2'(x)$	4	

Pošto je dato šest podataka o funkciji $f(x)$, Hermite-ov interpolacioni polinom u opštem slučaju biće algebarski polinom petog stepena, koji ćemo označiti sa $H_5(x)$. Ovde je $m + 1 = 3$, tj. $m = 2$; $n + 1 = 6$, tj. $n = 5$. Dalje je $k + m + 1 = n$, tj. $k + 3 = 5$, što znači $k = 2$. Zato je prema (22)

$$H_5(x) = P_2(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)H_2(x), \quad (23)$$

gde je $P_2(x)$ Lagrange-ov interpolacioni polinom koji se dobija na osnovu vrednosti funkcije $f(x)$ u tačkama $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Imamo

$$P_2(x) = 6 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 4 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = 3x^2 - 7x + 6.$$

Prema (23) sada je

$$H_5(x) = 3x^2 - 7x + 6 + x(x-1)(x-2)H_2(x), \quad (24)$$

gde je $H_2(x)$ za sada nepoznati polinom.

Diferenciranjem (24) dobijamo

$$H_5'(x) = 6x - 7 + (3x^2 - 6x + 2)H_2(x) + (x^3 - 3x^2 + 2x)H_2'(x), \quad (25)$$

$$H_5''(x) = 6 + (6x - 6)H_2(x) + 2(3x^2 - 6x + 2)H_2'(x) + (x^3 - 3x^2 + 2x)H_2''(x). \quad (26)$$

Za $x = 0$ i $x = 2$ iz (25) dobijamo

$$H_5'(0) = -7 + 2H_2(0) \quad \text{i} \quad H_5'(2) = 5 + 2H_2(2). \quad (27)$$

Korišćenjem uslova (21) i podataka iz tabele 1., prema kojima je

$$H_5'(0) = f'(0) = -3 \quad \text{i} \quad H_5'(2) = f'(2) = 1$$

jednačine (27) svode se na

$$-3 = -7 + 2H_2(0) \quad \text{i} \quad 1 = 5 + 2H_2(2)$$

odakle je

$$H_2(0) = 2, \quad H_2(2) = -2. \quad (28)$$

Za $x = 0$ iz (26) dobijamo

$$H_5''(0) = 6 - 6H_2(0) + 4H_2'(0) \quad (29)$$

Imajući u vidu (28), uslove (21) i podatke iz tebele 1., jednačina (29) se svodi na

$$10 = 6 - 12 + 4H_2'(0),$$

odakle je

$$H_2'(0) = 4. \quad (30)$$

Sada, prema (28) i (30) za $H_2(x)$ imamo podatke prikazane u tabeli 2.

Slično nalaženju polinoma $H_5(x)$, prema podacima iz tabele 2., polinom $H_2(x)$ tražimo u

obliku

$$H_2(x) = P_1(x) + x(x-2)\alpha \quad (31)$$

gde je

$$P_1(x) = 2 \cdot \frac{x-2}{0-2} - 2 \cdot \frac{x-0}{2-0} = -2x + 2$$

i gde je α nepoznata konstanta, tj.

$$H_2(x) = -2x + 2 + x(x-2)\alpha. \quad (32)$$

Iz (32) je

$$H_2'(x) = -2 + (2x-2)\alpha. \quad (33)$$

Za $x = 0$ i zbog $H_2'(0) = 4$ iz (33) dobijamo

$$4 = -2 - 2\alpha$$

odakle je

$$\alpha = -3.$$

Sada je prema (32)

$$H_2(x) = -3x^2 + 4x + 2. \quad (34)$$

Imajući u vidu (34), iz (24) dobijamo

$$H_5(x) = 3x^2 - 7x + 6 + x(x-1)(x-2)(-3x^2 + 4x + 2),$$

tj.

$$H_5(x) = -3x^5 + 13x^4 - 16x^3 + 5x^2 - 3x + 6,$$

što predstavlja Hermite-ov interpolacioni polinom za funkciju $f(x)$.

LITERATURA

1. Hamming, R. W.: Numerical Methods for Scientists and Engineers, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York, San Francisco, Toronto, London, 1962.
2. Kašanin, R.: Viša Matematika I, Sarajevo, 1969.
3. Milovanović, G.: Numerička analiza II deo, Naučna knjiga, Beograd, 1985.



PRIMENA NEKIH INTERPOLACIONIH FORMULA ZA FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH U ZAŠTITI ŽIVOTNE SREDINE

APPLICATION OF SOME INTERPOLATION FORMULAS FOR FUNCTIONS OF MORE VARIABLES IN ENVIRONMENTAL PROTECTION

D. Simeunović

Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

APSTRAKT: U ovom radu razmatrana je primena nekih interpolacionih formula za funkcije više promenljivih u zaštiti životne sredine.

ABSTRACT: In this paper we consider the application of some interpolation formulas for the functions of more variables in environmental protection.

UVOD

Interpolacija kao jedan vid aproksimacije može se koristiti u zaštiti životne sredine pri praćenju raznih pojava. Primeri takvih pojava su zapašenost i širenje materija sa deponija po okolnom prostoru.

U ovom radu razmatrane su neke interpolacione formule za funkcije više promenljivih koje se mogu primeniti u zaštiti životne sredine.

Interpolacija funkcija od dve promenljive

Neka su za funkciju $u = f(x, y)$ u datim tačkama $M_{ij}(x_i, y_j)$ ($i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n$) koje pripadaju oblasti $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ ravni XOY poznate njene vrednosti

$$f(x_i, y_j) = u_{ij} \quad (i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n) \quad (1)$$

Funkcija $v = F(x, y)$ takva da je

$$F(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = u_{ij} \quad (i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n) \quad (2)$$

naziva se interpolaciona funkcija funkcije $u = f(x, y)$. Tačke (x_i, y_j) ($i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n$) nazivaju se interpolacioni čvorovi. Čvorovi su takvi da je

$$\begin{aligned} a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b, \\ c \leq y_0 < y_1 < \dots < y_n \leq d. \end{aligned} \quad (3)$$

Za interpolacionu funkciju $v = F(x, y)$ najčešće se uzima polinom sa dve promenljive x i y oblika

$$P_{m,n}(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \quad (4)$$

koji zadovoljava uslove

$$P_{m,n}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = u_{ij} \quad (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n). \quad (5)$$

Polinom (4) koji zadovoljava uslove (5) može se predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} P_{m,n}(x, y) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n u_{ij} L_i(x) L_j(y) = \\ &= \sum_{i=0}^m L_i(x) \left(\sum_{j=0}^n u_{ij} L_j(y) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

gde je

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_m)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_m)} \quad (7)$$

$$L_j(y) = \frac{(y - y_0) \dots (y - y_{j-1})(y - y_{j+1}) \dots (y - y_n)}{(y_j - y_0) \dots (y_j - y_{j-1})(y_j - y_{j+1}) \dots (y_j - y_n)} \quad (8)$$

Polinomi (7) i (8) nazivaju se Lagrangeovi polinomi. Za njih važe sledeća svojstva:

$$L_i(x_s) = \begin{cases} 1 & \text{za } s = i \\ 0 & \text{za } s \neq i \end{cases} \quad (9)$$

$$\sum_{i=0}^m L_i(x) = 1 \quad \text{za svako } x, \quad (10)$$

$$L_j(y_t) = \begin{cases} 1 & \text{za } t = j \\ 0 & \text{za } t \neq j \end{cases} \quad (11)$$

$$\sum_{j=0}^n L_j(y) = 1 \text{ za svako } y, \quad (12)$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n L_i(x)L_j(y) = 1 \text{ za svako } x \text{ i } y. \quad (13)$$

Zbog (9) i (11) je

$$P_{m,n}(x_i, y_j) = u_{ij} = f(x_i, y_j) \quad (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n). \quad (14)$$

Zato polinom (6) predstavlja jedan interpolacioni polinom za funkciju $u = f(x, y)$.

Formula (6) je interpolaciona formula Lagrangeovog tipa za funkciju $u = f(x, y)$ od dve promenljive x i y .

Ako čvorovi (x_i, y_j) u ravni XOY obrazuju pravougaonu mrežu, tj. ako je

$$x_i = x_0 + id_1 \quad (i = 0, 1, \dots, m), \quad y_j = y_0 + jd_2 \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad (15)$$

gde su d_1 i d_2 konstante $\neq 0$, tada je formula (6) jednostavnija. U ovom slučaju broj čvorova mreže iznosi $(m+1)(n+1)$, gde je $m+1$ broj različitih vrednosti promenljive x , a $n+1$ broj različitih vrednosti promenljive y . U praksi se najčešće posmatra ovaj slučaj i pri tome uzima $m = n$.

Vrednosti funkcije $u = f(x, y)$ u tačkama (x_i, y_j) obično se prikazuju u vidu sledeće tabele.

Tabela 1

y \ x	x_0	x_1	$x_2 \dots$
y_0	u_{00}	u_{10}	$u_{20} \dots$
y_1	u_{01}	u_{11}	$u_{21} \dots$
y_2	u_{02}	u_{12}	$u_{22} \dots$
\vdots	\vdots	\vdots	$\vdots \dots$
\vdots	\vdots	\vdots	$\vdots \dots$

Primer: Na jednom ravnom terenu u čijoj se blizini nalaze izvori prašine postavljeni su taložnici za prašinu u tačkama koje čine pravougaonu mrežu. Posle određenog vremena u posmatranim tačkama - čvorovima dobijene su količine nataložene prašine u mg/m^2 koje su prikazane u tabeli 2, gde su vrednosti promenljivih x i y date u km. Na osnovu podataka iz tabele 2 primenom interpolacione formule (6) odrediti količinu nataložene prašine u tački M (1.6, 1.3).

Tabela 2

y \ x	1.0	1.4	1.8
1.2	10	12	8
1.4	7	9	6
1.6	6	5	3

Rešenje: U ovom slučaju je $m+1 = 3$, tj. $m=2$ i $n+1=3$, tj. $n=2$ što znači $m=n=2$, pa se formula (6) svodi na

$$P_{2,2}(x, y) = \sum_{i=0}^2 L_i(x) \left(\sum_{j=0}^2 u_{ij} L_j(y) \right)$$

iz koje u tački M(1.6, 1.3), tj. za $x=1.6$, $y=1.3$ dobijamo

$$\begin{aligned} P_{2,2}(1.6, 1.3) &= -\frac{0.04}{0.32} \left(10 \cdot \frac{0.03}{0.08} + 7 \cdot \frac{0.03}{0.04} - 6 \cdot \frac{0.01}{0.08} \right) \\ &+ \frac{0.12}{0.16} \left(12 \cdot \frac{0.03}{0.08} + 9 \cdot \frac{0.03}{0.04} - 5 \cdot \frac{0.01}{0.08} \right) \\ &+ \frac{0.12}{0.32} \left(8 \cdot \frac{0.03}{0.08} + 6 \cdot \frac{0.03}{0.04} - 3 \cdot \frac{0.01}{0.08} \right) = 9.609. \end{aligned}$$

Interpolacija funkcija od tri i više promenljivih

Analogno interpolacionim formulama za funkcije od dve promenljive, mogu se dobiti interpolacione formule za funkcije od više promenljivih. Ovde ćemo navesti interpolacionu formulu za funkciju $w = F(x, y, z)$ od tri promenljive x, y, z .

Ako su u čvorovima (x_i, y_j, z_k) poznate vrednosti funkcije $w = F(x, y, z)$, tj. ako je

$$F(x_i, y_j, z_k) = w_{ijk} \quad (16)$$

tada imamo interpolacionu formulu

$$P_{m,n,r}(x, y, z) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^r w_{ijk} L_i(x) L_j(y) L_k(z), \quad (17)$$

gde su $L_i(x)$, $L_j(y)$ i $L_k(z)$ Lagrangeovi polinomi oblika (7) i (8).

Ako su čvorovi (x_i, y_j, z_k) takvi da je

$$x_i = x_0 + id_1 \quad (i = 0, 1, \dots, m), \quad y_j = y_0 + jd_2 \quad (j = 0, 1, \dots, n),$$

$$z_k = z_0 + kd_3 \quad (k = 0, 1, \dots, r)$$

gde su d_1 , d_2 i d_3 konstante $\neq 0$, tada je formula (17) jednostavnija.

ZAKLJUČAK


Navedene interpolacione formule mogu se primenjivati za određivanje posmatranih veličina i na onim mestima - tačkama gde nisu vršena ispitivanja, što omogućava bolje sagledavanje i praćenje raznih pojava u datoj životnoj sredini.

LITERATURA

(1) B. P. Demidovich and I. A. Maron: Computational mathematics, translated from russian by George Yankovsky, Mir publishers Moscow, Third printing 1981.

Jugoslovenski komitet za površinsku eksploataciju / Yugoslav Opencast Mining Committee
EPS - Direkcija za proizvodnju uglja / EPS - Directorate for Coal Production
Rudarsko-geološki fakultet Univerziteta u Beogradu / Faculty of Mining and Geology in Belgrade
Rudarski institut, Beograd / The Mining Institute in Belgrade
Rudarsko-geološki fakultet Univerziteta u Skoplju / Faculty of Mining and Geology in Skopje
Elektrostanstvo Makedonije / The Electric Power Industry of Macedonia
National Technical University of Athens
Institute of Mining Engineering - The Technical University of Wrocław
Centre for Solid Fuels Technology and Applications, Athens

Prvo međunarodno savetovanje
o površinskoj eksploataciji uglja

Ugalj '98  **Coal '98**

The First International Conference
on Coal Opencast Exploitation

Beograd
24-26. 09. 1998.

**Prvo međunarodno savetovanje
o površinskoj eksploataciji uglja "Ugalj '98"**

**The First International Conference on
Coal Opencast Exploitation "Coal '98"**

Izdavač

Jugoslovenski komitet za
površinsku eksploataciju

Publisher

Yugoslav Opencast Mining Committee

Urednik / Editor

Prof. dr Vladimir Pavlović

Tehnička priprema / Technical design

Aleksandra Jakšić, dipl. inž. rud.

Saša Stepanović, dipl. inž. rud.

Grafičko rešenje korica

Nenad Pavlović

Tiraž / Copies

300 primeraka

Štampa

GTP "Grafomark" - Beograd

® Sva prava zadržava izdavač

® All rights reserved

Generalni sponzor

EPS - Direkcija za proizvodnju uglja

General sponsor

EPS - Directorate for Coal Production

PRVO MEĐUNARODNO SAVETOVANJE
O POVRŠINSKOJ EKSPLOATACIJI UGLJA

Ugalj '98

JUGOSLOVENSKI KOMITET ZA POVRŠINSKU EKSPLOATACIJU
SAVEZA INŽENJERA I TEHNIČARA JUGOSLAVIJE



THE FIRST INTERNATIONAL CONFERENCE
ON COAL OPENCAST EXPLOITATION

Coal '98

YUGOSLAV OPENCAST MINING COMMITTEE
ASSOCIATION OF ENGINEERS AND TECHNICIANS OF YUGOSLAVIA

**PRIMENA PRONYEVE INTERPOLACIJE PRI IZUČAVANJU
KARAKTERISTIKA RADNE SREDINE POVRŠINSKIH KOPOVA
UGLJA**

**APPLICATION OF PRONY'S INTERPOLATION IN THE STUDY OF
CHARACTERISTICS OF WORKING ENVIRONMENT OF COAL
OPENCAST MINES**

*Dragomir Simeunović*¹

APSTRAKT

U ovom radu posmatrana je Pronyeva interpolacija koja se može primeniti pri izučavanju karakteristika radne sredine površinskih kopova uglja.

ABSTRACT

This paper deals with the application of Prony's interpolation in the study of characteristics of working environment of coal opencast mines.

¹ Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

Pronyeva interpolacija, kao jedan vid aproksimacije, definisana je za slučaj parnog broja interpolacionih čvorova koji su raspoređeni na jednakim rastojanjima. Ona se dobija iz rešenja jedne homogene linearne diferencne jednačine reda n sa konstantnim koeficijentima. Zbog toga ćemo najpre reći nešto o homogenoj linearnoj diferencnoj jednačini reda n sa konstantnim koeficijentima.

Jednačina

$$F(k+n) + a_{n-1}F(k+n-1) + \dots + a_1F(k+1) + a_0F(k) = 0, \quad (1)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

gde je $F(k)$ nepoznata funkcija promenljive k i gde su a_0, a_1, \dots, a_{n-1} realne konstante, naziva se homogena linearna diferencna jednačina reda n sa konstantnim koeficijentima.

Ako je $F_1(k)$ rešenje jednačine (1), tada je njeno rešenje i funkcija $CF_1(k)$, gde je C proizvoljna konstanta.

Ako su $F_1(k), F_2(k), \dots, F_n(k)$ rešenja jednačine (1), tada je njeno rešenje i funkcija

$$F(k) = C_1F_1(k) + C_2F_2(k) + \dots + C_nF_n(k), \quad (2)$$

gde su C_1, C_2, \dots, C_n proizvoljne konstante.

Ako su $F_1(k), F_2(k), \dots, F_n(k)$ linearno nezavisna rešenja jednačine (1), tada (2) predstavlja opšte rešenje jednačine (1).

Rešenja $F_1(k), F_2(k), \dots, F_n(k)$ jednačine (1) koja su linearno nezavisna predstavljaju njena osnovna rešenja.

Uvođenjem smene

$$F(k) = r^k, \quad (3)$$

odakle je

$$F(k+t) = r^{k+t}, \quad t = 0, 1, \dots, n,$$

gde je r konstanta koja se naknadno određuje, jednačina (1) postaje

$$r^{k+n} + a_{n-1}r^{k+n-1} + \dots + a_1r^{k+1} + a_0r^k = 0,$$

koja se posle deljenja sa r^k svodi na jednačinu

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0. \quad (4)$$

Jednačina (4) je algebarska jednačina stepena n po nepoznatoj r i naziva se karakteristična jednačina jednačine (1).

Jednačina (4) može imati sve korene r_1, r_2, \dots, r_n realne i različite. U ovom slučaju osnovna rešenja jednačine (1), prema (3), su

$$F_1(k) = r_1^k, F_2(k) = r_2^k, \dots, F_n(k) = r_n^k,$$

a njeno opšte rešenje je

$$F(k) = C_1r_1^k + C_2r_2^k + \dots + C_nr_n^k. \quad (5)$$

Jednačina (4) može imati sve korene realne, među kojima može biti i višestrukih korena. Ako je r_1 njen koren višestrukosti s , tada tom korenu odgovara s osnovnih rešenja jednačine (1). Ta rešenja su:

$$r_1^k, kr_1^k, \dots, k^{s-1}r_1^k.$$

Jednačina (4) može imati neke ili sve kompleksne korene među kojima može biti i višestrukih korena. Ako je njen koren $r_1 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, tada je njen koren i $r_2 = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$. Ako je pri tome r_1 koren višestrukosti s , tada je i r_2 koren takođe višestrukosti s . Ovim korenima odgovara $2s$ osnovnih rešenja jednačine (1). Ta rešenja su:

$$\begin{aligned} \rho^k \cos k\theta, \quad k\rho^k \cos k\theta, \dots, k^{s-1}\rho^k \cos k\theta, \\ \rho^k \sin k\theta, \quad k\rho^k \sin k\theta, \dots, k^{s-1}\rho^k \sin k\theta \end{aligned}$$

Primer 1. Naći rešenje diferencne jednačine

$$F(k+2) - 5F(k+1) + 6F(k) = 0 \quad (a)$$

koje zadovoljava uslove $F(0) = 1$ i $F(1) = -4$.

Rešenje. Karakteristična jednačina jednačine (a) je

$$r^2 - 5r + 6 = 0,$$

čiji su koreni $r_1 = 3$ i $r_2 = 2$. Zato su osnovna rešenja jednačine (a)

$$F_1(k) = r_1^k = 3^k \quad i \quad F_2(k) = r_2^k = 2^k,$$

a njeno opšte rešenje je

$$F(k) = C_1 \cdot 3^k + C_2 \cdot 2^k. \quad (a_1)$$

Kako je za $k=0$, $F(0) = 1$ i za $k=1$, $F(1) = -4$, to iz (a₁) imamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ -4 &= 3C_1 + 2C_2 \end{aligned}$$

odakle dobijamo $C_1 = -6$, $C_2 = 7$. Zamenom ovih vrednosti za C_1 i C_2 u (a₁) dobijamo traženo rešenje jednačine (a)

$$F(k) = -6 \cdot 3^k + 7 \cdot 2^k.$$

Primer 2. Diferencna jednačina

$$F(k+2) - 6F(k+1) + 9F(k) = 0 \quad (b)$$

ima karakterističnu jednačinu

$$r^2 - 6r + 9 = 0,$$

čiji su koreni $r_1 = 3$ i $r_2 = 3$, što znači da karakteristična jednačina jednačine (b) ima jedan dvostruki realan koren $r_1 = 3$. Zbog toga su osnovna rešenja jednačine (b)

$$F_1(k) = r_1^k = 3^k, \quad F_2(k) = k r_1^k = k \cdot 3^k,$$

a njeno opšte rešenje je

$$F(k) = C_1 \cdot 3^k + C_2 k \cdot 3^k. \quad (b_1)$$

Primer 3. Rešiti diferencnu jednačinu

$$F(k+3) + 8F(k) = 0. \quad (c)$$

Rešenje. Karakteristična jednačina diferencijalne jednačine (c) je

$$r^3 + 8 = 0$$

koja se može napisati u obliku

$$(r+2)(r^2 - 2r + 4) = 0,$$

čiji su koreni

$$r_1 = -2, \quad r_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Osnovna rešenja jednačine (c) su

$$F_1(k) = r_1^k = (-2)^k, \quad F_2(k) = 2^k \cos \frac{k\pi}{3}, \quad F_3(k) = 2^k \sin \frac{k\pi}{3},$$

a njeno opšte rešenje je

$$F(k) = C_1(-2)^k + C_2 \cdot 2^k \cos \frac{k\pi}{3} + C_3 \cdot 2^k \sin \frac{k\pi}{3}. \quad (c_1)$$

Napomena. Pošto je

$$(-2)^k = 2^k \cos k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

opšte rešenje (c₁) jednačine (c) možemo napisati u obliku

$$F(k) = C_1 \cdot 2^k \cos k\pi + 2^k \cdot (C_2 \cos \frac{k\pi}{3} + C_3 \sin \frac{k\pi}{3}).$$

PRONYEVA INTERPOLACIJA

Neka su poznate vrednosti $f(x_k) = y_k$ date funkcije $y = f(x)$ u tačkama x_k ($k = 0, 1, \dots, 2n-1$) koje se nalaze u intervalu $[a, b]$ i pri čemu su tačke x_k raspoređene na jednakim rastojanjima h . U ovom slučaju imamo paran broj podataka (x_k, y_k) ($k = 0, 1, \dots, 2n-1$) koji iznosi $2n$. Kako je $x_k - x_{k-1} = h = \text{const}$ ($k = 1, 2, \dots, 2n-1$), smenom

$$x = x_0 + kh \tag{6}$$

podatke (x_k, y_k) možemo zameniti podacima (k, y_k) ($k = 0, 1, \dots, 2n-1$).

Na osnovu podataka (k, y_k) ($k = 0, 1, \dots, 2n-1$) možemo odrediti funkciju $F(k)$ koja zadovoljava uslove

$$F(k) = y_k \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1). \tag{7}$$

U tu svrhu formiraćemo homogenu linearnu diferencnu jednačinu reda n sa konstantnim koeficijentima

$$F(k+n) + a_{n-1}F(k+n-1) + \dots + a_1F(k+1) + a_0F(k) = 0. \tag{8}$$

Koristeći uslove (7) za $k = 0, 1, \dots, n-1$, iz (8) dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} y_0 a_0 + y_1 a_1 + \dots + y_{n-1} a_{n-1} &= -y_n \\ y_1 a_0 + y_2 a_1 + \dots + y_n a_{n-1} &= -y_{n+1} \\ \text{-----} & \\ y_{n-1} a_0 + y_n a_1 + \dots + y_{2n-2} a_{n-1} &= -y_{2n-1} \end{aligned} \tag{9}$$

za određivanje koeficijenata a_0, a_1, \dots, a_{n-1} diferencne jednačine (8). Ako je determinanta

$$\begin{vmatrix} y_0 & y_1 & \dots & y_{n-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n-1} & y_n & \dots & y_{2n-2} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{10}$$

rešenje sistema (9) po a_0, a_1, \dots, a_{n-1} je jedinstveno.

Posle određivanja koeficijenata a_0, a_1, \dots, a_{n-1} u jednačini (8) pristupamo njenom rešavanju.

Neka je

$$F(k) = C_1 F_1(k) + C_2 F_2(k) + \dots + C_n F_n(k) \tag{11}$$

opšte rešenje diferencne jednačine (8) formirane na prethodni način.

Konstante C_1, C_2, \dots, C_n u (11) možemo odrediti iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} F_1(0)C_1 + F_2(0)C_2 + \dots + F_n(0)C_n &= y_0 \\ F_1(1)C_1 + F_2(1)C_2 + \dots + F_n(1)C_n &= y_1 \\ \text{-----} & \\ F_1(n-1)C_1 + F_2(n-1)C_2 + \dots + F_n(n-1)C_n &= y_{n-1} \end{aligned}$$

koji se dobija iz (11) za $k = 0, 1, \dots, n-1$ uz korišćenje uslova $F(k) = y_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Imajući u vidu smenu (6), odakle je

$$k = \frac{x - x_0}{h}, \quad (13)$$

iz (11) dobijamo interpolacionu funkciju

$$\Phi(x) = F\left(\frac{x - x_0}{h}\right) = C_1 F_1\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + C_2 F_2\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + \dots + C_n F_n\left(\frac{x - x_0}{h}\right), \quad (14)$$

kojom je interpoliran skup podataka (x_k, y_k) , $k = 0, 1, \dots, 2n-1$.

Interpolacija dobijena na prethodni način naziva se Pronyeva (eksponencijalna) interpolacija, a funkcija $\Phi(x)$ Pronyeva interpolaciona funkcija.

Primer 1. Za skup podataka

k	0	1	2	3
x_k	1	3	5	7
y_k	6	13	29	67

odrediti Pronyevu interpolacionu funkciju.

Rešenje. Ovdje je $2n-1 = 3$, tj. $n = 2$, a korak $h = 2$. Sistem linearnih jednačina (9) postaje

$$6a_0 + 13a_1 = -29$$

$$13a_0 + 29a_1 = -67,$$

odakle dobijamo $a_0 = 6$, $a_1 = -5$. Diferencna jednačina (8) sada glasi

$$F(k+2) - 5F(k+1) + 6F(k) = 0, \quad (15)$$

čija je karakteristična jednačina

$$r^2 - 5r + 6 = 0. \quad (16)$$

Koreni jednačine (16) su $r_1 = 3$ i $r_2 = 2$. Zato su osnovna rešenja jednačine (15) $F_1(k) = 3^k$ i $F_2(k) = 2^k$, a njeno opšte rešenje je $F(k) = C_1 F_1(k) + C_2 F_2(k)$, tj.

$$F(k) = C_1 \cdot 3^k + C_2 \cdot 2^k. \quad (17)$$

Konstante C_1 i C_2 u (17) odredićemo iz uslova $F(0) = 6$ i $F(1) = 13$. Tako dobijamo jednačine

$$6 = C_1 + C_2$$

$$13 = 3C_1 + 2C_2,$$

iz kojih nalazimo $C_1 = 1$, $C_2 = 5$. Sada iz (17) za $C_1 = 1$ i $C_2 = 5$ dobijamo

$$F(k) = 3^k + 5 \cdot 2^k. \quad (18)$$

Stavljajući u (18) $k = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 1}{2}$ dobijamo Pronyevu interpolacionu funkciju

$$\Phi(x) = F\left(\frac{x-1}{2}\right) = 3 \frac{x-1}{2} + 5 \cdot 2 \frac{x-1}{2}. \quad (19)$$

Na primer, za $x = 4$, iz formule (19) dobijamo

$$\Phi(4) = F(1.5) = 19.34.$$

Primer 2. Za skup podataka

k	0	1	2	3
x_k	1	2	3	4
y_k	2	4	3	1

je $2n-1 = 3$, tj. $n = 2$, a korak $h = 1$. Sistem jednačina (9) svodi se na

$$2a_0 + 4a_1 = -3$$

$$4a_0 + 3a_1 = -1,$$

odakle dobijamo $a_0 = 0.5$ i $a_1 = -1$. U ovom slučaju diferencna jednačina (8) glasi

$$F(k+2) - F(k+1) + 0.5F(k) = 0, \quad (20)$$

a njena karakteristična jednačina je

$$r^2 - r + 0.5 = 0. \quad (21)$$

Koreni jednačine (21) su $r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$, koje ćemo napisati u trigonometrijskom obliku, pri čemu

je $r_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4})$. Zato su osnovna rešenja jednačine (20)

$F_1(k) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^k \cos \frac{k\pi}{4}$ i $F_2(k) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^k \sin \frac{k\pi}{4}$, a njeno opšte rešenje je

$F(k) = C_1 F_1(k) + C_2 F_2(k)$, tj.

$$F(k) = C_1 (\frac{\sqrt{2}}{2})^k \cos \frac{k\pi}{4} + C_2 (\frac{\sqrt{2}}{2})^k \sin \frac{k\pi}{4}. \quad (22)$$

Konstante C_1 i C_2 u (22) odredićemo iz uslova $F(0) = 2$ i $F(1) = 4$. Tako dobijamo jednačine

$$2 = C_1$$

$$4 = C_1 \cdot \frac{1}{2} + C_2 \cdot \frac{1}{2},$$

iz kojih dobijamo $C_1 = 2$ i $C_2 = 6$. U ovom slučaju (22) se svodi na

$$F(k) = 2 (\frac{\sqrt{2}}{2})^k \cos \frac{k\pi}{4} + 6 (\frac{\sqrt{2}}{2})^k \sin \frac{k\pi}{4}. \quad (23)$$

Stavljajući u (23) $k = \frac{x - x_0}{h} = x - 1$ dobijamo Pronyevu interpolacionu funkciju

$$\Phi(x) = F(x - 1) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x-1} \cos \frac{(x-1)\pi}{4} + 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x-1} \sin \frac{(x-1)\pi}{4}. \quad (24)$$

Za $x = 1.5$ iz formule (24) dobijamo $\Phi(1.5) = F(0.5) = 3.48$.

Primer 3. Za skup podataka

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	2	4	6	8	10
y_k	6	1	9	7	21	31

odrediti Pronyevu interpolacionu funkciju.

Rešenje. Ovde je $2n-1 = 5$, tj. $n = 3$, a korak $h = 2$. Sistem linearnih jednačina (9) postaje

$$\begin{aligned} 6a_0 + a_1 + 9a_2 &= -7 \\ a_0 + 9a_1 + 7a_2 &= -21 \\ 9a_0 + 7a_1 + 21a_2 &= -31, \end{aligned}$$

odakle dobijamo $a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = -2$. Diferencna jednačina (8) sada glasi

$$F(k+3) - 2F(k+2) - F(k+1) + 2F(k) = 0, \quad (25)$$

čija je karakteristična jednačina

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0. \quad (26)$$

Koreni jednačine (26) su $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = 2$.

Zato su osnovna rešenja jednačine (25)

$$F_1(k) = r_1^k = 1^k = 1, F_2(k) = r_2^k = (-1)^k = \cos k\pi, F_3(k) = r_3^k = 2^k,$$

a njeno opšte rešenje je $F(k) = C_1 F_1(k) + C_2 F_2(k) + C_3 F_3(k)$, tj.

$$F(k) = C_1 + C_2 \cos k\pi + C_3 \cdot 2^k \quad (27)$$

Konstante C_1 , C_2 i C_3 u (27) odredićemo iz uslova $F(0) = 6$, $F(1) = 1$ i $F(2) = 9$. Tako dobijamo jednačine

$$\begin{aligned} 6 &= C_1 + C_2 + C_3 \\ 1 &= C_1 - C_2 + 2C_3 \\ 9 &= C_1 + C_2 + 4C_3 \end{aligned}$$

iz kojih nalazimo $C_1 = 2$, $C_2 = 3$ i $C_3 = 1$. Sada iz (27) za $C_1 = 2$, $C_2 = 3$ i $C_3 = 1$ dobijamo

$$F(k) = 2 + 3 \cos k\pi + 2^k. \quad (28)$$

Stavljajući u (28) $k = \frac{x}{h} = \frac{x}{2}$ dobijamo Pronyevu interpolacionu funkciju

$$\Phi(x) = F\left(\frac{x}{2}\right) = 2 + 3 \cos \frac{\pi x}{2} + 2^{\frac{x}{2}}. \quad (29)$$

Na primer, za $x = 7$, iz (29) dobijamo $\Phi(7) = F\left(\frac{7}{2}\right) = 13.31$.

LITERATURA

1. R. De Prony: Essai experimentale et analytique.... J. Ec. Polytech. Paris 1(2) (1795), 24-76
2. G. Milovanović: Numerička analiza, II deo. Naučna knjiga, Beograd 1985.
3. D. Simeunović, B. Vulićević, V. Pavlović, M. Ivović: Matematika II, II deo. Ekonomski fakultet, Beograd 1978.

Cement'99

EKSTREMI FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH EXTREMES OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Dragomir Simeunović¹

APSTRAKT

U ovom radu daju se neki postupci za određivanje ekstrema funkcija više promenljivih.

ABSTRACT

This paper deals with some procedures for determination of extremes of functions of several variables.

U ovom radu daju se neki postupci za određivanje maksimuma i minimuma realne funkcije

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

od n nezavisnih promenljivih x_1, x_2, \dots, x_n koja je definisana u određenoj oblasti D .

Funkcija (1) u unutrašnjoj tački $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ oblasti D ima lokalni maksimum ako je

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) > f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

a lokalni minimum ako je

¹ Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) < f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

za sve tačke $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ koje se nalaze u neposrednoj okolini tačke M_0 .

