ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА

САБРАНА ДЕЛА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Први део
2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Други део
3. МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
4. АЛГЕБРА
5. МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ
6. МАТЕМАТИЧКА ФЕНОМЕНОЛОГИЈА
7. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧКЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЈЕ
8. ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА – ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ
9. ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ – ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА
10. ЧЛАНЦИ – СТУДИЈЕ
11. ПУТОПИСИ – Први део
12. ПУТОПИСИ – Други део
13. МЕТАФОРЕ И АЛЕГОРИЈЕ
14. РИБАРСТВО
15. МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ – ПИСМА, БИБЛИОГРАФИЈА И ЛЕТОПИС

Завод за уџбенике и наставна средства у Београду објављује *Сабрана дела Михаила Петровића* у сарадњи са Математичким факултетом Универзитета у Београду и Друштвом математичара Србије.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА

КЊИГА 9

Уредник

ЖАРКО ЈОВИЋ

Главни и одговорни уредник

др ПЕТАР ПИЈАНОВИЋ

За издавача

проф. др ДОБРОСАВ БЈЕЛЕТИЋ, директор

ISBN 86-17-05893-5

Мих. Петровић

Уредник

ЖАРКО ЈОВИЋ

Главни и одговорни уредник

др ПЕТАР ПИЈАНОВИЋ

За издавача

[illegible] ДОБРОСАВ БЈЕЛЕТИЋ, директор

ISBN 86-17-0[illegible]

Професор

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

Београд, 24. април 1868 – Београд, 8. јун 1943.

Лик Михаила Пеūровића с йочеūка 1930. īодине; аушор фоūоīрафије нейознаū

МИХАИЛО
ПЕТРОВИЋ

ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА

Приредио

др Зоран Каделбург, проф. унив.

ЗАВОД ЗА УЏБЕНИКЕ
И НАСТАВНА СРЕДСТВА
БЕОГРАД
1997

РЕЧ УНАПРЕД

Из обимне, данас толико обрађене теорије елиптичких функција, у овај кратак уџбеник ушло је само оно што се, према елементарним знањима из диференцијалног и интегралног рачуна, и опште теорије аналитичких функција, са којима се претпоставља да располажу слушаоци, може прећи на предавањима од једног скраћеног семестра.

Докази су, местимице и на рачун онакве тачности са каквом се данас ради, упрошћени и скраћени до крајњих граница могућности, а у намери да слушалац што лакше и брже дође ма и до овлашне слике ствари и да му се омогући употреба рачунског инструмента који пружају елиптичке функције. То је, уосталом, све што се може тражити од једног, овако скраћеног, уџбеника.

Писац

ПРВИ ОДЕЉАК

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ О ПЕРИОДИЧНИМ ФУНКЦИЈАМА

1. ПОЈАМ О ПЕРИОДИЧНОСТИ

Из Тригонометрије се зна да, кад се за мерење углова узме таква јединица мере, да пун угао има за вредност 2π, функција $\sin z$ не мења се кад се вредности z дода или одузме 2π, што изражава једначина

$$\sin(z \pm 2\pi) = \sin z.$$

Исто тако, из Елементарне Анализе зна се да је

$$e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$$

према чему функција e^z има ту особину да не мења вредност кад се вредности z дода или одузме $2\pi i$, што се изражава једначином

$$e^{z\pm 2\pi i} = e^z.$$

За те две функције каже се да су *периодичне* и да имају за *периоду*, прва број 2π, друга број $2\pi i$.

И у опште, *за једну функцију* $f(z)$ *каже се да је периодична ако постоји такав један број* ω, *независан од* z, *да је за ма какво* z

$$f(z \pm \omega) = f(z).$$

Број ω назива се тада *периода* функције $f(z)$. Лако се увиђа да, кад $f(z)$ има као периоду један број ω, имаће бескрајно много периода, а то су

$$\pm\omega, \pm 2\omega, \pm 3\omega, \pm 4\omega, \ldots$$

тј. *позитивни и негативни мултипли броја* ω. То се види из тога што је очевидно

$$f(z \pm 2\omega) = f(z \pm \omega) = f(z),$$
$$f(z \pm 3\omega) = f(z \pm 2\omega) = f(z),$$
$$f(z \pm 4\omega) = f(z \pm 3\omega) = f(z),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Кад је, дакле, ω периода функције, биће јој периода и $m\omega$, где је m ма какав, позитиван или негативан, цео број. Кад је број ω такав да испуњава ове погодбе: 1° да се свака друга периода функције изражава као мултипл тога броја; 2° да је сваки мултипл тога броја једна периода функције, онда се за такав број ω каже да је *основна, несводљива периода* функције.

Такви су нпр. бројеви

$$\omega = 2\pi \quad \text{за функцију} \quad \sin z,$$
$$\omega = 2\pi i \quad \text{за функцију} \quad e^{z}.$$

Међутим, такав није број π за функцију $\sin z$: тачно је да су све периоде функције мултипли броја π, али сваки његов мултипл, нпр. 3π, 5π, 7π, ... нису периоде.

Из саме дефиниције основне периоде види се да је то међу свима периодама она која је, у равни променљиве z, *најближа координатном почетку.*

Но има функција чије се све периоде не изражавају као мултипли једне исте периоде, већ се једне изражавају као мултипли једнога броја ω_1, друге као мултипли другога каквог броја ω_2, треће као мултипли трећега броја ω_3 итд. где су бројеви $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ такође периоде исте функције, али ни један од њих није мултипл другог.

У таквом се случају има сматрати да функција има неколико низова периода

$$\begin{array}{l} \pm\omega_1, \pm 2\,\omega_1, \pm 3\,\omega_1, \dots \\ \pm\omega_2, \pm 2\,\omega_2, \pm 3\,\omega_2, \dots \\ \pm\omega_3, \pm 2\,\omega_3, \pm 3\,\omega_3, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \tag{1}$$

За први низ има се сматрати као основна периода број ω_1, за други низ број ω_2, за трећи број ω_3 итд. За функцију има се такође сматрати да има онолико основних периода, колико има таквих бројева $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$

Кад су ω_1 и ω_2 две основне периоде функције $f(z)$, биће

$$f(z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = f(z + m_1\omega_1) = f(z).$$

И уопште, кад су $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ основне периоде функције $f(z)$, биће

$$f(z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n) = f(z),$$

па ма какве вредности имали цели, позитивни или негативни бројеви $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Према томе функција ће, поред низова (1), имати као периоде и све вредности

$$\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n. \tag{2}$$

Израз (2) је најопштији израз за периоде посматране функције; он изражава сваку периоду као линеарну и хомогену комбинацију основних периода $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, где су коефицијенти комбинације цели бројеви. Свака се периода изражава у облику (2), и обратно, сваки облик (2) је једна периода функције.

Функције $f(z)$, за које постоји само један број ω_1 поменуте врсте, називају се *простопериодичне функције*. Оне за које постоје два таква броја ω_1 и ω_2, називају се *двопериодичне функције*, са основним периодама ω_1 и ω_2. И уопште функције за које постоје n таквих бројева $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ називају се *n-периодичне функције*, са основним периодама $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

2. ПРОСТОПЕРИОДИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ

Као што је напред казано, функција $f(z)$ назива се *простопериодичном функцијом* кад има периоде и кад се све њене периоде изражавају као мултипли једнога истог броја ω који има ове особине: 1° свака друга периода је мултипл броја ω; 2° сваки мултипл броја ω је једна периода функције; број ω је и сам једна периода. Број ω је тада *основна периода* функције.

Основна периода ω може бити реалан, или чисто имагинаран, или комплексан број. Тако нпр. функција $\sin az$, где је a реалан број, има за периоду реалан број

$$\omega = \frac{2\pi}{a};$$

функција e^{az} има за периоду чисто имагинаран број

$$\omega = \frac{2\pi i}{a},$$

а функција $e^{(1+i)z}$ има за периоду комплексан број

$$\omega = (1+i)\pi.$$

Помоћу елементарних функција e^z и $\sin z$ може се формирати бескрајно много просто-периодичних функција $f(z)$. Такве су нпр. функције са периодом

$$\omega = \frac{2\pi i}{a}:$$

1° сваки полином по e^{az}

$$f(z) = A_0 + A_1 e^{az} + A_2 e^{2az} + \ldots + A_n e^{naz};$$

2° свака рационална функција по e^{az}, тј. количник таква два полинома;

3° сваки конвергентан ред облика

$$f(z) = A_0 + A_1 e^{az} + A_2 e^{2az} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{naz}$$

као и ред облика

4° $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{naz} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-naz}.$$

Такве су и функције са периодом

$$\omega = \frac{2\pi}{a},$$

наиме, сваки конвергентан ред облика

$$f(z) = A_0 + A_1 \sin az + A_2 \sin 2az + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin naz,$$

$$f(z) = B_0 + B_1 \cos az + B_2 \cos 2az + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos naz.$$

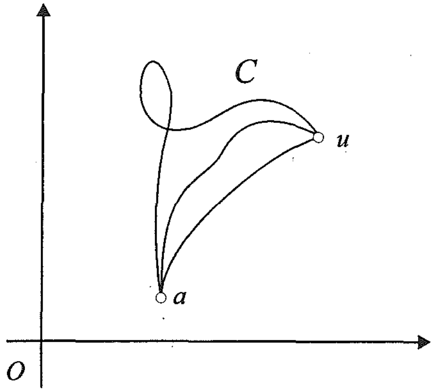
3. ПОСТАНАК ПЕРИОДА

Са гледишта опште теорије аналитичких функција, периоде функција произлазе из чињеница изражених Cauchy-евим ставовима о криволинијским интегралима, а понаособ ставом о еквиваленцији интеграционих путања и ставом о интегралу узетом дуж контуре што опкољава сингуларитете функција.

Посматрајмо интеграл

$$z = J(u) = \int_a^u f(u)\,du, \tag{3}$$

где је $f(u)$ дата функција промењљиве u, а a једна стална тачка у равни те промењљиве (сл. 1). Образац (3) дефинише z као функцију $J(u)$ промењљиве u, а у исто време и u као функцију $u(z)$ промењљиве z. Ова функција $u(z)$ назива се *инверзија интеграла* $J(u)$.

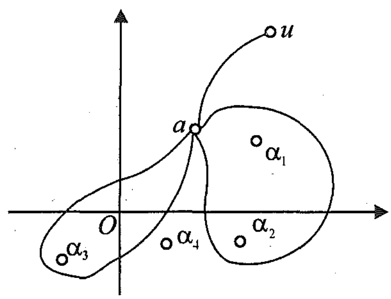


Сл. 1.

Интеграл J може се узети дуж разних, бескрајно многих путања што воде од сталне тачке a до промењљиве крајње тачке u која се посматра. Према Cauchy-евом ставу све ће те путање доводити до једне исте вредности z интеграла, осим оних путања по којима се обилази око кога од сингуларитета функције $f(z)$. Нека су

$$u = \alpha_1, \quad u = \alpha_2, \quad u = \alpha_3, \ldots \tag{4}$$

такви сингуларитети, па пре но што се изврши интеграција дуж директне путање C што води од a до u, извршимо је дуж какве контуре C' која обухвата један или више тих сингуларитета (сл. 2). Интеграл J дуж C' имаће за вредност један одређен број ω, а функција под интегралним знаком, која је у полазној тачки контуре имала једну одређену своју детерминацију $f(u)$, може по обиласку око сингуларитета дуж контуре имати или опет ту исту, или другу коју од својих детерминација (у случају кад је који од сингуларитета критичка тачка функције).



Сл. 2.

Уочимо случај кад је та детерминација, после обиласка, *исша као првобишна*. Ако се тада, тј. после обиласка, продужи интеграциони пут дуж директне путање C, стиже се у исту тачку u у коју би се стигло и да се није извршило заобилажење око сингуларитета, већ се одмах ишло путањом C.

Интеграл J ће дакле, за једну исту крајњу тачку u имати две вредности z и $z+\omega$, према путањама којима се од тачке a ишло до тачке u. Другим речима: једној истој вредности u одговарају две вредности z, од којих је једна једнака вредности интеграла J узетог дуж директне путање C, а друга је једнака вредности истога интеграла узетог дуж комбиноване путање састављене из путање C и контуре C'. Обрнуто: кад се u сматра као функција промењљиве z, онда вредностима z и $z+\omega$ одговара једна иста вредност u.

Функција u(z) *има дакле ту особину да је, за ма коју вредност промењљиве* z

$$u(z+\omega) = u(z);$$

она је, дакле, периодична и има за периоду број ω.

Кад функција $f(u)$ нема никаквих сингуларитета, тј. кад је то каква *цела* функција промењљиве u, све су путање што воде од a до u еквивалентне; контуре C' не постоје и функција $u(z)$ нема периода.

Кад $f(u)$ има само један сингуларитет $u=\alpha$, ако је овај пол, детерминација функције по обиласку око тачке α остаје непромењена. Са друге стране, интеграл J дуж контуре C' по којој се буде вршило то обилажење, једнак је броју $2\pi i$ помноженом са остатком B функције $f(u)$ за пол α. И тада:

Ако је B = 0, *функција* u *нема периода; ако је* B *различно од нуле, функција* u *је периодична и има за периоду број*

$$\omega = 2\pi i \cdot B.$$

За такву периоду се каже да је *поларна периода,* јер произлази од пола α и његовог остатка B.

Кад $f(u)$ има више сингуларитета (4), може постојати више разних контура C' дуж којих функција $f(u)$ не мења своју детерминацију. Дуж сваке од њих интеграл J има по једну одређену вредност, па ако су

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \tag{5}$$

такве вредности што одговарају разним таквим контурама C', те ће вредности (5) бити периоде функције $u(z)$.

При том се може десити:

1° или да су све периоде (5) међу собом несводљиве, тј. да се ни једна од њих не може изразити као линеарна и хомогена комбинација (са целим коефицијентима) других, у томе смислу несводљивих периода; *тада се сви бројеви (5) имају сматрати као основне периоде функције* u(z);

2° или су неке од периода (5) међу собом сводљиве, тј. изражавају се као линеарне и хомогене функције (са целим коефицијентима) једне или неколиких других несводљивих периода, нпр. периода

$$(6) \qquad \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$$

тако да је

$$\omega_{k+1} = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_k\omega_k,$$
$$\omega_{k+2} = m_1'\omega_1 + m_2'\omega_2 + \ldots + m_k'\omega_k,$$
$$\omega_{k+3} = m_1''\omega_1 + m_2''\omega_2 + \ldots + m_k''\omega_k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Тада се сви бројеви (6) имају сматрати као несводљиве периоде функције $u(z)$.

Као што се види, број основних периода може бити произвољно велики, према природи функције $f(u)$ под интегралним знаком. *Постоје, дакле,* n-*периодичне финкције, где је* n *произвољно велики цео позитиван број*.

Кад једна таква периода проистиче од заобилажења око какве критичке тачке функције $f(u)$, за њу се каже да је *критичка периода* функције $u(z)$.

