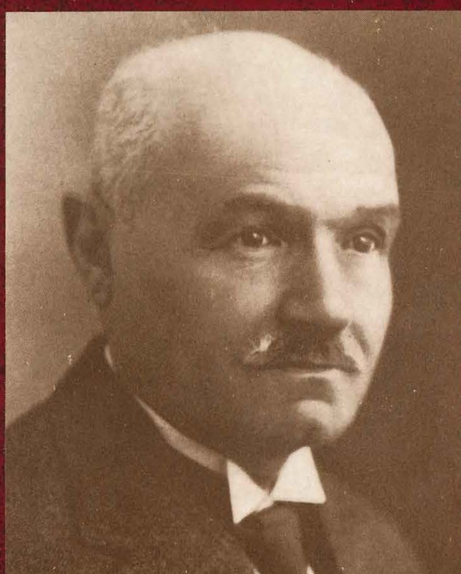
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ
ДРУГИ ДЕО



МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

САБРАНА ДЕЛА

САБРАНА ДЕЛА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Први део
2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Други део
3. МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
4. АЛГЕБРА
5. МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ
6. МАТЕМАТИЧКА ФЕНОМЕНОЛОГИЈА
7. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧКЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЈЕ
8. ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА – ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ
9. ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ – ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА
10. ЧЛАНЦИ – СТУДИЈЕ
11. ПУТОПИСИ – Први део
12. ПУТОПИСИ – Други део
13. МЕТАФОРЕ И АЛЕГОРИЈЕ
14. РИБАРСТВО
15. МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ – ПИСМА, БИБЛИОГРАФИЈА И ЛЕТОПИС

Завод за уџбенике и наставна средства у Београду објављује *Сабрана дела Михаила Петровића* у сарадњи са Математичким факултетом Универзитета у Београду и Друштвом математичара Србије.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА

КЊИГА 2

Уредник

ЖАРКО ЈОВИЋ

Главни и одговорни уредник

др ПЕТАР ПИЈАНОВИЋ

За издавача

проф. др ДОБРОСАВ БЈЕЛЕТИЋ, директор

ISBN 86-17-06501-X

Мих. Петровић

Професор

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

Београд, 24. април 1868 – Београд, 8. јун 1943.

Професоров лик из времена семестралних предавања на Faculté des Sciences у Паризу школске 1927–28. године

(аутор фотографије непознат)

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ
Други део

Приредили

др Војислав Марић, проф. унив. и дописни члан САНУ

др Љубомир Протић, проф. унив.

ЗАВОД ЗА УЏБЕНИКЕ
И НАСТАВНА СРЕДСТВА
БЕОГРАД
1999

Прве интеграле са ограничењима и *Михаило Петровић о својим резултатима* превео је са француског језика др **ДУШАН АДАМОВИЋ**, проф. унив.
Остале радове у књизи превела је са француског језика
мр НАДА МИЛОШЕВИЋ, асистент унив.

НАУЧНЕ РАСПРАВЕ

О РИКАТИЈЕВОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ И ЊЕНИМ ПРИМЕНАМА У ХЕМИЈИ*

Овде ћу показати нека, за примену битна својства једначине облика

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3,$$

коју ћу писати у облику

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y - f_1)(y - f_2), \tag{1}$$

где су φ, f_1, f_2 функције од x које испуњавају ове услове:

1) φ је функција од x која је позитивна у интервалу од $x = 0$ до $x = \alpha$;

2) f_1 и f_2 су позитивне, нерастуће функције у том интервалу, такве да криве

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x),$$

ако пролазе кроз координатни почетак, нису истовремено тангентне на x-осу.

Претпоставићемо још, на пример, да је у том интервалу $f_1 < f_2$.

Посматрајмо интеграл $y(x)$ једначине (1) који се анулира за $x = 0$. Он ће имати ове особине:

I. *За вредности* x *из интервала* $(0, \alpha)$ *интеграл је позитиван и стално расте, али остаје мањи од* $f_1(x)$.

Наиме, y не може почети да опада у том интервалу јер би тада било негативно, а самим тим би разлике

---

* Наслов оригинала *Sur l'équation différentialle de Riccati et ses applications chimiques*, Věstnik Král Česke společnosti nauk, Praha, 1896, Třida math. přirodovědecká, t. XXXIX, pp. 1–25. Саопштено у Чешкој академији наука 20. новембра 1896.

$$y - f_1, \quad y - f_2$$

биле негативне, а извод $\dfrac{dy}{dx}$ позитиван.

Ако се ниједна од функција f_1 и f_2 не анулира за $x = 0$, за ту вредност x и за $y = 0$ било би

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \varphi(0) f_1(0) f_2(0).$$

Како је та вредност позитивна, интеграл y, који се анулира за $x = 0$, расте почев од $x = 0$, те према томе остаје позитиван. Све док је $y < f_1$, интеграл стално расте јер је истовремено $y < f_2$, а извод y' је позитиван. Међутим, растући, он не може да пређе, а ни да достигне одговарајућу вредност функције $f_1(x)$ јер, чим би прешао вредност $f_1(x)$, морао би да опада, па би извод y' био негативан јер је $y - f_1 > 0$, $y - f_2 < 0$. Али, чим би почео да опада, спустио би се испод $f_1(x)$, па према томе, будући да би y' постало позитивно, морао би поново да расте, што доказује тврдњу.

Ако се $f_1(x)$ анулира за $x = 0$, уз $f_2(x) \neq 0$, y ће почети да расте почев од $x = 0$, али растући, остаће мање од $f_1(x)$ јер би иначе за довољно мале вредности x било

$$y - f_1 > 0, \quad y - f_2 < 0,$$

па би извод y' био негативан и интеграл y би опадао, што није могуће. Све док је $y < f_1$, y стално расте. Међутим, можемо се поново уверити да y не може достићи вредност $f_1(x)$ у интервалу $(0, \alpha)$. Он ће, дакле, у том интервалу стално расти и биће мањи од $f_1(x)$.

Приметимо да ако крива

$$y = f_1(x)$$

није тангентна на x-осу у координатном почетку, интегрална крива има *минимум* у координатном почетку јер се диференцирањем једначине (1) за $x = 0$ налази

$$y_0 = 0, \quad y_0' = 0, \quad y_0'' = f_1'(0) \cdot f_2(0),$$

па је, према томе,

$$y_0'' > 0.$$

Када би, насупрот томе, крива

$$y = f_1(x)$$

била тангентна у координатном почетку, како је додир једнострук, координатни почетак би био *превојна тачка* интегралне криве јер би тада, диференцирањем једначине (1), било

$$y_0 = 0, \quad y_0' = 0, \quad y_0'' = 0, \quad y_0''' = f_1'(0) \cdot f_2(0).$$

Напослетку, ако се обе функције f_1 и f_2 истовремено анулирају за $x = 0$, а крива

$$y = f_2(x)$$

није тангентна на x-осу у координатном почетку, према једначини (1), за $x = 0$ налази се да је $y_0' = 0$, што показује да интегрална крива додирује x-осу у координатном почетку. Како је, с друге стране, $f_2'(0) > 0$, налази се да је

$$f_2'(0) - y_0' > 0$$

или још

$$\frac{d}{dx}(f_2 - y)_{x=0} > 0.$$

Разлика $f_2 - y$, дакле, расте почев од $x = 0$ и, како је за ту вредност x једнака нули, за позитивне, довољно мале вредности x стално ће бити $y - f_2 < 0$. Из тога се закључује да је разлика $y - f_1$ такође негативна. Да није тако, извод y' би, према једначини (1), био негативан, па би y опадало. Доказивање се тада довршава као и малочас.

Приметимо такође да је, у последњем случају, ако ниједна од кривих

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x)$$

не додирује x-осу у координатном почетку, та тачка је *превојна тачка* интеграла y јер је

$$y_0 = 0, \quad y_0' = 0, \quad y_0'' = 0, \quad y''' = 2f_1'(0) \cdot f_2'(0),$$

па је стога

$$y_0''' > 0.$$

Ако је, напротив, крива $y = f_1(x)$ тангентна на x-осу у координатном почетку, како је додир непарног реда, интегрална крива y има *минимум*.

Ако се интервал $(0, \alpha)$ *налази између* $\mathrm{x} = 0$ *и* $\mathrm{x} = \infty$ *и ако функција* $\mathrm{f}_1(\mathrm{x})$ *асимптотски тежи коначној граници* a, *интеграл* y *ће такође асимптотски тежити ка* a.

Наиме, како y не може да пређе вредност a и не опада, извод y' тежи нули када x неограничено расте, што према једначини (1) показује, да y асимптотски тежи граничној вредности a. То је, уосталом, специјални случај једне познате Поенкареове теореме о граничној вредности, којој тежи општи интеграл Рикатијеве једначине када независна променљива неограничено расте за позитивне вредности.

II. *Посматрајмо две Рикатијеве једначине*

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y - f_1)(y - f_2) \tag{2}$$

и

$$\frac{dY}{dx} = \varphi(Y - F_1)(Y - f_1), \tag{3}$$

које се разликују само у функцији f_1, *за коју се претпоставља да задовољава горње услове. Ако је у интервалу* $(0, \alpha)$ *стално*

$$f_1(x) < F_1(x),$$

онда ће у том интервалу бити и

$$y < Y,$$

где су y и Y интеграли једначина (2) и (3), који се анулирају за $x = 0$.

С једне стране, почев од $x = 0$ не може бити $Y < y$ јер, када би за вредност која је довољно близу $x = 0$ било $Y - y < 0$, за ту вредност би истовремено било и

$$F_1 > f_1, \quad y > Y,$$

одакле је

$$F_1 - Y > f_1 - y, \tag{4}$$

као и

$$f_2 - Y > f_2 - y.$$

Како су, према пропозицији I, све четири разлике

$$\begin{matrix} F_1 - Y, & f_2 - Y, \\ f_1 - y, & f_2 - y \end{matrix}$$

позитивне, из једначине (1) и из неједнакости (4) и (5) закључило би се да је

$$\frac{dY}{dx} > \frac{dy}{dx},$$

или да је

$$\frac{d}{dx}(Y - y) > 0,$$

тј. да разлика $Y-y$ расте почев од те вредности x. А како је за $x=0$ та разлика једнака нули, почев од те вредности, било би $Y>y$, што је у контрадикцији са исказаном претпоставком.

С друге стране, да би разлика $Y-y$, која је била позитивна, могла да постане негативна почев од вредности $x=b$ из интервала $(0,\alpha)$, треба да се анулира за $x=b$. Како би се на основу претходног резоновања нашло да, почев од $x=b$ разлика $Y-y$ расте, контрадикција је очевидна, што доказује пропозицију.

III. *Ако се посматрају две једначине*

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y-f_1)(y-f_2),$$
$$\frac{dZ}{dx}=\varphi(Z-f_1)(Z-F_2),$$

(где f_1, f_2, F_2 задовољавају наведене услове) *и ако је у интервалу* $(0,\alpha)$ *стално*

$$f_2(x)<F_2(x),$$

биће стално и

$$y<Z$$

(где су y и Z интеграли који се анулирају за $x=0$).

Доказивање би очигледно било исто као и за пропозицију II.

Једноставне напомене из пропозиција I, II и III омогућавају да се формулише више теорема које прецизирају доње и горње границе између којих ће се стално налазити вредност посматраног интеграла y у интервалу $(0,\alpha)$. Тако се може створити представа о току интегралне криве и приближно одредити.

То има неколико последица:

Нека су, као прво,

$$\frac{dY_1}{dx}=\varphi(Y_1-F_1)(Y_1-F_2) \tag{6}$$

и

$$\frac{dY_2}{dx}=\varphi(Y_2-\Phi_1)(Y_2-\Phi_2) \tag{7}$$

две једначине које се могу интегрисати и такве да је у интервалу $(0,\alpha)$ стално

$$F_1(x)\le f_1(x), \qquad F_2(x)\le f_2(x),$$
$$\Phi_1(x)\ge f_1(x), \qquad \Phi_2(x)\ge f_2(x),$$

где су F_1, F_2, Φ_1, Φ_2 позитивне и неопадајуће функције у интервалу $(0, \alpha)$.

У том интервалу тада ће стално бити

$$Y_1 < y < Y_2,$$

где Y_1, Y_2, y означавају интеграле од (6), (7) и (1), који се анулирају за $x = 0$.

Друга последица, која често има практичан значај, јесте ова.
Нека су $\psi(x)$ и $\chi(x)$ две позитивне, неопадајуће функције у интервалу $(0, \alpha)$, које се анулирају за $x = 0$, такве да је у том интервалу

$$\psi(x) < f_2(x)$$
$$\chi(x) < f_2(x)$$

и да су две функције

$$\psi - \frac{\psi'}{\varphi(\psi - f_2)}$$

и

$$\chi - \frac{\chi'}{\varphi(\chi - f_2)}$$

такође позитивне, неопадајуће и да задовољавају услов

$$\psi - \frac{\psi'}{\varphi(\psi - f_2)} \leq f_1$$
$$\chi - \frac{\chi'}{\varphi(\chi - f_2)} \geq f_1.$$

Тада ће у интервалу $(0, \alpha)$ *бити*

$$\psi(x) < y < \chi(x).$$

Наиме, ако се стави да је

$$\psi - \frac{\psi'}{\varphi(\psi - f_2)} = F_1$$
$$\chi - \frac{\chi'}{\varphi(\chi - f_2)} = F_2,$$

ψ и χ су интеграли једначина

$$\frac{d\psi}{dx} = \varphi(\psi - F_1)(\psi - f_2),$$
$$\frac{d\chi}{dx} = \varphi(\chi - \Phi_1)(\chi - f_2),$$

који се анулирају за $x = 0$. Сада је довољно применити горње пропозиције.

Из тога следе још неке последице.

Наиме, нека је ρ неки параметар, а φ и f две произвољне функције x. Краткоће ради, ставимо још да је

$$\Theta(x, f, \rho) = \rho\left[1 - \frac{e^{\int_0^x \varphi(\rho - f)\,dx}}{1 + \rho\int_0^x \varphi e^{\int_0^x \varphi(\rho - f)\,dx}\,dx}\right].$$

Тада се добија следећи резултат.

Ако се са r_1 *и* ρ_1 *обележе најмања и највећа вредност које узима* $f_1(x)$ *у интервалу* $(0, \alpha)$, *са* r_2, ρ_2 *аналогне вредности* $f_2(x)$, *а са* y *интеграл једначине*

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y - f_1)(y - f_2)$$

који се анулира за $x = 0$, *онда је у интервалу* $(0, \alpha)$ *стално*

$$\begin{aligned} \Theta(x, f_2, r_1) < y < \Theta(x, f_2, \rho_1) \\ \Theta(x, f_1, r_2) < y < \Theta(x, f_1, \rho_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Наиме, две функције

$$\psi = \Theta(x, f_2, r_1)$$
$$\chi = \Theta(x, f_2, \rho_1)$$

су интеграли једначина

$$\frac{d\psi}{dx} = \varphi(\psi - r_1)(\psi - f_2)$$
$$\frac{d\chi}{dx} = \varphi(\chi - \rho_1)(\chi - f_2)$$

које се анулирају за $x = 0$. То се види ако се, на пример, стави

$$z = \psi - r_1.$$

Једначина ће се тако свести на облик

$$\frac{dz}{dx} = \varphi z^2 + \Phi z$$

и интегрисаће се тако да буде $z = -r_1$ за $x = 0$. Поред тога, према пропозицији I, функције ψ и χ су позитивне и расту у интервалу $(0, \alpha)$ и стално остају мање од f_2. Из једнакости

$$\psi - \frac{\psi'}{\varphi(\psi - f_2)} = r_1,$$
$$\chi - \frac{\chi'}{\varphi(\chi - f_2)} = \rho_1,$$

види се да ће се, замењујући r_1 и ρ_1 са f_1, добити

$$\psi - \frac{\psi'}{\varphi(\psi - f_2)} < f_1, \tag{9}$$
$$\chi - \frac{\chi'}{\varphi(\chi - f_2)} > f_1.$$

Тада ће, према једној од горњих пропозиција, бити

$$\psi < y < \chi,$$

што доказује неједнакост (8). На исти начин се доказује и неједнакост (9).

Да бисмо показали другу примену претходних напомена, претпоставимо сада да је коефицијент $\varphi(x)$ једнак јединици и да су конструисане криве

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x).$$

Нека су

$$(\Delta_1) \qquad y = a_1 + b_1 x, \quad y = a_2 + b_2 x$$

(где је, на пример, $a_1 < a_2$) једначине двеју правих чији су угаони коефицијенти и ординате позитивни у координатном почетку и између себе садрже део криве $y = f_1(x)$ у интервалу $(0, \alpha)$. Нека су, затим,

$$(\Delta_2) \qquad y = p_1 + b_1 x, \quad y = p_2 + b_2 x$$

једначине других двеју правих које су паралелне са прве две праве и нека је између њих садржан део криве $y = f_2(x)$ у интервалу $(0, \alpha)$.

Краткоће ради, ставимо

$$\lambda(x,a,b,p) = a + bx + \frac{\alpha(a+\beta) - \beta(a+\alpha)e^{\frac{x}{\alpha-\beta}}}{a+\beta+(a+\alpha)e^{\frac{x}{\alpha-\beta}}},$$

где су α и β корени једначине другог степена

$$r^2 + (a-p)r - b = 0.$$

Тада се добија следећи резултат.

Ако се са у *обележи интеграл од* (1), *који се анулира за* $x = 0$, *у интервалу* $(0,\alpha)$ *је стално*

$$\lambda(x,a_1,b_1,p_1) < y < \lambda(x,a_2,b_2,p_2).$$

Наиме, ако се посматрају две једначине

$$\frac{dY}{dx} = (Y - a_1 - b_1x)(Y - p_1 - b_1x) \tag{10}$$

$$\frac{dZ}{dx} = (Z - a_2 - b_2x)(Z - p_2 - b_2x) \tag{11}$$

како су четири функције

$$\begin{array}{ll} a_1 + b_1x, & p_1 + b_1x, \\ a_2 + b_2x, & p_2 + b_2x \end{array}$$

позитивне и расту у интервалу $(0,\alpha)$ и како је, с друге стране, према дефиницији тих функција

$$\begin{aligned} a_1 + b_1x &< f_1(x), \\ p_1 + b_1x &< f_2(x), \\ a_2 + b_2x &> f_1(x), \\ p_2 + b_2x &> f_2(x), \end{aligned}$$

у интервалу $(0,\alpha)$ је, према наведеним пропозицијама, стално

$$Y < y < Z,$$

где Y и Z означавају интеграле од (10), односно (11), који се анулирају за $x = 0$.

Међутим, једначине (10) и (11) се интегришу помоћу функција $\lambda(x,a,b,p)$. Наиме, ако се стави да је

$$Y = a_1 + b_1x + u(x),$$

и ће бити интеграл једначине

$$\frac{du}{dx} = u^2 + (a_1 - p_1)u + b$$

који узима вредност $-a_1$ за $x = 0$, што даје

$$u(x) = \frac{\alpha_1(a_1 + \beta_1) - \beta_1(a_1 + \alpha_1)e^{\frac{x}{\alpha_1 - \beta_1}}}{a_1 + \beta_1 + (a_1 + \alpha_2)\rho^{\frac{x}{\alpha_1 - \beta_1}}},$$

где су α_1 и β_1 корени једначине другог степена

$$r^2 + (a_1 - p_1)r - b_1 = 0.$$

Дакле, биће

$$Y = \lambda(x, a_1, b_1, p_1).$$

На исти начин налази се и

$$Z = \lambda(x, a_2, b_2, p_2),$$

што доказује тврдњу.

Додајмо да ће растојање између горње и доње границе, добијене помоћу функција λ, бити утолико мање уколико је мања разлика између ордината кривих

$$y = f_1(x)$$

и

$$y = f_2(x)$$

и правих (Δ_1), односно (Δ_2), које их ограничавају са доње и горње стране. Избор таквих правих зависи од случаја до случаја. Најчешће за две од тих правих треба узети тангенте на криве f_1 и f_2.

Применимо то, на пример, на једначину

$$\frac{dy}{dx} = (y + a + bx)(y + c + gx),$$

где су a, b, c, g негативне константе, а поред тога је $a < c$, $b < g$.

Овде је

$$f_1(x) = -a - bx, \quad f_2(x) = -c - gx.$$

Да бисмо применили последњи резултат, за праве (Δ_1) можемо узети праве

$$y = -a - gx, \quad y = -a - bx,$$

а за (Δ_2) праве

$$y = -c - gx, \quad y = -c - bx,$$

па се налази да је интеграл y, који се анулира за $x = 0$, садржан између граница

$$\lambda(x, -a, -b, -c)$$

и

$$\lambda(x, -a, -g, -c)$$

где је функција λ дефинисана као и малочас. Takoђе, може се додати да ће, како функција λ непрекидно расте када $-b$ расте (то се, на пример, види ако се примени пропозиција I) бити

$$y = \lambda(x, -a, -g, -\Theta h, -c)$$

где је Θ неки број између 0 и 1, и

$$h = b - g.$$

Наведимо трећу примену изложених принципа.

Нека је

$$u(x, \rho, m, C)$$

општи интеграл (C је константа интеграције) Рикатијеве једначине

$$\frac{du}{dx} = u^2 + \rho x^m$$

која се изражава Бесел-Фуријеовим трансцендентама.

Изаберимо пет константи

$$a_1, b_1, k_1, h_1, m_1$$

таквих да је

$$(a_1 - b_1)^2 + 4k_1 = 0$$

и да је у интервалу $(0, \alpha)$ стално

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} f_1(x) &> a_1 + k_1 x + h_1 x^{m_1} \\ f_2(x) &> b_1 + k_1 x + h_1 x^{m_1}. \end{aligned}$$

Најзад, изаберимо других пет константи,

$$a_2, b_2, k_2, h_2, m_2$$

таквих да је

$$(a_2 - b_2)^2 + 4k_2 = 0$$

и да је у интервалу

(B)
$$f_1(x) < a_2 + k_2 x + h_2 x^{m_2}$$
$$f_2(x) < b_2 + k_2 x + h_2 x^{m_2}.$$

Краткоће ради, ставимо

$$\chi(x, a, b, k, h, m) = \frac{a+b}{2} + kx + hx^m + u(x, -mh, m-1, C),$$

где је константа C одређена тако да је

$$u(0, -mh, m-1, C) = -\frac{a+b}{2}.$$

Тада се добија следећи резултат: *у интервалу* $(0, \alpha)$ *стално ће бити*

$$\chi(x, a_1, b_1, k_1, h_1, m_1) < y < \chi(x, a_2, b_2, k_2, h_2, m_2).$$

Наиме, ако се стави

$$a_1 + k_1 x + h_1 x^{m_1} = F_1(x)$$
$$b_1 + k_1 x + h_1 x^{m_1} = F_2(x)$$
$$a_2 + k_2 x + h_2 x^{m_2} = \Phi_1(x)$$
$$b_2 + k_2 x + h_2 x^{m_2} = \Phi_2(x)$$

и ако се посматрају две једначине

$$\frac{dY_1}{dx} = (Y_1 - F_1)(Y_1 - F_2)$$
$$\frac{dY_2}{dx} = (Y_2 - \Phi_1)(Y_2 - \Phi_2),$$

стављајући

(12) $$Y_1 = a_1 + k_1 x + h_1 x^{m_1} + Z_1$$

(13) $$Y_2 = a_2 + k_2 x + h_2 x^{m_2} + Z_2,$$

Z_1 и Z_2 биће интеграли од

$$\frac{dZ_1}{dx} = Z_1(Z_1 + a_1 - b_1) - k_1 - m_1 h_1 x^{m_1 - 1}$$
$$\frac{dZ_2}{dx} = Z_2(Z_2 + a_2 - b_2) - k_2 - m_2 h_2 x^{m_2 - 1}.$$

Ако се још стави

$$Z_1 = u_1 - \frac{a_1 - b_1}{2} \tag{14}$$

$$Z_2 = u_2 - \frac{a_2 - b_2}{2}, \tag{15}$$

када се узму у обзир једнакости

$$4k_1 + (a_1 - b_1)^2 = 0$$
$$4k_2 + (a_2 - b_2)^2 = 0,$$

види се да ће u_1 и u_2 бити интеграли једначина

$$\frac{du_1}{dx} = u_1^2 - m_1 h_1 x^{m_1 - 1}$$

и

$$\frac{du_2}{dx} = u_2^2 - m_2 h_2 x^{m_2 - 1},$$

чији су општи интеграли

$$u_1 = u(x, -m_1 h_1, m_1 - 1, C_1)$$
$$u_2 = u(x, -m_2 h_2, m_2 - 1, C_2),$$

где су C_1 и C_2 константе интеграције.

Ако се то замени у једначинама (14) и (15), а затим у једначинама (12) и (13), налази се да је

$$Y_1 = \chi(x, a_1, b_1, k_1, h_1, m_1)$$
$$Y_2 = \chi(x, a_2, b_2, k_2, h_2, m_2),$$

па се интеграли, који се анулирају за $x = 0$, добијају одређивањем константи C_1 и C_2, тако да буде

$$u(0, -m_1 h_1, m_1 - 1, C_1) = -\frac{a_1 + b_1}{2}$$
$$u(0, -m_2 h_2, m_2 - 1, C_2) = -\frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Како је, на основу неједнакости (A) и ($Б$),

$$F_1(x) < f_1(x)$$
$$F_2(x) < f_2(x)$$
$$\Phi_1(x) > f_1(x)$$
$$\Phi_2(x) > f_2(x),$$

према горњим пропозицијама биће

$$Y_1 < y < Y_2,$$

што доказује тврдњу. Ако се m_1 и m_2 изаберу тако да буду облика

$$m_1 = \frac{4n_1}{2n_1 \pm 1}, \quad m_2 = \frac{4n_2}{2n_2 \pm 1},$$

где су n_1 и n_2 позитивни цели бројеви, добиће се границе између којих y варира, а које су изражене алгебарским, логаритамским и кружним функцијама. У осталим случајевима те границе ће бити изражене Бесел-Фуријеовим трансцендентама.

У општем случају, ако се $f_1(x)$ и $f_2(x)$ замене другим функцијама које су у интервалу $(0, \alpha)$ мање и веће од оних које фигурирају у датој једначини и ако се те функције изаберу тако да се добијене једначине могу интегрисати, добиће се границе између којих варира посматрани интеграл. Растојање између тих граница биће мање што је мања разлика између функција $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и нових функција. Избор тих функција зависиће од посебних случајева које треба испитати.

Напоменимо још да пропозиције аналогне претходним пропозицијама важе и за интеграле који се анулирају за $x = 0$ општијих једначина

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(f_1 - y)(f_2 - y)\ldots(f_n - y),$$

где су f_i функције од x, које су у интервалу $(0, \alpha)$ позитивне и не опадају, а φ је функција од x која је у том интервалу позитивна. На исти начин као и малочас доказује се да:

1) за вредности x из интервала $(0, \alpha)$, интеграл је позитиван и расте, али остаје мањи од најмање међу функцијама $f_i(t)$ у том интервалу.

2) ако се ма која од функција замени већом функцијом, интеграл y ће се повећати.

Те напомене, као и оне малопређашње, омогућавају да се искаже више пропозиција које прецизирају границе између којих интеграл варира када x варира од 0 до α. На томе се нећу задржавати.

*

Диференцијалне једначине, о којима је било речи, непосредно се примењују у хемијској динамици. Ову грану механике одликује променљивост маса: у сваком тренутку нека количина дате материје настаје или се утроши кроз хемијску реакцију, хемијска маса те материје временом се увећава или смањује по неком закону. Управо настојећи да пронађемо тај закон у неким општим случајевима, срећемо се са једначинама које смо разматрали.

Посматрајмо *нормалну* хемијску реакцију, која не изазива секундарне реакције и која се одвија између n течности, према хемијској једначини

$$(16) \qquad m_1A_1 + m_2A_2 + \ldots + m_nA_n = p_1B_1 + p_2B_2 + \ldots + p_kB_k,$$

где A_i означавају активне материје, а B_i обележавају продукте реакције.

У сваком тренутку створиће се нека количина сваког од продуката B_i; промена те количине у времену дефинисана је законом који би се, према једној фундаменталној теореми из хемијске динамике, добио интеграцијом диференцијалних једначина

$$(17) \qquad \frac{dy_i}{dt} = C_i\omega_1\omega_2\ldots\omega_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

где y_i означава количину ма ког од продуката B_i, која се током реакције ствара у временском интервалу од $t = 0$ до $t = t$, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ су количине активне материје A_i које нису утрошене у посматраном тренутку t, C_i је коефицијент који варира са посматраном реакцијом и зависи од физичких услова (нпр. од температуре) у којима се она одвија. Ти услови могу да буду и стални за дату реакцију.

Количине ω_i могу да варирају у времену не само зато што се активне материје A_i у току саме реакције стално троше (то су једине до сада разматране промене у проблемима те врсте), већ узроци промена могу да буду и спољашњи, независни од оних изазваних хемијском реакцијом. Претпоставимо, на пример, да према познатим законима различите течности A_i утичу у суд у коме се одвија посматрана реакција, и то тако да су у сваком тренутку познате количине течности A_i које су ушле у суд од почетка реакције до посматраног тренутка. Оглед се може извршити тако да више течности $A_1, A_2, \ldots$ излази према датим законима из судова $V_1, V_2, \ldots$ и улази у суд V, где се одвија реакција.

Нека су

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

првобитне количине течности A_i, које се налазе у суду V у тренутку када је реакција почела,

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$$

количине тих течности које су ушле у суд V од почетка реакције до посматраног тренутка t и

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

количине тих течности утрошене у реакцији у том истом временском интервалу.

Тада се добија

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1 + z_1 - x_1 \\ \omega_2 &= a_2 + z_2 - x_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_n &= a_n + z_n - x_n . \end{aligned}$$

Количине $z_1, z_2, \ldots, z_n$ су функције од t, које ће бити познате ако се познају закони о истицању течности A_i из судова V_i; то ће бити позитивне функције које се анулирају за $t = 0$.

Ако у општем случају ставимо да је

$$a_i + z_i = f_i(t); \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

једначине (17) постају

$$\text{(18)} \qquad \frac{dy_i}{dt} = C_i \left[f_1(t) - z_1\right]\left[f_2(t) - x_2\right] \ldots \left[f_n(t) - x_n\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Али, количине x_i нису међусобно независне; сама природа хемијских реакција је таква да су утрошене количине материје A_i у сваком тренутку међусобно пропорционалне, па је

$$\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \ldots = \frac{x_n}{m_n},$$

где m_i означава фиксне бројеве који се одређују преко хемијске једначине (16) посматране реакције.

Из тога се изводи

$$\text{(19)} \qquad x_i = \frac{m_i}{m_i} x_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

С друге стране, у сваком тренутку је и ма која од количина y_i материје B_i, настале током реакције, пропорционална са количином x_1 материје A_1, која се утроши у посматраном временском интервалу.

Дакле, ако је

$$\text{(20)} \qquad y_i = \lambda_i x_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

$$\frac{m_2 m_3 \ldots m_n}{\lambda_i m_1^{n-1}} C_i = K_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

(21) $$\frac{m_i}{m_j} f_j(t) = \varphi_j(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

једначине (18) своде се на

$$\frac{dx_1}{dt} = K_i \left[\varphi_1(t) - x_1\right]\left[\varphi_2(t) - x_1\right] \ldots \left[\varphi_n(t) - x_1\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

одакле се закључује де је

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_k.$$

Довољно је, дакле, да се интегрише једначина

(22) $$\frac{dx}{dt} = C\,(\varphi_1 - x)(\varphi_2 - x) \ldots (\varphi_n - x).$$

Ако је познат њен интеграл $x(t)$ који одговара $C = K_1$ и који се анулира за $t = 0$, и ако се стави

$$x_1 = x(t),$$

преко формула (19) и (20) могу се израчунати све количине x_i и y_i у зависности од t.

Проблем тражења закона у питању тако ће у потпуности бити решен.

Функције $\varphi_i(t)$ се одређују познатим методама хидродинамике. Претпоставимо, на пример, да течност A_i истиче кроз један отвор, који се налази на дну вазе V_1, под константним спољним притиском, и нека су

- u – промењљива висина горњег нивоа течности, која се рачуна од равни контракције;
- h – висина у тренутку када истицање започне;
- $\Phi(u)$ – површина горње површи течности, која ће бити функција од u, која зависи од облика суда V_1;
- Φ – површина отвора кроз који протиче течност;
- μ – коефицијент контракције.

Између висине u и одговарајућег времена t постоји релација

$$t = \frac{1}{\mu\Omega\sqrt{2g}} \int_u^h \frac{\Phi(u)}{\sqrt{u}}\, du.$$

Претпоставимо да је та једначина решена по u и нека је

$$u = \psi(t)$$

Количина течности која је протекла у времену t биће

$$z_1 = \mu\Omega\sqrt{2g}\int_0^t \sqrt{\psi(t)}dt,$$

а одговарајућа функција $\varphi_1(t)$ биће

$$\varphi_1(t) = a_1 + z_1.$$

Све функције $\varphi_i(t)$ биће одређене на тај начин и проблем ће се свести на интеграцију диференцијалне једначине (22), где су функције φ_i позитивне и не опадају у интервалу од $t = 0$ до $t = \infty$, при чему интеграл мора да се анулира за $t = 0$.

У специјалном случају тзв. *бимолекуларне* реакције, где број активних материја између којих се одвија реакција износи два, проблем одређивања закона по којем количине продуката реакције варирају у времену своди се, дакле, на интеграцију Рикатијеве једначине

$$\frac{dx}{dt} = C(\chi - \varphi_1)(\chi - \varphi_2),$$

или, под претпоставком да се реакција одвија на сталној температури и ако се стави

$$\tau = Ct,$$

на једначину

$$\frac{dx}{d\tau} = (x - \varphi_1)(x - \varphi_2), \tag{23}$$

где интеграл мора да се анулира за $\tau = 0$.

Та једначина, као и једначина (22), *спада у категорију једначина на које се односе горње напомене и претходно доказане пропозиције у њима налазе непосредну примену.*

Ако се погодно изаберу функције за упоређивање, у сваком тренутку ћемо имати доњу и горњу границу за количине продуката реакције и стећи ћемо представу о кривама које представљају промену тих количина у времену.

Међутим, обрнуто, према претходно реченом, могуће је применити и ***хемијску методу у приближној интеграцији Рикатијеве јед-***

начине са сталним или променљивим коефицијентима. Принцип те методе састојао би се у следећем.

Изаберимо две течности A_1 и A_2 (или растворе чврстих тела) које би, када се помешају, изазвале бимолекуларну, нормално довољно спору реакцију која не доводи до секундарних реакција, као ни до осетније промене температуре. Ти услови се остварују у великом броју реакција.

Претпоставимо да течности A_1 и A_2 улазе у суд V у коме се одвија реакција, и то тако што под сталним спољашњим притиском истичу из судова V_1 и V_2 кроз отворе који се налазе на дну.

Ако се са

$$u_1, u_2, h_1, h_2, \Phi_1(u_1), \Phi_2(u_2), \Omega_1, \Omega_2, \mu_1, \mu_2$$

обележе количине које су аналогне претходним количинама и које се односе на течности A_1 и A_2, најпре ће се добити релације

$$t = \frac{1}{\mu_1\Omega_1\sqrt{2g}} \int_{u_1}^{h_1} \frac{\Phi_1(u_1)}{\sqrt{u_1}}\, du_1,$$

$$t = \frac{1}{\mu_2\Omega_2\sqrt{2g}} \int_{u_2}^{h_2} \frac{\Phi_2(u_2)}{\sqrt{u_2}}\, du_2,$$

одакле су, на пример,

$$u_1 = \psi_1(t), \quad u_2 = \psi_2(t).$$

Количине течности A_1 и A_2, које су ушле у суд V у времену t, биће

$$z_1 = \mu_1\Omega_1\sqrt{2g}\int_0^t \sqrt{\psi_1(t)}\, dt, \tag{24}$$

односно

$$z_2 = \mu_2\Omega_2\sqrt{2g}\int_0^t \sqrt{\psi_1(t)}\, dt. \tag{25}$$

и ако се са a_1 и a_2 означе првобитне количине течности A_1 и A_2, које су се налазиле у суду V на почетку реакције, а са m_1 и m_2 претходно дефинисане количине које представљају односе према којима се те две течности утроше у реакцији, под претпоставком да се течности мешају довољно брзо, ток реакције биће одређен једначином

$$\frac{dx}{dt} = C\left[x - \varphi_1(t)\right]\left[x - \varphi_2(t)\right], \tag{26}$$

где је

$$\varphi_1(t) = a_1 + z_1,$$
$$\varphi_2(t) = \frac{m_1}{m_2}(a_2 + z_2),$$

при чему су z_1 и z_2 дефинисани једначинама (24) и (25).

Једначина (26) подудараће се са датом једначином ако судови V_1 и V_2 имају погодан облик, који се помоћу претходно реченог лако може одредити. У пракси је најбоље узети два суда са равним, међусобно паралелним зидовима и друге две криве чији је облик одређен претходним једначинама, тако да се коефицијенти $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ поклапају са коефицијентима дате једначине.

Ако се узму такви судови и ако се пусти да течности лагано утичу у V, методама квантитативне хемије одредиће се количине једног од продуката реакције која се у суду одвија. Те количине одговарају различитим временским интервалима и на дијаграму (x,t) добиће се тачке које припадају интегралној кривој дате једначине. А када је приближно позната једна од интегралних кривих, помоћу једне особине Рикатијеве једначине, моћи ће се одредити све остале интегралне криве, при чему ће апроксимација зависити од тога колико ће прецизно бити изведен експеримент. Апроксимација ће бити боља ако су познате горње границе грешака у огледу. Те грешке ће, наравно, бити мање уколико су услови у којима се одвија експеримент ближи набројаним условима.

Да бисмо схватили с којим степеном прецизности би се вршила таква експериментална интеграција, навешћу неке од многих експеримената које је г. Худ[1] извео у циљу одређивања константе C у реакцији између калијум-хлората и гвозденог сулфата у киселом раствору, *у специјалном случају у коме су количине које су напред означене са* z_1 *и* z_2 *биле једнаке нули.*

(То су до сада једини случајеви којима је посвећивана пажња у експериментима из хемијске динамике.)

Реакција се одвијала према хемијској једначини

$$KClO_3 + 6FeO = KCl + 3Fe_2O_3$$

[1] Phil. Mag. (5) 6, 371.

и у жељеном тренутку помоћу калијум-перманганата одређивана је количина FeO која до тог тренутка није реаговала.

Како је у тим експериментима било

$$\varphi_1(t) = \text{const.} = a,$$
$$\varphi_2(t) = \text{const.} = b,$$

проблем тражења релације између количине x од FeO која се изменила током реакције и времена t , своди се на Рикатијеву једначину

$$\frac{dx}{dt} = C(x-a)(x-b)$$

одакле је, како интеграл мора да се анулира за $t = 0$,

$$\log \frac{b(x-a)}{a(x-b)} = (a-b)Ct.$$

У низу експеримената, било је, на пример, $b = \frac{a}{2}$, а према теорији требало је наћи

$$\frac{1}{t} \log \frac{a - \frac{x}{2}}{a - x} = \text{const.};$$

добијени су следећи резултати:

t	$a - x$	$\frac{1}{t} \log \frac{a - \frac{x}{2}}{a - x}$
30,5	7,30	0,001965
55	5,98	0,002027
89	4,74	0,001970
112,2	4,06	0,001973
143,2	3,30	0,002000
180,5	2,63	0,001996
206,8	2,30	0,001983
237,5	1,93	0,001978
272	1,58	0,001998
336,3	1,14	0,001986
360	0,98	0,002020

Време се рачуна у минутима, логаритми су Бригови а a је имало вредност 9,45.

Слагање теорије и експеримента у овом партикуларном случају, доказана уосталом многим одређивањима константи C_1 које одговарају различитим реакцијама, јасно показује исправност принципа горе изложене методе хемијске интеграције Рикатијеве једначине и даје идеју о тачности коју би ова метода имала у пракси приближног проучавања интеграла, којима се најчешће не може приступити поступцима анализе.

На крају ћу додати да се у *Zeitschrift für physikalische Chemie* могу наћи бројни експерименти типа о којем је овде било речи, али се сви они везују за једини до сада испитивани случај, када се реакција одвија без притицања нових количина активних материја. У тим случајевима примењује се хемијски поступак за интеграцију Рикатијеве једначине са сталним коефицијентима. Ако се експеримент изврши на наведени начин, тако да активне материје дотичу у суд у коме се одвија реакција према датим законима, добиће се хемијски поступак за интеграцију једначине са промењивим коефицијентима.**

** Реферисано: M. Lerch у Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (даље у ознаци FdM), B. 27, S. 256 и анонимни аутор у Revue sémestrielle des publications mathématiques (даље у ознаци Revue sémestrielle), 1897, t. VI. У Годишњаку Српске краљевске академије за 1897. г., књ. XI, стр. 146, Петровић овој расправи даје краћи садржај, а београдски часопис Дело приказ у 14 (1897), стр. 182. Милорад Бертолино користио се овом Петровићевом студијом у раду *Solutions approximatives presque stables des équations différentielles*, Мат. весник, 4 (1967), 1, стр. 71–74 (видети и друге радове М. Бертолина о истој теми). У књизи Д. Трифуновић, *Проучавање моделовање у делу Михаила Петровића*, Београд 1976, стр. 386, детаљно је анализована „хемијска интеграција" као почетак Петровићевог рада на аналогним рачунским машинама (пр. Д. Т.).

О ЛИНЕАРНИМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА ДРУГОГ РЕДА*

1. Посматрајмо диференцијалну једначину

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \tag{1}$$

и одговарајућу једначину другог степена

$$r^2+P(x)r+Q(x)=0 \tag{2}$$

коју ћемо назвати *њеном карактеристичном једначином.*

Посматрајмо интервал од $x=a$ до $x=b$, у којем су корени

$$r_1=f_1(x),\quad r_2=f_2(x)$$

карактеристичне једначине реални, различити и где је већи корен $f_2(x)$ нерастућа функција.

Са A и B обележимо вредности које интеграл $y(x)$ и његов извод $y'(x)$ узимају за $x=a$. *Овде ћу се посебно бавити интегралима за које те почетне вредности задовољавају услов*

$$\frac{B}{A}>f_2(a). \tag{3}$$

Показаћу како се поређењем тих интеграла са интегралима других интеграбилних једначина може видети њихов ток и како се они могу приближно одредити у посматраном интервалу (a,b).

У том циљу, стављајући

$$\eta(x)=Ae^{\int_a^x f_2(x)\,dx}$$

---

* Наслов оригинала *Sur l'équation différentielle linéare du second ordre,* Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1897, t. XXV, 8–9, pp. 221–235.

покажимо најпре:

1) *ако је* $\mathrm{A} > 0$, *интеграл* у *је стално позитиван и већи је од функције* $\eta(\mathrm{x})$ *у интервалу* (a, b);

2) *ако је* $\mathrm{A} < 0$, *интеграл је стално негативан и мањи је од* $\eta(\mathrm{x})$ *у том интервалу.*

Наиме, стављајући

$$y = Ae^{-\int_a^x u(x)\,dx}, \tag{4}$$

функција y биће интеграл једначине

$$\frac{du}{dx} = u^2 - \mathrm{P}(x)\cdot u + Q(x) \tag{5}$$

или, пак, једначине

$$\frac{du}{dx} = (u + f_1)(u + f_2), \tag{6}$$

који за $x = a$ узима вредност $-\dfrac{B}{A}$.

Међутим, за вредности x из интервала (a, b) тако дефинисана функција $u(x)$ је стално растућа, али је мања од $-f_2(x)$ јер, с једне стране, u не може да почне да опада у том интервалу будући да су величине

$$u(a) + f_1(a), \quad u(a) + f_2(u),$$

на основу неједнакости

$$f_1(x) < f_2(x)$$

и (3) негативне а извод $u'(a)$ позитиван. Све док је $u < -f_2$, функција u стално расте јер је истовремено $u < -f_1$ и извод u' је позитиван. Међутим, док расте, она не може да пређе ни да достигне одговарајућу вредност $-f_2(x)$, јер чим би прешла ту вредност морала би да почне да опада, док би извод u' тада био негативан зато што је $u + f_2 > 0$, $u + f_1 < 0$. А чим би функција почела да опада, она би се спустила испод $-f_2(x)$ (како функција $-f_2(x)$ није опадајућа). Тиме би извод u', постајући поново позитиван, опет морао да расте итд.

С друге стране, како $u(x)$ и $-f_2(x)$ не опадају у интервалу (a, b) и како је стално

$$u(x) < -f_2(x),$$

у истом интервалу биће и

$$\int_a^x u(x)\,dx < -\int_a^x f_2(x)\,dx,$$

или још

$$e^{-\int_a^x u(x)\,dx} > e^{-\int_a^x f_2(x)\,dx},$$

чиме је доказ завршен.

Такође се можемо уверити да, *ако су* A *и* B *супротног знака, интеграл* y(x) *је стално позитиван и опадајући или негативан и растући, према томе да ли је* A *веће или мање од* 0. Наиме, ако је разломак $\frac{B}{A}$ негативан, почетна вредност $-\frac{B}{A}$ функције $u(x)$ је позитивна, а ако је $u(x)$ стално растућа, она ће такође стално бити позитивна у интервалу (a, b). Образац (4), дакле, показује управо тај резултат.

2. Посматрајмо сада две једначине

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0, \tag{7}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P_1(x)\frac{dz}{dx} + Q_1(x)z = 0. \tag{8}$$

Нека су $f_1(x)$ и $f_2(x)$, односно $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ корени карактеристичних једначина једначина (7) и (8); претпоставимо да је

$$f_1 < f_2, \quad \varphi_1 < \varphi_2.$$

Претпоставимо још да ти корени задовољавају услове из претходног параграфа. Упоредимо међусобно интеграле $y(x)$ и $z(x)$ једначина (7) и (8), који за $x = a$ узимају вредност A и чији изводи y' и z' узимају вредност B за $x = a$, где су те вредности такве да је услов

$$\frac{B}{A} > f_2(a)$$

испуњен. Тврдим да:

Ако је у интервалу (a, b) *стално*

$$\begin{aligned} f_1(x) &\geq \varphi_1(x), \\ f_2(x) &\geq \varphi_2(x), \end{aligned} \tag{9}$$

у том интервалу ће бити и

$$(10)\qquad \begin{array}{ll} y > z & \text{ако је } \ A > 0, \\ y < z & \text{ако је } \ A < 0. \end{array}$$

Да бисмо то доказали, ставимо

$$(11)\qquad y = Ae^{-\int_a^x u dx},$$

$$(12)\qquad z = Ae^{-\int_a^x v dx},$$

и са u и v обележимо интеграле једначина

$$(13)\qquad \frac{du}{dx} = (u + f_1)(u + f_2),$$

односно

$$(14)\qquad \frac{dv}{dx} = (v + \varphi_1)(v + \varphi_2)$$

који за $x = a$ узимају вредности $-\dfrac{B}{A}$.

Даље, у интервалу (a, b) стално ћемо имати $u < v$. Наиме, с једне стране, почев од $x = a$ не може да буде $u > v$ јер, ако би то важило за неку вредност x која је довољно близу $x = a$, за ту вредност x истовремено би било

$$\begin{array}{l} f_2(x) \geq \varphi_2(x), \\ u(x) > v(x), \end{array}$$

одакле је

$$(15)\qquad u + f_2 > v + \varphi_2,$$

а исто тако и

$$(16)\qquad u + f_1 > v + \varphi_1.$$

Како су према претходном резултату функције

$$\begin{array}{ll} u + f_1, & u + f_2, \\ v + \varphi_1, & v + \varphi_2, \end{array}$$

негативне, из једначина (13) и (14), као и из неједнакости (15) и (16), закључило би се да је

$$\frac{du}{dx} < \frac{dv}{dx},$$

или

$$\frac{d}{dx}(u-v)<0,$$

тј. да разлика $u-v$ опада почев од те вредности x. А како је за $x=a$ та разлика једнака нули, почев од те вредности имали бисмо $u<v$, што је у контрадикцији са постављеном хипотезом.

С друге стране, да би разлика $u-v$, која је била негативна, могла да постане позитивна почев од неке вредности $x=\alpha$ из интервала (a,b), она би се морала анулирати за $x=\alpha$ [јер према претходно реченом функције u и v су коначне и непрекидне у интервалу (a,b)] и како би се, према изложеном резоновању, нашло да почев од $x=\alpha$ разлика $u-v$ опада, контрадикција је очигледна, што доказује тврдњу.

Биће, дакле, $u<v$; одатле, када се имају у виду обрасци (11) и (12), следе неједнакости

$$\begin{aligned} y>z \quad &\text{за} \quad A>0,\\ y<z \quad &\text{за} \quad A<0, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

3. То одмах доводи до ове последице.

Посматрајмо три једначине

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+\mathrm{P}(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=0,\\[2ex] \dfrac{d^2Y}{dx^2}+\mathrm{P}_1(x)\dfrac{dY}{dx}+Q_1(x)Y=0,\\[2ex] \dfrac{d^2Z}{dx^2}+\mathrm{P}_2(x)\dfrac{dZ}{dx}+Q_2(x)Z=0, \end{cases}$$

претпостављајући да се друга и трећа могу интегрисати. Претпоставимо да највећи корени

$$f_2(x),\ \varphi_2(x),\ \psi_2(x)$$

њихових карактеристичних једначина, као и почетне вредности интеграла y, Y, Z задовољавају услове наведене у параграфу 1, при чему су најмањи корени

$$f_1(x),\ \varphi_1(x),\ \psi_1(x)$$

исти за све три једначине, на пример $f_1(x)$.

Тада важи правило:

Ако је у интервалу (a, b) *стално*

$$\psi_2(x) \leq f_2(x) \leq \psi_2(x), \tag{18}$$

у том интервалу ће бити и

$$\begin{cases} Y < y < z & \text{ако je} \quad A > 0, \\ Z < y < Y & \text{ако je} \quad A < 0. \end{cases} \tag{19}$$

4. Из тих резултата могу се извести горња и доња граница између којих ће се налазити вредност посматраног интеграла y у интервалу (a, b). Моћи ћемо такође да стекнемо представу о току интегралне криве и моћи ћемо да је приближно одредимо. Наиме, ако се $f_2(x)$ замени другим функцијама које су у интервалу (a, b) мање или веће од функције која је представљена већим кореном карактеристичне једначине дате једначине другог реда и ако се те функције изаберу тако да се добијене једначине могу интегрисати, онда ће се добити границе између којих ће посматрани интеграл варирати. Што је разлика између функције $f_2(x)$ и нових функција, којима смо је заменили, по апсолутној вредности мања, и растојање између тих граница биће мање. Избор таквих функција зависиће од појединих случајева које треба испитати.

Стога ћу као пример навести ову пропозицију.

Нека су r_1 *и* r_2 *најмања и највећа вредност корена* $\mathrm{f}_2(\mathrm{x})$ *у интервалу* (a, b). *Ако се стави*

$$Y = A e^{r_1(x-a)} + (B - r_1 A) e^{r_1(x+a)} \int_a^x e^{-\left[r_1 x + \int_a^x f_1(x) dx\right]} dx, \tag{20}$$

$$Z = A e^{r_2(x-a)} + (B - r_2 A) e^{r_2(x+a)} \int_a^x e^{-\left[r_2 x + \int_a^x f_1(x) dx\right]} dx, \tag{21}$$

у том интервалу стално ће бити

$$\begin{cases} Y < y < Z & \text{ако je} \quad A > 0, \\ Z < y < Y & \text{ако je} \quad A < 0. \end{cases} \tag{22}$$

Наиме, ако се посматрају две једначине

$$\frac{d^2Y}{dx^2} - \left[r_1 + f_1(x)\right] \frac{dY}{dx} + r_1 f_1(x) Y = 0, \tag{23}$$

$$\frac{d^2Z}{dx^2} - \left[r_2 + f_2(x)\right] \frac{dZ}{dx} + r_2 f_1(x) Z = 0, \tag{24}$$

њихови интеграли су респективно

$$Y = e^{r_1 x}\left[C_1 + C_2\int_a^x e^{-\left[r_1 x + \int_a^x f_1 dx\right]}dx\right],$$

$$Z = e^{r_2 x}\left[C_1' + C_2'\int_a^x e^{-\left[r_2 x + \int_a^x f_1 dx\right]}dx\right],$$

и ако се одреде константе интеграције тако да је за $x = a$

$$Y = Z = A,$$
$$Y' = Z' = B,$$

налазе се изрази (20) и (21).

С друге стране, како су корени карактеристичних једначина за једначине (23) и (24) респективно

$$r_1, \quad f_1(x),$$
$$r_2, \quad f_1(x),$$

са

$$r_1 < f_2(x) < r_2,$$

према параграфу 3, пропозиција је доказана.

5. Претпоставимо сада да се у једначини

(25) $$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0,$$

P и Q замењују другим функцијама $P_1(x)$ и $Q_1(x)$, а затим и са $P_2(x)$ и $Q_2(x)$, за које се једначина може интегрисати, а које су такве да корени $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(x)$ (са $\varphi_1 < \varphi_2$) карактеристичне једначине нове једначине

(26) $$\frac{d^2Y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dY}{dx} + Q_1(x)Y = 0$$

и корени $\psi_1(x), \psi_2(x)$ једначине

(27) $$\frac{d^2Z}{dx^2} + P_2(x)\frac{dZ}{dx} + Q_2(x)Z = 0$$

испуњавају услове

(28) $$\begin{cases}\varphi_1 \le f_1 \le \psi_1,\\ \varphi_2 \le f_2 \le \psi_2\end{cases}$$

и да су већи корени φ_2 и ψ_2 нерастуће функције x у интервалу (a, b).

Тада је у интервалу (a, b) *стално*

$$\text{(29)} \qquad \begin{cases} Y < y < Z & \text{ако је } \; A > 0, \\ Z < y < Y & \text{ако је } \; A < 0. \end{cases}$$

Из тога као непосредна последица следи ова пропозиција:

Ако се са (ρ_1, ρ_2) означе најмања и највећа вредност корена $f_1(x)$ у интервалу (a, b), а са (r_1, r_2) аналогне вредности за функцију $f_2(x)$, тада ће неједнакости (29) бити задовољене са

$$Y = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}\left[(A\rho_2 - B)e^{\rho_1(x-a)} - (A\rho_1 - B)e^{\rho_2(x-a)}\right],$$

$$Z = \frac{1}{r_2 - r_1}\left[(Ar_2 - B)e^{r_1(x-a)} - (Ar_1 - B)e^{r_2(x-a)}\right],$$

јер су тако дефинисане функције Y и Z интеграли једначине

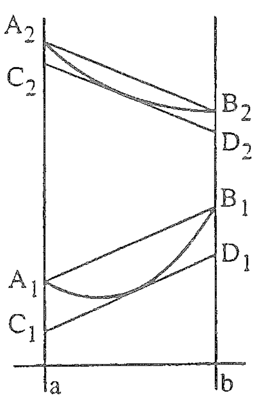
$$Y'' - (\rho_1 + \rho_2)Y' + \rho_1\rho_2 Y = 0,$$

односно

$$Z'' - (r_1 + r_2)Z' + r_1 r_2 Z = 0,$$

који за $x = a$ узимају вредност A и чији први изводи узимају вредност B.

Међутим, растојање између граница Y и Z може бити много мање ако се имају у виду нека разматрања.



Слика 1.

Претпоставимо да су конструисане криве (сл. 1)

$$y = f_1(x) \quad \text{и} \quad y = f_2(x).$$

Нека су A_1 и B_1, A_2 и B_2 тачке пресека тих кривих са правама $x = a$ и $x = b$; спојимо их дужима A_1B_1 и A_2B_2. Повуцимо затим тангенту C_1D_1 на криву $y = f_1$ паралелну са A_1B_1 и тангенту C_2D_2 на криву $y = f_2$ паралелну са A_2B_2. Нека су:

$$\begin{array}{lll} y = a_1 + b_1 x & \text{једначина дужи} & A_1B_1, \\ y = a_2 + b_2 x & \text{једначина дужи} & A_2B_2, \\ y = \lambda_1 + b_1 x & \text{једначина тангенте} & C_1D_1, \\ y = \lambda_2 + b_2 x & \text{једначина тангенте} & C_2D_2. \end{array}$$

Одатле је

$$a_1 = \frac{bf_1(a) - af_1(b)}{b-a}, \qquad b_1 = \frac{f_1(b) - f_1(a)}{b-a},$$

$$a_2 = \frac{bf_2(a) - af_2(b)}{b-a}, \qquad b_2 = \frac{f_2(b) - f_2(a)}{b-a},$$

$$\lambda_1 = f_1(\alpha_1) - b_1\alpha_1, \qquad \lambda_2 = f_2(\alpha_2) - b_2\alpha_2,$$

где је α_1 корен по x једначине

$$f_1'(x) - b_1 = 0$$

из интервала (a, b), а α_2 корен по x од

$$f_2'(x) - b_2 = 0$$

из истог интервала.

Посматрајмо диференцијалне једначине

$$(30)\quad \frac{d^2Y}{dx^2} - \left[\lambda_1 + \lambda_2 + (b_1 + b_2)x\right]\frac{dY}{dx} + \left[\lambda_1\lambda_2 + (b_1 + b_2)x + b_1b_2x^2\right]Y = 0,$$

$$(31)\quad \frac{d^2Z}{dx^2} - \left[a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)x\right]\frac{dZ}{dx} + \left[a_1a_2 + (b_1 + b_2)x + b_1b_2x^2\right]Z = 0.$$

Корени њихових карактеристичних једначина су:
за прву једначину

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 + b_1x, \quad \varphi_2(x) = \lambda_2 + b_2x,$$

а за другу једначину

$$\psi_1(x) = a_1 + b_1x, \quad \psi_2(x) = a_2 + b_2x.$$

Како је (под претпоставком да криве $y = f_1$ и $y = f_2$ имају положај као на слици; када то не би важило, било би лако изменити неједнакости и следеће резултате)

$$\varphi_1 < f_1 < \psi_1,$$
$$\varphi_2 < f_2 < \psi_2,$$

у интервалу (a, b) биће

$$Y < y < Z \quad \text{ако је} \quad A > 0,$$
$$Z < y < Y \quad \text{ако је} \quad A < 0.$$

Даље, једначине за упоређивање (30) и (31) могу се интегрисати, тј. могу се израчунати функције Y и Z на овај начин. Ако је

$$Y = Ue^{\alpha_1 x + \frac{\beta_1 x^2}{2}},$$
$$Z = Ve^{\alpha_2 x + \frac{\beta_2 x^2}{2}},$$

где U и V означавају нове непознате функције а $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ константе, једначине (30) и (31) се трансформишу у

$$\begin{aligned}\frac{d^2U}{dx^2} &+ \left[(\alpha\beta_1 + b_1 + b_2)x + (2\alpha_1 + a_1 + a_2)\right]\frac{dU}{dx} \\ &+ \Big\{\left[\beta_1^2 + (b_1 + b_2)\beta_1 + b_1 b_2\right]x^2 \\ &+ \left[2\alpha_1\beta_1 + \alpha_1(b_1 + b_2) + \beta_1(a_1 + a_2) + b_1 + b_2\right]x \\ &+ \left[\alpha_1^2 + \beta_1 + \alpha_1(a_1 + a_2) + a_1 a_2\right]\Big\}U = 0,\end{aligned}$$

и у аналогну једначину за V.

Могуће је узети $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ тако да нестану чланови са x и са x^2 у коефицијентима уз U и уз V. Једначине се тада своде на облик

$$\frac{d^2U}{dx^2} + (h_1 + k_1 x)\frac{dU}{dx} + l_1 U = 0,$$
$$\frac{d^2V}{dx^2} + (h_2 + k_2 x)\frac{dV}{dx} + l_2 V = 0.$$

Ако се узме да је

$$t = h_1 + k_1 x \quad \text{и} \quad t = h_2 + k_2 x$$

као нова независна променљива, једначине се своде на облик

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha t\frac{du}{dt} + \beta u = 0 \tag{32}$$

и интегришу било помоћу редова, било помоћу одређених интеграла. Тако, ако се стави

$$\Phi_1(t) = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{\beta(2\alpha+\beta)(4\alpha+\beta)\ldots((2n-2)\alpha+\beta)}{(2n)!}t^{2n},$$
$$\Phi_2(t) = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{(\alpha+\beta)(3\alpha+\beta)\ldots((2n-1)\alpha+\beta)}{(2n+1)!}t^{2n+1},$$

општи интеграл од (32) је облика

$$u = C_1\Phi_1(t) + C_2\Phi_2(t),$$

па се функције Y и Z тада лако израчунавају.

Апроксимација би била још боља када би се, уместо претходних правих узеле параболе

$$y = l + mx + nx^2 + \ldots + qx^m,$$

уместо лукова кривих $y = f_1$ и $y = f_2$ које се од њих разликују у најмањој могућој мери. Функције за упоређивање Y и Z тада би биле дате као интеграли једначине која ће моћи да се интегрише помоћу конвергентних редова.

6. Напоменимо још и ово: нека је дата једначина

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

таква да корени

$$r_1 = f_1(x), \quad r_2 = f_2(x)$$

њене карактеристичне једначине

$$r^2 + P(x)r + Q(x) = 0$$

имају сталну разлику, а такви су да ако се стави

$$r_1 = \alpha + \theta(x),$$
$$r_2 = \beta + \theta(x),$$

$$y = ve^{\frac{\alpha+\beta}{2}x + \int \theta(x)dx}, \tag{33}$$

једначина постаје

$$v'' + \tilde{\omega}(x)v = 0, \tag{34}$$

где је

$$\tilde{\omega}(x) = \theta'(x) - \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}. \tag{35}$$

То се лако може проверити директним рачуном.

Обрнуто: кад год се може интегрисати једначина

$$v'' + \tilde{\omega}(x)v = 0$$

из ње се може извести нека друга једначина, која се такође може интегрисати, облика

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

а таква да корени њене карактеристичне једначине имају сталну разлику.

Наиме, ако се стави да је

$$\theta(x) = \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}x + \int \tilde{\omega}(x)dx, \tag{36}$$

где је константа интеграције произвољно изабрана, а затим

$$v = ye^{-\frac{\alpha+\beta}{2}x - \int \theta(x)dx}, \tag{37}$$

једначина се трансформише у

$$y'' - (\alpha+\beta+2\theta)y' + \left[\alpha\beta + (\alpha+\beta)\theta + \theta^2\right]y = 0, \tag{38}$$

при чему су корени њене карактеристичне једначине дати са

$$f_1(x) = \alpha + \theta(x),$$
$$f_2(x) = \beta + \theta(x).$$

Те напомене омогућавају да се да велики број резултата о границама између којих варира интеграл дате једначине (1). Пођимо од две произвољне интеграбилне једначине облика

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \chi(x)u = 0, \tag{39}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \tilde{\omega}(x)v = 0, \tag{40}$$

где су $\chi(x)$ и $\tilde{\omega}(x)$ негативне функције у интервалу (a,b). Изаберимо три константе λ, μ, ν везане релацијом

$$4\nu - (\lambda-\mu)^2 = 0,$$

такве да је у интервалу (a,b) стално

$$f_1(x) > \lambda + \theta_1(x),$$
$$f_2(x) > \mu + \theta_1(x),$$

где смо ставили

$$\theta_1(x) = \nu x + \int \chi(x)dx, \tag{41}$$

при чему је константа интеграције произвољно изабрана.

Изаберимо затим друге три константе λ', μ', ν', везане релацијом

$$4\nu' - (\lambda' - \mu')^2 = 0,$$

такве да је у интервалу (a, b) стално

$$f_1(x) < \lambda' + \theta_2(x),$$
$$f_2(x) > \mu' + \theta_2(x),$$

са

$$\theta_2(x) = \nu' x + \int \tilde{\omega}(x) dx. \tag{42}$$

Ако се онда стави

$$U = u e^{\frac{\lambda+\mu}{2}x + \int_a^x \theta_1(x)dx}, \tag{43}$$

$$V = v e^{\frac{\lambda'+\mu'}{2}x + \int_a^x \theta_2(x)dx}, \tag{44}$$

где су u и v интеграли једначина (39) односно (40), који као и њихови изводи за $x = a$ узимају ове вредности:

$$\begin{cases} u(a) = Ae^{-\frac{\lambda+\mu}{2}a}, \\ v(a) = Ae^{-\frac{\lambda'+\mu'}{2}a}, \\ u'(a) = A'e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}a} - A\left[\frac{\lambda+\mu}{2} + \theta_1(a)\right] e^{-(\lambda+\mu)a}, \\ v'(a) = A'e^{-\frac{\lambda'+\mu'}{2}a} - A\left[\frac{\lambda'+\mu'}{2} + \theta_2(a)\right] e^{-(\lambda'+\mu')a}, \end{cases} \tag{45}$$

онда је

$$U < y < V \quad \text{ако је} \quad A > 0,$$
$$V < y < U \quad \text{ако је} \quad A < 0.$$

Избор функција за упоређивање U и V зависи од појединих случајева које треба испитати. Те функције треба изабрати на тај начин да разлика између функција $f_1(x), f_2(x)$ и нових функција, којима смо их заменили, буде најмања могућа и да можемо да интегришемо одговарајуће једначине за упоређивање (39) и (40).

Тако, ако се пође од једначина за упоређивање

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha u = 0,$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} + \beta v = 0,$$

где су α и β константе, онда је

$$\theta_1(x) = (\alpha + \nu)x,$$
$$\theta_2(x) = (\beta + \nu)x,$$

а одговарајуће функције U и V се израчунавају лако. Поступак се своди на то да се лукови кривих $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ замењују дужима, при чему се најчешће за две од тих дужи узимају тангенте тих кривих.