Neka je (1) diferencijabilna funkcija. Potreban uslov da ona u unutrašnjoj tački M_0 oblasti D ima lokalni maksimum ili lokalni minimum jeste da su svi njeni parcijalni izvodi prvog reda u toj tački jednaki nuli, tj. da je

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Tačka $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ u kojoj su ispunjeni uslovi (2) naziva se stacionarna tačka funkcije f u oblasti D . Dovoljan uslov da funkcija (1) u njenoj stacionarnoj tački M_0 ima lokalni maksimum ili lokalni minimum jeste da je u toj tački njen diferencijal drugog reda različit od nule, tj. da je

$$d^2f = d^2 f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0, \quad (3)$$

pri čemu se pretpostavlja da funkcija f ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda. Ako je $d^2f > 0$, tada u tački M_0 funkcija f ima lokalni minimum čija je vrednost

$$y_{min} = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

a ako je $d^2f < 0$, tada u tački M_0 funkcija f ima lokalni maksimum čija je vrednost

$$y_{max} = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Ako je $d^2f = 0$ u tački M_0 , određivanje lokalnog maksimuma ili minimuma zahteva nalaženje totalnih diferencijala višeg reda.

Neka je funkcija f u okolini tačke M_0 oblasti D m puta diferencijabilna. Ako su u tački M_0 ispunjeni uslovi

$$df = d^2f = \dots = d^{m-1}f = 0, \quad d^m f \neq 0,$$

tada:

- 1) za m parno funkcija f u tački M_0 ima lokalni minimum ako je $d^m f > 0$, a lokalni maksimum ako je $d^m f < 0$;
- 2) za m neparno funkcija f u tački M_0 ne dostiže ni lokalni minimum ni lokalni maksimum.

KRITERIJUM SILVESTERA

Za funkciju f koja ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda njen totalni diferencijal prvog reda je

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad (4)$$

a njen totalni diferencijal drugog reda je $d^2f = d(df)$, pri čemu se iz (4) dobija

$$d^2f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j} dx_1 dx_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_j} dx_2 dx_j + \dots + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j} dx_n dx_j. \quad (5)$$

Totalni diferencijal drugog reda funkcije f posmatraćemo u njenoj stacionarnoj tački M_0 . Ako stavimo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = A_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

tada se (5) može napisati u obliku

$$d^2f = \sum_{j=1}^n A_{1j} dx_1 dx_j + \sum_{j=1}^n A_{2j} dx_2 dx_j + \dots + \sum_{j=1}^n A_{nj} dx_n dx_j \quad (7)$$

Zbog neprekidnosti parcijalnih izvoda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, što znači da je

$$A_{ij} = A_{ji}.$$

Pomoću veličina A_{ij} iz (6) obrazujmo determinantu reda n u obliku

$$D_n = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Glavni minor determinante D_n u pravcu njene glavne dijagonale su

$$M_1 = A_{11}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad M_n = D_n = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Totalni diferencijal drugog reda funkcije f u njenoj stacionarnoj tački M_0 izražen formulom (7) predstavlja jednu kvadratnu formu veličina $dx_i dx_j$, gde su A_{ij} realne konstante.

Prema kriterijumu Silvestera o pozitivnoj, odnosno negativnoj definitnosti kvadratne forme je:

$$df > 0, \quad (8)$$

ako su ispunjeni uslovi

$$M_1 > 0, \quad M_2 > 0, \dots, \quad M_n > 0 \quad (9)$$

i

$$df < 0, \quad (10)$$

ako su ispunjeni naizmenično uslovi

$$M_1 < 0, M_2 > 0, \dots, (-1)^n M_n > 0. \quad (11)$$

Ovo znači da funkcija f u stacionarnoj tački M_0 ima lokalni minimum ako su ispunjeni uslovi (9), odnosno lokalni maksimum ako su ispunjeni uslovi (11). Vrednost lokalnog minimuma odnosno lokalnog maksimuma dobija se kao

$$y = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Ako u stacionarnoj tački M_0 nije zadovoljen ni jedan od uslova (9) odnosno (11), tada funkcija f u tački M_0 nema ni lokalni minimum ni lokalni maksimum.

Zajednički naziv za lokalne minimume i lokalne maksimume funkcije f u oblasti D je lokalni ekstremi funkcije f u oblasti D .

Primer: Odrediti lokalne ekstreme funkcije

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 6x_2 - 8x_3 + 30. \quad (12)$$

Rešenje: Najpre nalazimo parcijalne izvode prvog reda funkcije (12) po nezavisnim promenljivima x_1, x_2 i x_3 . Imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 4, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 6, \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - 8. \quad (13)$$

Sada parcijalne izvode iz (13) izjednačavamo sa nulom. Dobijamo sistem jednačina

$$2x_1 - 4 = 0, 2x_2 - 6 = 0, 2x_3 - 8 = 0$$

čije je rešenje: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$. Tačka $M_0(2,3,4)$ je stacionarna tačka funkcije (12). U njoj data funkcija može imati lokalni ekstrem. Da li ona zaista u toj tački ima lokalni ekstrem, utvrdićemo pomoću znaka njenog totalnog diferencijala drugog reda u tački $M_0(2,3,4)$. U tu svrhu iz (13) nalazimo parcijalne izvode drugog reda funkcije f . Imamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2$$

što znači da je

$$A_{11} = 2, A_{12} = 0, A_{13} = 0$$

$$A_{21} = 0, A_{22} = 2, A_{23} = 0$$

$$A_{31} = 0, A_{32} = 0, A_{33} = 2.$$

Zato je $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, odakle imamo $M_1 = 2 > 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, $M_3 = D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$.

U ovom slučaju ispunjeni su uslovi (9) pa je $d^2f > 0$, odakle sledi da funkcija (13) u tački $M_0(2,3,4)$ dostiže lokalni minimum čija je vrednost $y_{\min} = f(2,3,4) = 1$.

USLOVNI EKSTREMI

Neka je data funkcija

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (14)$$

čije nezavisne promenljive zadovoljavaju m uslova oblika

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (15)$$

gde je $m < n$. Za određivanje lokalnih ekstrema funkcije (14) pri čemu njene nezavisne promenljive zadovoljavaju uslove (15) u praksi se obično koristi metoda Lagranža. Ova metoda se sastoji u tome što se pomoću funkcije f iz (14) i funkcija g_j iz (15) formira funkcija oblika

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (16)$$

gde su $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ realne konstante koje se nazivaju Lagranžovi množitelji, a funkcija F u ovom slučaju Lagranžova funkcija. Funkciju F uzimamo kao funkciju promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Na ovaj način, određivanje uslovnih ekstrema date funkcije f svedeno je na određivanje ekstremnih vrednosti Lagranžove funkcije F .

Potreban uslov da funkcija f ima uslovni ekstrem (uslovni minimum ili uslovni maksimum) u njenoj tački $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ jeste da su svi parcijalni izvodi prvog reda funkcije F po $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ jednaki nuli, tj. da je

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

i

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = g_j = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (18)$$

I u ovom slučaju tačka M_0 za koju su ispunjeni uslovi (17) i (18) naziva se stacionarna tačka.

Dovoljan uslov da funkcija f iz (14) u njenoj stacionarnoj tački M_0 ima uslovni ekstrem jeste da je u toj tački diferencijal drugog reda funkcije F različit od nule, tj. da je

$$d^2F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0 \quad (19)$$

uz dodatne uslove

$$dg_j(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (20)$$

Pri tome, funkcija f u tački M_0 ima
a) uslovni minimum ako je

$$d^2F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) > 0, \quad (21)$$

b) uslovni maksimum ako je

$$d^2F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) < 0. \quad (22)$$

Pri nalaženju vrednosti $d^2F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ moraju se uzeti u obzir i dodatni uslov (20).

U slučaju da je $d^2F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0$, određivanje uslovnih ekstrema funkcije zahteva nalaženje totalnih diferencijala višeg reda funkcije F .

Primer: Odrediti ekstreme funkcije

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \quad (23)$$

uz uslov

$$x_1 x_2 x_3 = 1. \quad (24)$$

Rešenje: Ovde je u pitanju određivanje uslovnog ekstrema funkcije f , gde imamo jedan uslov

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 - 1. \quad (25)$$

U ovom slučaju Lagranžova funkcija F ima oblik $F = f + \lambda_1 g_1$, tj.

$$F = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda_1 (x_1 x_2 x_3 - 1). \quad (26)$$

Njeni parcijalni izvodi prvog reda su

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 3x_1^2 + \lambda_1 x_2 x_3, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 3x_2^2 + \lambda_1 x_1 x_3, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = 3x_3^2 + \lambda_1 x_1 x_2, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 x_2 x_3 - 1. \quad (27)$$

Izjednačavanjem ovih parcijalnih izvoda sa nulom dobijamo sistem jednačina

$$3x_1^2 + \lambda_1 x_2 x_3 = 0, \quad 3x_2^2 + \lambda_1 x_1 x_3 = 0, \quad 3x_3^2 + \lambda_1 x_1 x_2 = 0, \quad x_1 x_2 x_3 - 1 = 0,$$

čije je rešenje: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, \lambda_1 = -3$. Stacionarna tačka funkcije je $M_0(1,1,1)$ za $\lambda_1 = -3$.

Totalni diferencijal prvog reda funkcije (26) je

$$dF = (3x_1^2 + \lambda_1 x_2 x_3) dx_1 + (3x_2^2 + \lambda_1 x_1 x_3) dx_2 + (3x_3^2 + \lambda_1 x_1 x_2) dx_3,$$

a njen totalni diferencijal drugog reda je

$$d^2F = 6(x_1 dx_1^2 + x_2 dx_2^2 + x_3 dx_3^2) + 2\lambda_1 (x_3 dx_1 dx_2 + x_2 dx_1 dx_3 + x_1 dx_2 dx_3). \quad (28)$$

U stacionarnoj tački $M_0(1,1,1)$ i $\lambda_1 = -3$ iz (28) dobijamo

$$d^2F(1,1,1) = 6(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - 6(dx_1dx_2 + dx_1dx_3 + dx_2dx_3). \quad (29)$$

Prema (20), dodatni uslov u ovom slučaju je $dg_1 = 0$, tj. $d(x_1 x_2 x_3 - 1) = 0$, odakle imamo

$$x_2 x_3 dx_1 + x_1 x_3 dx_2 + x_1 x_2 dx_3 = 0. \quad (30)$$

Uslov (30) u tački $M_0(1,1,1)$ u saglasnosti sa (20) svodi se na dodatni uslov

$$dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0. \quad (31)$$

Iz uslova (31) je

$$dx_3 = -dx_1 - dx_2. \quad (32)$$

Zamenom dobijene vrednosti za dx_3 iz (32) u desnoj strani (29) i posle sređivanja dobijamo

$$d^2F(1,1,1) = 18 dx_1^2 + 9 dx_1 dx_2 + 9 dx_2 dx_1 + 18 dx_2^2. \quad (33)$$

Izraz (33) predstavlja jednu kvadratnu formu veličina $dx_i dx_j$ ($i, j = 1, 2$). Saglasno formuli (7), u ovom slučaju determinanta D_n svodi se na determinantu $D_2 = \begin{vmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 18 \end{vmatrix}$. Njeni glavni minori su

$$M_1 = 18 > 0, \quad M_2 = D_2 = \begin{vmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 18 \end{vmatrix} = 243 > 0, \quad \text{što prema (9), u saglasnosti sa kriterijumom Silvestera,}$$

znači da je $d^2F(1,1,1) > 0$. Sada prema (21) zaključujemo da funkcija (23) u njenoj stacionarnoj tački $M_0(1,1,1)$ ima uslovni minimum čija je vrednost $y_{\min} = f(1,1,1) = 3$.

LITERATURA

1. Miodrag Ivočić: Optimizacija u ekonomiji, Ekonomski fakultet, Beograd, 1996
2. Đuro Kurepa: Viša algebra, Knjiga prva, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1971
3. Alan Jeffry: Mathematics for Engineers and Scientifics, Reprinted in Great Britain by Thomas Nelson and Sons, 1973
4. Bieberbach - Bauer: Algebra, Leipzig /G.B. Teubner/ Berlin, 1928

Cement'99

EKOLOŠKA POUZDANOST ELEMENATA TEHNIČKIH SISTEMA ECOLOGICAL RELIABILITY OF ELEMENTS OF TECHNICAL SYSTEMS

Vladimir Pavlović¹, Dragomir Simeunović²

UVOD

Realizacija koncepta i principa inženjerske ekologije u fabrikama cementa vrši se sistemom inženjersko-ekološkog praćenja proizvodnje koji predstavlja kompleks međusobno povezanih elemenata ili podсистema koji funkcionišu u optimalnom režimu upravljanja. Pri tome se pod upravljanjem u inženjersko-ekološkom smislu podrazumeva sistem stalne kontrole i racionalnog dejstva na uslove i faktore koji utiču na ekološku situaciju prirodno-tehničkog geosistema sa ciljem da se utvrdi, obezbedi i održi neophodni nivo ekološke bezopasnosti u procesima projektovanja i proizvodnje po svim podsystemima.

U praksi rada prirodno-tehničkih ekosistema elementi tehničkog podсистema imaju osobinu da posle određenog perioda vremena imaju niže karakteristike pouzdanosti u odnosu na nove elemente ili elemente koji su manje radili. Takvi su svi elementi koji su podložni starenju, habanju, itd. Poznato je nekoliko raspodela starenja koje opisuju ovaj proces. Najizuzetniji je slučaj kada funkcija raspodele funkcionisanja ima rastući intenzitet otkaza.

Obnavljanje prirodno-tehničkih geosistema uključuje kompleks mera za korektivno i preventivno obnavljanje po svim izvorima tehnogenog uticaja $\sum_i w_i$, $i=1, \dots, n$ i objekata prirode $\sum_j e_j$, $j=1, \dots, m$. Konkretno stanje izvora uticaja i objekata prirode uslovljava sprovođenje, u određenom trenutku funkcionisanja sistema t_j , određenog niza operacija u okviru planiranog i neplaniranog obnavljanja. Tekuće plansko obnavljanje i kontrola pouzdanosti elemenata ima lokalni

¹ Prof. dr Vladimir Pavlović, Katedra za površinsku eksploataciju, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

² Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

karakter sa radovima koji nisu vezani za ekološki ekstremne situacije. Neplanska obnavljanja mogu biti povezana sa nepredvidjenim ekološki ekstremnim situacijama. Plansko obnavljanje i kontrola pouzdanosti se realizuje u optimalnim vremenskim intervalima za postizanje potrebnog nivoa ekološke bezopasnosti. Za stohastičke modele razvoja tehnogenih procesa u prirodno-tehničkim geosistemima koriste se metode statistike i verovatnoće za analizu slučajnih veličina.

EKOLOŠKA STABILNOST I PERIODIČNOST KONTROLE SISTEMA

Ekološka stabilnost prirodno-tehničkih geosistema e_g u dopuštenim granicama (od donje (D_d) do gornje (D_g) granice) tekućih proizvodnih procesa u vremenu t označena je izrazom: $D_d(\sum w_i)$, $D_d \leq D_t \leq D_g$ i predstavlja analitičku osnovu za predviđanje ponašanja ekosistema ili određenog elementa.

Ekološko stabilni proces proizvodnje cementa obezbeđuje izmene postavljene funkcije ekosistema u dopuštenim granicama u odnosu na prirodu:

$$e_g = D(D_A(\sum w_{a_i}(t)); D_H(\sum w_{h_i}(t)); D_L(\sum w_{l_i}(t))),$$

gde su: D_A , D_H , D_L -integralne karakteristike stanja biosfere redom za atmosferu, hidrosferu i litosferu u zoni oštro postavljenih dopuštenih granica ($\Delta e = D_g - D_d$).

Razmatrani procesi su po svojoj prirodi slučajni sa različitim karakterom izmena parametara pojedinačnih raspodela w_i . Proces izmena pratećih veličina prirodno-tehničkih geosistema (ekosistem objekata fabrike cementa), odražavaju realne fizičke zakonomernosti i mehanizme razvoja tih sistema.

Pošto je $w_d \leq w(t) \leq w_g$, praćeni parametar u vremenu Δt prelazi dopuštenu granicu Δw i to gornju granicu pod uslovom da je:

$$w(t) + w_i(t) \Delta t \geq w_g,$$

a da je ispod donje granice pri:

$$w(t) + w_i(t) \Delta t \leq w_d.$$

Pošto su, po pravilu, vrednosti $w(t)$ i $w_i(t)$ nepoznate i slučajne, moguće je oceniti samo karakteristike verovatnoće mogućnosti izlaza praćenog parametra za vreme od t_1 do $(t_1 + \Delta t)$ van dopuštene zone Δw . Verovatnoća $P(w_d \leq w \leq w_g) = P$ zavisi od širine dopuštene zone Δw i karaktera izmene parametra $w(t)$.

Potreba za stalnom proverom stanja ekosistema proističe iz zahteva da se maksimalno skрати vreme boravka u stanju skrivene mogućnosti otkaza. Ukoliko te provere ne utiču na funkcionisanje sistema potrebno ih je sprovesti što češće.

Periodičnost preventivnog opsluživanja i kontrole pouzdanosti elemenata ekosistema može se opisati matematičkim modelom i naći optimalna varijanta tehničkog opsluživanja. Kao kriterijum optimalnosti može poslužiti maksimalni koeficijent gotovosti i minimalni troškovi za tehničko opsluživanje. Određivanje maksimalne periodičnosti preventivnog opsluživanja vrši se na osnovu utvrđivanja načina upravljanja slučajnim procesom kroz izbor strategije upravljanja slučajnim nedeterminisanim procesom. Postoje različiti sistemi preventivnog opsluživanja prirodno-tehničkih

geosistema i mogu se zasnivati na kvantitativnoj realizaciji procesa, na kalendarskom vremenu rada, na ukupnom vremenu realizacije i na tehničkom stanju elemenata sistema.

Najinteresantnije je sprovođenje preventivnog opsluživanja i kontrole po prognoznom parametru, preko granično dopuštenih stanja. Pod takvim uslovima, troškovi realizacije preventivnog opsluživanja su minimalni jer se ono vrši samo kada je to stvarno neophodno. Ovo je moguće ostvariti samo pri stabilnoj kontroli tehničkog stanja elemenata sistema kontrolno-dijagnostičkom opremom.

Posebno je pogodna analiza mogućnosti kontrole elemenata sistema sa eksponencijalnom raspodelom vremena do ekstremnih situacija sa parametrom (a). Uzimajući u obzir vreme trajanja provere (t_p), može se govoriti o izboru optimalne periodičnosti kontrole (t_k) tako da $K(t_k, t_p, a)$ kao koeficijent iskorišćenja dela proizvodnog vremena ima maksimalnu vrednost. U ciklusu realizacije procesa sa verovatnoćom $P(t_k) = \exp(-at_k)$, za vreme t_k ne dolazi do prelaza graničnih vrednosti do momenta provere, a sa verovatnoćom $F(t_k) = 1 - \exp(-at_k)$ dolazi do otkaza do momenta provere. Pri tome raspodela slučajnog vremena funkcionisanja sistema (t_f) u tom intervalu ima sledeću gustinu:

$$f(t) = a \exp(-at)/(1 - \exp(-at_k)).$$

Srednja vrednost slučajne veličine t_f može se odrediti iz sledećeg izraza:

$$M(t_f) = t_k \exp(-at_k) + \int_0^{t_k} t a \exp(-at) dt = (1 - \exp(-at_k))/a.$$

Potrebno je naći vrednost t_k koja obezbeđuje maksimum funkcije koeficijenta iskorišćenja:

$$K(t_k, t_p, a) = M(t_f)/(t_k + t_p) = (1 - \exp(-at_k))/a(t_k + t_p).$$

Ekstremna vrednost za $K(t_k, t_p, a)$ dobija se za onu vrednost t_k za koju je $dK/dt_k = 0$, odakle se dobija jednačina:

$$(A) \quad \exp(at_k) = 1 + at_k + at_p$$

iz koje se određuje veličina t_k za date vrednosti a i t_p . Ako je vrednost at_p mala (na primer: $at_p \leq 0.1$), može se sa dobrom aproksimacijom napisati:

$$\exp(at_k) = 1 + at_k + (a^2 t_k^2)/2,$$

tako da se iz (A) dobija:

$$(B) \quad t_k = (2 t_p/a)^{1/2} = (2 at_p)^{1/2}/a.$$

Za $a=0.05$, i graničnu vrednost $at_p=0.1$, iz (B) se dobija $t_k=8.944272$. Tačna vrednost za t_k iz (A) kod $a=0.05$, $at_p=0.1$ je $t_k=8.324423$.

Jednačina za određivanje optimalne periodičnosti kontrole na osnovu pouzdanosti i troškova ima sledeći oblik:

$$(C) \quad (F(t_k)/(1-F(t_k))^2) \int_0^{t_k} (1-F(t)) dt + \ln(1-F(t_k)) - C_p/C_n = 0,$$

gde su: t_k -periodičnost kontrole pri eksponencijalnom zakonu raspodele sa parametrima a i t_k , C_p -troškovi za realizaciju planske kontrole i opsluživanja, C_n -troškovi neplanskih opsluživanja.

Kako je: $F(t) = 1 - \exp(-at)$, sledi da je: $F'(t_k) = a \exp(-at_k)$.

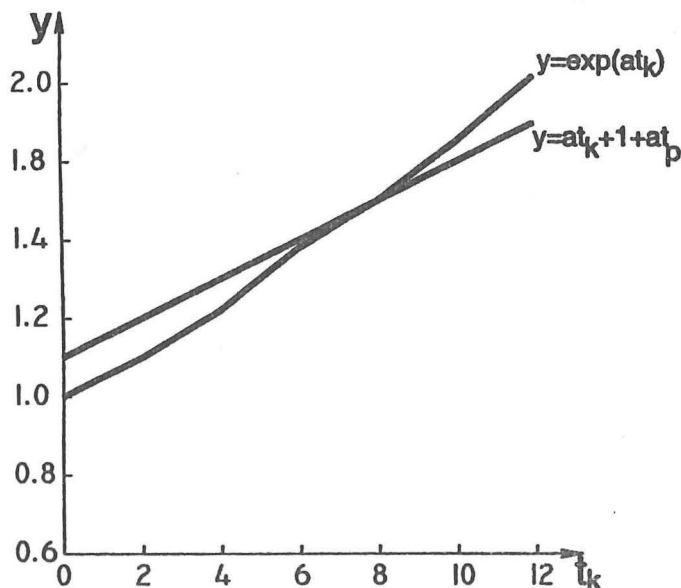
Sada se zamenom u (C) dobija:

$$a \exp(at_k) \int_0^{t_k} \exp(-at_k) (C_p/C_n) = 0,$$

odnosno:

$$\exp(at_k) = 1 + at_k + (C_p/C_n).$$

Rezultat se poklapa sa analizom kontrole sa poznatim vremenom trajanja provere (t_p) uz maksimalnu funkciju koeficijenta iskorišćenja, pa je: $C_p/C_n = at_p$, što proširuje mogućnosti rešavanja postavljenog zadatka. Za grafičko rešenje se postavljaju dve krive: $y = \exp(at_k)$ i $y = at_k + 1 + at_p$, odnosno: $y = \exp(at_k)$ i $y = at_k + 1 + at_p$. Njihovi grafici za $a=0.05$ i $at_p=0.1$ dati su na Sl. 1.



Slika 1. Grafik za određivanje periodičnosti kontrole pouzdanosti

ZAKLJUČAK

Analizom informacija o stanjima sistema utvrđuju se strategije pri kojima se u slučaju otkaza vrši obnavljanje, a pri isteku određenog perioda rada kontrola pouzdanosti elemenata i planirano opsluživanje. Dva prikazana pristupa utvrđivanju periodičnosti kontrole pouzdanosti elemenata ekosistema u cementnoj industriji daju mogućnost elastičnog prilaza i osetljive analize čime je omogućena jednostavna praktična primena. Visoka pouzdanost postavljenog ekosistema,

koji uključuje i kontrolno merne uređaje, neophodna je ne samo sa aspekta optimizacije proizvodnih troškova već i zakonski postavljenih uslova ekološke bezopasnosti funkcionisanja objekta u celini.

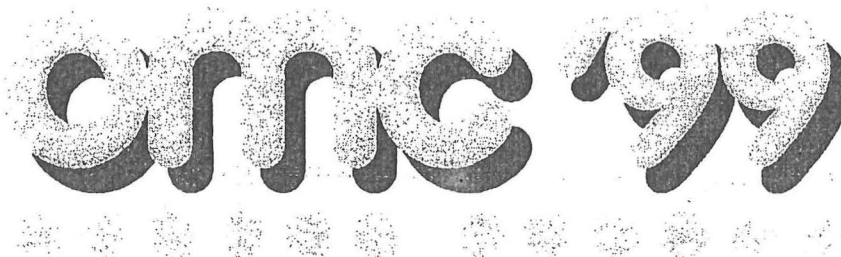
LITERATURA

1. Feller W.; An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Wiley Eastern Private Limited, New Delhi, 1969.
2. Pavlović V.; Pouzdanost diskontinualnih sistema, RGF Beograd, 1989.
3. Pavlović V.; Sistemi površinske eksploatacije, RGF Beograd, 1998.

Jugoslovenski komitet za površinsku eksploataciju / Yugoslav Opencast Mining Committee
Rudarsko-Topioničarski Basen Bor / Bor Mining-Smelting Basin
Institut za bakar Bor / Copper Institute Bor
Rudnici bakra i nemetala Bor / Bor Copper and Nonmetal Mines
Rudnik bakra Majdanpek / Majdanpek Copper Mine
Rudarsko-geološki fakultet Univerziteta u Beogradu / Faculty of Mining and Geology University of Belgrade
Rudarski institut u Beogradu / The Mining Institute in Belgrade
Tehnički fakultet Bor / Technical Faculty of Bor
Elektroprivreda Srbije / The Electric Power Industry of Serbia
JP Elektroprivreda Crne Gore / The Electric Power Industry of Montenegro
Poslovno udruženje cementne industrije Srbije "CIS" / Serbian Association of Portland Cement "CIS"
Centre for Solid Fuels Technology and Applications - Athens

IV Međunarodna Naučna Konferencija
o Površinskoj eksploataciji

4th International Scientific
Opencast Mining Conference



Bor
22-24. 09. 1999.

IV Međunarodna Naučna Konferencija o Površinskoj Eksploataciji
4th International Scientific Opencast Mining Conference

Izdavač

Jugoslovenski komitet za
površinsku eksploataciju

Publisher

Yugoslav Opencast Mining Committee

Urednik / Editor

Prof. dr Vladimir Pavlović

Tehnička priprema / Technical design

Aleksandra Jakšić, dipl.inž.rud.

Aleksandar Gajić, dipl.inž.rud.

Grafičko rešenje korica

dizajner / designer

Nenad Pavlović

Tiraž / Copies

200 primeraka

Štampa / Printed

Institut za bakar Bor, Zavod za informatiku

© Sva prava zadržava izdavač

© All rights reserved

Generalni sponzor

Rudarsko-Topioničarski Basen Bor

General sponsor

Bor Mining-Smelting basin

APSOLUTNI EKSTREMI FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH ABSOLUTE EXTREMES OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Dragomir Simeunović¹, Vladimir Pavlović²

APSTRAKT

U ovom radu daju se neki postupci za određivanje apsolutnih ekstrema funkcija više promenljivih.

ABSTRACT

This paper deals with some procedures for determination of absolute extremes of functions of several variables.

U površinskoj eksploataciji često se srećemo sa funkcijama više promenljivih kao i sa pitanjem određivanja njenih apsolutnih ekstrema.

U ovom radu daju se neki postupci za određivanje apsolutnih ekstrema realne funkcije

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

od n nezavisnih promenljivih x_1, x_2, \dots, x_n koja je definisana u određenoj zatvorenoj oblasti D , Euklidovog n - dimenzionalnog prostora R^n .

Neka je A neprazan skup čiji su elementi X, Y, Z, \dots . Ako svakom uređenom paru elemenata (X, Y) iz A dodelimo realan broj $d(X, Y)$ koji ima sledeća svojstva:

- 1) $0 \leq d(X, Y) < +\infty$,
- 2) $d(X, Y) = 0$ ako je $X = Y$ i $X = Y$ ako je $d(X, Y) = 0$,
- 3) $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$,

¹ Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

² Prof. dr Vladimir Pavlović, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

tada kažemo da smo skup A snabdeli metrikom d . Pri tome skup A snabdeven metrikom d nazivamo metrički prostor. Njegove elemente X, Y, Z, \dots nazivamo tačkama toga metričkog prostora, a $d(X, Y)$ rastojanjem između tačaka X i Y .

Neka su A i B dati skupovi. Proizvod skupova A i B u oznaci $A \times B$ je skup uređenih parova (a, b) pri čemu element a pripada skupu A a element b pripada skupu B .

Neka je R skup svih realnih brojeva. Tada se skup koji predstavlja proizvod $R \times R \times \dots \times R = R^n$ naziva n -dimenzionalni prostor. Elementi ili tačke ovoga prostora su uređene n -torke realnih brojeva oblika $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Brojevi x_1, x_2, \dots, x_n nazivaju se koordinate tačke X . Ako se u prostoru R^n rastojanje između njegovih tačaka $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ uvede pomoću formule

$$d(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

tada se prostor R^n naziva Euklidov n -dimenzionalni prostor.

Jednodimenzionalni Euklidov prostor je realna prava, gde je rastojanje između dve tačke $X = (x)$ i $Y = (y)$ dato sa $d(X, Y) = \left((x - y)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |x - y|$. Dvodimenzionalni Euklidov prostor

je realna ravan, gde je rastojanje između dve tačke $X = (x_1, x_2)$ i $Y = (y_1, y_2)$ dato sa $d(X, Y) = \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Trodimenzionalni Euklidov prostor je uobičajeni realni prostor od

tri dimenzije. Rastojanje između dve tačke $X = (x_1, x_2, x_3)$ i $Y = (y_1, y_2, y_3)$ toga prostora dato je sa $d(X, Y) = \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Uzmimo da je u Euklidovom n -dimenzionalnom prostoru data jedna zatvorena površ C koja ograničava konačni deo D toga prostora. Tačke prostora D zajedno sa tačkama površi C čine jednu zatvorenu oblast D_1 , a tačke prostora D čine jednu otvorenu oblast Euklidovog n -dimenzionalnog prostora. Površ C naziva se rub oblasti D . Ovde navodimo neke slučajeve.

Otvorena oblast D jednodimenzionalnog Euklidovog prostora je interval (a, b) , a zatvorena oblast D_1 je segment $[a, b]$, odnosno zatvoreni interval $[a, b]$. Rub oblasti D ovde su tačke a i b . Zatvorenu oblast D_1 u Euklidovom dvodimenzionalnom prostoru čine tačke ravni ograničene jednom zatvorenim krivom C zajedno sa tačkama krive C , a deo ravni D ograničen krivom C bez tačaka te krive predstavlja otvorenu oblast toga prostora. Kriva C je rub oblasti D . Linija C , kao rub oblasti D , može se sastojati i od više linija C_1, C_2, \dots, C_m nadovezanih jedna na drugu. Svaka od linija C_1, C_2, \dots, C_m definiše se odgovarajućom jednačinom. Tačke T_1, T_2, \dots, T_m koje povezuju linije C_1 i C_2, C_2 i C_3, \dots, C_{m-1} i C_m i C_m i C_1 su temena ruba C koje takođe pripadaju zatvorenoj oblasti D_1 . Linija C , kao rub oblasti D , može biti definisana i samo jednom jednačinom.

U Euklidovom prostoru R^n rub C koji ograničava konačni deo D toga prostora predstavlja jednu zatvorenu površ.

Posmatrajmo sada funkciju (1) tj. funkciju $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ od n nezavisnih promenljivih x_1, x_2, \dots, x_n koja je definisana u zatvorenoj oblasti D_1 Euklidovog prostora R^n . Vrednost funkcije f u tački $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ je $y_0 = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, odnosno $y_0 = f(M_0)$.

Apsolutni ekstremi funkcije f predstavljaju njenu najmanju i njenu najveću vrednost u datoj zatvorenoj oblasti D_1 . Pri tome njena najmanja vrednost u D_1 naziva se apsolutni minimum, a njena najveća vrednost apsolutni maksimum.

Za neprekidnu funkciju f definisanu u zatvorenoj oblasti D_1 Euklidovog prostora R^n kažemo da u tački M_0 koja pripada oblasti D_1 dostiže:

- apsolutni minimum ako je $f(M_0) \leq f(M)$ za sve tačke M iz D_1 ,
- apsolutni maksimum ako je $f(M_0) \geq f(M)$ za sve tačke M iz D_1 ,
- relativni minimum koji zovemo i lokalni minimum ako je $f(M_0) < f(M)$ za sve tačke M iz neposredne okoline tačke $M_0 \neq M$,
- relativni maksimum koji zovemo i lokalni maksimum ako je $f(M_0) > f(M)$ za sve tačke M iz neposredne okoline tačke $M_0 \neq M$.

LOKALNI EKSTREMI

Neka je f diferencijabilna funkcija. Potreban uslov da ona u tački M_0 iz oblasti D_1 ima lokalni maksimum ili lokalni minimum jeste da su svi njeni parcijalni izvodi prvog reda u toj tački jednaki nuli, tj. da je

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Tačka $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ u kojoj su ispunjeni uslovi (2) naziva se stacionarna tačka funkcije f u oblasti D_1 . Dovoljan uslov da funkcija (1) u njoj stacionarnoj tački M_0 ima lokalni maksimum ili lokalni minimum jeste da je u toj tački njen totalni diferencijal drugog reda različit od nule, tj. da je

$$d^2y = d^2 f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0, \quad (3)$$

pri čemu se pretpostavlja da funkcija f ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda. Ako je $d^2f > 0$, tada u tački M_0 funkcija f ima lokalni minimum čija je vrednost

$$y_{\min} = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

a ako je $d^2f < 0$, tada u tački M_0 funkcija f ima lokalni maksimum čija je vrednost

$$y_{\max} = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Ako je $d^2f = 0$ u tački M_0 , određivanje lokalnog maksimuma ili minimuma zahteva nalaženje totalnih diferencijala višeg reda.

Neka je funkcija f u okolini tačke M_0 oblasti D m puta diferencijabilna. Ako su u tački M_0 ispunjeni uslovi

$$df = d^2f = \dots = d^{m-1}f = 0, d^m f \neq 0,$$

tada:

- za m parno funkcija f u tački M_0 ima lokalni minimum ako je $d^m f > 0$, a lokalni maksimum ako je $d^m f < 0$;
- za m neparno funkcija f u tački M_0 ne dostiže ni lokalni minimum ni lokalni maksimum.

