МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

САБРАНА ДЕЛА

САБРАНА ДЕЛА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Први део
2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Други део
3. МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
4. АЛГЕБРА
5. МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ
6. МАТЕМАТИЧКА ФЕНОМЕНОЛОГИЈА
7. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧКЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЈЕ
8. ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА – ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ
9. ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ – ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА
10. ЧЛАНЦИ – СТУДИЈЕ
11. ПУТОПИСИ – Први део
12. ПУТОПИСИ – Други део
13. МЕТАФОРЕ И АЛЕГОРИЈЕ
14. РИБАРСТВО
15. МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ – ПИСМА, БИБЛИОГРАФИЈА И ЛЕТОПИС

Завод за уџбенике и наставна средства у Београду објављује *Сабрана дела Михаила Петровића* у сарадњи са Математичким факултетом Универзитета у Београду и Друштвом математичара Србије.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

САБРАНА ДЕЛА

КЊИГА 3

Уредник

ЖАРКО ЈОВИЋ

Главни и одговорни уредник

др ПЕТАР ПИЈАНОВИЋ

За издавача

проф. др ДОБРОСАВ БЈЕЛЕТИЋ, директор

ISBN 86-17-06506-0

Мих. Петровић

ISBN 86-17-06506-0

Професор

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

Београд, 24. април 1868 – Београд, 8. јун 1943.

Снимак начињен 1926. године у просторијама Ректората после промоције Јована Карамате за доктора филозофије

(аутор фотографије непознат)

МИХАИЛО
ПЕТРОВИЋ

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА

Приредио

др Драгољуб Аранђеловић, проф. унив.

ЗАВОД ЗА УЏБЕНИКЕ
И НАСТАВНА СРЕДСТВА
БЕОГРАД
1999

Све радове са француског језика у овој књизи превео је
др **ДРАГОЉУБ АРАНЂЕЛОВИЋ**, проф. унив.

НАУЧНЕ РАСПРАВЕ

УОПШТЕЊЕ ИЗВЕСНИХ СТИЛТЈЕСОВИХ ФОРМУЛА*

У намери да извесне комбинације функције $\Gamma(z)$ представи одређеним интегралима, у којима би подинтегрална функција била проста комбинација уобичајених функција, Stieltjes[1] је доказао следећа два општија резултата:

1. Ако је функција $f(z)$ холоморфна за вредности z са позитивним реалним делом и ако интеграл

$$\int \operatorname{mod} \frac{f(z)}{z^2}\, dz$$

узет дуж полукруга C описаног око тачке $z = 0$ као средишта десно од осе Oy тежи нули кад полупречник R круга C бесконачно расте, онда је

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zf(ti)}{t^2 + z^2}\, dt = f(z) \tag{1}$$

и то за све вредности z са позитивним реалним делом.

2. Ако је функција $f(z)$ холоморфна за вредности z са позитивним реалним делом и таква да интеграл

$$\int \operatorname{mod} \frac{f(z)}{z}\, dz,$$

узет дуж полукруга C, тежи нули кад полупречник R бесконачно расте, онда је

$$\frac{i}{\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{tf(ti)}{t^2 + z^2}\, dt = f(z) \tag{2}$$

---

* Наслов оригинала *Généralisation de certains formules* de *Stieltjes*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1903, t. XVII, p.p. 327–334.

[1] *Sur le développement de* log $\Gamma(a)$ (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1889, pp. 425–444).

за исте вредности променљиве z.

Очевидне су услуге које могу чинити ови резултати при рачунању одређених интеграла и доказивању разних теорема. Они су, на пример, довели Stieltjes-а[2] и Hermite-а до важних образаца за функцију $\Gamma(z)$[3].

Указаћу овде на неке теореме које уопштавају Stieltjes-ове и воде, оне саме, другим занимљивим резултатима.

*

1. Нека су $f(t)$ и $\Phi(z,t)$ две холоморфне функције за вредности z и t са реалним деловима већим од дате вредности λ и такве да производ

$$f(t)\Phi(z,t)$$

тежи нули кад су реални делови променљивих z и t произвољне вредности веће од λ и променљива t бесконачно расте.

Тада је

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(z,\lambda+ti)}{\Phi(z,z)}\frac{f(\lambda+ti)}{\lambda+ti-z}\,dt \tag{3}$$

за сваку вредност променљиве z *са реалним делом већим од* λ.

Да бисмо ово доказали, посматрајмо интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int \Phi(z,t)\frac{f(t)}{t-z}\,dt \tag{4}$$

узет дуж контуре C_1 састављене од одсечка AB праве L дефинисане једначином $x=\lambda$ и полукруга описаног над AB десно од праве L.

Ако је полупречник R полукруга довољно велики да би се тачка z нашла унутар контуре и ако је интеграл узет у директном смеру, онда је

$$I = f(z)\Phi(z,z).$$

Интеграл I се може раставити на два интеграла

$$I = I_1 + I_2$$

од којих је први, I_1, узет дуж полукруга, а други, I_2, дуж одсечка AB.

За I_1 је

[2] loc. cit.

[3] *Sur une extension de la formule de Stirling* (Mathematische Annalen, Bd. XLI, 1895, pp. 581–590).

$$t = \lambda + Re^{\theta i},$$

где θ расте од $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тако да је

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(z, \lambda + Re^{\theta i}) f(\lambda + Re^{\theta i}) \frac{Re^{\theta i}}{\lambda + Re^{\theta i} - z}\, d\theta$$

и отуда

$$\operatorname{mod} I_1 < \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} PQ\, d\theta$$

где је

$$P = \operatorname{mod}\Phi(z, \lambda + Re^{\theta i}) f(\lambda + Re^{\theta i})$$

$$Q = \operatorname{mod}\frac{Re^{\theta i}}{\lambda + Re^{\theta i} + z}.$$

За I_2 је

$$t = \lambda + yi,$$

где y опада од $+R$ до $-R$, тако да је

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \Phi(z, \lambda + ti) \frac{f(\lambda + ti)}{\lambda + ti - z}\, dt.$$

Ако сада полупречник R неограничено расте, онда је

$$\lim P = 0$$
$$\lim Q = 1;$$

и отуда

$$I_1 = 0,$$

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z, \lambda + ti) \frac{f(\lambda + ti)}{\lambda + ti - z}\, dt,$$

што доказује образац (3).

2. Нека су $f(t)$ и $\Phi(z,t)$ две холоморфне функције за вредности промењљивих z и t са реалним деловима мањим од дате вредности λ и такве да производ

$$f(t)\,\Phi(z,t)$$

тежи нули кад су реални делови променљивих z и t произвољне вредности мање од λ и променљива t бесконачно расте.

Tada je

$$(5) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(z, \lambda + ti)}{\Phi(z, z)} \frac{f(\lambda + ti)}{\lambda + ti - z} dt$$

за сваку вредност променљиве z *са реалним делом мањим од* λ.

Теорема ће се доказати заменом претходне контуре интеграције контуром C_2 састављеном од одсечка AB праве $x = \lambda$ и полукруга описаног над AB лево од те праве.

3. Претпоставимо да су $f(t)$ и $\Phi(z,t)$ холоморфне функције за вредности променљивих t и z са имагинарним деловима већим од дате вредности μ и да производ

$$f(t)\Phi(z,t)$$

тежи нули кад су имагинарни делови променљивих z и t произвољне вредности веће од μ и променљива t бесконачно расте.

Tada je

$$(6) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(z, t + \mu i)}{\Phi(z, z)} \frac{f(t + \mu i)}{t + \mu i - z} dt$$

за сваку вредност променљиве z *са имагинарним делом већим од* μ.

Теорема ће се доказати заменом контуре C_1 контуром C_3 састављеном од одсечка AB праве $y = \mu$ и полукруга описаног над AB изнад те праве.

4. Претпоставимо да су $f(t)$ и $\Phi(z,t)$ холоморфне функције за вредности променљивих z и t са имагинарним деловима мањим од μ и да производ

$$f(t)\Phi(z,t)$$

тежи нули кад су имагинарни делови променљивих z и t произвољне вредности мање од μ и променљива t бесконачно расте.

Tada je

$$(7) \qquad f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(z, t + \mu i)}{\Phi(z, z)} \frac{f(t + \mu i)}{t + \mu i - z} dt$$

за сваку вредност променљиве z *са имагинарним делом мањим од* μ.

Замениће се, за доказ ове теореме, контура C_1 контуром C_4 састављеном од одсечка AB праве $y = \mu$ и полукруга описаног над AB испод те праве.

5. Образац (3) обухвата као посебне случајеве наведене Stieltjes-ове резултате. Тако, ако се узме

$$\lambda = 0, \quad \Phi(z,t) = \frac{2z}{t+z},$$

тај образац даје први Стилтјесов резултат; за

$$\lambda = 0, \quad \Phi(z,t) = \frac{2t}{t+z},$$

он даје други од наведених резултата.

Четири обрасца (3), (5), (6), (7) допуштају да се у коначном облику израчуна бесконачно много одређених интеграла.

Познато је, на пример, да за целу функцију $\chi(z)$ нултог рода променљиве z производ

$$e^z\chi(z)$$

тежи нули кад z бескрајно расте са таквим аргументом да и e^z тежи нули. Узимајући, дакле,

$$f(z) = 1, \quad \Phi(z,t) = e^{-t}\chi(t)$$

и примењујући образац (3), долази се до обрасца

$$\text{(8)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\lambda + ti)\frac{e^{-ti}dt}{\lambda + ti - z} = -2\pi e^{\lambda - z}\chi(z)$$

који важи за ма какву целу функцију $\chi(z)$ *нултог рода, за било коју реалну вредност* λ *и сваку вредност* z *са реалним делом већим од* λ.

Узимајући у обрасцу (8) да је $\lambda = 0$ и диференцирајући обе његове стране n пута по z, налази се формула

$$\text{(9)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ti}\chi(ti)}{(z-ti)^{n+1}}dt = (-1)^n \frac{2\pi}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}\frac{d^n}{dz^n}\left[e^{-z}\chi(z)\right],$$

која показује да *се коефицијенти* A_n *Taylor-овог реда*

$$e^{-z}\chi(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots,$$

где је a *ма која вредност са позитивним реалним делом, може изразити у облику*

$$\text{(10)} \qquad A_n = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ti}}{(a-ti)^{n+1}}\chi(ti)dt.$$

Мењајући t у $-t$, образац (9) се може написати у облику

$$(11)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ti}\chi(-ti)}{(z+ti)^n}\,dt = (-1)^{n-1}\frac{2\pi}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[e^{-z}\chi(z)\right];$$

у ком он обухвата велики број познатих одређених интеграла и из кога се изводи бесконачно много других интеграла.

Вратимо се обрасцима (3), (5), (6), (7). Раздвајајући реалне и имагинарне делове, ови обрасци доводе до једне бесконачности образаца који изражавају дату функцију $f(z)$ у облику одређеног интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z,t)dt,$$

где ће функција φ бити реална.

Ако је, сем тога, функција $\varphi(z,t)$ парна по t, биће функција $f(z)$ представљена одређеним интегралом облика

$$\int_{0}^{\infty} \psi(z,t)dt.$$

Тако, узимајући у формули (3)

$$\lambda = 0, \quad \Phi(z,t) = \frac{2z}{t+z},$$

долази се до формуле

$$(12)\qquad f(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{z\varphi(t)}{t^2+z^2}\,dt$$

коју је нашао Stieltjes (где $\varphi(t)$ представља реални део функције $f(ti)$, који је увек парна функција промењиве t) и која важи за сваку функцију $f(z)$, холоморфну за вредности промењиве z са позитивним реалним делом и такву да количник

$$\frac{f(z)}{z}$$

тежи нули кад z бесконачно расте са ма којим аргументом садржаним између $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Исто тако, стављајући у формули (3)

$$\lambda = 0, \quad \Phi(z,t) = \frac{2t}{t+z},$$

своди се ова на један други Stieltjes-ов образац

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t\psi(t)}{t^2+z^2}\,dt \tag{13}$$

(где $\psi(t)$ представља имагинарни део у $f(ti)$, тако да је функција $t\psi(t)$ парна) који важи за сваку функцију $f(z)$, холоморфну за вредности променљиве z са позитивним реалним делом, која тежи нули кад z бесконачно расте са аргументом садржаним између $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Диференцирањем обе стране једнакости (13) по z, добија се

$$\frac{d^n f}{dz^n} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty t\psi(t)\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{t^2+z^2}\right)dt.$$

Али, по једном познатом обрасцу[4], је

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{t^2+z^2}\right) = (-1)^n\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{t(t^2+z^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arctg}\frac{t}{z}\right],$$

одакле се добија занимљив образац:

$$\int_0^\infty \psi(t)\frac{\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{t}{z}\right)}{\sqrt{(t^2+z^2)^n}}\,dt = (-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}\frac{f^{(n-1)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}, \tag{14}$$

који важи за сваку реалну и позитивну вредност a *и за сваку функцију* f(z) *која је холоморфна за вредности променљиве* z *са позитивним реалним делом, тежи нули кад* z *бесконачно расте са ма којим аргументом садржаним између* $-\frac{\pi}{2}$ *и* $\frac{\pi}{2}$ *и која није реална за* $z = ti$.

Одавде се, на пример, изводи следећи резултат: *коефицијент* A_n *Taylor-овог реда*

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_1(z-a)^2 + \ldots \tag{15}$$

једне такве функције може се написати у облику

---

[4] Frenet, *Recueil d'exercies*, 1891, p. 80.

$$(16) \qquad A_n = \frac{(-1)^n 2}{\pi} J_n$$

їде је

$$(17) \qquad J_n = \int_0^\infty \psi(t) \frac{\sin\left[(n+1)\operatorname{arctg}\frac{t}{z}\right]}{\sqrt{(t^2+a^2)^{n+1}}} dt.$$

Образац (16) води до неједнакости

$$(18) \qquad |A_n| < \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi(t)}{\sqrt{(t^2+a^2)^{n+1}}} dt$$

која дойушта да се извуку релације између начина на који се мења имаїинарни део функције f(ti) *зависно од йроменљиве* t *и реда величине коефицијенйа* A_n *Taylor-овоі развийка* (15) *функције* f(z).

Наводим, примера ради, следећи резултат.

Претпоставимо да је функција $f(z)$, која задовољава претходне услове, реална за $z=0$. Функција $\psi(t)$ узима тада вредност нула за $t=0$, холоморфна је за ту вредност као и за сваку позитивну реалну вредност променљиве t и тежи нули за $t=\infty$. Апсолутна вредност количника $\frac{\psi(t)}{t}$ остаће мања од извесног позитивног броја M кад t расте од 0 до ∞, тако да ће између граница интеграла (18) бити

$$|\psi(t)| < Mt.$$

Према томе је

$$|A_n| < \frac{2M}{\pi} \int_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

или пак

$$(19) \qquad |A_n| < \frac{2M}{(n-1)\pi a^{n-1}} \qquad (n>1).$$

Коефицијенйи Taylor-овоі реда (15) *су, дакле, йо айсолуйној вредносйи мањи од одіоварајућих коефицијенайа Taylor-овоі реда функције*

$$\frac{2M}{\pi}(z-a)\log\left(1-\frac{z}{a}\right).$$

Приметимо такође да стављајући у образац (17)

$$\operatorname{arctg}\frac{t}{a} = x,$$

овај узима облик

$$J_n = -\frac{1}{a^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(a \operatorname{tg} x)\sin(n+1)x\cos^{n-1}x dx, \tag{20}$$

из кога се исто тако могу извући горње границе апсолутне вредности коефицијента A_n Taylor-овог реда (15).

ПРОУЧАВАЊЕ ФУНКЦИЈА ПРЕДСТАВЉЕНИХ ОДРЕЂЕНИМ ИНТЕГРАЛИМА*

Између разноврсних начина да се аналитички дефинише једна дата функција променљиве z, један, који по својој генералности заслужује нарочиту пажњу, састоји се у томе да се функција представи каквим одређеним интегралом

$$F(z) = \int_L R(t, z)\, dz \tag{1}$$

где је R *рационална* функција променљиве z, чији су сачиниоци функције променљиве t, које уосталом могу бити *ма какве* и где је интеграл узет дуж каквога лука интеграције L.

Пре свега, *свака аналитичка функција* F(z) *може се, и то на бескрајно много начина, изразити у облику интеграла* (1).

Тако, основни Cauchy-ев образац

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - z}\, dt$$

припада типу образаца (1) где функција R, сматрана као функција променљиве z, има само просте полове. Ако се функција $f(z)$ изрази као линеарна комбинација каквих функција

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z), \dots$$

и неколико њихових узастопних извода (што је увек могућно учинити интеграцијом извесних линеарних једначина), Cauchy-ев образац доводи до извесног обрасца облика (1), где ће под интегралним знаком фи-

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. LXV, Први разред, књ. 25, Београд 1903, стр. 79–162.

гурисати извесна рационална функција променљиве z, која ће имати вишеструке полове.

Разноврсним трансформацијама могу се тако добијени обрасци изменити на бескрајно много начина, а да при том ипак задрже облик (1). Таквом једном трансформацијом Stieltjes је нпр. дошао до ових резултата.[1]

Ако је $F(z)$ каква функција, холоморфна за све вредности z, чији је реални део позитиван, и таква, да кад се тачка z бескрајно удаљава у ма коме правцу са десне стране осовине имагинарних вредности, модуо количника $\frac{F(z)}{z}$ тежи нули, биће за све реалне и позитивне вредности z

$$F(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{z\varphi(t)}{t^2+z^2}\,dt, \tag{2}$$

где $\varphi(z)$ означава реални део функције $F(ti)$.

Ако при том и сама функција $F(z)$ тежи нули, кад се z бескрајно удаљава у наведеноме правцу, биће за поменуте вредности z

$$F(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t\psi(t)}{t^2+z^2}\,dt, \tag{3}$$

где је $\psi(t)$ сачинилац од i у изразу $F(ti)$.

У једној својој расправи[2] ја сам генералисао ове резултате, проширивши их на још општије функције $F(z)$, за које сам доказао да се могу на бескрајно много начина изразити у облику (1).

У једноме своме ранијем раду[3] ја сам доказао још један резултат те врсте, коме се може дати овај облик: ма каква функција $F(z)$, холоморфна за $|z|<1$, може се изразити у облику интеграла

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\lambda(t)}{1-2z\cos t+z^2}\,dt, \tag{4}$$

где је $\lambda(t)$ извесна проста комбинација функција $\sin t$, $\cos t$, реалног и имагинарног дела функције

---

[1] *Sur le developpement de* log Γ(a) (Journal d. math. pures et appliquées 1889 p. 425–444).

[2] *О представљању функција одређеним интегралима* (Глас LXIII, Срп. краљ. акад.).

[3] *Quelques formules générales relatives au calcul dez intégrales définies* (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo 1897. p. 252.).

$$F(\cos t + i \sin t).$$

Као што се види, обрасци (2), (3), (4) имају облик о коме је овде реч.

Кад је каква функција $F(z)$ представљена редом

(5) $$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

дешава се да се сачинилац a_n може написати у облику

(6) $$a_n = \int_L A(t)\left[r(t)\right]^n dt,$$

где су $A(t)$ и $r(t)$ какве познате функције променљиве t, или као збир интеграла таквога облика.

Тако је нпр. за функцију

$$F(z) = \sum_0^\infty e^{-an^2} z^n$$

(где је a ма каква константа са позитивним реалним делом), која игра важну улогу у теорији елиптичких функција

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{4a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4a}} e^{nti}\, dt;$$

за функцију

$$F(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\sqrt{a+bn}}$$

(где је $a > 0,\ b > 0$) биће

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-at^2} e^{-nbt^2}\, dt \quad \text{итд.}$$

Општи задатак, да се један дати сачинилац a_n доведе на тај облик, своди се на проблем инверсије одређених интеграла и има бескрајно много решења. Једно од таквих решења, а за функције $F(z)$ холоморфне за $z = 0$, представља Cauchy-ев образац

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{t} \left(\frac{1}{t}\right)^n dt$$

из кога се на познати начин изводи да је такође[4]

---

[4] В. нпр. Borel: *Leçons sur les fonctions entiéres* p. 3.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r,t) \left(\frac{e^{-ti}}{r} \right)^n dt,$$

где је $P(r,t)$ реални део функције $F(re^{ti})$, а r ма какав реалан и позитиван број мањи од полупречника круга конвергенције реда $F(z)$.

Поменути је општи задатак у непосредној вези са *проблемом момената*, на коме су нарочито радили Stieltjes[5], Borel[6] и Le Roy[7]. А кад је сачинилац a_n на ма који начин изражен у облику (6), биће

$$F(z) = \int_L \frac{A(t)}{1 - zr(t)} dt \tag{7}$$

који образац опет има облик (1).

Ако функција $F(z)$ није холоморфна у близини тачке $z = 0$, може се на место реда (5), уређеног по степенима променљиве z, узети одговарајући ред уређен по степенима променљиве $(z-a)$, где је a ма каква вредност, у околини које је функција $F(z)$ холоморфна.

За извесне специјалне класе функција могу се на разне специјалне начине наћи интегрални обрасци, који би такве функције изражавали у облику интеграла (1). Применивши нпр. идентички образац

$$F(z) = \int_0^1 \left[F(0) + zF'(zt) \right] dt$$

на функције

$$F(z) = \log R(z), \quad F(z) = \operatorname{arctg} R(z),$$

где је $R(z)$ каква рационална функција, те би функције биле изражене интегралом облика

$$F(z) = \int_0^1 \lambda(t,z)\, dt,$$

где је $\lambda(t,z)$ извесна рационална функција променљиве z, па, дакле, потпада под тип (1).

Познати интегрални образац[8]

[5] *Memoire sur les fractions continues* (Ann. de la Faculté de Toulouse t. 8–9. 1894–1895).

[6] *Leçons sur les séries divergentes* (Paris 1901).

[7] *Sur les séries divergentes etc.* (Ann. de la Faculté de Toulouse 1900. p. 317–430).

[8] Hermite: *Cours lithographié*, 4-me édition p. 113.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{At^2 + 2Bt + C} = \pm \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}},$$

где A, B, C не зависе од t, даје могућности да се квадратни корен ма какве рационалне функције изрази у облику (1), итд.

Лако је уверити се, да *ако се на који било начин усūело, да се једна даūа функција* F(z) *изрази инūеīралом облика* (1), *моīу се одмах наћи бескрајно мноīо инūеīрала исūоīа ūиūа, који ће ūредсūављаūи ūу исūу функцију.*

Јер, као што је лако увидети, има бескрајно много функција $R(t, z)$, рационалних по променљивој z, које имају ту особину, да за све вредности z, што припадају извесној области у бројној равни, буде

$$\int_L R(t, z)\, dt = 0.$$

Тако, ако је лук интеграције L каква затворена контура, а $P(t, z)$ и $Q(t, z)$ два полинома по z, са сачиниоцима који су униформне функције променљиве t, и ако поред тога једначине

$$P(t, z) = \infty, \quad Q(t, z) = 0$$

за $|z| < a$ (где је a каква дата реална и позитивна вредност), немају никакав заједнички корен t, чија би се вредност налазила у унутрашњости контуре L, биће

$$\int_L \frac{P(t, z)}{Q(t, z)}\, dt = 0,$$

и то за све вредности (z) за које је $|z| < a$.

У случају кад се лук L поклапа са реалним размаком $(0, \infty)$, или се своди на овај каквом сменом променљиве t, може се за функцију $R(t, z)$ узети функција

$$\frac{1}{1+t^2} \frac{\lambda z \cos t - z^2}{\lambda^2 - 2\lambda z \cos t + z^2} = \frac{1}{1+t^2} \sum_0^\infty \left(\frac{z}{\lambda}\right)^n \cos nt$$

(где је λ ма какав позитиван број), јер ће тада, према познатом обрасцу

$$\int_0^\infty \frac{\cos nt}{1+t^2}\, dt = 0$$

који вреди за све позитивне вредности n, бити

$$\int_0^\infty R(t, z)\, dt = 0$$

за све вредности z, чији је модуо мањи од λ.

Тако исто познато је да има бескрајно много разноврсних функција $\varphi(t)$, које имају ту особину, да је за $n = 0, 1, 2...$

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, t^n dt = 0$$ [9]

и помоћу којих се може конструисати бескрајно много функција $R(t, z)$, које ће имати поменуту особину.

Такве функције R постоје за ма какав лук интеграције L, *а додајући функцији, што фигурише под интегралним знаком у нађеном интегралу* (1) *колики се хоће број таквих функција, имаће се колико се хоће разноврсних образаца облика* (1) *за аналитичко представљање једне исте дате функције* F(z).

А факт, који се у свему овоме што је наведено, нарочито истиче, јесте тај да одређени интеграли облика (1), према разним облицима функције што фигурише под интегралним знаком, *могу дефинисати сваку аналитичку функцију променљиве количине* z. Осим тога, баш и кад су функције променљиве t, што фигуришу као сачиниоци рационалне функције под интегралним знаком, веома просте, *такви интеграли могу дефинисати бескрајан број нових, апсолутно несводљивих трансцендената*, за које такав један аналитички израз даје могућности да се у појединостима проуче. Довољно је, за потврду тога, навести нпр. прост интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at^2}}{1 - ze^{bt^2}}\, dt$$

који дефинише несводљиву трансценденту

$$F(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_0^\infty \frac{z^n}{\sqrt{a + nb}};$$

или интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-bt} + ze^{-bt}(1 - e^{-at})}{1 - ze^{-at}} \frac{dt}{t}$$

(где су a и b реални позитивни бројеви), који дефинише несводљиву трансценденту

[9] Borel: *Leçons sur les séries divergentes* (Paris, 1901. p. 67–68).

$$F(z) = (1-z)\sum_{0}^{\infty} z^n \log(a+bn) \quad \text{итд.}$$

Предмет ове расправе биће тражење метода за непосредно проучавање функција F(z), *датих одређеним интегралима* (1), *без потребе да се те функције експлицитно изразе данас познатим и проученим трансцендентама.*

Такво је експлицитно изражавање, уосталом, могућно само у извесним врло специјалним случајевима, и то је факт, који даје нарочита интереса тражењу метода за непосредно проучавања функција $F(z)$ на самоме њиховом аналитичком изразу (1).

РАЗВИЈАЊЕ ПРОУЧАВАНИХ ФУНКЦИЈА У РЕДОВЕ УРЕЂЕНЕ ПО СТЕПЕНИМА НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЉИВЕ КОЛИЧИНЕ

Нека је дат интеграл

$$F(z) = \int_L R(t,z)\,dt,$$

где је R *рационална* функција параметра z, чији сачиниоци могу бити *ма какве* функције променљиве t.

Може се десити да бројилац или именилац рационалне функције R садрже чинилаца облика $(z-a)^p$, где је p какав цео позитиван број; такви се чиниоци могу извући пред интегрални знак, тако да се може претпоставити да их и нема.

Пошто тада вредност $z=0$ није пол функције $R(t,z)$, ова ће бити холоморфна за $z=0$ и за све вредности t, изузимајући, може бити, извесне утврђене вредности $t=\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots$ променљиве t. Према познатој теореми за развијање рационалних функција у редове, биће за све вредности t (осим за $t=\xi_i$)

$$(8) \qquad R(t,z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \psi(n,t) z^n$$

где ће $\psi(n,t)$ бити збир извесног ограниченог броја чланова облика

$$(9) \qquad P_i(n,t)\left[r_i(t)\right]^n$$

у којима функције $r_i(n,t)$ не зависе од индекса n, а добијају се као корени извесне алгебарске једначине са сачиниоцима, који су функције променљиве t; функције $P_i(n,t)$ су извесни полиноми по z, чији сачиниоци зависе рационално од сачинилаца функције $R(t,z)$, сматране као функције променљиве z. Степен полинома P_i по n биће $\lambda_i - 1$, где λ_i означује ред корена $z = r_i(t)$ поменуте алгебарске једначине.

Према томе, $\psi(n,t)$ ће бити збир извеснога ограничног броја чланова облика

$$n^{\lambda_i - 1} A_j(t)\left[r_i(t)\right]^n, \tag{10}$$

где функције $A_j(t)$ и $r_i(t)$ не зависе од индекса n и где је поред тога $A_j(t)$ рационална, а $r_i(t)$ алгебарска функција сачинилаца у $R(t,z)$, сматраној као функцији параметра z.

Претпостављајући, дакле, да лук L не пролази ни кроз једну од сингуларних тачака ξ_i и да се може применити правило о интеграцији редова, сваки члан (10) даће у интегралу $f(z)$ по један члан облика

$$n^{\lambda_i} J_i(n) z^n, \tag{11}$$

где је

$$J_i(n) = \int_L A_j(t)\left[r_i(t)\right]^n dt. \tag{12}$$

Општи сачинилац a_n *реда*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

у који се може развити проучавана функција, биће, дакле, збир ограниченога броја чланова облика

$$n^p J(n),$$

где је функција $J(n)$ *дата обрасцем* (12), *а* p *је какав цео позитиван број.*

Одређивање таквих сачинилаца своди се, дакле, на проучавање интеграла (12).

Приметимо још то да се може десити да који од интеграла $J(n)$ буде бескрајан или неодређен, поред свега тога што је функција $f(z)$ холоморфна за $z = 0$. Тај случај може наступити само онда кад неодређености или дисконтинуитета два или више интеграла $J(n)$ нестаје у збиру чланова, којима ти интеграли одговарају, а пошто ових мора нестати за ма какву вредност индекса n, у свима таквим члановима мора фигурисати један исти изложилац p. *У таквим се случајевима одређивање сачинилаца* a_n *своди на проучавање интеграла облика*

$$\int_L \left\{A_1(t)\left[r_1(t)\right]^n + A_2(t)\left[r_2(t)\right]^n + \ldots\right\}dt,$$

где је број сабирака под интегралним знаком ограничен.

Један такав пример представља функција

$$f(z) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-t}}{1-z} - \frac{e^{-rt}}{1-ze^{-t}}\right]\frac{dt}{t}$$

којој одговара сачинилац

$$a_n = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-rt}e^{-nt}}{t}\right]dt.$$

Сваки је од интеграла, из којих се састоји сачинилац a_n, бескрајан; међутим, сам је тај сачинилац коначан и има за вредност

$$a_n = \log(n+2)$$

према једном познатом интегралном обрасцу.

*

Задржимо се на интегралима облика

(13) $$J(n) = \int_L A(t)\left[r(t)\right]^n dt$$

на које се у општем случају своди израчунавање сачинилаца a_n.

Пре свега, у извесним доста општим случајевима, ти се интеграли могу потпуно израчунати и изразити као експлицитне функције индекса n. Тако:

I. Има нпр. извесних неодређених интеграла облика

(14) $$U = \int A(t)\left[r(t)\right]^n dt$$

који се могу израчунати као функције променљивих n и t, а кад је то учињено, лако је израчунати их дуж датога лука интеграције. Такав је нпр. случај са интегралима облика (14), кад се знају израчунати узастопни интеграли

$$A_1 = \int A dt$$
$$A_2 = \int A_1 \frac{dr}{dt} dt$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{n+1} = \int A_n \frac{dr}{dt} dt.$$

Тада се делимичном интеграцијом налази да је

$$U = A_1 r^n - nA_2 r^{n-1} + n(n-1)A_3 r^{n-2} - \ldots,$$

а одатле се лако налази и сам одговарајући интеграл (13).

II. Претпоставимо нпр. да лук интеграције L представља какву затворену контуру C. Кад би обе функције $A(t)$ и $r(t)$ биле холоморфне у унутрашњости те контуре, интеграл би $J(n)$ био раван нули за ма какву вредност n, па, дакле, би се и проучавана функција $f(z)$ идентички свела на нулу. Да тога не би било, мора, дакле, бар једна од функција $A(t)$ и $r(t)$ имати сингуларитета у унутрашњости те контуре.

Претпоставимо најпре случај да је функција $r(t)$ холоморфна у унутрашњости контуре, а да функција $A(t)$ има у њој полова. Сваки пол даће у интегралу $J(n)$ по један члан раван остатку функције под интегралним знаком, према чему је лако уверити се да ће се $J(n)$ *састојати из извесног ограниченог броја чланова, који ће сви бити облика*

$$n(n-1)\ldots(n-h)ab^n, \tag{15}$$

где су a *и* b *стални бројеви, независни од* n.

Претпоставимо сад да се у унутрашњости контуре C налази и полова̂ функције $r(t)$, и нека је $t = \alpha$ један такав пол q-тог реда; он ће у интегралу $I(n)$ дати један члан раван остатку

$$\lim \frac{1}{(nq-1)!} \frac{d^{nq-1}}{dt^{nq-1}} \left\{ (t-\alpha)^{nq} A(t) \left[r(t) \right]^n \right\} \quad \text{за} \quad t = \alpha. \tag{16}$$

Лако се увиђа да овај израз може дефинисати бескрајно многе и бескрајно разноврсне функције индекса n: довољно је уочити случај кад је

$$r(t) = \frac{1}{t};$$

тада је $\alpha = 0$, $q = 1$ и израз се (16) своди на

$$\lim \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} A(t) \quad \text{за} \quad t = 0,$$

тј. на вредност c_{n-1}, где c_n представља општи сачинилац реда

$$A(t) = c_0 + c_1 + c_2 t^2 + \dots$$

који би одговарао функцији $A(t)$; ти сачиниоци могу, међутим, бити бескрајно разноврсни.

У општем случају, кад контура C садржи у својој унутрашњости полова и функције $A(t)$ и $r(t)$, интеграл ће $J(n)$ бити састављен из збира чланова облика (15) и (16).

III. Велики се број интеграла $J(n)$ може израчунати разним специјалним методама или помоћу таблица познатих одређених интеграла. Тако помоћу већ познатих интегралних образаца налази се овај низ образаца за разноврсне интеграле $J(n)$ горњега облика:

$$\int_0^\infty e^{-at^2} e^{-nbt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{a+bn}}$$

$$\int_0^\infty e^{-nt} \cos at \, dt = \frac{n}{a^2+n^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-nt^2} \cos at^2 dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+n^2}+n}{a^2+n^2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-nt} \sin at \frac{dt}{t} = \operatorname{arctg}\frac{a}{n}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a+ti}\right)^n e^{cti} dt = \frac{2\pi}{e^{ac}} \frac{c^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a^2+t^2}\right)^n dt = 2\pi\left(\frac{1}{2a}\right)^{2n-1} \frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}$$

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$$

$$\int e^t \left(\frac{1}{t}\right)^n dt = \frac{2\pi i}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}$$

(где је интеграл узет дуж ма каквог круга описаног око почетка) итд.

Међутим, у већини случајева такво је експлицитно израчунавање интеграла $J(n)$ неизвршљиво, било с тога, што се ти интеграли уопште не могу ни изразити функцијама, којима данас располаже математичка анализа, било стога што би сам израз, који би се имао добити као резултат, баш и кад је израчунљив, био компликован и рачунски неупотребљив.

У таквим случајевима могу, при проучавању функција f(z), *чинити знатне услуге извесне неједначине, које се могу наћи за интеграле* J(n) *и које би одређивале доње или горње границе њихових величина или величина њихових модула.* Ови интеграли, по самоме своме облику, нарочито су згодни за истраживања те врсте и поље за оваква истраживања веома је пространо. Ја ћу овде извести неколико таквих општих резултата.

A) За тражење таквих неједначина може се корисно употребити *метода упоређивања*, које би се принцип састојао у овоме: кад је дат интеграл

$$(17) \qquad J(n) = \int_L A(t)\left[r(t)\right]^n dt,$$

ако је дуж лука интеграције L непрестано

$$(18) \qquad |A(t)| \leq \lambda(t), \quad |r(t)| \leq |u(t)|,$$

биће

$$(19) \qquad |J(n)| < \int_L |\lambda(t)|\left[|u(t)|\right]^n ds,$$

где s представља дужину лука интеграције.

Узимајући за функције $\lambda(t)$ и $u(t)$, са којима се врши упоређивање функција $A(t)$, разнолике функције променљиве t, али изабране тако да је могућно израчунати интеграл на десној страни неједначине (19), имале би се разнолике неједначине за одредбу горњих граница модула проучаваних интеграла $J(n)$. Ја ћу навести неколико резултата, који се добијају таквим упоређивањем.

Тако, за интеграле, са којима ће се упоређивати проучавани интеграли $J(n)$, могу се узети они у којима је

$$r(t) = \text{const}.$$

Означимо са M највећи модуо, који може имати функција $r(t)$ дуж лука интеграције L. Деформишући овај лук тако да интеграл $J(n)$ не мења своју вредност, мењаће се и величина максималног модула M.

Тада се може десити да за један извесни интеграциони лук L', еквивалентан луку L и добијен таквом деформацијом M добије најмању могућну вредност, тако да постане *minimum maximorum*. Darboux је показао[10] како се за једну дату функцију може наћи таква вредност; ако се она означи са M, онда *кад год интеграл*

$$P = \int_L A(t)\, dt \tag{20}$$

има коначну и од нуле различну вредност, биће

$$J(n) < PM^n. \tag{21}$$

У случају кад за функцију $r(t)$ не постоји minimum maximorum, може се за M узети највећи модуо, који има та функција дуж лука L, или дуж ма кога од лукова добијаних поменутом деформацијом, само што тада нађена горња граница на десној страни неједначине (21) неће бити најмања између оних до којих је могућно доћи том методом.

Применимо тај принцип нпр. на интеграле облика

$$J(n) = \int_0^1 A(t)\left[\frac{t(1-t)}{t-\lambda}\right]^n dt,$$

где је $A(t)$ ма каква функција промењиве t, која задовољава ту погодбу, да интеграл (20) има коначну и од нуле различну вредност, а λ представља ма какав сталан, реалан или имагинаран број. За функцију

$$r(t) = \frac{t(1-t)}{t-\lambda}$$

налази се[11] да између свију максималних модула, које та функција достиже при деформацији лука интеграције L, тако да овај непрестано пролази кроз крајње тачке $t = 0$ и $t = 1$, најмању вредност има онај чија је вредност

$$M = \frac{1}{1 - 2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}} \tag{22}$$

---

[10] *Memoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres et sur une classe étendue de developpements en série* (Journal de math. pures et appliquées 1878. p. 5–56 i 377–416).

[11] Darboux: loc. cit.

где знак пред квадратним кореном ваља узети такав да модуо имениоца буде већи од 1. Према томе ће бити

$$J(n) < PM^n,$$

где је P одређено обрасцем (20), а M обрасцем (22).

За одређивање прецизнијих граница проучаваних интеграла $J(n)$ могу се за компаративне функције узимати не константе, већ прâве функције променљиве t.

Уочимо нпр. интеграле

$$J(n) = \int_0^\infty A(t)\left[r(t)\right]^n dt, \tag{23}$$

где су функције $A(t)$ и $r(t)$ реалне за све реалне и позитивне вредности t и задовољавају ту погодбу, да је за извесне, подесно изабране, реалне и позитивне вредности k, h, a:

$$\text{апс. вред. } A(t) \leq kt$$

$$\text{апс. вред. } r(t) \leq \frac{h}{\sqrt{a^2+t^2}}.$$

Тада ће бити за $n > 2$

$$\text{апс. вред. } J(n) < kh^n \int_0^\infty \frac{tdt}{(a^2+t^2)^{\frac{n}{2}}},$$

тј.

$$\text{апс. вред. } J(n) < \frac{kh^2}{n-2}\left(\frac{h}{a}\right)^{n-2}. \tag{24}$$

Из те просте примедбе можемо узгред извести један резултат, који је од општијега интереса за теорију функција.

Нека $f(z)$ ма каква функција променљиве z, која задовољава ове погодбе: 1. да је реална за све реалне и позитивне вредности z; 2. да је холоморфна за све вредности z са десне стране осе имагинарних вредности; 3. да тежи нули кад z бескрајно расте у ма коме правцу са те стране. У једноме раду[12] ја сам доказао да ако је

[12] *О представљању функција одређеним интегралима* (Глас LXIII, Срп. краљ. акад., стр. 225–226).

$$f(ti) = \varphi(t) + i\psi(t)$$

и ако је a ма која реална и позитивна вредност, апсолутна вредност општег сачиниоца A_n реда

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots \tag{25}$$

у који се може развити функција $f(z)$ у близини вредности $z = a$ увек је мања од апсолутне вредности одређеног интеграла

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{F(t)}{(\sqrt{a^2+t^2})^{n+1}}\,dt, \tag{26}$$

где $F(t)$ означава апсолутну вредност функције $\psi(t)$.

Пошто је функција $f(z)$ реална за све реалне и позитивне вредности z, па и за $z = 0$, то је $\psi(0) = 0$; а пошто је, поред тога, она холоморфна за све такве вредности z и тежи нули за $z = \infty$, то количник $\dfrac{\psi(z)}{z}$ остаје коначан за све вредности z у размаку од 0 до ∞. Ако се његова највећа апсолутна вредност у томе размаку означи са N, биће

$$F(t) < Nt,$$

што значи да се на интеграл (26) може непосредно применити неједначина (24), а тиме се долази до овога резултата:

Апсолутна вредност сачиниоца A_n (*за* $n > 1$) *реда* (25) *увек је мања од вредности*

$$\frac{2N}{(n-1)\pi a^{n-1}}.$$

Вратимо се сада општем случају кад је дат интеграл

$$J(n) = \int_L A(t)\left[r(t)\right]^n dt \tag{27}$$

и претпоставимо да је лук интеграције L каква затворена контура, која ће бити еквивалентна једноме извесном кругу C, чије средиште нека је тачка $t = a$. Тај ће лук тада бити еквивалентан и бескрајном броју кругова концентричних са кругом C и чије ће вредности полупречника лежати између две утврђене вредности, нпр. R_1 и R_2.

Ако се стави да је

$$t = a + \rho e^{\theta i},$$

налази се да је

$$|J(n)| < \rho \int_0^{2\pi} TS^n d\theta, \tag{28}$$

где је, краткоће ради, стављено да је

$$T = \operatorname{mod} A(a + \rho e^{\theta i})$$
$$S = \operatorname{mod} r(a + \rho e^{\theta i}).$$

Нека су $\lambda(\rho)$ и $\mu(\rho)$ две функције саме променљиве ρ, такве да је за све вредности θ, које се налазе између 0 и 2π, и за све вредности ρ које се налазе између R_1 и R_2

$$T \leq \lambda(\rho), \quad S \leq \mu(\rho).$$

Тада се, помоћу неједначине (28), налази да је

$$|J(n)| < 2\pi\rho\lambda(\rho)[\mu(\rho)]^n, \tag{29}$$

и то за ма коју вредност ρ између граница R_1 и R_2. Између свију тих вредности за ρ најпробитачније је узети ону за коју функција

$$\Phi(\rho) = \rho\lambda(\rho)[\mu(\rho)]^n \tag{30}$$

достиже своју најмању вредност између оних које она има за $R_1 < \rho < R_2$. Та ће се вредност ρ уопште мењати са индексом n, и ако је означимо са $\psi(n)$, биће

$$|J(n)| < 2\pi\psi(n). \tag{31}$$

Разликујмо сад ова два случаја:

1. Претпоставимо најпре да најмања вредност $\Phi(\rho)$ у размаку (R_1, R_2) одговара једној од граничних вредности $\rho = R_1$ или $\rho = R_2$ тога размака. У првом ће случају бити

$$\psi(n) = R_1\lambda(R_1)[\mu(R_1)]^n, \tag{32}$$

а у другом

$$\psi(n) = R_2\lambda(R_2)[\mu(R_2)]^n. \tag{33}$$

2. Претпоставимо сад да најмања вредност $\Phi(\rho)$ одговара извесној вредности ρ, која се налази између граница R_1 и R_2. Та вредност тада мора бити равна једноме од реалних и позитивних корена једначине $\Phi'(\rho) = 0$; она ће увек зависити од n и ако се означи са $\overline{\omega}(n)$, биће

$$(34) \qquad \psi(n) = \overline{\omega}(n)\lambda\left[\overline{\omega}(n)\right]\left\{u\left[\overline{\omega}(n)\right]\right\}^{n}$$

за све вредности n, које су такве да је

$$R_1 < \overline{\omega}(n) < R_2.$$

Иако је $R_2 = \infty$ (што ће бити случај, кад су функције $A(t)$ и $r(t)$ холоморфне у спољној области круга C), једначина ће (34) важити за све вредности n веће од R_1.

Ма који од ових случајева био, једна горња граница за вредност модула интеграла J(n) *биће* $2\pi\psi(\mathrm{n})$, *где је вредност* $\psi(\mathrm{n})$ *дефинисана једним од образаца* (32), (33), (34).

Применимо тај резултат на који специјалнији случај. Нека су $A(t)$ и $r(t)$ две функције које задовољавају ове погодбе: да су холоморфне за све вредности t у спољној области једнога круга C описаног око почетка и да је за подесно изабране реалне и позитивне вредности k, h, α, ρ

$$\left|A(t)\right| \leq ke^{\rho^{\alpha}}, \qquad \left|r(t)\right| \leq \frac{h}{\rho^{p}}$$

(где ρ означава модус променљиве t), и то за све вредности t у спољној области круга C.

Приметимо да ће, као што је познато из теорије целих функција, A(t) *увек задовољавати горњу погодбу кад год је то каква цела функција чији је род* (*genre*) *коначан*: према једној познатој теореми Poincaré-а број α имаће тада вредност $1+\lambda$, где λ означује род функције $A(t)$.

Тада ће бити

$$\Phi(\rho) = kh^{n}\rho^{1-np}e^{\rho^{\alpha}};$$

једначина $\Phi'(\rho) = 0$ своди се на

$$\alpha\rho^{\alpha} - np + 1 = 0$$

и има као реалан и позитиван корен вредност

$$\rho = \overline{\omega}(n) = \left(\frac{np-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

а лако се уверити заменом у другоме изводу функције $\Phi(\rho)$ да та вредност одиста одговара минимуму те функције. Тај минимум има за вредност

$$\psi(n) = kh^{n}\frac{e^{\frac{np-1}{\alpha}}}{\left(\frac{np-1}{\alpha}\right)^{\frac{np-1}{\alpha}}};$$

са друге стране, ако се полупречник круга C означи са R, биће $\overline{\omega}(n) > R$ за све вредности $n > \eta$ где η означује број целих јединица које садржи количник

$$\frac{1+\alpha R^{\alpha}}{p}.$$

Дакле, *почевши од ранга* n = η *биће непрестано*

$$\left| J(n) \right| < \frac{AB^{n}}{(np-1)^{\frac{np-1}{\alpha}}},$$

где су A *и* B *две константе, реалне, позитивне, независне од* n *и дате обрасцима*

$$A = \frac{2k\pi}{(\alpha e)^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad B = h(\alpha e)^{\frac{p}{\alpha}}.$$

Чинећи разне друге претпоставке о функцијама $A(t)$ и $r(t)$, имао би се велики број резултата ове врсте, који би одређивали горње границе модула проучаваних интеграла $J(n)$.

Приметимо још и то да се истом методом упоређивања могу у великом броју случајева одређивати и *доње границе* за вредности интеграла $J(n)$. Тако нпр. ако је лук интеграције део z-осовине од $z = a$ до $z = b$, а функције $A(t)$ и $r(t)$ реалне и непрекидне у томе размаку, онда узевши за $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ две такве функције, да је за $a < t < b$

$$\lambda(t) \leq A(t), \quad u(t) \leq r(t)$$

биће

$$J(n) \geq \int_{a}^{b} \lambda(t)\left[u(t)\right]^{n} dt \tag{35}$$

и ако се зна израчунати интеграл (35), имаће се једна доња граница за $J(n)$.

Б) За одређивање горњих и доњих граница интеграла $J(n)$ може се корисно употребити и једна теорема, коју је доказао Ossian Bonnet[13] и која се састоји у овоме:

Ако је $\varphi(z)$ каква функција, која у размаку (a, b) остаје позитивна и непрестано опада, а $f(z)$ ма каква функција коначна и непрекидна у томе размаку, биће

[13] Picard: *Analyse* t. I. p. 201.

$$\int_a^b f(z)\varphi(z)\,dz = \varphi(a)\int_a^c f(z)\,dz,$$

где је c једна извесна вредност, која се налази у размаку (a, b).

Ако је функција $\varphi(z)$ у горњем размаку позитивна, али непрестано расте, биће

$$\int_a^b f(z)\varphi(z)\,dz = \varphi(b)\int_c^b f(z)\,dz.$$

Применом теорема на интеграл $J(n)$, налази се да ако $r(t)$ не мења знак у размаку (a, b) (тако да се може узети као позитивна) и ако је извод $r'(t)$ позитиван у томе размаку, а интеграл

$$A = \int_t^b A(t)\,dt \tag{36}$$

има коначну, одређену и од нуле различну вредност за све вредности t у размаку (a, b), биће

$$J(n) = AB^n, \tag{37}$$

где A представља једну од вредности (36), а B константу, чија је вредност $r(b)$; ако је, пак, извод $r'(t)$ негативан, вредиће опет једначина (37), али ће у њој A бити једна од вредности интеграла

$$A = \int_a^t A(t)\,dt \qquad a < t < b,$$

а B ће имати вредност $r(a)$.

Ако су, дакле, N *и* M *једна горња и једна доња граница вредности тако дефинисаних интеграла* A, *биће*

$$NB^n < J(n) < MB^n. \tag{38}$$

B) Уочимо случај кад се лук интеграције L своди на један ограничен или неограничен део осовине реалних вредности, а нека су $A(t)$ и $r(t)$ ма какве функције, реалне, коначне и непрекидне између граница интеграције. Применимо на проучавани интеграл $J(n)$ познату Schwarz-ову неједначину, према којој је уопште за ма какве функције φ и ψ, реалне, коначне и непрекидне[14]

[14] В. нпр. Poincaré: *Théorie du potentiel newtonien* (Paris 1899) p. 345.

$$\left[\int \varphi\psi \, dt\right]^2 < \left[\int \varphi^2 dt\right]\left[\int \psi^2 dt\right] \tag{39}$$

па ма какве биле реалне границе интеграције, претпостављајући да су оне исте за сва три интеграла.

Узевши да је

$$\varphi = A(t), \quad \psi = \left[r(t)\right]^n$$

према горњој неједначини биће

$$J(n) < A\sqrt{Y(n)}, \tag{40}$$

где је A *извесна константа, независна од* n *и чија је вредност*

$$A = \sqrt{\int_L \left[A(t)\right]^2 dt}, \tag{41}$$

а Y(n) *извесна функција променљиве* n, *дата обрасцем*

$$Y(n) = \int_L \left[r(t)\right]^{2n} dt. \tag{42}$$

Тако нпр. ако је дат интеграл

$$J(n) = \int_0^\infty A(t)\, e^{-nt^2}\, dt,$$

где је $A(t)$ ма каква функција, која задовољава горње погодбе, а a ма какав реалан и позитиван број, биће

$$Y(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{2an}}$$

и према томе

$$J(n) < A\sqrt[4]{\frac{\pi}{8an}};$$

за интеграле

$$J(n) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\left(\frac{1}{a+bt^2}\right)^n dt$$

биће

$$Y(n) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (4n-2)},$$

па, дакле,

$$J(n) < \frac{A\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{ab}}\sqrt{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(4n-2)}} \quad \text{итд.}$$

Г) Између разноврсних начина на које се могу тражити горње или доње границе вредности интеграла $J(n)$ навешћу још један, који у извесним случајевима доводи до граница пробитачнијих од оних, које бисмо добили на други који од наведених начина.

Ако је $\varphi(z)$ ма каква реална функција, чији први извод непрекидно расте за све вредности z у једноме датом размаку (a, b) и ако су

$$z_1, z_2, \ldots, z_m$$

ма какви бројеви, који се налазе у томе размаку, а

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

ма какви реални позитивни бројеви, биће увек, као што је нашао Hölder[15] ,

$$\frac{a_1\varphi(z_1)+\ldots+a_m\varphi(z_m)}{a_1+a_2+\ldots+a_m} > \varphi\left(\frac{a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_mz_m}{a_1+a_2+\ldots+a_m}\right). \tag{43}$$

Претпоставимо да функције $A(t)$ и $r(t)$ задовољавају ове погодбе:

1. да су обе реалне, коначне и непрекидне у размаку (a, b) и да не мењају знаке у томе размаку (тако да се ти знаци могу сматрати као позитивни);

2. да је други извод $r''(t)$ такође коначна и непрекидна функција истога знака, кога је и функција $r(t)$ у размаку (a, b).

Ако се у неједначини (43) узме да је

$$\begin{array}{lll} z_1 = t, & z_2 = t+dt, & z_3 = t+2dt \\ a_1 = A(t)dt, & a_2 = A(t+dt)dt, & a_3 = A(t+2dt)dt\ldots \end{array}$$

$$\varphi(z) = \left[r(t)\right]^n$$

(што се сме учинити, пошто су према учињеним претпоставкама задовољене погодбе, за које вреди та неједначина), долази се до овог резултата: *једна доња граница интеграла*

$$J(n) = \int_a^b A(t)\left[r(t)\right]^n dt$$

[15] В. нпр. Bull. des Sciences mathematiques 1890. p. 96.

биће вредности MP^n *где су* M *и* P *константе, независне од* n *и дате обрасцима*

$$M = \int_a^b A(t)\,dt, \quad P = r\left(\frac{L}{M}\right), \quad L = \int_a^b A(t)t\,dt.$$

У специјалном случају, кад се функција $A(t)$ своди на једну константу λ, биће

$$M = (b-a)\lambda, \quad L = \frac{\lambda}{2}(b^2 - a^2)$$

и према томе

$$J(n) > (b-a)\left[r(\xi)\right]^n \lambda,$$

где је

$$\xi = \frac{a+b}{2}.$$

СВОЂЕЊЕ ПРОУЧАВАНИХ ФУНКЦИЈА НА ПРОСТЕ ТИПОВЕ

У одељку, што претходи, показано је да ако се функција $R(t,z)$, која фигурише под интегралним знаком у проучаваном интегралу $f(z)$, развије у ред

$$R(t,z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, \tag{44}$$

општи сачинилац b_n биће збир ограниченога броја чланова, од којих је сваки облика

$$P(n,t)\left[r(t)\right]^n,$$

где су $r(t)$ извесне функције само променљиве t, независне од n и које се добијају као корени извесне алгебарске једначине по z, чији су сачиниоци функције променљиве t; $P(n,t)$ је известан полином по n, чији су сачиниоци рационалне функције сачинилаца у $R(t,z)$, сматраној као функцији променљиве z.

Лако се увиђа да се сваки полином $P(n,t)$ може написати, и то само на један начин, у облику

$$P(n,t) = A_0(t) + nA_1(t) + n(n-1)A_2(t) + \ldots,$$

где ће $A_i(t)$ бити функције променљиве t, дефинисане системом линеарних једначина

$$
\begin{aligned}
P(0,t) &= A_0 \\
P(1,t) &= A_0 + A_1 \\
P(2,t) &= A_0 + 2A_1 + 2A_2 \\
P(3,t) &= A_0 + 3A_1 + 6A_2 + 6A_3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Према томе ће сачинилац b_n реда (44) бити збир ограниченога броја чланова, од којих ће сваки имати облик

$$
n(n-1)\dots(n-k)A(t)\left[r(t)\right]^n, \tag{45}
$$

а општи сачинилац a_n реда

$$
F(z) = \int_L R(t,z)dt = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots
$$

у који се може развити функција $F(z)$ биће раван збиру ограниченог броја чланова, који су сви облика

$$
n(n-1)\dots(n-k)J(n),
$$

где је

$$
J(n) = \int_L A(t)\left[r(t)\right]^n dt. \tag{A}
$$

Функције $A(t)$, што фигуришу у овим интегралима, не зависе од n, и то $A(t)$ је увек *рационална*, а $r(t)$ увек *алгебарска* функција сачинилаца у $R(t,z)$, сматраној као функцији променљиве z.

Сам, пак, проучавани интеграл $F(z)$ биће збир ограниченога броја чланова облика

$$
\sum_0^\infty n(n-1)\dots(n-k)J(n)z^n
$$

који се могу написати у облику

$$
z^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\sum_0^\infty J(n)z^n,
$$

а из тога се изводи ова основна теорема, која ће нам служити као полазна тачка за проучавање функција $F(z)$:

Ако се са

$$
J_1(n),\quad J_2(n),\quad J_3(n),\dots
$$

означе разни интеграли облика (А), *који се односе на проучавану функцију* F(z), *а са*

$$\theta_1(z), \quad \theta_2(z), \quad \theta_3(z), \ldots$$

разне функције $\theta(z) = \sum J(n)z^n$ *што одговарају тим интегралима, функција ће* $F(z)$ *бити збир извесног ограниченог броја чланова*

$$\begin{array}{llll} \theta_1(z), & z\dfrac{d\theta_1}{dz}, & z^2\dfrac{d^2\theta_1}{dz^2}, & \ldots \\ \theta_2(z), & z\dfrac{d\theta_2}{dz}, & z^2\dfrac{d^2\theta_2}{dz^2}, & \ldots \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{array}$$

Према томе, функције

$$\theta_1(z), \quad \theta_2(z), \quad \theta_3(z), \ldots$$

играју према функцији $f(z)$ улогу једне врсте *простих елемената* и свака функција $f(z)$ проучаваног типа, ма како компликованој функцији $R(t,z)$ она одговарала, своди се на комбинације функција $\theta_i(z)$ и њихових узастопних извода: то су најпростији типови, на које је могућно свести проучаване функције $F(z)$.

Међутим, и ови су типови бескрајно разноврсни. Тако нпр. функције $f(z)$, којима одговарају функције

$$A(t) = e^{-at^2}, \quad r(t) = e^{-bt^2},$$

а лук се интеграције L своди на реалну полуосу, своде се на комбинације трансценденте

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\sqrt{a+bn}}$$

и њених извода по z.

Кад су функције $A(t)$ и $r(t)$ облика

$$A(t) = \frac{\sin at}{t}, \quad r(t) = e^{-t},$$

а лук L реална полуоса, улогу простога елемента игра трансцендента

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{a}{n}\right) z^n.$$

Ако је

$$A(t) = e^{at}, \quad r(t) = \frac{1}{t},$$

а лук L ма каква затворена контура, која у својој унутрашњости обухвата почетак, одговарајућа се функција $f(z)$ своди на комбинације разних степена променљиве z и експоненцијалне функције e^{az} итд.

Од нарочитог је значаја при овоме свођењу то што бескрајно многим функцијама $f(z)$, којима одговарају разне рационалне функције $R(t, z)$ одговарају једни исти прости типови $\theta(z)$. А факт да су ове функције много простије и удесније за проучавање но саме дате функције $f(z)$, и да се таквим свођењем ова функција механички, без дубљег испитивања, ослобођава сваке привидне компликованости и своди на оно што је у њој одиста даље несводљиво, даје нарочита интереса обради теорије функција $\theta(z)$. Осим тога, свођењем на те типове долази се до тога да се читаве групе функција $F(z)$ рачунају да припадају једноме истом типу функција, ако им одговарају исте функције $\theta(z)$, тако да је довољно обрадити теорију овакве једне специјалне трансценденте, па да тиме и теорија једне велике групе функција $f(z)$ буде обрађена.

Функције $\theta(z)$ уопште су *трансцендентне* функције. Међутим, у извесним, нарочитим случајевима оне су *рационалне* функције променљиве z. Тако ако се функција $r(t)$, што одговара једној функцији $\theta(z)$ *своди на какву константу*, биће

$$J(n) = A\alpha^n,$$

где су A и α константе, а сама функција $\theta(z)$ биће облика

$$\theta(z) = \sum_0^\infty A\alpha^n z^n = \frac{A}{1-\alpha z}.$$

Такав ће исти случај бити *кад је лук интеграције* L *каква затворена контура, у унутрашњости које је одговарајућа функција* r(t) *холоморфна, а функција* A(t) *има ограничен број полова.* Јер, као што је раније показано, интеграл ће $J(n)$ тада бити раван збиру ограниченог броја чланова, који су сви облика

$$n(n-1)\dots(n-k+1)HK^{n-k},$$

где су H и K константе независне од n. Сваки такав члан даје у изразу за $\theta(z)$ по један члан облика

$$A\frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{1}{1-Bz}\right),$$

што показује да ће функција $\theta(z)$ одиста бити рационална.

О КОНВЕРГЕНЦИЈИ РЕДОВА $\theta(z)$

Обрасци за свођење проучаваних функција $f(z)$ на просте типове, на које смо наишли у претходном одељку, показују да се питање о конвергенцији редова

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{46}$$

своди на питање о конвергенцији редова

$$\theta(z) = J(0) + J(1)z + J(2)z^2 + \dots$$

који одговарају простим елементима $\theta(z)$. Ако су

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3, \dots \tag{47}$$

полупречници кругова конвергенције посебних функција $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ на чије се комбинације своди проучавање функција $f(z)$ *полупречник* R *круга конвергенције самога реда* (46) *биће раван најмањем од полупречника* (47). Тако исто, ако су

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \dots$$

доње границе полупречника (47), *најмања од тих вредности представљаће једну доњу границу самога полупречника* R.

Задржимо се, дакле, на испитивању конвергенције редова $\theta(z)$.

Пре свега, ако је могућно експлицитно израчунати интеграл $J(n)$ као функцију променљиве n, биће могућно одредити и сам полупречник круга конвергенције одговарајућег реда $\theta(z)$: *овај ће бити раван једној или другој од вредности*

$$\rho = \lim \frac{J(n)}{J(n+1)}, \quad \rho = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{J(n)}}. \tag{48}$$

Дешава се да и ако није могућно наћи експлицитан израз за $J(n)$, ипак се може наћи *асимптотна вредност* тога интеграла за врло велике вредности променљиве n, тј. таква једна функција $U(n)$ те променљиве, да је за $n = \infty$

$$\lim \frac{J(n)}{U(n)} = 1.$$

У таквом ће случају полупречник круга конвергенције реда $\theta(z)$ *бити раван једној или другој од вредности*

$$\rho = \lim \frac{U(n)}{U(n+1)}, \quad \rho = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{U(n)}}. \tag{49}$$

Напослетку, ако је немогућно наћи ни тачан ни асимтотни израз интеграла $J(n)$ помоћу разноврсних неједначина за $J(n)$, о којима је раније било речи, могу се наћи доње границе за полупречник ρ на овај начин: ако се нађе да је

$$\left|J(n)\right| \leq \varphi(n),$$

где је $\varphi(n)$ каква позната, реална и позитивна функција променљиве n и ако се зна било полупречник λ круга конвергенције реда

$$\varphi(0)+\varphi(1)z+\varphi(2)z^2+\ldots$$

било бар једна доња граница μ тога полупречника, *вредност* λ, *односно* μ, *биће једна доња граница полупречника* ρ.

Тако, ако је дуж датога лука интеграције L непрестано

$$\left|r(t)\right| \leq M,$$

где је M каква стална количина и ако поред тога константа

$$P=\int_L \left|A(t)\right| ds \tag{50}$$

(где s означава дужину лука интеграције) има коначну и од нуле различну вредност, одговарајући ред $\theta(z)$ биће извесно конвергентан за

$$\left|(z)\right| < \frac{1}{M}.$$

Замислимо сад да се лук интеграције поступно деформише тако да при тој деформацији интеграл $J(n)$ не мења своју вредност. Свакоме новом, тако добијеном луку одговараће по једна вредност M и ако је μ најмања између тих тако добијених вредности, $\frac{1}{\mu}$ представљаће једну доњу границу полупречника конвергенције ρ.

Али у извесним општим случајевима ова вредност $\frac{1}{\mu}$ *представља и саму тачну вредност тога полупречника.*

Тако, тај ће случај бити кад год су функције A(t) *и* r(t) *реалне, коначне и непрекидне, а лук се интеграције* L *своди на један ограничен или неограничен део реалне осовине, нпр. на какав размак* (a, b) *реалних вредности.*

Да бисмо то доказали, претпоставимо најпре да функција $r(t)$ не мења знак у размаку од $t=a$ до $t=b$ (и тај се знак тада може сматрати као позитиван), а да је поред тога први извод те функције позитиван у томе размаку. Према обрасцу (37) биће тада

$$J(n) = AB^n,$$

где је

$$A = \int_t^b A(t)\,dt, \quad B = r(b), \quad a < t < b.$$

Кад год је, дакле, вредност A коначна и од нуле различна, биће

$$\rho = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{AB^n}} = \frac{1}{B} = \frac{1}{r(b)};$$

а пошто се, према учињеној претпоставци за функцију $r(t)$ њена највећа вредност у размаку (a, b) поклапа са $r(b)$, то је

$$\mu = r(b),$$

па, дакле,

$$\rho = \frac{1}{\mu}.$$

Ако је извод $r'(t)$ негативан у размаку (a, b), било би

$$J(n) = AB^n,$$

где је

$$A = \int_a^t A(t)\,dt, \quad B = r(a), \quad a < t < b$$

и полупречник конвергенције био би

$$\rho = \frac{1}{r(a)}.$$

А пошто се највећа вредност функције $r(t)$ у размаку (a, b) поклапа са $r(a)$, то је опет

$$\rho = \frac{1}{\mu}.$$

Претпоставимо напослетку да и функција $r(t)$ и њен извод $r'(t)$ мењају знаке у размаку (a, b). Тада се тај размак може поделити на неколико мањих размака, у којима ти знаци остају непроменљиви. Свакоме од тих размака одговараће у интегралу $J(n)$ по један члан облика AB^n и $J(n)$ ће бити раван збиру извесног ограниченог броја таквих чланова. Асимтотна вредност интеграла $J(n)$ биће равна ономе од тих чланова у коме константа B има највећу вредност. А пошто се та вредност поклапа са највећом вредношћу функције $r(t)$ у размаку (a, b), то ће опет бити

$$\rho = \frac{1}{\mu}$$

тако да тај резултат важи за све случајеве ма какав био знак функције $r(t)$ и њеног извода између интегралних граница.