4. ПОСТАНАК ПЕРИОДА ОБЈАШЊЕН ПРИМЕРИМА

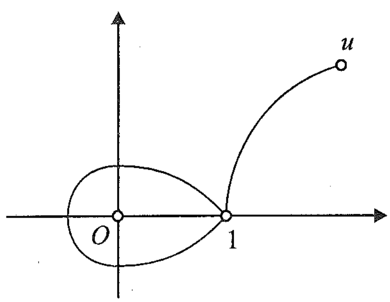
Начин постанка периода, изложен у овоме што је напред казано, биће расветљен примерима што следују.

1. *пример*. – Уочимо интеграл

$$(7) \qquad z = J(u) = \int_1^u \frac{du}{u}$$

где функција под интегралним знаком има само један сингуларитет $u = 0$ и он је пол првога реда, чији је остатак $B = 1$. Кад се за контуру C' узме једна ма која контура која опкољава тачку $u = 0$ (сл. 3), интеграл J дуж те контуре имаће за вредност

$$\omega = B = 1$$



Сл. 3.

и према томе ће функција

$$u(z) = e^z,$$

као инверзија интеграла (7), бити периодична и имати за основну периоду број

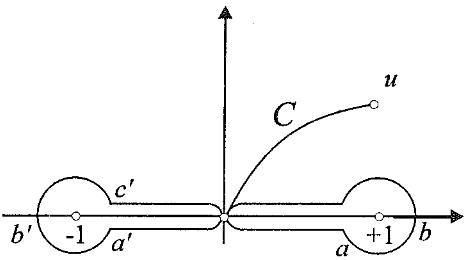
$$\omega = 2\pi i \cdot B = 2\pi i$$

и тај број је поларна периода функције.

2. *пример*. – Уочимо интеграл

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{8}$$

где функција под интегралним знаком има два сингуларитета: тачке $u = -1$ и $u = +1$, а оба су алгебарске критичке тачке другога реда.



Сл. 4.

Посматрајмо две контуре C' што полазе из тачке O и опкољавају: прва C_1' тачку $u = +1$, друга C_2' тачку $u = -1$ (сл. 4).

Сл. 4.

Контура C_1' еквивалентна је замки $OabcO$ састављеној од правих Oa и Oc, бескрајно блиских реалној осовини и кружића abc описаног око тачке $u = +1$. Дуж те замке интеграл има за вредност

$$\int_{Oa} + \int_{abc} + \int_{cO}.$$

Први од та три интеграла има за вредност

$$\int_{Oa} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left[arc\sin u\right]_0^1 = arc\sin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Други интеграл, узет дуж кружића abc полупречника r добија се кад се стави

$$u = 1 + re^{\theta i}, \qquad du = rie^{\theta i} d\,\theta$$

и пусти се да θ расте од 0 до 2π; он дакле има за вредност

$$\int_{abc} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(1+u)}} = i\sqrt{r}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{\theta i}{2}} d\,\theta}{\sqrt{2+re^{\theta i}}}.$$

Вредност интеграла, према Cauchy-евом ставу, остаје иста за ма колику вредност полупречника r, па дакле и за r бескрајно мало, из чега излази да је тај интеграл једнак нули.

Трећи интеграл има за вредност

$$\int_{cO} = -\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2},$$

где знак – пред другим чланом долази отуда што је функција под интегралним знаком после обиласка око критичке тачке $u = +1$ променила детерминацију, тј. свој знак.

Дуж контуре C_1' интеграл J имаће дакле за вредност π, а у тачку O се стиже са детерминацијом

$$(9) \qquad f(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

функције $f(u)$ под интегралним знаком.

На исти начин, а водећи рачуна о томе да је функција $f(u)$ парна и да се сад из O полази са детерминацијом (9), налази се да дуж контуре C_2' интеграл J има исту вредност π, а да се преко ње стиже у O са детерминацијом

$$f(u) = +\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

функције под интегралним знаком.

Према томе, целокупна вредност интерала J дуж двоструке контуре састављене из C_1' и C_2' износи 2π. Број ω овде је дакле $\omega = 2\pi$, што значи да је функција

$$u(z) = \sin z$$

као инверзија интеграла (8) периодична и има за периоду $\omega = 2\pi$. Тај број је критичка периода функције.

3. *пример*. – Уочимо интеграл

$$(10) \qquad z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{U}} = J(u),$$

где је U полином четвртог степена по променљивој u, облика

$$(11) \qquad U = (1-u^2)(1-k^2u^2),$$

а где је k какав сталан реалан број што лежи између 0 и 1.

Функција под интегралним знаком има четири сингуларитета

$$u = -1, \quad u = +1, \quad u = -\frac{1}{k}, \quad u = +\frac{1}{k}$$

који су сви алгебарске критичке тачке другог реда.

Посматрајмо најпре две контуре C_1' и C_2' (сл. 4) што полазе из тачке $u = 0$ и опкољавају: прва тачку $u = +1$, друга тачку $u = -1$.

Контура C_1' еквивалентна је малопређашној замки $OabcO$, а дуж те замке интеграл J има вредност

$$\int_{Oa} + \int_{abc} + \int_{cO}.$$

Први од тих интеграла има за вредност K, где K означује реални одређени интеграл

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \tag{12}$$

Други интеграл, узет дуж кружића abc полупречника r, добија се кад се изврши смена

$$u = 1 + re^{\theta i}, \quad du = rie^{\theta i} d\theta$$

и пусти се да θ расте од O до 2π; он дакле има за вредност

$$\int_{abc} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(1+u)(1-k^2u^2)}} = i\sqrt{r} \int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{(2+re^{\theta^i})\left[1-k^2(1+re^{\theta^{i2}})\right]}}$$

па пошто вредност интеграла остаје иста и кад се полупречник r бескрајно смањује, то је тај интеграл једнак нули.

Трећи интеграл има за вредност

$$\int_{cO} = -\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{U}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{U}} = K$$

тако, да дуж контуре C_1' интеграл J има за вредност $2K$, а у тачку O се, по повратку, стуже са детерминацијом

$$f(u) = -\frac{1}{\sqrt{U}} \tag{13}$$

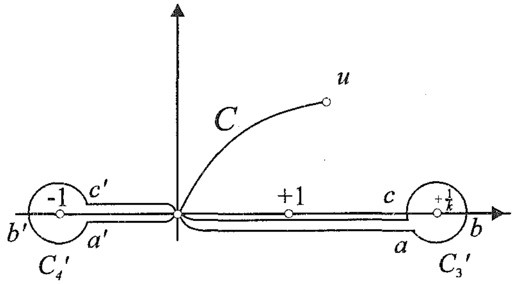
функције под интегралним знаком.

На исти начин, а водећи рачуна о томе да је функција $f(u)$ парна и да се из O сад полази са детерминацијом (13), налази се да дуж контуре C_2' интеграл J опет има за вредност $2K$ а да се преко те контуре стиже у тачку O са детерминацијом

$$f(u) = +\frac{1}{\sqrt{U}}. \tag{14}$$

Према томе: целокупна вредност интеграла J дуж двоструке контуре састављене из C_1' и C_2' износи $4K$. Број ω овде је $4K$, што значи да функција $u(z)$, инверзија интеграла $J(u)$, има за периоду $\omega = 4K$.

Посматрајмо сад две контуре, C_3' и C_4' што полазе из тачке O и опкољавају: прва тачку $u = \frac{1}{k}$, друга тачку $u = -1$ (сл. 5).



Сл. 5.

Контура C_3', не опкољавајући тачку $u = +1$, еквивалентна је замки $OabcO$ која такође не опкољава ту тачку, а састављена је из правих Oa и cO бескрајно блиских реалној осовини, и кружића abc описаног око тачке $u = +\frac{1}{k}$. Дуж те замке интеграл J има за вредност

$$\int_{Oa} + \int_{abc} + \int_{cO}. \tag{15}$$

Први од та три интеграла има за вредност

$$\int_{Oa} = \int_0^{\frac{1}{k}} = \int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} = K + L,$$

где је

$$L = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Дуж праве $\left(1, \frac{1}{k}\right)$ вредност $\sqrt{1-u^2}$ је имагинаран број, јер је $u > 1$, а вредност $\sqrt{1-k^2u^2}$ је реалан број, јер је $u < \frac{1}{k}$. Ако се дакле, напише

$$\sqrt{1-u^2} = i\sqrt{u^2-1},$$

вредност интеграла

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}.$$

је реална и интеграл L ће имати за вредност

$$L = \frac{1}{i} K' = -iK'$$

према чему је

$$\int_{Oa} = \int_{0}^{\frac{1}{k}} = K - iK'.$$

Други од интеграла (15), узет дуж кружића полупречника r, добија се кад се стави

$$u = \frac{1}{k} + re^{\theta i}, \qquad du = rie^{\theta i} d\,\theta$$

и пусти се да θ расте од 0 до 2π; он, дакле, има вредност

$$\int_{abc} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-ku)(1+ku)}} = i\sqrt{kr} \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{\frac{\theta i}{2}} d\,\theta}{\sqrt{(1-r^2 e^{2\theta i})(2+kre^{\theta i})}}$$

која тежи нули кад се полупречник r бескрајно смањује, па је, дакле, вредност интеграла једнака нули.

Трећи од интеграла (15) је

$$\int_{cO} = -\int_{\frac{1}{k}}^{0} = \int_{0}^{\frac{1}{k}} = \int_{0}^{1} + \int_{1}^{\frac{1}{k}} = K - iK'$$

(знак – пред другим чланом произлази отуда, што је после обиласка око критичке тачке $u = \dfrac{1}{k}$ функција под интегралним знаком променила свој знак), а у тачку O се стиже са детерминацијом (13).

Из тога излази да је вредност интеграла J дуж контуре C_3' једнака броју $2K - 2iK'$ и да се, после обиласка том контуром, стиже у тачку O са детерминацијом (13) функције $f(u)$.

Ако се после тога интеграција продужи дуж контуре C_4', водећи рачун о томе да се полази са детерминацијом (13) функције под интегралним знаком, налази се, као и у сл. 3. да интеграл J дуж те контуре има за вредност $2K$ и да се у тачку O, по обиласку дуж контуре, стиже са детерминацијом (14).

Према томе, целокупна вредност интеграла J дуж двоструке контуре састављене од C_3' и C_4', једнака је броју $4K - 4iK'$, па пошто та контура доводи до детерминације (14) функције под интегралним знаком, то се закључује да је тај број једна периода функције $u(z)$. Али пошто је напред нађено да је и сам број $4K$ једна периода те функције, то следује да је и број $-2iK'$, па дакле и број $2iK'$ једна њена периода.

Функција u(z) *има, дакле, две периоде*

$$\omega_1 = 4K \quad \text{и} \quad \omega_2 = 2iK'$$

где су K *и* K′ *реални одређени интеграли*:

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{16}$$

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}. \tag{17}$$

Свака друга контура, различна од ових овде посматраних, доводи или до истих периода ω_1 и ω_2, или до њихових линеарних комбинација које не доводе до какве нове периоде.

Нађене две периоде ω_1 и ω_2 су критичке периоде; оне су очевидно једна на другу несводљиве и имају се сматрати као основне периоде функције $u(z)$. Једна је од њих, као што се види, реална, а друга чисто имагинарна.

За $k = 0$ интеграли K и K' постају

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$K' = \int_1^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \left[\log(u+\sqrt{u^2-1})\right]_0^{\infty} = \infty$$

тако, да функција $u(z) = \sin z$, на коју се за $k = 0$ своди инверзија интеграла J, има само једну коначну периоду

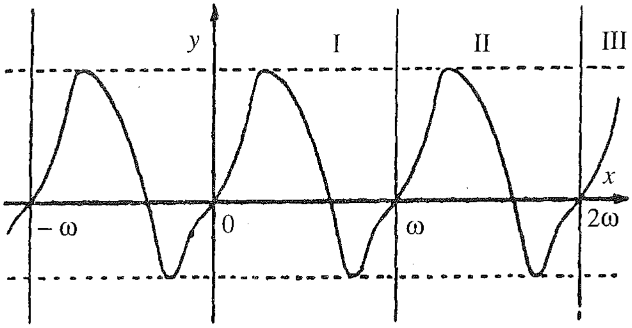
$$\omega = 4K = 2\pi.$$

5. ГЕОМЕТРИЈСКО ЗНАЧЕЊЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ

Периодичност се састоји у чињеници да се вредности функције понављају кад се независно промењивој количини дода или одузме једна стална количина ω, која тада игра улогу периоде.

Кад се ради само о реалним количинама, а и периода је реална, онда је периодичност геометријски изражена чињеницом да се лук криве линије, што представља посматрану функцију, понавља у одређеним сталним размацима независно променљиве количине (апсцисе) (сл. 6).

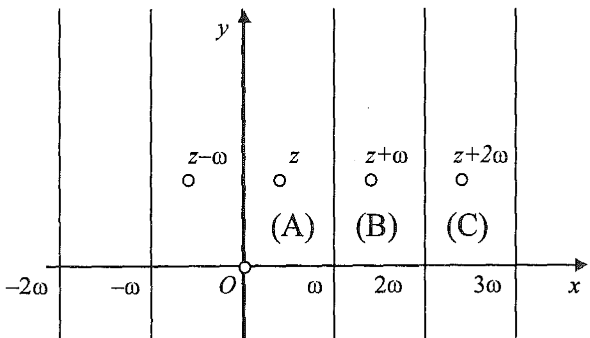
Кад се ради о имагинарним количинама, било да је периода реална или комплексна, такво је геометријско изражавање периодичности немогућно у једној равни, јер само означавање промена независно променљиве z захтева једну раван, а означавање промена функције другу, засебну раван.



Сл. 6.

Да би се видело значење периодичности у равни z, разликујмо ове случајеве:

Први случај: *нека је периода* ω *реална*. Означимо на реалној осовини (сл. 7) тачке



Сл 7.

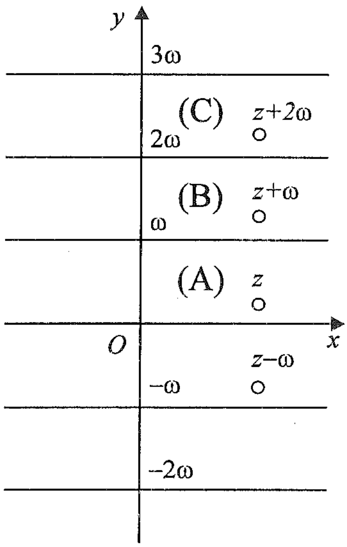
(18) $$\pm\omega, \pm 2\omega, \pm 3\omega, \ldots$$

и кроз њих повуцимо управне паралелне имагинарној осовини. Ако се уочи једна ма која тачка z у области (A), функција ће имати исту вредност и онда кад се тачка z премести у тачку $z + \omega$ области (B) или у тачку $z + 2\omega$ области (C) итд. и то ће важити за ма коју тачку z области (A). Периодичност функције састоји се , дакле, у томе што, какве год вредности функција добије у области (A) у појединим њеним тачкама z, такве ће исте вредности она добити и у осталим областима (B), (C), ... у одговарајућим тачкама

(19) $$z \pm \omega,\ z \pm 2\omega,\ z \pm 3\omega, \ldots$$

које се све налазе на једној правој паралелној реалној осовини.