USLOVNI EKSTREMI

Neka je data funkcija

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4)$$

pri čemu x_1, x_2, \dots, x_n zadovoljavaju m uslova oblika

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, j = 1, \dots, m \quad (5)$$

gde je $m < n$. Za određivanje lokalnih ekstrema funkcije (4) pri čemu x_1, x_2, \dots, x_n zadovoljavaju uslove (5) u praksi se obično koristi metoda Lagranža. Ova metoda se sastoji u tome što se pomoću funkcije f iz (4) i funkcija g_j iz (5) formira funkcija oblika

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6)$$

gde su $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ realne konstante koje se nazivaju Lagranžovi množitelji, a funkcija F u ovom slučaju Lagranžova funkcija. Funkciju F uzimamo kao funkciju promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Na ovaj način, određivanje uslovnih ekstrema date funkcije f svedeno je na određivanje ekstremnih vrednosti Lagranžove funkcije F .

Potreban uslov da funkcija f u tački M_0 ima uslovni ekstrem (uslovni minimum ili uslovni maksimum) jeste da su svi parcijalni izvodi prvog reda funkcije F po $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ u toj tački jednaki nuli, tj. da je

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

i

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = g_j = 0, j = 1, \dots, m. \quad (8)$$

I u ovom slučaju tačka M_0 za koju su ispunjeni uslovi (7) i (8) naziva se stacionarna tačka.

Dovoljan uslov da funkcija f iz (4) u njenoj stacionarnoj tački M_0 ima uslovni ekstrem jeste da je u toj tački totalni diferencijal drugog reda funkcije F različit od nule, tj. da je

$$d^2F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0 \quad (9)$$

uz dodatne uslove

$$dg_j(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0, j = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Pri tome, funkcija f u tački M_0 ima

a) uslovni minimum ako je

$$d^2F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) > 0, \quad (11)$$

b) uslovni maksimum ako je

$$d^2F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) < 0. \quad (12)$$

Pri nalaženju vrednosti $d^2F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ moraju se uzeti u obzir i dodatni uslovi (10).

U slučaju da je $d^2F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0$, određivanje uslovnih ekstrema funkcije f zahteva nalaženje totalnih diferencijala višeg reda funkcije F .

Za određivanje znaka totalnog diferencijala drugog reda funkcije više nezavisnih promenljivih obično se koristi kriterijum Silvestera (videti 1,2,4 i 6).

APSOLUTNI EKSTREMI

Neka je funkcija $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferencijabilna u datoj zatvorenoj oblasti D_1 . Neka su M_1, M_2, \dots, M_k stacionarne tačke funkcije f koje pripadaju oblasti D_1 . Dalje, neka su N_1, N_2, \dots, N_n stacionarne tačke Lagranžove funkcije F koje takođe pripadaju oblasti D_1 , a kod koje uslovna veza između x_1, x_2, \dots, x_n predstavlja jednačinu ruba C . Tada u oblasti D_1 funkcija f ima:

1^o apsolutni minimum čija je vrednost

$$a = \min \{f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_k), f(N_1), f(N_2), \dots, f(N_n)\}, \quad (13)$$

2^o apsolutni maksimum čija je vrednost

$$A = \max \{f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_k), f(N_1), f(N_2), \dots, f(N_n)\}. \quad (14)$$

Kao što vidimo apsolutni ekstremini funkcije f predstavljaju najmanju i najveću vrednost koje ta funkcija dostiže u njenim stacionarnim tačkama koje pripadaju oblasti D_1 i stacionarnim tačkama Lagranžove funkcije F formirane od date funkcije f i ruba C koje takođe pripadaju oblasti D_1 .

Primer: Odrediti apsolutne ekstreme funkcije

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 5x_2 + 10 \quad (15)$$

u zatvorenoj oblasti D_1 određenoj sa $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1+x_2-4 \leq 0$.

Rešenje: Oblast D_1 predstavlja deo ravni $O x_1x_2$ koju čine tačke trougla čija su temena $T_1(0,0), T_2(4,0)$ i $T_3(0,4)$. Oblast D čine unutrašnje tačke trougla T_1, T_2, T_3 , a oblast D_1 čine tačke oblasti D , tačke strana T_1T_2, T_2T_3 i T_3T_1 toga trougla i njegova temena T_1, T_2 i T_3 . Rub C oblasti D su navedene strane trougla zajedno sa njegovim temenima. Kao što vidimo rub C sastoji se od linija $C_1 = T_1T_2, C_2 = T_2T_3$ i $C_3 = T_3T_1$ čije su jednačine redom:

$$\text{za } C_1: x_2 = 0, \text{ za } C_2: x_1+x_2-4 = 0 \text{ i za } C_3: x_1 = 0.$$

Za određivanje stacionarnih tačaka funkcije f iz (15) u oblasti D_1 prvo nalazimo njene parcijalne izvode po x_1 i x_2 koji izjednačeni sa nulom daju jednačine:

$$2x_1+x_2-4 = 0, \quad x_1+2x_2-5 = 0.$$

Rešenje ovih jednačina je $x_1 = 1, x_2 = 2$. Tačka $M_1(1,2)$ je stacionarna tačka funkcije f za koju vidimo da pripada oblasti D_1 .

Dalji korak je određivanje stacionarnih tačaka Lagranžove funkcije F koja se obrazuje od funkcije f i jednačine ruba C . U našem slučaju rub C sastoji se od tri linije C_1, C_2 i C_3 nadovezanih jedna na drugu čije smo jednačine već naveli.

Lagranžova funkcija F_1 za liniju C_1 glasi

$$F_1 = f + \lambda_1 x_2$$

Njeni parcijalni izvodi prvoga reda po x_1 , x_2 i λ_1 izjednačeni sa nulom daju jednačine:

$$2x_1 + x_2 - 4 = 0, \quad x_1 + 2x_2 - 5 + \lambda_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Rešenje ovih jednačina je $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $\lambda_1 = 3$. Tačka $N_1(2,0)$ za $\lambda_1 = 3$ je stacionarna tačka Lagranžove funkcije F_1 za koju vidimo da pripada oblasti D_1 .

Lagranžova funkcija F_2 za liniju C_2 glasi

$$F_2 = f + \lambda_2 (x_1 + x_2 - 4).$$

Njeni parcijalni izvodi prvoga reda po x_1 , x_2 i λ_2 izjednačeni sa nulom daju jednačine:

$$2x_1 + x_2 - 4 + \lambda_2 = 0, \quad x_1 + 2x_2 - 5 + \lambda_2 = 0, \quad x_1 + x_2 - 4 = 0.$$

Rešenje ovih jednačina je $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Tačka $N_2(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ za $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ je

stacionarna tačka Lagranžove funkcije F_2 za koju vidimo da pripada oblasti D_1 .

Lagranžova funkcija F_3 za liniju C_3 glasi

$$F_3 = f + \lambda_3 x_1.$$

Njeni parcijalni izvodi prvoga reda po x_1 , x_2 i λ_3 izjednačeni sa nulom daju jednačine:

$$2x_1 + x_2 - 4 + \lambda_3 = 0, \quad x_1 + 2x_2 - 5 = 0, \quad x_1 = 0.$$

Rešenje ovih jednačina je $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $\lambda_3 = \frac{3}{2}$. Tačka $N_3(0, \frac{5}{2})$ za $\lambda_3 = \frac{3}{2}$ je stacionarna

tačka Lagranžove funkcije F_3 za koju vidimo da pripada oblasti D_1 .

Temena $T_1(0,0)$, $T_2(4,0)$ i $T_3(0,4)$ posmatranog trougla pripadaju rubu C . Ona se takođe uzimaju kao stacionarne tačke odgovarajućih Lagranžovih funkcija. Navedena temena označićemo redom sa $N_4(0,0)$, $N_5(4,0)$ i $N_6(0,4)$. Svako teme određeno je sa dve jednačine, tj. sa dva uslova. Teme $T_1(0,0)$ određeno je jednačinama $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, teme $T_2(4,0)$ jednačinama $x_1 - 4 = 0$, $x_2 = 0$, a teme $T_3(0,4)$ jednačinama $x_1 = 0$, $x_2 - 4 = 0$. Ako se za svako teme obrazuju odgovarajuće Lagranžove funkcije, onda se kao njihove stacionarne tačke dobijaju baš ta temena. Ovo je razlog što se navedena temena uzimaju za stacionarne tačke odgovarajućih Lagranžovih funkcija.

Posle određivanja stacionarnih tačaka M_i funkcije f iz (15) i stacionarnih tačaka N_j Lagranžove funkcije na rubu C pristupamo nalaženju vrednosti funkcije f iz (15) u tim tačkama. Imamo:

$$f(M_1) = f(1,2) = 3, \quad f(N_1) = f(2,0) = 6, \quad f(N_2) = f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}, \quad f(N_3) = f\left(0, \frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4},$$

$$f(N_4) = f(0,0) = 10, \quad f(N_5) = f(4,0) = 10, \quad f(N_6) = f(0,4) = 6$$

Prema (13), apsolutni minimum funkcije (15) u navedenoj zatvorenoj oblasti D_1 je

$$a = \min \left\{ 3, 6, \frac{15}{4}, \frac{15}{4}, 10, 10, 6 \right\} = 3,$$

a prema (14) njen apsolutni maksimum je

$$A = \max \left\{ 3, 6, \frac{15}{4}, \frac{15}{4}, 10, 10, 6 \right\} = 10.$$

LITERATURA

1. Miodrag Ivović: Optimizacija u ekonomiji, Ekonomski fakultet, Beograd, 1996
2. Đuro Kurepa: Viša algebra, Knjiga prva, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1971
3. Alan Jeffry: Mathematics for Engineers and Scientifics, Reprinted in Great Britain by Thomas Nelson and Sons, 1973
4. Bieberbach - Bauer: Algebra, Leipzig /G.B. Teubner/ Berlin, 1928
5. S. Aljančić: Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Građevinska knjiga, Beograd, 1968
6. Dragomir Simeunović: Ekstremi funkcija više promenljivih, Međunarodno savetovanje CEMENT'99, Novi Sad - Beočin, 11-14. maj 1999. god., 148-154.

Jugoslovenski komitet za površinsku eksploataciju Saveza inženjera i tehničara Jugoslavije,
Rudarsko-geološki fakultet Univerziteta u Beogradu, DP "Knjaz Miloš" - Arandelovac,
Univerzitet BK - Beograd, STEITS, Društvo za hidrogeologiju - Beograd,
Poslovno udruženje cementne industrije Srbije "CIS" - Beograd,
Jugoslovensko udruženje industrije mineralnih voda - Beograd,
Rudarski institut - Beograd, Elektroprivreda Srbije,
DP "Šamol" - Arandelovac, DP "Venčac" - Arandelovac,
"Kubršnica" - Arandelovac, "Karbon" - Arandelovac, "Tekon Sistemi" - Beograd

INFORMATIKA, MENADŽMENT, EKOLOGIJA I STANDARDI

Arandelovac
10-12. maj 2000.

**Savetovanje Informatika, menadžment,
ekologija i standardi "IMES 2000"**

Izdavač

Jugoslovenski komitet za
površinsku eksploataciju

Urednik

Prof. dr Vladimir Pavlović

Tehnička priprema

Aleksandra Jakšić, dipl. inž. rud.

Grafičko rešenje korica

Aleksandar Gajić, dipl.inž.rud.

Tiraž / Copies

200 primeraka

Štampa



Štampa GIP "Zapla" Arandelovac
Tel/fax: 034/725-334

® Sva prava zadržava izdavač

Generalni sponzor

DP "Knjaz Miloš" - Arandelovac

PROVERA POUZDANOSTI SISTEMA POVRŠINSKE EKSPLOATACIJE PO KRITERIJUMU MAKSIMALNE STACIONARNE VEROVATNOĆE RADA

Vladimir Pavlović¹, Dragomir Simeunović²

UVOD

Optimizacija parametara preventivnog i korektivnog održavanja uslovljava dostizanje zahtevanog nivoa pouzdanosti sistema u slučajnom procesu površinske eksploatacije. Jedan od osnovnih faktora koji opredeljuje strategiju preventivnog održavanja je mogućnost raspolaganja informacijama o stanjima sistema u toku rada. Upravljanje održavanjem sistema zahteva poznavanje funkcije raspodele vremena rada i karakteristika pogodnosti obnavljanja i održavanja sistema na osnovu čega se može dobiti ocena za period kontrole između momenata planiranog opsluživanja sa statistički određenim vremenom trajanja.

PLANIRANJE PROVERE POUZDANOSTI

Provere pouzdanosti i obnavljanja ukoliko se utvrde nedostaci mogu dovesti do povećanja stacionarne verovatnoće rada sistema ako se ispune i uslovi koji utiču na nju. Period (t_p) između provera pouzdanosti ima stalni intenzitet otkaza (λ) i u tom periodu se mogu pronaći dodatne neispravnosti sistema. Srednje vreme provere je T_p , dok je T_0 srednje vreme obnavljanja sistema. Kako je (λ) konstantno u vremenu, onda se i obnavljanja realizuju stalno posle provera, nakon čega je sistem ispravan. Provera se može realizovati i posle pojave neispravnosti. Sistem može otkazati za vreme provere i obnavljanja sa verovatnoćom $p > 0$, pri čemu se sa verovatnoćom $(1-p)$ takav događaj ne može desiti neposredno pre vremena naredne provere. Verovatnoća (r) odražava mogućnost otkaza sistema pri proveru pouzdanosti sistema neposredno pre rada.

¹ Prof. dr Vladimir Pavlović, Rudarsko-geološki fakultet, Katedra za površinsku eksploataciju, Đušina 7, Beograd, tel/fax: 011-3242-138

² Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko-geološki fakultet, Đušina 7, Beograd

Postoje četiri različite mogućnosti nastupanja neispravnosti (zastoja) koje su prikazane na Sl. 1.

Moguće je pokazati da se pri $t \rightarrow \infty$ stacionarna verovatnoća rada P_s svodi na matematičko očekivanje intervala ispravnog stanja T_r podeljeno sa sumom matematičkih očekivanja ispravnih stanja i vremena zastoja T_z između dva uzastopna intervala ispravnog stanja, pa je:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int K(t) dt / t = P_s = T_r / (T_r + T_z) .$$

Za opisanu proceduru provere pouzdanosti, neispravnost se može dogoditi sa verovatnoćom $1 - \exp(-at_p)$ na intervalu $(0, t_p)$ ili se ne desi sa verovatnoćom $\exp(-at_p)$.

Stacionarna verovatnoća rada se može predstaviti sledećim izrazom:

$$P_s = (1 - \exp(-at_p)) / aM(T_r + T_z).$$

Za prvu mogućnost rasporeda intervala izraz $M(T_r + T_z)$ za očekivanu vrednost ciklusa između dva perioda ispravnog stanja je:

$$M(T_r + T_z)_1 = t_p + T_p + T_0 .$$

dok je za drugu, treću i četvrtu mogućnost (uočljivo za slučaj III):

$$M(T_r + T_z)_2 = (t_p + T_p)(p(1-r)+1) + p T_0 .$$

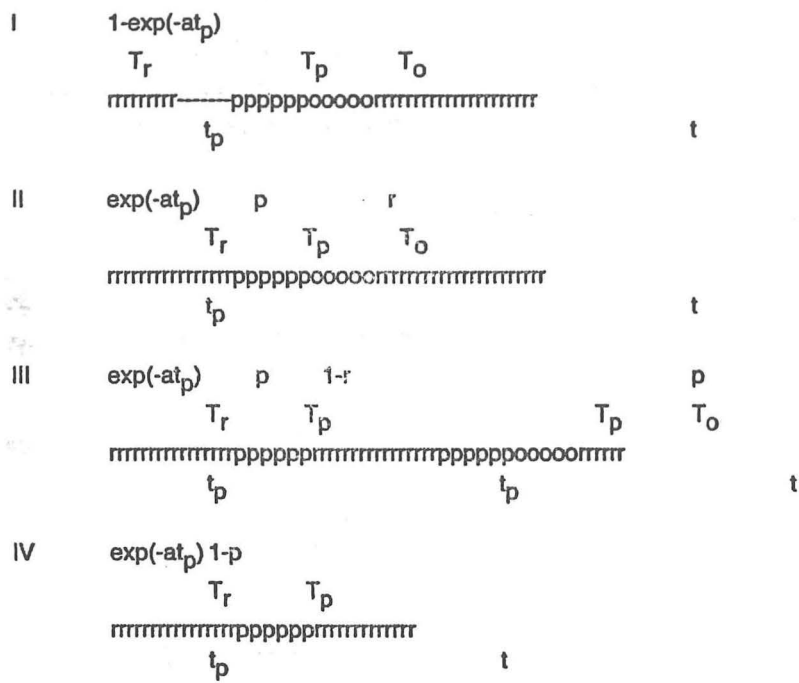
Vrednost $M(T_r + T_z)$ za sve četiri mogućnosti je:

$$\begin{aligned} M(T_r + T_z) &= (1 - \exp(-at_p)) M(T_r + T_z)_1 + \exp(-at_p) M(T_r + T_z)_2 = \\ &= (t_p + T_p)(1 + p(1-r)\exp(-at_p) + T_0(1 - (1-p)\exp(-at_p))). \end{aligned}$$

Konačno, stacionarna verovatnoća rada je:

$$P_s = (1 - \exp(-at_p)) / (a(t_p + T_p)(1 + p(1-r)\exp(-at_p) + aT_0(1 - (1-p)\exp(-at_p)))).$$

Za određivanje optimalnog perioda provere pouzdanosti potrebno je jednačinu diferencirati po t_p , izjednačiti je sa nulom i izvesti traženo t_p .



Slika 1. Vremenski dijagrami mogućnosti pojave neispravnosti

Izražena u pogodnijem obliku stacionarna verovatnoća rada je:

$$P_s = (\exp(at_p) - 1) / a((t_p + T_p)(\exp(at_p) + p(1-r)) + T_o(\exp(at_p) - (1-p)))$$

Dalje je:

$$\frac{dP_s}{dt_p} = p(1-r) + a(1+p(1-r))(t_p + T_p) + a p T_o + 1 - p(1-r) \exp(at_p) - \exp(2at_p) / a((t_p + T_p)(\exp(at_p) + p(1-r)) + T_o(\exp(at_p) - (1-p)))^2$$

Stavljanjem $dP_s/dt_p = 0$, dobija se jednačina:

$$(*) \quad p(1-r) + a((1+p(1-r))(t_p + T_p) + apT_o + 1 - p(1-r)) \exp(at_p) - \exp(2at_p) = 0$$

Za date vrednosti veličina p , r , T_p , T_o i a iz poslednje jednačine se određuje t_p . Za ovako nadjeno t_p , stacionarna verovatnoća rada dostiže maksimum.

Primer:

Za $p=0.005$, $r=0.004$, $T_p=5$, $T_o=20$, $a=0.008$, iz jednačine (*) se dobija $t_p=9.85$. Za ovako nadjeno t_p dobija se maksimalna stacionarna verovatnoća rada $P_{smax} = 0.26$.

ZAKLJUČAK

Postavljena metodologija planiranja provere pouzdanosti može dati u praksi istraživanja složenih rudarskih sistema dobre rezultate, posebno u kombinaciji sa drugim pristupima. Na ovaj način se može prevazići činjenica da provere mogu biti nepouzdanae, odnosno, kao rezultat provere ispravnog elementa moguće ga je proglasiti neispravnim ili obrnuto ne uočiti nastajanje neispravnosti.

LITERATURA

1. Pavlović V.: Sistemi površinske eksploatacije, Rudarsko-geološki Fakultet, Beograd, 1998.
2. Pavlović V., Simeunović D.: Ekološka pouzdanost elemenata tehničkih sistema, CEMENT 99, YUKOM, Beograd, 1999.

**EKSTREMI FUNKCIJA DVE PROMENLJIVE PO ZADATIM
PRAVCIMA**

**EXTREMES OF THE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES IN
ASSIGNED DIRECTIONS**

Dragomir Simeunović¹, Vladimir Pavlović²

APSTRAKT

U ovom radu posmatraju se ekstremi funkcija dve promenljive po zadatim pravcima. U površinskoj eksploataciji ležišta pri određivanju vrednosti pojedinih karakteristika javlja se potreba za nalaženjem njenih ekstremnih vrednosti duž nekih linija, pravih ili krivih, u zoni otkopavanja.

ABSTRACT

In this paper the extremes of the functions of two variables in assigned directions are observed. In surface mining, together with the determination of the values of the specific characteristics, there is a necessity of the determination of their extreme values along the straight lines curves in excavation zones.

¹ Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, Đušina 7

² Prof. dr Vladimir Pavlović, Rudarsko-geološki fakultet, Katedra za površinsku eksploataciju, Beograd, Đušina 7.

U površinskoj eksploataciji pojedine karakteristike ležišta mogu se predstaviti u obliku neke funkcije koja zavisi od položaja tačke M (x,y) u ravni Oxy eksploatacionog polja. Ovo znači da se vrednost u jedne uočene karakteristike ležišta može izraziti u obliku određene funkcije $f(x,y)$ dveju nezavisnih promenljivih x i y , tj. kao

$$u = f(x,y). \quad (1)$$

U praksi se javlja potreba da se odrede ekstremi funkcije $u = f(x,y)$ definisane u oblasti D ravni Oxy, a posebno da se odrede njeni ekstremi duž neke linije, prave ili krive, koja pripada oblasti D.

Predmet ovoga rada je određivanje takvih ekstrema funkcije $u = f(x,y)$.

Neka je u oblasti D ravni Oxy definisana funkcija

$$u = f(x,y) \quad (2)$$

i neka je u toj oblasti data jedna linija, prava ili kriva, čija je jednačina

$$g(x,y) = 0. \quad (3)$$

Za određivanje ekstrema funkcije (2) duž linije (3) ovde primenjujemo Lagranžovu metodu množitelja za nalaženje uslovnih, odnosno vezanih ekstrema. U tu svrhu formira se Lagranžova funkcija

$$F = f(x,y) + \lambda g(x,y), \quad (4)$$

gde je λ realan parametar, a zatim nađu parcijalni izvodi prvog reda funkcije F po x, y i λ i ti izvodi se izjednače sa nulom. Tako se dobijaju jednačine

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x,y) = 0, \quad (5)$$

iz kojih treba odrediti nepoznate x, y i λ .

Neka je x_1, y_1, λ_1 jedno realno rešenje sistema jednačina (5). Tačka $M_1(x_1, y_1)$ za $\lambda = \lambda_1$ je jedna stacionarna tačka funkcije (4). U njoj funkcija (2) može imati lokalnu uslovnju ekstremnu vrednost.

Da bi se utvrdilo da li funkcija (2) u tački $M_1(x_1, y_1)$ za $\lambda = \lambda_1$ ima ekstrem potrebno je naći parcijalne izvode drugog reda funkcije F, tj. naći $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ i u tim parcijalnim izvodima umesto x, y i λ staviti x_1, y_1, λ_1 . Na taj način dobijaju se veličine $(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}), (\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y})$ i $(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2})$. Posle toga se određuje vrednost totalnog diferencijala drugog reda funkcije F u tački $M_1(x_1, y_1)$ za $\lambda = \lambda_1$ tj.

$$d^2 F = (\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}) dx^2 + 2(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}) dx dy + (\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}) dy^2. \quad (6)$$

Sada se diferencira jednačina (4), odakle se dobija

$$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0. \quad (7)$$

U jednačini (7) stavi se $x = x_1$, $y = y_1$ pa se dobija jednačina

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy = 0 \quad (8)$$

Iz jednačine (8) nađe se dx ili dy i tako dobijena vrednost zameni u jednačini (6).

Ako je pri tome $d^2F > 0$, tada funkcija $u = f(x,y)$ u tački $M_1(x_1, y_1)$ za $\lambda = \lambda_1$ ima lokalni minimum, a ako je $d^2F < 0$, tada funkcija $u = f(x,y)$ u tački $M_1(x_1, y_1)$ za $\lambda = \lambda_1$ ima lokalni maksimum. Vrednosti lokalnog minimuma, odnosno lokalnog maksimuma funkcije $u = f(x,y)$ se dobija kao $u_{\min} = f(x_1, y_1)$, odnosno kao $u_{\max} = f(x_1, y_1)$.

Ako je $d^2F = 0$ u tački $M_1(x_1, y_1)$ za $\lambda = \lambda_1$, tada je pitanje ekstrema otvoreno i zahteva naknadna ispitivanja.

Za određivanje najmanje odnosno najveće vrednosti funkcije $u = f(x,y)$ između tačaka A i B krive $g(x,y) = 0$ potrebno je uzeti i vrednosti funkcije $f(x,y)$ u tačkama A i B. Tako dobijamo $f(A)$ i $f(B)$. U tom slučaju je

$$\min \{f(A), u_{\min}, u_{\max}, f(B)\} \leq u = f(x,y) \leq \max \{f(A), u_{\min}, u_{\max}, f(B)\}. \quad (9)$$

U slučaju da neprekidna funkcija $u = f(x,y)$ između tačaka A i B krive $g(x,y) = 0$ nema lokalnih ekstrema, tada je:

$$\min \{f(A), f(B)\} \leq u = f(x,y) \leq \max \{f(A), f(B)\}.$$

Primer:

Određiti ekstreme funkcije

$$u = x^2y + xy^2 - 2x - 6y + 20 \quad (10)$$

duž prave

$$y = 2 - x \quad (11)$$

između njenih tačaka A (3,-1) i B (0,2).

Rešenje:

Ovde je $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 2x - 6y + 20$,

$$g(x,y) = x + y - 2 = 0. \quad (12)$$

Lagranžova funkcija u ovom slučaju je

$$F = x^2y + xy^2 - 2x - 6y + 20 + \lambda (x + y - 2), \quad (13)$$

odakle je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + y^2 - 2 + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2xy - 6 + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 2. \quad (14)$$

Izjednačavanjem ovih parcijalnih izvoda sa nulom dobijamo sistem jednačina

$$2xy + y^2 - 2 + \lambda = 0$$

$$x^2 + 2xy - 8 + \lambda = 0$$

$$x + y - 2 = 0$$

čije je rešenje: $x_1 = 2, y_1 = 0, \lambda_1 = 2$.

Dalje, iz (14) dobijamo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2x \quad (15)$$

Za $x = x_1 = 2, y = y_1 = 0$ i $\lambda = \lambda_1 = 2$, iz (15) dobijamo:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) = 4, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 4.$$

Sada, prema (6) je

$$d^2F = 8dxdy + 4dy^2 \quad (16)$$

Diferenciranjem jednačine (12) dobijamo jednačinu

$$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0,$$

tj. jednačinu

$$dx + dy = 0,$$

odakle je

$$dx = -dy. \quad (17)$$

Zamenom vrednosti za dx iz (17) u (16) dobijamo

$$d^2F = -4dy^2 < 0,$$

što znači da funkcija (10) u tački $M_1(2,0)$ za $\lambda = \lambda_1 = 2$ ima lokalni maksimum čija je vrednost

$$u_{\max} = f(2,0) = 16.$$

Dalje je $f(A) = f(3,-1) = 14, f(B) = f(0,2) = 8$.

Prema (9) je

$$\min \{14, 16, 8\} \leq u = f(x,y) \leq \max \{14, 16, 8\},$$

što znači da je

$$8 \leq u = f(x,y) \leq 16$$

duž prave $y = 2-x$ od tačke A (3,-1) do tačke B (0,2) i da u tački $M_1(2,0)$ te prave funkcija $u = f(x,y)$ data sa (10) ima lokalni maksimum $u_{\max} = 16$.

LITERATURA

1. Alan Jeffry: Mathematics for Engineers and Scientifics, Reprinted in Great Britain by Thomas Nelson and Sons, 1973
2. Bieberbach - Bauer: Algebra, Leipzig /G.B. Teubner/ Berlin, 1928
3. Branislav Boričić, Miodrag Ivović: Matematika, Ekonomski fakultet, Beograd, 1998
4. Dragomir Simeunović: Ekstremi funkcija više promenljivih, Međunarodno savetovanje CEMENT'99, Novi Sad - Beočin, 11-14. maj 1999. god., 148-154.
5. Đuro Kurepa: Viša algebra, Knjiga prva, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1971
6. Miodrag Ivović: Optimizacija u ekonomiji, Ekonomski fakultet, Beograd, 1996

O NEKIM FORMULAMA ZA INTERPOLACIJU ON SOME FORMULAS FOR INTERPOLATION

Dragomir Simeunović¹

APSTRAKT

U ovom radu posmatrane su neke formule koje mogu biti upotrebljene za interpolaciju.

ABSTRACT

In this paper we consider some formulas which can be used for the interpolation.

Neka je funkcija $y = f(x)$ jedne nezavisne promenjive x data u tačkama x_0, x_1, \dots, x_n segmenta $[a, b]$, gde je

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Funkcija $y = F(x)$ za koju je

$$F(x_k) = f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

predstavlja jednu interpolacionu funkciju funkcije $y = f(x)$. Tačke (x_k, y_k) , $k = 0, 1, \dots, n$ nazivaju se interpolacionim čvorovima. Kod interpolacije se uzima $f(x) = F(x)$ za $x \in [a, b]$.

Jedna interpolaciona funkcija funkcije $y = f(x)$ je Lagranževa interpolaciona funkcija

¹ Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

$$L(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) y_k, \quad (3)$$

gde je

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}, \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (4)$$

Funkcije (4) su polinomi stepena n , za koje je

$$L_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } i = k \\ 0 & \text{za } i \neq k \end{cases}. \quad (5)$$

Za funkciju $L_k(x)$ važi jednakost

$$\sum_{k=0}^n L_k(x) = 1 \quad (6)$$

za svako x .

Funkcije $L_k(x)$ definisane sa (4) nazivaju se Lagranževi polinomi.

Imajući u vidu (5) lako se zaključuje iz (3) da je

$$L(x_k) = y_k, \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (7)$$

Pomoću Lagranževih polinoma $L_k(x)$ mogu se dobiti razne interpolacione funkcije funkcije $y = f(x)$. Mi ćemo ovde posmatrati funkciju

$$F_d(x) = \prod_{k=0}^n (y_k + d)^{L_k(x)} - d, \quad (8)$$

gde je d konstanta takva da je

$$y_k + d > 0, \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (9)$$

Funkcija $F_d(x)$ ima sledeće svojstvo:

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} F_d(x) = L(x). \quad (10)$$

Imajući u vidu da su funkcije (3) i (8) neprekidne, iz (10), za dovoljno veliko d sledi relacija

$$L_d(x) \approx L(x). \quad (11)$$

Za $y_k > 0$, $k=0, 1, \dots, n$ i za $d=0$, funkcija (8) se svodi na

$$F_0(x) = \prod_{k=0}^n y_k^{L_k(x)}. \quad (12)$$

U ovom slučaju je $F_0(x) > 0$.

Imajući u vidu relaciju (6), za interpolacione funkcije (3), (8) i (12) nalazimo da je

$$L(x) = c, \quad F_d(x) = c, \quad F_0(x) = c$$

za svako x , kada je

$$y_0 = y_1 = \dots = y_n = c \neq 0.$$

Kod upotrebe Lagranževe interpolacione funkcije (3) može se dogoditi da bude $L(x) < 0$ za $x \in [a, b]$ i kad su sve vrednosti $y_k > 0$, $k = 0, 1, \dots, n$, dok se pri upotrebi interpolacione funkcije (12) uvek dobija $F_0(x) > 0$.

Kod primene interpolacione funkcije (8), kada je $y_k > 0$ moguće je izabrati konstantu d tako da bude $F_d(x) \geq 0$.

PRIMER

Za podatke: $x_0 = 1, y_0 = 10$

$$x_1 = 2, y_1 = 1$$

$$x_2 = 4, y_2 = 2$$

naći $L(3)$, $F_0(3)$, $F_2(3)$.

Rešenje:

U ovom slučaju je $n = 2$. Prema (4) imamo:

$$L_0(3) = -\frac{1}{3}, \quad L_1(3) = 1, \quad L_2(3) = \frac{1}{3}.$$

Prema formulama (3), (8) i (12) dobijamo

$$L(3) = -1.667, \quad F_0(3) = 0.585, \quad F_2(3) = 0.080.$$

Za $d = 10\,000$ iz (8) se dobija

$$F_d(3) = -1.665 \approx L(3).$$

LITERATURA

1. R. Kašanin: Viša matematika I, Zavod za izdavanje udžbenika SR. BiH, Sarajevo 1969.



**O NEKIM FORMULAMA ZA INTERPOLACIJU FUNKCIJA
OD DVE PROMENJIVE**

**ON SOME FORMULAS FOR INTERPOLATION OF THE
FUNCTIONS OF TWO VARIABLES**

Dragomir Simeunović¹

APSTRAKT

U ovom radu posmatrane su neke formule koje mogu biti upotrebljene za interpolaciju funkcija od dve promenjive.

ABSTRACT

In this paper we consider some formulas which can be used for the interpolation of the functions of two variables.

INTERPOLACIJA FUNKCIJA OD DVE PROMENJIVE

Neka su za funkciju $u = f(x, y)$ u datim tačkama $M_{ij}(x_i, y_j)$ ($i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n$) koje pripadaju oblasti

$D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ ravni XOY poznate njene vrednosti

$$f(x_i, y_j) = u_{ij} \quad (i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n). \quad (1)$$

Funkcija $v = F(x, y)$ takva da je

$$F(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = u_{ij} \quad (i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n) \quad (2)$$

¹ Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko-geološki fakultet, Dušina 7, Beograd

naziva se interpolaciona funkcija funkcije $u = f(x, y)$. Tačke (x_i, y_j) ($i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n$) nazivaju se interpolacioni čvorovi. Čvorovi su takvi da je

$$\begin{aligned} a &\leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b, \\ c &\leq y_0 < y_1 < \dots < y_n \leq d. \end{aligned} \quad (3)$$

Za interpolacionu funkciju $v = F(x, y)$ najčešće se uzima polinom sa dve promenjive x i y oblika

$$P_{m,n}(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \quad (4)$$

koji zadovoljava uslove

$$P_{m,n}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = u_{ij} \quad (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n) \quad (5)$$

Polinom (4) koji zadovoljava uslove (5) može se predstaviti u obliku

$$P_{m,n}(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n u_{ij} L_i(x) L_j(y) = \sum_{i=0}^m L_i(x) \left(\sum_{j=0}^n u_{ij} L_j(y) \right) \quad (6)$$

gde je

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_m)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_m)} \quad (7)$$

$$L_j(y) = \frac{(y - y_0) \dots (y - y_{j-1})(y - y_{j+1}) \dots (y - y_n)}{(y_j - y_0) \dots (y_j - y_{j-1})(y_j - y_{j+1}) \dots (y_j - y_n)} \quad (8)$$

Polinomi (7) i (8) nazivaju se Lagrangeovi polinomi. Za njih važe sledeća svojstva:

$$L_i(x_s) = \begin{cases} 1 & \text{za } s = i \\ 0 & \text{za } s \neq i \end{cases} \quad (9)$$

$$\sum_{i=0}^m L_i(x) = 1, \quad \text{za svako } x, \quad (10)$$

$$L_j(y_t) = \begin{cases} 1 & \text{za } t = j \\ 0 & \text{za } t \neq j \end{cases} \quad (11)$$

$$\sum_{j=0}^n L_j(y) = 1, \quad \text{za svako } y, \quad (12)$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n L_i(x) L_j(y) = 1 \quad \text{za svako } x \text{ i } y. \quad (13)$$

Zbog (9) i (11) je

$$P_{m,n}(x_i, y_j) = u_{ij} = f(x_i, y_j) \quad (i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n). \quad (14)$$

Zato polinom (6) predstavlja jedan interpolacioni polinom za funkciju $u = f(x, y)$.