Приметимо узгред још и то да пошто је вредност μ у свима таквим случајевима увек различна од нуле, то и полупречник ρ има увек извесну коначну вредност, што значи да: *кад год се лук интеграције* L *своди на један део реалне осовине (ограничен или не) и кад су функције* A(t) *и* r(t) *коначне и непрекидне на томе луку а интеграл*

$$\int_L A(t)\,dt$$

има коначну и од нуле различну вредност, одговарајућа функција $\theta(z)$ *мора имати сингуларитета у равни променљиве* z.

Навешћу још један општи случај у коме ће полупречник круга конвергенције имати за тачну вредност $\frac{1}{\mu}$, где μ означује максималну вредност функције $r(t)$ дуж једнога од међусобно еквивалентних лукова интеграције.

Нека је лук L реалан или имагинаран, али отворен; деформишимо га тако да пролази кроз једну извесну тачку $t = a$, која се не поклапа ни са једном крајњом тачком лука L и која би имала ове особине: 1. да буде $r'(a) = 0$; 2. да тој тачки одговара највећа вредност коју функција $r(t)$ добија дуж новога лука интеграције.

Тада ће опет бити $\rho = \frac{1}{\mu}$.

Јер према једној познатој теореми Darboux-a[16] кад год су за један интеграл облика

$$J(n) = \int_L A(t)\left[r(t)\right]^n dt$$

испуњене горње погодбе, за врло велике вредности n биће

[16] Loc. cit.

$$J(n) = N\frac{\left[r(a)\right]^n}{\sqrt{n}}(1+\varepsilon_n),$$

где је N извесна стална количина, независна од n, а ε_n извесна функција променљиве n, која тежи нули кад n бескрајно расте. Према томе је

$$\rho = \lim\frac{J(n)}{J(n+1)} = \frac{1}{r(a)}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{1+\varepsilon_n}{1+\varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{r(a)},$$

а пошто је $r(a)$ највећа вредност коју функција $r(t)$ добија дуж еквивалентних лукова интеграције, то је горње тврђење доказано.

*

Уопште, питање о конвергенцији редова $\theta(z)$, па, дакле, и самих редова што одговарају проучаваним функцијама $f(z)$, тесно је везано са проучавањем асимтотних вредности интеграла $J(n)$, или – што је једно исто – са одређивањем њихових приближних вредности за врло велике вредности променљиве n. Ови интеграли самим својим обликом јако олакшавају истраживања те врсте и били су предмет неколиких значајних радова. О њима се бавио још Laplace, који је, претпостављајући реалност функција $A(t)$ и $r(t)$ и интеграционог лука L, дошао до овог обрасца, који носи његово име[17]

$$\int_a^b f(z)\left[\varphi(z)\right]^n dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}}F(\alpha)\left[\varphi(\alpha)\right]^n\sqrt{-\frac{2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}(1+\varepsilon_n),$$

где α означује извесну вредност променљиве n, за коју функција $\varphi(\alpha)$ достиже свој максимум, а ε_n извесну функцију променљиве n, која тежи нули кад n бескрајно расте.

Darboux је прецизирао погодбе под којима је Laplace-ов образац употребљив, а у исто време и проширио му употребљивост и на случајеве кад су функције под интегралним знаком, као и лук интеграције имагинарни[18] . Исти је математичар доказао да ма каква била функција $A(t)$, ако је могућно деформисати лук интеграције L тако да пролази кроз једну тачку $t = a$, која се не поклапа ни са једном крајњом тачком тога лука, а за коју би било $r'(a) = 0$ и да функција $r(t)$ има у

[17] *Oeuvres* t. III.

[18] Loc. cit.

тој тачки највећу вредност између свију оних које добија на томе новоме луку, *асимптотна ће вредност интеграла* $J(n)$ *бити*

$$\frac{[r(a)]^n}{\sqrt{n}} N, \tag{51}$$

где је N *константа независна од* n, *дата обрасцем*

$$N = \sqrt{-2\pi \frac{r(a)}{r''(a)}}.$$

У случају кад деформисани лук интеграције пролази кроз више тачака, које имају наведене особине тачке $t = a$, а чији афикси, међутим, задовољавају погодбу

$$|r(t)| = |r(a)|,$$

свака од тих тачака даће по један члан облика (51). *Асимптотна ће вредност интеграла* J(n) *бити равна збиру свију таквих чланова.*

Кад је нпр. дат интеграл

$$J(n) = \int_0^\infty t^k (te^{-t})^n dt,$$

максимум функције $r(t)$ на луку $(0, \infty)$ одговара вредности $t = 1$, а сам тај максимум има за вредност

$$r(1) = \frac{1}{e}.$$

Према томе ће асимтотна вредност интеграла бити

$$\frac{1}{e}\sqrt{\frac{2\pi}{n}},$$

а полупречник круга конвергенције одговарајуће функције $\theta(z)$

$$\rho = e = 2,7182\ldots$$

За интеграле облика

$$J(n) = \int_0^1 f(t)\left[\frac{t(1-t)}{t-\lambda}\right]^n dt,$$

где је $f(t)$ ма каква функција променљиве t, коначна и непрекидна у размаку интеграције, а λ ма какав стални број, налази се да ће им асимтотна вредност бити

$$\frac{Af(a)}{B^n\sqrt{n}},$$

где је

$$a = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{1-2\lambda+2\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{(1-B^2)\pi}$$

$$B = 1-2\lambda+2\sqrt{\lambda(\lambda-1)};$$

полупречник круга конвергенције одговарајуће функције $\theta(z)$ биће

$$\rho = 1-2\lambda+2\sqrt{\lambda(\lambda-1)}.$$

Приметивши да се сваки интеграл $J(n)$, извесном сменом промењиве t, може свести на један или други од облика

$$\int_c f(t)t^n dt, \quad \int_c f(t)\left(\frac{1}{t}\right)^n dt$$

Flamme[19] и Hamy[20] су у својим радовима о приближним вредностима интеграла облика $J(n)$ нарочито проучавали интеграле последња два типа и показали како њихове асимтотне вредности зависе од аналитичке природе функције $F(t)$, а нарочито од природе њених сингуларитета.

Le Roy[21] се бавио о одређивању асимтотних вредности интеграла

(52) $$J(n) = \int_0^\infty A(t)e^{nt}dt,$$

где функција $A(t)$ задовољава извесне погодбе. Те се погодбе састоје у овоме: ако се стави да је

$$\varphi(t) = -\log A(t),$$

1. функција је $\varphi(t)$ реална, позитивна и непрекидна за све вредности t између 0 и ∞, а тако исто и њен први и други извод;

---

19 *Recherches des expressions approchées* etc. (Thèse de doctorat, Paris 1887).

20 *Sur le developpement approché de la fonction perturbatrice* etc. (Journ. de math. pures et appl. 1894).

21 *Valeurs asymtotiques de certaines séries* etc. (Bull. des Sciences Math. t. 24. 1900. p. 245–268).

2. функције

$$\varphi(t), \quad \varphi'(t), \quad \frac{\varphi(t)}{t}, \quad t^2\varphi''(t)$$

расту до бескрајности кад t бескрајно расте. *Асимӣоӣна ће вредносӣ инӣеїрала* J(n) *ӣада биӣи*

(53) $$e^{nc-\varphi(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(c)}},$$

їде је c *реалан и ӣозиӣиван корен једначине*

(54) $$\varphi'(c) = n.$$

Тако нпр. кад је

$$A(t) = e^{-t^p} \qquad 1 < p < 2$$

једначина се (54) своди на

$$pc^{p-1} = n$$

и њен је реалан и позитиван корен

$$c = \left(\frac{n}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}};$$

према томе, асимтотна ће вредност интеграла бити

$$An^hB^{n^k},$$

где су A, B, h, k извесне константе, независне од n.

На тип (52) своди се бескрајан број разноврсних интеграла $J(n)$. Нека је нпр. функција $r(t)$ таква да за $t = a$ добија какву коначну вредност α, уосталом ма какву, а за $t = b$ да постаје бескрајна. Ако се стави да је

$$r(t) = \alpha e^t,$$

проучавани ће интеграл

(55) $$J(n) = \int_a^b A(t)\left[r(t)\right]^n dt$$

добити облик (52).

Ја ћу овде још показати како се може наћи асимтотна вредност интеграла

$$(56)\qquad J(n)=\int_a^\infty A(t)e^{-nt}dt,$$

где је $A(t)$ ма каква *цела функција* (холоморфна у целој равни) и *нултог рода*. Тада се $A(t)$ може развити у ред

$$(57)\qquad A(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\dots$$

конвергентан за све вредности t у равни те променљиве. Множећи једначину (57) са $e^{-nt}dt$ и интегралећи у границама $(0,\infty)$ (очевидно је да се може интегралити за сваку позитивну вредност n, осим за $n=0$), добија се да је

$$J(n)=\alpha_0 M_0+\alpha_1 M_1+\alpha_2 M_2+\dots,$$

где је уопште

$$M_k=\int_a^\infty t^k e^{-nt}dt=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}{n^{k+1}}$$

и према томе за $n>0$

$$(58)\qquad J(n)=\frac{\alpha_0}{n}+\frac{1!\,\alpha_1}{n^2}+\frac{2!\,\alpha_2}{n^3}+\dots$$

Пошто је $A(t)$ цела функција нултог рода, то ће према једној познатој Poincaré-овој теореми за такве функције бити

$$\lim k!\,\alpha_k=0 \quad \text{за} \quad k=\infty,$$

што значи да ће ред (58) бити конвергентан за довољно мале вредности $\frac{1}{n}$, тј. за довољно велике вредности n.

Ако је сад сачинилац α_0 различан од нуле, биће за $n=\infty$

$$\lim\frac{J(n)}{\frac{\alpha_0}{n}}=1;$$

ако је, пак, $\alpha_0=\alpha_2=\ldots=\alpha_{p-1}=0$, биће

$$\lim\frac{J(n)}{\frac{p!\,\alpha_p}{n^{p+1}}}=1,$$

што значи да: *ако вредност* $\mathrm{t}=0$ *није корен једначине* $\mathrm{A(t)}=0$, *асимтотна ће вредности интеграла* $\mathrm{J(n)}$ *бити* $\frac{\mathrm{A(0)}}{\mathrm{n}}$; *ако је, пак,* $\mathrm{t}=0$ *ко-*

рен р-*шоīа реда за йоменуйу једначину, асимйошна ће вредносш иншеīрала биши*

$$\frac{A^{(p)}(0)}{n^{p+1}}.$$

Лако се уверити да је за ма који од ових случајева *йолуйречник круīа конверīенције одīоварајућеī реда* θ(z) *раван јединици.*

Познато је нпр. да је функција

$$A(t) = \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$$

цела функција нултог рода; пошто је тада $A(0) = 1$, асимтотна вредност интеграла

$$J(n) = \int_a^\infty \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} e^{-nt} dt$$

биће $\frac{1}{n}$, а полупречник круга конвергенције одговарајућег реда $\theta(z)$ биће 1.

На тип (56) своди се такође бескрајан број разноврсних интеграла $J(n)$. Тако, кад је $r(t)$ каква функција, која за $t = a$ добија коначну, уосталом ма какву, вредност α, а за $t = b$ вредност 0, ако се стави да је

$$r(t) = \alpha e^{-z}$$

интеграл (55) добија облик (56); полупречник круга конвергенције одговарајућег реда $\theta(z)$ биће $\frac{1}{\alpha}$.

Напослетку, разноликим специјалним методама, а према разним претпоставкама које се могу чинити за функције $A(t)$ и $r(t)$, могу се одређивати асимтотне вредности разноврсних класа интеграла $J(n)$. Поље за оваква истраживања врло је пространо; међутим, сваки резултат, добијен у томе правцу, непосредно би допринео развитку теорије функција $F(z)$ чије је проучавање предмет ове расправе. Са познавањем асимтотних вредности поменутих интеграла стоји у непосредној вези не само питање о конвергенцији редова, у које се могу развити функције $F(z)$, већ и многе друге појединости теорије тих функција.

*

Између разноврсних функција

(59) $$\theta(z) = J(0) + J(1)z + J(2)z^2 + \dots$$

од нарочитог су интереса оне које дефинишу какву *целу функцију* променљиве z, за које је ред (59) конвергентан у целој равни те променљиве. Стога је од интереса умети решити овај задатак: кад су дате функције $A(t)$ и $r(t)$, што фигуришу у интегралу

$$J(n)=\int_L A(t)\left[r(t)\right]^n dt,$$

распознати да ли је одговарајућа функција $\theta(z)$, дефинисана редом (59), цела функција променљиве z.

Опште би се решење задатка састојало у овој теореми, која се добија као непосредна последица познатог правила за одређивање полупречника круга конвергенције каквога датог реда:

Да би $\theta(z)$ *била цела функција, потребно је и довољно да буде испуњена једна или друга од ових погодаба*

$$\lim\sqrt[n]{J(n)}=0,\qquad \lim\frac{J(n+1)}{J(n)}=0.$$

Кад је нпр.

$$A(t)=e^{-at^2},\qquad r(t)=e^{ti},\qquad a>0,$$

а лук се интеграције L своди на реални размак $(-\infty,\infty)$, биће

$$J(n)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{-n^2}{4a}},$$

одакле је

$$\lim\sqrt[n]{J(n)}=0,$$

па, дакле, је и одговарајућа функција $\theta(z)$ цела функција.

Ако није могућно одредити експлицитан израз за $J(n)$, већ само његову асимтотну вредност за врло велике вредности n, *горња теорема остаје у важности и онда кад се права вредност* J(n) *смени својом асимптотном вредношћу.*

Тако нпр. функција $\theta(z)$ која одговара интегралу

$$J(n)=\int_a^\infty \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,e^{-nt}dt,$$

неће бити цела, јер – као што је раније показано – асимтотна је вредност овога интеграла равна $\dfrac{1}{n}$.

Напослетку, ако није могућно одредити ни прâву, ни асимтотну вредност интеграла $J(n)$, може се корисно употребити за решење постављеног задатка једна метода упоређивања, које се принцип састоји у овоме:

Ако су λ(t) *и* u(t) *две такве функције да интегралу*

$$Y(n) = \int_c LR^n dt,$$

где је

$$L = |\lambda(t)|, \quad R = |r(t)|,$$

одговара каква цела функција

$$Y(0) + Y(1)z + Y(2)z^2 + \dots,$$

а, међутим, је дуж целога лука интеграције

$$|A(t)| \leq L, \quad |r(t)| \leq R$$

функција θ(z), *што одговара интегралу* J(n), *биће такође цела функција.*

Поред те методе може се у великом броју случајева постављени задатак решити помоћу ове теореме:

Кад год је у интегралу

$$J(n) = \int_L A(t)\left[r(t)\right]^n dt$$

могућно деформисати лук интеграције L *тако да он – остајући при том еквивалентан првобитноме луку – буде цео у бескрајности; да модуо функције* r(t) *дуж таквога бескрајно удаљеног лука буде бескрајно мали и да, поред тога, константа*

$$P = \int_L |A(t)| ds$$

има какву коначну и од нуле различну вредност, одговарајућа функција θ(z) *биће цела функција променљиве* z.

Јер ако се највећи модуо функције $r(t)$ дуж једнога, ма кога, од еквивалентних лукова интеграције означи са M, биће, као што је раније показано

$$|J(n)| < PM^n,$$

а полупречник ρ круга конвергенције одговарајућег реда $\theta(z)$ биће већи од $\frac{1}{M}$ или раван овоме. Ако, дакле, постоји такав један лук интеграције, да је дуж тога лука $M = 0$, полупречник ρ биће бескрајан, што значи да је $\theta(z)$ цела функција.

Нека је нпр. дат интеграл

$$J(n) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\left(\frac{1}{a+ti}\right)^n dt,$$

где је a ма каква константа са позитивним реалним делом, а $A(t)$ таква једна функција променљиве t, да нема никаквих сингуларитета на реалној осовини ни изнад ње и да поред тога интеграл

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \left| A(t) \right| dt$$

има коначну и од нуле различну вредност. Ако се за лук интеграције узме лук полукруга, описаног над реалном осовином око почетка као средишта, са бескрајно великим полупречником, овај ће лук очевидно бити еквивалентан реалном луку интеграције $(-\infty,\infty)$, пошто изнад реалне осовине ни једна од функција $A(t)$ и $r(t)$ немају сингуларитета. А пошто је дуж таквога лука модуо функције

$$r(t) = \frac{1}{a+ti}$$

бескрајно мали, *то ће одговарајућа функција* $\theta(z)$ *бити цела.*

Такав је нпр. случај кад је

$$A(t) = \varphi(t) e^{-\alpha t^2},$$

где је α ма каква функција са позитивним реалним делом, а $\varphi(t)$ ма каква функција, која није непарна и која нема никаквих сингуларитета на реалној осовини нити изнад ове, а поред тога не постаје бескрајна кад t бескрајно расте у правцу било позитивне, било негативне реалне полуосе. Јер тада ће интеграл

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \varphi(t) e^{-\alpha t^2} \right| dt,$$

као што је познато, имати коначну и од нуле различну вредност.

Могућно је доказати велики број оваквих резултата, који би прецизирали *потребне* или *довољне* услове да би функција $\theta(z)$ била цела; ја ћу навести још овај резултат, који излази као последица онога, што је доказано на стр. 46 ове расправе:

Функција $\theta(z)$ *не може бити цела функција ако се лук интеграције своди на један, ограничен или неограничен део реалне осовине, на коме су функције* A(t) *и* r(t) *холоморфне, а одговарајући интеграл* P *има коначну и од нуле различну вредност.*

МЕТОДЕ ЗА НЕПОСРЕДНО ПРОУЧАВАЊЕ ФУНКЦИЈА $\theta(z)$

Функције

$$\theta(z) = J(0) + J(1)z + J(2)z^2 + \ldots, \tag{60}$$

где је уопште

$$J(n) = \int_L A(t)\left[r(t)\right]^n dt, \tag{61}$$

на чије се комбинације своде проучаване функције $F(z)$, по самоме облику аналитичкога израза, у коме се јављају, нарочито су подесне за проучавање извесних њихових особина, и то како оних које су од интереса са гледишта теорије функција, тако и оних које је од потребе познавати у питањима где би такве функције нашле примена. При свем том што већина тих функција представља сасвим нове, несводљиве трансценденте, за многе од њих могућно је толико дубоко ући у познавање разних појединости које их карактеришу, да – као што ће се видети из нађених резултата – извесне од таквих трансцендената могу се још и сад уврстити у ред испитаних функција и служити као рачунски елементи у питањима, у којима би се на њих наишло. Таква би нпр. била несводљива трансцендента

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\sqrt{a+bn}},$$

чије се особине могу у појединостима испитати методама које ће бити изложене у овоме одељку.

Оно што бих овде нарочито нагласио и што даје нарочита интереса овој врсти функција јесу услуге, које извесни нови резултати у општој теорији редова могу да чине специјалној теорији функција $\theta(z)$ и лакоћа са којом се ти резултати – чија је примена у већини случајева или неизвршљива, или веома тешка – примењују специјално на те функције.

Функције $\theta(z)$ могу се аналитички изразити или у облику редова (60), или у облику интеграла

$$\theta(z) = \int_L \frac{A(t)}{1 - zr(t)} dt \tag{62}$$

који је образац последица образаца (60) и (61).

Први аналитички израз представља функцију $\theta(z)$ само у унутрашњости једнога извесног круга, чији смо полупречник раније одређивали; други представља ту функцију у целој равни променљиве z, осим за извесне изоловане тачке или тачке што састављају једну извесну криву линију. Сваки од та два израза нарочито истиче на видик извесне појединости функције $\theta(z)$, које представља тако да их треба оба употребити при обради теорије ових функција. Први израз нпр. допушта да се на те функције непосредно примене извесни резултати из теорије редова, уређених по степенима једне променљиве количине, до којих се дошло у последње време, као што су: релације између начина опадања сачинилаца са њиховим рангом и начина растења функције, коју ред представља; релације између сачинилаца реда и вредности z, које функцију поништавају, њених сингуларитета итд. Други израз нпр. допушта да се на функције $\theta(z)$ непосредно примене извесни резултати из теорије одређених интеграла, затим да се лако одређују бројне вредности функција $\theta(z)$ за дате бројне вредности променљиве z, што чини великих услуга при састављању бројних таблица за те функције; даље, да се лакше дође до извесних података о нулама тих функција итд.

А) **Функције $\theta(z)$ представљене редовима**

Задржимо се најпре на проучавању функција $\theta(z)$, кад су ове аналитички изражене у облику реда (60).

Према разним претпоставкама, које се могу чинити о функцијама $A(t)$ и $r(t)$, имаће се разни закључци о сачиниоцима $J(n)$, а тиме и о самој проучаваној функцији $\theta(z)$. А очевидно је да се испитивања ове врсте и могу чинити само на тај начин тражећи релације између извесних, унапред претпостављених особина функција $A(t)$ и $r(t)$, које се могу сматрати као унапред дате, и извесних појединости, које карактеришу функције $\theta(z)$.

*

Показаћу најпре како се могу, кад су дате функције $A(t)$ и $r(t)$, одредити горње и доње границе одговарајуће функције $\theta(z)$ за све вредности z у једноме извесном размаку или једној извесној области у равни промењљиве z.

Пре свега, очевидно је да ако смо на ма који начин успели одредити такву једну реалну и позитивну функцију $\overline{\omega}(n)$, да је за целе и позитивне вредности n

$$\left| J(n) \right| \leq \overline{\omega}(n),$$

а да се, поред тога, може експлицитно и у коначном облику изразити збир реда

$$\xi(z) = \sum \overline{\omega}(n) z^n,$$

онда ако се са r означи модуо промењљиве z, *функција* $\xi(\mathrm{r})$ *представљаће једну горњу границу функције* $\left|\theta(\mathrm{z})\right|$ *за све вредности* z *у унутрашњости круга конвергенције реда* $\xi(\mathrm{z})$.

У ранијем одељку, у коме је била реч о израчунавању интеграла $J(n)$ и о одређивању њихових горњих и доњих граница, наведено је више начина на које се могу одређивати функције $\overline{\omega}(n)$, које би задовољавале горње погодбе; свакој од њих одговарала би по једна горња граница модула функције $\theta(z)$.

Тако, ако се са M означи највећи модуо, који може имати функција $r(t)$ дуж датога лука интеграције L или дуж ма кога њему еквивалентнога лука, и ако константа

$$P = \int_L \left| A(t) \right| ds$$

има какву коначну и од нуле различну вредност, имаће се једна функција $\overline{\omega}(n)$ ако се узме да је

$$\overline{\omega}(n) = PM^n$$

тако *да ће рационална функција*

$$\xi(z) = \frac{P}{1 - Mz}$$

пошто се у њој z *смени својим модулом, представљати једну горњу границу модула функције* $\theta(\mathrm{z})$ *за све вредности* z *у унутрашњости круга, описаног око почетка са полупречником* $\frac{1}{\mathrm{M}}$.

Ако су сад функције $A(t)$ и $r(t)$ реалне за све реалне и позитивне вредности t и такве, да је за извесне, подесно изабране вредности k, h, a

$$\text{апс. вред.} \quad A(t) \leq kt$$

$$\text{апс. вред.}\quad r(t) \leq \frac{h}{\sqrt{a^2+t^2}}$$

биће, као што је раније показано, за $n > 2$

$$\text{апс. вред.}\quad J(n) < \frac{kh^2}{n-2}\left(\frac{h}{a}\right)^{n-2}.$$

Одговарајућа функција $\xi(z)$ овде би, дакле, била

$$\xi(z) = J(0) + J(1)z + J(2)z^2 + f(z),$$

где је

$$f(z) = kh^2 \sum_3^\infty \frac{z^n}{n-2}\left(\frac{h}{a}\right)^{n-2} = -kh^2z^2 \log\left(1-\frac{hz}{a}\right)$$

и према томе *трансцендентна функција*

$$\xi(z) = J(0) + J(1)z + \left[J(2) - kh^2 \log\left(1-\frac{hz}{a}\right)\right]z^2$$

представљаће једну горњу границу модула посматране функције $\theta(z)$ *за све вредности* z *у унутрашњости круга, чији је полупречник* $\frac{a}{h}$.

Користећи се разноврсним неједначинама, које смо раније нашли за вредности $J(n)$, према разној природи функција $A(t)$ и $r(t)$ и примењујући на њих горе истакнути принцип, имале би се разнолике релације између тих функција и горњих граница функција $\theta(z)$ што им одговарају.

Показаћу још само са каквом се лакошћу примењују на функције $\theta(z)$ извесни нови резултати теорије редова и доводе до одредбе горњих граница за модуле тих функција.

Показано је у ранијем одељку како се може у доста општим случајевима распознати да ли је једна дата функција $\theta(z)$ *цела функција* променљиве z. Претпоставимо да су погодбе за то испуњене; тада, према познатој Hadamard-овој теореми, израз $\sqrt[n]{J(n)}$ тежи нули кад n бескрајно расте у позитивном смислу. Према томе ће бити

$$J(n) = [f(n)]^n,$$

где је $f(n)$ извесна функција променљиве n, која тежи нули кад n бескрајно расте. То показује да увек постоји бескрајно много функција $\varphi(n)$ таквих да: 1. то буду непрекидне, реалне и позитивне функције за све позитивне вредности n; 2. да бескрајно расту за $n = \infty$; 3. да за извесне, подесно изабране реалне и позитивне вредности A буде

$$|J(n)| \leq \frac{A}{[\varphi(n)]^n}. \tag{63}$$

Нека је $\varphi(n)$ једна, ма која, од функција са таквим особинама; ставимо да је

$$\varphi(n) = z \tag{64}$$

и нека је

$$n = \psi(z)$$

корен те једначине, реалан и позитиван за реалне и позитивне вредности z (а очевидно је да увек има таквих корена, пошто је једначина (64) задовољена за извесне реалне и позитивне вредности n и z). Уочимо сад функцију

$$u(z) = \sum \frac{z^n}{[\varphi(n)]^n}; \tag{65}$$

ова припада типу функција, које је у последње време нарочито проучавао Hadamard[22] и за које је доказао да им модуо никада не може брже расти од функције

$$e^{\int \frac{\psi(z)}{z} dz}$$

кад $|z|$ бескрајно расте. Непосредна је последица те теореме и неједначине (63) овај резултат:

Увек се може наћи такав један реалан и позитиван број K, *да за све вредности* z *у равни те променљиве буде*

$$|\theta(z)| < Ke^{\int \frac{\psi(z)}{z} dz} \tag{66}$$

пошто се на десној страни неједначине z *смени својим модулом.*

Као што је казано, број је функција $\varphi(n)$ бескрајно велики; горња граница одређена неједначином (65) биће виша или нижа према узетој функцији $\varphi(n)$.

Ако се нпр. ма на који начин нађе да је

---

22 *Etude sur les propriètés des fonctions entieres* etc. (Journ. de math. pures et appl., 1893. p. 171–215).

$$\left| J(n) \right| \leq Ae^{-\alpha n^2}$$

где су A и α две позитивне константе, биће

$$\varphi(n) = e^{na}, \quad \psi(z) = \frac{1}{\alpha} \log z$$

и према томе *модуо одговарајуће функције* $\theta(z)$ *биће мањи од*

$$Ke^{\frac{1}{\alpha}(\log z)^2},$$

где је K *извесна позитивна константа.*

Најпростији такав случај имали бисмо кад је

$$A(t) = e^{-at}, \quad r(t) = e^{ti}$$

(где је a каква константа реална и позитивна, или имагинарна са позитивним реалним делом), а лук се интеграције своди на реални размак $(-\infty, \infty)$.

Тако одређене доње границе уопште су приближније од оних, до којих би се дошло наведеном методом упоређивања.

Сличан принцип ономе, који нам је служио за одредбу *горњих* граница, може се употребити и за одредбу *доњих* граница за модуле функција $\theta(z)$, бар у извесним доста општим случајевима. Тако, ако је интеграл $J(n)$ реалан и позитиван за реалне и позитивне вредности n, и ако се ма на који начин нађе таква једна реална и позитивна функција $\overline{\omega}(n)$ да је

$$J(n) \geq \overline{\omega}(n),$$

а да се поред тога може израчунати у коначном облику збир реда

$$\xi(z) = \sum \overline{\omega}(n) z^n,$$

функција $\xi(z)$ *представљаће једну доњу границу функције* $\theta(z)$ *за све реалне и позитивне вредности* z, *за које је ред* $\xi(z)$ *конвергентан.*

Раније је показано како се могу одређивати функције $\overline{\omega}(n)$, које би задовољавале горње погодбе; свакој од њих одговарала би по једна доња граница за $\theta(z)$.

Тако, ако је лук интеграције реалан, а дуж њега функције $A(t)$ и $r(t)$ реалне и позитивне, може се, на који од наведених начина, одредити једна функција $\overline{\omega}(n)$ облика

$$\overline{\omega}(n) = PM^n,$$

где су P и M константе, независне од n. *Тада ће рационална функција*

$$\xi(z)=\frac{P}{1-Mz}$$

представљати једну доњу границиу одговарајуће функције $\theta(z)$ *за све позитивне вредности* z *мање од* $\frac{1}{M}$.

Ако је лук интеграције реалан размак $(0,\infty)$ и ако су у њему функције $A(t)$ и $r(t)$ реалне, позитивне и такве да је за подесно изабране вредности k, h, a

$$A(t)\geq kt,\quad r(t)\geq\frac{h}{\sqrt{a^2+t^2}},$$

трансцендентна ће функција

$$\xi(z)=J(0)+J(1)z+\left[J(2)-kh^2\log\left(1-\frac{hz}{a}\right)\right]z^2$$

представљати једну доњу границу функције $\theta(z)$ *за све позитивне вредности* z *мање од* $\frac{a}{h}$ итд.

*

Кад је проучавана функција $\theta(z)$ *цела* функција променљиве z, може се пустити да z бескрајно расте и испитивати начин на који ће се при томе растењу понашати сама функција $\theta(z)$.

Претпоставимо да је за једну такву дату функцију одређена једна од одговарајућих функција $\varphi(n)$, дефинисаних неједначином (63) и нека је

$$n=\psi(z)$$

реалан и позитиван корен једначине

$$\varphi(n)=z;$$

према поменутој Hadamard-овој теореми, *кад* $|z|$ *бескрајно расте, функција ће* $\theta(z)$ *расти спорије од функције*

$$\Phi(z)=e^{\int\frac{\psi(z)}{z}dz}\tag{67}$$

пошто се у овој z *смени својим модулом.*

Тако нпр. у раније поменутом случају, кад је

$$\left|J(n)\right|\leq Ae^{-an^2},$$

одговарајућа функција $\theta(z)$ расте спорије но функција

$$\Phi(z) = e^{\frac{1}{a}(\log z)^2}.$$

Ставимо да је

$$-\log\left|J(n)\right| = \overline{\omega}(n)$$

и претпоставимо да тако дефинисана функција $\overline{\omega}(n)$ задовољава ове погодбе:

1. да су та функција и њена прва два извода по n реалне, позитивне и непрекидне функције за све позитивне вредности n;

2. да та функција и њен први извод бескрајно расту кад n бескрајно расте, а да при том њен други извод тежи нули;

3. да производ $n^2\overline{\omega}''(n)$ представља какву позитивну функцију за позитивне вредности n, која бескрајно расте за $n = \infty$.

Према једној теореми, коју је у последње време доказао Le Roy[23], *кад йромењива* z *буде бескрајно расла у йравцу реалних йозийивних вредносйи, функција ће* $\theta(z)$ *асимйойно йежийи функцији*

$$\sqrt{2}\,\frac{e^{u\overline{\omega}'(u)-\overline{\omega}(u)}}{\sqrt{\overline{\omega}''(u)}}, \tag{68}$$

ѓде је u *реалан и йозийиван корен једначине*

$$\overline{\omega}'(u) = \log z.$$

Помоћу ове теореме може се у извесним, доста општим, случајевима тачно одредити начин понашања функције $\theta(z)$, кад промењива z бескрајно расте. Тако нпр. ако је

$$J(n) = e^{-n^p} \qquad 1 < p < 2,$$

биће

$$\overline{\omega}(n) = n^p, \qquad u = \left(\frac{\log z}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

и при бескрајном растењу промењиве z одговарајућа ће цела функција

$$\theta(z) = \sum_{0}^{\infty} e^{-n^p} z^n$$

---

23 *Valeurs asymtotiques de certaines séries* (Bull. Sc. math. 1900. p. 262).

асимтотно тежити функцији

$$\alpha(\log z)^k e^{\beta(\log z)^h},$$

где су α, β, k, h извесне константе, које је лако одредити.

Претпоставимо сад да проучавана функција $\theta(z)$ није цела функција. Тада ће постојати извесан круг конвергенције реда $\theta(z)$, чији ће полупречник бити коначан и у томе случају од важности је познавати начин на који се понаша функција кад се тачка z, удаљавајући се од почетка, приближава периферији тога круга. О питањима те врсте нарочито се бавио Le Roy[24] и резултати до којих је дошао у томе погледу могу се непосредно применити на редове који дефинишу функције $\theta(z)$ и који имају нарочито подесан облик за такве примене. Ја ћу овде, примера ради, навести један општији случај те врсте.

Пре свега, кад дати ред $\theta(z)$ има за полупречник круга конвергенције какву вредност α, различну од јединице, сменивши z са αz учиниће се да тај полупречник буде раван јединици; ми ћемо сматрати да је то већ учињено са проучаваном функцијом $\theta(z)$. Како ће се понашати та функција кад се z, растући од 0, приближује вредности 1?

Претпоставимо да је интеграл $J(n)$ реалан и позитиван за позитивне вредности n и да непрекидно опада кад n расте. Ако он при том за $n=\infty$ тежи каквој од нуле различној граници λ, одузевши од $\theta(z)$ израз $\dfrac{\lambda}{1-z}$ добиће се нова функција $\theta(z)$, за коју ће одговарајући интеграл $J(n)$ тежити нули за $n=\infty$; ми ћемо, дакле, сматрати да је то случај са проучаваном функцијом $\theta(z)$.

Према једној теореми, коју је за такве случајеве доказао Le Roy[25], *ако се са* F(n) *означи функција, чији је извод по* n *раван асимтотној вредности интеграла* J(n) *за* n = ∞, *онда – кад* z *тежи вредности* 1 – *функција ће се* θ(z) *понашати као функција*

$$CF\left(\frac{1}{1-z}\right) \tag{69}$$

(*где је* C *извесна константа*), *која ће јој при том бити асимтотна вредност.*

Тако, кад је нпр.

$$J(n)=\int_0^\infty e^{-nt^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

---

[24] Loc. cit.

[25] *Valeurs asymtotiques de certaines séries* (Bull. Sc. math. 1900. p. 250).

асимтотна ће вредност функције $\theta(z)$, за вредности z врло блиске вредности 1, бити

$$C\sqrt{\frac{\pi}{1-z}}.$$

Раније је показано како се одређују асимтотне вредности интеграла $J(n)$; резултати, нађени том приликом, непосредно се, дакле, примењују на решавање питања, о коме је овде била реч.

*

Применивши на функције $\theta(z)$ извесне теореме, које је доказао Le Roy за редове уређене по степенима једне променљиве количине и за извесне класе одређених интеграла, може се доћи и до података о сингуларитетима тих функција, а тиме самим и до података о сингуларитетима проучаване функције $F(z)$.

Означимо са a и b границе одговарајућег интеграла $J(n)$ и претпоставимо најпре да је за једну интегралну границу $r(t) = 0$, а за другу $r(t) = 1$. Ако се у интегралу $J(n)$ изврши смена

$$x = r(t),$$

биће

$$J(n) = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n dx, \tag{70}$$

где је $\varphi(x)$ оно што постаје количник $\dfrac{A(t)}{r'(t)}$ пошто се t смени решењем једначине $r(t) = x$; функција $\theta(z)$ постаје тада

$$\theta(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1-zx}\, dx. \tag{71}$$

Али за функције облика (71) Le Roy је доказао овај резултат; оне не могу имати никаквих имагинарних сингуларитета, а ако их имају реалних, ови су или равни јединици или већи од јединице; ако је, при том, функција $\varphi(z)$ холоморфна за $0 < z < 1$, функција представљена интегралом (71) не може имати никаквих других сингуларитета осим $z = 1$ и $z = \infty$.[26]

[26] Comptes rendus t. 127. p. 654–657; Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse t. II 1900. p. 317–430.

Непосредном применом овога резултата на функције $\theta(z)$, којима одговара интеграл

(72) $$J(n)=\int_a^b A(t)\left[r(t)\right]^n dt$$

долази се до ове теореме:

Кад год је у интегралу (72) *функција* r (t) *таква, да за једну од интегралних граница добија вредност* 0, *а за другу границу вредност* 1, *одговарајућа функција* $\theta(z)$ *не може у целој равни имати других сингуларитета осим* $z=1$ *и извесних реалних вредности већих од јединице. Ако, поред тога, количник* $\frac{A(t)}{r'(t)}$, *пошто се у њему изврши смена* $r(t)=z$, *буде каква функција променљиве* z, *холоморфна за* $0<z<1$, *функција* $\theta(z)$ *не може у целој равни имати других сингуларитета осим* $z=1$ *и* $z=\infty$.

Ставимо у интегралу (72) да је

(73) $$r(t)=e^{-z},$$

па ће он добити облик

$$J(n)=\int_0^\infty \lambda(z)e^{-nz}dz.$$

Ако је сад тако добијена функција $\lambda(z)$ каква *цела* функција *нултог рода*, интеграл се $J(n)$, као што је раније показано (в. стр. 53), може развити у ред

$$J(n)=\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\frac{b_3}{n^3}+\ldots$$

уређен по степенима променљиве $\frac{1}{n}$, а полупречник круга конвергенције одговарајућег реда $\theta(z)$ биће раван јединици. Међутим, Le Roy је у једноме свом раду[27] о редовима уређеним по степенима једне променљиве количине доказао овај резултат: ако је општи сачинилац каквога реда

$$\varphi(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots$$

чији круг конвергенције има за полупречник јединицу, таква функција променљиве n, да се за довољно велике вредности n може развити у

[27] Comptes rendus t. 127. 1898. p. 655.

ред уређен по степенима од $\frac{1}{n}$, функција $\varphi(z)$ има само један сингуларитет, и то $z=1$.

Непосредном применом тога резултата на функције $\theta(z)$ долази се до ове теореме:

Кад год је у интегралу (72) *функција* $\mathrm{r}(\mathrm{t})$ *таква да за једну од интегралних граница добија вредност* 0, *а за другу границу вредност* 1, *и кад, поред тога, функција* $\frac{\mathrm{A}(\mathrm{t})}{\mathrm{r}'(\mathrm{t})}$ *сменом* $\mathrm{r}(\mathrm{t})=\mathrm{e}^{-\mathrm{z}}$ *постаје цела функција нултог рода променљиве* z, *одговарајућа функција* $\theta(\mathrm{z})$ *имаће у целој равни само један сингуларитет, и то вредност* $\mathrm{z}=1$.

Тако нпр. трансцендента

$$\theta(z)=J(1)z+J(2)z^2+J(3)z^3+\ldots,$$

где је

$$J(n)=\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{\log\frac{1}{t}}}{\sqrt{\log\frac{1}{t}}}\,t^n dt$$

има у целој равни само један сингуларитет, и то $z=1$.

Узмимо сад општији случај, кад функција $r(t)$ добија за једну од интегралних граница вредност 0, а за другу границу ма какву коначну и од нуле различну вредност k. Ако се стави да је

$$r(t)=ku(t), \quad kz=J,$$

функција $\theta(z)$ постаје

$$\theta_1(J)=\sum U(n)J^n,$$

где је

$$U(n)=\int_a^b A(t)\left[u(t)\right]^n dt.$$

Пошто сад функција $u(t)$ за једну од интегралних граница добија вредност 0, а за другу вредност 1, то се горњи резултати могу применити и на овај случај тако да се долази до ове општије теореме:

Кад год је у интегралу $\mathrm{J}(\mathrm{n})$ *функција* $\mathrm{r}(\mathrm{t})$ *таква да за једну од интегралних граница постаје равна нули, а за другу добија какву коначну и од нуле различну вредност* k, *одговарајућа функција* $\theta(\mathrm{z})$ *не може у целој равни имати других сингуларитета осим* $\mathrm{z}=\frac{1}{\mathrm{k}}$ *и извесних реалних вредности већих од* $\frac{1}{\mathrm{k}}$. Ако, при том, функција $\frac{A(t)}{r'(t)}$

сменом $r(t) = z$ постаје холоморфна функција променљиве z за $|z| < k$, *функција* $\theta(z)$ *не може имаши других сингуларишеша осим* $z = \frac{1}{k}$ *и* $z = \infty$. А ако поменути количник сменом $r(t) = e^{-z}$ постаје цела функција нултог рода, *функција ће* $\theta(z)$ *имаши у целој равни само један сингуларишеш, и шо* $z = \frac{1}{k}$.

Ове резултате наводим да би се видело са каквом се лакошћу, због нарочито подесног облика у коме се јављају сачиниоци редова $\theta(z)$, примењују општи резултати модерне теорије редова на функције о којима је овде реч. Као што се види, погодбе за примењивост тих резултата везане су непосредно за особине функција $A(t)$ и $r(t)$, а ове се увек могу сматрати као дате.

Навешћу још *да се ши резулшаши примењују и на случајеве кад функција* r(t) *за једну од иншегралних граница посшаје равна нули, а за другу бескрајна, као и онда кад ша функција посшаје бескрајна за обе иншегралне границе.*

Са таквом се истом лакошћу примењују на функције $\theta(z)$ и општи резултати, до којих је у најновије време дошао Desaint[28] тражећи релације између сингуларитета функције $\alpha(t)$, где је $\alpha(n)$ општи сачинилац каквога реда

$$F(z) = \sum \alpha(n) z^n$$

и сингуларитета саме функције $F(z)$, дефинисане таквим редом. Навешћу само ову теорему, као непосредну примену тих резултата.

Нека је ρ полупречник круга конвергенције реда

$$\theta(z) = J(0) + J(1)z + J(2)z^2 + \ldots$$

за који је раније показано како се одређује. *Ако, кад йроменљива* t *бескрајно расше у ма коме йравцу са десне сшране осовине имагинарних вредносши, функција* J(t) *има коначну и одређену вредносш, одговарајућа функција* $\theta(z)$ *може имаши само реалних сингуларишеша, и њихова се вредносш налази између* ρ *и* ∞.

*

Неједначине до којих смо дошли израчунавајући сачиниоце $J(n)$ редова, у које се могу развити функције $\theta(z)$, дају могућности да се дође до података о вредностима променљиве z, које поништавају те

---

[28] Comptes rendus t. 132, 1901. p. 1102–1104.

функције; о вредностима, за које те функције достижу своје максимуме или минимуме, или за које оне добијају какву унапред дату вредност итд.

Тако, у једној ранијој расправи[29] ја сам доказао овај резултат. Нека је дат ред

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

где је $a_0 \gtrless 0$ и где сачиниоци a_n могу бити реални или имагинарни, и нека је r полупречник круга конвергенције тога реда. Сменимо сачиниоце a_k сачиниоцима $e_0, e_1, e_2, \dots$, који би били такви да је

$$|a_k|^2 \leq e_k, \quad |a_0|^2 \leq e_0 \tag{74}$$

изберимо, поред тога, сачиниоце e_k тако да буде могућно изразити збир новога реда

$$\Phi(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots$$

у коначном облику. Ако се променљивој z да ма каква реална вредност, која би се налазила између 0 и r, одговарајућа вредност

$$\mu = z\sqrt{\frac{e_0}{\Phi(z)}} \tag{75}$$

представљаће једну доњу границу модула вредности, које поништавају функцију $\varphi(z)$. Осим тога, највећа ће вредност μ, дата једначином (75) бити одређена на овај начин: ако је $r = \alpha$ она вредност променљиве z, за коју функција $\frac{\Phi(z)}{z^2}$ достиже свој минимум, онда ће бити

$$\begin{aligned} \mu &= r\sqrt{\frac{e_0}{\Phi(r)}} \quad \text{ако је за } z = r \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{\Phi}{z^2}\right) < 0 \\ \mu &= \alpha\sqrt{\frac{e_0}{\Phi(\alpha)}} \quad \text{ако је за } z = r \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{\Phi}{z^2}\right) > 0. \end{aligned} \tag{76}$$

Међутим, тако дефинисане вредности e_n *дате су неједначинама, које се односе на интеграле* J(n) *и о којима је говорено приликом израчунавања ових интеграла: вредност* e_n *биће ма каква реална и позитивна функција променљиве* n, *равна квадрату раније нађених горњих граница за модуо интеграла* J(n) *или већа од овог квадрата.*

---

[29] *Прилог теорији бескрајних редова* (Глас LXIII, Срп. краљ. акад., стр. 73–114).

Према томе, може се увек имати бескрајно много вредности e_n; од њих треба у датоме случају изабрати оне за које је најлакше израчунати количину μ.

Претпоставимо нпр. да се лук интеграције своди на један ограничен или неограничен размак реалних вредности и да су функције $A(t)$ и $r(t)$, што одговарају проучаваној функцији $\theta(z)$, реалне и холоморфне за вредности z између интегралних граница. Тада ће, као што је раније показано, бити

$$\text{апс. вред.}\quad J(n) < A\sqrt{Y(2n)},$$

где је A позитивна константа, дата обрасцем

$$A^2 = \int_L \left[A(t)\right]^2 dt.$$

а $Y(n)$ функција променљиве n, дефинисана обрасцем

$$Y(n) = \int_L \left[r(t)\right]^n dt.$$

За вредност $\mathrm{e_n}$ *може се, дакле, узети ма каква функција* $\overline{\omega}(\mathrm{n})$ *променљиве* n, *која би била реална, позитивна и таква да је за целе и позитивне вредности* n

$$\overline{\omega}(n) \leq A^2 Y(2n), \tag{77}$$

а да се, међутим, збир реда

$$\Phi(z) = \overline{\omega}(0) + \overline{\omega}(1)z + \overline{\omega}(2)z^2 + \ldots \tag{78}$$

може изразити у коначном облику; једна доња граница модула вредности z, *које поништавају функцију* $\theta(\mathrm{z})$, *била би вредност* μ, *дата обрасцем* (76), *где* $\Phi(\mathrm{z})$ *треба сменити изразом* (78).

За трансценденте нпр. $\theta(z)$, којима одговарају интеграли $J(n)$ облика

$$J(n) = \int_0^\infty A(t)\, e^{-nt} dt$$

налази се на тај начин да су им модули вредности, које их поништавају, увек већи од вредности $\alpha\sqrt{3(1-\alpha)}$, где је α реалан и позитиван корен трансцендентне једначине

$$\alpha + 3(1-\alpha)\log(1-\alpha) = 0$$

који се налази између граница 0 и 1.

Разноврсне неједначине, које смо раније извели за вредности интеграла $J(n)$, довеле би до разних података о доњим границама модула вредности, које поништавају функције $\theta(z)$.

Применивши тако добијене резултате на функције $\theta(z)-a$, где је a каква дата вредност, имали би се подаци о вредностима променљиве z, за које проучавана функција $\theta(z)$ добија једну унапред дату вредност. А применом на изводе тих функција имали би се подаци о размацима променљиве z, у којима се функција $\theta(z)$ мења у једноме истом смислу, непрестано растући или непрестано опадајући, о њеним максимумима и минимумима итд.

Напослетку, применивши на функције $\theta(z)$ резултате до којих је у последње време дошао Hadamard у теорији бескрајних редова, уређених по степенима једне променљиве количине, имали би се подаци о максималном или минималном броју вредности, што поништавају дату функцију $\theta(z)$, у случају кад је то каква цела функција; о распореду таквих вредности у бројној равни итд. Лакоћа са којом се такви резултати примењују на функције $\theta(z)$ долази од лакоће са којом се налазе разноврсне неједначине, што се односе на интеграле $J(n)$, а као што је познато у свима истраживањима Hadamard-а главну улогу играју неједначине, које се односе на сачиниоце редова, што се проучавају.

Б) **Функције $\theta(z)$ представљене интегралима**

За извесна питања подесније је проучавати функције $\theta(z)$ непосредно на њиховом аналитичком изразу

$$\theta(z)=\int_L \frac{A(t)}{1-zr(t)}\,dt \tag{79}$$

него у облику редова, који их представљају.

Пре свега, методе за приближно израчунавање бројних вредности одређених интеграла у великоме броју случајева доводе брже до резултата, но сумирање редова, у које се они могу развити. Израчунавање нпр. бројних вредности трансценденте

$$\theta(z)=\sum_0^{\infty}\frac{z^n}{a+n}$$

за дате вредности z, веома је споро ако се врши помоћу тога реда, јер је ред веома споро конвергентан; оно је, напротив, врло брзо, ако се врши на интегралу

$$\theta(z)=\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1-zt}\,dt$$

у облику кога се може представити функција $\theta(z)$.[30]

Осим тога, извесне особине функција $\theta(z)$ лакше излазе на видик на одређеним интегралима, који те функције представљају, но на одговарајућим редовима. Примера ради навешћу неколико општијих резултата те врсте, који су готово очевидни кад се функције $\theta(z)$ проучавају у облику интеграла.

Нека је

$$J(n)=\int_a^b A(t)\left[r(t)\right]^n dt$$

интеграл $J(n)$, што одговара једној датој функцији $\theta(z)$. Претпоставимо да функције $A(t)$ и $r(t)$ имају у размаку између интегралних граница реалне вредности и да су непрестано истог знака (који се тада може сматрати као позитиван). Из обрасца

$$\theta(z)=\int_a^b \frac{A(t)}{1-zr(t)}\,dt,$$

који представља функцију $\theta(z)$ за вредности z у целој равни, непосредно се види *да ће функција* $\theta(\mathrm{z})$ *за реалне и негативне вредности* z *бити позитивна и да тежи нули кад* z *бескрајно расте било у позитивном, било у негативном смислу; она ће тако исто бити позитивна и за све позитивне вредности* z *мање од* $\frac{1}{\mathrm{M}}$, *где* M *представља највећу вредност коју може имати функција* r (t) у *размаку између интегралних граница.*

Ставимо да је

$$z=\xi+\eta i,$$

па ће бити

$$\theta(z)=U+i\eta V,$$

где је

[30] В. нпр. Janet: *Sur la sommation de certaines séries peu convergentes* (Comptes Rendus t. 118, 1894. p. 239–241).

$$U = \int_a^b A(t) \frac{1 - \xi r(t)}{\left[1 - \xi r(t)\right]^2 + \eta^2 \left[r(t)\right]^2} dt$$

$$V = \int_a^b A(t) \frac{r(t)}{\left[1 - \xi r(t)\right]^2 + \eta^2 \left[r(t)\right]^2} dt .$$

Пошто производ $A(t)\, r(t)$ има позитивну вредност за све вредности z у размаку између интегралних граница, вредност ће V увек бити различна од нуле. Да би, дакле, функција $\theta(z)$ могла бити равна нули за какву вредност $z = \xi + \eta i$, мора бити $\eta = 0$, што показује да *функцију* $\theta(z)$ *не могу поништавати никакве имагинарне вредности променљиве* z. А пошто интеграл U не може бити раван нули ако је $\xi < \frac{1}{M}$, то се изводи *да су вредности, које поништавају функцију* $\theta(z)$, *све реалне, позитивне и веће од* $\frac{1}{M}$.

Тако нпр. трансцендента

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\sqrt{a + bn}}$$

има ове особине: она је позитивна за све реалне вредности z, осим за вредности $z > 1$; та функција, кад z бескрајно расте било у позитивном, било у негативном смислу, тежи нули; једначина $\theta(z) = 0$ нема ни имагинарних ни реалних корена мањих од јединице; крива линија дефинисана једначином $y = \theta(z)$ има праву $z = 1$ и апсцисну осовину за асимтоте итд.

Јасно је да је могућно доказати велики број резултата ове врсте за разнолике функције $\theta(z)$, дефинисане интегралима проучаваног облика, и да је област за истраживања те врсте веома пространа.

Додаћу још то да се извесни резултати до којих је дошао Le Roy, решавајући проблем аналитичког проширивања функција дефинисаних редовима, уређеним по степенима једне променљиве количине, веома лако примењују на функције $\theta(z)$ и свака од таквих примена доводи до позитивних резултата у погледу познавања аналитичке природе тих функција и њихових особина.

Као пример, за такве примене наводим овај случај: претпоставимо да је функција $r(t)$ таква да за једну интегралну границу постаје равна нули, а да за другу границу добија какву коначну и од нуле различну вредност k; претпоставимо, још поред тога, да функција $\frac{A(t)}{r'(t)}$

сменом $r(t) = z$ постаје цела функција променљиве z. Раније је показано да тада функција $\theta(z)$ не може имати других сингуларитета осим $z = \frac{1}{k}$ и $z = \infty$. Какве ће аналитичке природе бити ти сингуларитети?

Ако се стави да је

$$r(t) = ku(t) \qquad kz = \xi,$$

функција $\theta(z)$ постаје

$$\theta_1(z) = \sum U(n)\xi^n, \tag{80}$$

где је

$$U(n) = \int_0^1 \varphi(z) z^n dz,$$

а $\varphi(z)$ означује резултат који се добија кад се у функцији $\frac{A(t)}{r'(t)}$ изврши смена $u(t) = z$.

За функције $\theta_1(\xi)$, дефинисане обрасцем (80), Le Roy[31] је доказао да ако је функција $\varphi(z)$ холоморфна у целој равни (а то ће према учињеној претпоставци бити у случају, о коме је овде реч), таква функција $\theta_1(\xi)$ је мултиформна, са бескрајно много грана и таква да кад тачка ξ опише око тачке $\xi = 1$ какву затворену путању, вредност је функције увећана или смањена за

$$2\pi i \frac{1}{\xi} \varphi\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Према томе, и *наше су функције* $\theta(\mathrm{z})$ *мултиформне функције променљиве* z, *са бескрајно много грана, и периоде такве једне функције, кад променљива* z *опише какву затворену путању око сингуларне тачке* $\mathrm{z} = \frac{1}{\mathrm{k}}$, *биће*

$$\frac{2m\pi i}{kz} \varphi\left(\frac{1}{kz}\right),$$

где је m *ма какав цео број; сингуларитет* $\mathrm{z} = \frac{1}{\mathrm{k}}$ *биће, дакле, логаритамски критички сингуларитет.*

То се потврђује нпр. простоме случају кад је

[31] Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse 1900. p. 328.

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \frac{k^n z^n}{n+1} = -\frac{\log(1-kz)}{kz}.$$

Пошто је

$$\frac{1}{n+1} = \int_0^1 z^n dz,$$

то је $\varphi(z) = 1$, што – према горњој теореми – значи да ће периоде функције $\theta(z)$ за сингуларну тачку $z = \frac{1}{k}$ бити $\frac{2m\pi i}{kz}$, што се непосредно потврђује на експлицитном изразу функције $\theta(z)$.

За општију трансценденту

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \frac{k^n}{(n+1)^p} z^n,$$

где је p ма какав број са позитивним реалним делом, према познатом обрасцу

$$\frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(\log\frac{1}{z}\right)^{p-1} z^{n-1} dz$$

биће

$$\varphi(z) = \frac{1}{\Gamma(p)} \left(\log\frac{1}{z}\right)^{p-1},$$

што – према горњој теореми – значи да ће периоде функције $\theta(z)$, за сингуларну тачку $z = \frac{1}{k}$, бити

$$\frac{2m\pi i}{kz} (\log k + \log z)^{p-1},$$

где m означава број обрта око те сингуларне тачке.

*

Као што се види из досадашњег излагања, већ према данашњем стању теорије редова и одређених интеграла могућно је поставити опште методе за непосредно проучавање функција $F(z)$. Изводећи у појединостима примене тих метода, ја сам истакао на видик везе које постоје између главнога питања, које је предмет ове расправе, и извесних проблема из поменутих теорија, на којима се у последње време најживље ради. Сваки корак унапред, при решавању тих проблема, допринеће непосредно упознавању простране класе функција, које су проучаване у овоме раду.

ПРИМЕДБА О НУЛАМА ЦЕЛИХ ФУНКЦИЈА*

Нека је $F(z)$ цела функција коначног рода p. Означимо са $M(r)$ максимум модула функције $F(z)$ кад је модуо променљиве z једнак r, где је r позитивна реална променљива.

Зна се да, ма какав био реалан и позитиван број α, производ

$$M(r)\,e^{-\alpha r^{p+1}}$$

остаје мањи од извесног коначног броја N кад r расте од 0 до ∞.

Намеравам да укажем како познавање:

1. *једне горње границе броја* N *која одговара датој вредности за* α;
2. *вредности коју узима* F(z) *за* z = 0;
3. *рода* p *функције* F(z),

допушта да се израчунавају доње границе модула нула функције F(z) *и, општије вредности променљиве* z *за које* F(z)*узима унапред дату вредност* C.

Најпре, неједнакост

$$M(r)\,e^{-\alpha r^{p+1}} < N \tag{1}$$

повлачи, као што се зна, следеће: ако се стави

$$F(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots, \tag{2}$$

добиће се

$$\left|a_n\right| < N\frac{\beta^n}{n^{cn}} \tag{3}$$

где су c и β нумеричке константе са вредностима

* Наслов оригинала *Remarque sur les zéros des fonctions entières*,. Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1904, t. XXXII, pp. 1–3.

$$(4) \qquad c = \frac{1}{p+1}, \quad \beta = \left(\frac{\alpha e}{c}\right)^c.$$

С друге стране, према једном резултату који сам доказао у једном ранијем раду (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX, 1901, p. 303–312) важи: ако λ означава најмањи модуо нула реда (2) и ако се образује функција

$$(5) \qquad u(r) = \frac{1}{r^2}\sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n},$$

биће

$$(6) \qquad \lambda > \frac{|a_0|}{\sqrt{u(r)}}$$

за било коју вредност реалне и позитивне променљиве r.

Неједнакост (6) остаје да важи очито ако се коефицијенти a_1, a_2, $a_3, \ldots$ замене величинама дефинисаним другим чланом неједнакости (3), тако да се може узети

$$(7) \qquad u(r) = \frac{|a_0|^2}{r^2} + \frac{N^2}{r^2}\sum_1^\infty \frac{(\beta r)^{2n}}{n^{2nc}};$$

други члан у (6) даће доњу границу за λ ма каква била реална и позитивна вредност r. И посебно стављајући $r = \frac{1}{\beta}$ долази се до следећег тврђења:

Једна доња граница модула нула функције F(z) *дата је изразом*

$$(8) \qquad \frac{1}{a\alpha^{\frac{1}{p+1}}\sqrt{1+b\left(\frac{K}{A}\right)^2}}$$

где K *означава једну горњу границу за* N, A *је модуо броја* F(0); a *и* b *су две нумеричке константе чије су вредности*

$$a = \left[(p+1)e\right]^{\frac{1}{p+1}}, \quad b = \theta\left(\frac{2}{p+1}\right),$$

$\theta(t)$ *означава трансцендентну целу функцију*

$$\theta(t) = \sum_{1}^{\infty} n^{-nt}.$$

Константе a и b остају исте за све функције $F(z)$ истог рода p и могу се лако израчунати једном заувек. Тако ће се наћи:

за $p = 0$,

$$a = e = 2,7183; \quad b = \theta(2) = 1,0639;$$

за $p = 1$,

$$a = \sqrt{2e} = 2,3316; \quad b = \theta(1) = 1,2913;$$

за $p = 2$,

$$a = \sqrt[3]{3e} = 2,0128; \quad b = \theta\left(\frac{2}{3}\right) = 1,5383; \ldots$$

Замењујући у (8) A са $|F(0) - C|$, даје овај израз једну доњу границу модула вредности променљиве z за које $F(z)$ узима дату вредност C.

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ ЦЕЛИХ РЕДОВА*

Постоји бесконачо много редова

(1) $$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

са позитивним реалним коефицијентима, таквих да су за било које k сви корени алгебарске једначине по z, добијене изједначавањем са нулом збира првих k чланова реда (1), реални. Извесни Laguerre-ови ставови *Sur les équations algébriques* (О алгебарским једначинама)[1] допуштају да се из једног таквог реда изведе бесконачно много њих.

Назовимо, скраћивања ради, *редом* $\Omega(z)$ сваки ред (1) који задовољава претходне услове. Овде ћемо указати на неке њихове особености. Ако су $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ ознаке апсолутних вредности реципрочних вредности корена алгебарске једначине

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0,$$

онда је

$$\frac{a_n}{a_0} = \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n,$$
$$\frac{a_1}{a_0} = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n.$$

Количине ζ_i су све реалне и позитивне, па класичан став о геометријској средини доводи до неједнакости

$$\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} \leq \frac{1}{n} \frac{a_1}{a_0},$$

---

* Наслов оригинала *Sur une classe de séries entières*, Comptes rendus, Paris, 1906, t. CXLIII, 4, pp. 208–210.

[1] *Oeuvres*, t. I, p. 33–36, 199–206.

одакле се закључује: *коефицијенш* a_n *свакоī реда* $\Omega(z)$ *највише је једнак*

$$\frac{a_0}{n^n}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n.$$

Према томе, *сваки ред* $\Omega(z)$ *йредсшавља целу функцију йромењиве* z *рода нула или један.*

Претходна неједнакост чини видљивим да је за сваку реалну или имагинарну вредност променљиве *z модуо функције* $\Omega(z)$ *мањи од*

$$a_0 + a_1 r G\left(\frac{a_1 r}{a_0}\right),$$

īде је $r = |z|$ *и īде* $G(z)$ *йредсшавља шрансценденшну целу функцију*

$$G(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Изражавање функције $G(z)$ у облику

$$G(z) = \int_0^1 e^{zt\log\frac{1}{t}}dt$$

доводи тада до бројних резултата. Ево неколико најнепосреднијих од њих.

Прво се добија неједнакост

$$G(r) < e^{\frac{r}{e}},$$

која показује да *израз*

$$a_0 + a_1 r e^{\frac{a_1 r}{a_0 e}}$$

даје шакође једну īорњу īраницу модула функције $\Omega(z)$.

Према једном познатом ставу[2] коефицијенти реда $\sum a_n z^n$ са позитивним коефицијентима који представљају целу функцију рода *нула* или *један* мањи су од одговарајућих коефицијената реда функције

$$a_0 e^{\frac{a_1 z}{a_0}}.$$

[2] Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 34–36.

Примећујемо да су горње границе коефицијената a_n и модула функције $\Omega(z)$ које смо управо пронашли мање од оних које даје последњи став и, према томе, *прецизније* од њих.

Функција $\Omega(z)$ неограничено расте за позитивно и неограничено растуће вредности променљиве z. Дакле, примена класичне Laplace-ове формуле која се односи на вредности интеграла облика

$$\int_a^b u(t)\left[r(t)\right]^n dt,$$

за веома велико n доводи до асимптотске једнакости

$$G(z) \sim \sqrt{\frac{2\varpi}{e}}\,\frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}},$$

која спојена са претходним неједнакостима, показује да *ма који ред* $\Omega(z)$ *расте спорије од функције*

$$\frac{Ae^{\alpha z}}{\sqrt{z}}$$

где су A *и* α *константе које имају вредности*

$$A = a_1\sqrt{\frac{2\varpi a_0}{ea_1}}, \qquad \alpha = \frac{a_1}{ea_0}.$$

Један раније доказани став[3], спојен са неједнакостима које претходе, доводи до следећих резултата: *нуле ма ког реда* $\Omega(z)$ *су по апсолутној вредности веће од*

$$C\frac{a_0}{a_1},$$

где је C *нумеричка константа*

$$C = \frac{1}{\sqrt{\sum_0^\infty n^{-2n}}} = 0,696\ldots$$

и, на један општији начин, *производ апсолутних вредности првих* m *нула реда* $\Omega(z)$ *већи је од*

[3] M. Petrovitch, Bull de la Soc. math. de France, t. XXIV. 1901, p. 303–312. – E. Landau, Bull. de la Soc. math. de France, t. XXXIII, 1905, p. 251–261.

$$C\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^m.$$

Закључује се, осим тога, лако да назначене неједнакости допуштају многобројне примене скорашњих резултата о Taylor-овим редовима на редове $\Omega(z)$ о којима се овде ради.

ТЕОРЕМА О ТЕЈЛОРОВИМ РЕДОВИМА*

Рећи ћемо да један ред

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

са *реалним* коефицијентима, конвергентан у читавој z-равни, *има особину (A)* ако функција $f(z)$, као и сваки полином $f_n(z)$ образован од његових првих $n + 1$ чланова имају само реалне нуле.

Намера нам је да истражујемо *потребне и довољне* услове да би један дат ред (1) имао особину (A), ограничавајући се у овој ноти на случај *позитивних* коефицијената a_n, а случај у коме ће бити негативних коефицијената намењен је једном следећем Саопштењу.

Искључујући случајеве $a_0 = 0$ (који се може избећи) и $a_1 = 0$ (у коме би полином f_2 имао имагинарне нуле), може се увек учинити да је $a_0 = 1$, $a_1 = 1$. Означавајући са

$$\varphi_n(z) = z^n + z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \tag{2}$$

трансформацију по $\dfrac{1}{z}$ једначине $f_n(z) = 0$, могу полиноми $\varphi_n(z)$ бити дефинисани рекурентном релацијом

$$\varphi_n(z) = z\varphi_{n-1}(z) + a_n \tag{3}$$

са $\varphi_0(x) = 1$. Крива

$$y = \varphi_n(z) \tag{4}$$

није ништа друго до крива

$$y = z\varphi_{n-1}(z), \tag{5}$$

---

* Наслов оригинала *Théorème sur les séries de Taylor*, Comptes rendus, Paris, 1908, t. CXLVI, 6, pp. 272–274.

чија је $0z$-оса померена паралелно самој себи за дужину a_n према негативним y.

Конструишући постепено криве (4) полазећи од већ констриусаних кривих

$$(6) \qquad y = \varphi_{n-1}(z)$$

са $\varphi_1(z) = z+1$, лако се уверавамо да: 1. ако крива (6) сече своју $0z$-осу у $n-1$ реалних тачака, онда је, да би крива (4) секла своју осу $0z$ у n реалних тачака, потребно и довољно да помак $-a_n$ те осе не буде већи од најмањег помака ξ_n за који би је требало померити према негативним y да би додирнула криву (5); 2. ако је $a_n < \xi_n$, онда крива сече своју осу $0z$ у n различитих реалних тачака; 3. ако је $a_n = \xi_n$, пресечне тачке су још увек све реалне, али се неке од њих поклапају.