Други случај: *нека је периода чисто имагинарна количина.* Тачка ω налазиће се на имагинарној осовини (сл. 7′). Ако се на овој означе тачке (18), па се кроз ове повуку паралелне реалној осовини, добијају се појаси (A), (B), (C), ... од којих, кад (A) садржи посматрану тачку z, сваки од њих садржи по једну њој одговарајућу тачку (19). Ове се тачке све налазе на једној правој паралелној имагинарној осовини. Периодичност функције опет се састоји у чињеници да функција у тачкама (19) тих појасева добија једну исту вредност, ону коју она има у тачки z појаса (A).

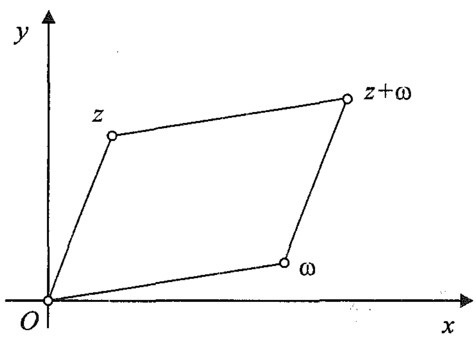


Сл. 7′.

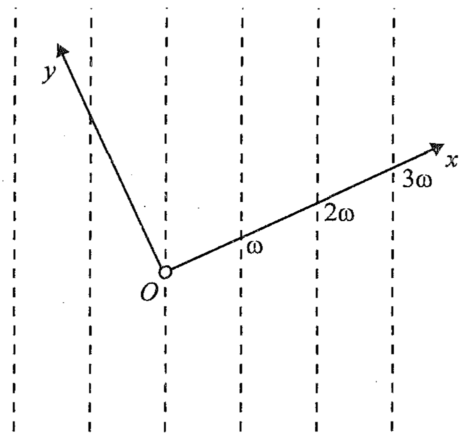
И у првом, и у другом случају области (A), (B), (C), ... називају се *појасима периодичности* функције. Тих појасева има бескрајно много, али је довољно познавати функцију у једноме, коме било од њих, па ће се она познавати у целој равни, пошто се она понавља у свима осталим појасевима. *Првим појасом периодичности* обично се назива први појас са десне стране имагинарне осовине.

Тачке (19) називају се *хомологим тачкама* или *хомологама* тачке z за посматрану функцију $f(z)$. Периодичност ове састоји се тада у томе, што функција у свима хомологим тачкама има исту вредност, ону коју има у тачки z.

Међутим, и у првоме и у другом случају појасима периодичности *може се дати произвољна оријентација*, али тако да увек остану међусобно паралелни. Претпоставимо да се првобитне правоугле координатне осовине обрну око координатног почетка за угао α, а да почетак остане исти. Међусобни положаји тачака O, ω, z и (19) остају тада неизмењени, пошто се нпр. тачке O, ω, z, $z+\omega$ налазе на теменима паралелограма који остаје неизмењен обртањем осовина (сл 8), јер положаји његових темена зависе само од праваца и потега тачака z и ω, а не и од праваца осовина. Према томе и појаси периодичности остају исти, само им се мења нагиб према осовинама. А резултат је исти као да су координатне осовине остале исте, а појаси променили свој нагиб према осовинама (сл. 9).



Сл. 8.



Сл. 9.

Обртањем осовина, којим се не мењају *међусобни положаји* координатног почетка, периоде и хомологих тачака, мењају се саме *вредности* свих тих тачака, и то на један исти начин: њихови потези (модули) остају неизмењени, а поларни углови се смањују или повећавају (према смислу обртања) за угао α, за који се координатни систем обрнуо око почетка. У првоме случају вредност z постаје $ze^{\alpha i}$, а ω постаје $\omega e^{\alpha i}$; у другоме случају измењене су вредности $ze^{-\alpha i}$ и $\omega e^{-\alpha i}$.

Трећи случај: *нека је периода комплексна количина.* Обртањем координатног система око почетка, чиме појаси и хомологе тачке остају неизмењени, може се учинити да се тачка ω нађе на реалној, или на имагинарној осовини, па дакле, да се одређивање тих појасева и тих тачака сведе на први или други случај. А из овога што је напред казано изводи се тада овај закључак:

Каква била периода ω, реална, чисто имагинарна или комплексна, први појас периодичности добија се кад се кроз почетак и кроз тачку ω повуку две међу собом паралелне праве L и L' произвољног правца; део равни између тих двеју правих је први појас периодичности, а сви остали се добијају повлачећи кроз тачке

$$\pm 2\omega,\ \pm 3\omega,\ \pm 4\omega, \ldots$$

праве паралелне правим L и L'.

Као што се види, постојање једне периоде ω повлачи собом ограничење дела равни у коме функција добија све могућне своје вредности, а које се само понављају у појасима периодичности, у њиховим хомологим тачкама.

ДРУГИ ОДЕЉАК

ГЕНЕРАЛНОСТИ О ДВОПЕРИОДИЧНИМ ФУНКЦИЈАМА

6. НЕПОСРЕДНИ НАЧИНИ ФОРМИРАЊА ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА

Видели смо како се проучавањем криволинијских интеграла

$$z = \int_a^u f(u)\,du \tag{20}$$

долази до сазнања да инверзија $u(z)$ таквога интеграла има једну или више несводљивих периода. То даје могућност да се непосредно формирају интеграли (20) чија ће инверзија бити двопериодична функција.

Таква је једна функција напред проучена инверзија $u(z)$ интеграла

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\,. \tag{21}$$

Други један начин за непосредно формирање двопериодичних функција даје теорија редова чији је општи члан одређена функција променљиве z. Уочимо нпр. ред

$$f(z) = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots \tag{22}$$

чији је општи члан облика

$$U_n = u_n + \upsilon_n, \tag{23}$$

где је

$$u_n = \frac{e^{z+n\omega}}{(e^{\alpha} - e^{z+n\omega})(e^{\beta} - e^{z+n\omega})}\,, \tag{24}$$

(25) $$\upsilon_n = \frac{e^{z-n\omega}}{(e^{\alpha} - e^{z-n\omega})(e^{\beta} - e^{z-n\omega})},$$

где су α и β две ма какве константе, а ω константа чији је реалан део негативан.

Показаћемо најпре да је ред (22) конвергентан за све вредности z, осим за оне за које имениоци израза u_n и υ_n постају једнаки нули. Конвергенција зависи од начина на који се u_n и υ_n понашају за велике вредности n. Пошто је реалан део константе ω негативан, израз $e^{n\omega}$, па дакле и $e^{z+n\omega}$, теже нули кад n бескрајно расте, и према томе именилац израза u_n понаша се у бескрајности као $e^{\alpha+\beta}$. Члан u_n понаша се, дакле, као израз

$$\frac{e^{z+n\omega}}{e^{\alpha+\beta}} = e^{z-\alpha-\beta} \cdot e^{n\omega}$$

што значи да се ред

(25) $$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

понаша као геометријска прогресија

$$e^{z-\alpha-\beta}(1 + e^{\omega} + e^{2\omega} + e^{3\omega} + \ldots)$$

која је конвергентна, јер је e^{ω} по своме модулу мање од јединице. Према томе ће и ред (26) бити конвергентан за све вредности z различне од

(27) $$\alpha - n\omega + 2k\pi i \quad \text{и} \quad \beta - n\omega + 2k\pi i$$

где је n који било цео позитиван број, а k који било цео (позитиван или негативан) број; за вредности (27) члан u_n постаје бескрајно велики.

Да би се доказала конвергенција реда

(28) $$\upsilon_0 + \upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots$$

приметимо да израз $e^{-n\omega}$, па дакле и израз $e^{z-n\omega}$, бескрајно расте при рашћењу броја n, па да се за велике вредности n изрази

$$e^{\alpha} - e^{z-n\omega} \quad \text{и} \quad e^{\beta} - e^{z-n\omega}$$

понашају као $-e^{z-n\omega}$, тако да се члан υ_n понаша као

$$\frac{e^{z-n\omega}}{e^{2(z-n\omega)}}\, e^{-z+n\omega}.$$

Ред (28) понаша се, дакле, као геометријска прогресија

$$e^{-z}(1 + e^{\omega} + e^{2\omega} + e^{3\omega} + \ldots)$$

која је конвергентна. Према томе ће и ред (28) бити конвергентан за све вредности z различне од

$$(29) \qquad \alpha + n\omega + 2k\pi i \quad \text{и} \quad \beta + n\omega + 2k\pi i$$

за које конвергенција престаје, јер члан υ_n постаје бескрајно велики.

Према томе и ред (22), као збир редова (26) и (28), конвергентан је за све вредности z осим (27) и (29). *Те су вредности* (27) *и* (29) *полови првог реда за функцију* f(z) *коју изражава ред* (22). Да је свака од тих вредности пол функције, јасно је из тога што за сваку од њих по један од чланова u_n и υ_n реда (22) постаје бескрајан, а његова обрнута вредност постаје једнака нули. Кад се $f(z)$ помножи разликом $z - a$, где је a једна, ма која, од вредности (27) и (29), биће сваки члан u_n и υ_n помножен том разликом. А ти су чланови двојаки: једни, чији именилац не постаје једнак нули за $z = a$, и други чији је именилац нула за $z = a$. Они први помножени са $z = a$ постају једнаки нули за $z = a$, а други се јављају у привидно неодређеном облику $\frac{0}{0}$, али се применом L'Hospital-овог правила налази да је та вредност коначна и од нуле различна. А све то доказује да је вредност $z = a$ одиста пол првога реда за $f(z)$, па пошто та функција не може имати других сингуларитета осим вредности (27) и (29), то је она *мероморфна* функција променљиве z.

Пошто се ни u_n ни υ_n не мењају кад се вредности z дода $2\pi i$, то функција $f(z)$ има број $2\pi i$ за периоду. Али се може доказати да она има за периоду и број ω, и то на овај начин:

Пошто υ_n није ништа друго до u_n кад се у њему индексу n промени знак, то се ред (22) може написати у облику

$$(30) \qquad \ldots + u_{-3} + u_{-2} + u_{-1} + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

тј. у облику реда чији су индекси сви цели бројеви од $-\infty$ до $+\infty$. Кад се на место z стави $z + \omega$, општи члан u_k реда (30) постаје

$$\frac{e^{z+(k+1)\omega}}{\left[e^{\alpha} - e^{z+(k+1)\omega}\right]\left[e^{\beta} - e^{z+(k+1)\omega}\right]} = u_{k+1}$$

и то било да је k позитиван, било да је негативан цео број. То значи да замена вредности z вредношћу $z + \omega$ има за последицу само померање чланова реда (30) на десно за један ранг, што ни у колико не мења збир тога реда (приметимо да такво померање чланова само онда не мења збир реда, кад се индекс мења од $-\infty$ до $+\infty$; кад би се он мењао само од 0 до ∞, збир би се морао променити, јер не би постојао члан u_1 који би таквим померањем дошао на место члана u_0). Према свему томе:

Функција f(z) је *мероморфна функција са две несводљиве периоде*

$$\omega_1 = 2\pi i \quad \text{и} \quad \omega_2 = \omega .$$

Да су оне одиста несводљиве, види се из тога што, како је реалан део периоде ω различан од нуле, ни једна од периода ω_1 и ω_2 не може бити мултипл друге.

7. JACOBI-ева ТЕОРЕМА О ПЕРИОДАМА ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА

За периоде ω_1 и ω_2 ма које двопериодичне функције везана је једна аритметичка особина исказана ставом:

Jacobi-ева теорема: Количник периода никад није реалан број.

Јер, кад би тај количник био реалан број, тај би број био рационалан или ирационалан, и онда:

1° Претпоставимо најпре да је тај број рационалан, тј. облика $\frac{p}{q}$, где су p и q два цела броја, за која се увек може сматрати да немају заједничких чинилаца. Из једнакости

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$$

добија се да је

$$\frac{\omega_1}{p} = \frac{\omega_2}{q},$$

па ако се заједничка вредност та два количника означи са λ, добија се да је

$$\omega_1 = p\lambda, \qquad \omega_2 = q\lambda$$

тј. да су ω_1 и ω_2 мултипли једног истог броја λ. Али за број λ може се доказати да је и сам периода функције $f(z)$ која има за периоде ω_1 и ω_2. Јер, према познатом аритметичком ставу о линеарним неодређеним једначинама са две непознате x и y, ма какви били цели бројеви p и q (без заједничких чинилаца), увек постоје цели бројеви x и y такви да је

$$px - qy = \pm 1.$$

Ако је $x = m_1$ и $y = m_2$ један пар таквих бројева, биће

$$pm_1 - qm_2 = \pm 1.$$

па према томе, множећи са λ

$$m_1\omega_1 - m_2\omega_2 = \pm\lambda,$$

одакле је

$$m_1\omega_1 = m_2\omega_2 \pm \lambda.$$

Па пошто је тада

$$f(z) = f(z + m_1\omega_1) = f(z + m_2\omega_2 \pm \lambda) = f(z \pm \lambda),$$

то је λ периода функције. Обе су периоде ω_1 и ω_2, дакле, мултипли једне исте периоде λ, па према томе то нису несводљиве периоде.

2° Претпоставимо да је поменути број *ирационалан*. Зна се да за сваки ирационалан број μ постоји таквих рационалних бројева $\frac{p}{q}$ који се од μ разликују за колико се хоће мало, што се може изразити једнакошћу

$$\mu = \frac{p + \varepsilon}{q}$$

где је ε колико се хоће мали број. Из једначине

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p + \varepsilon}{q}$$

добија се тада

$$q\omega_1 = p\omega_2 + \varepsilon\omega_2$$

према чему је

$$f(z) = f(z + q\omega_1) = f(z + p\omega_2 + \varepsilon\omega_2) = f(z + \varepsilon\omega_2)$$

што би значило да функција има за периоду и број $\varepsilon\omega_2$. Па како та периода може бити колико се хоће мала, таква би се функција морала свести на константу.

Као непосредна последица Jacobi-еве теореме изводи се закључак:

Несводљиве периоде ω_1 *и* ω_2 *не могу бити ни обе реалне, ни обе чисто имагинарне*, јер би у оба случаја њихов количник био реалан број.

