LEÇONS

SUR LES

SPECTRES MATHÉMATIQUES

PROFESSÉES A LA SORBONNE EN 1928

PAR

Michel PETROVITCH

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE,
PROFESSEUR AGRÉÉ A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1928

LEÇONS

SUR LES

SPECTRES MATHÉMATIQUES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C[ie].
Quai des Grands-Augustins, 55.
83551-28

LEÇONS

SUR LES

SPECTRES MATHÉMATIQUES

PROFESSÉES A LA SORBONNE EN 1928

PAR

Michel PETROVITCH

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE,
PROFESSEUR AGRÉÉ A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1928

PRÉFACE

Le présent Volume contient la matière des leçons que j'ai professées à la Sorbonne pendant le second semestre de l'année scolaire 1927-1928. Il est consacré à une branche des Mathématiques qui, si l'on peut dire, en est encore à ses premiers pas : les relations entre les deux êtres mathématiques primordiaux, la fonction et le nombre.

C'est un fait aujourd'hui bien connu que tous les problèmes qui peuvent se poser dans l'étude des fonctions définies par des conditions énumérables peuvent être transposés, *en principe*, en problèmes relatifs à la définition d'une seule fraction décimale. Mais cette vue théorique n'acquiert toute son importance que lorsqu'on définit *d'une manière concrète* la correspondance qui peut être établie entre la fonction et la fraction décimale. « Il y a là un champ d'étude illimité, où la difficulté principale consiste à choisir les formes logiques intéressantes et fécondes parmi l'infinité de celles qui s'offrent à nous » (E. Borel).

Dans ces *Leçons* j'ai exposé sous une forme aussi simple que possible les premiers éléments de la théorie des *spectres mathématiques* se rattachant justement à cet ordre d'idées.

Qu'il me soit permis de présenter cet Ouvrage comme un hommage de reconnaissance à MM. les professeurs de la Faculté des Sciences de Paris dont plusieurs sont mes anciens et vénérés maîtres.

MICHEL PETROVITCH.

Paris, mai 1928.

LEÇONS

SUR LES

SPECTRES MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE PARTIE.

SPECTRES DES ENSEMBLES DES NOMBRES.

CHAPITRE I.

SPECTRES DES ENSEMBLES DÉNOMBRABLES.

1. **Notion générale de spectre.** — Par analogie avec la désignation usitée en Physique, nous désignerons d'une manière générale comme *spectre* d'une collection (O) d'objets concrets ou abstraits O_1, O_2, O_3, ... une suite linéaire S, limitée ou illimitée de signes m_1, m_2, m_3, ..., en correspondance avec les objets O_k, la correspondance étant telle qu'un objet O_k détermine sans ambiguïté un groupe de signes m_k et que, réciproquement, ce groupe de signes m_k détermine l'objet O_k, avec la condition que tous les objets O_k et tous les signes m_k puissent être ainsi déterminés.

Comme exemple de spectre d'une collection (O) d'objets concrets, nous rappellerons le *spectre optique* d'un mélange de substances, par exemple le spectre d'émission caractérisant les sources de lumière, ou bien le spectre d'absorption caractéristique des milieux traversés par la lumière. Le rôle de groupes de signes m_k est joué par des raies, cannelures et bandes spectrales, par des parties brillantes séparées par des parties sombres, etc. Ainsi, chaque raie brillante est le témoin de l'existence, dans la radiation lumineuse, d'une vibration d'une fréquence particulière, comme chaque corde du piano qui résonne sous l'influence d'un son extérieur nous dévoile la présence dans le mouvement vibratoire complexe qui produit ce son d'une vibration pendulaire spéciale. La lumière, colorée par une substance, fournit, après avoir traversé un appareil dispersif (par exemple un prisme), un spectre composé de lignes (raies) colorées dont le nombre, la position, la largeur, la couleur et l'intensité dépendent de la substance colorante. Un même élément chimique fournit, dans les mêmes circonstances physiques, toujours le même spectre, de manière que les particularités du spectre permettent de discerner les éléments composant un mélange. C'est par exemple ainsi que les lignes de Frauenhofer dans le spectre solaire caractérisent certains éléments composant l'atmosphère solaire; que les spectres des terres rares ont conduit à la découverte de plusieurs éléments chimiques révélés par certaines raies ayant une position et des caractéristiques physiques déterminées.

Comme exemple de spectre d'une collection (O) d'objets abstraits, nous indiquerons le *spectre d'un ensemble de nombres*. On connaît, par exemple, de ces problèmes-devinettes qu'on se propose en matière de distraction dans les sociétés, où le calculateur (devin) se fait fort de deviner plusieurs nombres pensés d'après une seule donnée numérique qu'on lui énonce et qui est le résultat final d'un calcul auquel il n'assiste pas. Il se trouve que ces problèmes élémentaires ne sont que des cas très particuliers d'un problème d'ordre général, résoluble par le même artifice convenablement généralisé, consistant à calculer numériquement une suite limitée ou illimitée d'inconnues, et par cela même aussi une fonction inconnue, à l'aide de la suite des chiffres d'un même nombre S, le *spectre des inconnues*.

C'est ainsi que le nombre

$$S = \left(\frac{101}{100}\right)^6 = 1,061520150601$$

représente un spectre de la suite des coefficients binomes $\binom{6}{k}$: le groupe de chiffres significatifs de S, commençant par la $(2k-1)^{\text{ième}}$ et terminé par la $(2k)^{\text{ième}}$ décimale, fournit la valeur $\binom{6}{k}$.

Le nombre

$$\begin{aligned} S &= 10^{-36}\,1001001^6 \\ &= 1{,}006021050090126141126090050021006001 \end{aligned}$$

représente un spectre des coefficients du développement suivant les puissances de x de la fonction

$$(1 + x + x^2)^6;$$

si l'on en partage la partie décimale en tranches de trois chiffres, la $k^{\text{ième}}$ tranche fournit le coefficient de x^k.

Si l'on désigne par 9_k le nombre entier obtenu en écrivant le chiffre 9 k fois consécutivement ($9_1 = 9$, $9_2 = 99$, ...), le nombre

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{9_2} + \frac{1}{9_4} + \ldots + \frac{1}{9_{200}} - \frac{1}{100}\,\frac{9_4}{9 \cdot 9_2} \\ &= 0{,}000000010002000201020004000202030004000402020006 01\ldots \end{aligned}$$

est un spectre rattaché aux nombres premiers : si l'on partage la partie décimale de S en tranches successives de deux chiffres et si l'on désigne comme lacune toute tranche composée exclusivement de zéros, le nombre des lacunes dans l'ensemble des k premières tranches est exactement égal au nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à k, et cela pour toute valeur $k \leqq 100$.

Les probabilités respectives de deux événements contraires A et B étant $p = \frac{2}{3}$ et $q = \frac{1}{3}$, le nombre

$$\begin{aligned} S &= (2 + 10^{-5})^{10} - 2^{10} \\ &= 0{,}05120115201536013440080640336000096 00\ldots \end{aligned}$$

représente un spectre de probabilités rattaché à ces deux événements. La probabilité pour que, sur 10 épreuves, l'événement A arrive $10-k$ fois (et B k fois) s'obtient en divisant par le nombre fixe $M = 59049$ le groupe de décimales de S commençant par la $(5k+1)^{\text{ième}}$ et terminé par la $5(k+1)^{\text{ième}}$ décimale.

Toutes les fois que l'intégrale de Cauchy

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$$

(prise le long d'un contour C comprenant le point $z = \alpha$ et à l'intérieur duquel f est holomorphe) s'exprime pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, par des nombres entiers positifs à un ou deux chiffres, la valeur

$$S = f\left(\alpha + \frac{1}{100}\right)$$

joue le rôle du spectre de la suite $I_0, I_1, I_2, \ldots$. Le nombre I_0 coïncide avec la partie entière de S et I_n est le nombre MN, où M est la $(2n-1)^{\text{ième}}$ et N la $(2n)^{\text{ième}}$ décimale de S.

Le nombre π se rattache comme spectre de la fonction inconnue dans le problème en apparence indéterminé : déterminer une courbe plane $y = f(x)$ dont la sous-normale est développable en série de puissances de x à coefficients entiers positifs plus petits que 10 et a au point $x = \frac{1}{10}$, $y = y_0$ une longueur égale à la demi-circonférence du cercle de rayon 1. La courbe est définie par l'équation

$$y = \sqrt{2}\sqrt{C + \varphi(x)},$$

$$\varphi(x) = M_0 + \frac{M_1}{2}x + \frac{M_2}{3}x^2 + \ldots,$$

où M_k est la $k^{\text{ième}}$ décimale de π et la constante C ayant la valeur

$$C = \frac{y_0^2}{2} - \varphi(0,1).$$

Nous désignerons, d'une manière générale, comme *spectre mathématique* d'un ensemble d'éléments e_k, un nombre S en correspondance avec les éléments e_k, la correspondance étant telle qu'un élément détermine un groupe de décimales de S et que, réciproquement, ce groupe de décimales détermine l'élément e_k avec la condition que tous les éléments e_k et toutes les décimales de S puissent être ainsi déterminées.

Au cours de ces *Leçons* nous indiquerons des modes généraux de formation des spectres mathématiques rattachés aux ensembles des nombres et aux fonctions, ainsi que la manière dont on peut faire intervenir les spectres ainsi formés dans des problèmes d'Arithmétique et d'Analyse.

2. Un procédé général de formation des spectres. — Considérons un ensemble (U) dont chaque élément u a un nombre limité d'indices, chaque indice prenant toutes les valeurs entières positives. On peut toujours, de la manière connue (¹), ranger les éléments u en une suite linéaire (V) dans laquelle chaque élément v serait affecté d'un seul indice, avec la correspondance biunivoque entre les éléments de (U) et ceux de (V). Le procédé consiste à considérer l'ensemble de tous les éléments

$$u_{m_1, m_2, \ldots, m_p},$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_p$ prennent toutes les valeurs entières et positives. Dans cet ensemble il y a un nombre limité d'éléments pour lesquels on a

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n,$$

n étant un nombre positif déterminé. Si l'on suppose successivement

$$n = p;\ p+1,\ p+2,\ \ldots,$$

on aura chaque fois un nombre limité d'éléments que l'on pourra écrire sur une même ligne les uns à la suite des autres. On écrira d'abord l'élément $u_{1,1,\ldots,1}$ qui correspond à $n = p$, puis ceux qui correspondent à $n = p + 1$ (en les rangeant dans un ordre quelconque), puis ceux qui correspondent à $n = p + 2$, etc. Comme, pour chaque valeur de n, on en écrit un nombre limité, tout élément de l'ensemble occupera dans cette suite un rang fini, car il est obtenu pour une valeur finie de n. Une correspondance biunivoque lie alors les éléments $u_{m_1}, u_{m_2}, \ldots, u_{m_p}$ aux éléments v_m.

Or, c'est un fait bien connu que (V) étant un ensemble dénombrable d'éléments v_m, l'ensemble (C) des ensembles (V) a la puissance du continu, c'est-à-dire qu'il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments de (C) et les nombres réels compris entre 0 et 1 : à chaque ensemble (V) correspondra un tel nombre et réciproquement.

Une telle correspondance peut être effectivement établie de bien des manières. Nous en indiquerons une, intuitive et générale.

Soient P_k et Q_k la partie réelle et le coefficient de i de l'élément v_k et envisageons l'ensemble (P) d'éléments P_k. Il y a une infinité de fonctions $\Phi(x)$ telles que la courbe $y = \Phi(x)$ ait la forme de la figure 1 ou de la figure 2, de manière qu'à toute valeur réelle de x

(¹) E. Borel, *Leçons sur la Théorie des fonctions*, 2ᵉ édition, p. 8-9.

corresponde une seule valeur réelle de y comprise entre o et 1, et inversement : qu'à toute valeur de y comprise dans cet intervalle,

Fig. 1.

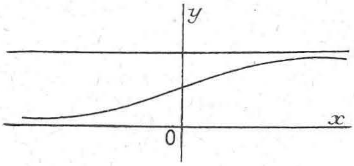
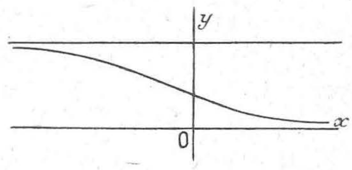


Fig. 2.



corresponde une seule valeur réelle de x. Telles seraient, par exemple, les fonctions

$$\frac{1}{1+e^{-x}}, \quad e^{-x^2}, \quad \frac{2}{\pi}\,\text{arc tang}\, x$$

(la branche de arc tang comprise entre o et 1). Chacun des nombres $\Phi(P_k)$ sera réel et compris entre o et 1.

Soient a_k^h les décimales $\Phi(P_k)$ de sorte que

$$\begin{aligned} \Phi(P_1) &= 0,\ a_1^1 a_1^2 a_1^3 \ldots; \\ \Phi(P_2) &= 0,\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \ldots; \\ \Phi(P_3) &= 0,\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \ldots; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

A l'aide de ces nombres formons, par la méthode des diagonales, le nombre décimal suivant :

$$S = 0,\ a_1^1 a_2^1 a_1^2 a_3^1 a_2^2 a_1^3 a_4^1 a_3^2 \ldots,$$

où l'ordre suivant lequel se suivent les indices supérieurs et inférieurs est indiqué dans le tableau

$$\begin{array}{c|cc|ccc|cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & \ldots \end{array}$$

Il est manifeste que :

1° la $h^{\text{ième}}$ décimale de $\Phi(P_k)$ coïncide avec la décimale de rang

$$h + \frac{1}{2}(k+h-1)(k+h-2)$$

du nombre S ;

2° la $\alpha^{\text{ième}}$ décimale de S coïncide avec la $h^{\text{ième}}$ décimale de $\Phi(P_k)$, où h et k ont les valeurs

$$h = \alpha - \frac{n(n-1)}{2}, \qquad k = \frac{n(n+1)}{2} - \alpha + 1,$$

n étant la partie entière du nombre

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{8\alpha - 7}\right).$$

Il y a ainsi une correspondance biunivoque entre le nombre S et la suite des $\Phi(P_k)$: la suite des décimales des P_k détermine sans ambiguïté la suite des décimales de S, et réciproquement. Le nombre S serait alors un spectre de l'ensemble (P).

Formons de la même manière le nombre réel T, compris entre 0 et 1, représentant le spectre de l'ensemble (Q) ayant pour éléments les Q_k. Les deux nombres S et T déterminent, dans le plan des imaginaires, un point M ayant pour affixe $S + iT$, situé dans ou sur le carré dont les côtés ont pour équations

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad y = 0, \qquad y = 1.$$

La correspondance entre l'ensemble des éléments v_k et le point M est manifestement biunivoque : à chaque ensemble (V) correspond un seul point M et à chaque point M correspond un seul ensemble (V).

D'autre part, d'après le théorème de Cantor, l'ensemble des points M a la même puissance que l'ensemble des points compris entre 0 et 1 sur l'axe réel. Il est donc possible d'établir, entre les points P compris entre 0 et 1, d'une part, et l'ensemble des ensembles (V), d'autre part, une correspondance telle que tout ensemble des ensembles (V) détermine sans ambiguïté un point P, et réciproquement. On établirait effectivement une telle correspondance d'une foule de manières, par exemple en formant le nombre réel P ayant zéro comme partie entière et dont les décimales coïncident alternativement avec celles des nombres S et T.

Le nombre P est un *spectre de l'ensemble* (U) qu'il détermine sans ambiguïté et se trouve aussi parfaitement déterminé par celui-ci. Et l'on arrive ainsi à la conclusion suivante :

Étant donné un ensemble (C) (*ayant la puissance du continu*) *des ensembles dénombrables* (U) *à éléments nombres réels ou imaginaires, il est toujours possible de former des spectres en cor-*

respondance univoque et réciproque avec les ensembles U *comme parties intégrantes de* (C).

Le procédé de formation du spectre, indiqué dans ce qui précède, est applicable à tout ensemble dénombrable. Dans des cas plus particuliers, on peut former des spectres aussi de bien d'autres manières. L'une d'elles, exposée dans le Chapitre suivant, applicable aux ensembles dont les éléments sont des nombres entiers ou des nombres collectivement transmutables en nombres entiers, est particulièrement intéressante à cause de ses analogies avec les procédés de l'analyse spectrale chimique et des applications auxquelles se prêtent les spectres ainsi formés.

CHAPITRE II.

SPECTRES CANNELES DES SUITES DE NOMBRES ENTIERS POSITIFS.

3. Notion de spectre cannelé. — Soient

$$N_0,\ N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_m \tag{1}$$

une suite de nombres entiers *réels positifs*, h_k un entier positif supérieur ou égal au nombre de chiffres de N_k, et λ_k^i le $i^{\text{ième}}$ chiffre de N_k, le rang i du chiffre étant compté de la droite vers la gauche.

Formons le groupe numérique

$$G_k = 00\ldots 0N_k, \tag{2}$$

composé du nombre N_k précédé d'autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre total de chiffres du groupe (2) soit égal à h_k.

Formons ensuite le nombre

$$G_0 G_1 G_2 \ldots G_m \tag{3}$$

obtenu en écrivant bout à bout, à la suite les uns des autres, les groupes numériques G_0, G_1, G_2, ... Les groupes des chiffres significatifs de (3), provenant de deux entiers consécutifs N_{k-1} et N_k, sans jamais empiéter les uns sur les autres, peuvent se trouver séparés par des zéros en nombre plus ou moins considérable, suivant que l'écart entre h_k et le nombre effectif l_k de chiffres de l'entier N_k est plus ou moins grand.

Le nombre (3) ainsi formé rappelle les spectres lumineux des corps incandescents : les groupes

$$N_0, N_1 \ldots, N_m \tag{4}$$

des chiffres significatifs y correspondraient aux cannelures du spectre; les zéros qui les séparent correspondraient aux parties sombres, et les chiffres significatifs λ_k^i eux-mêmes aux raies spectrales dont l'ensemble caractérise un élément N_k par leur valeur et leur position relative dans le spectre.

C'est par une telle assimilation, permettant d'abréger le langage et de rendre l'exposition plus claire, que nous désignerons :

1° la suite de chiffres formant le nombre (3) après y avoir séparé G_0 et G_1 par la virgule décimale, comme *spectre cannelé* de la suite numérique (1);

2° la partie de (3) composée des chiffres significatifs provenant de l'entier N_k comme $k^{ième}$ *partie brillante* ou $k^{ième}$ *cannelure* du spectre;

3° la partie de (3) composée des zéros interposés entre N_{k-1} et N_k, comme $k^{ième}$ *partie sombre* du spectre;

4° l'ensemble G_k de ces deux parties de rang k comme $k^{ième}$ *tranche* spectrale;

5° le chiffre λ_k^i dans (3) comme $i^{ième}$ *raie de la* $k^{ième}$ *cannelure* spectrale; ensuite :

6° l'*étendue* de la $k^{ième}$ tranche spectrale sera mesurée par l'entier h_k, celle de sa partie brillante par l_k et celle de sa partie sombre par la différence $h_k - l_k$;

7° l'entier m indiquant le nombre total de tranches spectrales, le spectre est *limité* ou *illimité* suivant que m est fini ou infini;

8° la loi de variation de l'entier h_k avec son rang k représentant le *rythme spectral*, celui-ci est *uniforme* lorsque

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_m,$$

c'est-à-dire lorsque toutes les tranches spectrales ont la même étendue; il est *uniformément accéléré* lorsque l'étendue de la tranche croît proportionnellement à son rang, c'est-à-dire lorsque $h_k = h + ck$, où h et c sont deux entiers positifs ne variant pas avec k; le rythme sera *à accélération croissante* lorsque l'entier c augmente avec k; il sera *oscillant* si h_k subit des variations oscillantes lorsque k croît d'une manière progressive; il sera *périodique* si les variations de h_k sont périodiques, etc.;

9° la différence $h_k - l_k$ mesurera la *dispersion* du spectre, constante ou variable avec k; le spectre est le plus *amassé* possible, c'est-à-dire à *dispersion nulle* lorsque les parties sombres y disparaissent et les cannelures se touchent.

Lorsqu'on se donne la suite (1) et le rythme h_k de son spectre, on formera ce spectre en formant les groupes numériques correspondants G_0, G_1, G_2, ..., et en les écrivant bout à bout sur une rangée, suivant l'ordre naturel de leurs rangs.