Друге функције за упоређивање U и V добијају се, на пример, помоћу интеграбилних једначина

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x^m y = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha + \beta x + \gamma x^2)y = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{ky}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{y}{(e^x + e^{-x})^2} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

међу којима ћемо изабрати ону која је погодна за посматрани случај.**

** О овој расправи Петровић је написао краћи садржај у Годишњаку Српске краљевске академије за 1897. г., књ. XI, стр. 149, а Хамбургер изложио приказ у FdM, Б. 28, С. 284. У Revue sémestrielle, 1897, t. VI, такође је приказана расправа, а београдски часопис Дело доноси краћи резиме (Београд 1898, t. XVII, стр. 519) са напоменом да је Михаило Петровић редовни инострани члан Друштва француских математичара (пр. Д. Т.).

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА*

Дата је диференцијална једначина првог реда у облику

$$\text{(I)} \qquad \frac{dy}{dx} = F(x, f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

где је F алгебарска или трансцендентна функција од x и f_i (f_i су дате функције од y). Претпоставимо да су испуњени следећи услови.

1) Све функције f_i и њихови први изводи су реалне, непрекидне и *ограничене* функције y. Оне остају коначне за сваку реалну, коначну или бесконачну вредност y. Са M_i и N_i означићемо максималну и минималну вредност функције $f_i(y)$, када y варира од $-\infty$ до $+\infty$.

2) Функција F и њени парцијални изводи

$$\frac{\partial F}{\partial f_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial f_n}$$

су реални, коначни и непрекидни за сваку вредност x садржану у неком интервалу δ и за сваку вредност f_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) садржану између M_i и N_i.

Под тим условима модул функције F остаје мањи од неке коначне позитивне вредности M за све вредности x унутар интервала ρ и за све коначне или бесконачне вредности од y.

С друге стране, како је парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ представљен као

$$\frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial y},$$

он ће такође бити ограничена функција у интервалу ρ за сваку вредност y.

---

* Наслов оригинала *Sur une classe d'équations differentielles du premier ordre*, Rendicouti del Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1899, t. XIV, pp. 28–32; достављено редакцији часописа 23. јула 1899.

Из тога се, на основу једне познате теореме, закључује да ће интеграл који за $x = x_0$ узима унапред задату вредност $y = y_0$ (пошто су x_0 и y_0 реални и испуњавају једини услов да x_0 припада интервалу δ) остати коначан и непрекидан у сваком интервалу од $x = x_0 - \gamma$ до $x = x_0 + \gamma$, који се и сам садржи у интервалу δ.

Претпоставимо сада да су испуњени и додатни услови.

3) Функција F и њени парцијални изводи $\dfrac{\partial F}{\partial f_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ задржавају сталан знак за све вредности x унутар интервала од $x_0 - \gamma$ до $x_0 + \gamma$, ма какве да су вредности од f_i садржане између M_i и N_i.

4) Ако се са

$$k_1, k_2, \ldots, k_n$$

означе произвољне константе за које важи

$$\begin{gathered} M_1 < k_1 < N_1 \\ M_2 < k_2 < N_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ M_n < k_n < N_n, \end{gathered}$$

тада интеграл

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, k_1, \ldots, k_n)\, dx$$

за сваку вредност од x_1 и x_2 која се налази између $x = x_0 - \gamma$ и $x = x_0 + \gamma$, узима само једну реалну вредност, која је такође коначна и одређена (али може да има више имагинарних вредности).

Нека су

$$i = 1, 2, 3, \ldots, h$$

индекси позитивних извода $\dfrac{\partial F}{\partial f_i}$, а

$$i = h+1, h+2, \ldots, n$$

индекси негативних извода и нека је

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, M_1, \ldots, M_h; N_{h+1}, \ldots, N_n)\, dx,$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, N_1, \ldots, N_h; M_{h+1}, \ldots, M_n)\, dx.$$

Може се показати следеће.

Интеграл у *од* (I), *који за* $x = x_0$ *узима вредност* $y = y_0$, *остајући коначан и непрекидан за сваку вредност* x *садржану између* $x_0 - \gamma$ *и* $x_0 + \gamma$, *стално варира на исти начин и налази се између две функције* $\lambda(x, x_0, y_0)$ *и* $\mu(x, x_0, y_0)$.

Наиме, према ономе што је речено о F, f_i и y, функција

$$F(x, f_1, \ldots, f_n)$$

пошто је y замењено својом вредношћу у x, изведена из израза за интеграл, и сама ће бити коначна и непрекидна за

$$x_0 - \gamma < x < x_0 + \gamma$$

и задржаће сталан знак.

Поред тога, како су изводи

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

позитивни, ако, краткоће ради, ставимо да је

$$F(x, M_1, \ldots, M_h; f_{h+1}, \ldots, f_n) = \Delta_1,$$
$$F(x, N_1, \ldots, N_h; f_{h+1}, \ldots, f_n) = \Delta_2,$$

биће

$$\Delta_1 < F(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) < \Delta_2.$$

С друге стране, како су изводи

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} \quad (i = h + 1, \ldots, n)$$

негативни, ако ставимо да је

$$F(x, M_1, \ldots, M_h; N_{h+1}, \ldots, N_n) = \Omega_1,$$
$$F(x, N_1, \ldots, N_h; M_{h+1}, \ldots, M_n) = \Omega_2,$$

биће

$$\Delta_1 > \Omega_1, \quad \Delta_2 < \Omega_2$$

и, самим тим,

$$\Omega_1 < F(x, f_1, \ldots, f_n) < \Omega_2.$$

Из тога се закључује да ће се интеграл

$$\int_{x_0}^{x} F(x, f_1, \ldots, f_n)\, dx,$$

где је y замењено својом вредношћу x, налазити између одговарајућих вредности два интеграла

$$J_1(x) = \int_{x_0}^{x} \Omega_1 dx$$

$$J_2(x) = \int_{x_0}^{x} \Omega_2 dx,$$

који, на основу хипотезе 4), за сваку вредност x садржану између $x_0 - \gamma$ и $x_0 + \gamma$ имају само једну реалну вредност, која је коначна и одређена. А како на идентичан начин имамо

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, f_1, \ldots, f_n)\, dx,$$

и како функција F задржава сталан знак између граница интеграције, пропозиција је доказана.

Може се десити да се интервал δ простире на све коначне вредности x. *Тада се претходна пропозиција примењује за било које почетне вредности од* x_0 *и* y_0 *и важи за све реалне вредности* x.

Приметимо да ће у овом последњем случају асимптотска вредност посматраног интеграла за $x = +\infty$ или за $x = -\infty$ бити коначна или бесконачна, према томе да ли J_1 и J_2 теже ка коначним или бесконачним граничним вредностима за $x = \pm\infty$. Када је асимптотска вредност коначна, она се налази између

$$y_0 + \lim J_1(x) \quad \text{и} \quad y_0 + \lim J_2(x).$$

На пример, интеграл диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x^2 + \beta e^{-ky^2},$$

где су α и β позитивне константе, који за $x = x_0$ узима $y = y_0$ стално (за све реалне вредности x) се налази између функција

$$y_0 + \frac{\alpha}{3}(x^3 - x_0^3) + \beta(x - x_0) \quad \text{и} \quad y_0 + \frac{\alpha}{3}(x^3 - x_0^3),$$

а његове асимптотске вредности су бесконачне.

За диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-rx^2}}{1 - \alpha e^{-kx^2} - \beta e^{-kx^2 - py^2}}$$

(где су α, β, k, p, r позитивне константе са $\alpha+\beta<1$) интеграл y се налази између функција

$$y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-rx^2}}{1-\alpha e^{-kx^2}}\,dx,$$
$$y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-rx^2}}{1-(\alpha+\beta)e^{-kx^2}}\,dx.$$

Његове асимптотске вредности су коначне и одређене. Ако се са a означи вредност y за $x=0$, његова асимптотска вредност за $x=\infty$ налазиће се између

$$a+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha) \quad \text{и} \quad a+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha+\beta),$$

где $\theta(z)$ означава трансценденту

$$\theta(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{z^n}{\sqrt{r+kn}}.$$

Исто тако, асимптотска вредност за $x=-\infty$ налазиће се између

$$a-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha) \quad \text{и} \quad a-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha+\beta).$$

То следи из

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-rx^2}}{1-z e^{-kx^2}}\,dx=\sum_{n=0}^{n=\infty}u_n z^n$$

са

$$u_n=\int_0^{\infty}e^{-(r+kn)x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1+kn}}.$$

Најзад, могуће је заменити улоге x и y и претходно резоновање применити на једначину

$$\frac{dy}{dx}=\Phi(y,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n),$$

где су $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ функције од x, ако се на одговарајући начин измене претходно претпостављени услови.**

** Реферисано у FdM, B. 31, S. 348 (Vivanti). (пр. Д. Т.)

О ЈЕДНОМ НАЧИНУ ПРОШИРЕЊА ТЕОРЕМЕ О СРЕДЊИМ ВРЕДНОСТИМА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА*

1. Познато је какав је допринос класичне *теореме о средњим вредностима* у доказивању различитих теорема о одређеним реалним интегралима и у практичном израчунавању тих интеграла.

Посматрајмо просту диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dx} = F(x) \tag{1}$$

и са y означимо њен интеграл који за $x = x_0$ узима дату вредност $y = y_0$. Теорема о средњим вредностима омогућује да се изаберу, и то на безброј начина, друге две једначине

$$\frac{du}{dx} = F_1(x), \tag{2}$$

$$\frac{dv}{dx} = F_2(x) \tag{3}$$

и интервал који садржи $x = x_0$ тако да док x варира у том интервалу, интеграл y је стално између одговарајућих вредности интеграла u и v једначина (2) и (3), који за $x = x_0$ узимају вредност $u_0 = v_0 = y_0$ и то за било које почетне вредности (x_0, y_0) осим за неке изоловане и фиксиране вредности x_0, које ће унапред бити познате. Тако се могу проу-

---

* Наслов оригинала *Sur une maniére d' étendre le théoréme de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre*, Mathematische Annalen, Leipzig 1899, t. 54, 3, pp. 417–436; достављено редакцији часописа 26. октобра 1899.

чавати и приближно израчунати интеграли дате једначине (1) ако се упореде са интегралима простијих једначина.

Постављам за циљ проширивање тих истих поступака на произвољну једначину

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{4}$$

алгебарску или трансцендентну по x, y, тако што ћу показати да, ако је дата једначина (4) и почетна тачка (x_0, y_0) траженог реалног интеграла, увек могу на безброј начина да се изаберу друге две једначине

$$\frac{du}{dx} = F_1(x, u), \tag{5}$$

$$\frac{dv}{dx} = F_2(x, v) \tag{6}$$

и неки интервал који садржи $x = x_0$ тако да се, за све вредности x, које се налазе у том интервалу, вредност интеграла y налази између одговарајућих вредности интеграла u и v једначина (5) и (6), који за вредност $x = x_0$ узимају вредност $u_0 = v_0 = y_0$. То одређивање доњих и горњих граница интеграла y биће могућно за било коју почетну тачку (x_0, y_0) под условом да се не налази на неким *фиксираним* кривама у равни (x, y) које ће унапред бити познате за дату једначину (4).

2. Нека су (4), (5), (6) три дате једначине. Нацртајмо у равни (x, y) криве D које ограничавају *области* оне равни, где свака од функција

$$F(x, y) - F_1(x, y), \tag{7}$$

$$F(x, y) - F_2(x, y) \tag{8}$$

посматрана као функција од x и y, задржава сталан знак и нека су:
Δ_1 и Δ_2 позитивна и негативна област равни у односу на функцију (7),
Ω_1 и Ω_2 позитивна и негативна област равни у односу на функцију (8).

Нацртајмо такође у равни (x, y) све криве – геометријска места сингуларитета – функција F, F_1, F_2 и са E обележимо скуп тих кривих.

Нека је (x_0, y_0) тачка која не припада ниједној од кривих D, E и која се налази у делу равни означеним са Π, који је заједнички обема областима Δ_i, Ω_k које имају супротан знак. Претпоставимо, на пример, да су то области Δ_1, Ω_2. Са y, u, v означимо редом интеграле (или гране интеграла) од (4), (5), (6), који за $x = x_0$ узимају заједничку вредност $u_0 = v_0 = y_0$.

Увек ће, дакле, постојати интервал око $x = x_0$ чија дужина није нула, на пример, од $x = x_0 - h_1$ до $x = x_0 - h_2$ и који задовољава ове услове:

1) када x варира од $x_0 - h_1$ до $x_0 + h_2$ обе функције u и v и њихови први изводи су одређени, коначни и непрекидни;

2) ниједан део кривих D , E не налази се ни у унутрашњости ни на контури Г, формираној кривама u, v и двема правама $x = x_0 - h_1$, $x = x_0 + h_2$ и та контура се у целости налази у делу П равни (x, y).

Тада се доказује следећи резултат.

Док x *варира од* $\mathrm{x}_0 - \mathrm{h}_1$ *до* $\mathrm{x}_0 + \mathrm{h}_2$, *интеграл* y *је стално одређен, коначан, непрекидан и налази се између одговарајућих вредности* u *и* v.

Наиме, како се тачка (x_0, y_0) налази у заједничком делу области Δ_1 и Ω_2, за ту тачку важи истовремено

$$(9) \qquad \begin{aligned} F(x,y) - F_1(x,y) > 0 \\ F(x,y) - F_2(x,y) < 0, \end{aligned}$$

па је према томе

$$(10) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dx}(y-u) > 0, \\ \frac{d}{dx}(y-v) < 0. \end{aligned}$$

С друге стране, за $x = x_0$ важи

$$(11) \qquad (y-u) = 0, \quad (y-v) = 0,$$

па према томе

$$(12) \qquad \begin{aligned} v < y < u \quad &\text{за} \quad x = x_0 - \varepsilon \\ u < y < v \quad &\text{за} \quad x = x_0 + \varepsilon, \end{aligned}$$

где је ε позитивно и довољно мало.

Пропозиција је, дакле, тачна за неки довољно мали интервал око $x = x_0$; али она важи за цео интервал ($x_0 - h_1$, $x_0 + h_2$). Наиме, када то не би важило, следило би:

1) или ће крива y имати заједничку тачку са једном од кривих u и v чија се апсциса налази у интервалу $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$;

2) или за неку вредност $x = \alpha$, из истог интервала и вредност $y = \beta$, која се налази између $u(\alpha)$ и $v(\alpha)$, извод $\dfrac{dy}{dx}$, па према томе и функција $F(x, y)$ постају или бесконачни, или неодређени или, пак, мењају детерминацију.

Услов 1) је немогућ јер када би $x=\gamma$, $y=\delta$ биле координате једне заједничке тачке, на пример, кривих y и u, која је најближа тачки (x_0, y_0), како се тачка (γ, δ) налази на контури Γ, добили бисмо за $x=\gamma$, $y=\delta$

$$F(x,y)-F_1(x,y)>0,$$

па према томе и

$$\frac{d}{dx}(y-u)>0,$$

а за $x=\gamma$

$$y-u=0.$$

Имали бисмо, дакле

$$\begin{array}{ll} y<u & \text{за} \quad x=\gamma-\varepsilon, \\ y>u & \text{за} \quad x=\gamma+\varepsilon, \end{array}$$

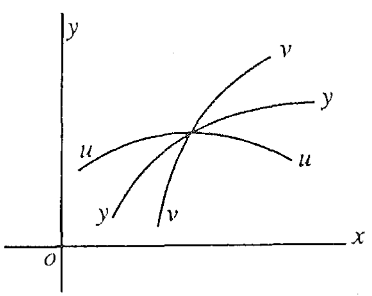
што је у контрадикцији са неједнакостима (12).

Услов 2) је немогућ јер се ниједан део криве E не налази ни у унутрашњости ни на контури Γ, па је према томе извод $\frac{dy}{dx}$ одређен, коначан и непрекидан за све тачке (α, β).

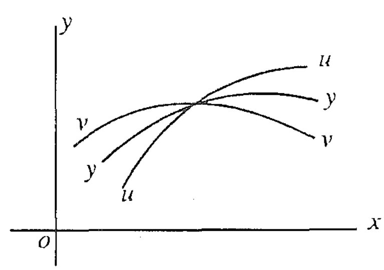
Интеграл y се, дакле, заиста стално налази између u и v поред тога

1. – у интервалу од x_0-h_1 до x_0 имамо $v<y<u$;
2. – у интервалу од x_0 до x_0+h_2 имамо $u<y<v$,

као што показује слика 1.



Слика 1



Слика 2

Када би се тачка (x_0, y_0) налазила у областима Δ_2, Ω_1, претходне неједнакости би промениле смисао и распоред кривих u, v, y био би као што је то означено на слици 2.

Тако добијамо овај општи резултат.

Кад год тачка (x_0, y_0) *припада делу* (x, y) *равни који је заједнички двема областима* (Δ_i, Ω_k) *супротног знака, интеграл* y, *док* x *варира од* $x_0 - h_1$ *до* $x_0 + h_2$, *биће одређен, коначан, непрекидан и налазиће се између* u *и* v.

Крива *y* неће моћи да сече ни криву *u* ни *v* изван $x = x_0$; али, лако је видети да не може бити ни додира између *y* и тих кривих. Наиме, када би се, на пример, *y* и *v* додиривали у тачки $x = \alpha$, било би

$$\frac{d}{dx}(y - x)_{x=\alpha} = 0,$$

што је немогуће према претходно реченом.

Приметимо такође да *ако за све тачке* (x, y) *које се налазе унутар контуре* Γ, *функција* $F(x, y)$ *задржава сталан знак, интеграл* y *ће варирати увек на исти начин* (рашће ако је $F > 0$, опадаће ако је $F < 0$) *док* x *варира у интервалу* $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$.

3. Нека је дата једначина

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{13}$$

коју можемо, на безброј начина, писати у облику

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, f) \tag{14}$$

где је *f* неки коефицијент од *x*, који се налази у *F* и на који ћемо посебно обратити пажњу.

Применимо претходно разматрање на једначину (14). Претпоставимо да су за почетну тачку (x_0, y_0) функција *F* и њен парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial f}$ одређени, коначни, непрекидни, да не мењају детерминацију и да се за ту тачку тај парцијалан извод не анулира. Тачке које не испуњавају те услове или припадају неким фиксираним кривама у равни (x, y), које ће унапред бити познате, или су изоловане и фиксиране.

Могу се изабрати, и то на безброј начина, две функције φ и ψ које задовољавају следеће услове:

1) да су функције одређене, коначне и непрекидне у интервалу од $x = x_0 - a_1$ до $x = x_0 + a_2$, који је довољно мали али није једнак нули;

2) да је у том интервалу

$$\varphi < f < \psi; \tag{15}$$

3) ако се са u и v означе интеграли једначина

$$\frac{du}{dx} = F(x, u, \varphi), \tag{16}$$

и

$$\frac{dv}{dx} = F(x, v, \psi), \tag{17}$$

које за $x = x_0$ узимају заједничку вредност $u_0 = v_0 = y_0$, где су функције u и v одређене, коначне и непрекидне у интервалу од $x = x_0 + b_1$ до $x = x_0 + b_2$, који је довољно мали али није једнак нули.

Ако се сада узму једначине (16) и (17) за једначине (5) и (6) из § 1, функције (7) и (8) из претходног параграфа постају

$$F(x, y, f) - F(x, y, \varphi) = (f - \varphi)\, H(x, y, R_1), \tag{18}$$

$$F(x, y, f) - F(x, y, \psi) = (f - \psi)\, H(x, y, R_2), \tag{19}$$

где смо, краткоће ради, ставили

$$H(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, t),$$
$$R_1 = \varphi + (f - \varphi)\theta_1,$$
$$R_2 = \psi + (f - \psi)\theta_2,$$

при чему су θ_1 и θ_2 два броја који се налазе између 0 и 1.

Може се показати да ће се *тачка* (x_0, y_0) *наћи у једном делу* (x, y) *равни који је заједнички двема областима супротног знака у односу на две функције* (18) *и* (19).

Наиме, како је израз

$$H\left[x_0, y_0, f(x_0)\right]$$

различит од нуле, ако се стави да је

$$f(x_0) = \rho$$

могу се одредити две константе χ и μ такве да је

$$\lambda < \rho < \mu$$

и да, док t варира од $t = \lambda$ до $t = \mu$, функција $H(x_0, y_0, t)$ посматрана као функција од t, остаје одређена, коначна, непрекидна и различита од нуле. Изаберимо даље претходне функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ тако да је

$$\varphi(x_0) = \lambda, \quad \psi(x_0) = \mu,$$

што је увек могуће на основу неједнакости

$$\lambda < \rho < \mu, \quad \varphi < f < \psi,$$

и уочимо две функције

$$H(x, y, R_1) = G_1(x, \theta_1),$$
$$H(x, y, R_2) = G_2(x, \theta_2)$$

посматране као функције од x, θ_1, θ_2, пошто смо y, R_1, R_2 изразили помоћу x, θ_1, θ_2.

Те две функције су одређене, коначне и непрекидне за $x = x_0$; поред тога, једначине

$$G_1(x_0, \theta_1) = 0, \quad G_2(x_0, \theta_2) = 0$$

решене по θ_1 и θ_2 немају ниједан корен између 0 и 1. То следи из тога што, док θ_1 и θ_2 варирају између 0 и 1, величине R_1 и R_2 варирају између λ и μ, и из тога што се, с друге стране, функција $H(x, y_0, t)$, посматрана као функција од t, не анулира док t варира између λ и μ.

Функције

$$G_1(x_0, \theta_1), \quad G_2(x_0, \theta_2)$$

се, дакле, не анулирају за $x = x_0$ и имају сталан знак, онај који има x за било које вредности од θ_1 и θ_2 између граница 0 и 1. А како за $x = x_0$ имамо

$$f(x) > \varphi(x), \quad f(x) < \psi(x),$$

изрази (18) и (19) биће за $x = x_0$ супротног знака, што је и требало доказати.

Претходне особине функција G_1 и G_2 које важе за вредност $x = x_0$ свакако ће важити за вредности x које се налазе у неком интервалу око (x, y), који је довољно мали али није једнак нули. Наиме, увек ће постојати неки интервал, на пример, од $x = x_0 - c_1$ до $x = x_0 + c_2$, такав да су за све вредности x, које се налазе у том интервалу, и за

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1$$

функције

$$G_1(x, \theta_1), \quad G_2(x, \theta_2)$$

одређене, коначне и непрекидне, не мењају детерминацију и не анулирају се. На пример, доњу границу дужине тог интервала добићемо тако што ћемо тражити интервал од $x_0 - g_1$ до $x_0 + g_2$ такав да, ако се са (M_1, M_2) и (N_1, N_2) означе границе између којих варирају функције (φ, ψ) и (u, v) за x из тог интервала, функција $H(x, y, t)$ остаје одређена, коначна, непрекидна и различита од нуле, када x варира од $x_0 - g_1$ до $x_0 + g_2$, y од N_1 до N_2 и t од M_1 до M_2.

Најзад, како је функција $F(x, y, f)$, где је f функција од x, одређена, коначна и непрекидна за $x = x_0$, $y = y_0$, постоји интервал на пример, од $x = x_0 - d_1$ до $x = x_0 + d_2$ такав да, ако се са (N_1', N_2') означе горња и доња граница између којих варирају u и v, а са (M_1', M_2') горња и доња граница између којих варирају φ и ψ за

$$x_0 - d_1 < x < x_0 + d_2$$

функција $F(x, y, f)$ и даље је одређена, коначна и непрекидна када x варира у том интервалу, y између N_1' и N_2' и f између M_1' и M_2'.

Тако дефинисана четири интервала

$$\begin{gathered}(x_0 - a_1, x_0 + a_2),\\ (x_0 - b_1, x_0 + b_2),\\ (x_0 - c_1, x_0 + c_2),\\ (x_0 - d_1, x_0 + d_2),\end{gathered}$$

који садрже вредност $x = x_0$, имају заједнички део око x_0: *тај заједнички део има улогу претходног интервала* $(x_0 - h_1,\ x_0 + h_2)$.

Тада, ако се примени резултат из претходног параграфа, види се да *за све вредности* x, *које се налазе у интервалу* $(\mathrm{x}_0 - \mathrm{h}_1, \mathrm{x}_0 + \mathrm{h}_2)$, *интеграл* у *једначине* (13), *који за* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ *узима дату вредност* $\mathrm{y} = \mathrm{y}_0$, *јесте одређен, коначан, непрекидан и налази се између одговарајућих вредности интеграла* u *и* v *једначина* (16) *и* (17), *које за* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ *узимају исту вредност* $\mathrm{u}_0 = \mathrm{v}_0 = \mathrm{y}_0$.

Приметимо *да свакој диференцијалној једначини* (13) *и сваком пару почетних вредности* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ (ако се оставе по страни парови који припадају неким фиксираним кривама у равни xOy, коју смо претходно дефинисали) *одговара такав интервал* $(\mathrm{x}_0 - \mathrm{h}_1, \mathrm{x}_0 + \mathrm{h}_2)$ *чија дужина*, која је већа или мања, у зависности од посматраног случаја, *никада није једнака нули.*

4. Од претходних резултата може се доћи до примена аналогних применама класичне теореме средњих вредности. За дати тип једначина писаних, нпр. у облику (13), тражиће се две функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ које се што мање разликују и у околини од $x = x_0$ обухватају функцију $f(x)$. Оне су такве да су обе једначине (16) и (17), које им одговарају, интеграбилне или се бар могу испитивати лакше него дата једначина. Заменићемо посматрани лук $f(x)$ правама, луковима парабола итд. који га садрже и интеграли u и v тако добијених једначина представљаће границе између којих ће варирати интеграл y, док x варира у интервалу од $x_0 - h_1$ до $x_0 + h_2$. Ако се са μ означи највећа апсолутна вредност функције

$$\frac{1}{2}(u - v)$$

у том интервалу за x, тада се може писати

$$y = \frac{1}{2}(u + v) + \varepsilon$$

са

$$|\varepsilon| < \mu.$$

Подсетимо да су услови за интервал $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ према већ реченом ови у том интервалу:

1) функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ су холоморфне и задовољавају услов

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x);$$

2) интеграли u и v једначина

$$\frac{du}{dx} = F(x, u, \varphi),$$
$$\frac{dv}{dx} = F(x, v, \psi),$$

које за $x = x_0$ узимају заједничку вредност y_0, су холоморфни;

3) функције

$$G_1(x, \theta_1) \quad \text{и} \quad G_2(x, \theta_2)$$

су холоморфне и не анулирају се ни за једну вредност од θ_1 и θ_2 између 0 и 1;

4) функција $F(x, y, t)$ је холоморфна док y варира између N_1' и N_2', t између M_1 и M_2, где (M_1', M_2') означавају доњу и горњу границу између којих варирају φ и ψ, а (N_1', N_2') означавају доњу и горњу границу између којих варирају u и v, док x варира између $x_0 - h_1$ и $x_0 + h_2$.

Дужина тог интервала $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ варираће у зависности од типа посматраних једначина; за дати тип она варира у зависности од почетних вредности (x_0, y_0) и изабраних помоћних функција $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. У неким општим случајевима моћи ће се узети произвољно велики интервал.

5. Наведимо, као пример, неке просте примене претходних резултата.

Први пример. Посматрајмо Рикатијеву једначину

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + f(x). \tag{20}$$

Претпоставимо да се вредност $x = x_0$ не поклапа ни са једним сингуларитетом функције $f(x)$, која је дакле непрекидна у неком интервалу (α_1, α_2) око $x = x_0$. Како се функција $H(x, y, t)$ овде своди на 1, имамо

$$G_1(x, \theta_1) = 1, \quad G_2(x, \theta_2) = 1$$

и остаје једино да се одреди интервал (β_1, β_2) са

$$\alpha_1 \leq \beta_1 < x_0 < \beta_2 \leq \alpha_2,$$

у којем би функције за упоређивање u и v биле холоморфне.

Да би функције u и v биле најпростије, претпоставићемо да у интервалу (α_1, α_2) функција $f(x)$ задржава стални знак. Тада разликујемо два случаја.

1. *случај:* $f(x) > 0$. Ако се тада са M_1 и M_2 $(M_1 < M_2)$ означе два позитивна броја, између којих се налази функција $f(x)$, када x варира у интервалу (α_1, α_2), и ако се узме да је

$$\varphi(x) = M_1, \quad \psi(x) = M_2$$

добиће се

$$\begin{aligned} u &= \frac{y_0\sqrt{M_1} + M_1 \operatorname{tg}(x - x_0)\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_1} + y_0 \operatorname{tg}(x - x_0)\sqrt{M_1}}, \\ v &= \frac{y_0\sqrt{M_2} + M_2 \operatorname{tg}(x - x_0)\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_2} + y_0 \operatorname{tg}(x - x_0)\sqrt{M_2}}, \end{aligned} \tag{21}$$

одакле се лако одређују границе интервала (β_1, β_2). У том интервалу интеграл y биће холоморфан и налазиће се између одговарајућих вредности функција u и v дефинисаних са (21).

2. *случај:* $f(x) < 0$. Тада, ако $-M_1$ и $-M_2$ имају претходна значења и ако се узме да је

$$\varphi(x) = -M_1, \quad \psi(x) = -M_2,$$

добиће се

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{M_1}\,\frac{y_0 + \sqrt{M_1} + (y_0 - \sqrt{M_1})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M_1}}}{y_0 + \sqrt{M_1} - (y_0 - \sqrt{M_1})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M_1}}}, \\ v &= \sqrt{M_2}\,\frac{y_0 + \sqrt{M_2} + (y_0 - \sqrt{M_2})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M_2}}}{y_0 + \sqrt{M_2} - (y_0 - \sqrt{M_2})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M_2}}}. \end{aligned} \tag{22}$$

У сваком интервалу око $x = x_0$, у коме су тако дефинисане функције u и v холоморфне, интеграл y је и сам холоморфан и налази се између одговарајућих вредности u и v. Специјално, ако се почетна вредност $y = y_0$ интеграла налази између $-\sqrt{M_1}$ и $+\sqrt{M_2}$, функције u и v су холоморфне за све коначне и реалне вредности x.

Други пример. Посматрајмо једначину

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f(x) \tag{23}$$

за коју је довољно проучити једну од детерминација извода, нпр.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{f(x) - y^2}\,.$$

Да би интеграл био реалан, потребно је да буде

$$y_0^2 < f(x_0)$$

и да је функција $f(x)$ позитивна у посматраном интервалу. Уочимо неки интервал од $x = \alpha_1$ до $x = \alpha_2$ $(\alpha_1 < x_0 < \alpha_2)$, у којем функција $f(x)$ остаје холоморфна и позитивна и са M_1 и M_2 означимо два позитивна броја таква да за $\alpha_1 < x_0 < \alpha_2$ имамо

$$M_1 < f(x) < M_2\,.$$

Ако се узме

$$\varphi(x) = M_1, \qquad \psi(x) = M_2$$

функције за упоређивање u и v биће

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{M_1 - y_0^2}\,\sin(x - x_0) + y_0\cos(x - x_0), \\ v &= \sqrt{M_2 - y_0^2}\,\sin(x - x_0) + y_0\cos(x - x_0) \end{aligned} \tag{24}$$

и оне ће бити непрекидне за све вредности x. С друге стране, овде је

$$\begin{aligned} G_1(x,\theta_1) &= \frac{1}{2\sqrt{R_1(x,\theta_1) - u^2}} \\ G_2(x,\theta_2) &= \frac{1}{2\sqrt{R_2(x,\theta_2) - v^2}}, \end{aligned} \tag{25}$$

са

$$\begin{aligned} R_1(x,\theta_1) &= M_1 + \left[f(x) - M_1\right]\theta_1 \\ R_2(x,\theta_2) &= M_2 + \left[f(x) - M_2\right]\theta_2, \end{aligned}$$

и како за $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$ стално имамо

$$R_1 \geq M_1, \quad R_2 \geq f(x),$$

функције G_1 и G_2 остају холоморфне у интервалу од $x = \beta_1$ до $x = \beta_2$ ($\beta_1 < x_0 < \beta_2$) таквом да у њему важи

$$f(x) - v^2 > 0 \tag{26}$$

јер ћемо тада истовремено имати

$$f(x) - u^2 > 0.$$

Даље, како се може писати

$$v = \sqrt{M_2}\,\sin(x - x_0 + C)$$

са

$$\sin C = -\frac{y_0}{\sqrt{M_2}},$$

услов (26) биће задовољен ако је

$$M_1 - M_2 \sin^2(x - x_0 + C) > 0.$$

Такође, може се наћи интервал (β_1, β_2) и како функција

$$\sqrt{f(x) - y^2}$$

остаје холоморфна док варира између M_1 и M_2, и y варира између најмање и највеће вредности које функције u и v могу да имају у интервалу (β_1, β_2), за све вредности x, које се налазе у заједничком делу интервала (α_1, α_2) и (β_1, β_2), интеграл y биће холоморфан и налазиће се између вредности (24).

Друга детерминација

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{f(x) - y^2}$$

дала би криву која је симетрична са претходном кривом у односу на x-осу.

Трећи пример. За једначину

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = f(x), \tag{27}$$

такође имамо две симетричне криве у односу на x-осу и лако се види да у сваком интервалу x око почетне вредности $x = x_0$, у коме је $f(x)$ непрекидна и позитивна, апсолутна вредност од y налазиће се између апсолутне вредности функција

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
u &= \frac{\sqrt{M_1}}{2}\left(C_1 e^{x} - \frac{1}{C_1} e^{-x}\right),\\
v &= \frac{\sqrt{M_2}}{2}\left(C_2 e^{x} - \frac{1}{C_2} e^{-x}\right),
\end{aligned}
$$

где су константе C_1 и C_2 одређене тако да су те функције једнаке y_0 за $x = x_0$.

6. Уопште узев, нека је дата једначина облика

$$
(29)\qquad \frac{dy}{dx} = F(y, f)
$$

где је f дата функција од x, ако M_1 и M_2 означавају два броја између којих варира функција f када x варира у интервалу (α_1, α_2) са $\alpha_1 < x_0 < \alpha_2$, и ако се узме да је

$$
\varphi(x) = M_1, \qquad \psi(x) = M_2,
$$

добиће се, као функције за упоређивање, функције u и v које су дефинисане инверзијом интеграла

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
x - x_0 &= \int_{y_0}^{u} \frac{du}{F(u, M_1)},\\
x - x_0 &= \int_{y_0}^{v} \frac{dv}{F(v, M_2)}.
\end{aligned}
$$

Вредности x за које u и v постају бесконачне јесу

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + \int_{y_0}^{+\infty} \frac{dt}{F(t, M_1)},\\
x &= x_0 + \int_{y_0}^{+\infty} \frac{dt}{F(t, M_2)},
\end{aligned}
$$

при чему ти одређени интеграли могу да имају више од једне реалне вредности. Други сингуларитети од u и v изводе се директно из једначина

$$\frac{du}{dx} = F(u, M_1),$$
$$\frac{dv}{dx} = F(v, M_2)$$

и моћи ће се одредити неки интервал од $x = x_0 - h_1$ до $x = x_0 + h_2$ који задовољава претходно наведене услове, а такав да је, док x варира у том интервалу, интеграл y стално холоморфан и налази се између u и v.

Ставимо да је

$$\xi_a = x_0 + \int_{y_0}^{a} \frac{dt}{F(t, M_1)},$$
$$\eta_a = x_0 + \int_{y_0}^{a} \frac{dt}{F(t, M_2)},$$

(при чему одређени интеграли могу да имају више од једне реалне вредности)[1] где је a унапред задата вредност, и претпоставимо да су вредности ξ_a, η_a поређане у растућем реду тако да деле интервал $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ на више делимичних интервала.

Сваки делимични интервал, који не садржи вредност x_0 *и који је ограничен вредностима* ξ_a *a и* η_a, *садржи најмање једну вредност* x *за коју интеграл* y *узима вредност* a.

Наиме, ако се посматра један такав интервал, нпр. од $x = \xi_a$ до $x = \eta_a$, неједнакости

$$u \lesseqgtr y \lesseqgtr v$$

за $x = \xi_a$ доводе до

$$a \lesseqgtr y,$$

а за $x = \eta_a$ до

$$y \lesseqgtr a,$$

па ће стога, y, које је коначно и непрекидно за $\xi_a < x < \eta_a$, бити сигурно једнако a за најмање једну вредност од x из тог интервала.

Дакле, ако се стави $a = 0$, види се *да неки интервал, ограничен вредностима* ξ_0 *и* η_0 *које су одређене са*

[1] Може, нпр., бити реалних периода.

$$\xi_0 = x_0 + \int_{y_0}^{0} \frac{dt}{F(t, M_1)},$$

$$\eta_0 = x_0 + \int_{y_0}^{0} \frac{dt}{F(t, M_2)}$$

садржи најмање једну нулу интеграла y.

У претходним разматрањима функцију f заменили смо константама. Али, у специјалним случајевима имаћемо прецизније пропозиције ако f заменимо другим функцијама од x, између којих она варира и које су изабране тако да се добијене нове једначине могу интегрисати. Избор таквих функција зависиће од типа једначине који се посматра.

Приметимо да се добијени резултати такође могу применити на једначине

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, r),$$

где је r променљиви параметар, и да се може испитати варијација интеграла y када тај параметар варира.

7. До сада смо обраћали пажњу на диференцијалну једначину са само једним коефицијентом. Међутим, може се десити да једначине за упоређивање нису интеграбилне када се само један коефицијент f замењује другим функцијама, и то било како да смо их изабрали. Тада ћемо понављати исти поступак узастопно са другим коефицијентима све док добијене једначине не постану интеграбилне.

Претпоставимо да је једначина писана у облику

$$\frac{dv}{dx} = F(x, y, f_1, f_2, f_3, \ldots)$$

и заменимо n коефицијената $f_1, f_2, \ldots, f_n$ најпре функцијама $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, а затим функцијама $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ таквим да у посматраном интервалу x имамо

$$\varphi_i < f_i < \psi_i.$$

Нека су u_n и v_n респективно интеграли тако добијених једначина. Како ће се y у околини $x = x_0$ налазити између u_1 и v_1, а ти интеграли између u_2 и v_2 итд., интеграл y ће се налазити између u_n и v_n. Интервал од x, за који ћемо бити сигурни да ће то и даље важити, одредио би се корак по корак тако што би се одредио за једначине са

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n).$$

Доњу границу дужине тог интервала добили бисмо на начин аналоган случају где се само један коефицијент замењује другим функцијама.

8. Посматрајмо сада једначину облика

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, \varphi),$$

где је φ дата функција од y. На њу се директно могу применити резултати из § 1 и испитати варијација интеграла y када се φ замени другим функцијама од y. Могуће је, користећи исте идеје, уз различите хипотезе о функцијама F и φ, дати прецизније пропозиције о облику интегралне криве.

Посматрајмо, на пример, једначину

$$\frac{dy}{dx} = F(x, \varphi), \tag{31}$$

где је φ дата функција од y и претпоставимо да F и φ задовољавају ове услове:

1) функција $\varphi(y)$ и њен први извод су реалне, непрекидне и *ограничене* функције од y, које остају коначне за све реалне, коначне или бесконачне вредности y . Са M и N означићемо највећу и најмању вредност $\varphi(y)$ док y варира од $-\infty$ до $+\infty$;

2) функција F и њен парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial \varphi}$ су реални, коначни и непрекидни за све вредности x из неког интервала (δ) и за све вредности φ између M и N.

Под тим условима модул од F остаје мањи од неке коначне позитивне вредности за све вредности x из интервала (δ) и за све коначне или бесконачне вредности y. Исто важи и за парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, јер је он дат производом

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Из тога се, према једној познатој теореми, закључује да ће интеграл, који за $x = x_0$ узима унапред задату вредност $y = y_0$ (где су x_0 и y_0 реални и морају да испуњавају једини услов да се x_0 налази у интервалу δ), остати коначан и непрекидан у сваком интервалу од $x = x_0 - h$ до $x = x_0 + h$, који се и сам садржи у интервалу (δ).[2]

---

[2] То је последица теореме изложене у раду г. Picard-а, у књизи G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal,* Paris 1887, t. IV, p. 432.

Претпоставимо сада да су испуњени и додатни услови:

3) функција F и њен парцијални извод $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ задржавају стални знак за све вредности x из интервала од $x_0 - h$ до $x_0 + h$ за било коју вредност φ која се налази између M и N.

4) ако се са k означи произвољна константа која се налази између M и N, интеграл

$$J = \int_a^b F(x, k)\, dx$$

за сваку вредност x, која се налази између $x_0 - h$ и $x_0 + h$, има само једну реалну вредност која је коначна и одређена (али може да има више имагинарних вредности).

Ако се тада, краткоће ради, стави

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, M)\, dx,$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, N)\, dx,$$

интеграл у једначине (31), *који за* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ *узима вредност* $\mathrm{y} = \mathrm{y}_0$, *остајући коначан и непрекидан за све вредности* x, *које се налазе између* $\mathrm{x}_0 - \mathrm{h}$ *и* $\mathrm{x}_0 + \mathrm{h}$, *варира на исти начин и налази се између две функције* $\lambda(\mathrm{x}, \mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ *и* $\mu(\mathrm{x}, \mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$.

Наиме, функција $F(x, \varphi)$, пошто је y замењено својом вредношћу од x, биће и сама коначна и непрекидна за

$$x_0 - h < x < x_0 + h$$

и задржаће сталан знак. Поред тога, извод $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ такође задржава сталан знак за те вредности од x и за $M < \varphi < N$. Претпоставимо, на пример, да је знак позитиван. Функција F је тада растућа по φ, па је

$$F(x, M) < F(x, \varphi) < F(x, N),$$

стога ће се интеграл

$$\int_{x_0}^{x} F(x, \varphi)\, dx,$$

пошто је y замењено својом вредношћу од x, налазити између одговарајућих вредности двају интеграла

$$J_1(x) = \int_{x_0}^{x} F(x, M)\, dx,$$

$$J_2(x) = \int_{x_0}^{x} F(x, N)\, dx,$$

који, на основу 4. хипотезе, за све вредности x које се налазе између $x_0 - h$ и $x_0 + h$, имају само једну реалну вредност, која је коначна и одређена. Пропозиција је, дакле, доказана. Она би на исти начин била доказана ако би се претпоставило да је извод $\dfrac{\partial F}{\partial \varphi}$ негативан.

Може се десити да се интервал (δ) прошири на све коначне вредности x. *Претходна пропозиција се тада примењује за било које почетне вредности* x_0 *и* y_0 *и важи за све реалне вредности* x.

Приметимо да ће у том последњем случају асимптотска вредност интеграла за $x = +\infty$ или за $x = -\infty$ бити коначна или бесконачна, према томе да ли J_1 и J_2 теже ка коначним или бесконачним граничним вредностима за $x = \pm\infty$. Када је она коначна, налази се између

$$y_0 + \lim J_1(x) \quad \text{и} \quad y_0 + \lim J_2(x).$$

На пример, интеграл диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x^2 + \beta e^{-ky^2}$$

где су α и β позитивне константе, који за $x = x_0$ узима вредност $y = y_0$, налази се (за све реалне вредности x) између функција

$$y_0 + \frac{\alpha}{3}(x^3 - x_0^3) + \beta(x - x_0) \quad \text{и} \quad y_0 + \frac{\alpha}{3}(x^3 - x_0^3)$$

и његове асимптотске вредности су бесконачне.

За диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-rx^2}}{1 - \alpha e^{-kx^2} - \beta e^{-kx^2 - py^2}},$$

где су α, β, k, p, r позитивне константе, са $\alpha + \beta < 1$ интеграл y се налази између функција

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - \alpha e^{-kx^2}}\, dx,$$

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - (\alpha + \beta) e^{-kx^2}})\, dx.$$

Асимптотске вредности су коначне и одређене. Ако се са a означи вредност y за $x=0$, његова асимптотска вредност за $x=\infty$ налазиће се између

$$a+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha) \quad \text{и} \quad a+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha+\beta),$$

где $\theta(z)$ означава трансценденту

$$\theta(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{z^n}{\sqrt{r+kn}}.$$

Исто тако, асимптотска вредност за $x=-\infty$ налазиће се између

$$a-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha) \quad \text{и} \quad a-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha+\beta).$$

То следи из тога што је

$$\int_0^\infty \frac{e^{-rx^2}}{1-ze^{-kx^2}}\,dx=\sum_{n=0}^{n=\infty}u_n z^n$$

са

$$u_n=\int_0^\infty e^{-(r+kn)x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{r+kn}}.$$

9. Такво резоновање примењује се такође на једначину

$$\frac{dy}{dx}=F(x,\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n), \tag{32}$$

где је F алгебарска или трансцендентна функција од x и φ_i дате функције од y, када су испуњени следећи услови:

1) све функције φ_i и њихови први изводи су реални, непрекидни и *ограничени* по y;

2) ако се са M_i, N_i означе најмања и највећа вредност функције $\varphi_i(y)$ док y варира од $-\infty$ до $+\infty$, функција F и њени парцијални изводи

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial\varphi_n} \tag{33}$$

су реални, коначни и непрекидни за све вредности x које се налазе у неком интервалу (δ)[3] и за све вредности од φ_i $(i=1,2,\dots,n)$ које се налазе између M_i и N_i.

[3] Тај интервал је симетричан у односу на x_0.

3) функција F и њени парцијални изводи (33) задржавају сталан знак за све вредности x из интервала (δ) за произвољне вредности функција φ_i између M_i и N_i.

4) ако се са

$$k_1, k_2, \dots, k_n$$

означе било које константе такве да је

$$\begin{aligned} M_1 &< k_1 < N_1, \\ M_2 &< k_2 < N_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ M_n &< k_n < N_n \end{aligned}$$

интеграл

$$J = \int_{x_0}^{x} F(x, k_1, k_2, \dots, k_n)\, dx$$

за све вредности x из интервала (δ) има само једну вредност која је реална, коначна и одређена (али може да има више имагинарних вредности).

Ако су ти услови испуњени, ако су

$$i = 1, 2, 3, \dots h$$

индекси позитивних извода $\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_i}$, а

$$i = h+1, h+2, \dots, n$$

индекси негативних извода и ако се, краткоће ради, стави

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, M_1, \dots, M_h; N_{h+1}, \dots, N_n)\, dx,$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, N_1, \dots, N_h; M_{h+1}, \dots, M_n)\, dx,$$

лако се доказује следећи резултат.

Интеграл у (32), *који за* $x = x_0$ *узима вредност* $y = y_0$, *је коначан и непрекидан за све вредности* x *које се налазе у интервалу* (δ), *стално варира на исти начин и налази се између*

$$\lambda(x, x_0, y_0) \quad \text{и} \quad \mu(x, x_0, y_0).$$

10. Приметимо на крају да чак и у случају када је интеграција дате једначине могућа, често се дешава да се облик интегралне криве боље види ако се имају у виду дате просте напомене, него кроз директно конструисање, које би довело до дугог рачунања. Тако се израчунавају неке значајне тачке криве и још неколико других тачака, ако је потребно, које би служиле као исходиште. Неки коефицијенти $f_1, f_2, \ldots$, који се налазе у диференцијалној једначини заменили би се једноставнијим функцијама, тако изабраним да се добију функције за упоређивање u и v, које су једноставније него експлицитни израз за y. Поступајући тако за сваки интервал који нам је потребан, добро ћемо уочити понашање криве y и граница између којих она варира у датим интервалима x, итд.

Најзад, често је корисно применити те напомене на трансформације дате једначине. Ако би се оне, на пример, примениле на трансформације у поларним координатама, добили би се интервали за поларни угао, где крива стално остаје унутар неког круга. Ако је тај интервал од $-\infty$ до $+\infty$, крива ће се у целости налазити унутар таквог круга. Такође ће се добити подаци о тачкама пресека интегралне криве са датим кругом итд.**

** Овом Петровићевом расправом користио се E. Cotton, *Sur l'intégration approchée des équations différentielles*, Acta mathematica, Stockholm 1908, t. XXXII, а Hamburger је дао приказ расправе у FdM, B. 32, S. 336–337 (пр. Д. Т.).

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА*

1. Постоји бесконачно много диференцијалних једначина првог реда чији је општи интеграл облика

$$y = f(C)\lambda(x) + \varphi(C)\mu(x) \tag{1}$$

где су f и φ функције константе интеграције C, а λ и μ су функције од x, или пак, што се своди на исто, облика

$$y = C_1\lambda(x) + C_2\mu(x), \tag{2}$$

где су константе C_1 и C_2 међусобно повезане релацијом

$$\Phi(C_1, C_2) = 0. \tag{3}$$

Тако једначина

$$y'^2 + y^2 = 1$$

има за општи интеграл

$$y = C\sin x + \sqrt{1 - C^2}\cos x,$$

а једначина

$$x^2y'^2 - 6xyy' - x^2y' + 9y^2 + 2xy = 0$$

има за интеграл

$$y = Cx^2 + C^2x^3,$$

а једначина

$$y'^2 - yy' + e^x = 0$$

допушта као интеграл

---

* Наслов оригинала *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre,* Věstnik Král. české společnosti náuk, Praha, 1901, Třida math. přirodovědecká, t. XXXI, pp. 1–20. Саопштено у Чешкој академији наука 5. јула 1901.

$$y = C + \frac{1}{C} e^x, \text{ итд.}$$

Сви ти општи интеграли су типа (2).

Краткоће ради, *једначином (Е)* зваћемо сваку једначину првог реда која има наведену особину и управо те једначине ће бити предмет овог рада.

2. Најпре поставимо за циљ да препознамо да ли је дата једначина

$$(4) \qquad F(x, y, y') = 0$$

једначина типа (E). У ту сврху приметимо да је, да би то важило, потребно и довољно да општи интеграл (2) те једначине задовољава неку линеарну хомогену једначину другог реда

$$(5) \qquad y'' = \varphi_1(x)\, y' + \varphi_2(x)\, y$$

(где су φ_1 и φ_2 непознате функције од x) и да се он изведе из општег интеграла од (5) када се успостави релација између константи интеграције које се у њему јављају. Интеграл y треба, дакле, да истовремено задовољава (4) и једначину

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + (\varphi_1 y' + \varphi_2 y) \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

добијену диференцирањем једначине (4) и замењујући y'' вредношћу (5).

Да би дата једначина (4) *била једначина типа* (Е), *потребно је и довољно да се функције* φ_1 *и* φ_2 *могу одредити тако да се једначина* (6) *сведе на идентитет ако се узме у обзир* (4).

Ако је тај услов испуњен, биће познате функције φ_1 и φ_2 и формираће се линеарна једначина (5) коју ће задовољавати y. Претпоставимо да је та једначина интегрисана и нека је

$$(7) \qquad y = C_1 u + C_2 v$$

њен општи интеграл. Ако се тај интеграл замени у једначину (4), она ће се свести на релацију

$$\Phi(C_1, C_2) = 0$$

између константи интеграције која одговара датом случају.

3. Применимо те напомене на једначину

$$(8) \qquad y'^2 + u_1 y y' + u_2 y' + u_3 y^2 + u_4 y + u_5 = 0,$$

где су u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 произвољне функције од x и потражимо услове које треба да задовољавају те функције да би једначина (8) била једначина типа (E).

Једначина (6) је овде

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad & (u_1+2\varphi_1)\,y'^2+(u_1'+2u_3+\varphi_1 u_1+2\varphi_2)\,yy'+(u_2'+u_4^4+\\
& +\varphi_1 u_2)\,y'+(u_3'+\varphi_2 u_1)\,y^2+(u_4'+\varphi_2 u_2)\,y+u_5=0.
\end{aligned}
$$

Да би та једначина била истоветна са (8), стављајући

$$\frac{u_5'}{u_5}=v_5$$

потребно је и довољно да буде

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
& u_1+2\varphi_1=v_5\\
& u_1'+\varphi_1 u_1+2u_3+2\varphi_2=u_1 v_5\\
& u_2'+u_4+\varphi_1 u_2=u_2 v_5\\
& u_3'+\varphi_2 u_1=u_3 v_5\\
& u_4'+\varphi_2 u_2=u_4 v_5.
\end{aligned}
$$

Елиминацијом φ_1 и φ_2 добијају се три једначине

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
& u_2 u_3'-u_1 u_4'=(u_2 u_3-u_1 u_4)\,v_5\\
& u_1 u_2-2u_2'-2u_4=0\\
& u_1' u_2-u_1 u_2'+2u_2 u_3-u_1 u_4-2u_4'=-2u_4 v_5
\end{aligned}
$$

које изражавају тражене услове. Ако су они испуњени, добићемо одговарајућу функцију φ_1 из прве, а φ_2 из четврте или пете једначине (10). Општи интеграл ће се добити интеграцијом линеарне једначине

$$y''=\varphi_1 y'+\varphi_2$$

и биће облика

$$y=C_1\lambda(x)+C_2\mu(x).$$

Ако се он стави у (8), та једначина ће се свести на релацију другог реда

$$K_1C_1^2+K_2C_1C_2+K_3C_2^2+K_4C_1+K_5C_2+K_6=0$$

између константи интеграције, где су коефицијенти K_i константни.

У посебним случајевима, где су неки коефицијенти μ_i једнаки нули, релације (10) се упрошћавају и доводе до релација између u_i који су различити од нуле и чији је број мањи од 3.

Тако за једначину

$$(12)\qquad y'^2+u_1 yy'+u_5=0$$

имамо

$$u_2 = 0, \qquad u_3 = 0, \qquad u_4 = 0,$$

а једначине (10) се своде на

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} u_1 + 2\varphi_1 &= v_5 \\ u_1' + \varphi_1 u_1 &= u_1 v_5 \\ \varphi_2 u_1 &= 0. \end{aligned}$$

Из тога се изводи $\varphi_2 = 0$ и када се елиминише φ_1 између прве две једначине, добија се само релација

$$\text{(14)} \qquad 2u_1' - u_1^2 = u_1 v_5$$

између коефицијената u_1 и u_5. Ако је она испуњена, имаћемо

$$\text{(15)} \qquad \varphi_1 = \frac{u_5'}{u_5} - \frac{u_1'}{u_1}$$

и y ће бити дато са

$$y'' = \left(\frac{u_5'}{u_5} - \frac{u_1'}{u_1}\right) y',$$

одакле се изводи

$$\text{(16)} \qquad y = K_1 \int \frac{u_5}{u_1} dx + K_2,$$

где су K_1 и K_2 константе. С друге стране, из (14) се изводи

$$\frac{2u_1'}{u_1} - u_1 = \frac{u_5'}{u_5},$$

одакле је

$$\text{(17)} \qquad u_5 = u_1^2 e^{-\int u_1 dx},$$

где је a константа. Замењујући u_5 у (16), имаћемо

$$\text{(18)} \qquad y = C_1 e^{-\int u_1 dx} + C_2.$$

Према томе, *увек када је једначина* (12) *тийа (Е), њен ойшти интеграл је облика* (18). Константе C_1 и C_2 су повезане релацијом

$$C_1 C_2 = \text{const.},$$

што можемо проверити тако што у (12) заменимо y вредношћу (18) водећи рачуна о релацији (17).

Тако, на пример, у специјалном случају, где је

$$u_1 = -1, \quad u_5 = e^x,$$

услов (14) је задовољен а општи интеграл одговарајуће једначине је

$$y = C_1 e^x + C_2$$

са

$$C_1 C_2 = 1.$$

Ако се претходно изложено примени на једначину

$$y'^2 + y^2 = f(x),$$

лако се налази да је једини случај у коме је та једначина типа (E) случај

$$f(x) = \text{const.} = a;$$

интеграл је у том случају

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

са

$$C_1^2 + C_2^2 = a.$$

4. Да бисмо формирали све једначине (E), приметимо да се из једначина

$$\begin{aligned} y &= C_1\lambda + C_2\mu, \\ y' &= C_1\lambda' + C_2\mu', \end{aligned} \tag{19}$$

изводи

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\mu' y - \mu y'}{\mu'\lambda - \mu\lambda'}, \\ C_2 &= \frac{\lambda' y - \lambda y'}{\mu'\lambda - \mu\lambda'} \end{aligned} \tag{20}$$

и, како константе C_1 и C_2 треба да буду везане помоћу

$$\Phi(C_1, C_2) = 0,$$

диференцијална једначина ће имати облик

$$\Phi\left(\frac{\mu' y - \mu y'}{\mu'\lambda - \mu\lambda'}, \frac{\lambda' y - \lambda y'}{\mu'\lambda - \mu\lambda'}\right) = 0. \tag{21}$$

Ако се стави

$$\begin{aligned} &\frac{\mu'}{\mu'\lambda-\mu\lambda'}=\alpha, \quad -\frac{\mu}{\mu'\lambda-\mu\lambda'}=\beta, \\ &\frac{\lambda'}{\mu'\lambda-\mu\lambda'}=\gamma, \quad -\frac{\lambda}{\mu'\lambda-\mu\lambda'}=\delta, \end{aligned} \tag{22}$$

одакле се изводи најпре

$$\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{\mu'}{\mu}, \quad \frac{\gamma}{\delta}=-\frac{\lambda'}{\lambda}, \tag{23}$$

а затим

$$\begin{aligned} &\lambda'=\frac{\gamma}{\beta\gamma-\alpha\delta}, \quad \lambda=\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \\ &\mu'=\frac{\alpha}{\beta\gamma-\alpha\delta}, \quad \mu=\frac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \end{aligned} \tag{24}$$

долази се до резултата да *свака једначина (Е) може да се сведе на облик*

$$\Phi(\alpha y+\beta y', \gamma y+\delta y')=0, \tag{25}$$

где је Φ *било која функција две променљиве;* α, β, γ, δ *су функције од* x *међусобно повезане релацијама*

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma}{\beta\gamma-\alpha\delta}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}\right) \\ &\frac{\alpha}{\beta\gamma-\alpha\delta}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Пошто се функције α, β, γ, δ које одговарају некој датој једначини (E) одреде, из (23) ће се извести

$$\begin{aligned} &\lambda=e^{-\int\frac{\alpha}{\beta}dx} \\ &\mu=e^{-\int\frac{\gamma}{\delta}dx} \end{aligned} \tag{27}$$

а општи интеграл једначине биће

$$y=C_1e^{-\int\frac{\alpha}{\beta}dx}+C_2e^{-\int\frac{\gamma}{\delta}dx}, \tag{28}$$

где су константе C_1 и C_2 повезане релацијом

$$\Phi(C_1, C_2)=0.$$

До истог резултата се долази ако се посматра следећи проблем. Ако је дата линеарна једначина другог реда

(29) $$y'' = \varphi_1 y' + \varphi_2 y,$$

формирати све једначине (E) које јој одговарају. Ако је

(30) $$F(x, y, y') = 0$$

једна таква једначина, функција F од три променљиве x, y, y' биће дата интеграцијом парцијалне једначине

(31) $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + (\varphi_1 y' + \varphi_2 y) \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Та једначина се своди на систем

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{\varphi_1 y' + \varphi_2 y}$$

еквивалентан систему

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = \varphi_1 y' + \varphi_2 y,$$

чији су интеграли облика

$$y = C_1 \lambda(x) + C_2 \mu(x),$$
$$y' = C_1 \lambda'(x) + C_2 \mu'(x).$$

Из тога се изводе C_1 и C_2 у облику (20) и обележавајући са φ произвољну функцију, за најопштију функцију E добиће се

$$\varphi(\alpha y + \beta y', \gamma y + \delta y'),$$

где су, као и малочас, α, β, γ, δ повезани релацијама (26).

Тако, ако се узме

$$\alpha = \sin x, \quad \beta = \cos x,$$
$$\gamma = -\cos x, \quad \delta = \sin x,$$
$$\varphi(u, v) = u^2 + v,$$

формираће се једначина

$$y'^2 \cos^2 x + 2yy' \sin x \cos x + y' \sin x + y^2 \sin^2 x - y \cos x = 0,$$

која као општи интеграл има

$$y = C \sin x + C^2 \cos x.$$

Ако се стави

$$\alpha = -\frac{1}{x^2}, \quad \beta = \frac{1}{x},$$
$$\gamma = \frac{2}{x'}, \quad \delta = -1,$$
$$\varphi(u, v) = u^2 + v^2 - 1$$

добиће се једначина

$$(xy' - y)^2 + (2xy - x^2 y')^2 - x^4 = 0,$$

чији је општи интеграл

$$y = Cx^2\sqrt{x}\sqrt{1 - C^2} \qquad \text{итд.}$$

5. Из израза

$$y = C_1\lambda(x) + C_2\mu(x)$$

за општи интеграл види се да су сви његови сингуларитети независни од константе интеграције. Ако, дакле, посматрана једначина припада типу о коме је овде реч, она треба најпре да задовољава услове г. Фукса који се односе на фиксиране критичне тачке; затим, она треба да има бесконачне фиксиране вредности интеграла. Тај последњи услов је врло лако проверити на датој једначини. Он се састоји у следећем.

Дата је једначина

$$\sum_{i=0}^{i=m} F_i(x, y)\, y'^{m-i} = 0,$$

где су F_i полиноми по y, чији су коефицијенти било које функције од x. Да би бесконачне вредности општег интеграла били фиксиране, потребно је и довољно да, ако се са K_i означи степен полинома F_i по y, истовремено буде

$$K_1 - K_0 \leq 1$$
$$K_2 - K_0 \leq 2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$K_m - K_0 \leq m.$$

Те напомене често поједностављују питање препознавања да ли је дата једначина типа (E). Оне такође омогућавају да се прецизирају једначине (E) које припадају неком општем типу једначина првог реда.

Тако, оне директно доводе до резултата по коме *од свих* једначина првог реда и првог степена

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где су P *и* Q *полиноми по* y, *једина једначина која је типа* (E) *јесте линеарна једначина.*

Потражимо, исто тако, све једначине (E) које припадају типу биномних једначина

$$y'^m = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}. \tag{32}$$

Најпре, Q не може садржати y и степен од P по y је највише једнак m. Нека је $y = \eta$ корен од $P(x,y) = 0$, за који се y' дефинисано преко (32) грана. Према условима г. Фукса, $y = \eta$ треба да буде интеграл од (32), и при том треба да имамо

$$\zeta = \frac{d\eta}{dx},$$

где са ζ означавамо заједнички корен y' за две једначине

$$y'^m - P(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}[y'^m - P(x,y)] = 0,$$

а како је тај корен $y' = 0$, добиће се

$$\frac{d\eta}{dx} = 0,$$

тј. η је константа.

Према томе, увек када полином $P(x,\eta)$ садржи факторе облика $y - \eta$, где је η функција од x, тачка $y = \eta$ (где се сматра да је x константа) није тачка гранања од y', дефинисаног са (32). Из тога следи да, ако такви фактори постоје, сви они морају бити степена једнаког m или неком умношку од m. Али, како степен полинома P по y не може да пређе m, ако такав фактор постоји, он је јединствен и P мора да има облик

$$P(x,y) = \chi(x)(y-\eta)^m;$$

у том случају једначина (32) се своди на линеарну једначину

$$y' = \sqrt[m]{\chi(x)}(y-\eta).$$

Да се то не би догодило треба, дакле, да P има облик

$$P(x,y) = \chi(x)S(y),$$

где је S полином по y са константним коефицијентима, степена који не прелази m . Ако се стави

(33) $$\sqrt[m]{\chi(x)}dx = dz,$$

једначина (32) постаје

(34) $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = S(y).$$

Да би критичне тачке од y, које се посматрају као функције од x, биле фиксиране, потребно је и довољно да општи интеграл од (34) буде униформан. Дакле, међу типовима биномних једначина (34), које су интеграбилне помоћу униформних функција и које су прецизирали Брио и Буке, има само два типа

(35) $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = g(y-a)^{m-1}, \qquad \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = g(y-a)(y-b),$$

где су a, b, g константе чији општи интеграли немају ниједан сингуларитет који варира са константом интеграције. Ако се dz замени својом вредношћу (33), првој једначини (35) одговараће једначина

(36) $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = \Theta(x)(y-a)^{m-1}$$

која за општи интеграл има

$$y = a + \left[C + \frac{1}{m}\int \sqrt[m]{\Theta(x)}\, dx\right]^m,$$

а другој ће одговарати једначина

(37) $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \Theta(x)(y-a)(y-b)$$

чији је општи интеграл

$$y = \frac{1}{2}(a+b) + Ce^{\int \frac{dx}{\sqrt[n]{\Theta(x)}}} + \frac{(a-b)^2}{4C}e^{-\int \frac{dx}{\sqrt[n]{\Theta(x)}}}.$$

Посматрана једначина би могла да буде типа (E) само за $m = 1$. Да би (37) била типа (E), потребно је и довољно да је

$$a + b = 0.$$

Из тога се изводи следећи закључак.

Међу свим биномним једначинама

$$y'^m = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

ако се остави по страни линеарна једначина, једина једначина која је типа (E) *јесте једначина*

$$y'^2 = \Theta(x)(y^2 + K)$$

(где је K константа, а Θ произвољна функција од x), чији је општи интеграл

$$y = Ce^{\int \frac{dx}{\sqrt[m]{\Theta(x)}}} + \frac{K}{C} e^{-\int \frac{dx}{\sqrt[m]{\Theta(x)}}}.$$

Лако је видети да *ранг једначине* (E) *по* y *и* y′ *не би могао да буде једнак јединици.* Наиме, када би ранг био 1, како општи интеграл једначине има фиксиране критичне тачке, према познатој теореми г. Поенкареа, тај интеграл би био рационална функција [чији су коефицијенти алгебарске функције коефицијената $\varphi_i(x)$ саме једначине] облика

$$\lambda[\int \chi(x)\,dx + C],$$

где симбол λ означава мероморфну двоструко периодичну функцију, а $\chi(x)$ је алгебарска функција коефицијената $\varphi_i(x)$. Интеграл би, дакле, имао полове који би варирали са константом интеграције, а дата једначина не би могла да буде једначина типа (E).

Када је реч о релацији

$$\Phi(C_1, C_2) = 0$$

између константи интеграције, може се приметити да ће она увек бити алгебарска ако је посматрана диференцијална једначина и сама алгебарска по y и y'. Штавише, када се једначина доведе на облик

$$\Sigma\varphi_i(x)\, y^{m_i} y'^{n_i} = 0, \tag{38}$$

степен алгебарске криве $\Phi = 0$ биће највише једнак највећој вредности $m_i + n_i$. Иначе се релација $\Phi = 0$ не би могла свести на једначину (38) линеарном сменом

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha y + \beta y', \\ C_2 &= \gamma y + \delta y'. \end{aligned} \tag{39}$$

Додајмо још једну општу напомену која се односи на аналитичку природу општег интеграла неке једначине (E), који се посматра као функција од x.