Тако исто из ње следује и закључак:

Тачке ω_1 *и* ω_2 *никад се не налазе на једној правој што пролази кроз координатни почетак*, јер кад би тако било, ω_1 *и* ω_2 би имали исти аргуменат θ, па ако им се модули означе са ρ_1 и ρ_2, било би

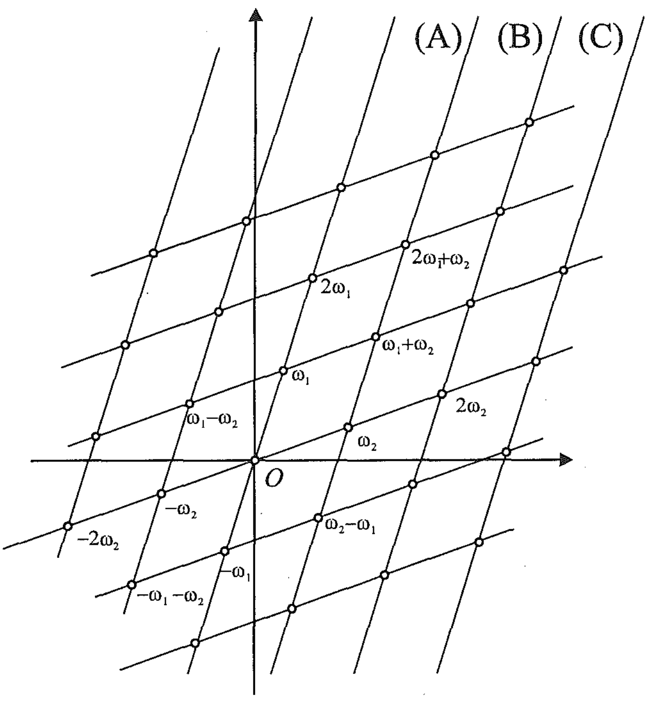
$$\omega_1 = \rho_1 e^{\theta i}, \quad \omega_2 = \rho_2 e^{\theta i}$$

па би, дакле количник $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ био реалан број $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.

8. ГЕОМЕТРИЈСКО ЗНАЧЕЊЕ ДВОПЕРИОДИЧНОСТИ

Напред је показано да постојање једне периоде ω_1, за дату функцију $f(z)$ повлачи собом чињеницу да је довољно познавати функцију за тачке z у једноме појасу периодичности, па да се она познаје за тачке z у целој равни те промењљиве.

Претпоставимо сад да функција, поред периоде ω_1, има још једну периоду ω_2, несводљиву са ω_1. И та периода повлачи собом своје појасеве периодичности, који ће се укрштати са онима које повлачи периода ω_1. Пошто су правци граничних правих тих појасева произвољни, они се могу изабрати тако, да појасеви што одговарају првој периоди буду паралелни потегу друге периоде, и обратно: да појасеви што одговарају другој периоди буду паралелни потегу прве периоде (сл. 10). Та ће два система појасева образовати у равни промењљиве z једну *мрежу џаралелограма* који су, по самоме начину свога постанка карактерисани тиме што:



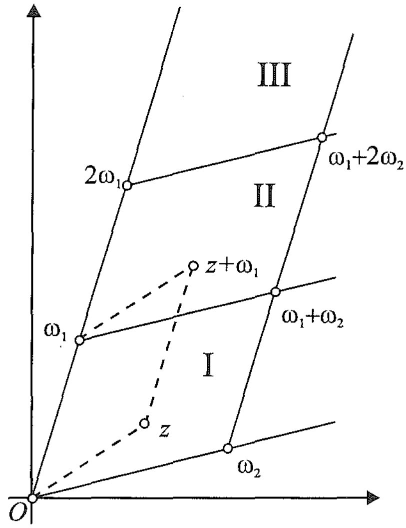
Сл. 10.

1° паралелограм, прецртан на сл. 10 има за темена тачке

$$O, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_1+\omega_2; \tag{31}$$

2° сви остали паралеограми имају за темена хомологе тачке тачкама (31);

3° стране свих паралелограма паралелне су потезима периода ω_1 и ω_2.



Сл. 11.

Геометријским сабирањем лако се уверити да ће темена паралелограма I (сл. 11) имати за своје хомологе тачке, а за периоду ω_1, темена паралелограма II, III, ... Затим, да ће произвољна тачка z у паралелограму I имати у свакоме од тих других паралелограма по једну своју хомологу тачку, у којој функција добија ону исту вредност коју има у тачки z. Према томе функција, одређена у паралелограму I, понавља се у свакоме од паралелограма II, III, ..., што значи да преносећи паралелограм I дуж појаса периодичности (A), (сл. 10) тако да се I поклапа редом са II, III, ..., учиниће се да функција буде позната у целоме појасу (A), а према томе и у свима појасима периодичности (B), (C), .., па дакле у целој равни.

Сви су паралелограми мреже на тај начин еквивалентни у погледу вредности функције.

До истог би се резултата дошло и кад би се, на место периоде ω_1, узела периода ω_2; паралелограми и њихова улога остали би неизмењени. Додаће се још и то, да се међусобни положаји хомологих тачака не мењају обртањем координатних осовина за произвољан угао, јер правци осовина не играји никакву улогу при геометријској конструкцији тих тачака. Обртање има за ефекат само промену нагиба мреже паралелограма према осовинама, а не утиче ни на облик, ни на величину паралелограма, па дакле ни на међусобне положаје хомологих тачака.

Паралелограми мреже називају се *паралелограми периода*; паралелограм I је *основни паралелограм периода*. А из овога што је казано следује да се двопериодичност функције састоји у томе, *што се функција, одређена у једноме*, нпр. *у основном паралелограму периода, понавља у свакоме од осталих паралелограма.*

Пошто су за дату тачку z њене хомологе

$$z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

тј. оне што се из z добијају додавањем или одузимањем мултипла периода, то следује да:

1° свако теме основног паралелограма има за хомологу одговарајуће теме свакога од осталих паралелограма;

2° свака тачка z на једној страни основног паралелограма има за своју хомологу по једну тачку на одговарајућој страни сваког паралелограма, и то ону са којом се z поклапа кад се поклопе паралелограми;

3° свака тачка z у унутрашњости основног паралелограма има по једну хомологу тачку у унутрашњости свакога од осталих паралелограма, и то ону са којом се z поклапа кад се поклопе паралелограми. У свакој од хомологих тачака функција има исту вредност коју она има у тачки z.

Очевидно је да би, према самој конструкцији паралелограма периода, њихово постојање било немогућно кад би тачке $z = \omega_1$ и $z = \omega_2$ лежале на једној правој што пролази кроз тачку $z = 0$. Али према Jacobi-евој теореми о периодама тај случај не може никад наступити.

9. НЕМОГУЋНОСТ УНИФОРМНИХ ФУНКЦИЈА СА ВИШЕ ОД ДВЕ ПЕРИОДЕ

Из посматрања појаса периодичности може се геометријски схватити да *не постоји никаква униформна функција са више од две периоде*. Јер, као што је показано, постојање сваке периоде повлачи собом ограничење дела равни у коме функција добија све своје вредности. Једна основна периода ω_1 ограничава тај део на један појас, тј. на део равни бескрајно мањи од ње. Друга основна периода ω_2 ограничава тај појас на један паралелограм, тј. на један део појаса бескрајно мањи од њега. Трећа основна периода смањила би паралелограм на један његов део бескрајно мањи од њега самог, тако да би функција, која би имала три периоде, а униформна је, па се може представити у једној равни, добила све могућне своје вредности у бескрајно малом делу паралелограма и морала би се свести на константу.

Међутим, као што је напред показано, посматрајући инверзију $u(z)$ интеграла

$$z = \int_a^u f(u)\,du,$$

функција $u(z)$ може стварно имати колико се хоће основних периода. Али, према горњем ставу, то се може десити само кад је та функција *мултиформна*, а никад кад је *униформна*. Уосталом, за мултиформне функције не мора постојати горе наведени разлог за немогућност већег броја периода од две, јер се такве функције, са својим разним детерминацијама, не могу целокупне представити у једној истој равни.

10. НЕКОЛИКО ОПШТИХ ОСОБИНА МЕРОМОРФНИХ ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА

Поред особина, везаних за поједине двопериодичне функције, има их и таквих које важе за све мероморфне функције са двема периодама. Овде ће се навести неколико таквих општих особина, које су основа општој теорији функција те врсте, у облику ставова што следују.

С т а в 1 . : *Интеграл ма које мероморфне двопериодичне функције* f(z), *узет дуж ма кога паралелограма периода, једнак је нули.*

Јер такав интеграл

$$J = \int f(z)\,dz \tag{32}$$

једнак је збиру интеграла узетих дуж страна паралелограма. Међутим у свакој тачки z једне стране овога функција $f(z)$ има исту вредност као и у њој хомологој тачки што се налази на супротној страни паралелограма, али у тим двема тачкама dz има супротне знаке, јер су правци интеграције супротног смисла. Интеграл J дуж једне стране паралелограма биће, дакле, једнак интегралу узетом дуж супротне стране, али супротно означеном. Збир таква два интеграла једнак је нули, па је дакле и $J = 0$.

С т а в 2 . : *Збир остатака ма које мероморфне двопериодичне функције, за њене полове што се налазе у ма коме паралелограму периода, једнак је нули.*

Јер, ако се ти остаци означе са $B_1, B_2, B_3, \ldots$, према Cauchy-евој теореми интеграл (32), узет дуж паралелограма, има за вредност

$$J = 2\pi i \cdot \sum B_k;$$

па пошто, према ставу 1, мора бити $J = 0$, то је

$$\sum B_k = 0.$$

С т а в 3 . : *Мероморфна двопериодична функција не може имати у паралелограму периода само један пол који би био првога реда.*

Јер, према ставу 2, збир остатака за полове садржане у паралелограму периода једнак је нули, а он то не би могао бити кад би паралелограм садржао само један пол који би био првога реда, јер би тада тај једини остатак, па дакле и збир ΣB_k, мора бити различан од нуле. Међутим, за више простих полова, као и за пол вишега реда, то може бити, јер остатак за такав пол, као и збир остатака, може бити једнак нули.

Став 4.: *За сваку мероморфну двопериодичну функцију збир редова нула, садржаних у паралелограму периода, једнак је збиру редова полова садржаних у томе паралелограму.*

Јер, као што се зна из опште теорије аналитичких функција, свака се таква функција може, за вредности z у близини једне своје нуле $z = \alpha$ која је m-тога реда, написати у облику:

$$f(z) = (z-\alpha)^m \varphi(z), \tag{33}$$

а у близини једнога свога пола $z = \beta$ који је n-тога реда у облику

$$f(z) = (z-\beta)^{-n} \psi(z), \tag{34}$$

где су $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ две функције које не постају ни једнаке нули, ни бескрајне за $z = \alpha$, односно за $z = \beta$.

Нека је $f(z)$ каква мероморфна двопериодична функција, па се логаритмисањем и диференцијаљењем једначина (33) и (34) добија да је у близини тачке α

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-\alpha} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \tag{35}$$

а у близини тачке β

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z-\beta} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}. \tag{36}$$

Из (35) и (36) се види: 1° да је свака нула α пол првога реда за функцију $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ и да је остатак за тај пол једнак броју m; 2° да је сваки пол β пол првога реда за исти количник и да је остатак за тај пол једнак $-n$. Па пошто је количник $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ и сам мероморфна двопериодична функција, и у паралелограму периода не може имати других сингуларитета осим таквих вредности као што су α и β, збир остатака те функције за полове садржане у њеном паралелограму периода (истом као паралелограм функције f) мора према ставу 2, бити једнак нули. Међутим тај збир остатака је

$$\sum m - \sum n$$

према чему мора бити

$$\sum m = \sum n,$$

чиме је став доказан.

С т а в 5 . : *Свака мероморфна двопериодична функција* f(z) *има у своме паралелограму периода бар један пол.*

Јер ако се у паралелограму уочи једна произвољна стална тачка $z = a$, функција

$$\varphi(z) = f(z) - f(a)$$

је такође мероморфна и двопериодична, са истим паралелограмом периода као $f(z)$. Према ставу 4 за ту функцију мора бити

$$\sum m = \sum n,$$

а пошто она има бар једну нулу, а то је вредност $z = a$, то број $\sum m$ не може бити једнак нули, па дакле ни број $\sum n$. Па како сваки од бројева n представља ред по једнога пола функције $f(z)$ (те две функције φ и f имају исте полове), то полови одиста морају постојати.

Из овога става излази као обична последица:

С т а в 6 . : *Не постоји никаква цела двопериодична функција.*

Став је познат под називом *Liouville-ове теореме.* Функција мора у паралелограму периода имати бар један пол, и према томе не може бити цела функција

У томе је ставу исказана једна од разлика између функција са једном, и функција са две периоде. Међу првима се налазе нпр. целе функције e^z и $\sin z$, док се међу другима не налази ни једна цела функција.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК

ОСНОВНЕ ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

11. ФУНКЦИЈЕ sn, cn, dn И ЊИХОВЕ НЕПОСРЕДНЕ МЕЂУСОБНЕ ВЕЗЕ

Напред проучавана функција $u(z)$, дефинисана као инверзија интеграла

$$z=\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{37}$$

полазна је тачка за теорију елиптичких функција. Она се означује ознаком

$$u(z)=\operatorname{sn} z.$$

Поред ње су уведене још и ове две њене комбинације: функција

$$\operatorname{cn}(z)=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z} \tag{38}$$

и функција

$$\operatorname{dn}(z)=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 z}\,. \tag{39}$$

Увођењем тих комбинација учињено је по аналогији са тригонометријским функцијама, које се могу сматрати као специјални случајеви елиптичких функција. А то је учињено нарочито стога, што се те две комбинације функције sn z често појављују у обрасцима за елиптичке функције, па је било од користи, као и при увођењу косинуса, као комбинације синуса, проучити им једном за свагда аналитичке особине, па их са тако проученим особинама увести у рачуне као рачунске елементе.

Увођење функције cn z имало је још и ту добру страну што, кад је она уведена, обрасци теорије елиптичких функција постали су слични обрасцима из теорије тригонометријских функција, на које се оне своде у специјалном случају кад је $k \neq 0$.

Као што ће се видети из онога што ће доцније бити показано, целокупна теорија елиптичких функција може се свести на проучавање трију функција

$$\operatorname{sn} z, \quad \operatorname{cn} z, \quad \operatorname{dn} z$$

и њихових алгебарских комбинација. Оне се стога називају *основне елиптичке функције.*

Прва непосредна веза између те три функције изражена је обрасцима што служе за саму њихову дефиницију:

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \tag{40}$$

$$\operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = 1 \tag{41}$$

од којих је први исти као и онај што изражава везу између синуса и косинуса.