Inversement, lorsqu'on se donne le spectre (3) et son rythme h_k, le terme N_k de la suite correspondante (1) est fourni par la $k^{\text{ième}}$ cannelure du spectre.

Le spectre, par exemple, de la suite naturelle de nombres à deux chiffres

$$11, \quad 12, \quad 13, \quad \ldots, \quad 98, \quad 99$$

à rythme uniforme $h = 3$ serait

$$011012013\ldots098099;$$

sa dispersion est constante et égale à 1.

Le spectre de la suite des coefficients binomes

$$\binom{7}{0}, \quad \binom{7}{1}, \quad \ldots, \quad \binom{7}{7}$$

à rythme uniformément accéléré $h_k = 1 + k$ est

$$107021003500035000021000000700000001$$

et sa dispersion est croissante.

Le spectre de la suite illimitée des coefficients, nombres entiers, du développement de $f(z) = \frac{2 + 37x}{1 - x^2}$ à rythme oscillant

$$h_k = \frac{1}{2}(3 - \cos k\pi)$$

est

$$2372372237\ldots;$$

il est périodique et à dispersion nulle.

Un rythme h_k est à considérer comme *compatible avec une suite* (1) donnée si l'on a $h_k - l_k \geq 0$ pour toutes les valeurs $k = 1, 2, \ldots, m$.

On a à cet égard les règles suivantes :

Première règle. — *Une suite* (1) *limitée admet toujours le rythme uniforme* $h_k = h$, *où* h *est un entier quelconque égal ou supérieur au logarithme du plus grand terme de la suite* (abstraction faite de son premier terme).

Car on a $N_k \leqq 10^h$ et, par suite, $l_k \leqq h$.

Deuxième règle. — *Une suite* (1) *illimitée, dont les termes ne surpassent pas un nombre fixe* B, *admet le rythme uniforme* $h_k = h$, *où* h *désigne un entier quelconque égal ou supérieur à* $\log B$.

(Comme dans la règle précédente.)

Troisième règle. — *Une suite* (1) *illimitée, telle que* $\sqrt[n]{N_n}$ *n'augmente pas indéfiniment avec* n, *admet un rythme uniformément accéléré.*

Car N_n, pour toute valeur de n, reste inférieur à 10^{h+cn}, où h et c sont certains entiers positifs, h pouvant être nul; la suite (1) admet le rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$.

Tel est, par exemple, le cas de la suite illimitée ayant pour termes

$$\binom{2}{1}, \quad \binom{4}{2}, \quad \binom{6}{3}, \quad \ldots$$

et admettant le rythme $h_k = k$.

Quatrième règle. — *Une suite* (1) *illimitée, telle que* $\sqrt[n^2]{N_n}$ *n'augmente pas indéfiniment avec* n, *admet un rythme à accélération croissante* $h_k = h + ck + gk^2$, *où* h, c, g *sont certains entiers positifs.*

Car N_n, pour toute valeur de n, reste inférieur à $10^{h+ck+gk^2}$.

Cinquième règle. — *Une suite* (1), *limitée ou illimitée, admettant un rythme* h_k, *admettra aussi tout rythme* h'_k *tel que* $h_k \leqq h'_k$ *pour* $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Une suite, par exemple, admettant un rythme uniforme $h_k = h$, admettra en même temps tout rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$

ainsi que tout rythme à accélération croissante $h_k = h + ck + gk^2 + \ldots$ quels que soient les entiers positifs c, g, ...

4. **La génératrice spectrale.** — Le fait suivant est fondamental pour la formation des spectres cannelés :

Quelle que soit la suite, limitée ou illimitée, d'entiers positifs (N_n), *on peut lui faire correspondre une fonction* $\Phi(x)$ *dont la valeur numérique* S *pour une valeur particulière, convenablement choisie de* x, *fournit un spectre cannelé de la suite.*

Soient l_k le nombre de chiffres de N_k; h_k un entier supérieur ou égal à l_k; G_k le groupe numérique précédemment rattaché à N_k, et supposons d'abord que la suite considérée des N_k ait un nombre limité m de termes.

Formons la suite d'entiers positifs

$$(5) \qquad P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_m$$

tels que

$$(7) \qquad P_k = h_1 + h_2 + \ldots + h_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Formons ensuite la suite de nombres rationnels positifs

$$(8) \qquad g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_m$$

tels que

$$(9) \qquad g_k = 10^{-P_k}$$

et à l'aide de ces nombres le polynome de degré m en x

$$(10) \qquad \Phi_m(x) = N_0 + g_1 N_1 x + g_2 N_2 x^2 + \ldots + g_m N_m x^m.$$

On a la proposition suivante :

La valeur numérique $\Phi_m(1)$ *représente le spectre cannelé de la suite des* N_k *à rythme* h_k.

En effet, la valeur $g_k N_k$ est un nombre fractionnaire ayant comme partie entière zéro et comme partie décimale $P_k - l_k$ zéros consécutifs suivis de chiffres significatifs provenant de N_k. Il s'ensuit que

$$(11) \qquad \begin{aligned} & g_1 N_1 + g_2 N_2 + \ldots + g_m N_m \\ & = 0,\, \underbrace{0 \ldots 0}_{\substack{h_1 - l_1 \\ \text{zéros.}}} N_1 \underbrace{0 \ldots 0}_{\substack{h_2 - l_2 \\ \text{zéros.}}} N_2 0 \ldots = 0,\, G_1 G_2 \ldots G_m \end{aligned}$$

et, comme $h_k - l_k \geqq 0$, la proposition se trouve démontrée.

Supposons maintenant la suite des N_k *illimitée*. Le polynome $\Phi_m(x)$ devient une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x

$$(12) \qquad \Phi(x) = N_0 + g_1 N_1 x + g_2 N_2 x^2 + \ldots.$$

La proposition précédente subsiste à la condition de choisir la suite d'entiers positifs $h_1, h_2, h_3, \ldots$ caractérisant le rythme spectral, de manière que la série (12) ayant pour coefficient général

$$(13) \qquad g_k N_k = N_k . 10^{-h_1 - h_2 - \ldots - h_k}$$

converge pour $x = 1$, ce qui est manifestement toujours possible.

La fonction $\Phi(x)$ ainsi formée, se réduisant à un polynome en x pour une suite (N_k) limitée, et à une série de puissances pour une suite illimitée, sera désignée comme *génératrice spectrale* de cette suite, correspondant au rythme spectral h_k d'après lequel elle a été formée. La valeur numérique $S = \Phi(1)$ coïncide avec le spectre cannelé envisagé.

Remarque I. — On pourrait former d'autres génératrices spectrales, fournies, par exemple, par des séries exponentielles ou par des séries de puissances à plusieurs variables. Dans ces *Leçons*, nous nous en tiendrons aux génératrices de la forme précédente.

Remarque II. — On pourrait former, d'une manière analogue à la précédente, des spectres et leurs génératrices pour un système de numération autre que le système décimal, et en particulier pour le système de base 2, pour lequel le spectre ne serait composé que des chiffres 0 et 1.

5. **Modes de formation des génératrices spectrales.** — Il y a lieu de distinguer les deux cas suivants :

Premier cas. — La suite d'entiers N_k est donnée. Ses termes étant supposés réels et positifs, on calculera la suite de facteurs g_k correspondant au rythme spectral voulu h_k et l'on écrira directement

$$(14) \qquad \Phi(x) = N_0 + g_1 N_1 x + g_2 N_2 x^2 + \ldots.$$

Dans le cas, par exemple, de rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$, on aura

$$(15) \qquad \Phi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} N_n q^{n^2}(\beta x)^n, \qquad q = \frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad \beta = 10^{-\left(h+\frac{c}{2}\right)}$$

et le spectre sera

$$(16) \qquad S = \sum_{n=0}^{n=\infty} N_n q^{n^2} \beta^n.$$

On cherchera ensuite, s'il y a lieu, à transformer une telle expression directe de $\Phi(x)$ en une combinaison explicite de fonctions connues, en une intégrale définie, etc.

Deuxième cas. — On connaît, sous une forme analytique quelconque, la fonction $f(x)$ dont le développement non donné

$$(17) \qquad f(x) = N_0 + N_1 x + N_2 x^2 + \ldots$$

a les termes de la suite (N_k) comme coefficients et le rayon d'holomorphie r autour de $x = 0$ non nul. Alors :

1° Si les N_k *admettent un rythme spectral uniforme* $h_k = h$ (cas des suites N_k limitées, ou bien des suites illimitées, mais dont les termes ne croissent pas indéfiniment), *la génératrice spectrale sera*

$$(18) \qquad \Phi(x) = f(10^{-h} x)$$

et le spectre sera

$$(19) \qquad S = f(10^{-h}).$$

2° Considérons le cas d'une suite N_k illimitée, *telle que* $\sqrt[n]{N_n}$ *ne croisse pas indéfiniment avec* n (tel est le cas de toute suite des N_k figurant comme coefficients d'une série de Taylor à rayon de convergence non nul). La suite admet un rythme uniformément accéléré

$h_k = h + ck$ et l'on a pour un tel rythme

$$g_k = 10^{-hk - \frac{k(k+1)}{2}c}. \tag{20}$$

Formons la fonction auxiliaire

$$\chi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2+\lambda n} x^n, \tag{21}$$

où

$$\lambda = 1 + \frac{2h}{c}, \qquad q = 10^{-\frac{c}{2}}. \tag{22}$$

La génératrice spectrale sera

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti})\chi\left(\frac{xe^{-ti}}{\rho}\right)dt, \tag{23}$$

où ρ désigne une constante arbitraire de module plus petit que le rayon de convergence r de la série (17); *le spectre lui-même sera la valeur numérique de l'intégrale*

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti})\chi\left(\frac{e^{-ti}}{\rho}\right)dt. \tag{24}$$

Pour le montrer, il suffit de rappeler un théorème connu sur les séries de puissances. Soient deux séries

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \\ \varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots \end{cases} \tag{25}$$

convergentes dans des cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons respectifs r et r_1 ; la série

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 z + a_2 b_2 z^2 + \ldots \tag{26}$$

a son rayon de convergence au moins égal à rr_1 et sa somme est égale à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1 e^{ti})\varphi(x_2 e^{-ti})\,dt, \tag{27}$$

x_1 et x_2 étant deux valeurs quelconques indépendantes de t, de modules respectivement inférieurs à r et r_1 et satisfaisant à la relation $x_1 x_2 = z$.

Faisant

$$a_k = \mathrm{N}_k, \qquad b_k = 10^{-hk + \frac{k(k+1)}{2} c}$$

et prenant pour x_1 une valeur constante quelconque ρ de module plus petit que r, et pour x_2 la valeur $\frac{z}{\rho}$, comme l'on a $r_1 = \infty$, les conditions du dernier théorème sont remplies et la génératrice spectrale sera bien représentée par (23).

Les expressions (23) et (24) peuvent être remplacées par d'autres qui leur sont équivalentes. Ainsi, en posant

$$(28) \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \log \operatorname{nat} 10 = 1,151292\ldots, \\ b = (2c + h)a, \end{cases}$$

ce qui fournit

$$g_k = e^{-ak^2 - bk}$$

et, d'après la formule connue,

$$e^{-ak^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} \cos 2kt\sqrt{a}\, dt \qquad (k > 0,\ a > 0),$$

la génératrice spectrale pour le rythme $h_k = h + ck$ s'exprime sous la forme

$$(29) \qquad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{R}(\alpha x, \beta t)\, dt,$$

où $\mathrm{R}(r, \varphi)$ désigne la partie réelle de $f(re^{i\varphi})$ et où il faut attribuer aux constantes α et β les valeurs

$$\alpha = e^{-b}, \qquad \beta = 2\sqrt{a}.$$

Remarquons aussi que dans le cas des N_k s'exprimant par une intégrale définie de la forme

$$(30) \qquad \mathrm{N}_k = \int_a^b u v^k\, dt \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

où u et v sont fonctions de t, la génératrice spectrale s'exprime par l'intégrale définie

$$(31) \qquad \Phi(x) = \int_a^b u\, \theta(v x)\, dt,$$

où $\theta(x)$ est la transcendante entière

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2+\lambda n} x^n, \tag{32}$$

les constantes λ et q étant définies par (22).

3° Dans le cas d'*un rythme quelconque à accélération croissante*, si l'on forme la fonction auxiliaire

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g_n x^n. \tag{33}$$

où

$$g_n = 10^{-(h_1+h_2+\ldots+h_n)}, \tag{34}$$

la génératrice spectrale sera encore fournie par l'expression (23) *et le spectre par* (24) *à la condition d'y remplacer la fonction* $\zeta(x)$ *par* $\xi(x)$.

Les formules précédentes s'appliquent indistinctement aux suites N_k limitées ou illimitées.

Nous indiquerons quelques exemples simples de génératrice spectrale et de spectre.

Premier exemple. — Former la génératrice de la suite limitée

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad m$$

à rythme uniforme $h_k = h$ compatible avec la suite. On a

$$f(x) = x + 2x^2 + 3x^m + \ldots + m x^m = \frac{m x^{m+2} - (m+1) x^{m+1} + x}{(1-x)^2}$$

et la génératrice sera

$$\Phi(x) = \frac{m\, 10^{-(m+2)h} x^{m+2} - (m+1)\, 10^{-(m+1)h} x^{m+1} - 10^{-h} x}{(1 - 10^{-h} x)^2}.$$

Le spectre s'obtient comme valeur numérique S de

$$\Phi(1) = \frac{10^{(m+1)h} - (m+1)\, 10^h + m}{10^{mh}(10^h - 1)^2}$$

et l'on a, par exemple, pour $m = 9$, $h = 1$,

$$S = \frac{10^{10} - 10^2 + 9}{10^9 9^2} = 0,123456789.$$

Deuxième exemple. — Former la génératrice de la suite des coefficients binomes

$$\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \ldots, \binom{m}{m}$$

à rythme uniforme $h_k = h$ compatible avec la suite. On a

$$f(x) = (1 + x)^m$$

et la génératrice sera

$$\Phi(x) = (1 + 10^{-h} x)^m.$$

Le spectre s'obtient comme valeur numérique S de

$$\Phi(1) = \frac{(10^h + 1)^m}{10^{mh}}$$

et l'on a, par exemple, pour $m = 6$, $h = 2$,

$$S = \frac{101^6}{100^6} = 1,061520150601.$$

Troisième exemple. — Considérons la suite illimitée

$$\binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \ldots$$

de coefficients binomes moyens, s'exprimant par la formule connue

$$\binom{2n}{n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} uv^n \, dt,$$

où

$$u = \frac{2}{\pi}, \qquad v = 4 \cos^2 t.$$

On voit (théorème de la moyenne) que $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ reste inférieur à un nombre fini pour toute valeur de n et que le rythme uniformément accéléré $h_k = k$ est compatible avec la suite. La génératrice spectrale à un tel rythme est

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(4x \cos^2 t) \, dt,$$

où

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2+n} x^n, \qquad q = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

et la valeur numérique $\Phi(1)$ coïncide avec le spectre S de la suite, qui est

$$S = 0,102006002000070000252000092 4\ldots.$$

6. **La caractéristique spectrale principale.** — Ce qui précède met en évidence les rôles que jouent les deux fonctions

$$f(x) = N_0 + N_1 x + N_2 x^2 + \ldots, \tag{39}$$

$$\xi(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots \tag{40}$$

dans la formation de la génératrice du spectre d'une suite donnée (N_k).

La fonction (39) dépend des valeurs seules des termes de la suite et nullement du rythme du spectre. Autrement dit, elle dépend de la composition des cannelures spectrales et est indépendante du mode de répartition des cannelures dans le spectre. Cette fonction, pour une suite (N_k) considérée, ne varie donc pas d'un spectre à un autre; elle sera désignée comme *caractéristique spectrale principale* de cette suite.

Par contre, la fonction (40) dépend du mode de répartition des cannelures du spectre des N_k, c'est-à-dire du rythme spectral, mais ne dépend pas des valeurs numériques mêmes des N_k. C'est pour cette raison qu'elle sera désignée comme *caractéristique de rythme spectral*.

Nous nous occuperons, dans ce paragraphe, de la caractéristique principale. Elle se réduit à un polynome à coefficients entiers pour les spectres limités; elle est fournie par une série de puissances à coefficients entiers pour les spectres illimités.

Dans un grand nombre de cas, cette caractéristique s'exprime en termes finis ou sous forme d'une intégrale définie. Ainsi :

1° Pour une suite d'entiers N égaux entre eux, elle a pour expression

$$f(x) = N\frac{x^{m+1}-x}{x-1} \qquad \text{ou bien} \qquad f(x) = \frac{Nx}{1-x}$$

suivant que la suite est limitée ou illimitée.

2° Pour une suite d'entiers se reproduisant périodiquement à partir d'un certain rang, la caractéristique est une fonction *rationnelle* de x à coefficients *entiers* : en désignant par n le nombre de termes N_k de la partie non périodique, et par m le nombre de termes de la période de la suite, la caractéristique sera

$$f(x) = P(x) + \frac{Q(x)}{1 - x^m},$$

où P et Q sont les deux polynomes

$$P(x) = N_1 x + N_2 x^2 + \ldots + N_n x^n,$$
$$Q(x) = N_{n+1} x^{n+1} + N_{n+2} x^{n+2} + \ldots + N_{n+m} x^{n+m}.$$

3° Pour une suite d'entiers formant une progression arithmétique

$$A + B, \quad A + 2B, \quad A + 3B, \quad \ldots,$$

on a

$$f(x) = \frac{Ax}{1 - x} + \frac{Bx}{(1 - x)^2}.$$

4° Pour une suite d'entiers formant une progression géométrique

$$AB, \quad AB^2, \quad AB^3, \quad \ldots,$$

on a

$$f(x) = \frac{ABx}{1 - Bx}.$$

5° Pour une suite N_k, où

$$N_k = p_1^k + p_2^k + \ldots + p_m^k,$$

les p_i étant des entiers donnés, on a

$$f(x) = R(x) - m,$$

$R(x)$ désignant le résultat que l'on obtient en remplaçant x par $\frac{1}{x}$ dans l'expression $\frac{xP'(x)}{P(x)}$, où $P(x)$ est le polynome de degré m,

$$(x - p_1)(x - p_2) \ldots (x - p_m).$$

6° Pour la suite $\binom{p}{k}$ des coefficients binomes, on a

$$f(x) = (1 + x)^p.$$

7° Pour la suite de nombres $\binom{2n}{n}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

8° Pour la suite de factorielles $1!, 2!, 3!, \ldots, m!$, on a

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{(xt)^{m+1} - xt}{xt - 1} dt.$$

9° Pour la suite illimitée $\binom{2n}{n}^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, on a

$$f(x) = -1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-16xt^2)}}.$$

Les règles suivantes élargissent considérablement le domaine des cas où l'on connaîtra la caractéristique $f(x)$ sous une forme explicite.

Soient

$$f(x) = N_0 + N_1 x + N_2 x^2 + \ldots, \tag{35}$$

$$f_1(x) = N'_0 + N'_1 x + N'_2 x^2 + \ldots \tag{36}$$

les caractéristiqnes respectives de deux suites (N_k) et (N'_k) et λ un entier positif fixe.

Règle I. — La suite

$$N_0 \pm \lambda, \quad N_1 \pm \lambda, \quad N_2 \pm \lambda, \quad \ldots$$

aura pour caractéristique la fonction

$$f(x) \mp \lambda \frac{x^m - 1}{x - 1} \quad \text{ou bien} \quad f(x) \pm \frac{\lambda}{1 - x}$$

suivant que la suite est limitée ou illimitée.

Règle II. — A la suite $\lambda N_0, \lambda N_1, \lambda N_2, \ldots$, correspond la caractéristique $\lambda f(x)$.

Règle III. — A la suite $N_0, N_1\lambda, N_2\lambda^2, N_3\lambda^3, \ldots$, correspond la caractéristique $f(\lambda x)$.

Règle IV. — A la suite $N_0, N_1, 2N_2, 3N_3, 4N_4, \ldots$, correspond la caractéristique $xf'(x)$; à la suite N_0, N_1, 2^2N_2, 3^2N_3, ..., correspond

$$x^2f''+x^3f';$$

à la suite N_0, N_1, 2^3N_2, 3^3N_3, ..., correspond

$$x^3f'''+(2x+x^3)f''+3x^2f'.$$

Règle V. — A la suite

$$N_0, \quad N_0+N_1, \quad N_0+N_1+N_2, \quad \ldots$$

correspond $\frac{f(x)}{1-x}$.