Дакле, ако се са

$$(7) \qquad \Delta_n(a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

означи дискриминанта полинома (2), вредност ξ_n ће бити најмањи позитиван корен (чије је постојање осигурано претходном конструкцијом) алгебарске једначине по x,

$$(8) \qquad \Delta_n(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, x) = 0,$$

која даје вредност $x = a_n$ за које полином $\varphi_n(x)$ има вишеструке нуле.

Тако се долази, чисто интуитивно, до следеће теореме:

Да би један ред са позитивним коефицијентима

$$(9) \qquad 1 + z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

имао особину (A), потребно је и довољно да коефицијент a_n *буде мањи или једнак од најмањег позитивног корена једначине* (8), *и то за сваку вредност* $n \geq 2$. Нуле полинома ће бити, уосталом, све просте или ће међу њима бити вишеструких према томе да ли је $a_n < \xi_n$ или пак $a_n = \xi_n$.

Између бесконачног броја свих редова (9) са особином (A) један заслужује посебну пажњу: *то је ред*

$$(10) \qquad f(z) = 1 + z + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3 + \ldots,$$

где сви коефицијенти достижу своју највећу могућу вредност.

Коефицијент λ_n (n=2,3,...) најмањи је позитиван корен алгебарске једначине по x

$$(11) \qquad \Delta_n(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}, x) = 0$$

која увек има као корен $x = 0$ и бар један позитиван корен, како је указано претходном конструкцијом. Тако се налази

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{54}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{2379,423}, \ldots$$

а одговарајући полиноми $f_n(z)$ су

$$\begin{aligned} f_2(z) &= 1 + z + \frac{z^2}{4} = \frac{1}{4}(z+2)^2, \\ f_3(z) &= 1 + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{54} = \frac{1}{54}(z+6)^2\left(z+\frac{3}{2}\right), \\ f_4(z) &= 1 + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{54} + \frac{z^4}{2379,423} = \\ &= \frac{1}{2379,423}(z+19,1172)^2(z+4,3225)(z+1,5064). \end{aligned}$$

Ред (10) представља једну целу функцију променљиве z нултог рода чији је експоненцијални чинилац e^{-z}. Она заслужује једно дубље истраживање и *ја је препоручујем пажњи аналиста*. Додаћу само да њен општи коефицијент λ_n задовољава неједнакост

$$\lambda_n < \frac{1}{n!(\sqrt{2})^{n(n-1)}}$$

која, на пример, показује да је њен модуо за $z = re^{\theta i}$ мањи од $\Phi(r\sqrt{2})$, где $\Phi(z)$ означава трансцендентну целу функцију

$$\Phi(z) = \sum_0^\infty \frac{e^{-\alpha n^2}}{n!} z^n$$

са $\alpha = \frac{1}{2}\log 2$, као и да нуле ове функције, све реалне и мање од -1, расту, по апсолутној вредности, са n брже од израза

$$(n+1)(\sqrt{2})^n.$$

ЈЕДНОСТАВАН ПОСТУПАК ПРИМЕНЕ РЕАЛНИХ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА НА АЛГЕБАРСКЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ*

I. – О ЈЕДНОМ ПРЕКИДНОМ РЕАЛНОМ ИНТЕГРАЛУ

1. Нека је $\varphi(t)$ реална функција за реално t, непрекидна у датом реалном интервалу (a, b) и таква да интеграл

$$g_n = \int_a^b \varphi(t) \cos nt \, dt \tag{1}$$

има смисла за сваку позитивну или нула, целу вредност n.

Разматрам одређени интеграл

$$I(x) = \int_a^b \varphi(t) \log(1 - 2x \cos t + x^2) \, dt, \tag{2}$$

који ће, због развитка

$$\log(1 - 2x \cos t + x^2) = -2\sum_1^\infty \frac{x^n \cos nt}{n}, \tag{3}$$

бити једна функција $\lambda(x)$ од x, дата за довољно мало $|x|$ развитком

$$\lambda(x) = -2\sum_1^\infty \frac{g_n x^n}{n}, \tag{4}$$

или пак интегралом

---

* Наслов оригинала *Procédé élémentaire d'application des intégrales définies réelles aux equations algébriques et transcendantes*, Nouvelles annales de mathématiques, Paris, 1908, 4° série, t. VIII, pp. 1–15.

(5) $$\lambda(x) = -2\int_a^x \frac{\mu(x)}{x}\,dx$$

са

(6) $$\mu(x) = \sum_1^\infty g_n x^n .$$

Нека је R полупречник конвергенције реда (6) (чије се одређивање своди на одређивање интеграла (1) за веома велико n). Тада, будући да је ред (3) униформно конвергентан по $|x| \leq 1$, важи:

1. Ако је $R \geq 1$, интеграл $I(x)$ ће се подударити са функцијом $\lambda(x)$ за $|x| < 1$; с друге стране, идентитет

$$\log(1 - 2x\cos t + x^2) = 2\log x + \log\left(1 - \frac{2}{x}\cos t + \frac{1}{x^2}\right)$$

показује да ће се, за $|x| > 1$, $I(x)$ подударити са функцијом

(7) $$\Omega(x) = 2g_0 \log x + \lambda\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Ако је $R < 1$, $I(x)$ се подудара са $\lambda(x)$ за $|x| < R$ а са $\Omega(x)$ за $|x| > \dfrac{1}{R}$.

Интеграл I(x) *је, дакле, прекидна функција од* x, *која се поклапа час са* λ(x), *час са* Ω(x), *зависно од тога да ли се тачка* x *налази у унутрашњости или у спољашњости извесног круга или извесног кружног прстена са центром у координатном почетку.*

2. Један посебно занимљив случај за оно што следи јавља се кад су функција $\varphi(t)$ и границе a и b интеграла $I(x)$ такве да је интеграл (1) буде стално нула чим цео број n премаши извесну вредност p, док је за $n \leq p$ он одређен, коначан и различит од нуле. Казаћемо у овом случају, краткоће ради, да једна таква функција *задовољава услов* $[\varphi, a, b, p]$.

Тако, φ = const. задовољава услов

$$[\varphi, 0, 2k\pi, 0].$$

Функција

$$\varphi = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^k \quad (k = \text{позитиван цео број})$$

задовољава услов $[\varphi, 0, \infty, k-1]$.

Функција

$$\varphi = \left(\frac{\sin ht}{t}\right)^2 \qquad (h = \text{позитиван цео број})$$

задовољава услов $[\varphi, 0, \infty, 2h-1]$.

Свака непрекидна функција $\varphi(t)$ са периодом 2π која се не анулира за $t = 0$ и чији развитак у тригонометријски ред не садржи косинусе задовољава услов $[\varphi, 0, 2\pi, 0]$, итд.

У свим овим случајевима се функција $\lambda(x)$ своди на полином p-тог степена по x

$$\lambda(x) = -2\left(g_1 x + \frac{g_2}{2}x^2 + \ldots + \frac{g_p}{p}x^p\right), \tag{8}$$

те је $R = \infty$. Ако, посебно, функција φ задовољава услов $[\varphi, a, b, 0]$, онда је $\lambda(x) = 0$ и отуда

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } |x| \leq 1, \\ 2g_0 \log x & \text{за } |x| > 1. \end{cases} \tag{9}$$

3. У случају кад су интеграционе границе 0 и 2π, а функција $\varphi(t)$, непрекидна и са периодом 2π, таква да је

$$\varphi(t) = A_0 + \sum_1^\infty A_n \sin nt + \sum_1^\infty B_n \cos nt, \tag{10}$$

биће

$$g_0 = 2\pi A_0, \quad g_n = \pi B_n, \tag{11}$$

а одговарајућа функција $\lambda(x)$ се може написати у облику

$$\lambda(x) = -2\pi \int_0^x \frac{\Phi(x)}{x}\, dx \tag{12}$$

са

$$\Phi(x) = \sum_1^\infty B_n x^n. \tag{13}$$

Тако ће, кад је $\varphi(t)$ имагинарни део израза $\psi(e^{ti})$, где је $\psi(z)$ холоморфна функција за $|z| < 1$, биће $A_0 = 0$ и $B_n = 0$ и отуда

$$g_0 = 0, \quad \lambda(x) = 0.$$

Кад је $\varphi(t)$ реални део од $\psi(e^{ti})$, лако се налази да је

$$g_0 = 2\pi\psi(0), \quad \lambda(x) = -2\pi\int_0^x \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}\,dx, \tag{14}$$

а полупречник R ће бити мањи или једнак од 1. Стављајући, дакле,

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi} zf'(z), \tag{15}$$

где је $f(z)$ једна холоморфна функција за $|z|<1$, добија се

$$g_0 = 0, \quad \lambda(x) = f(x),$$

што даје, на један сасвим једноставан начин, једно решење следећег проблема:

Ако је интеграл I(x) *узет у границама од* 0 *до* 2π, *одредити функцију* φ(t) *која одговара датој функцији* λ(x), *холоморфној за* $|x|<1$.

Ово решење састоји се у узимању за $\varphi(t)$ реалног дела израза $-\frac{1}{2\pi} z\lambda'(z)$ за $z = e^{ti}$. Функција $\varphi(t)$, одговарајућа датој функцији $\mu(t)$, биће једнака реалном делу од $\frac{1}{\pi}\mu(e^{ti})$.

Приметимо такође да је интеграл $I(x)$ једнак удвострученом интегралу истог облика, али узетом у границама од 0 до π.

II. – РАЗЛИКА БРОЈА НУЛА И ПОЛОВА МЕРОМОРФНЕ ФУНКЦИЈЕ У УНУТРАШЊОСТИ ДАТОГА КРУГА

Нека је $f(z)$ једна функција мероморфна у унутрашњости и на периферији круга C полупречника r са центром у координатном почетку, реална за реално z и различита од нуле за $z=0$. Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ њене нуле, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ њени полови у унутрашњости круга C, претпостављајући да се ниједна нула нити пол не налазе на C а рачунајући сваку нулу и сваки пол онолико пута колики им је ред.

Уочимо одређени интеграл

$$H(r) = \int_a^b \varphi(t)F(r,t)\,dt, \tag{16}$$

где $F(r,t)$ означава реални део функције $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ за $z = re^{ti}$.

Како се може написати

$$(17) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{z-\alpha_k} - \sum_{1}^{m} \frac{1}{z-\beta_k} + \chi(z),$$

где је функција $\chi(z)$ холоморфна у C и на C, идентитети

$$(18) \quad \text{реални део од } f(re^{ti}) = \frac{1}{2}\left[f(re^{ti}) + f(re^{-ti})\right],$$

$$(19) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{re^{ti}}{re^{ti}-\alpha} + \frac{re^{-ti}}{re^{-ti}-\alpha}\right) = \frac{1-\frac{\alpha}{r}\cos t}{1-\frac{2\alpha}{r}\cos t + \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2}$$

доводе до

$$(20) \quad F(r,t) = \sum_{1}^{n} \frac{1-\frac{\alpha_k}{r}\cos t}{1-\frac{2\alpha_k}{r}\cos t + \left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^2} - \sum_{1}^{m} \frac{1-\frac{\beta_k}{r}\cos t}{1-\frac{2\beta_k}{r}\cos t + \left(\frac{\beta_k}{r}\right)^2} + \psi(r,t),$$

где $\psi(r,t)$ означава реални део функције $z\chi(z)$ за $z = re^{ti}$. Према томе је

$$(21) \qquad H(r) = \sum_{1}^{n} B\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) - \sum_{1}^{m} B\left(\frac{\beta_k}{r}\right) + U(r),$$

где $B(x)$ представља одређени интеграл

$$(22) \qquad B(x) = \int_{a}^{b} \varphi(t) \frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t + x^2}\, dt,$$

и где је

$$(23) \qquad U(r) = \int_{a}^{b} \varphi(t)\, \psi(r,t)\, dt.$$

Идентитет

$$\frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t + x^2} = 1 - \frac{x}{2}\frac{d}{dx}\log(1-2x\cos t + x^2)$$

показује да ће, остављајући по страни вредности $|x| = 1$, за сваку вредност x бити

$$B(x) = g_0 - \frac{x}{2}\frac{dI}{dx}.$$

Отуда следи, према особинама интеграла $I(x)$, да ће за сваку вредност x унутар извесног круга C_1 бити (формуле (5) и (7))

$$B(x) = g_0 + \mu(x),$$

а да ће за сваку вредност x ван извесног круга C_2 бити

$$B(x) = -\mu\left(\frac{1}{x}\right),$$

где је $\mu(x)$ дато формулом (6); полупречниици R_1 и R_2 кругова C_1 и C_2 имају вредности

R_1 = мања од вредности 1 и R,

R_2 = већа од вредности 1 и $\dfrac{1}{R}$,

где је R полупречник конвергенције реда (6).

Изаберимо сада за $\varphi(t)$ било коју функцију која задовољава услов $[\varphi, a, b, 0]$, па ћемо имати

$$\mu(x) = 0, \quad R = \infty,$$

а како се кругови C_1 и C_2 поклапају са C, биће

$$\begin{aligned} B(x) &= g_0 \quad \text{за} \quad |x| < 1, \\ B(x) &= 0 \quad \text{за} \quad |x| > 1; \end{aligned}$$

и отуда

$$(24) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n B\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) = ng_0, \\ \displaystyle\sum_1^m B\left(\frac{\beta_k}{r}\right) = mg_0. \end{cases}$$

С друге стране, како се функција $\chi(z)$ може за $|z| \le r$ развити у ред

$$\chi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

биће

$$\psi(r,t) = 2\sum_1^\infty b_n r^{n+1}\cos(n+1)t$$

и отуда

(25) $$U(r)=2\sum_{1}^{\infty} b_n g_{n+1} r^{n+1}=0,$$

тако да се интеграл $H(r)$ своди на вредност $(n-m)g_0$.

Отуда овај резултат:

Разлика између броја нула и броја полова функције f(x) *једнака је вредности интеграла*

$$\frac{1}{g_0}\int_a^b \varphi(t)F(r,t)\,dt,$$

где $F(r,t)$ *означава реалан део израза* $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ *за* $z=re^{ti}$, *а* $\varphi(t)$ *је било која функција која задовољава услов* $[\varphi,a,b,0]$.

Тако, на пример, та разлика ће бити представљена интегралом

$$\frac{1}{g_0}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}F(r,t)\,dt,$$

где је

$$g_0=\frac{\pi}{2}$$

или ма којим интегралом облика

$$\frac{1}{g_0}\int_a^{2\pi}\varphi(t)F(r,t)\,dt,$$

где је $\varphi(t)$ непрекидна функција са периодом 2π, различита од нуле за $t=0$ и са развојем у Fourier-ов ред без синуса; у овом случају ће бити

$$g_0=\pi\varphi(0).$$

Узимајући у последњем интегралу $\varphi(t)=1$, поново се налази формула

$$n-m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(r,t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F(r,t)\,dt.$$

III. – ОДНОС ПРОИЗВОДА МОДУЛА НУЛА И ПОЛОВА

Посматрајмо претходну функцију $f(z)$ и пођимо од

$$\log\frac{f(z)}{f(0)} = \sum_{1}^{n}\log\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right) - \sum_{1}^{m}\log\left(1-\frac{z}{\beta_k}\right) + \xi(z), \tag{26}$$

где је функција $\xi(z)$ холоморфна у унутрашњости круга C и на њему и има вредност нула за $z = 0$.

Образујмо интеграл

$$K(r) = \int_{a}^{b}\varphi(t)M(r,t)\,dt, \tag{27}$$

где је

$$M(r,t) = \log|f(z)| \quad \text{за} \quad z = re^{ti}. \tag{28}$$

Идентитети

$$M(r,t) = \frac{1}{2}\left[\log f(re^{ti}) + \log f(re^{-ti})\right], \tag{29}$$

$$\log\left(1-\frac{re^{ti}}{\alpha}\right) + \log\left(1-\frac{re^{-ti}}{\alpha}\right) = \log\left[1-\frac{2r}{\alpha}\cos t + \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2\right] \tag{30}$$

доводе до

$$\begin{aligned} M(r,t) &= \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\log\left[1-\frac{2r}{\alpha_k}\cos t+\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^2\right] \\ &-\frac{1}{2}\sum_{1}^{m}\log\left[1-\frac{2r}{\beta_k}\cos t+\left(\frac{r}{\beta_k}\right)^2\right] \\ &+\log f(0)+\psi(r,t), \end{aligned} \tag{31}$$

где је

$$\psi(r,t) = \sum_{1}^{\infty} c_n r^n \cos nt, \tag{32}$$

а c_n означава коефицијенте развитка

$$\xi(z) = \sum_{1}^{\infty} c_n z^n,$$

који конвергира за $|z| \leq r$.

Зато ће интеграл $K(r)$ имати вредност

$$K(r) = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) - \frac{1}{2}\sum_{1}^{m} I\left(\frac{r}{\beta_k}\right) \tag{33}$$
$$+\log f(0)\int_a^b \varphi(t)\,dt + \int_a^b \varphi(t)\,\psi(r,t)\,dt.$$

Изаберимо сад за $\varphi(t)$ било коју функцију која задовољава услов $[\varphi, a, b, 0]$; обрасци (9) показују да је

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n} I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) = 2g_0 \log\frac{r^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \\ \sum_{1}^{m} I\left(\frac{r}{\beta_k}\right) = 2g_0 \log\frac{r^m}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}, \end{cases} \tag{34}$$

а како је, на основу (32),

$$\int_a^b \varphi(t)\psi(r,t)\,dt = \sum_{1}^{\infty} c_n g_n r^n = 0, \tag{35}$$

вредност $K(r)$ се своди на

$$K(r) = g_0 \log\left[f(0)r^{n-m}\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right]. \tag{36}$$

Изједначавање са $K(r)$ реалног дела другог члана у (36) доводи до следећег резултата:

Ма каква била функција $\varphi(\mathrm{t})$ *која задовољава услов* $[\varphi, \mathrm{a}, \mathrm{b}, 0]$, *означавајући са* $\mathrm{M(r, t)}$ *логаритам модула функције* f(z) *дуж круга полупречника* r, *одређени интеграл*

$$K(r) = \int_a^b \varphi(\mathrm{t})M(r,t)\,dt$$

имаће за вредност

$$g_0 \log\left|f(0)r^{n-m}\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|. \tag{37}$$

Такав је, на пример, случај са интегралом

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} M(r,t)\,dt,$$

или са ма којим интегралом облика

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) M(r,t)\, dt,$$

где је $\varphi(t)$ непрекидна функција са периодом 2π којој одговара развитак

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin t + A_2 \sin 2t + \ldots.$$

Узимајући у овом последњем случају

$$A_0 = 1, \quad A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0,$$

опет се налази теорема г. Jensena за случај у коме је $f(z)$ реално кад је z реално.

IV. – СИМЕТРИЧНЕ И АСИМЕТРИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ НУЛА

1. Нека је $f(z)$ полином по z степена n. Уочимо претходни интеграл

$$K(r) = \int_a^b \varphi(t) M(r,t)\, dt.$$

Идентитети (29), (30) и

$$\log \frac{f(z)}{f(0)} = \sum \log\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \tag{38}$$

доводе непосредно до

$$K(r) = \frac{1}{2}\sum_1^n I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) + g_0 \log f(0). \tag{39}$$

Дакле, према особинама интеграла $I(x)$, ако су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ нуле функције $f(z)$ у унутрашњости круга C полупречника r, а $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$ њене нуле у његовој спољашњости, биће за $k = 1, 2, \ldots, m$

$$\sum I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) = 2g_0 \log \frac{r^n}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} + \sum \lambda\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) \tag{40}$$

а за $k = m+1, \ldots, n$

$$(41) \qquad \sum I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) = \sum \lambda\left(\frac{r}{\alpha_k}\right),$$

тако да је

$$(42) \qquad K(r) = \sum_{(1)} \lambda\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) + \sum_{(2)} \lambda\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) + 2g_0 \log \frac{r^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} + g_0 f(0),$$

где се збир $\sum\limits_{(1)}$ односи на унутрашње а збир $\sum\limits_{(2)}$ на спољашње нуле.

Тако се добија једна асиметрична функција нула α_i *изражена помоћу интеграла* K(r).

Ако се за r узме једна доња граница γ модула нула α_i, збир $\sum\limits_{(2)}$ и логаритамски члан у обрасцу (42) нестају и овај се своди на

$$(43) \qquad K(\gamma) = \sum \lambda\left(\frac{\gamma}{\alpha_k}\right) + g_0 \log f(0),$$

изражавајући тако симетричну функцију нула α_i *помоћу* K(r).

2. Симетричне и асиметричне функције нула α_i могу се изразити и помоћу претходног интеграла

$$H(r) = \int_a^b \varphi(t) F(r,t)\, dt.$$

Полазећи од обрасца (21), који се овде своди на

$$(44) \qquad H(r) = \sum_1^n B\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)$$

и примећујући да ако се претпостави да је полупречник конвергенције R одговарајућег реда

$$\mu(x) = \sum_1^\infty g_n x^n$$

најмање једнак један, онда је

$$B(x) = g_0 + \mu(x) \quad \text{за } |x| < 1,$$
$$B(x) = -\mu\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{за } |x| > 1,$$

долази се до обрасца

$$(45) \qquad H(r) = ng_0 + \sum_{(1)} \mu\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) - \sum_{(2)} \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right),$$

који изражава једну асиметричну функцију нула α_i *помоћу интеграла* H(r).

Узимајући $r = \gamma$, добиће се *симетрична функција*

$$(46) \qquad \sum \mu\left(\frac{\alpha_k}{\gamma}\right),$$

распрострта на све α_i, *изражена помоћу* H(r).

Бирајући за $\varphi(t)$ ма коју функцију која задовољава услов $[\varphi, a, b, p]$, где је p позитиван цео број, биће функција $\mu(x)$ полином по x, збир $\sum \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)$ распрострт на све α_i, рачунаће се помоћу коефицијената функције $f(z)$ и добиће се *симетрична функција*

$$\sum \left[\mu\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) + \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)\right],$$

распрострта на α_i *у унутрашњости круга* C, изражена помоћу $H(r)$ и коефицијената функције $f(z)$.

3. Могу се изразити симетричне и асиметричне функције нула α_i и помоћу интеграла

$$(47) \qquad L(r) = \int_a^b \varphi(t) \Phi(r,t)\, dt,$$

где $\Phi(r,t)$ означава реалан део логаритамског извода функције $f(z)$ дуж круга C; лако се налази да је

$$L(r) = \frac{1}{r} \sum A\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)$$

са

$$A(x) = -\frac{1}{2} \frac{dI}{dx},$$

што доводи до формуле

$$(48) \qquad L(r)=\sum_{(1)}\frac{1}{\alpha_k}\mu\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)-\sum_{(2)}\left[\frac{g_0}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_k}\mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)\right],$$

која изражава једну асиметричну функцију нула α_i *помоћу* L(r). Одавде се извлачи и следећи образац

$$(49) \qquad \mathrm{L}(\gamma)=-\sum\left[\frac{g_0}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_k}\mu\left(\frac{\gamma}{\alpha_k}\right)\right],$$

који изражава једну симетричну функцију нула α_i *помоћу* L(r).

Узимајући за $\varphi(t)$ ма какву функцију која задовољава услов $[\varphi, a, b, 0]$, *вредност интеграла*

$$(50) \qquad -\frac{1}{g_0}L(r)$$

биће збир реципрочних вредности нула α_i *које се налазе ван круга* C; примењујући тврђење на полином

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right),$$

вредност одговарајућег израза (50) *биће збир нула* α_i *које су унутар круга* C.

Приметимо такође, да бисмо завршили, да се већина ових резултата примењује очито и на случај где је $f(z)$ трансцендентна цела функција нултог рода што води, између осталих последица, до различитих познатих или нових збирних образаца.

О ЈЕДНОЈ ВАЖНОЈ КЛАСИ ЦЕЛИХ ФУНКЦИЈА*

1. Зваћемо *йолином* $\Omega(z)$ сваки полином по z са реалним коефицијентима који има ту особину да полином састављен од скупа било ког броја његових првих чланова има све нуле реалне. Ако је, дакле,

$$f_p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_p z^p \tag{1}$$

полином $\Omega(z)$, сви корени алгебарске једначине

$$f_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0 \tag{2}$$

су реални било какво да је n мање или једнако од p.

Тражимо потребне и довољне услове да тако буде. Означимо са

$$\varphi_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{3}$$

трансформацију $\dfrac{1}{z}$ једначине $f_n(z) = 0$[1]. Полиноми $\varphi_n(z)$ могу бити дефинисани рекурентном релацијом

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= z\varphi_{n-1}(z) + a_n \\ \varphi_0(z) &= a_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Крива

$$y = \varphi_n(z) \tag{5}$$

је исто што и крива

---

* Наслов оригинала *Sur une classe remarquable de séries entières*, Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici, Roma, 1908, Sezione 1, vol. II, pp. 36–43.

[1] $\varphi_n(z) = z^n f_n\left(\dfrac{1}{z}\right)$ кад је $z \neq 0$, $\varphi_n(0) = a_n$ (прим. прев.)

$$(6) \qquad y = z\varphi_{n-1}(z)$$

којој је z-оса помакнута паралено њој самој за дужину $-a_n$ према негативним или позитивним y зависно од тога да ли је a_n позитивно или негативно. Конструишући корак по корак криве (5) полазећи од кривих

$$(7) \qquad y = \varphi_{n-1}(z),$$

лако се уверава да:

1. Ако се оставе по страни криве

$$y = \varphi_1(z) \quad \text{и} \quad y = \varphi_2(z),$$

при чему последња задовољава јединствен услов

$$a_2 < \frac{a_1^2}{4a_0},$$

и ако крива (7) сече своју z-осу у $n-1$ реалних тачака, да би крива (5) такође секла своју z-осу у n реалних тачака, потребно је и довољно да помак a_n те осе буде мањи или једнак најмањем помаку ξ_n за који је треба померити у смеру указаном знаком од $-a_n$ да би додирнула криву (6);

2. Ако је по апсолутној вредности $a_n < \xi_n$, крива (5) сече своју нову осу у n различитих реалних тачака; ако је $a_n = \xi_n$, ове тачке су још реалне али се неке од њих могу поклапати;

3. У случају да је помак $-a_{n-1}$ имао своју највећу могућу вредност, помак $-a_n$ следеће криве могућ је само у једном смеру, позитивном или негативном зависно од тога да ли тачка додира криве (7) са њеном z-осом одговара једном минимуму или једном максимуму те криве;

4. Ако z-оса која одговара кривој (7) додирује ту криву у више тачака, од којих су једне минимуми, а друге максимуми, никакав помак $-a_n$ није могућ.

Ако је тако, означимо са $\Delta_n(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ дискриминанту полинома (3) и посматрајмо алгебарску једначину по x

$$(8) \qquad \Delta_n(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) = 0$$

чији реални корени дају величине помака $-a_n$ за које треба померити x-осу криве (7) да би она додирнула криву (5).

Тако ће прве две једначине, одговарајуће за $n = 3$ и $n = 4$ и ослобођене простог корена $x = 0$ заједничког свим овим једначинама, бити

$$27a_0^2 x + (4a_1^3 - 18a_0 a_1 a_2) = 0$$

$$256\, a_0^3 x^2 + (144\, a_0 a_1^2 a_2 - 192\, a_0^2 a_1 a_3 - 128\, a_0^2 a_2^2 - 27 a_1^4) x +$$

$$+ (144\, a_0^2 a_2 a_3^2 + 18\, a_1^3 a_2 a_3 + 16\, a_0 a_2^4 - 6 a_0 a_1^2 a_3^2 - 80 a_0 a_1 a_2^2 a_3 - 4 a_1^2 a_2^3) = 0.$$

Ако се са λ_n означи најмањи позитиван корен једначине (8) а са μ_n најмањи (по апсолутној вредности) негативан корен исте једначине, очигледно је да је највећи позитиван помак ξ_n једнак λ_n а најмањи негативан помак ξ_n једнак μ_n.

Тако се долази, на један веома интуитиван начин, до следеће теореме:

Да би полином $f_p(z)$ *био полином* $\Omega(z)$, *потребно је и довољно*

1. *да буде*

$$a_2 < \frac{a_1^2}{4a_0};$$

2. *да сваки коефицијент* $a_n (2 < n \leq p)$ *буде садржан између двеју одговарајућих вредности* λ_n *и* μ_n.

У једном граничном случају две вредности λ_n и μ_n могу имати заједничку вредност нула: *у овом случају је вредност* $a_n = 0$ *једина која задовољава услове проблема.*

Приметимо да у једном полиному $\Omega(z)$ не могу бити два узастопна коефицијента a_i нула, нити може бити један коефицијент нула између два коефицијента истог знака; сви коефицијенти су, уосталом, подвргнути услову

$$(n-1) a_{n-1}^2 - 2n a_n a_{n-2} > 0 \tag{9}$$

до кога се долази помоћу исказа да извод реда $n-2$ полинома $f_n(z)$ има две реалне нуле.

2. Зауставимо се сада на посебно занимљивом случају у коме су сви коефицијенти a_i позитивни. Претходна теорема узима тада следећи облик:

Да би $f_p(z)$ *био полином* $\Omega(z)$, *потребно је и довољно да коефицијент* a_n *буде мањи или једнак од најмањег позитивног корена* λ_n *алгебарске једначине* (8), *и то за све вредности* $2 \leq n \leq p$.

Пустимо сада p да расте бескрајно, а да је $f_p(z)$ увек полином $\Omega(z)$: $f_p(z)$ *ће имати као граничну вредност ред*

$$\Omega(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{10}$$

конвергентан у читавој равни променљиве z, *имајући све своје нуле, којих је бесконачно на броју, реалне и негативне, и поседујући, штави-*

ше, ту важну особину да су сви корени алгебарске једначине, добијене изједначавањем са нулом било ког његовог делимичног збира, реални и негативни.

Довољно је, да би се то видело, показати да ред (10) конвергира за сваку вредност z-а; то је доказано непосредно, на пример, помоћу неједнакости

$$a_n < \frac{a_0}{n^n}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n \tag{11}$$

која је добија приметивши да ако се са $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ означе апсолутне вредности корена, свих негативних, алгебарске једначине (3), онда је

$$\frac{a_n}{a_0} = \zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n, \quad \frac{a_1}{a_0} = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n$$

и отуда

$$\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} \le \frac{1}{n}\frac{a_1}{a_0}.$$

3. Неједнакост (11) показује истовремено да је род функције $\Omega(z)$ мањи од 2. До једног прецизнијег резултата се долази употребом следеће Lageurre-ове теореме која се односи на једну широку класу целих функција која обухвата такође овде посматране функције $\Omega(z)$. Нека је

$$\Phi_n(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

цео полином степена n у коме су коефицијенти A_i функције од n или не зависе од њега. Претпоставимо да, кад n бесконачно расте, $\Phi_n(z)$ има за граничну вредност ред $F(z)$ који конвергира за све вредности променљиве; претпоставимо сем тога да су за сваку вредност n корени једначине $\Phi_n(z) = 0$ реални и истог знака; тада ће функција $F(z)$ бити једнака производу једне целе функције нултог рода и једне експоненцијалне функције облика e^{az+b}, где су a и b константе[2].

Доказ теореме, такав какав је дао Laguerre, битно претпоставља да су испуњена следећа два услова:

1. кад n расте бескрајно, $\Phi_n(z)$ конвергира целој функцији $\Phi(z)$;

2. ако се нуле функције $\Phi_n(z)$, које су истог знака, уреде по величини, збир њихових реципрочних вредности има коначну граничну вредност највише једнаку

[2] Laguerre, *Oeuvres*, t. I, p. 174.

$$-a = -\lim \frac{A_1}{A_0} \quad \text{за} \quad n = \infty.$$

Будући да су ови услови увек испуњени у случају функција $\Omega(z)$, долази се до следеће теореме:

Свака функција $\Omega(z)$ *је производ једне целе функције нултог рода и једне експоненцијалне функције облика* Ae^{az} *где константе* A *и* a *имају вредности*

$$A = a_0, \quad a = \frac{a_1}{a_0}.$$

Исто тако је могуће прецизирати помоћне неједнакости које задовољавају коефицијенти a_i било ког реда $\Omega(z)$. Претходни услови

$$(n-1)a_{n-1}^2 - 2na_n a_{n-2} > 0$$

воде до низа неједнакости

$$\begin{gathered} \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{n-1}{2n}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{a_2}{a_1} < \frac{1}{2\cdot 2}\frac{a_1}{a_0} \end{gathered}$$

које, помножене члан по члан, доводе до

$$\frac{a_n}{a_1} < \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}na_0}$$

и према томе до

$$a_n < \frac{a_0}{n!\,2^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \tag{12}$$

тако да се може исказати следеће тврђење:

Коефицијент a_n *сваког реда* $\Omega(z)$ *задовољава неједнакост*

$$a_n < \frac{a_0\beta^n e^{-\alpha n^2}}{n!} \tag{13}$$

са

$$\alpha = \frac{1}{2}\log 2, \quad \beta = \frac{a_1\sqrt{2}}{a_0}.$$

Позната неједнакост

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{n!}$$

допушта да се неједнакости (13) да и следећи облик

$$(14) \qquad a_n < \frac{a_0 \gamma^n e^{-\alpha n^2}}{(n+1)^n}$$

са

$$\gamma = \beta e = \frac{a_1 e\sqrt{2}}{a_0}.$$

Неједнакост (13) чини видљивим, на пример, да је за сваку вредност $z = re^{\varphi i}$ модуо било ког реда $\Omega(z)$ мањи од вредности $a_0 \theta(\beta r)$, где $\theta(z)$ означава трансцендентну целу функцију

$$(15) \qquad \theta(z) = \sum_0^\infty \frac{e^{-\alpha n^2}}{n!} z^n .$$

Неједнакост (14) чини видљивим, с једне друге стране, да су нуле сваког реда $\Omega(z)$ све веће по апсолутној вредности од $\frac{a_0}{a_1}$, и да расту са n брже од $2^{\frac{n}{2}} n$.

Могу се добити друга својства редова $\Omega(z)$ упоређујући их са другим одређеним редовима који се лакше проучавају и чији су чланови изнад другог члана у неједнакости (13). Такви ће, између осталих, бити цели редови облика

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^{an}}, \quad \sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma(an+b)}$$

као и Besel-ова функција

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{(n!)^2} \quad \text{итд.}$$

4. Лако је стварно направити неограничен број редова $\Omega(z)$. Laguerre[3] је показао како се могу образовати неограничени низови бројева

[3] *Oeuvres*, t. I, p. 33–36; p. 199–206 etc.

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$$

који поседују ту важну особину да сваки пут кад су сви корени алгебарске једначине

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n = 0$$

реални, такви су и сви корени једначине

$$A_0 \omega_0 + A_1 \omega_1 x + \ldots + A_n \omega_n x^n = 0.$$

Такви бројеви ω_n су, између осталих, следеће функције од n:

1. Било који полиноми $P(n)$ који имају само реалне и негативне нуле;

2. Било које целе функције $G(n)$ од n, рода нула или један, које имају само реалне и негативне нуле;

3. Функције облика $e^{-\alpha n^2}$, где је α било који реалан и позитиван број;

4. Производ било ког броја функција 1°, 2°, 3°;

5. Функције облика

$$\frac{\lambda_1(n)}{\lambda_2(0)\lambda_2(1)\ldots\lambda_2(n)},$$

где су $\lambda_1(n)$ и $\lambda_2(n)$ било које две међу функцијама 1°, 2°, 3°.

Одавде следи да се од једног познатог реда

$$\Omega(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

може направити бесконачно много њих облика

$$\Omega(z) = a_0 \omega_0 + a_1 \omega_1 z + a_2 \omega_2 z^2 + \ldots$$

где су $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots$ претходно наведене функције од n.

Стварне примере редова $\Omega(z)$ дају извесне трансцендентне целе функције које је проучавао г. G. H. Hardy[4], који је дошао, на пример, до следећег резултата:

Ако је $b(x)$ функција од x, позитивна и растућа за све вредности x, и ако је

$$b\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 3b(x),$$

[4] *On the zeroes of a class of integral functions* (The Messenger of Mathematics, Nov. 1904 pp. 97–101)

$$b(n) = b_n, \quad a_n = \frac{1}{b_1 b_2 \ldots b_n},$$

сви корени целе функције

$$\sum_0^\infty a_n z^n$$

су реални и негативни; штавише, исто важи и за полином

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m$$

за све вредности m.

Тако ће бити, на пример, ако је

$$b_n = q^{-2n+1}, \quad a_n = q^{n^2} \qquad q \leq \frac{1}{3}$$

као и ако је

$$a_n = \frac{1}{1^1 2^2 3^3 \ldots n^n (n+1)^{n+1}};$$

у последњем случају услов

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^{x+\frac{3}{2}} \geq 3(x+1)^{x+1}$$

није задовољен за мале вредности x, али је лако допунити доказ.

5. Може се, не умањујући општост, сваки ред о коме је овде реч написати у облику

(16) $$1 + z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots$$

Између неограниченог броја свих редова $\Omega(z)$ записаних у овом облику један заслужује сасвим посебну пажњу: *то је ред* (16) *са нумеричким коефицијентима*

(17) $$\psi(z) = 1 + z + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3 + \ldots$$

где сви коефицијенти b_k *достижу своју највећу могућу вредност.*

Коефицијент λ_k овога реда је најмањи позитиван корен алгебарске једначине по x

(18) $$\Delta_k(1, 1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}, x) = 0$$

која увек има позитивне корене, као што је утврђено претходним геометријским разматрањима. Једначине које, на пример, дају $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ су

$$\Delta_2 = 4x - 1 = 0$$

одакле је

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}; \qquad \Delta_3 = 27x^2 - \frac{x}{2} = 0$$

одакле је

$$\lambda_3 = \frac{1}{54}; \qquad \Delta_4 = 256x^3 - \frac{23}{9}x^2 + \frac{x}{972} = 0$$

одакле је

$$\lambda_4 = \frac{1}{2379{,}423} \quad \text{итд.}$$

Са овим граничним вредностима b_k полиноми $\Omega(z)$ се пишу у облику

$$\begin{aligned}
\Omega_2(z) &= 1 + z + \frac{z^2}{4} = \frac{1}{4}(z+2)^2 \\
\Omega_3(z) &= 1 + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{54} = \frac{1}{54}(z+6)^2\left(z + \frac{3}{2}\right) \\
\Omega_4(z) &= 1 + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{54} + \frac{z^4}{2379{,}423} = \\
&= \frac{1}{2379{,}423}(z + 19{,}1172)^2(z + 4{,}3225)(z + 1{,}5064).
\end{aligned}$$

Ред (17) представља, према претходном, трансцендентну целу функцију нултог рода са експоненцијалним чиниоцем e^{-z}, која има бесконачно много нула, све су реалне, негативне, веће по апсолутној вредности од 1 и расту са n брже од израза $n(\sqrt{2})^n$. Њен модуо за $z = re^{\varphi i}$ је мањи од $\theta(re\sqrt{2})$, где $\theta(z)$ означава трансцендентну целу функцију (15). Овај гранични ред $\Omega(z)$ заслужује једно продубљеније изучавање и ја допуштам себи да на њега скренем пажњу аналиста.

ЈЕДНА СПЕЦИЈАЛНА ТРАНСЦЕНДЕНТА И ЊЕНА УЛОГА У МАТЕМАТИЧКОЈ АНАЛИЗИ*

УВОД

Трансцендента дефинисана бескрајним редом

$$\theta(z) = 1 + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{27} + \frac{z^4}{256} + \dots$$

у коме коефицијенат a_n општега члана $a_n z^n$ има за вредност

$$a_n = \frac{1}{n^n}$$

заслужује пажње и сама по себи, бар по простоти закона формације њених коефицијената: она је једна од оних трансцендената, холоморфних у целој равни промењљиве z, којима одговарају најпростији могућни закони формације коефицијената a_n.

Али она заслужује пажње и по улози коју може имати у многобројним општијим питањима математичке анализе и која ће бити, бар у колико је то за сад могућно, истакнута у току ове расправе.

Стога сам држао да би било од несумњивог интереса проучити ову досад неиспитану трансценденту у њеним појединостима, а нарочито онима које су најпотребније за прво оријентисање о њеним особинама и за примене у оним питањима при чијем се решавању наилази на ову функцију или њене комбинације.

У овој ће расправи бити саопштени први резултати таквог проучавања.

---

* Српска краљевска академија, Глас књ. LXXVII, Први разред, књ. 31, Београд, 1909, стр. 1–44.

I. РАЗНИ АНАЛИТИЧКИ ИЗРАЗИ ЗА ФУНКЦИЈУ θ И ЊЕНЕ ИЗВОДЕ

Осим аналитичког израза

(1) $$\theta(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

у облику кога се може написати функција $\theta(z)$, постоји и других облика у којима се $\theta(z)$ може изразити као функција променљиве z. За проучавање појединости ове функције нарочито су угодни њени аналитички изрази у облику одређених интеграла.

Ако се са $\Delta(z)$ означи трансцендента дефинисана редом

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}},$$

између $\theta(z)$ и $\Delta(z)$ постоји проста релација

(3) $$\theta(z) = 1 + z\Delta(z).$$

Међутим, из познатог интегралног обрасца

$$\int_0^1 u^n dt = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

где је

$$u = t \log \frac{1}{t},$$

добија се да је

$$\frac{z^n}{(n+1)^{n+1}} = \int_0^1 \frac{(zu)^n}{n!} dt$$

и према томе

(4) $$\Delta(z) = \int_0^1 e^{zu} dt$$

или још

$$\Delta(z) = \int_0^1 t^{-zt} dt$$

тако да се трансцендента $\theta(z)$ *за* z *у целој равни те променљиве може изразити у облику одређеног интеграла*

$$\theta(z) = \int_0^1 (1 + ze^{zu})\,dt. \tag{5}$$

Овај се интеграл може сменути и другим, у коме ће интегралне границе бити 0 и ∞: узевши

$$t = e^{-x}$$

обрасци се (4) и (5) претварају у ове

$$\Delta(z) = \int_0^\infty e^{-x} e^{zv}\,dx \tag{6}$$

$$\theta(z) = \int_0^\infty (1 + ze^{-x} e^{zv})\,dx, \tag{7}$$

где је

$$v = xe^{-x}.$$

Помоћу ових образаца лако је изразити и ма који извод функције $\theta(z)$ у облику одређеног интеграла. Пошто је из обрасца (4) уопште

$$\Delta^{(k)}(z) = \int_0^1 u^k e^{zv}\,dt, \tag{8}$$

а из обрасца (3)

$$\begin{aligned} \theta' &= \Delta + z\Delta' \\ \theta'' &= 2\Delta' + z\Delta'' \\ \theta''' &= 3\Delta'' + z\Delta''' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta^{(k)} &= k\Delta^{(k-1)} + z\Delta^{(k)}, \end{aligned} \tag{9}$$

то ће бити

$$\theta' = \int_0^1 (1 + zu)\,e^{zu}\,dt$$

$$\theta'' = \int_0^1 u\,(2 + zu)\,e^{zu}\,dt$$

$$\theta''' = \int_0^1 u^2 (3 + zu)\,e^{zu}\,dt, \tag{10}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

тако да уопште k-ти извод функције θ има за израз

$$\theta^{(k)} = \int_0^1 u^{k-1}(k+zu)e^{zu}dt. \tag{11}$$

Горњом сменом лако је претворити овај интеграл у други чије ће границе бити 0 и ∞.

Редови, пак, што одговарају k-тим изводима функција Δ и θ јесу

$$\theta^{(k)} = \sum_0^\infty A_n z^n \tag{12}$$

$$\Delta^{(k)} = \sum_0^\infty B_n z^n, \tag{13}$$

где је уопште

$$A_n = \frac{(n+k)!}{n!(n+k)^{n+k}} \tag{14}$$

$$B_n = \frac{(n+k)!}{n!(n+k+1)^{n+k+1}}. \tag{15}$$

II. ГОРЊЕ И ДОЊЕ ГРАНИЦЕ ФУНКЦИЈА Δ И θ

Из облика редова који их дефинишу очевидно је да су обе функције Δ и θ холоморфне у целој равни променљиве z и да су то према неједначинама

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{n^n} < \frac{1}{n!}$$

целе функције чији је род (genre) нижи од 2.[1]

Пошто функција

$$u = t \log \frac{1}{t}$$

[1] Било би од интереса одредити тачно род ових трансцендената, што би се учинило нпр. дубљим проучавањем њихових нула или начина на који се понашају њихови логаритамски изводи кад $|z|$ бескрајно расте.

за време док t расте од 0 до 1 и сама почиње расти од 0, достиже свој максимум чија је вредност

$$M = \frac{1}{e} = 0,36788, \tag{16}$$

па затим опада до 0, очевидно је да је

$$\left| \int_0^1 e^{zu} dt \right| < \int_0^1 \left| e^{Mz} \right| dt = e^{\frac{r}{e}},$$

где је r модуо променљиве z. Отуда према обрасцима (3) и (4) овај резултат:

За сваку било реалну, било имаīинарну вредносӣ z *модуо функције* Δ *увек је мањи од модула функције*

$$e^{\frac{z}{e}},$$

а модуо функције θ *увек је мањи од модула функције*

$$1 + ze^{\frac{z}{e}}.$$

Пошто је пак

$$\left| \int_0^1 u^k e^{zu} dt \right| < \left| e^{Mz} \right| \int_0^1 u^k dt$$

образац (8) показује *да је за сваку, реалну или имаīинарну вредносӣ* z *модуо* k-*ӣоī извода функције* Δ *мањи од модула функције*

$$\frac{k!}{(k+1)^{k+1}} e^{\frac{z}{e}},$$

а последњи образац (9), према коме је

$$\left| \theta^{(k)} \right| < k \left| \Delta^{(k-1)} \right| + \left| z\Delta^{(k)} \right|,$$

показује *да је за сваку, реалну или имаīинарну вредносӣ* z *модуо* k-*ӣоī извода функције* θ *мањи од одīоварајућеī модула функције*

$$k! \left[\frac{1}{k^k} + \frac{z}{(k+1)^{k+1}} \right] e^{\frac{z}{e}}.$$

А пошто је у исто време

$$\left|\int_0^1 u^k e^{zu}\,dt\right| < M^k \int_0^1 e^{ru}\,dt$$

$(r = |z|)$, то се изводи *да ће такође за све вредности* z *модуо k-тога извода функције* Δ *бити мањи од вредности*

$$e^{-k}\Delta(r),$$

а модуо k-*тога извода функције* θ *мањи од вредности*

$$(ke+r)\,e^{-k}\,\frac{\theta(r)-1}{r},$$

У случају кад су вредности z реалне и позитивне, поред горњих неједначина важиће још и ове: пошто је

$$\Delta(z+\alpha) = \int_0^1 e^{zu} e^{\alpha u}\,dt$$

$$\Delta^{(k)}(z+\alpha) = \int_0^1 u^k e^{zu} e^{\alpha u}\,dt,$$

то се с обзиром на неједначине (8) лако увиђа *да је за реалне и позитивне вредности* z *и* α

(17) $$\Delta(z+\alpha) < e^{\frac{\alpha}{e}}\Delta(z)$$

(18) $$\Delta^{(k)}(z+\alpha) < e^{\frac{\alpha}{e}}\Delta^{(k)}(z),$$

а тако исто и

(19) $$\Delta(z+\alpha) < e^{\frac{z}{e}}\Delta(\alpha)$$

(20) $$\Delta^{(k)}(z+\alpha) < e^{\frac{z}{e}}\Delta^{(k)}(\alpha).$$

У исто време из неједначина (18) и (19), а према једноме од горњих резултата, за модуо извода $\Delta^{(k)}(z)$ изводе се неједначине

(21) $$\Delta^{(k)}(z+\alpha) < e^{\frac{\alpha}{e}-k}\Delta(z)$$

$$(22)\qquad \Delta^{(k)}(z+\alpha) < e^{\frac{z}{e}-k}\Delta(\alpha).$$

Из неједначина, пак, (17) и (19) и обрасца (3) добијају се и одговарајуће неједначине за функцију θ

$$(23)\qquad \theta(z+\alpha) < 1 + e^{\frac{\alpha}{e}}(z+\alpha)\frac{\theta(z)-1}{z}$$

$$(24)\qquad \theta(z+\alpha) < 1 + e^{\frac{z}{e}}(z+\alpha)\frac{\theta(\alpha)-1}{\alpha},$$

а из (9), (18), (20), (21), (22) добијају се лако и разноврсне неједначине за изводе функције $\theta(z)$.

Тако нађене неједначине одређују *горње границе* при варијацијама функција Δ и θ и њихових извода. Позната неједначина

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{n!}$$

из које је

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} > \frac{e^{-n}}{(n+1)!}$$

доводи до једне *доње границе* при овим варијацијама: *за све реалне и позитивне вредности* z *биће*

$$(25)\qquad \Delta(z) > \frac{e}{z}(e^{\frac{z}{e}}-1)$$

$$(26)\qquad \theta(z) > 1 + e(e^{\frac{z}{e}}-1).$$

За реалне а негативне вредности z имали бисмо ове неједначине: пошто је за све такве вредности

$$e^{zu} > e^{\frac{z}{e}},$$

то ће бити и

$$(27)\qquad \Delta(z) > e^{\frac{z}{e}}$$

$$\Delta^{(k)}(z) > e^{\frac{z}{e}}\int_0^1 u^k dt = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}e^{\frac{z}{e}},$$

а тако исто и

(28) $$\theta(z) > 1 + z e^{\frac{z}{e}}$$

$$\theta^{(k)}(z) > k!\left[\frac{1}{k^k} + \frac{z}{(k+1)^{k+1}}\right] e^{\frac{z}{e}}$$

тако да је нпр.

$$\theta'(z) > \left(1 + \frac{z}{4}\right) e^{\frac{z}{e}}.$$

Навешћу још и овај начин одредбе граница, *који даје у једно исто време и доњу и горњу границу функција* Δ *и* θ *кад* z *има реалне и позитивне вредности.*

Из познате двогубе неједначине

(29) $$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

која вреди за све целе вредности n веће од $n = 5$, налази се да је за такве вредности n

(30) $$\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{e}\right)^n < \frac{1}{n^n} < \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Означивши са R_n остатак реда $\theta(z)$, тако да је

(31) $$\theta(z) = P_n(z) + R_n,$$

где је $P_n(z)$ полином n-тог степена

(32) $$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2^2} + \ldots + \frac{z^n}{n^n}$$

биће

$$R_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k^k}.$$

Према неједначини (30) биће за $n > 5$

(33) $$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{e}\right)^k}{k!} < R_n < \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^k}{k!}.$$

Међутим, суме што фигуришу у првом и трећем члану неједначине (33) нису ништа друго до остаци редова

(34) $$\sum_0^\infty \frac{\left(\frac{z}{e}\right)^k}{k!} = e^{\frac{z}{e}}$$

(35) $$\sum_0^\infty \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^k}{k!} = e^{\frac{z}{2}}.$$

Применом познатог правила да остатак једнога реда $f(z)$ има за вредност

$$\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\omega z),$$

где је

$$0 < \omega < 1$$

налази се да ће остатак реда (34) бити

(36) $$\frac{z^{n+1} e^{\frac{\omega_1 z}{e}}}{(n+1)!\, e^{2(n+1)}},$$

а остатак реда (35)

(37) $$\frac{z^{n+1} e^{\frac{\omega_2 z}{e}}}{(n+1)!\, 2^{2(n+1)}},$$

где су ω_1 и ω_2 два реална броја чије вредности леже између 0 и 1.

Из тога се изводи овај резултат:

За све реалне и позитивне вредности z *биће*

(38) $$\theta(z) = P_n(z) + R_n,$$

где је $\mathrm{P_n}$ *полином* n-*тог степена, дат горњим обрасцем, и где* $\mathrm{R_n}$ *за* $\mathrm{n} \geq 5$ *задовољава двогубу неједначину*

(39) $$\frac{z^{n+1} e^{\frac{\omega_1 z}{e}}}{(n+1)!\, e^{2(n+1)}} < R_n < \frac{z^{n+1} e^{\frac{\omega_2 z}{e}}}{(n+1)!\, 2^{2(n+1)}}.$$

Узевши $n = 5$ биће, дакле,

$$\theta(z) = P_5(z) + R_5,$$

где ће ако се краткоће ради стави да је

$$A_1 = \frac{1}{6!e^{12}} = 0{,}000000008534$$

$$A_2 = \frac{1}{6!2^{12}} = 0{,}000000339084,$$

бити

$$A_1 z^6 e^{\frac{\omega_1 z}{e}} < R_5 < A_2 z^6 e^{\frac{\omega_2 z}{2}}.$$

А пошто је за реалне и позитивне вредности z

$$1 \leq e^{\frac{\omega_1 z}{e}}, \quad e^{\frac{\omega_2 z}{2}} \leq e^{\frac{z}{2}},$$

то се напослетку добија

$$A_1 z^6 < R_5 < A_2 z^6 e^{\frac{z}{2}},$$

а помоћу обрасца

$$\Delta(z) = \frac{\theta(z) - 1}{z}$$

лако се тада налази и одговарајући остатак реда $\Delta(z)$.

III. ПОНАШАЊЕ ФУНКЦИЈА Δ И θ ПРЕМА ТАЧКАМА У БЕСКРАЈНОСТИ

Из основних образаца

$$\Delta(z) = \int_0^1 e^{zu} dt$$

$$\theta(z) = 1 + z\Delta(z),$$

пошто функција u остаје непрестано позитивна за $0 < t < 1$, очевидно је да:

1. кад z бескрајно расте у ма коме правцу са десне стране осовине имагинарних вредности, модули функција Δ и θ бескрајно расту;

2. кад z бескрајно расте у ма коме правцу са леве стране осовине имагинарних вредности, модуо функције Δ тежи нули, а модуо функције θ тежи граници 1.

Према томе, кад z бескрајно расте у правцу позитивне или негативне осовине реалних вредности, функције ће Δ и θ бескрајно расти у позитивном правцу, или ће Δ тежити нули, а θ граници 1, према правцу у коме само z расте.

У овоме другоме случају (кад z расте у негативном правцу) асимтотна је вредност за функцију Δ нула, а за функцију θ јединица. Остаје нам још да потражимо њихове асимтотне вредности за први случај (кад z расте у позитивном правцу).

Проблем се може решити применом познате Laplace-ове теореме која гласи: кад су у једноме интегралу облика

$$J(\kappa) = \int_a^b f(t)\left[\varphi(t)\right]^\kappa dt$$

функције $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрекидне, реалне и позитивне за вредности t између такође реалних интегралних граница a и b, онда ако функција $\varphi(t)$ за једну вредност $t = \lambda$, што се налази између a и b, има један максимум, за велике позитивне вредности κ биће

$$J(\kappa) = A\frac{\left[\varphi(\lambda)\right]^\kappa}{\sqrt{x}}(1+\varepsilon),$$

где је A константа чија је вредност

$$A = f(\lambda)\sqrt{-2\pi\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi''(\lambda)}}$$

(која је увек реална пошто је за $t = \lambda$ функција φ позитивна, а извод φ'' негативан) а ε означује извесну функцију променљиве κ која тежи нули кад x бескрајно расте у позитивном правцу.

Применимо теорему најпре на функцију $\Delta(z)$. У томе је случају

$$f(t) = 1 \qquad \varphi(t) = e^{t\log\frac{1}{t}}$$

$$\lambda = \frac{1}{e} \qquad \kappa = z$$

$$\varphi(\lambda) = e^{\frac{1}{e}} \qquad \varphi''(\lambda) = -e^{1+\frac{1}{e}}$$

према чему је

$$\frac{\left[\varphi(\lambda)\right]^\kappa}{\sqrt{\kappa}} = \frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}} \qquad A = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}.$$

Отуда овај резултат: за довољно велике позитивне вредности z функција $\Delta(z)$ имаће за израз

$$(40) \qquad \Delta(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\,\frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}}(1+\varepsilon),$$

где ε тежи нули кад z бескрајно расте у позитивном правцу. Према томе: *асимптотна вредност функције* $\Delta(z)$ *за бескрајно велике позитивне вредности* z *представљена је изразом*

$$(41) \qquad \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\,\frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}}.$$

Стална релација која постоји између функција Δ и θ тада показује да ће за велике позитивне вредности z функција θ имати за израз

$$(42) \qquad \theta(z) = \sqrt{\frac{2\pi z}{e}}\,e^{\frac{z}{e}}(1+\varepsilon)$$

и да је, према томе, *асимптотна вредност функције* $\theta(z)$ *за бескрајно велике позитивне вредности* z *представљена изразом*

$$(43) \qquad \sqrt{\frac{2\pi z}{e}}\,e^{\frac{z}{e}}.$$

Уочимо сад изводе функција Δ и θ. Из образаца

$$\Delta^{(k)}(z) = \int_0^1 u^k e^{zu}\,dt$$

$$\theta^{(k)}(z) = k\Delta^{(k-1)} + z\Delta^{(k)}$$

очевидно је да:

1. кад z бескрајно расте у ма коме правцу са десне стране осовине имагинарних вредности, модули ових извода бескрајно расту;

2. кад z бескрајно расте у ма коме правцу са леве стране осовине имагинарних вредности, модули тих функција теже нули;

3. кад z бескрајно расте у правцу позитивне или негативне осовине реалних вредности, ови ће изводи или бескрајно расти у позитивном правцу, или тежити нули, према правцу у коме само z расте. У овоме последњем случају асимтотна је вредност тих извода равна нули; остаје још да се помоћу горње Laplace-ове теореме нађе та асимтотна вредност за случај кад z бескрајно расте у позитивном правцу.

Пошто је у томе случају

$$f(t) = \left(t \log \frac{1}{t}\right)^k \qquad \varphi(t) = e^{t \log \frac{1}{t}}$$
$$\lambda = \frac{1}{e} \qquad \kappa = z$$
$$\varphi(\lambda) = e^{\frac{1}{e}} \qquad \varphi''(\lambda) = -e^{1+\frac{1}{e}},$$

то ће бити

$$\frac{[\varphi(\lambda)]^\kappa}{\sqrt{\kappa}} = \frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}} \qquad A = e^{-k}\sqrt{\frac{2\pi}{e}}$$

и према томе: кад z бескрајно расте у позитивном правцу, извод ће $\Delta^{(k)}$ имати за израз

$$\Delta^{(k)}(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{k+\frac{1}{2}}} \frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}} (1+\varepsilon) \tag{44}$$

тако *да ће асимӣтоӣна вредносӣ ӣоīа извода биӣи*

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{k+\frac{1}{2}}} \frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}}. \tag{45}$$

Да бисмо одредили асимтотне вредности функције θ, приметимо да се из обрасца

$$\theta^{(k)} = k\Delta^{(k-1)} + z\Delta^{(k)}$$

и горњих образаца за изводе функције Δ добија да је за велике позитивне вредности z

$$\theta^{(k)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^k}\left(k\sqrt{\frac{e}{z}} + \sqrt{\frac{z}{e}}\right) e^{\frac{z}{e}} (1+\varepsilon)$$

или пошто се израз

$$k\sqrt{\frac{e}{z}}$$

у загради може занемарити

$$\theta^{(k)} = \frac{\sqrt{2\pi z}}{e^{k+\frac{1}{2}}} e^{\frac{z}{e}} (1+\varepsilon) \tag{46}$$

одакле се изводи да *асимӣтоӣна вредносӣ* k-*ӣоī извода функције* $\theta(z)$ *има за израз*

$$(47) \qquad \frac{\sqrt{2\pi z}}{e^{k+\frac{1}{2}}} e^{\frac{z}{e}}.$$

IV. О НУЛАМА ФУНКЦИЈА Δ И θ

Пре свега доказаћемо *да свака од функција* Δ *и* θ *има бескрајно много нула.* То је лако доказати помоћу једне познате Hadamard-ове теореме[2] из теорије целих функција, којој се може дати овај облик:

Ако се за једну функцију облика

$$(48) \qquad P(z)\, e^{G(z)},$$

где је $P(z)$ или какав полином по z или каква константа, а $G(z)$ каква цела функција променљиве z, нађе да јој коефицијенат c_n реда

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

што јој одговара, брже опада са бескрајним растењем ранга n но израз

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^{\alpha}$$

где је α какав позитиван број, тиме је у исто време доказано и то да је функција $G(z)$ полином по z.

Претпоставимо, дакле, да функција $\theta(z)$ нема ниједну нулу, или да има ограничен број нула. Тада увек постоји известан полином $P(z)$ такав да количник

$$\frac{\theta(z)}{P(z)}$$

представља једну целу функцију променљиве z која не постаје равна нули ни за коју коначну вредност z и која се према томе може написати у облику

$$\frac{\theta(z)}{P(z)} = e^{G(z)},$$

[2] Hadamard: *Etude sur les propriètés des fonctions entières* etc. (Journal de math. pures et appliquées 1893).

где је $G(z)$ цела функција променљиве z. Тада би се, дакле, сама функција $\theta(z)$ могла написати у облику

$$\theta(z)=P(z)e^{G(z)},$$

а пошто за коефицијенат

$$C_n = \frac{1}{n^n}$$

функције $\theta(z)$ важи неједначина

$$C_n < \frac{1}{n!},$$

горња Hadamard-ова теорема довела би до тога резултата да је $G(z)$ полином по z, што очевидно не може бити и чиме је доказано горње тврђење о бескрајности броја нула функције $\theta(z)$. Неједначина, пак,

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{n!}$$

тада на исти начин показује да и функција $\Delta(z)$ има бескрајно много нула. А пошто интегрални елеменат

$$e^{zu}dt$$

у одређеном интегралу, којим је изражена функција Δ, остаје за $0 < t < 1$ позитиван за све реалне било позитивне, било негативне вредности z, очевидно је да *функција* Δ *не може имати ниједну реалну нулу.*

Али се може ићи још даље: може се доказати *да се ниједна од тих бескрајно многих нула функције не налази у оној области у равни променљиве* $z = x + yi$ *што се налази између двеју правих*

$$y = -\pi e, \quad y = \pi e.$$

Јер из обрасца

$$\Delta(x + yi) = \int_0^1 e^{xu} \cos uy\, dt + i\int_0^1 e^{xu} \sin uy\, dt$$

види се да ће вредност $z = x + yi$ само онда бити нула функције $\Delta(z)$ ако је у једно исто време

$$(49) \qquad \int_0^1 e^{xu} \cos uy\, dt = 0$$

$$(50) \qquad \int_0^1 e^{xu} \sin uy\, dt = 0.$$

Међутим, услов (49) немогућно је задовољити ако је

(51) $$-\pi < uy < \pi$$

пошто је тада интегрални елеменат непрестано позитиван. Услов, пак, (51) биће очевидно задовољен ако је

$$-\pi < My < \pi,$$

где M означује највећу вредност функције u у границама интеграције, а пошто је

$$M = \frac{1}{e},$$

то се види да ће услов (51) бити задовољен ако је

$$-\pi e < y < \pi e$$

чиме је доказано горње тврђење.

Приметимо, напослетку, да је могућно оријентисати се унеколико и о закону по коме расту модули ових бескрајно многих нула са растењем њиховога ранга. За експоненцијалну функцију нпр.

$$1 - e^z,$$

чије су нуле

$$\alpha_n = 2n\pi i,$$

модуо n-те нуле расте истом брзином којом и сам њен ранг n. За функцију Δ лако је доказати да *модуо њене* n-*ше нуле не расше сйорије од самоīа ранīа* n. То излази непосредно из познате теореме Hadamard-а према којој ако коефицијенат c_n једне целе функције

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

при бескрајном растењу ранга n, опада брже од каквога израза

$$[\varphi(n)]^{-n}$$

нула n-тога ранга такве функције има свој модуо већи од вредности

$$(1-\varepsilon)\varphi(n),$$

где ε тежи нули кад n бескрајно расте. Пошто коефицијенат

$$c_n = (n+1)^{-n-1}$$

функције Δ опада брже него израз

$$(n+1)^{-n},$$

за модуо њене n-те нуле α_n важиће неједначина

$$|\alpha_n| > (1+\varepsilon)(n+1)$$

која показује да $|\alpha_n|$ одиста не опада спорије од n.

Из свега се овога види да *функција* $\Delta(z)$ *има бескрајно много нула које су све имагинарне и налазе се у спољној области правих* $y = -\pi e$ *и* $y = \pi e$ *у равни променљиве* $z = x + yi$; *осим тога, модуо нуле* n-*тога ранга расте истом или већом брзином но сам ранг* n.

На сличан је начин јасно, према изразу

$$\Delta^{(k)}(z) = \int_0^1 u^k e^{zu} dt$$

и коефицијенту

$$B_n = \frac{(n+k)!}{n!(n+k+1)^{n+k+1}}$$

реда

$$\Delta^{(k)}(z) = \sum_0^\infty B_n z^n$$

који, према неједначини

$$(n+k)! < (n+k+1)^{n+k+1}$$

очевидно опада брже са растењем ранга n но израз $\frac{1}{n!}$, да сви ови резултати, нађени за нуле функције $\Delta(z)$, вреде и за нуле ма кога њенога извода: *све су оне имагинарне и бескрајно многобројне; све се налазе у спољној области правих* $y = -\pi e$ *и* $y = \pi e$ *и модули им расту истом брзином као* n *или брже.*

Проучимо сад нуле функције $\theta(z)$, за које је напред већ показано да их има бескрајно много. Модули тих нула очевидно не могу расти спорије са растењем њиховог ранга: то је јасно из онога што је казано о нулама функције $\Delta(z)$. Ми ћемо доказати да *међу овим нулама има их две које су реалне и негативне, док су остале све имагинарне.*

Пре свега, функција

$$\psi(z) = z\Delta(z) = \int_0^1 ze^{zu} dt \tag{52}$$

има ове очевидне особине:

1. за време док z расте у позитивном правцу од 0 до ∞, функција $\psi(z)$ је непрестано позитивна, растући непрестано у позитивном правцу од 0 до ∞;

2. за време док z расте у негативном правцу од 0 до $-\infty$, функција је $\psi(z)$ непрестано негативна, почињући најпре да опада док не достигне један негативан минимум $-N$, после кога почиње расти, тежећи при том нули као граничној вредности.