Пошто се α, β, γ, δ погодно изаберу и ако у датој једначини извршимо смену (39), еквивалентну са

$$(40)\qquad \begin{aligned} y &= \frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}C_1 - \frac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}C_2 \\ y' &= \frac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}C_1 - \frac{\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}C_2, \end{aligned}$$

једначина треба да се сведе на релацију $\Phi(C_1,C_2)=0$. Према томе, α, β, γ, δ су алгебарске комбинације функција од x које се експлицитно налазе у датој једначини. Имајући у виду једначину (28), из тога се закључује да: *општи интеграл свих алгебарских једначина типа* (E) *има облик*

$$y = C_1 e^{\int\varphi(x)dx} + C_2 e^{\int\psi(x)dx},$$

где су φ *и* ψ *алгебарске комбинације коефицијената једначине.*

6. Ако је дата нека једначина (E), претпоставимо да смо одредили функције $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ које јој одговарају и да смо формирали одговарајућу линеарну једначину другог реда

$$(41)\qquad y'' = \varphi_1 y' + \varphi_2 y.$$

Свакој пропозицији која се односи на интеграле једначине (41) одговараће пропозиција која се односи на интеграле дате једначине (E).

Специјално, ако је u партикуларни интеграл једначине (E), он ће такође бити интеграл одговарајуће једначине (41). Како је општи интеграл те једначине

$$(42)\qquad y = C_1 u + C_2 u \int \frac{e^{\int\varphi_1 dx}}{u^2}dx,$$

општи интеграл од (E) ће се добити ако се у (42) између C_1 и C_2 успостави нека релација Φ = 0. То је релација на коју ће се свести дата диференцијална једначина када се y замени са (42).

Ако су u и v два партикуларна интеграла од (E), њен општи интеграл ће бити

$$y = C_1 u + C_2 v,$$

са $\Phi(C_1,C_2)=0$.

Како су једначине (E) тесно повезане са хомогеним линеарним једначинама другог реда, може се дати неколико алгебарских напомена у вези са вредностима које анулирају њихове интеграле.

Тако, вишеструке нуле од y не варирају са константом интеграције и, у случају да такве нуле заиста постоје, оне се налазе међу сингуларитетима једне од функција φ_1 и φ_2, које се налазе у једначини (41).

Посматрајмо сада просте нуле, које варирају са константом интеграције. Ако се стави

$$y = ze^{\frac{1}{2}\int \varphi_1\, dx},$$

једначина (41) постаје

$$z'' + \tilde{\omega}(x) z = 0 \tag{43}$$

са

$$\tilde{\omega}(x) = \frac{1}{2}\varphi_1' - \frac{1}{4}\varphi_1^2 - \varphi_2. \tag{44}$$

Упоредимо најпре међусобно интеграле две једначне (E_1) и (E_2), где прва одговара функцији $\tilde{\omega}_1(x)$, а друга функцији $\tilde{\omega}_2(x)$. Ако су у интервалу од $x = a$ до $x = b$ функције $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$ коначне и непрекидне и ако је, поред тога,

$$\tilde{\omega}_1(x) \leq \tilde{\omega}_2(x),$$

онда две узастопне нуле општег интеграла од (E_1) садрже најмање једну нулу интеграла од (E_2). То непосредно произлази из познате Штурмове теореме, примењене на једначину (43).

Нека је, затим, $\tilde{\omega}(x)$ функција дефинисана по (44), која одговара датој једначини (E). Поделимо дати интервал (a, b) на подинтервале (α, β) у којима $\tilde{\omega}(x)$ задржава стални знак. На основу онога што је познато о хомогеним линеарним једначинама другог реда, лако се долази до следећих резултата.

1) У сваком интервалу (α, β) у коме функција $\tilde{\omega}(x)$ остаје коначна, непрекидна и стално негативна, интеграл y не може да се анулира више од једанпут.

2) Ако је у интервалу (α, β) функција $\tilde{\omega}(x)$ коначна, непрекидна и позитивна, и ако се са M и N означе највећа и најмања вредност коју та функција узима у том интервалу, број нула интеграла y, које се налазе између α и β биће најмање једнак целом броју садржаном у

$$\frac{(\beta-\alpha)\sqrt{N}}{\pi},$$

а највише ће бити једнак целом броју садржаном у

$$\frac{(\beta-\alpha)\sqrt{M}}{\pi}$$

и тако редом.

7. Проблем који смо обрађивали може се уопштити на следећи начин.

Ако је унапред дата функција

$$F(\overline{C}_1, \overline{C}_2, x) \tag{45}$$

од C_1 и C_2, чији су коефицијенти произвољне функције од x, тада постоји бесконачно много диференцијалних једначина првог реда

$$F(x, y, y') = 0 \tag{46}$$

чији је општи интеграл облика

$$y = f(\overline{C}_1, \overline{C}_2, x) \tag{47}$$

са неком релацијом

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \tag{48}$$

између константи.

Тако, једначина

$$xy'^2 - (x+y)\,y' + 1 = 0$$

припада типу једначина чији општи интеграл има облик

$$y = \frac{\lambda(x) + C\mu(x)}{\nu(x) + \sqrt{C}\,\eta(x)},$$

при чему је њен интеграл

$$y = \frac{x+C}{x+\sqrt{C}}.$$

Ако се у произвољној једначини (E) y замени са $\frac{1}{y}$, интеграл нове једначине биће

$$y = \frac{1}{C_1\lambda(x) + C_2\mu(x)}$$

са $\Phi(C_1, C_2)$ итд.

Када је дата функција (45) од C_1 и C_2, где се x јавља на произвољан начин, може се поставити циљ:

1) да се препозна да ли дата једначина $F(x, y, y') = 0$ има интеграл у облику (47);

2) да се формирају све једначине првог реда које задовољавају тај услов.

Први проблем могао би да се решава на следећи начин. Формирајмо најопштију диференцијалну једначину другог реда која има (47) као општи интеграл, при чему су коефицијенти по x од C_1 и C_2 произвољни. То можемо да урадимо ако елиминишемо C_1 и C_2 из три једначине

$$y = f(C_1, C_2, x),$$
$$y' = \frac{df}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 f}{dx^2}. \tag{49}$$

Резултат ће бити нека једначина другог реда

$$\Psi(x, y, y', y'') = 0, \tag{50}$$

чији су коефицијенти произвољне функције од x, које међусобно могу да буду повезане извесним диференцијалним релацијама

$$X_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{51}$$

Да би једначина $F = 0$ имала општи интеграл облика (47), потребно је и довољно да тај интеграл задовољава истовремено две једначине првог реда

$$F(x, y, y') = 0,$$
$$H(x, y, y') = 0, \tag{52}$$

где је друга једначина добијена елиминацијом y'' из $F = 0$ и једначине (49). Самим тим моћи ће се одредити коефицијенти једначине (50), који се такође налазе у $H = 0$, тако што ће се $H = 0$, ако се има у виду да је $F = 0$, свести на идентитет и што они истовремено задовољавају релације (51) у случају да оне заиста постоје.

Пошто је тај услов испуњен, биће познати коефицијенти једначине (50). Како је та једначина интегрисана и ако је (49) њен општи интеграл (начин на који x улази у f овог пута је познат), он ће истовремено бити општи интеграл дате једначине са константама које су повезане неком релацијом. То је релација на коју ће се свести идентично дата диференцијална једначина пошто се y и y' замене њиховим изразима датим у (49).

Тако, да би општи интеграл једначине $F(x, y, y') = 0$ био облика

$$y = \nu(x) + f(C)\lambda(x) + \varphi(C)\mu(x), \tag{53}$$

потребно је и довољно да могу да се одреде три функције

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x)$$

тако да се једначина

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + (\varphi_1 y' + \varphi_2 y + \varphi_3) \frac{dF}{dy'} = 0$$

сведе на идентитет када се узме у обзир релација $F(x, y, y') = 0$. Пошто се те три функције одреде, општи интеграл дате једначине добиће се интеграцијом линеарне једначине другог реда са другим чланом

$$y'' = \varphi_1 y' + \varphi_2 y + \varphi_3$$

ако се између њене две константе интеграције успостави извесна релација.

Примећујући да, ако дата једначина задовољава претходно дате услове, сви сингуларитети њеног општег интеграла су фиксирани и, ако се позовемо на резоновање из §5, лако утврђујемо да *од свих биномних једначина*

$$y'^m = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

једине једначине чији општи интеграл може да се пише у облику (53) – *ако се остави по страни линеарна једначина – јесу следеће једначине*

$$\begin{aligned} y'^m &= \chi(x)(y-a)^{m-1} \\ y'^2 &= \chi(x)(y-a)(y-b), \end{aligned}$$

где су a, b *константе, а* χ(x) *произвољна функције од* x.

Проблем формирања свих једначина првог реда које одговарају датој функцији (45) био би решен ако се израчунају C_1 и C_2 из прве две једначине (49) тако да је, на пример,

$$\begin{aligned} C_1 &= \chi_1(x, y, y') \\ C_2 &= \chi_2(x, y, y'). \end{aligned}$$

Свака једначина која задовољава тражени услов припада типу

$$\Phi(\chi_1, \chi_2) = 0,$$

при чему је Ф произвољна функција.

Тако, свака једначина првог реда чији општи интеграл може да се пише у облику

$$y = \frac{C_1\lambda(x) + \mu(x)}{C_2\nu(x) + \eta(x)},$$

где су C_1 и C_2 међусобно повезани,припада типу

$$\Phi\left(\frac{Ay' + By^2 + Dy}{Ey' + Gy}, \frac{My' + Ny^2 + P}{Ey' + Gy}\right) = 0, \tag{54}$$

где су A, B, D, E, G, M, N, P произвољне функције од x, међусобно повезане диференцијалним релацијама које је лако формирати. У посебном случају у коме је функција $\Phi(C_1, C_2)$ линеарна у односу на C_1 и C_2, једначина (53) се своди на Рикатијеву једначину. Уосталом, било која Рикатијева једначина, припада типу о којем је овде реч.

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ОСЦИЛАТОРНИМ ИНТЕГРАЛИМА*

УВОД

Кад једна функција $f(x)$, коначна и непрекидна у једноме датом размаку променљиве величине x, мења више пута знак у томе размаку, што може бити само проласком кроз вредност 0, она у њему има *осцилаторан карактер*. *Честина* осцилација у размаку (a, b) одређена је бројем нула функције у томе размаку; *ритам* осцилација одређен је распоредом тих нула. Познавање та два елемента: честине и ритма осцилација једне функције са осцилаторним карактером јесте баш оно што је од битне важности за *квалитативно* познавање такве функције.

У случајевима кад се ти елементи односе на коначне и непрекидне интеграле диференцијалних једначина, њихово је познавање еквивалентно *квалитативној интеграцији* таквих једначина, која у многим случајевима може заменити неостварљиву или заметну *квантитативну интеграцију*.

Најважнији тип диференцијалних једначина, које имају за интеграле функције са осцилаторним карактером, представљају, без сумње, линеарне једначине другога реда. Познато је да је таква једна једначина елементарном трансформацијом сведена на облик

$$y'' + f(x)y = 0.$$

1) Кад год је функција $f(x)$ у једном датом, довољно пространом, размаку променљиве x коначна, непрекидна и позитивна, интеграли такве једначине уопште су осцилаторне функције те променљиве у таквом размаку.

2) Честина и ритам осцилација могу се у таквом једном размаку одредити непосредно из познавања начина на који се функција $f(x)$ мења у томе размаку.

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXVII, Први разред, књ. 31, Београд, 1909, стр. 45–65. Саопштено у Академији природних наука (даље у тексту АПН) 17. новембра 1900.

У овој ће расправи, међутим, бити показано да се поменути елементи могу проучити и на много генералнијим типовима диференцијалних једначина свију редова, формираним на један извесни начин, наиме, на једначинама облика

$$(1) \qquad y'' + y\Psi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где функција Ψ задовољава нарочите погодбе о којима ће мало даље бити реч, а које обухватају линеарне једначине другога реда као специјални случај.

За једначине таквога типа, ма кога реда оне биле, биће доказано:

1) да им они интеграли, који су коначни и непрекидни у једноме датом довољно пространом размаку $x - a$, као и њихови узастопни изводи до n-тог закључно, уопште имају осцилаторан карактер;

2) да се честина и ритам осцилација у датом размаку могу проучити непосредно знајући само начин на који се извесне функције, што фигуришу као коефицијенти у Ψ, мењају са x-ом у томе размаку.

На тај начин могућно је формирати читаве класе диференцијалних једначина свију редова, код којих је за коначне и непрекидне интеграле у датом размаку остварљива квалитативна интеграција, или код којих се бар могу у довољној мери прецизирати они елементи који су од битне важности при таквој интеграцији.

ФОРМИРАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА (1) СА ОСЦИЛАТОРНИМ ИНТЕГРАЛИМА

Постоји бескрајно много и бескрајно разноврсних, како алгебарских тако и трансцендентних, функција

$$F(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

са $n + 2$ независно промењљиве величине које, кад се промењљива x буде мењала у једноме датом размаку (a, b), остају непрестано позитивне и веће од једнога сталног позитивног броја N, па ма којим системом реалних вредности сменили у функцији остале промењљиве $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Таква би нпр. међу алгебарским функцијама промењљивих $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ била функција

$$F = P(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n) + f(x),$$

где је P ма какав полином који садржи само *йарне* степене променљивих $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, са коефицијентима који су или сталне позитивне величине или ма какве функције променљиве x позитивне у размаку (a, b); напослетку $f(x)$ је ма каква функција позитивна у томе размаку.

Један специјалан пример те врсте представљала би функција

$$F = a + by_i^2 + cy_i^2 y_h^2,$$

где су a, b, c позитивне константе; функција за све реалне вредности x, y_i, y_k, y_h остаје позитивна и већа од a.

Функција

$$F = x^2 - 1 + (x-2)\, y_i^2 y_k^2 - (x^2 - 16)\, y_h^4,$$

кад се x буде мењало нпр. у границама (3, 4), остаје позитивна и већа од 8 за све реалне вредности $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Од трансцендентних функција овакве врсте навешћемо нпр. функцију

$$F = f(x) + \varphi(x)\, e^{-P(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

где је P опет који од горњих полинома, а $f(x)$ и $\varphi(x)$ ма какве функције $x - a$ коначне, непрекидне и позитивне у размаку (a, b).

Тако исто постоји бескрајно много и бескрајно разноврсних, како алгебарских тако и трансцендентних функција

$$\Phi(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

таквих да док се x буде мењало у једном датом размаку (a, b), вредност функције је непрестано позитивна и налази се између два стална позитивна броја M и N, па ма каквим системом реалних вредности сменили променљиве $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Таква би нпр. била алгебарска функција

$$\Phi = \frac{f_1(x) + \varphi_1(x)\, y_k^2}{f_2(x) + \varphi_2(x)\, y_k^2},$$

где су $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ или сталне позитивне величине, или коначне, непрекидне и позитивне функције x-а у размаку (a, b). Таква би била и горе наведена трансцендентна функција F.

Краткоће ради ми ћемо ове две врсте функција звати функцијама F и Φ.

Диференцијалне једначине, које ће бити предмет ове расправе, јесу једначине типа (1), пошто се у (1) смени Ψ једном функцијом F или једном функцијом Φ, па се у овој свака од променљивих

$$y_k \quad (k = 0,1,2,\ldots,n)$$

смени k-тим изводом функције y по независно промењивој величини x.

У свима извођењима и резултатима, на које ће се наилазити у даљем излагању, под интегралима y проучаване једначине подразумеваће се увек они интеграли који су, као и њихових n првих извода, коначне и непрекидне функције x-а у датом размаку (a,b).

ОСЦИЛАТОРАН КАРАКТЕР ИНТЕГРАЛА ЈЕДНАЧИНА (1). ЧЕСТИНА И РИТАМ ОСЦИЛАЦИЈА

Уочимо најпре диференцијалну једначину

$$y'' + y\,F\,(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

формирану помоћу једне ма које од горе дефинисаних функција F. Означимо са N стални и позитиван број што одговара функцији F као једна њена доња граница варијације за вредности x у датом размаку (a, b) у горе наведеном смислу.

Пођимо од двеју једначина

$$y'' + yF = 0, \tag{2}$$

$$z'' + yN = 0, \tag{3}$$

где је (2) дата једначина (1) а (3) линеарна једначина другога реда са сталним коефицијентом N.

Помножимо прву једначину са z, другу са y и одузмимо прву тако добијену једначину од друге, па се добија

$$yz'' - zy'' = yz\,(F - N). \tag{4}$$

Интегралећи у границама h и x добија се

$$yz' - zy' = C + \int_h^x yz\,(F - N)\,dx\,, \tag{5}$$

где је

$$C = [yz' - zy']_{x=h}. \tag{6}$$

Вредност константе C зависи од посматраног интеграла y једначине (1) и z једначине (3). Кад је први утврђен, та ће вредност зависити једино од узетог интеграла z обухваћеног општим интегралним обрасцем

$$z = C_1 \sin(x - C_2)\sqrt{N}, \tag{7}$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе.

Интеграл z има бескрајно много нула, које варирају са константом C_2, обухваћених општим обрасцем

$$x = C_2 + \frac{n\pi}{\sqrt{N}}.$$

Нека су α и β две такве узастопне нуле што се налазе у размаку (a, b). Ми ћемо доказати *да се између* α *и* β *мора налазити бар једна нула интеграла* y.

Јер кад то не би било, пошто би у размаку $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$, где је ε какав врло мали позитиван број, свака од функција y и z имала непромењив знак, производ zy имао би у томе размаку један исти знак, који би се увек могао сматрати као *позитиван* (јер би у противном случају довољно било узети интеграл $-z$ који има исте нуле као и z). Разликујмо тада ова четири случаја:

I. Претпоставимо да ни α ни β нису нуле интеграла y. Узмимо $h = \alpha + \varepsilon$, тако да је

$$C = zy\left[\frac{z'}{z} - \frac{y'}{y}\right]_{x=h+\varepsilon}. \tag{8}$$

Пошто за $x = \alpha + \varepsilon$ израз

$$\frac{z'}{z} = \sqrt{N}\,\mathrm{ctg}(x-\alpha)\sqrt{N}$$

има врло велику позитивну вредност, то ће и константа C бити очевидно позитивна. Са друге стране, пошто је у целом размаку $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$ непрестано, па ма какве реалне вредности имали $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$

$$zy > 0, \quad F - N \geq 0,$$

то ће интеграл

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{x} yz(F-N)\,dx \tag{9}$$

бити позитиван у поменутоме размаку. Једначина (5) тада показује да је

$$yz' - zy' = K(x), \tag{10}$$

где је $K(x)$ извесна функција променљиве x позитивна за све вредности x у размаку $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$ и која не може достићи вредност 0 ни за коју вредност x у томе размаку.

За $x = \alpha + \varepsilon$ и $x = \beta - \varepsilon$ у интегралу ће x имати вредности врло блиске нули, међутим, то неће бити случај са изводом z', пошто α и β не могу бити вишеструке нуле функције z. Тако исто то неће бити случај ни са функцијом y, пошто α и β нису нуле тога интеграла. Једначина (10) тада показује да ће и за $x = \alpha + \varepsilon$ и за $x = \beta - \varepsilon$ бити

$$yz' > 0. \tag{11}$$

Деобом неједначине (11) са yz, које је по претпоставци позитивно за обе горње вредности променљиве x, налази се да логаритамски извод $\frac{z'}{z}$ треба да је позитиван и за $x = \alpha + \varepsilon$ и за $x = \beta - \varepsilon$, што очевидно није случај, пошто према познатој особини логаритамских извода треба да је

$$\frac{z'}{z} > 0 \quad \text{за} \quad x = \alpha + \varepsilon$$

$$\frac{z'}{z} < 0 \quad \text{за} \quad x = \beta - \varepsilon.$$

Производ yz не може, дакле, бити непрестано позитиван у размаку $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$ и према томе y у размаку (α, β) мора бар једанпут променити знак, тј. проћи кроз нулу.

II. Претпоставимо да је α нула интеграла y, а да, међутим, то није случај са β. Узевши $h = \alpha$ биће $C = 0$, тако да се једначина (5) своди на

$$yz' - zy' = \int_{\alpha}^{x} yz(F - N)\,dx. \tag{12}$$

За $x = \beta - \varepsilon$ интеграл на десној страни једначине (12) позитиван је, тако да је

$$\text{за} \quad x = \beta - \varepsilon \quad yz' > 0.$$

Деобом са изразом yz, који је по претпоставци позитиван за $x = \beta - \varepsilon$, добија се да је

$$\text{за} \quad x = \beta - \varepsilon \quad \frac{z'}{z} > 0,$$

што није тачно, пошто према особинама логаритамског извода мора бити негативан за вредности x мало мање од једне нуле функције z. Дакле, yz не може бити непрестано позитивно у размаку (α, β) и према томе y мења бар једном знак у томе размаку.

III. Претпоставимо да је β нула интеграла y, али не и α. Узевши $h = \beta$ биће $C = 0$, тако да се једначина (5) своди на

$$yz' - zy' = -\int_x^\beta yz(F - N)\,dx. \tag{15}$$

За $x = \alpha + \varepsilon$ биће zy' врло мало, тако да се из (15) добија да је

$$\text{за} \quad x = \alpha + \varepsilon \quad yz' < 0.$$

Деобом са позитивном количином yz имали бисмо, дакле, да је

$$\text{за} \quad x = \alpha + \varepsilon \quad \frac{z'}{z} < 0,$$

што није тачно, пошто је логаритамски извод за вредности x мало веће од једне нуле функције позитиван. Производ yz, па, дакле, и сам интеграл y мора променити знак у размаку (α, β).

IV. Нека су и α и β нуле интеграла y. Узевши $h = \alpha$ налази се $C = 0$ и

$$yz' - zy' = \int_\alpha^x yz(F - N)\,dx. \tag{16}$$

Кад би у (16) било непрестано $yz > 0$, интеграл би на десној страни ове једначине био за $x = \beta$ очевидно позитиван, а никако не раван нули, па, дакле, и израз на левој страни једначине не би могао бити раван нули за $x = \beta$, као што би требало да буде пошто је та вредност x заједничка нула интеграла z и y.

Из свега се овога види

1) да у свима случајевима две ма које од бескрајно многих узастопних нула функције z обухватају бар по једну нулу интеграла y;

2) да кад год y и z имају једну заједничку нулу, кад x буде расло почевши од те нуле, прво ће при томе рашћењу наићи на једну нулу интеграла y, па тек онда може наићи на једну нулу функције z.

Међутим, функција z дефинисана једначином (7) има у размаку (a, b) онолико нула колико је пута вредност $\dfrac{\pi}{\sqrt{N}}$ садржана у разлици $b - a$, тј. онолико пута колико има целих јединица у вредности

$$(17) \qquad \frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi}.$$

Према томе: *интеграл* у *има у размаку* (a, b) *најмање онолико нула колико има целих јединица у вредности* (17).

Ако је, дакле, размак довољно простран, *сви ће интеграли* у *имати у њему осцилаторан карактер.*

Приметимо и то да кад су делимични изводи функције F по промењљивима $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ сви коначне функције за сваки реалан и коначан систем вредности $y, y', \ldots, y^{(n)}$ и за све вредности x у размаку (a, b), *интеграл* у *при проласку кроз сваку своју нулу мења знак.* Јер из једначине

$$y'' + Fy = 0$$

узастопним диференцијаљењем добија се низ једначина облика

$$\begin{aligned}
&y'' + Fy = 0 \\
&y''' + H_1 y' + H_2 y = 0 \\
&y'''' + G_1 y'' + G_2 y' + G_3 y = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

где су H_i и G_i функције промењљивих $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ које остају коначне за све коначне вредности $y, y', \ldots, y^{(n)}$ и за вредности x обухваћене размаком (a, b).

Овај низ једначина показује да кад је за једну вредност x у једно исто време и $y = 0$ и $y' = 0$, онда су и сви узастопни изводи интеграла y такође равни нули за ту вредност x; такав би интеграл, холоморфан у размаку (a, b), био идентички раван нули.

Интеграл у *посматране врсте може, дакле, имати у размаку* (a, b) *само простих нула, мењајући знак сваки пут при проласку кроз једну ма коју своју нулу.*

У случајевима кад функција F задовољава напред наведене погодбе за све реалне вредности x (што ће нпр. бити кад она не садржи x експлицитно), из горњих резултата добија се овај закључак:

Сваки интеграл у *има бескрајно много реалних нула, како позитивних тако и негативних.* Сви су интеграли y, дакле, осцилаторне функције порменљиве x са бескрајно много осцилација.

Таква је нпр. једначина другога реда

$$y'' + ay + by^3 = 0,$$

где су a и b позитивне константе и која се интеграли помоћу елиптичких функција са бескрајно многим реалним позитивним и негативним нулама.

*

Уочимо сад диференцијалну једначину

$$(18) \qquad y'' + y\,\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

формирану помоћу једне ма које од горњих функција Ф. Означимо са M и N сталне и позитивне бројеве што одговарају функцији Ф као њена горња и доња граница варијација за вредности x у размаку (a, b) у горе наведеном смислу. Упоредимо једначину (18) са двема једначинама које имају сталне коефицијенте

$$(19) \qquad u'' + Mu = 0$$

$$(20) \qquad v'' + Mv = 0.$$

Упоређењем са (20), као што је то горе учињено, налази се да сваки интеграл y једначине (18) а овде посматране врсте има у размаку (a, b) *најмање* онолико нула колико има целих јединица у вредности

$$(21) \qquad \frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi}.$$

Упоређивањем, пак, са (19), у коме случају y и u играју обрнуте улоге онима што су их мало пре имали y и v, налази се да u у размаку (a, b) има најмање онолико нула колико их има y, тј. да y може у томе размаку имати *највише* онолико нула колико их има u, или још само једну више, па, дакле, највише онолико нула колико има целих јединица у вредности

$$(22) \qquad 1 + \frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi}.$$

А из тога се изводи овај резултат.

Број нула интеграла у *у размаку* (a, b) *лежи између бројева* λ *и* μ, *где* λ *означава број целих јединица садражних у вредности* (21) *а* μ *број целих јединица садржаних у вредности* (22).

Ако је, дакле, размак довољно простран, интеграли y ће бити осцилаторне функције x-а у томе размаку. Број осцилација биће бескрајан кад функција Ф задовољава напред наведене погодбе за све реалне вредности x, као што је нпр. случај кад она не садржи x експлицитно.

Пустимо сад да се дати размак (a, b), остављајући му пространство непромењено, поступно помера дуж осовине реалних вредности. Тада ће се и одговарајући бројеви M и N такође поступно мењати и свакомположају размака (a, b) одговараће по један пар вредности (M, N).

Те вредности, уосталом, могу у извесним случајевима остати и једне исте за све величине и положаје размака (a, b), као што је нпр. случај код једначина (18) које не садрже x експлицитно. У општем случају оне се мењају са положајем размака (a, b)и могу се сматрати као максимална и минимална вредност једне исте функције $f(x)$, коју је лако прецизирати за сваки дати специјалан случај. *Какав ће бити распоред интегралних нула за разне положаје тих размака?*

Нека је α једна нула интеграла y и узмимо за компаративне интеграле u и v интеграле

$$u = C_1 \sin(x-\alpha)\sqrt{M}$$
$$v = C_2 \sin(x-\alpha)\sqrt{N}$$

који такође имају за нулу $x = \alpha$.

Према горњим резултатима кад x буде расло почевши од α, прво ће се наићи на једну нулу λ функције u, затим на једну нулу интеграла y и најпосле на једну нулу μ функције v. Ако се, дакле, са α' означи она нула интеграла y што долази непосредно иза α, биће

(23) $$\lambda < \alpha' < \mu.$$

Али је очевидно

(24) $$\lambda = \alpha + \frac{\pi}{\sqrt{M}}$$

(25) $$\mu = \alpha + \frac{\pi}{\sqrt{N}}$$

и тада, према (23)

(26) $$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < \alpha - \alpha' < \frac{\pi}{\sqrt{N}}.$$

Неједначина (26) даје могућности да се проучи како се мењају растојања узастопних нула интеграла y кад x расте у једном или другом правцу, тј. сам распоред тих нула. У томе циљу поделимо размак (a, b) на мање размаке, такве да у сваком од њих $f(x)$ варира непрестано у једном истом смислу, растући или опадајући. Разликујмо тада ова два случаја:

V. Претпоставимо да функција $f(x)$ непрестано расте у таквоме једноме размаку. Из (26) добија се да је

(27) $$\alpha - \alpha' = \frac{\pi}{\sqrt{f(\theta')}},$$

где је θ' једна вредност x што се налази између α и α'.

Нека су

$$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$$

узастопне нуле интеграла y у посматраноме размаку, а

$$\theta, \theta', \theta'', \theta''', \ldots$$

одговарајуће вредности θ што се налазе у размацима

$$(\alpha, \alpha'),\ (\alpha', \alpha''),\ (\alpha'', \alpha'''), \ldots$$

па ће бити

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha' &= \frac{\pi}{\sqrt{f(\theta')}} \\ \alpha' - \alpha'' &= \frac{\pi}{\sqrt{f(\theta'')}} \\ \alpha'' - \alpha''' &= \frac{\pi}{\sqrt{f(\theta''')}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{28}$$

Пошто функција $f(x)$ расте, биће

$$f(\theta') < f(\theta'') < f(\theta''') < \ldots < M$$

и према томе

$$\alpha - \alpha' > \alpha' - \alpha'' > \alpha'' - \alpha''' > \ldots > \frac{\pi}{\sqrt{M}}, \tag{29}$$

што показује да *разлика двеју узастойних нула интеграла* у *йостаје све мања, али да йри томе не може йостати мања од вредности* $\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{M}}}$.

VI. Претпоставимо да функција $f(x)$ непрестано опада у посматраноме размаку. Тада ће бити

$$f(\theta') > f(\theta'') > f(\theta''') > \ldots > N$$

и према томе

$$\alpha - \alpha' < \alpha' - \alpha'' < \alpha'' - \alpha''' < \ldots < \frac{\pi}{\sqrt{N}}, \tag{30}$$

што показује да *разлика двеју узастойних нула йостаје све већа, али да йри томе не може йостати већа од вредности* $\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{N}}}$.

Претпоставимо сад да се функција $f(x)$, почевши од једне вредности $x = a$ па до $x = \infty$ непрестано мења у једноме истом смислу. *Какав ће бити број и распоред нула у размаку од* a *до* ∞?

Разликујмо опет ова два случаја према томе да ли функција $f(x)$ у размаку (a, ∞) непрестано опада или расте.

Први случај. Нека $f(x)$ *опада.* Горе је показано да у томе случају разлика између двеју узастопних нула интеграла y постаје све већа, али не прелазећи при том $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$. Ако сад при бескрајном рашћењу променљиве x функција $f(x)$ асимптотно тежи једној коначној и одређеној граници ρ, интеграл y ће у размаку (a, ∞) имати бескрајно много нула и разлика између двеју узастопних нула тежиће сталној граници $\frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$.

Кад се, дакле, буде израчунало неколико вредности најмањих узастопних нула α_i, остале нуле, које долазе за овима, имаће се приближно помоћу обрасца

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{\pi}{\sqrt{\rho}}. \tag{31}$$

Распоред нула на великој даљини постаје, дакле, униформан.

Претпоставимо сад да функција $f(x)$ при своме опадању асимптотно тежи нули. Тада је $\rho = 0$ и горњи резултати не доводе ни до каквог закључка. Да би смо испитали број и распоред нула у томе случају, узећемо за компаративне једначине извесне једначине са променљивим коефицијентима.

Пре свега, може се десити да израз

$$\frac{(x-a)\sqrt{f(x)}}{\pi} \tag{32}$$

бескрајно расте за $x = \infty$; *тада интеграл* y *има у размаку* (a, ∞) *бескрајно много нула.* Остаје, дакле, да се испитају случајеви кад израз (32) има за граничну вредност какву коначну вредност λ (која, уосталом, може бити равна и нули). Разликујмо тада ове случајеве:

1) Нека је

$$\lambda < \frac{1}{2\pi}.$$

Тада је могућно наћи такав један довољно велики али ипак коначан број h, да за све вредности $x > h$ буде

$$x\sqrt{f(x)} < \frac{1}{2}$$

тј.

(33) $$f(x) < \frac{1}{4x^2}.$$

Ако тада узмемо за компаративну једначину,

(34) $$u'' + \frac{1}{4x^2}u = 0,$$

лако се доказује, на онај исти начин којим смо се служили при компарацији са једначином (3), да кад се x буде мењало од h до ∞, интеграл y може имати највише онолико нула колико их буде имало u, па ма који то био партикуларни интеграл једначине (34). А пошто ова једначина има као један такав интеграл функцију

$$u = \sqrt{x}$$

која нема ниједне нуле у размаку (h, ∞), то је неће имати ни y. Према томе: *број нула у размаку* (a, ∞) *је ограничен*. А према ономе што је горе доказано, *ше ће нуле, расшући, бити све даље једна од друге.*

2) Нека је

$$\lambda > \frac{1}{2\pi}.$$

Тада се за сваки размак (a, b) почевши од једне довољно велике коначне вредност $x = h$, може наћи један такав позитиван и довољно мали број ε, такав да у томе размаку буде

$$x\sqrt{f(x)} > \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

тј.

(35) $$f(x) > \frac{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2}{x^2}.$$

Узмимо тада за компаративну једначину

(36) $$v'' + \frac{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2}{x^2}v = 0.$$

На исти начин као и раније лако се увиђа да ће интеграл y у размаку (h, ∞) имати највише онолико нула колико их буде имао један ма који интеграл v једначине (36). А пошто ова једначина има као један партикуларни интеграл

$$v = \sqrt{x}\cos[\sqrt{\varepsilon+\varepsilon^2}\,\log x]$$

чије су нуле дате општим обрасцем

$$\alpha_n = e^{\frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\varepsilon+\varepsilon^2}}}$$

и која, дакле, има бескрајно много нула у размаку (h, ∞), *што ће и интеграл* у *имати бескрајно много нула у размаку* (a, ∞) *и те су нуле све даље једна од друге.*

3) Нека је

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}.$$

У томе случају:

а) ако је за вредности x које расту почевши од једне довољно велике вредности h непрестано

$$f(x) < \frac{1}{4x^2},$$

имаће се исти случај као под 1);

б) ако је почевши од h непрестано

$$f(x) > \frac{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{x^2},$$

где је ε позитивно, имаће се исти случај као под 2);

в) ако није ниједан од ова два случаја, питање остаје нерешено.

Други случај. Нека $f(x)$ *расте.* Горе је показано да у томе случају разлика двеју узастопних нула све више опада, али не прелазећи при том вредност $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$. Ако при своме рашћењу функција асимптотно тежи једној граници ρ, интеграл y ће у размаку (a, ∞) имати бескрајно много нула и разлика њихова тежиће сталној граници $\frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$, тако да ће за нуле довољно високог ранга вредети једначина

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$$

и распоред на великој даљини биће опет униформан.

Ако, пак, функција $f(x)$ при своме рашћењу нема никакве асимптотне вредности, већ бескрајно расте број нула у размаку (a, ∞) ће опет бити бескрајан, али њихове узастопне разлике теже нули. *Нуле су све ближе једна другој уколико расту и њихова међусобна растојања постају мања од каквог се хоће малог броја.*

*

У специјалном случају кад се функција Ф своди на једну дату функцију $f(x)$, што зависи само од променљиве x и која је позитивна у размаку (a, b), једначина (18) се своди на линеарну диференцијалну једначину другога реда

$$y'' + f(x)\,y = 0$$

као на један свој специјалан случај. Напред наведени резултати поклапају се тада са познатим Штурмовим резултатима што се односе на осцилаторне интеграле таквих линеарних једначина.

Приметимо, напослетку, и то да се ови резултати примењују и на све алгебарске и трансцендентне једначине

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

свију редова, које би имале ту особину да кад се у једначини смени

$$y'' = \lambda y$$

остављајући све остале променљиве непромењене, па се тако добијена једначина реши по λ, тако да је нпр. из ње

$$\lambda = \theta(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

између оваквих детерминација θ има их и таквих које имају особине функција F или Ф. Интеграли y таквих једначина што одговарају тој детерминацији а који би – као и њихових n узастопних извода – били коначни и непрекидни у размаку (a, b), уопште су осцилаторне функције у томе размаку и могу се у појединостима проучити на напред наведени начин.[**]

[**] У раду Јована Стојановића, *О Riccati-евој диференцијалној једначини* $y' + y^2 = x^n$, Гласник Југословенског професорског друштва, Београд 1929, t. IX, 9, стр. 591–598, на више места су наведени резултати из Петровићеве расправе (пр. Д. Т.).

ИМПЛИЦИТНЕ ОСЦИЛАТОРНЕ ФУНКЦИЈЕ*

1. Штурмове теореме о интегралима линеарне диференцијалне једначине дугог реда

$$y'' + f(x)y = 0$$

изражавају релације између особина (знак, област варијације, итд.) *релативне вредности другог извода од* y, *тј. вредност разломка*

$$\Delta(y) = \frac{y''}{y}$$

у посматраном интервалу (a, b) независне променљиве x и *понашања* интеграла y који је коначан и непрекидан у том интервалу.

Напоменуо бих да се елементарна разматрања која доводе до тих теорема проширују на општије класе једначина ма којег реда и доводе до особина реалних интеграла који су коначни и непрекидни (као и њихови изводи) у посматраном интервалу од x.

2. Нека је дата алгебарска или трансцендента функција

$$\phi(x, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

од $n+2$ променљивих, које се мењају произвољно или задовољавају услове (C) изражене помоћу једнакости или неједнакости. Дакле:

1) у интервалу (a, b) променљиве x, функција је *ограничена* датом функцијом $\mu(x)$ *с горње стране*, док x варира од a до b, вредност функције ϕ остаје мања од $\mu(x)$ за све системе вредности $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ који су сагласни са условима (C);

2) у интервалу (a, b), функција је *ограничена* датом функцијом $\lambda(x)$ *са доње стране*, ако x варира од a до b, вредност од ϕ остаје већа од $\lambda(x)$ за све системе вредности $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ сагласне са условима (C).

---

* Наслов оригинала *Fonctions implicites oscillantes*, Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, vol. I, pp. 295–302.

Полином P који садржи само *парне* степене од ξ_i чији су сви коефицијенти позитивни за x између a и b је функција ограничена с доње стране својим чланом $\phi(x)$ који не зависи од ξ_i. Полином је ограничен с горње стране тим чланом ако су сви коефицијенти негативни.

Функција $\frac{1}{P}$ ограничена је са $\frac{1}{\phi}$ с доње или горње стране према томе да ли су њени коефицијенти, за које се претпоставља да су сви истог знака, негативни или позитивни.

Функција

$$\phi = \frac{f_1 + \phi_1\xi_k^2}{f_2 + \phi_2\xi_k^2},$$

где су f_1, f_2, ϕ_1, ϕ_2 коначне функције, такве да f_1 и ϕ_1 имају исти знак ε, а f_2, ϕ_2 имају исти знак ε' за x које се налази између a и b, ограничена је с доње и горње стране функцијама

$$\frac{f_1}{f_2} \quad \text{и} \quad \frac{\phi_1}{\phi_2},$$

и обрнуто, у зависности од знака од ε односно од ε'.

Аналоган је случај са функцијом

$$\phi = f + \phi e^P,$$

где је P један од претходних полинома чији су сви коефицијенти негативне функције за x које се налази између a и b, где су f и ϕ истог знака у том интервалу. Аналоган је и случај са функцијама

$$\phi = \Sigma f_k\xi_k^2,$$

где ξ_k треба да испуњавају услов облика

$$\psi + \Sigma\phi_k\xi_k^2 \geq 0,$$

при чему су f_k, ϕ_k, ψ позитивне функције од x у интервалу (a, b) итд.

3. Нека је дат систем диференцијалних једначина (E) ма којег реда, који дефинише n промењљивих

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

као функцију независно промењљиве x. Може постојати функција ϕ, која зависи од x, од y_k и њихових узастопних извода и која је на основу једначина (E) једнака релативној вредности $\Delta(y_k)$ другог извода и једне од променљивих y_k, таква да буде ограничена у интервалу од a до b с доње или горње стране функцијама од x које не мењају знак у том интервалу.

До тога се долази, на пример, у случају једначине првог реда

$$y' = f(x, y),$$

када је израз

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

с доње или горње стране ограничен таквом функцијом. Да би то важило за линеарну једначину

$$y' = My + N,$$

где су M и N функције од x, потребно је и довољно да је

$$M = -\frac{N'}{N}$$

и да функција

$$M' + M^2,$$

која је тада једнака са $\Delta(y)$, не мења знак у интервалу (a, b). Да би то важило и за једначину

$$y' = My + \sqrt{P + Ny^2},$$

потребно је и довољно да је истовремено

$$N' + 4MN = 0,$$
$$P' + 2MP = 0,$$

и да функција

$$M' + M^2 + N,$$

на коју се тада своди израз $\Delta(y)$, не мења знак у интервалу (a, b).

Једначине, било којег реда, облика

$$y'' + y\phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

чији је само један специјалан случај линеарна једначина

$$y'' + f(x)y = 0,$$

припадају посматраном типу једначина. Таква је, на пример, једначина

$$y'' + my^3 + ny = 0$$

(где су m, n константе истог знака) која се интегрише елиптичним функцијама.

Систем

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

представља систем (E) кад год је најмање један од израза

$$\frac{1}{y_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + \sum f_i \frac{\partial f_k}{\partial y_i}\right)$$

функција ф ограничена с доње или горње стране.

На пример, то је случај, код система

$$\frac{dy_1}{dx} = My_1 + Ny_2$$
$$\frac{dy_2}{dx} = Py_1 + Qy_2,$$

где су M, N, P, Q функције од x везане релацијом

$$N' + N(M + Q) = 0,$$

иако функција

$$M' + M^2 + NP$$

на коју се тада своди израз $\Delta(y_1)$ не мења знак за x које се налази између a и b.

У случају система

$$\frac{dy_1}{dx} = my_2 y_3,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = ny_1 y_3,$$
$$\frac{dy_3}{dx} = py_1 y_2,$$

који се среће у проблему кретања чврстог тела и који се интегрише помоћу елиптичних функција, добиће се

$$\Delta(y_1) = m(py_2^2 + ny_3^2),$$

тако да систем припада посматраном типу кад год су mp и mn истог знака и када су y_1, y_2, y_3 (као и њихови изводи) реални, коначни и непрекидни у интервалу (a, b); наиме, $\Delta(y_1)$ би могло да се анулира за вредност $x = \alpha$ само ако би за ту вредност x истовремено било

$$y_2 = 0, \quad y_3 = 0.$$

У том случају, на основу једначина система и једначина које се добијају диференцирањем једначина система, сви узастопни изводи од y_1 били би нуле за $x = \alpha$.

У динамици, дешава се да се у једначини живе силе налазе услови неједнакости, на основу којих се у систему једначина другог реда, на које се проблем своди, за једну или више координата q налази израз $\Delta(q)$ који је с доње или горње стране ограничен.

4. За неку функцију y од x каже се да је *правилна* у интервалу од $x = a$ до $x = b$ ако је она, као и сви њени изводи, реална, коначна и непрекидна у том интервалу.

Ако дати систем (E) једначина дефинише релативну вредност $\Delta(y)$ другог извода интеграла y као функцију ϕ ограничену с доње или горње стране, онда постоје везе између особина (знак, начин раста, област варијација итд.) функције у интервалу (a, b) и распореда простих нула сваког правилног интеграла y у том интервалу. Ти односи се могу укратко изложити помоћу чињеница (а) и (б).

(а) Претпоставимо да је функција ϕ *с доње стране ограничена* функцијом $\lambda(x)$, која је коначна и непрекидна у интервалу (a, b); нека је u произвољан интеграл једначине

$$u'' - \lambda(x)u = 0.$$

Две узастопне просте нуле од u *које се налазе у* (a, b) *садрже највише једну нулу од* y; *две просте нуле од* y *садрже најмање једну нулу од* u. *Ако* y *и* u *имају једну заједничку нулу* x = α, *променљива* x *ће, растући од* α, *достићи најпре нулу од* u, *а затим и нулу од* y.

(б) Претпоставимо да је ϕ с горње стране ограничено функцијом $\mu(x)$ која је коначна и непрекидна у (a, b) и нека је v произвољан интеграл једначине

$$v'' - \mu(x)v = 0.$$

Две просте нуле од v *које се налазе у* (a, b) *садрже најмање једну нулу од* y; *две узастопне просте нуле од* y *садрже највише једну нулу од* v. *Ако* y *и* v *имају једну заједничку нулу* x = α, *променљива* x *ће, растући од* α, *достићи најпре нулу од* y, *а затим и нулу од* v.

Те пропозиције, које нису ништа друго до Штурмове теореме за линеарне једначине другог реда, доказују се на познат елементарни начин, тако што се претпоставе само неједнакости

$$\lambda(x) \leq \phi \leq \mu(x)$$

и правилност интеграла y у (a, b).

Ако се за функције за упоређивање u и v узму различите функције о којима је познат, с једне стране, начин на који варирају релативне вредности њихових других извода, а с друге стране, распоред нула у датом интервалу (a, b), добиће се пропозиције које истичу односе између особина функције ϕ која одговара неком интегралу y из система (E), који је правилан у (a, b) и распоред вредности од x, које се налазе у том интервалу, за које y мења знак анулирајући се.

1) Функција за упоређивање

$$u = e^{rx},$$

која као $\Delta(u)$ има вредност r^2, доводи до овог правила: *ако је ϕ с доње стране ограничено функцијом која је стално позитивна у* (a, b)*, интеграл* у *не мења знак више од једанпут у том интервалу.*

2) Функција за упоређивање

$$v = \sin x\sqrt{N} \quad (N = \text{const.})$$

која за $\Delta(v)$ има вредност $-N$, доводи до овог правила: *ако је ϕ с горње стране ограничено функцијом која је стално негативна у* (a, b) *где као горњу границу има* –N, *интеграл* у *у том интервалу мења знак најмање онолико пута колико има јединица у*

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi}.$$

Функција за упоређивање

$$u = \sin x\sqrt{M} \quad (M = \text{const.})$$

која за $\Delta(u)$ има вредност $-M$, доводи до овог правила: *ако је ϕ с доње стране ограничено функцијом која је стално негативна у* (a, b)*, где као доњу границу има* –M*, интеграл* у *у том интервалу мења знак највише онолико пута колико има јединица у*

$$\frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi} + 2.$$

То су позната Штурмова правила за специјалан случај линеарне једначине другог реда, која се такође могу применити на друге типове једначина.

3) Функције за упоређивање облика

$$x^{1-2m}\sin px$$

(где су m и p позитивне константе), које за релативну вредност другог извода имају израз

$$\frac{C - Dx^{2m}}{x^2},$$

са

$$C = \frac{m^2 - 1}{4}, \quad D = p^2 m^2,$$

доводе до овог правила: *ако се позитивне константе* C, D *изаберу тако да је у* (a, b) ϕ *с горње стране ограничено функцијом*

$$\frac{C - Dx^{2m}}{x^2},$$

која је негативна у (a, b), у *у том интервалу мења знак најмање онолико пута колико има целих јединица у*

$$\frac{b^m - a^m}{2\pi} p,$$

где су

$$m = \sqrt{1 + 4C}, \quad p = \sqrt{\frac{D}{1 + 4C}}.$$

Исто тако, *ако се позитивне константе* C′, D′ *изаберу тако да је у* (a, b) ϕ *с доње стране ограничено функцијом*

$$\frac{C' - D'x^{2m'}}{x^2},$$

која је у (a, b) *негативна,* у *у том интервалу мења знак највише онолико пута колико има јединица у*

$$\frac{b^{m'} - a^{m'}}{2\pi} p' + 2,$$

где су

$$m' = \sqrt{1 + 4C'}, \quad p' = \sqrt{\frac{D'}{1 + 4C'}}.$$

На пример, у случају линеарне једначине

$$y'' = \left(\frac{3}{4x^2} + 4x^2\right) y,$$

правило 2) за интервал (1, 4) са $N = 63{,}9$ даје број 9 као горњу границу броја промена знака од y; правило 3) са

$$C' = \frac{3}{4}, \quad D' = \frac{25}{4},$$

одакле

$$m' = 2, \quad p' = \frac{5}{4},$$

као горњу границу даје 7. Исто тако, за доњу границу тог броја правило 2) даје 1, а правило 3) даје 2.

4) Функције за упоређивање облика

$$e^{-kx}\sin(pe^{2kx})$$

(где су k и p позитивне константе), које за релативну вредност другог извода имају израз

$$A - Be^{4kx},$$

са

$$A = k^2, \quad B = 4p^2k^2,$$

доводе до овог правила: *ако се позитивне константе* A *и* B *изаберу тако да је у* (a, b), ϕ *с горње стране ограничено функцијом*

$$A - Be^{4kx},$$

која је негативна у (a, b), у *у том интервалу мења знак најмање онолико пута колико има јединица у*

$$\frac{1}{2\pi}(e^{2b\sqrt{A}} - e^{2a\sqrt{A}})\sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Исто тако, *ако се позитивне константе* A′, B′ *изаберу да у* (a, b), ϕ *с доње стране буде ограничено функцијом*

$$A' - B'e^{4k'x},$$

која је негативна у (a, b), у *мења знак највише онолико пута колико има јединица у*

$$2 + \frac{1}{2\pi}(e^{2b\sqrt{A'}} - e^{2a\sqrt{A'}})\sqrt{\frac{B'}{A'}}.$$

На пример, у случају линеарне једначине

$$y'' = (1 - 4e^{4x})\,y,$$

ако се узме

$$A = 1, \quad B = 1,$$
$$A' = 1, \quad B' = 9,$$

налази се да у интервалу (0, 3) y мора да промени знак најмање 62, а највише 188 пута, док правило 2) даје границе 1 и 740.

5) Функције за упоређивање облика $\sqrt{x}\sin(p\log x)$ (где је p позитивна константа), које за релативну вредност другог извода имају израз

$$-\frac{A}{x^2}$$

са

$$A = p^2 + \frac{1}{4}$$

доводе до овог правила: *ако се позитивне константе* A *и* A′ *изаберу тако да је у* (a, b) *стално*

$$-\frac{A'}{x^2} \le \phi \le \frac{A}{x^2},$$

број промена знака у y (a, b) *налази се између две вредности*

$$\frac{\sqrt{4A-1}}{2\pi}\log\frac{b}{a}$$

и

$$2 + \frac{\sqrt{4A'-1}}{2\pi}\log\frac{b}{a}.$$

На пример, ако се у случају линеарне једначине

$$y'' = -\frac{65}{4x^2}y$$

узме

$$A = \frac{25}{2}, \quad A' = \frac{41}{2},$$

налази се да у интервалу (1, 100) y мора да промени знак најмање 2 а највише 4 пута; правило 2) даје 1 и 128 као границе тог броја.

5. Претходна правила, на пример, се примењују на једначине првог реда

$$y' = f(x, y),$$

за које је израз

$$\phi = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ограничен једном од функција за упоређивање λ или μ. На пример, директном провером показује се да једначине облика

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{P'}{P}y + \sqrt{P - k^2P^2y^2}$$

(где је P функција од x или константа, и где је k константа) имају као општи интеграл

$$y = \frac{1}{k\sqrt{P}}\sin(k\int Pdx + C),$$

а као ϕ израз

$$\frac{3}{4}\left(\frac{P'}{P}\right)^2 - k^2P^2 - \frac{1}{2}\frac{P''}{P}.$$

Примењена на једначину другог реда

$$y'' + fy + \phi y^3 = 0,$$

где су f и ϕ позитивне функције од x, та правила истичу осцилаторни карактер правилних интеграла и одређују доњу границу броју осцилација тих интеграла у датом интервалу од x; одговарајући израз ϕ је с горње стране ограничен стално негативном функцијом $-f(x)$. Правила се директно проверавају на специјалном случају једначине

$$y'' + Ay + By^3 = 0$$

(где су A и B позитивне константе), која се интегрише елиптичним функцијама.

Примењена на систем

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

та правила истичу осцилаторни карактер свих његових правилних интеграла за које је израз

$$\phi = \frac{1}{y_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + \sum f_i \frac{\partial f_k}{\partial y_i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

с горње стране ограничен негативном функцијом. Ако се зна једна функција за упоређивање μ, може се наћи доња граница броја осцилација које се налазе између датих граница од x. Правила се проверавају директно на систему облика

$$\frac{dy_1}{dx} = My_1 + Ny_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = Py_1 - \left(M + \frac{N'}{N}\right)y_2,$$

где су M, N, P функције од x такве да је израз

$$M' + M^2 + NP,$$

на који се своди израз ϕ који се односи на интеграл y, стално негативан, то се посебно односи на случајеве где су M, N, P константе.**

** Реферисано у Revue sémestrielle, 1913, t. XXII. Резултате и учешће на конгресу у Кембрицу Петровић је изложио у Српском књижевном гласнику 29 (1912), 6, стр. 480. – Приметимо да Петровић у овом раду *по први пут* уводи релативан извод (*диференцијални алгоритам*) $\Delta_2(y) = y''/y$ што ће тек 1936. године развити у читаву монографију *Један диференцијални алгоритам и његове примене*, Београд 1936, стр. 235 (пр. Д. Т.).

ЈЕДНА ВРСТА ИНВАРИЈАНАТА КРИВИХ ЛИНИЈА ДЕФИНИСАНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА*

Под *инваријантом* Ω једне класе кривих линија, које се добијају варијацијом једног или више параметара

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

у општој једначини

$$f(x, y, a_1, a_2, a_3, \ldots) = 0 \tag{1}$$

те класе кривих линија у равни, подразумеваћемо сваку такву коначну, диференцијалну или интегралну комбинацију Ω координата (x, y), чије промене приликом преласка од једне тачке $M_1(x_1, y_1)$ на другу тачку $M_2(x_2, y_2)$ у равни, зависе само од положаја M_1 и M_2, а никако и од пута којим се ишло од једне тачке ка другој, нити од вредности које се при том преласку буду придавале параметрима $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Вредности једне инваријанте такве врсте поклапају се, дакле, са вредностима које добија једна одређена и за све криве (1) једна иста функција $\lambda(x, y)$ координата тачке, независна од параметра a_1, па дакле независна и од тога на коју се од кривих (1) посматрана инваријанта Ω односи.

Тако, на пример, за класу кривих линија обухваћених општом једначином

$$y - ae^x = 0$$

једна таква инваријанта комбинација била би $\dfrac{y}{y'}$, којој одговара као функција координата

$$\lambda(x, y) = 1; \tag{2}$$

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. XCIII, Први разред, књ. 39, Београд, 1921, стр. 75–84. М. Петровић је ову расправу саопштио у Академији природних наука 25. новембра 1913.

тако би се исто као инваријанта имала комбинација

$$\int_a^x y dx,$$

којој као функција одговара координата

$$\lambda(x,y) = y$$

или комбинација

$$xyy'' + yy' - xy^2,$$

којој одговара

$$\lambda(x,y) = y^2, \text{ итд.}$$

За класу кривих линија обухваћених општом једначином

$$y + a_1 e^{ax} + a_2 e^{-ax} = 0$$

једна инваријанта би била комбинација $\frac{y''}{y'}$ којој одговара

$$\lambda(x,y) = a^2,$$

или комбинација y'' којој одговара

$$\lambda(x,y) = a^2 y,$$

или комбинација

$$\int_a^x \frac{y''}{y} dx$$

којој одговара

$$\lambda(x,y) = a^2 x, \text{ итд.}$$

За криве

$$y = \frac{1}{2}\left(ae^x + \frac{1}{a}e^{-x}\right)$$

једна инваријанта Ω била би сам извод y', а овоме би, као инваријанти, одговарало

$$\lambda(x,y) = \sqrt{y^2 - 1}.$$

Лако се може проверити да свака класа кривих линија (1) има бескрајно много инваријаната дефинисаних на горњи начин – свака коначна, диференцијална или интегрална комбинација координата x и y, која је таква да према једначини (1) посматране класе кривих не садржи ниједан од параметара $a_1, a_2, a_3, \dots$ а зависи само од координата тачке, биће инваријанта те класе кривих у горњем смислу. Према томе:

1. – када је Ω инваријанта дате класе кривих, биће такође инваријанта и ма каква функција

$$\Phi(x, y, \Omega); \tag{3}$$

2. – када одговарајућа функција $\lambda(x, y)$ једне инваријанте Ω не зависи од y, инваријанта ће бити и ма каква комбинација координата x, y, израза Ω и његових извода по x и интеграла ма кога реда;

3. – када су $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$ инваријанте дате класе кривих, ма каква функција

$$\Phi(x, y, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots) \tag{4}$$

такође је једна њихова инваријанта.

Само одређивање инваријаната има два начина.

1. – Када је дата експлицитна једначина посматране класе кривих линија у облику (1), ову треба диференцијаљењем, интеграљењем и елиминацијом параметара $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ трансформисати у једначину чија десна страна неће зависити од тих параметара и бити или једна одређена константа, или једна одређена функција самога x или самога y, или обеју ових координата. Израз на левој страни једначине представљаће тада инваријанту Ω кривих (1), а помоћу ове, применом горњих правила, може се одредити бескрајно много таквих инваријаната.

2. – Кад је дата диференцијална једначина једне класе кривих, на пример

$$\varphi(x, y, y', y'', \dots) = 0, \tag{5}$$

у ком би случају улоге параметара $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ имале интеграционе константе, једначину треба на ма који од бескрајно мого начина трансформисати у облик

$$\Phi + \eta(x, y)\, y' + \xi(x, y) = 0, \tag{6}$$

где је Φ коначна, диференцијална или интегрална комбинација промењивих x и y, а η и ξ две функције само тих координата, тако да је

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{7}$$

Израз

$$-\xi(x, y)\, dx - \eta(x, y)\, dy \tag{8}$$

тада је тотални диференцијал једне функције $\lambda(x, y)$ самих координата x и y, тако да израз

$$\int_a^x \Phi dx \tag{9}$$

представља једну инваријанту Ω класе кривих дефинисаних диференцијалном једначином (5). Помоћу ње је онда лако формирати безброј других.

*

Егзистенција таквих инваријаната за дату диференцијалну једначину добија своју нарочиту важност у случајевима када инваријанта има одређено геометријско значење и означава одређен геометријски фактор Δ. У таквом се случају величина фактора може израчунати за ма коју интегралну криву дате диференцијалне једначине, а да се за то не мора једначина интегралити. Јасно је онда од каквог је то интереса за случајеве када је интеграција једначина немогућа или компликована; она је, уосталом, за израчунавање тих фактора непотребна и онда кад би била лако изводљива. Осим тога, егзистенција и познавање таквих фактора и њима одговарајућих функција $\lambda(x, y)$ повлачи за собом и познавање извесних геометријских особина интеграла, које треба знати и онда када се интеграли не могу експлицитно одредити.

Овде ће примера ради бити наведени фактори Δ за неколико типова диференцијалних једначина првога реда.

I. За линеарну једначину првога реда

$$y' + y + f(x) = 0 \tag{10}$$

једна је геометријска инваријанта површина ограничена x-осом, двема крајњим ординатама и луком интегралне криве линије једначине (10). Одговарајућа функција $\lambda(x, y)$ овде је

$$\lambda(x, y) = y - \int_a^x f(x)\, dx.$$

II. За Рикатијеву једначину

$$y' + y^2 + f(x) = 0 \tag{11}$$

једна је геометријска инваријанта запремина описана обртањем ротационе површине интегралне криве линије око x-осе; одговарајућа функција λ тада је

$$\lambda(x,y) = -\pi\left[y + \int_a^x f(x)\,dx\right].$$

Иста једначина има једну инваријанту Ω и површину поларног сектора ограниченог луком интегралне криве линије и сматраног за функцију поларног угла x и потега y; функција λ тада је

$$\lambda(x,y) = -\frac{1}{2}\left[y + \int_a^x f(x)\,dx\right].$$

III. Једначина

$$y'^2 + y^2 - f(x) = 0, \tag{12}$$

на коју се наилази у великом броју геометријских и механичких проблема, има као геометријску инваријанту дужину лука интегралне криве линије, сматраног за функцију поларног угла x и потега y; функција λ тада је

$$\lambda(x,y) = \int_a^x dx\sqrt{f(x)}.$$

Интегралне криве једначине (12) (која се, као што се зна, у општем случају не може интегралити) имају, дакле, интересантну геометријску особину да између пресечних тачака са двема ма којим правама које пролазе кроз почетак, имају једну исту дужину лука, која се не мења када су те праве непокретне.

IV. Једначина

$$y^2y'^2 + y^2 - f(x) = 0 \tag{13}$$

има као инваријанту ротациону површину описану обртањем интегралне криве линије око x-осе; функција λ тада је

$$\lambda(x,y) = 2\pi\int_a^x dx\sqrt{f(x)}.$$

V. Иста би инваријанта била и за општију једначину

$$y^2y'^2 + y^2 - [hy' + f(x)]^2 = 0, \tag{14}$$

где је h дата константа, само што би тада функција λ била

$$\lambda(x,y) = 2\pi\left[hy + \int_a^x f(x)\,dx\right].$$

VI. За једначину

(15) $$y'^2 - [hy^2 + f(x)]^2 + 1 = 0,$$

где је h константа, инваријанта би била запреминска разлика $V_1 - V_2$, где је V_1 запремина паралелопипеда чија је дужина једне стране 1, друге $\frac{\pi}{h}$, а треће једнака дужини лука s интегралне криве линије; V_2 је запремина ротационе површине описане обртањем лука s интегралне криве линије око x-осе. Функција λ је у том случају

$$\lambda(x,y) = \frac{\pi}{h}\int_a^x f(x)\,dx.$$

VII. Једначина

(16) $$y'^2 - y^2 + 2f(x)y - f(x)^2 + 1 = 0$$

написана у облику

$$y - \sqrt{1+y'^2} = f(x)$$

истиче инваријанту једнаку разлици површине ограничене луком s интегралне криве, x-осом и двема крајњим ординатама и површине правоугаоника чија је основица једнака дужини лука s, а висине 1, одговарајућа функција λ је

$$\lambda(x,y) = \int_s^x f(x)\,dx.$$

Интегралне криве једначине (16) могу се, дакле, квадрирати ректификацијом њиховог лука.

VIII. Кад у општој диференцијалној једначини првог реда

(17) $$F(x,y)\,y' = \varphi(x,y) = 0$$

функције F и φ задовољавају погодбу

(18) $$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

њена лева страна је тачан извод функције $F(x,y)$ по промењивој x, а њен општи интеграл је

$$F(x,y) = C.$$

Кад је уместо погодбе (18) задовољена погодба

(19) $$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a,$$

где је a константа различита од нуле, једначину је у општем случају немогуће интегралити, али се ипак може уочити ова општа геометријска особина интеграла таквих једначина – ако се разлика

(20) $$F(x,y) - ax$$

означи са $\psi(x,y)$, једначина (17) може се написати у облику

(21) $$axy' = -\psi(x,y)\,y' - \varphi(x,y)$$

одакле је делимичном интеграцијом леве стране

(22) $$xy - \int y dx = -\frac{1}{a}\int [\psi(x,y)\,y' + \varphi(x,y)]\,dx.$$

С друге стране, пошто је

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} = a$$

то је, према једначини (19), задовољена погодба

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Према томе, интеграл је на десној страни једначине (22) извесна функција само координата (x, y).

Према томе, кад год коефицијенти f и φ опште диференцијалне једначине првог реда (17) задовољавају погодбу (1), једначина има за инваријанту Ω разлику између површине правоугаоника чије су стране дужине координата $(x,\ y)$ и одговарајуће криволинијске површине ограничене луком интегралне криве линије; функција $\lambda(x,y)$ тада је

$$\lambda(x,y) = -\frac{1}{a}\int [(f - ax)\,y' + \varphi]\,dx,$$

где је израз под интегралним знаком тада потпун диференцијал.

IX. Свака једначина првога реда

(23) $$F(x,y,y') = 0$$

има као инваријанту Ω површину P ограничену x-осом, двема крајњим ординатама и луком криве линије која представља закон варијације кривине τ интегралне криве линије једначине (23) током мењања апсцисе x. То се види отуда што је

$$P = \int \tau dx = \int \frac{\partial y'}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Дакле, површина P једнака је разлици коју добија једна одређена функција извода y у двема крајњим тачкама интегралне криве. А пошто је y', према једначини (23), одређена функција координата x, y, то је P одиста инваријанта поменуте врсте.

У другом једном раду биће показано каква се корист може извући из познавања таквих инваријаната Ω за проучавање интеграла диференцијалних једначина на које се оне односе.**

** Реферисао Владимир Варићак у FdM, B. 48, S. 515 (пр. Д. Т.).

ЈЕДНА ОСОБИНА ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА*

У теорији линеарних диференцијалних једначина познат је факт да се један *партикуларни* интеграл једначине

$$(1) \qquad f_0 \frac{d^n y}{dx^n} + f_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + f_{n-1} \frac{dy}{dx} + f_n y = F(x)$$

коју ћемо, означивши њену леву страну симболом $\Delta(y, x)$ написати у скраћеном облику

$$(2) \qquad \Delta[y, x] = F(x),$$

може извести из *општега* интеграла једначине

$$(3) \qquad \Delta[y, x] = 0$$

и то помоћу квадратура у којима интегралне границе *зависе од променљиве* x.

Лагранжова метода варијације интеграционих константата одређује такав партикуларни интеграл помоћу n квадратура, а Кошијева метода помоћу само једне квадратуре.

Овде ће бити изнета једна нова особина једначине (1) која се састоји у следећем.

Има специјалних функција $\lambda(x, \alpha)$ *променљиве* x *и једног променљивог параметра* а *које остају исте за све једначине* (1) *и које имају ту особину да се један партикуларни интеграл једначине* (1) *може извести из једнога партикуларног интеграла једначине*

$$(4) \qquad \Delta[y, x] = \lambda(x, \alpha)$$

па ма каква била функција F(x).