Règle VI. — A la suite N_1-N_0, N_2-N_1, N_3-N_2, ..., correspond

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x).$$

Règle VII. — A la suite $N_0 \pm N'_0$, $N_1 \pm N'_1$, ..., correspond

$$f(x) \pm f_1(x).$$

Règle VIII. — A la suite $N_0N'_0$, $N_1N'_1$, $N_2N'_2$, ..., correspond l'une ou l'autre des intégrales définies

$$(37) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) \quad f_1\left(\frac{x e^{-ti}}{\rho}\right) dt,$$

$$(38) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{x e^{-ti}}{\rho}\right) f_1(\rho e^{ti}) \quad dt,$$

où ρ est une constante arbitraire de module plus petit que les rayons de convergence des séries correspondantes (35) et (36).

Règle IX. — A la suite N_0^2, N_1^2, N_2^2, ..., correspond l'intégrale

$$(39) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) f\left(\frac{x e^{-ti}}{\rho}\right) dt,$$

laquelle se laisse écrire sous la forme réelle

$$(40) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\sqrt{x}, t)^2 \, dt,$$

où $\Psi(r, \varphi)$ désigne le module de $f(re^{\varphi i})$.

7. La caractéristique de rythme spectral. — La fonction

$$\xi(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x_2 + \ldots,$$

désignée comme *caractéristique de rythme spectral*, ne dépend que du rythme suivant lequel le spectre est formé. C'est une série de puissances à coefficients *commensurables* égaux à une puissance entière négative de 10.

Cette fonction se réduit, pour une suite (N_k) limitée, à un *polynome*.

Dans le cas de suites illimitées et de spectres à rythme *uniforme* $h_k = h$, elle est la fonction *rationnelle*

$$\xi(x) = \frac{1}{1 - 10^{-h} x}.$$

Lorsque, dans le cas de suites illimitées, le spectre est à rythme *continuellement accéléré*, $\xi(x)$ est une *fonction entière hypertranscendante*, c'est-à-dire ne satisfaisant à aucune équation différentielle d'ordre fini

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx^2}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots\right) = 0,$$

algébrique en x, y et les dérivées.

En effet, on a dans le cas d'un tel rythme

$$h_1 < h_2 < h_3 < \ldots$$

et, par suite,

$$h_k = h_{k-1} + m_k \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

où m_k est un entier positif, variant ou non avec k, mais différent de zéro.

On a donc

$$h_k = h_1 + (m_2 + m_3 + \ldots + m_k)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} P_k &= h_1 + h_2 + \ldots + h_k \\ &= kh_1 + [(k-1)m_2 + (k-2)m_3 + \ldots + 2m_{k-1} + m_k]. \end{aligned}$$

La fonction $\xi(x)$ est donc dèfinie par une série

(41) $$\xi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

dont le coefficient α_n est un nombre commensurable

(42) $$\alpha_n = 10^{-nh_1 - (n-1)m_2 - (n-2)m_3 - \ldots - 2m_{n-1} - m_n}.$$

Les m_k étant tous différents de zéro, en désignant par l un entier fixe compris entre zéro et le plus petit des m_k (ou égal à celui-ci), on trouve que

$$\alpha_n < 10^{-nh_1 - \frac{n(n-1)}{2} l}, \tag{43}$$

ce qui montre que $\xi(x)$ est une fonction entière de x.

Or, M. Pólya ([1]) a démontré qu'une fonction *entière* définie par une série

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

à coefficients *commensurables*, pour laquelle l'expression

$$\frac{\log|a_n|}{n(\log n)^2} \tag{44}$$

ne reste pas finie lorsque n augmente indéfiniment, est une fonction hypertranscendante.

Comme l'expression (44), relative à $\xi(x)$ est négative et plus grande en valeur absolue que

$$\frac{h_1 + \frac{n-1}{2} l}{(\log n)^2}$$

et par suite tend vers $-\infty$ pour n indéfiniment croissant, $\xi(x)$ est bien une fonction hypertranscendante. Et il est manifeste que ce fait subsiste encore si l'accélération du rythme h_k, au lieu d'être croissante dès le premier terme h_1, ne le serait qu'à partir d'un certain rang $k > 1$.

Grâce à l'inégalité (43), les procédés usuels de la théorie générale des fonctions entières, et plus particulièrement les méthodes de M. Hadamard, se prêtent aisément à l'étude de diverses particularités de la fonction $\xi(x)$ (mode de croissance, densité de zéros, limites de variation pour les intervalles donnés de x, etc.).

Dans le cas d'un rythme *uniformément accéléré* $h_k = h + ck$, la caractéristique de rythme est la fonction entière

$$\xi(x) = \theta(\beta x),$$

([1]) G. Pólya, *Ueber das Anwachsen von ganzen Funktionen die einer Differentialgleichung genügen* (*Vierteljahrschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zurich*, Jahrg, 61, 1916, p. 531-545).

où $\theta(x)$ est la transcendante bien connue de la théorie des fonctions elliptiques

$$(46) \qquad \theta(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2} x^n$$

avec

$$(41) \qquad q = 10^{-\frac{c}{2}}, \qquad \beta = 10^{-h-\frac{c}{2}}.$$

Le rythme uniformément accéléré étant compatible avec la suite de coefficients, nombres entiers, de toute série de puissances à rayon de convergence non nul à tels coefficients, *la transcendante elliptique* $\theta(x)$ *intervient comme caractéristique de rythme dans la formation des spectres des coefficients de toute série de cette espèce.*

Dans le cas de rythme *à accélération croissante*, la caractéristique de rythme $\xi(x)$, toujours fonction entière hypertranscendante, est une série de puissances à coefficients décroissant plus vite que ceux de la fonction $\theta(x)$. Pour un rythme *à accélération d'ordre p constante*, cette série a pour coefficient général

$$\alpha_n = 10^{-P(n)},$$

où $P(n)$ est un polynome de degré $p+1$ en n.

On sait que la transcendante $\theta(x)$, correspondant au cas de $p=1$, est étroitement liée aux fonctions Θ de la théorie des fonctions elliptiques : les fonctions Θ proprement dites sont les séries exponentielles dont l'exposant est un polynome du *second degré* par rapport au rang du terme. D'une manière analogue, les transcendantes $\xi(x)$ correspondant à $p = 2, 3, 4, \ldots$ sont liées aux fonctions Θ de degré supérieur, définies par des séries exponentielles dont l'exposant est d'*un degré supérieur à* 2 par rapport au rang du terme. Ces fonctions ont été l'objet de recherches importantes de M. Appell [1].

8. Correspondance entre la suite d'entiers et les éléments de son spectre. — Le rythme spectral h_k étant donné, la correspondance entre la suite d'entiers (N_k) et les éléments du spectre, ainsi que la correspondance entre la caractéristique spectrale principale et le spectre lui-même, peuvent être résumées par les règles suivantes :

---

[1] P. Appell, *Sur les fonctions* Θ *de degrés supérieurs* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 153, 1911, p. 584-587 et 617-618).

Règle I. — La cannelure spectrale correspondant au terme N_0 coïncide avec la partie entière de la valeur numérique de $\Phi(1)$; la cannelure correspondant au terme N_k coïncide avec le groupe de chiffres significatifs de $\Phi(1)$ commençant par la

$$(h_1 + h_2 + \ldots + h_{k-1} + 1)^{\text{ième}}$$

et se terminant par la $(h_1 + h_2 + \ldots + h_k)^{\text{ième}}$ décimale de $\Phi(1)$; la $n^{\text{ième}}$ raie (comptée de la droite vers la gauche) de la cannelure correspondant au terme N_k coïncide avec la

$$(h_1 + h_2 + \ldots + h_k - n + 1)^{\text{ième}}$$

décimale de $\Phi(x)$.

Dans le cas de rythme uniforme $h_k = h$, la cannelure correspondant à N_k coïncide avec le groupe de chiffres significatifs de $\Phi(1)$ commençant par la $[(k-1)h+1]^{\text{ième}}$ et terminé par la $(kh)^{\text{ième}}$ décimale de $\Phi(1)$; la $n^{\text{ième}}$ raie de cette cannelure est fournie par la $(kh - n + 1)^{\text{ième}}$ décimale.

Dans le cas de rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$, cette cannelure commence par la $\left[\frac{k(k-1)}{2}c + (k-1)h + 1\right]^{\text{ième}}$ et se termine par la $\left[\frac{k(k+1)}{2}c + kh\right]^{\text{ième}}$ décimale de $\Phi(1)$; sa $n^{\text{ième}}$ raie coïncide avec la $\left[\frac{k(k+1)}{2}c + kh - n + 1\right]^{\text{ième}}$ décimale.

Règle II. — Les $k+1$ premiers coefficients de la caractéristique spectrale principale $f(x)$ déterminent la partie entière et la suite de $P_k = h_1 + h_2 + \ldots + h_k$ premières décimales du nombre S : cette partie décimale s'obtient en écrivant bout à bout, à la suite des uns des autres, les k groupes numériques correspondants $G_1, G_2, \ldots, G_k$.

Dans le cas de rythme uniforme $h_k = h$, les $k+1$ premiers coefficients de $f(x)$ déterminent la partie entière et les kh premières décimales de S.

Dans le cas de rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$, ils en déterminent la partie entière et les $\frac{k(k+1)}{2}c + hk$ premières décimales.

Règle III. — La partie entière et la suite de P_k premières décimales du nombre S déterminent les $k+1$ premiers coefficients de la caractéristique principale $f(x)$.

Si l'on partage la suite s_k de ces décimales en tranches consécutives composées, la première de h_1 premières décimales, la deuxième de h_2 décimales suivantes, etc., le coefficient N_p de $f(x)$ coïncide avec le groupe de chiffres significatifs de la $p^{\text{ième}}$ tranche.

CHAPITRE III.

SPECTRES CANNELÉS DES SUITES DE NOMBRES TRANSMUTABLES EN SUITES D'ENTIERS POSITIFS.

9. **Transmutations $\Delta(M_k)$.** — Ce qui précède se rapporte aux cas où la suite de nombres, à laquelle se rattache le spectre, est composée d'*entiers réels positifs*.

Considérons maintenant une suite

(47) $$M_0, \quad M_1, \quad M_2, \quad \ldots$$

de nombres quelconques, réels ou imaginaires, positifs ou négatifs.

D'abord, si les M_k sont des nombres imaginaires, on décomposera la suite en deux suites formées, l'une de parties réelles p_k, l'autre de coefficients q_k de i des M_k. On considérera alors comme spectre de la suite (47) le nombre complexe $S + iS'$, S étant un spectre de la suite des p_k et S' un spectre des q_k. On peut, d'ailleurs, réunir ces deux spectres en un seul nombre réel.

La formation des spectres d'une suite (47) *de nombres quelconques se ramène ainsi à celle de spectres de nombres réels.*

Nous supposerons donc les M_k toujours *réels*. Dans ce cas, nous désignerons comme une *transmutation* $\Delta(M_k)$, *compatible avec une suite* limitée ou illimitée (M) de nombres M_0, M_1, M_2, ..., un ensemble d'opérations, le même pour tous les termes de la suite, lequel, appliqué à chacun des termes M_k :

1° transmue M_k en un nombre entier positif N_k;

2° établit une correspondance biunivoque entre les M_k et les N_k, moyennant un *ensemble auxiliaire* (A) *de données qualitatives.*

Les *données qualitatives* (A) peuvent porter sur les signes; sur les limites supérieures ou inférieures de valeurs rattachées au problème; sur le choix d'une valeur lorsque ce choix, d'après les conditions du problème, porte sur plusieurs valeurs possibles, etc.

Désignant par M'_k la valeur absolue de M_k, et par σ_k l'unité affectée de signe de M_k, si une transmutation $\Delta(M'_k)$ est compatible avec la suite (M'_k), la transmutation $\Delta(\sigma_k M_k)$ sera compatible avec la suite (M_k). *Il nous suffira donc de considérer les suites* (M) *à termes positifs*. Dans le cas, par exemple, où les M_k sont alternativement positifs et négatifs, on aura

$$\sigma_k = (-1)^{k+1} \quad \text{ou bien} \quad \sigma_k = \cos(k+1)\pi.$$

Les M_k étant supposés positifs, les transmutations Δ peuvent varier à l'infini. Ainsi, par exemple :

La transmutation

$$\Delta(M_k) = 10^g M_k$$

(où g est un entier positif) est compatible avec toute suite (M) de termes à un nombre limité de décimales.

La transmutation

$$\Delta(M_k) = AB^k M_k \qquad (A = \text{const.},\ B = \text{const.},\ k = 1, 2, 3, \ldots)$$

est compatible avec toute suite (M) de termes commensurables, représentant les coefficients du développement d'une fonction algébrique en série de puissances (théorème d'Eisenstein). D'une manière plus générale, elle est compatible avec toute suite (M) où M_k est le quotient de deux nombres entiers premiers entre eux, dont le dénominateur β_k ne contient que des facteurs premiers n'augmentant pas indéfiniment avec k, et satisfaisant à la condition que $\sqrt[k]{\beta_k}$ reste fini lorsque k augmente indéfiniment. Elle est aussi compatible avec toute suite (M) où M_k est une fraction décimale périodique dont le nombre des chiffres de la partie non périodique et le nombre des chiffres de la période ne varient pas avec k.

La suite (M), dont les termes sont racines $p^{\text{ièmes}}$ de nombres entiers positifs, admet la transmutation

$$\Delta(M_k) = M_k^p.$$

D'une manière plus générale, la suite (M) dont les termes sont racines d'une équation

$$\varphi(x) - N_k = 0,$$

où les N_k sont des entiers positifs, admet la transmutation

$$\Delta(M_k) = \varphi(M_k).$$

Il est d'ailleurs manifeste qu'à l'aide d'une transmutation $\Delta(M_k)$, compatible avec une suite (M) donnée, on peut en former une infinité d'autres par des opérations, lesquelles, effectuées sur la transmuée primitive, transmuent celle-ci en une nouvelle suite à termes entiers positifs (addition d'une autre transmuée, multiplication par celle-ci, élévation à une puissance entière positive, itération, etc.).

10. **Spectre cannelé rattaché à une transmutation Δ.** — La suite (M) étant transmuée en une suite (N) de nombres entiers positifs par une transmutation $\Delta(M_k)$ compatible avec elle, nous considérerons comme *spectre cannelé de la suite* (M), *rattaché à cette transmutation* Δ, un spectre cannelé quelconque de la suite (N).

Une suite (M) admet ainsi une infinité de spectres cannelés variant, d'une part, avec la transmutation Δ appliquée, et, d'autre part, avec le rythme suivant lequel est formé le spectre de la suite (N). *Mais pour une transmutation Δ appliquée et un rythme spectral déterminé, la suite* (M) *n'admet qu'un seul spectre.*

Réciproquement, un nombre donné S peut coïncider avec des spectres cannelés d'une infinité de suites (M), suivant la transmutation Δ que l'on applique à la suite et suivant le rythme qu'on attribue au spectre. *Mais, pour une transmutation Δ considérée et pour un rythme spectral, un nombre* S *caractérise, comme spectre cannelé, généralement une seule suite* (M). Il ne peut y avoir de l'ambiguïté que dans les cas où la relation entre les M_k et les N_k à laquelle conduit le Δ appliqué ne détermine pas complètement les M_k à l'aide des N_k (par exemple, lorsque M_k est fourni comme racine d'une équation ayant plus d'une racine réelle, ou par une relation de récurrence laissant indéterminés un certain nombre des premiers termes M_0, M_1, M_2, ...). L'indétermination cesse lorsqu'on y ajoute les conditions supplémentaires fournies par l'ensemble (A) de données.

DEUXIÈME PARTIE.

SPECTRES DES FONCTIONS.

CHAPITRE IV.

PROCEDÉ GÉNÉRAL DE FORMATION DE SPECTRES DES FONCTIONS.

11. Classement des fonctions suivant la forme de leur élément analytique. — On ne peut se servir, dans le calcul, d'une fonction que si elle se laisse définir au moyen d'une infinité dénombrable d'éléments. Ce sont les seules fonctions pouvant actuellement être prises en considération, et leur ensemble a la puissance du continu. On sait également qu'au point de vue de la théorie des ensembles il n'y a pas de différence essentielle entre les ensembles continus à une dimension et les ensembles continus à n dimensions, c'est-à-dire entre les fonctions d'une variable et les fonctions à n variables.

Les fonctions appartenant à ce domaine peuvent, et cela d'une infinité de manières, être partagées en *catégories* ou *classes* formant des ensembles dont chacun a une puissance au plus égale à celle du continu. Telles seraient, par exemple, les classes formées des fonctions analytiques, des fonctions continues, des fonctions périodiques, des fonctions discontinues seulement pour une infinité dénombrable de valeurs de la variable, etc. Une fonction considérée comme individu d'une classe correspondrait à un point de l'espace fonctionnel, dans lequel une classe de fonctions représenterait un champ fonctionnel.

Parmi les divers modes de classement des fonctions, celui qui convient au but que nous avons en vue est le *classement suivant la forme de l'élément analytique de la fonction*.

Dans l'ensemble des fonctions définissables au moyen d'une infinité dénombrable d'éléments, la théorie des fonctions distingue des classes définies par la forme de leur *élément analytique*

$$U_{m_1, m_2, \ldots, m_p}(x, y, z) \ldots$$

dépendant d'un nombre limité p d'indices m_1, m_2, ..., m_p; la valeur de la fonction, pour un système de valeurs des variables indépendantes x, y, z, ..., se calcule comme la somme des valeurs de ces éléments, obtenues en attribuant aux indices les valeurs entières positives. La forme analytique de l'élément U, par rapport aux variables indépendantes x, y, z, ..., caractérise la *classe;* lorsque dans un élément on a donné des valeurs numériques aux indices et à tout ce que la forme de l'élément laisse arbitraire, sauf aux variables indépendantes, la somme des éléments détermine un *individu* de la classe.

Ainsi, les fonctions analytiques d'un nombre fini de variables x_1, x_2, ..., x_p forment une classe caractérisée par l'élément analytique de la forme

$$A_{m_1, m_2, \ldots, m_p} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_p^{m_p},$$

où les coefficients A à p indices ne dépendent pas des x_k. L'élément, par exemple

$$\frac{x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3}}{(m_1 + m_2 + m_3)!},$$

définit un individu de cette classe lequel s'obtient comme la somme de ces éléments. Dans le cas d'une seule variable x, l'élément de la classe est de la forme

$$A_m x^m$$

et l'élément mx^m, par exemple, définit un individu de la classe. On peut subdiviser la classe en *catégories*, par exemple celle comprenant les fonctions pour lesquelles les $A_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ sont des nombres entiers, ou commensurables, etc.

Les fonctions périodiques à variation bornée forment une classe ayant pour élément analytique

$$A_m \cos max + B_m \sin max,$$

où A, B, a ne dépendent pas de x.

Les fonctions périodiques de deux variables x et y sont caractérisées par l'élément analytique de la forme

$$A_{m,n} \cos mx \cos ny + B_{m,n} \cos mx \sin ny$$
$$+ C_{m,n} \sin mx \cos ny + D_{m,n} \sin mx \sin ny.$$

Les fonctions d'une variable réelle x qui admettent des dérivées continues de tous les ordres entre $x = -1$ et $x = +1$ ont pour élément analytique (1)

$$A_m x^m + B_m \cos m\pi x + C_m \sin m\pi x.$$

D'une manière plus générale, les fonctions de plusieurs variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_p$, continues dans un domaine et admettant des dérivées partielles de tous les ordres, ont un élément analytique de la forme (2)

$$P_n(x_1, \ldots, x_p;\ \sin x_1, \cos x_1, \ldots, \sin x_p, \cos x_p),$$

où P_n désigne un polynome en $x_1, \ldots, x_p, \sin x_1, \cos x_1, \ldots, \cos x_p$.