За саму вредност N може се доказати *да је већа од јединице*. Јер ако се стави

$$z = -x$$

тако да негативним вредностима z одговарају позитивне вредности x, биће за све негативне вредности z

$$\psi(z) = -x\int_0^1 e^{-xu}dt, \tag{53}$$

а пошто је у границама интеграције

$$0 < u < \frac{1}{e},$$

то ће за све позитивне вредности x вредност e^{-xu} бити позитивна и већа од $e^{-\frac{x}{e}}$ и према томе

$$\int_0^1 e^{-xu}dt > \int_0^1 e^{-\frac{x}{e}}dt = e^{-\frac{x}{e}}$$

или

$$-\psi(z) > xe^{-\frac{x}{e}}. \tag{54}$$

Према томе, максимална апсолутна вредност функције $\psi(z)$ за негативне вредности z биће већа од максималне вредности P коју достиже функција

$$xe^{-\frac{x}{e}}$$

за позитивне вредности x. Елементарни рачун показује, међутим, да ова функција достиже свој максимум за $x = e$ и да је сама вредност тога максимума $P = 1$, према чему је и $N > 1$, као што се и хтело доказати.

Ова дискусија показује, уосталом, и то да крива линија

$$y = x\,\Delta(x) \tag{55}$$

за негативне вредности x, имајући осовину $0x$ као асимтоту за $x = -\infty$, секући је у тачки $(x = 0, y = 0)$, има ту особину да цела грана криве

$$y = -xe^{\frac{x}{e}}$$

са леве стране осовине $0y$ лежи између ње и осовине $0x$. Права $y = -1$ сече, дакле, криву (55) у двема тачкама, пошто је минимум ове криве по апсолутној вредности већи од 1, и овим тачкама одговарају негативне апсцисе, што значи да функција

$$\theta(x) = 1 + x\,\Delta(x),$$

чије су реалне нуле апсцисе тих пресечних тачака, има одиста две реалне нуле, које су негативне.

Из свега тога изводи се овај резултат: *функција* $\theta(z)$ *има две реалне, негативне, нуле и бескрајно много имагинарних нула чији модули не расту спорије од њиховог ранга.*

А из онога што је горе казано за начин варијације функције $z\,\Delta(z)$ јасно је и то *да извод* $\theta'(z)$ *као извод функције*

$$1 + z\,\Delta(z),$$

има свега једну реалну, и то негативну нулу; остале су нуле, у неограниченом броју, све имагинарне.

Додатак. Накнадним приближним рачунањем нађени су ови прецизнији бројни подаци:

1. од напред нађених двеју реалних негативних нула функције $\theta(z)$ једна лежи између

$$-30 \quad \text{и} \quad -40,$$

а друга између

$$-1{,}405 \quad \text{и} \quad -1{,}406;$$

2. јединa реална нула нула извода $\theta'(z)$ лежи између

$$-5{,}718 \quad \text{и} \quad -5{,}719;$$

3. вредност броја N, који са промењеним знаком представља вредност јединога минимума функције

$$z\,\Delta(z),$$

лежи између

$$1{,}687725 \quad \text{и} \quad 1{,}687739.$$

V. ОБЛИЦИ КРИВИХ ЛИНИЈА

$$y = \Delta(x) \quad \text{и} \quad y = \theta(x)$$

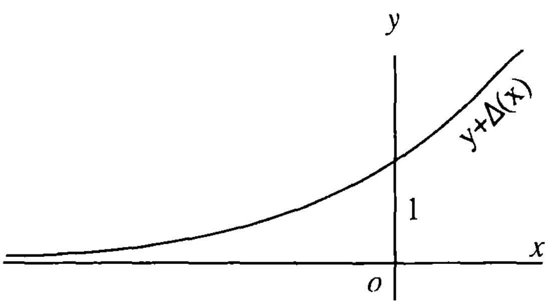
Довде нађене појединости функција Δ и θ дају могућности да се конструишу криве линије

(A) $$y = \Delta(x)$$

(B) $$y = \theta(x)$$

било само овлашно, било са прецизношћу која се буде тражила.

Крива линија (A), представљена сликом 1, има осовину $0x$ као асимтоту за $x = -\infty$; док x расте од $-\infty$ до $+\infty$ она непрекидно расте од 0 до ∞,



Сл. 1

немајући при том ни максимума ни минимума, ни превојних тачака и секући осовину $0y$ у тачки $y = 1$. Крива линија

$$y = e^{\frac{x}{e}}$$

има такав положај према кривој (A) да је сече у тачки $y = 1$ и да је испод ње са леве стране осовине $0y$, а изнад ње са десне стране те осовине. Крива, пак,

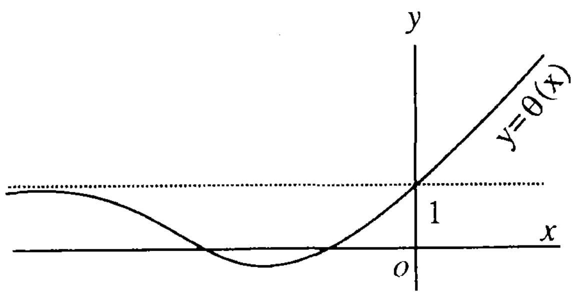
$$y = \frac{e}{x}(e^{\frac{x}{e}} - 1)$$

за позитивне вредности x налази се испод криве (A). Напослетку, крива линија

$$y = \sqrt{\frac{2\pi}{ex}}\, e^{\frac{x}{e}}$$

игра, према кривој (A), улогу асимтотне криве за врло велике позитивне вредности x.

Крива (B), представљена сликом 2, има праву $y = 1$ као асимтоту за $x = -\infty$; док x расте од $-\infty$ до $+\infty$, крива прво опада, сече осовину $0x$, постаје негативна, достиже један негативан минимум $1-N$ [где је $-N$ минимум функције $z\Delta(z)$] почиње расти, сече понова осовину $0x$, постаје позитивна и од тада непрекидно расте до бескрајности, секући осовину $0y$ у тачки $y = 1$. Крива линија



Сл. 2.

$$y = 1 + xe^{\frac{x}{e}}$$

има такав положај према кривој (B), да је сече у тачки ($x = 0, y = 1$) и да је изнад ње са леве стране осовине $0y$, а испод ње са десне стране те осовине. Улогу асимтотне криве за врло велике позитивне вредности x игра крива линија

$$y = \sqrt{\frac{2\pi x}{e}}\, e^{\frac{x}{e}}.$$

Из облика ових кривих линија може се имати података и о реалним коренима једначина

$$\Delta(z) + a = 0 \tag{56}$$

$$\theta(z) + a = 0, \tag{57}$$

где је a ма какав реалан број. Пошто ти корени нису ништа друго до апсцисе пресечних тачака кривих (A) и (B) са правом $y = -a$, то се лако изводе ови закључци:

1. једначина (56) нема реалних корена ако је $a \geq 0$; она увек има један реалан корен кад је $a < 0$ и тај је корен прост и позитиван или

негативан или раван нули према томе да ли је $-a > 1$ или $-a < 1$ или $-a = 1$;

2. за једначину (57) треба разликовати ове случајеве:

α) ако је $a > N - 1 > 0$, нема реалних корена;

β) ако је $a = N - 1 > 0$, има један реалан корен и он је двострук и негативан;

γ) ако је $0 < a < N - 1$, има два реална корена, оба проста и негативна;

δ) ако је $-1 < a < 0$, има два реална корена, оба проста и негативна;

λ) ако је $a = -1$, има један реалан прост корен $z = 0$;

μ) ако је $a < -1$, има један реалан корен и он је прост и позитиван.

Обе једначине (56) и (57) имају, поред тога, бескрајно много имагинарних корена чији модули расту бар истом брзином којом расте и њихов ранг.

VI. ЈЕДАН ПОГЛЕД НА ПРИМЕНЕ ТРАНСЦЕНДЕНАТА Δ И θ

Разумљиво је да се може формирати бескрајан број специјалнијих проблема интегралног рачуна, чије би решење имало за аналитички израз функције $\Delta(z)$, $\theta(z)$ и њихове комбинације.

На ове се функције, пре свега, своди велики број одређених интеграла. На њих се наилази и при интеграцији извесних типова диференцијалних једначина, или при израчунавању извесних комбинација њихових интеграла. У томе погледу могу се, као пример, навести ових неколико случајева:

I. Свака линеарна диференцијална једначина

$$f_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + f_n(x)y = 0 \tag{58}$$

ма кога реда она била, која се трансформацијом

$$x \log x = X$$

своди на једначину са сталним коефицијентима, има ту особину *да се површина од* $\mathrm{x} = 0$ *до* $\mathrm{x} = 1$, *ограничена осовином* $0\mathrm{x}$ *и луком ма кога њенога интеграла, израчунава помоћу трансценденте* $\theta(\mathrm{x})$ *и њених извода.*

Јер ако је

$$A_0\frac{d^n y}{dX^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dX^{n-1}} + \ldots + A_n y = 0 \tag{59}$$

тако трансформисана једначина, ма који ће њен интеграл бити збир чланова облика

$$Ce^{rX} \quad \text{и} \quad CX^k e^{rX},$$

где је C интеграциона константа, k цео позитиван број, а r корен карактеристичне алгебарске једначине

$$A_0 r^n + A_1 r^{n-1} + \ldots + A_n = 0. \tag{60}$$

Одговарајући интеграл саме једначине (58) биће, дакле, збир чланова облика

$$Ce^{rx\log\frac{1}{x}} \quad \text{и} \quad C\left(x\log\frac{1}{x}\right)^k e^{-rx\log\frac{1}{x}},$$

што значи да ће површина

$$P = \int_0^1 y dx$$

бити збир чланова облика

$$C\Delta(-r) \quad \text{и} \quad C\Delta^{(k)}(-r)$$

који се лако изражавају помоћу саме трансценденте θ и њених извода.

Тако нпр. диференцијална једначина првога реда

$$\frac{dy}{dx} + (a + b\log x)y = 0,$$

где су a и b сталне количине и која се претходном трансформацијом

$$x = \lambda\xi, \quad \lambda = e^{\frac{b-a}{a}}$$

своди на горњи тип, има ту особину да површина од $x = 0$ до $x = \lambda$, ограничена осовином $0x$ и луком ма кога интеграла те једначине, има за израз

$$C\Delta(b\lambda),$$

где је C интеграциона константа што одговара посматраноме интегралу.

II. Целокупна површина са десне стране осовине $0y$, ограничена осовином $0x$ и луком ма кога интеграла линеарне диференцијалне једначине (58), ма кога реда она била, а која се сменом

$$xe^{-x} = X, \quad y = e^{-x}Y$$

своди на једначину са сталним коефицијентима

$$B_0 \frac{d^nY}{dX^n} + B_1 \frac{d^{n-1}Y}{dX^{n-1}} + \ldots + B_nY = 0, \tag{61}$$

увек је коначна и израчунава се помоћу трансценденте $\theta(z)$ *и њених извода.*

Јер, ако је (61) тако трансформисана једначина, ма који интеграл Y биће збир чланова облика

$$Ce^{rX} = Ce^{rxe^{-x}}$$

и

$$CX^ke^{rX} = C(xe^{-x})^k e^{rxe^{-x}},$$

што значи да ће површина

$$\int_0^\infty ydx = \int_0^\infty e^{-x}Ydx$$

бити збир чланова облика

$$C\Delta(r) \quad \text{и} \quad C\Delta^{(k)}(r),$$

па, дакле, је коначна и своди се на извесну комбинацију трансценденте $\theta(z)$ и њених извода.

III. Систем симултаних једначина

$$\begin{aligned} t\frac{dx}{dt} + p &= 0 \\ \frac{dy}{dt} + nxy &= 0 \\ \frac{dz}{dt} + my &= 0 \end{aligned} \tag{62}$$

(где су m, n, p сталне количине), чији се систем интеграла може написати у облику

$$\begin{aligned} x &= C_5 - p\log t \\ y &= C_3 e^{-npC_1\xi\log\frac{1}{\xi}} \\ z &= C_3 + C_1C_2\int_0^\xi e^{-npC_1\xi\log\frac{1}{\xi}}d\xi, \end{aligned} \tag{63}$$

где је

$$\xi = \frac{t}{C_1}$$

и где између интеграционих констаната постоје релације

$$C_5 = p \log \frac{C_1}{e}$$

$$C_4 = -\frac{C_2}{mC_1}$$

има ову интересантну особину: *кад се у систему интеграла* (63) *смени* $t = C_1$, *оставивши све остале количине, што у њему фигуришу, непромењене, систем* (63) *постаје*

$$x = -p, \quad y = -\frac{C_2}{mC_1}$$

$$z = C_3 + C_2 \Delta(-npC_1).$$

IV. Лако је било формирати и таквих проблема математичке физике, а нарочито проблема о кретању електрицитета, чије би се решење сводило на комбинације трансцендената Δ или θ и њихових извода. Не би нпр. било тешко одредити закон по коме би се са временом t имао мењати електрични отпор R и коефицијенат аутоиндукције L, па да закон варијације интензитета i екстраструје, што постаје наглим нестанком електромоторне силе, одређен познатом диференцијалном једначином

$$\frac{d(Li)}{dt} + Ri = 0$$

или

$$\frac{di}{dt} + \frac{R + \frac{dL}{dt}}{L} i = 0,$$

буде изражен функцијом облика

$$Ce^{\alpha t \log \frac{1}{t}},$$

где је α извесна комбинација експерименталних констаната, тако да количина електрицитета

$$Q = \int_0^1 i dt$$

што одговара размаку времена од $t = 0$ до $t = 1$ буде изражена функцијом

$$Q = C\Delta(-\alpha) = C\frac{1-\theta(-\alpha)}{\alpha}.$$

*

Али оно што даје праве важности дубљем прочавању трансцендената Δ и θ јесу извесна питања од много општијег значаја, у којима се јављају ове трансценденте као *елеменши компарације* за читаве велике, опште, класе функција.Ових неколико општијих питања такве врсте истаћи ће на видик улогу која је у томе погледу одређена овим трансцендентама у математичкој анализи.

I. У теорији целих фуннкција $f(z)$ нултог рода а каноничног типа познато је[3] да почевши од једнога извеснога ранга n коефицијенат a_n реда

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

опада брже са растењем самога ранга n него функција

$$\left(\frac{e}{n}\right)^n$$

тако да је почевши од једне *довољно велике* вредности n

$$|a_n| < \frac{e^n}{n^n}.$$

Али могућно је извести једну сличну неједначину *која ће вредиши за све йозишивне вредносши* n. Тако, означивши са

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

нуле функција $f(z)$ и претпоставивши да је ова ослобођена нуле $z = 0$ у случају кад ова постоји, биће разлагањем на примарне факторе

$$f(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right). \tag{64}$$

Са друге стране, ако се са r означи модуо промењљиве z, а са ρ_k модуо нуле α_k, биће

[3] В. нпр. E. Borel: *Leçons sur les fonctions entières*, p. 62.

$$\left|1-\frac{z}{\alpha_k}\right| < 1+\frac{r}{\rho_k}$$

и према томе

$$\left|\left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\ldots\right| < \left(1+\frac{r}{\rho_1}\right)\left(1+\frac{r}{\rho_2}\right)\ldots$$

тако да је за ма какву вредност промењљиве z

$$|f(z)| < \Pi\left(1+\frac{r}{\rho_k}\right). \tag{65}$$

Међутим, према познатој неједначини за геометријску и аритметичку средину позитивних бројева према којој прва никад не може бити већа од друге, лако се налази да је

$$\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{r}{\rho_m}\right) < \lim\left[1+\frac{r}{m}\sum_1^m \frac{1}{\rho_m}\right]^m$$

за $m=\infty$, из чега се, у вези са неједначином (65) и једначином (64), непосредно изводи да ма каква била реална и позитивна вредност r, максимални модуо $M(r)$ функције $f(z)$ дуж круга полупречника r увек је мањи од вредности

$$e^{\mu r},$$

где је μ реалан и позитиван број, чија је вредност

$$\mu = \sum_1^{\infty}\frac{1}{\rho_k}. \tag{66}$$

Позната општа неједначина из теорије целих функција

$$|a_n| < \frac{M(r)}{r^n}$$

своди се, дакле, у нашем случају на неједначину

$$|a_n| < \frac{e^{\mu r}}{r^n} \tag{67}$$

која важи за све позитивне вредности r. Тражећи, пак, ону специјалну вредност r за коју ће десна страна неједначине (67) имати најмању могућну вредност, налази се да ће то бити за

$$r = \frac{n}{\mu}$$

и да је сама вредност тога минимума

$$\left(\frac{\mu e}{n}\right)^n.$$

Према томе за све позитивне n биће

$$|a_n| < \frac{(\mu e)^n}{n^n} \tag{68}$$

из чега се непосредно изводи овај резултат:

Модуо једне ма које целе функције f(z) *нултог рода на ма коме кругу описаном око* z = 0 *у равни променљиве* z, *увек је мањи од вредности функције* $\theta(\mu e r)$, *где је* r *полупречник круга а* μ *количина независна од* r *и чија је вредност дата обрасцем* (66).

Наша трансцендента $\theta(z)$ игра, дакле, према целокупној класи целих функција нултог рода улогу једне врсте граничне функције, дајући границе које не може за дату вредност r прећи модуо ниједне од таквих функција. И што је овде од нарочите важности, та је граница *прецизнија* од раније нађене границе $e^{\mu r}$, пошто је, као што је напред показано, за реалне и позитивне вредности z

$$\theta(z) < e^{\frac{z}{e}},$$

па, дакле, и

$$\theta(\mu e r) < e^{\mu r}.$$

II. Постоји бескрајно много функција

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{69}$$

са позитивним коефицијентима, који имају ту особину да полином састављен од ма коликога броја првих чланова реда (69) *има своје корене реалне.*[4]

Означивши са

[4] У ранијој својој расправи (Bulletin de la Sociètè mathem. de France t. 34. p. 165–177), као и у једној новој расправи, која ће ускоро бити штампана, ја сам развио потпунију теорију таквих функција $F(z)$. Овде су наведени само они резултати који непосредно истичу улогу трансцендената θ (z) і Δ (z) у тој теорији, што и јесте циљ ових разматрања.

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

апсолутне вредности изврнутих вредности корена (који су очевидно сви негативни) алгебарске једначине

$$F_n(x) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0,$$

биће

$$\frac{a_n}{a_0} = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Пошто су све количине ξ_n реалне и позитивне, биће

$$\sqrt[n]{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n} \leq \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n),$$

према чему је

$$a_n \leq \frac{a_0}{n}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n$$

што значи да коефицијенти једне ма које функције $F(z)$ никад не могу бити већи од одговарајућих коефицијената реда

$$a_0\left[1 + \frac{1}{1^1}\left(\frac{a_1 z}{a_0}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{a_1 z}{a_0}\right)^2 + \ldots\right],$$

а пошто овај ред није ништа друго до онај који се добија развијањем израза

$$a_0 \theta\left(\frac{a_1 z}{a_0}\right) \tag{70}$$

у ред уређен по степенима промењиве z, то је тиме доказан овај резултат:

За сваку реалну или имагинарну вредност z *модуо једне ма које функције* F(z) *увек је мањи од модула функције* (70) *пошто се у овој* z *смени својим модулом.*

Из тога је већ могућно видети улогу коју може имати трансцендента $\theta(z)$ у теорији функција $F(z)$. Важност те улоге може се оценити и по томе што се велики број особина функција $F(z)$ може извести применом напред проучених особина трансценденте $\theta(z)$, која на тај начин у овој теорији налази једно пространо поље за своје примене.

Тако нпр. упоређивањем коефицијената a_n са одговарајућим коефицијентима реда (70) изводи се непосредно *да су све функције* F(z) *холоморфне у целој равни йромењиве количине* z *и да им род може бийи само* 0 *или* 1.

А пошто је према особинама функције $\theta(z)$ за реалне и позитивне вредности z

$$\theta\left(\frac{a_1 z}{a_0}\right) < e^{\frac{a_1 z}{e a_0}},$$

то се поређењем са функцијом $F(z)$, а према горњем основном резултату, долази до овога резлтата:

За сваку реалну или имаīинарну вредносӣ z *модуо једне ма које функције* F(z) *мањи је од модула функције*

$$a_0 e^{\frac{a_1 z}{e a_0}}.$$

Тако исто, пошто при бескрајном растењу реалне променљиве количине z у позитивном правцу мора и асимтотна вредност једне ма које функције $F(z)$ бити мања од асимтотне вредности функције

$$a_0 \theta\left(\frac{a_1 z_0}{a_0}\right),$$

а међу тим асимтотна је вредност саме функције $\theta(z)$, као што је напред нађено

$$\sqrt{\frac{2\pi z}{e}}\, e^{\frac{z}{e}},$$

то се долази до овога резултата:

Асимптотна вредност једне ма које функције $F(z)$ при бескрајном растењу променљиве z у правцу реалних позитивних вредности увек је мања од

$$a_0 \sqrt{\frac{2\pi a_1 z}{e a_0}}\, e^{\frac{a_1 z}{e a_0}}.$$

Могао би се навести још велики број резултата ове врсте. Међутим, већ и из ових, који су наведени, може се оценити важност улоге трансценденте $\theta(z)$ у општој теорији функција $F(z)$ према којима она, као и у општој теорији целих функција нултог рода, игра улогу једне врсте граничне функције.

III. Навешћу, напослетку, још један општији резултат у коме трансцендента $\theta(z)$ игра улогу сличну оној истакнутој под I и II.

Уочимо једну, ма коју, трансцендентну целу функцију $\psi(z)$ која би имала ту особину да су јој нуле $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ по својим модулима *веће* од модула изврнутих вредности одговарајућих коефицијената $a_1, a_2, a_3, \ldots$ какве целе функције

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

нултог рода а каноничног типа, тако да уопште буде

$$|\alpha_n| < \left|\frac{1}{a_{n-1}}\right|.$$

Пошто тада ред

$$\mu = \frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{|\alpha_2|} + \frac{1}{|\alpha_3|} + \ldots$$

има све своје чланове *мање* од одговарајућих чланова конвергентнога реда

$$S = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots,$$

то ће и он сам бити конвергентан, што према познатом правилу из теорије целих функција показује да ће функција $\psi(z)$ бити и сама цела функција нултог рода. А кад је то случај, према једном напред доказаном резултату биће за све вредности z

$$|\psi(z)| < e^{r\mu},$$

где је вредност μ дата обрасцем

$$\mu = \sum_0^\infty \frac{1}{|\alpha_i|}$$

и где је $r = |z|$. Са друге стране, пошто је $f(z)$ цела функција нултога рода, биће према једноме, такође напред доказаном резултату

$$|a_n| < \frac{(\lambda e)^n}{n^n},$$

где λ има вредност збира модула изврнутих вредности нула функције $f(z)$, тако да је

$$S < \theta(\lambda e)$$

и онда ће утолико пре бити

$$\mu < \theta(\lambda e)$$

пошто је очевидно

$$\mu < S.$$

Отуда овај резултат:

Модуо ма које трансценденте целе функције чије су нуле по својим модулима веће од модула изврнутих вредности одговарајућих коефицијената какве целе функције f(z) *нултог рода увек је мањи од функције*

$$e^{r\theta(\lambda e)},$$

где је $r = |z|$ *а* λ *означује константу, независну од* r, *чија је вредност равна збиру модула изврнутих вредности нула функције* f(z).

Из тога се, користећи се једном напред изведеном неједначином за функцију $\theta(z)$, може извести још једна неједначина у којој фигуришу обичне експоненцијалне функције. Наиме, напред је доказано да је за реалне и позитивне вредности z увек

$$\theta(z) < 1 + ze^{\frac{z}{e}}.$$

Према томе, *модуо горње функције* $\psi(z)$ *биће, за ма какву вредност* z, *мањи од вредности* $e^{r\gamma}$, *где је* γ *константа независна од* r *и чија је вредност*

$$\gamma = 1 + \lambda e^{\lambda+1}.$$

*

Из ових резултата држим да се може увидети улога коју би могла имати трансцендента $\theta(z)$ као елеменат компарације у математичкој анализи и интерес који би се имао од потпунијег познавања особина овога досад неиспитаног аналитичког елемента.

ПОНАШАЊЕ ЈЕДНЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЕ ЦЕЛЕ ФУНКЦИЈЕ*

Функција

$$\theta(z)=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{27}+\ldots=\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^n}$$

се јавља у многим проблемима анализе, било као елемент свођења у интегралном рачуну, било као поредбени елемент за функције које се проучавају.

Тако је она елемент свођења за многобројне одређене интеграле. Површина, на пример, скупа ограниченог x-осом одговарајућим ординатама у $x=0$ и $x=1$ и луком ма ког интеграла линеарне једначине

$$f_0(x)\frac{d^k y}{dx^k}+f_1(x)\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}+\ldots+f_{k-1}(x)\frac{dy}{dx}+f_k(x)y=0$$

сводљиве сменом

$$x\log x=t$$

на линеарну једначину са константним коефицијентима (E), рачуна се помоћу функције $\theta(z)$, њених извода и корена карактеристичне једначине придружене једначини (E).

Улога функције $\theta(z)$ као поредбеног елемента показује се, на пример, у следећим тврђењима:

1. Модуо једне целе функције $f(z)$ нултог рода и канонског типа је увек мањи од вредности израза $\theta(\mu e r)$, где је $r=|z|$ а μ је позитивна реална константа чија је вредност једнака збиру реципрочних вредности модула нула функције $f(z)$.

---

* Наслов оригинала *Allure d'une transcendante entière*, Comptes rendus, Paris, 1912, t. CLIV, 8, pp. 499–501.

2. Ако је $\varphi(z)$ једна функција са нулама чији су модули већи од модула реципрочних вредности коефицијената истог ранга једне целе функције нултог рода и канонског типа, модуо функције $\varphi(z)$ је увек мањи од вредности

$$e^{r\theta(\lambda e)},$$

где је $r = |z|$ а λ је позитивна реална константа чија је вредност једнака збиру модула реципрочних вредности нула функције $\varphi(z)$.

Слична тврђења се доказују уобичајеним методама теорије целих функција; овде се наводе само да би се дао пример улоге функције $\theta(z)$ као поредбеног елемента.

Функција $\theta(z)$ је цела функција променљиве z; овде ћу назначити неке карактеристике њеног понашања. Пре свега, она се може изразити помоћу одређеног интеграла

$$\theta(z) = \int_0^1 (1 + ze^{zu})\,dt \qquad (u = -t\log t), \tag{1}$$

и њени узастопни изводи помоћу интеграла

$$\frac{d^k\theta}{dz^k} = \int_0^1 u^{k-1}(k + zu)e^{zu}\,dt. \tag{2}$$

Изрази (1) и (2) воде непосредно до неједнакости

$$|\theta(z)| < 1 + re^{\frac{r}{e}},$$

$$\left|\frac{d^k\theta}{dz^k}\right| < k!\left[\frac{1}{k^k} + \frac{r}{(k+1)^{k+1}}\right]e^{\frac{r}{e}},$$

или још

$$\left|\frac{d^k\theta}{dz^k}\right| < (ke + r)\frac{\theta(r) - 1}{re^k},$$

где је $r = |z|$; тако има и других неједнакости за $\theta(z+\alpha)$, $\theta^k(z+\alpha)$ или за горње границе функције $\theta(z)$.

Кад z тежи бесконачности у било ком правцу десно од имагинарне осе, модуо функције $\theta(z)$, као и модуо било ког њеног извода, повећава се бесконачно, за правце лево од ове осе, модуо функције $\theta(z)$ тежи ка 1, а модуо било ког њеног извода ка нули.

Кад се z бесконачно повећава у правцу позитивних реалних вредности, $\theta(z)$ има као асимптотску вредност израз

$$\lambda e^{\frac{z}{e}}\sqrt{z} \quad \text{са} \quad \lambda = \sqrt{\frac{2\pi}{e}},$$

а асимптотска вредност извода $\theta^{(k)}(z)$ ће бити

$$\mu e^{\frac{z}{e}}\sqrt{z} \quad \text{са} \quad \mu = \sqrt{\frac{2\pi}{e^{2k+1}}}.$$

Функција $\theta(z)$ има две реалне нуле, обе су негативне и налазе се, једна између –1,405 и –1,406, а друга између –39 и –40; она има, с друге стране, бесконачно много имагинарних нула чији модули расту бар толико брзо као њихов ранг.

Крива $y = \theta(x)$ има праву $y = 1$ као асимптоту за $x = -\infty$; кад x расте од $-\infty$ до $+\infty$, крива почиње опадањем, сече x-осу, достиже негативан минимум $y = -0,68772\ldots$, за једну негативну вредност променљиве x, од које почиње да расте, сече поново x-осу, затим y-осу у тачки $y = 1$ и расте бесконачно тежећи асимптотски кривој

$$y = \lambda\sqrt{x}e^{\frac{x}{e}}.$$

О ТРАНСЦЕНДЕНТНИМ ЦЕЛИМ ФУНКЦИЈАМА КОЈЕ УОПШТАВАЈУ ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ И ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ*

Ако се у изразу

$$\alpha_n = \frac{\int_a^b u r^n dt}{\int_a^b u dt} \tag{1}$$

замене u и r различитим функцијама променљиве t, реалним, коначним и непрекидним за t из коначног реалног интервала (a, b), добија се неограничен број бесконачних низова

$$1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots .$$

Редови

$$\begin{cases} I(x) = 1 + \dfrac{\alpha_1}{1!} x + \dfrac{\alpha_2}{2!} x^2 + \ldots, \\ I_1(x) = 1 - \dfrac{\alpha_2}{2!} x^2 + \dfrac{\alpha_4}{4!} x^4 - \ldots, \\ I_2(x) = \dfrac{\alpha_1}{1!} x - \dfrac{\alpha_3}{3!} x^3 + \dfrac{\alpha_5}{5!} x^5 - \ldots, \end{cases} \tag{2}$$

повезани односом

$$I(xi) = I_1(x) + iI_2(x), \tag{3}$$

који се, у посебном случају r = const., своде на елементарне функције

---

* Наслов оригинала *Sur des trenscendantes entieres généraeisant les fonctions exponentielles et trigonométriques*, Compies rendus, Paris, 1913, t. CLVI, 16, pp. 1213–1215.

$$I(x) = e^{rx}, \quad I_1(x) = \cos rx, \quad I_2(x) = \sin rx$$

представљају, кад је r променљива, разне трансцендентне функције *које могу, по више веза, бити посматране као уопштења ових функција.*

Најпре, одређени интеграли

$$(4) \quad \begin{cases} I(x) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_a^b ue^{rx}dt, & L = \displaystyle\int_a^b u\,dt, \\ I_1(x) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_a^b u\cos rx dt, & I_2(x) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_a^b u\sin rx dt, \end{cases}$$

помоћу којих се могу изразити I, I_1, I_2, износе на видело следеће чињенице:

1. То су *целе* функције променљиве x, рода *нула* или *један.*

2. Функција $I(x)$ има само ограничен број реалних нула и ограничен број максимума и минимума. Laguerre-ова тврђења о интегралима облика

$$\int_a^b ue^{-xt}dt$$

дају начин да се утврди горња граница ових бројева. Кад се x повећава бесконачно, и $I(x)$ се повећава бесконачно или пак тежи нули, зависно од аргумента променљиве x. Све ово важи и за изводе било ког реда функције $I(x)$ који су увек функције исте врсте.

3. Ове функције $I_1(x)$ и $I_2(x)$ су *осцилирајуће* за реално x, са неограниченим бројем осцилација, имају неограничен број реалних нула, позитивних и негативних, и ограничен број чисто имагинарних нула. Оне не премашају, по апсолутној вредности, извесну коначну границу ни за једну реалну вредност, коначну или бесконачну, променљиве x и теже нули кад се x повећава бесконачно било преко позитивних, било преко негативних вредности. Све ово важи за изводе било ког реда функција I_1 и I_2, које су увек функције ове исте врсте.

4. Дубље аналогије са функцијама e^{rx}, $\cos rx$, $\sin rx$ појављују се у случају кад је функција u непромењеног знака између a и b. У овом случају, означавајући са M и N највећу и најмању вредност коју узима функција r у интервалу (a, b), изрази (3) износе на видело следеће чињенице:

а. Функција $I(x)$ нема ниједну реалну нулу, нити имагинарну нулу са коефицијентом уз i садржаним између $-\dfrac{2\pi}{M}$ и $\dfrac{2\pi}{M}$. Ако је, истовремено r непромењеног знака у интервалу (a, b), реална крива $y = I(x)$ се мења непрестано у једном истом смеру кад се x мења од $-\infty$ до $+\infty$ тако да нема максимума, минимума ни превојних тачака, што важи и за било који извод функције $I(x)$. Све нуле полинома који се добија заустављањем реда $I(x)$ на било ком његовом члану парног степена су имагинарне.

б. Вредност израза

$$\frac{1}{x}\log I(x)$$

је коначна и садржана између M и N за сваку реалну вредност променљиве x.

в. Означавајући уопште са λ функцију променљиве x чије су вредности за сваку реалну вредност x-а, коначне и налазе се између $1-h$ и $1+l$, где је

$$h=\frac{M-N}{M}>0, \quad l=\frac{M-N}{N}>0,$$

свака функција $I(x)$ има за реално x једну *адициону формулу* облика

$$I(x_1+x_2+\ldots+x_n)=I(x_1)^{\lambda_1}I(x_2)^{\lambda_2}\ldots I(x_n)^{\lambda_n}$$

и једну *мултипликациону формулу* облика

$$I(x_1x_2)=I(x_1)^{x_2\lambda_2}.$$

г. Има одговарајућих чињеница о функцијама I_1 и I_2 које се мењају само између $+1$ и -1 са неограниченим бројем све више и више пригушених осцилација и имају неограничен број реалних нула а ниједну чисто имагинарну. Посебно скрећем пажњу на једну врсту *уопштене Moivre-ове формуле*: ако се стави

$$H_1(x)=I_1(xi)=\frac{1}{2L}\int_a^b u(e^{tx}+e^{-tx})\,dt,$$

$$H_2(x)=I_2(xi)=\frac{-i}{2L}\int_a^b u(e^{tx}-e^{-tx})\,dt,$$

(функције H_1 и H_2 уопштавају тако *хиперболичке функције*), биће

$$\left[H_1(x)+i\,H_2(x)\right]^m=H_1(m\lambda_1x)+i\,H_2(m\lambda_1x),$$
$$H_1(mx)+i\,H_2(mx)=\left[H_1(\lambda_2x)+i\,H_2(\lambda_2x)\right]^m,$$

за сваку реалну вредност променљивих x и m.

Функције I, I_1 и I_2 се јављају у многим проблемима анализе (интеграција диференцијалних једначина, решавање диференцних једначина, свођење општих типова одређених интеграла, разни проблеми рачуна вероватноће итд.), што даје посебну важност њиховом проучавању.

ХИПЕРГЕОМЕТРИЈСКИ РЕДОВИ[*]

У својој ноти *Sur des transcendantes entières généralisant les fonctions exponentielles et trigonométriques* (Comptes rendus, 21 avril 1913, p. 1213) указао сам на сличности између широке класе целих функција

$$
(1) \qquad \begin{cases} I_1(x) = 1 - \dfrac{\alpha_2}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha_4}{4!}x^4 - \dots, \\ I_2(x) = \alpha_1 x - \dfrac{\alpha_3}{3!}x^3 + \dfrac{\alpha_5}{5!}x^5 - \dots, \end{cases}
$$

где је

$$
(2) \qquad \alpha_n = \frac{\int_a^b u r^n dt}{\int_a^b u dt}
$$

(u и r су функције променљиве t, коначне и непрекидне у реалном и коначном интервалу (a, b)) и елементарних тригонометријских функција $\cos ax$ и $\sin ax$.

Сличности се настављају до развијања у редове по овим функцијама и ја ћу се овде бавити редовима

$$
(3) \qquad A_0 + \sum_1^\infty A_n I_1(nx) + \sum_1^\infty B_n I_2(nx),
$$

од којих су тригонометријски редови само посебан случај.

Нека је

$$
(4) \qquad A_0 + \sum_1^\infty A_n \cos nx + \sum_1^\infty B_n \sin nx
$$

[*] Наслов оригинала *Séries hypertrigonométrques*, Comptes rendus, Paris, 1913, t. CLVI, 24, pp. 1823–1825.

развитак, важећи за x између 0 и 2π, једне функције $f(x)$, коначне и непрекидне у том интервалу.

Може се показати *да ред* (3) *има исто тако смисла и представља једну одређену функцију променљиве* x *за* x *из извесног интервала.*

У ту сврху, извршимо у интегралу

$$\int_a^b u \cos rx \, dt$$

смену променљиве $r(t) = \xi$ и нека је

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi(\xi) \cos \xi x \, d\xi$$

тако добијени интеграл. За било коју уочену грану функције $\psi(\xi)$ може се поделити интервал (ξ_0, ξ_1) на коначан број интервала (a', b') тако да у сваком од њих ова грана буде монотона. Применимо на сваки интеграл, над једним таквим делимичним интервалом, теорему о средњој вредности у Ossian-Bonnet-овом облику. Добија се за сваки од њих један израз, где се n налази у имениоцу док множилац броја $\frac{1}{n}$ остаје коначан. Групишући ове интеграле и примећујући да је

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \int_a^b u \cos rx \, dt = I_1(x) \int_a^b u \, dt, \\ \int_a^b u \sin rx \, dt = I_2(x) \int_a^b u \, dt, \end{cases}$$

налази се да је по апсолутној вредности

$$I_1(x) < \frac{\gamma}{n}, \quad I_2(x) < \frac{\delta}{n},$$

где γ и δ не зависе од n. А тада, на основу онога што се зна о реду величине A_i и B_i, *ред* (3) *је апсолутно и униформно конвергентан и представља функцију*

$$\text{(6)} \qquad \Phi(x) = \frac{\int_a^b u f(rx) \, dt}{\int_a^b u \, dt}$$

за $0 < x < \frac{2\pi}{M}$, где M означава највећу апсолутну вредност функције u за t између a и b.

Кад је функција $f(x)$ непрекидна и има 2π као период, развитак се шири на све реалне вредности променљиве x.

За $r = \text{const.}$ ред (3) се своди, ма каква била функција u, на тригонометријски ред (4). У случају променљивог r и кад је u сталног знака за вредности t из интервала (a, b), ред (3) представља једну функцију облика $f(\mu x)$, где је μ функција променљиве x чије вредности, кад се x мења од $-\infty$ до $+\infty$, остају између најмање и највеће вредности које узима r кад се t мења од a до b.

Додајем да изражавање реда (3) у облику (6) износи на видело многобројне особине ових редова и представља извор многобројних образаца који уопштавају оне који су у вези са тригонометријским функцијама.

На пример, обрасци

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} I_2(nx) = \frac{1}{2}(\pi - \alpha_1 x),$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - p^2} I_1(nx) = \frac{I_1(px)}{2p \sin p\pi} - \frac{1}{2p^2},$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 - p^2} I_2(nx) = \frac{\pi}{2 \sin p\pi} I_2(px),$$

уопштавају тригонометријске развоје функција x, $\cos px$ и $\sin px$; први важи за $0 < x < \frac{2\pi}{M}$ а друга два за све реалне вредности променљиве x.

ТЕОРЕМЕ О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ БЕЗ ОГРАНИЧЕЊА*

1. Нека су u и v две функције, реалне или имагинарне, променљиве x. Из идентитета

$$uv = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}(u - v)^2 \tag{1}$$

извлачи се

$$\int_a^b uv\, dx = V - \delta, \tag{2}$$

где је

$$V = \frac{1}{2}\int_a^b u^2 dx + \frac{1}{2}\int_a^b v^2 dx, \tag{3}$$

$$\delta = \frac{1}{2}\int_a^b (u - v)^2\, dx. \tag{4}$$

Под јединим ограничењем да пут интеграције буде реалан и коначне дужине, зна се:

1. Ако u и v имају заједнички било реални део, било имагинарни део, израз $(u - v)^2$ је реалан и сталног знака у интервалу (a, b); следствено томе биће

$$\delta = \frac{b - a}{2}\chi(c)^2 \tag{5}$$

* Наслов оригинала *Théorèmes de la moyenne sans restrictions*, Nouvelles annales de mathématiques, Paris, 1913, 4[e] série, t. XIII, 4–9, pp. 400–406.

са

$$\chi(x) = u - v,$$

где је c нека вредност између a и b;

2. Ако се u и v разликују истовремено по својим реалним и имагинарним деловима, израз $(u-v)^2$ је имагинаран и биће, према једном ставу г. Darboux-а,

$$\delta = \frac{b-a}{2}\theta e^{\omega i}\chi(c)^2, \tag{6}$$

где су θ и ω две реалне количине садржане: прва између 0 и 1, а друга између 0 и 2π.

Даље је

$$\int_a^b uv\,dx = V - \lambda\chi(c)^2, \tag{7}$$

где је λ *чинилац чији модуо не премаша никада* $\frac{\mathrm{b-a}}{2}$ *сводећи се на* $\frac{\mathrm{b-a}}{2}$ *кад* u *и* v *имају заједнички било реални део, било имагинарни део.*

Предност коју може представити овај облик теореме о средњој вредности састоји се у томе што он води разлагању интеграла

$$\int_a^b uv\,dx \tag{8}$$

на два од којих један зависи само од u а други од v са једним поправним чланом коме се познају горња и доња граница, *и што без икаквог ограничења за* u *и* v *сем оног да интеграли имају смисла.*

У случају да су u и v реални, интеграл (8) се налази између

$$V - \frac{b-a}{2}M^2 \quad \text{и} \quad V - \frac{b-a}{2}N^2,$$

где су M и N највећа и најмања вредност коју узима апсолутна вредност разлике $u - v$ кад се x мења између a и b. Узимајући, дакле, за (8) вредност

$$V - (b-a)\frac{M^2 + N^2}{4}, \tag{9}$$

чини се грешка чија апсолутна вредност не премаша

(10) $$(b-a)\frac{M^2-N^2}{4}.$$

2. Идентитет

(11) $$uv=\frac{1}{4}(u+v)^2-\frac{(u-v)^2}{4}$$

даје

(12) $$\int_a^b uv\,dx=\frac{1}{4}\int_a^b(u+v)^2\,dx-\xi,$$

где је

(13) $$\xi=\frac{1}{4}\int_a^b(u-v)^2\,dx.$$

Следствено томе је

(14) $$\int_a^b uv\,dx=\frac{1}{4}\int_a^b(u-v)^2\,dx-\frac{\lambda}{2}\chi(c)^2,$$

где $\chi(x)$, λ *и* c *имају значења из претходног параграфа,* и то без икаквог ограничења за u и v сем оног да интеграли имају смисла.

У случају кад су u и v реални, стављајући

(15) $$\frac{1}{4}\int_a^b(u+v)^2\,dx=W,$$

интеграл (12) се налази између

$$W-\frac{b-a}{4}M^2 \quad \text{и} \quad W-\frac{b-a}{4}N^2,$$

тако да кад се за (12) узме вредност

(16) $$W-(b-a)\frac{M^2+N^2}{8},$$

чини се грешка чија апсолутна вредност не премаша

(17) $$(b-a)\frac{M^2-N^2}{8}.$$

3. Интуитивне неједнакости

$$\left|\int_a^b uv\,dx\right| < \frac{1}{2}\int_a^b |u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b |v|^2\,dx, \tag{18}$$

$$\left|\int_a^b uv\,dx\right| < \frac{1}{4}\int_a^b |u+v|^2\,dx, \tag{19}$$

садржане у претходним тврђењима, само су посебан случај општијих неједнакости

$$\left|\int_L u_1u_2\ldots u_n dx\right| < \frac{1}{n}\int_L |u_1|^n dx + \ldots + \frac{1}{n}\int_L |u_n|^n dx, \tag{20}$$

$$\left|\int_L u_1u_2\ldots u_n dx\right| < \frac{1}{n^n}\int_L \left(|u_1| + \ldots + |u_n|\right)^n dx, \tag{21}$$

где је L лук интеграције а $u_1, u_2, \ldots, u_n$ произвољан број било каквих функција од x. Оне су непосредна последица релације неједнакости између аритметичке и геометријске средине било ког броја позитивних реалних количина.

Направићемо одавде следећу примену. Нека су

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

чланови, реални или имагинарни, једног реда, функције промењиве t, за ред се претпоставља да апсолутно и униформно конвергира за вредности t које припадају одређеном домену (D) у равни t.

Посматрајмо ред

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{22}$$

чији је општи коефицијент a_n израз

$$a_n = \int_L u_1u_2\ldots u_n dt, \tag{23}$$

лук интеграције L је коначне дужине и садржан у области (D). Из

$$\sum_1^n |u_i| < \mu, \tag{24}$$

где је μ збир конвергентног реда

$$(25)\qquad \sum_{1}^{\infty} |\, u_i \,|,$$

закључује се, на основу (21), да је

$$(26)\qquad |\, a_n \,| < \frac{s\mu^n}{n^n},$$

где је s дужина лука интеграције.

Одатле се најпре закључује: *ред* (22) *представља једну целу функцију од* z, *рода нула или један, чији је модуо, за све вредности* z, *мањи од*

$$(27)\qquad |\, a_0 \,| + s\, \Delta(\mu r),$$

где Δ(z) *означава целу трансценденту*

$$(28)\qquad \Delta(z) = \frac{z}{1^1} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^3} + \ldots$$

а r *модуо од* z.

Како позната формула

$$(29)\qquad \int_0^1 \left(t \log \frac{1}{t} \right)^n = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

води до формуле

$$(30)\qquad \Delta(z) = z \int_0^1 e^{zt \log \frac{1}{t}} dt,$$

важеће за сваку реалну и имагинарну вредност од z, увиђа се да је

$$(31)\qquad \Delta(r) < r e^{\frac{r}{e}},$$

што показује: *модуо од* f(z) *је, за сваку вредност* z, *мањи од*

$$(32)\qquad |\, a_0 \,| + s\mu e^{\frac{\mu r}{e}}.$$

Одавде следи, на пример, да Jensen-ов интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log\left|f(re^{\theta i})\right|d\theta$$

придружен функцији $f(z)$, има вредност мању од

$$\log\left(\left|a_0\right|+s\mu e^{\frac{\mu r}{e}}\right),$$

одакле се могу извући закључци који се тичу нула функције $f(z)$ садржаних у унутрашњости кружнице описане око $z = 0$ у равни t.

О НЕКИМ ФУНКЦИЈАМА СТРАНИЦА И УГЛОВА ТРОУГЛА*

I. – ЈЕДНА ФУНКЦИЈА УГЛОВА

Нека су *a, b, c* странице једног троугла, α, β, γ њима наспрамни углови. Размотримо функцију углова

$$(1)\qquad \varphi(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma}}{\sin\alpha+\sin\beta}.$$

Стављајући, краткоће ради,

$$\sin\alpha=\xi,\quad \sin\beta=\eta,$$

идентитет

$$2\xi\eta=(\xi+\eta)^2-(\xi^2+\eta^2)$$

претвара израз (1) у

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=\sqrt{\lambda(1+\cos\gamma)-\cos\gamma},$$

где је

$$\lambda=\frac{\xi^2+\eta^2}{(\xi+\eta)^2}.$$

Неједнакост и једнакост

$$1\geq\frac{\xi^2+\eta^2}{(\xi+\eta)^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}\right)^2$$

показују да је

* Наслов оригинала *Sur quelques fonctions des cotés et des angles d'un triangle*, L' Enseignement mathématique, Genéve, 1916, t. XVIII, 3–4, pp. 153–163.

$$\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1,$$

доња граница $\frac{1}{2}$ бива достигнута за $\xi = \eta$, а горња граница 1 кад је једна од вредности ξ и η занемарљива у односу на другу.

Закључује се да је

$$\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2} - \cos\gamma} \leq \varphi(\alpha,\beta,\gamma) \leq 1,$$

или још

$$\cos\frac{\pi-\gamma}{2} \leq \varphi(\alpha,\beta,\gamma) \leq 1.$$

Због тога је

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1+\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}{2} \pm \delta,$$

са

$$\delta \leq \frac{1-\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}{2},$$

или пак

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=\cos^2\frac{\pi-\gamma}{4}, \tag{2}$$

са

$$\delta\leq\sin^2\frac{\pi-\gamma}{4}. \tag{3}$$

Једнакост (3) ће бити: 1. за $\xi = \eta$; 2. кад једна или друга од количина ξ и η постане занемарљива у односу на другу. Првом случају одговара

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4} - \sin^2\frac{\pi-\gamma}{4} = \cos\frac{\pi-\gamma}{2}$$

а другом

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4} + \sin^2\frac{\pi-\gamma}{4} = 1.$$

Оūуда се закључује да је

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4}(1\pm\varepsilon) \tag{4}$$

где релативна грешка ε *не премаша никада величину* $\mathrm{tg}^2\frac{\pi-\gamma}{4}$; *ова грешка је нула у случају* $\alpha=\beta$, *а достиже свој максимум* $\mathrm{tg}^2\frac{\pi-\gamma}{4}$ *кад један од два угла* α *и* β *тежи нули.*

Претходно тврђење је посебно занимљиво за троугао са *тупим* углом γ. У том случају *узимајући за* $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ *вредност* $\cos^2\frac{\pi-\gamma}{4}$, *учињена релативна грешка не достиже никада вредност*

$$\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}=0{,}171$$

и ова грешка опада брзо кад се угао γ *приближава* 180°.

Тако је

$$(5)\qquad \text{за}\quad \begin{array}{ll} \gamma>120^\circ & \varepsilon<0{,}070\\ \gamma>140^\circ & \varepsilon<0{,}040\\ \gamma>150^\circ & \varepsilon<0{,}018\\ \gamma>160^\circ & \varepsilon<0{,}007\\ \gamma>170^\circ & \varepsilon<0{,}002\\ \gamma>175^\circ & \varepsilon<0{,}0003. \end{array}$$

Троуглови за које је релативна грешка ε, по апсолутној вредности, мања од унапред дате вредности ε' су они чији је угао γ, изражен у деловима од π, већи од разлике

$$\pi-4\mathrm{arctg}\sqrt{\varepsilon'}$$

или, за довољно мало ε'

$$\gamma>\pi-4\sqrt{\varepsilon'}.$$

Помоћу претходног се може, на пример, рачунати, са унапред познатом тачношћу, *трећа страница једног троугла у коме се познају само збир* a + b *двеју страница и тупи угао* γ *који оне заклапају.*

Заиста, означимо са h дати збир; из

$$a+b=h,\qquad \frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

се извлачи

$$a=h\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta},\qquad b=h\frac{\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$$

и отуда

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma} = h\varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Одавде йроисшиче да је

(6) $$c = (a+b)\cos^2 \frac{\pi - \gamma}{4}(1 \pm \varepsilon),$$

где је релашивна грешка ε *она учињена на функцији* φ *која се баш йроучавала.*

Узимајући

(7) $$c = (a+b)\cos^2 \frac{\pi - \gamma}{4}$$

чини се релативна грешка која за углове γ веће од 140° не достиже 4%, за углове веће од 150° 1,8%, за углове веће од 160° 0,7%, за углове веће од 170° 0,2% итд.

II. – ЈЕДНА ФУНКЦИЈА СТРАНИЦА

Идентитет

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2$$

написан у облику

(8) $$1 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2} = \frac{1}{3} + \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{3(a+b+c)^2}$$

показује да за позитивне количине a, b, c, од којих једна или две могу бити нула, вредност количника

(9) $$\mu = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a+b+c}$$

је увек садржана између $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и 1, доња граница $\frac{1}{\sqrt{3}}$ бива достигнута за $a = b = c$, а горња граница 1 бива достигнута кад су две од ових трију количина занемарљиве у односу на трећу.

У йосебном случају где су a, b, c *шри сшранице једноī шроуīла, горња граница* 1 *се замењује са* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Заиста, у овом случају је свака од трију величина *a, b, c* најмање једнака разлици, а највише једнака збиру осталих двеју. Нека је, одређености ради,

$$a \leq b, \quad b-a \leq c \leq b+a;$$

ставимо

$$c = x, \quad a^2+b^2 = m, \quad a+b = n,$$

тако да је

$$\mu = \frac{\sqrt{m+x^2}}{n+x}. \tag{10}$$

Јесте

$$\mu' = \frac{nx-m}{u}, \quad \mu'' = \frac{n-\mu' u'}{u},$$

са

$$u = (x+n)^2\sqrt{m+x^2},$$

тако да μ има јединствен минимум достигнут за вредност

$$x = \frac{m}{n} = \frac{a^2+b^2}{a+b}, \tag{11}$$

која је очито садржана између $b-a$ и $b+a$, а сама вредност овог минимума је

$$y = \sqrt{\frac{m}{m+n^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+(a+b)^2}}, \tag{12}$$

достижући наравно вредност $\frac{1}{\sqrt{3}}$ за $a = b$.

Кад x опада од

$$x = \frac{m}{n}, \text{ до } x = b-a,$$

μ расте од своје јединствене вредности минимума (12) до вредности

$$\mu = \frac{\sqrt{a^2+b^2+(b-a)^2}}{2b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{a}{b}+\left(\frac{a}{b}\right)^2} \tag{13}$$

која је, због $\frac{a}{b} \leq 1$, највише једнака $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Дакле: *ако су* a, b, c *странице једног троугла, вредност количника*

$$\mu = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a+b+c}$$

је увек садржана између два броја

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5774\ldots, \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071\ldots.$$

Ово се може изразити у облику једнакости

$$\text{(14)} \qquad \sqrt{a^2+b^2+c^2} = (A+\theta B)(a+b+c),$$

где су A *и* B *нумеричке константе имајући за вредности*

$$\text{(15)} \qquad A = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5774\ldots, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,1297\ldots,$$

и где θ *представља број садржан између* 0 *и* 1.

Доња граница $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (одговарајућа за $\theta = 0$) је достигнута за једнакостраничне троуглове; горња граница $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (одговарајућа за $\theta = 1$) је достигнута кад је

$$a = b, \quad c = 0.$$

Примене. – Од претходног се могу начинити многе примене од којих ћемо, као на примере, указати само на следеће.

I. Позната релација

$$m^2+n^2+p^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

између дужина m, n, p медијана једног троугла са страницама a, b, c води, према претходном тврђењу, до релације

$$\text{(16)} \qquad \sqrt{m^2+n^2+p^2} = \omega\,(a+b+c),$$

где је ω број између

$$\frac{1}{2} = 0,5000\ldots, \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = 0,6124\ldots$$

Дужина дијагонале L правоуглог паралелепипеда чије су ивице три медијане једног троугла једнака је, дакле, обиму S тог троугла помноженом нумеричким коефицијентом који се увек налази између 0,5000 и 0,6124.

Такође се види да су једини правоугли троуглови који могу имати катете једнаке дужинама L и S придруженим једном истом троуглу они чији се оштри углови налазе: један између $26°30'$ и $31°30'$, други између $58°30'$ и $63°30'$.

II. Резултанта три вектора који могу да образују троугао и чији је збир скалар S, има вредност λS, где је λ нумерички коефицијент између 0,5774... и 0,7071...

III. Ако су дате три функције

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x)$$

позитивне у интервалу од $x = a$ до $x = b$ и такве да је у том интервалу стално

$$f_3 - f_1 \leq f_2 \leq f_3 + f_1, \tag{17}$$

биће

$$\int_a^b dx\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} = (A + \theta B)\left[\int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx + \int_a^b f_3 dx\right], \tag{18}$$

где су A и B нумеричке константе (15) и где је θ број који се налази између 0 и 1.

IV. Посматрајмо лук неке криве у тродимензионом простору дуж кога, пролазећи га у одређеном смеру, све три координате x, y, z расту истовремено и на такав начин да њихови једновремени бесконачно мали прираштаји могу у сваком тренутку да образују троугао.

Дужина лука биће једнака збиру коначних прираштаја координата, који одговарају пролазу од једног краја лука до другог, помноженом нумеричким коефицијентом који се увек налази између 0,5774... *и* 0,7071...

Када су, на пример, једначине криве

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

претходни услови који су

$$0 \leq dy - dx \leq dz \leq dy + dx$$

(или наравно они који ће се имати пермутујући x, y, z), претварају се у следеће неједнакости које треба да буду задовољене за све тачке криве на посматраном луку:

(19) $$0 \le \frac{P-T}{T} \le \frac{Q}{T} \le \frac{P+T}{T},$$

где је

(20) $$P = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad T = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

III. – СИМЕТРИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ СТРАНИЦА ИЛИ УГЛОВА

Нека је $f(x)$ функција од x која се у околини тачке $x = 0$ може развити у степени ред

(21) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

при чему је сваки коефицијент a_i позитиван или нула, а прва два коефицијента a_0и a_1 могу уосталом бити било који реални бројеви.

Пођимо од следеће лако доказиве чињенице: вредност односа

(22) $$\frac{(x+y+z)^p}{x^p + y^p + z^p},$$

где су x, y, z, p позитивне количине, налази се увек између 1 и 3^{p-1}; граница 1 је достигнута кад је $p = 1$ или кад су две од количина x, y, z занемарљиве у односу на трећу; граница 3^{p-1} је достигнута кад је $x = y = z$.

За $p = 2, 3, 4, \ldots$ добија се

(23) $$a_k(x+y+z)^k \ge a_k(x^k + y^k + z^k),$$

(24) $$a_k(x+y+z)^k \le \frac{a_k}{3}\left[(3x)^k + (3y)^k + (3z)^k\right] \qquad (k = 2,3,4,\ldots)$$

Претпостављајући да је збир $x+y+z$ мањи од полупречника конвергенције реда (21), из (23) се извлачи

(25) $$f(x) + f(y) + f(z) \le f(x+y+z) + 2f(0),$$

а из (24), замењујући ту $3x$, $3y$, $3z$ са x, y, z, изводи се најпре

$$a_k\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^k \le \frac{a_k}{3}(x^k + y^k + z^k)$$

и помоћу овога

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \le \frac{1}{3}\left[f(x)+f(y)+f(z)\right]$$

и још

$$f(x)+f(y)+f(z) \ge 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right). \tag{26}$$

Тако се има двострука неједнакост

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \le f(x)+f(y)+f(z) \le f(x+y+z)+2f(0), \tag{27}$$

која се може изразити једнакошћу

$$f(x)+f(y)+f(z) = F(x+y+z)+\theta\Phi(x+y+z), \tag{28}$$

где је

$$F(t) = 3f\left(\frac{t}{3}\right), \quad \Phi(t) = f(t) - 3f\left(\frac{t}{3}\right) + 2f(0) \tag{29}$$

и где θ означава коефицијент који је између 0 и 1. Ове две границе 0 и 1 бивају достигнуте за произвољну функцију $f(t)$ када две од количина x, y, z теже нули ($\theta = 1$), односно кад је $x = y = z$ ($\theta = 0$).

Применимо сада тврђење у два следећа случаја:

Први случај: x, y, z *су три странице једног троугла*. Означавајући са s обим троугла, формула (28) даје

$$f(a)+f(b)+f(c) = F(s)+\theta\Phi(s), \tag{30}$$

где су F и Φ функције (29). Доња граница $\theta = 0$ је достигнута за једнакостраничан троугао; горња граница $\theta = 1$ није никада достигнута.

Други случај: x, y, z *су три угла једног троугла изражени у деловима од* π. Формула (28) даје

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma) = F(\pi)+\theta\Phi(\pi), \tag{31}$$

где су F и Φ функције (29). Доња граница $\theta = 0$ је достигнута за једнакостраничан троугао, а горња граница $\theta = 1$ за једнакокраки троугао са тупим углом блиским π.

Формуле (30) *и* (31) *дају значајне изразе симетричних функција страница или углова троугла.*

Сетимо се да ове формуле претпостављају да се функција $f(t)$ може у околини тачке $t = 0$ развити у степени ред

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots, \tag{32}$$

где је сваки коефицијент a_i позитиван или нула, а прва два коефицијента a_0 и a_1 могу бити било који реални бројеви. Формула (30) претпоставља конвергенцију реда (32) за $t = s$, а формула (31) конвергенцију реда за $t = \pi$.

Узимајући, на пример,

$$f(t) = e^t,$$

налази се да је за било који троугао

$$e^\alpha + e^\beta + e^\gamma = M + \theta N,$$

где су M и N две нумеричке константе са вредностима

$$M = 3e^{\frac{\pi}{3}} = 8{,}54896\ldots, \qquad N = 2 + e^\pi - 3e^{\frac{\pi}{3}} = 16{,}59134\ldots$$

Примећујемо, завршавајући, да су формуле (27) и (28) само посебан случај једне опште теореме која изражава релацију између аритметичке средине било ког броја позитивних количина и произвољне симетричне функције тих количина што ће бити изложено у једној другој расправи.

ТЕОРЕМА О АРИТМЕТИЧКОЈ СРЕДИНИ ПОЗИТИВНИХ КОЛИЧИНА*

1. Нека је $f(x)$ функција која се у околини тачке $x=0$ може развити у степени ред

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{1}$$

при чему је сваки коефицијент a_i реалан и позитиван или нула, прва два коефицијента a_0 и a_1 могу, уосталом, имати било какве реалне вредности.

Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реалне и позитивне количине чији је збир мањи од полупречника конвергенције реда (1).

Означимо са

$$\mu = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{и} \quad M = \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

аритметичку средину μ количина x_i и аритметичку средину M одговарајућих вредности функције $f(x)$.

Намеран сам да изразим M *као функцију од* μ *у облику једне теореме о средњој вредности.*

У ту сврху разматрам функцију n променљивих x_i

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n^{p-1}(x_1^p + \ldots + x_n^p) - (x_1 + \ldots + x_n)^p \tag{2}$$

где је p било који реалан број, и примећујем, као што се лако види уобичајеним поступком теорије максимума и минимума, следеће:

1. ако је $p > 1$, функција постаје најмања за

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n; \tag{3}$$

---

* Наслов оригинала *Théorème sur la moyenne arithmétique de quantités positives*, L'Enseignement mathématique, Genéve, 1916, t. XVIII, 3–4, pp. 163–176.

овај минимум је нула, функција је позитивна за сваки други скуп позитивних вредности x_i;

2. ако је $p<1$, функција постаје највећа за (3); овај максимум је нула, она је негативна за сваки други скуп позитивних вредности x_i;

3. за $p=1$ функција се своди идентички на нулу.

Одатле се закључује да ће се, означавајући са ρ вредност односа

$$\frac{(x_1+\ldots+x_n)^p}{x_1^p+\ldots+x_n^p}, \tag{4}$$

имати

$$\begin{array}{lll} \rho \leq n^{p-1} & \text{за} & p>1 \\ \rho \geq n^{p-1} & \text{за} & p<1 \\ \rho = 1 & \text{за} & p=1 \end{array}$$

С друге стране, очито је

$$\rho \geq 1 \quad \text{за} \quad p>1; \quad \rho \leq 1 \quad \text{за} \quad p<1$$

при чему ће бити једнакост само кад су x_i занемарљиви у односу на један од њих.

Према томе: вредност ρ се увек налази између граница 1 и n^{p-1}; прва граница је достигнута кад је p произвољно а x_i су занемарљиви у односу на један од њих, или пак кад су x_i произвољни а $p=1$; друга граница је достигнута кад x_i постану међусобно једнаки.

Будући тако, отуда се извлачи за $p=2, 3, 4, \ldots$ низ неједнакости

$$a_p(x_1+\ldots+x_n)^p \geq a_p(x_1^p+\ldots+x_n^p) \tag{5}$$

$$a_p(x_1+\ldots+x_n)^p \geq \frac{a_p}{n}\left[(nx_1)^p+\ldots+(nx_n)^p\right] \tag{6}$$

које се своде на једнакости (идентитете) за $p=0$ и $p=1$.

Из (5) се извлачи

$$f(x_1+\ldots+x_n) \geq f(x_1)+\ldots+f(x_n)-(n-1)f(0)$$

и према томе је

$$M \leq \frac{1}{n}\left[f(n\mu)+(n-1)f(0)\right]. \tag{7}$$

Из (6) се извлачи, замењујући nx_i са x_i,

$$a_p\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^p \leq \frac{a_p}{n}(x_1^p+\ldots+x_n^p)$$

одакле је

$$f(\mu) \leq \frac{1}{n}\left[f(x_1) + \ldots + f(x_n)\right]$$

и према томе

$$f(\mu) \leq M. \tag{8}$$

Тако се стиже до двоструке неједнакости

$$f(\mu) \leq M \leq \frac{f(n\mu) + (n-1)f(0)}{n} \tag{9}$$

која даје најуже могуће границе за аритметичку средину M *изражену у функцији аритметичке средине* μ.

Према претходном ове границе могу бити достигнуте за произвољну функцију $f(x)$.

Двострука неједнакост (9) се може изразити у облику следеће теореме о средњој вредности коју смо имали у виду.

Теорема. – *Аритметичке средине*

$$M = \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \quad \textit{и} \quad \mu = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

везане су релацијом облика

$$M = \Phi(\mu) + \theta\Psi(\mu), \tag{10}$$

где је

$$\Phi(\mu) = f(\mu), \tag{11}$$

$$\Psi(\mu) = \frac{f(n\mu) + (n-1)f(0)}{n} - f(\mu) \tag{12}$$

и где је θ *чинилац увек садржан између* 0 *и* 1; *границе* $\theta = 0$ *и* $\theta = 1$ *су достигнуте; прва кад су сви* x_i *међусобно једнаки, друга кад сви* x_i *постају занемарљиви у односу на један од њих.*

Такође се може трансформисати двострука неједнакост (9) у једнакост на следећи начин: израз

$$\frac{1}{t}\left[f(t\mu) + (t-1)f(0)\right] \tag{13}$$

представља једну функцију промењиве t која се своди на први члан у (9) за $t = 1$, на трећи члан у (9) за $t = n$ и стално расте кад t расте од 1 до n; према томе, замењујући у њему t са $\frac{1}{\xi}$, *имаће се једнакост*

$$(14)\qquad M = \xi f\left(\frac{\mu}{\xi}\right) + (1-\xi)f(0),$$

где је ξ *једна количина која се налази између* $\frac{1}{n}$ *и* 1, ове границе могу бити достигнуте за произвољну функцију $f(x)$, прва кад су сви x_i занемарљиви у односу на један од њих а друга кад су они међусобно једнаки.