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. XCIX, Први разред, књ. 42, Београд, 1922, стр. 1–6. Саопштено у Академији природних наука 31. јануара 1921.

Осим тога, такав се партикуларни интеграл добија у облику једнога обичног одређеног интеграла чије су интегралне границе *айсолушне консшанше*, независне од облика једначине (1).

Тај је резултат заснован на факту да се једна произвољна аналитичка функција $F(x)$ може представити у облику одређеног интеграла

$$F(x) = \int_a^b F(t)\lambda(x,t)\,dt, \tag{5}$$

где је $\lambda(x,t)$ извесна специјална функција променљивих x и t, *која осшаје исша за све функције* $F(x)$, а a и b две константне интегралне границе.

Ако се тада за y узме израз

$$y = \int_a^b \psi(x,t)\,dt, \tag{6}$$

где је ψ непозната функција променљивих x и t, једначина (1) даје

$$\int_a^b \Delta[\psi, x]\,dt = \int_a^b F(t)\,y(x,t)\,dt. \tag{7}$$

Према томе, ако се за $\psi(x,t)$ узме један партикуларни интеграл линеарне једначине

$$\Delta[\psi, x] = F(t)\lambda(x,t), \tag{8}$$

(где t игра улогу променљивог параметра), функција y, дефинисана једначином (6), претпостављајући да је интеграл на десној страни те једначине коначан и одређен, представљаће један партикуларни интеграл дате једначине (1).

Ставивши да је

$$\psi = uF(t), \tag{9}$$

где је u нова непозната функција променљивих x и t и сматрајући t као један променљив параметар a, одредба партикуларног интеграла ψ једначине (8) своди се, дакле, на одредбу једнога таквога интеграла једначине

$$\Delta[u, x] = \lambda(x,a), \tag{10}$$

као што се и хтело показати. Функција $\lambda(x,a)$ остаје иста за све аналитичке функције $F(x)$ холоморфне за $x = 0$. У случајевима када је $x = 0$

сингуларитет функције $F(x)$ проблем се своди на горњи случај сменивши x са $x+a$, где је a сталан, подесно изабран број.

Ако је

$$u = \chi(x,a) \tag{11}$$

један партикуларни интеграл једначине (10), онда је

$$\psi = \chi(x,t) F(t) \tag{12}$$

одговарајући интеграл једначине (8).

Кад год интеграл (6), *пошто се у њему смени* $\psi(x,t)$ *изразом* (12), *има смисла, тј. има коначну и одређену вредност, он представља један партикуларни интеграл једначине* (1).

То може бити или за све могуће вредности x, или за вредности x које се налазе у одређеним областима бројне равни.

Горњем факту могу се дати разни прецизнији облици према томе на који је начин функција $F(x)$ представљена у облику (4). Тако се долази до резултата који ће овде бити изложени.

I

У једном моме ранијем раду[1] доказан је овај резултат.

Нека је $F(a)$ ма каква функција промењљиве x која има тачку $x=0$ као обичну тачку и која има коефицијенте свога Маклореновог реда све реалне. Ако се са $F(t)$ означи реални део функције

$$-\frac{aF'(t)}{\pi} \quad \text{за} \quad a = e^{ti}$$

биће за вредност a у унутрашњости круга холоморфности C функције $F(a)$ описаног око $a=0$,

$$F(a) = M + \int_0^{\pi} \Phi(t) \log(1 - 2a\cos t + a^2)\, dt, \tag{13}$$

где је M константа

$$M = -\frac{1}{2} F(0).$$

[1] М. Петровић, *Непосредна примена реалних одређених интеграла на алгебарске и трансцендентне једначине*, Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXIII, Први разред, књ. 29, Београд 1907, стр. 1–76.

Одредба једнога партикуларног интеграла диференцијалне једначине (1) своди се, дакле, на одредбу по једног партикуларног интеграла сваке од двеју једначина

$$\Delta[y,x] = M \tag{14}$$

$$\Delta[y,a] = \int_0^\pi \Phi(t)\log(1-2x\cos t + x^2)\,dt. \tag{15}$$

Узевши из једначине (15) за y израз облика

$$y = \int_0^\pi \Phi(t)\,u\,dt, \tag{16}$$

где је u нова непозната функција променљивих x и t, функција u треба да задовољи диференцијалну једначину

$$\Delta[u,x] = \log(1-2x\cos t + x^2), \tag{17}$$

где се t сматра променљивим параметром. Ако је u такав један интеграл једначине (17), њему ће, као партикуларни интеграл једначине (15), одговарати израз (16) пошто се у њему u смени својом тако нађеном вредношћу. Збир таквог партикуларног интеграла једначине (14) и партикуларног интеграла једначине (15) биће партикуларни интеграл једначине (1).

С друге стране, сменом

$$y = z + M$$

једначина (14) своди се на

$$\Delta[z,x] = 0.$$

Одредба једнога партикуларног интеграла једначине (1), *где је* F(x) *ма каква функција поменуте врсте, своди се на одредбу по једнога интеграла двеју једначина истога облика* (1), *али у којима је* F(x) *смењено једанпут нулом, а други пут функцијом облика*

$$\log(1-2ax+x^2).$$

При томе се a *има сматрати параметром.*

II

Нека је $F(x)$ ма каква функција променљиве x која задовољава погодбе наведене под I и нека је са $\Phi(t)$ означен реални део функције

$$\frac{F(x)}{\pi} \quad \text{за} \quad x = e^{ti}.$$

Према познатим Пуасоновим интегралним обрасцима за вредности x у унутрашњости круга C биће

$$F(x) = N + \int_0^\pi \Phi(t) \frac{1 - x\cos t}{1 - 2x\cos t + x^2}\, dt$$

$$F(x) = -N + \int_0^\pi \Phi(t) \frac{x\sin t}{1 - 2x\cos t + x^2}\, dt,$$

где је N константа

$$N = F(0).$$

Одредба једнога партикуларног интеграла једначине (1) *своди се, дакле, на одредбу по једног партикуларног интеграла двеју једначина истога облика* (1), *али у којима је* F(x) *смењено једанпут нулом, а други пут једном или другом од рационалних функција*

$$\frac{1 - ax}{1 - 2ax + x^2}, \quad \frac{x}{1 - 2ax + x^2}$$

где је a *параметар.* Очевидно је да се тај пар функција приликом интеграције може сменити паром

$$\frac{1}{1 - 2ax + x^2}, \quad \frac{x}{1 - 2ax + x^2}.$$

III

Једна пространа класа функција $F(x)$ може се изразити у облику одређеног интеграла

$$F(x) = \int_a^b u e^{rx} dt, \tag{18}$$

где су u и r функције променљиве t. Тако је, на пример, за вредности x са позитивним реалним делом

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt,$$

за $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и за x са позитивним реалним делом је

$$\frac{1}{\sqrt{a+\beta x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(a+\beta x)t^2}\, dt$$

за ма какве вредности a, b, x је

$$\frac{e^{bx} - e^{ax}}{x} = \int_a^b e^{tx} dt \quad \text{итд.}$$

У таквим се случајевима одредба једнога партикуларног интеграла једначине (1) *своди на одредбу партикуларног интеграла једначине истога облика, али у којој је функција* F(x) *смењена експоненцијалном функцијом* e^{ax}.

Тако се, на пример, налази један партикуларни интеграл једначине

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{e^{bx} - e^{ax}}{x}$$

у облику

$$y = \int_a^b \frac{e^{tx}}{t^n} dt.$$

Уопште, кад год је у једноме n-струком интегралу

$$y = \iint \ldots \int F(x)\, dx^n \tag{19}$$

могућно изразити функцију $F(x)$ у облику (18), *израчунавање интеграла* (19) *може се свести на израчунавање једног простог одређеног интеграла.*[**]

[**] Опширније приказао и коментарисао Владимир Варићак у FdM, B. 48, S. 515–516; погледати и приказ у Revue sémestrielle, 1927, t. XXXIII (пр. Д. Т.).

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГА РЕДА СА ОСЦИЛАТОРНИМ ИНТЕГРАЛИМА*

I

Најважнији тип диференцијалних једначина са осцилаторним интегралима представљају, без сумње, хомогене линеарне једначине другога реда. Кад је таква једначина сведена на облик

$$y'' + \varpi(x) y = 0 \tag{1}$$

познато је да, кад год је функција $\varpi(x)$ у једноме датом, довољно пространом размаку промењљиве x коначна, непрекидна и *позитивна*, интеграли једначине (1) уопште су *осцилаторне* функције те промењљиве у томе размаку. Честина и ритам осцилација могу се, у таквом једном размаку, одредити непосредно из квалитативних података о начину на који се функција $\varpi(x)$ мења у том размаку.

Међутим, једначину (1) задовољавају и интеграли појединих диференцијалних једначина првога реда

$$y' = f(x,y), \tag{2}$$

тако да, кад год одговарајућа функција $\varpi(x)$ задовољава погодбе везане за осцилаторни карактер интеграла једначине (1), и интеграли једначине (2) су осцилаторни.

Које су то једначине (2) *чији општи интеграл задовољава једну једначину облика* (1)*?*

Из једначине

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = -\varpi(x) y$$

или

* Српска краљевска академија, Глас, књ. CXVI, Први разред, књ. 52, Београд, 1925, стр. 11–23. М. Петровић је ову расправу саопштио у Академији природних наука 26. јануара 1925.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y} + \overline{\omega}(x)y = 0, \tag{3}$$

која се добија из једначина (1) и (2), *види се да су што оне једначине* (2) *за које се израз*

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{4}$$

своди на функцију само променљиве x, тако да у (4) не фигурише y. Ова функција представља тада функцију $-\overline{\omega}(x)$ што фигурише у једначини (1), а одговара посматраној једначини првог реда (2).

Тако, за једначину

$$y'^2 + y^2 = \varphi(x) \tag{5}$$

израз (4) има облик

$$\frac{\varphi'}{2y\sqrt{\varphi - y^2}} - 1; \tag{6}$$

да би он био независан од y, потребно је и довољно да буде

$$\varphi = \text{const.},$$

чему одговара

$$\overline{\omega}(x) = \text{const.} = 1.$$

Једина једначина (5), чији општи интеграл задовољава једну једначину (1), јесте, дакле, једначина

$$y'^2 + y^2 = a, \quad (a = \text{const.}), \tag{7}$$

а њој одговара једначина (1) облика

$$y'' + y = 0. \tag{8}$$

Општи интеграл једначине (8)

$$x = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

је осцилаторан, па ће, дакле, то бити случај и са општим интегралом једначине (7), који уосталом гласи:

$$y = C\sin x \pm \sqrt{a^2 - C^2}\cos x\,.$$

Да би линеарна једначина првога реда

$$y' = uy + v,$$

где су u и v функције променљиве x припадала истој класи једначина првога реда, потребно је и довољно да буде

$$u = -\frac{v'}{v}$$

и да одговарајућа функција

$$\overline{\omega}(x) = u' + u^2$$

буде осцилаторна.

Да би такав случај био и са једначином

$$y' = uy + \sqrt{v + wy^2},$$

(где су u, v, w функције променљиве x) потребно је и довољно да буде

$$\begin{gathered} w' + 4uv = 0, \\ v' + 2uw = 0 \end{gathered}$$

и да одговарајућа функција

$$\overline{\omega}(x) = u' + u^2 + w$$

буде осцилаторна. Једначина такве врсте, на пример

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi}y + \sqrt{\varphi - k\varphi^2 y^2}$$

(где је φ функција променљиве x) има за општи интеграл

$$y = k\sqrt{\varphi}\sin\left(k\int\varphi\,dx + C\right),$$

а функција $\overline{\omega}(x)$ има облик

$$\overline{\omega}(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - k^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi}.$$

II

Задржимо се на задатку: *одредити све једначине* (2) *које задовољавају једначину облика* (1).

Проблем се своди на интеграцију парцијалне диференцијалне једначине првога реда

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = -\overline{\omega} y, \tag{9}$$

где је $\overline{\omega}$ функција само променљиве x. Једначина се своди на систем

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{\overline{\omega} y}, \tag{10}$$

еквивалентан систему

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = -\overline{\omega} y, \tag{11}$$

који се своди на једначину (1). Ако су

$$\begin{aligned} py + qy' &= C_1, \\ ry + sy' &= C_2, \end{aligned} \tag{12}$$

(p, q, r, s функције променљиве x), два прва интеграла једначине (1) (а ови се, као што је познато, могу извести из једног партикуларног интеграла исте једначине), онда ће једначине

$$\begin{aligned} py + qz &= C_1, \\ ry + sz &= C_2, \end{aligned}$$

представљати два интеграла једначине (9), а њен општи интеграл биће

$$\phi(py + qy', ry + sy') = 0,$$

где је ϕ произвољна функција двеју променљивих. Према томе:

најойшшији облик једначина йрвоīа реда

$$y' = f(x, y), \tag{13}$$

чији ойшши иншеīрал задовољава линеарну једначину (1), *јесше онај за који оīоварајућа функција* f *задовољава једначину*

$$\phi(py + qf, ry + sf) = 0. \tag{14}$$

До решења истог проблема долази се и на овај начин. Пошто општи интеграл једначине (13) има да задовољи једначину (1), чији је општи интеграл облик

$$y = C_1\lambda + C_2\mu, \tag{15}$$

где су λ и μ два њена партикуларна интеграла, то једначине (13), које задовољавају једначину (1), јесу оне чији је општи интеграл облика

(15), где су интеграционе константе C_1 и C_2 међу собом везане релацијом

$$\phi(C_1, C_2) = 0. \tag{16}$$

Проблем одређивања ових једначина првога реда, које имају такве опште интеграле, расправљан је у једном мом ранијем раду,[1] где се у томе погледу дошло до следећег резултата.

Свака диференцијална једначина првога реда, чији је општи интеграл облика (15), где су C_1 и C_2 две међу собом везане константе, може се довести на облик

$$\phi(\alpha y + \beta y', \gamma y + \delta y') = 0, \tag{17}$$

где је ϕ функција двеју променљивих; α, β, γ, δ су функције променљиве x, међу собом везане релацијама

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\beta\gamma - \alpha\delta} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right) \\ \frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\delta} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Ако је (α, β, γ, δ) скуп таквих функција, општи интеграл посматране једначине првога реда биће

$$y = C_1 e^{-\int \frac{\alpha}{\beta} dx} + C_2 e^{-\int \frac{\gamma}{\delta} dx}, \tag{19}$$

где су C_1 и C_2 везане релацијом

$$\phi(C_1, C_2) = 0. \tag{20}$$

Проблем да се на једној датој једначини првог реда распозна да ли она испуњава горње погодбе, може се знатно упростити непосредним проучавањем сингуларитета њенога општег интеграла. Пошто једначине које задовољавају те погодбе имају општи интеграл облика (15), где су константе C_1 и C_2 везане једном релацијом, то су *сви интегрални сингуларитети за такве једначине стални, тј. независни од интеграционе константе.* А у аналитичкој теорији диференцијалних једначина првог реда познате су методе помоћу којих се за дату једна-

[1] M. Petrovitch, *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre*, Věstnik Král. české společnosti náuk, Praha 1901, Třida math. přirodovědecka, t. XXXI, pp. 1–20.

чину увек може распознати да ли је такав случај или није, са њеним општим интегралом.

Помоћу тих метода се, на пример, долази до следећих резултата[2].

Међу свим једначинама првога реда и првог степена

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{21}$$

где су P и Q полиноми по y, једина која испуњава горње погодбе јесте линеарна једначина првога реда.

Међу свим једначинама облика

$$y'^m = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{22}$$

где је m цео позитиван број, једине које задовољавају исте погодбе осим линеарне, јесу две једначине:

$$y'^m = \varphi(x)(y-a)^{m-1} \tag{23}$$

$$y'^2 = \varphi(x)(y-a)(y-b), \tag{24}$$

где су a и b сталне количине, а $\varphi(x)$ ма каква функција променљиве x.

Интеграл прве једначине је

$$y = a + \left[C + \frac{1}{m}\int \sqrt[m]{\varphi}dx\right]^m,$$

а интеграл друге

$$y = \frac{1}{2}(a+b) + Ce^{\int\sqrt{\varphi}dx} + \frac{(a-b)^2}{4C}e^{-\int\sqrt{\varphi}dx}.$$

Сменивши y са $y + a$, прва једначина се своди на једначину истога типа, чији је општи интеграл

$$y = C + \frac{1}{m}\int \sqrt[m]{\varphi}dx.$$

Друга сменом y са $y + \frac{a+b}{2}$ своди се на једначину истога типа, која има за општи интеграл

[2] M. Petrovitch, *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques*, Gauthier – Villars, Paris, 1894, p. 32.

$$y = Ce^{\int\sqrt{\varphi}dx} + \frac{(a-b)^2}{4C}e^{-\int\sqrt{\varphi}dx}.$$

Ако се на наведени начин нађе да дата једначина првога реда

$$(25) \qquad y' = f(x,y)$$

испуњава погодбе везане за облик

$$y = C_1\lambda + C_2\mu$$
$$\phi(C_1, C_2) = 0$$

општег интеграла, онда је тиме утврђено да овај интеграл задовољава хомогену линеарну диференцијалну једначину облика (1). Тада, кад год је одговарајућа функција $\overline{\omega}(x)$ у овој последњој једначини у датом, довољно пространом размаку променљиве x коначна, непрекидна и позитивна, *општи интеграл посматране једначине првога реда биће осцилаторан у том размаку.*

III

Али, једначина (1) није једина диференцијална једначина другога реда с осцилаторним интегралима таква да се тај осцилаторни карактер може распознати на самој једначини. У једном мом ранијем раду[3] показано је да је исти случај и са бескрајно много типова диференцијалних једначина свих редова. Овде је интересантан следећи факт. Постоји бескрајно много како алгебарских тако и трансцендентних функција

$$(27) \qquad F(x,y)$$

које, када се променљива x креће у једноме датом размакуу (a, b), остају непрестано позитивне и веће од једнога сталног позитивног броја N, па ма каквом реалном вредношћу (коначном или бескрајном) сменили у (27) променљиву y.

Таква би, на пример, међу алгебарским функцијама била функција $F(x,y)$ која је полином $P(x,y)$ по променљивој y, а садржи само *парне* степене те променљиве, са коефицијентима који су, као и $P(x,0)$, или сталне позитивне величине, или ма какве функције променљиве x позитивне у размаку (a, b).

[3] M. Petrovitch, *Fonctions implicites oscillantes*, International Congress of Mathematicians, Cambridge 1912, vol. I, pp. 295–302; у овој књизи (стр. 104–115). Ова расправа је у преводу изложена.

Међу трансцендентним функцијама таква би била и функција

$$F(x,y) = f(x) + \varphi(x)e^{-P(x,y)}, \tag{28}$$

где је $P(x,y)$ малопређашњи полином, а f и φ ма какве функције променљиве x, коначне, непрекидне и позитивне у размаку (a, b).

Тако исто постоји и бескрајно много разноврсних функција

$$\phi(x,y), \tag{29}$$

како алгебарских тако и трансцендентних, таквих да док се x мења у датом размаку (a, b) вредност функције је непрестано позитивна и налази се између два стална броја

$$N \text{ и } M \quad (N < M)$$

па ма каквом реалном вредношћу (коначном или бескрајном) сменили променљиву y. Таква би, на пример, била функција

$$\phi(x,y) = \frac{u + vy^2}{w + sy^2} \tag{30}$$

где су u, v, w, s или сталне позитивне количине или коначне, непрекидне и позитивне функције променљиве x у размаку (a, b).

Таква би била и функција

$$\phi(x,y) = \frac{u^2 + v^2y^4}{(u + vy^2)^2} \tag{31}$$

или трансцендентна функција (28) итд.

За сваку од диференцијалних једначина другога реда

$$y'' + yF(x,y) = 0 \tag{32}$$

$$y'' + y\phi(x,y) = 0 \tag{33}$$

везане су ове особине њихових интеграла.[4]

1) Сваки интеграл, кад год су он и његова прва два извода коначне и непрекидне функције променљиве x у довољно пространом размаку (a, b), *у том размаку има осцилаторан карактер*, тј. само просте нуле, мењајући знак сваки пут при проласку кроз ма коју од тих нула.

[4] M. Petrovitch, наведено.

2) Ако се са N означи *доња* граница функције $F(x,y)$ за вредности x у размаку (a, b) и за све реалне вредности y, *интеграл једначине* (32) *мења свој знак у размаку* (a, b) *најмање онолико пута колико се пута вредност*

$$\frac{\pi}{\sqrt{N}} \tag{34}$$

садржи у разлици (b – a).

3) Ако се са N и M означе једна *доња* и једна *горња* граница функције $\phi(x,y)$ за поменуте вредности x и y, *интеграл једначине* (22) *мења у размаку* (a, b) *свој знак најмање онолико пута колико се пута вредност (34) садржи у разлици* (b – a), *а највише онолико пута колико се вредност*

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \tag{35}$$

садржи у истој разлици, или једанпут више.

Тако, на пример, једначини

$$y'' + \alpha y + \beta y^3 = 0 \tag{36}$$

(где су α и β позитивне константе), која се интеграли помоћу елиптичних функција, одговара функција

$$F(x,y) = \alpha + \beta y^2 \tag{37}$$

чија је вредност увек већа од α; њен интеграл ће, дакле, у размаку (a, b) променити знак најмање онолико пута колико се вредност $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ садржи у разлици $(b - a)$.

Једначини

$$(u + vy^2)\, y'' + y\sqrt{v^2y^4 + u^2} = 0, \tag{38}$$

где су u и v или сталне позитивне количине или функције промењиве x које су коначне, непрекидне и позитивне у размаку (a, b), одговара функција

$$\phi(x,y) = \frac{\sqrt{u^2 + v^2y^4}}{u + vy^2} \tag{39}$$

чија вредност, за све вредности x у размаку (a, b) и за све реалне вредности y, лежи, као што је познато, између вредности $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1. Према томе интеграл једначине (38) мења у размаку (a, b) свој знак најмање онолико пута колико се вредност $\pi\sqrt{2}$ садржи у разлици $(b - a)$, а највише онолико пута колико се број π садржи у тој разлици или једанпут више. Број промена знака интеграла у размаку (a, b) једнак је, дакле, броју целих јединица садржан у вредности

$$1+\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\pi}(b-a)=1+0,27169\,(b-a)$$

са грешком која ни у ком случају не прелази број целих јединица садржаних у вредности

$$1+\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\pi}(b-a)=1+0,04661(b-a).$$

IV

Да би општи интеграл једне једначине првога реда

$$y' = f(x,y) \tag{40}$$

задовољавао једначине (32) или (33) *потребно је и довољно да функција* f(x, y) *задовољава погодбу да се израз*

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{41}$$

сведе на функцију (27) *или* (29). Најопштија функција такве врсте добија се интеграцијом парцијалне једначине првога реда

$$\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=y\lambda\,(x,y), \tag{42}$$

где је $\lambda\,(x,y)$ једна од функција (27) или (29). Једначина се своди на систем

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{\lambda\,(x,y)} \tag{43}$$

еквивалентан систему

$$\frac{dy}{dz}=z,\quad \frac{dz}{dx}=\lambda\,(x,y) \tag{44}$$

или једначини

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda(x,y). \tag{45}$$

Нека је

$$\varphi_1(x,y,y') = C_1 \tag{46}$$

први интеграл једначине (45); тада се помоћу квадратуре може наћи још један њен први интеграл

$$\varphi_2(x,y,y') = C_2. \tag{47}$$

Општи интеграл једначине (46) биће

$$\theta(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

где је θ произвољна функција двеју променљивих, а *најопштија* функција тражене врсте јесте $f = z$, где је z један корен једначине

$$\theta[\varphi_1(x,y,z),\ \varphi_2(x,y,z)] = 0. \tag{48}$$

Тако, кад функција $f(x,y)$ задовољава погодбу

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \phi(x,y), \tag{49}$$

где је ϕ функција облика (39), сваки интеграл једначине (40) [који би, као и његова два прва извода, био коначан и непрекидан у размаку (a, b)] јесте осцилаторна функција променљиве x и мења знак у том размаку најмање онолико пута колико има целих јединица у вредности

$$\frac{b-a}{\pi\sqrt{2}} = 0,2251(b-a)$$

а највише онолико пута колико има целих јединица у вредности

$$1 + \frac{b-a}{\pi} = 1 + 0,3183(b-a).$$

У општијем случају, кад функција $f(x,y)$ задовољава погодбу (49), где је

$$\phi(x,y) = y\,\frac{u + vy^2}{(u^p + v^p y^{2p})^{\frac{1}{p}}} \tag{50}$$

(где је p ма какав реалан позитиван број), пошто за позитивне вредности x_1 и x_2 вредност израза

$$\frac{(x_1+x_2)^p}{x_1^p+x_2^p}$$

увек лежи између 1 и 2^{p-1}, интеграл једначине (40) је осцилаторан и мења знак у размаку (a, b) најмање онолико пута колико се број π садржи у разлици $(b-a)$, а највише онолико пута колико се број

$$\frac{\pi}{2^{\frac{p-1}{2p}}}$$

садржи у тој разлици, или за једну јединицу више.

V

Исте методе дају могућности да се и за дати систем симултаних једначина првога реда

$$(51)\qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

истакне *егзистенција осцилаторних интеграла*. То је случај кад се бар један од n израза

$$(52)\qquad \frac{1}{y_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}+\sum f_i\,\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\right)\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

своди на функцију само промењиве x, негативну у посматраном размаку (a, b) или на коју од функција

$$(53)\qquad F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

која, када се промењива x буде мењала у датом размаку (a, b), непрестано остаје мања од сталног негативног броја $-N$, па ма каквим се скупом реалних, коначних или бескрајних вредности смениле промењиве $y_1, y_2, \ldots, y_n$ у F. Тада се добија једначина

$$\frac{d^2 y_k}{dx} - y_k F = 0 \tag{54}$$

на којој се за интеграл, према напред наведеним погодбама, може распознати његов осцилаторни карактер у размаку (a, b).

Такав је, на пример, случај са системом

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= u y_1 + v y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= w y_1 + s y_2, \end{aligned} \tag{55}$$

где су u, v, w, s функције променљиве x везане релацијом

$$v' + v(u + s) = 0,$$

у ком се случају одговарајућа функција F за интеграл y_1 своди на

$$F = u' + u^2 + vw$$

само променљиве количине x.

За систем

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha y_2 y_3, \quad \frac{dy_2}{dx} = \beta y_1 y_3, \quad \frac{dy_3}{dx} = \gamma y_1 y_2,$$

на који се наилази у проблему кретања чврстог тела и који се интеграли помоћу елиптичних функција, налази се да интегралу y_1 одговара функција

$$F = \alpha(\gamma y_2^2 + \beta y_3^2)$$

на коју је лако применити горње резултате.**

** Реферисао Јован Карамата у FdM, B. 51, S. 332, а шири приказ изложен у Revue sémestrielle, 1927, t. XXXIII (пр. Д. Т.).

ЈЕДНА ОСОБИНА ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГА РЕДА*

Уочимо низ функција

(1) $$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

једне независно променљиве величине x, дефинисаних рекурзивном релацијом

(2) $$X_{n+1} = X_n + \frac{3}{4}\left(\frac{X_n'}{X_n}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{X_n''}{X_n},$$

где је једна, било која од функција X_n, произвољно дата функција променљиве x.

Релација (2) може се, уосталом, написати и у облику

(3) $$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{4}\left(\frac{X_n'}{X_n}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{X_n'}{X_n}\right).$$

Када је

$$X_n = ae^{bx},$$

биће

$$X_{n+1} = ae^{bx} + \frac{b^2}{4}.$$

Када је

$$X_n = ax,$$

биће

$$X_{n+1} = ax + \frac{3}{4x}.$$

* Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 232, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 70, Zagreb, 1926, str. 99–107. Saopšteno u Razredu 4. decembra 1925.

За

$$X_n = ax^m$$

биће

$$X_{n+1} = ax^m + \frac{3mx - 3m(m-1)}{4x^2}.$$

За

$$X_n = axe^x$$

биће

$$X_{n+1} = axe^x + \frac{x^2 + 2x + 3}{4x^2}.$$

За

$$X_n = a \log x$$

добија се

$$X_{n+1} = a \log x + \frac{3x + 2}{4x^2 \log x}.$$

Да би било

$$X_{n+1} = \lambda X_n \qquad \lambda = \text{const.},$$

потребно је и довољно да X_n буде интеграл диференцијалне једначине

$$2yy'' - 3y^2 + 4(\lambda - 1) y^3 = 0,$$

чији се општи интеграл добија помоћу две квадратуре.

Диференцијална једначина

$$(4) \qquad 2yy'' - 3y'^2 + \varphi(y) = 0,$$

на коју се наилази у проблемима одређивања функција (1), за општи интеграл има функцију y одређену инверзијом интеграла

$$(5) \qquad x + C_1 = \int \frac{dy}{y\sqrt{C_2 y - y\int \frac{\varphi(y)}{y^4} dy}},$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе.

Када је X_n константа, алгебарска функција променљиве x или променљиве e^{ax} или, пак, променљивих $\sin ax$, $\cos ax$, то ће бити случај и са свима функција $X_{n+\chi}$.

Тако исто, када је X_n рационална функција променљиве x, униформна просто периодична или униформна двогубо периодична функција x, то ће бити случај и са свима функцијама $X_{n+\chi}$.

Као што се види, низови функција (1) могу бити бескрајно разноврсни, а та разноврсност долази од произвољности једне од њих, која се може по вољи бирати.

Интерес функција (1) лежи у овој особини биномне диференцијалне једначине другога реда.

Из једноī ūарūикуларноīа инūеīрала једне

$$y'' - X_\chi y = 0 \tag{6}$$

ма које једначине, може се извесūи оūшūи инūеīрал сваке од једначина

$$y'' - X_n y = 0 \tag{7}$$

и ūо без иједне квадраūуре $\mathrm{n} > \chi$ *а ūомоћу* $\chi - \mathrm{n}$ *квадраūура за* $\mathrm{n} < \chi$.

Та особина резултира из тога што се из једначине (6) диференцијаљењем добија

$$y''' - X_\chi y' - X'_\chi y = 0.$$

Одатле се, сменивши y његовом вредношћу

$$\frac{y''}{\sqrt{X_\chi}}$$

и извршивши затим супституцију

$$y' = u\sqrt{X_\chi} \tag{8}$$

добија једначина

$$u'' - \Phi(x)u = 0, \tag{9}$$

где је

$$\Phi(x) = X_\chi + \frac{3}{4}\left(\frac{X'_\chi}{X_\chi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{X''_\chi}{X_\chi},$$

а то исказује да је

$$\varphi(x) = X_{\chi+1}.$$

Између општег интеграла y једначине (6) и општег интеграла u једначине

$$u'' - X_{\chi+1}u = 0 \tag{10}$$

постоји, дакле, веза исказана релацијом (8). Знајући један партикуларни интеграл једначине (6), знаће се и њен општи интеграл, а помоћу овога добија се општи интеграл једначине (10), који гласи

(11) $$u = \frac{y'}{\sqrt{X_\chi}}.$$

Помоћу њега добија се интеграл једначине

(12) $$v'' - X_{\chi+2} v = 0$$

у облику

(13) $$v = \frac{u'}{\sqrt{X_{\chi+1}}} = \frac{1}{\sqrt{X_{\chi+1}}} \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\sqrt{X_\chi}}\right);$$

интеграл једначине

(14) $$w'' - X_{\chi+3} w = 0$$

у облику

(15) $$w = \frac{v'}{\sqrt{X_{\chi+2}}} = \frac{1}{\sqrt{X_{\chi+2}}} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{X_{\chi+1}}} \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\sqrt{X_\chi}}\right)\right] \quad \text{итд.}$$

Интеграл једне ма које од једначина

(16) $$Z'' - X_n Z = 0,$$

где је $n > \chi$, добија се на тај начин *без иједне квадратуре.*

Напротив, интеграл једначине

(17) $$u'' - X_{\chi-1} u = 0,$$

који је с интегралом једначине (6) везан релацијом

(18) $$u' = y\sqrt{X_{\chi-1}},$$

добија се из интеграла y квадратуром

(19) $$u = \int y\sqrt{X_{\chi-1}}\,dx;$$

интеграл једначине

(20) $$v'' - X_{\chi-2} v = 0$$

добија се у облику

(21) $$v = \int u\sqrt{X_{\chi-2}}\,dx = \int\left[\int y\sqrt{X_{\chi-1}}\,dx\right]\sqrt{X_{\chi-2}}\,dx \quad \text{итд.}$$

Интеграл једне ма које од једначина (16), за $n < \chi$ добија се *помоћу* $\chi - \mathrm{n}$ *квадратура.*

Горња особина биномне линеарне једначине другога реда даје могућности да кад се, пошавши од једначине

$$y'' - f(x)y = 0, \tag{22}$$

где се узима да је

$$f(x) = X_0$$

према обрасцу (2) формира низ једначина

$$u'' - X_n u = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{23}$$

помоћу интеграла једне ма које од једначина (23), *одреди општи интеграл првобитне једначине* (22). Обрнуто, помоћу интеграла једначине (22) може се *интегралити једна ма која једначина низа* (23).

Пођимо, на пример, од једначине

$$y'' - ax^m y = 0, \tag{24}$$

где је m рационалан број облика

$$m = \frac{4n}{1-2n}, \tag{25}$$

где је n ма какав цели број позитиван или негативан. Зна се да се једначина (24) може интегралити у коначном облику помоћу алгебарских и тригонометријских функција. Ако се узме да је

$$X_0 = ax^m$$

и формира једначина

$$u'' - X_1 u = 0,$$

где је, према обрасцу (2)

$$X_1 = ax^m + \frac{3mx - 2m(m-1)}{4x^2},$$

чији је општи интеграл

$$u = \frac{y'}{\sqrt{X_1}},$$

долази се до следећег резултата.

Кад год је m рационалан број облика (25), општи интеграл једначине

$$u'' - \left[ax^m + \frac{3mx - 2m(m-1)}{4x^2}\right]u = 0$$

биће комбинација алгебарских и тригонометријских функција.

Познавање интеграла једначине

$$y'' - ae^{bx}y = 0$$

повлачи собом интеграцију једначине.

Из интеграла једначине

$$y'' - xy = 0$$

може се извести интеграл једначине

$$u'' - \left(x + \frac{3}{4x}\right)u = 0.$$

Пошавши од једначине

$$y'' - ay = 0 \qquad (a = \text{const.})$$

и узевши да је $X_1 = a$ функција X_0 биће интеграл једначине

$$2yy'' - 3y'^2 - 4y^3 + ay^2 = 0.$$

Интеграл једначине

$$u'' - X_0 u = 0$$

биће, дакле,

$$u = C_1 \int e^{x\sqrt{a}} \sqrt{X_0}\, dx + C_2 \int e^{-x\sqrt{a}} \sqrt{X_0}\, dx,$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе.

Као што се види, функције везане релацијом (2) доводе до следећег решења аналитичког проблема.

Одредити функцију $\varphi(x)$ тако да, кад год се може интегралити једначина

$$y'' - fy = 0, \tag{26}$$

може се, без квадратура, интегралити и једначина

$$y'' - (f + \varphi)y = 0. \tag{27}$$

Решење се састоји у томе да се за $\varphi(x)$ узме функција

$$\varphi(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{f'}{f}. \tag{28}$$

Облик функције φ, одређене на тај начин, *зависи од облика функције* f(x), са којом је везана релацијом (28). Међутим, супституцијом

$$x = \varphi(t), \qquad y = z\psi(t) \tag{29}$$

решава се и проблем овакве врсте.

Одредити функције $\lambda(x)$ и $u(x)$, *независне од облика функције* f(x), тако да, кад год се може интегралити једначина (26), може се интегралити и једначина

$$y'' + (\lambda f + u)y = 0 \tag{30}$$

и то без квадратура.

Комбинована употреба функција X_n и супституције (29) доводи до функција φ у једначини (27), која ће имати разне друге облике.

Напослетку, наведимо да позната веза између једначине (26) и једначина

$$\begin{gathered} y'' + f_1 y' + f_2 y = 0 \\ y' + f_1 y^2 + f_2 y + f_3 = 0 \end{gathered} \tag{31}$$

чини да се горњи резултати могу применити и на једначине (31).

Тако се, на пример, у погледу Рикатијеве једначине

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + \frac{1}{e^{2x} - 1} = 0 \tag{32}$$

долази до следећег резултата:

Узевши у низу (1) да је

$$X_0 = \frac{1}{e^{2x} - 1},$$

све ће функције X_n бити рационалне функције променљиве e^{2x}, а интеграл ма које од одговарајућих једначина

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_n = 0$$

биће комбинација функције $\lambda(e^{-x})$ њених извода и рационалне функције променљиве e^x, где је

$$\lambda(\chi) = \frac{F(\chi)}{E(\chi)} - 1,$$

а где F и E означују елиптичне интеграле прве и друге врсте

$$F(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\chi^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$E(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\chi^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

То произлази из познатог факта[1] да $\lambda(\chi)$ задовољава једначину

$$\chi \frac{d\lambda}{d\chi} - \lambda^2 = \frac{\chi^2}{1-\chi^2},$$

која се супституцијом $\chi = e^{-x}$ своди на једначину (32).**

[1] G. F. Childe, The Messenger of Mathem. 1889–1890, pp. 155–164.

** У скраћеном облику ова Петровићева расправа објављена је и на француском језику *Une propriété de l'équation différentielle linéaire du second ordre* (Izvešća, sv. 21, Zagreb 1926, str. 15–17), а Јован Карамата је изложио приказ у FdM, B. 52, S. 447. Петровићевим резултатима у овој расправи користио се Д. С. Митриновић у раду *Неколико ставова о Riccati-евој диференцијалној једначини*, СКА, Глас, књ. CLXXXI, Београд 1939. стр. 169–236; видети и друге Митриновићеве радове о овој теми (пр. Д. Т.).

О РЕАЛНИМ ИНТЕГРАЛИМА ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА*

1. Једначина

$$(1) \qquad y'' = ay \quad (a = \text{реална const.})$$

има осцилаторне или неосцилаторне интеграле према томе да ли је константа негативна или позитивна.

Ако се у општем интегралу

$$(2) \qquad y = C_1 e^{x\sqrt{a}} + C_2 e^{-x\sqrt{a}},$$

који одговара *позитивном a*, за константе интеграције узму константе x_0 и y_0, које су са C_1 и C_2 повезане релацијама

$$C_1 = \frac{1}{2} y_0\, e^{-x\sqrt{a}}, \quad C_2 = \frac{1}{2} y_0\, e^{x\sqrt{a}},$$

односно

$$(3) \qquad x_0 = \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{C_2}{C_1}, \quad y_0 = 2\sqrt{C_1 C_2},$$

тада се тај интеграл може писати у облику

$$(4) \qquad y = \frac{y_0}{2}(e^{x} + e^{-x}),$$

где је

$$(5) \qquad X = (x - x_0)\sqrt{a}.$$

---

* Наслов оригинала *Sur les intégrales réelles de l'équation linéaire du second ordre*, Bulletin de la Société mathématique de Françe, Paris, 1926, t. LIII, 1–4, pp. 127–134

Константа x_0, која се може кретати од једног до другог партикуларног интеграла, када је реална, представља вредност x за коју y достиже свој јединствени максимум или минимум; константа y_0 представља покретну вредност тог екстрема.

Ако је $y_0 > 0$ интеграл y у тачки $x = x_0$ има позитиван минимум; за вредности $x < x_0$ интеграл је позитиван и стално опада; за $x > x_0$ интеграл је позитиван и стално расте.

Ако је $y_0 < 0$, y у тачки $x = x_0$ има негативан максимум; за $x < x_0$ интеграл је негативан и стално расте; за $x > x_0$ интеграл је негативан и стално опада.

Ако сада у општем интегралу

$$(6) \qquad y = C_1 \sin x\sqrt{\alpha} + C_2 \cos x\sqrt{\alpha} \qquad (\alpha = -a)$$

једначине (1), која одговара *негативном a*, за константе интеграције узмемо константе x_0 и y_0, које су са C_1 и C_2 везане релацијама

$$\begin{aligned} C_1 &= y_0 \sin x_0\sqrt{\alpha}, \\ C_2 &= y_0 \cos x_0\sqrt{\alpha}, \end{aligned}$$

односно

$$(7) \qquad \begin{cases} y_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arctg} \dfrac{C_1}{C_2}, \end{cases}$$

тај интеграл се може писати у облику

$$(8) \qquad y = y_0 \cos Y,$$

где је

$$(9) \qquad Y = (x - x_0)\sqrt{\alpha}.$$

Константа x_0, која је увек реална и може се кретати од једног до другог партикуларног интеграла, представља вредност x за коју y достиже свој максимум или минимум y_0. Интегрална крива се састоји од полуталаса који су наизменично позитивни и негативни и који имају исту амплитуду y_0. Интеграл мења знак сваки пут када се анулира. Дужина интервала између две узастопне нуле од y износи $\dfrac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$.

2. *До аналогних чињеница долази се у случају једначине*

$$(10) \qquad y'' = f(x)y.$$

Да бисмо то показали, нека прво x припада интервалу (a, b) у коме је функција $f(x)$ реална, коначна, непрекидна и *позитивна*. Нека је x_0 покретна вредност x, која припада том интервалу и која анулира извод y' интеграла y. Како су, према (10), y'' и y истог знака за све вредности x садржане у интервалу (a, b), интеграл y у том интервалу не може да има ни позитивне максимуме ни негативне минимуме. С друге стране, покретна вредност $x = x_0$ не би могла да анулира y'' јер би према (10) тада анулирала и y и била би вишеструка нула од y, а познато је да су такве нуле фиксне. Према томе:

1) ако је $y_0 > 0$, y ће у тачки $x = x_0$ имати позитиван минимум; за вредности x између a и x_0 интеграл је позитиван и стално опада; за x између x_0 и b интеграл је позитиван и стално расте;

2) ако је $y_0 < 0$, y ће у $x = x_0$ имати негативан максимум; за x између a и x_0 интеграл је негативан и расте, а за x између x_0 и b интеграл је негативан и опада.

Из тога следи да производ yy' у интервалу (a, b) мења знак само у тачки $x = x_0$.

Ако се једначина (10) помножи са $y'dx$ и интегрише између граница x и x_0, где је $a < x < x_0$, и ако се има у виду да је $y_0' = 0$, добија се

$$-\frac{y^2}{2} = \int_x^{x_0} f(x)yy'dx, \tag{11}$$

из чега произлази

$$y'^2 = f(\xi)(y^2 - y_0^2) \quad (x < \xi < x_0), \tag{12}$$

па је према томе

$$y = \frac{y_0}{2}(e^X + e^{-X}), \tag{13}$$

где је

$$X = \int_{x_0}^{x} \sqrt{f(\xi)}dx = (x - x_0)\sqrt{f(0)} \quad (x < 0 < x_0). \tag{14}$$

Ако се сада једначина (10) помножи са $y'dx$ и интегрише између граница x_0 и x, где је $x_0 < x < b$, добија се

$$\frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} f(x)yy'dx, \tag{15}$$

одакле се могу извести изрази (13) и (14) са $x_0 < 0 < x$.

Из тога проистиче следећа пропозиција.

Сваки реални интеграл једначине

$$y'' = f(x)y \tag{16}$$

чији се први извод анулира у тачки x_0 *из интервала* (a, b) *у коме је функција* f(x) *позитивна, може се написати у облику*

$$y = \frac{y_0}{2}(e^{X} + e^{-X}), \tag{17}$$

где је

$$X = (x - x_0)\sqrt{f(\xi)}, \tag{18}$$

при чему је ξ *вредност садржана између* x_0 *и* x, *и то за сваку вредност* $a < x < b$.

Како извод интеграла (17) мења знак само за $x = x_0$, закључује се да *за вредности* x *садржане у интервалу* (a, b), *интеграл* у *је стално садржан између*

$$\frac{y_0}{2}(e^{X_1} + e^{-X_1}) \quad \text{и} \quad \frac{y_0}{2}(e^{X_2} + e^{-X_2}), \tag{19}$$

где је

$$X_1 = (x - x_0)\sqrt{N}, \quad X_2 = (x - x_0)\sqrt{M}, \tag{20}$$

при чему N и M означавају доњу и горњу границу од $f(\xi)$ за вредности између x_0 и x, и то за све вредности x такве да је $a < x < b$.

3. Нека даље x припада интервалу (a, b), у коме је функција $f(x)$ реална, коначна, непрекидна и *негативна*. Познато је да у том случају интеграл y мења знак увек када се анулира и да, како је интервал (a, b) довољно велики, интегрална крива y осцилује јер се састоји од полуталаса који су наизменично позитивни и негативни.

Посматрајмо најпре *позитиван* полуталас. Према самој једначини (10), како је извод y'' негативан дуж једног таквог полуталаса, он може да има само један максимум.

Нека је $x = x_0$ вредност x за коју је тај максимум достигнут, а x_1 и x_2 вредности x које дефинишу две крајње тачке полуталаса.

Када x варира од x_1 до x_0, ордината y је стално позитивна и растућа; за x које варира од x_0 до x_2 она је стално позитивна и опадајућа. Дакле, у сваком од та два интервала (x_1, x_0) и (x_0, x_2) производ yy' задржава стални знак.

Посматрајмо интегралну криву у интервалу (x_1, x_0). Ако се једначина (10) помножи са $y'dx$ и интегрише између граница x и x_0, где је $x_1 < x < x_0$, добија се

$$-\frac{y'^2}{2} = \int_x^{x_0} f(x)yy'dx = (y_0^2 - y^2)\lambda, \tag{21}$$

где је λ нека вредност коју $f(t)$ узима за неко t садржано између x и x_0. Из тога се изводи

$$y = y_0 \cos X, \tag{22}$$

где је

$$X = (x - x_0)\sqrt{-f(\xi)}, \tag{23}$$

при чему је ξ нека вредност између x и x_0, и то за све вредности x, такве да је $x_1 < x < x_0$.

Ако се посматра интегрална крива у интервалу (x_0, x_2), (10) се помножи са $y'dx$ и интегрише између граница x_0 и x где је $x_0 < x < x_2$, добија се

$$\frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} f(x)yy'dx = (y^2 - y_0^2)\mu, \tag{24}$$

где је μ вредност коју $f(t)$ узима за t између x_0 и x. Из тога се изводи једначина у облику (22) која важи за све вредности x такве да је $x_0 < x < x_2$.

Дакле, сваки позитивни полуталас може се написати у облику (22) и то за све вредности x садржане у интервалу (a, b).

Посматрајмо сада *негативан* полуталас. Како је извод y'' позитиван дуж читавог полуталаса, он може да има само један минимум. Нека су x_1 и x_2 крајње тачке полуталаса и нека је x_0 апсциса минимума тог полуталаса. Када x варира од x_1 до x_0, ордината y је стално негативна и опадајућа; за x које варира од x_0 до x_2 она је стално негативна и растућа. Дакле, у сваком од та два интервала (x_1, x_0) и (x_0, x_2) производ yy' је сталног знака. Тада се на исти начин као и малочас можемо уверити да негативан полуталас такође може бити представљен изразом (22) за све вредности x такве да је $x_1 < x < x_2$.

Из тога произлази следећа пропозиција.

Сваки полуталас интеграла y, *било позитиван, било негативан, над интервалом* (a, b) *у коме је функција* f(x) *негативна, може се писати у облику*

$$(25) \qquad y = y_0 \cos X, \quad X = (x - x_0)\sqrt{-f(\xi)},$$

где се ξ *налази између* x_0 *и* x.

Из тога следи да је полуталас у целости садржан између две криве

$$(26) \qquad y = y_0 \cos X_1 \quad \text{и} \quad y = y_0 \cos X_2,$$

где је

$$(27) \qquad X_1 = (x - x_0)\sqrt{N}, \quad X_2 = (x - x_0)\sqrt{M},$$

при чему N и M означавају доњу и горњу границу од $-f(x)$ за x које варира од x_1 до x_2.

Из (25) следи

$$(28) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{\pi}{2\sqrt{-f(\xi)}}, \\ x_2 &= x_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{-f(\xi)}}, \end{aligned}$$

што показује да је *дужина* $(x_2 - x_1)$ *било ког полуталаса већа од* $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}}$ *и мања од* $\dfrac{\pi}{\sqrt{N}}$.

Ако се за N и M узму доња и горња граница од $-f(x)$ у целом интервалу (a, b), види се да је:

број полуталаса садржаних у интервалу (a, b) *најмање је једнак броју јединица садржаних у вредности*

$$(29) \qquad \frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi} - 1$$

и највише је једнак броју јединица садржаних у вредности

$$(30) \qquad \frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi},$$

што је сагласно са познатим Штурмовим резултатима.

Поред тога, истим путем се може доћи до других Штурмових пропозиција о хомогеној линеарној једначини другог реда.

4. Горе изложено може се применити и на једначину

$$(31) \qquad y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0.$$

Та једначина се познатом сменом

$$(32) \qquad y = ze^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx}$$

трансформише у

$$(33) \qquad z'' = f(x)z,$$

где функција f има облик

$$(34) \qquad f(x) = \frac{\varphi^2}{4} + \frac{\varphi'}{2} - \psi$$

из чега се закључује:

сваки реални интеграл једначине (31), *такав да се први извод од*

$$(35) \qquad ye^{\frac{1}{2}\int \varphi\, dx}$$

анулира у некој тачки $x = x_0$ *из интервала* (a, b) *у коме је функција* (34) *позитивна, може се написати у облику*

$$(36) \qquad y = \frac{y_0}{2}(e^X + e^{-X})e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \varphi\, dx}$$

са

$$(37) \qquad X = (x - x_0)\sqrt{f(\xi)},$$

где је ξ *нека вредност између* x_0 *и* x, *за сваку вредност* $a < x < b$.

Интегрална крива се налази између две криве облика (36) где X респективно има вредности

$$(38) \qquad (x - x_0)\sqrt{N} \quad \text{или} \quad (x - x_0)\sqrt{M},$$

при чему M и N имају претходна значења.

Најзад, када је функција $f(x)$ *негативна* у посматраном интервалу (a, b), интегрална крива осцилује, с обзиром да се састоји из полуталаса који су наизменично позитивни и негативни.

Сваки полуталас, било позитиван, било негативан, може се написати у облику

$$(40) \qquad y = y_0 e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx} \cos X$$

са

$$X = (x - x_0)\sqrt{-f(\xi)},$$

īде је ξ *нека вредносīи између* x_0 *и* x.

Број полуталаса садржаних у интервалу (a, b) дат је у претходној пропозицији у којој бројеви N и M морају да се односе на функцију $f(x)$ дефинисану изразом (34).

Приметићемо такође да се та разматрања примењују и на неке типове *нелинеарних* једначина, што ће бити предмет другог рада.**

** Реферисано у FdM, B. 52, S. 439–440 (Grunsky) и Revue sémestrielle, 1927, t. XXXIII; погледати и студију Милорада Бертолина, *Примедба у вези са једним сīавом Михаила Пеīровића*, Весник Друштва мат. и физ. НРС, Београд 1958, vol. X, 1–4, стр. 115–118. (пр. Д. Т.).

ПРВИ ИНТЕГРАЛИ СА ОГРАНИЧЕЊИМА*

МОНОГРАФИЈА

* Наслов оригинала *Intégrales premiéres á restrictions*, Académie royale de Serbie, Editions spéciales, t. LXXII, Sciences mathématiques et naturélles, 1. 19, Paris, 1929, p. 50, 16 × 25. Саопштено у Академији природних наука 29. априла 1929.

ACADÉMIE ROYALE DE SERBIE

ÉDITIONS SPÉCIALES

TOME LXXII

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

LIVRE 19

INTÉGRALES PREMIÈRES A RESTRICTIONS

PAR

Michel PETROVITCH

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1929

Обимније и значајније монографије Михаила Петровића Српска краљевска академија штампала је у Паризу на француском језику. Пример је монографија ***Први интеграли са ограничењима*** *(Париз 1929). – Изглед насловне стране оригиналне књиге.*

ПРВИ ОДЕЉАК

РАЗНЕ ВРСТЕ ПРВИХ ИНТЕГРАЛА

1. *Први интеграли без ограничења.* – Кад је дат неки израз F који зависи од независно промењиве x, непознате функције y, извода $y', y'', \ldots, y^{(p)}$ функције y по x и од почетних услова $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots$, једначина

$$(1) \qquad F = \text{const.}$$

назива се првим интегралом диференцијалне једначине

$$(2) \qquad f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (n > p)$$

ако F узима вредност која не зависи од x кад се у њој y замени општим интегралом једначине (2).

Ово је уобичајена дефиниција првог интеграла, према којој се израз F своди на константу *за сваки посматрани партикуларни интеграл једначине* (2).

Тако, на пример, једначина другог реда

$$y''(y + 2xy') + 2y'^2 = 0$$

за први интеграл има

$$yy' + xy'^2 = \text{const.}$$

Диференцијална једначина конусних пресека

$$9y''^2 y^{(5)} - 45y''y'''y^{(4)} + 40y'''^3 = 0$$

има први итнеграл

$$\frac{y''^8}{(3y''y^{(4)} - 5y'''^2)^3} = \text{const.}$$

Исто тако, ако је дат систем једначина

$$(3) \qquad \begin{cases} f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n)}) = 0, \\ f_2(x, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n)}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

првим интегралом овог система назива се функција F претходне врсте коју једначине (3) чине константном.

Тако ће, у случају каноничних једначина динамике написаних у облику

$$(4) \qquad \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial H}{\partial q_n}} = dt,$$

један први интеграл система бити свака функција

$$\varphi\,(t, q_1, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

која постаје константа због једначина кретања. На пример, у једноставном случају привлачења из непокретног центра постоје два прва интеграла – интеграл површина и интеграл живих сила.

Познате опште методе доводе до првих интеграла проблема динамике и чине видљивим њихове особине. Неке друге методе, које потичу од Бертрана, Масијуа, Бура, Мориса Левија и М. Кенигса, имају за циљ обрнути проблем – тражење проблема динамике који допуштају дати први интеграл, на пример, неки алгебарски израз од $p_1, \ldots, p_n$.

Познавање једног или више првих интеграла за једну једначину или за систем једначина, поједностављује њихову интеграцију и испитивање њихових својстава. Уопште, оно своди проблем интеграције на проблем тражења заједничких решења једне или више диференцијалних једначина, што омогућује снижавање њиховог реда. Али, у неким општим случајевима, она пружа могућност потпуне интеграције једначине или система.

На пример, уколико се зна један први интеграл

$$(5) \qquad \varphi\,(x, y, y') = \text{const.}$$

једначине

$$y'' = f(x, y),$$

остатак интеграције завршава се квадратурама Јакоби.

Једначина

$$y'' + f(x)\,y' + \psi(x, y) = 0$$

може се потпуно интегралити помоћу квадратура чим се зна један њен први интеграл облика (5) Брасин.

Једначине

$$\frac{d}{dx} f(x, y') + \psi(x, y) = 0$$

и

$$\frac{d}{dx} f(x, y') + \psi(x, y)\,y' = 0$$

имају исту особину Малмстен.

Да бисмо указали на пример који се односи на системе једначина, нека је

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi_1(q_1, \ldots, q_n;\, p_1, \ldots, p_n) = \text{const.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(q_1, \ldots, q_n;\, p_1, \ldots, p_n) = \text{const.}, \end{cases}$$

n првих интеграла каноничних једначина (4), независних од t, међу којима се налази и интеграл живих сила H = const., и претпоставимо да једначине образују систем за који се све заграде (φ_i, φ_k) анулирају. Тада се може наћи n других првих интеграла помоћу квадратура Лиувил; од тих n првих интеграла, њих $n-1$ не зависи од t, а један зависи од t. Тако се у примеру случаја централних сила знају два интеграла, а има их укупно четири; ако та два интеграла задовољавају једначину $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, решавање проблема може бити довршено према Луивиловој теореми, а то се, у ствари, и догађа.

2. *Први интеграли са ограничењима.* – Прве интеграле претходне врсте дају изрази F који се своде на константу због посматрања диференцијалне једначине или система једначина, *било који партикуларни интеграл од ових да је по среди.*

Но, поред таквих првих интеграла, умесно је разматрати друге *који имају поменуто својство само за интеграле диференцијалне једначине (или система) који испуњавају дате услове* у вези са аналитичком природом тих интеграла као функција или са интеграционим константама.

Тако се, за опште типове једначина било ког реда (или система једначина), може закључити, с обзиром на општа својства функција једне одређене аналитичке природе, да једна функција ψ независно променљиве x, функције y од x и од неколико извода функције y по x (а која такође може зависити од почетних услова) своди на константу или на неку рационалну, алгебарску итд. функцију кад се у њој y замени не *било којим* интегралом диференцијалне једначине, него *интегралима неке нарочите аналитичке природе.*

Могу се, на пример, посматрати први интеграли Ψ који важе само за интеграле диференцијалне једначине који би били целе функције од x, или *униформне*, *мероморфне*, *алгебарске*, *једноструко* или *двоструко периодичне* функције итд. Штавише, један такав први интеграл могао би бити у важности само за вредности независно променљиве које припадају одређеној области равни.

Нека је, тако, $f = 0$ једна алгебарска једначина по $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ и R нека рационална функција од $x, y, y', \ldots, y^{(p)}$. Ако постоје три константе a, b, c, такве да три једначине

$$(7) \qquad R - a = 0, \quad R - b = 0, \quad R - c = 0,$$

пошто се у њима y замени неким *мероморфним* интегралом једначине $f = 0$, имају само коначан број корена по x (због саме једначине $f = 0$), диференцијална једначина имаће за први интеграл $R = r(x)$, где је $r(x)$ рационална функција од x, и то за сваки *мероморфни* интеграл y. Ако једначине (7) немају корена на коначном растојању, диференцијална једначина има за први интеграл R = const. Ово произлази из теореме г. Пикара о нулама униформних функција без засека.

Исто тако, посматрајмо једначину $f = 0$, било ког реда, која не садржи x експлицитно и функцију R од $y, y', \ldots, y^{(q)}$ која, пошто се у њој y замени *мероморфним* и *двоструко периодичним* интегралом једначине $f = 0$, нема нула ни полова на коначном растојању. Тада ће једначина $f = 0$ имати први интеграл R = const. за све интеграле овакве природе. Ово излази из чињенице да мероморфна и двоструко периодична функција не може бити у целој равни холоморфна и различита од нуле уколико се не своди на константу.

Први интеграли без ограничења представљају једну врсту инваријаната које се односе *на све интеграле* једначине, каква год да је њихова аналитичка природа. Први интеграли са ограничењима дају онда врсту инваријаната које се односе *на одређену класу интеграла једначина* $f = 0$.

3. *Квалитативни први интеграли са ограничењима.* – Кад је реч само о *реалним* интегралима једначине $f = 0$, може бити од користи разматрање једне друге врсте првих интеграла. Такав један интеграл изражавао би чињеницу да се неки израз Φ, који зависи од x, y и од неколико извода функције y по x (при чему је могућа зависност и од по-

четних услова), своди, због једначине $f = 0$, не на константу *него на једну непознату функцију* θ *од* x *чије су квалитативне особености за* x *које варира између одређене две вредности* a *и* b *познате.* Ове особености могу се састојати у знаку функције θ, границама у којима ова функција варира, постојању осцилација између $x = a$ и $x = b$, конкавности или конвексности криве

$$y = \theta(x)\ldots.$$

На пример, чињеница да за x које варира између a и b, функција θ варира између две познате вредности λ_1 и λ_2 (које су константне, или функције од x или од почетних услова) изражава се једначином облика

$$\Phi = \theta, \quad a < x < b, \quad \lambda_1 < \theta < \lambda_2$$

која даје једну врсту *квалитативног првог интеграла функције* $f = 0$, који важи за реалне, коначне и непрекидне интеграле једначине $f = 0$ у интервалу (a, b) за x, или можда за позитивне, монотоне итд. интеграле.

Тако, на пример, једначина

$$y'^2 + y^2 = f(x)$$

за своје реалне интеграле који расту почев од $x = x_0$ и одговарају позитивној детерминацији израза $\sqrt{f(x)}$ има први интеграл

$$\frac{y' + y}{\sqrt{f(x)}} = \theta, \quad x_0 < x < +\infty, \quad 1 < \theta < \sqrt{2}.$$

Једначина г. Пенлевеа

$$y'' = 6y^2 + x$$

има, за своје реалне и у неком интервалу (a, b) за x монотоне интеграле, први интеграл

$$\frac{y'^2 - y^2 - (y_0^3 - y_0'^2)}{y - y_0} = \theta, \quad a < x < b, \quad 2x_0 < \theta < 2x.$$

Једначина

$$y'' = (a + be^{-x^2 - y^2})y, \quad (a > 0, \ b > 0)$$

за своје реалне интеграле, има први интеграл облика

$$\frac{y''}{y} = \theta, \quad -\infty < x < +\infty, \quad a < \theta < a + b.$$

Систем

$$\frac{dy_1}{dx} = -y_2 y_3, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2, \quad \frac{dy_3}{dx} = k^2 y_1 y_2$$

има, поред осталих, први интеграл за своје реалне интеграле

$$\frac{1}{y_1}\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \theta, \quad -\infty < x < \infty, \quad M < \theta < \infty,$$

где је M неки позитиван број.

У главама које следе показаћемо начине образовања првих интеграла са ограничењима Ψ и Φ за опште типове диференцијалних једначина и њихових система. Указаћемо, исто тако, на корист која се може из ових извући у тражењу интеграла тих једначина општих или партикуларних, са одређеном аналитичком природом, као и у испитивању особености њихових реалних интеграла.

ДРУГИ ОДЕЉАК

ПОМОЋНЕ ТЕОРЕМЕ О ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА

4. *Карактеристична полигонална контура полова интеграла.* – На почетку ћемо подсетити на неколико *потребних* услова да интеграл неке једначине било ког реда има *покретне* полове, тј. полове који се мењају заједно са интеграционим константама. Полигонална контура, чију ћемо конструкцију, помоћу експонената непознате функције и њених извода у члановима диференцијалне једначине, сада описати, у томе игра фундаменталну улогу.

Нека је дата једначина $f = 0$ реда p написана у облику

$$\sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)\, y^{m_{0i}}\, y'^{m_{1i}}\, y''^{m_{2i}} \dots y^{(p)^{m_{pi}}} = 0,$$

где су m_{ik} позитивни степени такви да за два различита индекса i и j не важи истовремено

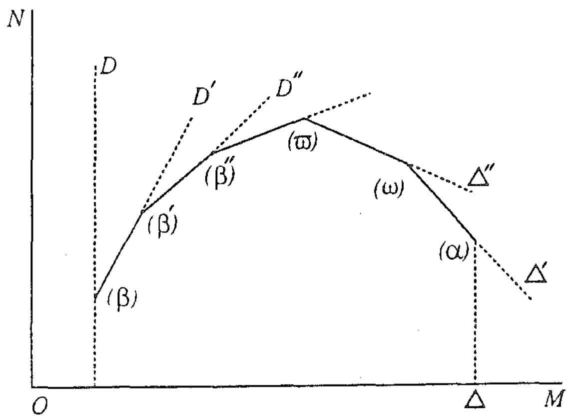
$$m_{0i} = m_{0j}, m_{1i} = m_{1j}, \dots, m_{pi} = m_{pj},$$

при чему су φ_i било какве функције од x.

Формирајмо следећих $2s$ позитивних целих бројева.

$$\left\{\begin{aligned} M_i &= m_{0i} + m_{1i} + \dots + m_{pi} = \sum_{k=0}^{k=p} m_{ki}, \\ N_i &= m_{1i} + 2m_{2i} + \dots + pm_{pi} = \sum_{k=0}^{k=p} km_{ki}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Повуцимо у равни две осе, осу бројева M и осу бројева N и обележимо s тачака (M_i, N_i), водећи рачуна о томе да поред сваке од њих буде написан њен индекс i. Ако се две или више тачака подударе, поред једне такве вишеструке тачке ставиће се индекси свих тачака које су се у њој поклопиле.



Слика 1

Конструишимо полигоналну контуру П конкавну према OM, затворену двема правама L_1 и L_2 управним на осу OM и самом том осом, а која у својој унутрашњости и на својој периферији садржи све тачке (M_i, N_i), сем тога, све стране контура, осим осе OM и правих L_1 и L_2, обавезно пролазе најмање кроз две тачке (M_i, N_i). Темена (α) и (β) контуре биће названа *екстремно теме* десно и лево, а најудаљеније теме од OM биће *теме* ω; ако постоји више од једног темена OM на истој паралели са OM, имаћемо такво десно и лево теме.

Угао $D\beta D'$ биће назван *доменом* темена (β); угао $D'\beta' D''$ доменом темена (β'); угао $D''\beta'' D'''$ доменом темена (β''),...; најзад, угао $\Delta\alpha\Delta'$ доменом темена (α). Рећи да је број λ *садржан у домену неког темена* значи да се λ подудара са угловним коефицијентом праве која пролази кроз то теме и садржана је у углу који представља његов домен.

Теме је са *позитивним доменом* или са *негативним доменом* према томе да ли су вредности садржане у његовом домену позитивне или негативне. Сва темена лево од левог темена ω су са позитивним доменом; сва темена десно од десног темена ω су са негативним доменом.

Ставимо

$$(10)\qquad \begin{cases} \gamma_{0i} = m_{1i} + m_{2i} + \ldots + m_{pi}, \\ \gamma_{1i} = m_{2i} + m_{3i} + \ldots + m_{pi}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{hi} = m_{h+1,i} + \ldots + m_{pi}, \end{cases}$$

а затим

$$A_i = \lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda-1)^{\gamma_{1i}}(\lambda-2)^{\gamma_{2i}}\ldots(\lambda-p+1)^{\gamma_{p-1i}},$$

где је λ произвољан број.