Formula (6) je interpolaciona formula Lagrangeovog tipa za funkciju $u = f(x, y)$ od dve promenjive x i y .

Ako čvorovi (x_i, y_j) u ravni XOY obrazuju pravougaonu mrežu, tj. ako je

$$x_i = x_0 + id_1 \quad (i = 0, 1, \dots, m), \quad y_j = y_0 + jd_2 \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad (15)$$

gde su d_1 i d_2 konstante $\neq 0$, tada je formula (6) jednostavnija. U ovom slučaju broj čvorova mreže iznosi $(m+1)(n+1)$, gde je $m+1$ broj različitih vrednosti promenjive x , a $n+1$ broj različitih vrednosti promenjive y . U praksi se najčešće posmatra ovaj slučaj i pri tome uzima $m = n$.

Vrednosti funkcije $u = f(x, y)$ u tačkama (x_i, y_j) obično se prikazuje u vidu sledeće tabele.

Tabela 1.

$y \setminus x$	x_0	x_1	$x_2 \dots$
y_0	u_{00}	u_{10}	$u_{20} \dots$
y_1	u_{01}	u_{11}	$u_{21} \dots$
y_2	u_{02}	u_{12}	$u_{22} \dots$
			\dots
			\dots

Primer:

Na jednom ravnom terenu u čijoj se blizini nalaze izvori prašine postavljeni su taložnici za prašinu u tačkama koje čine pravougaonu mrežu. Posle određenog vremena u posmatranim tačkama - čvorovima dobijene su količine nataložene prašine u mg/m^2 koje su prikazane u tabeli 2, gde su vrednosti promenljivih x i y date u km. Na osnovu podataka iz tabele 2 primenom interpolacione formule (6) odrediti količinu nataložene prašine u tački M (1.6, 1.3).

Tabela 2.

$y \setminus x$	1.0	1.4	1.8
1.2	10	12	8
1.4	7	9	6
1.6	6	5	3

Rešenje:

U ovom slučaju je $m+1 = 3$, tj. $m=2$ i $n+1 = 3$, tj. $n=2$ što znači $m=n=2$, pa se formula (6) svodi na

$$P_{2,2}(x, y) = \sum_{i=0}^2 L_i(x) \left(\sum_{j=0}^2 u_{ij} L_j(y) \right)$$

iz koje u tački M (1.6, 1.3), tj. za $x = 1.6$, $y = 1.3$ dobijamo

$$\begin{aligned}
P_{2,2}(1.6, 1.3) &= -\frac{0.04}{0.32} \left(10 \cdot \frac{0.03}{0.08} + 7 \cdot \frac{0.03}{0.04} - 6 \cdot \frac{0.01}{0.08} \right) \\
&\quad + \frac{0.12}{0.16} \left(12 \cdot \frac{0.03}{0.08} + 9 \cdot \frac{0.03}{0.04} - 5 \cdot \frac{0.01}{0.08} \right) \\
&\quad + \frac{0.12}{0.32} \left(8 \cdot \frac{0.03}{0.08} + 6 \cdot \frac{0.03}{0.04} - 3 \cdot \frac{0.01}{0.08} \right) = 9.609
\end{aligned}$$

Pomoću Lagrangeovih polinoma $L_i(x)$ i $L_j(y)$ definisanih sa (7) i (8) mogu se dobiti i druge interpolacione funkcije funkcije $u = f(x, y)$.

U ovom radu mi ćemo posmatrati funkciju

$$\begin{aligned}
F_d(x, y) &= \prod_{i=0}^m \prod_{j=0}^n (u_{ij} + d)^{L_i(x)L_j(y)} - d \\
&= \prod_{i=0}^m \left(\prod_{j=0}^n (u_{ij} + d)^{L_j(y)L_i(x)} \right) - d
\end{aligned} \tag{16}$$

gde je d konstanta takva da je

$$u_{ij} + d > 0, \quad (i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n). \tag{17}$$

Zbog (9) i (11) je

$$F_d(x_i, y_j) = u_{ij}, \quad (i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n), \tag{18}$$

što znači da funkcija (16) predstavlja jednu interpolacionu funkciju funkcije $u = f(x, y)$.

Funkcija $F_d(x, y)$ ima sledeće svojstvo:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} F_d(x, y) = P_{m,n}(x, y). \tag{19}$$

Imajući u vidu da su funkcije (6) i (16) neprekidne, iz (19), za dovoljno veliko d važi relacija

$$F_d(x, y) \approx P_{m,n}(x, y). \tag{20}$$

Za $u_{ij} > 0$, $i = 0, 1, \dots, m$; $j = 0, 1, \dots, n$ i za $d=0$ funkcija (16) se svodi na

$$F_0(x, y) = \prod_{i=0}^m \left(\prod_{j=0}^n u_{ij}^{L_i(x)L_j(y)} \right). \tag{21}$$

U ovom slučaju je $F_0(x, y) > 0$ za svako x, y iz D .

Imajući u vidu relacije (10) i (12) za interpolacione funkcije (6), (16) i (21) nalazimo da je

$$P_{m,n}(x, y) = F_d(x, y) = F_0(x, y) = C$$

za svako x, y iz D , kada je

$$u_{ij} = C \neq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Kod upotrebe interpolacione funkcije (6) može se dogoditi da bude $P_{m,n}(x, y) < 0$ za neke vrednosti x, y iz D i kada su sve vrednosti $u_{ij} > 0$, $i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n$, dok se pri upotrebi interpolacione funkcije (21) uvek dobija $F_0(x, y) > 0$.

Kod primene interpolacione funkcije (16), kada je $u_{ij} > 0$ moguće je izabrati konstantu d tako da bude

$$F_d(x, y) \geq 0.$$

Ako se kod predhodnog primera primeni formula (21) dobiće se

$$F_0(1.6, 1.3) = 9.645$$

LITERATURA

1. B.P. Demidovich and I. A. Maron: Computational mathematics, translated from russian by George Yankovsky, Mir publishers Moscow, Third printing 1981.
2. D. Simeunović: Primena nekih interpolacionih formula za funkcije više promenljivih u zaštiti životne sredine (Application of some interpolation formulas for functions of more variables in environmental protection), II Međunarodni simpozijum rudarstva i zaštite životne sredine, Beograd 25-27. maj 1998, 309- 310.

**O NEKIM FORMULAMA ZA INTERPOLACIJU FUNKCIJA
OD TRI PROMENJIVE**

**ON SOME FORMULAS FOR INTERPOLATION OF THE
FUNCTIONS OF THREE VARIABLES**

Dragomir Simeunović¹, Vladimir Pavlović²

APSTRAKT

U ovom radu posmatrane su neke formule koje mogu biti upotrebljene za interpolaciju funkcija od tri promenjive.

ABSTRACT

In this paper we consider some formulas which can be used for the interpolation of the functions of three variables.

INTERPOLACIJA FUNKCIJA OD TRI PROMENJIVE

Neka su za funkciju $u = f(x, y, z)$ u datim tačkama $M_{ijk}(x_i, y_j, z_k)$ ($i = 0, 1, \dots, m$; $j = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, p$) koje pripadaju oblasti $D: a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2$ prostora OXYZ poznate njene vrednosti

$$f(x_i, y_j, z_k) = u_{ijk} \quad (i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, p). \quad (1)$$

Funkcija $v = F(x, y, z)$ takva da je

$$F(x_i, y_j, z_k) = f(x_i, y_j, z_k) = u_{ijk} \quad (i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, p) \quad (2)$$

¹ Prof. dr Dragomir Simeunović, Rudarsko geološki fakultet, Đušina 7, Beograd

² Prof. dr Vladimir Pavlović, Rudarsko geološki fakultet, Đušina 7, Beograd

naziva se interpolaciona funkcija funkcije $u = f(x, y, z)$. Tačke (x_i, y_j, z_k) ($i = 0, 1, \dots, m$; $j = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, p$) nazivaju se interpolacioni čvorovi. Čvorovi su takvi da je

$$\begin{aligned} a_1 &\leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq a_2, \\ b_1 &\leq y_0 < y_1 < \dots < y_n \leq b_2, \\ c_1 &\leq z_0 < z_1 < \dots < z_p \leq c_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Za intrpolacionu funkciju $v = F(x, y, z)$ najčešće se uzima polinom sa tri promenjive x, y i z oblika

$$P_{m,n,p}(x, y, z) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p a_{ijk} x^i y^j z^k \quad (4)$$

koji zadovoljava uslove

$$P_{m,n,p}(x_i, y_j, z_k) = f(x_i, y_j, z_k) = u_{ijk} \quad (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, p) \quad (5)$$

Polinom (4) koji zadovoljava uslove (5) može se predstaviti u obliku

$$P_{m,n,p}(x, y, z) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p u_{ijk} L_i(x) L_j(y) L_k(z) \quad (6)$$

gde je

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_m)}{(x_1 - x_0) \dots (x_1 - x_{i-1})(x_1 - x_{i+1}) \dots (x_1 - x_m)} \quad (7)$$

$$L_j(y) = \frac{(y - y_0) \dots (y - y_{j-1})(y - y_{j+1}) \dots (y - y_n)}{(y_1 - y_0) \dots (y_1 - y_{j-1})(y_1 - y_{j+1}) \dots (y_1 - y_n)} \quad (8)$$

$$L_k(z) = \frac{(z - z_0) \dots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \dots (z - z_p)}{(z_k - z_0) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_p)} \quad (9)$$

Polinomi (7), (8) i (9) nazivaju se Lagrangeovi polinomi. Za njih važe sledeća svojstva:

$$L_i(x_r) = \begin{cases} 1 & \text{za } r = i \\ 0 & \text{za } r \neq i \end{cases} \quad (10)$$

$$\sum_{i=0}^m L_i(x) = 1, \quad \text{za svako } x, \quad (11)$$

$$L_j(y_s) = \begin{cases} 1 & \text{za } s = j \\ 0 & \text{za } s \neq j \end{cases} \quad (12)$$

$$\sum_{j=0}^n L_j(y) = 1, \quad \text{za svako } y, \quad (13)$$

$$L_k(z_t) = \begin{cases} 1 & \text{za } t = k \\ 0 & \text{za } t \neq k \end{cases} \quad (14)$$

$$\sum_{k=0}^p L_k(z) = 1, \quad \text{za svako } z, \quad (15)$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p L_i(x) L_j(y) L_k(z) = 1 \quad \text{za svako } x, y \text{ i } z. \quad (16)$$

Zbog (10), (12) i (14) je

$$P_{m,n,p}(x_i, y_j, z_k) = u_{ijk} = f(x_i, y_j, z_k). \quad (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, p) \quad (17)$$

Zato polinom (6) predstavlja jedan interpolacioni polinom za funkciju $u = f(x, y, z)$.

Formula (6) je interpolaciona formula Lagrangeovog tipa za funkciju $u = f(x, y, z)$ od tri promenjive x, y i z .

Ako su čvorovi (x_i, y_j, z_k) u prostoru OXYZ izabrani tako da je

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + id_1 \quad (i = 0, 1, \dots, m), \\ y_j &= y_0 + jd_2 \quad (j = 0, 1, \dots, n), \\ z_k &= z_0 + kd_3 \quad (k = 0, 1, \dots, p). \end{aligned} \quad (18)$$

gde su d_1, d_2 i d_3 konstante $\neq 0$, tada je formula (6) jednostavnija. U ovom slučaju broj čvorova mreže iznosi $(m+1)(n+1)(p+1)$, gde je $m+1$ broj različitih vrednosti promenjive x , $n+1$ broj različitih vrednosti promenjive y a $p+1$ broj različitih vrednosti promenjive z . U praksi se najčešće posmatra ovaj slučaj i pri tome uzima $m = n = p$.

Pomoću Lagrangeovih polinoma $L_i(x)$, $L_j(y)$ i $L_k(z)$ definisanih sa (7), (8) i (9) mogu se dobiti i druge interpolacione funkcije funkcije $u = f(x, y, z)$.

U ovom radu mi ćemo posmatrati funkciju

$$F_d(x, y, z) = \prod_{i=0}^m \prod_{j=0}^n \prod_{k=0}^p (u_{ijk} + d)^{L_i(x) L_j(y) L_k(z)} - d, \quad (19)$$

gde je d konstanta takva da je

$$u_{ijk} + d > 0, \quad (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, p). \quad (20)$$

Zbog (10), (12) i (14) je

$$F_d(x_i, y_j, z_k) = u_{ijk}, \quad (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, p), \quad (21)$$

što znači da funkcija (19) predstavlja jednu interpolacionu funkciju funkcije $u = f(x, y, z)$.

Funkcija $F_d(x, y, z)$ ima sledeće svojstvo:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} F_d(x, y, z) = P_{m,n,p}(x, y, z). \quad (22)$$

Imajući u vidu da su funkcije (6) i (19) neprekidne, iz (22), za dovoljno veliko d važi relacija

$$F_d(x, y, z) = P_{m,n,p}(x, y, z). \quad (23)$$

Za $u_{ijk} > 0$, ($i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, p$) i za $d=0$ funkcija (19) se svodi na

$$F_0(x, y, z) = \prod_{i=0}^m \prod_{j=0}^n \prod_{k=0}^p u_{ijk} L_i(x) L_j(y) L_k(z). \quad (24)$$

U ovom slučaju je $F_0(x, y, z) > 0$ za svako x, y, z iz D .

Imajući u vidu relacije (11), (13) i (15) za interpolacione funkcije (6), (19) i (24) nalazimo da je

$$P_{m,n,p}(x, y, z) = F_d(x, y, z) = F_0(x, y, z) = C$$

za svako x, y, z iz D , kada je

$$u_{ijk} = C \neq 0, \quad (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, p).$$

Kod upotrebe interpolacione funkcije (6) može se dogoditi da bude $P_{m,n,p}(x, y, z) < 0$ za neke vrednosti x, y, z iz D i kada su sve vrednosti $u_{ijk} > 0$, ($i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, p$), dok se pri upotrebi interpolacione funkcije (24) uvek dobija $F_0(x, y, z) > 0$.

Kod primene interpolacione funkcije (19), kada je $u_{ijk} > 0$ moguće je izabrati konstantu d tako da bude

$$F_d(x, y, z) \geq 0.$$

Literatura:

1. B.P. Demidovich and I. A. Maron: Computational mathematics, translated from russian by George Yankovsky, Mir publishers Moscow, Third printing 1981.
2. D. Simeunović: Primena nekih interpolacionih formula za funkcije više promenljivih u zaštiti životne sredine (Application of some interpolation formulas for functions of more variables in environmental protection), II Međunarodni simpozijum rudarstva i zaštite životne sredine, Beograd 25-27. maj 1998, 309- 310.

Драгомир Симеуновић
Dragomir Simeunović

РАДИВОЈ КАШАНИН
RADIVOJ KAŠANIN
(1892-1989)

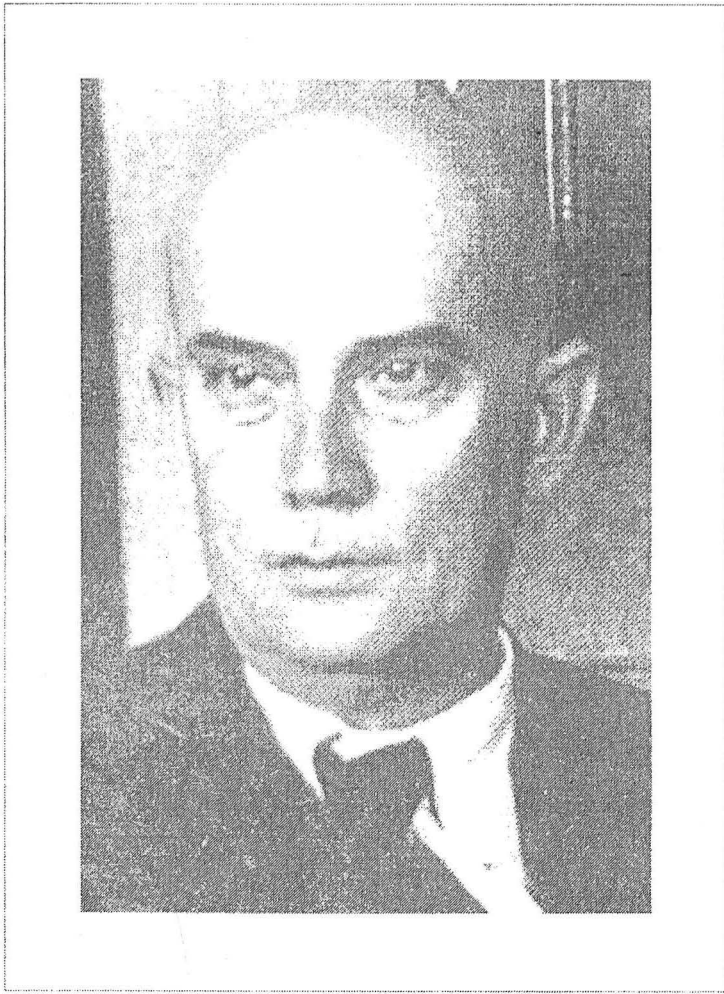
Отисак из публикације *Животи и дело српских научника*, 8
(Српска академија наука и уметности, биографије и библиографије
књ VIII, II одељење књ. 8)

Reprinted from the publication: *Lives and Work of the Serbian Scientists*, 8
(Serbian Academy of Sciences and Arts, Biographies and Bibliographies
Vol. VIII, II section, Book 8)

БЕОГРАД-BELGRADE
2002

РАДИВОЈ КАШАНИН
(1892–1989)

Драгомир Симеуновић



ШКОЛОВАЊЕ

У Белом Манастиру, у Барањи, 21. маја 1892. године по старом календару рођен је Радивој Кашанин као прво дете оца Николе и мајке Ане. Отац Никола био је сиромашан и радио је по Барањи као надничар. Мајка Ана је пореклом из српског села Каша код Печуја у Мађарској.

Име Радивој записано је у крштеници и у свим документима до одласка у Русију 1915. године. Када се тамо помешао са Србијанцима, прекрстили су га у Радивоје у војним документима и у уверењу о југословенском држављанству касније. На свим публикованим радовима штампано је Р. Кашанин.

21. фебруара 1895. године рођен је Милан, млађи Радивојев брат, доцније угледни историчар уметности и есејиста.

Српску основну школу Радивој је похађао у свом родном месту од 1898. до 1902. године. Свог учитеља Јована Славковића често је помињао и увек му указивао захвалност у стицању љубави према књизи. 1902. године умире му мајка Ана. Оцу Николи у чувању и васпитавању Радивоја и Милана помаже Анина сестра Латинка и брине о њиховом учењу. Те исте, 1902, године Радивој полази у први разред Класичне гимназије у Осијеку, и то први из свога села откад се за село зна, где 1905. године завршава трећи разред са одличним успехом. Године 1905. прелази у Нови Сад и полази у четврти разред Српске православне велике гимназије. На прелазак у Нови Сад највише је утицао Кашанинов учитељ Јован Славковић и тамо га је свесрдно прихватио директор Васа Пушибрк. Исте године, од добротвора „Задужбине Ђорђа Сервицког“, којом је управљао Одбор српског православног народног сабора у Сремским Карловцима, добија сталну помоћ (стипендију) за школовање. Тако је доспео до матуре 1910.

године, без материјалних брига, са добром стипендијом, коју је заслуживао према успеху а не по пореклу. 17. јуна 1910. године Р. Кашанин је добио гимназијско сведочанство зрелости. Да би имао право уписа на било који факултет и универзитет, он је тражио и полагао допунски испит из грчког језика и књижевности. Тако му је издата Допуна сведочанства зрелости, чиме је проглашен зрелим за упис на ма који факултет универзитета. Што се тиче струке за коју се после матуре определио, велики утицај је имао Стеван Милованов, његов професор математике у Новом Саду, као и то што је волео математику, а у астрономију био просто заљубљен.

1910. године од добротвора „Задужбине Гавре Адамовића“, којом је управљао Црквено-школски одбор у Сремским Карловцима, Радивој Кашанин добија стипендију за студије математичких и астрономских наука у Бечу. Октобра месеца 1910. године Радивој Кашанин одлази у Беч и уписује се на Филозофски факултет, на Групу математичких предмета. Пресудан утицај на њега извршио је у Бечу тада још млади професор Вилхелм Виртингер (W. Wirtinger), који га је на својим предавањима и колоквијумима упутио у најмодернија логичка расуђивања.

1911. године Р. Кашанин прелази на Свеучилиште у Загребу (Reg. Universitatis Francisci Josephi I.) и где до лета 1913. похађа предавања на Филозофском факултету (Група математичких наука). Два професора, говорио је Кашанин, остала су му у најлепшој успомени, како по томе што је од њих научио тако и за њихов лични однос према њему и поверење које су му указивали. То су били професор анализе Владимир Варињак (1865–1942) и професор геометрије Јурај Мајцен (1875–1924). Код професора Владимира Варињака стиче солидно знање из анализе, а код професора Јураја Мајцена упознаје се са достигнућима ондашње геометрије. 1912. године Кашанин је студент демонстратор, односно асистент из Геометрије код професора Мајцена, а 1913. године постављен је за студента демонстратора–асистента за Анализу код професора Варињака.

Септембра 1913. године Кашанин прелази на Универзитет у Будимпешти и наставља студије математике. У Будимпешти учио је математику на истом факултету где је студирао Богдан Гавриловић (1864–1947) којег ће Р. Кашанин заменити у настави математике на Техничком факултету у Београду. Школску 1913/1914. годину провео је у Будимпешти. Била је то година из-

међу балканских ратова и Првог светског рата када су га више од математике занимале друге ствари и догађања. 1913. и 1914. године у Будимпешти био је председник друштва „Коло младих Срба“.

Прекид школовања. Први светски рат

По избијању Првог светског рата 1914. године Р. Кашанин прекида студије у Будимпешти и као аустроугарски поданик бива мобилисан и у аустроугарској војсци је ради одслужења војног рока у ђачкој чети. После обуке и положеног официрског испита Р. Кашанин је 25. маја 1915. године у борбеној јединици упућен на руски фронт (Галиција), где је убрзо 5. јуна 1915. године код села Сновидова на Дњепру прешао Русима. Овим чином од је показао изузетну храброст, јер бекство аустроугарског официра у ратним условима повлачило је смртну казну. Једно време био је у руским логорима у Тарнопољу и Кијеву. За отклањање сумње код Руса да је аустроугарски шпијун много му је помогло извесно знање црквено-словенског језика и јасно исказивање молитве „Оче наш“. Септембра 1915. године Кашанин се пријавио за добровољца у српској војсци.

Када се у Одеси почела формирати Српска добровољачка дивизија, 16. априла 1916. године, пуковник Стеван Хацић, командант Српске добровољачке дивизије, поставља Радивоја Кашанина за ађутанта команданта Првог пука у чину пешадијског потпоручника. У том чину и звању био је 1916. године на фронту у Добруци, 1917. у Бесарабији и 1918. на Солунском фронту.

У Одеси, 1917. године, Р. Кашанин упознаје Катарину Чабрић, студента медицине, која помаже у раду војне болнице, а која ће постати његова супруга 1919. године.

1917. године Р. Кашанин је одликован руским орденом Свете Ане 3. степена.

Новембра месеца 1917. године Кашанинов пук у саставу Добровољачке дивизије креће из Етулије (Бесарабија) за Грчку и стиже у Солун око Божића 1917. године. Марта месеца 1918. године пук у којем се налазио Р. Кашанин запосео је положаје на Добром Пољу. 15. септембра 1918. године започиње офанзива на Солунском фронту као и његов пробој и Кашанин је у не-

прекидним борбама и маршевима преко Кавадараца, Штипа и Кочана до избијања на бугарску границу код Царевог Села, а затим настављајући борбе и маршеве преко Велеса, Скопља и Качаника пролази кроз Призрен и зауставља се у Ђаковици. 1. новембра 1918. Београд је ослобођен, а 25. новембра 1918. године Војводина са Барањом присаједињена је Краљевини Србији. Велика радост и задовољство за српског официра Радивоја Кашанина. Новембра 1918. године Р. Кашанин је дочекао крај рата у Ђаковици.

Под униформом, када је српска војска ослободила Београд, ађутант пука потпоручник Радивоје Кашанин планира одлазак у Париз ради довршења студија математике и у том смислу користи присуство француских официра и војника за учење француског језика. У томе му је знатно помогло солидно знање латинског, немачког, грчког и мађарског језика.

1918. године Р. Кашанин је одликован орденом Белог орла са мачевима 4. степена, а 1919. године Златном медаљом за храброст и енглеским орденом Ратни крст са мачевима.

После петогодишњег војевања, септембра 1919. године, Радивоје Кашанин бива демобилисан и скида униформу. Исте јесени почиње да обнавља знања са студија у Бечу, Загребу и Будимпешти и тражи одлазак у Париз како би завршио студије математике.

Новембра 1919. године Радивоје Кашанин се венчава са Катарином Чабрић. У браку су рођена њихова деца: кћи Радмила (1922), кћи Вера (1925) и син Милан (1930).

Завршетак студија у Паризу

Године 1920. Радивоје Кашанин одлази у Париз да би завршио студије прекинуте ратом. На Сорбони у Паризу слуша предавања и похађа семинаре код чувених француских професора Пикара (E. Picard), Адамара (J. Hadamard), Лебега (H. Lebesgue), Монтела (P. Montel), Гурса (E. Goursat) и других. 21. новембра 1921. године Радивоје Кашанин је дипломирао на Сорбони (Licence ès Sciences mathématiques), пошто је положио испите из математике, рационалне механике и астрономије. Курсеве Гурса из математике и Апела (P. Appell) из рационалне механике он је добро проучио. По завршетку студија математике,

рационалне механике и астрономије, Радивоје Кашанин се вратио у Београд са широким и темељним знањем из ових области.

УНИВЕРЗИТЕТ И АКАДЕМИЈА НАУКА

На предлог професора Богдана Гавриловића, 30. марта 1922. године, Универзитетска управа изабрала је Радивоја Кашанина за асистента за математику на Техничком факултету у Београду. Тада, у оквиру Математичког семинара Универзитета у Београду, поред Михаила Петровића, Богдана Гавриловића, Милутина Миланковића, Антона Билимовића, Николе Салтикова, Петра Зајончковског, Вјачеслава Жардецког, Тадије Пејовића, у раду учествује и Радивоје Кашанин. Са овако увећаним бројем математичара у Математичком семинару, са својим широким, разноврсним и квалитетним знањем из многих области математике, стеченим на разним европским универзитетима, учинили су да се појаве и први резултати тако организованог рада на Универзитету у Београду и Академији наука.

9. маја 1924. године, према реферату професора др Михаила Петровића и др Антона Билимовића, Филозофски факултет Универзитета у Београду прихвата Кашанинов рад „О аналитичким облицима мултиформних функција“ за докторску тезу. Пред Комисијом коју су сачињавали професори др Михаило Петровић и др Антон Билимовић 20. новембра 1924. године Радивоје Кашанин је одбранио своју докторску тезу под насловом „О аналитичким облицима мултиформних функција“. После предаје 100 штампаних примерака своје докторске тезе Управи Филозофског факултета Универзитета у Београду, што за почетника није био мали трошак, Радивоје Кашанин је проглашен за доктора филозофије Универзитета у Београду (Радивоје Кашанин: О аналитичким облицима мултиформних функција, Београд 1925, стр. (4) + 36 + (1)).

1925. године Тадија Пејовић одлази на једногодишњу специјализацију у Париз, а за то време његове часове на Филозофском факултету преузима Радивоје Кашанин. 30. априла 1925. једна група наставника Универзитета у Београду, у којој се налази и Р. Кашанин, покреће поступак за изградњу нове Астрономске опсерваторије.

О АНАЛИТИЧКИМ ОБЛИЦИМА МУЛТИФОРМНИХ ФУНКЦИЈА

УКСЗА
РАДИВОЈ КАШАНИНУ

Дисертација из математике од стране
мл. проф. Радивоја Кашанина у Београду 8. маја 1924
године пред комисијом професора: др Михаило
Петровић и др Антон Билимовић. —
Докторска дисертација из математике у Државној
академији у Београду 8. маја 1924. године.



ИЗДАВАЧКИМ
Грађевинско-машинско-електричким
1924.



Сл. 1.

Радивоје Кашанин полагао је докторски испит 1924. године пред комисијом професора: др Михаило Петровић и др Антон Билимовић. — Изглед насловне стране објављене дисертације

Радивоје Кашанин са младим Јованом Караматом покреће 1931. године часопис Математички лист за ученике средњих школа

13. маја 1926. године Радивоје Кашанин је изабран за доцента Универзитета у Београду на Техничком факултету. 1926. и 1927. године Р. Кашанин у Српској краљевској академији објављује своја четири рада: О аналитичким облицима мултиформних функција (*Sur les formes analytiques des fonctions multiformes*), Српска краљевска академија, Глас СХVII, Први разред, књ. 53, Београд 1926, стр. 11–49; О међусобном утицају критичких тачака (*Influence mutuelle des points critiques*), Српска краљевска академија, Глас СХVII, Први разред, књ. 53, Београд 1926, стр. 51–64; О мултиформним интегралима Рикатијеве диференцијалне једначине (*Sur les intégrales multiformes de l'équation de Riccati*), Српска краљевска академија, Глас СХХ, Први разред, књ. 55, Београд 1926, стр. 35–66; О једној класи мултиформних функција (*Sur une classe des fonctions analyti-*

ques multiformes), Српска краљевска академија, Глас СХХVII, Први разред, књ. 58, Београд 1927, стр. 67–86. Наведена група радова садржи и докторску тезу Радивоја Кашанина. У овим радовима он уводи један нов појам – закон мултиформности око изоловане тачке. То је веза $F(x, y_0, y_1) = 0$ која постоји између две детерминације y_0 и y_1 мултиформне аналитичке функције $y(x)$ у тачки x ако се из детерминације y_0 добија детерминација y_1 једним обиласком око изоловане тачке x_0 у позитивном смеру по једноставној затвореној кривој линији. Кашанин у тим радовима посматра два основна проблема: 1) Да ли за дати закон мултиформности постоји мултиформна аналитичка функција и који је њен аналитички облик? и 2) За мултиформну аналитичку функцију, дату директно или преко диференцијалне једначине, одредити закон мултиформности, а преко њега испитати особине саме функције. Међу тим радовима посебан значај има рад О мултиформним интегралима Рикатијеве диференцијалне једначине. Садржина овога рада састоји се у следећем важном исказу:

Нека су A, B и C аналитичке функције које су у домену D униформне и једна од њих или више заједно, имају једну сингуларну тачку x_0 , тада Рикатијева диференцијална једначина

$$y' = Ay^2 + By + C \quad (1)$$

има у D један униформни интеграл h или два, h_1 и h_2 или три. У првом случају закон мултиформности општег интеграла $y(x)$ око тачке x_0 је

$$\frac{1}{y_1 - h} = \frac{1}{y_0 - h} + g(x) \quad (2)$$

а у другом

$$\frac{1}{y_1 - h} = \frac{a}{y_0 - h}, \quad (3)$$

где је a константа $\neq 1$ и где су $h(x)$ и $g(x)$ униформне аналитичке функције у D . Ови закони мултиформности су карактеристика једначине (1) и не зависе од интеграционих констаната.

Ако је x_0 у D једина критичка тачка мултиформне аналитичке функције $y(x)$ и ако је око x_0 њен закон мултиформности дат са (3), где је a константа $a \neq 1$ и $h(x)$ и $g(x)$ у D униформне аналитичке функције, тада свакој тачки x из D одговара једна двојна логаритамска спирала (или круг ако је $|a| = 1$) на којој леже све детерминације функције $y(x)$ добијене циркулацијом око критичке тачке x_0 . Ово

значи да се у у-равни за развој x из D добија један систем двојних логаритамских спирала. Ако су испуњене извесне особине тога система спирала, тада је тим системом потпуно одређена Рикатијева диференцијална једначина (1) чији општи интеграл је дат функцијом $u(x)$. У случају $a = 1$, систем тих спирала прелази у систем кругова.

У раду О упрошћавању диференцијалних једначина првог реда помоћу њихових партикуларних интеграла (*Sur la simplification des équations différentielles à l'aide des leurs intégrales particulières*), Српска краљевска академија, Глас СХХХIV, Први разред, књ. 63, Београд 1929, стр. 159–174, Кашанин посматра диференцијалну једначину облика

$$(A) \quad y' = M_1 y^{m_1} + M_2 y^{m_2} + \dots + M_k y^{m_k}, \quad 0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k,$$

где су M_1, M_2, \dots, M_k ма какве функције од x и нису идентички једнаке нули, а m_1, m_2, \dots, m_k цели бројеви и при томе поставља проблем: Да ли постоји смена $y = g(u_1, Y)$, где је u_1 партикуларни интеграл диференцијалне једначине (A) којом се она своди на диференцијалну једначину

$$(B) \quad Y' = N_1 Y^{n_1} + N_2 Y^{n_2} + \dots + N_s Y^{n_s}, \quad 0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s,$$

где су N_1, N_2, \dots, N_s функције од u_1 и од M_1, M_2, \dots, M_k а n_1, n_2, \dots, n_s опет цели бројеви, али тако да буде $n_s < m_k$.