Друга је веза изражена у обрасцима који дају изводе тих трију функција. Образац (37) доводи до једначине

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{1-u^2} \cdot \sqrt{1-k^2u^2} \tag{42}$$

која показује да је

$$\operatorname{sn}' z = \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z. \tag{43}$$

Из обрасца (40) добија се диференцијаљењем

$$\operatorname{sn} z \cdot \operatorname{sn}' z + \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{cn}' z = 0,$$

одакле је

$$\operatorname{cn}' z = -\frac{\operatorname{sn} z \cdot \operatorname{sn}' z}{\operatorname{cn} z} = -\operatorname{sn} z \cdot \operatorname{dn} z. \tag{44}$$

Напослетку, из (41) добија се диференцијаљењем

$$\operatorname{dn} z \cdot \operatorname{dn}' z + k^2 \operatorname{sn} z \cdot \operatorname{sn}' z = 0,$$

одакле је

$$\operatorname{dn}' z = -k^2 \operatorname{sn} z \cdot \operatorname{cn} z. \tag{45}$$

Обрасци (43), (44), (45) уопштавају елементарне обрасце за изводе функција $\sin z$ и $\cos z$, на које се своде за $k = 0$, а то су обрасци

$$\sin' z = \cos z,$$

$$\cos' z = -\sin z .$$

Друге везе између sn z, cn z, dn z, које такође уопштавају сличне везе између основних тригонометријских функција, биће показане у даљим излагањима.

12. НЕКОЛИКЕ ОСОБИНЕ ФУНКЦИЈЕ sn z

За проучавање особина функције sn z полазне су тачке:

1° израз те функције у облику инверзије интеграла (37)

2° општи интеграл диференцијалне једначине првога реда

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(1-y^2)(1-k^2y^2)}{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \tag{46}$$

која носи назив Euler-ове диференцијалне једначине и која се може интегралити на два начина: квадратурама и алгебарским операцијама.

Написана у облику

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \tag{47}$$

једначина (46) има за општи интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} + C . \tag{48}$$

Са друге стране, Euler је нашао да се њен општи интеграл може изразити и у алгебарском облику

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} - y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = C' . \tag{49}$$

Случај је сличан ономе са простијом диференцијалном једначином

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1-y^2}{1-x^2}$$

написаном у облику

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} ,$$

чији се општи интеграл може написати у два разна облика

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + C$$

тј.

$$\arcsin x = \arcsin y + C$$

и

$$x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = C',$$

о чему је лако уверити се диференцијаљењем једне и друге од двеју последњих једначина.

Помоћу једначине (49) доказује се *да је* sn z *униформна функција променљиве* z. Јер, кад не би била таква, она би за дату вредност z (изузимајући поједине, специјалне вредности z) имала више од једне вредности. Нека су x и y две такве вредности, што одговарају једноме истоме z и мењају се са овом. Према једначини (37), коју задовољава функција sn z, тада би морало бити

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \tag{50}$$

из чега се диференцијаљењем види да x и y морају задовољавати једначину (47), а према томе и једначину (49), кад се у овој буде подесно изабрала константа C'. А ова је одређена тиме што је једначина (50) задовољена за $x = 0$, $y = 0$ па дакле тако мора бити и са једначином (49), што даје $C' = 0$. А тада је, према истој једначини (49)

$$x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} - y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = 0$$

из чега се добија да је

$$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}. \tag{51}$$

Поређењем једначина (47) и (51) добија се да је

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

према чему је интеграцијом

$$y = ax\,, \tag{52}$$

где је a интеграциона константа. Сменом те вредности y у једначини (51) налази се да је

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{a}{\sqrt{(1-a^2x^2)(1-k^2a^2y^2)}},$$

па, пошто a не зависи од x, то може бити само за $a = 1$. Из (52) тада се закључује да је $y = x$, тј. да се претпостављене две вредности функције sn z међу собом поклапају, и према томе функција је униформна. Она дакле нема критичких тачака.

А једначина (42) показује да функција $u = \operatorname{sn} z$, као интеграл те једначине, нема ни есенцијалних тачака. То следује из познатих ставова из аналитичке теорије диференцијалних једначина првога реда, а понаособ из става према коме, кад је у једначини

$$\frac{du}{dz} = \varphi(z, u)$$

функција φ за један дати пар вредности $z = \alpha$, $u = \beta$ холоморфна, тачка (α, β) је обична тачка за интеграл u који за $z = \alpha$ добија вредност $u = \beta$.

Пошто sn z, као двопериодична функција, не може, према ставу 6, бити цела функција, а нема ни критичких, ни есенцијалних тачака, то она мора имати полова, па је према томе то *мероморфна функција* промењљиве z.

Из једначине (42), коју задовољава $u = \operatorname{sn} z$, види се *да је* sn z *непарна функција* промењљиве z. Јер је та једначина задовољена кад се z смени са $-z$, а u са $-u$.

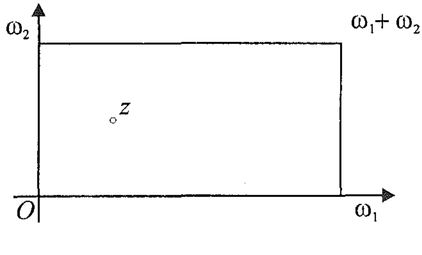
Као што је напред нађено, *функција* sn z *има две основне, несводљиве периоде*.

$$\omega_1 = 4K \quad \text{и} \quad \omega_2 = 2iK', \tag{53}$$

где су K и K' реални одређени интеграли:

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{54}$$

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}. \tag{55}$$

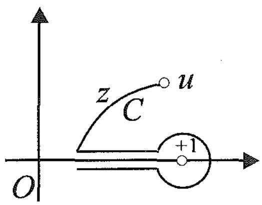


Сл. 12.

Сталан број k, који лежи између 0 и 1, назван је *модуо* функције sn$z$, и као што се види, *периоде* ω_1 *и* ω_2 *су одређене функције тога модула*.

Основни паралелограм функције sn z је правоугаоник чија су темена тачке O, ω_1, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$ (сл. 12).

Пошто је $\operatorname{sn} z$ униформна функција, то она за једну дату вредност z има само једну, и то тачно одређену вредност $u = \beta$. Али из једначине (37) налази се *да она ту исту вредност* β *добија за две вредности* z *које нису једна другој хомологе.*



Сл. 13.

Јер, кад се интеграција, означена у обрасцу (37), изврши по путањи C' састављеној из замке што, полазећи из тачке O, опкољава тачку $u = +1$ (сл. 13), и директне путање C од O до u, интеграл кад се стигне у тачку O има за вредност $2K$, али се у ту тачку стиже са промењеном детерминацијом функције под интегралним знаком, тако да ће се у тачку u стићи са вредношћу $2K - z$ истога интеграла. Целокупна путања $C' + C$ даје, дакле, за интеграл вредност $2K - z$, док путања C даје вредност z. Па пошто обе путање доводе до исте тачке u, то *функција* $\mathrm{u} = \operatorname{sn} \mathrm{z}$ *има ту особину да*

$$\operatorname{sn}(2K - z) = \operatorname{sn} z, \tag{56}$$

а то је особина слична оној што важи за $\sin z$, да је

$$\sin(\pi - z) = \sin z.$$

Кад дакле функција $\operatorname{sn} z$ *добија једну вредност* β *за* $z = \alpha$ *она ту исту вредност добија и за* $z' = 2K - \alpha$.

Тачке z и z' уопште (тј. кад је тачка z произвољна) нису једна другој хомологе, јер се не своде једна на другу додавањем или одузимањем мултипла периода. Оне су различне међу собом, па се, или обе налазе у основном паралелограму периода у коме је z, или тачка z' има своју хомологу у томе пералелограму, пошто се додавањем или одузимањем периода z' може довести у који се хоће паралелограм.

Према томе, кад функција $\operatorname{sn} z$ добије једну дату вредност β za какву вредност $z = \alpha$, она ту исту вредност β добија и за бескрајно много вредности z, а то су:

1° све хомологе вредности α, тј. вредности

$$z = \alpha + 4mK + 2niK',$$

где су m и n ма какви, позитивни или негативни, цели бројеви;

2° вредност

$$z' = 2K - \alpha;$$

3° све хомологе вредности z', тј. вредности

$$z'' = z' + 4mK + 2niK'.$$

Кад је тачка α у основном паралелограму периода, онда, ако то није случај и са одговарајућом тачком z', једна ће се њена хомолога z'' сигурно налазити у томе паралелограму. Те се две тачке α и z', односно α и z'', могу и међу собом поклапати, као што је случај нпр. кад је $\alpha = K$.

13. НУЛЕ И ПОЛОВИ ФУНКЦИЈЕ sn z

Једначина (37) задовољена је за $z = 0$, $u = 0$, што значи да функција $u = \operatorname{sn} z$ постаје једнака нули за $z = 0$, а она ће то бити и за све хомологе вредности, тј. за

$$z = 4mK + 2niK'.$$

Али, према обрасцу (56) она ће бити једнака нули и за вредност $z = 2K$. *Функција* sn *z има, дакле, у основном паралелограму периода две нуле*

$$z = 0 \text{ и } z' = 2K.$$

Кад се тим двема нулама придаду мултипли $4mK$ реалне периоде функције, добија се *бескрајни низ њених позитивних и негативних реалних нула, које се све могу изразити општим обрасцем*

$$z = 2mK.$$

А кад се овима придаду мултипли $2niK'$ имагинарне периоде, добија се *бескрајни низ имагинарних нула које се све изражавају општим обрасцем*

$$z' = 2mK + 2niK'.$$

Све су те нуле *просте*, јер кад за једну вредност z буде $u = 0$, извод

$$u'(z) = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} \tag{57}$$

добија од нуле различну вредност ± 1. Па пошто су нуле, просте, то *функција мења знак при проласку кроз сваку своју реалну нулу.*

По својим реалним нулама sn z показује сличност са sin z: и ова функција има бескрајно много нула, које су све мултипли полу-периоде π, и све су просте. Али, док sin z има само реалне нуле, sn z их има и бескрајно много имагинарних.

Потражимо полове функције sn z. Кад се у обрасцу (37) стави на десној страни да је $u = \infty$, налази се да ће један пол α функције бити

$$\alpha = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

што се може написати у облику

$$\alpha = \int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty}.$$

Први интеграл има за вредност K, други $-iK'$, а трећи се може израчунати кад се у њему изврши смена

$$u = \frac{1}{k\upsilon}, \qquad du = -\frac{d\upsilon}{k\upsilon^2} \tag{58}$$

која тај интеграл претвара у

$$-\int_0^1 \frac{d\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}} = -K,$$

па се налази да је

$$\alpha = K - iK' - K = -iK' = -\frac{\omega_2}{2}.$$

А пошто је функција u непарна, то је и вредност

$$\alpha' = iK' = \frac{\omega_2}{2}$$

један њен пол. Са друге стране, према обрасцу (56), налази се да ће и $2K - iK'$ бити један пол функције. Па пошто ће она остати пол и кад јој се дода периода $\omega_2 = 2iK'$, то ће и $\alpha'' = 2K + iK'$ бити такође пол. Па пошто се обе вредности α' и α'' налазе у основном паралелограму периода, то се закључује да:

Функција sn z *има у основном паралелограму периода два пола, оба имагинарна, а то су вредности*

$$iK' = \frac{\omega_2}{2} \quad \text{и} \quad 2K + iK' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Додавањем мултипла периода

$$4mK + 2niK'$$

добија се бескрајни низ полова функције, који су сви имагинарни. *Функција* sn z *остаје, дакле, коначна за све реалне вредности* z.

Сви су полови функције sn z *првога реда*, јер кад се у једначини (57) изврши смена (58), она постаје

$$\upsilon' = -\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)};$$

сваки пол функције u је нула функције υ, а за једну такву нулу добија се за υ' вредност ± 1 различна од нуле.

Потражимо остатке функције sn z за један ма који њен пол $z = \alpha$. Остатак B је гранична вредност којој тежи израз:

$$(z-\alpha)u(z) = \frac{z-\alpha}{\frac{1}{u}} \quad \text{за} \quad z = \alpha.$$

За $z = \alpha$ та се вредност јавља у привидно неодређеном облику $\frac{0}{0}$, али се применом L'Hospital-овог правила налази да је она

$$B = \frac{1}{\frac{u'}{u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2}-1\right)\left(\frac{1}{u^2}-k^2\right)}} = \pm\frac{1}{k}.$$

Остатак функције sn z *за ма који њен пол има, дакле, за вредности или* $-\frac{1}{k}$ *или* $+\frac{1}{k}$.

14. ВРЕДНОСТИ z ЗА КОЈЕ sn z ДОБИЈА ВРЕДНОСТИ ± 1 И $\pm \frac{1}{k}$

Према обрасцу (37) *z има реалне вредности само док се u мења од* -1 *до* $+1$. За остале вредности u или је U негативно, или, кад је позитивно, интеграл z је ипак састављен из збира једнога реалног и једнога чисто имагинарног интеграла:

Потражимо вредности z за које ће u достизати своје крајње реалне вредности ± 1.

1° Вредност z за коју је $u = -1$ дата је обрасцем

$$z = \int_0^{-1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = -K = -\frac{\omega_1}{4}.$$

Та тачка није садржана у основном паралелограму периода (p), али је у овоме садржана њена хомолога тачка $3K$, за коју u такође добија вредност -1. Ту исту вредност -1 добија u и за другу хомологу тачку $3K + 2iK'$, такође садржану у (p). Образац (56) не доводи ни до

Кад се у интегралу на десној страни изврши смена (58), он постаје

$$-\int_0^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}},$$

па пошто први интеграл на левој страни има за вредност z, а други вредност $-iK'$, то једначина (59) постаје

$$z + iK' = -\int_0^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}}$$

из чега се инверзијом види да је

$$\upsilon = \operatorname{sn}(-z - iK') = -\operatorname{sn}(z + iK') = -\operatorname{sn}\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right);$$

па пошто је

$$u = \operatorname{sn} z, \qquad \upsilon = \frac{1}{ku},$$

то се добија образац

$$\operatorname{sn}\left(z + u\,\frac{\omega_2}{2}\right) = -\frac{1}{k\operatorname{sn} z}$$

који показује да:

Кад се у функцији sn z *вредности* z *дода имагинарна полупериода, вредност функције постаје* $-\dfrac{1}{k\operatorname{sn} z}$.