Може се догодити да контура П има једно или више темена у којима се две или више тачака (M_i, N_i) подударају; таква темена назваћемо *вишеструким теменима*. Уочимо једно такво теме и нека су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ индекси чланова функције f који су се у њему поклопили. Образујмо једначину

$$A_{\alpha_1}\varphi_{\alpha_1}(a) + A_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_2}(a) + \ldots + A_{\alpha_n}\varphi_{\alpha_n}(a) = 0, \tag{11}$$

где је a произвољан број. Она представља алгебарску једначину по λ чији коефицијенти зависе од a; назваћемо је *једначином по* λ повезаном са вишеструким теменом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Сваком вишеструком темену одговара једна једначина по λ облика (11). Таква једначина повезана са једноструким теменом индекса i своди се на $A_i = 0$, тј. на

$$\lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1i}} = 0.$$

Указаћемо на форме контуре П које одговарају неким општим типовима једначина.

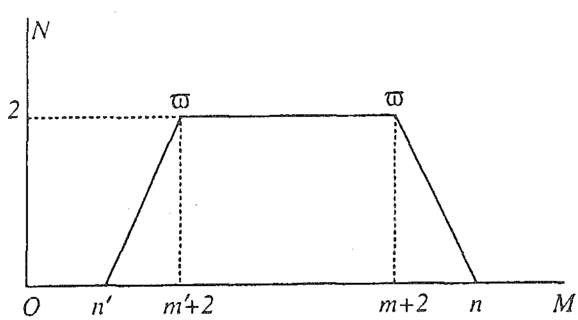
Први пример. – Нека је

$$f = P(x, y)\, y'' + Q(x, y),$$

где су P и Q полиноми по y, и нека су m и m' највећи и најмањи експонент степена променљиве y у P, а n и n' аналогне величине за Q. Полином f има две врсте чланова:

1. чланове облика $y^i y''$ $(i = m', m'+1, \ldots, m-1, m)$ који дају тачке $M_i = i+1, N_i = 2$, смештене на правој $N = 2$;

2. чланове облика y^k $(k = n', n'+1, \ldots, n-1, n)$, који дају тачке $M_k = k, N_k = 0$, смештене на оси OM.



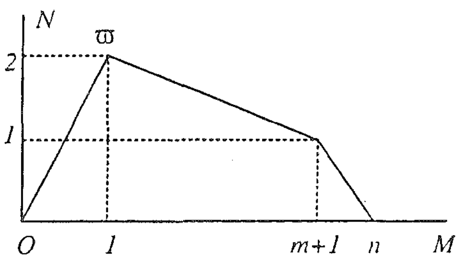
Слика 2

Према томе, општи облик контуре П у овом случају представљен је сликом 2. На правој $N = 2$ налази се најмање једно теме; распоред и број темена, као и облик контуре могу, уосталом, варирати. Ако је $m = m'$, теме ϖ биће двоструко; види се такође да контура може имати највише једно вишеструко теме.

Други пример. – Да би се добила контура П кад је

$$f = y''^{\nu} + P(x, y, y'),$$

треба конструисати контуру П′ за $P(x, y, y')$; затим спојити десно теме ϖ ове контуре са тачком $S(M = \nu, N = 2\nu)$ правом D и спустити из S нормалу Δ на OM.

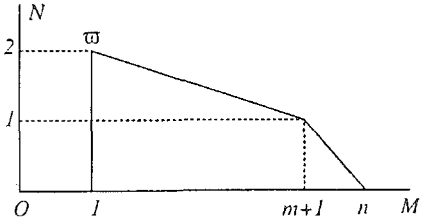


Слика 3

Ако је крајње лево теме контуре П′ лево од Δ или на Δ, контуру П образују праве Δ, D, страна од П′ са негативним доменом и једним одсечком осе OM; ако је крајње лево теме десно од Δ, страна Δ биће замењена правом која спаја тачку S са тим крајњим теменом. Када је, на пример, $\nu = 1$ и

$$P(x, y, y') = P(x, y)\, y' + Q(x, y),$$

задржавајући претходна значења за m, m', n, n', имаћемо један или други од следећих облика контуре (сл. 3 и 4), према томе да ли је $n' > 0$ или $n' = 0$. Види се да контура не може имати вишеструких тачака. Облик контуре може се мењати, али теме ϖ увек остаје на правој $N = 2$.



Слика 4

Трећи пример. – Нека је

$$F = P(x, y'') + Q(x, y).$$

Постоје две врсте чланова. То су:

1. чланови са y''^{i} $(i = m', \ldots, m)$, који дају тачке $M_i = i, N_i = 2i$, распоређене на граничној правој $\lambda = 2$;

2. чланови са y^{k} $(k = n', \ldots, n)$, који дају тачке $M_k = k, N_k = 0$, распоређене на оси OM.

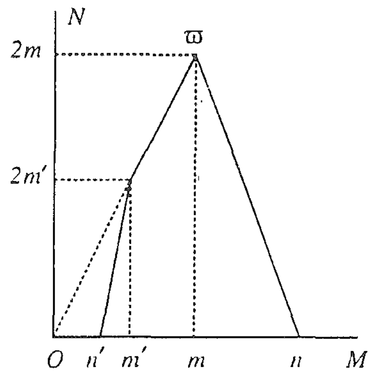
Општи облик контуре приказује слика 5; он може варирати, али теме ϖ увек се налази на правој $N = 2\,m$.

5. *Довољни услови за непромењивост полова и нула интеграла.* – Веза контуре P са половима интеграла диференцијалне једначине састоји се у следећем.

Нека је $x = a$ пол реда λ једначине $f = 0$. У његовој околини може се писати

(12) $$y = (x-a)^{\lambda}\varphi(x),$$

$$\lambda = \text{негативан цео број},$$



Слика 5

где је $\varphi(x)$ функција која тежи ка одређеној, коначној и од нуле различитој граници кад x тежи ка a. Заменимо овај израз за y, као и одговарајуће изразе за изводе ове функције, у полиному f; резултат ове замене мора идентички бити једнак нули за свако x из околине тачке $x = a$. Са ознакама из претходног параграфа, општи члан израза f добија облик

(13) $$\varphi_i(x)(x-a)^{\lambda M_i - N_i}[A_i\varphi(x)^{M_i} + \theta_i(x)],$$

где је $\theta_i(x)$ полином по

(14) $$\varphi(x), (x-a)\varphi'(x), \ldots, (x-a)^{p}\varphi^{(p)}(x)$$

у коме нема члана који зависи једино од $\varphi(x)$.

Уочимо у f скуп T чланова за које је експонент $\lambda M_i - N_i$ степена $x - a$ издвојеног као фактор најслабији. Да би чланови са индексима γ, δ, ε, ... припали скупу T, потребно је и довољно да буде истовремено

(15) $$\lambda M_\gamma - N_\gamma = \lambda M_\delta - N_\delta = \lambda M_\varepsilon - N_\varepsilon = \ldots,$$

(16) $$\lambda M_\gamma - N_\gamma < \lambda M_i - N_i,$$

кад се индексу i дају све целе вредности од 1 до s различите од индекса чланова који припадају скупу T.

Услов (15) може се написати у облику

(17) $$\lambda = \frac{N_\gamma - N_\delta}{M_\gamma - M_\delta} = \frac{N_\delta - N_\varepsilon}{M_\delta - M_\varepsilon} = \ldots,$$

одакле се види да λ мора бити једнак углавном коефицијенту праве (γ, δ) која спаја тачке (M, N) са индексима γ и δ, и да се тачке које одговарају различитим члановима из T морају налазити на тој правој.

С друге стране, вредност $\lambda M_i - N_i$, кад се у њој λ замени вредношћу (17), представља ординату у почетку $S_{i,\lambda}$, са измењеним знаком, праве која пролази кроз тачку (M_i, N_i) и има угловни коефицијент λ. Одатле, да чланови са индексима γ, δ, ε,... припадају скупу T потребно је и довољно да:

1. тачке (M, N) са индексима γ, δ, ε,... буду на истој правој и да λ буде једнако угловном коефицијенту те праве;

2. ордината у почетку праве (γ, δ) буде већа од ординате било које од права паралелних са (γ, δ) које прелазе кроз тачке (M, N) што се не налазе на правој (γ, δ).

Ако су све тачке (M, N) једноструке, правац сваке праве (γ, δ) је потпуно одређен и за те тачке услов (15) може бити испуњен само за једну вредност λ. Али, ако је тачка вишеструка и одговара, рецимо, индексима i, j, k,.., правац правих (i, j), (j, k), ... је неодређен а услов (15) је испуњен за било коју вредност λ; за ове тачке остаје само да се провере неједнакости (16).

Овде интервенише контура П полинома f и, како је за $x = a$ и за сваки индекс i

$$\lim \theta_i(x) = 0,$$

једноставно расуђивање[1] доводи до следеће теореме.

Теорема 1. – Кад год интеграл једначине $f = 0$ који садржи једну или више интеграционих константи има полове који се мењају са тим константама, испуњен је један или други од следећих услова:

1. *контура* П *има једну или више страна са негативним целим угловним коефицијентима, а ред пола једнак је једном од тих коефицијената;*

2. *контура* П *има једно или више вишеструких темена са негативним доменом и таквих да једначина по* λ *која одговара овом темену има најмање један корен који не зависи од* a *и једнак је неком целом броју садржаном у домену истог темена; ред пола тада је једнак једном од таквих корена.*

Кад ни један ни други од ових услова није испуњен, полови интеграла не мењају се са интеграционим константама. Такав је, на пример, случај кад је десно теме ω у исти мах крајње десно теме и при том је оно једноструко, или, уколико је вишеструко, одговарајућа једначина по λ нема ниједан корен претходне врсте.

[1] M. Petrovitch, *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques*, Gauthier-Villars, Paris 1894, p. 109.

Аналитичка теорија диференцијалних једначина спецификује под овим условима вредности x које могу бити стални полови интеграла дате једначине.[2]

Посебно, кад нису испуњени услови 1 и 2 теореме, сваки пол интеграла y подудара се било са неким кореном, било са полом бар једне од функција $\varphi_i(x)$, било са једним од корена по a извесне једначине по λ. Прецизније:

нека је h индекс десног темена, $h_1, h_2, \ldots$ индекси темена која се налазе десно од темена ω и од којих свако у свом домену садржи најмање један негативан цео број (ако таквих темена има). Тада:

a. кад год је λ негативан цео број садржан у домену једног од *једноструких* темена $h_1, h_2, \ldots$, или пак темена (h) под претпоставком да је *вишеструко*, пол $x = a$ анулира ону од функција $\varphi_i(x)$ чији је индекс једнак индексу оног темена у чијем је домену садржано λ, или чини бесконачном једну од преосталих функција $\varphi_i(x)$.

b. Кад год је λ негативан цео број садржан у домену једног од вишеструких темена $h_1, h_2, \ldots$, или темена (h) под претпоставком да је вишеструко, пол $x = a$ је било један корен по a једначине по λ која се односи на то теме (чији домен садржи λ), када се у тој једначини λ замени неким од негативних целих бројева садржаних у домену темена, било вредност која чини бесконачним неке од функција које не одговарају овом темену.

Претпоставимо да једначина $f = 0$ не садржи експлицитно x. Ако интеграл y има пол, он има и бесконачно много њих који варирају заједно са интеграционом константом која се сабира са x. Да би тако било, потребно је да контура П има бар једну страну са угловним коефицијентом једнаким неком негативном целом броју и да ред λ пола буде једнак једном од ових коефицијената; или да постоји једно или више вишеструких темена таквих да једначина по λ има негативне целе корене садржане у домену темена (тада је λ једнако једном од тих корена). *Ако ниједан од ових услова није испуњен, интеграл нема полова.*

Довољно је применити претходне резултате на једначину добијену од једначине $f = 0$ заменом y са $\dfrac{1}{y}$ да би се добили аналогни искази *који се односе на нуле* интеграла. Уосталом, инваријантност нула може се установити и непосредно, разматрањем страна са позитивним угловним коефицијентом и темена са позитивним доменом контуре П једначине $f = 0$.

[2] М. Петровић, loc. cit., стр. 89–90.

У случају једначина првог реда, услови промењивости или непромењивости полова и нула интеграла у исти мах су једноставнији и потпунији. У том погледу имамо следеће теореме.[3]

Теорема 2. – *Да интеграл у једначине* f = 0 *има полове који се мењају са интеграционом константом, потребно је и довољно да одговарајућа контура има најмање једну страну чији је угловни коефицијент негативан цео број.*

Ако тај услов није испуњен, полови интеграла не мењају се са интеграционим константама и подударају се са неким од нула функција $\varphi_i(x)$ или од тачака у којима оне узимају бесконачне вредности. Ближе речено, пол ће бити нула функције $\varphi_h(x)$, или тачка бесконачних вредности осталих функција $\varphi_i(x)$, где h означава индекс темена контуре П које одређује ред пола. Ако су, специјално, све функције $\varphi_i(x)$ целе, пол је нула функције $\varphi_h(x)$, а ако је $\varphi_h(x)$ константа, интеграл нема коначних полова.

Теорема 3. – *Да се нуле целог реда интеграла једначине* f = 0 *не мењају са интеграционом константом, потребно је и довољно да контура* П *нема ниједну страну чији је угловни коефицијент позитиван цео број.*

Овакве нуле подударају се било са нулама функције $\varphi_h(x)$ (где h означава индекс оног темена чији домен садржи број λ једнак реду пола), било са тачкама у којима неке друге од функција $\varphi_i(x)$ узимају бесконачне вредности.

Теорема 3 може се такође исказати у облику у коме се не појављује контура П. Када једначину $f = 0$ напишемо у облику

$$\sum_{k=0}^{k=m} f_k(x,y)\,y'^{m-k} = 0 \tag{18}$$

важи следећа теорема.

Теорема 4. – *Потребан и довољан услов да се нуле интеграла* y *не мењају са константом интеграције је да, кад се одстране заједнички фактори функција* $f_k(x,y)$, *свако* f_k, *сем* f_0, *садржи као фактор* y^h *са* $h \geq k$.

Кад је тај услов испуњен, коначне нуле интеграла y подударају се са нулама функције $f_0(x,0)$, или са тачкама у којима друге функције $f_i(x,0)$ узимају бесконачне вредности.

Расуђивање које, у аналитичкој теорији једначина првог реда, доводи до *потребних и довољних услова* за инваријантност нула и полова интеграла не може се у читавом свом облику проширити на ал-

[3] М. Петровић, loc. cit., стр. 23–24.

гебарске једначине вишег реда. То, с једне стране, долази од тога што за једначине вишег реда трансцендентни сингуларитети интеграла могу варирати са интеграционим константама, што се не дешава у случају једначина првог реда. С друге стране, у случају једначина првог реда, све детерминације извода y' су познате алгебарске функције од y за које се могу наћи циркуларни* корени и испитати начин на који се сваки од тих корена понаша у околини тачке $x = x_0, y = y_0$.

Уопште узев, ово више не важи за једначине вишег реда. Интеграл, као и његов извод, може постати неодређен за било које вредности x_0; он може имати засеке који се мењају са интеграционим константама, а такође и сингуларне линије неаналитичности које се исто тако мењају са константама. Ове тешкоће онемогућују проширење методе која успева у случају једначина првог реда.

Али, за циљ који смо себи поставили у овом раду довољно нам је познавање *довољних услова* за инваријантност *полова* и *нуле целог реда* интеграла у претходном облику, који дозвољава, код разматраних типова диференцијалних једначина, да се лако установи јесу ли они испуњени.

Приметимо још да се ови *довољни услови* преносе на системе једначина било ког реда, а посебно на једначине динамике.[4]

---

* Или: циклични (прим. прев.).

[4] M. Petrovitch, *Remarques sur les équations de la Dynamique et sur le mouvement tautochrone*; American Journ. of Mathem., vol. XVIII, n• 2, pp. 135–144.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК

ПРВИ ИНТЕГРАЛИ КОЈИ СЕ ОДНОСЕ НА МЕРОМОРФНЕ ИНТЕГРАЛЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

6. *Принцип методе.* – Теореме које смо изложили у ономе што претходи а односе се на полове и нуле интеграла диференцијалних једначина, заједно са неколико ставова опште теорије функција, омогућују, у пространим класама случајева, да се нађу први интеграли који се односе на мероморфне интеграле једначине (било да су ови партикуларни, било да зависе од извесног броја интеграционих константи), да се упрости тражење тих мероморфних интеграла, па чак и да се сви они у потпуности израчунају у неким погодним партикуларним случајевима.

Оно што непосредно следи заснива се на следеће две леме које се односе, прва на тражење мероморфних интеграла уопште, а друга на тражење двоструко периодичних мероморфних интеграла.

Лема 1. – Нека је

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0 \tag{19}$$

алгебарска диференцијална једначина, y један *мероморфни* интеграл једначине (19) и

$$R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) \tag{20}$$

рационална функција од $x, y, y', \ldots, y^{(q)}$. Ако се могу наћи три константе a, b, c такве да три једначине

$$R - a = 0, \quad R - b = 0, \quad R - c = 0 \tag{21}$$

(пошто је претходно y у R замењено посматраним интегралом) имају само коначан број корена, *једначина* (19) *за овакве* у *има један први интеграл облика*

$$R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) = r(x), \tag{22}$$

где је r (x) *нека рационална функција од* x.

Ако једначине (21) немају корена, први интеграл постаје

$$(23) \qquad R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) = \text{const.}$$

Ово излази из теореме г. Пикара о нулама униформних функција без засека.

Ако се, под претпоставком да је *y цела* функција од x, могу наћи две константе a и bтакве да једначине

$$(24) \qquad R - a = 0, \quad R - b = 0$$

имају само коначан број корена, *једначина* (19) *има за своје целе интеграле први интеграл облика*

$$(25) \qquad R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) = P(x),$$

где је P(x) *полином од* x.

Најзад, ако једначине (24) немају корена, *први интеграл постаје* (23).

Ово је последица теореме г. Пикара о нулама целих функција.

Лема 2. – Нека је

$$(26) \qquad f(y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$$

алгебарска диференцијална једначина са константним коефицијентима, *y мероморфан и двоструко периодичан* интеграл једначине (26) и

$$(27) \qquad R(y, y', \ldots, y^{(q)})$$

рационална функција од $y, y', \ldots, y^{(q)}$ са константним коефицијентима.

Ако се функција R, због једначине (26), не анулира ни за једну коначну вредност промењиве x, или ако она нема коначних полова, *једначина* (26) *има за своје мероморфне и двоструко периодичне интеграле први интеграл*

$$(28) \qquad R = \text{const.}$$

Ово следи из Лиувилове теореме о нулама и половима мероморфних и двоструко периодичних функција.

Примена ових лема доводи до првих интеграла облика

$$(29) \qquad R = r(x), \quad R = P(x), \quad R = \text{const.}$$

Уколико је такав један интеграл познат, тражење интеграла y претпостављене аналитичке природе своди се на заједничка решења двеју диференцијалних једначина, што се врши диференцирањима и елиминацијама узастопних извода функције y.

Тада се појављују два случаја.

Први случај. – Поступак се завршава долажењем до једначина нултог реда, а онда се ствар своди на елементарни проблем налажења заједничких решења две алгебарске једначине; ова решења сада су обавезно алгебарска по x. *Сваки мероморфни интеграл тада је рационалан.*

Други случај. – Функција $r(x)$, $P(x)$ или константа у првим интегралима (29) могу се изабрати тако да се једначине из низа (4), почев од извесног ранга m, своде на идентитете. Сваки заједнички интеграл једначина (1) и (29) је интеграл једначине (m – 1); *једначина* (1) *не може имати других мероморфних интеграла сем оних дефинисаних са* (m – 1). Да би их једначина (1) имала, потребно је и довољно да их има једначина (m – 1) и да међу тим интегралима има оних који задовољавају (1). Тражење мероморфних (па, према томе, и целих) интеграла задате једначине *своди се, дакле, на такво тражење за једну једначину нижег реда.*

Ако, на пример, ова последња једначина садржи само x, y, y', задата једначина не може имати као интеграле друге мероморфне трансценденте, осим оних дефинисаних једначинама првог реда (то су рационалне функције од x, или од e^{ax}, или од sn ax и cn ax).

Ако последња једначина садржи само x, y, y', y'', моћи ће се, на пример, методама г. Пенлевеа, које се односе на једначине другог реда, установити да ли једначина $f = 0$ допушта мероморфан интеграл који алгебарски зависи од две интеграционе константе. У том случају ће се тај интеграл израчунати било алгебарски, било квадратурама, било интеграцијом једне линеарне једначине трећег реда.

Подсетимо да се први интеграли без ограничења могу сматрати једном врстом инваријаната које се односе *на све интеграле* једначине, било каква да је њихова аналитичка природа. Први интеграли претходне врсте били би онда инваријанте које се односе *на одређену класу интеграла.* Са тог становишта, разлика између те две врсте инваријаната подсећа на разлику која постоји између две врсте инваријаната у теорији линеарних једначина, између оних које је разматрао Алфен, а које важе каква год да је природа функција које улазе у супституцију, и инваријаната специјалније природе, којима се бавио Поенкаре, код којих функције које улазе у супституције нису било какве, него рационалне по x.

7. *Неколико типова једначина које допуштају алгебарске прве интеграле за њихове мероморфне интеграле.* – Показаћемо како се долази до разматрања првих интеграла претходне врсте и како се могу формирати општи типови једначина за које се могу препознати такви интеграли.

Нека је $R(x,y,y',\dots,y^{(q)})$ дата рационална функција од x,y,y', $\dots,y^{(q)}$ са константним али неодређеним коефицијентима $a_1,a_2,\dots,a_k$. У датој једначини

$$F(x,y,y',\dots,y^{(p)})=0 \tag{30}$$

извршимо смену

$$z=\frac{1}{R-\alpha} \tag{31}$$

(где је α неодређена константа), узимајући z за нову функцију. Нека је

$$\psi(x,z,z',\dots,z^{(s)})=\sum_{i=1}^{i=s}\psi_i z^{n_0}z'^{n_1}\dots z^{(s)^{n_{p+q-1}}} \tag{32}$$

нова једначина, где су ψ_i полиноми по x, $a_1,a_2,\dots,a_k$ и α.

Претпоставимо да је конструисан скуп Δ тачака (M,N) који се односи на (32) и нека је

$$(M_{h_1},N_{h_1}),\ (M_{h_2},N_{h_2}),\dots,(M_{h_j},N_{h_j}) \tag{33}$$

скуп тачака који представља део скупа Δ и такав да, кад се његове тачке искључе, преостали скуп не испуњава ниједан од услова теореме 1 (стр. 172)

Кад год једначина

$$\psi_{h_1}=0,\ \psi_{h_2}=0,\dots,\psi_{h_j}=0 \tag{34}$$

за најмање три вредности $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ *параметра* α *има систем решења по* $a_1,a_2,\dots,a_k$ *која не зависе од* x, *једначина* (30) *за своје мероморфне интеграле има први интеграл*

$$R(x,y,y',\dots,y^{(q)})=r(x), \tag{35}$$

где је r(x) *рационална функција од* x *и где се симболи* a_k, *који фигуришу у* R, *замењују тим системом решења.*

Јер, уколико је y мероморфни интеграл једначине (30), интеграл z једначине (32), који му одговара, такође је мероморфна функција, а ако се параметар α замени једном од вредности α_1,α_2 и α_3, неодређени коефицијенти a_i у R вредностима нађеним као решења система (34) ишчезавају чланови једначине (32) који одговарају скупу тачака (33). Контура П једначине (32) не испуњава услове теореме 1, што значи да се полови интеграла z не мењају са интеграционим константама и анулирају или чине бесконачном најмање једну од функција ψ_i, одакле се изводи закључак да је број тих полова ограничен. Одавде излази да и једначине

$$R-\alpha_1=0,\ \ R-\alpha_2=0,\ \ R-\alpha_3=0$$

имају само ограничен број корена. Према томе, израз

$$R(x,y,y',\ldots,y^{(q)}),$$

кад се у њему y замени неким мероморфним интегралом једначине (30), своди се на рационалну функцију од x, што је и требало доказати.

На исти начин доказује се следећи став.

Кад год једначине (34) бар за две вредности α_1 *и* α_2 *параметра* α *имају систем решења* $a_1,a_2,\ldots,a_k$ *независан од* x *за целе интеграле једначине* (30) *постоји први интеграл*

$$R=P(x),$$

где је P *неки полином од* x.

Када x *не фигурише експлицитно у једначини* (30), *полином* P *своди се на константу.*

8. *Случај једначина првог реда.* – У случају пространих класа једначина првог реда могуће је формирати изразе R који зависе од независно променљиве x и од једног или више партикуларних интеграла $y_1, y_2, y_3,\ldots$ *одређене аналитичке природе*, а своде се за те интеграле на *алгебарску* или *рационалну функцију* од x, или пак на *константу*. Одатле се онда могу извући закључци о природи ових интеграла y_k, о броју таквих међусобно различитих интеграла (наиме, оних који нису повезани никаквом алгебарском релацијом са алгебарским коефицијентима од x) итд.

Пример који следи даће нам о томе одговарајућу идеју.

Посматрајмо једначину

$$\text{(A)}\qquad y'=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

где су P и Q полиноми по y редом степена m и m', са коефицијентима који су алгебарске функције од x, и размотримо њене *униформне* интеграле.

Да би једначина могла имати *трансцендентне* униформне интеграле, потребно је, према једној познатој теореми, да изрази P и Q буду рационални по x; они се, дакле, могу сматрати полиномима по x. Штавише, одговарајућом хомографском трансформацијом увек се може постићи да једначина задовољи услов $m=m'+2$, који ћемо стога сматрати испуњеним. Тада је $y=\infty$ обична вредност, што ће рећи да је, ако се стави $y = \frac{1}{z}$, интеграл $z(x)$, који за $x = x_0$ узима вредност $z = 0$, холоморфан у околини тачке $x = x_0$ (произвољно изабране).

1) Претпоставимо онда да алгебарска једначина по y

$$\text{(B)} \qquad Q(x,y) = 0$$

има више од два различита корена $y_i = \varphi_i(x)$ и нека су

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad y_3 = \varphi_3(x),$$

било која три од тих корена; они, уосталом, могу бити гране једне исте алгебарске функције.

Униформан интеграл y једначине (A) нема засека и може имати само извесне есенцијалне сингуларитете који су унапред познати; нека је $x = a$ такав један сингуларитет. Ако је $x = a$ уједно и критични сингуларитет функција φ_1, φ_2 и φ_3 може се, свакако, ставити

$$(\alpha) \qquad x - a = \xi^{\nu}$$

(где је ν цео број) тако да φ_1, φ_2 и φ_3 постану три униформне функције од ξ у околини тачке $\xi = 0$; оне се стога увек могу сматрати униформним у околини тачке $x = a$.

С обзиром на ово, посматрајмо израз

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_3}{\varphi_2 - \varphi_1} \frac{y - \varphi_1}{y - \varphi_3} = R(x,y).$$

Пошто се у њему униформни интеграл y замени његовим изразом по x, R ће постати функција $z(x)$ која, уз изузетак неколико фиксираних вредности промењиве x у ограниченом броју, узима три вредности 0, 1 и ∞, само за вредности x које су респективно корени једначина

$$y(x) - \varphi_1(x) = 0, \quad y(x) - \varphi_2(x) = 0, \quad y(x) - \varphi_3(x) = 0.$$

Но, ови корени су, исто тако, изузетне вредности за x у коначном броју. Функција $z(x)$ би, дакле, била функција која има тачку $x = a$ као есенцијални сингуларитет, при чему би била униформна у домену те тачке и у њеној околини би вредности 0, 1 и ∞ узимала само коначан број пута. Функција $z(x)$, према томе, не може имати есенцијалних сингуларитета (коначних ни бесконачних); она је, дакле, рационална функција $r(x)$, тако да ћемо имати

$$R(x,y) = r(x).$$

Одавде се изводи закључак да *једначина* (A) *нема униформних трансцендентних интеграла.*

2) Претпоставимо да једначина (B) *има само два различита корена*

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x)$$

и ставимо

$$z = \frac{y - \varphi_1}{y - \varphi_2}.$$

Функција $z(x)$ није нужно униформна, јер φ_1 и φ_2 не морају бити рационалне функције; али ако је $x = a$ критична тачка функције z, то потиче од тога што је она алгебарска критична тачка функције φ_1 или φ_2, па ћемо стога, после трансформације (α), бити сигурни да ће функција z бити униформна у околини тачке $z = 0$.

Под том претпоставком образујмо диференцијалну једначину првог реда са непознатом функцијом z и нека су z_1 и z_2 оне две функције од x које одговарају двама униформним интегралима y_1 и y_2 једначине (A). Посматрајмо израз

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(y_1 - \varphi_2)(y_2 - \varphi_1)}{(y_1 - \varphi_1)(y_2 - \varphi_2)} = R(x, y_1, y_2).$$

Када се у њему y_1 и y_2 замене одговарајућим изразима по x, овај израз ће бити извесна функција од x са коначним бројем вредности и без есенцијалних сингуларитета – коначних и бесконачних. Јер, кад би тачка $x = a$ била есенцијални сингуларитет за R, с обзиром на трансформацију (α), може се увек претпоставити да је та функција униформна око тачке $x = a$. Затим, разматрањима сличним онима која смо управо изложили доказује се да се R може изједначити са 0, 1 или ∞ само за коначан број вредности промењиве x у околини тачке $x = a$. Дакле, $x = a$ није есенцијални сингуларитет функције R, па стога важи следеће:

$$R(x, y_1, y_2) = \text{алгебарска функција од } x.$$

Одатле излази да *једначина* (A) *не може имати два различита униформна трансцендентна интеграла.*

3) Претпоставимо да једначина (B) има само један корен

$$y = \varphi(x)$$

и ставимо

$$z = \frac{1}{y - \varphi}.$$

Нека су y_1, y_2 и y_3 три униформна интеграла једначине (A), а z_1, z_2 и z_3 одговарајући интеграли једначине по z. Посматрајмо израз

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}\frac{y_3 - \varphi}{y_2 - \varphi} = R(x, y_1, y_2, y_3).$$

Како је функција φ рационална, R је униформна функција од x без засека, па се, као у претходном случају, доказује да три једначине

$$R = 0, \quad R = 1, \quad R = \infty$$

имају само коначан број корена; дакле:

$$R(x, y_1, y_2, y_3) = \text{рационална функција од } x.$$

Одавде следи да једначина (A) *не може имати више од два различита униформна трансцендентна интеграла.*

4) Ако Q не садржи y, (A) је Рикатијева или линеарна једначина. У првом случају, могу постојати 1, 2 или 3 различита униформна трансцендентна интеграла; у другом случају може их бити 1 или 2.

Иста расуђивања и исти закључци могу се поновити.

A. За по x униформне интеграле једначина

$$F(x, y, y') = 0,$$

где је F полином који је несводљив по x, y и y' а нултог рода по y и y'.

B. За по (x, X) униформне интеграле једначина

$$\Phi(x, X, y, y') = 0,$$

где је Φ полином који је несводљив по x, X, y, y' и чији је род један, два или три, при чему су x и X везани неком алгебарском релацијом $\varphi(x, X) = 0$; или чак, општије, за све једначине хиперелиптичке врсте.

9. *Типови једначина које имају прве интеграле за мероморфне и двоструко периодичне интеграле тих једначина.* – Кад је дат општи тип диференцијалне једначине

$$f(y, y', y'', \dots y^{(p)}) = 0, \tag{36}$$

која је било ког реда а не садржи експлицитно x, може се поставити задатак одређивања, у извесној мери, једначине које припадају таквом типу, а могу их задовољити мероморфне двоструко периодичне функције, као и оне које не могу припадати тој категорији једначина.

Најпре, претходна разматрања доводе до следећег става.

Кад год једначина (36) има мероморфне и двоструко периодичне интеграле, она поседује следећа својства: или контура П *за функцију* f *има бар једну страну са угловним коефицијентом који је негативан цео број, или она има најмање једно вишеструко теме такво да одго-*

варајућа једначина по λ допушта као корене један или више негативних целих бројева обухваћених доменом тог темена.

Овај став у великом броју случајева омогућује да се упрости тражење услова да дати тип једначина (36) поседује интеграле у овде разматране природе.

На пример, пошто се уочи да контура П једначине

$$P(y'') + Q(y) = 0$$

(где су P и Q полиноми редом степена m и n) може имати само једну страну са негативним угловним коефицијентом и да тај коефицијент износи $\frac{2m}{n-m}$, види се да једначина не би могла имати мероморфне и двоструко периодичне интеграле само ако је $2m$ дељиво са $n - m$. Она ће их ефективно имати, на пример, кад је $m = 1$ и $n = 2$ или $n = 3$, са било каквим коефицијентима полинома P и Q; или такође кад је $m = 2$ и $n = 4$ или $n = 6$, а коефицијенти полинома P и Q су погодно изабрани итд.

Општије, да би једначина

$$P(y^{(p)}) + Q(y) = 0$$

имала интеграле потребно је да mp буде дељиво са $n - m$.

Кад се примети да контура П једначине

$$P(y^{(p)}) + Q(y)\,y' = 0$$

има само једну страну са целим негативним коефицијентом и да је он једнак $\frac{mp-1}{n+1-m}$, види се да постојање интеграла посматране врсте захтева да $mp - 1$ буде дељиво са $n + 1 - m$. Она ће бити ефективно интеграбилна таквим функцијама, на пример, ако је $p = 3$, $m = 1$ и $n = 1$ или $n = 2$, а коефицијенти полинома P и Q су било какви.

Уколико је реч о једначини

$$f(y, y') = 0,$$

да би она била интеграбилна мероморфним и двоструко периодичним функцијама, потребно је да њена контура П има бар једну страну чији је угловни коефицијент негативан цео број и такође бар једну страну са угловним коефицијентом који је позитиван цео број, као и да нема страна чији су угловни коефицијенти разломљени бројеви.

Проучавање контуре П која одговара једначини $f = 0$ било ког реда пружа доста начина да се формирају типови једначина које допуштају, за мероморфне и двоструко периодичне интеграле ових (уколико они постоје, прве интеграле претходне врсте).

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

КВАЛИТАТИВНИ ПРВИ ИНТЕГРАЛИ СА ОГРАНИЧЕЊИМА

10. *Општи појмови.* – У овом одељку бавићемо се првим интегралима облика

$$(44) \qquad \Phi = \theta, \quad a < x < b, \quad \lambda_1 < \theta < \lambda_2 .$$

Такав један интеграл изражава чињеницу да се израз Φ, који зависи од x, y и од неколико извода функције y по x (а може такође зависити од почетних услова), с обзиром на дату диференцијалну једначину $f = 0$, или на дати систем (f), своди на неку непознату функцију θ од x која, кад x варира између вредности $x = a$ и $x = b$, узима само вредности између познатих граница λ_1 и λ_2 (које су константне или функције од x, или од почетних услова).

Ако таква чињеница постоји само за реалне интеграле y подвргнуте извесним условима, на пример, да су коначни, непрекидни, позитивни, монотони, растући, осцилаторни итд., у интервалу (a, b) независно промењиве x, једначина (44) даје *један квалитативан први интеграл са ограничењима* за једначину $f = 0$ или за систем (f).

Мада један интеграл ове врсте не изражава неку прецизну математичку чињеницу, он зато не указује ништа мање на извесну околност која би могла допринети испитивању интеграла дате једначине и чак понекад водити до прецизних резултата који се односе на извесна специфична својства ових интеграла. Посебно, такви први интеграли дају, у великом броју случајева, доњу и горњу границу којима остаје обухваћен интеграл y док x варира у посматраном интервалу. Они, исто тако, омогућују да се изведу закључци који се односе на реалне нуле интеграла, на њихов број у посматраном интервалу, на њихов распоред у том интервалу; затим на максимуме и минимуме интеграла, као и на његове начине рашћења са x. Уопште узев, први интеграли, такви да (44) омогућује испитивање квалитативних особености интеграла y, могу да послуже као моћан ослонац у третирању проблема неприступачних за поступке строгих рачуна.

Намеравамо да ово укратко покажемо за неколико типова диференцијалних једначина и система који имају прве интеграле једноставних облика.

11. *Особености интеграла у садржане у облику првог интеграла* $\Phi = \theta$.

А. *Облик* $\frac{y'}{y} = \theta$. – Постојање првог интеграла облика

$$\frac{y'}{y} = \theta, \quad a < x < b, \quad A < \theta < B \tag{45}$$

непосредно доводи до следећег резултата: за сваку вредност променљиве x садржану у интервалу између a и b, реални интеграл који за $x = x_0$ узима вредност $y = y_0$ може се написати у облику

$$y = y_0 e^{(x-x_0)\theta}, \tag{46}$$

који истиче на видело чињеницу да се интеграл не анулира ни за једну реалну вредност x садржану у интервалу (a, b) и да је он у том интервалу стално садржан између

$$y_0 e^{A(x-x_0)} \quad \text{и} \quad y_0 e^{B(x-x_0)}.$$

Ако је овај интервал $(0, \infty)$, интеграл тежи нули или расте као $e^{\alpha x}$ (где је α позитивна константа која припада интервалу између A и B), у зависности од знака бројева A и B. Сличне чињенице јављају се у случају кад интервал (a, b) има границе $-\infty$ и 0 или 0 и $+\infty$.

Као пример једначина које имају први интеграл облика (45), навешћемо једначину

$$(\varphi + \psi y^2) y'^2 - (\varphi^2 + \psi^2 y^4) y^2 = 0, \tag{47}$$

где су φ и ψ било какве функције које су коначне и позитивне у неком интервалу (a, b) променљиве x. Кад се уочи да за те вредности за x и за било коју вредност за y вредност израза

$$\frac{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2 y^4}}{\varphi + \psi y^2}$$

остаје између граница $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1, долази се до првог интеграла једначине (47) (за све њене у посматраном интервалу реалне и позитивне интеграле):

$$\frac{y'}{y} = \theta, \quad a < x < b, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < \theta < 1 \quad \text{или} \quad a < x < b, \quad -1 < \theta < -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

према детерминацији корена.

Једначина

$$y' = (a + be^{-x^2 - y^2})y \qquad (a > 0, \ b > 0),$$

за све своје реалне интеграле, као први интеграл има

$$\frac{y'}{y} = \theta, \quad -\infty < x < \infty, \quad a < \theta < a + b.$$

В. *Облик* $(y' \pm y)\varphi = \theta$. – Први интеграл облика

(48) $$(y' + y)\varphi = \theta, \quad a < x < b, \quad A < \theta < B$$

(где је φ функција од x) повлачи следећу чињеницу: за сваку вредност x садржану између a и b реални интеграл који за $x = x_0$ узима вредност $y = y_0$ (где је $a < x_0 < b$) може се написати у облику

$$y = e^{-(x-x_0)}\left[y_0 + \theta e^{-x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}dx\right].$$

У том интервалу за x, он је стално садржан између

$$e^{-(x-x_0)}\left[y_0 + Ae^{-x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}dx\right]$$

и

$$e^{-(x-x_0)}\left[y_0 + Be^{-x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}dx\right];$$

одатле се лако изводе закључци који се односе на ток интегралне криве, на начин њеног рашћења, на нуле интеграла, на његове максимуме и минимуме,..., у зависности од природе дате функције φ.

Аналогни закључци могу се извести из првог интеграла облика

(49) $$(y' - y)\varphi = \theta, \quad a < x < b, \quad A < \theta < B,$$

у ком случају се може написати

$$y = e^{x-x_0}\left[y_0 + \theta e^{x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}dx\right].$$

Међу једначинама првог реда које допуштају први интеграл облика (48) налази се једначина

$$y'^2 + y^2 = f(x),$$

која се појављује у различитим проблемима геометрије и механике.

Узмимо, најпре, за φ позитивну детерминацију израза $\sqrt{f(x)}$, по претпоставци реалну, коначну и непрекидну у интервалу (a, b) променљиве x, и посматрајмо неки реалан интеграл који за $x = x_0$ узима вредност $y = y_0$. Претпоставимо, одређености ради, да се дата тачка $M(x_0, y_0)$ налази изнад x-осе; ова тачка мора се налазити у области D, смештеној између x-осе и криве $y = \sqrt{f(x)}$, јер би у супротном посматрана грана интегралне криве била имагинарна.

Кроз тачку M_0 пролазе две гране интегралне криве, од којих је једна позитивна и растућа Y_1, са вредношћу угловног коефицијента тангенте у M_0

$$\sqrt{f(x_0) - y_0^2},$$

а друга Y_2 је позитивна и опадајућа, са угловним коефицијентом тангенте у M_0 једнаким

$$-\sqrt{f(x_0) - y_0^2};$$

ове тангенте се поклапају кад тачка M_0 лежи на кривој

$$y = \sqrt{f(x)}.$$

Грана Y_1 за први интеграл има (48), где је

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad B = 1,$$

што значи да се она у интервалу (a, b) стално налази између кривих

$$y = y_0 e^{-(x-x_0)} + \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} e^x \sqrt{f(x)}dx,$$

$$y = y_0 e^{-(x-x_0)} + e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^x \sqrt{f(x)}dx.$$

Грана Y_2 за први интеграл има (49), са

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \quad A = -1, \quad B = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

па се, према томе, у интервалу (a, b) стално налази између кривих

$$y = y_0 e^{x-x_0} - e^{-x}\int_{x_0}^{x} e^x \sqrt{f(x)}dx,$$

$$y = y_0 e^{x-x_0} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}\int_{x_0}^{x} e^x \sqrt{f(x)}dx.$$

Кроз тачку $M_0'(x_0, -y_0)$, симетричну са тачком M_0 у односу на x-осу, исто тако пролазе две гране интегралне криве, од којих је једна U_1 негативна и опадајућа, а друга U_2 негативна и растућа; оне су редом симетричне, у односу на осу x, са кривама Y_1 и Y_2, па није тешко написати њихове једначине у претходном облику.

Када је интервал (a, b) раширен до бесконачности, оно што претходи чини очигледним начин рашћења интеграла y кад x бесконачно расте, даје податке о распореду нула итд.

C. Облик $\dfrac{y''}{y} = \theta$. – Посматрајмо први интеграл облика

(50) $$\frac{y''}{y} = \theta, \quad a < x < b, \quad A < \theta < B.$$

Лако је уверити се да, ако су A и B коначни бројеви, интеграл y, чија се коначност и непрекидност у интервалу (a, b) претпоставља, нема реалних нула одређеног реда различитог од јединице, а ни полова одређеног коначног реда. Заиста, у околини једне такве вредности $x = a$ реда k имали бисмо

(51) $$y = (x-a)^k \varphi(x),$$

где φ не постаје ни нула ни бесконачност за $x = a$, па се онда лако установљава да производ $(x-a)^2\theta$ тежи ка граници $k(k-1)$ за $x = a$; како је, због коначности функције θ, ова граница нула, закључујемо да мора бити $k = 0$ или $k = 1$. Одавде излази да y мења знак сваки пут кад x пролази кроз неку нулу између a и b.

Разликоваћемо сада следећа два случаја.

Први случај. $A > 0, B > 0$. – Нека је $x = x_0$ једна вредност променљиве x која је садржана у интервалу (a, b) и која анулира извод y' као његова једнострука нула. Како су, према (50), функције y и y'' истог знака за сваку вредност x из интервала (a, b), интеграл y не може у интервалу (a, b) имати ни позитивних максимума ни негативних минимума. Према томе, уколико је са y_0 означена вредност коју y узима за $x = x_0$:

1) ако је $y_0 > 0$, y у тачки $x = x_0$ достиже позитиван минимум; за вредности променљиве x између a и x_0 интеграл је позитиван и опадајући, a за x између x_0 и b он је позитиван и растући;

2) ако је $y_0 < 0$, y у тачки $x = x_0$ достиже негативан максимум; за x између a и x_0 интеграл је негативан и растући а за x између x_0 и b негативан је и опадајући.

У сваком случају, промена знака извода наступа само за $x = x_0$.

Множећи једначину (50) са $y'dx$, интегралећи затим између граница x и x_0, где је $a < x < x_0$, и водећи рачуна о томе да је $y_0' = 0$, добија се

$$-\frac{y'^2}{2} = \int_x^{x_0} \theta y y' dx. \tag{52}$$

Како производ yy' не мења знак између граница интеграције, позната теорема о средњој вредности примењена на десну страну једнакости (52) претвара ову у једначину

$$y'^2 = \theta(y_0^2 - y^2), \quad A < \theta < B,$$

одакле се добија

$$y = y_0 \frac{e^X + e^{-X}}{2}, \tag{P}$$

где је

$$X = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\theta}\, dx = (x - x_0)\lambda, \tag{Q}$$

при чему је λ извесна вредност између квадратних корена најмање и највеће вредности коју узима фактор θ кад x варира између x и x_0.

Ако се, међутим, једначина (50), претходно помножена са $y'dx$, интеграли између граница x_0 и x, где је $x_0 < x < b$, добија се

$$\frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} \theta y y' dx,$$

па како yy' не мења знак између граница интеграције, поново се долази до једнакости (P) и (Q) са $x_0 < x < b$. Одатле излази следећи резултат.

Ако је дата диференцијална једначина било ког реда која за своје у извесном интервалу (a, b) променљиве x реалне, коначне и непрекидне интеграле y допушта први интеграл облика

$$\frac{y''}{y} = \theta, \quad a < x < b, \quad A < \theta < B, \quad A > 0, \; B > 0$$

сваки интеграл у овакве природе, чији се извод анулира у некој тачки $x = x_0$ *садржаној у интервалу* (a, b), *може се написати у облику*

$$y = y_0 \frac{e^{(x-x_0)\lambda} + e^{-(x-x_0)\lambda}}{2} = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\lambda,$$

где је λ *нека вредност садржана између квадратних корена најмање и највеће од вредности коју узима фактор* θ *кад* x *варира између* x_0 *и* x, *и то за сваку вредност* $a < x < b$.

Интеграл се, према томе, налази између

$$y_0 \frac{e^{(x-x_0)\sqrt{A}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{A}}}{2} = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\sqrt{A}$$

и

$$y_0 \frac{e^{(x-x_0)\sqrt{B}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{B}}}{2} = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\sqrt{B}$$

за сваку вредност x из интервала (a, b). За вредности променљиве x ближе броју x_0 интеграл је обухваћен параболама

$$y = y_0\left[1 + \frac{A}{2}(x - x_0)^2\right], \qquad y = y_0\left[1 + \frac{B}{2}(x - x_0)^2\right],$$

које пролазе кроз тачку (x_0, y_0).

Све ово примењује се, на пример, на линеарну једначину

$$y'' = f(x)y$$

у сваком интервалу (a, b) у коме је функција $f(x)$ стално позитивна. Вредности A и B су најмања и највећа од вредности које узима функција $f(x)$ у овом интервалу за x.

У случају једначине

$$y'' + \varphi y' + \psi y = 0,$$

која, после смене

$$y = ze^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx},$$

прелази у

$$z'' = f(x)z,$$

где је

$$f(x) = \psi - \frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi'^2}{2}, \tag{53}$$

имамо следећи резултат.

Сваки реалан интеграл y такав да се први извод функције

$$ye^{\frac{1}{2}\int \varphi\, dx}$$

анулира у некој тачки $x = x_0$ садржаној у интервалу (a, b) у којој је функција (53) позитивна, може се написати у облику

$$y = \frac{y_0}{2}(e^Y + e^{-Y})e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx},$$

где је

$$Y = (x - x_0)\sqrt{f(\xi)},$$

при чему је ξ извесна вредност између x_0 и x, и то за сваку вредност $a < x < b$.

Једначина n-тог реда

$$[x^{2k} + y^{2k} + y'^{2k} + \ldots + y^{(n)^{2k}}]y'' - [x^2 + y^2 + y'^2 + \ldots + y^{(n)^2}]y = 0$$

допушта, за све своје реалне интеграле, први интеграл

$$\frac{y''}{y} = \theta, \quad -\infty < x < \infty, \quad 1 < \theta < (n+1)^{k-1},$$

што произлази из чињенице да се вредност односа

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^k}{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_p^k}$$

(са позитивним бројевима a_i) увек налази између 1 и p^{k-1}. Одатле излази да је сваки реалан интеграл, који је коначан и непрекидан у извесном интервалу (a, b) променљиве x, стално обухваћен границама

$$\frac{y_0}{2}[e^{x-x_0} + e^{-(x-x_0)}]$$

и

$$\frac{y_0}{2}\left[e^{(x-x_0)(n+1)^{\frac{k-1}{2}}} + e^{-(x-x_0)(n+1)^{\frac{k-1}{2}}}\right].$$

Други случај. $A < 0, B < 0$. – Штурмове методе, примењене на једначину

$$y'' = \theta y, \quad (\theta < 0), \tag{54}$$

доводе до резултата према коме, у довољно широком интервалу (a, b), реалан, коначан и непрекидан интеграл y има осцилације око x-осе и мења знак сваки пут када се анулира. Интегрална крива састоји се од полуталаса који су наизменично позитивни и негативни.

Посматрајмо најпре један *позитиван* полуталас. Према (54), будући да је други извод y'' негативан дуж тог полуталаса, овај може имати само један максимум. Нека је $x = x_0$ вредност променљиве x за коју је тај максимум достигнут и нека су x_1 и x_2 вредности за x које одређују крајеве полуталаса.

Кад x варира од x_1 до x_0, интеграл је стално позитиван и растући; за x које варира од x_0 до x_2, он је стално позитиван и опадајући. У свакомод интервала (x_1, x_0) и (x_0, x_2) производ yy' задржава исти знак.

Посматрајмо интегралну криву у интервалу (x_1, x_0). Множећи једначину (54) са $y'dx$ и интегралећи је потом у границама од x до x_0, где је $x_1 < x < x_0$, добија се

$$-\frac{y'^2}{2} = \int_x^{x_0} \theta y y' dx. \tag{55}$$

Како yy' не мења знак између граница интеграције, (55) повлачи

$$y'^2 = (y_0^2 - y^2)\theta_1,$$

где θ_1 означава извесну вредност између најмање и највеће апсолутне вредности M_1 и M_2 које узима фактор θ кад x варира од x до x_0. Одатле излази

$$y = y_0 \cos(x - x_0)\lambda \quad (\text{где је } \sqrt{M_1} < \lambda < \sqrt{M_2}), \tag{56}$$

и то за све вредности x такве да је $x_1 < x < x_0$.

Посматрајмо сада интегралну криву у интервалу (x_0, x_2). Множећи једначину (54) са $y'dx$ и вршећи интеграцију између граница x_0 и x, где је $x_0 < x < x_2$, добија се

$$\frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} \theta y y' dx,$$

одакле поново излази једначина (55), те је онда једначина (56) $(x_0 < \theta < x)$ такође задовољена за све вредности x такве да је $x_0 < x < x_2$.

Дакле, сваки позитиван полуталас може се приказати у облику (56), и то за сваку вредност x такву да је $x_1 < x < x_2$.

Размотримо сада један *негативан* полуталас. Како је извод y'' позитиван, полуталас може имати само један минимум. Нека су x_1, x_2 и x_0 редом две крајње апсцисе и апсциса минимума овог полуталаса. Док x варира од x_1 до x_0, интеграл y стално је негативан и опадајући; за x које варира од x_0 до x_2 он је стално негативан и растући. Производ yy' има, према томе, сталан знак у сваком од интервала (x_1, x_0) и (x_0, x_2). Одатле се онда, на претходни начин, изводи следећи закључак: негативан полуталас обухваћен интервалом (a, b) може се приказати формулом (56).

Одатле излази следећи резултат:

За сваки полуталас, позитиван или негативан, обухваћен интервалом (a, b) *важи формула*

$$y = y_0 \cos(x - x_0)\lambda, \tag{57}$$

где је λ *нека вредност између квадратних корена најмање и највеће вредности* M *и* N *које узима апсолутна вредност функције* θ *кад* x *варира између* x_1 *и* x_2.

Из (57) излази

$$x_1 = x_0 - \frac{\pi}{2\lambda}, \qquad x_2 = x_0 + \frac{\pi}{2\lambda},$$

што значи да се дужина $x_2 - x_1$ полуталаса налази између

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\sqrt{N}}.$$

Помоћу овога могу се доказати различити већ познати ставови о броју и расподели реалних нула интеграла y у интервалу (a, b).

Види се, такође, да је сваки полуталас функције y обухваћен двема кривама

$$y = y_0 \cos(x - x_0)\sqrt{N}, \qquad y = y_0 \cos(x - x_0)\sqrt{M}.$$

За вредности променљиве x блиске вредности x_0, оне се налазе између две параболе

$$y = y_0\left[1 - \frac{M}{2}(x - x_0)^2\right], \qquad y = y_0\left[1 - \frac{N}{2}(x - x_0)^2\right]$$

које пролазе кроз тачку (x_0, y_0).

Ови ставови непосредно се могу применити на линеарну једначину

$$y'' = f(x)y$$

за сваки интервал (a, b) променљиве x у коме је функција $f(x)$ негативна. Улогу вредности M и N тада играју доња и горња граница функције $f(x)$ у том интервалу.

У случају једначине

$$y'' + \alpha y + \beta y^3 = 0 \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0),$$

која се интеграли помоћу осцилирајућих елиптичних функција, при чему је (a, b) интервал $(-\infty, +\infty)$, као први интеграл добија се (50), где улогу величине M из претходних разматрања игра α. Дужина полуталаса мања је од $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$, одакле излази да број полуталаса садржаних у интервалу (a, b) није мањи од највећег целог броја садржаног у вредности

$$\frac{(b-a)\sqrt{\alpha}}{\pi}.$$

Једначина

$$y'' + (\alpha + \beta e^{-x^2 - y^2})y = 0 \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

такође има први интеграл облика (50); улогу величина M и N при том играју α и $\alpha + \beta$.

Општи интеграл једначине

$$y'' + \varphi y' + \psi y = 0$$

за сваку вредност x, која функцију

$$f(x) = \psi - \frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi'}{2}$$

чини негативном, може се написати у облику

$$y = y_0 e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx} \cos(x - x_0)\sqrt{f(\xi)},$$

где је ξ нека вредност између x_0 и x. Сваки полуталас интегралне криве налази се између кривих

$$y = y_0 e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx} \cos(x - x_0)\sqrt{N},$$

$$y = y_0 e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx} \cos(x - x_0)\sqrt{M},$$

где су N и M најмања и највећа апсолутна вредност функције $f(x)$ у интервалу (a, b). Дужина одговарајућег полуталаса налази се између $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ и $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$.

Једначина

$$[x^{2k}+y^{2k}+y'^{2k}+\ldots+y^{(n)^{2k}}]y''+[x^2+y^2+y'^2+\ldots+y^{(n)^2}]y=0$$

за све реалне интеграле, има први интеграл

$$\frac{y''}{y}=\theta,\quad -\infty<x<\infty,\quad -(n+1)^{k-1}<\theta<-1,$$

из кога се види да сваки реалан, коначан и непрекидан интеграл y има неограничен број осцилација и да при том број полуталаса обухваћених произвољним интервалом (a, b) није мањи од броја целих бројева садржаних у $\frac{(b-a)}{\pi}$, а није већи од броја целих бројева садржаних у

$$1+\frac{(b-a)(n+1)^{\frac{k-1}{2}}}{\pi}.$$

С. *О целим функцијама са којима се доводи у везу неки први интеграл облика* $\frac{y''}{y}=\theta$. – Међу многим последицама чињенице постојања квалитативног интеграла облика

$$\frac{y''}{y}=\theta,\quad -\infty<x<\infty,\quad -N<\theta<-M,\quad M>0,\ N>0,$$

указаћемо на следеће које се односе на *целе* интеграле једначине или система.

Једначина, или систем, не може имати за интеграл у *ниједну целу функцију нултог рода.*

Да бисмо ово установили, подсетимо се Штурмовог става, према коме, ако у неком интервалу (a, b) за x однос $\frac{y''}{y}$ стално остаје мањи од одговарајуће вредности извесне функције $\mu(x)$ и уколико v означава било који интеграл једначине

$$v''-\mu(x)v=0,$$

између две узастопне једноструке нуле функције v, садржане у интегралу (a, b), налази се бар једна нула функције y; ако y и v имају у интервалу (a, b) заједничку нулу $x = \beta$, тада промењљива x док расте почев од вредности β не наилази на неку нулу функције v а да пре тога не наиђе на нулу функције y. А како је

$$\frac{y''}{y} = \theta < -M,$$

узастопне реалне нуле функције y расту, по апсолутној вредности, са својим или бројем *највише* истом брзином као нуле интеграла

$$v = \sin x\sqrt{M}$$

једначине

$$v'' + Mv = 0,$$

које саме расту истом брзином као њихов ранг. Ред чији су чланови реципрочне вредности модула реалних нула функције y биће, дакле, дивергентан, а он ће онда, поготову, бити такав кад се допуни члановима који потичу од имагинарних нула функције y, што свакако значи да род функције y никад није нула.

Овај род, увек једнак јединици или од ње већи, *једнак је јединици*, на пример, у случају једначине

$$yy''' - y'y'' = 0$$

која, за осцилаторне интеграле $y = a\sin(b + cx)$, има први интеграл

$$\frac{y''}{y} = -c^2 \quad (c - \text{реална константа}).$$

У вези са овим, доказује се следећи општи резултат чији је само специјални случај претходни пример.

Сваки интеграл у који нема имагинарних нула или их има само у ограниченом броју има коначни производ примарних фактора реда један.

Ово излази из Штурмовог става, према коме, ако је у интервалу (a, b) однос $\dfrac{y''}{y}$ стално већи од одговарајуће вредности неке функције $\lambda(x)$ и ако u означава било који интеграл једначине

$$u'' - \lambda(x)u = 0,$$

тада се између две узастопне једноструке нуле функције u, садржане у интервалу (a, b), налази највише једна нула функције y; ако y и u имају у (a, b) заједничку нулу $x = \beta$, промењива x, док расте почев од вредности β не може наићи на нулу функције y а да претходно не наиђе на неку нулу функције u. А како је

$$\frac{y''}{y} = \theta > -N,$$

узастопне реалне нуле расту по апсолутној вредности, *најмање истом брзином* као нуле интеграла

$$u = \sin x\sqrt{N}$$

једначине

$$u'' + Nu = 0.$$

А како оне истовремено расту *највише истом брзином* као нуле функције v, *оне имају ред величине свог ранга* n.

Ред чији су чланови реципрочне вредности квадрата модула реалних нула функције y, дакле, конвергира; а он ће имати исто својство кад се допуни члановима који потичу од имагинарних нула. Овим је тврђење доказано.

Одавде такође излази:

Кад год неки цео интеграл у *има канонички производ рода* $p > 1$, *овај интеграл има бесконачно много реалних и бесконачно много имагинарних нула; модули имагинарних нула расту истом брзином као* $(p + 1)$-*ви корен њиховог ранга*. Ако би они расли мањом или већом брзином, род би био већи, односно мањи од p.

12. *Квалитативни први интеграли за системе једначина.* – Систем

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{60}$$

симултаних једначина са n непознатих функција $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независно промењиве t, где су X_i функције од x_i у t, може имати, за своје реалне, коначне и непрекидне интеграле x_i, прве интеграле облика

$$H = \theta, \quad a < t < b, \quad M_1 < \theta < M_2, \tag{61}$$

где је H одређена функција једне или више функција x_i и независно промењиве t, као и извода од x_i по t, а такође може зависити од почетних услова.

Тако, на пример, кад год се међу једначинама (60) налази једна или више једначина облика

$$\frac{dx_k}{dt} = x_k f_k, \tag{62}$$

где је f_k функција од функција x_i и променљиве t, која је већа од фиксираног позитивног броја M за било које реалне вредности које у њој фигуришу, систем има исто толико првих интеграла облика

$$\frac{1}{x_k}\frac{dx_k}{dt} = \theta, \quad -\infty < t < \infty, \quad M < \theta < \infty$$

који имају за последице различите особености интеграла y: интеграл x_k, који за $t = t_0$ узима вредност $x_{k,0}$, за сваку реалну вредност t већи је по апсолутној вредности од

$$x_{k,0}\, e^{M(t-t_0)};$$

он, затим, нема реалних нула итд.

Исто тако, кад год је један од израза

$$\frac{1}{x_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum f_k \frac{\partial f_k}{\partial t}\right)$$

(или више њих) за $a < x < b$ функција са горње стране ограничена негативним бројем N а са доње негативним бројем M, систем има исто толико првих интеграла облика

$$\frac{1}{x_k}\frac{d^2x_k}{dt^2} = \theta, \quad a < x < b, \quad -M < \theta < -N,$$

а то има за последицу осцилаторну природу интеграла x_k, постојање реалних нула овога интеграла у интервалу (a, b) чији број није мањи од целог дела броја

$$\frac{(b-a)\sqrt{-N}}{\pi},$$

а није већи од целог дела броја

$$1 + \frac{(b-a)\sqrt{-M}}{\pi}, \dots .$$

Такав је, на пример, случај система

$$\frac{dx_1}{dt} = Mx_1 + Nx_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = Px_1 + Qx_2,$$

где су M, N, P и Q функције од t везане релацијом

$$\frac{dN}{dt} + N(M+Q) = 0,$$

при чему се функција

$$\frac{dM}{dt} + M^2 + NP$$

стално налази између два фиксирана негативна броја.

У случају система

$$(63) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_2 x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_1 x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 x_1 x_2$$

(где су α_1, α_2 и α_3 константе), који се јавља у проблему кретања чврстог тела и који се интеграли помоћу елиптичних функција, добија се

$$(64) \qquad \frac{1}{x_1}\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \alpha_1 (\alpha_3 x_2^2 + \alpha_2 x_3^2),$$

као и аналогне једначине за x_2 и x_3.

Кад су бројеви α_2 и α_3 истог знака, израз (64) могао би се анулирати за неку вредност $t = t_0$ само ако би истовремено било $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$. Но, једначине (63), с обзиром на одговарајућу теорему егзистенције, имају јединствени систем интеграла x_1, x_2 и x_3 који су холоморфни у околини вредности $t = t_0$ и анулирају се за исту вредност променљиве t. С друге стране, због једначина (63) и свих које се из њих добијају узастопним диференцирањима, сви изводи функције x_1 били би једнаки нули за $t = t_0$, па би интеграл x_1, који се анулира за $t = t_0$, био, дакле, идентички једнак нули. Интеграли x_2 и x_3 не могу се, стога, истовремено анулирати; десна страна једначине (64) онда за сваку вредност t по апсолутној вредности остаје већа од неког позитивног броја M, тако да систем има први интеграл

$$(65 \qquad \frac{1}{x_1}\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \theta,$$

$$-\infty < t < \infty, \quad -M < \theta < \infty \quad \text{или} \quad -\infty < t < \infty, \quad -\infty < \theta < -M$$

(према томе какав је заједнички знак за α_2 и α_3), што повлачи претходно поменуте последице.

Ове чињенице су, уосталом, само специјални случајеви једне општије чињенице, о којој ће бити речи у ономе што следи.

Према једној значајној теореми гг. Апелрота и Лагутинског[5], *сваки сис̄тем ал̄гебарских диференцијалних једначина било ко̄г реда може се свес̄ти на сис̄тем облика*

---

[5] Communications á la Sociéte mathématique de Mosou (Recueil mathém., t. 23, 1902; t. 27, 1909; t. 32, 1924).

$$\text{(66)} \qquad \frac{dy_i}{dt} = y_i \Phi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где је Φ *линеарна форма*

$$\Phi_i = a_{1i} y_1 + a_{2i} y_2 + \ldots + a_{mi} y_m$$

са константним коефицијентима $a_{m,i}$ *једнаким целим бројевима који нису мањи од* -1.

Г. Апелрот је чак редуковао линеарне форме Φ_i *на оне чији су сви коефицијенти једнаки* 1 *или* 0 (loc. cit.).

Штавише, ове редукције се врше сменама непознатих функција *без смене независно променљиве.*

На пример, систем

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = k^2 x_1 x_3,$$

који задовољавају три елиптичне функције

$$x_1 = \operatorname{sn} t, \quad x_2 = \operatorname{cn} t, \quad x_3 = \operatorname{dn} t,$$

кад се стави

$$y_1 = \frac{d}{dt} \log x_1, \quad y_2 = \frac{d}{dt} \log x_2, \quad y_3 = \frac{d}{dt} \log x_3,$$

своди се на систем

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 (-y_1 + y_2 + y_3),$$
$$\frac{dy_2}{dt} = y_2 (y_1 - y_2 + y_3),$$
$$\frac{dy_3}{dt} = y_3 (y_1 + y_2 - y_3).$$

Теорема гг. Апелрота и Лагутинског отвара широке могућности за примене претходних резултата.

Тако, на пример, једначина (66) показује да, ако је $y_1, y_2, \ldots, y_m$ један систем у интервалу (a, b) коначних интеграла, тада за сваки од тих интеграла постоји први интеграл

$$\frac{1}{y_i} \frac{dy_i}{dt} = \theta, \quad a < t < b, \quad A < \theta < B,$$

где су A и B фиксиране количине, што повлачи следеће последице. Ниједан интеграл система нема реалних нула у интервалу (a, b) (штавише ни имагинарних нула у било ком кругу холоморфности); сваки интеграл у (a, b) стално се налази између две експоненцијалне функције Ce^{At} и Ce^{Bt} итд.

Диференцирањем једначина (66) по t, добија се

(67) $$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = y_i H_i,$$

где је H_i извесна квадратна форма по $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са константним коефицијентима.

С друге стране, форма H_i је збир квадрата m функција линеарних по $y_1, \ldots, y_m$, при чему је број m највише једнак броју n:

$$H_i = Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_m^2.$$

Кад год су линеарне функције $\mathrm{Y_k}$ *реалне, а једначине* $\mathrm{Y_1} = 0$, ..., $\mathrm{Y_m} = 0$ *нису међусобно сагласне, систем* (66) *има први интеграл*

$$\frac{1}{y_i}\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \theta, \quad -\infty < t < \infty, \quad M < \theta < \infty,$$

где је M *фиксиран позитиван број.*

Ниједан интеграл y_i система тада није осцилаторан; сваки интеграл y_i који је (заједно са своја два прва извода) коначан и непрекидан за сваку коначну вредност променљиве t, а почев од извесне вредности за t, расте остајући позитиван, или опада остајући негативан.