За једначину (A) Кашанин посматра бројеве $m_1-1, m_2-1, \dots, m_{k-1}$. Сви ови бројеви су цели; они су и позитивни, сем евентуално првог који може бити -1 и 0 (ако је $m_1 = 0$ или $m_1 = 1$), и другог који може бити 0 (ако је $m_1 = 0, m_2 = 1$). Ако ови бројеви немају заједнички делитељ, рећи ћемо да је једначина (A) редукована. Ако имају заједнички делитељ m , тада је $m > 1$. Сменом $y = \frac{1}{m} Y$, једначина (A) се своди на једначину

$$Y' = \sum_{i=1}^k m M_i Y^{1 + \frac{m_i - 1}{m}} = \sum_{i=1}^k N_i Y^{n_i},$$

где је $1 + \frac{m_i - 1}{m} = n_i < m_k$. Тако се једначина (A), која није редукована, наведеном сменом, и без познавања партикуларног интеграла, може трансформисати у једначину истог типа, али са ма-

њим степеном полинома по Y . Ради тога, у наведеном проблему Р. Кашанин узима да је једначина (А) редукована и доказује следеће тврђење: Ако је једначина (А) редукована, онда се она сменом $y=g(y_1, Y)$ може трансформисати у једначину истог облика но мањег степена полинома онда и само онда ако је то Рикатијева једначина, тј. једначина облика

$$y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2.$$

1929. године Радивоје Кашанин учествује на Првом конгресу математичара словенских земаља у Варшави (23–27. септембра), где је у друштву М. Петровића, Н. Салтикова, Ј. Карамате као и свог професора Владимира Варићака са студија у Загребу.

25. марта 1930. године Кашанин је постављен за ванредног професора Универзитета у Београду на Техничком факултету. Исте године он почиње са писањем свога значајног и обимног дела „Виша математика“ за студенте технике.

Године 1931. Кашанин учествује на Конгресу румунских математичара у Турну–Северину.

1931. године почиње да излази часопис Математички лист за средњу школу, чији је један од оснивача и уредника био професор Кашанин. Часопис је излазио само две године.

1938. године Р. Кашанин објављује свој запажени рад: Sur les divers procédés d'interpolation, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. VI–VII, Belgrade 1938, pp. 240–266. У овом раду он разматра интерполацију и апроксимацију дате функције полиномом. Проблем интерполације функције $f(x)$ полиномом $P_{n-1}(x)$ степена $n-1$ ($n = 1, 2, \dots$) који са $f(x)$ има n заједничких тачака (x_i, y_i) ($x_i \neq x_j$ за $i \neq j$), где је $y_i = f(x_i)$ своди на решавање система једначина

$$(a_1) \quad P_{n-1}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

У пракси, решавање система (a_1) зависи од тога у ком облику је написан полином $P_{n-1}(x)$. Кашанин га овде узима као линеарну комбинацију n полинома $p_0(x), p_1(x), \dots, P_{n-1}(x)$ који су степена $\leq n-1$, тј. у облику

$$(a_2) \quad P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k p_k(x),$$

па се систем (a_1) у овом случају своди на

$$(a_3) \quad \sum_{k=0}^{n-1} A_k p_k(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Линеарни систем (а₃) по n непознатих A_0, A_1, \dots, A_{n-1} има детерминанту

$$(a_4) \begin{vmatrix} p_0(x_0) & p_1(x_0) & \dots & p_{n-1}(x_0) \\ p_0(x_1) & p_1(x_1) & \dots & p_{n-1}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_0(x_{n-1}) & p_1(x_{n-1}) & \dots & p_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Нека је $D(x)$ детерминанта која се добија из детерминанте (а₄) када се у њеном првом реду x_0 замени са x . Како је $D(x)$ полином по x највише степена $n-1$ и анулира се за $x=x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, он се може анулирати и за $x = x_0$ само ако је идентички једнака нули, што значи да детерминанта (а₄) система (а₃) може бити једнака нули само ако је $D(x) \equiv 0$. Ако се детерминанта $D(x)$ развије по елементима њене прве врсте, то би значило да су полиноми $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ линеарно зависни. Зато, ако су полиноми $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ линеарно независни, тј. ако образују базу, детерминанта (а₄) биће различита од нуле па ће систем (а₃) имати јединствено решење.

У пракси се користе различите базе. То су:

1° Степени: $p_k(x) = x^k$ ($k=0, 1, \dots, n-1$). У овом случају полином $P_{n-1}(x)$ има једноставан облик, али се у систему (а₃) у свакој једначини јављају све непознате A_k , па је њихово налажење прилично отежано.

2° Lagrange-ови полиноми:

$$p_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_{n-1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_{n-1})},$$

$$k=1, 2, \dots, n-1; p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_{n-1})}$$

за које је

$$p_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{за } i \neq k \\ 1 & \text{за } i = k \end{cases}$$

због чега се систем (а₃) своди на

$$(a_5) \quad p_i(x_i)A_i = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

где свака једначина садржи по једну непознату A_i , одакле се добија $A_i = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). У овом случају A_i су лако одређени, али су зато Lagrange-ови полиноми $p_k(x)$ прилично компликованог облика.

3^о Newton-ови полиноми:

$$p_0(x) = 1, p_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{k-1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1) \dots (x_k-x_{k-1})} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

за које је

$$p_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{за } i \neq k \\ 1 & \text{за } i = k \end{cases}$$

па се систем (а₃) своди на

$$(a_6) \quad \sum_{k=0}^i A_k p_k(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

у којем прва једначина садржи само A_0 , друга само A_0 и A_1 , итд. и где се непознате A_0, A_1, \dots, A_{n-1} узастопно одређују помоћу претходно већ израчунатих.

У овом раду Кашанин се не одређује ни за једну од наведених база, већ успева да у општем случају систем (а₃) замени једним системом са истим бројем једначина али таквих да се у свакој од њих јавља само једна од непознатих A_k . После тога он уводи појам коњуговане и самокоњуговане базе и доказује следећи став:

За сваки скуп вредности x_0, x_1, \dots, x_{n-1} ($x_i \neq x_j$ за $i \neq j$) постоји база $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ полинома која је самокоњугована.

За ту, такозвану Legendre-ову базу, Кашанин даје и рекурентни образац за њено налажење.

Самокоњугованост Legendre-ове базе написана у експлицитном облику гласи:

$$p_k(x_0)p_v(x_0) + p_k(x_1)p_v(x_1) + \dots + p_k(x_{n-1})p_v(x_{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{за } v \neq k \\ \neq 0 & \text{за } v = k \end{cases}$$

Узмимо сада $m+1$ ($0 \leq m \leq n-1$) првих чланова интерполационог полинома $P_{n-1}(x)$ по бази (p_k) , тј.

$$s_m(x) = A_0 p_0(x) + A_1 p_1(x) + \dots + A_m p_m(x),$$

где $s_m(x)$ представља m -ти одсек полинома $P_{n-1}(x)$ по бази (p_k) . Интересантан је случај $m \leq n-1$, јер је $s_{n-1}(x) = P_{n-1}(x)$ за свако x . Однос одсека $s_m(x)$ према интерполационом полиному $P_{n-1}(x)$ а тиме и према функцији $f(x)$ која се интерполира је важно питање. Овај однос зависи од усвојене базе. Тако:

1^о За базу степена (x^k) одсек $s_m(x)$ је полином степена m који у тачки $x=0$, $y=P_{n-1}(0)$ са полиномом $P_{n-1}(x)$ има додир реда m (а са функцијом $f(x)$, у општем случају, не мора имати било шта заједничког).

2° За Lagrange-ову базу (p_k) одсечак $s_m(x)$ је полином степена $n-1$ који са $P_{n-1}(x)$ а тиме и са $f(x)$, што није тешко видети, има заједничке тачке (x_i, y_i) за $i = 0, 1, \dots, m$ ($y_i = P_{n-1}(x_i) = f(x_i)$), што значи $s_m(x_i) = y_i$.

3° За Newton-ову базу (p_k) одсечак $s_m(x)$ је полином степена m који са $P_{n-1}(x)$ а тиме и са $f(x)$, што није тешко видети, има заједничке тачке (x_i, y_i) за $i = 0, 1, \dots, m$, што значи $s_m(x_i) = y_i$.

4° За Legendre-ову базу (p_k) одсечак $s_m(x)$ је полином степена m . Да би утврдио везу између $f(x)$, $P_{n-1}(x)$ и $s_m(x)$, Кашанин са $r_m(x)$ означава произвољан полином степена m који је уређен по Legendre-овој бази, наиме

$$r_m(x) = B_0 p_0(x) + B_1 p_1(x) + \dots + B_m p_m(x).$$

Варирајући B_0, B_1, \dots, B_m добиће се сви могући полиноми степена $\leq m$, па међу њима и одсечак $s_m(x)$. Ако су задате тачке $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ и тачкама (x_i) одговарајућа Legendre-ова база, тада између свих могућих полинома $r_m(x)$ степена m , одсечак $s_m(x)$ по Legendre-овој бази је онај који минимизира израз

$$\sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) - r_m(x_i)]^2.$$

Ефикасност апроксимације функције $f(x)$ одсечцима $s_m(x)$ можемо повећати на два начина: при фиксираним броју интерполационих тачака, смањивањем размака у којем се оне морају налазити, или, при фиксираним размаку, увећавањем броја интерполационих тачака које у њему леже. Први поступак када се размак смањује док се не сведе на једну тачку, може се спровести са Newton-овом базом и тако добити Taylor-ов образац, а други, увећањем броја интерполационих тачака до бесконачности, када је у питању размак $(-1, 1)$ може се спровести са Legendre-овом базом и тако добити ортогонални развој по Legendre-овим полиномима.

Део обимног рада на писању математике за студенте технике, започетог 1930. године, Р. Кашанин завршава објављивањем књиге: Виша математика I, Београд 1934, стр. 627.

На студијама у Бечу, Загребу, Будимпешти, а нарочито у Паризу, Кашанин је стекао широка и солидна знања и из механике и астрономије. Овим наукама он је такође поклањао посебну пажњу. Тако, у периоду између 1932. и 1939. године он објављује своја четири рада из области астрономије у публикацији: *Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade*. Међу овим радовима је посебно обиман рад: *Sur les erreurs des observations, Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. IV, Bel-*

grade 1939, pp. 1–48. У прва три рада Кашанин изучава кретања малих планета и њихове међусобне положаје. У четвртом раду он детаљно разматра проблем грешака посматрања, што за астрономију, а и шире, има како теоријски тако и велики практични значај.

Указом министра просвете професор Радивоје Кашанин је 1936. године постављен за управника Студентског дома краља Александра Првог у Београду. Ову дужност обављао је до 1941. године и за све време испољавао је велику бригу о свим студентима станарима тога дома.

28. новембра 1939. године Радивоје Кашанин је постављен за редовног професора Универзитета у Београду на Техничком факултету. Исте године он је одликован орденом Светога Саве 3. степена.

1940. године Р. Кашанин започиње рад под називом „Основи теоријске механике“. Са већим паузама, овај рукопис он је завршио 1977. године. Оригинални текст тога рукописа на 198 страна са два прилога налази се у Архиву САНУ.

Време окупације у току Другог светског рата Р. Кашанин је провео у Београду. Тада Универзитет у Београду није радио.

На Васкрс, 16. априла 1944. године енглески и амерички авиони бацају бомбе на Београд. Том приликом бомба је погодила и разрушила дом Кашанина (угао улица Краља Александра и Стишке) уништивши професорову библиотеку и ствари у кући, док породица Кашанин чудним случајем остаје жива.

1945. године обновљен је рад Универзитета у Београду и јуна исте године Радивоје Кашанин је преузет у звању редовног професора за предмет Математика на Техничком факултету. Школске 1945/46. године Министарство просвете Србије Р. Кашанина поставља за хонорарног професора за предмет Рационална механика на Филозофском факултету у Београду.

2. марта 1946. године професор Радивоје Кашанин је изабран за дописног члана Српске академије наука (САН).

Када је 1946. године основан Математички институт САН, Кашанин се укључује у рад тога Института. Од 1952. до 1958. године Кашанин је управник Математичког института. 1950. године Математички институт САН покреће издавање часописа „Зборник радова Математичког института“. За уредника тога часописа постављен је Радивоје Кашанин. Ову дужност успешно је обављао наредних десет година.

1948. године Р. Кашанин објављује рад: *Les équations générales du mouvement d'un système de points matériel aux liaisons données*, Publica-

tions de l'Institut mathématique, Académie Serbe des Sciences, t. II, Belgrade 1948, pp. 116–130. У њему Кашанин посматра везе дате једначинама међу генералисаним координатама и њиховим изводима ма ког реда у најопштијем облику и тражи све силе веза које ће омогућити кретање система материјалних тачака у сагласности са датим везама. При томе он показује да се међу свим силама веза истичу идеалне силе веза и да оне чине језгро сила веза и морају се у свакој прилици узети у обзир. За ове силе веза дато је њихово механичко обележје.

1948. године основана је Техничка велика школа у Београду. За њеног ректора Радивоје Кашанин је био постављен два пута (1950/51 и 1951/52). Као ректор Техничке велике школе у Београду он се залагао за подизање наставе на виши ниво на свим њеним факултетима, како основних тако и стручних предмета, за опремање лабораторија и набавку књига и часописа, а посебно за научноистраживачки рад.

1949. године из штампе излази треће издање Кашанинове књиге Виша математика I на 847 страна. Ово дело издала је „Научна књига“ из Београда. Исте године у „Научној књизи“ излази Кашаниново обимно дело Виша математика II, књига прва, Београд 1949, стр. 624 + VIII.

1950. године у „Научној књизи“ излази још једно значајно дело Радивоја Кашанина Виша математика II, књига друга, Београд 1950, стр. 680 + VIII. Овом књигом професор Радивоје Кашанин је завршио своје огромно дело написавши уџбеник Виша математика, који ће служити не само студентима технике већ и свима који се математиком баве или је примењују.

Поглавља која садрже ове три књиге су:

Виша математика I: Детерминанте. Вектори. Векторско множење. Функције једне променљиве—Права и раван. Криве линије у равни. Функције више независних променљивих—Раван и права у простору. Површине и криве линије у простору. Граничне вредности низова. Непрекидне функције. Извод. Тангента и нормала — Диференцијали — Лук. Примитивне функције. Изводи вишег реда—Кривина. Полиноми. Проширена теорема о разлагању—Додир кривих линија у равни. Тајлорова и Њутнова формула. Дефиниција и израчунавање одређеног интеграла. Приближно израчунавање интеграла. Примена одређеног интеграла на геометријска мерења. Периодичне функције—Фуријеов ред. Основни појмови о диференцијалним једначинама. Делимични изводи—Потпуни диференцијали. Имплицитне функције. Тангенцијал-

ни елементи кривих линија у простору. Рачунање с приближним вредностима.

Виша математика II-1: Пунктуалне координате. Површине другог реда. Пол, полара, поларна раван. Тангенцијалне и линијске координате. Полиноми. Рационалне функције. Имплицитне функције. Зависност међу функцијама—Замена променљивих. Бесконачни редови. Низови и редови функција. Цели редови. Мајоранте—Трансформација целог реда. Бесконачни производи и верижни разломци—Дивергентни редови. Појам криве линије и површине. Криве линије у простору. Површине. Додир—Обвојнице. Неке специјалне криве линије и површине.

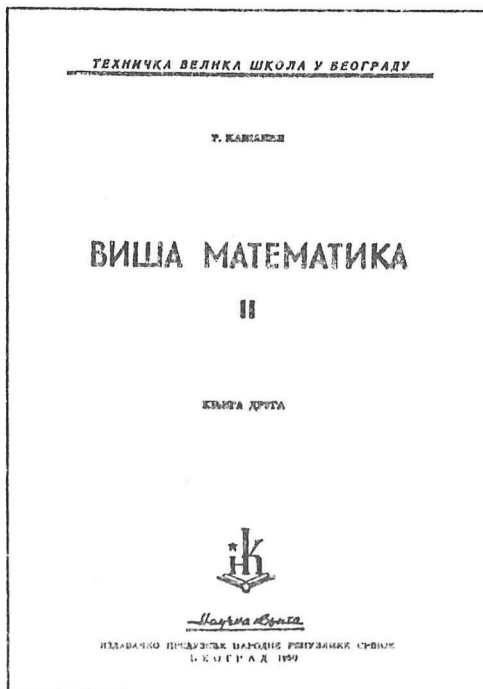
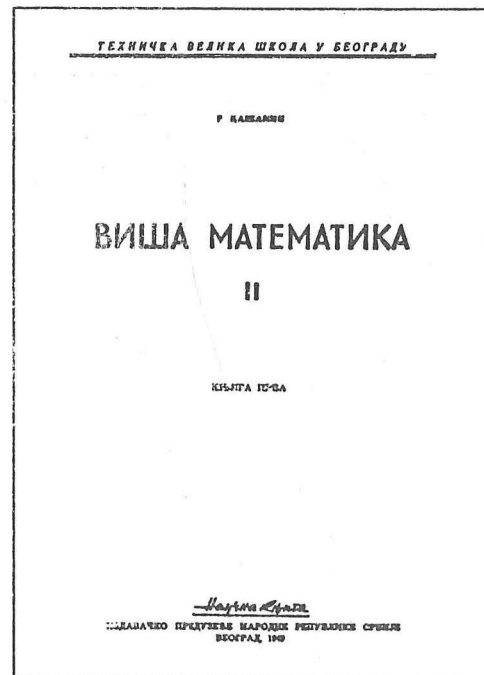
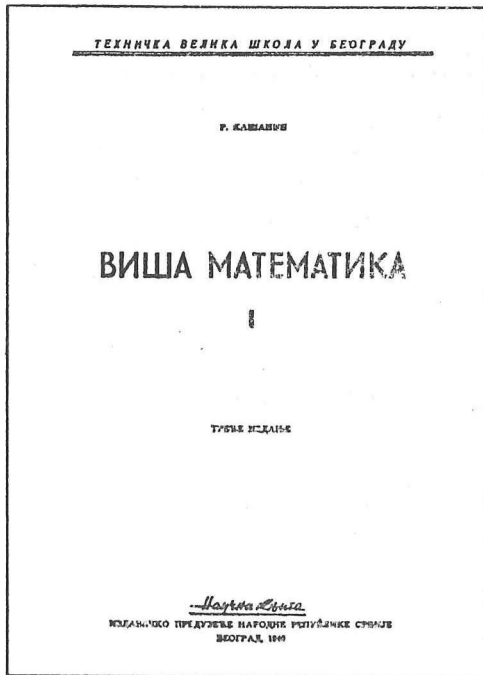
Виша математика II-2: Неодређени интегрални. Одређени интегрални. Функције дефинисане интегралом. Тригонометријски редови. Двоструки интегрални. Троструки интегрални. Криволинијски и површински интегрални. Скаларна и векторска поља. Њутнов и логаритамски потенцијал. Диференцијалне једначине. Диференцијалне једначине првог реда. Системи диференцијалних једначина. Диференцијалне једначине вишег реда.

Излазак ових књига из штампе, написаних на 2.150 страна, био је значајан догађај у културном животу Београда, Србије и Југославије. Преко тих књига у нашу математику ушла је математичка строгост и прецизност, посебно у наставу где је подигнут њен укупни ниво (не само на техничким факултетима) разбијањем формализма.

У уџбенику Виша математика, без сумње једном од најбољих уџбеника те врсте код нас, који је плод не само дугогодишњег наставног искуства већ и дугогодишњег савесног проучавања свих делова који од елементарног знања доводе до нових појмова, сва излагања су јасно исказана и обрасци прецизно изведени, записао је 1989. Миодраг Томић.

За свој уџбеник Виша математика Радивоје Кашанин је 1949. године добио награду Владе ФНРЈ.

Р. Кашанин и даље обрађује проблеме из Рационалне механике и 1951. године објављује обиман рад: Опште једначине кретања система материјалних тачака (*Les équations générales du mouvement d'un système de points matériels*), Српска академија наука, Зборник радова, књ. VII, Математички институт, књ. 1, Београд 1951, стр. 17–57. У овом раду дате су диференцијалне једначине свих реалних кретања са гласних са везама без обзира на то какве су ове везе: холономне, или нехолономне, линеарне по брзинама или не. Између свих могућих реалних кретања истакнута су и дефинисана кретања са идеално успо



Сл. 2. Насловна страна (корице) уџбеника Виша математика I - треће издање, објављено 1949. године

Сл. 3. Насловна страна (корице) уџбеника Виша математика II - књига прва, објављено 1949. године

Сл. 4. Насловна страна (корице) уџбеника Виша математика II - књига друга, објављеног 1950. године

стављеним везама. Поред тога, појам виртуелних померања је дат у најопштијем случају веза и на основу тога изведена је такозвана основна једначина Динамике ма за какве везе. На крају, појму кретања са идеално успостављеним везама дато је конкретно тумачење.

 СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

 ACADEMIE SERBE DES SCIENCES

 RECUEIL DES TRAVAUX
 T. VII
 INSTITUT MATHEMATIQUE
 № 1

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. VII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. I

 Уредник:
 Дописник Д-р РАДИВОЈ КАШАНИН
 управник Математичког института САН

 Примљено на XII скупу Одељења природно-математичких наука
 7 XII 1950 године

 БЕОГРАД
 1951

 Издавачко предузеће Народне Републике Србије
 Штампарија и књижарница Српске академије наука, Космајска бр. 28

Сл. 5. Основао је и десет година уређивао часопис Зборник радова
 Математичког института у Београду

Фебруара 1952. Кашанин учествује на Првом југословенском конгресу рационалне и примењене механике на Бледу.

На предлог М. Миланковића од 13. маја 1952. године Р. Кашанин је поред чланства у Одељењу природно-математичких наука постао и члан Одељења техничких наука САН.

У раду: Интегрални диференцијабилни функција (*Les intégrales des fonctions différentiables*), Српска академија наука, Зборник радова књ. XXXV, Математички институт, књ. 3, Београд 1953, стр. 29–44 Р. Кашанин посматра диференцијабилне функције двеју независних променљивих x и y , указује да се на диференцијабилне функције налази при разматрању функција једне комплексне променљиве и код криволинијских интеграла. При томе он изводи једну општу особину диференцијабилних функција, а затим проширује извесне интегралне теореме на диференцијабилне функције служећи се елементарним средствима анализе. Као главни став који се у овом раду доказује је

Став А:

Претпоставке: 1° Функције $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ диференцијабилне су у отвореном подручју D :

$$2^\circ \text{ у } D \text{ је } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$$

3° Затворена Жорданова крива линија K лежи у D и може се ректифицирати;

4° Затворено подручје (K) , чија је контура K , део је подручја D и може се разложити у коначно много подручја нормалних и с обзиром на x - и с обзиром на y -осовину.

Тврђење:

$$\int_K P dx + Q dy = 0.$$

(Подручје је нормално с обзиром на x -осовину ако му контуру чине праве $x = a$ и $x = b$ и криве $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где су функције $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрекидне за $a < x < b$ и $f_1(x) < f_2(x)$. Аналогно за y -осовину).

Доказ је сличан класичном доказу који је дао Goursat за Cauchy-еву теорему.

H. Loomann у свом раду: Über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, Gött. Nachr. 1923, p. 97–108 доказао је ово:

Нека су $p(x, y)$ и $q(x, y)$ две једнозначне у G дефинисане функције од x и y које задовољавају ове услове а) $p(x, y)$ и $q(x, y)$ су непре-

кидне у (x, y) ; б) у свакој тачки постоје $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial q}{\partial x}$; ц) изузевши

једног скупа мере нула важи $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Тада

$$\int p dx + q dy = 0$$

дуж сваког оног правоугаоника са странама паралелним осовинама чија унутрашњост и контуре падају у G .

Претпоставке су овде шире него у Ставу А: не тражи се диференцијабилност функција p и q , већ само егзистенција извода

$\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial q}{\partial x}$ и непрекидност функција p и q . Но, резултат је ужи

него онај у Ставу А: код Ломана је K специјална крива линија, наиме правоугаоник чије су стране паралелне координатним осовинама.

У овом раду Р. Кашанин доказује и још неке ставове. Када се уведе појам интеграла и код комплексних функција, добијени одговарајући резултати дају Коши-јеву теорему, Коши-јев интеграл и теорему Морера. Подлога за све то је Став А.

10. јуна 1955. године Радивоје Кашанин је изабран за редовног члана САН у Одељењу природно-математичких наука.

На захтев и молбу Одељења техничких наука САН Кашанин је постављен за секретара овог одељења, тиме што је преузет на две године од Одељења природно-математичких наука, а на том положају је био од 29. јуна 1955. до 15. априла 1959. године.

Од 1. октобра 1957. године Радивоје Кашанин замењује оболелог академика Милутина Миланковића на дужности потпредседника САН. Ову дужност он је обављао до 12. јануара 1959. године.

После предаје дужности управника Математичког института САН Миодрагу Томићу, тада дописном члану САН, Р. Кашанин је изабран марта 1958. године за председника Научног савета института. На овој дужности био је све до оставке маја 1961. године.

Након 35 година рада на техничким факултетима Универзитета у Београду, где је предавао Вишу математику I, Диференцијални и интегрални рачун и Вишу математику II, био шеф Катедре за математику и у време постојања Техничке велике школе био два пута њен ректор, Радивоје Кашанин 30. априла 1957. године одлази у пензију по својој жељи као редовни професор Електротехничког факултета Универзитета у Београду.

Професора Кашанина и даље интересују проблеми везани за астрономију. 2. октобра 1957. године у Математичком институту он саопштава свој рад о астрономској рефракцији. За овај рад Кашанин је користио најновије податке о атмосфери добијених помоћу ракета. Рад је штампан следеће године под насловом: *Réfraction astronomique moyenne, Académie Serbe des Sciences, Notes et travaux de la Section d'astronomie de l'Institut mathématique, Vol. II, No. 10-20, Belgrade 1958, pp. 11-20.*

За резултате у научном, стручном и педагошком раду академик Р. Кашанин је 27. априла 1961. године одликован Орденом рада са црвеном заставом, а 1963. године Октобарском наградом града Београда (заједно са академиком Павлом Савићем).

2. марта 1960. године у Математичком институту Кашанин је саопштио рад: Квалитативна анализа путања пројектила теледиригованих по потегу. Ово саопштење изазвало је интересовање стручњака из Војнотехничког института у Београду. У вези са тим

Војнотехнички институт је тражио сарадњу са Кашанином. Марта 1966. године у Војнотехничком институту Кашанин је одржао предавање које је у целини штампано под насловом: Путања пројектила теледиригованих по потегу, Научнотехнички преглед 16(1966), 3, стр. 3–25.

1960. године Р. Кашанин почиње сарадњу са академиком Павлом Савићем на проблемима ротације небеских тела и одређивању њихових астрофизичких величина. У Гласу САН, књ. ССXLV они објављују прве радове из ових истраживања: П. Савић : О настанку ротације система и појединих небеских тела и Р. Кашанин: Земљини слојеви и њихове карактеристике. Исказ П. Савића о ротацији небеских тела и закону густина њихових материјала, Р. Кашанин је у том раду математички описао ротацију и раслојавање небеског тела (овде Земље) на потпуно оригиналан начин. Ова два наведена рада П. Савића и Р. Кашанина представљају основу за све наредне радове о понашању материјала под великим притисцима објављене са потписом П. Савић –Р. Кашанин. Тако су настале четири монографије П. Савића и Р. Кашанина под насловом: „Понашање материјала под високим притисцима“, објављене у времену од 1961. до 1966. године. Ове монографије су у Београду преведене на енглески, а у Совјетском Савезу, нешто касније, са енглеског на руски и штампани као јединствена књига. (Редактор и уредник ове књиге је проф. др Драган Трифуновић.)

Радивоје Кашанин је учествовао у већем броју комисија за одбрану и комисија за преглед и оцену докторских теза у Српској академији наука и на универзитетима. Већина ових докторских теза је из области математике, а следе области из механике и астрономије.

1968. године академик Радивоје Кашанин добио је Седмојулску награду СР Србије за животно дело.

На предлог Електротехничког факултета у Београду Радивоје Кашанин је 1973. године проглашен за почасног доктора Универзитета у Београду.

Поводом свог 80–ог рођендана, 1972. године, Р. Кашанин је добио Повељу Машинског факултета Универзитета у Београду „За изванредне доприносе у подизању младих кадрова и развој Машинског факултета у Београду“.

1979. године Р. Кашанин добија Повељу Природно–математичког факултета Универзитета у Новом Саду „У знак признања за значајан допринос у раду и развоју факултета“.

Као храбар ратник у Српској добровољачкој дивизији у току Првог светског рата Радивоје Кашанин је био веома цењен међу својим саборцима. Од 1. септембра 1969. године он је председник Управног одбора „Удружења добровољаца 1912–1918“, на којој дужности је био до краја живота.

1971. године из штампе излази књига: Добровољци у ратовима 1912–1918 – Доживљаји и сећања, Београд 1971, стр. 410, чији је одговорни уредник био професор Р. Кашанин.

1977. године из штампе излази још једна књига: Југословенски добровољци у Русији 1914–1918. Београд 1977, стр. 424, чији је одговорни уредник такође био Р. Кашанин.

1982. године, скромно, у свом дому у кругу породице и својих ученика, пријатеља и сарадника, прославио је свој 90–ти рођендан. Гостима је рекао: „Па, изволите, дођите и посетите ме и на мој сто-ти рођендан.“

* * *

Радивоје Кашанин је један од ретких математичара између два светска рата који није био студент Београдског универзитета. Он је студије започео у Бечу, наставио у Загребу и Будимпешти, а завршио у Паризу, стекавши веома широко и темељно знање из математике, рационалне механике и астрономије. Са таквим својим знањем он је могао говорити о свим математичким проблемима онога времена са разумевањем и критички. По доласку на Београдски универзитет одмах се укључио у рад Математичког семинара, где је проширио видике код млађих сарадника, а нарочито код Јована Карамате (1902–1967). Према казивању академика Миодрага Томића (1912–2001), Јован Карамата је често говорио да је велики утицај на њега одиграло познанство, а касније и пријатељство са Радивојем Кашанином. Он му је омогућио, како је сам Карамата говорио, да увиди значај нових области математике – Теорије скупова, Мере и интеграла, а посебно значај строгог доказа.

У својим научним радовима Р. Кашанин је обрађивао проблеме из области диференцијалних једначина, теорије комплексних и реалних функција, анализе, геометрије, интерполације и апроксимације, статистике, рационалне механике, астрономије и геофизике.

Проблем који Кашанин посматра у својим математичким радовима је скоро увек изворан и он није последица неких других ре-

зультата нити уопштења познатих ставова и зато у његовим радовима углавном и нема позива на друге ауторе. Исказ проблема је прост, али начин његовог решавања није једноставан. Он проблем често посматра у специјалном али карактеристичном случају и тада иде ка општем, али дотле док то основне претпоставке у почетку рада допуштају, тако да рад представља једну завршену целину, чиме су основне претпоставке одредиле и крајњи домет рада. То се најбоље види у његовим радовима где се посматрају аналитички облици мултиформних функција, затим у раду који се односи на упрошћавање диференцијалних једначина првог реда помоћу њихових партикуларних интеграла као и у раду у којем се разматра проблем интерполације и апроксимације функције полиномом. Слично је поступао и у радовима из механике и астрономије. Значајем резултата и начином писања, Кашанинови радови вршили су утицај на многе истраживаче. У свим његовим радовима излагања су веома јасно исказана и добијени резултати и обрасци прецизно изведени. То важи и за његов уџбеник Виша математика. Како у својим радовима тако и на предавањима Кашанин је велику важност придавао строгом доказу. Као професор на техничким факултетима Универзитета у Београду и шеф Катедре за математику на тим факултетима, а посебно кроз свој уџбеник Виша математика, он је подигао ниво наставе из математике, а једно време као ректор Техничке велике школе одиграо је велику улогу и у подизању наставе на виши ниво и код осталих предмета. Преко његовог уџбеника Виша математика ушла је у нашу математику прецизност и строгост доказа.

У Математичком институту, као његов вишегодишњи управник, а касније и председник Научног Савета, неуморно је радио дајући велики допринос развоју и научном угледу овог института. Млађи математичари, као и многи други истраживачи имали су његову подршку и помоћ. И писац ових редова увек ће се са захвалношћу сећати помоћи, савета и упутстава које му је професор Радивоје Кашанин указивао на начин писања свог првог научног рада, истичући да рад треба да је написан јасно, прецизно и сажето. При томе, он је говорио: „Како напишеш први рад, тако ћеш писати и остале.“ Својим великим ауторитетом професор Радивоје Кашанин утицао је на средину да цени научна достигнућа.

За Радивоја Кашанина се може рећи да је био даровит математичар и природњак са широком научном културом. Својим обимним и темељним знањем из више области математике, меха-

нике и астрономије он је био један од наших последњих енциклопедиста. Таквим знањем, укупном деловању у науци, посебним наставничким даром и ретким личним особинама он је у једном периоду вршио велики утицај на нашу средину.

Радивоје Кашанин је био дружељубив и веома духовит. Поред тога имао је велику моћ запажања и памћења. Као такав остао је у најлепшем сећању код свих који су га познавали и са њим сарађивали.

Приликом писања овог текста проф. др Драган Трифуновић ми је ставио на располагање свој рукопис: Математичар Радивоје Кашанин и његово доба (рукопис у припреми за штампу), одакле сам преузео више података о животу и раду Радивоја Кашанина, због чега му дугујем велику захвалност.

ПРОФЕСОР КАШАНИН О СЕБИ

Ја сам пореклом из крајње сиротиње сељачке, што је, вероватно, и био повод да и ја и мој млађи брат Милан одемо у гимназију, јер на селу не бисмо имали од чега живети. Рођен сам у Барањи, у Белом Манастиру, и одатле сам отишао у Осигек, у класичну гимназију, први из свога села откад се за село зна! Три године сам се мучио, никад нисам имао довољно средстава, али сам био одличан ђак. После трећег разреда отишао сам у Нови Сад, у Српску православну велику гимназију – тачно се тако звала. Уредио је то, због чега сам му вечито благодаран, наш сеоски учитељ Јован Славковић. Тамо ме је свесрдно прихватио директор Васа Пушибрк. Тако сам догурао до матуре 1910. године, без материјалних брига, увек с добром стипендијом, коју сам заслужио не по пореклу, већ по – оценама.