Формула (14) даје такође решење обрнутог проблема: *изразити аритметичку средину* μ *помоћу аритметичке средине* M: биће

$$\mu = \xi x$$

где је x један од позитивних корена једначине

$$f(x) = \frac{1}{\xi}\left[M - (1-\xi)f(0)\right].$$

Формула (10) своди тај проблем на решавање једначине

$$\Phi(x) + \theta\Psi(x) = M,$$

где је μ један од позитивних корена ове једначине по x.

Ако се у (14) x_i промени у $n\xi x_i$ и ако се затим стави $n\xi = \frac{1}{\zeta}$, стиже се до формуле

$$(15)\qquad f(x_1 + \ldots + x_n) = \zeta\left[f\left(\frac{x_1}{\zeta}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_n}{\zeta}\right)\right] - (n\zeta - 1)f(0)$$

$$\frac{1}{n} \le \zeta \le 1$$

изражавајући извесну врсту теореме о адитивности функције f(x) *посматраног типа у облику теореме о средњој вредности.* Границе $\zeta = \frac{1}{n}$ и $\zeta = 1$ су достигнуте у претходно назначеним случајевима.

Може се, дакле, потврдити да се *вредност*

$$(16)\qquad f(x_1 + \ldots + x_n)$$

налази увек између граница израза

$$(17)\qquad \left[f(x_1) + \ldots + f(x_n)\right] - (n-1)f(0)$$

и

$$\frac{1}{n}\left[f(nx_1)+\ldots+f(nx_n)\right] \tag{18}$$

и да може, за произвољну функцију f(x), *бити једнака једној или другој од ових граница.*

Једначина (10) чини видљивим да се симетрична функција

$$f(x_1)+\ldots+f(x_n) \tag{19}$$

n позитивних количина чији збир има вредност s дâ увек написати у облику

$$A+\theta B \tag{20}$$

где је

$$\begin{aligned} &A = nf\left(\frac{s}{n}\right)\\ &B = f(s) - nf\left(\frac{s}{n}\right) + (n-1)f(0)\\ &0 \le \theta \le 1 \end{aligned} \tag{21}$$

тако да *се увек налази између вредности*

$$nf\left(\frac{s}{n}\right) \quad \text{и} \quad f(s)+(n-1)f(0)$$

уз могућност да буде једнака једној или другој од ових граница.

2. Претходне једнакости и неједнакости су згодне за разне примене од којих ћу, као пример, назначити само неколико најнепосреднијих.

Узимајући, на пример,

$$f(x)=e^x,$$

налази се да се вредност збира

$$e^{x_1}+\ldots+e^{x_n}$$

може изразити у облику $A+\theta B$, где је

$$A = ne^{\frac{s}{n}}, \quad B = e^s + n - 1 - ne^{\frac{s}{n}}, \quad s = x_1+\ldots+x_n.$$

Узимајући

$$f(x)=\alpha^x, \quad x_k = x^k,$$

где су α и x позитивне реалне количине, може се збир

$$\alpha^{x}+\alpha^{x^{2}}+\ldots+\alpha^{x^{n}}$$

изразити у облику $A+\theta B$, где је

$$A=n\alpha^{\frac{x}{n}\frac{x^{n}-1}{x-1}},\quad B=\alpha^{x\frac{x^{n}-1}{x-1}}+n-1-n\alpha^{\frac{x}{n}\frac{x^{n}-1}{x-1}}.$$

Узимајући

$$x_1=\sin^2 x,\quad x_2=\cos^2 x,$$

налази се

$$f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)=A+\theta B,$$

где је

$$A=2f\left(\frac{1}{2}\right),\quad B=f(1)+f(0)-2f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ако су α,β,γ углови троугла, имаће се

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=A+\theta B,$$

где је

$$A=3f\left(\frac{\pi}{3}\right),\quad B=f(\pi)+2f(0)-3f\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

тако да ће за произвољан троугао, на пример, бити

$$e^{\alpha}+e^{\beta}+e^{\gamma}=a+\theta b,$$

где је

$$a=3e^{\frac{\pi}{3}}=8,54896\ldots,\quad b=2+e^{\pi}-3e^{\frac{\pi}{3}}=16,59134\ldots.$$

Ако је дата алгебарска једначина

$$x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_n=0$$

са *реалним* коренима $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, онда ће бити

$$f(\alpha_1^2)+\ldots+f(\alpha_n^2)=A+\theta B,$$

где је

$$A=nf\left(\frac{c_1^2-2c_2}{n}\right),\quad B=f(c_1^2-2c_2)+(n-1)f(0)-nf\left(\frac{c_1^2-2c_2}{n}\right),$$

тако да ће се, стављајући

$$S_p=\alpha_1^p+\ldots+\alpha_n^p,$$

имати

$$S_{2k} = \lambda S_2^k = \lambda(c_1^2 - 2c_2)^k, \quad \frac{1}{n^{2k-1}} \leq \lambda \leq 1.$$

Кад су сви корени *реални и позитивни,* тад ће бити

$$f(\alpha_1) + \ldots + f(\alpha_n) = A + \theta B,$$

где је

$$A = nf\left(-\frac{c_1}{n}\right), \quad B = f(-c_1) + (n-1)f(0) - nf\left(-\frac{c_1}{n}\right),$$

тако да се, на пример, вредност симетричне функције

$$e^{r\alpha_1} + \ldots + e^{r\alpha_n}$$

где је r позитивна количина, налази увек између границе

$$n e^{-\frac{rc_1}{n}},$$

достигнуте у случају једначине

$$\left(x + \frac{c_1}{n}\right)^n = 0,$$

и границе

$$e^{-rc_1} + n - 1,$$

достигнуте у случају једначине

$$x^{n-1}(x + c_1) = 0.$$

У случају позитивних корена ће такође бити

$$S_k = \lambda S_1^k = \lambda(-c_1)^k, \quad \frac{1}{n^{k-1}} \leq \lambda \leq 1.$$

Било која рационална симетрична функција корена се изражава помоћу S_k, па се границе варијације могу добити помоћу c_1 или $c_1^2 - 2c_2$.

За позитивне x_i и реално p је

$$\log(x_1^p + \ldots + x_n^p) = p \log s + \delta$$

са

$$0 \leq \delta \leq (1-p)\log n \text{ ако је } p < 1$$
$$(1-p)\log n \leq \delta \leq 0 \text{ ако је } p > 1.$$

Узмимо, на пример,

$$x_i = e^{a_i}, \quad p = u,$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ било какве реалне количине а u реална и коначна функција променљиве t у посматраном интервалу од $t = a$ до $t = b$ и чије се вредности, за t из тог интервала, налазе између 0 и 1. Нека је v функција од t, реална и непроменљивог знака у интервалу (a, b). Из претходног следи да ће интеграл

$$\int_a^b v \log(e^{a_1 u} + \ldots + e^{a_n u})\, dt$$

имати вредност

$$C \int_a^b uv\, dt + \theta D \int_a^b v\, dt,$$

где C и D имају вредности

$$C = \log(e^{a_1} + e^{a_2} + \ldots + e^{a_n}), \qquad D = (1 - N)\log n,$$

где N означава најмању вредност функције u у интервалу (a, b), а θ је чинилац који се налази између 0 и 1.

У случају да су вредности функције u, за t из интервала (a, b), веће од 1, константа D ће бити замењена са $(1 - M)\log n$, где M означава највећу вредност од u у интервалу (a, b).

Учинимо и једну примену на рачун дужина лукова кривих у n димензионом простору. Из претходног следи да за позитивне x_i јесте

$$\text{(22)} \qquad \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \theta(x_1 + \ldots + x_n), \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq 1.$$

То се уосталом види непосредно из идентитета

$$n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum (x_i - x_j)^2$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

који показује да је

$$n\sum x_i^2 \geq \left(\sum x_i\right)^2$$

при чему ће бити једнакост само у случају где су сви x_i међусобно једнаки.

Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координате тачке M у n димензионом простору такве да је елемент лука једне криве посматране у том простору изражен са

$$ds^2 = \sum dx_i^2 .$$

Посматрајмо један део s коначне дужине лука дуж кога се свака координата x_i мења константно у једном истом смислу, растући или опадајући. Означимо са X_i апсолутну вредност коначног прираштаја координате x_i кад се прође од једног до другог краја лука. Тада ће се имати следеће тврђење:

Дужина s *лука има вреднoсӣ*

$$s = \theta \sum X_i \tag{23}$$

ӣде се чинилац θ *налази између* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *и* 1.

Довољно је, да би се то видело, заменити у претходној једнакости (22) x_i апсолутним вредностима од dx_i па интегралити између два краја лука уз примену теореме о средњој вредности у којој је присутан чинилац θ.

У посебном случају равне криве чинилац θ је између $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071\ldots$ и 1; за криве у тродимензионом простору он се налази између $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5774\ldots$ и 1 итд.

3. Претходна теорема о аритметичким срединама даје исто тако теореме о средњој вредности за интеграле мноштва обичних диференцијалних једначина, парцијалних диференцијалних једначина или диференцијално-диференцних једначина. Она даје начин изражавања интеграла, који задовољавају доста широке услове, помоћу познатих функција независно промењљивих и једног или више чинилаца θ којима ће се познавати границе у којима се налазе.

Посматрајмо, на пример, једначину првог реда

$$s = f(x, y) \tag{24}$$

на коју се своди општи проблем одређивања равних кривих чији је лук s дата функција $f(x, y)$ координата.

Замењујући ту s са

$$\theta\left[(x - x_0) + (y - y_0)\right] \text{ или пак са } \theta\left[(x - x_0) - (y - y_0)\right],$$

већ према томе да ли се посматрају реалне растуће гране или реалне опадајуће гране у посматраном интервалу, добиће се, без интеграције, једначине ових грана у једном или другом од два облика

$$
\begin{aligned}
f(x,y)-\theta\left[x+y-(x_0+y_0)\right]&=0\\
f(x,y)-\theta\left[x-y-(x_0-y_0)\right]&=0,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где је θ чинилац чије се вредности могу мењати само између 0,7071... и 1, и где почетна тачка (x_0, y_0) игра улогу интеграционе константе.

Посматрајмо као други пример једначину

$$
\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=f(x)
\tag{26}
$$

која се јавља у општим проблемима геометрије и механике. Означавајући са $\varphi(x)$ позитивну вредност од $\sqrt{f(x)}$, за коју претпостављамо да је коначна и непрекидна на интервалу од $x = x_0$ до $x = x_1$, посматрајмо реалне интеграле који пролазе кроз дату почетну тачку $M(x_0, y_0)$, смештену (одређености ради) изнад x-осе; ова тачка се нужно налази у области D између x-осе и криве $y = \varphi(x)$, без чега би посматрана грана интегралне криве била имагинарна.

Кроз M_0 пролазе две гране интегралне криве, једна позитивна растућа Y_1 чији угаони коефицијент тангенте у M_0 има вредност

$$\sqrt{f(x_0)-y_0^2}\,,$$

друга позитивна опадајућа са угаоним коефицијентом тангенте у M_0 једнаким

$$-\sqrt{f(x_0)-y_0^2}\,;$$

ове две тангенте се поклапају кад се тачка M_0 налази на кривој $y = \varphi(x)$.

За грану Y_1 биће, према претходном,

$$
\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2}=\theta_1\left(\frac{dy}{dx}+y\right),\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\le\theta_1\le 1
\tag{27}
$$

па ова грана задовољава једну једначину облика

$$
\frac{dy}{dx}+y=\lambda_1\varphi(x),\qquad 1\le\lambda\le\sqrt{2}.
\tag{28}
$$

Одавде се добија

$$
y=e^{-(x-x_0)}\left[y_0+\int_{x_0}^{x}\lambda_1 e^{x-x_0}\varphi(x)\,dx\right]
$$

и, примењујући ту заједничку теорему о средњој вредности,

$$(29) \qquad y = y_0\Phi(x, x_0) + \mu_1\Psi(x, x_0),$$

где је

$$(30) \qquad \Phi(x, x_0) = e^{-(x-x_0)}, \quad \Psi(x, x_0) = e^{-x}\int_{x_0}^{x} e^{x}\varphi(x)\,dx$$

и где μ_1 означава чинилац, функцију од x, чија вредност остаје, дуж гране Y_1, стално између 1 и $\sqrt{2}$.

Једначина (29) *представља грану* Y_1 *и показује да се она стално налази између одговарајућих грана двеју кривих.*

$$(31)\ y = y_0\Phi(x, x_0) + \Psi(x, x_0) \quad \text{и} \quad y = y_0\Phi(x, x_0) + \sqrt{2}\Psi(x, x_0).$$

За грану Y_2 једначину (27) треба заменити са

$$(32) \qquad \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2} = \theta_2\left(y - \frac{dy}{dx}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \theta_2 \leq 1,$$

што води до једначине

$$(33) \qquad y = y_0\Phi(x, x_0) - \mu_2\Psi(x, x_0), \quad 1 \leq \mu_2 \leq \sqrt{2},$$

где су Φ и Ψ дати са (30), *представљајући грану* Y_1; *ова се такође налази између одговарајућих грана двеју кривих*

$$(34) \qquad \begin{aligned} y &= y_0\Phi(x, x_0) - \Psi(x, x_0) \\ y &= y_0\Phi(x, x_0) - \sqrt{2}\Psi(x, x_0). \end{aligned}$$

Кроз тачку $M_0'(x_0, -y_0)$, симетричну тачки M_0 у односу на x-осу, пролазе исто тако две гране интегралне криве, једна негативна опадајућа U_1, друга негативна растућа U_2, обе симетричне гранама Y_1 и Y_2 у односу на x-осу.

Гране Y_1 и Y_2 (исто као U_1 и U_2) долазе наизменично једна за другом спајајући се у тачкама где секу фиксирану криву

$$y^2 - f(x) = 0,$$

која представља место максимума и минимума интегралних кривих.

Уочимо као трећи пример парцијалну једначину

$$(35) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = f(x, y)$$

и посматрајмо једну област D у равни xOy у којој је интеграл V реалан и где су изводи $\frac{\partial V}{\partial x}$ и $\frac{\partial V}{\partial y}$ сталног знака. Нека је ε јединица која означава константан знак од $\frac{\partial V}{\partial x}$ а η изводу $\frac{\partial V}{\partial y}$ одговарајућа количина. У области D ће интеграл V задовољавати једначину

$$\sqrt{\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\eta \frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = \varphi(x, y)$$

са

$$\varphi(x, y) = \sqrt{f(x, y)} \tag{36}$$

или, према претходном, линеарну једначину

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \eta \frac{\partial V}{\partial y} = \theta \varphi(x, y) \tag{37}$$

где је θ чинилац који се налази између 1 и $\sqrt{2}$.

Тако се доводи до разматрања система

$$\varepsilon \frac{dx}{1} = \eta \frac{dy}{1} = \frac{dV}{\theta\varphi}, \tag{38}$$

одакле се добија

$$y = \frac{\varepsilon}{\eta} x + C_1 \tag{39}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varepsilon\theta\varphi, \tag{40}$$

где је C_1 произвољна константа. Ако се у другом члану из (40) y замени својом вредношћу (39), једначина (40) узима облик

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varepsilon\theta\varphi\left(x, \frac{\varepsilon}{\eta} x + C_1\right). \tag{41}$$

Функција φ је сталног знака, па ће се применом опште теореме о средњој вредности добити

$$V = \varepsilon\theta' \int \varphi\left(x, \frac{\varepsilon}{\eta} x + C_1\right) dx + C_2, \tag{42}$$

где је C_2 једна друга произвољна константа, а θ' чинилац садржан између 1 и $\sqrt{2}$.

С друге стране, из (39) и (42) се извлачи

$$C_1 = y - \frac{\varepsilon}{\eta} x, \quad C_2 = V - \varepsilon\theta'\Phi(x, C_1),$$

где је

$$\Phi(x, C_1) = \int \varphi\left(x, \frac{\varepsilon}{\eta} x + C_1\right) dx$$

тако да ће тражени интеграл бити облика

$$V = \varepsilon\theta'\Phi\left(x, y - \frac{\varepsilon}{\eta} x\right) + \Psi\left(y - \frac{\varepsilon}{\eta} x\right)$$

где је $\Psi(t)$ једна, погодно изабрана, функција само једне променљиве t.

Поступак се примењује, истом лакоћом, на општу једначину

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и доводи до сличног израза за интеграл V у сваком домену простора са n независних променљивих $x_1, \ldots, x_n$ у коме је интеграл V реалан и где је сваки делимичан извод $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ сталног знака; интеграл V се може написати

$$V = \Psi + \theta\Phi$$

где су Ψ и Φ функције променљивих $x_1, \ldots, x_n$ познатог облика и где је θ један чинилац садржан између 1 и $\sqrt{n}$.

ВЕЗА ИЗМЕЂУ ПРОСТИХ БРОЈЕВА И ЈЕДНЕ КЛАСЕ ТРАНСЦЕНДЕНАТА*

У мојим ранијим радовима[1] проучене су трансценденте представљене бескрајним редовима облика

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
J(x) &= 1 + \frac{\alpha_1}{1!}x + \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \frac{\alpha_3}{3!}x^3 + \dots \\
J_1(x) &= 1 - \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \frac{\alpha_4}{4!}x^4 - \dots \\
J_2(x) &= \frac{\alpha_1}{1!}x - \frac{\alpha_3}{3!}x^3 + \frac{\alpha_5}{5!}x^5 - \dots,
\end{aligned}
$$

где је општи коефицијенат α_n дефинисан обрасцем

$$
(2)\qquad \alpha_n = \frac{1}{A}\int_a^b ur^n dt \qquad A = \int_a^b u dt,
$$

а где u и r означавају две ма које функције променљиве t које су реалне, коначне и непрекидне за вредност t што се налазе у реалном и ограниченом размаку интеграције (a, b).

Тада је очевидно

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. CXX, Први разред, књ. 55, Београд 1926, стр. 1–17. Приказано на скупу Академије природних наука 1. фебруара 1926. године.

[1] *Sur des transcendantes entières généralisant les fonctions exponentielles et trigonometriques* (Compt. rend. de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 156. № du 21. Avril 1913). *Séries hypertrigonometriques* (Compt. rend. de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 156. № du 16. Juin 1913). *Интерполација и интеграција помоћу једне класе одређених интеграла* (Глас XCI Срп. Краљ. Академије). – *Fonctions entières se rattachant aux nombres premiers* (Compt. rend. de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 168. № du 17. Mars 1919).

$$
\begin{aligned}
J(x) &= \frac{1}{A}\int_a^b u(t)e^{rx}dt \\
J_1(x) &= \frac{1}{A}\int_a^b u(t)\cos rx\,dt \qquad (3)\\
J_2(x) &= \frac{1}{A}\int_a^b u(t)\sin rx\,dt.
\end{aligned}
$$

Функције (1) везане су релацијом

$$J_1(x)+iJ_2(x)=J(xi), \tag{4}$$

а у специјалном случају кад је r = const. своде се на елементарне функције

$$J(x)=e^{rx} \qquad J_1(x)=\cos rx \qquad J_2(x)=\sin rx. \tag{5}$$

У случају кад је r функција променљиве t, те функције имају многе особине сличне особинама функција (4) и могу се, са те тачке гледишта, сматрати као генерализације елементарних експоненцијалних и тригонометријских функција.

У наведеним расправама показано је да су функције (1) корисни помоћни рачунски елементи, који се, између осталога, могу применити на тачну или приближну интеграцију појединих типова диференцијалних, функционалних или мешовитих једначина. Оне су, по себи, подесне за бројна израчунавања или за проучавање њихових разних особина непосредно на њиховим аналитичким изразима (1) или (3).

Предмет овога рада биће једна пространа класа функција $J_1(x)$ и $J_2(x)$ *чије особине стоје у вези са простим бројевима.* Добијени резултати су, уосталом, више од аналитичког но од аритметичког интереса. Они ће, међутим, имати нарочити аритметички интерес кад се буду нашле практичне методе за бројно израчунавање функција $J_1(x)$ и $J_2(x)$ за дату вредност променљиве x, а са приближношћу каква се буде хтела.

*

Функције које се овде имају у виду јесу функције $J_1(x)$ и $J_2(x)$ чији су коефицијенти α_n реда (1) што им одговара дати општим обрасцем

$$\alpha_n=\frac{1}{A}\int_0^{2\pi}u(t)t^n dt \qquad A=\int_0^{2\pi}u(t)dt, \tag{5}$$

где је функција $u(t)$ дефинисана на овај начин:

Нека је $f(z)$ једна ма која функција променљиве z, холоморфна у кругу C описаног са полупречником $r = 1$ око тачке $z = 0$, као и на самој периферији тога круга, а за коју сви коефицијенти реда

$$f(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots$$

имају свој реални део *позитиван.*

Нека је

$$A_2, A_3, A_4, \dots \tag{6}$$

један ма који низ *реалних и позитивних* бројева такав да ред

$$A_2 + A_3 + A_4 + \dots \tag{7}$$

буде конвергентан.

Означимо са $\varphi(t)$ реални део функције

$$z^2 f(z) \text{ променљиве } z = re^{ti}$$

на кругу C и узмимо за $u(t)$ функцију

$$u(t) = \sum_{n=0}^{n=x} A_{n+2} \varphi\left[(n+2)t\right]. \tag{8}$$

Образац (5) тада дефинише један низ бројева

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

а ови, према обрасцима (1) или (3), дефинишу једну класу функција $J_1(x)$ и $J_2(x)$ које ћемо означити са $U(x)$ и $V(x)$, тако да функцији U одговара други, а функцији $V(x)$ трећи ред (1). Те се функције, према томе, могу изразити и одређеним интегралима

$$U(x) = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} u(t) \cos xt \, dt \tag{9}$$

$$V(x) = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} u(t) \sin xt \, dt, \tag{10}$$

где је

$$A = \int_0^{2\pi} u(t) \, dt \tag{11}$$

и оне су међу собом везане релацијом

$$U(x)+iV(x)=W(xi), \tag{12}$$

где је

$$W(x)=\frac{1}{A}\int_0^{2\pi} u(t)e^{xt}dt. \tag{13}$$

Ми ћемо сад доказати ову значајну особину функција U и V:

То су целе функције променљиве x, *прве врсте* (genre = 1), *које постају једнаке нули за сваки позитиван или негативан прост број* x, *а добијају вредности различне од нуле за сваки позитиван или негативан сложен број* x.

Да бисмо то доказали, приметимо да је $\varphi(t)$ једна функција променљиве t коначна и периодична, са периодом 2π, непрекидна у размаку $(0, 2\pi)$ променљиве t, и да ће за све вредности t имати за свој тригонометријски ред

$$\varphi(t)=\sum_{m=2}^{m=\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx), \tag{14}$$

где је a_m реални, а b_m имагинарни део коефицијената h_{m-2}.

Према томе је

$$u(t)=\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2} A_n(a_m\cos mnt+b_m\sin mnt) \tag{15}$$

тако, да ако се краткоће ради стави да је

$$C_k(x)=\int_0^{2\pi}\cos kt\cdot\cos xt\cdot dt=\frac{2x}{x^2-k^2}\sin 2\pi x \tag{16}$$

$$S_k(x)=\int_0^{2\pi}\sin kt\cdot\cos xt\cdot dt=\frac{2k}{k^2-x^2}\sin^2\pi x \tag{17}$$

биће

$$U(x)=P(x)+Q(x), \tag{18}$$

где је

$$P(x)=\frac{1}{A}\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2}^{n=\infty}a_mA_nC_{mn}(x) \tag{19}$$

(20) $$Q(x) = \frac{1}{A}\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2}^{n=\infty} b_m A_n S_{mn}(x).$$

Функција $S_k(x)$ постаје једнака нули кад x има за вредност ма који цео број; функција $C_k(x)$ постаје једнака нули за све целе бројеве x осим за $x = k$, у коме случају она има за вредност 2π. Према томе, функција $Q(x)$ постаје једнака нули за све целе бројеве x, а за функцију $P(x)$ то вреди само кад је x цео број.

Тиме је показано да функција $U(x)$ постаје једнака нули за сваки број x (позитиван или негативан), а да је различна од нуле за сваки број x (позитиван или негативан).

Са друге стране, из обрасца (5) види се, пошто функција $u(t)$ остаје коначна на периферији круга C, да је модуо коефицијента степена x^{2n} у $U(x)$ увек мањи од

(21) $$\frac{M(2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

где M означава највећи модуо функције $u(t)$ на кругу C. Према познатој теореми из теорије функција то показује да је $U(z)$ *цела* функција нулте или прве врсте. Али, бескрајни ред S који има за чланове реципрочне вредности модула нула те функције састоји се из два дела: један састављен из нула које су прости бројеви, а други из осталих нула ако их буде било. Међутим, и сам први део представља један дивергентан ред, пошто је ред

$$\sum \frac{1}{p}$$

распрострт на све просте бројеве p, дивергентан. То показује да је и ред S дивергентан, па да према томе $U(x)$ не може бити нулте врсте, тј. да је то функција *ӣрве* врсте, чије је горње тврђење доказано.

На сасвим сличан се начин доказује исти резултат и за функцију $V(x)$, само што тада треба претпоставити да је, на место коефицијента a_m, коефицијенат b_m позитиван. тј. да коефицијенти h_m реда

(22) $$f(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots$$

имају свој коефицијенат од i позитиван

У погледу оптштега тока функција $U(x)$ и $V(x)$ за реалне вредности x, вреди оно што је у наведеним редовима доказано за функције $J_1(x)$ и $J_2(x)$ уопште, а то је:

Те су функције осцилаторне, са бескрајно многим осцилацијама и са бескрајно много реалних, позитивних и негативних нула; осцилације су све слабије уколико x по апсолутној вредности више расте, и обе функције теже нули за $x = \pm\infty$. То опадање бива истом брзином којом опада функција $\frac{1}{x}$. Обе функције не прелазе, по својој апсолутној вредности, једну одређену коначну границу за време док x варира од $-\infty$ до $+\infty$. Све то важи и за изводе тих функција, који су функције исте класе.

Као што је напред показано, функција $U(x)$ има за своје нуле низ простих бројева

(23) $$1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

а нема као нулу ниједан сложен број[2] .Ми ћемо сад доказати да:

Функција U(x) *има поред нула* (23) *још и бескрајно много нула које су разломци, и то да између два ма која узастопна сложена броја постоје разломци који су нуле те функције.*

Јер, према обрасцима (16), (18), (19), (20), ако се, краткоће ради, стави да је

(24) $$R(x) = \sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{a_m A_n}{x^2 - m^2 n^2}$$

(25) $$T(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{x \sin 2\pi x}\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{mnb_m A_n}{x^2 - m^2 n^2}$$

функција

(26) $$H(x) = \frac{A}{2}\frac{U(x)}{x \sin 2\pi x}$$

може се написати у облику

(27) $$H(x) = R(x) - T(x).$$

За један ма који сложен (нпр. позитиван) број c вредности

$$T(c-\varepsilon) \quad \text{и} \quad T(c+\varepsilon)$$

(где је ε врло мали позитиван број) остају коначне, док су вредности

2 Све што се доказује за функцију $U(x)$, доказује се на сличан начин и за функцију $V(x)$, са очевидном незнатном изменом.

$$R(c-\varepsilon) \quad \text{и} \quad R(c+\varepsilon)$$

врло велике, а супротно означене, и то прва негативно, а друга позитивно. То показује, пошто је $H(x)$ негативна функција у размаку између два узастопна сложена броја c и c', да она мора бар један пут проћи кроз нулу за извесну вредност $x=\beta$ што се налази у размаку (c, c'). Множењем функције $H(x)$ функцијом

$$\frac{2}{A}x\sin 2\pi x$$

која постаје једнака нули за

$$(28) \qquad x=\frac{n}{2} \quad (n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)$$

вредност $x=\beta$ остаје нула тако добијеног продукта $U(x)$. Али то множење уводи у функцију $U(x)$ још и других нула: то су све оне вредности (28) које су или прости бројеви, или разломци. Целокупан број нула функције $U(x)$ што лежи у размаку (c,c') *увек је паран.* То излази отуда што, према обрасцима (24) и (25), за ма који сложен број c продукат

$$\frac{2}{A}x\sin 2\pi x\cdot T(x)$$

постаје једнак нули, а продукат

$$\frac{2}{A}x\sin 2\pi x\cdot R(x),$$

па, дакле, и сама вредност $U(c)$, јавља се у облику $\frac{0}{0}$, за који се лако налази да му је права вредност

$$(29) \qquad U(c)=2\pi\sum a_m A_{\frac{c}{m}},$$

где за m треба узети све делитеље броја c осим 1 и c. Та је вредност позитивна за ма који сложен број c, што показује да између $x=c$ и $x=c'$ функција $U(x)$ мења знак паран број пута.

У погледу нула те функције може се доказати још и овај резултат: *Кад год су сви коефицијенти одговарајуће функције*

$$f(z)=h_0+h_1z+h_2z^2+\ldots$$

реални, све су нуле функције U(x) *реалне.*

Јер, пошто су тада сви коефицијенти b_m једнаки нули, биће

$$U(x) = \frac{2}{A} x \sin 2\pi x \cdot R(v) \tag{30}$$

и сваки имагинарни корен $x = \alpha + \beta i$ морао би задовољавати једначину

$$R(x)=0$$

Ако за коефицијенат од i у вредности $R(\alpha+\beta i)$ налази се да би он тада био

$$-2\alpha\beta i \sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{a_m A_m}{(\alpha^2 - \beta^2 - m^2 n^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \tag{31}$$

и он би могао бити једнак нули само кад је

$$\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \beta = 0,$$

тј. кад је корен или реалан, или чисто имагинаран. Претпоставивши овај последњи случај, добија се непосредно да је

$$R(\beta i)=-\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{a_m A_n}{\beta^2 + m^2 n^2}, \tag{32}$$

а та вредност не може бити једнака нули ни за коју реалну вредност β, што показује да $U(x)$ одиста нема имагинарних нула.

Приметимо и то да се помоћу оваквих функција $U(x)$, којима одговарају реални коефицијенти h_k, могу формирати *целе* функције променљиве *x које, као реалне нуле, имају само природни низ простих бројева.*

Јер ако се, краткоће ради, стави да је

$$\frac{2}{A} x \sin 2\pi x = G(x),$$

тако да је

$$U(x) = G(x) \cdot R(x),$$

добија се

$$\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left(\frac{U}{G}\right) = \sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{a_m A_n}{(x^2 - m^2 n^2)^2}$$

или

$$-\frac{G^2}{2x}\frac{d}{dx}\left(\frac{U}{G}\right) = \sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2}^{n=\infty} a_m A_n \left(\frac{G}{x^2 - m^2 n^2}\right)^2,$$

што показује да *цела функција*

$$\frac{1}{2x}\left(U\frac{dG}{dx}-G\frac{dU}{dx}\right) \tag{33}$$

представља једну функцију тражене врсте. Она има, као једине реалне нуле, низ целих простих бројева (позитивних и негативних).

Навешћемо, напослетку, и ову особину функције

$$\frac{dU}{dx}=-\frac{1}{A}\int_0^{2\pi} tu(t)\sin xt\cdot dt \tag{34}$$

која такође припада класи функција (1). Израз

$$F(x)=\frac{U(x)}{2A\sin 2\pi x}=\frac{x}{A}\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{a_m A_n}{x^2-m^2n^2} \tag{35}$$

представља једну мероморфну функцију променљиве x која има за полове природан низ целих сложених бројева. Она је коначна за $x = p =$ цео прост број, за који она добија вредност

$$F(p)=\frac{p}{A}\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{a_m A_n}{p^2-m^2n^2}. \tag{36}$$

А како се она јавља и у облику

$$F(p)=\frac{U(p)}{2A\sin 2\pi p}=\frac{0}{0}=\frac{1}{4A\pi}\frac{dU}{dp}, \tag{37}$$

то се изводи овај резултат:

Извод $\frac{dU}{dp}$, *за* x = *ма коме простом броју* p, *има за вредност*

$$4p\pi\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{a_m A_n}{p^2-m^2n^2}, \tag{38}$$

што не вреди кад се за x узме какав сложен број.

*

Функција $U(x)$ може се изразити још и у једном облику у коме фигурише непосредно функција $f(z)$ од које она зависи и који је, преко те функције, доводи у вези са генералисаним Lambert-овим редовима[3].

Према обрасцу (8) функција $u(t)$ може се сматрати као реални део функције

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} A_n z^{2n} f(z^n) \qquad \text{за } z = e^{ti} \tag{39}$$

из чега излази да је функција $U(t)$ реални део израза

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} A_n L_n(x) \qquad \text{за } z=e^{ti} \tag{40}$$

где је

$$L_n(x) = \int_0^{2\pi} z^{2n} f(z^n) \cos xt \cdot dt. \tag{41}$$

Пошто је

$$\cos xt = \frac{e^{xti} + e^{-xti}}{2} = \frac{z^x + z^{-x}}{2}$$

$$dt = -i\frac{dz}{z},$$

биће

$$L_n(x) = -i\int_C z^{2n-1} f(z^n) \frac{z^x + z^{-x}}{2} dz, \tag{42}$$

где се интерпретација има извршити дуж круга C описаног око тачке $z = 0$ са полупречником једнаким јединици.

Интеграл (42) може се написати у облику

$$L_n(x) = -i\frac{H_n(x) + H_n(-x)}{2}, \tag{43}$$

где је

[3] За тај облик функције $U(x)$ захвалан сам г. Јован Карамати, асистенту за теоријску математику на Београдском универзитету.

$$H_n(x) = \int_C z^{2n-1} f(z^n) z^x dz. \tag{44}$$

Међутим (сл. 1) интеграл дуж круга C једнак је интегралу дуж контуре $abcde$, састављен из двеју правих паралелних осовини Ox и бескрајно блиске овој, и бескрајно малог круга који опкољава тачку $z = 0$.

Према томе је

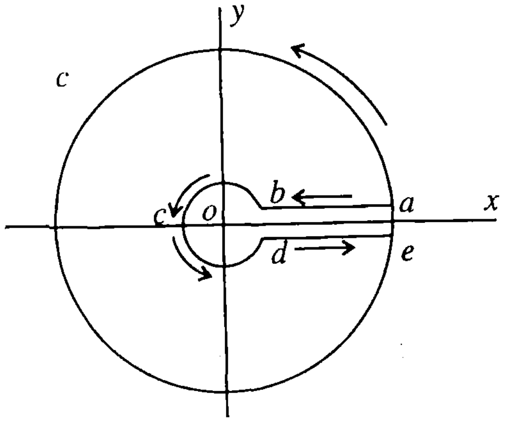
$$H_n(x) = \int_1^0 t^{2n-1} f(t^n) t^x dt + e^{2\pi x i} \int_0^1 t^{2n-1} f(t^n) t^x dt + R, \tag{45}$$

где R означује интеграл (44) узет дуж кружића $abcde$.

Образац (45) предпоставља да је

$$x > -2n \quad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

што ће сигурно бити за све вредности $x > -4$. А тада интеграл R тежи нули кад полупречник кружића тежи нули, тако да се $H_n(x)$ своди на своја прва два члана у обрасцу (45).



Слика 1

Израз за $H_n(-x)$ добија се кад се у обрасцу (45) промени знак променљивој x, што претпоставља да је

$$x < 2n \quad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

а то ће сигурно бити кад је $x < 4$.

Дакле, за све вредности x такве да је

$$-4 < x < 4$$

према обрасцима (42) и (43) биће

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{i}{2}\int_0^1 t^{2n-1} f(t^n)(t^x + t^{-x})\,dt \\ &- \frac{i}{2} e^{2\pi x i}\int_0^1 t^{2n-1} f(t^n)\, t^x dt \\ &- \frac{i}{2} e^{-2\pi x i}\int_0^1 t^{2n-1} f(t^n)\, t^{-x} dt, \end{aligned}$$

из чега се види да реални део функције $L_n(x)$ има за израз

$$\sin 2\pi x \int_0^1 t^{2n-1} f(t^n)\,\frac{t^x - t^{-x}}{2}\,dt. \tag{46}$$

Из тога излази да ако се стави да је

$$\theta(t) = \sum_{n=2}^{n=\infty} A_n f(t^n) t^{2n-1} dt \tag{47}$$

$$\Phi(x) = \int_0^1 t^x \theta(t)\,dt \tag{48}$$

функција се $U(x)$ изражава у облику

$$U(x) = \sin 2\pi x\,\frac{\Phi(x) - \Phi(-x)}{2}. \tag{49}$$

Досадашње извођење претпоставља погодбу

$$-4 < r(x) < 4$$

где $r(x)$ означује реални део вредности x и десна страна једначине (49) представља једну функцију те променљиве холоморфну у области што се налази између двеју правих

$$r(x) - 4 = 0 \quad \text{и} \quad r(x) + 4 = 0.$$

Међутим, та се функција може аналитичким продужавањем проширити на целу раван променљиве x. Тако, нпр., кад би се десна страна обрасца (49) развила у ред по степенима те променљиве, тај би ред био конвергентан у целој равни у којој би представљао функцију $U(x)$.

Функција $\Phi(x)$ може се представити и у облику

(50) $$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-(x+1)t}\theta(e^{-t})dt$$

који је представља у истој области као и образац (48).

*

Приметимо још, завршујући, да функције $U(x)$ и $V(x)$ представљају реални и имагинарни део израза $W(xi)$, где $W(x)$ представља функцију

(51) $$W(x) = \frac{1}{A}\int_0^{2\pi} u(t)e^{xt}dt.$$

Функција $W(x)$ је *цела* функција променљиве x, и то *нулте* или *прве* врсте. За ма коју реалну вредност x она има за вредност

$$u(c)\,e^{hx},$$

где су c и h два броја што леже између 0 и 2π. Она има ограничен број реалних нула, као и ограничен број максимума и минимума. Познати Laguerre-ови ставови о нулама интеграла облика

$$\int_a^b u(t)e^{-xt}dt$$

дају могућности да се одреди једна горња граница за број тих нула, као и максимума и минимума[4].

---

[4] Види наведену расправу у Гласу XCI Српске краљ. академије.

О ИЗЛОЖИОЦУ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ*

ПРВИ ДЕО

I. ИЗЛОЖИЛАЦ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ БРОЈНИХ НИЗОВА

Кад је дат низ позитивних бројева

(1) $$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

који теже нули, тада је *граничнu изложилац конверґенције* λ тога низа дефинисан на следећи начин[1]:

Ма колико мали био позитиван број ε,

(2) $$\text{ред} \quad \sum A_n^{\lambda+\varepsilon} \quad \text{конвергира, а}$$

(3) $$\text{ред} \quad \sum A_n^{\lambda-\varepsilon} \quad \text{дивергира.}$$

На тај начин свакоме низу (1) одговара по један потпуно одређен број λ, када још придодамо да је $\lambda = 0$ кад је ред

$$\sum A_n^{\varepsilon}$$

конвергентан, па ма колико мали био позитиван број ε, а да је $\lambda = \infty$ кад ред

$$\sum A_n^{M}$$

дивергира, па ма колико велики био позитиван број M.

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. CXLIII, Први разред, књ. 70, Београд 1931, стр. 147–167.

[1] A. Pringsheim: *Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung* (Math. Ann. Bd. 58. 1904. s. 257–342).

Pölya-Szegö. *Aufgaben und Lehrsätze*, Bd. I. 1925. s. 19–20.

Кад год број λ није ни једнак нули ни бескрајан, он у довољној мери прецизира аналитичку природу низа (1) у погледу начина на који чланови овога прилазе нули кад n бескрајно расте. Такав је случај нпр. код низа

$$A_n = \frac{1}{n^k} \qquad \left(\text{где је } \lambda = \frac{1}{k}\right)$$

или код низа

$$A_n = \frac{1}{n^k (\log n)^h} \qquad \left(\text{где је такође } \lambda = \frac{1}{k}\right)$$

или, још општије, код низа

$$A_n = \frac{1}{n^k l(n)},$$

где је $l(n)$ једна споро растућа функција од n,[2] а у коме је случају такође

$$\lambda = \frac{1}{k}.$$

Међутим, ако се има посла са једним од поменута два гранична случаја, тада се јавља много већа разноврсност у горњем погледу, тј. у начину опадања низа (1). Тако нпр.: случај $\lambda = 0$ обухвата ове, у томе погледу разноврсне низове

$$A_n = e^{-(\log n)^2},$$
$$A_n = e^{-n},$$
$$A_n = \frac{1}{n!},$$
$$A_n = e^{-n^2} \quad \text{итд.},$$

из чега се види да се може формирати бескрајна скала низова који све брже теже нули, а који сви имају свој гранични изложилац $\lambda = 0$.

Случај кад је $\lambda = \infty$ обухвата нпр. ове низове:

$$A_n = \frac{1}{\log n},$$
$$A_n = \frac{1}{\log\log n},$$
$$A_n = \frac{1}{\log\log\log n},$$

2 Чија се дефиниција може видети у расправи др. Јована Карамате: *Sur un mode de croissance régulière des fonctions* (Mathematica, Vol. IV. p. 38–53, Cluj 1930).

или општије

$$A_n = \frac{1}{l(n)},$$

где је $l(n)$ горе поменута споро растућа функција. Сви ови низови имају као гранични изложилац $\lambda = \infty$ и очевидно се може формирати скала низова који све спорије теже нули. Али из претпоставке да $A_n \to 0$ и према горњим примерима изгледа да је разноврсност таквих низова у горњем погледу мања од оне за $\lambda = 0$. То ће се моћи видети ако, у оба ова гранична случаја, на место једног *сталног* граничног изложиоца λ уведемо један *промењив* изложилац λ_n који би омогућио разликовање нијанса у начину на који одговарајући низови теже нули. То се постиже на следећи начин:

Низ бројева

(4) $$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$$

назваћемо *изложиоцима конвергенције*, а λ_n *изложиоцем конвергенције* низа (1), ако

(5) ред $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ конвергира, а

(6) ред $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ дивергира,

па ма колико мали био позитиван број ε.

Као што се види, гранични изложилац λ само је један специјалан случај тако дефинисаних изложилаца конвергенције и одговара случају кад су сви изложиоци коначни и већи од нуле (што нпр. бива кад су сви они међу собом једнаки). У граничним случајевима, кад је $\lambda = 0$ или $\lambda = \infty$, низ изложилаца конвергенције тежиће нули или бескрајности и брзина опадања, односно растења, чланова тога реда чини могућним разликовање нијанса у брзини опадања самога низа (1).[3]

Додајемо још и ту примедбу да, док λ_n може произвољно брзо тежити нули, тај број не може расти произвољном брзином. Та је брзина ограничена погодбом да израз

---

[3] Напомињемо да је назив изложиоца конвергенције већ употребљен у теорији функција, у радовима наведеним већ под 1) као и у следећим: Von Schaper: *Inaugural Dissertation*, Göttingen 1898; E. Borel: *Leçons sur les fonctions entières*, Paris 1921. p. 18 et 26. Смисао у коме је тај назив овде употребљен шири је од овога и обухвата га као специјални случај.

(7) $$\frac{\lambda_n}{\log n}$$

увек мора тежити нули, а ово излази из услова да A_n тежи нули, што је лако увидети и што ће се видети и из излагања у идућем одељку ове расправе.

II. ИЗЛОЖИЛАЦ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ ЦЕЛИХ ФУНКЦИЈА

Кад је дат ред

(8) $$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

конвергентан у целој равни променљиве z и који, према томе, представља једну *целу* функцију те променљиве, израз

(9) $$A_n = \sqrt[n]{|a_n|}$$

тежи нули кад n бескрајно расте. Изложилац конвергенције λ_n низа A_n зваћемо тада *изложиоцем конверѓенције целе функције* f(z). За тај изложилац можемо узети израз

(10) $$\lambda_n = \frac{n \log n}{\alpha_n},$$

ѓде α_n *означује асимӣѿоѿну вредносѿ израза*

(11) $$\log|a_n|\,.$$

Јер је тада

(12) $$\log|a_n| = \alpha_n(1+\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \to 0,$$

и према томе

(13) $$\lambda_n = -\frac{n \log n}{\log|a_n|}(1+\varepsilon_n),$$

па, дакле,

$$A_n^{\lambda_n} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon_n}},$$

према чему је

$$A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)} = \frac{1}{n^{1+\delta_n}}$$

и

$$A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)} = \frac{1}{n^{1-\delta'_n}},$$

где је

$$\delta_n = \varepsilon(1+\varepsilon_n)+\varepsilon_n$$

и

$$\delta'_n=\varepsilon(1+\varepsilon_n)-\varepsilon_n.$$

Ма колико мали био број ε, из тога што $\varepsilon_n \to 0$ постоје увек такви бројеви $N, \delta > 0$ и $\delta' > 0$ да је

$$\delta_n > \delta, \quad \delta'_n > \delta',$$

за све вредности $n > N$. Према томе је

ред $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ конвергентан, а

ред $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ дивергентан,

тако да израз λ_n, дефинисан обрасцем (10), одиста одговара дефиницији изложиоца конвергенције.

Пошто је за велике вредности n број (11) увек негативан, то је изложилац конвергенције целих функција увек позитиван број. Он може бити сталан или се мењати са рангом n; *у овоме последњем случају он, ако расте, увек ће расти спорије него* log n.

Јер је, из једначине (13),

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n^{-\frac{1+\varepsilon_n}{\lambda_n}} \tag{14}$$

па пошто тај израз тежи нули кад $n \to \infty$, то његов логаритам

$$-\frac{1+\varepsilon_n}{\lambda_n}\log n$$

тежи граници $-\infty$, тј. израз

$$\frac{\lambda_n}{\log n}$$

тежи нули.

Тако се исто лако види *да се изложилац конвергенције не мења ни деривацијом ни интеграцијом функције.* Јер се из једначине

$$f'(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + \ldots,$$

где је

$$a'_n = (n+1)a_{n+1},$$

види да се за велике вредности n израз $\sqrt[n]{|a'_n|}$ понаша као $\sqrt[n]{|a_n|}$, тј. одговарајући A'_n понаша се као A_n; дакле, ред је $\sum A_n'^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ конвергентан, ако је ред $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ конвергентан, а ред $\sum A_n'^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ је дивергентан ако је ред $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ дивергентан.

На исти је начин очевидно и то да се λ_n не мења ни интеграцијом реда.

Упоредимо међу собом два реда

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

и

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots,$$

који представљају две целе функције $f(z)$ и $\varphi(z)$. Нека су λ_n и μ_n њихови изложиоци конвергенције, па се налази да:

Кад год је, почевши од једне вредности n, *непрестано* $|b_n| < |a_n|$, *биће* $\mu_n \leq \lambda_n$.

Јер, означивши са α_n и β_n асимптотне вредности израза $\log|a_n|$ и $\log|b_n|$, биће

$$\lambda_n = -\frac{n\log n}{\alpha_n} \quad \text{и} \quad \mu_n = -\frac{n\log n}{\beta_n}.$$

Ако је, почевши од једне вредности n, непрестано $|b_n| < |a_n|$, онда пошто је, почевши такође од једне вредности n, непрестано

$$|a_n| < 1, \quad |b_n| < 1,$$

биће по апсолутној вредности, за довољно велике вредности n

$$\log|b_n| > \log|a_n|,$$

па, дакле, опет по апсолутној вредности

$$\beta_n > \alpha_n,$$

што показује да је $\mu_n < \lambda_n$. И обратно:

Кад год је $\mu_n < \lambda_n$, *биће почевши од извесне вредности* n *непрестано* $|b_n| < |a_n|$.

Јер, кад год је $\mu_n < \lambda_n$, мора бити $B_n > A_n$, где је

$$B_n = \sqrt[n]{|b_n|},$$

тј. почевши од једне вредности n мора бити по апсолутној вредности

$$\log|b_n| > \log|a_n|.$$

Па пошто је од извесног ранга n непрестано

$$|a_n| < 1, \quad |b_n| < 1,$$

биће, почевши од извесног ранга n непрестано $|b_n| < |a_n|$.

То у исто време показује да:

Кад год је изложилац конверґенције функције φ *мањи од изложиоца функције* f, *функција ће* φ *бити мајорирана сваком оном функцијом* Φ *којом буде мајорирана функција* f.

Очевидно је и то да:

Кад год су логаритми коефицијената a_n *и* b_n, *за велике вредности* n, *количине истога реда, биће* $\lambda_n = \mu_n$.

Изложилац конвергенције λ_n може се непосредно узети за мерило брзине конвергенције реда (8). Ред ће утолико брже конвергирати, уколико је λ_n мањи, тј. уколико је број $\frac{1}{\lambda_n}$ већи за једну исту довољно велику вредност n.

Број

$$\tau_n = \frac{1}{\lambda_n} \tag{15}$$

зваћемо, стога, *брзином конверґенције* реда (8); та брзина има, дакле, за израз

$$\tau_n = \frac{\alpha_n}{n \log n}. \tag{16}$$

Асимптотна вредност логаритма модула коефицијента a_n *реда* (8) *једнака је тако дефинисаној брзини конверґенције* τ_n *помноженој изразом* $-n\log n$.

То излази из обрасца (13) из кога је

$$\alpha_n = -n\,\tau_n \log n, \tag{17}$$

$$\frac{\log|a_n|}{-n\,\tau_n \log n} = 1 + \varepsilon_n \to 1. \tag{18}$$

III. ПРИМЕРИ ИЗЛОЖИЛАЦА И БРЗИНЕ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ

Изложилац конвергенције за функцију

$$f(z)=\sum \frac{z^n}{n^{\alpha n}} \quad (\alpha = \text{const.})$$

сталан је и једнак броју $\frac{1}{\alpha}$.

Тако исто, пошто је

$$\log(n!)$$

за велике вредности n, количина истога реда као и

$$\log(n^n),$$

гранични изложилац Bessel-ове функције

$$f(z)=\sum \frac{z^n}{(n!)^\alpha}, \quad (\alpha = \text{const.})$$

сталан је и једнак броју $\frac{1}{\alpha}$. Тако нпр. изложилац експоненцијалне функције e^z једнак је јединици.

У оба ова примера изложилац конвергенције сталан је и поклапа се са граничним изложиоцем одговарајућег низа A_n. Напротив, за елиптичку трансценденту

$$f(z)=\sum q^{n^2} z^n, \quad |q|\leq 1,$$

изложилац је променљив и мења се по закону

$$\lambda_n = -\frac{\log n}{n\log q}.$$

Тако исто, пошто је, као што је познато, за функцију

$$e^{e^z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{19}$$

модуо коефицијента a_n мањи од

$$\left(\frac{e}{\log n}\right)^n,$$

и пошто за ред

$$\sum\left(\frac{e}{\log n}\right)^n z^n,$$

изложилац има за израз

$$(20) \qquad \lambda_n = \frac{\log n}{\log\log n},$$

изложилац функције (19) је мањи од вредности (20).

И уопште, као што је познато[4], за функцију

$$(21) \qquad e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^z}}}} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

(где је број суперпонираних експоненцијалних функција једнак p), општи је коефицијенат a_n по своме модулу мањи од одговарајућег коефицијента реда

$$(22) \qquad \sum\left(\frac{e}{\log\log\ldots\log n}\right)^n z^n$$

(где је број суперпонираних логаритама једнак $p-1$). Па пошто је за ред (22)

$$(23) \qquad \lambda_n = \frac{\log n}{\log\log\ldots\log n}$$

(где је број суперпонираних логаритама једнак p), то је изложилац конвергенције реда (22) мањи од вредности (23).

Редови

$$e^z, \quad \sum\frac{z^n}{n^{\alpha n}}, \quad \sum\frac{z^n}{(n!)^p}$$

конвергирају сталном брзином 1, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{p}$.

Ред

$$f(z) = \sum e^{-\alpha n^2 \log n} z^n$$

конвергира једнако убрзано, тј. са сталним убрзањем α, јер је

$$\tau_n = \alpha n.$$

---

4 J. Hadamard: *Étude sur les propriétés des fonctions entières* etc. (Journal des mathématiques pures et appliquées, 4-e série, t. IX. 1893. p. 184).

Ред

$$f(z)=\sum e^{-\alpha n^3 \log n} z^n,$$

за који је

$$\tau_n=\alpha n^2,$$

конвергира са униформно растућим убрзањем $2\alpha n$.

Ред

$$f(z)=\sum q^{n^2} z^n$$

конвергира са растућом брзином

$$\tau_n=-\frac{n\log q}{\log n},$$

а са опадајућим убрзањем.

Ред

$$f(z)=\sum e^{-\frac{\alpha n(\log n)^2}{\log\log n}} z^n$$

конвергира са опадајућом брзином

$$\tau_n=\frac{\alpha\log\log n}{\log n}$$

и са опадајућим убрзањем.

Као што се види из ових примера, ред може конвергирати са *сталном, растућом* или *опадајућом* брзином; тако исто *убрзање конвергенције* може бити стално, растуће или опадајуће. За растење брзине конвергенције не постоји никакво ограничење: брзина може бескрајно расти по каквом се год хоће закону и брже од ма које дате функције броја n. Али за *опадање* брзине постоји једно ограничење као последица напред наведеног става за брзину растења граничног изложиоца λ_n који, у случају кад је растућа функција броја n, увек расте спорије него $\log n$. Према томе:

Кад год ред конвергира са опадајућом брзином, ова опада спорије него израз $\frac{1}{\log n}$. Другим речима: производ

$$\tau_n \log n$$

бескрајно расте кад $n\to\infty$.

Приметимо такође да према ономе што је напред казано кад се међу собом упореде два реда

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$$

и

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$

чије су брзине конвергенције τ_n и τ'_n, излази да:

Кад год је, почевши од једнога ранга n, *непрестано* $|b_n| < |a_n|$, *биће и* $\tau_n > \tau'_n$; *и обрнуто, кад год је* $\tau_n > \tau'_n$, *почевши од једнога ранга* n, *биће непрестано* $|b_n| < |a_n|$.

IV. ИЗЛОЖИЛАЦ И БРЗИНА КОНВЕРГЕНЦИЈЕ ЗА НЕКОЛИКЕ ОПШТЕ КЛАСЕ ЦЕЛИХ ФУНКЦИЈА

I. *Свака цела функција* f(z), *дефинисана канонским производом примарних фактора коначне врсте, има један коначан гранични изложилац конвергенције.*

Јер, као што се зна, за такве је функције

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{M}{n^{\beta}}$$

(где су M и β две позитивне константе), па је, дакле,

$$-\log|a_n| > \beta n \log n - n \log M, \qquad -\alpha_n > \beta n \log n,$$

и према томе

$$\lambda_n < \frac{1}{\beta}.$$

II. Нека је $f(z)$ ма која функција за коју је коефицијенат a_n каква детерминанта Δ_n, n-тога реда, чији елементи могу бити реални или имагинарни, али су такви да двоструки ред састављен од квадрата њихових модула конвергира; *свака таква функција* f(z) *има један коначан гранични изложилац конвергенције.*

Јер, ако се са s_k^n означи збир квадрата модула елемената k-тог стуба детерминанте Δ_n, биће према Hadamard-овој теореми о максимуму детерминанте

$$|a_n| < \sqrt{s_1^n s_2^n \ldots s_k^n},$$

и утолико пре

$$|a_n| < \frac{(s_1^n + s_2^n + \ldots + s_k^n)^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}}.$$

Ако се, дакле, са B^2 означи збир конвергентног реда

$$s_1'' + s_2'' + s_3'' + \dots,$$

биће

$$|a_n| < \frac{B''}{n^{\frac{n}{2}}}, \quad (n \geq 1),$$

из чега излази да је

$$\lambda_n < 2.$$

За све функције $f(z)$, обухваћене ставовима I и II, улогу мајорентне функције игра трансцендента

$$\Phi(z) = \sum \frac{z^n}{n^{\alpha n}}$$

која је била предмет мојих ранијих испитивања[5].

III. Нека је $f(z)$ функција дефинисана редом

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

са реалним позитивним коефицијентима и који има ту особину да свака од једначина

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = 0, \\
&a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 = 0, \\
&a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

има све своје корене реалне.

За сваку такву функцију f(z) *изложилац конвергенције не опада спорије него*

$$\frac{\log n}{n},$$

а брзина конвергенције не расте спорије од

$$\frac{n}{\log n}.$$

Јер ако се изрази да су корени квадратне једначине, која се добија ставивши да је једнак нули $(n-2)$-ги извод n-тога полинома (19), реални, добија се неједначина

[5] M. Petrovitch: *Une transcendante entière et son rôle d'élément de comparaison* (Annales de l'École Normale Supérieure, t. 31. 3-e série, 1914. p. 441–454).

$$(n-1)a_{n-1}^2 - 2na_n a_{n-2} > 0,$$

која доводи до низа неједначина

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{n-1}{2n}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}},$$
$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} < \frac{n-2}{2(n-1)}\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{a_2}{a_1} < \frac{1}{2\cdot 2}\frac{a_1}{a_0}.$$

Међусобним множењем тих неједначина добија се неједначина

$$\frac{a_n}{a_1} < \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}na_0},$$

која доводи до

$$a_n < \frac{a_0}{n!\,2^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n,$$

а ова се неједначина може написати у облику

$$a_n < \frac{a_0 h^n e^{-gn^2}}{n!}, \tag{24}$$

где су h и g позитивне константе чије су вредности

$$g = \frac{a_1\sqrt{2}}{a_0} \quad \text{и} \quad h = \frac{\log 2}{2}.$$

Неједначина

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n,$$

претвара (24) у

$$a_n = \frac{a_0 c^n e^{-gn^2}}{(n+1)^n},$$

где је c позитивна константа. Одакле је

$$-\log a_n > n\log(n+1) + gn^2 - n\log c - \log a_0,$$

и према томе

$$-\alpha_n > gn^2,$$

па, дакле,

$$\lambda_n < \frac{1}{g}\frac{\log n}{n}, \quad \tau_n > g\frac{n}{\log n}.$$

Мајорентна функција за све такве функције $f(z)$ је трансцендента

$$\Phi(z) = \sum_0^\infty e^{-\alpha n^2} z^n$$

која игра познату улогу у теорији елиптичких функција. То је цела функција нулте врсте, као и ма која њена линеарна комбинација са полиномима по z.

IV. *Изложилац конвергенције целих функција*

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

са рационалним коефицијентима a_n, *које задовољавају какву диференцијалну једначину коначног реда, алгебарску по*

$$z, y, \frac{dy}{dz}, \frac{dy^2}{dz^2}, \ldots,$$

никада не опада брже него $\frac{1}{\log n}$; *брзина конвергенције реда никад не расте брже него* $\log n$.

Став је непосредна последица теореме коју је доказао г. Pólya[6] да за такве редове израз

$$\gamma_n = \frac{\log|a_n|}{n(\log n)^2} \sim \frac{\alpha_n}{n(\log n)^2}$$

остаје коначан кад n бескрајно расте; довољно је приметити да су γ_n, λ_n, τ_n међу собом везани релацијама

$$\gamma_n = -\frac{1}{\lambda_n \log n} = -\frac{\tau_n}{\log n}.$$

Према ономе што је напред казано, изложилац конвергенције за редове y не може, дакле, ни расти спорије од $\log n$ ни опадати брже од

[6] G. Pólya: *Ueber das Anwachsen von ganzen Funktionen die einer Differenzial-Gleichung genügen* (Vierteljahrschrift der Naturf. Ges. im Zürich, Jahrg. 61. s. 531–545).

$\frac{1}{\log n}$. Тако исто, брзина конвергенције y не може ни опадати спорије

него $\frac{1}{\log n}$, ни расти брже од $\log n$.

*

Изложилац конвергенције λ_n представља један нарочити израз начина на који се понаша коефицијенат a_n реда $f(z)$ за велике вредности n. Он је у непосредној вези са асимптотном вредношћу тога коефицијента и природно је да се све оно што међу појединостима и особинама реда и функције $f(z)$, зависи од таквих елемената може разазнати на самоме изразу λ_n.

Зна се нпр. да су са асимптотном вредношћу a_n у вези извесне опште појединости функције $f(z)$, као што су: врста (genre) функције, брзина њеног растења кад z бескрајно расте, њене асимптотне вредности за велике вредности z, густина и распоред нула функције и др. Ове се појединости могу разазнати на самоме изразу λ_n, односно на изразу брзине конвергенције, и то са већом прецизношћу но кад се посматра сама асимптотна вредност a_n. То долази отуда што, као што је напред казано, низ изложилаца

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

чини могућним разликовање нијанса у начину на који чланови реда $f(z)$ прилазе нули, кад њихов ранг n бескрајно расте, а које се нијансе не истичу на самоме изразу асимптотне вредности коефицијента a_n који се обично посматра у истраживањима аналитичких појединости целих функција.

Везе између особина целих функција $f(z)$ и њихових изложилаца конвергенције λ_n биће предмет другога дела овога рада.

ТЕОРЕМА О КРИВОЛИНИЈСКИМ ИНТЕГРАЛИМА*

1. Према добро познатој Darboux-овој теореми интеграл

$$I = \int_L f(z)\, dz \tag{1}$$

узет дуж пута L на коме је функција $f(z)$ холоморфна може се написати у облику

$$I = \lambda \cdot f(\xi) \cdot s, \tag{2}$$

где је s дужина пута, ξ афикс једне тачке тог пута а λ афикс једне тачке унутар круга полупречника 1 који има координатни почетак као центар.

Намеран сам показати да, под извесним условима, *Darboux-ов фактор* λ *може бити замењен једним прецизнијим фактором* μ *који представља афикс једне тачке унутар кружног прстена између два круга фиксираних полупречника који имају координатни почетак као центар.*

Тако ће се имати не само *горња* граница (она Darboux-ова) но и *доња* граница интеграла I коју не даје ниједна сада позната теорема. Шта више две границе кружног прстена су стварно достигнуте у посебним случајевима.

Претпоставимо најпре да је пут интеграције L такав да дуж тог пута интегрални елемент $f(z)\,dz$[1] не мења квадрант омеђен ортогоналним осама координата xOy у равни променљиве z.

Нека је

---

* Наслов оригинала *Théorème sur les intégrales curvilignes*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1933, t. II, pp. 45–59.

[1] Другачије речено, аргумент броја $f(z)\dfrac{dz}{ds}$.

$$z = x + yi, \quad f(z) = f(x+yi) = P + Qi,$$
$$f(z)dz = M + Ni,$$

где је

$$M = Pdx - Qdy, \quad N = Qdx + Pdy. \tag{3}$$

Ставимо, скраћивања ради,

$$\int_L M = \int_L (Pdx - Qdy) = U, \quad \int_L N = \int_L (Pdy + Qdx) = V \tag{4}$$

и означимо са M', N', U', V' редом апсолутне вредности реалних количина M, N, U, V. Биће

$$\left| f(z)\,dz \right| = \left| M + Ni \right| = \sqrt{M^2 + N^2} = \sqrt{M'^2 + N'^2} = \lambda(M' + N') \tag{5}$$

где је λ чинилац који се налази између $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1. Због тога ће бити

$$\int_L \left| f(z)\,dz \right| = \int_L \lambda(M' + N'), \tag{6}$$

па, будући да су M', N' реални и позитивни, општа теорема о средњој вредности даје

$$\int_L \left| f(z)\,dz \right| = \theta\left[\int_L M' + \int_L N'\right], \tag{7}$$

где је θ чинилац који се налази између $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1.

С друге стране ће бити

$$\begin{aligned} |I| &= \left|\int_L (M + Ni)\right| = \left|\int_L M + i\int_L N\right| = \left| U + iV \right| = \\ &= \sqrt{U^2 + V^2} = \sqrt{U'^2 + V'^2} = \theta'(U' + V'), \end{aligned} \tag{8}$$

где је θ' такође чинилац који се налази између $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1.

Како M и N не мењају знак дуж лука L, јесте

$$(9)\qquad \begin{aligned}\int_L M' &= \int_L \text{val.abs.} M = \text{val.abs.} \int_L M,\\ \int_L N' &= \int_L \text{val.abs.} N = \text{val.abs.} \int_L N,\end{aligned}$$

$$(10)\qquad \begin{aligned}U' &= \text{val.abs.} U = \text{val.abs.} \int_L M = \int_L M',\\ V' &= \text{val.abs.} V = \text{val.abs.} \int_L N = \int_L N',\end{aligned}$$

и отуда, на основу (8),

$$(11)\qquad |I| = \theta'\left(\int_L M' + \int_L N'\right).$$

Делећи (11) са (7), налази се

$$\frac{|I|}{\int_L |f(z)\,dz|} = \frac{\theta'}{\theta} = \theta'',$$

или

$$(12)\qquad \left|\int_L f(z)\,dz\right| = \theta'' \int_L |f(z)\,dz|,$$

где је θ'' чинилац који се налази између $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2}$. Но, како први члан у (12) не премаша никада вредност

$$\int_L |f(z)\,dz|,$$

може се писати

$$(13)\qquad \left|\int_L f(z)\,dz\right| = \eta \int_L |f(z)\,dz|,$$

где се η налази између $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1.

С друге стране је

$$|f(z)\,dz| = |f(z)|\cdot|dz| = |f(z)|\,ds,$$

где је ds елемент лука L. Биће, дакле,

$$\int_L |f(z)\,dz| = \int_0^s |f(z)|\,ds$$

па се интеграл из другог члана у (13) пише, на основу опште теореме о средњој вредности, у облику

$$(14) \qquad \int_L |f(z)|\,ds = |f(\xi)|\,s,$$

где је ξ афикс неке тачке која се налази на луку L између његова два краја (x_1, y_1) и (x_2, y_2), а s дужина лука L између тих крајева.