En ce qui concerne les fonctions d'une variable réelle x, M. Baire, au cours de ses profondes recherches, a délimité un domaine fonctionnel réel qui suffit à tous les besoins de l'Analyse et au delà duquel toutes les généralisations paraissent condamnées à rester vaines et stériles (3). Ce domaine, qui a la puissance du continu, est le domaine des *fonctions représentables analytiquement;* il est divisé en classes (*classes de Baire*) de la manière suivante :

Dans une première classe, dite *classe zéro*, sont placées les fonctions continues. Toute fonction de cette classe est représentable dans l'intervalle où elle est continue par une série de polynomes

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x)$$

uniformément convergente.

Une série de fonctions de classe zéro, si elle ne détermine pas une fonction de classe zéro, définira une fonction de *classe un;* cette classe comprend toutes les fonctions qui ont une infinité

(1) E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, 1905, p. 68.

(2) E. Borel, *Annales de l'École Normale*, 1895, p. 35. — Pringsheim, *Math. Ann.*, t. 44, et *Chicago Congress Papers*, p. 294.

(3) De la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire* (*Collection Borel*, 1916, p. VII).

dénombrable de discontinuités. Toute fonction de cette classe est représentable par une série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(x),$$

où les $f_n(x)$ sont des fonctions de classe zéro, et même par une série de polynomes.

De même, quand une série de fonctions de classe un ne détermine pas une fonction de classe zéro ou un, la fonction qu'elle définit sera dite de *classe deux*. Continuant ainsi, on appellera fonction de *classe* p toute fonction représentable par une série dont les termes sont fonctions de classe $p - 1$ et qui n'appartient à aucune des classes $0, 1, 2, \ldots, p - 1$.

Les fonctions de classes zéro ou un sont les seules qui soient représentables par des séries simples de polynomes. Mais, d'après la définition même des fonctions de seconde classe, on peut représenter ces fonctions par des séries doubles de polynomes

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{P}_{m,n}(x),$$

la sommation étant effectuée d'abord par rapport à n, puis par rapport à m, sans qu'on puisse réduire cette série double à une série simple. Plus généralement, une fonction de classe p est représentable par une série multiple d'ordre p dont les termes sont des polynomes. Toute fonction de classe finie p a donc pour élément analytique un polynome $\mathrm{P}(x)$ à p indices; *ses coefficients forment un ensemble dénombrable à* $p + 1$ *indices.*

Comme l'on sait, il existe effectivement des fonctions de toute classe et l'on peut poursuivre la classification précédente et définir les fonctions de classe ω, $\omega + 1$, $\ldots$, ω^2, ω^ω, $\ldots$ en désignant par ces symboles les nombres transfinis de Cantor. On terminerait cette classification par les fonctions *non représentables analytiquement*, fonctions dont on a aussi démontré l'existence.

12. Spectres des fonctions représentables analytiquement. — Considérons l'ensemble des fonctions d'une classe caractérisée par l'élément analytique $\mathrm{U}_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$. L'ensemble aura une puissance au plus égale à celle du continu. Un individu de la classe est déterminé comme la somme des éléments U obtenus en attribuant aux indices m_1, m_2, ..., m_p des valeurs entières positives. D'autre part, l'ensemble des U est déterminé par l'ensemble (C) des coefficients de tous ces éléments rattachés à la fonction et ces coefficients forment un ensemble dénombrable à un nombre fini d'indices. Il est donc toujours possible d'en former un spectre S en correspondance biunivoque avec les éléments de l'ensemble (C). Le mode de cette correspondance est déterminé par le mode de formation du spectre et se trouve indiqué dans la première Partie de ces *Leçons*.

Or, la correspondance entre l'ensemble des fonctions faisant partie de la classe, et les ensembles (C) rattachés aux individus de la classe, est telle qu'une fonction ne détermine qu'un seul ensemble (C) et que, si un ensemble (C) correspond à une véritable fonction, il ne détermine qu'une seule fonction. La condition que la série composée d'éléments analytiques de la classe, dans un cas particulier considéré, ne diverge pas pour toutes les valeurs des variables indépendantes, introduit des restrictions faisant qu'à tout spectre S ne correspond pas nécessairement une véritable fonction, mais en tout cas deux fonctions différentes de la classe auront deux spectres différents, et chaque fonction aura un spectre unique pour un même mode de formation du spectre.

On en tire la conclusion suivante :

A toute fonction déterminée au moyen d'un ensemble dénombrable d'éléments, on peut faire correspondre un nombre S, *son spectre*, lequel, moyennant un ensemble (A) de données qualitatives et l'expression de l'élément analytique de la fonction, se trouve en correspondance avec celle-ci : *A une fonction de la classe à laquelle se rattache l'élément analytique considéré, correspondra un spectre unique, et le spectre, s'il correspond à une véritble fonction, ne déterminera qu'une seule fonction.*

La formation des spectres des fonctions se ramenant ainsi à celle des nombres, peut s'effectuer de bien des manières, par exemple par le procédé général indiqué au Chapitre I. L'une de ces manières, exposée dans le Chapitre II, est applicable à toute fonction développable en série de Taylor *à coefficients entiers,* ainsi qu'à toute catégorie de fonctions qu'on peut mettre en correspondance biunivoque avec les fonctions de cette espèce. Elle est particulièrement intéressante à cause des applications auxquelles se prêtent les spectres ainsi formés.

Le spectre d'une fonction d'une classe varie ainsi, non seulement avec la fonction elle-même, mais aussi avec l'intermédiaire mathématique qui établit la correspondance entre la fonction et le spectre. Ceci est analogue à ce qui se présente dans les procédés usuels pour chiffrer et déchiffrer les dépêches secrètes. En formant le spectre d'une fonction, on fait en quelque sorte jouer à celle-ci le rôle du texte clair; le rôle de la clef est alors joué par le procédé appliqué à la formation du spectre, et celui de cryptogramme par le spectre lui-même. *Toute fonction représentable analytiquement se laisse ainsi chiffrer par un nombre réel positif*, ce qui revient aussi à *numéroter* les fonctions faisant partie d'une classe.

Comme un ensemble dénombrable (C) de fonctions appartenant à différentes classes dont la puissance ne dépasse pas celle du continu, a lui-même une puissance au plus égale à celle du continu, on peut aussi former un *spectre collectif* de ces fonctions, chiffrant l'ensemble (C) par un nombre réel positif. C'est ainsi, par exemple, que tout phénomène, quelles qu'en soient la nature, l'espèce et la complexité, exprimable par un ensemble dénombrable d'équations, se laisse chiffrer par un seul nombre réel positif, son spectre.

CHAPITRE V.

SPECTRES CANNELÉS DES FONCTIONS.

13. **Séries (E) et leurs spectres cannelés.** — Nous appellerons, pour abréger le langage, *séries* (E) les séries de puissances à coefficients *entiers* ayant le rayon de convergence non nul. Les fonctions d'une variable susceptibles d'être représentées par des séries (E) seront appelées *fonctions* (E). Les polynomes à coefficients entiers seront désignés comme *polynomes* (E).

Parmi les fonctions analytiques $f(x)$ pouvant être représentées par des séries (E), il y a :

1° des fonctions rationnelles, comme par exemple

$$\frac{1}{1-x}=\sum_0^\infty x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^p}=\sum_0^\infty \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots n}x^n;$$

2° des fonctions algébriques, par exemple

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\sum_0^\infty \binom{2n}{n}x^n;$$

3° des fonctions uniformes transcendantes qu'on ne peut pas prolonger en dehors d'un cercle, par exemple la fonction

$$\sum_0^\infty x^{n!};$$

ou bien la fonction

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} x^{p_n}$$

(où p_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre premier) ayant comme points singuliers (¹) sur le cercle $|z| = 1$ toutes les racines de l'unité d'ordre $p_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$;

4° la fonction

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} [n\theta] x^n,$$

où $[n\theta]$ désigne la partie entière du nombre $n\theta$; la fonction est rationnelle lorsque θ est un nombre commensurable et, dans ce cas, elle est de la forme

$$\frac{P(x)}{(1 - x^q)^2},$$

où q est le dénominateur de θ, $P(x)$ étant un polynome en x à coefficients entiers; dans le cas de θ incommensurable, la fonction est transcendante et a le cercle $|x| = 1$ comme coupure;

5° des fonctions transcendantes présentant une ligne singulière d'une autre forme, par exemple (²) la fonction

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\frac{m_1 x + m_2 x^2 + \ldots + m_r x^r}{1 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_s x^s} \right]^{n!},$$

où les m_k et q_k sont tous des nombres entiers;

6° des fonctions multiformes transcendantes sans ligne singulière, par exemple la fonction

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-16x^2t^2)}} = \sum_0^{\infty} \binom{2n}{n}^2 x^{2n}$$

ayant comme seules singularités les quatre points de ramification 0, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, ∞.

Les séries (E) s'introduisent dans un grand nombre de questions d'analyse ou de la théorie des nombres; aussi ont-elles été l'objet d'importants travaux.

(¹) FATOU, *Sur les séries entières à coefficients entiers* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 138, 1904, p. 342-343).

(²) G. PÓLYA, *Ueber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten* (*Math. Ann.*, t 77, 1916, p. 510).

M. Borel a montré que si une série (E) représente une fonction $f(z)$ uniforme et régulière dans le cercle $|z| \leqq 1$, abstraction faite d'un nombre limité de pôles, la fonction $f(z)$ est *rationnelle*. Une série (E) ne peut donc représenter une fonction *méromorphe transcendante* ([1]).

M. Pólya (*loc. cit.*), généralisant le théorème de M. Borel, a montré que si une série (E) représente une fonction uniforme dans un cercle $|z| \leqq R > 1$ et régulière, abstraction faite d'un nombre limité de singularités de nature quelconque, la fonction est nécessairement *rationnelle*. Le théorème de M. Pólya ne suppose rien sur la nature de ces singularités.

Le rayon de convergence r d'une série (E) est manifestement *inférieur ou égal à un*. M. Pólya a formulé et M. Carlson ([2]) a démontré le théorème suivant :

Toutes les fois que $r = 1$ la série (E) *représente ou bien une fonction rationnelle de z, ou bien une fonction ayant le cercle $|z| = 1$ comme coupure.*

Dans le premier cas, c'est, comme l'a montré M. Fatou (*loc. cit.*), une fonction de la forme

$$\frac{P(x)}{(1 - x^n)^m}, \tag{48}$$

où $P(x)$ est un polynome (E) et m, n des entiers positifs.

D'après une autre proposition de M. Fatou (*loc. cit.*), *une fonction algébrique non rationnelle, représentée par une série* (E), *possède au moins un point de ramification à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.*

Ajoutons encore qu'on a étendu aux séries (E) les lois élémentaires qui régissent des nombres entiers et qui ont été appliquées dans d'autres domaines et généralisées de bien des façons : calcul des nombres entiers suivant un module; calcul des polynomes à coefficients entiers; calcul de ces polynomes suivant un module; calcul

---

(1) E. Borel, *Sur une application du théorème de M. Hadamard* (*Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XVIII, p. 22-25); *Leçons sur les fonctions méromorphes*, 1903, p. 32-35.

(2) F. Carlson, *Ueber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten* (*Mathem. Zeitschr.*, t. 9, 1921, p. 1-13).

suivant deux modules, l'un étant un nombre et l'autre un polynome; calcul des entiers imaginaires, des quaternions, des tableaux de Kronecker; calcul dans un domaine de rationalité; calcul des entiers algébriques, des entiers d'un domaine, etc. (1).

Étant donnée une fonction (E), formons l'ensemble (E) des nombres entiers figurant comme coefficients dans la série (E) correspondante. Un spectre, formé d'une manière quelconque de l'ensemble (E), sera en même temps un spectre de la fonction. En particulier, *un spectre cannelé de l'ensemble* (E) *à un rythme quelconque compatible avec les éléments de cet ensemble représentera un spectre cannelé de la fonction elle-même.*

Le spectre s'obtient comme valeur que prend une fonction déterminée d'une variable, la *génératrice spectrale* $\Phi(x)$ rattachée à la fonction considérée, pour une valeur particulière convenablement choisie de cette variable.

Dans le cas où les coefficients de la série (E) n'augmentent pas indéfiniment avec leur rang, on aura

$$\Phi(x) = \varphi(10^{-h} x), \tag{49}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction représentée par la série (E′) dont les coefficients sont les valeurs absolues des coefficients de la série (E) donnée, h est un entier positif égal ou supérieur au logarithme du plus grand de ces coefficients. *La fonction admet un spectre à rythme uniforme $h_k = h$ et il sera fourni par la valeur numérique*

$$S = \varphi(10^{-h})$$

convertie en fraction décimale.

Pour la fonction, par exemple

$$f(x) = \frac{x}{1 - x},$$

la génératrice à rythme uniforme $h_k = 1$ sera

$$\Phi(x) = \frac{x}{10 - x}$$

(1) E. Cahen, *Sur les séries intégro-entières* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 152, 1911, p. 124-127).

et l'on aura

$$S = \frac{1}{9} = 0,111\ldots.$$

Pour le polynome

$$f(x) = (1 + x + x^2)^6,$$

la génératrice à rythme uniforme $h_k = 3$ est

$$\Phi(x) = f\left(\frac{x}{1000}\right)$$

et l'on a

$$S = f(0,001).$$

Dans le cas d'une série (E) *quelconque*, la convergence au voisinage de $x = 0$ assure l'existence d'un nombre positif fixe B tel que, désignant par N_0, N_1, N_2, ... les valeurs absolues des coefficients de la série, pour toute valeur de n on ait $\sqrt[n]{N_n} < B$. Soit alors c un entier positif supérieur ou égal à $\log B$ et formons la fonction

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\rho\, e^{ti})\, \theta\left(\frac{xq\, e^{-ti}}{\rho}\right) dt, \tag{50}$$

où

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2} x^n, \qquad q = 10^{-\frac{c}{2}}, \qquad \rho = \text{const.} < \frac{1}{B}. \tag{51}$$

La fonction admet un spectre à rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$ (h étant un entier positif arbitraire) ayant pour génératrice la fonction (50) *et fourni lui-même comme valeur numérique* $\Phi(1)$ *convertie en fraction décimale.*

14. Spectre cannelé des fonctions (E) en tant que nombre décimal. — Il est manifeste qu'un spectre cannelé d'une fonction (E) ne saurait être un nombre *entier* sans que la fonction se réduise à une constante; il ne saurait avoir un nombre limité de décimales que si la fonction se réduit à un polynome. Il est de même évident que, pour une fonction (E) rationnelle, le spectre ayant un rythme uniforme quelconque est un nombre *commensurable*. Dans le cas où c'est un nombre *incommensurable*, la fonction (E) a certainement d'autres singularités que les pôles à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ ou sur ce cercle. Tel est le cas lorsque les coefficients de la série (E) sont limités et ne se reproduisent pas périodiquement.

Le spectre cannelé à un rythme uniforme d'une fonction algébrique est toujours un nombre *algébrique*. Mais il n'en est pas nécessairement ainsi lorsque le rythme spectral n'est pas uniforme : *un spectre cannelé ayant un rythme suffisamment accéléré est un nombre transcendant quelle que soit la fonction* (E) *à laquelle il se rattache.*

Rappelons, en effet, un théorème connu de la théorie des nombres transcendants, dû à M. E. Maillet (¹) :

Soient b un entier fixe quelconque; $m_1, m_2, m_3, \ldots$ des entiers réels positifs ou négatifs, plus petits que b en valeur absolue et dont une infinité est différente de zéro; $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ des entiers réels positifs tels que

$$1 \leqq \psi_1 \leqq \psi_2 \leqq \psi_3 \leqq \ldots,$$

ψ_n croissant indéfiniment avec n. La fonction

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

où

$$A_n = \frac{m_n}{b^{\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_n}},$$

est une fonction entière de x ne prenant pour $x =$ nombre commensurable (et même algébrique), différent de zéro, que des valeurs qui sont des nombres transcendants.

Considérons donc une suite indéfinie $M_0, M_1, M_2, \ldots$ d'entiers *ayant chacun au plus l chiffres*, et prenons dans le théorème précédent

$$m_k = M_k, \qquad b = 10^l.$$

La fonction $\varphi(x)$ coïncidera avec la génératrice spectrale de la suite M_k correspondant au rythme (compatible avec la suite)

$$h_k = u_k - u_{k-1} \qquad \text{où} \qquad u_k = \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_k l$$

avec $h_1 = \psi_1$, car on a alors

$$A_n = \frac{M_n}{b^{\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_n}} = \frac{M_n}{10^{u_n}} = \frac{M_n}{10^{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}} = g_n M_n.$$

(¹) E. Maillet, *Introduction à la théorie des nombres transcendants* (Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 20-22).

Le spectre cannelé des M_k à rythme h_k coïncidera donc avec la valeur $\varphi(1)$ et par suite *représentera un nombre transcendant.* D'après la théorie des nombres transcendants, cette transcendance provient de la présence d'une infinité de suites de zéros séparant les décimales significatives du spectre et dont l'étendue croît indéfiniment avec le rang de la suite. Autrement dit : *la transcendance du spectre provient de la croissance rapide de sa dispersion avec le rang des tranches spectrales.*

Pour la suite M_k se composant d'entiers à un seul chiffre, le spectre ayant, par exemple, le rythme $h_k = (k-1)(k-1)!$ est un nombre transcendant.

Mais le caractère transcendant ne se rattache pas exclusivement aux spectres des suites d'entiers à un nombre limité de chiffres. On peut le faire voir à l'aide d'un autre théorème sur les nombres transcendants, dû également à M. Maillet ([1]) et qui est le suivant :

Soit b un entier fixe quelconque et posons

$$b_{k,n} = b^{b_{k-1}^{n}} \quad \text{avec} \quad b_{1,n} = b^n,$$

de sorte que

$$b_{2,n} = b^{b^n}, \quad b_{3,n} = b^{b^{b^n}}, \quad \ldots.$$

Soient ensuite ρ et τ deux entiers réels positifs fixes, et A_0, A_1, A_2, ... une suite d'entiers (réels ou imaginaires, positifs ou négatifs) tels que pour une valeur déterminée de p plus grande que 2 on ait pour tout indice n

$$|A_n| \leqq b_{p,n}^{\tau}.$$

D'après le théorème de M. Maillet que nous avons en vue, la série

$$\varphi(x) = A_0\omega_0 + A_1\omega_1 x + A_2\omega_2 x^2 + \ldots.$$

où

$$\omega_n = b_{p,n}^{-\rho n},$$

représente une fonction entière de x ne prenant pour x rationnel différent de zéro que des valeurs transcendantes.

Considérons alors une suite indéfinie d'entiers réels positifs M_0, M_1, M_2, ..., dont le nombre de chiffres peut augmenter aussi rapidement qu'on le veut avec leur rang, et déterminons deux

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 105.

entiers positifs $p > 2$ et τ de telle manière que le nombre $10_{p-1,n}$ croisse au moins aussi vite que le nombre de chiffres de M_n, et que pour tout indice n on ait

$$|M_n| \leqq 10^{\tau}_{p,n}.$$

En prenant dans le théorème précédent

$$A_n = M_n, \qquad b = 10,$$

la fonction $\varphi(x)$ coïncidera avec la génératrice spectrale de la suite M_k correspondant au rythme

$$h_k = u_k - u_{k-1} \quad \text{où} \quad u_n = 10^{\rho n}_{p,n}$$

avec $h_1 = 10_{p,1}$, car on a alors

$$A_n \omega_n = \frac{M_n}{10^{h_1+h_2+\ldots+h_n}} = g_n M_n.$$

La valeur $\varphi(1)$ représente le spectre cannelé des M_k à rythme h_k; le spectre sera un nombre transcendant.

La transcendance des spectres ainsi formés est due essentiellement à la dispersion du spectre, l'effet de l'accélération rapide du rythme spectral; elle ne se rattache nullement aux valeurs numériques mêmes des entiers formant les cannelures du spectre ou à leur mode de croissance avec le rang.

Mais à côté de tels spectres, rentrant dans la classe de *nombres transcendants de Liouville*, il y en a une infinité d'autres, représentant aussi des nombres transcendants, tout en ayant une dispersion faible ou même nulle, et un rythme lent ou même uniforme. Il suffit de rappeler le spectre, à un rythme uniforme quelconque, de la suite d'entiers à un chiffre coïncidant avec les décimales successives du nombre e ou du nombre π, et qui n'appartient pas à la classe de Liouville.

La transcendance d'un spectre cannelé peut donc être due : 1° à sa dispersion seule; 2° à la composition des cannelures spectrales; 3° à la fois à sa dispersion et à la composition de ses cannelures.