Ниједан професор из ове две гимназије није ми остао у рђавој успомени. Што се тиче моје струке, за коју сам се потом определио, велики утицај имао је на мене Стеван Милованов, мој новосадски професор математике. А што сам отишао баш на студије математике, постоје два разлога: прво – био сам заљубљен у астрономију. Тако сам отишао на студије, најпре у Беч, па у Загреб. У Бечу је на мене пресудан утицај извршио онда још млади професор Вилхелм Виртингер. Он ме је на својим предавањима и колквијумима упутио у најмодернија логичка расуђивања.

Другу и трећу годину провео сам у Загребу. Два професора остала су ми у најлепшој успомени, а за свој даљи развој лично сам им захвалан, не само за оно што сам од њих научио већ и за њихов лични однос према мени, за поверење које су ми указивали. То су били професор анализе Владимир Варићак и професор геометрије Јурај Мајцен. На трећој години био сам им, у ствари, већ асистент.

Последњу годину школовања провео сам у Будимпешти, признајем: са slabим пословањем у математици. Била је то она година између балканских ратова и првог светског рата када су нас – природно – много више од струке занимале друге ствари. Баш тада сам био председник омладинског удружења у Будимпешти које се звало „Коло младих Срба“. Имао сам двадесет две године када сам био мобилисан и упућен у Галицију. Имао сам равно двадесет седам година када сам био демобилисан. За тих пет година, ни новине нисам читао, а камоли математику. Предао сам се Русима чим сам могао, и као добровољац у српској војсци био борац, у Добруци и на Солунском фронту. Било нас је у том добровољачком корпусу из свих наших крајева, свих занимања...

Као и из школе, тако су ми и из рата остали у најлепшој успомени моји команданти, Стојан Поповић, Владимир Ковачевић, Петар Радивојевић, Петар Мартиновић, као и, у Београду још жив, Војислав Анђелковић. Може се рећи да је тих пет година за моје студије и за мој научни рад било пет изгубљених година, али, кад би се историја поновила, опет бих исто учинио.

После рата отишао сам у Париз, на Сорбону, ту сам дипломирао из математике, механике и астрономије. Предавали су тада чувени професори Адамар, Пикар, Гурса, Лебег, Монтел, Андоаје. Имао сам тако срећу да прођем кроз две математичке школе овог времена: немачку и француску. Имале су своје особености и своје квалитете, који су ми много користили. Вратио сам се у Београд и постао асистент професора Богдана Гавриловића на Техничком факултету. На Катедри су били и Михаило Петровић Алас и Милутин Миланковић, професори и академици. У њиховом пријатељском друштву био сам од 1922. године па до смрти сваког од њих. Ту сам и докторирао и напредовао од асистента до редовног професора, шефа Катедре и ректора Техничке велике школе.

Поред високе стручне спреме и оригиналних научних радова, сва тројица су се одликовала нечим што највише ценим, што сметрам за људску вредност највишег ранга: љубав према младим генерацијама, разумевање младих људи, несебичност и искрена по-

моћ младим, талентованим људима у њиховом напредовању. Умели су да се радују и да уживају кад се млади људи уздижу. Имао сам срећу да се развијам и радим поред њих, великих ауторитета науке и морала. Да се поносим њиховим пријатељством. Не верујем да је игде постојао такав амбијент какав су створили Гавриловић, Петровић и Миланковић.

Наравно, моји другови и ја морали смо, током времена, да уносимо неке нове ствари да бисмо држали корак с науком у свету. Оно што посебно хоћу да истакнем јесте: никад се томе нису противили, напротив, прихватили су, помагали нам у томе, храбрили да не станемо, да идемо даље.

Три су пресудна момента била у мом формирању. Прво што је на мене утицало у смислу развијања мог начина мишљења била је мала сеоска основна школа где смо се више васпитавали у духу него у знању. У духу националном, природно, јер смо ми тада живели под аустроугарском окупацијом. Друго: завршио сам класичну гимназију. Класика је, уопште, на мене учинила велики утицај. Треће: у оно доба када сам ступао на Универзитет, књижевност и историја мога народа развијале су у мени идеје и љубав према књизи уопште. Знао сам тада напамет све наше песме и песнике, све наше писце и критичаре. То што јесам, имам да захвалим управо томе: без тога бих био само робот. Стварале су ме школе, од основне до универзитета, и уживам у томе што то знам и што могу то да признам.

Ниједна наука није непопуларнија од математике, науке о бројевима и геометријским облицима, иако се оне појављују одмах, на граници несвесног и свесног, одмах на почетку човековог мишљења и размишљања. Тој чудној појави непопуларности математике главни је узрок то што је у математици дилетантизам мање могућ него у било којој другој науци или уметности. Дилетантизам је врло примамљив, али – математика се не учи из брошура. „Нема краљевског пута у геометрији“, прича се да је одговорио Еуклид краљу Птоломеју Филадельфу када је овај зажелио да на неки лак начин дође до геометријских знања.

Дилетанте треба разликовати од аматера: ови су благородни, корисни и сваке пажње и похвале достојни људи. Аматер–песник крије своје стихове и чита их понеком само пријатељу; дилетант закупа све редакције и листове својим стиховима и огорчен је што их не штампају. Аматер–сликар веша своје слике у свом стану, дилетант непрекидно прави изложбе и љут је што нису посећене и што

не пишу добро о њему. Ама тер–музичар свира у својој собици, дилетант приређује јавне концерте и срдит је што на њима нема публике. Ама тер за своје слабости и неуспехе криви себе, дилетанту су увек криви други, пријатељи, средина, прилике, цело друштво. Дилетант не зна Конфучијеву изреку, коју стручњаци и аматери поштују: „Право је знање знати шта знаш и знати шта не знаш“.

Што се у једној струци, свеједно каквој, више употребљава обичан језик којим свако говори, тим је већа могућност за дилетанте: говорећи општепознате речи, имају утисак да знају и саму суштину ствари. У таквим струкама, свако је помало и дилетант, зато су оне и популарне. Математика има свој језик и своје посебности; њих прво треба научити, а зато је потребан истрајан и смишљен рад. Но, ко то научи, тај већ није дилетант: може се бавити математиком и као науком и као средством при изучавању других наука. Ако није баш прави стручњак, он је ама тер. Ако ништа друго, зна да је боље прочитати једну добру књигу него написати две рђаве. Тешко је са онима који тај језик и то писмо не науче, а уобразе да су их научили, али – ређи су него у другим струкама и брзо се уоче. Мада спорије, приметите се на крају и у другим струкама, јер – „све се може измислити осим талента и све се може скрити осим незнања“.

Има и стручњака који оду странпутицом. То су уски специјалисти који у једном исувише скученом подручју своје струке достижу перверзну виртуозност у разним специјалним и непотребним детаљима и чињеницама, не осећајући своју науку и своју струку као целину; не виде њену везу са осталим наукама и струкама, нити знају њихов положај и значај међу осталим манифестацијама људског духа, о којима редовно немају ни појма. Они раде као роботи: хоризонт им је врло узак, а душа пуста. Такви никад не значе ништа, они никоме не могу бити пример. Имао сам срећу што сам се у свом развоју, од сеоске школе у Белом Манастиру до београдске универзитетске катедре, сусретао с правим људима који су могли да ми помогну. Познато је да као професор нисам био благ, али сам задовољан што никад нисам чуо да је о мени неко понео рђав утисак. Трудио сам се да на своје ђаке утичем онако како су на мене утицали моји васпитачи, моји професори.

(Из књиге Драгослава Адамовића, *Разговори са савременицима*, Београд 1982, стр. 131–134 (у редакцији и са предговором академика Радована Самарџића). – Академик Радивој Кашанин саопштио је овај текст аутору књиге 1974. године.)

БИБЛИОГРАФИЈА РАДОВА РАДИВОЈА КАШАНИНА

1. *О аналитичким облицима мултиформних функција*. – Београд 1925, стр. (4)+36+(1). – (Докторска дисертација примљена за докторски испит на седници Филозофског факултета Универзитета у Београду 9. маја 1924, према реферату члана испитног одбора г. г. др Михаила Петровића и др Антона Билимовића редовних професора Универзитета).
2. *О аналитичким облицима мултиформних функција (Sur les formes analytiques des fonctions multiformes)*. – Српска краљевска академија, Глас СХVII, Први разред, књ. 53, Београд 1926, стр. 11–49.
3. *О међусобном утицају критичних тачака (Influence mutuelle des points critiques)*. – Српска краљевска академија, Глас СХVII, Први разред, књ. 53, Београд 1926, стр. 51–64.
4. *О мултиформним интегралима Рикацијеве диференцијалне једначине (Sur les intégrales multiformes de l'équation de Riccati)*. – Српска краљевска академија, Глас СХХ, Први разред, књ. 55, Београд 1926, стр. 35–66.
5. *О једној класи мултиформних аналитичких функција (Sur une classe des fonctions analytiques multiformes)*. – Српска краљевска академија, Глас СХХVII, Први разред, књ. 58, Београд 1927, стр. 67–86.
6. *О уједначавању диференцијалних једначина првога реда помоћу њихових парцикуларних интеграла (Sur la simplification des équations différentielles à l'aide des leurs intégrales particulières)*. – Српска краљевска академија, Глас СХХXIV, Први разред, књ. 63, Београд 1929, стр. 159–174.
7. *Sur la périodicité des oppositions d'une petite planète*. – Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. I, Belgrade 1932, pp. 13–22.
8. *Обвојнице кривих линија у равни (Sur les enveloppes des courbes planes)*. – Српска краљевска академија, Глас СХLVI, Први разред, књ. 72, Београд 1932, стр. 69–83.
9. *Виша мајемајтика I*. – Графички завод „Славија“, св. 1, Београд 1932, стр. 80.
10. *Sur un procédé de calcul direct des oppositions intermédiaires des petites planètes*. – Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. II, Belgrade 1933, pp. 18–38.
11. *Виша мајемајтика I, св. 1*. – Издавачка књижарница Геце Кона, Београд 1933, стр. 160.
12. *Виша мајемајтика I*. – Београд 1934, стр. 627.
13. *Sur les positions relatives de deux astéroïdes*. – Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. III. – Belgrade, 1936, pp. 5–9.
14. *Sur les divers procédés d'interpolation*. – Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. VI–VII. – Belgrade, 1938, pp. 240–266.
15. *Sur les erreurs des observations*. – Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. IV, Belgrade 1939, pp. 1–48.
16. *Виша мајемајтика I*. – Централно удружење студената технике, Београд 1946, стр. XII+791 (2. прер. и доп. издање).
17. *Др Бољдан Гавриловић (1864–1947)*. – Glasnik matematičko-fizički i astronomski t. 2, Zagreb 1947, str. 201–204.
18. *Le coefficient d'approximation moyenne et le coefficient de corrélation*. – Publications de l'Institut mathématique, Académie Serbe des Sciences, t. I, Belgrade 1947, pp. 71–87.

19. *Увођење угла, тригонометријских функција и броја π у аритметици (L'introduction en arithmétique de l'angle, des fonctions trigonométriques et du nombre π).* – Српска академија наука, Глас 191, Први разред, књ. 96, Београд 1948, стр. 149–161.
20. *Les équations générales du mouvement d'un système de points matériels aux liaisons données.* – Publications de l'Institut mathématique, Académie Serbe des Sciences, t. II, Belgrad 1948, pp. 116–130.
21. *Виша математика I.* – Београд 1949, стр. 847 (3. издање).
22. *Виша математика II.* – Књ. 1, Београд 1949, стр. 624+VIII.
23. *Виша математика II.* – Књ. 2, Београд 1950, стр. 579+VIII.
24. *Опште једначине кретања система материјалних тачака (Les équations générales du mouvement d'un système de points matériels).* – Српска академија наука, Зборник радова књ. 7, Математички институт књ. 1, Београд 1951, стр. 17–57.
25. *Геометриска интерпретација Банахјевичеве схеме (Interprétation géométrique du schéma de Banachiewicz).* – Српска академија наука, Зборник радова књ. VIII, Математички институт књ. 2, Београд 1952, стр. 93–96.
26. *Збирка решених задатака више математике I, књ. 2.* – Географски институт ЈНА, Београд 1952, стр. 526.
27. *Интегрални диференцијабилни функција (Les intégrales des fonctions différentiables).* – Српска академија наука, Зборник радова књ. 35, Математички институт књ. 3, Београд 1953, стр. 29–44.
28. *Апроксимација произвољног кретања материјалне тачке помоћу кретања по конусном пресеку (Approximation du mouvement arbitraire d'un point matériel par le mouvement sur une section conique).* – Српска академија наука, Зборник радова, књ. 42, Астрономско–нумерички институт, књ. 1, Београд 1954, стр. 13–52.
29. *Збирка решених задатака више математике I, књ. I.* – Географски институт ЈНА, Београд 1956, стр. 588+(4).
30. *Réfraction astronomique moyenne.* – Académie Serbe des Sciences, Notes et travaux de la Section d'astronomie de L'Institut mathématique, Vol. II, No. 10–20, Belgrade 1958, pp. 11–20.
31. *Збирка решених задатака више математике I, књ. 3.* – Географски институт ЈНА, Београд 1959, стр. 164+(4).
32. *Земљини слојеви и њихове карактеристике (The Earth's layers and their characteristics).* – Српска академија наука и уметности, Глас ССXLIV, Одељење природно–математичких наука, књ. 21 (н. серија), Београд 1960, стр. 73–84.
33. *The Earth's layers and their characteristics.* – Académie Serbe des Sciences et des Arts, Bulletin I. 26 (Nouvelle série), Classe des Sciences mathématique et naturelles, 1. 8, Belgrade 1961, pp. 127–138.
34. *Понашање материјала под високим притисцима (The behaviour of the materials under high pressure).* – Српска академија наука и уметности, Глас ССXLIX, Одељење природноматематичких наука, књ. 22 (н. серија), Београд 1961, стр. 279–312 (са П. Савићем).
35. *Квалитаивна анализа кретања пројектила шеледиригованих по пошезу.* – Српска академија наука и уметности, Гласник, књ. 12, св. 1, Београд 1961, стр. 56.

36. *The behaviour of the materials under high pressures* (Понашање материјала под високим притисцима). – Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCLI, Одељење природно–математичких наука, књ. 29, Београд 1962, п. VI+32, in 8° (са П. Савићем).
37. *Земљини слојеви и њихове карактеристике*. – Српска академија наука и уметности, Гласник, књ. 12, св. 2, Београд 1962, стр. 188.
38. *Понашање материјала под високим притисцима*. – Српска академија наука и уметности, Гласник, књ. 14, св. 1, Београд 1962, стр. 21 (са П. Савићем).
39. *Понашање материјала под високим притиском* (*The behaviour of the materials under high pressures*). – Српска академија наука и уметности, Глас CCLIX, Одељење природно–математичких наука, књ. 25 (н. серија), Београд 1964, стр. 105–164 (са П. Савићем).
40. *The behaviour of the materials under high pressures II* (Понашање материјала под високим притисцима II). – Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCLX, Одељење природно–математичких наука, књ. 31, Београд 1964, п. 64 (са П. Савићем).
41. *The behaviour of the materials under high pressures III* (Понашање материјала под високим притисцима III). – Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCLXXVIII, Одељење природно–математичких наука, књ. 34, Београд 1964, п. 64 (са П. Савићем).
42. *Старо и ново у нумеричкој математизици*. – Научно–технички преглед 7 (1965), 2, стр. 75–79.
43. *Вещество под высоким давлением*. – Отдельной отгиск. Проблеми геохими, 1965, стр. 28–33 (са П. Савићем).
44. *Понашање материјала под високим притиском III. Небеска тела на температури изнад 0°K* (*The behaviour of the materials under high pressures III*). – Српска академија наука и уметности, Глас CCLXII, Одељење природно–математичких наука, књ. 27 (н. серија), Београд 1965, стр. 37–94 (са П. Савићем).
45. *The behaviour of the materials under high pressures IV* (Понашање материјала под високим притисцима IV). – Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCXCIII, Одељење природно–математичких наука, књ. 35, Београд 1965, п. 72 (са П. Савићем).
46. *Понашање материјала под високим притисцима IV* (*The behaviour of the materials under high pressures IV*). – Српска академија наука и уметности, Глас CCLXV, књ. 29 (н. серија), Београд 1966, стр. 26–82 (са П. Савићем).
47. *Предговор* [за књигу]. – Д. Бурић –Трбуховић : У сенци Алберта Ајнштајна, Крушевац 1969, стр. 272.
48. *Виша математика I*. – Сарајево 1969, стр. XII+836 (4 издање).
49. *Расслоение макротел из-за прерывистой структуры их составных частей*. – Симпозиј о Mohorovičićevom diskontinuitetu, Zagreb 1972, str. 161–187 (са P. Savićem).
50. *Пућања пројектила шеледиригованих по пошећу*. – Научно–технички преглед 16 (1966), 3, 3–25.

51. *Поведение материалов при высоких давлениях.* – Наукова думка, Киев 1976, стр. 264; приредио Драган Трифуновић (са П. Савићем).

ЗАОСТАВИШТИНА

Професор Радивој Кашанин стварао је све до пред крај живота. У његовој радној соби остала су у рукопису следећа дела:

1. *О бројевима и мерењу.* – 1 фасцикла;
2. *Микрокосмос.* – 2 свежња;
3. *Основе теоријске механике.* – 2 свежња;
4. *Удар.* – 1 фасцикла;
5. *Лоренцове трансформације и Ајнштајнова теорија релативитета.* – 1 фасцикла.

Следећи радови су у једној фасцикли:

6. *Аритметичка средина мерења;*
7. *Ангиномије идеала у конинууму;*
8. *Мерења помоћу часовника и курира;*
9. *Кардинални и ординални бројеви;*
10. *О математички;*
11. *Хемијски састав планета и њихова атмосфера.* – 1 фасцикла;
12. *Понашање материјала под високим притисцима.* – 2 свежња;
13. *Виша математика.* – 1 свежањ;
14. *Теорија кривих површи* – 1 фасцикла.

Ови се рукописи налазе у Архиву Српске академије наука и уметности.

КОРИШЋЕНА ЛИТЕРАТУРА

1. Николић, Александар: *Јован Карамата (1902–1967).* – Живот и дело српских научника, САНУ Биографије и библиографије књ. V, Београд 1999, 235–281.
2. Томић, Миодраг и Аљанчић, Слободан: *Радивоје Кашанин као математичар (Radivoj Kašanin as a mathematician).* – Историја математичких и механичких наука, књ. 4, Математички институт, Београд 1991, 7–21.
3. Томић, Миодраг: *Математичке науке.* – Сто година САНУ, књ. 1, Београд 1989, 13–34.
4. 30 година Електротехничког факултета у Београду. – Београд јуна 1978.
5. Трифуновић, Драган: *Објављени радови академика Радивоја Кашанина (Published papers of the academician Radivoj Kašanin).* – Историја математичких и механичких наука, књ. 4. – Математички институт, Београд 1991, 23–28.
6. Трифуновић, Драган: *Заоставштина (Inheritance).* – Историја математичких и механичких наука, књ. 4. – Математички институт, Београд 1991, 28.
7. Трифуновић, Драган: *Математичар Радивоје Кашанин и његово доба.* – (Рукопис у припреми за штампу).
8. *Годишњак, LXIV САН за 1957.* – Београд, 1958, 265–267.
9. *Годишњак, LXXXV САНУ за 1978.* – Београд, 1979, 189–190.

RADIVOJ KAŠANIN
(1892–1989)

Radivoje Kašanin was born on May 21, according to Julian calendar, in Beli Manastir, Baranja. He attended the Serbian elementary school in his native town from 1892 to 1902. He completed the first three classes of classic gymnasium in Osijek, and then he moved to Novi Sad, where he finished the fourth class and passed the final examination. In 1910 he began his studies in mathematics and astronomy in Vienna, and in 1911 he moved to the University of Zagreb, where he stayed until summer of 1913. The same year Radivoje Kašanin moved to the University of Budapest, and continued his studies of mathematics. The beginning of the First World War in 1914 interrupted his studies in Budapest, he was mobilized by the Austro–Hungarian Army. In May 1915 he was sent to the Russian front, and soon after he was demobilized and in 1920 he went to Paris where he completed his studies in mathematics on Sorbone in 1921 (Licence ès Sciences mathématiques). He defended his doctoral dissertation in 1924. He was appointed assistant at the Technical Faculty of the University of Belgrade in 1922, an assistant professor in 1926, associate professor in 1930, and full professor in 1939. He was elected Rector of the Technical High School for two terms of office (1950/51 and 1951/52).

He was elected corresponding member of the Serbian Academy of Sciences on March 2, 1946 and full member on June 10, 1955. He served the post of director of the Institute of Mathematics from 1951 to 1958, was president of its Council from 1958 to 1961. In 1950 the Proceedings of the Institute of Mathematics were published and during the next ten years Radivoje Kašanin was its editor in chief. From October 1, 1957 to January 12, 1959 Radivoje Kašanin served as deputy vice–president of the Serbian Academy of Sciences.

During his studies in Vienna, Zagreb, Budapest and Paris he received an excellent grounding and substantial knowledge in mathematics, rational mechanics and astronomy. From the very beginning of his engagement at the University of Belgrade his intellectual and scientific knowledge gave guidance to his younger colleagues and students and steered them in their first steps in science.

Successful achievements of Radivoje Kašanin could be found in many fields: theory of differential equations, theory of complex functions, analysis, geometry, interpolation and approximation, mechanics, astronomy and geophysics and in each of mentioned fields of his work he published papers that were acknowledged.

As a professor at technical faculties of the Belgrade University and head of the department of mathematics at those faculties, and especially with his text book on higher mathematics, professor Kašanin made enormous contribution to the raising of teaching level of mathematics. For a short time he served as Rector of the High Technical School from which post he was able to exert a formative influence on evaluating teaching levels of other subjects.

He was director of the Mathematical institute for many years, then president of its Scientific Council and considerably contributed to its reputation. Young mathematicians and many other researchers had his full support.

Radivoje Kašanin is rightly regarded as talented mathematician and scholar of natural sciences with wide scientific culture. As for his profound and diversified knowledge in many areas of mathematics, mechanics and astronomy he could be considered as our last encyclopedist.

Radivoje Kašanin was friendly and witty person. He was endowed with an outstanding memory and gift of observation.

Radivoje Kašanin died in Belgrade on October 30, 1989 where he was buried.



MODEL KINETIKE FLOTIRANJA ZASNOVAN NA BOLTZMAN-ovoj FUNKCIJI

Predrag LAZIĆ*, Nadežda. ČALIĆ*, Dušica VUČINIĆ*, Slaven DEUŠIĆ*, Dragomir SIMEUNOVIĆ*
Rudarsko-geološki fakultet, Katedra za PMS, Đušina 7, Beograd

Izvod

Kinetika flotiranja obuhvata kompleks pitanja koja se odnose na zakonomernost promene brzine i mehanizma procesa. Ispitivanja kinetike flotiranja dovode do potpunijeg sagledavanja mehanizma procesa s jedne strane a s druge strane otkrivaju mogućnosti optimizacije i automatizacije industrijskog procesa. U ovom radu, autori predlažu novi model za opisivanje kinetike flotiranja zasnovan na sličnosti pozitivnog dela sigmoidalnog grafika BOLTZMAN-ove funkcije sa grafičkom zavisnošću iskorišćenja u funkciji vremena flotiranja. Na bazi laboratorijskih analiza promene brzine flotiranja i iskorišćenja bakra u funkciji vremena flotiranja rude „Veliki Krivelj“ RTB-Bor, vrši se poređenje AGAR-ovog (najčešće primerjivanog modela) i modela zasnovanog na BOLTZMAN-ovoj funkciji. Provera predloženog modela izvršena je i na rezultatima laboratorijskih ispitivanja kinetike flotiranja olova iz rude rudnika Rudnik. Poređenjem koeficijenta korelacije AGAR-ove i BOLTZMAN-ove funkcije uočava se da je isti veći kod BOLTZMAN-ove funkcije. Isto tako standardno odstupanje izračunatih od eksperimentalnih rezultata uvek je manje kod predložene funkcije. Izračunavanja koeficijenta BOLTZMAN-ove funkcije jednostavno se obavlja uz pomoć kompjuterskog programa Microcal Origin. Utvrđivanje optimalnog modela kinetike flotiranja vršeno je u cilju optimizacije procesa flotiranja sa aspekta smanjenja potrošnje energije po jedinici kapaciteta s jedne strane i poboljšanja tehnoloških pokazatelja s druge strane.

Ključne reči: Kinetika flotiranja, Brzina flotiranja, Boltzman-ov model, Ruda bakra rudnik „Rudnik“

Abstract

The flotation kinetics encompasses a number of questions related to the regularity of velocity change and the process mechanism. The research on flotation kinetics lead to the more complete recognition of process mechanism from one point of view, and from another they have revealed many possibilities for optimization and automation of the industrial process. In this paper, the authors are suggesting the new model for description of flotation kinetics based on the similarity of the positive area of sigmoid Boltzmann's function graph with the graphical representation of mineral recovery vs flotation time. On the basis of laboratory analysis on the flotation velocity change vs. flotation time of the "Veliki Krivelj" -- RTB Bor ore, the comparison of Agars' (the most common model) and the model based on the Boltzmann function. In addition, the standard deviation of calculated from the experimental results is in all cases smaller with the function suggested. The calculations of Boltzmann function coefficients are simple with the use of computer program Microcal Origin. The establishment of the optimal model of flotation kinetics was accomplished with respect to the flotation optimization, but also both from the point of energy consumption decrease by capacity unit and the improvement of technological parameters.

Keywords: Flotation kinetics, flotation velocity, Boltzmann's model, Copper ore of "Rudnik" mine

Uvod

Osnovni problemi koje treba rešiti u izučavanju kinetike flotiranja proističu iz činjenice da se sam proces flotiranja sastoji iz čitavog niza „mikro procesa“ koji se odigravaju po specifičnim mehanizmima i imaju sopstvene kinetike procesa koji zavise od niza promenljivih veličina a neposredno utiču na kinetiku flotiranja.

Zbog toga je kinetika flotiranja predmet istraživanja mnogih istraživača (Beloglazov 1947, Arbiter i Harris 1962, Inoue-Imazumi 1962, Tomlinson i Fleming 1965, Huber-Panu 1965, Klimpel 1980, Agar 1985) i mnogi drugi. U literaturi se sreću različiti pristupi izučavanju kinetike flotiranja od empirijskih preko modela koji se služe analogijom kinetike hemijskih reakcija do analitičkih modela (četvorofazni model, model zasnovan na verovatnoći flotiranja).

Egzaktno određivanja kinetičkih konstanti je od suštinskog značaja pogotovu što se vrednosti istih menjaju u funkciji vremena, zbog čega ne mogu sa dovoljnom preciznošću aproksimirati rezultati flotiranja u celom vremenskom intervalu.

Autori ovog rada, predlažu novi model za opisivanje kinetike flotiranja zasnovan na eksperimentalnim rezultatima ispitivanja, oblika:

$$I = \frac{I_{\max} (e^{kt} - 1)}{a + e^{kt}} \dots\dots\dots(1)$$

gde je:

I - iskorišćenje korisne komponente, %

I_{\max} - maksimalno iskorišćenje korisne komponente ($I_{\max} = A_2$)

k - koeficijent koji se dobija kao $\frac{1}{dt}$

a - koeficijent koji se dobija kao $e^{\frac{t}{dt}}$

A_2 , t_0 i dt - koeficijenti Boltzman-ove funkcije

t - vreme flotiranja, min.

Koeficijenti Boltzman-ove funkcije se izračunavaju pomoću kompjuterskog programa Microcal Origin, unošenjem podataka za vreme flotiranja i za iskorišćenja, jednostavno i bez ikakvih prethodnih ograničenja. Zamenom dobijenih vrednosti u jednačinu 1 dobija se analitički izraz za izračunavanje iskorišćenja korisne komponente u bilo kojoj tački ispitivanog vremena flotiranja

Metodologija

Postupak izračunavanja koeficijenta Boltzman-ove funkcije zasnovan je na metodi iteracije. Naime, Na osnovu eksperimentalnih podataka formiraju se početne vrednosti koeficijenata A_1 , A_2 , t_0 i dt i potom u procesu iteracije dolazimo do pravih vrednosti uz minimalnu grešku aproksimacije. Na osnovu ovih podataka izračunavaju se I_{\max} , k i a i na taj način dolazimo do funkcionalne zavisnosti između iskorišćenja i vremena flotiranja za ispitivanu sirovinu na bazi eksperimentalnih rezultata istraživanja.

Polazeći od opšteg oblika Boltzman-ove jednačine (2) dobijamo sledeće:

$$I = \frac{A_1 - A_2}{1 + e^{\frac{t-t_0}{dt}}} + A_2 \dots\dots\dots(2)$$

ili

$$I = \frac{A_1 - A_2}{1 + e^{\frac{t}{dt} - \frac{t_0}{dt}}} + A_2 \dots\dots\dots(3)$$

Uvođenjem smena $\frac{1}{dt} = k$, $e^{\frac{t}{dt}} = \alpha$, $A_1 - A_2 = \beta$, $A_2 = I_{\max}$ dobijamo:

$$I = \frac{\beta}{1 + \alpha e^{kt}} + I_{\max} \dots\dots\dots(4)$$

Ako u jednačini (4) i brojilac i imenilac podelimo sa α imaćemo:

$$I = \frac{A_1 - A_2}{1 + e^{\frac{t}{dt} - \frac{t_0}{dt}}} + A_2 \dots\dots\dots(5)$$

Uvođenjem smena $\frac{1}{\alpha} = a$ i $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$ dobijamo sledeći izraz:

$$I = \frac{\gamma}{1 + ae^{kt}} + I_{\max} \dots\dots\dots(6)$$

ili

$$I = \frac{\gamma}{a + e^{kt}} + I_{\max} \dots\dots\dots(7)$$

Uzimajući u obzir da je $I(0)=0$ možemo napisati:

$$\gamma + I_{\max} a + I_{\max} e^{kt} = 0$$

odakle sledi:

$$\gamma = -I_{\max}(a+1) \dots \dots \dots (8)$$

Zamenom jednačine (8) u jednačinu (7) dobijamo

$$I = \frac{I_{\max}(e^{kt} - 1)}{a + e^{kt}} \dots \dots \dots (9)$$

Jednačina 9 predstavlja novi oblik matematičkog izraza koji predlažemo za opisivanje kinetike flotiranja zasnovan na BOLTZMAN-ovoj funkciji. Postupak izračunavanja koeficijenta I_{\max} , a i k kod predloženog modela je znatno jednostavniji od onog koji daje B. A Wills 1986 za izračunavanje koeficijenta Agar-ove funkcije.

Za testiranje novog modela, vršili smo aproksimaciju eksperimentalnih rezultata pomoću novog matematičkog modela zasnovanog na Boltzman-ovoj funkciji. Rezultate koje smo pri tome dobili, poredili smo sa rezultatima dobijenim aproksimacijom tih istih rezultata pomoću najčešće primenivanog Agar-ovog modela oblika:

$$I_A = 95.4 \cdot \{1 - e^{-0.017(t-1.73)}\} \dots \dots \dots (10)$$

gde je:

- I - iskorišćenje korisne komponente, %
- I_{\max} - maksimalno iskorišćenje korisne komponente, %
- k - kinetička konstanta
- t - vreme flotiranja, min.
- b - korekciono vreme

Izračunavanje koeficijenta I_{\max} , k i b obavljeno je uz pomoć kompjuterskog programa koji je dao B. A Wills 1986 a prema sledećoj proceduri:

Na početku izračunavanja zadaje se $I_{\max}=100$ a koeficijenti k i b se izračunavaju po formulama (11) i (12). Na osnovu dobijenih vrednosti se izračunava suma kvadratnih odstupanja po formuli (13). Potom se vrednost I_{\max} smanjuje za određeni korak i ceo postupak proračuna se ponavlja sve dok se ne dobije minimalna vrednost kvadratnog odstupanja što predstavlja konačne vrednosti za I_{\max} , k i b.

$$k = - \frac{\left[n \sum_{q=1}^n t \ln \left(\frac{I_{\max} - I}{I_{\max}} \right) - \sum_{q=1}^n \ln \left(\frac{I_{\max} - I}{I_{\max}} \right) \sum_{q=1}^n t \right]}{n \sum_{q=1}^n t^2 - \left(\sum_{q=1}^n t \right)^2} \dots \dots \dots (11)$$

$$b = - \frac{\left[k \sum_{q=1}^n t + \sum_{q=1}^n \ln \left(\frac{I_{\max} - I}{I_{\max}} \right) \right]}{nk} \dots \dots \dots (12)$$

$$\sum_{q=1}^n r_q^2 = \sum_{q=1}^n \left[\ln \left(\frac{I_{\max} - I_q}{I_{\max}} \right) \right]^2 + k^2 \sum_{q=1}^n t_q^2 + nk^2 b^2 + 2k^2 b \sum_{q=1}^n t_q + 2k \sum_{q=1}^n \left[t_q \ln \left(\frac{I_{\max} - I_q}{I_{\max}} \right) \right] + 2kb \sum_{q=1}^n \ln \left(\frac{I_{\max} - I_q}{I_{\max}} \right) \dots \dots \dots (13)$$

Kvadratno odstupanje (13) je minimalno kada je:

$$\frac{d \sum_{q=1}^n r^2}{dk} = 0 \quad i \quad \frac{d \sum_{q=1}^n r^2}{db} = 0 \dots \dots \dots (14)$$

Rezultati i diskusija

U ovom radu utvrđivan je optimalni model kinetike flotiranja rude bakra „Veliki Krivelj” i rude olova rudnika „Rudnik”. Za aproksimaciju eksperimentalnih rezultata korišćen je novi Boltzman-ov model dok je Agar-ov model korišćen za poređenje.