Ако се тада са α означи аргумент интеграла I, биће, на основу (13),

$$(15) \qquad I = |I|\,e^{\alpha i} = \eta e^{\alpha i}\int_L |f(z)\,dz|.$$

Исто тако, означавајући са β аргумент од $f(\xi)$, добиће се

$$f(\xi) = |f(\xi)|\,e^{\beta i},$$
$$|f(\xi)| = f(\xi)\,e^{-\beta i},$$

и отуда, према (15)

$$I = \mu f(\xi)\cdot s,$$

$$\mu = \eta e^{(\alpha-\beta)i}.$$

Дакле, μ је афикс неке тачке која се налази у прстенастој области (C) омеђено, двама круговима чији су полупречници $\frac{1}{\sqrt{2}}$ а 1 центри у координатном почетку.Тако се долази до теореме која следи.

Сваки пут када дуж лука интеграције L *интегрални елемент* f(z) dz *не мења квадрант омеђен ортогоналним координатним осама у* z – *равни, интеграл*

$$I = \int_L f(z)\,dz$$

има за вредносӣ

$$I = \mu \cdot |f(\xi)| s, \tag{16}$$

īде је s *дужина лука* L, ξ *афикс неке ӣачке смешӣене на* L, *а* μ *афикс неке ӣачке која се налази у унуӣрашњосӣи кружноī ӣрсӣена између круīова ӣолуӣречника* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *и* 1 *са координаӣним ӣочеӣком као ценӣром.*

2. Услов претходне теореме, то јест услов да интегрални елемент не мења квадрант координатних оса, испуњаваће увек лук L дуж кога су промене x-а монотоне и који, кад му је једначина $y = \varphi(x)$, не сече између својих крајева (x_1, y_1) и (x_2, y_2) ни једну ни другу од две криве

$$\begin{aligned} P(x, y) - \varphi'(x) Q(x, y) &= 0, \\ Q(x, y) + \varphi'(x) P(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Овај услов ће, на пример, испуњавати одсечек праве (z_1, z_2) који између z_1 и z_2 не сечу ни једну ни другу од две криве

$$\begin{aligned} P(x, y) - aQ(x, y) &= 0, \\ Q(x, y) + aP(x, y) &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где константа a има за вредност

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Посматрајмо пут L састављен од два одсечка правих, први је паралелан оси Ox и пролази кроз z_1, други је паралелан оси Oy и пролази кроз z_2 пута L. Дуж првог одсечка је

$$\begin{aligned} M &= P(x, y_1), \\ N &= Q(x, y_1) \end{aligned}$$

а дуж другог

$$\begin{aligned} M &= -Q(x_2, y), \\ N &= P(x_2, y). \end{aligned}$$

Дакле, један такав пут ће задовољавати услове теореме сваки пут кад:

1. ни $P(x, y_1)$ ни $Q(x, y_1)$ не мења знак док се x мења од x_1 до x_2;
2. ни $P(x_2, y)$ ни $Q(x_2, y)$ не мења знак док се y мења од y_1 до y_2.

Исто тако се налази да ће исте услове испуњавати пут L састављен од два одсечка правих, први је паралелан оси Ox и пролази кроз z_2 а други паралелан оси Oy и пролази кроз z_1, сваки пут кад:

1. ни $P(x_1, y)$ ни $Q(x_1, y)$ не мења знак док се y мења од y_1 до y_2;
2. ни $P(x, y_2)$ ни $Q(x, y_2)$ не мења знак док се x мења од x_1 до x_2.

Један довољан услов да би један пут L био природе претпостављене теоремом може се исказати у геометријском облику као што следи.

Посматрајмо, у равни POQ функције $f(z)$, криву G симетричну, у односу на осу OQ, кривој која представља $f(z)$ (претпостављајући да је ортогонални систем POQ оријентисан тако да оса OP буде паралелна оси Ox система xOy).

Угао α вектора положаја тачке (P, Q) криве G и угао β правца управног на тај вектор дати су формулама

$$\text{(19)} \qquad \mathrm{tg}\alpha = -\frac{Q}{P}, \quad \mathrm{tg}\beta = \frac{P}{Q}.$$

Да се M не анулира дуж L довољно је да се дуж тог лука извод $\frac{dy}{dz}$ стално разликује од $\frac{P}{Q}$, то јест да се правац тангенте у свакој тачки лука L разликује од правца управног на вектор положаја одговарајуће тачке криве G.

Да се N не анулира дуж L довољно је да се дуж тог лука $\frac{dy}{dx}$ стално разликује од $-\frac{Q}{P}$, то јест да се правац тангенте у свакој тачки лука L разликује од правца вектора положаја одговарајуће тачке криве G. Зато:

Интеграални елеменат неће мењати квадрант дуж читавог лука L *дуж кога ниједна тангента и ниједна нормала тог лука нису паралелне вектору положаја одговарајуће тачке криве* G.

3. Подсећам сада да сам у једном ранијем раду[2] (13) доказао сличну неједнакост за коначне збирове, наиме:

Кад су сви бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *смештени у један исти квадрант координатних оса, тад је*

[2] *Module d'une somme* (Enseignement mathématique XIX, p. 53–56 Genève 1917).

$$(20) \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \eta \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

где је η *један чинилац који се налази између* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *и* 1.

Очито је да се из ове релације изводи релација слична (13) узимајући

$$(21) \qquad a_k = f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где су z_k и ξ_k афикси тачака поделе пута L, такве да се ξ_k налази између z_{k-1} и z_k. Довољно је пустити да n тежи бесконачности тако да сва растојања $|z_k - z_{k-1}|$ теже нули.

Међутим, релација (20) је погодна за следеће уопштење које допушта да се уопшти релација (13).

Кад су сви бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *смештени у један угао отвора* $\lambda < \pi$ *са теменом у координатном почетку, важи двострука неједнакост*

$$(22) \qquad \cos\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n}|a_k| \le \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|a_k|.$$

Друга од ових неједнакости је очита. Да бисмо доказали прву, ставимо

$$a_j = \rho_j e^{\theta_j i} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

и тражимо минимум израза

$$T = \frac{|\rho_1 e^{\theta_1 i} + \rho_2 e^{\theta_2 i} + \ldots + \rho_n e^{\theta_n i}|}{\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n}$$

кад је

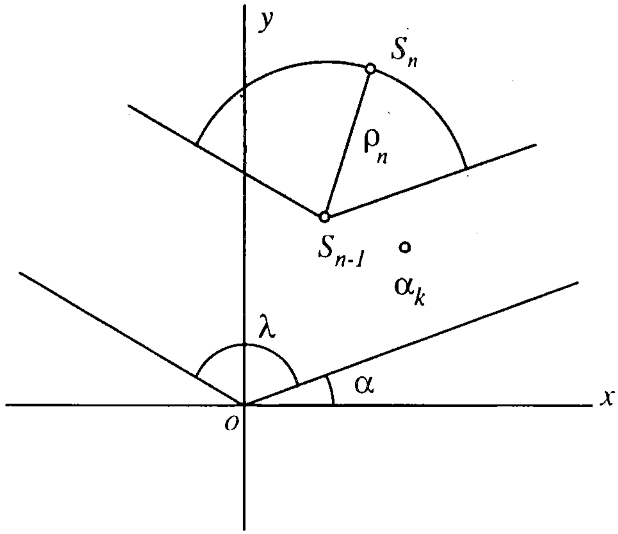
$$\rho_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

и

$$(23) \qquad \alpha \le \theta_1 \le \alpha + \lambda \le \alpha + \pi \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Претпоставимо најпре да су ρ_j фиксирани. Да би израз T, и отуда израз

$$|S_n| = \left| \sum_{j=1}^{n} \rho_j e^{\theta_j} \right|$$



узео своју најмању вредност под условима (23), треба да θ_j буду једнаки α или $\alpha + \lambda$. Заиста, како се то лако показује:

1. аргумент од S_n се исто тако налази између α и $\alpha + \lambda$;
2. како је S_{n-1} тачка са афиксом смештеним у тај исти угао, израз

$$|S_n| = |S_{n-1} + \rho_n e^{\theta_k i}|$$

може узети своју најмању вредност само за

$$\theta_n = \alpha \quad \text{или} \quad \theta_n = \alpha + \lambda.$$

Отуда следи, ако се у том минимуму означи са ρ', односно ρ'' збир модула елемената a_j чији су аргументи једнаки α, односно $\alpha + \lambda$, да се израз T може написати у облику

$$T = \frac{|\rho' e^{\alpha i} + \rho'' e^{(\alpha+\lambda)i}|}{\rho' + \rho''} = \frac{|\rho' + \rho'' e^{\lambda i}|}{\rho' + \rho''} = \frac{|1 + \rho e^{\lambda i}|}{1 + \rho},$$

где је стављено

$$\rho = \frac{\rho''}{\rho'}.$$

Зато ће бити

$$T^2 = \frac{1 + 2\rho\cos\lambda + \rho^2}{(1+\rho)^2}$$

а лако се уверити да овај израз узима своју намању вредност (за позитивне ρ) када ре $\rho = 1$, тај минимум $\cos^2\dfrac{\lambda}{2}$.

Дакле, под условима наметнутим бројевима a_j, T не може узети вредност мању од $\cos\dfrac{\lambda}{2}$, што доказује прву од неједнакости (22).

Ако се тада узму за a_j изрази (21) и учини исти прелаз на граничну вредност као у претходном, долази се до следеће теореме.

Теорема. – *Сваки пут када, дуж лука интеграције* L, *интегрални елемент* $\mathrm{f(z)\,dz}$[3] *не излази из неког угла отвора* $\lambda < \pi$ *са теменом у координатном почетку, интеграл*

$$I = \int_L f(z)\,dz$$

има за вредност

$$I = \mu \cdot \left| f(\xi) \right| \cdot s,$$

где је s *дужина лука* L, ξ *афикс неке тачке са* L, *а* μ *афикс неке тачке из унутрашњости кружног прстена који се налази између кругова полупречника*

$$\cos\frac{\lambda}{2} \quad \text{и} \quad 1$$

са координатним почетком као центром.

4. Гранични случајеви теореме, у погледу фактора μ, су они у којима се тачка афикса μ налази

А) или на крају полупречника 1;

Б) или на кругу полупречника $\cos\dfrac{\lambda}{2}$.

---

[3] Другачије речено, аргумент броја $f(z)\dfrac{dz}{ds}$.

У посебном случају кад интегрални елемент $f(z)\,dz$ не мења квадрант, јесте $\lambda = \frac{\pi}{2}$ па гранични круг у случају Б) има за полупречник $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Могу ли гранични случајеви бити досегнути, и у којим условима? Да би се то видело, приметимо да се, за позитивне a и b, количник

$$\frac{\sqrt{a^2 + 2ab\cos\lambda + b^2}}{a+b}$$

своди на 1 за $b = 0$, а на $\cos\frac{\lambda}{2}$ за $a = b$. Зато ће се случај А) појавити сваки пут када буде било $M' = 0$, било $N' = 0$, то јест *сваки пут када лук интеграције задовољава једну или другу од диференцијалних једначина првог реда*

$$(23) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

Тако ће, на пример, бити када је лук одсечак (x_1, x_2) реалне осе Ox или пак одсечак (y_1, y_2) имагинарне осе Oy, а функција $f(z)$ је реална или чисто имагинарна дуж тог одсечка.

Дуж одсечка (x_1, x_2) јесте

$$(22) \qquad M = P(x,0)\,dx, \quad N = Q(x,0)\,dx,$$

а дуж одсечка (y_1, y_2)

$$(23) \qquad M = -Q(0,y)\,dy, \quad N = P(0,y)\,dy;$$

те је једна или друга од вредности M и N, и зато такође од вредности M' и N', нужно нула.

Исто тако ће бити кад је лук неки одсечак (z_1, z_2) једне или друге бисектрисе $y = x$, $y = -x$ углова између оса Ox и Oy, а реални део P и имагинарни део Q функције $f(z)$ су дуж тог одсечка једнаки по апсолутној вредности. Дуж одсечка (z_1, z_2) је или

$$(24) \qquad dy = dx, \quad M = (P-Q)\,dx, \quad N = (P+Q)\,dx$$

или

$$(25) \qquad dy = -dx, \quad M = (P+Q)\,dx, \quad N = (Q-P)\,dx$$

па једна од вредности M, N, а отуда и M', N', јесте нула.

Случај Б) ће се појавити сваки пут када буде $M' = N'$, то јест *сваки пут кад лук интеграције задовољава једну или другу од диференцијалних једначина првог реда*

$$\tag{26} \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{P(x,y) - Q(x,y)}{P(x,y) + Q(x,y)}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{P(x,y) + Q(x,y)}{Q(x,y) - P(x,y)}. \end{aligned}$$

Тако ће, на пример, бити кад је лук одсечак (x_1, x_2) осе Ox или пак одсечак (y_1, y_2) осе Oy а реални део P и имагинарни део Q од $f(z)$ су дуж тог одсечка једнаки по апсолутној вредности; тада је дуж одсечка $M' = N'$.

Исто тако ће бити кад је лук неки одсечак (z_1, z_2) једне или друге бисектрисе $y = x$, $y = -x$, а функција $f(z)$ је реална или чисто имагинарна дуж одсечка.

Услови придружени једном или другом пару диференцијалних једначина (23) и (26) могу се представити и у следећем геометријском облику.

Уочићемо криву G посматрану у претходном (симетричну слику криве $f(z)$ у односу на осу OQ) и симетричну слику G' криве $(1+i)f(z)$ у односу на OQ. Два односа

$$-\frac{Q}{P} \quad \text{и} \quad \frac{P}{Q}$$

су редом коефицијенти правца вектора положаја тачке (P, Q) криве G и оног правца који је на њега управан. Два односа

$$\frac{P+Q}{Q-P} \quad \text{и} \quad \frac{P-Q}{P+Q}$$

су редом коефицијенти правца вектора положаја тачке (P', Q') криве G' и на њега управне праве.

Једначине (23), међусобно се искључујући, изражавају да је дуж лука интеграције или тангента или нормала на тај лук стално паралелна вектору положаја одговарајуће тачке криве G.

Једначине (26), међусобно се искључујући, изражавају да је дуж тог лука или тангента или нормала паралелна вектору положаја одговарајуће тачке криве G'. Према томе:

Један или други од граничних случајева А) *и* Б) *појавиће се сваки пут када је дуж пута интеграције или тангента или нормала на тај* *пут паралелна вектру положаја одговарајуће тачке једне или друге од двеју кривих* G *и* G′.

5. Диференцијалне једначине (23) и (26) које дају граничне случајеве теореме из §1 *интеграле се све помоћу квадратура.*

1. Ради интеграције једначине

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}, \tag{27}$$

ставимо скраћења ради

$$P^2 + Q^2 = \Delta$$

и уведимо нову промењљиву t такву да се (27) раставља на две симултане једначине

$$\frac{dy}{dt} = \frac{P}{\Delta}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{Q}{\Delta}.$$

Одатле се добија

$$\frac{dx + idy}{dt} = \frac{Q + iP}{\Delta} = i\frac{P - Qi}{\Delta},$$

то јест

$$\frac{dz}{dt} = \frac{i}{f(y)},$$

одакле се извлачи

$$t = -i\int f(z)\,dz + \text{const}. \tag{28}$$

Како је t битно реално, имагинарни део другог члана у (28) мора бити нула. Општи интеграл једначине (27) добија се дакле изједначавањем са произвољном константом имагинарног дела интеграла

$$i\int f(z)\,dz,$$

то јест реалног дела интеграла

$$\int f(z)\,dz. \tag{29}$$

2. Ради интеграције једначине

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{P}$$

ставимо

$$\frac{dy}{dt} = \frac{P}{\Delta}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{Q}{\Delta},$$

одакле је

$$\frac{dx + idy}{dt} = \frac{P - Qi}{\Delta},$$

то јест

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{f(z)},$$

одакле се извлачи

$$t = \int f(z)\, dz + \text{const}.$$

Општи интеграл се добија дакле изједначавањем са произвољном реалном константом имагинарног дела интеграла (29).

3. Ради интеграције једначине

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P - Q}{P + Q}, \tag{30}$$

довољно је заменити у случају 1 функцију $f(z)$ функцијом

$$\varphi(z) = (1 + i)f(z) = (P - Q) + i(P + Q).$$

4. Ради интеграције једначине

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P + Q}{Q - P},$$

довољно је заменити у случају 1 функцију $f(z)$ функцијом

$$\psi(z) = (1 - i)f(z) = (P + Q) + i(Q - P).$$

Путеви дуж којих ће вредност интеграла I стварно достићи једну или другу од граница одређених теоремом из §1 добијају се дакле изједначавањем са неком реалном константом реалног дела или имагинарног дела извесног интеграла

$$\int \Phi(z)\, dz.$$

Како још треба да пролази кроз један крај z_1 лука интеграције, тај пут ће бити дат једначином која казује да је реални део, односно имагинарни део интеграла

$$\int_{z_1}^{z} \Phi(z)\, dz,$$

једнак нули. Да би пут прошао и кроз други крај z_2 лука L, и према томе *да би граница била стварно достигнута, потребно је и довољно да реални део, односно имагинарни део интеграла*

$$\int_{z_1}^{z_2} \Phi(z)\, dz$$

буде једнак нули.

ИЗРАЖАВАЊЕ ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА*

I. РАЗНИ НАЧИНИ ЗА ОПШТЕ ИЗРАЖАВАЊЕ ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА

Опште изражавање једне дате класе (f) функција $f(z)$ одређене аналитичне природе, о каквоме је реч у овој расправи, јесте изражавање функција те класе каквим аналитичним изразом који би, на један одређени начин, *исти за све функције што припадају класи*, зависио од промењиве z и од једног *ограниченог* скупа произвољних констаната

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

а који би имао ову особину:

Свака функција класе (f) једнозначно је одређена скупом констаната A_k, тј. свакоме таквоме скупу одговара по једна функција класе и обрнуто, свакој функцији класе одговара по један одређени скуп специфичних вредности A_k. Функције класе (f) разликују се, према томе, једна од друге само специфичним вредностима констаната A_k.

Тако дефинисано опште изражавање није изводљиво за *ма коју* класу функција (f). Оно нпр. није изводљиво за класу свих мероморфних простопериодичних функција. *Али је оно, и то на више начина, изводљиво за класу* (f) *састављену из свих мероморфних двопериодичних функција.*

До сада познати начини општег изражавања ових функција јесу они при којима се оне изражавају:

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXV, Први разред, књ. 81, Београд, 1935, стр. 137–152.

1) као рационалне функције елементарних функција $\mathrm{sn}z$ и $\mathrm{sn}'z$ (Liouville) или елементарних функција $p(z)$ и $p'(z)$ (Weierstrass);

2) као количник двају продуката функција

$$(1) \qquad \sigma(z) = z\,\Pi\left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{w^2}},$$

где је

$$(2) \qquad w = n\omega + n'\omega',$$

$$(3) \qquad \left.\begin{matrix} n \\ n' \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{осим пара} \quad \begin{cases} n = 0 \\ n' = 0 \end{cases}$$

и где су ω и ω' периоде;

3) као линеарна комбинација ограниченог броја израза $A_k \zeta^{(k)}(z-a)$ где је

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)},$$

где је w дато обрасцем (2) а збир узет преко вредности (3) (Hermite-ов и Weierstrass-ов начин за разлагање мероморфних двопериодичних функција на просте елементе);

4) као количник два израза облика

$$a_1 p(z+h) + a_2 p'(z+h) + \ldots + a_n p^{(n-1)}(z+h),$$

где су h и a_k константе (Painlevé);

5) у облику одређеног интеграла

$$(6) \qquad \int_0^\infty \varphi(z,t)\, dt,$$

где је $\varphi(z,t)$ рационална функција интеграционе променљиве t и ограниченог броја експоненцијалних функција $e^{\alpha z t}$ и $e^{\beta t}$ (Poincaré).

II. МЕТОДА POINCARÉ-а ЗА ОПШТЕ ИЗРАЖАВАЊЕ ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА У ОБЛИКУ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА

Могућност да се свака мероморфна двопериодична функција изрази у облику одређеног интеграла облика (6), показао је први Poincaré[1]. Али, мада је метода у основи добра, велики математичар је превидео једну ствар и учинио неколико грешака које му и нађене обрасце чине нетачним.

$$H_1(z,\alpha,\beta,a,b)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\alpha-w}-\frac{1}{z-\beta-w}\right),\quad w=ma+nb. \tag{7}$$

Poincaré полази од функције где је

$$w=ma+nb, \tag{8}$$

која би функција била једна од четири компоненте двопериодичне функције

$$\begin{aligned} f(z,\alpha,\beta,a,b)&=\sum_n\sum_m\left(\frac{1}{z-\alpha-w}-\frac{1}{z-\beta-w}\right)=\\ &=\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}+H_1(a,b)+H_1(b,-a)+H_1(-a,-b)+H_1(-b,a), \end{aligned} \tag{9}$$

где m и n добијају све целе вредности од $-\infty$ до $+\infty$, осим пара $m=n=0$, а где су a и b њене периоде.

Међутим, двоструки ред (7), што дефинише функцију H_1, дивергира, што Poincaré у тај мах није приметио, па се та омашка провлачи кроз целу његову методу. Применом интегралног обрасца

$$\frac{1}{z-\gamma-w}=-\lambda\int_0^{\infty}e^{\lambda t(z-\gamma-w)}dt, \tag{10}$$

(са $\gamma=\alpha$ и $\gamma=\beta$), и бирајући константу λ тако да интеграл на десној страни обрасца има смисла, тј. тако да буде

$$\text{реални део }\left[\lambda(z-\gamma-w)\right]<0, \tag{11}$$

за

---

[1] Poincaré: *Sur les invariants arithmétiques,* Comptes Rendus du 10 me Congrès de l'Assoc. franç. pour l'avancement des Sciences. p. 109–117 (1881).

$$(12) \qquad \gamma=\alpha, \quad \gamma=\beta, \quad m=0,1,2,\dots \quad \text{и} \quad n=1,2,3\dots,$$

функција H_1 изражава се интегралом

$$(13) \qquad H_1=-\lambda\int_0^{\infty}\left[e^{\lambda t(z-\alpha)}-e^{\lambda t(z-\beta)}\right]\frac{e^{-\lambda bt}dt}{(1-e^{-\lambda at})(1-e^{-\lambda bt})},$$

који је интеграл, под претпоставком (11) конвергентан у близини горње интегралне границе $t=\infty$, али је услед дивергенције реда (7) дивергентан у близини доње границе $t=0$.

Та се иста омашка јавља и при изражавању осталих трију компонената функције (9) у облику одређених интеграла. При томе аутор методе увек бира λ, α и β тако да сва четири интеграла истовремено конвергирају у близини горње границе $t=\infty$, али стално превиђа да сви ти интеграли дивергирају у близини доње границе $t=0$.

Приметивши да се свака мероморфна двопериодична функција $f(z)$ може изразити у облику линеарне комбинације функције (9) и ограниченог броја њених извода, Poincaré помоћу добивеног интегралног обрасца за функцију (9) и из њега изведених интегралних образаца диференцирањем по z, изражава сваку функцију $f(z)$ у облику одређеног интеграла исте врсте као што је интеграл (13). Како, међутим, интеграл (13) дивергира (иако његови формално узети изводи конвергирају), јасно је да и резултујући интеграли који треба да представљају двопериодичну функцију $f(z)$ неће имати смисла.

Изгледа да је доцније Poincaré и сам приметио омашку у својој методи, јер у своме „Notice sur les travaux scientifiques" (1886, p. 48) не наводи више као полазну функцију (7), односно (9), већ функцију

$$(14) \qquad P_1(z,a,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right),$$

са

$$w=ma+nb,$$

а која представља једну од четири компоненте функције

$$(15) \qquad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\frac{1}{z}+\sum_n\sum_m\left(\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right),$$

где m и n имају све целе, позитивне и негативне вредности, осим пара $m=n=0$. Али ни ту, ни у коме од доцнијих својих радова, Poincaré не развија даље своју тако исправљену методу.

III. ИЗМЕНА И ДОПУНА POINCARÉ-ове МЕТОДЕ

По примеру Poincaré-а могли бисмо доћи до исправних резултата полазећи од функције

$$L_1(z,\alpha,\beta,a,b) = P_1(z-\alpha,a,b) - P_1(z-\beta,a,b), \tag{16}$$

где је P_1 функција дефинисана обрасцем (14).

Функција L_1, има за аналитични израз

$$L_1(z_1\alpha_1\beta,a,b) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\alpha-w} + \frac{1}{z-\beta-w} + \frac{\alpha-\beta}{w^2}\right], \tag{17}$$

и представља ректифицирану функцију H_1.

Са том функцијом Poincaré-ов поступак остаје у важности и може се успешно применити. Међутим, приметимо најпре да за ово извођење није потребно уводити произвољне константе α и β, јер се конвергенција горњих интеграла може постићи увођењем једино константе λ, а у томе и лежи основна идеја Poincaré-овог поступка. Друго, овај поступак постаје још једноставнији ако за полазну функцију узмемо непосредно први извод функције (15), тј. Weierstrass-ову функцију

$$p(z) = -\left(\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right) = \frac{1}{z^2} + \sum_n\sum_m\left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right], \tag{18}$$

и применимо Poincaré-ов поступак на сваку од њене четири компоненте облика

$$P_2(z,a,b) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right], \quad w = ma+nb. \tag{19}$$

За тај циљ пођимо од обрасца

$$\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \lambda^2\int_0^{\infty}(e^{\lambda zt}-1)\,e^{\lambda wt}t\,dt, \quad w = ma+nb, \tag{20}$$

где λ треба одредити тако да интеграл на десној страни конвергира; то ће увек бити случај кад год је

$$\begin{aligned} &\text{реални део } [\lambda(z-w)] < 0,\\ &\text{реални део } [\lambda w] < 0, \end{aligned} \tag{21}$$

и то за све вредности

$$(22) \qquad \begin{aligned} m &= 0,1,2,\ldots \\ n &= 1,2,\ldots \end{aligned}$$

што ће за све такве вредности m и n у један исти мах бити испуњено ако је

$$(23) \qquad \begin{aligned} &\text{реални део } [\lambda a] > 0, \\ &\text{реални део } [\lambda b] > 0, \\ \text{и } &\text{реални део } [\lambda(b-z)] > 0. \end{aligned}$$

Да би постојао такав један број λ за који ће све три неједначине (23) бити задовољене, потребно је и довољно да троугао Δ чија су темена

$$a, \quad b, \quad b-z,$$

не обухвата тачку $z = 0$. То се лако увиђа узевши за λ број

$$\lambda = e^{\theta i}$$

јер је само у наведеном случају могуће обрнути поменути троугао за један угао θ тако да сва три његова темена буду на десној страни осовине имагинативних вредности.

Под претпоставком да троугао Δ не обухвата координатни почетак, сви интеграли (20) што одговарају вредностима (22) са подесно изабраним λ имају смисла и замењујући их у обрасцу

$$(24) \qquad P_2(z,a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right],$$

добија се функција P_2 у облику одређеног интеграла

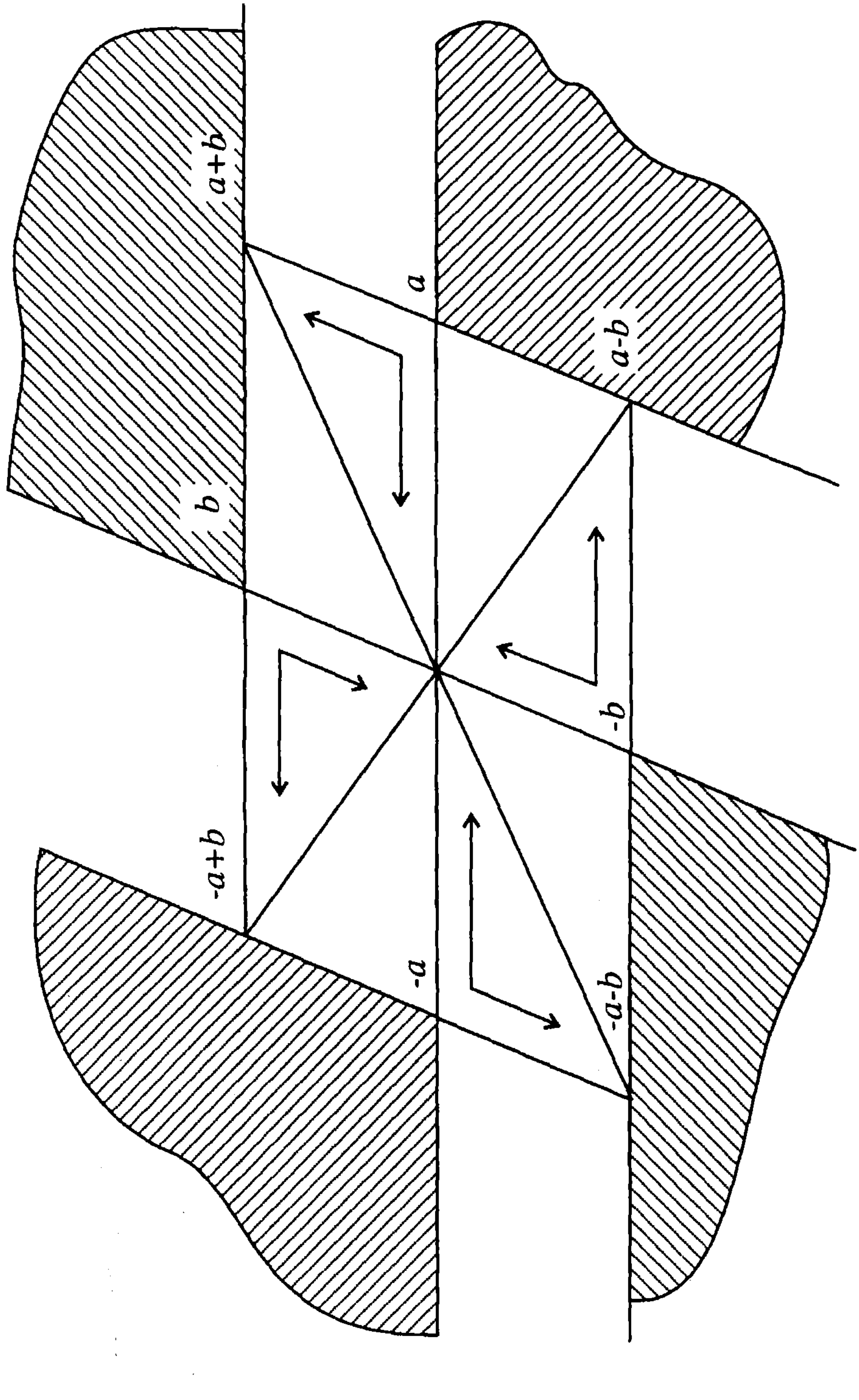
$$(25) \qquad P_2(z,a,b) = \lambda^2 \int_0^{\infty} (e^{\lambda z t} - 1) \frac{t e^{-\lambda b t} dt}{(1-e^{-\lambda a t})(1-e^{-\lambda b t})}.$$

Уочимо сад Weierstrass-ову основну двопериодичну функцију

$$(26) \qquad p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_n \sum_m \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right],$$

где m и n имају све целе вредности од $-\infty$ до $+\infty$, осим пара $n = m = 0$ и раставимо је на њене четири компоненте P_2 у облику

$$(27) \qquad p(z) = \frac{1}{z^2} + P_2(z,a,b) + P_2(z,b,-a) + P_2(z,-a,-b) + P_2(z,-b,a).$$


a+b
a
a-b
b
-b
-a+b
-a
-a-b

Ове четири компоненте моћи ће се изразити у облику одређених интеграла облика (25) ако ниједан од четири троугла $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, и Δ_4 са теменима

$$\begin{array}{llll} \Delta_1: & a, & b, & b-z, \\ \Delta_2: & b, & -a, & -a-z, \\ \Delta_3: & -a, & -b, & -b-z, \\ \Delta_4: & -b, & a, & a-z, \end{array}$$

не обухвата координатни почетак.

Ако се од темена троугла Δ_1, одузме вредност b, од темена троугла Δ_2 одузме вредност $-a$, код троугла Δ_3 вредност $-b$, а код Δ_4 вредност a, то ће горњи услови бити испуњени кад год

$$\begin{array}{lrcll} \text{троугао} & a-b, & 0, & -z & \text{не обухвата тачку} \;\; -b, \\ \text{троугао} & b+a, & 0, & -z & \text{не обухвата тачку} \;\; a, \\ \text{троугао} & -a+b, & 0, & -z & \text{не обухвата тачку} \;\; b, \\ \text{троугао} & -a-b, & 0, & -z & \text{не обухвата тачку} \;\; -a. \end{array}$$

Из слике се види да ће сви ти услови бити истовремено испуњени ако се тачка $-z$ (или тачка z) не налази ни у једној од четири прецртане области. А понаособ, то ће увек бити случај кад год се тачка z налази у паралелограму чија су темена

(28) $$a+b, \quad -a+b, \quad -a-b, \quad a-b.$$

Поменућемо узгред да је у Poincaré-овој расправи та област четири пута мање пространа; код њега је та област паралелограм чија су темена

$$\frac{a+b}{2}, \quad \frac{-a+b}{2}, \quad \frac{-a-b}{2}, \quad \frac{a-b}{2}.$$

Ако се, дакле, тачка z не налази у једној од четири прецртане области, постојаће увек четири броја $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 тако да се може истовремено свака од четири компоненте (27) функције $p(z)$ изразити конвергентним интегралима облика (25), и стављајући

$$\Phi_1(z,t) = \frac{\lambda_1^2 (e^{\lambda_1 tz} - 1) e^{-\lambda_1 bt}}{(1 - e^{-\lambda_1 at})(1 - e^{-\lambda_1 bt})} + \frac{\lambda_2^2 (e^{\lambda_2 tz} - 1) e^{-\lambda_2 at}}{(1 - e^{-\lambda_2 bt})(1 - e^{\lambda_2 at})} +$$
$$+ \frac{\lambda_3^2 (e^{\lambda_3 tz} - 1) e^{\lambda_3 bt}}{(1 - e^{\lambda_3 at})(1 - e^{\lambda_3 bt})} + \frac{\lambda_4^2 (e^{\lambda_4 tz} - 1) e^{-\lambda_4 at}}{(1 - e^{\lambda_4 bt})(1 - e^{-\lambda_4 at})},$$

функција $p(z)$ узима облик

$$(29) \qquad p(z) = \frac{1}{z^2} + \int_0^\infty \Phi_1(z,t)\,t\,dt = \int_0^\infty \left[\lambda^2 e^{\lambda zt} + \Phi_1(z,t)\right] t\,dt = \Phi(z,t)\,dt,$$

где је још λ тако изабрано да буде реални део $[\lambda z] < 0$.

Како се, међутим, тачка z увек може заменити својом хомологом у којем било паралелограму периода, тј. z се може заменити вредношћу

$$(30) \qquad z - pa - qb,$$

где су p и q ма која два цела броја, а да тиме вредност функције чије су периоде a и b не буде измењена, то се бројевима p и q увек може располагати тако да уочена тачка z, односно њена хомолога (30) буде у унутрашњости наведеног паралелограма (28), тако да услови за конвергенцију интеграла буду испуњени.

Као што се види, функција $p(z)$ се може за сваку вредност z у равни изразити одређеним интегралом (29), где је Φ рационална функција променљиве t и разних експоненцијалних функција $e^{\alpha zt}$ и $e^{\beta t}$.

Интегрисањем и диференцирањем обрасца (29) налази се да то важи и за све тако добивене функције. Међутим, свака се мероморфна двопериодична функција $f(z)$ чије су периоде a и b, може изразити у облику

$$F(z) = C + \sum\left[A_0\zeta(z-\alpha) + A_1 p(z-\alpha) + A_2 p'(z-\alpha) + \ldots + A_{n-1}p^{(n-2)}(z-\alpha)\right],$$

где су:

α полови функције f у изабраном паралелограму периода,

n ред пола α,

C, $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ подесно изабран скуп констаната,

$\zeta(z)$ функција дефинисана двоструким редом

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_n \sum_m \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right), \qquad w = ma + nb,$$

$$\left.\begin{matrix} m \\ \\ n \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{осим} \quad m = n = 0,$$

тј. интеграл функције $p(z)$, и где се сумирање односи на све полове α функције $f(z)$. Према томе се *мероморфна функција може изразити у облику одређеног интеграла* (29), *где је* Φ *рационална функција променљиве* t *и ограниченог броја израза* $\mathrm{e}^{\alpha z t}$ *и* $\mathrm{e}^{\beta t}$.

IV. ИЗРАЖАВАЊЕ ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА У ОБЛИКУ КОЛИЧНИКА ДВА ОДРЕЂЕНА ИНТЕГРАЛА

Начин изражавања двопериодичних функција $f(z)$ који ћемо овде изложити нов је и у основи различан од оних до данас познатих. Он се састоји у својој основи у томе да се функција $f(z)$ изрази у облику количника два криволинијска интеграла

$$F(z)=\frac{\int\Phi(z,t)P_1(t-z)\,dt}{\int\Phi(z,t)P_2(t-z)\,dt}, \tag{31}$$

у коме је

1) $\Phi(z,t)$ једна мероморфна функција променљивих z и t, која зависи од елементарних периода a и b посматране функције $f(z)$ и *остаје иста за све функције са једним истим паром периода*;

2) $P_1(x)$ и $P_2(x)$ су полиноми по x са сталним коефицијентима, а *који се мењају од једне функције* f(z) *до друге*;

3) контура интеграције је једна ма која затворена линија C што се сва налази у ономе паралелограму периода T у коме се налази уочена тачка z; интеграција се има извршити у директном смислу.

Мењајући облик контура C, долази се до многобројних и разноврсних аналитичних израза за $f(z)$ у облику количника обичних, реалних одређених интеграла.

Да бисмо извели начин представљања функције $f(z)$ у облику (31), поћи ћемо од факта да се $f(z)$ увек може изразити као количник двеју целих функција $G_1(z)$ и $G_2(z)$, које се нпр. за основне елиптичне функције поклапају са Weierstrass-овим функцијама $\mathrm{Al}(z)$. Потражимо општи аналитични израз таквих функција G при начину изражавања функција $f(z)$ који се овде има у виду.

Painlevé је показао[2] да кад је дата мероморфна двопериодична функција $f(z)$, чији је ред n (ред њених полова у паралелограму периода a и b) и узевши за $p(z)$ нормалну елиптичну функцију са периодама a и b, увек постоје два израза

$$F_1(z)=a_0p(z+h)+a_1p'(z+h)+\ldots+a_{n-1}p^{(n-1)}(z+h), \tag{32}$$

$$F_2(z)=a_0'p(z+h)+a_1'p'(z+h)+\ldots+a_{n-1}'p^{(n-1)}(z+h), \tag{33}$$

[2] P. Painlevé: *Sur la représentation des fonctions elliptiques*, Bull. de la Soc. Mathém. de France. t. XXVII p. 301–302 (1899).

(где су a_k, a'_k и h подесно изабране константе) таква да $F_1(z)$ има за своје нуле само нуле функције $f(z)$ садржане у паралелограму периода T, а $F_2(z)$ има за своје нуле полове исте функције $f(z)$ садржане у T.

Обе функције F_1 и F_2 имају као заједничке полове

(34) $$\alpha_{m,n} = -h + 2ma + 2nb,$$

где је

(35) $$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

а сваки од тих полова пол је (k+2)-ог реда за функцију $p^{(k)}(z)$.

Уочимо криволинијски интеграл

(36) $$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{p(t+h)}{(t-z)^{k+1}}\, dt$$

који, према Кошијевом обрасцу, има за вредност

(37) $$\frac{1}{k!} p^{(k)}(z+h) + \sum R,$$

где ΣR означује збир остатака функције $p(t+h)$ за њене полове обухваћене контуром C. Пошто је за мероморфну двопериодичну функцију $f(z)$ тај збир исти као и онај што би се добио сменом контуре C паралелограмом периода, који ту контуру обухвата, а за тај паралелограм тај је збир једнак нули, то ће бити

(38) $$\frac{1}{k!} p^{(k)}(z+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{p(t+h)}{(t-z)^{k+1}}\, dt,$$

што према обрасцу (32) значи да је

(39) $$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{p(t+h)}{(t-z)^{n}} P_1(t-z)\, dt,$$

где P_1 означује полином (n–1)-ог степена

(40) $$P_1(x) = A_{n-1} + A_{n-2}x + A_{n-3}x^2 + \ldots + A_1 x^{n-2} + A_0 x^{n-1},$$

у коме коефицијенти имају вредности дате општим обрасцем

(41) $$A_k = \frac{a_k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Тако се исто налази и да је

$$F_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{p(t+h)}{(t+z)^n} P_2(t-z)\, dt, \tag{42}$$

где је

$$P_2(x) = A'_{n-1} + A'_{n-2}x + A'_{n-3}x^2 + \ldots + A'_1 x^{n-2} + A'_0 x^{n-1},$$

и где коефицијенти имају вредности

$$A'_k = \frac{a'_k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1). \tag{43}$$

Означимо са $\lambda(x)$ целу функцију другога реда (genre) која има вредности $\alpha_{m,n}$, дате обрасцем (34) као своје просте нуле. Пошто обе функције F_1 и F_2 имају те вредности као своје полове n-тога реда, то ће сваки од продуката

$$\begin{aligned} G_1(z) &= [\lambda(z)]^n F_1(z), \\ G_2(z) &= [\lambda(z)]^n F_2(z), \end{aligned} \tag{44}$$

представљати по једну *целу* функцију променљиве z. Према обрасцима (39) и (42) те се две целе функције изражавају интегралима

$$2\pi i\, G_1(z) = [\lambda(z)]^n \int \Phi(z,t) P_1(t-z)\, dt, \tag{45}$$

$$2\pi i\, G_2(z) = [\lambda(z)]^n \int \Phi(z,t) P_2(t-z)\, dt, \tag{46}$$

где је

$$\Phi(z,t) = \frac{p(t+h)}{(t-z)^n}.$$

Количник

$$\frac{f(z)\, G_2(z)}{G_1(z)}$$

је једнак мероморфној двопериодичној функцији

$$\frac{f(z)\, F_2(z)}{F_1(z)} \tag{47}$$

и сам је функција такве исте врсте. Па пошто он не постаје ни једнак нули ни бескрајан ни за коју вредност z, то се он своди на једну константу (за коју се увек може узети да је једнака јединици, јер се све ово што претходи не мења множењем функције f са каквом константом). Из тога излази да је

$$f(z)=\frac{G_1(z)}{G_2(z)}, \tag{48}$$

где су G_1 и G_2 представљени интегралним обрасцима (45) и (46), а то доказује напред наведени образац (31).

Оно што је од нарочитог интереса у томе обрасцу јесте теорема која се из њега изводи, а то је ова:

Све мероморфне двопериодичне функције једне променљиве количине изражљиве су једним аналитичким изразом чији трансцендентан део остаје исти за све функције са истим паром периода, а алгебарски део је један полином који се мења од једне функције до друге.

Константе што фигуришу (у коначном броју) у томе изразу, израчунавају се помоћу констаната

$$a_k, a_k' \text{ и } h$$

што фигуришу у обрасцима (32) и (33), а ове се одређују на начин који је дао Painlevé у извођењу свога става.

Интеграли што фигуришу у бројиоцу и имениоцу десне стране обрасца (31) могу се на разноврсне начине трансформисати. Они се, између осталога, могу и сменити обичним, реалним одређеним интегралима, нпр. на овај начин:

Напред је показано како се нормална елиптична функција $p(z)$ са периодама a и b да свести на збир од четири компоненте P_2 и једнога члана облика $\frac{1}{z^2}$, и како се сваки од тих сабирака може изразити једним одређеним интегралом облика (25). Према томе се и свака од функција $F_1(z)$ и $F_2(z)$ може изразити по једним интегралом облика

$$\int_0^\infty \varphi(z,t)\,dt, \tag{49}$$

где ће $\varphi(z,t)$ бити рационална функција променљиве t и ограниченог броја експоненцијалних функција облика

$$e^{\alpha z t} \text{ и } e^{\beta t}.$$

Дакле, и свака се мероморфна двопериодична функција f(z) *може иразити количником интеграла* (49).

Навешћемо још да би се по методи Painlevé-а константе

$$h, a_k, a'_k$$

одредиле на овај начин:

Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ нуле а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ полови функције $F(z)$ што се налазе у паралелограму T. За њих се увек може претпоставити да су различити међу собом и да не постоји никаква релација облика

$$\begin{aligned} n\alpha_i - \Sigma\alpha &= \text{периода} \\ n\beta_i - \Sigma\beta &= \text{периода} \end{aligned}$$

(егзистенција релације такве врсте може се увек избећи подесном хомографском трансформацијом, која не мења периоде функције и облик аналитичног израза горњег облика, а мења јој нуле или полове). Тада за h треба узети вредност

$$h = -\frac{\Sigma\alpha}{n} + \frac{2ma + 2m'b}{n},$$

што даје n^2 могућих вредности за h, што одговарају вредностима

$$\begin{aligned} m &= 0, 1, 2, \ldots, (n-1), \\ m' &= 0, 1, 2, \ldots, (n-1). \end{aligned}$$

Кад се за h узме једна од тих n^2 вредности и изрази да је израз (32) једнак нули за

$$z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$$

имаће се систем од $n-1$ линеарних и хомогених једначина за a_k који нису сви једнаки нули; n-та нула α_n биће вредност дата једначином

$$-(nh + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}) = \alpha_n + \text{периода}.$$

На исти би се начин одредила и константа α'_k, сменивши само нуле α_k половима β_k. Вредност h треба узети ону исту која је изабрана за израчунавање констананата a_k.

Неодређеност која би се имала у изузетном случају кад би детерминанта система била једнака нули, избегла би се подесном хомографском трансформацијом.

ПРИЛОЗИ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ О СВОЈИМ РЕЗУЛТАТИМА У МАТЕМАТИЧКОЈ АНАЛИЗИ*

ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛИ

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ИНТЕГРАЛА ПРОИЗВОЉНИХ ФУНКЦИЈА

Извесни типови одређених интеграла се могу рачунати било у експлицитном облику, у коначном облику, било у облику конвергентних редова, упркос општости претпоставки о функцијама које се јављају под интегралним знаком. Г. Петровић је добио, у том погледу, различите опште обрасце који омогућавају израчунавање великог броја одређених интеграла. Тако:

1° нека су $f(t)$ и $\Phi(z,t)$ две холоморфне функције за вредности z и t са реалним деловима *већим* од једне дате вредности λ и такве да производ $f(t)\Phi(z,t)$ тежи нули кад реални делови променљивих z и t имају произвољне вредности веће од λ и променљива t расте неограничено. *Биће*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z, \lambda + ti) \frac{f(\lambda + ti)}{\lambda + ti - z} dt = -2\pi f(z)\Phi(z, z) \tag{1}$$

за сваку вредност променљиве z *са реалним делом већим од* λ;

2° нека су $f(t)$ и $\Phi(z,t)$ две холоморфне функције за вредности z и t са реалним деловима *мањим* од једне дате вредности λ и такве да производ $f(t)\Phi(z,t)$ тежи нули кад реални делови променљивих z и t имају произвољне вредности мање од λ и променљива t расте неограничено. *Интеграл* (1) *има вредност* $2\pi f(z)\Phi(z,z)$ *за сваку вредност променљиве* z *са реалним делом мањим од* λ;

3° претпоставимо да су $f(t)$ и $\Phi(z,t)$ холоморфне функције за вредности z и t са имагинарним делом *већим* од једне дате вредности μ и да производ $f(t)\Phi(z,t)$ тежи нули кад имагинарни делови променљивих z и t има-

---

* У књизи *Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch*, Paris 1922 М. Петровић је записао своје резултате до 1922. године. У посебном поглављу изложио је свој рад из Математичке анализе.

ју произвољне вредности веће од μ и променљива t расте неограничено. *Биће*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z,t+\mu i)\frac{f(t+\mu i)}{t+\mu i-z}\,dt=2\pi i f(z)\Phi(z,z) \tag{2}$$

за сваку вредност променљиве z *са имагинарним делом већим од* μ.

4° претпоставимо да су $f(t)$ и $\Phi(z,t)$ холоморфне функције за вредности z и t са имагинарним делом *мањим* од μ и да производ $f(t)\Phi(z,t)$ тежи нули кад имагинарни делови променљивих z и t имају произвољне вредности мање од μ и променљива t расте неограничено. *Интеграл* (2) *има вредност* $-2\pi i\, f(z)\, \Phi(z,z)$ *за сваку вредност променљиве* z *са имагинарним делом мањим од* μ.

Раздвајајући реалне и имагинарне делове интеграла (1) и (2), формуле г. Петровића воде до једне бесконачности образаца који изражавају дате функције у облику одређеног интеграла који ће бити реалан за реално $f(z)$.

Стављајући у образац (1)

$$\lambda = 0, \quad \Phi(z,t) = \frac{2z}{t+z},$$

долази се до Стилтјесове формуле

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{z\varphi(t)}{t^2+z^2}\,dt$$

(где $\varphi(t)$ означава реалан део функције $f(ti)$), важеће за сваку функцију $f(z)$ холоморфну за вредности променљиве z са позитивним реалним делом и такву да количник $\frac{f(z)}{z}$ тежи нули кад z расте неограничено са аргументом између $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Исто тако, стављајући у образац (1)

$$\lambda = 0, \quad \Phi(z,t) = \frac{2t}{t+z}$$

он се своди на једну другу Стилтјесову формулу

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t\psi(t)}{t^2+z^2}\,dt$$

(где $\psi(t)$ означава имагинаран део функције $f(ti)$) важећу за сваку функцију $f(z)$ холоморфну за вредности променљиве z са позитивним реалним делом која тежи нули кад z расте неограничено са ма којим аргументом између $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Кад функција $f(z)$ задовољава ове услове и није реална за $z = ti$, г. Петровић извлачи отуда следећи резултат.

Коефицијенти A_n *Taylor-овог реда*

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots$$

у односу на произвољну реалну и позитивну вредност a *може се написати у облику*

$$A_n = \frac{2(-1)^n}{\pi} \mathcal{J}_n$$

где је

$$\mathcal{J}_n = \int_0^\infty \psi(t) \frac{\sin\left[(n+1)\operatorname{arctang}\frac{t}{a}\right]}{\sqrt{(t^2+a^2)^{n+1}}} dt,$$

што се може изразити и у облику

$$\mathcal{J}_n = -\frac{1}{a^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(a \operatorname{tang} t) \sin(n+1) t \cos^{n-1} t \, dt.$$

Г. Петровић отуда закључује, на пример, да коефицијент A_n једне такве функције $f(z)$ реалне за $z = 0$ *јесте по апсолутној вредности увек мањи од одговарајућег коефицијента Тејлоровог реда функције*

$$\frac{2M}{\pi}(z-a)\log\left(1 - \frac{z}{a}\right),$$

где је M једна погодно изабрана позитивна константа.

Ако је дата једна *цела* функција $\chi(z)$ *нултог рода*, онда за сваку вредност λ и сваку вредност z са реалним делом већим од λ важе обрасци

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ti}\chi(ti)}{(z-ti)^{n+1}} dt = (-1)^n \frac{2\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \frac{d^n}{dz^n}\left[e^{-z}\chi(z)\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ti}\chi(-ti)}{(z+ti)^n} dt = (-1)^{n-1} \frac{2\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[e^{-z}\chi(z)\right],$$

који, на пример, показују да *се коефицијенти* A_n *Тејлоровог реда*

$$e^{-z}\chi(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots,$$

где је a *било која вредност са позитивним реалним делом, може изразити у облику*

$$A_n = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ti}}{(a-ti)^{n+1}} \chi(ti)dt.$$

одакле се добијају различите неједнакости које се односе на A_n.

Нека је $\varphi(t)$ реална функција за реално t, непрекидна у реалном интервалу (a,b) и таква да интеграл

$$g_n = \int_a^b \varphi(t) \cos nt \, dt$$

има смисла за сваку позитивну целу вредност или нулу промењиве n. *Интеграл*

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b \varphi(t) \log(1 - 2x\cos t + x^2)\, dt$$

је прекидна функција промењиве x *која се подудара час са функцијом*

$$\lambda_1(x) = -2\sum_1^{\infty} \frac{g_n x^n}{n},$$

час са функцијом

$$\lambda_2(x) = 2g_0 \log x + \lambda_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

зависно од тога да ли се тачка x налази у унутрашњости или спољашњости извесног круга са центром у координатном почетку.

М. Петровић извлачи отуда разне интегралне обрасце који у облику одређеног интеграла дају:

1° разлику између броја нула и полова једне мероморфне функције у датом кругу;

2° однос производа модула нула и полова у датом кругу;

3° разне симетричне функције корена алгебарске једначине.

Ако је дата функција представљена редом

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

конвергентним у неком кругу полупречника различитог од нуле, назива се, према г. Борелу, њеном *придруженом функцијом* цела функција дефинисана редом

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z^2}{1\cdot 2} + \frac{a_3 z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots.$$

Сама улога коју игра придружена функција у савременој теорији Taylor-ових редова даје значај *проблему представљања функције* F(z) *одређеним интегралима помоћу функције* f(z).

М. Петровић је дао више решења овог проблема и изнео на видело односе који постоје између разних особености дате функције $f(z)$ и особености њене придружене функције $F(z)$.

Нека је $f(x)$ функција која се за $0 < x < 2\pi$ може развити у Фуријеов ред

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

и ставимо

$$\varphi(x,r) = \sum_{0}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx) r^n,$$

где се за реалан део од r претпоставља да се налази између -1 и $+1$.

Уочимо трансцендентну функцију

$$C(x,a) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\cot a(n+x) + i\right],$$

коју је изучавао г. Апел[1] , холоморфну за сваку вредност променљиве x са изузетком оних за које један од котангенса који се јављају као сабирци постаје бесконачан, и ставимо

$$\Phi(z,\beta) = C\left[(-z+\beta), \frac{1}{2}\right] - C\left[(-z-\beta), \frac{1}{2}\right],$$

где је величина β реална или комплексна са позитивним имагинарним делом.

М. Петровић доказује образац

$$\int_0^{2\pi} f(z)\Phi(z,\beta)dz = 4\pi i \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi(n, e^{\beta i})$$

и, употребивши један познати резултат г. Шварца о Поасоновом интегралу, показује да образац важи и за $\beta = 0$, тако да је

$$\sum_{1}^{\infty} f(n) = \lim \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} f(z)\Phi(z,\beta)dz \qquad (\text{за } \beta = 0).$$

---

[1] P. Appel, *Sur quelques applications de la fonction* $\Gamma(x)$ et *d'une autre fonction transcendante* (C. R., Acad. Sc., t. 86, 1878, p. 953).

Он доказује, на пример, помоћу исте формуле, да се гранична вредност израза

$$\int_0^{2\pi} R(\sin xz, \cos xz)\Phi(z,\beta)dz \tag{3}$$

за $\beta = 0$, где је R *рационална* функција по $\sin xz$ и $\cos xz$ (кад та гранична вредност постоји, што ће се умети препознати) изражава линеарно помоћу функција као што су

$$C(a_i,x), \quad \frac{d}{da_i}C(a_i,x), \quad \frac{d^2}{da_i^2}C(a_i,x), \ldots$$

и функција као што су

$$\frac{e^{2k_i x\sqrt{-1}}}{1-e^{2k_i x\sqrt{-1}}},$$

где су a_i извесне константе а k_i цели бројеви. Помоћу познате формуле

$$D\log\theta_1(\alpha x) = \rho(-x,a) - \rho(x-1,a) - \sqrt{-1}$$

(θ_1 је помоћна елиптичка функција) г. Петровић налази потребне и довољне услове које треба да задовољава R да би та гранична вредност интеграла (20) била *мероморфна двоструко периодична функција* променљиве x. Обрнуто, свака мероморфна двоструко периодична функција може бити изражена као гранична вредност неког одређеног интеграла (3) за $\beta=0$.

Једна друга класа одређених интеграла линеарно изразивих помоћу једне одређене трансцендентне функције и њених узастопних извода, који имају улогу *простог елемента*, коју је М. Петровић изучавао у многим од својих расправа и бележака је ова која следи.

Нека је за цело позитивно n

$$\int_a^b \chi u^n dt = \varphi(n),$$

где су u и χ функције променљиве t; интеграл $\varphi(n)$ је коначан и одређен за $n = 0, 1, 2, \ldots$. Нека је $F(u)$ рационална функција променљиве u холоморфна за вредности u чији је модуо мањи од највеће апсолутне вредности коју узима реална функција $u(t)$ кад се t мења од a до b. *Интеграл*

$$\mathcal{J} = \int_a^b F(u)\chi du$$

изражава се линеарно помоћу функције

$$\theta(x)=\sum_{0}^{\infty}\varphi(n)x^{n}$$

и неколико њених узастопних извода пошто се у њима замени x *коренима извесне алгебарске једначине придружене функцији* F.

На пример, за интеграл

$$\mathcal{J}=\int_{-\infty}^{\infty}F(e^{-t^{2}})dt$$

прост елемент је трансцендентна функција

$$\theta(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{n}}{\sqrt{n+1}};$$

за

$$\mathcal{J}=\int_{0}^{\infty}\left[e^{-t}F(1)-e^{-at}F(e^{-t})\right]\frac{dt}{t}\qquad(a>0)$$

то је трансцендентна функција

$$\theta(x)=\sum_{0}^{\infty}\log(a+n)x^{n},\ \ldots$$

СПЕКТРАЛНИ НАЧИН ИЗРАЧУНАВАЊА ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА

Спектрална метода, коју је изумео М. Петровић и чији су принципи изложени у првом делу овога списа[2] , примењује се на два различита начина у рачуну одређених интеграла.

Први начин. – У случају коначног или бесконачног низа интеграла $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \ldots$ (простих или вишеструких) таквих да је $\mathcal{J}_n$ *цео* број који се подудара са коефицијентом a_n развитка познате функције

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

$\mathcal{J}_n$ су одређени као погодно омеђени *сегменти* једног нумеричког *спектра* придруженог функцији $f(x)$.

Тако, нека је $f(z)$ аналитичка функција, холоморфна у унутрашњости круга C полупречника R са центром у тачки a. *Сваки пут кад Кошијев интеграл*

[2] Односи се на стр. 231–236 у књизи 5. *Математички спектри*, *Сабрана дела Михаила Петровића.*

(4) $$\mathcal{J}_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,$$

има за n = 1, 2, 3,... *целе реалне и позитивне вредности, могу се* $\mathcal{J}_n$ *израчунати сви одједном као сегменти једног те истог децималног броја* S *придруженог функцији* f(z). Број S се добија као вредност одређеног интеграла

(5) $$S=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\rho e^{ti})\chi\left(\frac{e^{-ti}}{\rho}\right)dt,$$

где је

$$\varphi(z)=f(a+z)-f(a),$$

$$\chi(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}q^{n^2+\lambda n}z^n,$$

а ρ, λ, q су погодно изабране константе.

Интеграл (5) може уосталом бити замењен разним другим који су му еквивалентни. У извесним случајевима може он исто тако бити замењен изразима по коначним члановима образованим помоћу $f(z)$ елементарним аритметичким операцијама. Тако, сваки пут кад Кошијев интеграл (4) има за n = 1, 2, 3,... вредности једнаке *целим бројевима садржаним између два дата позитивна броја*, постојаће два позитивна и фиксирана цела броја M и N таква да се вредност ма ког интеграла $\mathcal{J}_k$ поклапа са целим бројем $M + L_k$, где је L_k цео број састављен од групе децимала (сегмента) броја

(6) $$f(a+10^{-N})-f(a)-\frac{M}{10^N-1}$$

која почиње првом значајном цифром која следи $(k–1)$ N-ту а завршава се kN-том децималом броја (6).

Поступак се распростире и на случај кад су $\mathcal{J}_n$ *ма какви цели бројеви*, реални или комплексни. Он се примењује једнако на сваки низ $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3,\ldots$ одређених простих или вишеструких интеграла таквих да се може установити један одређен однос између тог низа и низа коефицијената једног степеног реда са целим коефицијентима (реалним или комплексним).

Други начин. – Одређен интеграл може бити одређен као *спектар* неке познате функције $f(z)$. Тако се вредност интеграла

$$\mathcal{J}=\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(4\cos^2 t)dt,$$

где је

$$\theta(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2-n} z^n, \quad q=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

подудара са спектром

$$S = 0{,}102006002000070000252000092 4...$$

функције

$$f(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n}{n}^2 z^n .$$

Исто тако, означавајући са $\varphi(r,t)$ реалан део, за $z=re^{ti}$, рационалне функције $f(z)$ која представља скуп од $m<100$ првих чланова Ламбертовог реда и стављајући

$$\alpha=0{,}01, \quad \beta=\sqrt{2\log\cdot nat\cdot 10}$$

вредност интеграла

$$\mathcal{J}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\varphi(\alpha,\beta t)dt$$

подудара се са спектром

$$S = 0{,}010002000002000000030000000002...$$

функције $f(z)$ чији се децимални део пише, ређајући једну крај друге нумеричке групе $G_1, G_2, G_3, \ldots$, где је G_k једнака броју делитеља броја k коме претходи толико нула колико их је потребно да би укупан број цифара у G_k био једнак $2k$.

ТЕОРЕМЕ О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ

М. Петровић је утврдио више поступака који воде до *теорема о средњој вредности* општих типова одређених интеграла.

I. Први поступак је заснован на примедби: ако су величине $x_1, x_2, \ldots, x_n$ све *реалне и позитивне* и ако је p реалан број, вредност

$$\rho=\frac{(x_1+\ldots+x_n)^p}{x_1^p+\ldots+x_n^p}$$

се налази увек између граница 1 и n^{p-1}; ове границе могу бити стварно достигнуте.

М. Петровић одатле извлачи најпре последице које се односе на интеграле облика

$$\int_a^b\sqrt{f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2}\,dx,$$

где су f_i ма какве функције променљиве x, реалне у интервалу интеграције. *Интеграл се може разложити на збир сабирака*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_i dx$$

(где се f_i замењује својом апсолутном вредношћу) помножен фактором Θ који се *увек налази између* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *и* 1, где су α и β или саме границе a и b, или пак вредности променљиве x између a и b, за које бар једна од функција f_i мења знак.

Отуда проистичу важне последице које се односе на лукове кривих у коначнодимензионим просторима, на површине површи, итд. Тако:

1° нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координате тачке у n-димензионом простору, такве да је елемент лука криве у том простору изражен са

$$ds^2 = \sum dx_i^2.$$

Посматрајмо део s коначне дужине лука, непрекидан или изломљен, дуж кога лук има *сталан ток*, тј. дуж кога се свака координата x_i мења константно у истом смеру, растући или опадајући. Нека је X_i апсолутна вредност коначног прираштаја координате x_i кад се пређе од једног до другог краја лука . *Дужина* s *има вредност*

$$s = \theta \sum X_i,$$

где је θ *чинилац који се увек налази између* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *и* 1. У посебном случају равне криве θ се налази између 0,7071... и 1; за просторне криве овај чинилац се налази између 0,5774... и 1, итд.

Може се на бесконачно много начина деформисати и истезати до извесне границе дати лук са утврђеним крајевима и сталног тока, а да ток не изгуби своју особину сталности. Колико се може истезати једном таквом деформацијом? Одговор даје теорема М. Петровића.

Један лук сталног тока се може истезати највише $\sqrt{n}$ *пута а да се не поквари сталност тока.* Ова граница истезања је стварно достигнута у посебном случају кад се лук s првобитно своди на део праве

$$\varepsilon_1 x_1 + a_1 = \varepsilon_2 x_2 + a_2 = \ldots = \varepsilon_n x_n + a_n,$$

$$a_i = \text{const.}, \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

а деформише се тако да се поклопи са изломљеном линијом, састављеном од n делова правих паралелних координатним осама, која спаја крајеве лука s.

Посебно, може се истезати лук s једне равне криве највише $\sqrt{2}$ = = 1,4142... пута, а лук једне просторне криве највише $\sqrt{3}$ = 1,7320... пута а да његов ток остане сталан.

Иста разматрања се проширују на криволинијске координате и доводе до тврђења сродних претходним. Она се једнако примењују у разним проблемима механике;

2° посматрајмо површ P коју чини лук s ма које равне криве обртањем око неке осе узете за осу Ox. Означимо:

а. са A апсолутну вредност површине дела равни ограниченог луком s, осом обртања Ox и ординатама крајева лука s;

б. са B површину чија је вредност: или апсолутна вредност полуразлике квадрата те две крајње ординате (у случају кад се крива мења стално у једном истом смеру између два краја лука s), или пак збир апсолутних вредности полуразлика квадрата узастопних ордината у крајевима делимичних лукова који се увек мењају у једном истом смеру (на које се може разложити лук s у случају да се смер варијације мења између његових крајева);

в. са R страницу квадрата чија је површина $A + B$.

Претходна разматрања су довела М. Петровића до следеће опште теореме.

Површина површи P *једнака је површини кружне површи полупречника* $r = \lambda R$, *где је* λ *чинилац који се налази између* $\sqrt[4]{2}$ = 1,1892... *и* $\sqrt{2}$ = =1,4142... *ма какви да су посматрана обртна површ и лук* s.

Полупречник r кружне површи исте површине као P, има вредност

$$r=kR(1+\varepsilon),$$

где k означава бројну константу

$$k=\frac{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}{2}=1,3017\ldots$$

а апсолутна вредност од ε не премаша никада вредност

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}=0,0864\ldots,$$

тако да, *узимајући* r = 1,3017R, *учињена грешка не достиже* 9 *процената ни за једну обртну површ.*

Једна од знатних предности ових тврђења састоји се у томе што она дају, помоћу обичне планиметрије и неких неправилности које би могла имати посматрана обртна површ, границе између којих се налази површина површи P, као и одговарајући полупречник r. Тако добијене границе су *најуже могуће* док се остаје у општем случају јер су оне стварно достигнуте за извесне посебне обртне површи.

М. Петровић је применио иста разматрања на једно мноштво одређених интеграла. На пример, ако су три функције u, v, w променљиве x

реалне и позитивне у интервалу (a,b) и ако су m, n, p ма какве реалне константе, онда је

$$\int_a^b w(u^m + v^n)^p\, dx = \theta\left[\int_a^b wu^{mp} dx + \int_a^b wv^{np} dx\right],$$

ѓде је θ *чинилац који се увек налази између* 1 *и* 2^{p-1}.