16. УНИФОРМНОСТ ФУНКЦИЈА cn z И dn z

Посматрајмо функцију

(60) $$\upsilon = \Phi(u),$$

где је Φ каква алгебарска функција промењиве u, инверзије интеграла

(61) $$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Пошто, као што је показано, u нема критичких тачака, неће их имати ни $\Phi(u)$ кад год је Φ рационална функција. Али их *може* имати кад је Φ каква алгебарска ирационална функција, премда то *не мора* увек бити: има случајева кад је υ *униформна* функција променљиве z, поред свега тога што, сматрана као функција променљиве u, иста функција *има критичких тачака.*

Такав се случај јавља нпр. кад је

$$\upsilon = \sqrt{a^2 - u^2}, \tag{62}$$

где је a константа која испуњава извесне погодбе. Сматрана као функција променљиве u, функција υ има две критичке тачке $u = a$ и $u = -a$. Нека је λ један корен једначине

$$u(z)^2 - a^2 = 0, \tag{63}$$

па претпоставимо да је константа a таква, да је за њој одговарајући корен λ једначине (63) израз $u(\lambda + x)$ *парна функција променљиве* x, *која има* x = 0 *као своју обичну тачку*. Тада се та функција, за вредности x у близини нуле, може развити у ред који ће садржати само парне степене променљиве x

$$u(\lambda + x) = A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \dots$$

што за $x = 0$ даје

$$A_0 = u(\lambda), \quad A_0^2 = u(\lambda)^2 = a^2,$$

пошто је λ корен једначине (63). Према томе је

$$\left[u(\lambda + x)\right]^2 - a^2 = x^2(B_2 + B_4 x^2 + B_6 x^4 + \dots). \tag{64}$$

Ако се тада за x узме вредност $x = z - \lambda$, једначина (64) постаје

$$u(z)^2 - a^2 = (z-\lambda)^2\left[B_2 + B_4(z-\lambda)^2 + B_6(z-\lambda)^4 + \dots\right],$$

а према томе је

$$\upsilon = \sqrt{a^2 - u^2} = (z - \lambda)\psi(z), \tag{65}$$

где је $\psi(z)$ функција коначна и од нуле различна за $z = \lambda$.

Једначина (65) показује да вредност $z = \lambda$ није критичка тачка функције υ, већ једна њена обична нула. А као што се види, такав случај увек наступа кад су испуњени ови услови:

1° корен $z = \lambda$ једначине (63) је обична тачка за функцију $u(z)$;

2° израз $u(\lambda + x)$ је парна функција променљиве x.

А очевидно је да би то све важило и онда, кад би један или више првих коефицијената $B_2, B_4, B_6, \dots$ на десној страни једначине (64) били једнаки нули; и тада би се опет имао као заједнички чинилац паран степен променљиве x, па би се имао исти закључак.

Применимо сад то на функцију

$$\upsilon = \operatorname{cn} z = \sqrt{1-u^2}.$$

Једначина (63) је

$$1-\operatorname{sn}^2 z = 0$$

и она има у основном паралелограму периода за корене вредности $\lambda = K$ и $\lambda = K + 2iK'$ од којих се друга може сматрати као хомолога вредности K, па је, дакле, довољно испитати само корен $\lambda = K$.

Сменом $z = K + x$ у једначини

$$\operatorname{sn}(2K - z) = \operatorname{sn} z$$

добија се да је

$$\operatorname{sn}(K - x) = \operatorname{sn}(K + x),$$

што показује да, кад се узме за λ вредност K, израз $\operatorname{sn}(\lambda + x)$ је парна функција променљиве x, па како је $z = K$ обична тачка за $\operatorname{sn} z$, то су оба горња услова 1° и 2° испуњена, и према томе за функцију $\upsilon = \operatorname{cn} z$ вредност $z = K$ није критичка тачка. Та функција има, дакле, као сингуларитет само полове, тако да је и она, као и $\operatorname{sn} z$, *мероморфна* функција променљиве z.

Израз

$$\pm\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z}$$

сматран као функција променљиве $u = \operatorname{sn} z$ је неоспорно мултиформна функција те променљиве, али, сматран као функција променљиве z, он је униформна функција ове променљиве. Он, са својим двојним знаком $\pm$ не представља две детерминације једне исте мултиформне функције, већ две једну од друге различне функције $\operatorname{cn} z$ и $-\operatorname{cn} z$, као што је то случај са изразом $\pm z^3$, и као што је такође случај са изразом $\pm\sqrt{1-\sin^2 z}$. Ову последњу функцију обухвата горњи закључак о непостојању критичких тачака, и њој за λ одговара вредност $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$.

Применимо сад горње опште закључке на функцију

$$\upsilon = \operatorname{dn} z = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 z} = \sqrt{1-k^2u^2}$$

написану у облику

$$\upsilon = k\sqrt{\frac{1}{k^2} - u^2}.$$

Једначина (63) је

$$\mathrm{sn}^2 z - \frac{1}{k^2} = 0$$

и има у основном паралелограму периода за корене вредности $K + iK'$ и $3K + iK'$. Пошто је $2iK'$ периода функције $\mathrm{sn}\, z$, биће

$$\mathrm{sn}\,(2K - z) = \mathrm{sn}\,(2K + 2iK' - z) = \mathrm{sn}\, z,$$

тако да кад се за λ узме $K + iK'$, биће

$$\mathrm{sn}\,(2\lambda - z) = \mathrm{sn}\, z,$$

па се сменом $z = \lambda + x$ добија да је

$$\mathrm{sn}\,(\lambda + x) = \mathrm{sn}\,(\lambda - x),$$

што показује да је израз $\mathrm{sn}\,(\lambda + x)$ парна функција промењиве x.

Тако исто, пошто су $4K$ и $2iK'$ периоде функције $\mathrm{sn}\, z$, то ако се за корен λ узме $3K + iK'$ биће

$$\mathrm{sn}\,(6K + 2iK' - z) = \mathrm{sn}\,(2\lambda - z) = \mathrm{sn}\, z,$$

тако да је опет израз $\mathrm{sn}\,(\lambda + x)$ парна функција промењиве x.

То показује да су услови 1° и 2° испуњени и да корени λ нису за функцију υ критичке тачке. И функција $\mathrm{dn}\, z$ има, дакле, као сингуларитете само полове, тако да је и она *мероморфна* функција промењиве z.

Израз

$$\pm\sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 z}$$

не представља дакле, као ни у случају функције $\mathrm{cn}\, z$, две детерминације једне исте функције, већ две различне функције $-\mathrm{dn}\, z$ и $+\mathrm{dn}\, z$.

17. ПЕРИОДЕ ФУНКЦИЈА cn z И dn z

Посматрајмо опет функцију

$$\upsilon = \Phi(u)$$

где је Φ дата алгебарска функција промењиве u, инверзије интеграла (61).

Могло би на први поглед изгледати да, пошто u има за основне периоде вредности

$$\omega_1 = 4K \quad \text{и} \quad \omega_2 = 2iK',$$

те ће исте вредности имати за периоде и функција υ. И то ће одиста тако бити кад год је Φ рационална функција променљиве u. Али то не мора бити кад је Φ ирационална алгебарска функција са више детерминација, па ма она и била униформна функција променљиве z.

Према напред изложеном општем поступку за одређивање периода функција што зависе од једне променљиве z, види се да основне периоде функције υ зависе:

1° од вредности интеграла (61) узетог дуж контура у равни променљиве u описаних око критичких тачака функције

$$\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)};$$

2° од промена детерминација тога израза по обиласку променљиве u око тих критичких тачака;

3° од промена детерминација функције $\Phi(u)$ при тим обиласцима.

Посматрајмо најпре функцију

$$\upsilon = \sqrt{1-u^2} = \operatorname{cn} z,$$

где је u инверзија интеграла (61). Као што је напред показано, кад се интеграција изврши дуж путање означене на сл. 13, пошавши из O са детерминацијом (+) квадратног корена, стиже се поново у O са вредношћу $2K$ интеграла, а са детерминацијом (–) квадратног корена; у тачку u се, дакле, стиже са вредношћу $2K - z$ интеграла.

Ако се сад функција υ посматра, не као функција променљиве z, већ као функција променљиве u, она има $u = 1$ као критичку тачку и при обиласку око те тачке прелази од детерминације $+\sqrt{1-u^2}$ на детерминацију $-\sqrt{1-u^2}$. Ако се, дакле, при одредби интеграла (61) иде директном путањом C од тачке O до u, функција υ ће имати за вредност

$$\upsilon_0 = +\sqrt{1-u^2} = +\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z};$$

а ако се иде најпре контуром сл. 13, па затим директним путем до u, функција υ ће имати за вредност

$$\upsilon_1 = -\sqrt{1-\operatorname{sn}^2(2K-z)}.$$

Па пошто је

$$\upsilon_0 = \operatorname{cn} z, \qquad \upsilon_1 = -\operatorname{cn}(2K-z),$$

а функција $\upsilon = \operatorname{cn} z$ је униформна, па дакле обе путање морају довести до једна исте вредности υ, то је $\upsilon_1 = \upsilon_0$ тј.

$$\operatorname{cn}(2K-z) = -\operatorname{cn} z.$$

Кад се у томе обрасцу изврши смена

$$z = 2K + x,$$

он постаје

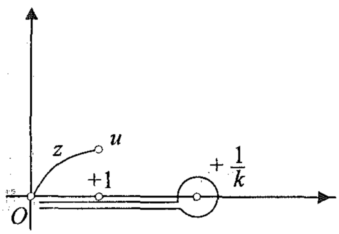
$$\operatorname{cn} x = -\operatorname{cn}(2K + x),$$

па кад се та смена још једном понови, тј. смени се x са $2K + x$, добија се да је

$$\operatorname{cn}(x + 4K) = \operatorname{cn} x,$$

из чега се види да $\operatorname{cn} x$ има за периоду $4K$.

Посматрајмо сад интеграл (61) узет дуж контуре означене на сл. 14. Напред је показано да, кад се интеграција изврши дуж такве контуре, пошавши из O са детерминацијом (+) квадратног корена, стиже се поново у O са вредношћу $2K - 2iK'$ интеграла, а са детерминацијом (–) квадратног корена под интегралним знаком; у тачку u се, дакле, стиже са вредношћу $2K - 2iK' - z$ интеграла.



Сл. 14.

Са друге стране, ако се υ сматра као функција променљиве u, она нема тачку $u = \frac{1}{k}$ као критичку тачку (јер су јој критичке тачке само $u = \pm 1$), па, дакле, по обиласку променљиве u око тачке $u = \frac{1}{k}$ функција υ не мења детерминацију. Ако се, дакле, при одредби интеграла (61), иде директном путањом C од тачке O до u, функција υ ће имати за вредност

$$\upsilon_0 = +\sqrt{1 - u^2} = +\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 z} = \operatorname{cn} z;$$

а ако се иде најпре контуром сл. 14, па затим директном путањом до u, стиже се у u са вредношћу

$$\upsilon_1 = +\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(2K - 2iK' - z)}.$$

Па пошто је

$$\upsilon_1 = \operatorname{cn}(2K - 2iK' - z) = \operatorname{cn}(z - 2K + 2iK'),$$

то, ако се вредности z дода $4K$ (што не мења вредност функције, пошто је $4K$ периода) добија се да је

$$\upsilon_1 = \operatorname{cn}(z + 2K - 2iK').$$

Ако је $\upsilon = \operatorname{cn} z$ униформна функција, то све путање морају доводити до једне исте вредности υ, па је, дакле, $\upsilon_1 = \upsilon_0$, а из тога је

$$\operatorname{cn}(z + 2K + 2iK') = \operatorname{cn} z,$$

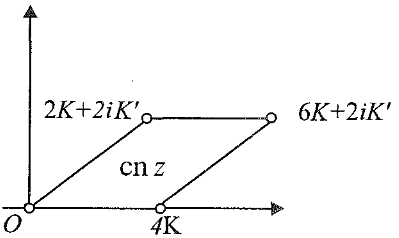
из чега се види да је $2K + 2iK'$ једна основна периода функције $\operatorname{cn} z$.

Функција $\operatorname{cn} z$ *има, дакле, две основне периоде, једну реалну*

$$\omega_1 = 4K$$

и једну комплексну

$$\omega_2 = 2K + 2iK'.$$



Сл. 15.

Њен основни паралелограм има облик сл. 15.

Уочимо сад функцију

$$\upsilon = \sqrt{1 - k^2u^2} = \operatorname{dn} z,$$

где је опет u инверзија интеграла (61).

Као што је напред показано, кад се интеграција изврши дуж путање сл. 13, пошавши са детерминацијом (+) квадратног корена, стиже се поново у O са вредношћу $2K$ интеграла, а са детерминацијом (–) квадратног корена под интегралним знаком; у тачку u се стиже са вредношћу $2K - z$ интеграла (61).

Па како, кад се υ сматра као функција променљиве u, она нема тачку $u = +1$ као критичку тачку, то по обиласку око те тачке она не мења своју полазну датерминацију $+\sqrt{1 - k^2u^2}$. Ако се, дакле, иде директном путањом од O до u, функција υ ће имати за вредност

$$(66) \qquad \upsilon_0 = +\sqrt{1 - k^2u^2} = +\sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2 z} = \operatorname{dn} z;$$

а ако се иде најпре контуром сл. 13, па затим директном путањом C до u, она ће имати за вредност

$$\upsilon_1 = +\sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2(2K - z)} = \operatorname{dn}(2K - z),$$

па пошто је функција $\operatorname{dn} z$ униформна, мора бити $\upsilon_1 = \upsilon_0$ тј.

$$\operatorname{dn}(2K - z) = \operatorname{dn} z.$$

Када се у томе обрасцу смени z са $-z$, добија се, пошто је $\operatorname{dn} z$ парна функција, да је

$$\operatorname{dn}(z + 2K) = \operatorname{dn} z$$

што показује да је $2K$ периода функције $\operatorname{dn} z$.

Посматрајмо сад интеграл (61) узет најпре дуж контуре сл. 14. Као што је показано, пошавши из O са детерминацијом (+) квадратног корена, стиже се поново у O са вредношћу $2K-2iK'$ интеграла, а са детерминацијом (–) квадратног корена, у тачку u стиже се са вредношћу $2K-2iK'-z$ истога интеграла.

Са друге стране, кад се υ сматра као функција променљиве u, она има тачку $u=\dfrac{1}{k}$ као критичку тачку, па дакле по обиласку променљиве u око те тачке функција υ мења детерминацију. Ако се, према томе, иде директном путањом од O до u, функција υ ће имати за вредност (66), а ако се најпре иде контуром сл. 14, па затим директном путањом до u, стиже се у u са вредношћу

$$\upsilon_1=-\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(2K-2iK'-z)}=-\mathrm{dn}\,(2K-2iK'-z),$$

па пошто мора бити $\upsilon_1=\upsilon_0$ (јер је функција u униформна), то је

$$\mathrm{dn}\,(2K-2iK'-z)=-\mathrm{dn}\,z;$$

а пошто је $2K$ једна периода функције, то се добија

$$\mathrm{dn}\,(-z-2iK')=-\mathrm{dn}\,z,$$

или, пошто је $\mathrm{dn}\,z$ парна функција

$$\mathrm{dn}\,(z+2iK')=-\mathrm{dn}\,z.$$

Ако се сад вредности z дода $2iK'$, последњи образац даје

$$\mathrm{dn}\,(z+4iK')=-\mathrm{dn}\,(z+2iK')=\mathrm{dn}\,z$$

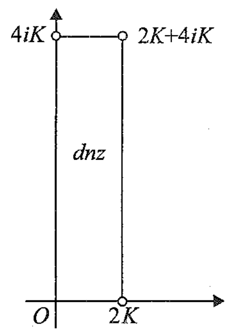
што показује да је $4iK'$ периода функције.