Кад год линеарне функције $\mathrm{Y_k}$, *за реалне вредности* $\mathrm{y_1, y_2, \ldots, y_n}$, *узимају чисто имагинарне вредности а једначине* $\mathrm{Y_1} = 0$, ..., $\mathrm{Y_m} = 0$ *су међусобно несагласне, систем* (66) *има први интеграл*

$$\frac{1}{y_i}\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \theta, \quad -\infty < t < \infty, \quad -\infty < \theta < -M,$$

где је M *позитиван број.*

Сваки интеграл y_i који је коначан и непрекидан (заједно са своја прва два извода) за сваку реалну вредност t осцилаторан је, са неограниченим бројем осцилација око нуле. Ако је он цела функција од t, њен род је већи од нуле итд.**

** При коришћењу ове монографије консултовати и последњу Петровићеву расправу *Adition ou mémoire sur les équations différentielles algébriques*, Publ. de l'Institut math., Belgrade 1947, t. I, pp. 1–4. – Изложена монографија је веома опширно приказана и коментарисана у FdM, B. 55, S. 863–865 (M. Pinl). Одредницама из ове књиге користили су се Д. С. Митриновић, *Нови случајеви интеграбилитета једне диференцијалне једначине првога реда*, СКА, Глас, књ. CLIV, Београд 1933, стр. 145–152, као и М. Бертолино, *Procédés de l'encadrement des solutions des équations différentielles*, Весник Друштва мат. и физ. НРС, 9 (1957), 3–4, стр. 261–268. – Поменимо да је Д. С. Митриновић међу својим последњим радовима објавио полемички чланак о Петровићевим резултатима у овој монографији: *Михаило Петровић и Апелротова теорема* Publikacion Електротехничког факултета број 2, 1991. година, стр. 95–99 (пр. Д. Т.).

АРИТМЕТИЧКЕ ОСОБИНЕ ИНТЕГРАЛА ЈЕДНЕ КЛАСЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА*

1. Уочимо класу бескрајно много диференцијалних једначина облика

$$(1) \qquad [xy'' + (x-a)y' + be^{-x}Y]\frac{\partial\Phi}{\partial Y} + \frac{xy'^2}{Y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0,$$

где су променљиве y и Y везане међу собом датом алгебарском релацијом

$$(2) \qquad \Phi(y, Y) = 0$$

и где је

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

То су једначине другога реда, *алгебарске* по

$$(3) \qquad x, \ e^x, \ y, \ y', \ y''$$

и по параметрима a и b.

Таква би, на пример, била једначина

$$xy'' + (x-a)y' + be^{-x}y - \frac{xy'^2}{y} = 0$$

која одговара функцији

$$\Phi = Y - y,$$

или једначина

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXIII, Први разред, књ. 80, Београд, 1934, стр. 71–87. М. Петровић је ову расправу саопштио у Академији природних наука 26. децембра 1933.

$$[xy'' + (x-a)\,y' + be^{-x}\sqrt{1-y^2}\,](1-y^2) - xyy' = 0$$

која одговара функцији

$$\Phi = Y^2 - y^2 - 1 \quad \text{итд.}$$

Свака од таквих једначина може се интегралити помоћу квадратура. Овде ће бити показано да свака од њих има ову интересантну аритметичку особину.

Да би једначина имала бескрајно много својих интеграла, са једном произвољном интеграционом константом, а чија је асимптотска вредност y(∞) *једнака почетној вредности* y(0) *интеграла или различита од ове, према томе да ли је* a + 1 *неки позитиван особни број или позитиван сложени број, потребно је и довољно да инверзија*

(4) $$y = \varphi(z)$$

Абеловог интеграла

(5) $$z = \int \frac{dy}{Y},$$

везаног за релацију

(6) $$\Phi(y, Y) = 0,$$

буде периодична функција променљиве z *и да константа* b *има за вредност*

(7) $$b = \frac{a\omega}{a+1},$$

где ω *означава елементарну периоду функције* φ(z).

Да бисмо то доказали, ставимо да је

$$\frac{dy}{Y} = dz,$$

одакле је

$$\frac{y'}{Y} = \frac{dz}{dx} = z',$$

па се из тога добија да је

(8) $$y'' - y'\frac{Y'}{Y} - Yz'' = 0,$$

где је

$$Y' = \frac{dY}{dx}.$$

Пошто је

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial\Phi}{\partial Y} Y' = 0,$$

одакле је

$$Y' = -\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial Y}} y',$$

једначина (8) даје

$$xy'' + \frac{x}{Y} y'^2 \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xYz'' \frac{\partial\Phi}{\partial Y}.$$

Према релацији

$$y' = Yz'$$

биће

$$(x-a)y' \frac{\partial\Phi}{\partial Y} = (x-a)Yz' \frac{\partial\Phi}{\partial Y},$$

па деобом једначине (1) са

$$Y \frac{\partial\Phi}{\partial Y}$$

ова се своди на

$$xz'' + (x-a)z' + \frac{b}{a} e^{-x} = 0. \tag{9}$$

Првом интеграцијом једначине (9) добија се

$$z' = e^{-x}\left(C'x^a + \frac{b}{a}\right) \tag{10}$$

(где је C' интеграциона константа), а одатле је

$$z = \int_0^x e^{-x}\left(C'x^a + \frac{b}{a}\right) dx + C \tag{11}$$

(где је C друга интеграциона константа).

Ако је, дакле, (4) инверзија Абеловог интеграла (5), општи интеграл једначине (1) биће

$$y = \varphi(u + C), \tag{12}$$

где је, краткоће ради, стављено да је

(13) $$u = \int_0^x e^{-x}\left(C'x^a + \frac{b}{a}\right)dx.$$

Почетна и асимптотска вредност интеграла су

$$y(0) = \varphi(C),$$
$$y(\infty) = \varphi(C + \lambda_a),$$

где је

(14) $$\lambda_a = \int_0^\infty e^{-x}\left(C'x^a + \frac{b}{a}\right)dx = C'\,\Gamma(a+1) + \frac{b}{a}.$$

Једнакост вредности $y(0)$ и $y(\infty)$ своди се на

(15) $$\varphi(C + \lambda_a) = \varphi(C).$$

Да би то било, потребно је и довољно да функција $\varphi(z)$ буде периодична и да λ_a буде производ елементарне периоде ω те функције са каквим целим бројем. Овај последњи услов биће испуњен када су испуњена следећа три услова:

1) да буде

(16) $$C' = \frac{\omega}{a+1};$$

2) да је

(17) $$b = \frac{a\omega}{a+1};$$

3) да цео позитивни број $a+1$ буде *основан* број.

Кад су услови 1) и 2) испуњени, $y(\infty)$ ће се разликовати од $y(0)$ кад год је $a + 1$ неки *сложен* број; то је последица Вилсонове (Wilson) аритметичке теореме.

Као што се види, *интеграли једначине* (1) *који имају поменуту аритметичку особину, дати су обрасцем*

(18) $$y = \varphi\left[C + \frac{\omega}{a+1}\int_0^x e^{-x}(x^a + 1)\,dx\right],$$

где је C *произвољна константа, а* φ *инверзија интеграла* (5).

2. Мењајући алгебарску функцију Φ добија се бескрајно много диференцијалних једначина другога реда које састављају класу (1). Тако, на пример:

1) функцији Φ облика

$$\Phi = Y - y$$

одговара

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -1;$$

према томе, једначина (1) облика

$$xy'' + (x-a)\,y' + be^{-x}y - \frac{xy'^2}{y} = 0; \tag{19}$$

Абелов интеграл (5) има облик

$$z = \int \frac{dy}{y} = \log y,$$

а његова инверзија је

$$y = e^z;$$

одговарајући интеграли (18) су облика

$$y = Ce^{\frac{2\pi i}{a+1}\int_0^x e^{-x}(x^a+1)\,dx}; \tag{20}$$

2) функцији Φ облика

$$\Phi = Y^2 - y^2 - 1$$

одговара

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 2Y = 2\sqrt{1-y^2},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2y,$$

према томе, једначина (1) облика

$$[xy'' + (x-a)\,y' + be^{-x}\sqrt{1-y^2}\,](1-y^2) - xyy'^2 = 0 \tag{21}$$

Абелов интеграл (5) има облик

$$z = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y,$$

са инверзијом

$$y = \sin z;$$

одговарајући интеграли (18) су облика

$$(22)\qquad y = \sin\left[C + \frac{2\pi}{a+1}\int_0^x e^{-x}(x^2+1)dx\right];$$

3) функцији Φ облика

$$\Phi = Y^2 - \Delta(y),$$

где је

$$\Delta(y) = (1-y^2)(1-k^2y^2), \quad 0 < k < 1,$$

одговара

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = 2Y = 2\sqrt{\Delta(y)},$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{d\Delta}{dy} = 2(1+k^2)y - 4k^2y^3,$$

према томе, једначина (1) облика

$$(23)\quad [xy'' + (x-a)y' + 2be^{-x}\sqrt{\Delta(y)}]\Delta(y) - [(1+k^2)xy^2 - 2k^2xy^4] = 0;$$

Абелов интеграл (5) има облик

$$z = \int \frac{dy}{\sqrt{\Delta(y)}},$$

са инверзијом

$$y = \operatorname{sn} z,$$

а одговарајући интеграли (18) су облика

$$(24)\qquad y = \operatorname{sn}\left[C + \frac{\omega}{a+1}\int_0^x e^{-x}(x^2+1)dx\right],$$

где је

$$\omega = 4\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\Delta(y)}}.$$

3. Из свега овога види се да *постоје диференцијалне једначине* F = 0 *другога реда, алгебарске по*

$$x,\ e^x,\ y,\ y',\ y''$$

и по једноме параметру a, *чији интеграли имају наведену аритметичку особину.*

Елиминацијом експоненцијалне функције e^x из двеју једначина

$$F = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF}{dx} = 0,$$

долази се до *једначине трећега реда, алгебарске по*

$$x, \ y, \ y', \ y'', \ y''', \tag{25}$$

чији интеграли имају исту аритметичку особину. Тиме је доказана егзистенција једначина

$$P(x, y, y', y'', y''') = 0$$

са истом аритметичком особином, где је P полином по свим промењљивим (25).

Али, та егзистенција може се доказати и на непосредан начин.

Помоћу дате алгебарске релације

$$\Phi(y, Y) = 0$$

формирајмо израз

$$u = \frac{y''}{y} + \frac{y'}{Y} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial Y}} \tag{26}$$

и уочимо једначину

$$\frac{d}{dx} \log \frac{u+1}{a - x(u+1)} = \frac{a-1}{x}. \tag{27}$$

То је диференцијална једначина трећега реда

$$\Psi(a, x, y, y', y'', y''') = 0 \tag{28}$$

која се може интегралити помоћу квадратура.

Да би се то видело, помоћу релације

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial Y}} = -\frac{Y'}{y'}$$

израз (26) треба написати у облику

$$u = \frac{y''}{y'} - \frac{Y'}{Y} = \frac{d}{dx} \log \frac{y'}{Y}. \tag{29}$$

С друге стране, из (27) се добија

$$\log \frac{u+1}{a-1(u+1)} = (a-1)\log x + \text{const.},$$

према чему је

$$u = \frac{C'ax^{a-1}}{1+C'x^a} - 1, \tag{30}$$

где је C' интеграциона константа.

Из (29) и (30) добија се

$$\log \frac{y'}{Y} = \log(1+C'x^a) - x + \text{const.},$$

а одатле

$$\frac{y'}{Y} = C''e^{-x}(1+C'x^a) + C$$

(где су C и C'' друге две интеграционе константе).

Означивши, као и напред, инверзију Абеловог интеграла (5) са $\varphi(z)$, општи интеграл једначине (28) биће

$$y = \varphi\left[C + C''\int_0^x e^{-x}(1-C'x^a)\,dx\right]. \tag{31}$$

Он ће имати поменуту аритметичку особину кад је функција φ периодична и када је

$$C' = 1, \quad C'' = \frac{\omega}{a+1}.$$

4. Главни услов да интеграли диференцијалних једначина (1) и (28) имају наведену аритметичку особину јесте тај да *Абелов интеграл*

$$z = \int \frac{dy}{Y}, \tag{32}$$

везан за дату алгебарску релацију

$$\Phi(y, Y) = 0. \tag{33}$$

има своју периодичну инверзију φ(z).

Општа теорија Абелових интеграла даје услове за то. За оно што се овде има у виду, од нарочитога су интереса довољни услови да би функција $\varphi(z)$ била добро одређена (тј. да у свакој тачки z има ограничен број вредности) и периодична. Овде ће бити наведени услови за такав случај.

Означимо са α_k и β_k коефицијенте везане за дату релацију (33) и дефинисане на овај начин.

1) Коефицијенти

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \tag{34}$$

су вредности (коначне или бескрајне) које даје једначина (33) за $\frac{y}{Y}$ кад y или Y постану бескрајно велики; исказано геометријски, то су реципрочне вредности угаоних коефицијената асимптотских праваца криве линије (33) кад се y сматрају за апсцисе, а Y за ординате тачака те криве.

2) Коефицијенти

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \tag{35}$$

су реципрочне вредности извода $\frac{dY}{dy}$ у тачкама у којима је $Y = 0$; то су, дакле, реципрочне вредности угаоних коефицијената дирке на кривој (33) у тачкама у којима она сече осу Oy.

Када y има бескрајно велику вредност, у (33) стављамо

$$y = \frac{1}{v} \tag{36}$$

и са V означавамо извод $\frac{dv}{dz}$, па је

$$V = -Yv^2; \tag{37}$$

тако се помоћна једначина

$$\Phi_1(v, V) = 0, \tag{38}$$

добија као резултат трансформације једначине (33) помоћу смене

$$y = \frac{1}{v}, \quad Y = -\frac{V}{v^2}. \tag{39}$$

Кад год је функција $\varphi(z)$ добро одређена и периодична, она се изражава:

1) или као алгебарска функција израза e^{rx}, где је r одређена стална количина; она је тада просто периодична;

2) или као алгебарска функција израза $\operatorname{sn} rz$ и $\operatorname{sn}' rz$; она је тада двогубо периодична.

У теорији Абелових интеграла, у том погледу познати су ставови.

I. Кад год је функција $\varphi(z)$ добро одређена и *просто периодична*, коефицијенти (34) и (35) су сви коначни, али нису сви једнаки нули; они међу њима који нису једнаки нули формирају низ бројева чији су количници рационални бројеви.

II. Кад год је функција $\varphi(z)$ добро одређена и *двогубо периодична*, сви коефицијенти (34) и (35) једнаки су нули.

Те се теореме могу исказати и на други начин.

I'. Кад год је $\varphi(z)$ добро одређена и *просто периодична* функција, корени једначине (33) по непознатој Y, који су једнаки нули за коначне вредности y, а тако исто и корени једначине (38) по непознатој V, који су једнаки нули за $v = 0$, нижег су реда од јединице или су једнаки јединици; бар два од таквих корена имају свој ред једнак јединици.

II'. Кад год је $\varphi(z)$ добро одређена и *двогубо периодична* функција, сви корени једначина (33) и (38) поменути под I' нижег су реда од јединице.[1]

Те теореме дају услове *потребне* да би функција $\varphi(z)$ била добро одређена и периодична. Две наведене теореме прецизирају случајеве кад су ти исти услови у исти мах и *довољни*.

III. Кад је крива линија (33) нултога реда, а коефицијенти (34) и (35) сви коначни и такви да су им међусобни количници рационални бројеви, функција $\varphi(z)$ је добро одређена и просто периодична.

IV. Да би функција $\varphi(z)$ била униформна и *просто периодична*, потребно је и довољно да једначина (33) испуњава ове услове:

а) да сви коефицијенти (34) и (35) буду коначни;

б) да сви корени једначине (33) по непознатој Y, који су једнаки нули за коначне вредности y, а имају ред једнак јединици, као и сви корени једначине (38) по непознатој V који су једнаки нули за $v = 0$, а имају свој ред једнак јединици, образују свега два кружна система;

в) да крива (33) буде нултога реда.

Кад су сви ти услови испуњени, $\varphi(z)$ је рационална функција израза e^{rz}, где је r стална количина.

V. Да би функција $\varphi(z)$ била униформна и *двогубо периодична*, потребно је и довољно:

а) да сви коефицијенти (34) и (35) буду једнаки нули;

б) да ред криве (33) буде јединица.[2]

Кад су ти услови испуњени, $\varphi(z)$ је рационална функција израза $\mathrm{sn}\, rz$ и $\mathrm{sn}' rz$.

---

[1] L. Raffy: *Recherches algébriques sur les intégrales abeliennes*, Thèse de doctorat, Paris 1883, p. 20–22.

[2] L. Raffy: ibid. p. 81–82.

5. Примера ради, овде ће бити наведено неколико алгебарских релација

$$\Phi(y, Y) = 0, \tag{40}$$

којима одговарају добро одређене и периодичне функције $\varphi(z)$, тако да одговарајуће им диференцијалне једначине (1) и (28) имају напред наведену аритметичку особину својих интеграла.

Релацији (40) облика

$$y^4 - (y - kY)^3 = 0$$

одговара просто периодична функција

$$\varphi(z) = \frac{e^{\frac{z}{k}}}{(k + e^{\frac{z}{3k}})^3}.$$

Релацији облика

$$Y^3 - Y^2 - \frac{4}{27}(1 - 2y^2 + 2y^3)^2 + \frac{4}{27} = 0,$$

одговара просто периодична функција

$$\varphi(z) = \frac{\lambda \operatorname{tg} \lambda z (1 + \operatorname{tg}^2 \lambda z)}{1 + \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg}^2 \lambda z},$$

где λ означава имагинарну константу

$$\lambda = -\frac{2i}{3\sqrt{3}}.$$

Релацији облика

$$Y^3 + 3Y^2 + y^6 - 4 = 0$$

одговара двогубо периодична функција

$$y = \frac{\frac{1}{2g} \operatorname{sn}^2 z - \frac{g}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sn}' z}{\operatorname{sn} z},$$

где g означава реалну бројну константу

$$g = \frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}}.$$

Релацији облика

$$Y^3 - 3Y^2 - 2(y^2 - 1)^2 + 4 = 0$$

одговара двогубо периодична функција

$$y = \operatorname{sn} z\,(a \operatorname{sn}^2 z + b \operatorname{sn}' z + c),$$

где су a, b, c одређене бројне константе.

Међу релацијама (40) облика

$$Y^m - P(y) = 0,$$

где је $P(y)$ полином по y, има их једанаест којима одговарају униформне и двогубо периодичне функције $\varphi(z)$.[3]

Сваком од наведених случајева одговара по једна једначина облика (1) и (28), чији интеграли имају поменуту аритметичку особину.

6. Овде ће бити наведен, у истом реду идеја, и један тип алгебарских диференцијалних једначина другога реда, *чије су асимптотске вредности интеграла такође у вези са простим бројевима.*

Уочимо једначину

$$y'' + \varphi(z)\, y'^2 + f(x)\, y' = 0, \tag{41}$$

где је $\varphi(y)$ дата функција променљиве y, а $f(x)$ дата функција променљиве x. Сменом

$$y' = zY, \tag{42}$$

одакле је

$$y'' = Yz' + YY'z^2, \tag{43}$$

једначина (41) постаје

$$z' + (Y' + \varphi Y)\, z^2 + fz = 0. \tag{44}$$

Изаберимо Y тако да буде

$$Y' + \varphi Y = 0, \tag{45}$$

тј. тако да је

[3] В. расправу Briot et Bouqet, *Mémoire sur l'Intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques,* Journal de l'Ecole Polylechnique, 36. cahier, 1856. pp. 199–254.

(46) $$Y = e^{-\int \varphi(y)\,dy},$$

па се једначина (44) своди на

(47) $$z' + f(x)z = 0.$$

Она за општи интеграл има

(48) $$z = C'e^{-\int f(x)\,dx},$$

где је C' интеграциона константа.

Према обрасцима (42), (46), (47) и (48) општи интеграл једначине (41) је

(49) $$y = \varphi\left[C + C'\int_0^x e^{-\int f(x)\,dx}\right],$$

где $y = \varphi(t)$ означава инверзију интеграла

(50) $$\int e^{\int \varphi(y)\,dy}\,dy = t.$$

Уочимо специјалан случај, кад је:

1) инверзија $\varphi(t)$ периодична функција променљиве t;

2) функција $f(x)$ има облик

(51) $$f(x) = 1 - \frac{P_m'(x)}{P_m(x)},$$

где P_m означава полином $(m-1)$-ог степена

(52) $$P_m(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{m}.$$

Имениоци сабирака су чланови природног низа целих бројева који не премашују $m-1$.

Тада је

$$\int f(x)\,dx = x - \log P_m(x),$$

па је према томе

$$e^{-\int f(x)\,dx} = e^{-x}P_m(x).$$

Дакле, општи интеграл једначине (41) гласи

(53) $$y = \varphi\left[C + C'\int_0^x P_m(x)e^{-x}dx\right],$$

а асимптотска вредност $y(\infty)$ интеграла за $x = \infty$ је

(54) $$y(\infty) = \varphi(C + C'I_m),$$

где је

$$I_m = L_1 + L_2 + \ldots + L_m,$$
$$L_n = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \frac{(n-1)!}{n}.$$

Пошто је

за n = прост број $\quad \dfrac{(n-2)!}{n} = M - \dfrac{1}{n},$

за n = сложен број (осим 4) $\quad \dfrac{(n-1)!}{n} = N,$

за $n = 4 \quad \dfrac{(n-1)!}{n} = 2 - \dfrac{1}{2},$

(M и N су цели бројеви), то ће бити

$$y(\infty) = \varphi(C + C's_m - C'A),$$

где је A цео број, а s_m означава бројну константу

(55) $$s_m = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots$$

једнаку збиру реципрочних вредности природног низа простих бројева који не премашују $m - 1$.

Ако се узму у обзир интеграли y који одговарају вредности интеграционе константе

(56) $$C' = \omega,$$

где је ω елементарна периода функције $\varphi(t)$, биће

(57) $$y(\infty) = \varphi(C + \omega s_m),$$

из чега се изводи следећи закључак.

Алгебарска једначина другога реда (41), *кад се у њој алгебарске функције* f(x) *и* φ(y) *изаберу на наведени начин, има бескрајно много* *интеграла* у *који зависе од интеграционе константе* C *и чија се асимптотска вредност изражава помоћу природног низа простих бројева мањих од једног одређеног броја.*

Такав је, на пример, случај са једначином

$$(y'' + fy')(1 - y^2 + yy'^2) = 0,$$

кад је f рационална функција променљиве x облика (51). Тој једначини одговара

$$\varphi(y) = \frac{y}{1 - y^2}, \quad Y = \sqrt{1 - y^2}, \quad \varphi(t) = \sin t,$$

тако да је њен општи интеграл

$$y = \sin\left[C + C'\int_0^x e^{-x} P_m(x)dx\right].$$

Интеграли те једначине који одговарају вредности $C' = 2\pi$ константе C' имају наведену аритметичку особину: њихова асимптотска вредност је

$$y(\infty) = \sin(C + 2\pi s_m).^{**}$$

** У нешто краћем обиму ова Петровићева расправа објављена је и на француском језику *Propriété arithmetique des intégrales d'une classe d'équations différentielle* (Bulletin A, Académie royale de Serbie, No. 2, Belgrad 1935, pp. 73–79). Реферисано у FdM, B. 61, S. 1229–1330 (M. Müller), као и у Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete (даље у ознаци Zbl), B. 11, S. 348 (Haupt) (пр. Д. Т.),

ЈЕДНА ТЕОРЕМА О РИКАТИЈЕВОЈ ЈЕДНАЧИНИ*

1. Најопштија Рикатијева једначина

$$y' + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0 \tag{1}$$

где су $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ дате функције независне променљиве x, сменом

$$y = z - \frac{\varphi_2}{2\varphi_1}, \quad t = \int \varphi_1 dx \tag{2}$$

своди се на једначину облика

$$y' = y^2 + f(x). \tag{3}$$

Ми ћемо за једначину (3) доказати следећу теорему.

Датој интеграбилној једначини (3) може се придружити бесконачан низ функција од x

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \tag{4}$$

такав да свака једначина

$$y' = y^2 + (f + \lambda_k) \tag{5}$$

буде такође интеграбилна, и то без икакве додатне квадратуре.

У ту сврху посматрајмо бесконачни низ

$$X_0, X_1, X_2, \ldots \tag{6}$$

функција од x формираних на основу рекурентне формуле

$$X_n = X_{n-1} + \frac{3}{4}\left(\frac{X'_{n-1}}{X_{n-1}}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{X''_{n-1}}{X_{n-1}} \tag{7}$$

---

* Наслов оригинала *Théoréme sur l'équation de Riccati*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1935, t. IV, pp. 169–180.

за произвољно X_0. Ако се има у виду да је

$$(8)\qquad \frac{X''}{X} = \left(\frac{X'}{X}\right)' + \left(\frac{X'}{X}\right)^2$$

релација (7) може се представити у облику

$$(9)\qquad X_n = X_{n-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{d}{dx}\log X_{n-1}\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log X_{n-1}.$$

Помоћу тако дефинисаних функција X_n, формирајмо бесконачан низ функција (4), према рекурентној формули

$$(10)\qquad \lambda_n = X_n - X_{n-1}.$$

Ако се за X_0 узме функција $f(x)$ из једначине (3), та једначина ће имати поменуту особину. Да бисмо то показали, у једначини (3) извршимо смену

$$(11)\qquad y = \frac{d}{dx}\log\left(\int e^{\int y_1 dx}\sqrt{f}\,dx\right),$$

где је y_1 нова непозната функција. Та смена је еквивалентна трима узастопним сменама

$$(12)\qquad y = \frac{u'}{u},$$

$$(13)\qquad u = \int v\sqrt{f}\,dx,$$

$$(14)\qquad v = e^{\int y_1 dx}.$$

Прва смена (12) трансформише једначину (3) у

$$(15)\qquad u'' = fu$$

Друга смена (13) трансформише (15) у

$$(16)\qquad v'' = \varphi\, v,$$

где је

$$(17)\qquad \varphi = f + \frac{3}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{f''}{f}.$$

Наиме, када се (15) диференцира и потом u смени својом вредношћу

$$u = \frac{u''}{f}$$

изведеном из (15) и стављањем $u' = z$, једначина постаје

$$z'' - \frac{f'}{f} z' - fz = 0, \tag{18}$$

а ова једначина сменом

$$z = v\sqrt{f}$$

постаје (16).

Најзад, смена (14) претвара једначину (16) у

$$y_1' = y_1^2 + \varphi, \tag{19}$$

где је φ дато изразом (17).

Дакле, смена (11) претвара једначину (3) у (19).

Узмимо сада да је први члан низа (6) функција

$$X_0 = f.$$

На основу израза (17) за φ и једначине (7) види се да је

$$\varphi = X_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{X_0'}{X_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{X_0''}{X_0} = X_1, \tag{20}$$

тако да трансформисани израз дат једначином (19) постаје

$$y_1' = y_1^2 + X_1. \tag{21}$$

Дакле, y_1 се изражава преко y обрасцем (11), што даје

$$y_1 = y + \frac{d}{dx}\log\frac{y}{\sqrt{f}}. \tag{22}$$

Ако, полазећи од (21), извршимо смену

$$y_1 = \frac{d}{dx}\log\left(\int e^{\int y_2\,dx}\sqrt{X_1}\,dx\right), \tag{23}$$

где је y_2 нова непозната функција, једначина (21) ће се трансформисати у

$$y_2' = y_2^2 + X_2 \tag{24}$$

чији се интеграл изражава помоћу y_1 обрасцем

$$y_2 = y_1 + \frac{d}{dx} \log \frac{y_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{25}$$

Ако наставимо тако, доћи ћемо до бесконачног низа једначина

$$\begin{gathered} y_k' = y_k^2 + X_k \\ y_0 = y, \quad X_0 = f(x), \\ k = 0,1,2,\ldots \end{gathered} \tag{26}$$

које имају ову особину: *интеграл* y_k *у једначини* (26) *изражава се помоћу интеграла* y_{k-1} *из једначине*

$$y_{k-1}' = y_{k-1}^2 + X_{k-1} \tag{27}$$

релацијом

$$y_k = y_{k-1} + \frac{d}{dx} \log \frac{y_{k-1}}{\sqrt{X_{k-1}}}. \tag{28}$$

Дакле, ако се стави да је

$$\frac{3}{4}\left(\frac{X_n'}{X_n}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{X_n''}{X_n} = \mu_n, \tag{29}$$

или још

$$\mu_n = \frac{1}{4}\left[\frac{d}{dx}\log X_n\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log X_n \tag{30}$$

добиће се низ једначина

$$\begin{aligned} X_k &= X_{k-1} + \mu_{k-1}, \\ X_{k-1} &= X_{k-2} + \mu_{k-2}, \\ X_{k-2} &= X_{k-3} + \mu_{k-3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1 &= X_0 + \mu_0 = f + \mu_0 \end{aligned} \tag{31}$$

и ако се те једначине саберу члан по члан, добија се

$$X_k = f + \lambda_k, \tag{32}$$

где је

$$(33) \qquad \lambda_k = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{k-1}.$$

Дакле, функција λ_k из постављене теореме изражава се обрасцем

$$(34) \quad \lambda_k = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{X_0'}{X_0}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{X_{k-1}'}{X_{k-1}}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{X_0''}{X_0} + \ldots + \frac{X_{k-1}''}{X_{k-1}}\right],$$

или, пак, обрасцем

$$(35) \quad \lambda_k = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{d}{dx}\log X_0\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d}{dx}\log X_{k-1}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log(X_0 X_1 \ldots X_{k-1}),$$

где су функције X_k дефинисане рекурентном формулом

$$(36) \qquad X_k = X_{k-1} + \frac{3}{4}\left(\frac{X_{k-1}'}{X_{k-1}}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{X_{k-1}''}{X_{k-1}}.$$

Дакле, функције λ_k *низа* (4)*, придружене Рикатијевој једначини* (3)*, одређују се помоћу функције* $f(x)$ *алгебарским операцијама и квадратурама.*

Интеграл једначине

$$(37) \qquad y_k' = y_k^2 + X_k$$

израчунава се корак по корак помоћу низа израза

$$(38) \qquad \begin{aligned} y_1 &= y + \frac{d}{dx}\log\frac{y}{\sqrt{f}}, \\ y_2 &= y_1 + \frac{d}{dx}\log\frac{y_1}{\sqrt{X_1}}, \\ y_3 &= y_2 + \frac{d}{dx}\log\frac{y_2}{\sqrt{X_2}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

где је y интеграл једначине

$$(39) \qquad y' = y^2 + f(x).$$

Тај рачун, полазећи од y, захтева само алгебарске операције и диференцирања, што доказује изложену теорему.

1. *пример:* за једначину

$$(40) \qquad y' = y^2 + ax$$

налази се

$$\lambda_1 = \frac{3}{4x^2},$$

а како се (40) интегрише помоћу Беселових функција, исто ће важити и за једначину

$$y' = y^2 + ax + \frac{3}{4x^2}. \tag{41}$$

2. *пример:* за једначину

$$y' = y^2 + ax^m \tag{42}$$

налази се

$$\lambda_1 = \frac{3mx + 2m(m-1)}{4x^2}.$$

Дакле, једначина (42) се интегрише путем елементарних функција увек када број m има облик

$$m = \frac{-4k}{1 \mp 2k} \qquad (k \text{ је позитиван цео број})$$

па ће исто важити и за једначину

$$y' = y^2 + ax^m + \frac{3mx + 2m(m-1)}{4x^2}. \tag{43}$$

2. Претходна теорема се везује за следећи проблем.
Ако је дата интеграбилна Рикатијева једначина

$$y' = y^2 + f(x) \tag{44}$$

извести неограничен број других једначина које су такође интеграбилне.

Проблем допушта и друга решења, другачија од оног које је приказано. Изложићемо једно решење засновано на Дарбуовој теореми[1] о линеарним биномним једначинама другог реда. Нека је једначина

[1] G. Darboux: *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* II deo, 1899, str. 196.

(45) $$z'' = [\varphi(x) + a]z$$

која је интеграбилна за специјалну вредност константе a, за коју је

$$z = v(x)$$

партикуларни интеграл. Нека је даље

$$u = w(x, C_1, C_2)$$

општи интеграл једначине

(46) $$u'' = [\varphi(x) + b]u,$$

где је b константа различита од a. Дарбуова теорема се састоји у следећем.

Општи интеграл једначине

(47) $$y'' = \left[v\left(\frac{1}{v}\right)'' + b - a\right]y$$

је

(48) $$y = w' - w\frac{v'}{v}.$$

Та теорема омогућује да се свакој једначини (45), која је интеграбилна за све вредности a, придружи неограничен број линеарних биномних једначина другог реда које ће такође бити интеграбилне за све вредности a. Узастопне једначине ће се све више удаљавати од почетног облика и постајаће све сложеније. Ипак, постоје изузетни случајеви у којима се облик једначине задржава када се партикуларни интеграли $v(x)$ погодно изаберу тако да се помоћу њих може вршити прелазак са једне једначине на другу.

На тај начин, ако за почетну једначину узмемо

(49) $$z'' = az$$

она као партикуларни интеграл (за специјалну вредност $a = 0$) допушта функције

$$z = v(x) = x$$

које доводе до једначине (48) облика

(50) $$y'' = \left(\frac{1 \cdot 2}{x^2} + h\right)y \quad (h = b - a)$$

која је интеграбилна за сваку вредност h. На пример, за $h = 1$ њен општи интеграл гласи

$$y = C_1 e^x \left(1 - \frac{1}{x}\right) + C_2 e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

А једначина (51) за $h = 0$ као партикуларни интеграл има

$$y = v(x) = x^2,$$

што доводи до интеграбилне једначине

$$y'' = \left(\frac{2 \cdot 3}{x^2} + h\right) y$$

која за $h = 1$, на пример, као општи интеграл има

$$y = C_1 e^x \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) + C_2 e^{-x}\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right).$$

Ако се настави тако, долази се до интеграбилне једначине

$$y'' = \left[\frac{m(m-1)}{x^2} + h\right] y,$$

где је m било који позитиван цео број.

Та теорема се очигледно може применити на Рикатијеву једначину

$$y' = y^2 + [\varphi(x) + a] \tag{51}$$

која се сменом

$$y = \frac{z'}{z}$$

своди на једначину (45).

Ако се пође од неке интеграбилне једначине (51), може се извести бесконачан број других такође интеграбилних једначина обичном итерацијом горе наведеног поступка.**

** Реферисано у Zbl, B. 14, S. 113 (Rellich) и FdM, B. 61, S. 1227–1228 (W. Quade). Овим Петровићевим радом користили су се Д. С. Митриновић, *Неколико ставова о Riccati-евој диференцијалној једначини*, СКА, Глас, књ. CLXXXI, Београд 1939, стр. 169–236 и Иван Бандић, *On a Recurrent Linear Differential Equations of the Second Order*, Glasnik mat.-fiz i astr., Zagreb 1957, t. 12, 3, str. 181–187 (пр. Д. Т.).

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА СА ОГРАНИЧЕНИМ ИНТЕГРАЛИМА*

1. Постоји мноштво диференцијалних једначина првог реда чије се све интегралне криве налазе у некој области равни ограниченој двема кривама које се могу унапред одредити без претходне интеграције једначине.

То је, на пример, случај са свим једначинама које се могу писати у облику

$$F(x, y, y', Y) = 0, \tag{1}$$

где је:

1. – Y функција од x и y која је реална само за y које се налази између две одређене функције $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$;

2. – сваки корен једначине по z

$$F(x, y, y', z) = 0 \tag{2}$$

реалан за сваки систем реалних вредности x, y, y'.

Свака реална интегрална крива једначине (1) тада је у целости смештена у области равни садржаној између те две фиксне криве

$$y = \lambda_1(x) \quad \text{и} \quad y = \lambda_2(x).$$

Једноставан пример је дат једначином

$$y'^2 + y^2 + \varphi(x)y + \psi(x) = 0,$$

при чему су функције φ и ψ такве да за свако реално x имамо

$$\varphi^2 - 4\psi \geq 0.$$

Једначина се пише у облику

---

* Наслов оригинала *Équations différentielles du premier ordre á intégrales bornées,* La Revista de Ciencias, Lima (Peru), 1936, t. XXXVIII, 418, pp. 109–114.

$$y'^2 - Y^2 = 0,$$

где је $Y = \sqrt{(y-\lambda_1)(\lambda_2 - y)}$ и

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\left(\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\psi}\right),$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\psi}\right),$$

па су све реалне интегралне криве садржане између следеће две криве

$$y = \lambda_1 \quad \text{и} \quad y = \lambda_2 .$$

У овом раду испитиваћемо један други општи случај, који је аналоган претходном случају. То је случај диференцијалне једначине

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3}$$

где је F иредуцибилан полином по y и y', а *паран* по y'.

Са $F_1(x, y, y')$ означићемо скуп чланова из F који садрже само *парне* степене од y, а са $F_2(x, y, y')$ скуп чланова који садрже само *непарне* степене од y. Нека је онда:

1) $f_{i,j}(x)$коефицијент од y'^j у полиному по y' који множи y^j у F_1;

2) $\varphi_{i,j}(x)$ коефицијент од y'^i у полиному по y' који множи y^i у F_2.

Показаћемо да:

увек када су, за реално x, *функције* $\varphi_{i,j}$ *истог знака и вредности разломка*

$$-\frac{f_{i,j}(x)}{\varphi_{i,j}(x)} \qquad \begin{array}{l} i = 0, 2, 4, 6, \dots \\ j = 0, 2, 4, 6, \dots \end{array} \tag{4}$$

остају садржане између вредности двеју одређених функција $\lambda_1(\mathrm{x})$ *и* $\lambda_2(\mathrm{x})$, *све реалне интегралне криве из (3) се у целости налазе у области равни која је ограничена двема кривама*

$$y = \lambda_1(x), \qquad y = \lambda_2(x). \tag{5}$$

Наиме, када се парни и непарни степени од y групишу, једначина (3) добија облик

$$y = \frac{p_0 + p_2 y^2 + p_4 y^4 + \dots}{q_0 + q_2 y^2 + q_4 y^4 + \dots}, \tag{6}$$

где су p_i и q_i *парни* полиноми по y'

$$(7)\qquad \begin{aligned} -p_1 &= f_{1,0}(x)+f_{1,2}(x)y'^2+f_{1,4}(x)y'^4+\dots \\ q_1 &= \varphi_{1,0}(x)+\varphi_{1,2}(x)y'^2+\varphi_{1,4}(x)y'^4+\dots \end{aligned}$$

Како q_i има исти знак за свако реално x, други члан из (6) биће садржан између најмање и највеће вредности разломка

$$-\frac{p_i}{q_i} \qquad (i=0,2,4,\dots).$$

С друге стране, из истог разлога и сама вредност разломка $\frac{p_i}{q_i}$ биће садржана између најмање и највеће вредности разломка (4), а самим тим и између две вредности $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$, што доказује тврдњу.

Такав је, примера ради, случај са једначином

$$f_3y^3+f_2y^2+f_1y+f_0=0,$$

где су f_1 и f_3 парни полиноми по y' са коефицијентима који су функције од x, истог знака; f_2 и f_4 су такође парни полиноми по y', али са коефицијентима који су функције x било ког знака.

2. Претпоставимо сада да је полином F *паран* истовремено и по y' и по y. Тада ће постојати цео број $p \geq 1$ такав да ће F бити полином по $u=y^{2p}$ *непарног* степена по u, што омогућује да се једначина (3) пише у облику

$$(8)\qquad u=\frac{r_0+r_2u^2+r_4u^4+\dots}{s_0+s_2u^2+s_4u^4+\dots}$$

где су r_i и s_i парни полиноми по y' који се поклапају са претходним полиномима p_i и q_i.

Означимо са $\xi_{i,j}$ коефицијент уз y'^j у r_i, а са $\eta_{i,j}(x)$ коефицијент уз y'^j у s_i. Добићемо следећи резултат.

Увек када су, за реално x, *све функције* $\xi_{i,j}(x)$ *и* $\eta_{i,j}(x)$ *позитивне и разломци*

$$\frac{\xi_{i,j}(x)}{\eta_{i,j}(x)} \qquad \begin{aligned} i&=0,2,4,\dots \\ j&=0,2,4,\dots \end{aligned}$$

остају садржани између две функције $\lambda_1(x)$ *и* $\lambda_2(x)$, *свака реална интегрална крива* (3) *се у целости налази у области равни ограничене тим двема кривама*

$$(9)\qquad y=\sqrt[2p]{\lambda_1(x)} \quad \text{и} \quad y=\sqrt[2p]{\lambda_2(x)}.$$

Такав је, на пример, случај са једначином

$$f_3 y^6 + f_2 y^4 + f_1 y^2 + f_0 = 0,$$

где су f_1, f_2, f_3, f_4 парни полиноми по y', чији су коефицијенти позитивне функције по x.

У случају да једначина (3) експлицитно не садржи x, при чему су претходни услови испуњени, све реалне интегралне криве ће се налазити у области ограниченој двема одређеним правама паралелним са y осом.

3. Испитајмо такође, као други општи случај, једначину првог реда и првог степена

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{10}$$

где је P *непарни* полином по y, а Q *парни* полином по y.

Једначина се може написати у облику

$$\frac{y'}{y} = \frac{s_0 + s_2 y^2 + s_4 y^4 + \ldots}{q_0 + q_2 y^2 + q_4 y^4 + \ldots},$$

где су s_i и q_i дате функције од x.

Као и малочас, доказује се да, када су за реално x функције q_i истог знака и када вредности разломка

$$\frac{s_i}{q_i} \quad (i = 0, 2, 4, \ldots)$$

стално остају садржане између две функције $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$, тада ће вредност $\dfrac{y'}{y}$ такође остати између тих граница. Према томе,

свака реална интегрална крива (10) *у целости се налази у области равни смештеној између две криве*

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} \lambda_1(x)\,dx} \quad \text{и} \quad y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} \lambda_2(x)\,dx},$$

где (x_0, y_0) *означава неку тачку посматране интегралне криве.*

Такав је, на пример, случај са једначином

$$y' = \frac{f_3 y^3 + f_4 y}{f_1 y^2 + f_2}$$

где су f_3 и f_4 функције од x истог знака за реално x, а f_3 *и* f_1 су функције од x било ког знака, при чему су разломци

$$\frac{f_3}{f_1} \quad \text{и} \quad \frac{f_4}{f_2}$$

ограничене функције.**

** Реферисано у Zbl, B. 16, S. 112 (W. Stepanoff) и FdM, B. 62, S. 1261–1262 (Max Müller) (пр. Д. Т.).

АРИТМЕТИЧКЕ НАПОМЕНЕ О ЈЕДНОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ ПРВОГ РЕДА*

1. Предмет овог рада је диференцијална једначина првог реда

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где је f полином по x, y чији су коефицијенти цели бројеви (позитивни или негативни).

Посматрајмо тачку M_k на y-оси, чија је ордината цео број k (позитиван или негативан).

Интеграл у *из* (1) *који пролази кроз тачку* $\mathrm{M_k}$ *може се развити у конвергентни ред у близини* $\mathrm{x} = 0$:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{2}$$

где је коефицијент уз $\mathrm{x^n}$ *целобројни умножак коефицијента уз* $\mathrm{x^n}$ *у Тејлоровом развоју функције* $\mathrm{e^x}$*; однос између ова два коефицијента је цео број који по апсолутној вредности не расте брже од* $\mathrm{n^n}$.

Наиме, пошто је други члан из (1) холоморф у близини $x = 0$, $y = k$, интеграл y пролази кроз тачку M_k и може се развити у ред (2), где је $a_0 = k$ и

$$a_n = \frac{1}{n!}\left[f_{n-1}\right], \tag{3}$$

при чему су f_i чланови бесконачног низа функција од x, y

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \tag{4}$$

које су дефинисане рекурентном релацијом

---

* Наслов оригинала *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre*, Union matemática Argentina, Buenos Aires, 1938, No. 3, pp. 17–21; достављено редакцији часописа 25. децембра 1937.

$$(5) \qquad f_i = \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x} + f\frac{\partial y}{\partial f_{i-1}}$$

са

$$f_0 = f(x, y) \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

где, уопште узев, $[\varphi(x, y)]$ означава број који се добија када се у $\varphi(x, y)$ стави $x = 0$, $y = k$.

Тако дефинисане функције (4) су полиноми по *x, y* чији су коефицијенти цели бројеви. Бројеви (f_i) су цели, такви да важи

$$(6) \qquad A_n = \mu_n.$$

С друге стране, како је полупречник конвергенције реда (2) различит од нуле, то је lim. sup. од $\sqrt[n]{|a_n|}$, за n тежи бесконачности, коначан, што показује да $\sqrt[n]{|\mu_n|}$ не расте брже од $\sqrt[n]{n!}$, тј. од n. Из тога следи да апсолутна вредност од μ_n не расте брже од n^n, што је и требало показати.

Израз (6) истиче следећу чињеницу.

Тејлоров коефицијенш $\mathrm{a_n}$ *иншеграла* у *сведен на најйросшији облик је рационалан број чији именилац нема као делилац ниједан йросш број већи од* n.

Тејлоров ред, чији су један или више коефицијената ирационални или рационални бројеви чији је именилац дељив простим бројем већим од ранга коефицијента, не може ни за једну диференцијалну једначину (1) представљати њену интегралну криву која пролази кроз тачку M_k.

Може се такође приметити да *у случају да је* у *цела функција од* x, цео број μ_n или не расте, или расте спорије од n^n. Наиме, у том случају $\sqrt[n]{|a_n|}$ тежи нули када x тежи бесконачности.

2. Посматрајмо случај у коме је интеграл *у алгебарска* функција од x. Цео број μ_n тада има ову аритметичку особину.

Посшоји фиксирани цео број λ *йридружен једначини* (1), *шакав да је цео број* μ_n *дељив йроизводом свих целих бројева мањих од* n *и који се не йодударају са сшейеном ниједноī йросшоī делиоца од* λ.

Да бисмо то показали, подсетимо да, како је y алгебарска функција са самерљивим коефицијентима a_n, постоји целобројна константа (Ајзенштајнов цео број) таква да је производ

$$(7) \qquad a_n\lambda^n = \frac{\mu_n\lambda^n}{n!}$$

цео број за свако $n = 1, 2, 3...$

Дакле, λ^n није никада дељиво са $n!$ јер тај факторијел увек има бар један фактор који је прост број и који се ту јавља само једанпут, док би се у λ^n појавио n пута. Међутим, λ^n може да има заједничке делиоце са n. Како разломак (7) треба да се сведе на цео број, μ_n треба да буде дељиво производом свих целих бројева који се као чиниоци налазе у $n!$, чиме би се из њих скратили ти заједнички делиоци, што доказује претходну тврдњу.

Ајзенштајнова теорема доводи такође и до следећег закључка.

Коефицијент уз x^n *интеграла* у *за* n = 1, 2, 3, ... *је целобројни умножак коефицијента уз* x^n *у развоју функције*

$$\frac{x}{\alpha - x},$$

при чему је α *цео, погодно одређен број; однос између таква два коефицијента је цео број који по апсолутној вредности не расте брже од* n*-тог степена неког фиксног броја.*

Наиме, пошто је производ $a_n \lambda^n$ цео број h_n , имамо

$$a_n = \frac{\lambda^n}{h_n},$$

при чему је h_n коефицијент уз x^n функције $\frac{x}{\lambda - x}$. С друге стране, како је полупречник конвергенције од y у околини $x = 0$ различит од нуле, израз

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\lambda}\sqrt[n]{|h_n|}$$

а према томе и lim. sup. од $\sqrt[n]{|h_n|}$ је коначан, што показује да h_n по апсолутној вредности не расте брже него n-ти степен неке константе.

Из тога се, према теореми коју сам доказао у једном од претходних радова,[1] закључује, да *интеграл* у *припада класи функција која се недвосмислено може одредити само једном нумеричком вредношћу неког одређеног интеграла придруженог функцији, при чему је вредност тог интеграла апсолутан број.*

3. Посматрајмо сада реципрочну вредност $\frac{1}{y}$ интеграла y једначине (1) који пролази кроз тачку M_k. Стављајући

[1] M. Petrovitch: *Théorème sur les fonctions algébriques à coefficients tayloriens commensurables*, Revue mathématique de l'Union interbalcanique, t. I. sv. 1, 1936.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$
$$\frac{1}{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

добија се познати низ релација које одређују b_n помоћу a_n.

За тачку M_1 коефицијент a_0 једнак је 1, те се добија

$$(8) \quad \begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= -a_1 \\ b_2 &= -a_2 + a_1^2 \\ b_3 &= -a_3 + 2a_2a_1 - a_1^3 \\ b_4 &= -a_4 + 2a_3a_1 - a_2^2 - 3a_2a_1^2 - a_1^4 \\ b_5 &= -a_5 + 2a_4a_1 - 2a_3a_2 - 3a_3a_1^2 - 3a_2^2a_1 + 4a_2a_1^3 - a_1^5, \end{aligned}$$

где постоје следећи закони формирања:

1) b_n се састоји од свих чланова реда n који се могу формирати са a_i закључно са a_n;

2) ти чиниоци су позитивни или негативни, према томе да ли је број њихових чинилаца паран или непаран;

3) коефицијент сваког члана једнак је полиномијалном коефицијенту који би тај члан имао, с обзиром на број чинилаца које садржи и на њихове експоненте.

За било коју тачку M_k случај се своди на случај са тачком M_1 тако што се a_n замени са $\frac{a_n}{k}$ и што се добијени резултат подели са $a_0 = k$. Дакле,

Како је први коефицијент b_0 једнак $\frac{1}{k}$, коефицијент b_n се добија тако што се формира исти израз за тај коефицијент као у случају са тачком M_1, затим се доведе на n-ти степен помоћу чиниоца $a_0 = k$, а потом се подели са $a_0^{n+1} = k^{n+1}$. На пример, имаћемо

$$b_5 = \frac{1}{K^6}\left(-a_5k^4 + 2a_4a_1k^3 + 2a_3a_2k^3 - 3a_3a_1^2k^2 - 3a_2^2a_1k^2 + 4a_2a_1^3k - a_1^5\right).$$

Ако се овде a_1 замени својим изразом (6), добија се коефицијент b_n у облику правог разломка, чији је именилац производ од k^{n+1} и различитих факторијела

$$1!, 2!, 3!, \dots, n!$$

чији су експоненти цели бројеви који не прелазе n. Из тога следи следеће.

Коефицијенӣ уз x^n *реципрочне вредносӣи* $\frac{1}{y}$, *инӣеграла* у *из* (1), *који ӣролази кроз ӣачку* M_k, *када се сведе на најӣросӣији облик, јесӣе рационалан број чији именилац нема за делилац ниједан ӣросӣ број већи од* n *који се не ӣоклаӣа са делиоцем* k.

Такође се види да је именилац сваког члана који чини b_n, пре свођења разломка на најпростији израз, производ степена различитих факторијела

$$i!,j!,h!,\dots$$

целих бројева $i,j,h,\dots$ који су једнаки индексима од a_k од којих потиче тај члан, при чему је експонент сваког од тих факторијела једнак експоненту одговарајућег a_k. Поред тога,

1) како се степен факторијела рачуна као чинилац онолико пута колико то показује његов експонент, број тих чинилаца једнак је n;

2) збир $i+j+k+\dots$ целих бројева чији се факторијели налазе у том имениоцу такође је једнак n.

Из тога следи да факторијел $m!$ не може да се појави у имениоцу од b_n више пута него што има јединица у читавом делу броја $\frac{n}{m}$. То омогућује да се одреди lim. sup. броју који означава колико пута прост број може да се појави као делилац у том имениоцу.

Завршићу са напоменом да је Рикатијева једначина (са свим специјалним облицима) једина једначина (1) која се сменом $y=\frac{1}{z}$ трансформише у једначину (1). За интеграл y једне такве једначине, који пролази кроз тачку M_1, коефицијент уз x^n не само развоја самог интеграла, него и од вредности $\frac{1}{y}$, јесте рационалан број чији именилац, када се сведе на најпростији израз, нема за делилац ниједан прост број већи од n; његов бројилац је цео број који не расте брже од n^n. Из тога се такође могу извести закључци аналогни претходнима, који важе за случај алгебарских интеграла једне такве диференцијалне једначине.**

** Реферисано у Zbl, B. 22, S. 22 (Giovanni Sansone) (пр. Д. Т.).

АРИТМЕТИЧКЕ ОСОБИНЕ АЛГЕБАРСКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА*

Неке од аналитичких чињеница везаних за алгебарске диференцијалне једначине имају особине чисто аритметичке природе. Диференцијална једначина, чија структура и чији коефицијенти не откривају ниједну чињеницу те врсте, може експлицитно да их садржи, али тако да се те аритметичке особине појављују само у интегралу једначине.

Веза између аналитичких и аритметичких чињеница је тема која би и сама могла да буде предмет занимљивог поглавља у теорији диференцијалних једначина. То је сувише широка тема да би се у току само једног предавања о њој могао дати систематичан преглед. Мој циљ је ужи, сагласан времену којим располажемо. Посебно бих желео да вам говорим о неким *особинама интеграла алгебарских диференцијалних једначина у којима су значајни прости бројеви.*

С тим у вези, назначио бих неке особине Тејлорових коефицијената интеграла, случајеве у којима се *прости* бројеви појављују у вредности коју интеграл узима за *целе* вредности независне променљиве, случајеве у којима се прости бројеви појављују као једине реалне нуле или као бесконачне вредности интеграла или, пак, случајеве у којима се асимптотска вредност интеграла изражава помоћу простих бројева итд.

I. *Посматрајмо најпре Брио-Букеове једначине*

$$f(y, y') = 0, \tag{1}$$

где је f полином по y и y'. Интеграл који за $x = 0$ узима вредност $y = 0$ добија се као инверзија абеловског интеграла

---

* Наслов оригинала *Particularités d'ordre arithmétique rattachées aux équations différentielles algébriques*, Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, Bucuresti, 1938, t. 40,1–2, pp. 1–12.

(2)
$$x = \int_0^y Y dy,$$

где су y и Y везани алгебарском једначином

(3)
$$f\left(y, \frac{1}{Y}\right) = 0.$$

Посматрајмо тада случај у коме су:

1) коефицијенти полинома f цели бројеви;

2) функција Y дефинисана релацијом (3) је холоморфна у околини $y = 0$, при чему она за $y = 0$ узима вредност која је различита од нуле и једнака неком самерљивом (рационалном) броју.

Доказао сам да се под тим условима:
променљива x *може развити у ред*

(4)
$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots,$$

где је коефицијент b_n *једнак коефицијенту уз* y^n *развоја експоненцијалне функције*

(5)
$$\frac{y}{k} e^{\frac{y}{k}}$$

(при чему је k *погодно изабран фиксиран цео број), помноженом чиниоцем који је цео број кад год је* n *сложен број; ако је тај чинилац разломљен број, то значи да је* n *прост број.*

II. *Посматрајмо сада једначину*

(6)
$$y' = f(x, y),$$

где је f полином по x, y чији су коефицијенти цели бројеви. Интеграл y који за $x = 0$ узима вредност једнаку целом броју, може се у околини $x = 0$ развити у ред

(7)
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Лако се доказује да је коефицијент a_n самерљив број који се одликује следећом особином: *сваки прост број, који дели именилац* a_n, *мањи је или једнак* n.

Довољно је да именилац само једног коефицијента a_n буде ирационалан број или, пак, да му је делилац прост број већи од n, па да можемо тврдити да посматрани ред (7) не задовољава ниједну једначину (6).

Пропозиција се може применити на диференцијалне једначине било ког реда p

$$(8) \qquad y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}),$$

где је f полином по промењивима које садржи, са коефицијентима који су једнаки целим бројевима (са очевидним условима за почетне вредности $y, y', y'', \dots, y^{(p-1)}$).

III. *У општем случају алгебарске диференцијалне једначине*

$$(9) \qquad F(x, y, y', \dots, y^{(p)}) = 0,$$

где се очигледно увек може претпоставити да је F полином по промењивима које садржи, пропозиције нису тако једноставне, те је неопходно спровести суптилнија истраживања. Суптилном и дубоком анализом Хурвиц је уочио општу особину аритметичке природе коефицијената реда (7) са самерљивим коефицијентима који задовољавају једначину (9).

Гомез Тексира се први (1887) бавио проблемима те врсте. Он је веровао да о тим проблемима може исказати просту и општу пропозицију. Тврдња се састојала у томе да ред (7) неће задовољити ниједну диференцијалну једначину (9) када су делиоци именилаца коефицијената

$$(10) \qquad a_{p+1}, a_{p+2}, a_{p+3}, \dots$$

(ма колико велико било p) прости бројеви већи од $p+1, p+2, p+3, \dots$

Хурвиц је открио (1889) нетачност теореме Гомез Тексире и то је показао на примеру реда

$$(11) \qquad y = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}\right)$$

који задовољава просту алгебарску диференцијалну једначину првог реда, а да он при том не испуњава услове теореме.

Хурвицова теорема, која замењује теорему Гомез Тексире, сложенија је и може се изразити у следећем облику:

Увек када неки ред (7) *задовољава неку диференцијалну једначину* (9), *постоји цео фиксиран број* λ *и низ целих бројева*

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$$

такви̅х да, ако се са $\mathrm{P_n(z)}$ *означи ӣолином сӣеӣена* n

$$(12) \qquad P_n(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_n z^n$$

сви прости бројеви који деле имениоце од

$$(13) \qquad a_\lambda, a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2} \ldots$$

налазе се међу делиоцима целих бројева различиӣих од нуле

$$(14) \qquad P_n(\lambda),\ P_n(\lambda)\cdot P_n(\lambda+1),\ P_n(\lambda)\cdot P_n(\lambda+1)\cdot P_n(\lambda+2), \ldots$$

Теорема истиче хипертрансцендентни карактер мноштва функција представљених Тејлоровим редовима. Хурвиц као пример наводи функцију y представљену редом

$$(15) \qquad y = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{(n^n)!},$$

која не задовољава ниједну алгебарску диференцијалну једначину.

Могло би да буде занимљиво изразити те чињенице језиком савремених теорија. Ако се са p_n означи највећи прост број који дели именилац t_n од a_n, Хурвицова теорема, допуњена скоријом теоремом г. *Pôly*-е, изражава се у облику

$$(16) \qquad \log p_n = 0(\log n),$$

$$(17) \qquad \log t_n = 0\left[n(\log n)^2\right].$$

Једначина (16), коју је дао Хурвиц говори да *највећи ӣросӣ број у имениоцу од* $\mathrm{a_n}$ *не расӣе брже од некоӣ сӣеӣена* n.

Једначина (17), која изражава теорему г. Поље, даје ограничење за ред величине имениоца од a_n. Из тога се закључује да, на пример, ред

$$(18) \qquad y = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2} x^n,$$

где је q рационалан разломак мањи од 1, не задовољава ниједну алгебарску диференцијалну једначину.

Ако се повежу са резултатима до којих сам дошао у погледу редова (7) чије парцијалне суме

$$(19) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

имају све реалне нуле, једначине (16) и (17) доводе до тога да један такав ред (7) такође не задовољава ниједну алгебарску диференцијалну једначину.

Том кругу идеја припада добро позната теорема, која до сада још није у потпуности доказана (*Чебишевљева* теорема). Она се односи на случај у коме се интеграл изражава коначним члановима, тј. помоћу алгебарских, експоненцијалних и логаритамских функција. Самерљиви коефицијент a_n развоја интеграла одликује се тада следећом аритметичком особином: највећи прост број који дели именилац a_n и, подељен са n, тежи коначној граници када n бесконачно расте.

IV. Позабавимо се сада вредностима које интеграл узима за *целе* вредности независне променљиве.

Посматрајмо функције

$$y = \Phi(x) \tag{20}$$

које, када је x цео позитиван број m, узимају рационалну вредност $\Phi(m)$. Нека је $\frac{p}{q}$ та вредност сведена на најпростији облик, при чему су p и q цели бројеви. Означићемо:

1) са $\lambda(x)$ сваку функцију $\Phi(x)$ такву да $\Phi(m)$ узима *целу* вредност увек када је m *прост* број, а *разломљену* вредност када је m *сложен* број;

2) са $\mu(x)$ сваку функцију $\Phi(x)$ такву да $\Phi(m)$ узима *целу* вредност када је x *сложен* број, а *разломљену* вредност када је m *прост* број.

Тако је, на пример, функција

$$\Phi(x) = \frac{1+\Gamma(x)}{x} \tag{21}$$

једна функција $\lambda(x)$, а функција

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(x)}{x} \tag{22}$$

функција $\mu(x)$ (за $x > 4$).

Све до сада познате функције $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ су хипертрансцендентне, тј. не задовољавају ниједну алгебарску диференцијалну једначину. Међутим, занимљиво је приметити да постоје функције које за x мање од произвољно изабраног броја M задовољавају веома просте алгебарске диференцијалне једначине, чак и линеарне једначине првог реда. Такав је, на пример, случај са елементарном функцијом

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{\alpha x} - 1\right) \qquad \text{за} \quad x < 341, \tag{23}$$

где је α константа

$$\alpha = \ln 2 = 0,693147\ldots, \tag{24}$$

та функција задовољава линеарну једначину првог реда

$$xy' + (1 - \alpha x)y - \alpha = 0. \tag{25}$$

Посматрајмо, даље, функцију

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{\alpha x} - 1\right) + \frac{r}{2\pi} R(x) \sin 2\pi x, \tag{26}$$

где је r произвољно изабран рационалан број и где $R(x)$ означава рационалну функцију

$$R(x) = \frac{1}{x - c_1} + \frac{1}{x - c_2} + \ldots + \frac{1}{x - c_n} \tag{27}$$

при чему су c_n цели позитивни бројеви изабрани на следећи начин: идентички је

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{\alpha x} - 1\right) = \frac{2^{x-1} - 1}{x} \tag{28}$$

и према Фермаовој теореми бројилац је дељив са $x = m$ увек када је m прост број, али постоје такође и сложени бројеви x који имају исту особину; сложене бројеве те врсте означићемо са c_k. Ти бројеви су ретки и разређени; најмањи од њих је

$$c_1 = 341 = 11 \cdot 31.$$

На конгресу популарне математике (Париз, јул 1937) г. Пол Пуле представио је табелу која даје скуп бројева c_k садржаних између 0 и 100,000.000. По тој табели

између	0	и	1.000	има	3	броја	c_k
	0	и	10.000		22		
	0	и	100.000		79		
	0	и	1,000.000		247		
	0	и	10,000.000		750		
	0	и	100,000.000		2037		

Пошто су цели бројеви c_k тако дефинисани, нека су

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m,$$

бројеви који не прелазе дато целобројно M. *Одговарајућа функција* (26) *узеће вредност једнаку целом броју за свако* X *које је прост број; функција ће узети разломљену вредност за сваки сложени број* x *који не прелази* M.

Међутим, та функција (26) задовољава диференцијалну једначину другог реда облика

$$(29) \qquad Py''^2 + Qy'' + S = 0,$$

где су P, Q, S полиноми по y и y', са коефицијентима који су полиноми по x, чији су коефицијенти цели бројеви. P је другог степена по y и *по* y', Q је трећег, а S четвртог степена по тим променљивима.

У случају када је $M \leq 341$, други члан функције (26) нестаје, y се своди на функцију (23) и задовољава линеарну диференцијалну једначину првог реда (25).

Постоје, дакле, функције од x *које задовољавају алгебарску диференцијалну једначину првог или другог реда и које узимају целу вредност када је* x *прост број, а разломљену вредност када је* x *сложен број који не прелази дати цео број.*

V. Функције разматране у претходном параграфу налазе примену у следећем проблему.

Постоји бесконачно много функција

$$y = \theta(x),$$

униформних у читавој равни, реалних и холоморфних за сваку реалну и позитивну вредност x, које за нулу имају сваки *прост* број а различите су од нуле за сваки *сложени* број.

Тако, постоје реалне функције $f(t)$ такве да оба интеграла

$$(30) \qquad U(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\cos xt \cdot dt, \qquad V(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\sin xt \cdot dt$$

буду функција $\theta(x)$.

У једном саопштењу Пољској академији наука у Кракову назначио сам општи начин формирања таквих функција $f(t)$, где је показано да су функције $U(x)$ и $V(x)$ *целе* функције од x.

Очевидно је, уосталом, да *је свака цела функција* $\theta(x)$ *ранга већег од нуле.* То проистиче из чињенице да збир S реципрочних вредности модула нула функције дивергира. На основу тога, о функцијама $\theta(x)$, које се могу представити интегралима (30), може се тврдити да *су све оне ранīа јеgан.* Наиме, модул Тејлоровог коефицијента a_n једне такве функције стално остаје мањи од израза

$$\frac{\alpha\beta^n}{n!}$$

(где су α и β коначне и фиксиране константе), а збир S дивергира.

Како ниједна до сада позната функција $\theta(x)$ не задовољава алгебарску диференцијалну једначину, све оне су хипертрансцендентне функције. Ипак, постоје ли такве функције које, имајући поменуту карактеристичну аритметичку особину функција $\theta(x)$ *за* x *које не ӣрелази gаӣи цео ӣозиӣиван број М*, задовољавају ту једначину?

Оgīовор је ӣоӣврgан. Претходне функције $\lambda(x)$ дају могућност за формирање алгебарских диференцијалних једначина чији интеграли могу да буду такве функције $\theta(x)$. Ако се, на пример, пође од једначине првог реда

$$\left(\frac{y'}{\lambda'}\right)^2 + y^2 = 1, \tag{31}$$

где је λ једна од претходних функција $\lambda(x)$ и, посебно, једна од функција (23) или (26) (без фактора 2π), елиминацијом 2^x и $\sin 2\pi x$ из (31) и једначина које се добијају двама узастопним изводима, добија се алгебарска једначина трећег реда коју ће задовољавати посматрана функција $\theta(x)$. За $x \leq 341$ једначина се своди на једначину другог реда.