15. Transmutations $\Delta[f]$. — On a défini une *transmutation fonctionnelle* lorsqu'on a indiqué une loi permettant de déduire de toute fonction f une autre fonction F dont la forme dépend de celle de f, et l'on dira que la transmutation, *appliquée* à la fonction f, donne pour *transmuée* F.

La notion de transmutation est, pour les fonctions, exactement l'équivalent de ce qu'est celle de transformation ponctuelle pour les points de l'espace. On établit une analogie aussi complète que possible entre les deux conceptions en considérant chaque fonction comme correspondant à un point de *l'espace fonctionnel*, dans lequel une catégorie quelconque de fonctions représente un *champ fonctionnel*. Une transmutation peut n'avoir un sens et n'être définie que dans un champ fonctionnel déterminé, de même qu'en Géométrie ordinaire une transformation ponctuelle peut n'être définie que pour les points d'une région déterminée de l'espace, d'une surface, d'une ligne (¹).

Nous désignerons comme une *transmutation* $\Delta[f]$, *compatible avec la fonction* f, *toute transmutation qui, appliquée à* f, *la transmue en une fonction* (E).

La transmutation, par exemple

$$\Delta[f] = f'(x),$$

est compatible avec l'intégrale indéfinie de toute fonction (E).

La transmutation

$$\Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(zt)\, dt$$

est compatible avec la fonction

$$f(z) = e^{mz} \qquad (m = \text{nombre entier})$$

qu'elle transmue en série $\Sigma m^n z^n$.

La transmutation

$$\Delta[f] = z^2 f''(z) + 2z f'(z)$$

est compatible avec toute fonction $f(z)$ définie par une série de puissances de la forme

$$f(z) = \frac{M_1 z}{1.2} + \frac{M_2 z^2}{2.3} + \frac{M_3 z^3}{3.4} + \ldots$$

(les M_n étant des entiers fixes ou variables avec n) qu'elle transmue en série $\Sigma M_n z^n$.

(¹) J. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Chap. III (*Scientia*).

Les opérations par lesquelles s'effectuent les transmutations $\Delta[f]$ sont infiniment variées. Néanmoins, une transmutation particulière $\Delta[f]$ ne se rattache pas exclusivement à une fonction particulière : d'une manière générale *une transmutation* $\Delta[f]$ *est compatible avec une catégorie plus ou moins étendue de fonctions.*

Ainsi, la transmutation

$$(53) \qquad \Delta[f] = 10^g f(z) \qquad (g = \text{entier positif})$$

est compatible avec toute fonction

$$(54) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

dont les coefficients a_n ont *un nombre fini de décimales.*

La transmutation

$$(55) \qquad \Delta[f] = \mathrm{A}\, f(\mathrm{B}z) \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B} = \text{entiers fixes})$$

est compatible avec toute fonction *algébrique* à a_n *commensurables* ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Elle est aussi compatible avec les $f(z)$ pour lesquelles les a_n sont des fractions décimales périodiques dont le nombre de chiffres de la partie non périodique et le nombre de chiffres de la période ne varient pas avec n.

La transmutation

$$(56) \qquad \Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\, e^{ti}) f\left(\frac{z\, e^{-ti}}{\rho}\right) dt \qquad (\rho = \text{const.})$$

est compatible avec toutes les fonctions $f(z)$ dont les coefficients a_k sont racines carrées de nombres entiers.

Les fonctions $f(z)$ dont les a_n sont de la forme $\mathrm{M}_n \mathrm{Q}_n$, où M_n est un entier et Q_n un facteur non entier variable avec n, admettent des transmutations $\Delta[f]$ pouvant affecter les formes très variées. Ainsi :

1° Pour $\mathrm{Q}_n = \dfrac{1}{\alpha + \beta n}$ ($\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$), on a

$$\Delta[f] = z^{1-\beta} \frac{d}{dz}[z^\beta f(z^\alpha)]$$

après qu'on y remplace z par $z^{\frac{1}{\alpha}}$;

2° Pour $\mathrm{Q}_n = n^{-p}$ ($p = \text{entier positif fixe}$), on a

$$\Delta[f] = \varphi_{p'}(z),$$

où les $\varphi_k(z)$ sont les fonctions définies par la formule de récurrence

$$\varphi_0 = f, \qquad \varphi_k(z) = z\frac{d}{dz}\varphi_{k-1}(z) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

3° Pour

$$Q_n = \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)},$$

on a

$$\Delta[f] = \frac{1}{z^{p-1}}\frac{d}{dz}\varphi_p(z),$$

où

$$\varphi_0 = f, \qquad \varphi_k(z) = z^2\frac{d}{dz}\varphi_{k-1}(z) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

4° Pour

$$Q_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n},$$

on a

$$\Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(zt)\,dt.$$

Cette dernière transmutation est, par exemple, compatible avec un polynome quelconque à coefficients entiers, en $e^{\varphi(z)}$, $\sin\varphi(z)$, $\cos\varphi(z)$, où $\varphi(z)$ est une fonction (E);

5° Pour

$$Q_n = \frac{1}{(1.2.3\ldots n)^p} \qquad (p = \text{entier positif fixe}),$$

la fonction $f(z)$ admet la transmutation (avec les restrictions concernant la convergence)

$$\Delta[f] = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-(t_1+t_2+\ldots+t_p)} f(z\,t_1\,t_2\ldots t_p)\,dt_1\ldots dt_p.$$

Des règles générales facilitent la recherche d'une transmutation $\Delta[f]$ dans une multitude de cas. Il est, d'ailleurs, évident qu'à l'aide d'une transmutation $\Delta[f]$, compatible avec une fonction donnée, on peut en former une infinité d'autres par des opérations qui, effectuées sur la transmuée par ce $\Delta[f]$, transmuent celle-ci en une nouvelle série (E) [addition d'une série (E) arbitraire; multiplication par une telle série; dérivation répétée un nombre arbitraire de fois; itération, etc.].

16. Spectres de la fonction rattachés à une transmutation $\Delta[f]$. — Étant donnée une fonction $f(x)$ et une transmutation $\Delta[f]$ compatible avec elle, nous considérerons comme un *spectre cannelé de $f(z)$ rattaché à cette transmutation* un spectre cannelé quelconque de la fonction (E), la transmuée de $f(z)$ par l'ensemble d'opérations par lesquelles se traduit $\Delta[f]$.

Les spectres s'obtiennent généralement comme valeur d'une intégrale définie, et dans certains cas même en termes finis, comme il a été indiqué dans les paragraphes précédents.

Ainsi, le spectre de e^x à rythme uniforme $h_k = 1$ est fourni par la génératrice spectrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-t} f\left(\frac{xt}{10}\right) dt = \int_0^\infty e^{\left(\frac{z}{10} - t\right)} dt$$

rattachée à la transmuée

$$\Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(xt)\, dt \tag{57}$$

et le spectre lui-même est

$$S = \int_0^\infty e^{-0,9t}\, dt = 1,1111\ldots$$

Les fonctions

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{58}$$

à coefficients a_n définis par la loi de récurrence

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \lambda a_n - M_n = 0 \tag{59}$$

($\lambda =$ const., $M_n =$ entier positif fixe ou variable avec n) admettent la transmutation

$$\Delta[f] = f''(x) + \lambda f(x). \tag{60}$$

Le spectre à rythme uniforme $h_k = h$ est fourni par la valeur

$$S = F(10^{-h}), \tag{61}$$

où $F(x)$ désigne le second membre de (60).

Le spectre de la même fonction à rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$ est donné par la valeur

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho e^{ti})\, \theta\left(\frac{e^{-ti}}{\rho}\right) dt, \tag{62}$$

où $\theta(x)$ désigne la transcendante (51), ρ étant une constante arbitraire de module plus petit que le rayon de convergence de la série (58).

Pour les fonctions définies par les séries exponentielles

$$f(x) = A_0 + A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{2\alpha x} + \ldots,$$

où les A_n sont des entiers positifs, et pour la transmutation

$$\Delta[f] = f\left(\frac{\log x}{\lambda}\right) \qquad (\lambda = \alpha \log e)$$

(la base des logarithmes étant 10), compatible avec la suite des A_n, le spectre à rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$ sera la valeur de

$$S = \chi\left(-\frac{h + \frac{c}{2}}{\lambda}\right)$$

où $\chi(x)$ est la fonction

$$\chi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n q^{n^2} e^{n\alpha x} \qquad \left(q = 10^{-\frac{c}{2}}\right).$$

Si A_n n'augmente pas indéfiniment avec n, la fonction admet des spectres à rythme uniforme $h_k = h \geqq l$, où l est un entier positif égal ou supérieur au logarithme de la plus grande valeur A_n.

17. Correspondance entre la fonction et son spectre cannelé. — D'une manière générale, une transmutation $\Delta[f]$, effectuée sur la fonction $f(x)$, établit une relation entre f et sa transmuée $F(x)$. Cette relation, suivant l'ensemble d'opérations par lesquelles se traduit $\Delta[f]$, peut affecter des formes variées et être, par exemple :

1° Une relation en termes finis, comme l'est la relation

$$A\, f(B\, x) = F(x) \qquad (A,\ B = \text{entiers fixes})$$

valable pour les fonctions algébriques à coefficients a_n commensurables ;

2° Une équation différentielle, comme la relation

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda f = F(x) \qquad (\lambda = \text{const.})$$

valable pour les fonctions dont les a_n sont liés par une loi de récurrence (59);

3° Une relation intégrale, comme

$$\int_0^\infty e^{-t} f(xt)\,dt = F(x)$$

valable pour les fonctions à coefficient a_n de la forme

$$\frac{M_n}{1.2\ldots n} \qquad (M_n = \text{entier}).$$

De même, une translation $\Delta[f]$ effectuée sur

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

établit généralement une relation entre les a_n et les coefficients M_n de $F(z)$. Cette relation peut être exprimée en termes finis ou bien être une relation de récurrence.

Il existe, d'ailleurs, des transmutations $\Delta[f]$ *singulières*, lesquelles, appliquées à une fonction arbitraire $f(x)$, n'entraînent aucune relation entre f et F, en ce sens que *la transmuée* F *est indépendante de la fonction* f à laquelle $\Delta[f]$ aura été appliqué. On formerait, par exemple, de tels $\Delta[f]$ en remarquant qu'il existe des intégrales définies de la forme

$$\int_a^b u(t)[v(t)]^n\,dt,$$

nulles pour toute valeur positive de n. Telle serait l'intégrale de Cauchy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cti}}{(a-ti)^n}\,dt \qquad (a > 0,\ c > 0)$$

ou bien l'intégrale de Stieltjes

$$\int_0^\infty t^{4n+1} e^{-t} \cos t\,dt.$$

Une fonction $f(z)$ admet une infinité de spectres cannelés variant, d'une part avec la transmutation $\Delta[f]$ appliquée, et d'autre part avec le rythme suivant lequel le spectre aura été formé. *Mais pour* *une transmutation Δ appliquée et un rythme spectral déterminé, la fonction n'admet qu'un seul spectre.*

Réciproquement, un nombre donné S peut coïncider avec des spectres cannelés d'une infinité de fonctions suivant $\Delta[f]$ appliqué et le rythme qu'on attribuera au spectre. *Mais pour un $\Delta[f]$ considéré et pour un rythme spectral donné, un nombre S caractérise, comme spectre cannelé, généralement une seule fonction.* Il ne peut y avoir de l'ambiguïté que dans le cas où la relation, à laquelle conduit le $\Delta[f]$ appliqué, ne détermine pas complètement f au moyen de F, comme c'est, par exemple, le cas lorsque les coefficients a_n de f sont fournis comme racines d'une équation ayant plus d'une racine réelle, ou par une relation de récurrence laissant indéterminés un certain nombre des premiers termes $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Cette indétermination disparaît si l'on tient compte des conditions supplémentaires fournies par l'ensemble auxiliaire (A) de données.

18. **Spectres cannelés approchés.** — Nous désignerons comme *spectre approché* d'une fonction $f(z)$, rattaché à un domaine (D) de son existence, un nombre réel positif S lequel, considéré comme spectre d'une fonction, et moyennant un ensemble (A) de données qualitatives, permet de reconstruire la fonction $f(z)$ dans le domaine (D) avec l'approximation voulue.

Nous allons montrer que :

A toute fonction analytique $f(z)$, au voisinage d'un point ordinaire quelconque de $f(z)$, on peut faire correspondre un spectre approché, l'approximation étant donnée à l'avance.

Remarquons d'abord que toute fonction analytique $f(z)$ peut être représentée, au voisinage de tout son point ordinaire $z = \alpha$, et avec l'approximation voulue, *par une série de puissances $\varphi(z)$ à coefficients entiers, divisée par une puissance convenablement choisie de* 10.

Dans le cas des coefficients A_n de la série

$$f(z) = A_0 + A_1(z - \alpha) + A_2(z - \alpha)^2 + \ldots, \tag{63}$$

tous *réels*, on peut prendre pour $\varphi(z)$ la série

$$\varphi(z) = N_0 + N_1(z - \alpha) + N_2(z - \alpha)^2 + \ldots, \tag{64}$$

où N_k désigne la valeur absolue de la partie entière du coefficient A_n après y avoir déplacé la virgule de q rangs vers la droite. On aurait alors

$$\text{val. abs. } A_k = 10^{-q} N_k + \alpha_k, \tag{65}$$

où

$$0 \leqq \alpha_k < 10^{-q} \tag{66}$$

et le module de la différence

$$f(x) - 10^{-q} \varphi(x) \tag{67}$$

serait plus petit que

$$\frac{10^{-q}}{1-\lambda} \tag{68}$$

pour tout point z à l'intérieur du cercle D ayant pour centre le point $z = \alpha$ et pour rayon une valeur λ plus petite à la fois à 1 et au rayon de convergence R de la série (63). Si donc on prend pour q un entier positif plus grand que la valeur absolue de

$$\log \varepsilon + \log(1-\lambda) \tag{69}$$

(où ε est un nombre positif donné à l'avance), on aura pour tout point z à l'intérieur du cercle D

$$|f(z) - 10^{-q} \varphi(z)| < \varepsilon \tag{70}$$

comme il fallait démontrer. Le nombre q dépend de l'approximation exigée et du domaine considéré autour du point $z = \alpha$.

Or, par le choix convenable du nombre β, *la fonction* $f(\alpha + \beta z)$ *se réduit à un polynome en* z. En effet, la convergence de la série (1) au voisinage de $z = \alpha$ assure l'existence d'un nombre B fini et différent de zéro, tel que pour toute valeur de n on ait

$$\sqrt[n]{|A_n|} < B.$$

Prenant pour β un nombre positif plus petit que $\frac{1}{B}$, le coefficient $b_n = A_n \beta^n$ de la série

$$f(\alpha + \beta z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

sera en valeur absolue plus petit que 1. Les coefficients N_k de la série $\varphi(z)$ relative à $f(\alpha+\beta z)$ deviennent, à partir d'un certain rang k, tous nuls et $\varphi(z)$ se réduit à un polynome. De plus, lorsque les coefficients A_n sont, à partir d'un certain rang, plus petits que 1, on peut prendre $\beta = 1$.

Si un ou plusieurs premiers coefficients A_n sont des nombres entiers, *l'approximation fournie par le polynome $\varphi(z)$ se trouve augmentée*. Car, si par exemple $A_0, A_1, \ldots, A_m$ sont des entiers, on aura $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_m$; pour les points z compris à l'intérieur du cercle de rayon λ, le module de la différence (67) est plus petit que

$$\frac{10^{-q}\lambda^{m+1}}{1-\lambda}.$$

Pour la fonction, par exemple $f(z) = e^z$, si l'on prend

$$\lambda = \frac{1}{2}, \qquad q = 7, \qquad \beta = 1,$$

le polynome $\varphi(z)$ sera le polynome de dixième degré

$$\begin{aligned}\varphi(z) = {} & 10000000 + 10000000\,z + 5000000\,z^2 + 1666666\,z^3 \\ & + 416666\,z^4 + 83333\,z^5 + 13888\,z^6 + 1984\,z^7 \\ & + 248\,z^8 + 27\,z^9 + 2\,z^{10};\end{aligned}$$

le polynome $10^{-7}\varphi(z)$, pour toute valeur $|z| < \frac{1}{2}$, représentera e^z avec au moins 7 décimales exactes.

Un spectre cannelé quelconque du polynome $\varphi(z)$ est en même temps un spectre approché de $f(z)$ pour tous les points z à l'intérieur du cercle D.

Le polynome $\varphi(z)$ admet des spectres limités à rythme uniforme, fournis comme valeurs numériques de $\varphi(\alpha + 10^{-l})$, où l désigne un entier positif inférieur ou égal au logarithme de la valeur absolue du plus grand coefficient N_k. Par conséquent : *la fonction $f(z)$ admet, au voisinage de tout son point ordinaire, des spectres limités qui la déterminent, dans ce voisinage, avec l'approximation donnée à l'avance.*

Si h désigne un nombre égal ou supérieur au logarithme de la valeur absolue du plus grand coefficient A_k, on peut prendre $l = h + q$. Le spectre approché de $f(z)$ à rythme uniforme l sera un nombre commensurable à $p(h+q)$ décimales, où p désigne le degré du polynome $\varphi(z)$. Il déterminera la fonction $f(z)$, à l'intérieur du cercle D, avec une approximation ε dépendant du nombre q et du rayon du cercle D.

Nous terminerons ce paragraphe par la remarque que les conclusions précédentes s'étendent aisément aux cas des coefficients A_k imaginaires, et par suite à toute fonction analytique.

TROISIÈME PARTIE.

LA MÉTHODE SPECTRALE.

19. Principe de la méthode. — La notion de spectre, malgré ses apparences de notion superficielle et peu riche de conséquences, peut pourtant se mettre en rapport étroit avec les inconnues dans divers problèmes d'Arithmétique et d'Analyse. La diversité des manières pour établir la correspondance entre le spectre et les éléments d'une suite de nombres, ou les éléments déterminants de la fonction, rend souvent possible la formation des spectres dans lesquels apparaissent explicitement les valeurs des inconnues.

En particulier, les *spectres cannelés* peuvent jouer un rôle utile comme instruments de calcul. Ils conduisent à un procédé intéressant de calcul numérique que l'on peut nommer *procédé spectral* à cause des analogies frappantes qu'il présente avec celui de l'analyse spectrale en Physique et Chimie.

Calculer une valeur numérique, ou bien une suite limitée ou illimitée de valeurs numériques a_0, a_1, a_2, ..., ou bien une partie déterminée de chiffres composant l'une de ces inconnues, par un procédé spectral, c'est déterminer ces inconnues au moyen d'un spectre S convenablement rattaché à la suite des a_k. Ceci peut se faire de deux manières différentes :

1° On peut calculer une inconnue ou une partie déterminée de chiffres composant la valeur numérique d'une inconnue, soit comme spectre S d'une fonction connue, fourni par un $\Delta[f]$ connu et ayant un rythme spectral connu, soit par un segment déterminé du spectre S, ou bien comme une combinaison connue de S;

2° On peut calculer une suite limitée ou illimitée d'inconnues a_0, a_1, a_2, ..., ou bien une seule inconnue a_k faisant partie de la suite, ou bien un ou plusieurs chiffres composant a_k, au moyen de cannelures ou de raies d'un spectre S.

Cette dernière manière de détermination des inconnues s'applique chaque fois que celles-ci se trouvent en correspondance connue avec une fonction (E) et se résume en la règle suivante :

Si l'on partage le spectre S de la fonction (E) à rythme h_k, en tranches consécutives, la première étant composée de h_1 premières décimales de S, la deuxième de h_2 décimales suivantes, etc., l'entier $N_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ faisant partie de la suite $N_0, N_1, N_2, \ldots$ d'inconnues auxiliaires (à l'aide desquelles se calculent les inconnues a_0, $a_1, a_2, \ldots$) sera fourni comme groupe de chiffres significatifs de la $n^{\text{ième}}$ tranche, et N_0 coïncidera avec la partie entière de S. Autrement dit : N_n coïncidera avec la $n^{\text{ième}}$ cannelure du spectre S et son $k^{\text{ième}}$ chiffre avec la raie correspondante de cette cannelure. Les N_n étant ainsi déterminés, les inconnues a_n le seront à l'aide de la relation (explicite ou de récurrence) établissant la correspondance entre les a_n et les N_n.