Na bazi eksperimentalnih rezultata, primenom odgovarajućih modela, dobijene su sledeće jednačine za rudu bakra Veliki Krivelj:

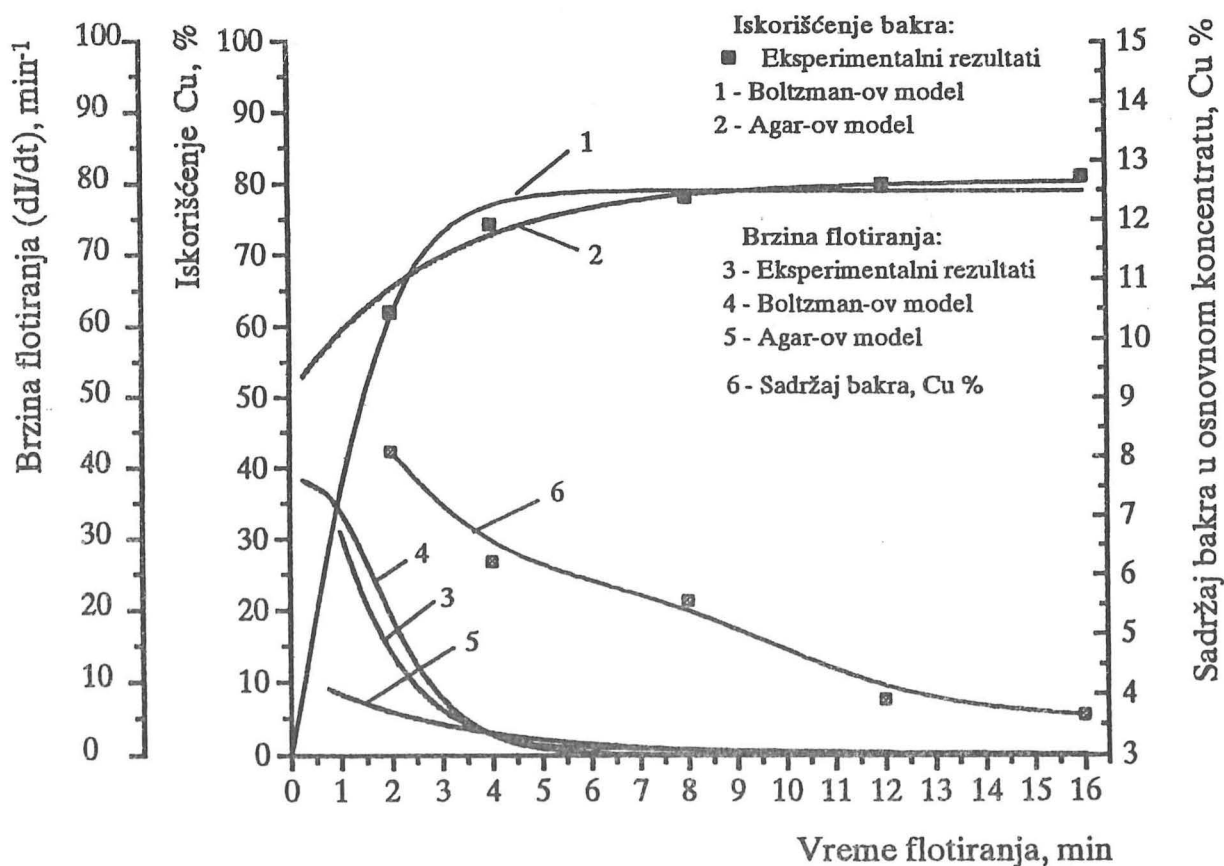
$$I_B = \frac{79,1 \cdot (e^{1,1t} - 1)}{1,415 + e^{1,1t}} \dots\dots\dots(15)$$

$$I_A = 80,5 \cdot [1 - e^{-0,34(t+2,9)}] \dots\dots\dots(16)$$

Sadržaj bakra, iskorišćenja, kvadratna odstupanja, koeficijenti korelacije i standardna odstupanja dati su u tabeli 1. Na slici 1 dat je grafički prikaz kumulativnih iskorišćenja bakra dobijenih eksperimentalno i na bazi Boltzman-ovog i Agar-ovog modela kao i promena brzine flotiranja bakra u funkciji vremena. Na kraju data je promena sadržaja metala u osnovnom koncentratu bakra u funkciji vremena flotiranja.

Tabela 1. Rezultati ispitivanja kinetike flotiranja rude bakra „Veliki Krivelj“

Vreme, min	Cu, % (Eksperim.)	I Cu, % (Eksperim.)	I Cu, % (Boltzman)	I Cu, % (Agar)	Razlika (3-4) ²	Razlika (3-5) ²
1	2	3	4	5	6	7
0	-	-	0	-	-	-
2	8,08	62,09	61,39	65,29	0,49	10,20
4	6,22	74,30	76,93	72,79	6,95	2,27
8	5,56	78,21	79,05	78,52	0,71	0,10
12	3,91	79,98	79,08	79,99	0,82	0,00
16	3,66	81,06	79,08	80,37	3,95	0,48
r _B =0,99367			σ _B =1,61			
r _A =0,99360			σ _A =1,62			



Slika 1. Promena iskorišćenja, sadržaja metala i brzine flotiranja minerala bakra u funkciji vremena flotiranja

Kinetika flotiranja rude olova iz Pb-Cu-Zn rude rudnika Rudnik takođe, je ispitivana pri pogonskom režimu reagenasa. Primenom napred navedenih modela dobijene su sledeće jednačine koje opisuju tok procesa flotiranja minerala olova:

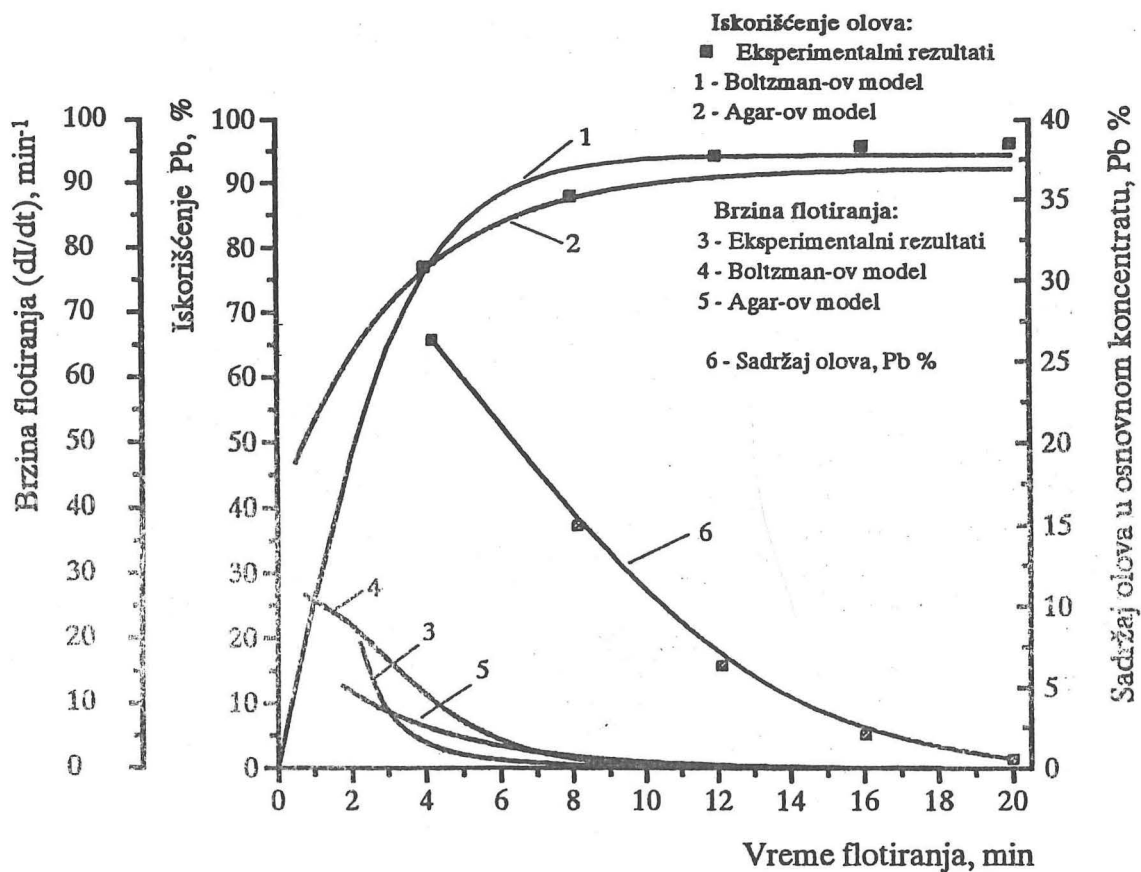
$$I_B = \frac{94,4 \cdot (e^{0,56 \cdot t} - 1)}{1,03 + e^{0,56 \cdot t}} \dots\dots\dots (17)$$

$$I_A = 90 \cdot \{1 - e^{[-0,949 \cdot (t - 0,27)]}\} \dots\dots\dots (18)$$

U tabeli 2 prikazani su rezultati eksperimentalnih i izračunatih vrednosti iskorišćenja olova u osnovnom koncentratu, standardna odstupanja i koeficijenti korelacije i sadržaj olova u izdvojenim koncentratima.. Na slici 2 prikazan je tok procesa flotiranja minerala olova kao i promena brzine i sadržaja metala u osnovnom koncentratu olova u funkciji vremena flotiranja.

Tabela 2 Rezultati kinetike flotiranja minerala olova rude rudnika „Rudnik“

Vreme, min	Pb, % (Eksperim.)	I Pb, % (Eksperim.)	I Pb, % (Boltzman)	I Pb, % (Agar)	Razlika (3-4) ²	Razlika (3-5) ²
1	2	3	4	5	6	7
0		0	0,00	-	0,00	-
4	26,31	76,98	76,02	76,47	0,93	0,26
8	14,94	87,93	92,24	87,60	18,59	0,11
12	6,32	94,27	94,17	90,95	0,01	10,99
16	2,07	95,77	94,37	91,96	1,95	14,48
20	0,57	96,24	94,40	92,27	3,40	15,77
r _B =0,99105			σ _B =2,23			
r _A =0,98497			σ _A =2,88			



Slika 2. Promena iskorišćenja, sadržaja metala i brzine flotiranja minerala olova u funkciji vremena flotiranja

Na osnovu prikazanih rezultata može se konstatovati da se primenom i jednog i drugog modela dobijaju visoki koeficijenti korelacije. Primenom Boltzman-ovog modela, dobija se bolja pokrivenost eksperimentalnih rezultata izračunatim, pogotovu u početku flotiranja. Koeficijenti korelacije kod Boltzman-ovog modela su uvek viši u poređenju sa Agar-ovim modelom

Standardna odstupanja su takođe nešto niža kod predloženog modela u poređenju sa Agar-ovim modelom.

Promena brzine flotiranja izračunata kao dI/dt u funkciji vremena bitno se razlikuje u zavisnosti od primenjenog modela. Boltzman-ov model preciznije opisuje promenu brzine od maksimalne vrednosti koja se postiže u početku flotiranja pa nadalje. Agar-ov model ne daje maksimalnu brzinu jer model ne pokriva eksperimentalne rezultate u početku flotiranja

Primenom oba modela, na osnovu kriva promene iskorišćenja, može pouzdano utvrditi granica između grubog i kontrolnog flotiranja tj trenutak kada kriva iskorišćenja ima nagli prelaz u horizontalni položaj. Ova pojava je još izraženija kod Boltzman-ovog modela.

Zaključak

Na osnovu rezultata prikazanih u ovom radu može se zaključiti da predloženi model kinetike flotiranja ruda obojenih metala, zasnovan na Boltzman-ovoj jednačini u potpunosti opisuje tok procesa od početka flotiranja. Predloženi model karakteriše:

- Jednostavan primena i izračunavanje koeficijenata putem kompjuterskog programa Microcal Origin bez ikakvih ograničenja.
- Bolja preciznost aproksimacije u poređenju sa do sada navije primenjivanim Agar-ovim modelom
- Jednostavnije određivanje granice između vrlo intenzivnog (grubog) i sporog (kontrolnog) flotiranja.

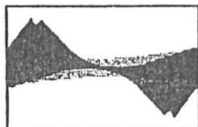
Na osnovu predloženog Boltzman-ovog modela može se uz pomoć najmanje tri eksperimentalne tačke i tačkom 0,0 kao četvrtom, vrlo precizno opisati tok procesa flotiranja što predstavlja uštedu u troškovima hemijskih analiza i ubrzava postupak iznalaženja funkcionalne zavisnosti između iskorišćenja korisne komponente i brzine flotiranja u funkciji vremena.

Zahvalnost

Zahvaljujemo se Ministarstvu za nauku, tehnologije i razvoj Republike Srbije za finansijsku pomoć tokom realizacije Projekata ETR.6.01.0034B i NP EE301-93B.

Literatura

1. Agar, G. E., "The optimization of Flotation Circuit Design from Laboratory Rate Data", Proc. XV Int. Min. Proc. Cong., Cannes, 1985.
2. Arbiter, N. and Harris, C., "Flotation Kinetics", Froth flotation, AIME, No4, 1962
3. Belogkazov K. F., "Zakonomernosti flotacionogo processa" Moskva, Nedra, 1947
4. Golomeov, B., "Optimizacija i matematičko modeliranje na kinetikata na flotiranje na Pb-Zn ruda od Zletovo i Sasa", Doktorska disertacija, Stip, 1997.
5. Huber-Panu I., Beitrag zur theorie der flotations-kinetik, Freibergens forschungshefte, A335, VEB Leipzig 1965
6. Imazumi, T and Inoue, T., "Kinetic Consideration of Froth Flotation", Proc. VI Int. Min. Proc. Cong., Cannes, 1963.
7. Klimpel, R.R., "Selection of chemical Reagents for Flotation" Mineral Processing Plant Design, 2nd Ed. by A.L. Mular and R.B. Bhappu, AIME, New York, pp. 907-934, 1980.
8. Tomlinson, H. S. and Fleming, M.G., "Flotation Rate Studies", Proc. VI Int. Min. Proc. Cong., Ed. A. Roberts, Pergamon Press, pp. 563-579, 1965.
9. Wills, B. A., Mineral Processing Technology, Cornwall, England, pp. 769-772, 1988



PRIMENA ZAKONA OSCILOVANJA STENSKE MASE IZAZVANE MINIRANJEM U KREČNJAKU

APPLICATION OF LAWS ON THE RATE OF ROCK OSCILLATIONS CAUSED BY BLASTING IN LIMESTONE

Lutovac S.¹, Simeunović D.², Trajković S.³

APSTRAKT

U ovom radu izvršena je analiza zakona oscilovanja tla, koji je predložio profesor M. A. Sadovski i stepen njegove primenljivosti za miniranja sa privrednim eksplozivima za potrebe rudarstva i drugih privrednih delatnosti. Primenljivost ovog zakona, za miniranja sa ograničenim količinama eksploziva (što je slučaj sa svim miniranjima koja se izvode u privredne svrhe), analizirana je na modelu zasnovanom na principu sličnosti, a pod istim radnim uslovima, kao i na primerima masovnih miniranja koja se izvode radi eksploatacije ležišta.

Tom prilikom konstatovano je da primena zakona oscilovanja stenske mase omogućava da se za svako miniranje unapred odredi brzina oscilovanja tla, a miniranja se u pogledu seizmičkog dejstva stavljaju pod kontrolu, što pruža mogućnost da se veličina potresa isplanira.

ABSTRACT

This paper is focused to the analysis of the law on ground oscillation, suggested by Professor M.A. Sadovski as well as to the level of its applicability for blasting with commercial explosives for the requirements of mining and other economic activities. The applicability of this law, for blasting with limited quantities of explosive (being the case with all the blasting carried out for economic purposes), was analysed by the model based on the principle of similarity, but under the same working conditions and also on the cases of grouped blasting performed for the purpose of deposit exploitation.

¹ Mr Suzana Lutovac, stručni saradnik, Rudarsko - geološki fakultet, Beograd,

² Dr Dragomir Simeunović, red. prof. u penziji, Rudarsko - geološki fakultet, Beograd,

³ Dr Slobodan Trajković, red. prof., Rudarsko - geološki fakultet, Beograd.

On that occasion it was stated that the application of the law on rock mass oscillation enables, in advance, determination of ground oscillation rate for each blasting, while the blasting, as concerns the seismic impact, are put under control, rendering the possibility to plan in advance, the strength of the shock.

ZAKON OSCILOVANJA TLA

Za uspostavljanje korelacione veze između brzine oscilovanja i tri osnovna parametra koji utiču na njenu veličinu: količina eksploziva, osobine stenskog materijala i rastojanja, u svetu je razvijeno više matematičkih modela. Jedan od najčešće korišćenih modela, tj. jednačina, je jednačina Sadovskog, koja definiše zakon promene brzine oscilovanja tla u zavisnosti od rastojanja, količine eksploziva i izvođenja miniranja. Tako definisan zakon pruža mogućnost da odredimo seizmičko dejstvo miniranja u pravcu nekog objekta ili naselja, pri čemu se koristi veza između brzine oscilovanja tla i posledica koje se mogu odraziti na objekte.

Jednačina M. A. Sadovskog data je u obliku:

$$v = K_v \cdot R^{-n} \quad (1)$$

gde je: v - brzina oscilovanja tla (cm/s), K_v - koeficijent koji je uslovljen karakteristikama tla i uslovima miniranja, a određuje se terenskim merenjima, n - eksponent koji je uslovljen karakteristikama tla i uslovima miniranja, a određuje se terenskim merenjima, R - redukovano rastojanje:

$$R = \frac{r}{\sqrt[3]{Q}} \quad (2)$$

U zapadnim zemljama primenjuje se izraz:

$$R = \frac{r}{\sqrt{Q_i}} \quad (3)$$

gde je: r - rastojanje minskog polja do mesta merenja (m), Q - ukupna količina eksploziva (kg), Q_i - maksimalna količina eksploziva koja se istovremeno inicira u jednom intervalu, pri čemu između dva sukcesivna iniciranja mora da postoji dovoljan vremenski razmak koji onemogućava preklapanje ili susretanje talasa (kg).

Značajno svojstvo zakona brzine oscilovanja tla u zavisnosti od redukovano rastojanja, dato formulom 1 je sledeće: ako se redukovano rastojanje (R) sa bilo kog nivoa poveća (smanji) za 1%, brzina oscilovanja tla (v) se smanji (poveća) za $n\%$.

Ovo svojstvo određeno je preko pojma koeficijenta elastičnosti (η), koji se, za brzinu oscilovanja tla (v), u zavisnosti od redukovano rastojanja (R), svodi na:

$$\eta = -\frac{R}{v} \cdot \frac{dv}{dR}, \text{ odakle se dobija } \eta = n = \text{const}.$$

Zbog $\eta = n = \text{const}$, zaista znači da povećanje (smanjenje) redukovano rastojanja (R) sa bilo kog nivoa od 1%, dovodi do smanjenja (povećanja) brzine oscilovanja tla (v) tačno $n\%$.

Na osnovu proračunatog zakona po (1), u mogućnosti smo da konstruišemo aproksimativnu krivu koja koreliše dobijene rezultate u zavisnosti od količine eksploziva, rastojanja, radne sredine i uslova izvođenja miniranja.

Ovako proračunat zakon omogućava nam da se unapred za svako miniranje prognozira brzina oscilovanja, odnosno da se predvidi stepen seizmičkog intenziteta potresa koji će biti izazvan miniranjem. Na ovaj način, miniranja se u pogledu seizmičkog dejstva stavljaju pod kontrolu, što ujedno pruža mogućnost da se potresi ne samo kontrolišu, već i unapred planiraju.

Da bi se izbegle subjektivne odluke pri usvajanju nađenog matematičkog oblika krive $v = v(R)$, koja će aproksimirati vrednosti dobijene istaživanjem, koristi se *indeks krivolinijske zavisnosti*:

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{\sum (v_i - v(R_i))^2}{\sum (v_i - \bar{v})^2}} \quad (4)$$

gde je: v_i - predstavlja v_{max} , $v(R)$ - predstavlja izračunate vrednosti za v po dobijenoj formuli zakona oscilovanja tla, \bar{v} - predstavlja aritmetičku sredinu za podatke v_i .

METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA

Ovaj rad obuhvata ispitivanja na modelu, koja su izvedena na kamenolomu Kijevo - Kijevo (radna sredina A - krečnjak) i ispitivanja koja su izvršena pri masovnim miniranjima na površinskom kopu Kovilovača - Despotovac.

ISPITIVANJA NA MODELU

Opis odabranog modela

Pri izboru modela, koji će poslužiti za ova istraživanja, definisani su sledeći parametri, kao konstantne veličine:

- dubina bušotine	0,5 [m]
- težina eksplozivnog punjenja po bušotini	0,10 [kg]
- broj opita	4
- broj bušotina u jednom opitu	10
- vremenski zastoj između bušotina	0,5 [s]
- rastojanje između bušotina	1,0 [m]

U ovim ogledima vršena su instrumentalna merenja brzine oscilovanja istim instrumentom - trokomponentnim geofonom VS - 1200.

Na Slici 1 prikazana je šema modela minskog polja sa svim potrebnim podacima.

Svaki opit posmatra se potpuno nezavisno od ostalih opita, a potom su svi opiti prikazani zajednički, kao jedinstvena celina za ispitivanu stensku masu.

MODELSKA ISPITIVANJA

Opit I/A

Izračunate vrednosti redukovanih rastojanja, brzina oscilovanja tla po komponentama i maksimalnih (v_{max}) brzina oscilovanja date su u Tabeli 1.

Na osnovu rezultata datih u Tabeli 1, metodom najmanjih kvadrata određeni su parametri (K_v) i (n) u formuli 1 i tako je dobijena jednačina oscilovanja tla u obliku:

$$v_1 = 80,1149 \cdot R^{-1,6612} \quad (5)$$

sa indeksom krivolinijske zavisnosti $\rho_1 = 0,970$.

Tabela 1

Eksplzija broj	Redukovano rastojanje (R)	(v _i) [cm/s]	(v _v) [cm/s]	(v _i) [cm/s]	(v _{max}) [cm/s]
1	10,7722	1,020	0,915	1,010	1,7023
2	12,9266	0,750	0,460	1,000	1,3320
3	15,0810	0,425	0,240	0,525	0,7168
4	17,2355	0,410	0,220	0,490	0,6757
5	19,3899	0,295	0,185	0,350	0,4937
6	21,5443	0,225	0,140	0,315	0,4116
7	23,6988	0,210	0,160	0,420	0,4961
8	25,8532	0,200	0,125	0,360	0,4304
9	28,0077	0,215	0,175	0,155	0,3176
10	30,1621	0,190	0,140	0,140	0,2744

Opit II/A

Izračunate vrednosti redukovanih rastojanja, brzina oscilovanja tla po komponentama i maksimalnih brzina oscilovanja date su u Tabeli 2.

Tabela 2

Eksplzija broj	Redukovano rastojanje (R)	(v _i) [cm/s]	(v _v) [cm/s]	(v _i) [cm/s]	(v _{max}) [cm/s]
11	32,3165	0,170	0,095	0,270	0,3329
12	34,4710	0,155	0,080	0,260	0,3131
13	36,6254	0,115	0,085	0,245	0,2837
14	38,7798	0,080	0,095	0,260	0,2881
15	40,9343	0,180	0,120	0,120	0,2474
16	43,0887	0,155	0,090	0,145	0,2305
17	45,2431	0,170	0,090	0,115	0,2241
18	47,3976	0,120	0,090	0,130	0,1985
19	49,5520	0,125	0,100	0,125	0,2031
20	51,7064	0,150	0,125	0,100	0,2194

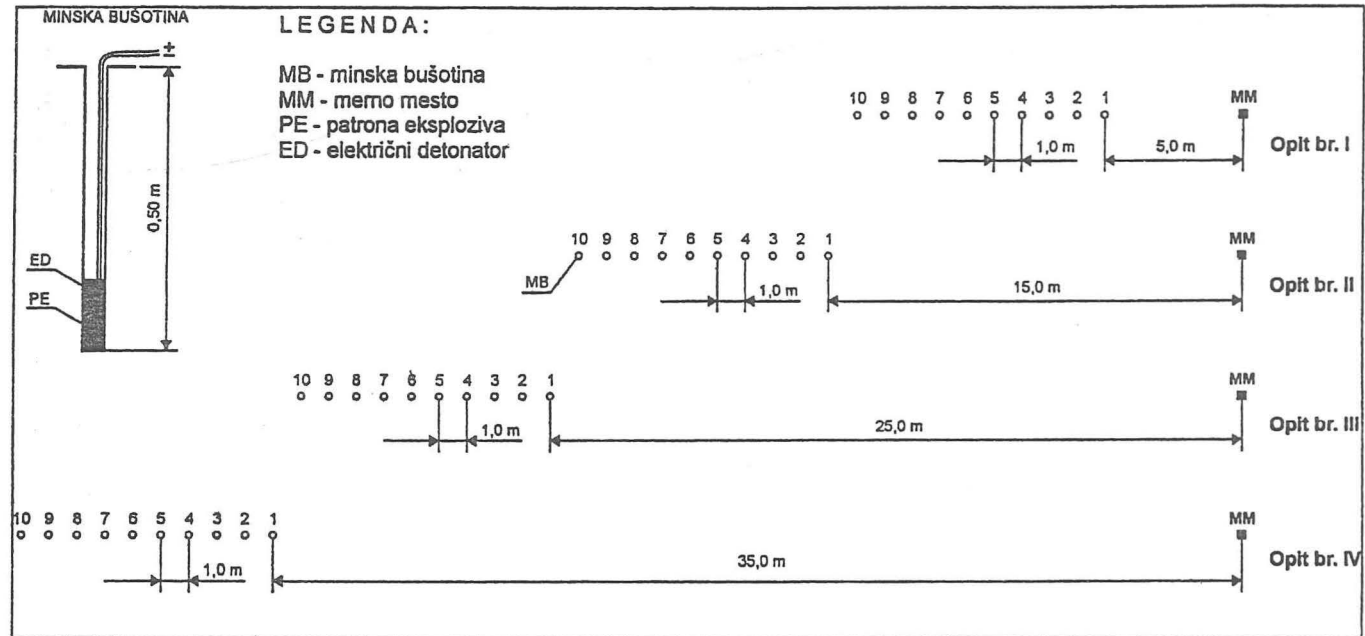
Na osnovu rezultata datih u Tabeli 2 određeni su parametri (K_v) i (n) u (1) i tako je dobijena jednačina oscilovanja tla u obliku:

$$v_2 = 15,4287 \cdot R^{-1,1058} \quad (6)$$

sa indeksom krivolinijske zavisnosti $\rho_2 = 0,965$.

Opit III/A

Izračunate vrednosti redukovanih rastojanja, brzina oscilovanja tla po komponentama i maksimalnih brzina oscilovanja date su u Tabeli 3.



Slika 1 Šematski prikaz modela minskog polja sa rasporedom mina I podelom na opite

Tabela 3

Eksplozija broj	Redukovano rastojanje (R)	(v _i) [cm/s]	(v _v) [cm/s]	(v _i) [cm/s]	(v _{max}) [cm/s]
21	53,8609	0,180	0,095	0,0920	0,2234
22	56,0153	0,131	0,080	0,0940	0,1800
33	58,1697	0,120	0,104	0,0750	0,1756
24	60,3242	0,119	0,074	0,1060	0,1757
25	62,4786	0,108	0,096	0,0760	0,1633
26	64,6330	0,080	0,050	0,1200	0,1526
27	66,7875	0,105	0,075	0,1000	0,1632
28	68,9419	0,055	0,060	0,1050	0,1329
29	71,0963	0,060	0,055	0,1000	0,1269
30	73,2508	0,035	0,032	0,0625	0,0785

Na osnovu rezultata datih u Tabeli 3 određeni su parametri (K_v) i (n) u formuli 1 i tako je dobijena jednačina oscilovanja tla u obliku:

$$v_3 = 2650,5063 \cdot R^{-2,3542} \quad (7)$$

sa indeksom krivolinijske zavisnosti $\rho_3 = 0,889$.

Opit IV/A

Izračunate vrednosti redukovanih rastojanja, brzina oscilovanja tla po komponentama i maksimalnih brzina oscilovanja date su u Tabeli 4.

Tabela 4

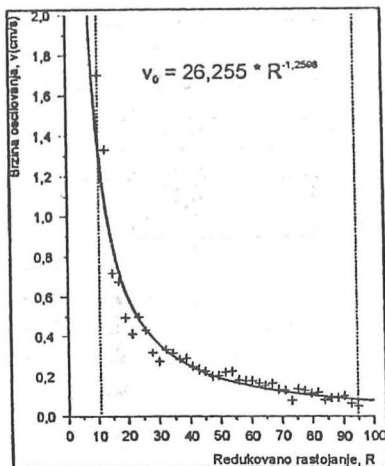
Eksplozija broj	Redukovano rastojanje (R)	(v _i) [cm/s]	(v _v) [cm/s]	(v _i) [cm/s]	(v _{max}) [cm/s]
31	75,4052	0,063	0,071	0,096	0,1350
32	77,5596	0,064	0,060	0,092	0,1271
33	79,7141	0,050	0,048	0,090	0,1136
34	81,8685	0,059	0,059	0,084	0,1184
35	84,0230	0,041	0,037	0,059	0,0808
36	86,1774	0,045	0,052	0,059	0,0906
37	88,3318	0,055	0,048	0,057	0,0926
38	90,4863	0,055	0,050	0,070	0,1021
39	92,6407	0,037	0,038	0,035	0,0635
40	94,7951	0,035	0,030	0,024	0,0520

Na osnovu rezultata datih u Tabeli 4 određeni su parametri (K_v) i (n) u formuli 1 i tako je dobijena jednačina oscilovanja tla u obliku:

$$v_4 = 448180,9106 \cdot R^{-3,4629} \quad (8)$$

sa indeksom krivolinijske zavisnosti $\rho_4 = 0,880$.

Proračun zakona brzine oscilovanja tla za opštu krivu



Krivu brzine oscilovanja tla, koju dobijamo na osnovu podataka za sva četiri opita, odnosno za vrednosti redukovanog rastojanja od $R = 10,7722$ do $R = 94,7951$, ovde nazivamo opštom krivom. Podaci za proračun opšte krive sadržani su u tabelama od 1 do 4 (za svih 40 eksplozija), što je omogućilo da se po već opisanoj metodologiji odrede parametri i dobije jednačina opšte krive brzine oscilovanja u obliku:

$$v_0 = 26,2550 \cdot R^{-1,2596} \quad (9)$$

sa indeksom krivolinijske zavisnosti $\rho_0 = 0,961$.

Grafički prikaz ove jednačine dat je na Slici 2.

Slika 2 Grafički prikaz opšte krive za radnu sredinu A PK Kijevo

PRIKAZ MASOVNIH MINIRANJA NA POVRŠINSKOM KOPU KOVILOVAČA DESPOTOVAC

Da bi se proverili rezultati ispitivanja na modelu, izvršena su i merenja pri masovnim miniranjima koja se izvode s ciljem eksploatacije ležišta mineralnih sirovina. Merenja su izvršena na površinskom kopu Kovilovača - Despotovac, na masivnim ili slojevitim krečnjacima.

Ispitivanjem fizičko-mehaničkih osobina radne sredine dobijene su sledeće vrednosti:

- ugao unutrašnjeg trenja	$\varphi = 31^{\circ} 35'$
- kohezija	$C = 138,33 \text{ [kN/m}^2\text{]}$
- zapreminska težina	$\gamma = 26,26 \text{ [kN/m}^3\text{]}$
- čvrstoća na pritisak	$\sigma_p = 808,08 \text{ [daN/cm}^2\text{]}$
- čvrstoća na zatezanje	$\sigma_z = 75,90 \text{ [daN/cm}^2\text{]}$
- brzina longitudinalnih elastičnih talasa	$c_p = 6661,00 \text{ [m/s]}$
- brzina transverzalnih elastičnih talasa	$c_s = 2852,67 \text{ [m/s]}$
- dinamički modul elastičnosti	$E_{din} = 62,46 \text{ [GN/m}^2\text{]}$
- dinamički Poasonov koeficijent	$\mu_{din} = 0,39 \text{ [GN/m}^2\text{]}$

Miniranje br. I

Osnovni podaci vezani za količinu eksploziva u bušotinama su sledeći:

- ukupan broj bušotina	$N_{uk} = 34$
- ukupna količina eksploziva, balkanit	$Q_1 = 2420,0 \text{ [kg]}$
- ukupna količina eksploziva, detonex	$Q_2 = 1203,0 \text{ [kg]}$
- ukupna količina eksploziva	$Q_{uk} = 3623,0 \text{ [kg]}$
- max. količina eksploziva po intervalu usporenja	$Q_i = 108,0 \text{ [kg]}$
- interval usporenja	$t_u = 25 \text{ i } 42 \text{ [ms]}$
- prosečna dužina čepa	$L_{pč} = 2,2 \text{ [m]}$

Miniranje br. II

Osnovni podaci vezani za količinu eksploziva u bušotinama su sledeći:

- ukupan broj bušotina	$N_{uk} = 36$
- ukupna količina eksploziva, balkanit	$Q_1 = 828,0$ [kg]
- ukupna količina eksploziva, detonex	$Q_2 = 1140,0$ [kg]
- ukupna količina eksploziva ANFO	$Q_3 = 1296,0$ [kg]
- ukupna količina eksploziva	$Q_{uk} = 3264,0$ [kg]
- max. količina eksploziva po intervalu usporenja	$Q_i = 92,0$ [kg]
- interval usporenja	$t_u = 25$ i 42 [ms]
- prosečna dužina čepa	$L_{pč} = 2,2$ [m]

Proračun zakona oscilovanja tla za ova miniranja će se vršiti na dva načina: po ruskim autorima i po američkim autorima.

Proračun zakona oscilovanja tla po ruskim autorima

Za proračun zakona oscilovanja tla po ruskim autorima, redukovano rastojanje (R) će se odrediti na osnovu formule 2.

Vrednosti količina eksploziva (Q), rastojanja od mesta miniranja do mesta opažanja (r), redukovana rastojanja (R), brzine oscilovanja po komponentama (v_v), (v_t), (v_i) i rezultujuća brzina oscilovanja tla (v_{rez}) dati su u Tabeli 5.