Отуда се добијају обрасци

$$\int_a^b w\sqrt{u^2 + w^2}\, dx = \theta_1\left[\int_a^b wu dx + \int_a^b wv dx\right],$$

$$\int_a^b \frac{wdx}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \theta_2\left[\int_a^b \frac{w}{u} dx + \int_a^b \frac{w}{v} dx\right],$$

ѓде се θ_1 *налази између* 0,7071... *и* 1, *а* θ_2 *између* 0,3535.... *и* 1.

Ови обрасци допуштају, између других могућих примена, да се упореде *елиӣтички, хиӣерелиӣтички*, итд. интеграли са интегралима *рационалних* функција. На пример, интеграл

$$\int_a^b \sqrt{h + kx^4}\, dx \qquad (h > 0, k > 0)$$

увек се налази између

$$0,7071\left[(b-a)\sqrt{h} + \frac{\sqrt{k}}{3}(b^3 - a^3)\right]$$

и

$$(b-a)\sqrt{h} + \frac{\sqrt{k}}{3}(b^3 - a^3).$$

Разлика између Јенсеновог интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \operatorname{mod} f(z)\, dt, \qquad z = \rho e^{ti},$$

и интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(P + Q)\, dt,$$

где P и Q означавају апсолутне вредности реалног и имагинарног дела функције $f(\rho e^{ti})$, *увек се налази између*

$$-\frac{1}{2}\log 2 = -0,3465\ldots$$

и 0; ове границе могу бити стварно достигнуте.

II Један други поступак г. Петровића тиче се реалних или имагинарних интеграла облика

$$(7) \qquad \int_a^b uv dx,$$

где су u и v две функције, реалне или имагинарне, променљиве x. Под јединим ограничењем, да пут интеграције буде *реалан* и коначне дужине, М. Петровић утврђује следећу теорему о средњој вредности: *јесте*

$$\int_a^b uvdx=\frac{1}{2}\int_a^b u^2dx+\frac{1}{2}\int_a^b v^2dx-\theta\chi(c)^2,$$

где је $\chi = \mathrm{u} - \mathrm{v}$, c *једна вредност између* a *и* b, *а* θ *једна вредност чији модуо не премаша никада* $\frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{2}$ *и која се своди на* $\frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{2}$ *кад* u *и* v *имају једнаке било своје реалне, било имагинарне делове.*

Корист коју нуди овај облик теореме о средњој вредности састоји се у томе што он доводи до разлагања интеграла (7) на два, од којих један зависи само од u а други од v, са једним поправним чланом коме се знају горња и доња граница, и то без икаквог ограничења за u и v сем тог да интеграли имају смисла.

М. Петровић је једнако доказао образац

$$\int_a^b uvdx=\frac{1}{4}\int_a^b (u+v)^2dx-\theta_1\chi(c)^2,$$

где χ и c имају пређашње значење, θ_1 је чинилац чији модуо не премаша никада $\frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{4}$, и то такође без икаквог ограничења за u и v сем тог да интеграли имају смисла.

Што се тиче општијих интеграла,

$$\mathcal{J}=\int_L u_1u_2\ldots u_n dx,$$

где су u_i било какве функције променљиве x, а L лук интеграције, примећујући да је

$$|\mathcal{J}|<\frac{1}{n^n}\int_L\left(|u_1|+\ldots+|u_n|\right)^n dx,$$

М. Петровић долази до разних занимљивих примена у израчунавању одређених интеграла и у теорији Тејлорових редова.

Интегралу

$$\partial = \int_0^\infty uv\,dx$$

се придружује следећа необична примедба која се дугује г. Петровићу:

Очито је да не постоји никаква функција u промењиве x таква да интеграл $\mathcal{J}$ има коначну, одређену и *од нуле различиту* вредност па ма какав био полином v по x. Постоје, међутим, функције u промењиве x за које $\mathcal{J}$ има једну такву вредност па ма какав био полином v по x чији су коефицијенти *алгебарски* бројеви (цели, рационални или ирационални, реални или имагинарни, позитивни или негативни). Такав је, на пример, случај функције

$$u = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1},$$

где квадратни корен $\sqrt{x}$ има своју позитивну детерминацију.

ТЕОРИЈА ФУНКЦИЈА

ФУНКЦИЈЕ ДЕФИНИСАНЕ СТЕПЕНИМ РЕДОВИМА

М. Петровићева истраживања функција дефинисаних степеним редовима

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{8}$$

односе се пре свега на нуле, величину модула и асимптотске вредности функције $f(z)$.

Једна општа теорема, до које он долази подесном применом теореме г. Адамара о максимуму модула детерминанте на коефицијенте развитка функције $\frac{1}{f}$, даје начин да се рачунају доње границе вредности које анулирају дати степени ред кад се да закон образовања његових коефицијената. Теорема М. Петровића гласи:

ако се начини функција

$$u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left| a_n \right|^2 r^{2n}, \tag{9}$$

онда функција f(z) *нема ниједне нуле унутар круга са центром у почетку и полупречником*

$$\lambda = \frac{\left| a_0 \right|}{\sqrt{u(r)}} \tag{10}$$

и то за било које r *мање од полупречника конвергенције* R *реда* (8).

Г. Ландау[3] је већ указао на друге начине доказивања исте теореме али првобитни доказ М. Петровића има неоспорну предност да претпоставља

---

[3] E. Landau, *Sur quelques théorèmes M. Petrovich sur les zéros des fonctions analytiques* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1905). –Теорема је такође изложена у E. Fouët, *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques*, 2° Partie, p. 187 (у другом издању стр. 82).

само најпростије чињенице из опште теорије функција и да му је основа чисто алгебарска теорема о максимуму детерминанте.

Теорема М. Петровића је *несумњиво ойшта* и не претпоставља ништа о коефицијентима реда функције $f(z)$. Њена практична примена је веома лака: може се заменити a_n у коефицијенту реда $u(z)$ другим коефицијентом c_n таквим да буде

$$c_n \geq |a_n|$$

и да се уме израчунати збир новог, тако добијеног, реда $u(z)$.

Кад је R бесконачан, реална функција $u(z)$ почиње опадати док r расте почев од нуле, достиже позитиван минимум L, после кога она стално расте; највиша могућа вредност за λ ће се добити узимајући L као вредност за $u(z)$.

Кад је R коначан, највиша могућа вредност за λ биће једна од вредности

$$\frac{|a_0|}{\sqrt{L}} \quad \text{и} \quad \frac{|a_0|}{\sqrt{u(R)}}$$

зависно од тога да ли је извод $\dfrac{du}{dz}$ позитиван или негативан за $r = R$.

Тако нађена доња граница за λ је, у општем случају, *најшачнија моїућа*. Заиста, она је стварно достигнута нулом функције[4]

$$f(z) = \frac{2z-1}{1-z} = -1 + z + z^2 + z^3 + \dots .$$

М. Петровић примењује теорему на целе функције коначног рода. Означавајући са $M(r)$ максимум модула једне такве функције $F(z)$ кад је модуо од z једнак r, где је r позитивна реална променљива, зна се да, ма какав био реалан позитиван број α, производ

$$M(r)e^{-\alpha r^{p+1}}$$

остаје мањи од извесног коначног броја N док r расте од 0 до ∞. М. Петровић указује како познавање: 1° једне горње границе броја N која одговара датој вредности α; 2° вредности коју узима $F(z)$ за $z = 0$; 3° рода p те функције допушта да се рачунају доње границе модула нула функције $F(z)$ и, много општије, вредности z за које $F(z)$ узима једну унапред дату вредност.

Између других примена навешћемо једну опште врсте која се односи на величину *минимума модула* аналитичке функције дуж једног круга.

Позната теорема г. Schou-а исказује једну неједнакост између *максимума модула* $M(z)$ дуж једног круга C, полупречника r са центром у поче-

[4] Случај на који је указао г. Ландау (*loc. cit*).

тку, једне функције $f(z)$, холоморфне унутар C и на C, и броја p нула функције $f(z)$ које се налазе у C.

Резултат до кога је дошао М. Петровић, помоћу своје теореме о минимуму модула нула функције $f(z)$, даје једну неједнакост између минимума модула функције $f(z)$ дуж C и броја p и може се сажети у следећу теорему.

Минимум модула функције f(z) *дуж* C *не премаша никада вредност* $\left(\frac{r}{\lambda}\right)^p$, *где је* λ *вредност* (10).

Од ставова М. Петровића који се односе на границе, доње и горње, величина модула једног степеног реда наводимо следеће.

I. Ако је општи коефицијент реда $\sum A_n z^n$ производ одговарајућих коефицијената низа редова

$$(11)\qquad \sum_n a_{1n}z^n,\quad \sum_n a_{2n}z^n,\ldots,\quad \sum_n a_{pn}z^n,$$

са реалним или комплексним коефицијентима, *онда је за сваку вредност* z *која се налази унутар круга конвергенције заједничког редовима* (11) *модуо реда* $\sum A_n z^n$ *мањи од*

$$\sqrt{\varphi_1(r^{\frac{1}{p}})\varphi_2(r^{\frac{1}{p}})\ldots\varphi_p(r^{\frac{1}{p}})},$$

где је $r=|z|$ и

$$\varphi_i(z)=\sum_n |a_{in}|^2 z^{2n}.$$

II. За сваку вредност z за коју ред $\sum a_n z^n$ са реалним или комплексним коефицијентима конвергира, *модуо реда* $\sum a_n^p z^n$ *мањи је од вредности*

$$[\varphi(r^{\frac{1}{p}})]^{\frac{p}{2}},$$

где је

$$\varphi(z)=|a_0|^p+|a_1|^p z+|a_2|^p z^2+\ldots\ .$$

III. Нека је

$$(12)\qquad f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$$

ред са реалним и позитивним коефицијентима, прва два коефицијента a_0 и a_1 могу, уосталом, имати ма какве реалне вредности. Нека су $x_1,x_2,\ldots,x_n$ реалне и позитивне величине чији је збир s мањи од полупречника конвергенције R реда (12).

Важи образац:

$$f(x_1+\ldots+x_n)=\theta\left[f\left(\frac{x_1}{\theta}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_n}{\theta}\right)\right]-(n\theta-1)f(0),$$

ӣде је θ *један чинилац који се увек налази између* $\frac{1}{n}$ *и* 1. Границе $\frac{1}{n}$ и 1 су стварно достигнуте за произвољну функцију $f(z)$ кад су количине x_i занемарљиве у односу на једну од њих, или пак кад су међусобно једнаке.

Такође важи образац

$$f(x_1)+\ldots+f(x_n)=A+\theta B,$$

ӣде је

$$A=nf\left(\frac{s}{n}\right),$$

$$B=f(s)-nf\left(\frac{s}{n}\right)+(n-1)f(0),$$

а θ *чинилац који се увек налази између* 0 *и* 1; ове границе су достигнуте у два горе поменута случаја.

Г. Борел је упозорио на чињеницу да се дати развитак

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots,$$

може заменити (и то на бесконачно много начина) једним другим развитком

$$\varphi(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots$$

чији су коефицијенти A_n *рационални бројеви* и који има исте сингуларитете као $f(z)$ у читавом делу равни где постоје обе функције[5].

М. Петровић показује да се рационални A_n могу изабрати на такав начин да модуо разлике $f(z)-\varphi(z)$ буде, у датом кругу, мањи од унапред датог броја ε. Он доказује тако следећу теорему.

Аналитичка функција f(z) *може бити представљена у околини сваке обичне тачке* z, *и са жељеном апроксимацијом, степеним редом* φ(z) *са рационалним коефицијентима чији су имениоци уређени унапред датим законима* (уз извесна ограничења о конвергенцији).

Може се располагати овим имениоцима тако да задовољавају разне жељене услове, као, на пример, ма који од следећих услова:

1° да две функције f и φ имају *исте сингуларитете* у читавом делу равни где оне постоје;

[5] E. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 36.

2° да φ буде степени ред, чији су коефицијенти *цели* бројеви, подељени једним *целим* бројем;

3° да се функција φ своди на један *полином* по z, чији су коефицијенти *цели* бројеви, подељен једним целим бројем.

Постоји бесконачно много степених редова $f(x)$ са реалним коефицијентима који имају значајну особину да су све нуле њиховог n-*тог делимичног збира*

$$(13) \qquad f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

реалне за било које n. Стварне примере таквих редова дале су извесне трансцендентне функције које је изучавао г. Харду.[6]

М. Петровић, у својој расправи *Sur une classe remarquable de séries entières* приказаној на Међународном конгресу математичара у Риму 1908, потпуно решава проблем налажења *потребних и довољних* услова да тако буде и тако даје начин *стварног образовања свих степених редова са том особином.*

Нека је $\Delta_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ дискриминанта полинома $f_n(z)$ и образујмо алгебарску једначину по x

$$(14) \qquad \Delta_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x) = 0.$$

Означавјући са λ_n најмањи позитиван корен једначине (14) а са μ_n њен највећи негативан корен, г. Петровић исказује следећу теорему.

Да би ред f(z) *имао посматрану особину, потребно је и довољно да буде* $a_2 < \frac{a_1^2}{4a_0}$ *и да се сваки коефицијент* $a_n (2 < n)$ *налази између два одговарајућа корена* λ_n и μ_n.

Коефицијенти a_n једног таквог реда задовољавају неједнакост

$$(n-1)a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2} > 0$$

која показује, на пример, да не могу два узастопна коефицијента a_n бити нуле нити може бити нула коефицијент између два коефицијента истог знака.

За редове са позитивним a_n теорема добија следећи облик.

Да би ред f(z) *имао исказану особину, потребно је и довољно да сваки коефицијент* $a_n (2 \le n)$ *буде мањи или једнак од корена* λ_n.

М. Петровић доказује у овом случају да $f(z)$ *јесте цела функција променљиве* z *једнака канонском производу нултог рода помноженог једном*

[6] Hardy, *On the zeros of a classe of integral functions* (The Messenger of Mathem., novembre 1904, pp. 97–101).

експоненцијалном функцијом e^{az}. До исте теореме је дошао г. Монтел при својим општијим истраживањима[7].

Модуо функције $f(z)$ је за сваку вредност $z = re^{ti}$ мањи од $a_0\Phi(\beta r)$ где је $\Phi(z)$ цела функција

$$\Phi(z) = \sum_0^\infty \frac{e^{-\alpha n^2}}{n!} z^n, \quad \alpha = \frac{1}{2}\log 2$$

а β константа $\frac{a_1\sqrt{2}}{a_0}$.

Нуле функције $f(x)$ расту са n брже од $2^{\frac{n}{2}} n$. Поља је доказао да трансцендентне функције $f(z)$ са позитивним рационалним коефицијентима a_n *не задовољавају ниједну алгебарску диференцијалну једначину* [8].

Лако је, уосталом, образовати неограничен број редова $f(z)$: постоји бесконачно много низова $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ таквих да ако је $\sum a_n z^n$ један ред $f(z)$, онда је такав и ред $\sum \omega_n a_n z^n$.

Трансцендентне функције $f(z)$ су, од радова М. Петровића, биле предмет дубљих изучавања г. Поље[9] и г. Монтела[10].

20. Постоји исто тако бесконачност степених редова са *реалним* коефицијентима који имају особину да *ни сам ред нити било који његов делимични збир парног индекса нема реалних нула.*

Такви су, на пример, елементарни редови

$$\sum z^n, \quad \sum \frac{z^n}{n!}.$$

Означимо са λ_k одређени интеграл

$$\lambda_k = \int_a^b uv^k dt, \tag{15}$$

где су границе a и b произвољне али *реалне*, u и v су две ма какве функције реалне промењиве t у интервалу (a,b) и u је сталног знака у том интервалу.

---

[7] P. Montel, *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. XXXIII, 1916, p. 281).

[8] G. Pólya, *Zur Utersuchung der Grössenordnung genzer Functionen die einer Differentialgleichung genügen* (Acta mathematica, Bd. XXXXII, 1920).

[9] G. Pólya, *Ueber Annäherung durch Polynome mit lanter reellen Wurzeln* (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, Bd. XXXVI, 1913, p. 2); *Ueber die Zusammenhang zwischen der konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer wurzelm* (Rendiconti, t. XXXVII, 1914).

[10] P. Montel, loc. cit. – Видети такође белешку г. R. Jentzsch-a у Comptes rendus de l'Académie des Sciences, numéro du 16 mars 1914.

М. Петровић показује да *ако је* $\sum a_n z^n$ *један ред са изреченом особином, онда је шакав и ред* $\sum \lambda_n a_n z^n$. Он долази до разних тврђења о максимуму модула таквих редова дуж датог круга, о минимуму модула њихових нула, о расподели њихових нула (као и нула збирова датог броја њихових првих чланова) у равни променљиве z, итд.

II ЈЕДАН НАЧИН РАСТАВЉАЊА АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА НА ПРОСТЕ ЕЛЕМЕНТЕ

Свака аналитичка функција се може представити, и то на бескрајно много начина, интегралима облика

$$\int_L R(t,z)dt, \tag{16}$$

где је R *рационална* функција по z, који је дефинише у одређеној области равни z.

Тако, основни Кошијев образац

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt, \tag{17}$$

као и они који се из њега изводе диференцирањима, сменама променљиве или пута интеграције, дају аналитичке изразе за $f(z)$ у облику (16). Одатле се једнако изводи једна бесконачност других образаца истог типа применом претходних на функције потчињене посебнијим условима (на пример познате Стилтјесове формуле[11]).

С друге стране, ако је функција $f(z)$ дата својим тејлоровским развитком, онда се општи коефицијент a_n на бесконачно много начина може написати у облику

$$a_n=\mathcal{J}(n)=\int_L ur^n dt \tag{18}$$

(u и r су функције променљиве t) или у облику збира, таквих чланова, тако да ће функција $f(z)$ бити представљена у облику (16). Позната су решења проблема изражавања a_n у облику (18) за веома широке класе аналитичких функција (гг. Борел, Ле Руа, Стилтјес).

Дакле, ако се претпостави да је унапред дата функција $f(z)$ у облику (16), г. Петровић примећује најпре да се коефицијент b_n реда

$$R(t,z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\dots$$

[11] Stieltjes, *Sur le développement de* $\log\Gamma(a)$ (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1889, p. 424–444).

може изразити у облику збира ограниченог броја чланова облика

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k)J(n),$$

где k не зависи од n а $J(n)$ је облика (18). Одговарајуће функције u и r не зависе од n а алгебарски зависе од функција променљиве t које се јављају као коефицијенти уз различите степене променљиве z у R.

Ова проста примедба доводи г. Петровића до следеће теореме:.Ако се са $\mathcal{J}_1(n), \mathcal{J}_2(n), \mathcal{J}_3(n), \dots$ означе разни интеграли облика (18) придружени функцији $f(z)$, а са $\theta_1(z), \theta_2(z), \theta_3(z), \dots$ разне функције

$$\theta_k(z) = \sum_0^\infty \mathcal{J}_k(n) z^n \tag{19}$$

што одговарају тим интегралима, онда *се функција* f(z) *може изразити као линеарна комбинација са константним коефицијентима чланова*

$$\begin{cases} \theta_1(z), \ z\dfrac{d\theta_1}{dz}, \ z^2\dfrac{d^2\theta_1}{dz^2}, \ \dots, \\ \theta_2(z), \ z\dfrac{d\theta_2}{dz} \ z^2\dfrac{d^2\theta_2}{dz^2}, \ \dots, \\ \dots\dots, \ \dots\dots, \ \dots\dots, \quad \dots . \end{cases} \tag{20}$$

Функције $\theta(z)$ имају тако улогу једне врсте *простих елемената* према функцији $f(z)$ којој се придружују. Питање конвергенције редова $\theta(z)$ уско је повезано са питањем асимптотских вредности интеграла $\mathcal{J}n)$. Асимптотске једнакости Лапласа, Дарбуа, Фламиа, Амија, Поенкареа, Ле Руа као и разне неједнакости које се односе на $\mathcal{J}n)$, од којих је за неке, веома опште, заслужан г. Петровић, дају оно што је потребно да би се решио проблем. Међу функцијама $\theta(z)$ има *целих* и г. Петровић исказује правила за њихово препознавање у посматраним случајевима.

Аналитички израз за функције $\theta(z)$ било у облику редова (19), било у облику интеграла

$$\theta(z) = \int_L \frac{u}{1-rz}\,dt, \tag{21}$$

погодан је за подробније изучавање особености тих функција, тиме што истиче односе који постоје између разних особености функција $\theta(z)$ и особености њима придружених функција u и r.

Израз за $\theta(z)$ у облику (19) одређује $\theta(z)$ у унутрашњости једнога круга; израз облика (21) даје аналитичко продужење у читаву раван. Сваки од њих истиче особености функције $\theta(z)$. Први је, на пример, згодан за непосредну примену скорашњих резултата теорије степених редова који се тичу постојећих односа између начина опадања $\mathcal{J}(n)$ са n и растења $\theta(z)$ са

z; или пак односа између особености низа $\mathcal{J}(n)$ и сингуларитета функције $\theta(z)$, њених нула, њених полова, итд. Други израз је често погоднији за нумеричко рачунање функције $\theta(z)$; он омогућава изучавање особина функције $\theta(z)$ ван круга конвергенције одговарајућег реда (19). Погодан је, на пример, при изучавању асимптотских вредности функција $\theta(z)$, расподеле њихових сингуларитета у z-равни, начина на који се понаша $\theta(z)$ кад се z приближава кругу конвергенције реда (19), или пак, једном од њених сингуларитета, или када се z обрће око њега, итд. Расправе г. Петровића садрже више значајних резултата у том погледу и показују да је могуће изградити једну општу теорију веза између елемената (a, b, u, r) и аналитичке функције $f(z)$ којој су придружени.

Функције $f(z)$ појављују се непосредно у облику елемената (a, b, u, r) у многобројним проблемима анализе. Постоји, на пример, једна бесконачност диференцијалних једначина

$$f(x, y, y') = 0 \tag{22}$$

чији је општи интеграл облика

$$F(\lambda y, C\mu) = 0 \quad (\mathrm{C} = \mathrm{const.}),$$

где су λ и μ функције променљиве x а F је *рационална* функција од C. М. Петровић исказује потребне и довољне услове да тако буде. Интеграл $\int ydx$, или, општије, $\int R(x, y)dx$, где је R *рационална* функција по y а ма каква по x, узет дуж датог пута L и посматран као функција интеграционе константе C, представља се тада непосредно помоћу својих елемената (a, b, u, r). *Такав је, између осталих, случај алгебарске једначине првог реда са сталним критичним тачкама и нулте врсте.* Интеграл $\int ydx$ ће бити облика

$$\int_L P(x, C)dx,$$

где је P рационална функција по C, коефицијентне функције променљиве x алгебарски зависе од функција добијених интеграцијом једне Рикатијеве једначине и коефицијената који се јављају у датој диференцијалној једначини. Он се може, на претходни начин, раставити на просте елементе у којима ће посредовати интеграли једне Рикатијеве једначине. У случају, на пример, сасвим просте једначине

$$y' + xy^2 - a^2x = 0 \quad (\alpha = \mathrm{const.}),$$

изражава се интеграл

$$\int_0^\infty (y + \alpha)\,dx$$

помоћу трансцендентне функције

$$\theta(C)=\sum_{0}^{\infty}\frac{C^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Сетимо се још да, ако је a константа са позитивним имагинарним делом, свака функција дефинисана степеним редом чији је општи коефицијент рационална функција променљивих $\sin an$ и $\cos an$ допушта као прост елемент трансцендентну функцију

$$\theta(z)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\cot(\alpha n+\beta)+i\right]z^n$$

(α и β су константе) везану познатом функционалном релацијом са функцијом $D\log\theta_1(z)$ из теорије елиптичких функција. Ово води до једног начина *представљања мероморфних двопериодичних функција у облику одређеног интеграла рационалних комбинација експоненцијалних функција са интеграционим границама* $-\infty$ и $+\infty$ (проблем је већ решио А. Поенкаре).

III. ПОСЕБНЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЕ ФУНКЦИЈЕ У ОПШТИМ ПРОБЛЕМИМА.

Било би релативно лако замислити и стварно направити толико колико се хоће нових трансцендентних функција дефинисаних својим Тејлоровим развицима које би, због облика свог општег коефицијента, биле погодне за проучавање њихове различитих особина уобичајеним поступцима опште теорије функција. Али такве функције би биле од неког стварног значаја само ако би се могло учинити да имају улогу у питањима општијег реда, или пак ако се јављају као елементи рачуна у важним проблемима, као елементи свођења за више или мање широке класе функција, итд.

Многе међу новим трансцендентним функцијама на које је указао и које је изучавао г. Петровић добро испуњавају ове услове.

Такав је, најпре, случај трансцендентне функције

$$\Omega(z)=1+z+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{54}+\frac{z^4}{2379{,}423}+\ldots$$

чији је коефицијент уз z^n најмањи позитиван корен бројне једначине n-тог реда по x

$$\Delta_n(1,1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_{n-1},x)=0,$$

у којој Δ_n означава дискриминанту полинома по z

$$1+z+\lambda_2 z^2+\lambda_3 z^3+\ldots+\lambda_n z^n$$

у коме је λ_n замењено са x.

Ред $\Omega(z)$ на који је указао и проучавао га г. Петровић представља једну нову трансцендентну функцију. То је *цела функција нултог рода*, једнака канонском производу нултог рода помноженим експоненцијалном функцијом e^{-z}. Она има бесконачно много нула; све су реалне, негативне, мање од -1 и расту са n, по апсолутној вредности, брже од $n(\sqrt{2})^n$. Њен модуо за $z = re^{ti}$ мањи је од $\Phi(re\sqrt{2})$, где $\Phi(z)$ означава целу функцију

$$\Phi(z) = \sum_0^\infty \frac{e^{-\alpha n^2}}{n!} z^n, \quad \alpha = \frac{1}{2}\log 2 .$$

Посматрајмо претходно наведене функције

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^3 + \dots$$

које имају особину да су све њихове и нуле свих њихових скраћења n-тог реда

$$f_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad (n = 1,2,3,\dots),$$

реалне. Стављајући $a_0 = a_1 = 1$ (што никако не умањује општост), *г. Петровићева трансцендентна функција* $\Omega(z)$ *чини у функцијском простору неку врсту границе између функцијског поља функција* f(z) *са наведеном особином и остатка функција.* Заиста, између функција $f(z)$, ред $\Omega(z)$ је онај чији коефицијенти a_n *достижу своју највећу могућу вредност.*

Трансцендентна функција

$$\Delta(z,\alpha) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n^{\alpha n}}$$

(где је α константа са позитивним реалним делом), коју је такође проучавао г. Петровић, занимљива сама по себи због једноставности закона свог општег коефицијента, јавља се у различитим питањима која се односе на целе функције. Дешава се да се извесне занимљиве особености проучаваних функција преводе неједнакостима између општег тејлоровског коефицијента a_n, придруженог функцији, и једне одређене функције његовог индекса n која се управо изражава помоћу општег коефицијента реда $\Delta(z,\alpha)$. Познате особине овога, због постојећег односа између закона коефицијента a_n и особености (начин растења, асимптотска вредност, границе промене, густина нула, итд.) одговарајуће функције, могу тада довести до особина проучаваних функција. *Трансцендентна функција* $\Delta(z,\alpha)$ *јавља се тада као елемент поређења и рачунања* који може учинити истинске услуге.

Међу тврђењима г. Петровића која истичу ову улогу указујемо на следећа.

I. Модуо коефицијента a_n једне просте целе функције (то значи да у њеном развоју у производ примарних чинилаца нема експоненцијалног чиниоца) коначног рода је, почев од извесног n, стално *мањи од одговарајућег коефицијента функције* $\Delta(\lambda z,\beta)$, где су λ и β позитивне, од n независне константе. За функције нултог рода та неједнакост се распростире на све коефицијенте a_n.

Модуо једног реда

$$f(z)=1+b_1z+b_2z^2+\ldots,$$

чији је општи коефицијент b_n једнак k-том степену општег коефицијента једне просте целе функције нултог рода, *мањи је од* $\Delta(hr,k)$, где је $h=(\mu e)^k$ а μ означава збир реципрочних вредности модула нула функције $f(z)$. Модуо n-те нуле функције $f(z)$ расте бар тако брзо као n^k, итд.

II. Трансцендентна функција $\Delta(z,\alpha)$ јавља се такође као поредбени елемент за сваки ред $f(z)=\sum a_n z^n$ са реалним или комплексним коефицијентима, *такав да ред са општим чланом* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *конвергира.*

Ред $f(z)$ представља тада једну *целу* функцију променљиве z чији је модуо, за сваку вредност $z=re^{ti}$, мањи од $|a_0|\Delta(\mu r,1)$, где је μ претходна константа. То показује, на пример, да је вредност Јенсеновог интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{\theta i})\right|d\theta,$$

придруженог функцији $f(z)$ мања од

$$\log|a_0|+\log\left(1+\mu re^{\frac{\mu r}{c}}\right);$$

да нуле функције $f(z)$ расту бар тако брзо као њихов ранг, итд.

III. На један општији начин, сваки пут кад постоји коначан, реалан и позитиван број α такав да ред са општим чланом

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^{\frac{1}{\alpha}}$$

конвергира, ред $\sum a_n z^n$ представља *целу* функцију променљиве z чији је модуо, за сваку вредност $z=re^{\theta i}$, *мањи од* $|a_0|\Delta(\gamma z,\alpha)$, где су γ и α позитивне константе.

IV. Нека је

$$f(z)=1+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$$

ред чији је општи коефицијент a_n детерминанта реда n сачињена од реалних или комплексних елемената таквих да двоструки ред образован од квадрата њихових модула конвергира униформно за неограничено растуће n; нека је λ збир тог реда.

Ред $f(z)$ представља целу функцију променљиве z чији је модуо, за сваку вредност $z = re^{ti}$, *мањи од* $\Delta(r\sqrt{\lambda}, \frac{1}{2})$; овај модуо за неограничено растуће r расте *спорије* од $re^{\frac{\lambda r^2}{2e}}$; вредност Јенсеновог интеграла придруженог функцији $f(z)$ *мања* је од $\log \Delta(r\sqrt{\lambda}, \frac{1}{2})$; нуле функције $f(z)$ расту *бар тако брзо* као квадратни корен њиховог ранга, итд.

Г. Петровић указује, осим тога, на многобројне класе функција за које деловање трансцендентне функције $\Delta(z,\alpha)$ даје доње и горње границе њихових модула; начин растења, густину нула, итд.

V. Трансцендентна функција $\Delta(z,\alpha)$ јавља се и као елемент свођења за извесне класе одређених интеграла. Такав је, на пример, случај интеграла помоћу којих се рачуна површина равне површи ограничене x-осом, одговарајућим ординатама за $x = 0$ и $x = 1$ и луком ма које интегралне криве једне хомогене линеарне једначине било ког реда, сводљиве сменом независне променљиве

$$x \log x = t$$

на једначину са константним коефицијентима. Површина се изражава збиром чланова облика

$$C\frac{\Delta(-r,1)-1}{r} \quad \text{и} \quad C\frac{d^k}{dr^k}\left[\frac{\Delta(-r,1)-1}{r}\right]$$

који се односе на све корене карактеристичне једначине по r придружене линеарној једначини добијеној том сменом променљиве.

Исто је са целом површином равне површи десно од осе Oy, ограничене осом Ox и луком ма које интегралне криве хомогене линеарне једначине било ког реда, сводљиве сменом

$$xe^{-x} = t, \quad y = e^{-x}z,$$

на једначину са константним коефицијентима.

Трансцендентна функција $\Delta(z,\alpha)$, имајући и улогу корисног рачунског инструмента, заслужила је темељније изучавање и била предмет више расправа и бележака г. Петровића. То је цела функција променљиве z која својим начином растења припада типу

$$z^h e^{gz^k},$$

где су h, g, k позитивне константе. Кад z неограничено расте у правцу позитивних реалних вредности, функција Δ тежи асимптотски функцији

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha e}}\, z^{\frac{1}{2\alpha}} e^{\frac{\alpha}{e} z^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Она има бесконачно много нула и модуо p-те нуле расте са својим рангом p бар тако брзо као p^{α}.

Посебан случај

$$\Delta(z,1) = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n},$$

који се јавља у многим општим проблемима, погодан је, захваљујући могућности да се изрази помоћу једног веома простог одређеног интеграла, за једно темељније изучавање. За сваку вредност $z = re^{ti}$ имамо

$$|\Delta| < re^{\frac{r}{e}} + 1,$$

$$\left|\frac{d^k \Delta}{dr^k}\right| < k!\left[\frac{1}{k^k} + \frac{r}{(k+1)^{k+1}}\right] e^{\frac{r}{e}}.$$

Кад z тежи бесконачности у ма ком правцу десно од имагинарне осе, модуо функције $\Delta(z,1)$, као и било ког од њених извода, повећава се бесконачно али највише тако брзо као израз $ze^{\frac{z}{e}}$; за правце лево од те осе ови модули теже нули.

Кад z неограничено расте у правцу позитивних реалних вредности, $\Delta(z,1)$ асимптотски тежи изразу $Ae^{\frac{z}{e}}\sqrt{z}$, где је A бројна константа

$$A = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} = 1{,}52034\ldots.$$

Крива $y = \Delta(z,1)$ има праву $y = 1$ као асимптоту за $x = -\infty$; кад x расте од $-\infty$ до ∞, крива почиње да опада испод те праве, сече x-осу у једној тачки која се налази између $x = -39$ и $x = -40$, достиже негативан минимум $y = -0{,}68772\ldots$ за једну негативну вредност x-а од које почиње да расте, сече поново x-осу у једној тачки која се налази између $x = -1{,}405$ и $x = -1{,}406$, сече затим праву $y = 1$ за $x = 0$ и расте неограничено тежећи асимптотски кривој

$$y = A\sqrt{x}e^{\frac{x}{e}},$$

где је A наведена бројна константа.

Функција $\Delta(z,1)$ има две негативне реалне нуле (које се налазе између управо назначених граница) и бесконачно много комплексних нула које се све налазе ван траке између две праве $y + e\pi = 0$ и $y - e\pi = 0$ и чији модули расту бар тако брзо као њихов ранг.

Функција $a + \Delta(z,1)$, где је a константа, има највише две реалне нуле; наиме, ако је λ константа, односно $\lambda = 0{,}68772...$, једнака минимуму функције $\Delta(z,1)$, онда важи: 1° кад је $a > \lambda$, нема реалних нула; 2° кад је $a = \lambda$, има једну двоструку реалну нулу; 3° кад је $a < \lambda$, има две просте негативне нуле.

IV. ЦЕЛЕ ФУНКЦИЈЕ КОЈЕ УОПШТАВАЈУ ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ И ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Ако се у изразу

$$\alpha_n = \frac{\int_a^b ur^n dt}{\int_a^b u dt}$$

замене u и r разним функцијама реалне променљиве t, коначним и непрекидним за t из реалног и коначног интервала (a,b), добија се неограничен број низова

$$1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

М. Петровић је изучавао редове

$$\mathcal{J}(z) = 1 + \frac{\alpha_1}{1} z + \frac{\alpha_2}{1\cdot 2} z^2 + \frac{\alpha_3}{1\cdot 2\cdot 3} z^3 + \ldots,$$

$$\mathcal{J}_1(z) = 1 - \frac{\alpha_2}{1\cdot 2} z^2 + \frac{\alpha_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} z^4 - \ldots,$$

$$\mathcal{J}_2(z) = \frac{\alpha_1}{1} z - \frac{\alpha_3}{1\cdot 2\cdot 3} z^3 + \frac{\alpha_5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} z^5 - \ldots,$$

повезане односом

$$\mathcal{J}(xi) = \mathcal{J}_1(x) + i\,\mathcal{J}_2(x),$$

који се, у посебном случају $r = \text{const.}$, своде на елементарне функције

$$\mathcal{J}(x) = e^{rx}, \quad \mathcal{J}_1(x) = \cos rx, \quad \mathcal{J}_2(x) = \sin rx,$$

представљајући, у случају променљивог r, разнолике трансцендентне функције које *могу, због многих веза, бити посматране као уопштења ових функција.*

То су *целе* функције променљиве x, рода *нула* или *један*. Функција $\mathcal{J}(x)$ има само ограничен број реалних нула и ограничен број максимума и минимума. Кад се x повећава неограничено, повећава се $\mathcal{J}(x)$ такође неограничено или пак тежи нули зависно од аргумента са којим се x повећава. Све ово једнако важи за изводе ма ког реда, који су увек функције исте врсте.

Функције $\mathcal{J}_1(x)$ и $\mathcal{J}_2(x)$ су *осцилујуће* за реално x, са неограниченим бројем осцилација, имајући неограничен број позитивних и негативних реалних нула и ограничен број чисто имагинарних нула. Оне не премашају по апсолутној вредности извесну коначну границу, ни за једну реалну вредност, коначну или бесконачну, променљиве x. Све ово једнако важи за изводе било ког реда функција $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ које су увек функције ове исте врсте.

Дубље сличности са функцијама $e^{rx}, \cos rx, \sin rx$ појављују се у случају кад је функција u сталног знака између a и b. У том случају, означавајући са M и N највећу и најмању вредност коју узима функција r у интервалу (a, b), г. Петровић долази до следећих резултата.

Функција $\mathcal{J}(x)$ нема ниједну реалну нулу нити иједну комплексну нулу са имагинарним делом између $-\frac{2\pi}{M}$ и $+\frac{2\pi}{M}$. Ако је, истовремено, r сталног знака у интервалу (a,b), реална крива $y = \mathcal{J}(x)$ се мења стално у једном те истом смеру кад x расте од $-\infty$ до $+\infty$ немајући ни максимума, ни минимума, ни превојних тачака, и исто тако је и са било којим изводом функције $\mathcal{J}(x)$. Све нуле полинома добијеног заустављањем реда $\mathcal{J}(x)$ на ма ком члану парног степена имагинарне су.

Израз $\frac{1}{x}\log \mathcal{J}(x)$ има коначну вредност која се налази између M и N за сваку реалну вредност променљиве x. Означавајући, уопште, са λ функцију променљиве x чије су вредности, за сваку реалну вредност x-а, коначне и налазе се између $1 - h$ и $1 + l$, где је

$$1 > h = \frac{M-N}{M} > 0, \quad l = \frac{M-N}{N} > 0,$$

свака функција $\mathcal{J}(x)$ има за реално x један *адитиван образац* облика

$$\mathcal{J}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \mathcal{J}(x_1)^{\lambda_1} \mathcal{J}(x_2)^{\lambda_2} \ldots \mathcal{J}(x_n)^{\lambda_n}$$

и један *мултипликативан образац* облика

$$\mathcal{J}(x_1 x_2) = \mathcal{J}(x_1)^{\lambda_2 x_2} = \mathcal{J}(x_2)^{\lambda_1 x_1}.$$

Функције $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ мењају се тада само између -1 и 1, са неограниченим бројем осцилација, са неограниченим бројем реалних нула и ниједном чисто имагинарном нулом. Једна важна формула, коју је доказао г. Петровић, *уопштава Муаврову*: ако се стави

$$H_1(x) = \mathfrak{J}_1(xi), \quad H_2(x) = -i\mathfrak{J}_2(xi)$$

(функције H_1 и H_2 су реалне и уопштавају *хиперболичке функције*), онда је

$$\left[H_1(x) + i\,H_2(x)\right]^m = H_1(m\lambda_1 x) + i\,H_2(m\lambda_1 x),$$
$$H_1(mx) + i\,H_2(mx) = \left[H_1(\lambda_2 x) + i\,H_2(\lambda_2 x)\right]^m$$

за сваку реалну вредност промењљивих x и m.

Сличност са тригонометријским функцијама наставља се до развитка у редове по функцијама $\mathfrak{J}_1(nx)$ и $\mathfrak{J}_2(nx)$. Нека је, на пример,

$$A_0 + \sum_1^\infty A_n \cos nx + \sum_1^\infty B_n \sin nx$$

развитак, који важи за x између 0 и 2π, једне коначне и непрекидне у том интервалу функције $f(x)$.

М. Петровић показује да хипергеометријски ред

$$A_0 + \sum_1^\infty A_n \mathfrak{J}_1(nx) + \sum_1^\infty B_n \mathfrak{J}_2(nx) \tag{23}$$

(за који су тригонометријски редови само посебан случај) *конвергира апсолутно и униформно и представља функцију*

$$\Phi(x) = \frac{\int_a^b uf(rx)dt}{\int_a^b udt} \tag{24}$$

за $0 < x < \dfrac{2\pi}{M}$, где M представља највећу апсолутну вредност функције u за t између a и b. Кад је функција $f(x)$ непрекидна и има 2π као период, развитак се шири на сваку реалну вредност промењљиве x.

За r = const. ред (23) своди се, ма каква била функција u, на тригонометријски ред. У случају промењљивог r и кад је u непромењљивог знака за вредности промењљиве t из интервала (a,b), ред (23) представља функцију облика $f(\mu x)$, где је μ функција промењљиве x чије вредности, кад x расте од $-\infty$ до $+\infty$, остају између најмање и највеће вредности које узима функција r кад се t мења између a и b.

Изражавање хипергеометријског реда (23) у облику (24) износи на видело многобројне особине ових редова и представља извор многобројних образаца који уопштавају оне који се придружују тригонометријским функцијама. М. Петровић указује, примера ради, на обрасце

$$\sum_{1} \frac{1}{n} \mathcal{J}_2(nx) = \frac{1}{2}(\pi - \alpha_1 x).$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - p^2} \mathcal{J}_1(nx) = \frac{\mathcal{J}_1(px)}{2p \sin p\pi} - \frac{1}{2p^2},$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - p^2} \mathcal{J}_2(nx) = \frac{\pi}{2 \sin p\pi} \mathcal{J}_2(px),$$

који уопштавају познате тригонометријске развитке функција $x, \cos px$, $\sin px$ и од којих први важи за $0 < x < \dfrac{2\pi}{M}$ а друга два за сваку реалну вредност промењиве x.

Трансцендентне функције $\mathcal{J}(x), \mathcal{J}_1(x), \mathcal{J}_2(x)$ јављају се у разним проблемима анализе и аритметике, што даје посебну важност њиховом изучавању.

Тако се интеграција извесних класа диференцијалних или функционалних једначина остварује уз помоћ ових функција. На пример, ако је $f(x)$ једна трансцендентна функција $\mathcal{J}(x)$ дефинисана својим елементима $(a, b\ u, r)$, онда се линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

као и функционална једначина

$$a_0 \lambda(x + h_0) + a_1 \lambda(x + h_1) + \ldots + a_n \lambda(x + h_n) = f(x)$$

(уз извесна ограничења за константе a_k и h_k) решавају помоћу функција $\mathcal{J}(x)$ које одговарају истим елементима (a, b, u, r) функције $f(x)$, изузев елемента u.

Уосталом, како то показује г. Петровић, свака функција $f(x)$, коначна и непрекидна у коначном интервалу промењиве x, може се у том интервалу представити, са жељеном тачношћу, помоћу функција $\mathcal{J}(x)$, $\mathcal{J}_1(x)$, $\mathcal{J}_2(x)$. Претходне једначине се, дакле, приближно решавају помоћу $\mathcal{J}, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ за ма коју аналитичку функцију $f(x)$.

Лапласова једначина

$$(a_0 x + b_0) y^{(n)} + (a_1 x + b_1) y^{(n-1)} + \ldots + (a_n x + b_n) y = 0$$

допушта, у општим случајевима, као партикуларне интеграле функције $\mathcal{J}(x)$ чији се елементи (a, b) добијају као корени извесне алгебарске једначине n-тог реда (или као једна од вредности $\pm\infty$); елемент u се добија интеграцијом извесне линеарне једначине првог реда, при чему је $r = t$.

Одређени интеграл

$$\int_a^b y dx,$$

где је y општи интеграл Halphen-ове једначине,

$$R_0 y^{(n)} + R_1 y^{(n-1)} + \ldots + R_n y = 0 \tag{25}$$

(R_i су рационалне функције од x, а општи интеграл је униформан) је, уз извесна лако исказива ограничења, линеарна и хомогена комбинација чланова облика $\mathcal{J}(\alpha)$, где су α корени извесне алгебарске једначине придружене једначини (25).

М. Петровић показује још да међу целим функцијама

$$\mathcal{J}_2 = \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\alpha_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \ldots$$

које уопштавају $\cos rx$ постоји једна класа трансцендентних функција које се, једним важним аритметичким својством, *везују уз просте бројеве.* То су оне међу функцијама $\mathcal{J}_2(x)$ у којима су елементи (a,b) ***нецели*** позитивни бројеви са $4 < a <$ b и где је

$$u = f(t)\theta(t),$$

при чему је $f(t)$ ма каква функција промењиве t, реална и холоморфна дуж сегмента $a \le t \le b$ реалне осе Ot, сталног знака дуж тог сегмента, а

$$\theta(t) = \left[\frac{\sin \dfrac{\pi\Gamma(t)}{t}}{\sin \dfrac{\pi}{t}} \right]^2.$$

Функција $\theta(t)$ чија је веза са простим бројевима позната, почев од H. Laurent-a, холоморфна је у полуравни t-ова са позитивним реалним делом и, за t између a и b, стално је позитивна и мања од $\dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi}{b}}$.

М. Петровић је доказао следећа аритметичка тврђења везана за такве функције $\mathcal{J}_2(x)$:

1° Ред

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{J}_2[(2n-1)\pi] \tag{26}$$

конвергира и *има збир*

$$-\frac{1}{2}\sum f(pi),$$

где $p_1, p_2, p_3, \ldots$ – *означавају просте бројеве који се налазе између* a *и* b.

2° Ред

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{J}_2(n\pi) \tag{27}$$

конвергира и *има збир*

$$\frac{1}{2}\left[\sum f(pi) - f(0)\right].$$

3° Посебна трансцендентна функција $\mathcal{J}_2(x)$, која одговара коефицијентима

$$\alpha_n = \int_a^b \theta(t) t^n dt,$$

има важну особину да је одговарајући ред (26) конвергентан и *полузбир му је број простих бројева који се налазе између* a *и* b.

М. Петровић је изнео на видело једну другу класу трансцендентних функција $\mathcal{J}(x)$ која је такође у занимљивим односима са *простим бројевима*. Означимо са $P(t)$ полином степена m

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m$$

и нека је k дати цео број већи од 4. Означимо са h нулу, као цео део, праћену низом децимала збира $\sum a_n$ са индексима *n једнаким простим бројевима који се налазе у интервалу* $(k, m+k-1)$. Разматрајмо између трансцендентних функција $\mathcal{J}(x)$ оне које одговарају елементима

$$a = 0, \quad b, \quad u = P(t)t^k, \quad r = -t,$$

и нека је L граница којој тежи $\mathcal{J}(x)$ кад се b бескрајно повећава.

Сваки пут кад је производ $(\mathrm{n}+\mathrm{k})\mathrm{a}_\mathrm{n}$, *за сваки коефицијент* a_n, *цео број (позитиван или негативан), децимални део броја* L *једнак је децималном делу броја* h *или* 1–h *зависно од тога да ли је* L *негативан или позитиван.*

М. Петровић посматра још трансцендентну функцију која одговара елементима

$$a = 0, \quad b, \quad u = P(t \cdot e^{-t}), \quad r = te^{-t}$$

и разматра њену границу H за $b = \infty$. Означавајући са g нулу, као цео део, праћену низом децимала збира

$$\sum a_n (n+k)^{-(n+k-1)}$$

са индексима *n једнаким целим бројевима који се налазе у интервалу* $(k, m+k-1)$, он доказује следеће тврђење.

Сваки йуш кад је йроизвод $a_n(n+k)^{-(n+k-1)}$, *за сваки коефицијенш* a_n, *цео број (йозишиван или неїашиван), децимални део броја* H *једнак је децималном делу броја* g *или* $1-g$ *зависно од шоїа да ли је* H *неїашиван или йозишиван број.*

V. СТЕПЕНИ РЕДОВИ ЧИЈИ СУ КОЕФИЦИЈЕНТИ ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

Степени редови чији су коефицијенти цели бројеви користе се код великог броја питања анализе и теорије бројева. Тако су они били предмет важних радова са гледишта, с једне стране, аналитичке природе функција које дефинишу (гг. Борел, Фату, Пољa) и, с друге стране, распростирања на ове редове једноставних закона који владају целим бројевима (г. Cahen).

М. Петровић је измислио један поступак развијања у степене редове потпуно различит од познатих поступака и посебно примењљив на степене редове са целим коефицијентима и на редове који се на њих своде ма каквом трансформацијом.

Нумеричко рачунање коефицијената једног реда чини се, уобичајеним поступцима, било рачунајући *йојединачно* сваки коефицијент a_n из једне експлицитне формуле

$$a_n = \varphi(n) \quad (n = 0,1,2,3,\ldots),$$

било рачунајући a_n помоћу низа већ познатих коефицијената a_{n-1}, a_{n-2}, ... *из рекуреншне формуле*

$$\varphi(n, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots) = 0$$

Сйекшрални йосшуйак М. Пешровића сасшоји се у рачунању свих коефицијенаша a_n *одједном, или йак жељене їруйе коефицијенаша или чак једне или више цифара жељеної ранїа једної коефицијенша, йомоћу низа децимала само једної броја* S *йридруженої функцији* f(z) *која се развија.*

Број S, *сйекшар* функције $f(z)$, рачуна се, у општем случају ма које функције $f(z)$ која се може развити у степени ред са целим коефицијентима конвергентан у околини тачке $z = 0$, у облику одређеног интеграла једне одређене комбинације функције $f(z)$. У извесним случајевима овај интеграл може бити замењен изразима по коначним члановима образованим помоћу $f(z)$. Кад се једном израчуна спектар, a_n су одређени као сегменти (групе узастопних децимала) броја S, и то на један начин који показује запањујуће сличности са оним кад светлосни спектар, у спектралној хемијској анализи, открива елементе испитиваног тела.

Догађа се такође да поступак даје одједанпут, довољним понављањем једног истог нумеричког рачунања, вредности толико коефицијената a_n колико се жели, као и посебно сваку цифру једног коефицијента. Штавише, он омогућава да се одреде *шачне вредносши* жељеног броја коефицијената помоћу једне *довољно йриближне* вредности самог броја S.

Тако је, за развитак функције

$$f(x) = (1 + x + x^2)^6,$$

знајући да a_n не премашују 1000, довољно израчунати број

$$S = f(10^{-3}) = 10^{-36}1001001^6 = 1{,}006210500901261411260900500210 6001$$

и поделити његов децимални део на делове од по три цифре: сваки од ових делова даје један коефицијент a_k. Довољно је, на пример, израчунати првих дванаест децимала броја S да би се добила прва четири коефицијента реда.

Да би се развила рационална функција $f(z)$ са имениоцем чије су све нуле просте и модула један, знајући да су непознати коефицијенти развитка позитивни цели бројеви, довољно је израчунати рационалан број

$$S = f(10^{-h}),$$

где је h погодно изабран позитиван цео број. Коефицијент a_n се поклапа са целим бројем начињеним од групе децимала броја S која почиње са његовом $[(n-1)h+1]$-том а завршава nh-том децималом; κ-та цифра коефицијента a_n дата је $(nh - k + 1)$-том децималом броја S.

Да би се у околини тачке $z = 0$ развила ма која холоморфна функција $f(z)$ знајући само да су a_n позитивни цели бројеви, довољно је израчунати одређени интеграл

$$S = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} \varphi(\alpha, \beta t) dt$$

где $\varphi(r,\theta)$ означава реални део функције $f(re^{\theta i})$, а α и β су погодно изабране константе. Тада постоји један позитиван цео број c такав да ако се подели низ децимала броја S на узастопне делове од c, $2c$, $3c$,... децимала, коефицијент α_0 се поклапа са целим делом броја S а коефицијент a_n са целим бројем сачињеним од значајних цифара n-тог од ових делова.

Поступак се једнако примењује на сваки степени ред који се једном трансформацијом $\Delta(f)$ може претворити у степени ред чији су коефицијенти цели бројеви у одређеној вези са коефицијентима полазног реда (на пример редови у којима a_n има само ограничен број децимала, редови са рационалним a_n који потичу из развитка неке алгебарске функције; такви редови да, изабравши погодно ω_n, производ $\omega_n a_n$ постане цео број, итд.).

VI. ПРЕДСТАВЉАЊЕ АНАЛИТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ ЈЕДНИМ ДЕЦИМАЛНИМ БРОЈЕМ

Данас је добро позната чињеница да један број са бесконачно много децималних цифара може бити слика свих могућих функционалних сложености: он може приказати толико различитости и сажети толико сложености колико једна функција ма ког броја променљивих. На прецизном језику теорије скупова то се изражава говорећи да, с једне стране, скуп функција једне променљиве има моћ највише једнаку моћи позитивних реалних бројева (чак, ако се жели, бројева који се налазе између 0 и 1) а да, с друге стране, ако се начини апстракција непрекидности пресликавања између два непрекидна скупа, нема битне разлике између једнодимензионих непрекидних скупова и n-димензионих непрекидних скупова, тј. између функција једне променљиве и функција n променљивих.

М. Петровић је поставио себи задатак *стварног представљања једне аналитичке функције једним децималним бројем и утврђивања одређеног односа између елемената који одређују функцију и низа цифара који дефинише тај број.*

Теорија *нумеричких спектара*[12] је та која му је дала моћан ослонац. Представљање се остварује помоћу *спектра функције* уз додатак *квалитативних* података о његовим односима са функцијом који се тичу знакова, начина поделе спектра на сегменте који одговара проблему, и односа спектралних сегмената са функцијом. Ови последњи односи остају непроменљиви за функције које припадају истој *категорији* функција.

За категорију функција $f(z)$ које се могу развити у степени ред чији су коефицијенти *позитивни цели* бројеви спектар је дат бројем

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{ti})\,\theta\left(\frac{e^{-ti}}{r}\right)dt,$$

где је

$$\theta(z) = \sum_0^{\infty} q^{n^2+\lambda n} z^n,$$

а q, r, λ су погодно изабране константе. У случају кад су коефицијенти функције $f(z)$ *ма какви цели* бројеви (реални, или комплексни, позитивни или негативни), функцију $\theta(z)$ треба заменити функцијом

$$\chi(z) = \sum_0^{\infty} \varepsilon_n q^{n^2+\lambda n} z^n,$$

где је ε_n један од четири броја $+1, -1, +i, -i$.

Ако је познат број S, сваки коефицијент функције $f(z)$ дат је низом цифара које образују одређени сегмент спектра S; скуп ових коефицијената, *и према томе сам број* S, одређују функцију $f(z)$.

Називајући *функцијама* (E) функције $f(z)$ које се могу развити у степени ред са целим коефицијентима, г. Петровић означава као *трансфор-*

[12] Изложено у претходном (стр. 273–274, 22–28 и 68–70).

мацију $\Delta[f]$ *сагласну са посматраном функцијом* $f(z)$ сваку трансформацију изразиву помоћу ограниченог или неограниченог броја одређених операција која *претвара* $f(z)$ у једну функцију (E) утврђујући један одређен реципрочан однос између елемената који одређују $f(z)$ и низа коефицијената *резултата трансформације* (E).

Тако, трансформација

$$\Delta[f] = Af(Bz), \quad A = \text{const.}, \quad B = \text{const.}$$

сагласна је са сваком *алгебарском* функцијом која се може развити у степени ред са *рационалним* коефицијентима; трансформација

$$\Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{mod} f(ze^{ti})\right]^2 dt$$

сагласна је са сваком функцијом $f(z)$ чији су коефицијенти једнаки квадратним коренима целих бројева; извесна трансформација $\Delta[f]$ сагласна је са сваком функцијом y која задовољава једну алгебарску диференцијалну једначину по x, y и изводима функције y по x кад се претпостави да су коефицијенти функције y *рационални*, итд.

То је довело г. Петровића до једног посебног разврставања аналитичких функција $f(z)$ заснованог на *начину на који се њихови тејлоровски коефицијенти могу заједно трансформисати у целе бројеве*. Овај начин се налази сажет у облику једног $\Delta[f]$ сагласног са f: две функције f_1 и f_2 ће припадати једној истој *спектралној категорији* (f) ако постоји за сваку од њих, једна тачка z-равни у чијој околини обе функције имају један исти $\Delta[f]$ који се разликује од једне до друге функције само нумеричким вредностима извесног броја параметара које садржи.

Посматра се, у једном таквом разврставању, да једна функција одговара једној тачки *функцијског простора* у коме ће спектрална категорија (f) функција представљати једно *функцијско поље* и где једна одређена трансформација $\Delta[f]$, примењива на f, утврђује стварно однос између функције и тачке. Трансформација $\Delta[f]$, имаће тако за тачке функцијског простора улогу сличну оној коју има трансформација геометријског простора. Једно $\Delta[f]$ може имати смисла и бити дефинисано само у одређеном функцијском пољу, као што у обичној геометрији једна трансформација може бити дефинисана само за тачке из неке области простора, неке површи, неке линије.

Трансформација $\Delta[f]$, примењена на функцију f и сагласна са њом, даје као резултат једну функцију (E) и утврђује везу између f и (E). М. Петровић означава као *спектар функције* f *придружен трансформацији* $\Delta[f]$ спектар добијене функције (E).

Спектар, са скупом квалитативних показатеља који му се придружују, одређује уопште једну једину функцију (E). Сама функција $f(z)$ одређена је тада постојећим односом између f и (E). Тако, на пример, аналитичка функција $f(z)$ потпуно је одређена када се зна да је трансформација

$$\Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(zt)dt$$

сагласна са њом, да су тејлоровски коефицијенти њене слике (E) реални и позитивни цели бројеви мањи од 100 и да њен спектар придружен посматраном $\Delta[f]$ и дефинисан интегралом

$$S = \int_0^\infty e^{-t} f\left(\frac{t}{100}\right)dt$$

има као вредност $\frac{7}{11}$; једина функција која испуњава ове услове је

$$f(z) = 63e^z - 1.$$

Проблем, на пример, одређивања равне криве $y = f(z)$ чија се суптангента може развити у степени ред са једноцифреним целим позитивним коефицијентима и која има у тачки $x = 0{,}1$, $y = y_0$, дужину једнаку обиму круга полупречника 1, захваљујући спектралном методу, један је савршено одређен проблем. Крива је дефинисана једначином

$$y = y_0 \frac{\varphi(x)}{\varphi(0{,}1)},$$

где $\varphi(z)$ означава трансцендентну функцију

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{7^2} - \frac{31}{432}x^2 + \ldots$$

при чему је коефицијент λ_n уз x^n одређен рекурентном релацијом

$$(n+1)M_0\lambda_{n+1} + nM_1\lambda_n + (n-1)M_2\lambda_{n-1} + \ldots + M_n\lambda_1 = \lambda_n,$$

где је $M_0 = 6$ а M_n је једнако n-тој децимали броја 2π који тако представља спектар суптангенте.

Уобичајени поступци одређивања једне аналитичке функције *дискретним условима* захтевају, уопште, бесконачно много нумеричких података као што су, на пример, коефицијенти степеног реда, тригонометријског реда, експоненцијалног реда, итд. који одговара функцији.

Г. Борел[13] је показао разне друге начине одређивања једне *целе* функције $f(z)$ помоћу дискретних услова, на пример помоћу вредности које узима $f(z)$ за један дискретан низ вредности променљиве z уз придруживање једног скупа (C) додатних услова *квалитативне* природе који се тичу начина растења функције $f(z)$ са z.

У данас познатим начинима одређивања функција помоћу сличних услова број нумеричких података је *ограничен* само изузетно, у веома посебним случајевима где се унапред зна аналитички облик функције до на ограничен број константи (на пример у случају се функција своди на један алгебарски, експоненцијални, тригонометријски итд. полином).

Дакле, *спектрални метод г. Петровића открива једну бесконачност функција чије се потпуно нумеричко одређивање своди на проблем који зависи од ограниченог броја параметара* под условом да му се придружи један скуп (D) услова *квалитативне* природе.

Једна категорија (f) функција има се посматрати као *категорија са* m *параметара* ако се, дајући одређене нумеричке вредности за m променљивих бројева, међусобно независних, које дефиниција категорије (f) оставља произвољним, производи једна нумерички одређена функција која припада категорији, и то тако да се свака функција категорије може произвести на овај начин.

Категорија (E), тј. скуп функција $f(z)$ које се могу развити у степени ред са *целим* коефицијентима M_n, се тада посматра као категорија *са два параметра.* То су: 1° позитиван цео број β већи или једнак од позитивног целог броја M (чије је постојање осигурано чињеницом да полупречник конвергенције реда нија нула) таквог да $|M_n|$ или пак $\sqrt[n]{|M_n|}$ не премаша 10^M ни за једну вредност броја n; 2° спектар S функције.

Друге спектралне категорије (f) допуштају трансформације $\Delta[f]$ које утврђују везу између функција те категорије и оних из категорије (E): једна трансформација $\Delta[f]$ сагласна са $f(z)$ повлачи једну релацију $(f, E) = 0$ између f и њене слике (E) добијене применом $\Delta[f]$. Ова релација може увести известан број променљивих параметара γ_i у функцију $f(z)$ коју одређује, а ови параметри могу проистећи из: 1° параметара садржаних у самој $\Delta[f]$; 2° неодређених константи које уводи релација $(f, E) = 0$, на пример, интеграцијом, члановима реда које једна рекурентна релација оставља неодређеним, итд.

Број q параметара γ_i је више или мање важан за саму категорију (f), зависно од примењеног $\Delta[f]$, и може се мењати од нуле до бесконачности. Г. Петровић уводи појам *спектралног индекса* δ категорије (f): то је *најмањи међу бројевима* $q + 2$ тако придружених категорији (f) различитим $\Delta[f]$ сагласним са (f). *Једна категорија* (f) *има се тада сматрати као категорија са бројем параметара једнаким њеном спектралном индексу.*

---

[13] E. Borel, *Sur l'interpolation* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1er semestre 1897, p. 673–676).

Овај показује број тачно потребних нумеричких података за потпуно нумеричко одређивање једне посебне функције $f(z)$ из једне категорије (f).

Вредност спектралног индекса битно зависи од *својстава аритметичке врсте* која карактеришу коефицијенте развитка опште функције посматране категорије (f) у ред одређеног облика у околини неке тачке z. Ова својства су она која се односе на начин на који се коефицијенти реда заједнички претварају у целе бројеве. Начин се сажима у сам облик једног $\Delta[f]$ сагласног са (f).

Спектрални индекс категорије функција које се могу у околини неке тачке $z = a$ развити у степени ред са коефицијентима a_n који су цели бројеви је $\delta = 2$; за категорију функција чији a_n имају само ограничен број децимала је $\delta = 3$; за категорију (f) образовану од алгебарских функција са рационалним a_n индекс је $\delta = 4$, итд.

Као што се види, г. Петровић је уплео у теорију функција параметре за које се чини да су у супротности са уобичајеним појмом промењљивих параметара. Исто тако, категорија (E) функција изгледа, према уобичајеним схватањима, као да зависи од *бесконачног* броја параметара који су сами коефицијенти тог развитка, потчињени само услову да су цели бројеви M_n такви да се $\sqrt[n]{|M_n|}$ не повећава неограничено са n. У методу г. Петровића појављују се ови исти параметри као *сегменти једног истог децималног броја* S, при чему је сваки сегмент састављен од једне одређене групе узастопних децимала броја S. Тај број није друго до спектар посматране функције; начин сегментације, којом S даје, до на знак, низ коефицијената функције, мења се са једним другим параметром β који је позитиван цео број.

Два параметра S и β имају заиста улогу два промењљива параметра категорије (E) функција: њихова промена чини прелаз са једне посебне функције (E) категорије на неку другу, и свака функција категорије може бити произведена на тај начин. Постоји чак (до на знак коефицијената) један обострано једнозначан однос између функција (E) и бројева S, β: двема различитим функцијама одговарају два различита пара нумеричких вредности S, β и обрнуто.

Међутим, противуречност је само привидна: у ствари *параметар* S *сажима ограничен или неограничен број параметара у само један низ цифара*. У општем случају, то је наравно *бесконачно много* нумеричких података дата спектром S у виду *само једног* чији погодно раздељени сегменти откривају вредности које треба приписати једном бесконачном параметара (који су коефицијенти једног реда). Феномен се мало разликује од оног који се јавља у вештини проблема–загонетки којом мађионичар зачас одреди *више* замишљених бројева на основу *само једног* нумеричког податка који му се саопшти и чији му разни сегменти откривају толико података колико има непознатих.

Представљање једне функције једним децималним бројем мало је ограничено на одређене категорије функција. М. Петровић доказује, у том погледу, следећу теорему:

Свакој аналитичкој функцији и датом кругу C *описаном око обичне тачке функције може се придружити скуп од једног децималног и једног позитивног целог броја који, уз додавање једног скупа квалитативних података, садржи све елементе за одређивање функције у кругу* C *са унапред датом приближношћу.*

Разни карактеристични елементи аналитичких функција могу се, спектралним методом г. Петровића, сажети у само један децималан број и у један скуп квалитативних података. Такав је, на пример, случај *сингуларитета* једне функције који се налазе у једном кругу са центром у обичној тачки функције; или пак случај *нула* једне функције које се налазе у једном кругу, итд. Тако, ако је дата једна функција $f(z)$, може се, према једној познатој теореми г. Борела[14], да би се одредили њени сингуларитети унутар ма ког круга описаног око ма које од њених обичних тачака, заменити $f(z)$ једном функцијом (E). Она има спектар, па се тако добија *једна веза између* f(z) *и једног децималног броја који садржи све елементе за потпуно одређивање сингуларитета функције* f(z) *у датом кругу*. Исти поступак примењен на $\frac{1}{f}, f-a, f'$, итд., успоставља сличну везу између $f(z)$ и једног децималног броја који одређује вредности променљиве z за које $f(z)$ узима вредност нула, узима дату вредност, достиже један максимум или минимум, итд.