Међутим, функција $\theta(x)$ у том примеру, поред простих бројева који не прелазе M, имају бесконачно много других реалних позитивних нула. Постоје ли функције $\theta(x)$ те врсте које задовољавају алгебарску диференцијалну једначину и *имају низ ӣросӣих бројева који не ӣрелазе* М *као јеgине реалне нуле?*

Оgīовор је оӣеӣ ӣоӣврgан. На пример, функција

$$y = 2 - \cos 2\pi x - \cos\lambda(x) \tag{32}$$

је таква функција $\theta(x)$ и та функција задовољава алгебарску једначину четвртог реда.

VI. Асимптотска вредност интеграла такође може да буде у блиској вези са простим бројевима.

Тако постоје класе алгебарских диференцијалних једначина било ког реда, чија се асимптотска вредност општег или партикуларног интеграла *изражава йомоћу йросших бројева који не йрелазе фиксиран број* M.

Таква је, на пример, једначина другог реда

$$y'' = \varphi(y)y'^2 + f(x)y', \tag{33}$$

у којој је:

1) $f(x)$ рационална функција

$$f(x) = 1 - \frac{P'}{P}, \tag{34}$$

где P означава полином степена $M - 1$

$$P(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^{M-1}}{M}, \tag{35}$$

где су имениоци степена x чланови природног низа бројева који не прелазе M;

2) функција $\varphi(y)$ је логаритамски извод алгебарске функције Y од y, таква да инверзија

$$y = \psi(t)$$

абеловског интеграла

$$t = \int_0^y \frac{dy}{Y} \tag{36}$$

буде периодична функција од t.

Једначина (33) допушта бесконачан број интеграла који варирају са константом интеграције C и *чија је асимйшошска вредносш за* $x = \infty$

$$y(\infty) = \psi(C + \omega S), \tag{37}$$

їде је ω *елеменшарна йериода функције* $\psi(t)$ *и*

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots, \tag{38}$$

їде се сабирање врши йреко свих йросших бројева који не йрелазе M (*ако се изузму* 1 *и* 2).

Најпростија диференцијална једначина те врсте је

$$(1 - y^2)y'' + 2yy'^2 + f(x)(1 - y^2)y' = 0 \tag{39}$$

која има бесконачан број интеграла облика

(40) $$y = \sin\left[C + 2\pi\int_0^x e^{-x}P(x)dx\right]$$

чија је асимптотска вредност

(41) $$y(\infty) = \sin(C + 2\pi S).$$

Постоје такође класе диференцијалних алгебарских једначина било ког реда које садрже промењљиви параметар a и *чија ће се асимптотска вредност* $y(\infty)$ *интеграла поклапати са почетном вредношћу* $y(0)$ *или ће се од ње разликовати према томе да ли је* $a+1$ *прост или сложен број.*

Навешћу само најпростију једначину те врсте

(42) $$y'' + (x-a)y' + be^{-x}y - \frac{xy'^2}{y} = 0,$$

где је

(43) $$b = \frac{2a\pi i}{a+1}.$$

Једначина има бесконачан број интеграла који зависе од константе интеграције C и имају облик

(44) $$y = Ce^{\frac{2\pi i}{a+1}\int_0^x e^{-x}(1+x^a)dx},$$

а асимптотска вредност сваког интеграла поклапаће се са почетном вредношћу

$$y(0) = C$$

увек када је $a+1$ прост број, а од ње ће се разликовати увек када је $a+1$ сложен број.

VII. Различите геометријске интерпретације Вилсонове аритметичке теореме доводе до алгебарских диференцијалних једначина, чији су различити елементи интегралне криве у уској вези са простим бројевима.

Навешћу као пример само случај линеарне једначине првог реда

(45) $$Ay' + By + H = 0,$$

где су A, B, H функције од x

$$(46) \qquad A = xe^x, \quad B = \frac{d}{dx}(xe^x), \quad H = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1}\right),$$

где су α и β $(\alpha < \beta)$ два цела позитивна броја већа од 4. Крива дефинисана партикуларним интегралом

$$(47) \qquad y = \frac{e^{-x}}{x}\int_0^x \frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1}\,dx$$

пролази кроз координатни почетак, десно од Oy-осе има позитивни максимум, а Ox-оса јој је асимптота. Укупна површина S, десно од Oy-осе има следећу аритметичку особину.

Увек када је ѿа ӣовршина разломљен број, њен децимални део је доӣуна до јединице децималноī дела збира рециӣрочних вредносѿи ӣросѿих бројева садржаних између α *и* β.

Поред тога, децимални део збира инверзија простих бројева садржаних између дата два цела броја α и β $(4 < \alpha < \beta)$ у потпуности је једнак допуни до једнице децималног дела површине S.

VIII. Аритметичка особина, коју ћемо назначити у овом параграфу, везана је за општу диференцијалну једначину првог реда

$$(48) \qquad y' = f(x, y).$$

Формирајмо функцију

$$(49) \qquad \frac{f(x, u + xu') - 2u'}{x} = \varphi(x, u, y')$$

и помоћу ње низ функција

$$(50) \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

трију промењљивих x, u, u', дефинисаних рекурентним законом

$$(51) \qquad \varphi_n = \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial u}u' + \varphi\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial u'}$$

са

$$(52) \qquad \varphi_0 = \varphi(x, u, u').$$

Посматрајмо низ бројева

$$(53) \qquad A_1, A_2, A_3, \ldots$$

где A_n означава број који се добије ако се у φ_{n-2} стави

$$(54) \qquad x = 0 \quad u = 0 \quad u' = \frac{1}{2} f(0,0).$$

Нека је

$$(55) \qquad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

интеграл од (48) који за $x = 0$ узима вредност $y = 0$. Између два низа бројева

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$
$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

постоји однос аритметичке природе, који се изражава следећом пропозицијом:

Ако је број $\mathrm{A_k}$ $(\mathrm{k} > 4)$ *реципрочан неком целом броју (позитивном или негативном), да би то исто важило за одговарајући коефицијент* $\mathrm{a_k}$, *потребно је и довољно да један од следећих аритметичких услова буде задовољен:*

1) *или је* $\mathrm{k}+1$ *делилац од* $\dfrac{1}{\mathrm{A_k}}$*;*

2) *или k није прост број умањен за јединицу.*

Једну особину исте природе има и извод y' интеграла y од (48) који за $x = 0$ узима вредност $y = 0$.

*

Додао бих на крају да из изложеног никако не произлази да ће се моћи извести закључци занимљиви за теорију бројева. Значај које би имале те чињенице састојао би се пре у самом постојању веза између две разнородне теорије – теорије диференцијалних једначина и теорије бројева. У сваком случају, у проучавањима те врсте отвара се посебно привлачно поље истраживања, на које сам узео слободу да привучем пажњу колега учесника конгреса.[**]

[**] Ова Петровићева расправа објављена је и у конгресном материјалу Comptes rendus du Congrés interbalkanique des mathématiciens (Bucarest 1937) као Петровићево излагање од 12. априла 1937. – Рад је реферисан у Zbl, B. 19, S. 407 (E. Kamke) и FdM, B. 64, S. 1131 (O. Perron) (пр. Д. Т.).

ПОТЕНЦИЈАЛНИ РЕДОВИ КОЈИ ИЗРАЖАВАЈУ ОПШТИ ИНТЕГРАЛ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГА РЕДА*

I. Општи интеграл диференцијалне једначине првог реда

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

тј. њен интеграл који за произвољну вредност $x = x_0$ добија произвољну вредност $y = y_0$, изражен је релацијом

$$F(x, y, x_0, y_0) = 0, \tag{2}$$

где је F функција четири промењиве

$$x, y, x_0, y_0 \tag{3}$$

у којој се x може пермутовати са x_0, y са y_0, а да при томе функција не промени своју вредност.

Кад пар вредности (x_0, y_0) не представља никакву сингуларну тачку функције $f(x, y)$, општи интеграл y може се изразити у облику потенцијалног реда

$$y = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots, \tag{4}$$

где су коефицијенти A_n функције промењивих x_0, y_0.

Један произвољно узет ред (4) може (али не мора) бити општи интеграл неке једначине првога реда. Тако, на пример, ред у коме је

$$A_0 = y_0, \;\; A_n = x_0 y_0 + (n-1)\, x_0^2 y_0^2,$$

није општи интеграл једначине (1); напротив, ред у коме је

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXVIII, Први разред, књ. 88, Београд, 1939, стр. 31–42. М. Петровић је ову расправу саопштио у Академији природних наука 29. новембра 1937.

$$A_0 = y_0, \quad A_n = \frac{y_0}{n!}$$

општи је интеграл једначине

$$y' = y.$$

У овом раду постављена су и потпуно решена два питања:

1) *какве потребне и довољне услове треба да испуне коефицијенти* $\mathrm{A_n}$ *реда* (4) *па да тај ред представља општи интеграл неке диференцијалне једначине првога реда;*

2) *у случајевима кад су ти услови испуњени, како наћи диференцијалну једначину за коју такав ред* (4) *изражава њен општи интеграл.*

Нека је (1) једначина чији је општи интеграл ред (4). Тада је

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0, \\ A_1 &= \left[\frac{dy}{dx}\right] = [f(x,y)] = f(x_0,y_0), \end{aligned} \tag{5}$$

где израз [φ] означава вредност коју добија функција φ промењљиве x за $x = x_0$ или функција двеју промењљивих x, y за $x = x_0, y = y_0$.

Формирајмо неограничен низ функција

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \tag{6}$$

промењљивих x, y, дефинисаних рекурентном релацијом

$$f_{n+1} = \frac{\partial f_n}{\partial x} + f\,\frac{\partial f_n}{\partial y} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{7}$$

где је почетна функција

$$f_0 = f(x,y), \tag{8}$$

па ће бити

$$A_n = \frac{1}{n!}[f_{n-1}] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{9}$$

Пошто се x, y могу пермутовати са x_0, y_0, релација (7) може се написати и у облику

$$[f_{n+1}] = \left[\frac{\partial f_n}{\partial x}\right] + [f]\left[\frac{\partial f_n}{\partial y}\right], \tag{10}$$

из чега се, према (5) и (9), добија

$$(11) \qquad (n+1)\,A_{n+1} = \frac{\partial A_n}{\partial x_0} + f(x_0, y_0)\frac{\partial A_n}{\partial y_0}.$$

То показује да израз

$$(12) \qquad \Delta = \frac{(n+1)\,A_{n+1} - \dfrac{\partial A_n}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial A_n}{\partial y_0}}$$

има једну исту вредност за све вредности $n = 1, 2, 3, \ldots$ и да се та вредност поклапа са $f(x_0, y_0)$. Друга једначина (5) тада показује да су x_0 и y_0 везани диференцијалном једначином

$$(13) \qquad \frac{dy_0}{dx_0} = f(x_0, y_0),$$

тј. да су x и y везани једначином

$$(14) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Вредност израза Δ је иста као и вредност коефицијента A_1, а то је $f(x_0, y_0)$. Једначина (14) добија се, дакле, кад се у једначини

$$\frac{dy_0}{dx_0} = A_1$$

смени x_0 са x, y_0 са y, а $\dfrac{dy_0}{dx_0}$ са $\dfrac{dy}{dx}$.

На тај начин нађени су *потребни* услови да буде ред (4) општи интеграл једначине (1). Лако се доказује да су то у исто време и *довољни* услови за то; доказ је истоветан са класичним доказом да када се коефицијенти реда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

израчунају узастопним диференцијаљењем једначине (1) и деобом добијених извода са $n!$, такав ред формално задовољава једначину (1).

На тај начин добијено је решење постављених питања у облику два става.

I став. – *Да би ред* (4) *представљао општи интеграл неке диференцијалне једначине првога реда, потребно је и довољно да израз* Δ *има једну исту вредност за све вредности* n = 1, 2, 3...

Када је тај услов испуњен, решење другог постављеног питања дато је следећим ставом.

II став. – *Диференцијална једначина, чији је општи интеграл изражен редом* (4), *добија се када се у коефицијенту* A_1 *смени* x_0 *са* x, y_0 *са* y, *па се резултат уједначи са* $\frac{dy}{dx}$.

У случају кад се тражи да диференцијална једначина (1), чији општи интеграл треба да буде ред (4), не садржи експлицитно променљиву x, једначина (7) своди се на

$$f_{n+1} = f\frac{\partial f}{\partial y},$$

а једначина (10) на

$$[f_{n+1}] = [f]\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right],$$

при чему је

$$(n+1)\,A_{n+1} = f(x_0, y_0)\frac{\partial A_n}{\partial y_0},$$

из чега следи нови став.

III став. – *Да би ред* (4) *представљао општи интеграл неке диференцијалне једначине првога реда која не садржи експлицитно независно променљиву величину* x, *потребно је и довољно да израз*

$$\Delta = \frac{(n+1)\,A_{n+1}}{\dfrac{\partial A_n}{\partial y_0}}$$

има једну исту вредност за све вредности n = 1, 2, 3...

И у том случају одговарајућа диференцијална једначина одређена је ставом II.

Дакле, да ли ће дати ред (4) бити или неће бити општи интеграл неке једначине првога реда, зависи искључиво од тога *да ли ће његови коефицијенти* A_n *за инваријанту имати израз* Δ; *када је то случај, диференцијална једначина тога реда добија се из саме вредности те инваријанте.*

За ред (4), на пример, за који је

$$A_0 = y_0, \quad A_n = \frac{y_0}{n!},$$

инваријанта је

$$\Delta = y_0;$$

за ред за који је

$$A_0 = y_0, \quad A_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n n!}(y_0 - x_0 + 1)^{2n+1},$$

она је

$$\Delta = \frac{1}{2}(y_0 - x_0 + 1)^3 + 1;$$

за ред за који је

$$A_0 = y_0,$$

$$A_n = y_0\left[\frac{(2x_0)^n}{n!} + \frac{(2x_0)^{n-2}}{1!(n-2)!} + \frac{(2x_0)^{n-4}}{2!(n-4)!} + \ldots\right],$$

она је

$$\Delta = 2x_0 y_0;$$

за ред где је

$$A_0 = y_0, \quad A_n = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!(n-1)!(2y_0)^{2n-1}},$$

она је

$$\Delta = \frac{1}{y_0};$$

за ред за који је

$$A_0 = y_0,$$

$$A_{4n} = \frac{y_0}{(4n)!}, \qquad A_{4n+2} = -\frac{y_0}{(4n+2)!},$$

$$A_{4n+1} = \frac{\sqrt{1-y_0^2}}{(4n+1)!}, \quad A_{4n+3} = -\frac{\sqrt{1-y_0^2}}{(4n+3)!},$$

налази се да је

$$\Delta = \sqrt{1-y_0^2}.$$

2. Ово што је напред изложено, може се представити и на овај начин.

Уопште, функција

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \tag{15}$$

која садржи две произвољне константе C_1 и C_2, општи је интеграл једне диференцијалне једначине другога реда која не садржи ни C_1 ни C_2. Та се једначина своди на једначину првога реда када се између двеју константи успостави нека релација

(16) $$\psi(C_1, C_2) = 0.$$

Тако, на пример, функција

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

општи је интеграл једначине

$$y'' + y = 0;$$

то је, међутим, општи интеграл и једначине

$$y'^2 + y^2 - 1 = 0$$

када се међу константама успостави релација

$$C_1^2 + C_2^2 - 1 = 0.$$

Али, функција (15) може бити општи интеграл једначине првог реда (која не садржи ни C_1 ни C_2) а да константе C_1 и C_2 не престану бити произвољне, тј. да не морају бити међу собом везане. Такав је случај са функцијом

$$y = \varphi(x, x_0, y_0)$$

која представља интеграл једначине првога реда који за произвољну вредност $x = x_0$ добија произвољну вредност $y = y_0$; довољно је узети $x_0 = C_1$, $y_0 = C_2$.

Тако, на пример, функција

$$y = C_1 e^{x - C_2}$$

општи је интеграл једначине

(17) $$y' - y = 0;$$

функција

$$y = \sin(\log C_1 x + C_2)$$

општи је интеграл једначине

(18) $$x^2 y'^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Општи разлог таквога факта је очевидан – у таквим случајевима увек постоји једна одређена функција

(19) $$\lambda(C_1, C_2)$$

двеју константи C_1 и C_2, таква да, кад се стави да је $\lambda(C_1, C_2) = C$, обе константе C_1 и C_2 нестају у изразу општег интеграла y, који постаје функција променљиве x и константе C; ова тада има улогу једине интеграционе константе.

У случају једначине (17), константа C је израз

$$C = C_1 e^{-C_2},$$

за једначину (18) она је

$$C = \log C_1 + C_2.$$

Уочимо сад један општи проблем.

Када је дат потенцијални ред

$$y = A_0 + A_1(x - A) + A_2(x - A)^2 + \ldots, \tag{20}$$

где су $A, A_0, A_1, A_2, \ldots$ функције двеју произвољних константи C_1 и C_2, наћи:

1) *потребне и довољне услове за егзистенцију једне диференцијалне једначине првога реда која не садржи* C_1 *и* C_2 *и чији ће општи интеграл бити изражен редом* (20)*;*

2) *диференцијалну једначину у случају кад она постоји.*

Ако се стави да је

$$\begin{aligned} A(C_1, C_2) &= \alpha, \\ A_0(C_1, C_2) &= \beta, \end{aligned} \tag{21}$$

параметри α и β биће познате функције констаната C_1 и C_2. Сменивши њима те константе, функција y постаје

$$y = \beta + B_1(x - \alpha) + B_2(x - \alpha)^2 + \ldots, \tag{22}$$

где ће коефицијенти $B_1, B_2, B_3, \ldots$ бити познате функције параметара α и β и проблем се своди на онај решен у претходном параграфу: y треба да буде интеграл неке једначине првога реда који за $x = \alpha$ добија вредност $y = \beta$.

Да ли ће ред (20) бити или неће бити општи интеграл једначине првога реда, зависи од тога да ли ће његови коефицијенти B_n имати за инваријанту израз Δ (у коме A_k треба сменити са B_k) или је неће имати. А кад је то случај, диференцијална једначина се добија елиминацијом двеју констананата C_1 и C_2 из три једначине:

$$\begin{aligned} A(C_1, C_2) &= x, \\ A_0(C_1, C_2) &= y, \\ A_1(C_1, C_2) &= \frac{dy}{dx}. \end{aligned} \tag{23}$$

Да бисмо одредили константу C помоћу C_1 и C_2, која ће имати улогу једине интеграционе константе у општем интегралу y, приметимо да су C_1 и C_2, мада су им вредности произвољне (као што је и случај са x_0, y_0), везани диференцијалном релацијом која следује из односа

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = A_1(C_1, C_2) = \frac{\partial A}{\partial C_1} + \frac{\partial A}{\partial C_2} \cdot \frac{dC_2}{dC_1}.$$

То је диференцијална једначина

$$\frac{dC_2}{dC_1} = \Phi(C_1, C_2), \tag{24}$$

где је Φ одређена функција константи C_1 и C_2, која има за израз

$$\frac{\dfrac{\partial A_0}{\partial C_1} - A_1(C_1, C_2)\dfrac{\partial A}{\partial C_1}}{A_1(C_1, C_2)\dfrac{\partial A}{\partial C_2} - \dfrac{\partial A_0}{\partial C_2}}; \tag{25}$$

о томе се уверавамо диференцијаљењем првих двеју једначина (23) и сменом добијених dx и dy у трећој од тих једначина.

Кад се ойшйи инйеграл једначине (24) *найише у облику*

$$\mu(C_1, C_2) = \text{const.} \tag{26}$$

израз μ *има улогу консйанйе* C.

3. Применимо резултат из првог параграфа на случај када ред

$$y = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots \tag{27}$$

представља *йрансценденйну целу функцију* променљиве x, која задовољава какву *алгебарску* диференцијалну једначину.

Да би ова једначина била алгебарска, потребно је и довољно да коефицијенат A_1 буде алгебарска функција променљивих x_0, y_0 (разуме се, под претпоставком да коефицијенти A_n имају за инваријанту израз Δ). Тада се увек може изразити у облику релације

$$\psi(x_0, y_0, A_1) = 0, \tag{28}$$

где је ψ неки *несводљив* полином по y_0 и A_1, са коефицијентима који су алгебарске функције променљиве x_0.

Означимо са L алгебарску криву која се добија када се у једначини (28) y_0 и A_1 сматрају за координате једне покретне тачке $M(y_0, A_1)$ у равни y_0OA_1.

Да би функција y, дефинисана редом (27), била цела функција променљиве x, потребно је и довољно да израз

$$\sqrt[n]{|A_n|}$$

тежи нули када n бескрајно расте, и то ма какве вредности имали x_0 и y_0. Такав случај наступа када, на пример, приликом бескрајног рашћења индекса n један и други логаритамски извод

$$\frac{\partial}{\partial x}\log A_n \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y}\log A_n,$$

расту спорије него n, и то за ма какве вредности x_0, y_0; то се види из израза (11) који даје

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\log A_n + \frac{f(x_0, y_0)}{n+1}\frac{\partial}{\partial y}\log A_n.$$

Када је, при томе, цела функција y трансцендентна, познати ставови из аналитичке теорије алгебарских диференцијалних једначина првога реда доводе до тога да релација (28) испуњава следеће услове:

1) алгебарске функције променљиве x_0 које фигуришу као коефицијенти у једначини (28) увек су полиноми по x_0;

2) када се у једначини (28) смене

$$x_0, y_0, A_1 \quad \text{са} \quad x, y, y'$$

добијена диференцијална једначина нема никад покретних интегралних критичких сингуларитета;

3) када су ти интегрални сингуларитети непокретни, алгебарска крива L увек је уникурсална.**

** У скраћеном преводу Série taylorienne exprimant l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre расправа је објављена у Bulletin A, Académie royale de Serbie, №. 5, Belgrade 1939, pp. 21–23 и била је реферисана у FdM, B. 65, S. 369–370 (H. Wittich), Zbl, B. 21, S. 225 (Herald Geppert) и Mathematical Revains (даље у ознаци MR), t. XI, 4, p. 247 (P. Franklin) (пр. Д. Т.).

ЈЕДНА ЗАЈЕДНИЧКА ОСОБИНА МНОШТВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА*

I

Постоји мноштво диференцијалних једначина свих редова које имају ову особину:

Кад се зна једна одређена функција

$$U(x, y_1, y_2) \tag{1}$$

која зависи од два партикуларна интеграла y_1 *и* y_2 *једначине, као функција* $\theta(x)$ *независно променљиве величине* x, *може се знати и сваки посебице од таква два интеграла* y_1 *и* y_2.

Таква ће особина, краткоће ради, у овоме раду бити названа *особином* (P).

Лако се можемо уверити да одиста има диференцијалних једначина са особином (P). Тако, уочимо једначину првог реда

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

где је F функција која има следеће особине:

1) да се разлика

$$F(x, y_1, y_1') - F(x, y_2, y_2'), \tag{3}$$

изражава у облику

$$\Phi(x, U, V, V'), \tag{4}$$

где су U и V две функције које зависе од x, y_1, y_2 и где V' означава извод функције V по x;

2) да је диференцијална једначина првог реда

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXVIII, Први разред, књ. 88, Београд, 1939, стр. 227–240. М. Петровић је ову расправу саопштио у Академији природних наука 16. децембра 1938.

(5) $$\Phi(x,\theta,V,V')=0$$

интеграбилна па ма каква била произвољна функција $\theta(x)$.

Тада ће једначина (2) *имати особину* (P).

Да бисмо се у то уверили, нека је (1) функција два партикуларна интеграла y_1 и y_2 једначине (2) дата као позната функција $\theta(x)$ променљиве x, тако да је

(6) $$U(x,y_1,y_2)=\theta(x).$$

Пошто је истовремено

(7) $$\begin{aligned} F(x,y_1,y_1')&=0,\\ F(x,y_2,y_2')&=0, \end{aligned}$$

биће и

(8) $$F(x,y_1,y_1')-F(x,y_2,y_2')=0,$$

што се, према особини функције F, изражава у облику једначине (4). По претпоставци, та једначина је интеграбилна; нека је $\eta(x)$ њен интеграл који за дату почетну вредност $x=x_0$ добија ону вредност коју добија израз

(9) $$V(x,y_1,y_2)$$

за $x=x_0$. Две једначине

(10) $$\begin{aligned} V(x,y_1,y_2)&=\eta(x),\\ U(x,y_1,y_2)&=\theta(x) \end{aligned}$$

одређују тада (у општем случају) две непознате y_1 и y_2, што показује да једначина (2) одиста има особину (P).

Разне диференцијалне једначине (2), које нису интеграбилне, а међу којима се налазе и неке једначине од нарочите важности у применама, имају такву особину. У овоме што следи то ће бити и показано на некима од њих.

II

Уочимо познату неинтеграбилну једначину

(11) $$y'^2+y^2+f(x)=0,$$

на коју се наилази у проблемима диференцијалне геометрије и механике, и претпоставимо да јој се зна збир два партикуларна интеграла y_1 и y_2 као функција $\theta(x)$ променљиве x. Израз (3), који је овде

$$y_1'^2 + y_1^2 - y_2'^2 - y_2^2,$$

може се написати у облику

$$(y_1' - y_2')(y_1' + y_2') + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2),$$

тј. у облику

$$V'\theta' + V\theta, \tag{12}$$

где је

$$V = y_1 - y_2. \tag{13}$$

Једначина (5) овде гласи

$$V'\theta' + V\theta = 0 \tag{14}$$

и њен интеграл је

$$V = Ae^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\theta}{\theta'} dx}, \tag{15}$$

где A означава константу чија је вредност она коју даје разлика $y_1 - y_2$ за $x = x_0$.

Из двеју једначина (10), које су овде

$$y_1 - y_2 = Ae^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\theta}{\theta'} dx},$$

$$y_1 + y_2 = 0,$$

за партикуларне интеграле y_1 и y_2 добијају се изрази

$$(16)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\left(\theta + Ae^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\theta}{\theta'} dx}\right), \\ y_2 &= \frac{1}{2}\left(\theta - Ae^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\theta}{\theta'} dx}\right), \end{aligned}$$

из којих се види да се одредба интеграла y_1 и y_2 извршава *помоћу једне квадратуре.*

Истоветан случај би био и онда кад би, уместо збира, била позната разлика $y_1 - y_2$ два партикуларна интеграла једначине (11). Ставивши тада да је

$$V = y_1 + y_2,\qquad(17)$$
$$\theta = y_1 - y_2,$$

за одредбу функције V добија се иста диференцијална једначина (14) и проблем се лако довршава.

Уочимо као пример и једначину облика

$$y' + f(x)p(y) + \varphi(x)y + \psi(x) = 0.\qquad(18)$$

Када су y_1 и y_2 два њена партикуларна интеграла, онда је

$$y_1' + f(x)p(y_1) + \varphi(x)y_1 + \psi(x) = 0,$$

$$y_2' + f(x)p(y_2) + \varphi(x)y_2 + \psi(x) = 0,$$

одакле се одузимањем добија

$$y_1' - y_2' + f(x)[p(y_1) - p(y_2)] + \varphi(x)(y_1 - y_2) = 0.$$

Претпоставимо да се зна разлика

$$p(y_1) - p(y_2) = \theta(x)\qquad(19)$$

као функција θ променљиве x. Ако се стави да је

$$y_1 - y_2 = V,$$

за одредбу функције V добија се линеарна једначина

$$V' + \varphi V + p\theta = 0.\qquad(20)$$

Означивши са $\eta(x)$ онај њен интеграл који за почетну вредност $x = x_0$ добија исту вредност коју добија разлика $y_1 - y_2$ за $x = x_0$ имаће се две једначине

$$y_1 - y_2 = \eta(x)\qquad(21)$$
$$p(y_1) - p(y_2) = \theta(x),$$

које одређују два партикуларна интеграла y_1 и y_2. Одредба тих интеграла извршава се помоћу две квадратуре.

III

И општа Рикатијева једначина

$$y' + f(x)y^2 + \varphi(x)y + \psi(x) = 0 \tag{22}$$

налази се међу онима које имају особину (P).

1) Претпоставимо да се зна збир $y_1 + y_2$ два њена партикуларна интеграла као функција $\theta(x)$ променљиве x. Из двеју једначина

$$\begin{aligned} y_1' + fy_1^2 + \varphi y_1 + \psi = 0, \\ y_2' + fy_2^2 + \varphi y_2 + \psi = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

ставивши да је

$$y_1 - y_2 = V,$$

одузимањем се добија

$$V' + (f\theta + \varphi)V = 0,$$

одакле је

$$V = AW, \quad \text{где је} \quad W = e^{-\int_{x_0}^{x}(f\theta+\varphi)\,dx},$$

где је A константа једнака вредности коју добија разлика $y_1 - y_2$ за почетну вредност $x = x_0$ променљиве x. Две једначине

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= AW, \\ y_1 + y_2 &= \theta \end{aligned}$$

одређују партикуларне интеграле y_1 и y_2 у облику

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(\theta + AW), \\ y_2 &= \frac{1}{2}(\theta - AW). \end{aligned} \tag{24}$$

Та два интеграла одређују се *помоћу једне квадратуре*. Како се помоћу два партикуларна интеграла Рикатијеве једначине може одредити и њен општи интеграл, и то једном квадратуром, то се долази до овога става.

Када се зна збир два партикуларна интеграла Рикатијеве једначине, може јој се одредити и општи интеграл помоћу две квадратуре.

2) Претпоставимо да се зна разлика $y_1 - y_2$ као функција $\theta(x)$. Из двеју једначина (23), ставивши да је

$$y_1 + y_2 = V,$$

одузимањем се добија

$$\theta' + f\theta V + \varphi\theta = 0, \tag{25}$$

одакле је

$$V = -\frac{\varphi}{f} - \frac{1}{f}\frac{\theta'}{\theta},$$

па се из двеју једначина

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= \theta, \\ y_1 + y_2 &= V, \end{aligned}$$

добија да је

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f}\frac{\theta'}{\theta} + \frac{\varphi}{f}\right), \\ y_2 &= -\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f}\frac{\theta'}{\theta} + \frac{\varphi}{f}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Дакле, два партикуларна интеграла y_1 и y_2 добијају се *без квадратура*. То доводи до следећег става.

Када се зна разлика два партикуларна интеграла Рикатијеве једначине, може јој се одредити и општи интеграл, и то помоћу једне квадратуре.

3) Претпоставимо да се зна разлика квадрата $y_1^2 - y_2^2$ два партикуларна интеграла као функција $\theta(x)$. Ако се стави да је

$$y_1 - y_2 = V,$$

одузимањем се добија једначина (23)

$$V' + \varphi V + f\theta = 0,$$

одакле је

$$V = e^{-\int_{x_0}^{x}\varphi\,dx}\left(A - \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x}\varphi\,dx}\cdot f\theta dx\right), \tag{27}$$

где је A константа једнака вредности коју добија разлика V за $x = x_0$.

С друге стране, пошто је

$$\theta = y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)V,$$

то су интеграли y_1 и y_2 одређени двема једначинама

$$y_1 - y_2 = V,$$
$$y_1 + y_2 = \frac{\theta}{V},$$

из којих је

$$(28) \qquad y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{V} + V\right), \quad y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{V} - V\right),$$

где је V дато обрасцем (27). Та два интеграла y_1 и y_2 добијају се, дакле, *помоћу две квадратуре*. Из тога се добија овај став.

Када се зна разлика квадрата два партикуларна интеграла Рикатијеве једначине, може јој се одредити и општи интеграл и то помоћу три квадратуре.

4) Претпоставимо да се зна збир квадрата $y_1^2 + y_2^2$ два партикуларна интеграла као функција $\theta(x)$. Ако се стави да је

$$y_1 + y_2 = V,$$

сабирањем једначина (23) за V се налази једначина

$$V' + \varphi V + (f\theta + 2\psi) = 0,$$

из које је

$$(29) \qquad V = e^{-\int_{x_0}^{x} \varphi\, dx}\left[A - \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} \varphi\, dx} \cdot (f\theta + 2\psi)\, dx\right],$$

где је A константа једнака вредности коју добија збир $y_1 + y_2$ за $x = x_0$. Интеграли y_1 и y_2 добијају се тада помоћу двеју једначина

$$y_1 + y_2 = V,$$
$$y_1^2 + y_2^2 = \theta,$$

одакле се налази да је

$$y_1 y_2 = \frac{1}{2}(V^2 - \theta).$$

Према томе, y_1 и y_2 су корени квадратне једначине

$$(30) \qquad y^2 - Vy + \frac{1}{2}(V^2 - \theta) = 0,$$

решене по y, а где V има вредност (29). Отуда следи став.

Кад се зна збир квадрата два партикуларна интеграла Рикатијеве једначине, може јој се одредити и општи интеграл и то помоћу три квадратуре.

IV

Поставимо сада питање.

Каква треба да буде функција $\psi(x)$ *у једначини*

$$y' + y^2 + \psi(x) = 0 \tag{31}$$

па да збир два њена партикуларна интеграла $y_1 + y_2$ *буде једнак датој функцији* $\theta(x)$ *променљиве* x*?*

Пођимо од образаца (24), који за уочени случај имају облик

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(\theta + AW), \\ y_2 &= \frac{1}{2}(\theta - AW), \end{aligned} \tag{32}$$

где је

$$W = e^{-\int_{x0}^{x} \theta\, dx}. \tag{33}$$

Диференцијаљењем се добија

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{2}(\theta' - A\theta W), \\ y_2' &= \frac{1}{2}(\theta' + A\theta W). \end{aligned} \tag{34}$$

Да би функција y_1 била партикуларни интеграл једначине (31), треба да је

$$y_1' + y_1^2 + \psi = 0$$

из чега се сменама (32), (33) и (34) налази да је

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\frac{1}{2}\theta' - \frac{1}{4}\theta^2 - \frac{1}{4}A^2W^2 \\ &= -\frac{1}{2}\theta' - \frac{1}{4}\theta^2 - \frac{1}{4}A^2 e^{-2\int_{x0}^{x} \theta\, dx}. \end{aligned} \tag{35}$$

Тако се исто, изразивши y_2 као партикуларни интеграл једначине (31), добија услов из кога се опет за $\psi(x)$ налази исти израз (35). Отуда закључак:

да би збир два партикуларна интеграла једначине (31) *био једнак једној датој функцији* θ(x) *променљиве* x, *функција* ψ *треба да има облик* (35).

Као што се види услов је и потребан и довољан.

На исти начин се решава и следећи проблем.

Каква веза треба да постоји између коефицијената f, φ, ψ *опште Рикатијеве једначине*

$$y' + f(x)y^2 + \varphi(x)y + \psi(x) = 0, \tag{36}$$

па да разлика два њена партикуларна интеграла буде једнака датој функцији θ(x).

Пођимо од образаца (26), из којих се добија

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{2}\theta' - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\frac{\theta'}{\theta} + \frac{\varphi}{f}\right), \\ y_2' &= -\frac{1}{2}\theta' - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\frac{\theta'}{\theta} + \frac{\varphi}{f}\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Сменом вредности (26) и (37) у једначинама које изражавају да y_1 и y_2 задовољавају Рикатијеву једначину (36), после потребног свођења, за оба интеграла y_1 и y_2 налази се један исти услов, а то је

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\frac{\theta'}{\theta} + \frac{\varphi}{f}\right) - \frac{1}{4}f\theta^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{f}\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\varphi^2}{f}. \tag{38}$$

Из тога следи закључак.

Да би разлика два партикуларна интеграла једначине (36) *била једнака једној датој функцији* θ(x) *променљиве* x, *између коефицијената* f, φ, ψ *једначине (36) треба да постоји веза исказана једначином (38).*

Исти би се поступак применио и на остале случајеве за Рикатијеву једначину.

За случај Рикатијеве једначине сведене на канонски облик

$$y' + y^2 + \psi(x) = 0, \tag{39}$$

функција ψ треба да има облик

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log\theta - \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\log\theta - \frac{1}{4}\theta^2.$$

V

Уочимо општу линеарну хомогену диференцијалну једначину другог реда

$$(40) \qquad y'' + \varphi(x)\,y' + \psi(x)\,y = 0.$$

Сменом

$$(41) \qquad \frac{y'}{y} = u,$$

она се претвара у Рикатијеву једначину

$$(42) \qquad u' + u^2 + \varphi u + \psi = 0.$$

Нека су y_1 и y_2 два партикуларна интеграла једначине (40), па ће

$$(43) \qquad u_1 = \frac{y_1'}{y_1} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{y_2'}{y_2}$$

бити два одговарајућа партикуларна интеграла једначине (42).

Претпоставимо да се зна производ $y_1 y_2$ поменута два интеграла као функција $\theta(x)$ промењиве x; тада ће се знати и збир $u_1 + u_2$ одговарајућих им интеграла једначине (42) јер је

$$(44) \qquad u_1 + u_2 = \frac{d}{dx}\log yy_2 = \frac{\theta'}{\theta}.$$

Знајући, дакле, збир два партикуларна интеграла Рикатијеве једначине (42), према овоме што претходи знаће се и сваки посебице од тих интеграла, и то помоћу једне квадратуре. Према обрасцима (24), примењеним на једначину (42), биће

$$(45) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\theta}(\theta' + AW), \\ u_2 &= \frac{1}{2\theta}(\theta' - AW), \end{aligned}$$

па је

$$(46) \qquad W = e^{-\int_{x_0}^{x} \varphi\, dx},$$

где је A константа једнака вредности коју добија разлика $u_1 - u_2$ за $x = x_0$ тј. једнака разлици вредности које добијају логаритамски изводи два партикуларна интеграла y_1 и y_2 једначине (40) за $x = x_0$. Пошто је

$$y = e^{\int u dx},$$

интеграли y_1 и y_2 биће одређени једначинама

$$(47)\qquad \begin{aligned} y_1 &= e^{\int u_1 dx} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{1}{\theta}(\theta' + AW)dx}, \\ y_2 &= e^{\int u_2 dx} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{1}{\theta}(\theta' - AW)dx}, \end{aligned}$$

где је W дефинисано изразом (46).

Отуда следећи

Став. – *Линеарна хомогена диференцијална једначина другога реда има ту особину да, кад се зна производ два њена партикуларна интеграла, знаће се и њен општи интеграл, и то помоћу две квадратуре.*

Применом онога што је казано у одељку IV може се решити проблем: каква веза треба да постоји између коефицијента φ и ψ једначине (40) па да производ њена два партикуларна интеграла буде једнак датој функцији $\theta(x)$ променљиве x.

Напослетку треба додати да се ово што претходи примењује, са потребним изменама, на мноштво разноврсних других диференцијалних једначина.**

** Скраћен превод ове расправе *Propriété commune à une multitude d'équations différentielles*, објављен је у Bulletin A, Académie royale de Serbie, №. 5, Belgrade 1939, pp. 49–56 и била је реферисана у MR, t. XI, 4, p. 247 (P. Franklin) и FdM, B. 65, S. 371 (W. Quade) (пр. Д. Т.).

ОСЕТЉИВА МЕСТА ОБИЧНИХ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА*

Обична је ствар да каква једначина, обична или диференцијална, у којој фигурише какав параметар α, даје један резултат за вредности α *мање* од једнога сталног броја a, а други резултат, битно различит од првога, за вредности α *веће* од a.

Тако нпр. једначина

$$x^2 + y^2 + \alpha = 0$$

представља систем концентричних кругова кад је $\alpha < 0$, а тачку $x = 0$, $y = 0$ за $\alpha = 0$. Сличан је случај и са чињеницама које резултирају из линеарне диференцијалне једначине другога реда

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha y = 0,$$

нпр. у појави електричних флуктуација при испражњавању електричних кондензатора. Вредност y (електрично оптерећење) је периодична функција времена t кад је $\alpha > 0$, а монотона функција кад је $\alpha < 0$.

Али је мање обична ствар да једначина доводи до једног резултата за $\alpha = a$, а до другог, из основе битно различитог *за ма коју другу вредност* α, било већу, било мању од a, па и за ову бескрајно блиску вредност $\alpha' = a \pm \varepsilon$.

Тако, претпоставимо нпр. да једначина што везује две променљиве x и y садржи једну константу α чију вредност не познајемо тачно, већ само приближно, тако да се на место њене праве вредности α зна њена приближна вредност α'. Тада се може десити да, ма колико мала била разлика $\alpha' - \alpha = \varepsilon$, узевши α' на место α, мења се битно облик везе $\lambda(x, y) = 0$ између x и y, тако да нпр. за вредност α крива

* Математички весник, Удружење студената математике, Београд 1939, бр. 5–6, стр. 8–11.

$\lambda(x, y) = 0$ има *периодичан*, осцилаторан, карактер, а за α' *монотон* карактер или обрнуто.

Тако нпр. површина

$$z = [\alpha(y - x) + 1][\alpha^2 y^2 + (y - \sin x)^2]$$

има, кад је $\alpha = 0$, за пројекцију у равни xOy синусоиду

$$y = \sin x$$

а кад је α различито од нуле, то је пројекција права

$$y = x - \frac{1}{\alpha},$$

или скуп тачака

$$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

Има алгебарских диференцијалних једначина првога реда

$$f(x, y, y', \alpha) = 0$$

чији су сви интеграли периодичне функције променљиве x за једну вредност параметра α, а монотоне функције за све остале вредности α. Такав је случај са једначином

$$y'^2 + y^2 = 1 + \alpha u(x)$$

где је $u(x)$ каква монотона функција. За $\alpha = 0$ општи је интеграл

$$y = \sin(x + C) \quad C = \text{const.}$$

и он је периодичан. За ма коју другу вредност α добија се диференцијалењем

$$2(y'' + y)y' = \alpha u'(x);$$

пошто је функција u монотона, њен извод u' нема реалних нула, па их дакле нема ни y', тако да y не може имати ни максимума ни минимума, већ расте или опада монотоно.

Из таквих примера се види да се може десити ово: образац који изражава какав аналитички, механички, физички итд. факт, може имати какво своје *осетљиво место*, у које ако се само дирне, факт из основе мења свој битни карактер. То, са математичко-феноменолошког гледишта даје интересантан пример случајева у којима једна, колико се хоће незнатна измена једнога фактора у појави, изазива несразмерно велику промену битнога карактера ове. Тако се из овога што претходи види да нпр. *осцилаторан* ток појаве таквом, минималном изменом фактора, одједном и без икаквог континуалног преласка, из основе се измењује и прелази у *монотон* ток, без икаква трага од ма каквих, па и најслабијих осцилација. И та несразмерност ефекта остаје за све време трајања појаве, па ма измена фактора остала за све то време колико се год хоће слаба.

Једна физичка појава, у којој тај аналитички факт налази своју материјализирану, конкретну примену, била би нпр. појава флуктуација линеарног електричног резонатора. Те су флуктуације, а при подесном избору јединице мере за време t, масу и дескриптиван елеменат у појави, регулисане диференцијалном једначином првога реда

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2 = \text{const.}$$

која изражава да је збир кинетичке и потенцијалне енергије у појави сталан за све време њеног трајања. Флуктуације су осцилаторне, периодичне и (при поменутом избору јединица мера) имају за периоду 2π.

Међутим, ако се утицајем каквих спољних узрока учини да тотална енергија резонатора почне ма и најслабије, колико се хоће споро, али монотоно расти у току времена, појава ће одједном, и без икаквог континуалног преласка, изгубити не само своју периодичност, већ и сам осцилаторни карактер и флуктуација ће у њој бити монотона.

Такве врсте појава дају, у исто време, и инструктиван пример несигурности закључака изведених резонујући *тачно* на једначини која би била само *приближна*, а приближна би била с тога што је при њеном формирању или њеној употреби нешто што се сматрало као врло слабо и занемарљиво, фактички и занемарено. Ма колико се мало приближна једначина разликовала од тачне, резултат може бити битно различит од онога што би се имао са тачном једначином.**

** Чланак поновљен у књизи М. Петровић, *Чланци*, Друштво мат. и физ. НРС, Београд 1949, стр. 59–61. Подробнију анализу ове расправе учинио је Живојин Ћулум, *Чланак Михаила Петровића Осетљива места обичних и диференцијалних једначина посматран у светлу савремене физике*, Споменица Михаила Петровића, Београд 1968, стр. 135–140 (пр. Д. Т.).

ПРИЛОЗИ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ О СВОЈИМ РЕЗУЛТАТИМА*

НЕПОСРЕДНО ИСПИТИВАЊЕ РЕАЛНИХ ИНТЕГРАЛА

У једном од својих првих радова, г. Петровић се бави реалним вредностима $x = x_0$ независно промењиве x за које *реални* интеграли неке алгебарске једначине првог реда узимају извесну унапред дату вредност $y = y_0$.

Може се, не ограничавајући проблем, претпоставити да је та фиксирана вредност $y = y_0$ једнака нули. Тада полигон г. Петровића повезан са једначином показује да ли вредности $x = x_0$ варирају или не варирају са интеграционом константом и омогућује израчунавање редова *покретних* тачака $x = x_0$ као нула интеграла. Комбинујући правила о нулама до којих доводи посматрање полигона са елементарним правилима из теорије алгебарских једначина, г. Петровић долази до различитих резултата који се односе на *покретне нуле и полове* униформних реалних интеграла садржане у (a, b).

Тако, уколико је једначина написана у облику

$$\sum_{n=0}^{n=\mu} f_i(x,y)y'^{\mu-i} = 0,$$

и ако за вредности промењиве x између a и b све од нуле различите функције $f_i(x,0)$ чији су индекси i исте парности имају стално исти знак, и уз то је $f_\mu(x,0) \neq 0$, тада се између две узастопне нуле било ког партикуларног интеграла, реалног и униформног у интервалу (a, b), *налази најмање један пол истог интеграла*; у овом интервалу холоморфан интеграл *може се највише једанпут анулирати у истом интервалу*.

Када полигон једначине нема ниједну страну чији је коефицијент правца позитиван цео број, полови $a_1, a_2, a_3, \ldots$ сваког униформног партикуларног интеграла су *непокретни* и унапред познати. Ако се онда претпостави да су претходни услови испуњени и уколико се са k означи број вредности a_i између a и b, тада се ниједан униформан реалан интеграл *не може више од* k + 1 *пута анулирати у интервалу* (a, b).

---

* У књизи Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch, Paris 1922. М. Петровић је описао своје резултате до 1922. године, те је у посебном поглављу изложио свој рад из диференцијалних једначина. Професор је о себи писао у трећем лицу (пр. Д. Т.).

Исте примедбе такође се примењују на реалне вредности променљиве x за које униформни реални интеграли достижу максимум или минимум, као и на њихове превојне тачке, на њихове асимптотске правце, итд.

Такође се, за многе класе једначина првог реда, долази до довољних услова да се нуле и полови у датом интервалу реалног и мероморфног интервала *узајамно раздвајају у том интервалу на исти начин као у случају функције* tang x. Г. Петровић доводи до краја ово проучавање за Рикатијеву једначину и долази до правила која прецизно одређују расподелу реалних нула и бесконачности реалних интеграла у датом интервалу променљиве x.

Штурмови ставови о нулама линеарне једначине другог реда без десне стране знатно олакшавају једно такво проучавање за Рикатијеву једначину. Г. Петровић је проширио ове ставове на врло простране класе диференцијалних *једначина свих редова и на системе симултаних једначина*. Наиме, ако је дат систем n диференцијалних једначина (E) било ког реда, који дефинише n променљивих $y_1, y_2, \ldots, y_n$ као функције једне независно променљиве x, испоставља се да је једна одређена комбинација Φ, која зависи од функција y_k и њихових извода и једнака је, због самих једначина (E), једном од израза

$$\Delta(y_k) = \frac{1}{y_k}\frac{d^2 y_k}{dx^2},$$

за вредности променљиве x садржане у неком интервалу (a, b):

1. или *са горње стране ограничена* неком познатом функцијом $\mu(x)$, у том смислу што вредност функције Φ остаје мања од $\mu(x)$ за све реалне вредности $y_1, y_2, \ldots, y_n$;

2. или *ограничена с доње стране* једном познатом функцијом $\lambda(x)$ (која се у интервалу (a, b) не анулира), у том смислу што вредност од Φ остаје већа од $\lambda(x)$ за све реалне вредности $y_1, y_2, \ldots, y_n$;

3. или је истовремено испуњено 1. и 2.

У случају 2, уколико се са u означи било који интеграл једначине

$$u'' - \lambda(x)u = 0,$$

и ако је y_k један реални интеграл који је коначан и непрекидан у интервалу (a, b) као и сви његови изводи, тада се: *између две узастопне просте нуле функције* u *садржане у* (a, b) *налази највише једна нула функције* $\mathrm{y_k}$; *између две просте нуле функције* $\mathrm{y_k}$ *налази највише једна нула функције* u; *када функције* $\mathrm{y_k}$ и u *имају заједничку нулу* $\mathrm{x} = \beta$, променљива x ће, растући почев од α, *достићи прво једну нулу функције, па потом нулу функције* $\mathrm{y_k}$.

У случају 1, уколико је са v означен било који интеграл једначине

$$v'' - \mu(x)v = 0,$$

између две просте нуле функције v, *садржане у интервалу* (a, b), *налази се најмање једна нула функције* $\mathrm{y_k}$; *затим између две просте нуле функције* $\mathrm{y_k}$ *налази се највише једна нула функције* v; *када функције* $\mathrm{y_k}$ *и* v *имају заједни-*

чку нулу $x = \alpha$, *променљива* x *ће, растући почев од* α, *достићи најпре једну нулу функције* y_k, *па затим нулу функције* v.

У случају 3 имаће се оба резултата 1 и 2 у исти мах.

Узимајући за поредбене функције *u* и *v* различите функције за које је, с једне стране, познат начин на који варирају изрази $\Delta(u)$ и $\Delta(v)$, а с друге стране, расподела нула у датом интервалу (a, b), г. Петровић указује на односе између особености функције Ф која одговара неком интегралу y_k система (E), за који је претпостављено да је реалан, коначан и непрекидан у (a, b), као и на учесталост осцилација интеграла y_k око осе Ox. Имамо, на пример, следећа правила.

1. Ако је Ф с доње стране ограничено у интервалу (а, б) неком стално позитивном функцијом, тада *интеграл* y_k *у том интервалу највише једанпут мења знак.*

2. Ако је Ф с горње стране ограничено неком стално негативном функцијом у интервалу (a, b), у коме она има горњу границу $-N$, тада *интеграл* y_k *мења у том интервалу знак најмање онолико пута колико има целих јединица у броју*

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi}.$$

3. Ако је Ф с доње стране ограничено неком стално негативном функцијом у интервалу (a, b), у коме она има доњу границу $-M$, тада *интеграл* y_k *у том интервалу мења знак највише онолико пута колико има целих јединица у броју*

$$\frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi} + \alpha.$$

4. Ако су позитивне константе C и D изабране тако да Ф у (a, b) буде с горње стране ограничено функцијом

$$\frac{C - Dx^{2m}}{x^2}, \tag{52}$$

која је негативна у (a, b), тада *интеграл* y_k *у том интервалу мења знак најмање онолико пута колико има целих јединица у броју*

$$\frac{b^m - a^m}{2\pi} p, \tag{53}$$

где је

$$m = \sqrt{1 + 4c}, \quad p = \sqrt{\frac{D}{1 + 4C}}.$$

Исто тако, уколико су позитивне константе A и B изабране тако да у интервалу (a, b) израз Ф буде с доње стране ограничен функцијом (52), негативном у том интервалу, тада *у овом интервалу интеграл* y_k *мења знак највише онолико пута колико има целих јединица у броју* (53) *плус* 2.

5. Ако су позитивне константе A и B изабране тако да у (a, b) Φ буде с горње стране ограничено функцијом

$$A - Be^{\sqrt[4]{x}}, \tag{54}$$

негативном у (a, b), тада y_k *у том интервалу мења знак најмање онолико пута колико има јединица у броју*

$$\frac{1}{2\pi}\left(e^{2b\sqrt{A}} - e^{2a\sqrt{B}}\right)\sqrt{\frac{B}{A}}. \tag{55}$$

Исто тако, уколико су позитивне константе изабране тако да Φ буде у интервалу (a, b) са доње стране ограничено функцијом (54), негативном у (a, b), тада y_k *мења знак највише онолико пута колики је број целих јединица у* (55) *увећан за* 2.

6. Ако су позитивне константе A и A' изабране тако да је у (a, b) стално

$$-\frac{A'}{x^2} \leq \Phi \leq \frac{A}{x^2},$$

тада се број промена знака функције y у интервалу (a, b) налази између

$$\frac{\sqrt{4A-1}}{2\pi}\log\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad 2 + \frac{\sqrt{4A'-1}}{2\pi}\log\frac{b}{a}.$$

Г. Петровић тако чини очигледним *осцилаторну природу* реалних, коначних и непрекидних интеграла многих класа једначина свих редова.

Ова правила се примењују, на пример, на једначину првог реда

$$f(x, y, y') = 0,$$

кад год је израз

$$\Phi = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

са горње или са доње стране ограничен неком функцијом λ, односно μ.

Примењена на једначину другог реда

$$y'' + fy + \varphi y^3 = 0,$$

где су f и φ позитивне функције од x, та правила откривају осцилаторну природу интеграла и дају доње границе броја осцилација кад независно променљива x варира у датом интервалу; одговарајући израз Φ са горње стране је ограничен стално негативном функцијом $-f(x)$. Ови закључци непосредно се проверавају на партикуларном случају једначине

$$y'' + Ay + By^3 = 0,$$

где су A и B позитивне константе, која се решава помоћу елиптичких функција.

У случају система

$$\frac{dy_1}{dx} = m\, y_2 y_3, \quad \frac{dy_2}{dx} = n\, y_1 y_3, \quad \frac{dy_3}{dx} = p\, y_1 y_2,$$

на који се наилази у вези са проблемом кретања чврстог тела и који се интеграли помоћу елиптичких функција, имаће се

$$\Delta(y_1) = m\left(py_2^2 + ny_3^2\right),$$

тако да се правила примењују кад год су бројеви p и n истог знака; заиста, израз $\Delta(y_1)$ може се анулирати за неку вредност $x = \alpha$ само кад је истовремено $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$, у ком случају су за $x = \alpha$ сви изводи функције y_1 једнаки нули.

У случају проблема динамике, дешава се да једначина живих сила даје услове неједнакости услед којих је за једну или више координата q_i одговарајући израз $\Delta(q_i)$ са доње или горње стране ограничен, тако да се осцилаторна природа координате q_i показује директно на самим једначинама проблема.

Приметимо такође да правила г. Петровића, примењена на линеарну једначину другог реда, дају, уопште, доње или горње границе броја осцилација које су *прецизније* од оних до којих доводи Штурмово правило.

*

У више белешки и расправа г. Петровић се бавио проблемом *уоквиравања интеграла* у датом интервалу (a, b) варирања независно промењиве x; он се састоји у *тражењу граничних кривих између којих се налази график интеграла док* x *варира у интервалу* (a, b).

Уколико су посреди једначине првог реда, добио је следећу општу методу.

Дата једначина може се, и то на више начина, довести у облик

$$y' = F(x, y, f),$$

где је f известан коефицијент уз x који се јавља у изразу F, а коме ће се поклањати посебна пажња. Нека је (x_0, y_0) почетна тачка интеграла за коју су функција F и њен парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ одређени, коначни, непрекидни, не мењају детерминацију и при том се овај парцијални извод не анулира (тачке у којима ти услови нису испуњени припадају извесним сталним кривама у равни Oxy које се унапред знају, или су изоловане и сталне).

Могу се изабрати, и то на бесконачно много начина, две функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ тако да буду испуњени следећи услови:

1) да ове функције буду одређене, коначне и непрекидне у неком интервалу који је довољно мали али није нулте дужине, у границама од $x = x_0 - a_1$ до $x = x_0 + a_2$ (где су a_1 и a_2 позитивне константе);

2) да је у том интервалу

$$\varphi < f < \psi;$$

3) да, уколико су u и v редом интеграли једначина

$$\frac{du}{dx} = F(x,u,\varphi), \quad \frac{dv}{dx} = F(x,v,\psi), \tag{58}$$

који за $x = x_0$ узимају исту вредност $u_0 = v_0 = y_0$, тада су функције u и v одређене, коначне и непрекидне у неком интервалу који је довољно мали али није нулте дужине, и простире се од $x = x_0 - b_1$ до $x = x_0 + b_2$ (где су b_1 и b_2 позитивне константе).

Два интервала $(x_0 - a_1, x_0 + a_2)$ и $(x_0 - b_1, x_0 + b_2)$, који оба садрже вредност x, имају увек један заједнички део $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ *чија је дужина већа од нуле* и у вези са којом г. Петровић доказује своју теорему о средњој вредности за диференцијалне једначине првог реда.

За сваку вредност x_1 *из интервала* $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$, *интеграл* у *једначине* (56) *који за* $x = x_0$ *узима вредност* $y = y_0$ *одређен је, коначан, непрекидан и налази се између одговарајућих вредности интеграла* u *и* v *једначина* (58) *који за* $x = x_0$ *узимају вредност* $u_0 = v_0 = y_0$.

Важно је овде приметити да *свакој диференцијалној једначини првог реда и сваком пару* (x_0, y_0) *почетних вредности* (остављајући на страну изузетне парове који се налазе на извесним сталним кривама у равни xOy, а које су унапред познате) одговара такав један интервал $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ чија дужина, већа или мања према случају, *никад није једнака нули.*[1]

Ово се може применити на сличан начин као класична теорема о средњој вредности која се односи на одређене интеграле. За дати тип једначина, написан у облику (56), потражиће се две функције φ и ψ које, у околини тачке $x = x_0$, уоквиравају функцију $f(x)$ и од ње се што је мање могуће разликују и такве су да су обе једначине (58) интеграбилне. Тако ће се, на пример, посматрани лук графика функције $f(x)$ заменити правама, луковима парабола итд. који га уоквиравају, а тако добијени интеграли u и v једначина (58) представљаће границе између којих ће варирати интеграл y док x варира у интервалу $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$.

Г. Петровић примењује своју методу на једначине

$$y' = y^2 + f(x), \quad y'^2 + y^2 = f(x), \quad y'^2 - y^2 = f(x), \ldots$$

и налази, на пример, за прву једначину границе u и v у облику једне рационалне комбинације функције $\operatorname{tg} p(x - x_0)$, или пак функције $e^{p(x-x_0)}$, према томе да ли је функција $f(x)$ у посматраном интервалу позитивна или негативна.

Примењујући је на општију једначину

$$y' = F(y, f),$$

[1] Ове резултате г. Петровића искористио је г. Е. Котон у својој расправи *О приближној интеграцији диференцијалних једначина,* Acta mathematica, t. XXXII, 1908.

где је f дата функција од x, он формулише више резултата који се односе на горње или доње границе интеграла, на вредности променљиве x за које интеграл узима, у датом интервалу за x, унапред дату вредност, a асимптотске вредности интеграла, итд. На пример, за диференцијалну једначину

$$\left[1-e^{kx^2}(\alpha+\beta e^{py^2})\right]y'-e^{rx^2}=0,$$

где су α, β, k, p, r и $1-\alpha-\beta$ негативне константе, асимптотске вредности интеграла за $x=+\infty$ и $x=-\infty$ коначне су и одређене ако се са a означи вредност функције y за $x=0$, а са $\theta(z)$ трансцендента

$$\theta(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{z^n}{\sqrt{r+kn}},$$

асимптотска вредност за $x=+\infty$ налази се између

$$a+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha) \quad \text{и} \quad a+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\alpha+\beta).$$

У случају Рикатијеве једначине

$$y'=\varphi_1 y^2+\varphi_2 y+\varphi_3,$$

г. Петровић указује на један други поступак уоквиравања интеграла, заснован на следећој примедби.

Напишимо једначину у облику

$$y'=\varphi(y-f_1)(y-f_2) \tag{59}$$

и претпоставимо да су све три функције φ, f_1 и f_2 од x позитивне у интервалу од $x=0$ до $x=\alpha$, при чему су функције f_1 и f_2 неопадајуће у том интервалу, а криве $y=f_1$ и $y=f_2$ не додирују обе истовремено x-осу у почетку. Претпоставимо још, одређености ради, да је $f_1<f_2$ у том интервалу. Нека су

$$Y_1'=\varphi(Y_1-F_1)(Y_1-F_2), \tag{60}$$

$$Y_2'=\varphi(Y_2-\Phi_1)(Y_2-\Phi_2), \tag{61}$$

две једначине које се могу интегралити и такве су да је у интервалу $(0,\alpha)$ стално

$$\begin{aligned} F_1 &\le f_1, \qquad & F_2 &\le f_2,\\ \Phi_1 &\ge f_1, \qquad & \Phi_2 &\ge f_2. \end{aligned}$$

Тада ће у интервалу од $\mathrm{x}=0$ *до* $\mathrm{x}=\alpha$ *стално бити*

$$Y_1<y<Y_2,$$

где су са y, Y_1 и Y_2 означени редом интеграли једначина (59), (60) и (61) који се анулирају за $x = 0$.

Узимајући за поредбене чланове

$$y = F_1, \quad y = Y_2, \quad y = \Phi_1, \quad y = \Phi$$

делове правих, парабола различитих степена итд. који уоквиравају криве $y = f$ и $y = f_2$, г. Петровић прецизира различите случајеве кривих којима се уоквирава интеграл y.

Исти поступак примењује се на једначине облика

$$y' = \varphi(f_1 - y)(f_2 - y)\ldots(f_n - y),$$

где су функције f_i од x позитивне и неопадајуће у интервалу $(0, \alpha)$, а φ је у истом интервалу позитивна функција.

Најзад, г. Петровић примењује исти поступак поређења на линеарну једначину другог реда

$$y'' + f(x)y' + \varphi(x)y = 0, \tag{62}$$

код које улогу функција f_1 и f_2 играју два корена једначине по r другог степена

$$r^2 + f(x)r + \varphi(x) = 0. \tag{63}$$

Примедба која следи, комбинована са претходним поступком, даје различита правила која се односе на граничне криве између којих варира интеграл y једначине (63): кад год је могуће интегралити неку једначину облика

$$v'' + m(x)v = 0,$$

из ње се може извести једна друга линеарна једначина другог реда без десне стране за коју ће корени квадратне једначине (63) имати константне разлике и које ће се моћи интегралити, *ова нова једначина даје поредбене елементе у претходном поступку.*

Један поступак уоквиравања једначина било ког реда, практичан и удобан у применама, омогућује двострука алгебарска неједнакост коју г. Петровић користи у разним проблемима анализе, геометрије и механике; тај поступак био је изложен у првом делу овог мањег списа.

Тако, на пример, чињеница да се, кад су величине x_i негативне, вредност односа

$$\frac{(x_1 + \ldots + x_n)^p}{x_1^p + \ldots + x_n^p} \quad (p - \text{реално})$$

налази између граница 1 и n^{p-1} (које могу бити достигнуте) доводи до поступка којим се интеграли разних класа диференцијалних једначина доводе у облик

$$y = \varphi_1(x) + \theta\varphi_2(x),$$

где су функције φ_1 и φ_2 познате, а θ је фактор чије се вредности налазе између две *утврђене нумеричне вредности*, при чему су те границе најпрецизније могуће, јер могу бити ефективно достигнуте.

Примењен, на пример, на једначину првог реда

$$s = f(x, y),$$

на коју се своди општи проблем одређивања равних кривих чији је лук s дата функција координата x и y, овај поступак доводи до могућности да се напише, без интеграција, једначина грана функције y које су реалне и растуће у посматраном интервалу у облику

$$f(x, y) - \theta\left[x - y - (x_0 - y_0)\right] = 0,$$

а једначине опадајућих грана у облику

$$f(x, y) - \theta\left[x + y - (x_0 - y_0)\right] = 0,$$

где се фактор θ увек налази између $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071\ldots$ и 1, а (x_0, y_0) је почетна вредност.

Ако је дата једначина

$$y'^2 + y^2 = f(x),$$

посматрајмо реалне интеграле који пролазе кроз почетну тачку

$$M(x_0, y_0),$$

која се (одређености ради) налази изнад x-осе у области D смештеној између x-осе и криве $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ означава позитивну детерминацију функције $\sqrt{f(x)}$, за коју је претпостављено да је коначна и непрекидна у неком интервалу од вредности $x = x_0$ до вредности $x = x_1$ који је садржан у овој области (изван области D нема реалних интеграла). Кроз тачку M_0 пролазе реални интеграли, од којих је један растући а један опадајући; они могу бити представљени једначином

$$y = y_0 e^{(x - x_0)} \pm \theta e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^x \varphi(x)\, dx,$$

где се фактор θ налази између вредности 1 и $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$.

Поступак се, исто тако, примењује на парцијалне изводе. На пример, уколико је дата једначина

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

у свакој области простора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у коме је интеграл V реалан и у коме је сваки од извода $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ сталног знака, интеграл се може поступком г. Петровића довести у облик

$$V = F + \theta\Psi,$$

где су V *и* F *функције од* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *познатог облика, а* θ *је фактор чије се вредности налазе између* 1 *и* $\sqrt{n}$.

СВОЂЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Г. Петровић је дао један потупак свођења једначине

$$\varphi(x)y'^2 + \psi(x)yy' + \chi(x)y^2 + f(x) = 0 \tag{64}$$

на канонични облик

$$y' = F(t) + y^3. \tag{65}$$

Иста ова једначина своди се, сменом променљиве на коју је указао г. Петровић, на једначину

$$y'^2 + y^2 = \Phi(t), \tag{66}$$

на коју се наилази у више проблема механике и више геометрије.

Једначину (65) проучавао је у својим радовима г. Жозеф Лиувил[2], посматрајући је са неколико становишта и нашавши више случајева интеграбилности, као и г. Апел[3], који је о њој написао једну продубљену студију. Ови резултати тако постају примењиви и на једначине (64) и (66); може се, на пример, изградити и једна теорија инваријаната тих једначина.

Касније је г. М. Хајман[4] показао један друкчији начин свођења једначине (64) на облик (66).

*

Нека је дата линеарна једначина са десном страном

$$f_0 \frac{d^n y}{dx^n} + f_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + f_{n-1} \frac{dy}{dx} + f_n y = F(x)$$

написана у скраћеном облику

[2] *Comptes rendus de l'Academie des Sciences*, 6. септембра 1886. и 12. септембра 1887.

[3] *Journal de Mathematiques,pures et appliquées*, 4. серија, т. V, 1889.