Une valeur *suffisamment approchée* du nombre S fournit ainsi les *valeurs exactes* d'autant d'inconnues a_n que l'on veut : la détermination de $n+1$ premiers entiers $N_0, N_1, N_2, \ldots$ n'exige que la connaissance d'une valeur approchée de S avec $h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ décimales exactes, et l'on aura alors les a_n correspondants à l'aide de la relation liant les a_n aux N_n.

L'avantage qu'offre la méthode spectrale au point de vue de la pratique de calcul numérique consiste en ce qu'elle fournit le moyen :

1° de déterminer à la fois, *par la continuation suffisante d'un même calcul numérique*, les valeurs d'autant d'inconnues que l'on veut;

2° de déterminer les *valeurs exactes* d'un nombre voulu d'inconnues au moyen d'une valeur *suffisamment approchée* d'une donnée du problème.

20. Quelques applications arithmétiques. — Désignons par 9_k l'entier qu'on obtient en écrivant le chiffre 9 k fois consécutivement, par exemple

$$9_1 = 9, \qquad 9_2 = 99, \qquad 9_3 = 999, \qquad \ldots.$$

L'Arithmétique élémentaire enseigne des propriétés curieuses de nombres ainsi composés et de leurs combinaisons. Nous y ajouterons quelques propriétés que nous croyons nouvelles.

I. Soient

$$(71) \qquad a, \; b, \; c, \; \ldots, \; g,$$
$$(72) \qquad m, \; n, \; p, \; \ldots, \; s$$

deux suites données d'entiers positifs, les entiers (71) étant premiers entre eux, et soit h un entier positif variable. L'expression

$$S = \frac{9^{(m+1)ah}}{9^{ak}} \times \frac{9^{(n+1)bh}}{9^{bk}} \cdots \frac{9^{(s+1)gh}}{9^{gk}}$$

représente un entier à λh chiffres, où

$$\lambda = ma + nb + \ldots + sg$$

jouissant de la propriété suivante :

Désignons par $P(k)$ l'entier positif indiquant de combien de manières l'entier k peut s'écrire sous la forme

$$k = ax + by + \ldots + gt,$$

lorsque $x, y, \ldots, t$ parcourent la suite de valeurs

$$\begin{aligned} x &= 0, 1, 2, \ldots, m, \\ y &= 0, 1, 2, \ldots, n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t &= 0, 1, 2, \ldots, s. \end{aligned}$$

Dès que h surpasse une certaine limite déterminée par la suite (71), *l'entier formé du groupe de chiffres significatifs de* S, *commençant par le* $(kh+1)^{\text{ième}}$ *et terminé par le* $(k+1)h^{\text{ième}}$ *chiffre de* S, *coïncide avec le nombre* $P(k)$, *et cela pour toute valeur de k ne surpassant pas λh.*

Pour le faire voir, considérons le polynome

$$V(x, \alpha, \mu) = \frac{x^{(\mu+1)\alpha} - 1}{x^\alpha - 1} = 1 + x^\alpha + x^{2\alpha} + \ldots + x^{\mu\alpha},$$

α et μ étant deux entiers positifs arbitraires. On a

$$V(10^{-h}, \alpha, \mu) = 10^{-m\alpha h} \frac{9^{(\mu+1)\alpha h}}{9^{\alpha h}}$$

et, par suite,

$$S = 10^{\lambda h} W(10^{-h}),$$

où $W(x)$ désigne le polynome de degré λ

$$W(x) = V(x, a, m) \times V(x, b, n) \ldots V(x, g, s).$$

Or, le coefficient de x^α dans le polynome $W(x)$ est précisément le nombre désigné par $P(k)$. Si donc l'on désigne par l_k le nombre de chiffres de l'entier $P(k)$, et si l'on prend pour h un entier supérieur ou égal à $\log P(k)$, on aura

$$W(10^{-h}) = 0{,}\underbrace{00\ldots0}_{h-l_1 \text{ zéros}}P(0)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_2 \text{ zéros}}P(1)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_3 \text{ zéros}}P(2)0\ldots0P(\lambda h),$$

et, comme $h - l_k \geqq 0$, le résultat énoncé se trouve démontré. Le nombre S est donc un *spectre de la partition des nombres*.

Laguerre ([1]) a établi une formule générale donnant une valeur approchée du nombre $P(k)$ pour un système donné $(k, a, b, c, \ldots, g)$ et pour tous les systèmes possibles $(x, y, \ldots, t)$, avec l'erreur commise ayant une limite supérieure *indépendante de k*.

Dans le cas, par exemple, de l'équation à deux inconnues

$$k = ax + by,$$

la formule de Laguerre fournit

$$P(k) = \frac{k}{ab} + \delta,$$

où la valeur absolue de δ est plus petite que 1 ; pour l'équation à trois inconnues

$$k = ax + by + cz,$$

elle fournit

$$P(k) = \frac{k^2}{2abc} + \frac{k(a+b+c)}{2abc} + \delta,$$

le terme complémentaire δ étant en valeur absolue plus petit qu'une certaine quantité fixe pour tous les k.

([1]) *Sur la partition des nombres* (*Bulletin de la Soc. mat. de France*, t. V, 1877 ; *Œuvres*, t. I, p. 218-220.

Ces formules permettent d'assigner à h l'une des valeurs que suppose la proposition précédente.

Remarquons que

$$\frac{9_{(\mu+1)\alpha h}}{9_{\alpha h}}$$

est l'entier à $\mu\alpha h$ chiffres ayant pour valeur

$$\underbrace{100\ldots01}_{\alpha h-1 \text{ zéros}}\underbrace{00\ldots01}_{\alpha h-1 \text{ zéros}}\underbrace{00\ldots01}_{\alpha h-1 \text{ zéros}}0\ldots,$$

où le groupe de chiffres $00\ldots01$ se répète μ fois. Ceci permet de calculer le nombre S en additionnant les unités convenablement distribuées et d'imaginer même un appareil simple effectuant rapidement ce calcul.

Pour l'équation, par exemple

$$3x + 2y = k,$$
$$0 \leqq x \leqq 10, \qquad 0 \leqq y \leqq 9,$$

comme le nombre

$$\log\left(1 + \frac{\lambda}{ab}\right) = \log\left(1 + \frac{48}{6}\right) = \log 9$$

est plus petit que 1, on peut prendre $h = 1$, ce qui fournit

$$S = 0,101111212222323333434334334334\ldots$$

et le nombre $P(k)$ coïncide avec le $(k+1)^{\text{ième}}$ chiffre de S. Ainsi, l'équation

$$3x + 2y = 19$$

a exactement trois solutions en $x \leqq 10$ et $y \leqq 9$: ce nombre est bien indiqué par le vingtième chiffre de S.

II. Considérons le nombre rationnel

$$S_{m,h} = M_{m,h} Q_h,$$

où

$$M_{m,h} = \frac{1}{9_h} + \frac{1}{9_{2h}} + \ldots + \frac{1}{9_{mh}},$$

$$Q_h = 10^{-h} \frac{9_{2h}}{9 \cdot 9_h}$$

et où m et h sont deux entiers positifs arbitraires. Convertis en fractions décimales, $M_{m,h}$ est une fraction périodique *simple* ayant une période de mh chiffres, et Q_h est une fraction périodique *mixte* dont la partie non périodique et la période ont chacune h chiffres. Le nombre $S_{m,h}$ lui-même, converti en fraction décimale, sera donc une fraction périodique *mixte* dont la partie non périodique a h chiffres et la période mh chiffres.

Partageons la suite S de décimales de $S_{m,h}$ formant l'ensemble de sa partie non périodique et la première période, en tranches successives $T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}$ à h chiffres, de sorte que la tranche

$$T_k (k = 1, 2, \ldots, m+1)$$

commence par le $[(k-1)h+1]^{\text{ième}}$ et se termine par la $kh^{\text{ième}}$ décimale de $S_{m,h}$, et considérons les tranches $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

Dès que h surpasse une certaine valeur, l'entier formé du groupe de chiffres significatifs de la tranche T_k coïncide avec le nombre de diviseurs de k autres que 1 et k, et cela pour toute valeur de $k \leqq m$.

Pour le faire voir, remarquons que $S_{m,h}$ représente la valeur numérique que prend pour $x = 10^{-h}$ la fraction rationnelle

$$F(x) = f(x) - \varphi(x),$$

où $f(x)$ est la série de Lambert limitée

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \ldots + \frac{x^m}{1-x^m}$$

et

$$\varphi(x) = \frac{x(x+1)}{1-x} = x + 2(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots).$$

D'après la propriété bien connue de la série de Lambert, le coefficient $N(k)$ du développement

$$F(x) = N(1)x + N(2)x^2 + N(3)x^3 + \ldots$$

coïncidera avec le nombre de diviseurs de k autres que 1 et k.

Prenons pour h un entier quelconque tel que 10^h ne soit inférieur au nombre de diviseurs d'aucun entier $h < m$. Le produit $10^{-hk}N(k)$ sera alors le nombre $0{,}00 \ldots 0N(k)$ où la partie significative $N(k)$, composée de l_k chiffres, est précédée d'un nombre de zéros égal à $h - l_h$. Il s'ensuit que

$$F(10^{-h}) = 0{,}\underbrace{00\ldots0}_{h-l_1\text{ zéros}}N(1)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_2\text{ zéros}}N(2)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_3\text{ zéros}}N(3)0\ldots,$$

ce qui démontre le résultat énoncé. Le nombre S est donc un *spectre des nombres des diviseurs d'un entier variable.*

En désignant comme *lacune* toute tranche T_k formée exclusivement de zéros, on en tire le corollaire suivant :

Le nombre de lacunes que présente l'ensemble de k premières tranches T_1, T_2, ... *est égal au nombre des nombres premiers inférieurs à k, et cela pour toute valeur de k inférieure ou égale à m.*

Si l'on remarque que

$$\frac{1}{9^{kh}} = 0{,}\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}1\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}1\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}1,$$

$$10^{-h}\frac{9^{2h}}{9\times 9^{h}} = 0{,}\underbrace{0\ldots0}_{h-1}1\underbrace{0\ldots0}_{h-1}2\underbrace{0\ldots0}_{h-1}2\underbrace{0\ldots0}_{h-1}2\ldots,$$

on voit que le nombre S se calculerait, pour tout m et h donnés, par la seule addition d'unités, par exemple à l'aide d'un appareil simple à imaginer.

Le nombre h remplissant les conditions précédentes peut être déterminé de diverses manières. Comme l'on a

$$N(k) < k < m,$$

on peut prendre pour h un entier quelconque supérieur ou égal à $\log m$.

On peut aussi le choisir de la manière suivante : en prenant pour m une factorielle

$$m = 1.2.3\ldots\lambda,$$

on s'assure par des considérations arithmétiques élémentaires que le nombre de diviseurs (autres que 1 et k) d'un entier $k \leqq m$ ne surpasse jamais $2^{\lambda-1}$, et comme

$$2^{\lambda-1} < 10^{\frac{\lambda-1}{3}},$$

on peut prendre pour h un entier quelconque supérieur ou égal à $\frac{\lambda - 1}{3}$.

Rappelons aussi l'inégalité de M. Wigert

$$N(k) < 2^{(1+\varepsilon)\frac{\log k}{\log\log k}},$$

valable pour $\varepsilon > 0$ et arbitraire, pourvu que k soit assez grand.

On trouve, par exemple, pour $m = 100$ (ce qui fournit $h \leqq 2$) :

$$S_{100,2} = 0,00000001000200020102000400020203000400040202000601\ldots.$$

Les 20 premières tranches à deux chiffres contiennent 9 lacunes, les 100 premières tranches en contiennent 26, indiquant qu'il y a 9 nombres premiers inférieurs à 20, qu'il y en a 26 inférieurs à 100, etc.

Le même procédé, appliqué à diverses fonctions rationnelles analogues aux précédentes, conduit à d'autres nombres entiers ou rationnels, composés de chiffres 9 et jouissant des propriétés arithmétiques intéressantes.

On sait, par exemple [1], que le nombre $Q_{p,q}$ de décompositions de tous les nombres en (au plus) q parties, chacune étant au plus égale à un nombre donné p, est le coefficient de ax^{pq} dans le développement de

$$F(x) = \frac{1}{(1-a)(1-x)(1-ax)(1-ax^2)\ldots(1-ax^p)}.$$

De même, on sait que le nombre $R_{k,k'}$ de solutions en nombres entiers positifs de deux équations linéaires simultanées

$$a\,x + b\,y + \ldots + g\,t = k,$$
$$a'x + b'y + \ldots + g'\,t = k'.$$

pour k et k' variables, est le coefficient de $u^k v^{k'}$ dans le développement de

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{(1-u^a v^{a'})(1-u^b v^{b'})\ldots(1-u^g v^{g'})}.$$

Les expressions

$$(73)\qquad F(10^{-h}) \quad \text{et} \quad \Phi(10^{-h}, 10^{-h'})$$

(1) MAC-MAHON, *Philos. Trans.*, t. 187 A, 1896, p. 619.

(où h et h' sont des entiers suffisamment grands) sont certains nombres rationnels dont la suite de décimales s'exprime en écrivant, les uns à la suite des autres, les entiers successifs $Q_{p,q}$ ou $R_{k,k'}$, et en intercalant entre eux un certain nombre de zéros d'autant plus grand que h et h' sont plus grands. Les nombres (73) jouent ainsi le rôle de spectres du problème.

Nous indiquerons encore, à titre d'exemple, le mode de formation des *spectres des sommes des puissances semblables des nombres entiers consécutifs*.

Désignant par $P_{m,k}(z)$ le polynome de degré m défini par la loi de récurrence

$$P_{m,k} - zP'_{m,k-1} = 0, \qquad P_{m,0} = \frac{z^{m+1} - z}{z - 1}, \qquad P' = \frac{dP}{dz},$$

on a

$$P_{m,k} = 1^k z + 2^k z^2 + \ldots + m^k z^k.$$

La formule connue

$$\frac{\Sigma a_n z^n}{1 - z} = a_0 + (a_0 + a_1)z + (a_0 + a_1 + a_2)z^2 + \ldots$$

fournit alors

$$\frac{P_{m,p}}{1 - z} = s_{1p} z + s_{2p} z^2 + \ldots + s_{mp}(z^m + z^{m+1} + \ldots),$$

où

$$s_{np} = 1^p + 2^p + \ldots + n^p.$$

L'inégalité

$$k^p < m^p \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1)$$

entraîne

$$s_{np} < m^{p+1}$$

et par suite, h étant un entier positif supérieur ou égal à $(p+1)\log m$, *le spectre de la suite* $S_{1p}, S_{2p}, \ldots, S_{mp}$ à rythme uniforme $h_k = h$ est fourni par les mh premières décimales du nombre (notation des exemples précédents)

$$S = \frac{10^{mh}}{9mh} P_{mp}(10^{-mh});$$

les décimales restantes fournissent un spectre périodique à rythme h, la période étant le nombre s_{mp} précédé d'autant de zéros qu'il en faut pour compléter le nombre de chiffres de la période jusqu'à h.

Dans le cas, par exemple, des $s_{1p} \ldots s_{mp}$, correspondant à $m = 16$, $p = 2$, on trouve

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{10^{64} P_{16,2}(10^{-64})}{9_{64}} \\
&= 0,00010005001400300055009101400204028503850506065008191015\ldots
\end{aligned}
$$

La valeur numérique de s_{k2} ($k = 1, 2, \ldots, 16$) coïncide avec la $k^{\text{ième}}$ cannelure de ce spectre, c'est-à-dire avec le groupe de chiffres significatifs commençant par la $(4k-3)^{\text{ième}}$ et finissant avec la $4k^{\text{ième}}$ décimale de S; le $n^{\text{ième}}$ chiffre de s_{k2} coïncide avec la $(2k-n+1)^{\text{ième}}$ décimale de S. Ainsi, la somme $s_{9,2}$ coïncide avec la neuvième cannelure spectrale : c'est donc 285; le deuxième chiffre de $s_{13,2}$ est la cinquante-unième décimale de S : c'est donc 1.

21. Procédé spectral de développement en séries. — L'évaluation numérique des coefficients d'une série

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

se fait par des procédés usuels, soit en calculant *individuellement* chaque coefficient a_n par une formule explicite

$$a_n = \varphi(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

soit en calculant a_n au moyen de la suite déjà connue de coefficients $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ *par une formule de récurrence*

$$\varphi(n, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots) = 0.$$

Le procédé spectral consiste *à calculer tous les coefficients a_n à la fois, ou bien un groupe voulu de ces coefficients, à l'aide de groupes de décimales d'un seul nombre* S *convenablement rattaché à la fonction $f(z)$ dont on cherche le développement en série.*

Les règles du paragraphe 8 conduisent à cet égard aux règles suivantes :

I. Lorsque les a_n sont des nombres *entiers positifs*, le coefficient a_0 est égal à la partie entière du nombre S représentant le spectre de $f(z)$ à un rythme h_k connu; le coefficient a_n coïncidera avec le groupe de chiffres significatifs de S commençant par sa $(P_{n-1}+1)^{\text{ième}}$ et se terminant par sa $P_n^{\text{ième}}$ décimale, où $P_n = h_1 + h_2 + \ldots + h_n$. Dans le cas de rythme uniforme, c'est le groupe commençant par la $[(n-1)h+1]^{\text{ième}}$ et finissant par la $nh^{\text{ième}}$ décimale de S. Dans le cas de rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$, il commence par la

$$\left[(n-1)h + \frac{n(n-1)}{2}c + 1\right]^{\text{ième}}$$

et se termine par la $\left[(nh + \frac{n(n+1)}{2}c\right]^{\text{ième}}$ décimale de S.

Le $k^{\text{ième}}$ chiffre de a_n coïncide avec la $(P_n - k + 1)^{\text{ième}}$ décimale de S (la $k^{\text{ième}}$ raie de la $n^{\text{ième}}$ cannelure spectrale). Pour $h_k = h$, c'est la $(nh - k + 1)^{\text{ième}}$, et pour $h_k = h + ck$, c'est la

$$\left[nh + \frac{n(n+1)}{2}c - k + 1\right]^{\text{ième}} \text{ décimale de S.}$$

II. Lorsque les a_n ne sont pas des nombres entiers, la connaissance d'une transmutation $\Delta[f]$ compatible avec la fonction $f(z)$ à développer conduira à une transmuée (E) de $f(z)$; la connaissance d'un rythme spectral compatible avec la suite des coefficients N_n de (E) et des signes σ_n des parties réelles et imaginaires de ces coefficients permettra de former un spectre S de la suite N_n à un tel rythme. La règle I appliquée à S déterminera alors les N_n, et la relation entre les a_n et N_n imposée par le $\Delta[f]$ appliqué déterminera les coefficients inconnus a_n.

Un rythme possible h_k et les signes σ_n seront fournis par l'ensemble (A) de données qualitatives du problème.

III. La détermination des valeurs *exactes* de $n+1$ premiers coefficients (abstraction faite des signes σ_n) n'exige que la connaissance d'une valeur *approchée* du nombre S avec P_n premières décimales exactes. Ce nombre de décimales est nh dans le cas de rythme spectral uniforme $h_k = h$, et $nh + \frac{n(n+1)}{2}c$ dans le cas de rythme uniformément accéléré $h_k = h + ck$.

Premier exemple. — Déterminer la suite $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{mp}$ des coefficients de la $p^{\text{ième}}$ puissance d'un polynome donné $P(x)$ de degré m à coefficients nombres entiers positifs, connaissant une limite supérieure A des coefficients A_k.

En désignant par h un entier positif supérieur ou égal à $\log A$, la suite des A_k admet le rythme spectral uniforme $h_k = h$ et le spectre en sera fourni par le nombre

$$S = [P(10^{-h})]^p.$$

Le coefficient A_k, ainsi qu'un chiffre voulu de A_k, sera fourni par une cannelure ou une raie du spectre S déterminées par les règles précédentes.

Pour développer, par exemple, par le procédé spectral, l'expression

$$f(x) = (1 + x + x^2)^6,$$

sachant que les coefficients du développement ne surpassent pas 1000, il suffit de calculer le nombre

$$\begin{aligned} S &= f(10^{-3}) = 10^{-36}\, 1001001^6 \\ &= 1{,}006021050090126141126090050021006001 \end{aligned}$$

et d'en partager la partie décimale en tranches de trois chiffres : chacune de ces tranches fournit un coefficient A_k et l'on a ainsi

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &+ 6x + 21x^2 + 50x^3 + 90x^4 + 126x^5 + 141x^6 \\ &+ 126x^7 + 90x^8 + 50x^9 + 21x^{10} + 6x^{11} + x^{12}. \end{aligned}$$

Il suffit même de calculer S avec dix-huit premières décimales pour avoir le développement complet de la fonction.