Tabela 5

Redni broj	(r) [m]	(Q) [kg]	(R)	(v_v) [cm/s]	(v_t) [cm/s]	(v_i) [cm/s]	(v_{rez}) [cm/s]
1	335,0	3623,0	21,8117	0,1460	0,0517	1,2000	1,2100
2	850,0	3623,0	55,3430	0,0138	0,0270	0,0617	0,0687
3	950,0	3623,0	61,8540	0,0222	0,0422	0,0623	0,0785
4	1155,0	3623,0	75,2014	0,0327	0,0317	0,0246	0,0518
5	860,0	3264,0	57,9760	0,1400	0,1010	0,1830	0,2516
6	830,0	3264,0	55,9536	0,0206	0,0133	0,0407	0,0475
7	965,0	3264,0	65,0545	0,0045	0,0337	0,0555	0,0651
8	970,0	3264,0	65,3916	0,0202	0,0568	0,0711	0,0932
9	960,0	3264,0	64,7174	0,0174	0,0477	0,0708	0,0871
10	855,0	3264,0	57,6390	0,0200	0,1070	0,0245	0,1116
11	880,0	3264,0	59,3234	0,0729	0,0936	0,0156	0,1197
12	885,0	3264,0	59,6614	0,0134	0,1530	0,0426	0,1594

Na osnovu rezultata datih u Tabeli 5, metodom najmanjih kvadrata određeni su parametri (K_v) i (n) u formuli 1 i tako je dobijena jednačina oscilovanja tla u obliku:

$$v_t = 2131,52 \cdot R^{-2,441} \quad (10)$$

sa indeksom krivolinijske zavisnosti $\rho_1 = 0,984$.

Proračun zakona oscilovanja tla po američkim autorima

Za proračun zakona oscilovanja tla po američkim autorima, redukovano rastojanje (R) će se odrediti na osnovu (2).

Vrednosti maksimalnih količina eksploziva po intervalu (Q_i), rastojanja od mesta miniranja do mesta opažanja (r), redukovana rastojanja (R), brzine oscilovanja po komponentama (v_v), (v_i), (v_l) i rezultujuća brzina oscilovanja tla (v_{rez}) dati su u Tabeli 6.

Tabela 6

Redni broj	(r) [m]	(Q) [kg]	(R)	(v_v) [cm/s]	(v_i) [cm/s]	(v_l) [cm/s]	(v_{rez}) [cm/s]
1	335,0	108,0	32,2354	0,1460	0,0517	1,2000	1,2100
2	850,0	108,0	81,7931	0,0138	0,0270	0,0617	0,0687
3	950,0	108,0	91,4138	0,0222	0,0422	0,0623	0,0785
4	1155,0	108,0	111,1399	0,0327	0,0317	0,0246	0,0518
5	860,0	92,0	89,6612	0,1400	0,1010	0,1830	0,2516
6	830,0	92,0	86,5335	0,0206	0,0133	0,0407	0,0475
7	965,0	92,0	100,6082	0,0045	0,0337	0,0555	0,0651
8	970,0	92,0	101,1295	0,0202	0,0568	0,0711	0,0932
9	960,0	92,0	100,0869	0,0174	0,0477	0,0708	0,0871
10	855,0	92,0	89,1399	0,0200	0,1070	0,0245	0,1116
11	880,0	92,0	91,7463	0,0729	0,0936	0,0156	0,1197
12	885,0	92,0	92,2676	0,0134	0,1530	0,0426	0,1594

Na osnovu rezultata datih u Tabeli 6, metodom najmanjih kvadrata određeni su parametri (K_v) i (n) u formuli 1 i tako je dobijena jednačina oscilovanja tla u obliku:

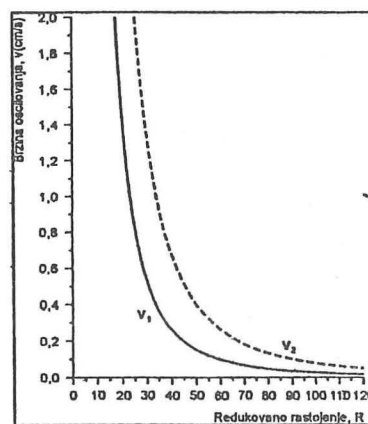
$$v_2 = 3822,082 \cdot R^{-2,3416} \quad (11)$$

sa indeksom krivolinijske zavisnosti $\rho_1 = 0,981$.

Upoređivanje krivih brzina oscilovanja tla

Grafički prikaz uporednih vrednosti brzina oscilovanja za proračun redukovanog rastojanja po ruskim i američkim autorima dat je na Slici 3.

Na osnovu dobijenih rezultata statističke analize između registrovanih i izračunatih brzina oscilovanja tla po ruskim i američkim autorima, možemo reći da između dve promenljive, tj. brzine oscilovanja tla (v) i redukovanog rastojanja (R) postoji veoma jaka povezanost, ali da ruska metoda daje rezultate koji su bliži izmerenim, odnosno registrovanim vrednostima brzina oscilovanja tla.



Slika 3 Grafički prikaz uporednih krivih

ZAKLJUČAK

Izvršena ispitivanja u okviru ovog rada metodološki se sastoje iz dva dela. Prvi deo se sastoji iz primene zakona oscilovanja tla izvedenih u obliku ispitivanja na modelu u radnoj sredini, pri istim uslovima. Drugi deo se sastoji iz primene zakona oscilovanja tla na primerima masovnih miniranja, koja se izvode pri eksploataciji ležišta mineralnih sirovina.

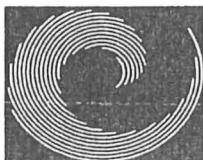
U okviru istraživanja primene zakona oscilovanja tla na primerima masovnih miniranja, u ovom radu izvršeno je upoređenje proračuna zakona po ruskim i američkim autorima na primeru površinskog kopa Kovilovača – Despotovac. Ova dva načina imaju različit pristup u smislu proračuna redukovano rastojanja, odnosno količine eksploziva.

Na osnovu registrovanih i izračunatih brzina oscilovanja tla po ruskim i američkim autorima, izvršena je statistička analiza podataka na osnovu koje možemo reći da između brzine oscilovanja tla (v) i redukovano rastojanja (R) postoji veoma jaka povezanost, ali da ruska metoda daje rezultate koji su bliži vrednostima izmerenih, tj. registrovanih brzina oscilovanja tla.

Na osnovu istraživanja izvedenih na modelu i istraživanja pri masovnim miniranjima, koja su prikazana u ovom radu, može se reći da nam primena zakona oscilovanja tla praktično omogućava da se pri eksploataciji ležišta mineralnih sirovina smanje negativni efekti miniranja i tako poveća efikasnost proizvodnje i ujedno zaštite građevinski objekti u neposrednoj blizini mesta miniranja.

Literatura

1. Backović M., Vuleta J.: Ekonomsko-matematičke metode i modeli, Ekonomski fakultet, Beograd, 2004.
2. Lutovac S.: Primena zakona oscilovanja stenske mase izazvane miniranjem u rudarstvu, Magistarska teza, RGF, Beograd, 2005.
3. Rakić A.: Seizmika miniranja, Društvo inženjera i tehničara, NIS – Naftagas, Novi Sad, 2005.
4. Savić M.: Miniranje na površinskim kopovima, Monografija, RTB Bor Institut za bakar Bor, Indok centar, Bor, 2000.
5. Simeunović D.: Matematika, Udžbenik, RGF – Rudarski odsek, Beograd, 1985.
6. Trajković S., Tokalić R., Lutovac S.: Studija seizmičkih uticaja na okolne građevinske objekte kao posledica izvođenja miniranja na površinskom kopu Kovilovača - Despotovac, RGF Beograd, 2004.
7. Trajković S., Šandor S., Lutovac S.: Tehnika miniranja i potresi, RGF Beograd, 2005.
8. Vukadinović S.: Elementi računa verovatnoće i matematičke statistike, Tehnika za umnožavanje Biroa za građevinarstvo, Beograd, 1970.



NEKE FORMULE ZA INTERPOLACIJU

SOME FORMULAS FOR INTERPOLATION

Simeunović D.¹

Apstrakt

U ovom radu su posmatrane neke formule koje mogu biti upotrebljene za interpolaciju.

Abstract

In this paper we consider some formulas which can be used for the interpolation.

UVOD

Neka je funkcija $y = f(x)$ jedne nezavisne promenjive x data u tačkama x_0, x_1, \dots, x_n segmenta $[a, b]$, gde je:

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Funkcija $y = F(x)$ za koju je

$$F(x_k) = f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

predstavlja jednu interpolacionu funkciju funkcije $y = f(x)$. Tačke (x_k, y_k) , $k = 0, 1, \dots, n$ nazivaju se interpolacionim čvorovima. Kod interpolacije se uzima $f(x) = F(x)$ za $x \in [a, b]$.

¹Prof. Dr Dragomir Simeunović

Jedna interpolaciona funkcija funkcije $y = f(x)$ je Lagranževa interpolaciona funkcija

$$L(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)y_k, \quad (3)$$

gde je:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (4)$$

Funkcije (4) su polinomi stepena n , za koje je

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{za } i = k \\ 0 & \text{za } i \neq k \end{cases}. \quad (5)$$

Za funkciju $L_k(x)$ važi jednakost:

$$\sum_{k=0}^n L_k(x) = 1 \quad (6)$$

za svako x .

Funkcije $L_k(x)$ definisane sa (4) nazivaju se Lagranževi polinomi. Imajući u vidu (5) lako se zaključuje iz (3) da je

$$L(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (7)$$

Pomoću Lagranževih polinoma $L_k(x)$ mogu se dobiti razne interpolacione funkcije funkcije $y = f(x)$. Posmatračemo funkciju

$$V_d(x) = \sum_{k=0}^n (y_k + d)^{k(x)} - (n + d), \quad (8)$$

gde je d konstanta takva da je

$$y_k + d > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (9)$$

Funkcija $V_d(x)$ ima sledeća svojstva:

$$V_d(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

$$V_{1-c} = c \quad (11)$$

za svako x , kada je

$$y_0 = y_1 = \dots = y_n = c.$$

PRIMER:

Za podatke: $x_0 = 1, y_0 = 10$

$$x_1 = 2, y_1 = 1$$

$$x_2 = 4, y_2 = 2$$

važi $V_2(3)$.

Rešenje:

U ovom slučaju je $n = 2$ i $d = 2$. Prema (4) imamo:

$$L_0(3) = -\frac{1}{3}, \quad L_1(3) = 1, \quad L_2(3) = \frac{1}{3}.$$

Prema formuli (8) dobijamo:

$$V_2(3) = 1.024, \quad .$$

Literatura

- 1) Kašanin R., (1969), *Viša matematika I*, Zavod za izdavanje udžbenika SR. BiH, Sarajevo
- 2) Simeunović D., (2001), *O nekim formulama za interpolaciju*, Zbornik radova - Glina 2001, (str. 176-178), Ruma

S A D R Ź A J

1. **D. M. Simeunović**
O KRITERIJUMIMA ZA REŠAVANJE RICCATI-EVE JEDNAČINE POMOĆU KVADRATURA, Zbornik radova Srpske akademije nauka i umetnosti LXIX Matematički institut knj. 8, 1960.
2. **D. M. Simeunović**
PRIMEDBA O NULAMA JEDNE KLASSE CELIH FUNKCIJA, GLAS CCLX Srpske akademije nauka i umetnosti, Odeljenje prirodno-matematičkih nauka, knj. 26 – 1965.
3. **D. M. Simeunović**
SUR LES ZÉROS DU POLYNÔME $\sum_{v=0}^n \frac{z^v}{v!}$; $n = 1, 2, \dots$, Matematički vesnik 2 (17) 1965, str. 259-261.
4. **D. M. Simeunović**
SUR LES LIMITES DES MODULES DES ZÉROS DES POLYNÔMES, Matematički vesnik 4 (19) 1967, str. 293-298.
5. **D. M. Simeunović**
LES LIMITES DES MODULES DES ZÉROS DES POLYNÔMES ET DES SÉRIES DE TAYLOR, Matematički vesnik 4 (19) 1967, str. 299-303.
6. **D. M. Simeunović**
SUR LE CERCLE QUI CONTIENT AU MOINS UN ZÉRO D'UN POLYNÔME ET LES QUESTIONS QUI S'Y RATTACHENT, Matematički vesnik 5 (20) 1968, str. 339-342.
7. **D. M. Simeunović**
SUR LES ZÉROS DES POLYNÔMES DE COMPOSITION, Publications de l'institut mathématique Nouvelle série, tome 10 (24), 1970. pp. 103-111.
8. **D. M. Simeunović**
SUR CERTAINES INÉGALITÉS INTÉGRALES ET LEURS APPLICATIONS, Publications de l'institut mathématique Nouvelle série, tome 110 (25), 1970. pp. 99-105.
9. **D. M. Simeunović und D. D. Adamović**
REŠENI PROBLEMI, Matematički vesnik, nova serija, knjiga 8 (23), sveska 3, 1971, str. 335-337.
10. **D. M. Simeunović**
SUR CERTAINES INÉGALITÉS PARTICULIÈRES, Publications de l'institut mathématique Nouvelle série, tome 20 (34), 1976. pp. 209-214.
11. **D. M. Simeunović**
SUR UNE EVALUATION DES VALEURS APPROXIMATIVES DES ZÉROS COMPLEXES DES POLYNÔMES, Matematički vesnik 13 (28), 1976. str. 449-454.
12. **D. M. Simeunović**
SUR LA RÉPARTITION DES ZÉROS D'UNE CLASSE DE POLYNÔMES, Publications de l'institut mathématique Nouvelle série, tome 28 (42), 1980. pp. 187-194.
13. **D. M. Simeunović**
SUR LES LIMITES DES ZÉROS DU POLYNÔME $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$, Publications de l'institut mathématique Nouvelle série, tome 30 (44), 1981. pp. 169-173.
14. **D. M. Simeunović**
ON A PROCEDURE FOR THE SIMULTANEOUS DETERMINATION OF ALL ZEROS OF A POLYNOMIAL, Dell'istituto di matematica dell'universita di Trieste, vol. XXI – FASC. I – 1989.



15. **D. M. Simeunović**
ON THE CONVERGENCE OF AN ITERATIVE PROCEDURE FOR THE SIMULTANEOUS DETERMINATION OF ALL ZEROS OF A POLYNOMIAL, ZAMM . Z. angew. Math. Mech. 69 (1989) 4, T108 – T110.
16. **D. M. Simeunović**
ON SOME ESTIMATES OF APPROXIMATE VALUES OF ZEROS OF POLYNOMIALS, ZAMM . Z. angew. Math. Mech. 70 (1990) 6, T545 – T549.
17. **D. M. Simeunović**
A REMARK ON THE ZEROS OF A POLYNOMIAL, ZAMM . Z. angew. Math. Mech. 71 (1991) 6, T832 – T835.
18. **D. M. Simeunović**
NOTE ON THE LOCATION OF ZEROS OF A POLYNOMIAL, ZAMM . Z. angew. Math. Mech. 72 (1992) 6, T643 – T646.
19. **D. M. Simeunović**
ON A PROCESS FOR OBTAINING ITERATIVE FORMULAS OF HIGHER ORDER FOR ROOTS OF EQUATIONS, Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, Tome 24, N^{os} 1-2, 1995. pp. 225-229.
20. **D. M. Simeunović**
ON THE LOCATION OF THE ZEROS OF POLYNOMIALS, Mathematica Moravica, Vol. 2 (1998), pp. 91-96.
21. **D. M. Simeunović**
A REMARK CONCERNING ZEROS OF ONE CLASS OF POLYNOMIALS, Mathematica Moravica, Vol. 2 (1998), pp. 97-108.
22. **D. M. Simeunović**
A REMARK ON THE LOCATION OF THE ZEROS OF POLYNOMIALS, Mathematica Moravica, Vol. 3 (1999), pp. 63-66.
23. **D. M. Simeunović**
A PROCEDURE FOR OBTAINING ITERATIVE FORMULAS OF HIGHER ORDER, Mathematica Moravica, Vol. 3 (1999), pp. 67-75.
24. **D. M. Simeunović**
ON A METHOD FOR OBTAINING ITERATIVE FORMULAS OF HIGHER ORDER, Mathematica Moravica, Vol. 9 (2005), pp. 53-58.
25. **D. M. Simeunović**
A REMARK ON THE MODULI OF THE ROOTS OF ALGEBRAIC EQUATIONS, Mathematica Moravica, Vol. 13 - 1 (2009), pp. 43-47.
26. **D. M. Simeunović**
A PROCEDURE FOR OBTAINING A FAMILY OF ITERATIVE FORMULAS OF HIGHER ORDER, Mathematica Moravica, Vol. 13 - 2 (2009), pp. 23-26.
27. **D. M. Simeunović**
A PROCEDURE FOR OBTAINING A FAMILY OF ITERATIVE FORMULAS FOR FINDING ZEROS OF FUNCTIONS, Mathematica Moravica, Vol. 14 - 1 (2010), pp. 1-5.
28. **D. M. Simeunović**
A REMARK ON THE UPPER BOUNDS OF THE MODULI OF THE ROOTS OF ALGEBRAIC EQUATIONS, Mathematica Moravica, Vol. 14 - 1 (2010), pp. 7-9.

29. **D. M. Simeunović**
A NOTE ON THE ZEROS OF ONE FORM OF COMPOSITE POLYNOMIALS, *Mathematica Moravica*, Vol. 15 - 2 (2011), pp. 47-49.
30. **D. M. Simeunović**
A REMARK ON ONE FAMILY OF ITERATIVE FORMULAS, *Mathematica Moravica*, Vol. 15-2 (2011), pp. 51-53.
31. **D. M. Simeunović**
A REMARK ON ONE ITERATIVE PROCESS FOR FINDING THE ROOTS OF EQUATIONS, *Mathematica Moravica*, Vol. 16 - 2 (2012), pp. 53-57.
32. **D. M. Simeunović**
NO THE LOCATION OF ZEROS OF SOME POLYNOMIALS, *Mathematica Moravica*, Vol. 16 - 2 (2012), pp. 59-61.
33. **D. M. Simeunović**
ACCELERATION OF CONVERGENCE OF ONE ITERATIVE METHOD FOR FINDING THE ROOTS OF EQUATIONS, *Mathematica Moravica*, Vol. 16 - 2 (2012), pp. 63-68.
34. **D. M. Simeunović**
A REMARK WITH REGARD TO INEQUALITIES FOR SOME SUMS, *Mathematica Moravica*, Vol. 18 - 1 (2014), pp. 77-79.
35. **D. M. Simeunović**
IZRAČUNAVANJE SREDNJE TEMPERATURE ZRAČENJA POMOĆU GLOBUS-TERMOMETRA UPOTREBOM NOMOGRAMA, *Glasnik higijenskog inatituta*, sv. 3-4, (1957) Beograd.
36. **M. Savičević; D. Simeunović; M. Živkov; S Radončić; B. Babić**
PRILOG POZNAVANJU REŽIMA PIJENJA VODE U USLOVIMA VISOKE TEMPERATURE RADNE SREDINE, *Higijena – časopis za preventivnu medecinu i saniternu tehniku*, Vol. XI br. 4 (1959) Beograd.
37. **D. Simeunović; M. Kremić**
ZONA KONFORA I PRODUKTIVNOSTI RADA, *Savez inženjera i tehničara Jugoslavije, Savetovanje o produktivnosti rada*, mart (1959) Beograd.
38. **D. Simeunović;**
OSVETLJENJE U INDUSTRIJI NR SRBIJE, *Jugoslovenski komitet za osvetljenje, V savjetivanje o rasvjeti*, decembar (1961) Opatija.
39. **D. Simeunović;**
METODA SUKCESIVNE APROKSIMACIJE PRIMENJENA U PROSTOM DIJAGONALNOM SISTEMU RAZVOĐENJA VAZDUHA PO JAMI, *Časopis Sigurnost u rudnicima – Rudarski institut*, God. 4, Sveska 2 (1965) Beograd.
40. **D. Simeunović; B. Vulićević**
O PRIMENI NJUTNOVE METODE NA REŠAVANJE SLOŽENOG DIJAGONALNOG SISTEMA U VENTILACIJI RUDNIKA, *Časopis Sigurnost u rudnicima – Rudarski institut*, God. VII, Sveska 3 (1972) Beograd.
41. **B. Genčić; D. Gagić; D. Simeunović;**
PLANIRANJE TEHNOLOŠKIH PARAMETARA OTKOPA KOD PRIMENE METODA OTKOPAVANJA ŠIROKIM ČELOM SA ZARUŠAVANJEM KROVNE PLOČE UGLJA, *II Jugoslovenski simpozijum o podzemnoj eksploataciji mineralnih sirovina, Tema: Visokoproduktivne metode i mehanizacija u podzemnoj eksploataciji mineralnih sirovina*, novembar 1979. Struga.

42. M. Grujić; D. Salatić; D. Ocepek; Z. Stanišić; **D. Simeunović**; S. Deušić
DESARROLLO DE ECUACINES PARA LA CALCULACION DE LA OPTIMA POTENCIA DE ELECTROMOTORES DE MOLINOS SEMI-AUTOGENOS, IV simposium sobre molienda, 12 – 16 de nov. 1984. Vina del mar – Chile.
43. B. Genčić; **D. Simeunović**; A. Gluščević; M. Lilić; Lj. Vukajlović; Z. Petković; D. Gagić;
UTICAJ DUŽINE OTKOPA NA ISKORIŠĆENJE UGLJA U USLOVIMA MALIH LEŽIŠTA SA SLOŽENIM EKSPLOATACIONIM KARAKTERISTIKAMA, XII Jugoslovensko-poljski simpozijum o podzemnoj eksploataciji mineralnih sirovina, Tema: Iskorišćenje ležišta mineralnih sirovina o procesu podzemne eksploatacije, 20. – 28. 04. 1985. Zakopane – Poljska.
44. M. Grujić; D. Salatić; **D. Simeunović**; D. Ocepek; J. Milošević; S. Deušić
KORELACIJA OSNOVNIH PARAMETARA RADA MLINOVA I NJIHOV UTICAJ NA KAPACITET I UTROŠAKA ENERGIJE, X jugoslovenski simpozijum o pripremi mineralnih sirovina, 17. – 20. septembar 1985. Struga.
45. **D. Simeunović**; A. Lazić; D. Simić; M. Milovanović;
USKLAĐIVANJE KAPACITETA PROIZVODNJE KVARCNOG PESKA SA LEŽIŠTA „SLATINA" I „ČUČUGE" U SLOŽENIM GEOLOŠKIM USLOVIMA, XIII Poljsko – Jugoslovenski simpozijum o površinskoj eksploataciji mineralnih sirovina, jun 1987. Varšava – Poljska.
46. D. Salatić; S. Deušić; **D. Simeunović**; M. Grujić;
BESLENEN CEVHER BOYUTU BIR FONKSIYON OLARAK BILYALI DEGIRMENIN GOÇ VE KAPASITESININ HESABI, III. Uluslararası cevher hazırlama sempozyumu, sep. 11-13. 1990 Istanbul – Turkey.
47. **D. Simeunović**;
ODREĐIVANJE LINIJA NAJVEĆEG NAGIBA KORISNIH KOMPONENTI LEŽIŠTA MINERALNIH SIROVINA, Prvo savetovanje o površinskoj eksploataciji – Glina, Kanjiža 29. 06. – 02. 07. 1995.
48. **D. Simeunović**;
ODREĐIVANJE SREDNJEG SADRŽAJA KARAKTERISTIKA KVALITETA U FUNKCIJI RAZVOJA RADOVA NA POVRŠINSKIM KOPOVIMA, Prvo savetovanje o površinskoj eksploataciji – Glina, Kanjiža 29. 06. – 02. 07. 1995.
49. **D. Simeunović**;
JEDNA INTERPOLACIONA FORMULA I NJENA PRIMENA U POVRŠINSKOJ EKSPLOATACIJI, Drugi međunarodni simpozijum o površinskoj eksploataciji i kvalitetu sirovina za proizvodnju cementa – Cement '96, Kosjerić 29. - 31. 05. 1996.
50. **D. Simeunović**;
JEDNA INTERPOLACIONA FORMULA REDA r I NJENA PRIMENA U POVRŠINSKOJ EKSPLOATACIJI, Treća međunarodna naučna konferencija o površinskoj eksploataciji – OMC '96, Beograd, 25-27. 09. 1996.
51. **D. Simeunović**;
ODREĐIVANJE ZAPRAŠENOSTI PRIMENOM TEŽINSKO-DALJINSKE INTERPOLACIONE FORMULE, Zaštita životne sredine Fruške gore i eksploatacija mineralnih sirovina, 14-16. 05. 1997. Vrdnik.
52. **D. Simeunović**;
PROSTORNA INTERPOLACIJA KARAKTERISTIKA LEŽIŠTA MINERALNIH SIROVINA, Informatika, ekologija i menadžment u površinskoj eksploataciji ležišta mineralnih sirovina, 18-21. 06. 1997. Arandelovac.
53. V. Pavlović; **D. Simeunović**;
OCENA KARAKTERISTIKA POUZDANOSTI RADA SISTEMA POVRŠINSKE EKSPLOATACIJE, Savetovanje: Površinska eksploatacija kamena, 26-27. 09. 1997. Golubac.

54. **D. Simeunović;**
PRIMENA TEŽINSKE INTERPOLACIONE FORMULE REDA r ZA ODREĐIVANJE ZAPTAŠENOSTI, Savetovanje: Površinska eksploatacija kamena, 26-27. 09. 1997. Golubac.
55. V. Pavlović; **D. Simeunović;**
ANALIZA MODELA FUNKCIONISANJA DISKONTINUALNIH SISTEMA, Drugo međunarodno savetovanje o površinskoj eksploataciji gline – Glina, Požarevac 14-16. 05. 1998.
56. **D. Simeunović;**
INTERPOLACIONE FORMULE U POVRŠINSKOJ EKSPLOATACIJI, Drugo međunarodno savetovanje o površinskoj eksploataciji gline – Glina, Požarevac 14-16. 05. 1998.
57. **D. Simeunović;**
PRIMENA NEKIH INTERPOLACIONIH FORMULA ZA FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH U ZAŠTITI ŽIVOTNE SREDINE, Drugi međunarodni simpozijum: Rudarstvo i zaštita životne sredine, MEP '98, Beograd.
58. **D. Simeunović;**
PRIMENA PRONYEVE INTERPOLACIJE PRI IZUČAVANJU KARAKTERISTIKA RADNE SREDINE POVRŠINSKIH KOPOVA UGLJA, Prvo međunarodno savetovanje o površinskoj eksploataciji uglja – Ugalj '98, Beograd 24-26. 09. 1998.
59. **D. Simeunović;**
EKSTREMI FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH, Međunarodno savetovanje – Cement '99, Novi Sad – Beočin, 11-14. 05. 1999.
60. V. Pavlović; **D. Simeunović;**
EKOLOŠKA POUZDANOST ELEMENATA TEHNIČKIH SISTEMA, Međunarodno savetovanje – Cement '99, Novi Sad – Beočin, 11-14. 05. 1999.
61. V. Pavlović; **D. Simeunović;**
APSOLUTNI EKSTREMI FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH, IV međunarodna naučna konferencija o površinskoj eksploataciji – OMC '99, Bor, 22-24. 09. 1999.
62. V. Pavlović; **D. Simeunović;**
PROVERA POUZDANOSTI SISTEMA POVRŠINSKE EKSPLOATACIJE PO KRITERIJUMU MAKSIMALNE STACIONARNE VEROVATNOĆE RADA, Savetovanje: Informatika, menadžment, ekologija i standardi – IMES 2000, Aranđelovac, 10-12. 06. 2000.
63. V. Pavlović; **D. Simeunović;**
EKSTREMI FUNKCIJA DVE PROMENLJIVE PO ZADATIM PRAVCIMA, Savetovanje: – KAMEN 2000, Aranđelovac, 11-13. 10. 2000.
64. **D. Simeunović;**
O NEKIM FORMULAMA ZA INTERPOLACIJU, Treće međunarodno savetovanje o površinskoj eksploataciji i preradi – Glina, Ruma 16-18. 05. 2001.
65. **D. Simeunović;**
O NEKIM FORMULAMA ZA INTERPOLACIJU FUNKCIJA OD DVE PROMENLJIVE, Drugo međunarodno savetovanje o površinskoj eksploataciji uglja – Ugalj '01, Beograd, 04-06. 10. 2001.
66. **D. Simeunović;** V. Pavlović;
O NEKIM FORMULAMA ZA INTERPOLACIJU FUNKCIJA OD TRI PROMENLJIVE, Druga međunarodna izložba i savetovanje - KAMEN 2001, Aranđelovac, 10-13. 10. 2001.
67. **D. Simeunović;**
RADIVOJ KAŠANIN (1892 – 1989) – Život i delo srpskih naučnika, Srpska akademija nauka i umetnosti, biografije i bibliografije knj. VIII, II odeljenje knj. 8, Beograd, 2002.

68. P. Lazić; N. Čalić; D. Vučinić; S. Deušić **D. Simeunović;**
MODEL KINETIKE FLOTIRANJA ZASNOVAN NA BOLTZMAN-ovoj FUNKCIJI,
18 Jugoslovenski simpozijum o pripremi mineralnih sirovina, Banja Vrujci, 11–14. juni 2002.
69. S. Lutova; **D. Simeunović;** S. Trajković;
PIMENA ZAKONA OSCILOVANJA STENSKE MASE IZAZVANE MINIRANJEM U
KREČNJAKU, VI međunarodna izložba i savetovanje - KAMEN 2005, Arandelovac,
26-29. 10. 2005.
70. **D. Simeunović;**
NEKE FORMULE ZA INTERPOLACIJU, VII međunarodna konferencija - NEMETALI 06,
Banja Vrujci, 25-28. 10. 2006.



Dr Dragomir M. Simeunović, diplomirani astronom i diplomirani matematičar, redovni profesor u penziji, Rudarsko-geološkog fakulteta, Univerziteta u Beogradu

Dragomir Simeunović rođen je 22. februara 1931. godine u mestu Prilike, opština Ivanjica, od oca Milana i majke Novke, rođene Ilić. Četvorogodišnju osnovnu školu završio je 1942. godine u Prilikama, malu maturu 1946. godine u Ivanjici, a veliku maturu 1950. godine u Beogradu. Na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu završio je studije Astronomije 28. juna 1955. godine kao poslednji diplomac profesora Milutina Milankovića. Godine 1960. završio je studije Matematike, takođe na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Na prirodno - matematičkom fakultetu u Beogradu odbranio je magistarski rad 1967. godine iz oblasti matematike pod nazivom „*Lokalizacija nula polinoma*“. Doktorsku disertaciju iz oblasti matematike pod nazivom „*O granicama korena algebarskih jednačina i nekim njihovim primenama*“, odbranio je 8. maja 1969. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu.

Po završetku vojnog roka, u novembru 1956. godine, zaposlio se u Higijenskom institutu NR Srbije u Odeljenju medicine rada, gde radi do februara 1962. godine.

Februara 1962. godine izabran je za asistenta za predmet Matematika na Rudarsko-geološkom fakultetu u Beogradu. Godine 1970. izabran je za docenta, 1977. za vanrednog profesora, a godine 1982. za redovnog profesora Rudarsko-geološkog fakulteta, Univerziteta u Beogradu. U toku rada na Rudarsko-geološkom fakultetu u Beogradu predavao je: Matematiku I, Matematiku II, Posebna poglavlja iz matematike i Geostatistiku. Studentima Poslediplomske nastave održavao je predavanja od 1969. do 1998. godine. U toku svog rada na fakultetu, bio je i Šef Katedre za primenjenu matematiku skoro dvadeset godina. Član GAMM-a (*Gesellschaft für angewandte mathematik und mechanik*) bio je više od dvadeset godina. Penzionisan je 1996. godine.

Dragomir Simeunović bio je angažovan na Ekonomskom fakultetu Beogradu, gde je predavao Matematiku II od 1971. do 1975. godine.

Jedno vreme predavao je Matematiku II i u Vojnoj akademiji u Beogradu.

Predavanja iz oblasti Matematike za slušaoce poslediplomskih studija, održavao je izvesno vreme na fakultetima u Boru, Prištini i Tuzli.

Višu matematiku predavao je u Višoj školi za organizaciju rada u Beogradu. U istoj školi predavao je i predmet Fizikalne štetnosti. Višu matematiku predavao je i na Veterinarskom fakultetu u Beogradu.

Bio je član Komisija za odbranu Doktorskih disertacija iz oblasti rudarstva, geologije, astronomije i matematike za dvadeset četiri kandidata, kao i član velikog broja Komisija za odbranu magistarskih i diplomskih radova.

Dragomir Simeunović objavio je preko sedamdeset pet radova u raznim stranim i domaćim publikacijama.

Pored radova datih u ovoj knjizi, ovde navodimo i sledeće radove:

1. D. Simeunović, „*Fizikalne štetnosti*“, Skripta za studente Više škole za kadrovske službe u Beogradu, Beograd, 1965. godine.
2. D. Simeunović, B. Branković, „*Fizikalne štetnosti*“, Skripta za studente Više škole za organizaciju rada, Beograd, 1967. godine.
3. Č. Čepinac, V. Popović, D. Simeunović, „*Matematika – Priručnik za pripremanje prijemnog ispita*“, Viša škola za organizaciju rada u Beogradu, Beograd, 1967. godine.
4. D. Simeunović, „*Viša matematika*“, Skripta za studente Više škole za organizaciju rada, Beograd, 1968. godine.
5. D. Simeunović, B. Vulićević, V. Pavlović, „*Rešeni ispitni zadaci iz Matematike II*“, Ekonomski fakultet, Beograd, 1974. godine.
6. D. Simeunović, B. Vulićević, V. Pavlović, M. Ivović, M. Anđelković, „*Matematika II – Zadaci i osnovi teorije*“, V izdanje, Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet 1976. godine.
7. D. Simeunović, „*Matematika za poslediplomske studije*“, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, 1985. godine.

Godine 1960. stupa u brak sa Darom Bogunović, sa kojom je proveo više od pedeset tri godine, do njene smrti 13. juna 2013. Supruga Dara imala je veliko razumevanje za njegov naučni i stručni rad i svesrdno ga je podržavala u svemu. Ovu knjigu Dragomir Simeunović posvećuje svojoj supruzi Dari u znak velikog poštovanja i zahvalnosti.

Profesor Dragomir Simeunović sada živi u Beogradu.

Beograd, 2016. godina