[4] *Journal für reine und angew. Mathematik*, Bd. 119, Heft III, 1898.

(67) $$\Delta[x,y]=F(x).$$

Познато је да се може формирати један *партикуларни* интеграл једначине (67) помоћу општег интеграла једначине

$$\Delta[x,y]=0$$

квадратурама, при чему границе интеграла зависе од променљиве x. Лагранжова метода даје такав интеграл помоћу n квадратура, док га Кошијева изражава помоћу само једне квадратуре.

Г. Петровић износи на видело следећу чињеницу.

Постоје специјалне функције $\lambda(x,\alpha)$ *променљиве* x *и променљивог параметра* α *које остају исте за све једначине* (67) *и имају својство да је могуће образовати један партикуларни интеграл ове једначине уз помоћ партикуларног интеграла једначине*

$$\Delta[x,y]=\lambda(x,\alpha),$$

било каква да је десна страна једначине (67).

Међу оваквим функцијама $\lambda(x,\alpha)$ налазе се, на пример, функције

$$\log(1-2\alpha x+x^2),\ \frac{1}{1-2\alpha x+x^2},\ \frac{x}{1-2\alpha x+x^2}.$$

Одређивање партикуларног интеграла једначине (67), где је $F(x)$ било која функција променљиве x која има $x=0$ као обичну тачку и реална је за реално x, своди се на одређивање по једног партикуларног интеграла сваке од двеју једначина добијених замењивањем у (67) функције $F(x)$ једном нулом а други пут, на пример, изразом $\log(1-2\alpha x+x^2)$. Интеграл једначине (67) тада се добија у облику одређеног интеграла чије су границе апсолутне константе, независне од облика једначине (67).

ЈЕДНА КЛАСА ИНВАРИЈАНАТА ИНТЕГРАЛНИХ КРИВИХ

Кад је дата једначина

(68) $$f(x,y,y',\dots)=0,$$

могу постојати изрази Ω са диференцијалним или интегралним члановима, по x, који, према једначини (68), кад се са једне тачке M_1 пређе на другу тачку M_2 равни (x,y), преко извесне интегралне криве, варирају само са положајем ових тачака, а не зависе од те интегралне криве.

Израз Ω представља неку врсту инваријанте за једначину (68), у односу на њене партикуларне интеграле. Очигледно је, уосталом, да постојање једне инваријанте Ω повлачи постојање бесконачно много других.

Овакве инваријанте су посебно значајне када представљају одређене геометријске објекте. Тада се може одредити величина таквог једног објекта без потребе да се интеграли једначина (68), тако се могу учинити очигледним разне геометријске особине интегралних кривих, итд.

Г. Петровић указује на једноставне случајеве у којима се лако уочавају такве инваријанте. На пример, у случају кад се једначина (68) може довести у облик

$$\Phi + \eta(x, y)y' + \xi(x, y) = 0,$$

где је Φ известан израз са члановима, диференцијалним или интегралним, од $x, y, y', y'', \ldots$, а функције ξ и η зависе само од x и y и испуњавају услов

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

Израз

$$\int_{x_0}^{x} \Phi \, dx$$

представљаће једну инваријанту за једначину (68).

За Рикатијеву једначину

$$y' + y^2 = f(x)$$

таква инваријанта је величина површине коју производи ротација интегралне криве око x-осе.

За једначину

$$y'^2 + y^2 = f(x)$$

једна таква инваријанта је лук интегралне криве, посматран као функција поларних координата $x = \theta$ и $y = p$.

Свака једначина првог реда

$$f(x, y, y') = 0$$

има за инваријанту Ω површину ограничену x-осом, углом криве $y = \varphi(x)$ која представља закон варирања са x кривине интегралне криве и двема ординатама на крајевима тог лука.

ПЕТРОВИЋЕВО ДИРЕКТНО ПРОУЧАВАЊЕ РЕШЕЊА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Многобројни резултати до којих је Михаило Петровић дошао у области квалитативне анализе решења диференцијалних једначина веома су интересантни, инспиративни, вероватно и најзначајнији од свих његових математичких резултата. У радовима који су изложени у овој књизи, М. Петровић најчешће полази од неких својстава диференцијалне једначине (или неких функција које улазе у саму диференцијалну једначину), а затим, врло вешто користећи једноставан математички апарат, долази до низа интересантних резултата везаних за решење (или решења) полазне диференцијалне једначине. Описани поступак је и суштинска и општа карактеристика рада у квалитативној анализи диференцијалних једначина. У њој се не тражи решење диференцијалне једначине, које се некада и не може наћи, а некада може али је веома компликовано, па је, као такво, неупотребљиво, већ се покушава дати што је могуће више информација о том, непознатом решењу на бази карактеристика саме једначине.

Претходно речено се може илустровати следећим примером. Нека је дата диференцијална једначина

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = x^{-\frac{4}{3}}.$$

Ова специјална Рикатијева једначина може се решити после великог броја употребљених смена. Када се реши, дефинитивно се добија да је њено опште решење

$$\frac{y(3x^{1/3} + x^{1/3}) + 3}{y(3x^{2/3} - x^{1/3}) - 3} = ce^{6x^{1/3}}$$

или у облику

$$y = \frac{3(ce^{6x^{1/3}} + 1)}{ce^{6x^{1/3}}(3x^{2/3} - x^{1/3}) - 3x^{2/3} - x^{1/3}}.$$

Очигледно је да се, иако је добијено опште решење полазне једначине $y = y(x,c)$, о том решењу може имати врло мало информација.

Михаило Петровић је у низу радова (нпр. [4], [8], [1], [15]*, Белман) проучавао Рикатијеву једначину. У коначном облику

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + f(x)$$

и за њено решење констатовао низ интересантних својстава, што се види из наведених радова.

Начин писања М. Петровића, с математичке тачке гледишта, није исувише прецизан. Стил му је занимљив, а текст пун идеја (често непрецизних и недовршених), па је био, а вероватно ће и убудуће бити, инспиративан за нове научне раднике. Није зато чудно, већ је потпуно логично, што су његовим руковођењем, докторирала дванаесторица српских математичара. То су: Младен Берић, са темом „Фигуративни полигони диференцијалних једначина првог реда и њихова веза са особинама интеграла", 1912; Сима Марковић: „Општа Рикатијева једначина првог реда", 1913; Тадија Пејовић: „Нови случајеви интеграбилитета једне важне диференцијалне једначине првог реда", 6. 2. 1923; Радивоје Кашанин: „О аналитичким облицима мултиформних функција", 20. 11. 1924; Јован Карамата: „О једној врсти граница сличних одређеним интегралима", 22. 3. 1926; Милош Радојчић: „Аналитичке функције представљене конвергентним низовима алгебарске функције", 30. 1. 1928; Драгослав Митриновић: „Истраживање о једној важној диференцијалној једначини првог реда", 24. 10. 1933; Данило Михњевић: „Структура парцијалних једначина са датим интегралима карактеристика", 21. 3. 1934; Константин Орлов: „Аритметичке и аналитичке примене математичких спектара", 6. 12. 1934; Петар Музен: „О базама непрекидних функција", 22. 4. 1937; Драгољуб Марковић: „Границе корена алгебарских једначина", 25. 3. 1938.

Од свих наведених доктора наука једино се Милош Радојчић и Петар Музен нису бавили диференцијалним једначинама. Сви остали јесу, у мањој или већој мери. Природно је да су и неки од ученика Михаила Петровића имали својих ученика. То се нарочито односи на Тадију Пејовића, Јована Карамату, Драгослава Митриновића и Константина Орлова. Тако је деловањем М. Петровића настала и постојала и у свету чувена и призната „**београдска школа диференцијалних једначина**".

Смиреност професионалног риболовца, изузетна образованост, радозналост истраживача, скромност наслеђена од оца Никодима, доктора теологије, креативност уметника као и друге бриљантне карактеристике Михаила Петровића учиниле су га апсолутним стожером „београдске школе диференцијалних једначина" и „причислиле" у великане наше науке.

Резултат до кога је дошао Михаило Петровић у раду [4] (који је публикован у престижном часопису Mathematische Annalen 1899. године у Лајпцигу) веома је интересантан. Не мењајући му суштину, већ сасвим незнатно форму, може се формулисати и доказати на следећи начин.

---

* Број у загради је позив на Петровићеву расправу наведену у садржају ове књиге.

Нека је дата област Ω и нека су функције $F_1(x,y)$, $F(x,y)$ и $F_2(x,y)$ непрекидне на том скупу, при чему је

(1) $$F_1(x,y) < F(x,y) < F_2(x,y) \quad (x,y) \in \Omega.$$

Нека су, даље, $y_1(x)$ $y(x)$ и $y_2(x)$ редом решења диференцијалних једначина

(2) $$y' = F_1(x,y),\ y' = F(x,y) \ \text{ и } \ y' = F_2(x,y),$$

која задовољавају заједнички почетни услов

(3) $$y_1(x_0) = y(x_0) = y_2(x_0) = (y_0) \quad (x_0, y_0) \in \Omega..$$

Тада је за $x > x_0$ у области Ω

(4) $$y_1(x) < y(x) < y_2(x).$$

Доказ.

Докажимо једну од двоструке неједнакости. Нека је, на Ω, $F(x,y) < F_2(x,y)$ и нека су $y(x)$ и $y_2(x)$ решења једначина

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \quad \text{и} \quad \frac{dy_2}{dx} = F_2(x,y_2),$$

$$y(x_0) = y_2(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in \Omega..$$

Тада је за $x = x_0$

$$\left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = F_2\big(x_0, y_2(x_0)\big) - F\big(x_0, y(x_0)\big) = F_2(x_0, y_0) - F(x_0, y_0) > 0.$$

Ако се уочи функција

$$\alpha(x) = y_2(x) - y(x),$$

лако се констатује да она задовољава услове

а) $\alpha(x_0) = 0$,

б) $\alpha'(x_0) > 0$,

па је $\alpha(x)$ растућа у малој околини x_0, тј.

$$\alpha(x) > 0 \Leftrightarrow y_2(x) - y(x) > 0 \Leftrightarrow y_2(x) > y(x)$$

за $x > x_0$.

(Обратно, за $x < x_0$ је $y_2(x) < y(x)$). Дакле, неједнакост (4) важи у околини $x = x_0$ ($x > x_0$).

Да би се доказало да неједнакост (4) важи у свој области Ω, може се претпоставити супротно. Нека је тачка (x_1, y_1) ($x_1 > x_0$) прва тачка у којој је нарушена неједнакост (4), тј. таква да је $y_2(x_1) = y(x_1)$.

Тада је

$$\left(\frac{dy_2}{dx}-\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} = F_2\big(x_1, y_2(x_1)\big) - F\big(x_1, y(x_1)\big) = F_2\big(x_1, y(x_1)\big) - F\big(x_1, y(x_1)\big) > 0.$$

Имајући у виду да је за $x = x_1$

$$y_2(x) - y(x) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx}\big(y_2(x) - y(x)\big) > 0$$

следује, на основу претходно доказаног, да је за $x < x_1$ (блиско x_1) $y_2(x) - y(x) < 0 \Leftrightarrow y_2(x) < y(x)$, што је супротно претпоставци да је (x_1, y_1) прва тачка „десно“ од x_0 у којој је нарушена неједнакост (4). Дакле, таква тачка не постоји и у области Ω је за $x > x_0$ $y(x) < y_2(x)$.

Напомена. – Друга страна двоструке неједнакости може се доказати на аналоган начин.

Неједнакост типа (1)–(4) јавља се у раду [1] Михаила Петровића, публикованом три године раније, 1896. године, у Прагу, али не у општем облику као у раду [4]. У том раду се доказује следећа теорема.

Нека су дате три диференцијалне једначине

$$\frac{dY_1}{dx} = \varphi(x)\big(Y_1 - F_1(x)\big)\big(Y_1 - F_2(x)\big), \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\big(y - f_1(x)\big)\big(y - f_2(x)\big), \tag{6}$$

$$\frac{dY_2}{dx} = \varphi(x)\big(Y_2 - \Phi_1(x)\big)\big(Y_2 - \Phi_2(x)\big), \tag{7}$$

за које у интервалу $(0, \alpha)$ важи

$$F_1(x) \le f_1(x) \le \Phi_1(x) \quad \text{и} \quad F_2(x) \le f_2(x) \le \Phi_2(x),$$

где су $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ позитивне, неопадајуће, функције у интервалу $(0, \alpha)$. Нека су, даље, $Y_1(x)$, $y(x)$ и $Y_2(x)$ редом решења диференцијалних једначина (5), (6) и (7), таква да је

$$Y_1(0) = y(0) = Y_2(0) = 0. \tag{8}$$

Тада је за $0 < x < \alpha$

$$Y_1(x) < y(x) < Y_2(x).$$

Овај резултат је специјалан случај неједнакости из рада [4], што се јасно види ако се упореде десне стране диференцијалних једначина (5), (6) и (7) и при том имају у виду услови (8).

Неједнакостима истог типа посвећен је и рад [2] из 1897. године. У њему се доказује неколико тврђења, при чему је, вероватно, најинтересантније следеће.

Претпоставимо сада да се у једначини

$$(\alpha) \qquad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

P и Q замењује другим функцијама $P_1(x)$ и $Q_1(x)$, затим са $P_2(x)$ и $Q_2(x)$, за које се једначина може интегралити, а које су такве да корени $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ (са $\varphi_1 < \varphi_2$) карактеристичне једначине нове једначине

$$(\beta) \qquad u'' + P_1(x)u' + Q_1(x)u = 0$$

и корени $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ $(\psi_1 < \psi_2)$ једначине

$$(\gamma) \qquad v'' + P_2(x)v' + Q_2(x)v = 0$$

испуњавају услове

$$(\delta) \qquad \begin{cases} \varphi_1 \le f_1 \le \psi_1 \\ \varphi_2 \le f_2 \le \psi_2 \end{cases}$$

(f_1 и f_2 су корени карактеристичне једначине за једначину (α) тј. решења једначине $r^2 + P(x)r + Q(x) = 0$ и да су већи корени φ_2 и ψ_2 нерастуће функције у интервалу (a, b).

Тада је у интервалу (a, b) стално

$$\begin{cases} u < y < v \text{ ако је } A > 0 \\ v < y < u \text{ ако је } A < 0, \end{cases}$$

где је $y(a) = u(a) = v(a) = A$.

Напомена. – Имајући у виду познату везу Рикатијеве једначине и линеарне хомогене диференцијалне једначине другог реда (α), резултати до којих је дошао Михаило Петровић у радовима [1] и [2] су, логично, повезани.

Дакле, радови [1] и [2] се могу схватити као најава изванредног резултата до кога је дошао Михаило Петровић у раду [4].

У математичкој литератури, посебно совјетске, односно руске провениијенције, одомаћило се да се неједнакости облика (1)–(4) везују за руског математичара С. А. Чаплигина.

Ради се о томе да је Чаплигин 1919. године публиковао рад: *Основания новога способа приближеного интегрирования дифференциальних уравнении* у коме, између осталих, доказује следеће тврђење.

„Нека смо нашли функцију $t = t(x)$ са следећим својствима:

1) $t_0 = y_0$ за $x = x_0$;

2) на интервалу (x_0, X) за $x > x_0$ резултат замене t уместо y у једначину

$$(9) \qquad \frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0,$$

већи је од нуле, тј.

(10) $$\frac{dt}{dx} - f(x,t) > 0.$$

Претпоставимо даље да на интервалу (x_0, X) тражено решење y и функција t немају сингуларних тачака. Тада за свако x веће од x_0, а мање од X важиће неједнакост

(11) $$t > y.$$

Очигледно је да је ова неједнакост суштински блиска неједнакости (1)–(4) Михаила Петровића. Ову сличност је приметио наш математичар Милорад Бертолино, па је у раду „Неке функционалне неједнакости добијене применом Чаплигинове методе и упоређивање са резултатима М. Петровића“, Весник Друштва мат. и физ. НРС, IX, Београд, 1957, 87–94, навео Петровићеву теорему, без доказа, и написао: „У Петровићевој књизи „Рачунање са бројним размацима“, Београд 1932, наведена је, између осталих, следећа теорема, општија од претходне, а *чији је садржај исти као код Чаплигинове теореме цитиране на почетку овога рада*“ (примедба Љ. П.).

Десет година касније, Милорад Бертолино се враћа овим неједнакостима у раду “Priorité de Michel Petrovitch relative an théoremè de Tchaplyguine sur les inégalités différentielles du premier ordre”, Математички весник 4 (19), Београд 1967, стр. 165–168. У том раду се утврђује приоритет резултата Михаила Петровића у односу на до тада названу „Чаплигинову неједнакост“. У њему М. Бертолино објашњава да питање приоритета није разрешио у раду публикованом десет година раније зато што му тада није био познат рад Михаила Петровића “Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux èquations differentielles du premier ordre”, Math Annalen, 54 Band, 3 Heft, pp. 417–436, 1899. год., већ (показала се идентична) теорема унета у књигу „Рачунање са бројним размацима“ из 1932. године. Бертолино у овом тексту пише: „Интересантно да смо приказали ову Петровићеву теорему у нашем раду.“ „Неке функционалне неједнакости добијене применом Чаплигинове методе и упоређивање са резултатима М. Петровића“, без да смо се одважили да говоримо о приоритету јер смо 1957. године имали у виду књигу Михаила Петровића „Рачунање са бројним размацима“ у којој он не даје библиографију (својих радова) следећи своје (утврђене) навике“.

На тему приоритета неједнакости типа (1)–(4) и (9), (10) и (11) Милорад Бертолино и Драган Трифуновић написали су чланак *Sur le Théorème fondamental de S. A. Čapligin sur l'inégalité différentielle du premier ordre*, Mathematica balkanica, Београд, 1971. год., стр. 11–18. У њему, уз доказ да резултат Михаила Петровића из 1899. године има приоритет у односу на Чаплигинов резултат из 1919. године, доказано је и да приоритет на неједнакости (9), (10) и (11) припада Пеану (1858–1932), тј. да је он до тих неједнакости дошао 1886. године и публиковао их у раду “Sull' integrabilita delle equazioni differenziali di primo ordine”, Torino 1886.

Треба нагласити да утврђени приоритети Михаила Петровића и Пеана не умањују битно велику улогу Чаплигина, који је дошао до фундаменталног резултата везаног за диференцијалну неједнакост код нелинеарних диференцијалних једначина n-тог реда ($n \in N$, $n > 1$). Чаплигин је и творац познате „Чаплигинове методе“ за налажење приближних решења диференцијалних једначина која се суштински базира на поменутим неједнакостима а која се, због изванредне брзине конвергенције, и сада користи без обзира на одређене тешкоће које се јављају у целој примени. О неким проблемима при реализовању Чаплигинове методе и предностима методе Ричардсона у односу на њу може се детаљније видети нпр. у чланку Душана Тошића и Љубомира Протића "Global Error Estimation in Ordinary Initial Value Problems Based on Two-Sided Approximation", ZAMM Z, Math. Mech. 66 (1986) 5, pp. 332–334.

Многи наши математичари су у својим истраживањима користили неједнакост Михаила Петровића (1)–(4). Најпре, у извесном смислу, Сима Марковић у својој докторској дисертацији 1913. године (шест година пре Чаплигина), али не цитирајући у литератури М. Петровића.

Милорад Бертолино, који је свакако од београдских математичара највише проучавао и најбоље познавао радове из диференцијалних једначина Михаила Петровића, у двадесетак својих радова користио је на различите начине неједнакост (1)–(4). Најчешће је на бази компаративних једначина долазио до низа својстава решења полазне диференцијалне једначине. Осим тога, повезујући методу ретракта Тадеуша Вашевског (Tadeusz Waźevski) са неједнакостима облика (1)–(4) дошао је до специфичне синтезе тих метода, корисне за проучавање решења диференцијалних једначина. У његовим проучавањима су, најчешће, рубови цеви (који се појављују у методи ретракта) одређени компаративним једначинама добијеним на бази неједнакости (1)–(4). Низ следбеника Милорада Бертолина у својим радовима користи такође Петровићеву неједнакост, не претендујући на потпуност. Наведимо да су, више или мање, радове тог типа публиковали Радивоје Милошевић, Звездана Радашин, Божо Врдољак, Љубомир Протић, Лаза Радовић, Љиљана Стефановска и Стеван Бојовић.

У раду [4], а потом и у књизи „Рачунање са бројним размацима“, разматра се диференцијална једначина

$$y' = F(x, y, f(x)). \tag{12}$$

За њу се доказује да ако под одређеним условима важи да је

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x) \tag{13}$$

и ако су $u(x)$ и $v(x)$ решења диференцијалних једначина

$$u' = F(x, u, \varphi(x)), \quad v' = F(x, v, \psi(x)), \tag{14}$$

која задовољавају заједнички почетни услов

$$u(x_0) = y(x_0) = v(x_0), \tag{15}$$

($y(x)$ је решење једначине (12)),

тада за $x \in (x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ $(h_1, h_2 > 0)$ важи неједнакост

$$u(x) < y(x) < v(x). \tag{16}$$

Дакле, ако су дате диференцијалне једначине (12) и (14), и ако важи неједнакост (13), тада Михаило Петровић доказује да, у околини x_0, важи и неједнакост за решења (16).

Ове неједнакости су интересантне али, чини нам се, имају мању употребну вредност него неједнакости (1)–(4). Уосталом, и само долажење до неједнакости (16) из неједнакости (13), према Петровићевим речима, само је примена резоновања при доказивању неједнакости (1)–(4). Петровић, доказујући ове неједнакости у раду [4], дословно пише: „Применимо претходна разматрања (тј. доказ једнакости (1)–(4) прим. Љ. П.) на једначину (12)."

Канонски облик Рикатијеве једначине

$$y' = y^2 + f(x) \tag{17}$$

и њено уопштење облика

$$y'^2 = y^2 + f(x) \tag{18}$$

присутни су у чланцима [4], [5], [8], [15], [18] и [19] Михаила Петровића публикованим у овој књизи. У радовима [10], [11], [15] и [18] проучава се линеарна једначина другог реда облика

$$y'' = f(x)y, \tag{19}$$

која се, као што је познато, одговарајућом сменом своди на једначину (17).

У већини тих радова једначине (17), (18) и (19) послужиле су као примери и илустрације добијених, општијих, резултата.

У радовима [10], [11], [15] и [19] детаљније се проучавају интегрални случајеви неких од тих једначина. У тим чланцима се доказује и низ интересантних резултата. Наведимо два.

а) Нека је дата интеграбилна једначина

$$y' = y^2 + f(x).$$

Датој интеграбилној једначини може се придружити бесконачни низ функција од x

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

такав да свака једначина

$$y' = y^2 + \left(f(x) + \lambda_n\right)$$

такође буде интеграбилна и то без икакве додатне квадратуре.

б) Нека је дата неинтеграбилна једначина

$$(y')^2 + y^2 + f(x) = 0,$$

за коју се зна збир два партикуларна интеграла y_1 и y_2. Ако се означи са $\theta = y_1 + y_2$, тада је

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}\left(\theta + Ae^{-\int_{x_0}^{x}\frac{\theta}{\theta'}dx}\right) \\ y_2 = \dfrac{1}{2}\left(\theta - Ae^{-\int_{x_0}^{x}\frac{\theta}{\theta'}dx}\right) \end{cases} \qquad \begin{matrix} A - \text{constanta} \\ (A \in \text{const.}) \end{matrix}$$

тј. y_1 и y_2 се добијају помоћу једне квадратуре.

Инспирисани радовима Михаила Петровића, многи београдски математичари су, касније, проучавали диференцијалне једначине (17), (18) и (19) (једначина (18) је, због тога, у жаргону називана и „београдска диференцијална једначина"). Поменимо неке од аутора који су изучавали те једначине: Сима Марковић (у докторској дисертацији); Тадија Пејовић (у докторској дисертацији и у неколико радова); Драгослав Митриновић (у докторској дисертацији и у око двадесет пет радова); Милорад Бертолино у десетак радова. М. Бертолино је проучавао и генералисану једначину, једначине (18), тј. једначину $y'^n + y^m = f(x)$; $f(x) > 0$, $(n, m \in N)$. Уводећи појам „зоне квалитативног утицаја" зависно од својстава функције $\sqrt[m]{f(x)}$ (у раду "Zone d'influence qualitative de certaines fonctions figurant an deuxiéme membre des équations différentielles" Bull. sci RSF Yougoslavie, Section A–Zagreb, 1967, стр. 2, долази се до низа истих својстава решења проучаване диференцијалне једначине. Вероватно да се ова идеја М. Бертолина може применити и на друге случајеве диференцијалних једначина облика (12), где функција $f(x)$ поседује нека квалитативна својства (типа: ограничености, конвергенције, монотоности итд.).

У чланку [6], [9], [11], али и у радовима "Intégrales premières à restrictions", Académie royale de Serbie, Paris 1929. и "Intégration qualitative des équations différentielles", Mémorial des sc. math. Paris, 1931, М. Петровић проучава диференцијалну једначину (19). За њу доказује два тврђења (зависно од тога да ли је функција $f(x)$ позитивна или негативна). Једно од та два тврђења је следеће.

Сваки реални интеграл $y(x)$ једначине (19), чији се први извод анулира у тачки x_0 из интервала (a, b), у коме је функција $f(x) > 0$, може се написати у облику

$$y = \frac{y_0}{2}(e^X + e^{-X}),$$

где је $X = (x - x_0)\sqrt{f(\xi)}$, $\xi \in (x_0, x)$, и то за сваку вредност $a < x < b$. Поред тога, за осцилаторна решења се *показује* да између две узастопне нуле x_1, x_2 имају облик $y = y_0 \cos x$, где је $X = (x - x_0)\sqrt{f(\xi)}$, $\xi \in (x_1, x_2)$ одакле је $x_1 = x_0 - \frac{\pi}{2}\sqrt{f(\xi)}$, $x_2 = x_0 + \frac{\pi}{2}\sqrt{f(\xi)}$.

Проблеми везани за осцилаторна решења проширују се на *неке поткласе* опште једначине првог реда $y' = f(x, y)$, посебно изложене у [9].

У скорије време, овај резултат је наведен у познатој књизи Белмана (R. Bellman, "Stabillity theory of differential equations", McGrow-Hill, New York, Toronto, London 1953, ch. 6. Ex. 16, Ex. 17).

Примедба. – Ако су M и N константе такве да је

$$N \leq f(\xi) \leq M \quad \text{за} \quad \xi \in (x_0, x),$$

тада је интеграл $y(x)$ уоквирен кривом

$$\frac{y_0}{2}(e^{X_1} + e^{-X_1}) \quad \text{и} \quad \frac{y_0}{2}(e^{X_2} + e^{-X_2}),$$

где је $X_1 = (x - x_0)\sqrt{N}$, $X_2 = (x - x_0)\sqrt{M}$.

Михаило Петровић доказује овај резултат (као и аналоган за $f(x) < 0$) користећи теорему о средњој вредности интеграла.

Милорад Бертолино је 1958. године у чланку „Примедба у вези са једним ставом Михаила Петровића", Весник Друштва мат. и физ. СРС, X, Бгд., стр. 115–118, доказао исти овај резултат користећи другачију технику. Превео је једначину (19) на Рикатијеву једначину $z' + z^2 = f(x)$, а затим користио компаративне једначине $z' = M - z^2$ и $z' = N - z^2$ (где M и N имају исти смисао као у претходној примедби) које су једначине са раздвојеним променљивим.

Исти аутор је исте резултате добио и коришћењем методе ретракта (видети "Sur la limite (finie on infinie) d'application des inégalités de Tchapliguine de second ordre", Ann. di Mat. pura ed appl. (IV), Vol. LXII, pp. 113–126, Bologna, 1965).

Петровић је 1929. године објавио опсежну расправу у којој је, следећи своје идеје из ранијих радова о аналитичкој теорији, увео појам првог интеграла са ограничењима, као и појам квалитативног првог интеграла (што је поменуо у делу „Рачунање са бројним размацима", види књигу 8 овог издања, стр. 23–26).

Нека је F функција променљивих $x, y, y', \ldots, y^{(p)}$, где је $y = y(x)$, и почетних услова $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(p)}$.

Ако је

$$F = \text{const.}, \tag{20}$$

дуж сваког решења y диференцијалне једначине

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad n > p, \tag{21}$$

онда Петровић преузимајући тада уобичајену дефиницију, релацију (20) назива први интеграл. Природније је и боље за разумевање његовог рада функцију F са особином (20) звати првим интегралом, што Петровић доцније и сам чини.

О првим интегралима он каже:

„Познавање једног или више првих интеграла за једну једначину или за систем једначина, поједностављује њихову *интеграцију* и испитивање њихових својстава."

Појам првог интеграла значајан је у механици јер (20) изражава законе конзервације (нпр. енергије).

Петровић уводи појам првог интеграла са ограничењима тако што захтева да особина (20) важи само за неке од интеграла једначине (21) који имају извесну аналитичку особину, на пример да буду целе или мероморфне функције, итд.

Тај појам му омогућује да добије нове информације о нпр. мероморфним интегралима алгебарске диференцијалне једначине

$$g(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{22}$$

Примера ради наводимо овај резултат. Нека је $R(x, y, y', \dots, y^{(p)})$ рационална функција по свим променљивим са константним коефицијентима a_k. Петровић даје услове за коефицијенте a_k, да једначина (22) за своје мероморфне интеграле има први интеграл $R(x, y, y', \dots, y^{(p)}) = r(x)$, где је $r(x)$ рационална функција.

Сличан резултат даје се и да први интеграл буде полином, који се, у случају када једначина (22) не садржи експлицитно x, своди на константу.

Метод доказивања тих резултата, поред тога што користи једну Пикарову теорему о нулама униформних функција, у потпуности се ослања на поступак из Петровићеве тезе (види прву књигу овог издања), који се и овде излаже у потребној мери.

Када је реч само о реалним интегралима једначине (21), али и система $y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, уводи се и појам квалитативног првог интеграла. Под тим се подразумева, уместо релације (20) (односно функције F), релација

$$F = \theta(x)$$

где је $\theta(x)$ дефинисана у размаку (a, b) и има одређене особине (нпр. ограниченост, монотонија, ...). Овде се, међутим, дозвољава да функција F садржи извод истог реда као и сама диференцијална једначина.

Квалитативни први интеграл Петровић користи за квалитативну анализу појединих типова једначина и добија неке особине решења, махом оквирне криве, број нула и њихово растојање, што је већ доказао и у ранијим радовима.

Ова расправа, као корисно допунско штиво, наводи се у књизи F. Tricomi, "Differential equations", Blackie & son, London, 1966.

Радови [14], [15] и [17] посвећени су вези између теорије диференцијалних једначина и аритметичких особина решења. Те особине претежно се односе на просте бројеве, па се тако добија веза са теоријом бројева. Тиме се, сматра Петровић, отвара посебно привлачно поље истраживања, иако не мисли да ће се моћи да изведу закључци занимљиви за теорију бројева. Међутим, резултати које даје јесу занимљиви. Један од њих казује да постоје аналитичке функције (наводи и примере) који задовољавају неку алгебарску једначину и имају као једине реалне нуле просте бројеве мање од неке константе. Други резултат који наводимо је следећи.

Постоје класе алгебарских диференцијалних једначина било ког реда чији општи или партикуларни интеграл тежи за $x \to \infty$ граничној вредности која се изражава помоћу простих бројева који не прелазе фиксни број m.

На пример, за решења $y(x)$ једначине

$$(1-y^2)y''+2yy'^2+f(x)(1-y^2)y'=0,$$

важи
$$y(x)\to\sin(c+2\pi Sm),\qquad x\to\infty;$$

овде је
$$f(x)=1-P_m'(x)/P_m(x),$$

$$P_m(x)=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\ldots+\frac{x^{m-1}}{m},$$

$$S_m=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots,$$

где се сабирање врши преко простих бројева који не прелазе m.

Врло интересантан је мали чланак Михаила Петровића „Осетљива места обичних и диференцијалних једначина“, Мат. вес. Бгд., мај 1939. год. У њему се, на непуне три стране, разматрају (како их назива аутор) осетљива места обичних и диференцијалних једначина. Ради се, у ствари, о томе да када су дате неке једначине које у себи садрже неки параметар, нпр. α, тада је могуће да решења једначина имају извесне карактеристике при $\alpha\neq a$, а потпуно другачије за $\alpha=a$, чак и када се α врло мало разликује од a.

Нека је, нпр., дата диференцијална једначина

$$y'^2+y^2=1+\alpha u(x), \tag{23}$$

где је α реалан параметар, а $u(x)$ нека монотона функција.

На први поглед би се рекло да ће природа решења диференцијалне једначине (23) бити иста (или слична) за, рецимо, $\alpha=-0,\underbrace{00\ldots0}_{9\ \text{нула}}1$, $\alpha=0$ или $\alpha=+0,\underbrace{00\ldots0}_{9\ \text{нула}}1$. Михаило Петровић доказује да је претходно речено нетачно. Он врло лако показује да ће за свако α (па и блиско нули) ова решења диференцијалних једначина (23) бити монотона (растућа или опадајућа), али и да ће за $\alpha=0$ бити сасвим различите природе – биће периодичне функције. При томе му је доказ изузетно једноставан и пун духа. Нпр., да би доказао да су за $\alpha\neq0$ сва решења монотона, он диференцијалну једначину „закомпликује“ диференцирањем, па потом, користећи ту једначину другог реда, долази до закључка о монотоности решења (ту је заиста све једноставно само се требало сетити!).

Имајући овакве примере у виду, Михаило Петровић пише: „... образац, који изражава какав аналитички, механички, физички итд. факт може имати какво своје осетљиво место у које, само ако се дирне, факт из основа мења свој битни карактер. ...(има) случајева да незнатна измена једног фактора у појави изазива несразмерно велику промену битног карактера ове.“ Најзад, закључује: „такве врсте појава дају, у исто време, и инструктиван пример несигурности закључака изведених *резонујући тачно* на једначини која би била само *приближна*, а приближна би била стога што је при њеном формирању или њеној употреби нешто што се сматрало врло слабо и занемарљиво фактички и занемарено. Ма колико се мало приближна једначина разликовала од тачне, резултат може бити битно различит од онога што би се имао са тачном једначином."

Аутор овог приказа могао би да дода и следеће. Чести су случајеви да се, нпр., системи нелинеарних диференцијалних једначина замењују њиховим линеарним апроксимацијама (у теорији стабилности итд.) јер се ове последње лакше анализирају, али има и случајева (најчешће!) када реални модел није потпуно познат истраживачу, већ су му познате само доминантне карактеристике.

Идеја Михајила Петровића презентирана у овом раду инспирисала је М. Бертолина да га детаљно анализира са математичке тачке гледишта (видети „Петровићево директно проучавање решења диференцијалних једначина", Михаило Петровић 1868–1943) и Живојина Ћулума (видети чланак Михаила Петровића „Осетљива места обичних и диференцијалних једначина", „Михаило Петровић 1868–1943", стр. 135–140) који детаљно анализира ту идеју са аспекта физике на примеру Шредингерове једначине.

Има смисла повезати размишљања Михаила Петровића изложена у овом чланку са писањем значајног немачког физичара Валтера Хајтлера (Walter Heitler). У књизи "Die Natur und Göttliche", Verlag, Klett, Balmer, Zug. 1967, Хајтлер најпре констатује једноставну чињеницу: „Да се физички закони изражавају на математички начин." Затим пише: „Оно што се данас проучава у физици су ствари које постоје само под вештачким условима". Најзад, Хајтлер каже: „Ниједан природни закон се не слаже сасвим тачно (није сасвим тачан)." Слично Хајтлеру тврди и његов пријатељ и сарадник нобеловац Хајзенберг (Heisenberg): „Природа се ужасава потпуне тачности и прецизности изнад свега."

Дакле, ове физичке једначине су, према Хајтлеру и Хајзенбергу (али и другим ауторима) само приближне, а како је утврдио Михаило Петровић, закључци о решењима таквих једначина су крајње несигурни, па смо ми сви у ситуацији да реално не познајемо физичка факта.

Интересантно је упоредити ове закључке математичара и физичара са констатацијом теолога владике Николаја Велимировића: „Ми не знамо физичке законе јер они и не постоје", тј.: „физички закони само су символи моралних закона" (Владика Николај, „Номологија", Изабрана дела, књ. III, Глас цркве 1996).

Једначину

$$y' = \varphi(x)\left[f_1(x) - y\right]\ldots\left[f_n(x) - y\right], \tag{24}$$

која се помиње у раду [1] Михаила Петровића, назива хемијском једначином, због њених примена у хемији. Очигледно је да се из једначине (24) за $n = 1, 2, 3$ добијају линеарна Рикатијева и Абелова једначина прве врсте, које су доста проучаване у математичкој литератури. Ако се уочи једноставна једначина

$$y' = (y-1)(y-2)$$

(која је специјалан случај једначине (24) при $n = 2$) релативно лако се констатује (имајући у виду да је $y' > 0$ за $y > 2$ и $y < 1$, као и да је $y' < 0$ за $1 < y < 2$) да се сва решења уочене једначине, која за $x = x_0$ задовољавају услов $y(x_0) < 2$, „приближавају“ тривијалном решењу $y = 1$ те једначине када $x \to +\infty$. Такође се може констатовати да се другом тривијалном решењу, $y = 2$, не „приближавају“ решења уочене једначине када $x \to +\infty$.

Нека је, даље, дата диференцијална једначина

$$y' = [y - f_1(x)][y - f_2(x)],$$

где су $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрекидне и диференцијабилне функције за $x \geq x_0$, при чему је $f_1(x)$ монотоно растућа, а $f_2(x)$ монотоно опадајућа функција. Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ испуњавају и следеће услове

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = C_1, \quad \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = C_2 \quad \text{и} \quad f_1(x_0) > f_2(x_0);$$

тада, слично претходном, може да се докаже да постоји бесконачно много решења које имају својство да је $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = C_2$.

Суштина је у томе да се докаже да се сва решења претходне диференцијалне једначине, која за $x = x_0$ задовољавају услов $y(x_0) < f_1(x_0)$, када је $x > x_0$ приближавају кривој $f_2(x)$ (евентуално се секу са њом) и заједно са њом теже константи C_2, када $x \to +\infty$. При том $y = f_2(x)$ није решење претходне једначине (за разлику праве $y = 1$ у претходном примеру), јер би морало бити $f_2'(x) = 0$, тј. $f_2(x) = \text{const.}$, што противуречи претпоставци да је $f_2(x)$ монотоно опадајућа функција.

Својство неке диференцијалне једначине да постаје функција $y = \varphi(x)$ која није решење те диференцијалне једначине, а којој се, када $x \to +\infty$ приближавају друга решења исте једначине, било је инспирација (уз проучавање ограничених решења) Милораду Бертолину да дефинише једну нову врсту стабилности, тзв. „скоро стабилно приближно решење“ (видети: Bertolino M., “Sulutions approximatives presque stables des équations differentielles”, Matematički vesnik 4 (19) 1967, pp. 71–74). Касније уопштење „скоро стабилног приближног решења“ од стране Љ. Протића (видети Протић Љ. „Разне дефиниције стабилности и процена решења обичних диференцијалних једначина“, магистарски рад, Београд 1970) ишло је у смеру замене функције $y = \varphi(x)$ једним појасом.

Радови [10] из 1926. и [15] из 1935. године Михаила Петровића посвећени су долажењу до интеграбилних случајева једначина (17) и (19). У ствари, у тим једначинама се ради о (суштински) истим резултатима имајући у виду везу једначина (17) и (19). Основни резултат до кога је дошао М. Петровић у тим радовима је следећи.

Нека је дата интеграбилна Рикатијева једначина (17). За њу постоји бесконачан низ функција $X_1(x), X_2(x), X_3(x), \ldots$ такав да је свака од једначина

$$(25) \qquad y_n' = y_n^2 + \left(f(x) + X_n(x)\right), \quad (n \in N)$$

такође интеграбилна, и то без икаквих квадратура. Функције $X_n(x)$ формирају се на рекурентан начин

$$X_n(x) = \frac{3}{4}\left[\frac{X'_{n-1}(x)}{X_{n-1}(x)}\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{X''_{n-1}(x)}{X_{n-1}(x)}, \quad X_0(x) = f(x), \quad (n \in N),$$

а решења диференцијалне једначине (17) рачунају се по формули

$$y_n(x) = y_{n-1}(x) + \frac{d}{dx}\log\frac{y_{n-1}(x)}{\sqrt{X_{n-1}(x)}}.$$

Ради се, очигледно, о интересантном резултату који омогућава да се, полазећи од решиве Рикатијеве једначине (или једначине (19)) дође до бесконачног броја интеграбилних случајева исте једначине. При том за добијање решења следећих једначина нису потребне никакве интеграције (већ само диференцирање). Куренски је три године касније (видети M. Kourensky: "Sur l'équation de Riccati, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", (6) 9 (1929), pp. 950–957) дошао до истог резултата независно од Михаила Петровића. Драгослав Митриновић је у радовима "Théorème sur l'équation de Riccati", C. R. Acad. Sci, Paris, 208 (1939), pp. 156–157, и „Неколико ставова о Riccati-евој диференцијалној једначини", Глас Српске академије 181 (1939), стр. 171–236, решио општији проблем, који гласи:

полазећи од интеграбилне Рикатијеве једначине (17) образовати бескрајни низ других Рикатијевих једначина истог облика, $y'_n + y_n^2 = f_n(x)$, које ће бити интеграбилне.

Резултат до којег је дошао је компликован и практично неупотребљив, али је, унеколико, интересантнија једна последица тог општег резултата, а то је:

ако се пође од једне интеграбилне Рикатијеве једначине (17), може се образовати бескрајан низ интеграбилних једначина $y'_n + y_n^2 = f_n(x)$, где је

$$\begin{cases} f_n(x) = f_{n-1}(x) + 2\left(\dfrac{f_{n-1}(x)}{\int f_{n-1}(x)dx}\right)^2 - \dfrac{f'_{n-1}(x)}{\int f_{n-1}(x)dx}, \\ y_n(x) = \dfrac{y_{n-1}(x)\int f_{n-1}(x)dx}{\int f_{n-1}(x)dx - y_{n-1}(x)} - \dfrac{f_{n-1}(x)}{\int f_{n-1}(x)dx}, f_0(x) = f(x), y_0(x) = y(x). \end{cases}$$

Види се да је за рачунање $f_n(x)$ и $y_n(x)$ помоћу ових рекурентних формула основни проблем рачунање интеграла (на сваком кораку) што није присутно у резултату Михаила Петровића. Ова чињеница, у практичном смислу, чини да се ова два резултата битно разликују.

Љубомир Протић

ОБЈАВЉЕНИ РАДОВИ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА*

1❑ ***Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques***
Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, No. 823, Gauthier-Villars, Paris, 1894, p. 109; 21,3 × 26,6. (1)

2❑ ***Sur les intégrales uniformes des équations du premier ordre et du genre zéro***
Comptes rendus, Paris, 1894, t. CXVIII, 22, pp. 1190–1193.
[Саопштено у Француској академији наука (даље у тексту ПАН) 28. маја 1894; приказао проф. É. Picard.] (2)

3❑ ***О асимптотним вредностима интеграла диференцијалних једначина првога реда***
Српска краљевска академија, Глас, књ. L, Први разред, књ. 17, Београд, 1895, стр. 43, 16,2 × 23,5.
[Саопштено у Академији природних наука Српске краљевске академије (даље у тексту АПН), 1. маја 1895; реферат проф. Димитрија Нешића.] (4)

4❑ ***Sur l'équation différentielle binôme du premier ordre***
Comptes rendus, Paris, 1895, t. CXXI, 19, pp. 632–635.
[Саопштено у ПАН, 4. новембра 1895; приказао проф. É. Picard.] (5)

5 ***Sur une équation différentielle du premier ordre***
Comptes rendus, Paris, 1896, t. CXXII, 22, pp. 1261–1263.
[Саопштено у ПАН, 1. јуна 1896; приказао проф. E. Picard.] (11)

6 ***О диференцијалним једначинама првога реда које се могу графички интегралити помоћу г. Клерићевог шестара***
Српска краљевска академија, Глас, књ. LI, Први разред, књ. 18, Београд, 1896, стр. 313–316.
[Саопштено у АПН, 15. јуна 1896; реферат проф. Љубомира Клерића.] (12)

7❑ ***Sur les résidus des fonctions définies par les équations différentielles***
Mathematische Annalen, Leipzig, 1896, t. 48, pp. 75–80. (14)

---

* У књизи 15 *Сабраних дела Михаила Петровића* изложена је потпуна библиографија укупне делатности професора Михаила Петровића. Овде су дати објављени радови из диференцијалних једначина. Знаком ❑ обележен је рад објављен у 1. књизи, а знаком Δ рад објављен у 2. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића*. На крају сваке јединице стављен је број у загради који је позив на податак у потпуној библиографији у 15. књизи.

8□ ***Contribution à la théorie des solutions singulièrs des équations différentielles du premier ordre***

Mathematische Annalen, Leipzig, 1896, t. 50, 1–3, pp. 103–112. (**15**)

9 ***Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre***

Bulletin de la Société mathematique de France, Paris, 1896, t. XXIV, pp. 58–80. (**16**)

10Δ ***Sur l'équation différentielle de Riccati et ses applications chimiques***

Vestnik Král Česke společnosti nauk, Praha, 1896, Tridimath. prirodovedecká, t. XXXIX, pp. 1–25.

[Саопштено у Чешкој академији наука, 20. новембра 1896.] (**17**)

11 ***О карактеристичним кривим линијама диференцијалних једначина првога реда***

Српска краљевска академија, Глас, књ. LIV, Први разред, књ. 19, Београд, 1897, стр. 105–142.

[Саопштено у АПН, 18. фебруара 1897; реферат проф. Димитрија Нешића.] (**18**)

12□ ***О једној класи диференцијалних једначина другога реда***

Српска краљевска академија, Глас, књ. LIV, Први разред, књ. 19, Београд, 1897, стр. 143–194.

[Саопштено у АПН, 18. фебруара 1897.] (**19**)

13 ***Sur un procédé d'intégration graphique des équations différentielles***

Comptes rendus, Paris, 1897, t. CXXIV, 20, pp. 1081–1084.

[Саопштено у ПАН, 17. маја 1897; приказао проф. P. Appell.] (**21**)

14Δ ***Sur l'équation différentielle linéare du second ordre***

Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1897, t. XXV, 8–9, pp. 221–235. (**24**)

15 ***О електричним осцилацијама при испражњавању кондензатора***

Српска краљевска академија, Глас, књ. LVI, Први разред, књ. 20, Београд, 1898, стр. 27–111.

[Саопштено у ПАН, 3. новембра 1897.] (**26**)

16□ ***Jedan pogled na prirodu transcendenata definisanih diferencijalnim jednačinama prvoga reda sa promjenljivim parametrima***

Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 135, Razred matematičko--prirodoslovni, knj. 25, Zagreb, 1898, str. 57–108.

[Саопштено у Razredu, 11. јануара 1898; с резимеом (франц.).] (**27**)

17□ ***Sur les résidus des fonctions définies par les équations différentielles d'ordre supérieur***

Vestnik kral. Česke společnosti nauk, Praha, 1898, Trida math. prirodovedecká, t. VI, pp. 1–24.

[Саопштено у Чешкој академији наука, 11. фебруара 1898.] (**28**)

18 ***Хидраулична интеграција***

Српски технички лист, Београд, 1898. (**30**)

19 *Sur une propriété des équations différentielles intégrables à l'aide des fonctions méromorphes doublement périodiques*

Acta mathematica, Stockholm, t. 22, pp. 379–386.

[Достављено 4. марта 1898.] (31)

20 *Sur l'intégration hydraulique des équations différentielles*

American Journal of Mathematics, Baltimore, 1898, vol. XX, No 4, pp. 293–300. (32)

21 *Прилози хемијској кинетици*

Српска краљевска академија, Глас, књ. LVII, Први разред, књ. 21, Београд, 1889, стр. 207–277.

[Саопштено у АПН, 9. фебруара 1898.] (33)

22 *Extension du théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre*

Comptes rendus, Paris, 1899, t. CXXVIII, 16, pp. 981–984.

[Саопштено у ПАН, 17. априла 1899; приказао проф. É. Picard.] (35)

23 *Théorie de la décharge des conducteurs à capacité – résistance et coefficient de self – induction variables*

L'Éclairage électrique, Paris, 1899, IV–V (1899), pp. 1–12.

[Достављено 22. априла 1899.] (36)

24$^{\Delta}$ *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre*

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1899, t. XIV, pp. 28–32.

[Достављено 23. јула 1899.] (38)

25$^{\Delta}$ *Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre*

Mathematische Annalen, Leipzig, 1899, t. 54, 3; pp. 417–436.

[Приказано 26. октобра 1899.] (40)

26 *Appareil à liquide pour l'intégration graphique de certains types d'équations différentielles*

American Journal of Mathematics, Baltimore, 1899, vol. XXII, 1, pp. 1–12. (42)

27 *Intégration graphique de certains types d'équations différentielles du premier ordre*

Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1899, t. XXVII, pp. 200–205. (43)

28$^{\Delta}$ *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre*

Vestnik Král, české společnosti náuk, Praha, 1901, Trida math. prirodovedecká, t. XXXI, pp. 1–20.

[Саопштено у Чешкој академији наука, 5. јула 1901.] (56)

29 *Примедбе о интеґралима диференцијалних једначина првоґа реда*

Српска краљевска академија, Глас, књ. XVII. Први разред, књ. 26, Београд, 1903, стр. 1–31.

[Саопштено у АПН, 13. маја 1903.] (66)

30 *Sur certaines transcendantes entières*

Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1906, t. XXXIV, pp. 165–177.

Trentlein: FdM, B. 37, S. 430.

Encyclopedie der Math. Wissenschaften, B. II3, n. 4, S. 428. (86)

31$^{\Delta}$ ***Диференцијалне једначине са осцилаторним интегралима***

Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXVII, Први разред, књ. 31, Београд, 1909, стр. 45–65.

[Саопштено у АПН, 17. новембра 1908.] (**99**)

32 ***Кретање материјалне тачке у случајевима кад отпор средине зависи од брзине и положаја тачке***

Српска краљевска академија.

[Саопштено у АПН, 28. маја 1909; необјављен рукопис.] (**101**)

33 ***Једна општа особина коефицијената Маклоренових редова који задовољавају алгебарске диференцијалне једначине***

Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXIX, Први разред, књ. 32, Београд, 1909, стр. 178–185.

[Саопштено у АПН, 12. октобра 1909.] (**102**)

34 ***Интеграли једне класе диференцијалних једначина сматрани као функције интеграционе константе***

Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXXVII, Први разред, књ. 36, Београд, 1912, стр. 161–189.

[Саопштено у АПН, 5. априла 1912.] (**110**)

35$^{\Delta}$ ***Fonctions implicites oscillantes***

Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians[6], Combridge, 1912, vol. I, pp. 295–302.

Revue sémestrielle, 1913, t. XXII (H 1 b). (**113**)

36 ***Редуктивни аналитички елементи***

Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 202, Razred matematičko--prirodoslovni, knj. 56, Zagreb, 1914, str. 132–176.

[Саопштено у Razredu, 19. јануара 1914.] (**136**)

37 ***Relations d'intégalité entre les moyennes arithmétiques et géometriques***

Comptes rendus, Paris, 1916, t. CLXIII, 4, pp. 81–84.

[Саопштено у ПАН, 24. јула 1916; приказао проф. E. Picard.] (**146**)

38$^{\Delta}$ ***Једна врста инваријаната кривих линија дефинисаних диференцијалним једначинама***

Српска краљевска академија, Глас, књ. XCIII, Први разред, књ. 39, Београд, 1921, стр. 75–84.

[Саопштено у АПН, 25. новембра 1913.] (**171**)

39$^{\Delta}$ ***Једна особина линеарних диференцијалних једначина***

Српска краљевска академија, Глас, књ. XCIX, Први разред, књ. 42, Београд, 1922, стр. 1–6.

[Саопштено у АПН, 31. јануара 1921, с насловом на франц. језику.] (**178**)

40 ***Problèmes arithmétiques sur les équations différentielles***

Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1924, t. LII, pp. 514–519. (**184**)

41$^{\Delta}$ ***Диференцијалне једначине првога реда са осцилаторним интегралима***

Српска краљевска академија, Глас, књ. CXVI, Први разред, књ. 52, Београд, 1925, стр. 11–23.

[Саопштено у АПН, 26. јануара 1925; с резимеом (франц.).] (**192**)

42$^{\Delta}$ ***Једна особина линеарне диференцијалне једначине другога реда***

Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 232, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 70, Zagreb, 1926, str. 99–107.

[Саопштено у Razredu, 4. децембра 1925.] (**204**)

43$^{\Delta}$ ***Sur les intégrales réelles de l'équation linéaire du second ordre***

Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1926, t. LIII, 1–4, pp. 127–134. (**207**)

44 ***Séries de puissances représentant les fonctions inverses des intégrales abeliennes***

Vestnik Král, česke společnosti náuk, Praha, 1927, Trida math. prirodovedecká, t. II, pp. 1–8.

[Саопштено у Чешкој академији наука, 14. фебруара 1927.] (**216**)

45 ***Примедбе о канонском производу примарних фактора***

Српска краљевска академија, Глас, књ. CXXVIII, Први разред, књ. 59, Београд, 1927, стр. 163–169.

[Саопштено у АПН, 26. децембра 1927; с резимеом (франц.).] (**220**)

46 ***Fonctions entières engendrées par les équations différentielles algébriques du premier ordre***

Comptes rendus du Congrès de l'Association francœaise pour l'avancement des sciences, s. Mathématiques, Constantine, 1927, pp. 48–50. (**221**)

47 ***Једно питање о геодезијским линијама површина***

Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 234, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 71, Zagreb, 1927, str. 189–195.

[Саопштено у Razredu, 5. априла 1927.] (**223**)

48 ***Sur un nombre absolu rattaché aux géodésiques des surfaces***

Atti del Congresso Internazionale dei Matematici VI, Bologna, 1928, pp. 347–352. (**231**)

49 ***Remarque sur les fonctions entières engendrées par les équations différentielles linéaires du second ordre***

Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1928, t. LVI, 2, pp. 22–24. (**233**)

50 ***Problèmes d'intégration qualitative en astronomie,***

Annuaire pour l'an 1930, Pubications de l'Observatorie astronomique de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1929, t. II, pp. 121–124. (**236**)

51$^{\Delta}$ ***Intégrales premières à restrictions***

Académie royale de Serbie, Editions spéciales, t. LXXII, Sciences mathématiques et naturelles, 1. 19, Paris, 1929, pp. 50, 16 × 25.

[Саопштено у АПН, 29. априла 1929.] (**237**)

52 ***Equations de comparasion dans la théorie des équations différentielles***

Comptes rendus du I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa, 1929, pp. 129–133. (**238**)

53 ***Équations différentielles à courbure intégrale fixe***

Comptes rendus du Congrès de l'Association francœaise pour l'avancement des sciences, s. Mathématiques, Alger, 1930, pp. 40–43. (**245**)

54 ***О целим функцијама као интегралима алгебарских диференцијалних једначина првог реда***

Српска краљевска академија, Глас, књ. CXLIII, Први разред, књ. 70, Београд, 1931, стр. 193–200.

[Саопштено у АПН, 23. марта 1931; с резимеом (франц.).] (**249**)

55 ***Intégration qualitative des équations différentielles***

Mémorial des Sciences mathématiques, Paris, 1931, fasc. XLVIII, pp. 58; 16,5 × 25,3. (**255**)

56 ***Un problème sur la chaleur rayonnante***

Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1932, t. I, pp. 1–7. (**263**)

57 ***Remarque sur les équations différentielles des fonctions elliptiques***

Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens, Zürich, 1932, pp. 1–2. (**266**)

58 ***Sur une classe d' équations différentielles du premier ordre***

Comptes rendus du Congrès de l'Association franœaise pour l'avancement des sciences, s. Mathématiques, Chambery, 1933. (**282**)

59$^{\Delta}$ ***Аритметичке особине интеграла једне класе диференцијалних једначина***

Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXIII, Први разред, књ. 80, Београд, 1934, стр. 71–87.

[Саопштено у АПН, 26. децембра 1933.] (**283**)

60 ***Sur une classe d'équations différentielles algébriques du second ordre***

Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Série A: Sciences mathématiques, Cracovie, 1934, str. 1/2, pp. 9–13. (**287**)

[Саопштено у Пољској академији наука, 5. фебруара 1934.]

61 ***Remarques arithemétiques sur les intégrales abeliennes à coefficients tayloriens commensurables***

Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1934, t. III, pp. 1–12. (**292**)

62 ***Équations différentielles en rapport avec les nombre premiers***

Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége, Liége, 1934, 5, pp. 103–108. (**293**)

63$^{\square}$ ***О екстремима интеграла алгебарских диференцијалних једначина***

Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXV, Први разред, књ. 81, Београд, 1935, стр. 53–70.

[Саопштено у АПН, 22. октобра 1934.] (**297**)

64 ***Једна класа првих интеграла диференцијалних једначина другога реда***

Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXV, Први разред, књ. 81. Београд, 1935, стр. 93–105.

[Саопштено у АПН, 24. децембра 1934.] (**298**)

65 ***Истраживање дво-периодичних функција помоћу одређених интеграла***

Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXV, Први разред, књ. 81, Београд, 1935, стр. 137–152 (са Ј. Караматом).

[Саопштено у АПН, 6. фебруара 1935.] (**301**)

66 ***Један диференцијални алгоритам и његове примене***
Српска краљевска академија, Посебно издање, књ. CXI, Природњачки и математички списи, књ. 30, Београд, 1936, стр. V + 235, 16 × 24.
[Саопштено у Академији природних наука СКА, 21. октобра 1935.] (**303**)

67 ***Sur une suite de polynomes rattachés aux équations différentielle,***
Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1935, t. IV, pp. 139–148. (**304**)

68[Δ] ***Théorème sur l'équation de Riccati***
Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1935, t. IV, pp. 169–180. (**307**)

69 ***О једној класи диференцијалних једначина првога реда***
Српска краљевска академија, Глас. књ. CLXXIII, Први разред, књ. 85, Београд, 1936, стр. 23–36.
[Саопштено у АПН, 23. марта 1936.] (**309**)

70 ***Неодређене диференцијалне једначине***
Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXIII, Први разред, књ. 85, Београд, 1936, стр. 171–180.
[Саопштено у АПН, 8. јуна 1936.] (**312**)

71[Δ] ***Équations différentielles du premier ordre à intégrales bornées***
La Revista de Ciencias, Lima (Peru), 1936, t. XXXVIII, 418, pp. 109–114. (**320**)

72 ***Rapport arithmétique entre deux suites de nombres rattachées aux equations différentielles du premier ordre***
Revue Mathématique de l'Union interbalkanique, Athènes, 1936, t. I, 2, pp. 167–171. (**321**)

73 ***Једна врста бројних квази-инваријаната***
Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXV, Први разред, књ. 86, Београд, 1937, стр. 137–174.
[Саопштено у АПН, 19. октобра 1936.] (**325**)

74[Δ] ***Remarques arthmétiques sur une équation différentielle du premier ordre***
Union matemética Argentina, Buenos Aires, 1938, No. 3, pp. 17–21.
[Достављено 25. децембра 1937.] (**337**)

75 ***Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова***
Предавања на Београдском универзитету, издање Задужбине Луке Ћеловића Требињца, Београд, 1938, стр. 219; 15,2 × 23,3. (**349**)

76[□] ***Sur les équations différentielles algébriques du premier ordre engendrant des fonctions entières***
Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1938, t. VI–VII, pp. 1–12. (**351**)

77 ***Équations différentielles algébriques d'ordre fini à intégrales réelles bornées***
Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, 1938, t. VI–VII, pp. 65–76. (**352**)

78 ***Théorèmes généraux sur les équations différentielles algébriques***
Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1938, t. VI–VII, pp. 290–325. (**353**)

79[Δ] ***Particularités d'ordre arithmétique rattachées aux équations differentielles algébriques***

Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, Bucuresti, 1938, t. 40, 1–2, pp. 1–12. (354)

80[Δ] ***Потенцијални редови што изражавају општи интеграл какве диференцијалне једначине првога реда***

Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXVIII, Први разред, књ. 88, Београд, 1939, стр. 31–42.

[Саопштено у АПН, 29. новембра 1937.] (356)

81[Δ] ***Једна заједничка особина мноштва диференцијалних једначина***

Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXVIII, Први разред, књ. 88, Београд, 1939, стр. 227–240.

[Саопштено у АПН, 16. децембра 1938.] (358)

82[Δ] ***Осетљива места обичних и диференцијалних једначина***

Математички весник, Београд, 1939, бр. 5–6, стр. 8–11. (363)

83 ***Квалитативна интеграција диференцијалних једначина***

Српска краљевска академија, Саопштења Академије природних наука, Београд, 1939, 25 шт. табака; 21,3 × 29,4.

[Саопштено у АПН, 20. новембра 1939.] (367)

84[□] ***Један општи начин параметарског изражавања трансцендената коначног реда***

Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXXV, Први разред, књ. 92, Београд, 1940, стр. 83–97.

[Саопштено у АПН, 21. октобра 1940.] (378)

85 ***Неколике особине једне диференцијалне једначине од важности у проблемима електрицитета***

Наука и техника, Београд, 1941, t. I, 1, стр. 25–36. (382)

86[□] ***Addition au mémoire sur les équations différentielles algébriques***

Académie Serbe des Sciences, Publications de l'Institut mathématique, Belgrade, 1947, t. I, pp. 1–4.

MR, X, 6, pp. 378. (390)

Драган Трифуновић

О ОВОМ ИЗДАЊУ

У овој другој књизи *Сабраних дела Михаила Петровића* као и у првој изложене су студије из области диференцијалних једначина. Употребљену синтагму „сабрана дела“ треба условно схватити. Ради се о томе да би, бар што се тиче диференцијалних једначина, било прецизније ове две књиге назвати „изабрана дела“. Заиста, Михаило Петровић је написао толико радова из области диференцијалних једначина да су приређивачи ове књиге (због немогућности да се сви ти радови објаве) имали велики, компликован, тежак и одговоран посао да направе такав избор из расправа који ће најбоље илустровати Петровићева достигнућа из те области. Додатну тешкоћу при избору чланака представљало је и то што је М. Петровић често исти (или сличан) чланак писао у две верзије: на француском и српском језику. Вероватно је то чинио зато да би поједине своје резултате представио светским, али и српским математичарима, од којих многи нису знали француски језик.

Стрпљиво савлађујући поменуте тешкоће дошли смо до овог избора радова који нудимо читаоцима, не сматрајући, свакако, да је најбољи. Дефинитиван суд о томе даће, читаоци и време.

Већина радова у овој књизи припада квалитативној анализи решења диференцијалних једначина, али има и радова који су посвећени решавању појединих класа (типова) диференцијалних једначина, једначинама са осцилаторним интегралима, инваријантама диференцијалних једначина итд. Однос радова из поменутих области, објављених у овој књизи, отприлике одражава и однос радова М. Петровића у његовом целокупном опусу.

Трудили смо се да поштујемо начин излагања М. Петровића. На изворном тексту извршене су само неопходне измене: замењени су неки потпуно архаични изрази, исправљене штампарске грешке и неке нетачне формуле. Правопис је прилагођен данашњем, али терминологија није битно мењана (где год није било неопходно).

Користимо прилику да изразимо велику захвалност др Драгану Трифуновићу, који је активно учествовао у свим фазама настајања ове књиге. Такође смо веома захвални академику Богољубу Станковићу, приређивачу прве књиге Сабраних дела (у којој су радови из аналитичке теорије д. ј.), који је с нама од почетка радио на најосетљивијем питању – подели чланака на прву и другу књигу. Изузетну захвалност дугујемо проф. Жарку Јовићу и Алексан-

дру Савићу, асистенту Математичког факултета у Београду, без чије предусретљивости и свесрдне помоћи у свим фазама рада не би ни било ове књиге. Захвалност, такође, дугујемо др Жарку Мијајловићу, који нам је дао низ корисних сугестија у току рада. Са свим поменутим колегама било је задовољство и привилегија сарађивати.

Поменимо, на крају, да ознака (пр. Д. Т.) у овој књизи значи да је тај део текста написао Драган Трифуновић.

Војислав Марић и *Љубомир Протић*

РЕГИСТАР ЛИЧНИХ ИМЕНА

САДРЖАЈ

НАУЧНЕ РАСПРАВЕ

ПРВИ ИНТЕГРАЛИ СА ОГРАНИЧЕЊИМА

Монографија

ПРИЛОЗИ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА
Књига 2

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Други део

Прво издање, 1999. година

Издавач

Завод за уџбенике и наставна средства
Београд, Обилићев венац 5

Ликовни уредник

АИДА СПАСИЋ

Лектор
РОСАНДА ВУЧИЋЕВИЋ

Корице

АИДА СПАСИЋ

Графички уредник

ДУШАН МИЛОСАВЉЕВИЋ

Коректор

ЈЕЛЕНА БОШКОВИЋ

Обим: 19 3/4 штампарских табака

Формат: 17 × 24 cm

Тираж: 500 примерака

Рукопис предат у штампу марта 1999. године.

Штампање завршено априла 1999. године.

Штампа

БИГЗ, Београд

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.911/.913

ПЕТРОВИЋ, Михаило Н.
Диференцијалне једначине. Део 2 / Михаило Петровић ; приредили Војислав Марић, Љубомир Протић. – [1. изд.]. – Београд : Завод за уџбенике и наставна средства, 1999 (Београд : БИГЗ). – 314 стр. : илустр. ; 24 cm. – (Сабрана дела / Михаило Петровић ; књ. 2)

Тираж 500. – Стр. 308–309: О овом издању / Војислав Марић, Љубомир Протић. – Стр. 300–307: Објављени радови Михаила Петровића из диференцијалних једначина / Драган Трифуновић. – Регистар.
ISBN 86-17-06501-X
1. Марић, Војислав
929:51 Петровић М.
а) Диференцијалне једначине – Решавање б) Диференцијалне једначине
ИД=73891340

9 788617 346711

ISBN 86-17-06501-X

К. Б. 34671