Deuxième exemple. — Développer en série de puissances la fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

dont les zéros du dénominateur sont tous simples et ont pour module l'unité, sachant que les coefficients inconnus du développement sont tous des nombres entiers positifs ou alternativement positifs et négatifs.

En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les zéros de $Q(x)$, et par A_1, $A_2, \ldots, A_m$ les coefficients des fractions simples qui leur correspondent, on aura

$$(\beta) \qquad f(z) = p(z) + \frac{A_1}{z - \alpha_1} + \ldots + \frac{A_m}{z - \alpha_m},$$

où $p(z)$ désigne la partie entière de la fraction $f(z)$.

Si l'on développe le second membre de (β) en série

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

on aura

$$a_n = p + A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \ldots + A_m \alpha_m^n,$$

où p désigne, s'il y a lieu, le coefficient de x^n dans le polynome $P(x)$. On en conclut que

$$|a_n| < |p| + |A_1 \alpha_1^n| + \ldots + |A_m \alpha_m^n|,$$

et comme le module de a_n est égal à l'unité, on conclut que

$$|a_n| < |p| + |A_1| + \ldots + |A_m|.$$

Si donc on désigne par h un entier quelconque supérieur ou égal à

$$\log[|p| + |A_1| + \ldots + |A_m|],$$

on aura

$$|a_n| < 10^h,$$

où h ne varie pas avec n, ce qui montre que la suite des a_n admet le rythme spectral uniforme $h_k = h$ et le problème s'achève facilement.

Dans le cas, par exemple, où les a_n sont positifs, leur spectre sera le nombre commensurable $S = f(10^{-h})$. Le coefficient a_n coïncidera avec l'entier composé du groupe de décimales de S commençant par la $[(n-1)h+1]^{\text{ième}}$ et se terminant par la $nh^{\text{ième}}$ de ces décimales; le $k^{\text{ième}}$ chiffre de a_n est fourni par la $(nh - k + 1)^{\text{ième}}$ décimale de S.

Tel est le cas de la série de Lambert limitée

$$f(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \ldots + \frac{z^m}{1-z^m},$$

satisfaisant bien aux conditions précédentes. D'après l'inégalité

$$|a_n| < n < m$$

valable pour cette série et le fait que, les a_n étant des entiers positifs admettent comme rythme spectral le rythme uniforme

$$h_k = h \geq \log m;$$

leur spectre à un tel rythme sera le nombre rationnel

$$S = \frac{1}{9_h} + \frac{1}{9_{2h}} + \ldots + \frac{1}{9_{mh}} \qquad \left(9_\alpha = \underbrace{99\cdots9}_{\alpha \text{ fois}}\right).$$

Par exemple, pour $m < 100$ on peut prendre $h = 2$, ce qui fournit

$$S = 0,01020203020402040304020602040405020602 06\ldots$$

et, par suite,

$$f(z) = z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 2z^5 + 4z^6 + 2z^7 + 4z^8 + 3z^9 + \ldots.$$

Troisième exemple. — Développer $f(z)$ sachant que le coefficient a_n est le nombre commensurable $\frac{M_n}{n}$ où les M_n sont des entiers à un nombre limité de chiffres, alternativement positifs et négatifs.

La transmutation

$$\Delta[f] = f'(z)$$

compatible avec $f(z)$ se traduit par la transmuée (E)

$$F(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots$$

et entraîne la relation

$$(\alpha) \qquad n a_n - M_{n-1} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

L'entier M_{n-1} sera déterminé comme $n^{\text{ième}}$ tranche à h chiffres du nombre

$$S = f'(-10^{-h})$$

jouant le rôle du spectre de $F(z)$ à rythme uniforme $h_k = h \geqq$ au nombre maximum de chiffres de M_n. Les a_n seront dès lors fournis par la relation (α) laissant a_0 indéterminé.

Par exemple pour

$$f(z) = \int \frac{23 - 19z - 2z^2 + 2z^3}{1 - z^2} dz$$

et $h = 2$, on trouve

$$S = f'(-0,01) = 23,1921172117 2117\ldots;$$

les coefficients M_n se reproduisent, en valeur absolue, à partir du troisième, la période étant 2117, et l'on a ainsi

$$f(z) = a_0 - 23z + \frac{19}{2}z^2 - \frac{21}{3}z^3 + \frac{17}{4}z^4 - \frac{21}{5}z^5 + \frac{17}{6}z^6 - \ldots.$$

Quatrième exemple. — Développer $f(z)$ sachant que les a_n, tous positifs, sont racines carrées de nombres entiers positifs à un nombre limité de chiffres.

En posant
$$|f(re^{\varphi i})|^2 = \psi(r, \varphi),$$
la transmutation
$$\Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\sqrt{z}, \varphi)\, d\varphi,$$
compatible avec $f(z)$ (§ 15), transforme la fonction en une série (E) avec la relation
$$a_n^2 - M_n = 0.$$

En prenant pour h un entier supérieur ou égal au nombre maximum de chiffres de a_n, le spectre des M_n à rythme $h_k = h$ sera le nombre réel
$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi\left(10^{-\frac{h}{2}}, \varphi\right) d\varphi$$
dont la $n^{\text{ième}}$ tranche à h chiffres fournira M_n et l'on aura
$$a_n = \sqrt{M_n}.$$

Cinquième exemple. — Développer $f(z)$ sachant seulement que les a_n sont des entiers positifs et que $z = 0$ est un point ordinaire de la fonction.

La convergence de la série de puissances représentant $f(z)$ au voisinage de $z = 0$ implique l'existence d'un nombre positif fixe A tel que pour toute valeur de n on ait $\sqrt[n]{a_n} < A$. En désignant par c un entier quelconque supérieur ou égal à $\log A$, le rythme spectral uniformément accéléré $h_k = ck$ sera compatible avec la suite des a_n et son spectre sera le nombre réel
$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti})\, \theta\left(\frac{q\, e^{-ti}}{\rho}\right) dt$$
où
$$\theta(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2} z^n, \qquad q = 10^{-\frac{c}{2}}, \qquad \rho = \text{const.} < \frac{1}{A}.$$

On peut également exprimer le nombre S par l'intégrale définie (29) du paragraphe 5,
$$S = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2} R(\alpha, \beta t)\, dt,$$

où $R(r, \varphi)$ désigne la partie réelle de $f(re^{\varphi i})$ et où il faut attribuer aux constantes α et β les valeurs

$$\alpha = 10^{-c}, \qquad \beta = \sqrt{2 \log \text{nat} 10}.$$

Si l'on partage la suite de décimales de S en tranches consécutives de c, $2c$, $3c$, ... décimales, le coefficient a_0 coïncidera avec la partie entière de S et le coefficient a_n avec l'entier composé de chiffres significatifs de la $n^{\text{ième}}$ tranche.

22. Procédé spectral d'évaluation des intégrales définies. — Le procédé spectral s'applique de deux manières différentes au calcul des intégrales définies.

Première manière. — Dans le cas d'une suite d'intégrales définies $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, \ldots$ (simples ou multiples, réelles ou imaginaires) telles que $\mathcal{I}_n$ coïncide avec les coefficients a_n d'une fonction $f(z)$, *le calcul des $\mathcal{I}_n$ s'effectuerait suivant les règles du paragraphe* **21** *à l'aide de cannelures d'un spectre rattaché à $f(z)$ et de la relation existant entre les entiers formant ces cannelures et les a_n.*

C'est ainsi que l'intégrale de Cauchy,

$$\mathcal{I}_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

prise le long d'une circonférence C ayant comme centre $z = a$ dans lequel la fonction $f(z)$ est holomorphe, s'exprime, toutes les fois que sa valeur numérique est un nombre *entier*, directement comme l'entier formant une cannelure déterminée d'un spectre de la fonction $f(a+z) - f(a)$ (abstraction faite des signes σ_n).

Lorsque les $\mathcal{I}_n$ ne sont pas des nombres entiers, on remplacera $f(z)$ par sa transmuée correspondant à une transmutation $\Delta[f]$ compatible avec $f(z)$.

De même, une intégrale de la forme

$$\mathcal{I}_n = \int_a^b u v^n \, dt$$

(u et v fonctions de t) s'obtiendra à l'aide de cannelures d'un spectre, en remarquant que les $\mathcal{J}_n$ coïncident avec les coefficients du développement de la fonction

$$f(z) = \int_a^b \varphi(vz)u\,dt$$

suivant les puissances de z, où $\varphi(z)$ est l'une ou l'autre des fonctions

$$\varphi(z) = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}, \qquad \varphi(z) = \frac{1}{1-z},$$

suivant que la suite des $\mathcal{J}_n$ est limitée ou illimitée.

Seconde manière. — Dans le cas où une intégrale $\mathcal{J}$ représente elle-même le spectre, à un rythme h_k connu, d'une suite connue d'entiers N_0, N_1, N_2, ..., *elle aura pour valeur numérique* N_0 *suivi, comme partie entière, de la suite de décimales que l'on forme en rangeant bout à bout les groupes numériques* G_0, G_1, G_2, ... *correspondant à la suite* N_k *et au rythme* h_k, *après avoir affecté les parties réelles et imaginaires des* N_k *de signe positif.*

Tel est, par exemple, le cas de l'intégrale

$$\mathcal{J} = \int_a^b \varphi(10^{-h}v)\,u\,dt$$

lorsque les $\mathcal{J}_n$, définis par la formule précédente, sont des entiers dont le nombre de chiffres ne dépasse pas h; l'intégrale, considérée comme spectre des $\mathcal{J}_n$ à rythme $h_k = h$, aura comme partie entière la valeur $\mathcal{J}_0$ et pour partie décimale $G_1 G_2 G_3 \ldots$, où G_k est l'entier $\mathcal{J}_k$ précédé d'autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre de chiffres du groupe numérique G_k soit égal à h.

Tel est aussi le cas de l'intégrale

$$\mathcal{J} = \int_a^b \xi(v)\,u\,dt,$$

où, les h_k étant les termes d'une suite illimitée quelconque d'entiers positifs, $\xi(z)$ désigne la fonction *entière*

$$\xi(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g_n z^n, \qquad g_n = 10^{-(h_1+h_2+\ldots+h_n)}.$$

Lorsque $\mathcal{J}_n$ est un nombre commensurable de la forme $\frac{M_n}{n}$ (M_n = entier fixe ou variable avec n), on remplacera $\xi(z)$ par $z\xi'(z)$.

En prenant pour les h_k une suite d'entiers croissant assez rapidement avec leur rang, on aura ainsi une infinité d'intégrales qui s'expriment *à l'aide de nombres transcendants de Liouville* (¹).

Les intégrales de la forme

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty e^{-t^2} \psi(\alpha, \beta t)\, dt,$$

où $\psi(r, \varphi)$ est la partie réelle d'une fonction $f(re^{\varphi i})$, la fonction $f(z)$ étant développable en série de puissances de z à coefficients nombres entiers se calculent, pour certaines valeurs des constantes α et β, comme spectres des coefficients de $f(z)$ à un rythme uniformément accéléré (§ 5). Dans le cas, par exemple, où $f(z)$ est la fonction rationnelle représentant l'ensemble de $m < 100$ premiers termes de la série de Lambert (§ 21), et en faisant

$$\alpha = 0{,}01, \qquad \beta = \sqrt{2}\ \log \operatorname{nat} 10,$$

l'intégrale $\mathcal{J}$ aura pour valeur $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ multiplié par le nombre S ayant pour partie entière zéro et dont la partie décimale s'écrit en rangeant bout à bout les groupes $G_1, \ldots, G_m$, où G_k est égal au nombre de diviseurs de k (y compris 1 et k) précédé d'autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre total de chiffres de G_k soit égal à $2k$.

23. Détermination spectrale des fonctions. — Les procédés usuels de détermination d'une fonction analytique par des *conditions discrètes* exigent généralement une *infinité* de données numériques, comme le sont, par exemple, les coefficients de la série de Taylor, de la série trigonométrique, exponentielle, etc., correspondant à la fonction.

On connaît divers autres modes de détermination d'une fonction *entière* $f(z)$ par des conditions discrètes, par exemple, au moyen des valeurs que prend $f(z)$ pour une suite de valeurs de z, avec l'adjonc-

(¹) *Voir* p. 46.

tion d'un ensemble (C) de conditions supplémentaires qualitatives concernant le mode de croissance de la fonction avec z [1].

Dans les modes actuellement connus de détermination des fonctions par de telles conditions, le nombre de données numériques n'est *limité* qu'exceptionnellement, dans des cas très particuliers où l'on connaît à l'avance la forme analytique de la fonction à un nombre limité de constantes près (par exemple, dans le cas où la fonction se réduit à un polynome algébrique, exponentiel, trigonométrique, etc.).

Or, la méthode spectrale révèle une infinité de catégories de fonctions dont la détermination se ramène *à un problème dépendant d'un nombre limité de paramètres*, à la condition d'y adjoindre un ensemble (A) de conditions *qualitatives*.

Nous allons le préciser dans ce qui suit.

Nous considérerons la fonction $f(z)$ d'une variable z comme *numériquement déterminée* si, à toute valeur *numérique* de z correspond une valeur *numérique* de $f(z)$.

Nous dirons que plusieurs fonctions analytiques $f_1, f_2, f_3, \ldots$ de la variable z *appartiennent à une même catégorie spectrale* s'il existe pour chacune d'elles une région du plan des z dans laquelle ces fonctions admettent un même $\Delta[f]$, ne différant d'une fonction f_k à une autre que par des valeurs numériques d'un certain nombre de paramètres qu'il contient. Une catégorie spectrale de fonctions se trouve ainsi déterminée par la forme de $\Delta[f]$ compatible avec elle, comme l'est une catégorie des surfaces par la forme de son ds^2.

Une catégorie spectrale (f) est à considérer comme *catégorie à m paramètres* si, en attribuant des valeurs numériques déterminées à m paramètres, indépendants entre eux, que laisse arbitraires la définition de la catégorie (f), on engendre une fonction numériquement déterminée faisant partie de la catégorie, et cela de façon que toute fonction de la catégorie puisse être engendrée de cette manière.

La méthode spectrale conduit alors aux conclusions qui suivent.

D'abord, la *catégorie* (E) de fonctions $f(z)$ développables au voisinage d'au moins un point $z = \alpha$ en série de puissances de $z - \alpha$ à coefficients *nombres entiers* est à considérer comme une *catégorie à deux paramètres :* la valeur α et un spectre S de la fonction.

---

[1] E. BOREL, *Sur l'interpolation* (*C. R. Acad. Sciences*, 1er semestre 1897, p. 673-676).

Considérons une catégorie (f) quelconque de fonctions admettant une transmutation $\Delta[f]$. La relation entre $f(z)$ et sa transmuée peut introduire un certain nombre de paramètres γ_i qui peuvent provenir : 1° des paramètres impliqués dans le $\Delta[f]$ lui-même ; 2° des constantes indéterminées qu'introduit cette relation même, par exemple par l'intégration, par des termes d'une série que laisse indéterminés une relation de récurrence, etc.

Le nombre q des paramètres γ_i varie, pour une même catégorie (f), avec le $\Delta[f]$ appliqué. Nous désignerons, comme *indice spectral* δ d'une catégorie spectrale (f) de fonctions, *le plus petit parmi les nombres* $q+2$ rattachés ainsi à cette catégorie par les divers $\Delta[f]$ compatibles avec les fonctions de la catégorie.

L'indice spectral d'une catégorie (f) indique donc le nombre de données numériques strictement nécessaires pour la détermination numérique complète d'une fonction particulière faisant partie de (f), par le procédé spectral. Ces données sont : 1° les q paramètres γ_i ; 2° les deux paramètres α et S de la catégorie (E), déterminant la transmuée de f par le $\Delta[f]$ appliqué. Et alors :

Une catégorie spectrale (f) de fonctions est à considérer comme catégorie à autant de paramètres qu'il y a d'unités dans son indice spectral.

L'indice spectral de la catégorie des fonctions développables au voisinage d'un point $z = \alpha$ en série de puissances de $x - \alpha$ à coefficients entiers ou n'ayant qu'un nombre limité de décimales est $\delta = 2$. L'arc, par exemple, d'une courbe plane est complètement déterminé comme fonction de l'abscisse, par la condition qu'il soit développable en série de puissances de x à coefficients entiers alternativement positifs et négatifs plus petits que 100, et que sa longueur entre les points $x = -0,01$ et $x = 0$ soit égale à la périphérie du cercle de rayon 1. Les données sont $\alpha = 0$, $S = 2\pi$.

Les fonctions algébriques à coefficients des $(x-\alpha)^n$ commensurables forment une catégorie spectrale à indice $\delta = 4$. Les données sont les deux paramètres γ_1 et γ_2 du

$$\Delta[f] = \gamma_1 f(\gamma_2 z),$$

compatible avec cette catégorie de fonctions, la valeur α et le spectre S de la transmuée à un rythme connu. Il en est de même de la catégorie (f) formée d'intégrales abéliennes développables au voisinage d'un point en série de puissances à coefficients commensurables.

Les fonctions ayant pour coefficients les produits de la forme $M_n Q_n$, où les M_n sont des entiers et les Q_n des nombres fractionnaires à p paramètres, forment une catégorie à indice $\delta = p + 2$.

La grandeur de l'indice spectral δ dépend essentiellement de *particularités d'ordre arithmétique* caractérisant le coefficient A_n du développement de la fonction générale de la catégorie, en série de forme déterminée au voisinage d'un point $z = \alpha$. *Ces particularités sont celles concernant la manière de transformer collectivement les coefficients de la série en nombres entiers;* cette manière se résume dans la forme d'un $\Delta[f]$ compatible avec les fonctions de la catégorie.

Il est à présumer que des recherches approfondies conduiront à des résultats intéressants sur les rapports entre les propriétés du coefficient A_n caractérisant la catégorie et la grandeur de l'indice spectral. Ainsi, la méthode de Gomes Teixeira et Harwitz [1], conduisant à une propriété arithmétique du coefficient A_n des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique d'ordre fini, permet de considérer toutes les *fonctions analytiques non hypertranscendantes*, développables au voisinage d'un point en série de puissances à coefficients *commensurables*, comme faisant partie d'une catégorie (f) à indice spectral *fini*.

Rappelons encore que toute fonction analytique peut être représentée au voisinage de tout son point ordinaire $z = \alpha$, avec une approximation donnée à l'avance, *par une fonction à indice spectral* $\delta = 2$ (§ 18).

Ces considérations font intervenir des paramètres qui paraissent être en contradiction avec la notion usuelle de paramètres variables. La catégorie (E) de fonctions développables en série de puissances à coefficients entiers apparaît, d'après les conceptions usuelles, comme dépendant d'un nombre *infini* de paramètres (coefficients mêmes de ce développement), assujettis à la seule condition d'être des nombres entiers M_k tels que $\sqrt[k]{|M_k|}$ n'augmente pas indéfiniment avec k. Par contre, dans la méthode spectrale de détermination des fonctions, ces mêmes paramètres apparaissent comme *segments d'un même nombre décimal* S, chaque segment étant composé d'un

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1885 et 1889.

groupe déterminé de ses décimales successives. Ce nombre n'est autre qu'un *spectre* de la fonction considérée ; le mode de sa *segmentation*, par lequel S fournit, à signes près, la suite des coefficients de la fonction, varie avec le rythme spectral de S.

Le nombre S joue bien le rôle de paramètre de la catégorie spectrale (E) : son changement fait passer d'une fonction particulière (E) à une autre, et toute fonction de la catégorie peut être engendrée de cette manière. Il existe même (à signes des coefficients près) une correspondance entre les fonctions (E) et le nombre S telle qu'à deux fonctions (E) distinctes correspondent deux valeurs distinctes de S et que, si à chacune des deux valeurs de S correspond une véritable fonction, les deux fonctions correspondantes sont distinctes.