Спектрални метод баца тако јарко светло на улогу коју играју децимални бројеви у одређивању функција. Добијено је, у недавним радовима у теорији функција[15], да сви проблеми који се могу поставити при изучавању функција дефинисани пребројивим условима могу бити претворени, у принципу, у проблеме који се односе на дефиницију само једног децималног броја; али ово теоријско гледиште није од велике помоћи док се не дефинише на стваран начин веза између функције и децималног броја. Дакле, метод г. Петровића нуди, управо, делотворно средство да се утврди једна таква веза и тако уклони главна тешкоћа у проблему стварног свођења проучавања једне функције на проучавање једног реалног броја.

[14] E. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, 1903, p. 35–36.

[15] E. Borel, *Ibid.* (Note III).

РАДОВИ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА У АНАЛИЗИ

Математика је чудан свет у овом нашем свемиру. Не зна се ко га је створио – Бог или Човек. Стога је непознато да ли математичар открива бића и њихове međусобне односе у њему или их твори. Било како да јесте, лепо је и узбудљиво бити у том свету онима који умеју да га открију и уживају у њему.

Михаило Петровић је провео многе лепе часове свог богатог и разноврсног живота у математичком свету, откривајући или творећи, и оставио део себе у њему. Тај свет је јединствен. Његова подела на поједине области, које се често узајамно прожимају, више је административна. Математичар Петровић био је вишестран. Ишао је својим путевима за својим идејама и визијама. Његови радови, као записи са тих путовања, не могу увек бити сврстани у једну област. Важније су идеје које је имао и начин на који их је остваривао.

Да бисмо видели како је радио М. Петровић, размотрићемо прво његову расправу *Теорема о криволинијским интегралима* [274][1] из 1933. године. Она нема сјај блиставијих Петровићевих радова јер није довољно избрушена, али има и своју тежину и свој живот до данашњих дана.

Петровић уочава прво Дарбуову теорему:

ако је функција f *холоморфна дуж пута* L *дужине* s, *онда је*

$$I := \int_L f(z)\,dz = \mu \cdot f(\xi) \cdot s \tag{1}$$

за неко μ *из диска полупречника* 1 *са центром у почетку и неко* ξ *са пута* L.

При Дарбуовим претпоставкама је, дакле, 1 горња граница за $|\mu|$ из (1) и ништа више. Но, *Петровић хоће нешто више – доњу границу за* $|\mu|$, *а тиме и за* $|I|$. Зато тражи услове $P(r)$ за L, f и реалан број $0 < r \leq 1$ који, додати Дарбуовим, дају доњу границу $m(r) = r$ за $|\mu|$. Тако долази до закључка $r \leq |\mu| \leq 1$ уместо $|\mu| \leq 1$ (до кружног прстена уместо диска). Прво налази услов $P(1/\sqrt{2})$: *интегрални елемент* f(z)dz *не мења дуж* L *квадрант ограничен реалном и имагинарном осом*, па даје његово геометријско значење.

Петровић је имао развијен геометријски поглед на математику.

---

[1] Овакве ознаке односе се на библиографију у књизи: Д. В. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, САНУ, Београд, 1969.

Ова особина се може уочити код многих београдских математичара, нарочито када усмено излажу.

Даље се сећа једне своје неједнакости из 1917. године из рада [149] па је уопштава до следеће која носи његово име:

ако се комплексни бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *налазе у углу са теменом у почетку и мером* $\lambda < \pi$, *онда је*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \geq \cos\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n} |a_k|. \tag{2}$$

Из (2), помоћу граничне вредности интегралних сума за интеграл I, добија услов $P(r)$ за $r = \cos\frac{\lambda}{2}$: *интегрални елемент* f(z)dz *не излази дуж* L *из неког угла са теменом у почетку и мером* $\lambda < \pi$.

Он најзад посматра када наступају гранични случајеви, $|\mu| = r$ и $|\mu| = 1$, налазећи и геометријску и аналитичку везу између L и f; ову другу дају решења извесних диференцијалних једначина.

Петровић је своју неједнакост доказао прилично кратко, али мало компликовано. Као да је написао неки од првих доказа који су му пали на памет. И докази у математици имају своју лепоту. Понекад је потребно времена да се избрусе. Ј. Карамата[2] је дао други и краћи доказ неједнакости уз помоћ Гаусовог става (тежиште система маса концентрисаних у коначном скупу тачака равни налази се у конвексном омотачу тог скупа), који открива њену праву природу. Тридесет година после првог долази, без помена Петровићева имена, поскедњи доказ неједнакости (2)[3] који, када је посматрани угао симетричан у односу на реалну осу и садржан у десној полуравни[4], гласи:

ако је $|a_k| = \rho_k$, $\arg a_k = \theta_k$ *и* $|\theta_k| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ *за* $k = 1, 2, \ldots, n$, *онда је*

$$\begin{aligned} |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| &\geq |\mathrm{Re}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)| \\ &= |\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_2 \cos\theta_2 + \ldots + \rho_n \cos\theta_n| \\ &\geq (\cos\alpha)(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n) \end{aligned}$$

јер је $\cos\theta_k = \cos|\theta_k| \geq \cos\alpha > 0$ *за* $1 \leq k \leq n$.

Овоме се стварно нема шта додати, а одавде се може добити да ће једнакост важити ако и само ако су сви θ_k једнаки α и при том је $\sum_{\theta_k > 0} \rho_k = \sum_{\theta_k < 0} \rho_k$.

[2] Ј. Карамата, *Теорија и пракса Stieltjes-ова интеграла*, Научна књига, Београд, 1949, стр. 301.

[3] H. S. Wilf, *Some applications of the inequality of arithmetic and geometric means to polynomial equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **14**, 1963, 263–265.

[4] Видети и: Д. С. Митриновић, *О једној неједнакости*, Математичка библиотека 38 (1968), стр. 93–96.

Петровићева неједнакост путује затим у Хилбертове и Банахове просторе[5] да би се 1995. године појавила са неким споро осцилујућим низовима у нормираним векторским просторима[6].

Приметимо прво да термини пут (le chemin) и лук (l'arc) које употребљава Петровић данас имају много шире значење. Данас је пут у тополошком простору E свако непрекидно пресликавање неког непразног компактног интервала на реалној правој у E, док је лук у E део простора E који је хомеоморфан таквом интервалу.

Закључак Дарбуове теореме (овде је *теорема* прејака реч) еквивалентан је тврђењу да је $|I| \leq Ms$, *где је* M *највећа вредност функције* $|f|$ *дуж* L. То је обична особина криволинијског интеграла. Нејасно је чему служи претпоставка о холоморфности функције f дуж L када је довољна непрекидност. Закључак Петровићеве допуне Дарбуове теореме еквивалентан је тврђењу да је $rms \leq |I|$, *где је* m *најмања вредност функције* |f| *дуж* L. То *није обична* особина криволинијског интеграла. Ту је једно веома једноставно, али важно, од питања која је Петровић постављао.

А шта је са друге *стране?*

Одговарајући на оваква питања, долазио је до нових резултата (до допуна познатих ставова). Међу њима је и онај чувени из 1901. године о доњој граници модула нула Тејлоровог реда [58] који читалац може наћи у наредној књизи ових Сабраних дела. Тако је Петровићева неједнакост допуна неједнакости троугла која је основа рачуна у нормираним векторским просторима.

Питање је зашто је Петровић у овом раду прво надугачко доказивао, уз обилато коришћење теорема о средњој вредности, посебан случај, $r = 1/\sqrt{2}$, а затим врло кратко општи. У овом другом он полази од интегралних сума

$$S := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \tag{3}$$

за интеграл (1), примењује на њих своју неједнакост и чини гранични прелаз по поделама лука L. Овде се поставља једно кључно питање. Нека су α и $0 \leq \lambda < \pi$ реални бројеви и нека је $\alpha < \arg f(z)\dfrac{dz}{ds} < \alpha + \lambda$ за свако $z \in L$. Да ли је тада и $\alpha < \arg f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) < \alpha + \lambda$ када је највеће $|z_k - z_{k-1}|$ довољно мало? У раду нема одговора. Данас се ово питање може другачије поставити. Нека је *n бесконачан природан број* и $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ *хиперконачан низ* такав да је $z_{k-1} \approx z_k$ (z_{k-1} *је бесконачно блиско* z_k) за $k = 1, 2, \ldots, n$. Да ли су посматрани

[5] J. B. Diaz and F. T. Metcalf, *A complementary triangle inequality in Hilbert and Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **17**, 1966, 88–97.

[6] Č. V. Stanojević, D. L. Graser and K. M. Adams, *Gauss-Petrović functionals and slow oscilation in normed linear spaces*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 58 (72), 1995, 85–92.

аргументи бесконачно блиски за, на пример, $z = z_k$? Тада се лакше добија потврдан одговор, примењује се неједнакост (2) на збир (3) (Лајбницов принцип), па се на добијени резултат делује *стандардним делом*. Ово је испричано језиком *нестандардне анализе*, која у Петровићево време није ни постојала, бар званично. Било је *бесконачно малих* (*инфинитезимала*). Стари мајстори су радо рачунали са њима и добијали добре резултате. Тако је Лајбниц дошао до свог диференцијалног рачуна. Тако је Ојлер развио функцију $\sin z$ у бесконачни производ. Није се, међутим, знало шта стоји иза тог микрокосмоса. Коначно решење дошло је године 1961[7]. Ствар је била у логици. Бесконачно мале и бесконачно велике величине добиле су право грађанства у математичком свету. Настајала је нова математика. Ни М. Петровић није могао одолети инфинитезималама. У раду [143, стр. 160] он говори о *бесконачно малим повећањима* (*accrossements infiniment petits*), што нам казује да их је имао у свом математичком бићу.

Занимљиво је овде, а и на другим местима, уочити однос М. Петровића према неједнакостима. Оне су једна од основа доброг дела математичке анализе. Саме по себи остају усамљене – немају modus vivendi. Код Петровића су оне основа над којом он даље гради. Обично полази од једноставнијих да би им после вешто нашао примене у анализи, диференцијалним једначинама и разним другим рачунима. Једну величину процењује са обе стране, па добијену двоструку неједнакост пише у облику једнакости и зове је *теоремом о средњој вредности*.

Тако је и у радовима [143][8] и [144][9]. Основну неједнакост из другог рада уопштио је, уз помоћ једног Караматиног резултата[10], после шеснаест година у раду [264]:

---

[7] A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, Proc. Roy. Acad. Amsterdam, ser. A, 64(1961), 432–440.

[8] Видети и: П. Васић, *Геометријске неједнакости у радовима Михаила Петровића*, Математичка библиотека, 38(1968), 105–111.

Приметимо још да се у наведеном раду [143, стр. 157–158] налази предуг доказ неједнакости

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} < \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+c)$$

која важи ако су a, b, c странице троугла.

Професор Д. Адамовић је извео краћи и једноставнији доказ. Наводимо га:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2) &= 2(bc+ca+ab) > 2(bc\cos\alpha+ca\cos\beta+ab\cos\gamma) = \\ &= a^2+b^2+c^2\end{aligned}$$

при чему последња једнакост следи из косинусне теореме. Да је константа $\frac{1}{\sqrt{2}}$ најбоља могућа, види се посматрањем једнакокраког троугла, чија основица тежи нули.

[9] Видети и: П. Васић, *Неједнакости Михаила Петровића за конвексне функције*, исто, 101–104.

[10] J. Karamata, *Sur une inéqualité relative aux fonctions convexes*, Publ. math. Univ. Belgrade, 1(1932), 145–148.

ако је функција f *конвексна на интервалу* I, $0 \in I$, $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ *и* $X = x_1 + \ldots + x_n \in I$, *онда је*

$$(4) \qquad f(x_1) + \ldots + f(x_n) \leq f(X) + (n-1)f(0).$$

Ово се може добити просто из

$$\frac{f(x_k) - f(0)}{x_k - 0} \leq \frac{f(X) - f(0)}{X - 0},$$

после ослобађања од именилаца, множењем бројем x_k па сабирањем по $k = 1, \ldots, n$.

Рад *О једној важној класи целих редова* [96] имао је великог успеха на Међународном конгресу математичара у Риму 1908. године.

Све је почело две године раније. Петровић посматра функцију

$$(5) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

комплексне променљиве, при чему су коефицијенти степеног реда у (5) *реални и позитивни*, а *сваки његов делимичан збир има само реалне нуле.* Процењујући коефицијенте a_n, закључује да је f цела функција рода нула или један и да је

$$(6) \qquad |f(z)| \leq a_0 + a_1 r G\left(\frac{a_1 r}{a_0}\right),$$

при чему је $r = |z|$ и

$$(7) \qquad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Најзад, помоћу свог резултата из рада [58] налази доњу границу модула нула функције f.

Следећи корак [92] чини почетком 1908. Тражи, уз небитну претпоставку $a_0 = a_1 = 1$, потребне и довољне услове под којима ред у (5) има поменуте особине. Посматрајући графике једног рекурентно дефинисаног низа полиномских функција, налази те услове, највеће вредности λ_n за коефицијенте a_n са $n \geq 2$, граничну функцију

$$(8) \qquad f(z) = 1 + z + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3 + \ldots$$

наводећи неке њене особине и особине низа λ_n.

Остао је још, у овом раду најављен, случај када су коефицијенти a_n *реални.* Постоји једна прича да је до решења дошао једне бурне ноћи у манастиру Манасија[11]. Да ли му је Бог помогао?

[11] М. Миланковић, Ј. Михаиловић: *Мика Алас*, Космос, Београд, 1946, стр. 93–94.

Прави је тренутак да прочитамо део једног записа Ј. Карамате[12]:

„Да бих ипак што верније приказао начин његова научна рада, мислим, да ћу то најбоље постићи ако детаљније анализирамо само један од проблема које је проучавао, а који је за метод његова рада један од најкарактеристичнијих.

Проблем који сам изабрао не спада међу његове најјаче радове, али то је један од његових радова који је можда био највише коментарисан и који је дао подстрека другим научницима за даљи рад; да напоменем само Монтела Ландауа, Пољу, поред многих других.

Овај рад је утолико приступачан, што својом садржином и појмовима којима оперише не излази из оквира универзитетске наставе, и изненађује својом једноставношћу, али је ипак за његово решење био потребан један дужи истрајан рад.

Ево у чему се он састоји:

Познато је да међу важне проблеме теорије функција спада проблем апроксимације дате функције полиномима. Уз овај проблем везан је цео низ мање или више значајних питања, међу које спада и питање у каквој вези стоје нуле полинома којим апроксимирамо дату функцију са нулама саме функције.

Једно од првих питања ове врсте на које наилазимо јест да се испита каква мора бити природа дате функције, да би се она могла апроксимирати полиномима којима су све нуле реалне или, још специјалније, реалне и позитивне.

Зауставимо се само на аналитичној фунцији $f(z)$ датој својим Тејлоровим редом

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$$

дакле, на функције које су апроксимиране низом полинома облика

$$p_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu z^\nu .$$

Прецизно формулисан Петровићев проблем састоји се у томе, да се пронађу потребни и довољни услови које мора задовољавати дата функција да би сви полиноми $p_n(z)$, према томе и гранична функција, имали све своје нуле реалне и позитивне; или, ако претпоставимо да су коефицијенти позитивни, да би све нуле тих полинома биле негативне.

Ево на како леп и савршено једноставан начин, Петровић даје решење овог проблема.

Без ограничења можемо претпоставити да су прва два коефицијента полинома $p_n(z)$ једнака јединици, тј. да је

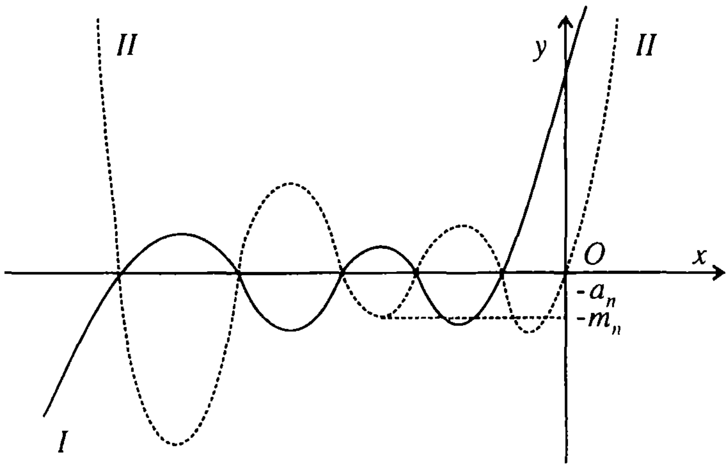
[12] J. Karamata, *Mihailo Petrović*, Glasnik mat., fiz. i astr., Zagreb, 1948, t. 3, str. 123–127.

$$a_0 = a_1 = 1;$$

пита се под којим ће условима сви полиноми

$$p_n(z) = 1 + z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad n = 2,3,\ldots,$$

имати своје нуле реалне и негативне.



У том случају морају и полиноми

$$\begin{aligned} q_n(t) &= t^n + t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \ldots + a_{n-1} t + a_n = \\ &= t(t^{n-1} + t^{n-2} + a_2 t^{n-3} + \ldots + a_{n-1}) + a_n = \\ &= t q_{n-1}(t) + a_n \qquad n = 2,3,\ldots, \end{aligned}$$

чије су нуле реципрочне вредности нула полинома $p_n(z)$, такође имати све своје нуле реалне и негативне.

Ако, међутим, полином $q_{n-1}(t)$ има $n-1$ негативних нула, његов дијаграм мора имати облик криве (I), према томе ће дијаграм полинома $tq_{n-1}(t)$ имати облик криве (II). Да би једначина

$$tq_{n-1}(t) = -a_n$$

имала n реалних решења, тј. да би и полином $q_n(t)$ имао n негативних нула, a_n не сме бити већи од апсолутне вредности $-m_n$ најмањег минимума m_n дијаграма полинома $tq_{n-1}(t)$. У случају када је

$$a_n = -m_n,$$

полином $q_n(t)$ мора имати једну вишеструку нулу. У том случају, дакле, његова дискриминанта

$$D(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$

мора бити једнака нули.

Према томе, ако у овој дискриминанти коефицијенат a_n заменимо са x, добијамо полином

$$(1) \qquad D(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, x),$$

чије ће нуле дати оне вредности коефицијента a_n за које полином $q_n(t)$ има вишеструких нула. Дакле, тај коефицијенат не сме бити већи од најмање позитивне нуле дискриминанте (1) и само у граничном случају он јој може бити једнак.

Отуда добијамо решење постављеног проблема, тј. *йошребан и довољан услов, да би сви йолиноми* $p_n(z)$ *имали све своје нуле неїашивне, је да коефицијенши* a_n *буду мањи од најмање йозишивне нуле йолинома* (1).

Поред тога, овим је решењем потпуно одређена и гранична функција $f(z)$ за коју је постављени проблем могућ. Њене коефицијенте добијамо ако их постепено одређујемо, тако да они буду једнаки најмањој позитивној нули полинома (1).

Иако је ову граничну функцију, по њеној дефиницији, готово немогуће одредити, Петровић даје са скоро исто таквом лакоћом цео низ њених особина, од којих ћемо напоменути само две најважније.

Функција $f(z)$ је облика

$$e^{-z}g(z),$$

где је $g(z)$ цела функција нултог рода, чије су све нуле < -1 и, по апсолутној вредности, не расту брже од

$$(n+1)(\sqrt{2})^n;$$

коефицијенти њена Taylor-ова развитка су сви позитивни и мањи од

$$\frac{1}{n!2^{n(n-1)/2}}.$$

Једноставност обраде и прецизност резултата изложеног проблема није само основна карактеристична црта целокупног научног рада Михаила Петровића, већ је то и верно огледало њега као човека, онаква какав је био у свом приватном животу – велик у својој приступачности, скромности и простодушности.“

М. Петровић посматра функције (5) и у свом раду *Једна врсша бројних квазиинваријанаша* [325, стр. 166–169]. Бројна квазиинваријанта једног скупа функција је пресликавање $y \mapsto I$ које функцији y из тог скупа придружује функцију I чије се вредности налазе у интервалу [0, 1]. При томе скуп чине функције извесне врсте, рецимо решења неке диференцијалне једначине, док је I дато неким аналитичким изразом, рецимо $I = f(x, y, y', y'')$ када су функције y дефинисане и два пута диференцијабилне на једном одређеном интервалу реалне праве.

Ако се, на пример, посматрају сви полиноми y одређеног степена $n \geq 2$ чије су све нуле реалне, при чему је најмања a и највећа b, онда је

$$I = \alpha \frac{yy''}{y'^2} + \beta,$$

где је

$$\alpha = -\frac{n}{n-1}, \quad \beta = -\frac{n}{n-1}, \quad \text{када је } x < a,$$
$$\alpha = \frac{n}{n-1}, \quad \beta = 1, \qquad \text{када је } x > b.$$

Овде Петровић лако и спретно даје примере за I, поставља питање граничних кривих и питање: које особине имају функције y чија је квази-инваријанта дата? Одговори су само делимични јер су ствари сувише уопштено постављене.

Вратимо се Јовану Карамати (1902–1967), једном од Петровићевих ученика и једном од најпознатијих српских математичара. Чувен је његов доказ на само две странице, Литлвудове теореме[13] који се налази у многим познатим монографијама. Чувена је и плодна његова *теорија правилно променљивих функција*[14] о којима је написано, нарочито од педесетих година, мноштво радова, а последњих неколико година неколико монографија. Стога ове његове речи о Петровићу имају велику тежину.

М. Петровић је истраживао класе функција. При томе су му нарочито биле занимљиве границе тих класа функција (или њихових модула), као и функције које се налазе на тим границама. Налазио их је и испитивао јер су то, до тада, биле не много запажене функције, ако су уопште биле познате. Таква је, на пример, функција (8) чије је сужење на реалну праву максимум одговарајућих сужења функција (5).

Петровићев пут је крајње природан. Ако хоћемо да мајорирамо на позитивном делу реалне осе функцију која је збир степеног реда са позитивним коефицијентима, мајорираћемо коефицијенте новим, па добити нову функцију. Тај корак се понавља. Докле? Обично се ишло док нова функција не буде позната, што је релативно. Може значити „по општем мишљењу“ или пак „функција која има своје име“. Петровић се зауставља који корак пре оваквог циља – онда када му низ нових коефицијената постане довољно правилан. Појављује се нова, непозната функција, која се природно шири на комплексну раван. Имао је дар да је „види“, да је испита са разних страна (посматрајући је и као интеграл с параметром ако је потребно), па и да приближно израчуна неке њене важне вредности. Чинећи је познатом, он долази до нових, до њега непознатих, бољих горњих граница.

[13] J. Karamata, *Über die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stätigkeitssatzes*, Math. Zeitschrift, **32**(1930), 319–320.

[14] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica (Cluj), **4**(1930), 38–53.

Пре но што чујемо Петровићево мишљење о овоме, поменимо да се функција G јавља 1906. године и у раду [86] као елемент једне класе функција. Занимљиво је да се ту индукцијом доказује и егзистенција функција (5). Функција $\theta(z) = 1 + zG(z)$, тј.

$$\theta(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{27} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n} \tag{9}$$

се детаљно проучава у раду [98] из 1908. године, а уопштава до функције

$$\Delta(z,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha n}},$$

где је α комплексан број са позитивним реалним делом у [142].

Посматрајмо увод у рад *Интерполација и интеграција помоћу једне класе одређених интеграла* [118, стр. 1–4]. На почетку, уз измену ознаке за формулу, стоји:

„На одређене интеграле облика

$$J(x) = \int_a^b u e^{rx} dt, \tag{10}$$

где су u и r функције интеграционе променљиве t, наилази се, као на корисне помоћне рачунске елементе, у доста многобројним проблемима математичке анализе."

У средини, уз измену ознаке за функцију, пише:

„Осим тога, за многе трансценденте чије су карактеристичне особине скривене кад су представљене другим аналитичким изразима, те особине излазе саме собом на видик кад се успе да се трансцендента представи у облику интеграла (10). Подесан пример за то је трансцендента

$$G(x) = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{27} + \frac{x^3}{256} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^{n+1}}$$

чије су главне особине испитане у мојим ранијим расправама и којој одговара интеграл (10) облика

$$G(x) = \int_0^1 e^{rx} dt,$$

где је

$$r = t \log \frac{1}{t}.\text{“}$$

Крај увода гласи:

„Из свега ће се тога моћи видети да су интеграли J одиста корисни помоћни рачунски елементи, са којима је доста лако оперисати и за које се може сматрати, да је један дати аналитички или рачунски проблем решен кад се буде успело да се непозната количина у њему добије у облику таквих интеграла."

За Петровића су, дакле, познате све функције $J(x)$. То је ипак мало превише. На почетку одељка VI каже:

„Поред општих особина, наведених у одељку V, које важе за све интеграле J ма какве биле функције u и r у размаку између интегралних граница, постоји још велики број специјалних особина, везаних за оне интеграле J *за које функција* u *не мења знак у том интервалу (размаку)*.

Као што ће се видети, особине таквих интеграла могу се сматрати као *генерализација особина основних експоненцијалних функција*, на које се своде ти интеграли и њихове комибинације у специјалном случају кад је r = const."

Посматрао је, у поменутом случају криву $y = J(x)$ (где је x реална променљива), па је уочио да је она „аналогна" кривој $y = e^{rx}$ (где је r нека реална константа). Функција $J(x)$ има, дакле, извесне геометријске и аналитичке особине функције e^{rx} због чега прву сматра уопштењем друге. Полазећи од функције $J(ix)$, он ће у наредном одељку, на познат начин, уопштити тригонометријске функције косинус и синус и посматрати редове по њима који одговарају тригонометријским. Ово је изложено у радовима [117, 120] где је уопштење функција e^{rx}, $\cos rx$, $\sin rx$ дефинисано, уз ознаку I уместо J, редом овако:

$$I(x) = 1 + \frac{\alpha_1}{1!}x + \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \ldots,$$

при чему је

$$\alpha_n = \frac{\int_a^b ur^n dt}{\int_a^b udt}, \tag{11}$$

где су a и $b > a$ реални бројеви, а u и r непрекидне реалне функције на интервалу $[a,b]$ и притом је $\int_a^b udt \neq 0$;

$$I_1(x) = \frac{1}{2}(I(ix) + I(-ix)), \quad I_2(x) = \frac{1}{2i}(I(ix) - I(-ix)),$$

док су уопштења тригонометријских редова, редови облика

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_1(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n I_2(nx).$$

Петровић је касније пронашао везе између свих ових својих функција и простих бројева [159, 163 и 206].

Приметимо да функција $I(x)$ нема карактеристичну особину експоненцијалне функције, $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, а горњи ред није, у општем случају, ортогоналан. Посматрајући једнакост

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

видимо да се Петровићев прелаз са e^x на $I(x)$ састоји у томе што се n-ти члан предходног реда помножи бројем α_n одређеним формулом (11). Друга, данас прихваћена идеја јесте да се уопшти x – да из комплексне равни оде у неку Банахову алгебру. Тада ће опет бити $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ када су x и y комутативни.

Закључимо једноставно да је Петровић открио једну класу функција и показао, без обзира на то како ју је назвао, да је она корисна при решавању извесних проблема. Могао бих то посматрати декартовски[15] у духу другог правила његове методе која је аналитичке природе[16]. Схватам га овако: ако хоћеш да решиш неки проблем, подели га на толико проблемчића колико можеш и колико ти је довољно да би га лакше решио. Петровићу, очито, функције $J(x)$ нису биле никакав проблем.

Једна од Петровићевих омиљених тема била је представљање функција помоћу интеграла, [видети рад 65, стр. 79–88] или помоћу редова. То су ставови о репрезентацији. Он на то гледа и са друге стране: ако је једна функција једнака једном интегралу, онда се тај интеграл може рачунати и помоћу те функције. Ту је, наравно и веза између редова и интеграла [9 и 65].

Овде ћемо се позабавити радом [67] да бисмо видели како се уопштавају извесни Стилтјесови обрасци. Исто се чини и у раду [62]. Полазиште је Кошијева формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)dt}{t-z},$$

где је C затворена, позитивно оријентисана, проста крива у просто повезаној области комплексне равни у којој је функција f холоморфна, а z пролази скуп D тачака које се налазе унутар криве C.

На десној страни претходне једнакости је, при фиксираном C, интегрална трансформација функције f са језгром $\frac{1}{2\pi i}K(z,t)\frac{1}{t-z}$, где је $K(z,t) = 1$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C K(z,t)\frac{f(t)dt}{t-z}. \tag{12}$$

[15] Rene Descartes, *Discours de la méthode*, Leyde, 1637, anonimno izdanje.

[16] Декартово начело гласи: „Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait pour les mieux résoudr".

Стилтјес је доказао (12) када је, уз додатне претпоставке за f, C имагинарна оса, D полураван $\operatorname{Re} z > 0$, а у језгру је $K(z,t) = -\dfrac{2z}{t+z}$ или је $K(z,t) = -\dfrac{2t}{t+z}$.

Код Петровића је C права паралелна реалној или имагинарној оси, D једна од две полуравни којима је C руб, док је, на пример,

$$K(z,t) = -\frac{\Phi(z,t)}{\Phi(z,z)}$$

кад је D полураван $\operatorname{Re} z > \lambda$; при томе је функција $\Phi(z,t)$ холоморфна по t и $\lim\limits_{t\in D, |t|\to\infty} \Phi(z,t) f(t) = 0$.

Доказ је сасвим једноставан – заснива се на Кошијевој формули. Непотребно је да се помињу докази у сва четири могућа случаја јер се из једног, ротацијама добијају остали.

Овде спада и рад [301], мало другачије природе, у коме М. Петровић и Ј. Карамата исправљају једну Поенкареову грешку. То је једини рад који је Петровић потписао са још неким.

На ову тему репрезентације Петровић има пуно идеја. Поменућемо две.

Поставља задатак да се помоћу функције

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

израчуна функција

$$\varphi(x) = a_0^2 + a_1^2 x + a_2^2 x^2 + \ldots.$$

Затим изражава a_n у облику

$$a_n = \int_L v u^n dt,$$

при чему су погодно изабрани лук интеграције L и функције u и v, па закључује да је

$$\varphi(x) = \int_L f(xu) v dt$$

за x које се налази унутар круга са центром у почетку и полупречником једнаким количнику полупречника диска у коме је дефинисана функција f и максимума модула функције u дуж L [111].

У раду [296] доказује:

ако је $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *низ бројева, функција*

$$\Phi(x) = u_1 \log(x+1) + u_2 \log(x+2) + u_3 \log(x+3) + \ldots$$

дефинисана за $x = 0$ (што значи да ред $u_1 \log 1 + u_2 \log 2 + u_3 \log 3 + \ldots$, конвергира)

$$f(x) = u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots$$

и f(1) = 0, *онда је* $\Phi(\infty) = 0$ *и*

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-xt} F(t) dt,$$

īде је $\mathrm{F(t)} = -\dfrac{\mathrm{f(e^{-t})}}{\mathrm{t}}$.

Већ смо рекли и видели да се Петровић бавио нулама функција. После великог рада из 1901. године, он даје у раду [69] доњу границу модула нула целих функција одређеног рода. Ту се прича о нулама не завршава већ долази једна нова, другачија [88 и 93].

Полази од реалне функције $\varphi(t)$ која је непрекидна на интервалу реалне праве са почетком a и крајем b и таква да интеграл

$$g_n = \int_a^b \varphi(t) \cos nt dt$$

има смисла за $n = 0, 1, 2, \ldots$. Затим трансформише φ у интеграл

$$I(x) = \int_a^b \varphi(t) \log(1 - 2x \cos t + x^2) dt.$$

Ако је p природан број и $g_n \neq 0$ за $n \leq p$, а $g_n = 0$ за $n > p$, каже да φ *задовољава услов* $[\varphi, a, b, p]$. Његов циљ је следећа

Теорема. *Нека је* f(z) *мероморфна функција унутар круга* C *полупречника* r *са центром у почетку и на том кругу, реална за реалне* z, $\mathrm{f}(0) \neq 0$ *и нека унутар* C *има* n *нула* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *и* m *полова* $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, *рачунатих онолико пута колики им је ред, а нема их на* C.

Тада је

$$n - m = \frac{1}{g_0} \int_a^b \varphi(t) F(r,t) dt,$$

īде је

$$F(r,t) = \mathrm{Re} \frac{z f'(z)}{f(z)} \bigg|_{z = re^{it}},$$

а φ(t) *било која функција која задовољава услов* $[\varphi, a, b, 0]$.

Тако је, на пример,

$$n - m = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} F(r,t) dt.$$

Под истим претпоставкама доказује формулу

$$\log\left| f(\theta)\, r^{n-m} \frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \right| = \frac{1}{g_0}\int_a^b \varphi(t) M(r,t)\,dt,$$

где је

$$M(r,t) = \log |\, f(z) \,|_{z=re^{it}}.$$

До краја рада он посматра неке симетричне и асиметричне функције нула функције f и изражава их помоћу интеграла.

Наведену теорему уопштио је, у извесном смислу, П. Монтел[15].

Но Петровић је желео да број $n - m$ изрази помоћу обичног интеграла реалне функције. И успео је. И то на много начина. Зашто и не би кад тако уме да изрази број простих бројева који се налазе између два дата позитивна реална броја [103].

У раду [248] Петровић полази од познате дефиниције *изложиоца конверѓенције* нула-низа $A_n > 0$ реалних бројева – то је број $\lambda \geq 0$ такав да за свако $\varepsilon > 0$ важи $\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\lambda-\varepsilon} = \infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\lambda+\varepsilon} < \infty$; кад таквог броја нема, ставља се $\lambda = \infty$. Уопштава је овако: низ λ_n позитивних бројева је *низ изложилаца конверѓенције* низа A_n ако за свако $\varepsilon > 0$ важи $\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)} = \infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)} < \infty$. Овај појам се преноси и на целе функције $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ посматрањем низа $A_n = \sqrt[n]{|\, a_n \,|}$. Затим се дају примери низова изложилаца конвергенције или неких њихових асимптотских особина за неке класе целих функција. Основна идеја је била да се помоћу низа λ_n ближе асимптотски одреди низ a_n, а отуда и одговорајуће особине функције $f(z)$. У раду Петровић има доста проблема због ширине дефиниције низа λ_n – често ради са неком ужом класом низова. Студија Д. Д. Адамовића[16] је поучан пример како треба прићи делу М. Петровића – аналитички, критички и стваралачки. На стр. 106 он каже:

„Математичко (као и филозофско) наслеђе Михаила Петровића обимно је и многим својим деловима и данас инспиративно, често после ближег испитивања далеко више него што на први поглед изгледа. Међутим, по нашем мишљењу, да би се из њега извукла права и пуна корист, треба му – уз

[15] P. Montel, *Sur une formule de M. Michel Petrovich*, Publ. math. Univ. Belgrade, VI–VII (1938), 174–182.

[16] Д. Д. Адамовић, *О џојму ексџонении конверѓенције код Михаила Пешровића*, Споменица Михаило Петровић 1868–1943, Београд, 1968, стр. 103–114.

известан слух за специфичност стила Петровићевог математичког мишљења и његове математичке интуиције – прилазити у исти мах брижљиво и критички.“

Приметимо још једну особину Петровићевих радова – мноштво примера. Ту особину налазимо код следбеника, на пример, у поменутој монографији Ј. Карамате или у уџбенику С. Аљанчића.[17]

Нови двадесети век доноси нову математику. Рађају се нове математичке структуре у жељи да се обухвати све до тада откривено. Петровић иде својим путем, за својим визијама. Отвара многе нове проблеме. Решава их нестрпљиво не стижући често до краја. То великодушно препушта другима. У сталном је тражењу неке више везе између математике и живота, или бар једног његовог дела. На крају и математика је живот.

Драгољуб Аранђеловић

[17] S. Aljančić, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd 1968.

ОБЈАВЉЕНИ РАДОВИ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА
– АНАЛИЗА–

1 SOMMATION DES SÉRIES À L'AIDE DES INTÉGRALES DÉFINIES, Comptes rendus, Paris, 1895, t. CXX, 15, p. 819–821. (**3**)

2 UN PROBLÈME SUR LES SÉRIES, Nouvelles annales de mathématiques, Paris, 1895, 4e série, t. XVI, p. 58–63. (**6**)

3 SUR UN MODE DE DÉCOMPOSITON DES INTÉGRALES DÉFINIES EN ÉLÉMENTS SIMPLES, Comptes rendus, Paris, 1896, t. CXXII, 1, p. 27–30. (**7**)

4 МЕТОДЕ ЗА ТРАНСФОРМАЦИЈУ БЕСКОНАЧНИХ РЕДОВА У ОДРЕЂЕНЕ ИНТЕГРАЛЕ, Српска краљевска академија, Глас, књ. LI, Први разред, књ. 18, Београд, 1896, стр. 123–243. (**9**)

5 SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET PÉRIODIQUES DES DIVERSES DÉTERMINATIONS D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE, Bulletin des Sciences mathématiques, Paris, 1896, 2e série, t. XX, p. 108–114. (**10**)

6 SUR LES RÉSIDUS DES FONCTIONS DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, Mathematische Annalen, Leipzig, 1896, t. 48, p. 75–80. (**14**)

7 CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES SOLUTIONS SINGULIÈRS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE, Mathematische Annalen, Leipzig, 1896, t. 50, 1–3, p. 103–112. (**15**)

8 QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES RELATIVES AU CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1897, t. XI, 6, p. 247–259. (**25**)

9 JEDAN POGLED NA PRIRODU TRANSCENDENATA DEFINISANIH DIFERENCIJALNIM JEDNAČINAMA PRVOGA REDA SA PROMJENLJIVIM PARAMETRIMA, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj: 135, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 25, Zagreb, 1898, str. 57–108. (**27**)

Знаком ❑ обележен је рад објављен у овој књизи. Сви наведени наслови Петровићевих радова носе и своју ознаку из шире библиографије која је изложена у књизи Д. В. Трифуновића, *Летопис живота и рада Михаила Петровића,* САНУ, Београд, 1969. (нпр. (**3**)).

10 SUR UN SYSTÈME DE COORDONNÉES SEMI-CURVILIGNES, Vestnik Král. česke. společnosti náuk, Praha, 1898, Trida math. prirodovedecká t. VII, p. 1–21. (**29**)

11 SUR UNE PROPRIÉTÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES INTÉGRABLES À L'AIDE DES FONCTIONS MÉROMORPHES DOUBLEMENT PÉRIODIQUES, Acta mathematica, Stockholm, t. 22, p. 379–386. (**31**)

12 SUR L'EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL DES SÉRIES DE TAYLOR REPRÉSENTANT DES COMBINAISONS RATIONNELLES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE, Rendiconti del Circolo, Matematico di Palermo, Palermo, 1900, t. XIV, p. 22–27. (**45**)

13 JEDNO PITANJE IZ TEORIJE FUNKCIJA SA DVJEMA NEZAVISNO PROMJENLJIVIM KOLIČINAMA, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 143, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 29, Zagreb, 1900, str. 96–106. (**52**)

14 REMARQUE SUR LES ZÉROS DES SÉRIES DE TAYLOR, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1901, t. XXIX, p. 303–312. (**58**)

15 ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ БЕСКРАЈНИХ РЕДОВА, Српска краљевска академија, Глас, књ. LXIII, Први разред, књ. 24, Београд, 1902, стр. 73–114. (**61**)

16 О ПРЕДСТАВЉАЊУ ФУНКЦИЈА ОДРЕЂЕНИМ ИНТЕГРАЛИМА, Српска краљевска академија, Глас, књ. LXIII, Први разред, књ. 24, Београд, 1902, стр. 209–227. (**62**)

17□ ПРОУЧАВАЊЕ ФУНКЦИЈА ПРЕДСТАВЉЕНИХ ОДРЕЂЕНИМ ИНТЕГРАЛИМА, Српска краљевска академија, Глас, књ. LXV, Први разред, књ. 25, Београд, 1903, стр. 79–162. (**65**)

18□ GÉNÉRALISATION DE CERTAINES FORMULES DE STIELTJES, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1903, t. XVII, p. 327–334. (**67**)

19□ REMARQUE SUR LES ZÉROS DE FONCTIONS ENTIÈRES, Bulletin de la Société mathématiqué de France, Paris, 1904, t. XXXII, p. 1–3. (**69**)

20 SUR LES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR UNE CLASSE ÉTENDUE D'INTÉGRALES DÉFINIES, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1904, t. XXXII, p. 3–39. (**70**)

21 ПИСМО СРПСКОЈ КРАЉЕВСКОЈ АКАДЕМИЈИ, Српска краљевска академија, Годишњак за 1904, Београд, 1905, t. XVIII, стр. 61–62. (**72**)

22 ПРИМЕДБЕ О ЈЕДНОЈ КЛАСИ КРИВИХ ЛИНИЈА У ПРОСТОРУ, Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXI, Први разред, књ. 28, Београд, 1906, стр. 1–11. (**80**)

23□ SUR UNE CLASSE DE SÉRIES ENTIÈRES, Comptes rendus, Paris. 1906, t, CXLIII, 4, p. 208–210. (**83**)

24 SUR CERTAINES TRANSCENDANTES ENTIÈRES, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1906, t. XXXIV, p. 165–177. (**86**)

25 НЕПОСРЕДНА ПРИМЕНА РЕАЛНИХ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА НА АЛГЕБАРСКЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ, Српска

краљевска академија, Глас, књ. LXXIII, Први разред, књ. 29, Београд, 1907, стр. 1–76. (**88**)

26 ПРИМЕДБЕ О МОДУЛИМА ЦЕЛИХ ФУНКЦИЈА, Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXIII, Први разред, књ. 29, Београд, 1907, стр. 167–177. (**89**)

27 ЈЕДНА СИМЕТРИЧНА ФУНКЦИЈА КОРЕНА И ЊЕНЕ ОСОБИНЕ, Српска академија наука, Глас, књ. LXXV, Први разред, књ. 30. Београд, 1908, стр. 75–100. (**90**)

28□ THÉORÈME SUR LES SÉRIES DE TAYLOR, Comptes rendus, Paris, 1908, t. CXLVI, 6, p. 272–274. (**92**)

29□ PROCÉDÉ ÉLÉMENTAIRE D'APPLICATION DES INTÉGRALES DÉFINIES RÉELLES AUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET TRANSCENDANTES, Nouvelles annales de mathématiques, Paris, 1908, 4e série, t. VIII, p. 1–15. (**93**)

30 EXPRESSIONS DIVERSES DES FONCTIONS ASSOCIÉES, Bulletin de la Sociéte des Sciences de Bucarest – Roumanie, Bucarest, 1908, t. XVII, 1–2, p. 11–19. (**95**)

31 SUR UNE CLASSE REMARQUABLE DE SÉRIES ENTIÈRES, Atti del IV Congresso internazionale dei Mathematici, Roma, 1908, Sezione 1, vol. II, p. 36–43. L'Intermédiaire des mathématiciens, Bruxelles, 1908, t. XV, p. 52. (**96**)

32□ ЈЕДНА СПЕЦИЈАЛНА ТРАНСЦЕНДЕНТА И ЊЕНА УЛОГА У МАТЕМАТИЧКОЈ АНАЛИЗИ, Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXVII, Први разред, књ. 31, Београд, 1909, стр. 1–44. (**98**)

33 ЈЕДНА ОПШТА ОСОБИНА КОЕФИЦИЈЕНАТА МАКЛОРЕНОВИХ РЕДОВА КОЈИ ЗАДОВОЉАВАЈУ АЛГЕБАРСКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ, Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXIX, Први разред, књ. 32, Београд, 1909, стр. 178–185. (**102**)

34 ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛИ, КОЈИ ИМАЈУ ЗА ВРЕДНОСТ БРОЈ ОСНОВНИХ БРОЈЕВА, ШТО ЛЕЖЕ МЕЂУ ДАТИМ ГРАНИЦМА, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 183, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 48, Zagreb, 1910, str. 200–206. (**103**)

35□ ALLURE D'UNE TRANSCENDENTE ENTIÈRE, Comptes rendus, Paris, 1912, t. CLIV, 8, p. 499–501. (**109**)

36 ИНТЕГРАЛИ ЈЕДНА КЛАСЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА СМАТРАНИ КАО ФУНКЦИЈЕ ИНТЕГРАЦИОНЕ КОНСТАНТЕ, Српска краљевска академија, Глас, књ. LXXXVII, Први разред, књ. 36, Београд, 1912, стр. 161–189. (**110**)

37 ИНТЕГРАЛ КВАДРАТА МОДУЛА РЕАЛНИХ ФУНКЦИЈА, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, kw. 193, Razred matematičko-prirodoslovni, kw. 52, Zagreb, 1912, str. 105–114. (**111**)

38□ SUR DES TRANSCENDANTES ENTIÈRES GÉNÉRALISANT LES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET TRIGONOMETRIQUES, Comptes rendus, Paris, 1913, t. CLVI, 16, p. 1213–1215. (**117**)

39 ИНТЕРПОЛАЦИЈА И ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ ЈЕДНЕ КЛАСЕ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА, Српска краљевска академија, Глас, књ. XCI, Први разред, књ. 38, Београд, 1913, стр. 1–70. (**118**)

40□ SÉRIES HYPERTRIGONOMÉTRIQUES, Comptes rendus, Paris, 1913, t. CLVI, 24, p. 1823–1825. (**120**)

41□ THÉORÈMES DE LA MOYENNE SANS RESTRICTIONS, Nouvelles annales de mathématiques, Paris, 1913, 4e série, t. XIII, 4–9, p. 400–406. Revue sémestrielle, 1913, t. XXII (D 3 c). (**125**)

42 PROPOSITIONS SUR LES SÉRIES DE PUISSANCES, Bulletin de la Société des Sciences du Bucarest – Roumanie, Bucarest, 1913, t. XXII, 1–2, p. 267–272. (**130**)

43 SUR LE MODULE MINIMUM D'UNE FONCTION ANALYTIQUE LE LONG D'UNE CIRCONFÉRENCE, Comptes rendus, Paris, 1913, t. CLVII, 21, p. 986–988. (**133**)

44 РЕДУКТИВНИ АНАЛИТИЧКИ ЕЛЕМЕНТИ, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 202, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 56, Zagreb, 1914, str. 132–176. (**136**)

45 QUELQUES FORMES SPÉCIALES DU THÉORÈME DE LA MOYENNE, Nouvelles annales de mathématiques, Paris, 1914, 4e série, t. XIV, 4–7, p. 179–184. (**138**)

46 THÉORÈME DE LA MOYENNE RELATIF AUX INTÉGRALES DES ARCS, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig, 1914, t. 23, p. 91–97. (**140**)

47 UNE TRANSCENDENTE ENTIÈRE ET SON RÔLE D'ÉLÉMENT DE COMPARAISON, Annales scientifiques de l'École normale supérieure, Paris, 1914, 3e série, vol. XXXI, octobre 1914, p. 441–454. (**142**)

48□ SUR QUELQUES FONCTIONS DES CÔTÉS ET DES ANGLES D'UN TRIANGLE, L'Enseignement mathématique, Genève, 1916, t. XVIII, 3–4, p. 153–163. (**143**)

49□ THÉORÈME SUR LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE DE QUANTITÉS POSITIVES, L'Enseignement mathématique, Genève, 1916, t. XVIII, 3–4, p. 163–176. (**144**)

50 RELATIONS D'INTÉGALITÉ ENTRE LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMETRIQUES, Comptes rendus, Paris, 1916, t. CLXIII, 4, p. 81–84. (**146**)

51 THÉORÈME DE LA MOYENNE RELATIF AUX INTÉGRALES D'UNE ÉQUATION IMPORTANTE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, Comptes rendus, Paris, 1916, t. CLXIII, 8, p. 190–192. (**147**)

52 LIMITÉ D'EXTENSIBILITÉ D'UN ARC DE COURBE D'ALLURE INVARIABLE, Comptes rendus, Paris, 1917, t. CLXIV, 2, p. 85–88. (**148**)

53 SUR QUELQUES EXPRESSIONS NUMÉRIQUES REMARQUABLES, Comptes rendus, Paris, 1917, t. CLXIV, 19, p. 716–718. (**151**)

54 THÉORÉMES ARITHMÉTIQUES SUR L'INTÉGRALE DE CAUCHY, Comptes rendus, Paris, 1917, t. CLXIV, 20, p. 780–782. (**152**)

55 UN NOUVEAU PROCÉDÉ D'ÉVALUATION NUMÉRIQUE DES COEFFICIENTS DES SÉRIES, Comptes rendus, Paris, 1917, t. CLXV, 12, p. 388–391. (**153**)

56 L'AIRE DES SURFACES DE RÉVOLUTION, Bulletin des Sciences mathématiques, Paris, 1918, 2e série, t. XLII, septembre 1918, p. 234–240. (**156**)

57 DÉTERMINATION SPECTRALE DE FONCTIONS, Comptes rendus, Paris, 1918, t. CLXVII, 22, p. 774–776. (**157**)

58❑ FONCTIONS ENTIÈRES SE RATTACHANT AUX NOMBRES PREMIERS, Comptes rendus, Paris, 1919, t. CLXVIII, 11, p. 542–544. (**159**)

59 REMARQUES SUR L'INTÉGRALES $\int uvdx$, L'Enseignement mathématique, Genève, 1919, t. XX, 4, p. 268–270. (**160**)

60 INTÉGRALES DÉFINIES DONT LA PARTIE DÉCIMALE S'EXPRIME À L'AIDE DE NOMBRES PREMIERS, Comptes rendus, Paris, 1919, t. CLXIX, 16, p. 683–685. (**163**)

61 APROXIMATION DES FONCTIONS PAR LES SÉRIES DE PUISSANCES À COEFFICIENTS COMMENSURABLES, Bulletin des Sciences mathématiques, Paris, 1919, 2e série, t. XLIII, décembre 1919, p. 248–250. (**165**)

62 КВАДРАТУРА ПОМОЋУ КУРВИМЕТРА, Српска краљевска академија, Глас, књ. XCIII, Први разред, књ. 39, Београд, 1921, стр. 50–61.(**169**)

63 ЕЛЕМЕНТАРНА РЕЛАЦИЈА ИЗМЕЂУ ПРАВИХ И КРИВИХ ДУЖИ, Српска краљевска академија, Глас, књ. XCIII, Први разред, књ. 39, Београд, 1921, стр. 62–74. (**170**)

64 SUR LE NOMBRE E, L'Enseignement mathématique, Genève, 1921–22, t. XXII, 1–2, p. 48–50. (**177**)

65 ПРОДУКТИ ЈЕДНАКИ ЗБИРУ СВОЈИХ ЧИНИЛАЦА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CXVI, Први разред, књ. 52, Београд, 1925, стр. 1–9. (**191**)

66 SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS ENTIÈRES, Comptes rendus du Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, s. Mathématiques, Grenoble, 1925, p. 61–63. (**199**)

67 О ИНТЕГРАЛУ ПРОДУКАТА ДВЕЈУ ФУНКЦИЈА, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 232, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 70, Zagreb, 1926, str. 92–98. (**203**)

68 ТРАНСМУТАЦИЈЕ ФУНКЦИЈА ПРЕДСТАВЉЕНИХ ПОТЕНЦИЈАЛНИМ РЕДОВИМА, Српска академија наука, Глас, књ. CXVII, Први разред, књ. 53, Београд, 1926, стр. 105–118. (**205**)

69❑ ВЕЗА ИЗМЕЂУ ПРОСТИХ БРОЈЕВА И ЈЕДНЕ КЛАСЕ ТРАНСЦЕНДЕНАТА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CXX, Први разред, књ. 55, Београд, 1926, стр. 1–17. (**206**)

70 INTÉGRALES DÉFINIES PORTANT SUR LES SÉRIES DE LAMBERT GÉNÉRALISÉES, Comptes rendus, Paris, 1926, t. CLXXXII, 7, p. 435–437. (**208**)

71 PROPRIÉTÉ REMARQUABLE D'UNE SUITE D'INTÉGRALES DOUBLES, Comptes rendus, Paris, 1926, t. CLXXXII, 23, p. 1366–1368. (**210**)

72 SÉRIES DE PUISSANCES REPRÉSENTANT LES FONCTIONS INVERSES DES INTÉGRALES ABELIENNES, Vestnik Král, česke společnosti náuk, Praha, 1927, Trida math. prirodovedecká, t. II, p. 1–8. (**216**)

73 ИНТЕРПОЛАЦИЈА НИЗА КОЕФИЦИЈЕНАТА ПОТЕНЦИЈАЛНИХ РЕДОВА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CXXVII, Први разред, књ. 58, Београд, 1927, стр. 189–197. (**217**)

74 ЈЕДАН НАЧИН ПРИБЛИЖНОГ ПРЕДСТВЉАЊА АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ПОЛИНОМА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CXXVIII, Први разред, књ. 59, Београд, 1927, стр. 139–149. (**219**)

75 ПРИМЕДБЕ О КАНОНСКОМ ПРОИЗВОДУ ПРИМАРНИХ ФАКТОРА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CXXVIII, Први разред, књ. 59, Београд, 1927, стр. 163–169. (**220**)

76 SUR UN NOMBRE ABSOLU RATTACHÉ AUX GÉODÉSIQUES DES SURFACES, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici VI, Bologna, 1928, p. 347–352. (**231**)

77 INTÉGRALES DÉFINIES S'EXPRIMANT PAR LES NOMBRES TRANSCENDANTS DE LIOUVILLE, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1928, t. LVI, 2, p. 31–35. (**234**)

78 ПРИЛОГ ИСТОРИЈИ ЈЕДНОГА ПРОБЛЕМА ТЕОРИЈЕ ФУНКЦИЈА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CXXXIV, Први разред, књ. 63, Београд, 1929, стр. 85–90. (**235**)

79 UNE APPLICATION DE LA RÉSULTANTE DE DEUX FONCTIONS, Mathematica, Cluj, 1930, t. IV, p. 33–37. (**243**)

80□ О ИЗЛОЖИОЦУ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ, Српска краљевска академија, Глас, књ. CXLIII, Први разред, књ. 70, Београд 1931, стр. 147–167. (**248**)

81 О ЦЕЛИМ ФУНКЦИЈАМА КАО ИНТЕГРАЛИМА АЛГЕБАРСКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CXLIII, Први разред, књ. 70, Београд, 1931, стр. 193–200. (**249**)

82 DIRECTIONS DES TANGENTES EN RELATION AVEC LA LONGUEUR DE L'ARC, Comptes rendus du Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, s Mathématiques, Nancy, 1931, p. 54–55. (**256**)

83 НЕКОЛИКО СТАВОВА О МАЈОРИРАЊУ ЦЕЛИХ ФУНКЦИЈА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CLII, Први разред, књ. 76, Београд, 1932, стр. 95–103. (**260**)

84 SUR UNE FONCITIONNELLE, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1932, t. I, p. 149–156. (**264**)

85 REMARQUE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES, Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens, Zürich, 1932, p. 1–2. (**266**)

86□ THÉORÈME SUR LES INTÉGRALES CURVILIGNES, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1933, t. II, p. 45–59. (**274**)

87 SUR LES SÉRIES DE POLYNOMES DE MÊME DEGRÉ, Publications methématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1933, t. II, p. 82–84. (**275**)

88 АРИТМЕТИЧКЕ ОСОБИНЕ ИНТЕГРАЛА ЈЕДНЕ КЛАСЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXIII, Први разред, књ. 80, Београд, 1934, стр. 71–87. (**283**)

89 UN MODE GÉNÉRAL DE REPRÉSENTATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES, Comptes rendus, Paris, 1934, t. CXCVIII, p. 698–700. (**286**)

90 PROPOSITION SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES, Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des lettres de Varsovie, Classe III, Warszawa, 1934, t. XXVII, p. 45–50. (**288**)

91 UN MODE DE REPRÉSENTATION DES NOMBRES POSITIFS, Věstnik Král. české společnosti náuk, Praha, 1934, Trida math. přirodovědecká t. II, p. 1–7. (**289**)

92 SUR UNE CLASSE D'INTÉGRALES DE LAPLACE-ABEL, Comptes rendus du II congrès des mathématiciens des pays slaves, Praha, 1934, p. 157–158. (**291**)

93 REMARQUES ARITHEMÉTIQUES SUR LES INTÉGRALES ABELIENNES À COEFFICIENTS TAYLORIENS COMMENSURABLES, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1934, t. III, p. 1–12. (**292**)

94 REPRÉSENTATION D'UNE CLASSE DE SÉRIES PAR UNE INTÉGRALE, Mathématica, Cluj, 1935, t. IX, p. 146–154. (**296**)

95 О ЕКСТРЕМУМИМА ИНТЕГРАЛА АЛГЕБАРСКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXV, Први разред, књ. 81, Београд, 1935, стр. 53–70. (**297**)

96□ ИЗРАЖИВАЊЕ ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXV, Први разред, књ. 81, Београд, 1935, стр. 137–152 (са J. Караматом). (**301**)

97 INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES DU THÉORÈME DE WILSON, Sphinx, Bruxelles, 1936, t. VI, 7, p. 110–111. (**313**)

98 SUR UNE COURBE REMARQUABLE, Sphinx, Bruxelles, 1936, t. VI, 11, p. 103–104. (**314**)

99 REMARQUE SUR LES ZÉROS DES INTÉGRALES DE LAPLACE-ABEL, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Série A: Sciences mathématiques, Cracovie, 1936, p. 523–527. (**315**)

100 PROPOSITIONS SUR LES FONCTIONS MÉROMORPHES, Publication mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1936, t. V, p. 163–168. (**317**)

101 THÉORÈME SUR LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES À COEFFICIENTS TAYLORIENS COMMENSURABLES, Revue Mathématiques de l'Union interbalkanique, Athènes, 1936, t. I, 1, p. 11–16. (**318**)

102 SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE RATTACHÉE À LA GAMMA FONCTION, Revue Mathématique de l'Union interbalkanique, Athènes, 1936, t. I, 2, p. 129–134. (**319**)

103 КАРАКТЕРИСТИЧНА КОНСТАНТА БРОЈНИХ НИЗОВА, Гласник Југословенског професорског друштва, Београд, 1936, t. XVII, 2–3, стр. 148–157. (**324**)

104 ЈЕДНА ВРСТА БРОЈНИХ КВАЗИ-ИНВАРИЈАНАТА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXV, Први разред, књ. 86, Београд, 1937, стр. 137–174. (**325**)

105 О ДВОСТРУКИМ ПОТЕНЦИЈАЛНИМ РЕДОВИМА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXV, Први разред, књ. 86, Београд, 1937, стр. 175–199. (**328**)

106 INTÉGRALES ABÉLIENNES À BORNES ALGÉBRICO-LOGARITHMIQUES, Bulletin des Sciences mathématiques, Paris, 1937, 2^{e} série, t. LXI, 2, p. 290–295. (**331**)

107 ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ, Предавања на Београдском универзитету, Задужбина Луке Ћеловића-Требињца, Београд, 1937, стр. 128 + III; 15,9 × 23,7. (**332**)

108 SÉRIES TAYLORIENNES FOURNISSANT LE NOMBRE DE NOMBRES PREMIERS NE SURPASSANT PAS UN NOMBRE DONNÉ, Bulletin des Sciences mathématiques, Paris, 1938, 2^{e} série, t. LXII, mai 1938, p. 140–148. (**343**)

109 SÉRIES TAYLORIENNES EN RAPPORT AVEC LES NOMBRES PREMIERS, BOLETIN MATEMATICO, Buenos Aires, 1938, t. X, 13, p. 177–178. (**344**)

110 SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU PREMIER ORDRE ENGENDRANT DES FONCTIONS ENTIÈRES, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1938, t. VI–VII, p. 1–12. (**351**)

111 PARTICULARITÉS D'ORDRE ARITHMÉTIQUE RATTACHÉES AUX ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES ALGÉBRIQUES, Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, Bucuresti, 1938, t. 40, 1–2, p. 1–12. (**354**)

112 ПОТЕНЦИЈАЛНИ РЕДОВИ ШТО ИЗРАЖАВАЈУ ОПШТИ ИНТЕГРАЛ КАКВЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГА РЕДА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXVIII, Први разред, књ. 88, Београд, 1939, стр. 31–42. (**356**)

113 ЈЕДНА КЛАСА ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА СА ПРОМЕНЉИВИМ ПАРАМЕТРИМА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXVIII, Први разред, књ. 88, Београд, 1939, стр. 167–206. (**357**)

114 ПОТЕНЦИЈАЛНИ РЕДОВИ ЧИЈИ КОЕФИЦИЈЕНТИ ИМАЈУ АРИТМЕТИЧКУ СТРУКТУРУ, Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXVIII, Први разред, књ. 88, Београд, 1939, стр. 245–256. (**359**)

115 МАТЕМАТИЧКЕ АНАЛИЗЕ И ОЦЕАНОГРАФСКО-БИОЛОШКИ ПРОБЛЕМИ, Годишњак Оцеанографског института, Сплит, 1939–40, св. II, стр. 52–73. (**368**)

116 ЈЕДАН ОПШТИ НАЧИН ПАРАМЕТАРСКОГ ИЗРАЖАВАЊА ТРАНСЦЕНДЕНАТА КОНАЧНОГ РЕДА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXXV, Први разред, књ. 92, Београд, 1940, стр. 83–97. (**378**)

117 КРИВЕ ЛИНИЈЕ У РАВНИ ЧИЈА ЈЕ КРИВИНА МОНОТОНА ФУНКЦИЈА ДУЖИНЕ ЛУКА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CLXXXV, Први разред, књ. 92, Београд, 1940, стр. 111–135. (**379**)

118 ПРИБЛИЖНО ИЗРАЖАВАЊЕ ЕЛИПТИЧКИХ ПОМОЋУ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА, Српска академија наука, Глас, књ. CLXXXIX, Први разред, књ. 95, Београд, 1946, стр. 47–70. (**389**)

О ОВОМ ИЗДАЊУ

У овој књизи нашли су свој дом неки од списа Михаила Петровића који претежно припадају – било тематски, било методски – математичкој анализи у ширем смислу. Петровић се слободно кретао по математици без граница па његови радови задиру често у више области.

Може се чинити да је ово веома скроман избор његових списа из анализе с обзиром на њихов укупан број. Међутим, треба имати у виду да већина изабраних има свог двојника – српски (написан на српском) француског и обрнуто (при чему су српски обично опширнији). Сем тога, Петровић је понекад читаве делове једног својег списа преносио у неки каснији. Стога овде има бар двоструко више његових текстова но што се види у књизи.

Желео сам да се види какав је био тај наш математички предак чији се извесни утицаји, били ми тога свесни или не, још осећају у нас.

Брзина којом је радио и објављивао своје радове има своју цену. Зато се овде могу уочити блистави, мање блистави и знатно мање блистави тренуци његовог математичког живота.

Трудио сам се да већина тема које је Петровић обрађивао има по неки рад, као свог представника, у овој књизи. Кад није тако, као што је, на пример, случај са представљањем аналитичке функције једним децималним бројем, читалац може погледати *Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovich* (чији је део преведен и налази се у овој књизи).

Радове који се односе на неједнакости, теореме о средњој вредности, изабрао сам из више разлога. Неједнакости су једна од основа једног дела Петровићевих радова. Неке од њих је и сам открио, што не бисмо смели заборавити. У поменутим радовима се можда лакше може уочити ток његових мисли које се, полазећи од сасвим једноставних објеката и односа, крећу ка све сложенијим и сложенијим.

Резултати у математици јесу важни, али су важни и путеви којима се до њих долази. Мало је великих теорема, а много добрих математичара – не може свако имати своју. Има и путева који се памте. Зато треба обратити пажњу и на Петровићеве путеве. Можда они воде још некуда?

Текстови научних расправа на српском језику верни су оригиналима, уз поштовање садашњих језичких закона. Исправљене су уочене штампарске и неке друге грешке. Преводи су, више или мање, успешне копије оригинала. Превођењем сам покушао да очувам Петровићев начин изражавања.

Одређеним примедбама и сугестијама професор Душан Адамовић помогао ми је да побољшам одређене делове књиге. Својом монографијом *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, као и општим упутствима допринос је дао професор Драган Трифуновић. Професор Жарко Мијајловић помогао је искуством и делом материјала који је сакупио, радећи на овим *Сабраним делима*. Уредник Жарко Јовић је правовремено припремао потребне писане материјале и био веома стрпљив са мном, што баш и није било лако. Александар Савић, асистент Математичког факултета у Београду, успешно је све то сложио. Пријатна ми је дужност да свима њима упутим изразе своје захвалности.

Посебно захваљујем својој жени Ружици, која ми је из свог далеког, мени још недоступног света, помогла да преведем са француског језика.

Драгољуб Аранђеловић

РЕГИСТАР ЛИЧНИХ ИМЕНА

САДРЖАЈ

НАУЧНЕ РАСПРАВЕ

ПРИЛОЗИ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА
Књига 3

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА

Прво издање, 1999. година

Издавач
Завод за уџбенике и наставна средства
Београд, Обилићев венац 5

Ликовни уредник
АИДА СПАСИЋ

Лектори
ОЛГА МИНИЋ
МИРЈАНА МИЛОШЕВИЋ

Корице
АИДА СПАСИЋ

Графички уредник
ДУШАН МИЛОСАВЉЕВИЋ

Коректор
МАЈА БИЧЕНКО

Обим: 19 $^{3}/_{4}$ штампарских табака
Формат: 17 × 24 cm
Тираж: 500 примерака

Рукопис предат у штампу августа 1999. године.
Штампање завршено августа 1999. године.

Штампа
БИГЗ, Београд

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517

ПЕТРОВИЋ, Михаило Н.

Математичка анализа / Михаило Петровић ; приредио Драгољуб Аранђеловић. – [1. изд.]. – Београд : Завод за уџбенике и наставна средства, 1999 (Београд : БИГЗ). – 315 стр. : 24 cm. – (Сабрана дела / Михаило Петровић ; књ. 3)

Тираж 500. – Стр. 307–308: О овом издању / Драгољуб Аранђеловић. – Стр. 297–305: Објављени радови Михаила Петровића – Анализа / Драган Трифуновић. – Регистар.

ISBN 86-17-06506-0

1. Аранђеловић, Драгољуб
012 Петровић М.
а) Математичка анализа б) Петровић, Михаило
(1868–1943) – Библиографије
ИД=76804364

9 788617 346728

ISBN 86-17-06506-0

К. Б. 34672