Функција $\mathrm{dn}\,z$ *има дакле две основне периоде, једну реалну*

$$\omega_1=2K$$

и једну чисто имагинарну

$$\omega_2=4iK'.$$



Сл. 16.

Њен основни паралелограм периода има облик сл. 16.

18. НУЛЕ И ПОЛОВИ ФУНКЦИЈЕ cn z

За проучавање функције $\mathrm{cn}\,z$ служе као полазна тачка њене везе са функцијом $\mathrm{sn}\,z$ исказане обрасцима

(67) $$\operatorname{cn} z = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z},$$

(68) $$\operatorname{cn}' z = -\operatorname{sn} z \cdot \operatorname{dn} z.$$

Функција $\operatorname{cn} z$ постаје једнака нули за вредности z за које је

$$\operatorname{sn} z = -1 \quad \text{или} \quad \operatorname{sn} z = +1,$$

а такве вредности, садржане у основном паралелограму периода функције, јесу

$$z = 3K \quad \text{и} \quad z = K.$$

Кад се тим двема вредностима придаду мултипли реалне периоде $4K$ функције, добија се *бескрајни низ њених позитивних и негативних реалних нула, које се све могу изразити општим обрасцем*

$$z = (2m+1)K.$$

А кад се овима придаду мултипли имагинарне периоде $2K + 2iK'$, добија се *бескрајни низ имагинарних нула функције које се све изражавају општим обрасцем*

$$z' = (2m+1)K + 2niK'.$$

Све су те нуле *просте*, јер је за сваку од њих

$$\operatorname{sn} z = \pm 1, \qquad \operatorname{dn} z = \pm\sqrt{1-\mathrm{k}^2},$$

па дакле извод

$$\operatorname{cn}' z = -\operatorname{sn} z \cdot \operatorname{dn} z$$

има од нуле различну вредност $\pm\sqrt{1-\mathrm{k}^2}$.

То показује у исто време да *функција* $\operatorname{cn} z$ *мења знак при сваком проласку кроз једну своју реалну нулу.*

Из обрасца (67) јасно је да $\operatorname{cn} z$ *има исте полове и истога реда као и функција* $\operatorname{sn}^2 z$, јер се за велике вредности $\operatorname{sn} z$ поткорени израз понаша као $\operatorname{sn}^2 z$, а сам квадратни корен као $\operatorname{sn} z$. Сви су полови, према томе, *имагинарни и прости.* Функција $\operatorname{cn} z$ *остаје коначна за све реалне вредности* z.

Из истих разлога и остаци функције $\operatorname{cn} z$ за сваки њен пол $z = a$ су једна од вредности $-\frac{1}{k}$ или $+\frac{1}{k}$, јер је гранична вредност израза

$$(z-a)\cdot \operatorname{cn} z \quad \text{за} \quad z = a$$

исто као и за израз

$$(z-a)\cdot \operatorname{sn} z.$$

Приметимо још и то да, пошто се све реалне вредности функције $\operatorname{sn} z$ налазе између -1 и $+1$, према обрасцу (67) тако ће исто бити и са функцијом $\operatorname{cn} z$.

Вредности z, за које $\operatorname{cn} z$ добија своје крајње вредности ± 1, јесу оне за које је $\operatorname{sn} z = 0$, а то су у основном паралелограму периода вредности 0 и $2K$.

19. НУЛЕ И ПОЛОВИ ФУНКЦИЈЕ dn z

И за проучавање особина функције $\operatorname{dn} z$ полазна је тачка њена веза са функцијом $\operatorname{sn} z$, изражена релацијама

$$\operatorname{dn} z = \sqrt{1 - \mathrm{k}^2 \operatorname{sn}^2 z}, \tag{69}$$

$$\operatorname{dn}' z = -\mathrm{k}^2 \operatorname{sn} z \cdot \operatorname{dn} z. \tag{70}$$

Функција постаје једнака нули за вредности z за које је

$$\operatorname{sn} z = \pm \frac{1}{k},$$

а оне од тих вредности, што су садржане у њеноме основном паралелограму периода, јесу

$$\alpha = K + iK' \quad \text{и} \quad \alpha' = K + 3iK'.$$

Кад се тим нулама придаду мултипли $2mK + 4niK'$ њених периода $2K$ и $4iK'$, добија се *бескрајан низ нула функције које су све имагинарне и изражене општим обрасцем*

$$\alpha = (2m+1)K + (2n+1)iK'.$$

Све су те нуле *просте*, јер за ма коју од њих је

$$\operatorname{sn} z = \pm \frac{1}{k}, \qquad \operatorname{cn} z = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}},$$

тако да извод (70) има од нуле различну вредност $\pm\sqrt{k^2 - 1}$.

Из обрасца (69) види се да $\operatorname{dn} z$ има све своје полове исте као и $\operatorname{sn} z$ и да су сви *првога реда*, јер се за велике вредности $\operatorname{sn} z$ поткорени израз (69) понаша као $k^2 \operatorname{sn}^2 z$. *Сви су полови, дакле, имагинарни и прости.* То показује да *функција остаје коначна за све реалне вредности* z.

Из истих разлога и остаци функције $\operatorname{dn} z$ за сваки њен пол $z = a$ су једна од вредност ± 1, јер је гранична вредност израза

$$(z-a) \cdot \operatorname{dn} z \quad \text{за} \quad z = a$$

једнака једној или другој од тих двеју вредности

Пошто dn z нема реалних нула, а постаје једнака јединици за вредности z за које је sn $z = 0$, тј. за вредности

$$z = 0, \quad \pm 2K, \quad \pm 4K, \quad \pm 6K, \ldots$$

то крива линија $y = \operatorname{dn} x$ не пресеца осовину Ox. А пошто се за

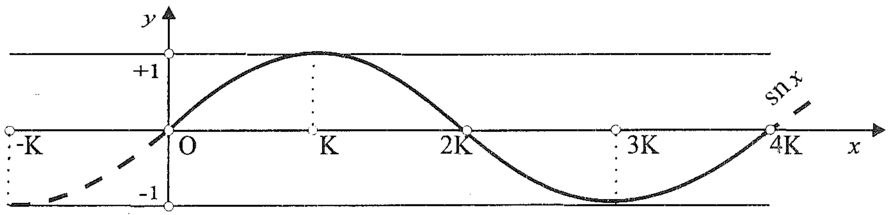
$$z = \pm K, \quad \pm 3K, \quad \pm 5K, \ldots$$

добија као крајна доња гранична вредност функције број $\sqrt{1-k^2}$, то је цела крива садржана у области равни xOy ограниченој двема правима.

$$y = 1 \quad \text{и} \quad y = \sqrt{1-k^2}.$$

20. КРИВЕ ЛИНИЈЕ ШТО ПРЕДСТАВЉАЈУ ОСНОВНЕ ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

Из свега што је довде казано може се саставити слика о облицима кривих линија које представљају основне елиптичке функције. Ти су облици представљени на слици сл. 17, 18 и 19 и то у оквиру једне периоде од $z = 0$ до $z = 4K$ за криве линије.

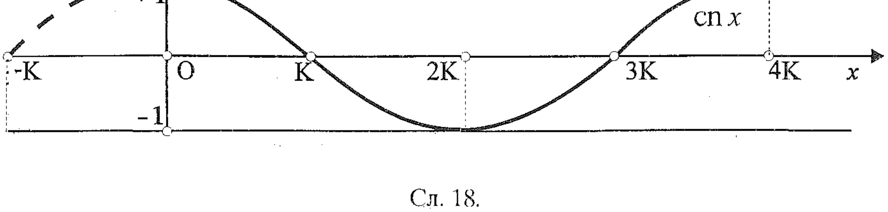


Сл. 17.

(71) $$y = \operatorname{sn} x \quad \text{и} \quad y = \operatorname{cn} x,$$

а у оквиру једне периоде од $z = 0$ до $z = 2K$ за криву

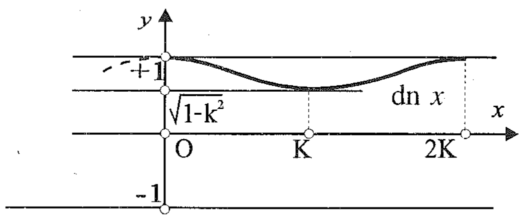
(72) $$y = \operatorname{dn} x.$$



Сл. 18.

Криве (71) јако подсећају на криве

$$y = \sin x \quad \text{и} \quad y = \cos x$$



Сл. 19.

са подесно изабраном периодом. У тачкама у којима је

$$y = -1, \quad y = 0, \quad y = +1$$

криве (71) се тачно поклапају са кривим

$$y = \sin\frac{\pi x}{2K} \quad \text{и} \quad y = \cos\frac{\pi x}{2K} \tag{73}$$

које такође имају за периоду $4K$.

Исте криве (71) и нису ништа друго до нешто деформисане криве (73). Та деформација је у толико слабија, у колико се k мање разликује од нуле. Кад је $k = 0$, криве (71) и (73) се тачно поклапају.

21. МОДУЛАРНА ТРАНСФОРМАЦИЈА ОСНОВНИХ ЕЛИПТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

Означимо са

$$u_1 = \operatorname{sn}(k_1, z), \qquad u_2 = \operatorname{sn}(k_2, z)$$

функције u дефинисане као инверзија интеграла

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

за две разне вредности $k = k_1$ и $k = k_2$ модула k.

Општи проблем *модуларне трансформације* функције $\operatorname{sn} z$ састојао би се у томе да се, знајући везу

$$\varphi(k_1, k_2) = 0$$

између модула k_1 и k_2, одреди веза између одговарајућих им функција u_1 и u_2.

Између специјалних проблема те врсте овде ће бити решен један од најпростијих, познат под именом *Landen-ове трансформације.* Он се састоји у томе *да се нађе веза између* u_1 *и* u_2 *кад су* k_1 *и* k_2 *везани релацијом облика*

$$k_1^2(1+k_2)^2-4k_2=0.$$

Кад се у једначини

$$dz=\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

изврши смена

$$u=\frac{(1+k')\upsilon}{1+k'\upsilon^2}, \tag{74}$$

где су k и k' везани релацијом

$$k^2(1+k')^2-4k'=0,$$

једначина се претвара у

$$dz=(1+k')\frac{d\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k'^2\upsilon^2)}}$$

о чему се уверавамо непосредно, извршивши такву смену.

Ако се тада узме за k вредност k_1,а за k' вредност k_2, функција u постаје u_1, а υ постаје u_2. Са друге стране, из једначине

$$dz=\frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-k_1^2u_1^2)}}=(1+k_2)\frac{du_2}{\sqrt{(1-u_2^2)(1-k_2^2u_2^2)}}$$

налази се инверзијом да је

$$u_1=\mathrm{sn}\,(k_1,z),\qquad u_2=\mathrm{sn}\left(k_2,\frac{z}{1+k_2}\right).$$

Па пошто су u и υ везани релацијом (74), иста ће релација везивати u_1 и u_2, па се из тога изводи став:

Кад се у функцији $\mathrm{sn}\,(k_1,z)$ *вредност* k_1 *смени другом вредношћу* k_2, *која је таква да је*

$$k_1^2(1+k_2)^2-4k_2=0$$

између првобитне и нове функције $\mathrm{sn}\,(k_1,z)$ *и* $\mathrm{sn}\,(k_2,z)$ *постоји веза*

$$\operatorname{sn}(k_1, z) = \frac{(1+k_2)\upsilon}{1+k_2\upsilon^2},$$

где је

$$\upsilon = \operatorname{sn}\left(\mathrm{k}_2, \frac{z}{1+k_2}\right).$$

Важност става лежи у томе, што он даје могућност да се једна дата функција $\operatorname{sn} z$ изрази помоћу друге чији ће модуо k' бити различан од модула k дате функције. Тако нпр. функције

$$u = \operatorname{sn}\left(\frac{4}{5}, z\right), \qquad \upsilon = \operatorname{sn}\left(\frac{1}{4}, \frac{4z}{5}\right)$$

везане су релацијом

$$u = \frac{5\upsilon}{4+\upsilon^2}.$$

Помоћу веза између функција

$$\operatorname{sn} z, \qquad \operatorname{cn} z, \qquad \operatorname{dn} z$$

лако је формулисати и одговарајуће ставове за остале две елиптичке функције $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$.

22. ДЕГЕНЕРАЦИЈЕ ОСНОВНИХ ЕЛИПТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

За специјалне вредности $k = 0$ и $k = 1$ модула k основне елиптичке функције своде се (дегенеришу) на елементарне функције или на константу. Тако, за $k = 0$ интеграл

$$(75) \qquad z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

што дефинише функцију $u = \operatorname{sn} z$ своди се на интеграл

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u,$$

а одговарајућа му инверзија $\operatorname{sn} z$ своди се на $\sin z$. Функција $\operatorname{cn} z$ своди се тада на $\cos z$, а функција $\operatorname{dn} z$ на 1.

За $k = 1$ интеграл (75) се своди на

$$z = \int_0^u \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u};$$

одговарајућа функција $\operatorname{sn} z$ своди се на простопериодичну функцију

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}},$$

а функција $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ на једну исту простопериодичну функцију

$$\frac{2}{e^{2z} - e^{-2z} + 2}.$$

За све остале вредности k, што леже између 0 и 1, такво је свођење немогућно и инверзија интеграла (75) представља једну *сасвим нову трансцендентну функцију, несводљиву ни на какве комбинације ограниченог броја елементарних функција.*

Као што је напред показано, криве линије

$$y = \operatorname{sn} x \quad \text{и} \quad y = \operatorname{cn} x$$

мало се разликују од кривих

$$y = \sin\frac{\pi x}{2K} \quad \text{и} \quad y = \cos\frac{\pi x}{2K}$$

са којима се тачно поклапају у бескрајно много тачака и то у онима за које је:

$$y = -1, \quad y = 0, \quad y = +1.$$

Та сличност, као и многобројне друге сличности у особинама тих основних елиптичких и тригонометријских функција, учиниле су да су они, што су створили теорију елиптичких функција, назвали $\operatorname{sn} z$ „псеудо-синус“, а $\operatorname{cn} z$ „псеудо-косинус“. Функција $\operatorname{dn} z$, која се за $k = 0$ своди на 1, била је названа „псеудо-полупречник“, јер синус и косинус представљају познате из тригонометрије дужине за круг чији је полупречник 1.

Иста је сличност дала повода и томе да се основне елиптичке функције дефинишу још и на овај начин:

Кад се у обрасцу (75) изврши смена

$$u = \sin\varphi, \quad du = \cos\varphi \cdot d\varphi,$$

интеграл (75) се претвара у

$$z = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}. \tag{76}$$

У специјалном случају кад је $k = 0$ добија се да је $z = \varphi$; кад је модуо k различан од нуле, φ се не поклапа више са z, већ показује извесно одступање од те вредности, које је у толико веће у колико се k више разликује од нуле.