La contradiction avec la conception usuelle de paramètres n'est qu'apparente : en réalité, c'est bien une *infinité* de données numériques qui est fournie par le spectre S sous l'apparence *d'un seul* nombre dont les *segments* convenablement délimités révèlent les valeurs à attribuer à une infinité de paramètres (coefficients de la série) pour satisfaire aux conditions du problème. Le fait ne diffère guère de celui qui se présente dans l'artifice de problèmes-devinettes par lequel le devin détermine *plusieurs* nombres pensés d'après *un seul* nombre qu'on lui énonce et dont les divers segments lui révèlent autant de données qu'il y a d'inconnues.

Le paramètre S condense, en réalité, un nombre limité ou illimité de paramètres en une seule suite de chiffres, et ses variations *continues*, produites par les variations *discontinues* de ses chiffres, engendrent l'infinie diversité de fonctions (E) (sans en omettre aucune), et par cela même l'infinie diversité d'autres catégories de fonctions en correspondance avec les fonctions (E).

Les spectres jettent ainsi quelque lumière sur *le rôle joué par les suites de chiffres dans la détermination des fonctions*. Ce rôle a déjà été mis en évidence par M. Borel dans ses profondes considérations sur la notion de fonction en général (¹).

24. Exemples de problèmes réductibles à la détermination spectrale des fonctions. — Soit $F(x, y, y', \ldots, y^{(p)})$ une fonction

(¹) E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions* (Note III : 2ᵉ édition 1914. *La notion de fonction en général*), p. 123-126.

réelle donnée de la variable x, d'une fonction y de x et d'un certain nombre de dérivées $y', y'', \ldots, y^{(p)}$ de y par rapport à x, tous les coefficients dans F étant numériquement donnés. Proposons-nous le problème suivant :

La valeur numérique a étant donnée, déterminer la fonction y de manière : 1° que F *soit développable, au voisinage de* $x = a$, *en série de puissances*

$$N_0 + N_1(x-a) + N_2(x-a)^2 + \ldots \tag{74}$$

à coefficients N_n *entiers positifs (non donnés), ne surpassant pas un nombre fixe* H; *2° que* $y, y', y'', \ldots, y^{(p)}$ *prennent les valeurs données* $A, A' A'', \ldots, A^{(p)}$ *pour une valeur particulière convenablement choisie de* x.

Le problème ainsi posé paraît indéterminé. Mais il est facile de voir que, généralement, il admet des solutions dépendant de $p+1$ constantes arbitraires $A, A', A'', \ldots, A^{(p)}$, en ce sens que, ces constantes étant *numériquement* précisées, le problème admet une solution numériquement déterminée ou un système bien déterminé de telles solutions sans qu'il puisse en avoir d'autres.

Désignons par h un entier positif inférieur ou égal à $\log H$ et soient $A, A', \ldots, A^{(p)}$ les valeurs numériques réelles respectives que doivent prendre les fonctions $y, y', \ldots, y^{(p)}$ pour $x = a + 10^{-h}$. La valeur correspondante

$$S = F(a + 10^{-h}, A, A', \ldots, A^{(p)}) \tag{75}$$

s'exprimera par un nombre réel S. Si $S \leqq 0$, le problème n'admet pas de solutions puisque la valeur

$$\Sigma N_n 10^{-nh}, \tag{76}$$

avec laquelle doit coïncider le nombre S, est essentiellement positive. Si $S > 0$, le problème admet des solutions qui s'obtiennent de la manière suivante :

Le nombre S étant le spectre de la fonction F à rythme uniforme $h_k = h$, compatible avec la suite des N_k, sera également le spectre de la fonction (74) à ce rythme. Le coefficient N_0 coïncidera donc avec la partie entière de S et le coefficient $N_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ coïncidera avec le groupe de chiffres significatifs de S commençant par la $[(k-1)h+1]^{\text{ième}}$ et terminée par la $kh^{\text{ième}}$ décimale de S.

La fonction (74) se trouve ainsi déterminée par le nombre S et la fonction y sera l'intégrale de l'équation différentielle

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = \Sigma N_k (x-a)^k. \tag{77}$$

prenant pour $x = a + 10^h$ la valeur A, ses dérivées $y', y'', \ldots, y^{(p-1)}$ prenant les valeurs respectives $A', A'', \ldots, A^{(p-1)}$; la valeur $A^{(p)}$ de la dérivée $y^{(p)}$ sera alors compatible avec l'équation (77) en vertu de l'équation (75).

La solution du problème, pour une valeur choisie de l'entier h, comporte ainsi $p+1$ constantes arbitraires $A, A', \ldots, A^{(p)}$. Ces constantes étant fixées, à chacun des entiers positifs $h = 1, 2, 3, \ldots$ ne surpassant pas $\log H$, correspondra une solution. *Le nombre des solutions est donc égal à la partie entière de* $\log H$.

On peut manifestement remplacer l'une quelconque des constantes A *par celle représentant le nombre* S.

Envisageons, à titre d'exemple, le problème de déterminer la courbe plane $y = f(x)$ dont la sous-normale est développable en série de puissances de x à coefficients entiers positifs ne surpassant pas un nombre fixe H donné, la sous-normale ayant en un point convenablement choisi une longueur donnée.

Désignant par h l'un quelconque parmi les entiers positifs h_k ne surpassant pas la valeur $\log H$, et par L la longueur de la sous-normale au point $x = 10^{-h}$, l'équation de la courbe est

$$y = \sqrt{2}\sqrt{C + \varphi(x)},$$

$\varphi(x)$ étant la fonction définie par la série

$$\varphi(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \ldots,$$

où λ_1 est égal à la partie entière du nombre L, et $\lambda_n (n = 2, 3, 4, \ldots)$ est égal à la fraction ayant pour numérateur le $(n-1)^{\text{ième}}$ groupe à h décimales de L, et pour dénominateur n. La constante C a pour valeur

$$C = \frac{y_0^2}{2} - \varphi(10^{-h}).$$

A chacun des entiers h_k correspond une telle solution; le nombre des solutions est donc égal à la partie entière de $\log H$.

Dans le cas, par exemple, où les coefficients de la sous-normale doivent être des entiers plus petits que 10, et sa longueur égale à celle de demi-circonférence de rayon 1, on aura

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_n = (n-1)^{\text{ième}} \text{ décimale de } \pi \text{ divisée par } n,$$

de sorte qu'on aura

$$\varphi(x) = 3x + \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + x^5 + \frac{3x^6}{2} + \ldots.$$

Les conditions du problème, tout en conservant le même caractère au point de vue de la méthode spectrale, peuvent varier à l'infini.

Ainsi, les signes des N_k peuvent varier suivant une loi donnée. Dans le cas, par exemple, où les N_k sont alternativement positifs et négatifs, le rôle du spectre S serait joué par le nombre

$$S = F(a - 10^{-h}, A, A', \ldots, A^{(p)}).$$

La fonction (74) peut être remplacée par une fonction admettant un $\Delta[f]$ donné. Ainsi, si l'on exige que cette fonction soit l'intégrale indéfinie d'une fonction développable en série de puissances de $x - a$ à coefficients entiers positifs ne surpassant pas un nombre donné H, on ramènera le problème à celui de trouver la fonction y telle que l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(p)}} y^{(p+1)}$$

soit développable en série de telle espèce. Le problème comporterait un paramètre de plus, qui est la valeur de $y^{(p+1)}$ pour $x = a + 10^{-h}$.

Le même procédé s'applique au cas où la fonction F est remplacée par une intégrale

$$\mathfrak{J}(x) = \int_{x_0}^{x} F(x, y, y', \ldots)\, dx$$

ou par une intégrale multiple portant sur F.

Envisageons, par exemple, le problème de déterminer la courbe plane $y = f(x)$ dont l'aire limitée par l'axe des x, l'arc de la courbe et les deux ordonnées extrêmes $x = 0$ et $x = x$, soit développable en série

$$N_0 + N_1 x + N_2 x^2 + \ldots$$

à coefficients entiers positifs (non donnés) ne surpassant pas H, connaissant la grandeur L de cette aire correspondant à une valeur convenablement choisie de x.

Le problème a autant de solutions qu'il y a d'unités entières dans log H. En désignant par h l'un quelconque parmi les entiers ne surpassant pas log H, et par L l'aire de la courbe correspondant à $x = 10^{-h}$, l'équation de la courbe sera

$$y = \lambda_1 + 2\lambda_2 x + 3\lambda_3 x^2 + 4\lambda_4 x^3 + \ldots,$$

où λ désigne le $n^{\text{ième}}$ groupe à h décimales du nombre L. Dans le cas, par exemple, où l'aire L est égale à celle du quadrant du cercle de rayon 1, et si les N_k doivent être des entiers plus petits que 10, λ_n sera la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre

$$\frac{\pi}{4} = 0,78539816339769830961\ldots$$

et la courbe aura pour équation

$$y = 7 + 16x + 15x^2 + 12x^3 + 45x^4 + \ldots.$$

On peut traiter de la même manière un grand nombre d'autres problèmes de cette espèce comme, par exemple, le problème suivant :

Déterminer la fonction $f(x)$ holomorphe au voisinage d'une valeur réelle donnée $x = a$, jouissant de la propriété qu'elle-même et toutes ses dérivées prennent pour $x = a$ des valeurs entières (non données) ne surpassant pas un entier fixe donné H, *avec la condition que l'intégrale définie*

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^\infty e^{-t} f(xt)\, dt$$

ait, pour une valeur convenablement choisie de x, une valeur donnée L.

Désignant par h l'entier positif du problème précédent, on aura comme solution du problème

$$f(x) = N_0 + \frac{N_1}{1}(x-a) + \frac{N_2}{1.2}(x-a)^2 + \frac{N_3}{1.2.3}(x-a)^3 + \ldots,$$

où N_0 est la partie entière du nombre L, et $N_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ la partie significative du $n^{\text{ième}}$ groupe à h décimales de ce nombre.

Nous indiquerons encore, comme exemple, une propriété arithmétique d'une classe de fonctions *entières* d'une variable, engendrées par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{80}$$

L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4t^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{81}$$

réductible à l'équation (80) par le changement $t = -\frac{1}{4y}$, admet comme intégrale la fonction $u(x, t)$ développable en série de la forme

$$u(x, t) = \Sigma a_n e^{-(x-\alpha_n)^2 t} \tag{82}$$

contenant deux suites indéfinies de constantes arbitraires

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \tag{83}$$

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots. \tag{84}$$

Pour les valeurs réelles et positives de t, et pour les α_n réels indéfiniment croissants avec n, la série (82) converge pour toute valeur réelle ou imaginaire de x et représente une fonction *entière* de x. Parmi ces fonctions entières, envisageons celles pour lesquelles les deux suites (83) et (84) sont composées de *nombres entiers positifs*, les a_n ne croissant pas plus vite que la $n^{\text{ième}}$ puissance de tout nombre fini.

Les coefficients a_n apparaissent alors comme groupes de décimales d'un seul nombre rattaché à la fonction, qu'on peut calculer au moyen de la valeur que prend la fonction pour une valeur convenablement choisie de x.

En effet, soit A un nombre réel positif tel que, pour toute valeur positive de n, on ait $a_n < A^n$, et soit N la partie entière de $\log A$.

Désignons par S la valeur numérique que prend la fonction $e^{tx^2}u(x, t)$ pour

$$x = -\frac{1}{2}, \qquad t = \frac{N}{2 \log e}$$

(la base du logarithme étant 10). On peut manifestement prendre $\alpha_n = n$ et l'on trouve que

$$(85) \qquad S = \Sigma a_n . 10^{\frac{n(n+1)}{2}N}.$$

Ceci montre que S est le spectre cannelé de la suite (83) à rythme uniformément accéléré $h_k = kN$. Partageons la suite de décimales de S en tranches successives $T_1, T_2, T_3, \ldots$ de sorte que la tranche T_n commence par la

$$\left[\frac{n(n-1)}{2} N + 1\right]^{\text{ième}}$$

et se termine par la

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} N\right]^{\text{ième}} \text{décimale de S.}$$

Le coefficient a_n est égal au nombre entier composant la tranche T_n.

Remarquons aussi que le théorème de M. Pólya (¹) sur les séries de puissances à coefficients commensurables met en évidence le caractère *hypertranscendant* d'une infinité de fonctions entières u faisant partie de la catégorie ici considérée.

Nous rappellerons encore l'intérêt que présentent les fonctions $u(x, t)$ dans les études statistiques et, en particulier, dans les recherches biométriques modernes.

25. **Spectres cannelés des singularités des fonctions analytiques.** — Étant donnée une fonction $f(z)$, il est possible de lui faire correspondre une fonction (E) contenant les éléments nécessaires et suffisants pour la détermination de certaines particularités de $f(z)$ qui représentent souvent ce qu'il importe le plus de connaître d'une fonction (singularités, zéros, maxima et minima, etc.).

Ainsi, M. Borel (²) a remarqué qu'étant donnée une fonction ayant des singularités dans un cercle de rayon inférieur à 1, on peut lui

(¹) *Loc. cit.*
(²) *Leçons sur les fonctions méromorphes*, 1903, p. 35-36.

substituer une autre fonction dont le développement en série de puissances soit à *coefficients entiers* et qui ait les mêmes singularités que la première à l'intérieur de ce cercle.

Soit, en effet, la fonction

$$f(x) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

et considérons la fonction

$$\varphi(z) = N_0 + N_1 z + N_2 z^2 + \ldots,$$

où N_k désigne la partie entière de a_n. La différence $f(x) - \varphi(x)$ est une série de puissances de x dont les modules des coefficients sont inférieurs à 1. Il en résulte que le cercle de convergence de cette série est supérieur ou égal à 1. Les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont donc mêmes singularités dans un cercle quelconque de rayon inférieur à 1.

Le changement de z en $\alpha + \beta z$, où α et β sont des constantes convenablement choisies, ramènera alors la détermination des singularités de $f(z)$ à l'intérieur d'un cercle *quelconque* ayant pour centre un point ordinaire de cette fonction, *à celle des singularités d'une fonction* (E) *dans un cercle de rayon inférieur à* 1 *ayant l'origine pour centre.*

Or, la fonction (E) admet des spectres cannelés S à rythme uniformément accéléré (et même, dans certains cas, à rythme uniforme) dont chacun, moyennant un ensemble (A) de données qualitatives, la détermine complètement. *Un tel spectre contient donc les éléments nécessaires et suffisants pour la détermination complète des singularités de $f(x)$ dans un cercle donné ayant pour centre un point ordinaire de la fonction.* Il représente ainsi un *spectre des singularités de cette fonction* et s'exprime par une intégrale définie portant sur la fonction (E) rattachée à $f(z)$ de la manière précédente; dans des cas généraux il s'exprime en termes finis au moyen de la fonction (E).

Le spectre étant donné, les singularités se détermineraient comme celles de la fonction (E) dont les coefficients N_k sont fournis par les cannelures successives du spectre.

Les zéros de $f(z)$ à l'intérieur d'un cercle C s'obtiendraient comme infinis de la fonction $\frac{1}{f}$; les coefficients b_n du développement de cette fonction sont

$$(86) \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & \dots & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Un spectre quelconque de la fonction (E), *ayant pour coefficient* N_n *la partie entière du nombre* b_n, *représente en même temps un spectre des zéros de* $f(z)$ *compris dans le cercle* C.

Le même procédé appliqué à d'autres expressions rattachées à $f(z)$, par exemple à

$$\frac{1}{f(z)-a}, \quad \frac{1}{f'(z)}, \quad \dots,$$

fournirait des spectres des valeurs de z pour lesquelles $f(z)$ prend une valeur donnée a, atteint ses maxima et minima, etc.

On pourrait aussi former des spectres des singularités en partant du fait suivant signalé également par M. Borel [1] :

Étant donné un développement *quelconque*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

on peut, en vue de la détermination des singularités de $f(x)$, lui substituer le développement

$$F(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{M_n}{10^{n^2}} z^n,$$

où M_n est la partie entière du nombre $10^{n^2} a_n$, représentant une fonction ayant mêmes singularités que $f(z)$ *dans tout le plan*.

26. Analogies spectrales. — La *méthode spectrale* consiste, comme on le voit, *à disperser* en un *spectre numérique* les inconnues primitives ou auxiliaires d'un problème, comme l'analyseur disperse, en analyse spectrale, un faisceau de rayons lumineux en un spectre lumineux. Les inconnues se trouvent dans le spectre numérique, rat-

---

[1] *Loc. cit.*, p. 36-37.

taché au problème, dispersées, séparées et déterminées comme cannelures et raies spectrales d'une manière analogue à celle par laquelle les éléments inconnus d'une substance chimique sont déterminés en analyse spectrale. La caractéristique principale d'un spectre cannelé y joue un rôle analogue à celui du faisceau lumineux émis par la substance à analyser; la génératrice spectrale joue un rôle analogue à celui du prisme analyseur.

Lorsque les inconnues primitives sont des nombres *entiers*, leur complexe se trouve *directement* analysé par la génératrice spectrale : elles sont dispersées en spectre comme le sont, par le prisme dispersif, les indices spectraux caractéristiques des éléments entremêlés dans le corps incandescent.

Lorsque les inconnues sont des nombres *non entiers*, il y a lieu de leur faire subir une *préparation préalable* avant de les faire intervenir dans la génératrice spectrale, comme l'on fait subir, dans certains cas, une modification préalable déterminée au faisceau lumineux émis par la substance à analyser, avant de le faire passer à travers le prisme dispersif (l'interposition par exemple, sur le trajet de la lumière à analyser, d'un ballon de verre rempli de vapeurs déterminées). Cette préparation consisterait, ici, en une transmutation $\Delta[f]$ compatible avec la suite des inconnues.

L'analogie se poursuit encore plus loin si l'on remarque que la dispersion d'un spectre cannelé varie avec la caractéristique du rythme spectral que le calculateur est maître de modifier pour une même caractéristique spectrale principale. C'est d'une manière analogue que la dispersion d'un spectre lumineux change avec les conditions de l'expérience que l'expérimentateur peut modifier pour une même substance à analyser (changements, par exemple, de température, de pression, de raréfaction). La dispersion uniforme de spectres numériques trouve son analogue dans une foule de cas qu'offre l'analyse spectrale chimique (cas, par exemple, de certaines parties du spectre du soufre engendré au moyen du tube à gaines); il en est de même de dispersion uniformément croissante (cas, par exemple, du spectre ordinaire du soufre, où les distances des maxima vont en croissant uniformément vers le violet).

Les moyens de changer la dispersion des spectres numériques cannelés ne sont pas spécifiques à la suite particulière à laquelle le spectre se rattache. En changeant les éléments influant sur la caractéristique de rythme, on modifie la dispersion du spectre d'une suite quelconque, et dans un même sens. De même, le changement de la température ou de la pression modifie la dispersion d'un spectre lumineux dans un même sens pour divers rayons analysés.

Comme il a été indiqué au paragraphe 17, il existe des transmutations $\Delta[f]$ lesquelles, appliquées à une fonction $f(z)$ arbitraire, la transmuent en une fonction $F(z)$ indépendante de $f(z)$ qui n'y laisse aucune trace spécifique et la réduit même à zéro. Le spectre rattaché à un tel $\Delta[f]$ peut être *continu*, composé de seuls zéros (sans raies), quoique une autre transmutation $\Delta[f]$ produira un spectre *discontinu*, à raies. Le fait a son analogue dans l'analyse spectrale (lorsque, par exemple, l'hydrogène, l'oxyde de carbone, l'hydrogène sulfuré, brûlent dans l'oxygène, le spectre de la flamme analysé par le prisme ne présente aucune raie, quoique, dans d'autres circonstances, le spectre des mêmes gaz est discontinu).

De telles analogies, ainsi qu'une multitude d'autres offertes par les spectres mathématiques et les spectres lumineux, justifient, croyons-nous, le nom que nous donnons au procédé de calcul exposé dans ces *Leçons*.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Spectres des ensembles des nombres.

CHAPITRE I. — *Spectres des ensembles dénombrables.*

CHAPITRE II. — *Spectres cannelés des suites des nombres entiers.*

CHAPITRE III. — *Spectres cannelés des suites des nombres transmutables en suites d'entiers positifs.*

DEUXIÈME PARTIE.

Spectres des fonctions.

CHAPITRE IV. — *Procédé général de formation des spectres des fonctions.*

CHAPITRE V. — *Spectres cannelés des fonctions.*

TROISIÈME PARTIE

La méthode spectrale.

83551-28 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.