Jacobi је променљиву φ назвао „амплитудом" променљиве z и то је означавао знаком

$$z = \operatorname{am} \varphi.$$

Па пошто је за $k = 0$

$$\sin z = \sin \varphi, \qquad \cos z = \cos \varphi,$$

то је за k различно од нуле Jacobi означавао функцију $\operatorname{sn} z$ са $\sin \operatorname{am} z$, а функцију $\operatorname{cn} z$ са $\cos \operatorname{am} z$. Тек су доцније уведене ознаке $\operatorname{sn} z$ и $\operatorname{cn} z$.

23. АДИЦИОНА ТЕОРЕМА ЗА ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

Има безброј функција $f(z)$ за које се $f(\alpha+\beta)$, за ма какве вредности α и β, може изразити као *алгебарска* функција израза $f(\alpha), f(\beta)$ и једног ограниченог броја узастопних извода

$$f'(\alpha),\ f''(\alpha), \ldots, \qquad f'(\beta),\ f''(\beta), \ldots$$

Кад се ти изводи и сами изражавају као алгебарске функције израза $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, онда се и $f(\alpha+\beta)$ изражава као алгебарска функција истих израза $f(\alpha)$ и $f(\beta)$.

Кад једна функција испуњава услов такве врсте за њу се каже да има своју *адициону теорему*: ова исказује начин тога изражавања за ту функцију.

За сваку функцију $f(z)$ не постоји адициона теорема. Тако нпр. за функцију

$$f(z) = e^{e^z}$$

добија се да је

$$f(\alpha+\beta) = e^{e^{\alpha+\beta}} = e^{e^{\alpha} \cdot e^{\beta}};$$

па пошто је

$$e^z = \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

$f(\alpha+\beta)$ се изражава у облику

$$f(\alpha+\beta) = e^{\log f(\alpha) \cdot \log f(\beta)} = e^{\frac{f'(\alpha) \cdot f'(\beta)}{f(\alpha) \cdot f(\beta)}}$$

из чега са види да се то изражава не као алгебарска, већ као трансцедентна функција израза $f(\alpha)$, $f(\beta)$,или још и $f'(\alpha)$ и $f'(\beta)$. А за непрегледну множину функција уопште је и немогућно изразити $f(\alpha+\beta)$ тако да функција буде имала своју адициону теорему.

Али постоји и безброј функција које имају адициону теорему у наведеном смислу. Тако нпр. за функцију e^z је

$$f(\alpha+\beta)=e^{\alpha+\beta}=e^{\alpha}\cdot e^{\beta}=f(\alpha)\cdot f(\beta).$$

За $\sin z$ је

$$f(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha=$$

$$=f(\alpha)\cdot f'(\beta)+f(\beta)\cdot f'(\alpha)=f(\alpha)\sqrt{1-f(\beta)^2}+f(\beta)\sqrt{1-f(\alpha)^2}.$$

Исти је случај и са функцијама $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, а очевидно је да ће тако бити и са ма каквом алгебарском функцијом променљиве z, или променљиве e^{az}. Све такве функције имају своју адициону теорему.

Овде ће бити показано да и *свака од шрију основних елипшичких функција шакође има своју адициону шеорему.*

Доказ је сличан ономе на који се доказује у матеметичкој анализи адициона теорема за $\sin z$. За ту се функцију на елементаран *шриїономешријски* начин доказује постојање такве теореме. Такав се доказ не примењује на функцију $\operatorname{sn} z$, али се теорема може доказати на начин сличан ономе којим се *аналишички* истиче на видик постојање теореме за функцију $\sin z$.

Тај доказ за $\sin z$ основан је на чињеници да се општи интеграл диференцијалне једначине

$$\frac{du}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{77}$$

може изразити у два разна облика

$$\arcsin x-\arcsin y=C, \tag{78}$$

$$x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=C', \tag{79}$$

где су C и C' интеграционе константе.

Једначина (78) се добија непосредном интеграцијом обеју страна једначине (77). А да је и (79) општи интеграл исте једначине (77), види се њеним диференцијаљењем које даје једначину

$$xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)+dx\cdot\sqrt{1-y^2}-dy\cdot\sqrt{1-x^2}=0$$

у којој су , према (77), сва три члана једнака нули.

Међутим, као што се зна из опште теорије диференцијалних једначина првога реда, кад год две једначине

$$f(x, y) = C, \quad \varphi(x, y) = C'$$

представљају општи интеграл једна исте једначине, оне не могу бити једна од друге независне, већ је једна од функција f и φ функција друге, тако да је

$$C' = \Phi(C), \tag{80}$$

па тај случај мора бити и са двема једначинама (78) и (79).

Са друге стране, кад се у једначини (78) стави да је

$$\arcsin x = \alpha, \quad \arcsin y = \beta,$$

према чему је

$$x = \sin\alpha, \quad y = \sin\beta,$$

једначина постаје

$$\alpha - \beta = C, \tag{81}$$

а једначина (79) се претвара у

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha = C',$$

тако да једначина (80) постаје

$$\Phi(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta. \tag{82}$$

Да би се одредио облик функције Φ, ставимо у (82) да је $\beta = 0$, па се добија

$$\Phi(\alpha) = \sin\alpha$$

према чему (82) постаје

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

или, сменом β са $-\beta$,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

који образац изражава адициону теорему за функцију $\sin z$.

Исти се аналитички доказ примењује и на функцију $\operatorname{sn} z$. Као што је напред казано, Euler-ова диференцијална једначина, написана у облику

$$\frac{dx}{X} = \frac{du}{Y}, \tag{83}$$

где је

(84) $$X = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

(85) $$Y = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

може се написати у два разна облика

(86) $$\int_0^x \frac{dx}{X} - \int_0^y \frac{du}{Y} = C,$$

(87) $$\frac{xY - yX}{1-k^2x^2y^2} = C'.$$

Према горе казаноме мора бити

(88) $$C' = \Phi(C).$$

Са друге стране, ако се стави да је

$$\int_0^x \frac{dx}{X} = \alpha, \quad \int_0^y \frac{dy}{Y} = \beta$$

према чему је

$$x = \operatorname{sn}\alpha, \quad y = \operatorname{sn}\beta,$$

$$X = \frac{dx}{d\alpha} = \operatorname{sn}'\alpha, \quad Y = \frac{dy}{d\beta} = \operatorname{sn}'\beta,$$

једначина (86) претвара се у

$$\alpha - \beta = C$$

а једначина (87) у

$$\frac{\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}'\beta - \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{sn}'\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\beta} = C',$$

па се заменом у (88) добија

(89) $$\Phi(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}'\beta - \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{sn}'\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\beta}.$$

Да би се одредио облик функције Φ, ставимо у (89) да је $\beta = 0$, па се, пошто је

$$\operatorname{sn} 0 = 0 \quad \operatorname{sn}'0 = 1$$

добија да је

$$\Phi(\alpha) = \operatorname{sn} \alpha.$$

Образац (89) добија тада облик

$$\text{(90)} \qquad \operatorname{sn}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}'\beta - \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{sn}'\alpha}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\beta}$$

одакле је, сменом β са –β,

$$\text{(91)} \qquad \operatorname{sn}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}'\beta + \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{sn}'\alpha}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\beta}.$$

А пошто је

$$\operatorname{sn} x = \operatorname{cn} x \cdot \operatorname{dn} x,$$

то се образац (91) може написати и у облику

$$\text{(92)} \qquad \operatorname{sn}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\beta \cdot \operatorname{dn}\beta + \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\beta}.$$

Напослетку, у обрасцу (92) могу се функције cn и dn сменити својим изразима као функције промењиве sn, по обрасцима

$$\operatorname{cn} x = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 x}, \qquad \operatorname{dn} x = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x},$$

па се добија образац који изражава $\operatorname{sn}(\alpha + \beta)$ као алгебарску функцију израза $\operatorname{sn}\alpha$ и $\operatorname{sn}\beta$. Тај образац, као и образац (91) показују да *за функцију* $\operatorname{sn} z$ *постоји адициона теорема* и истичу на видик облик те теореме, тј. *начин на који се* $\operatorname{sn}(\alpha + \beta)$ *изражава као рационална функција израза*

$$\operatorname{sn}\alpha, \ \operatorname{sn}\beta, \ \operatorname{sn}'\alpha, \ \operatorname{sn}'\beta$$

или као алгебарска функција израза

$$\operatorname{sn}\alpha \quad \text{и} \quad \operatorname{sn}\beta.$$

Ти обрасци уопштавају елементарни тригонометријски образац за $\sin(\alpha + \beta)$, на који се они своде кад је к = 0, тј, кад $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ дегенеришу у $\sin z$, $\cos z$ и 1.

Из истих се образаца и оних што исказују везу између функција sn, cn, dn изводе и адиционе теореме за $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$, које су исказане обрасцима сличним обрасцу (92):

$$\text{(93)} \qquad \operatorname{cn}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\beta - \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\beta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\beta},$$

$$(94) \qquad \operatorname{dn}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{dn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\beta - k\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\beta\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\beta}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\beta},$$

одакле се, сменом β са $-\beta$, добијају обрасци за

$$\operatorname{cn}(\alpha-\beta) \quad \text{и} \quad \operatorname{dn}(\alpha-\beta).$$

Тако исто, из тих се образаца изводи мноштво других који, као и они, уопштавају познате тригонометријске обрасце и од којих ће неки бити изведени у овоме што следује.

Као прост пример биће наведена примена образаца на случај кад је $\alpha = z$ и $\beta = K$, као и кад је $\alpha = z$ и $\beta = -K$

$$\operatorname{sn}\beta = \operatorname{sn}K = 1, \qquad \operatorname{sn}\beta = \operatorname{sn}(-K) = -1,$$

$$\operatorname{cn}\beta = \operatorname{cn}K = 0, \qquad \operatorname{cn}\beta = \operatorname{cn}(-K) = 0,$$

$$\operatorname{dn}\beta = \operatorname{dn}K = \sqrt{1-k^2}, \qquad \operatorname{dn}\beta = \operatorname{dn}(-K) = \sqrt{1-k^2}.$$

Применом обрасца за $\operatorname{sn}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{sn}(\alpha-\beta)$ налази се тада да је

$$\operatorname{sn}(z+K) = \frac{\operatorname{cn}z}{\operatorname{dn}z}, \qquad \operatorname{sn}(z-K) = -\frac{\operatorname{cn}z}{\operatorname{dn}z},$$

Кад се, дакле, вредности z *дода четвртина реалне периоде,* $\operatorname{sn} z$ *постаје* $\frac{\operatorname{cn}z}{\operatorname{dn}z}$; *кад се одузме та четвртина,* $\operatorname{sn} z$ *постаје* $-\frac{\operatorname{cn}z}{\operatorname{dn}z}$.

То је уопштење правила по коме је

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \qquad \sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos z.$$

24. ФУНКЦИЈЕ sn (mz), cn (mz), dn (mz)

Кад се у обрасцима (92), (93), (94) стави да је $\alpha = \beta$ добијају се обрасци

$$(95) \qquad \begin{aligned} \operatorname{sn}2\alpha &= \frac{2\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha}, \\ \operatorname{cn}2\alpha &= \frac{1-2\operatorname{sn}^2\alpha+k^2\operatorname{sn}^4\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha}, \\ \operatorname{dn}2\alpha &= \frac{1-2k^2\operatorname{sn}^2\alpha+k^2\operatorname{sn}^4\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha} \end{aligned}$$

који се за $k = 0$ своде на елементарне тригонометријске обрасце

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Помоћу образаца за збирове $\alpha+\beta$ и образаца (95), узевши да је $\beta = 2\alpha$, добијају се обрасци помоћу којих се могу израчунати

$$\mathrm{sn}\,3\alpha, \qquad \mathrm{cn}\,3\alpha, \qquad \mathrm{dn}\,3\alpha,$$

кад се знају вредности

$$\mathrm{sn}\,\alpha, \qquad \mathrm{cn}\,\alpha, \qquad \mathrm{dn}\,\alpha$$

и то се може продужити тако, да се помоћу познатих вредности ових последњих израза могу одредити узастопце све вредности

$$\mathrm{sn}\,(m\alpha), \qquad \mathrm{cn}\,(m\alpha), \qquad \mathrm{dn}\,(m\alpha).$$

25. ОБРАСЦИ ЗА ЗБИРОВЕ И РАЗЛИКЕ ФУНКЦИЈА sn z, cn z, dn z

Сабирањем и одузимањем образаца за $\mathrm{sn}\,(\alpha+\beta)$ и $\mathrm{sn}\,(\alpha-\beta)$ и ставивши да је

$$\alpha+\beta = p, \qquad \alpha-\beta = q,$$

одакле је

$$\alpha = \frac{p+q}{2}, \qquad \beta = \frac{p-q}{2},$$

добијају се обрасци који изражавају

$$\mathrm{sn}\,p \pm \mathrm{sn}\,q, \qquad \mathrm{cn}\,p \pm \mathrm{cn}\,q, \qquad \mathrm{dn}\,p \pm \mathrm{dn}\,q,$$

помоћу производа функција

$$\mathrm{sn}\,\frac{p+q}{2}, \qquad \mathrm{cn}\,\frac{p+q}{2}, \qquad \mathrm{dn}\,\frac{p+q}{2}$$

$$\mathrm{sn}\,\frac{p-q}{2}, \qquad \mathrm{cn}\,\frac{p-q}{2}, \qquad \mathrm{dn}\,\frac{p-q}{2}.$$

Такви су нпр. обрасци

$$\mathrm{sn}\,p + \mathrm{sn}\,q = \frac{2\mathrm{sn}\,\frac{p+q}{2}\cdot\mathrm{cn}\,\frac{p-q}{2}\cdot\mathrm{dn}\,\frac{p-q}{2}}{1-k^2\mathrm{sn}^2\,\frac{p+q}{2}\cdot\mathrm{sn}^2\,\frac{p-q}{2}}$$

(96)

$$\mathrm{sn}\,p - \mathrm{sn}\,q = \frac{2\mathrm{sn}\,\frac{p-q}{2}\cdot\mathrm{cn}\,\frac{p+q}{2}\cdot\mathrm{dn}\,\frac{p+q}{2}}{1-k^2\mathrm{sn}^2\,\frac{p+q}{2}\cdot\mathrm{sn}^2\,\frac{p-q}{2}}$$

и слични обрасци за

$$\operatorname{cn} p + \operatorname{cn} q, \quad \operatorname{dn} p + \operatorname{dn} q, \quad \operatorname{cn} p - \operatorname{cn} q, \quad \operatorname{dn} p - \operatorname{dn} q.$$

Ти обрасци уопштавају Napier-ове тригонометријске обрасце као што су

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

и слични обрасци за косинус. Обрасци (96) се своде на Napier-ове обрасце за $k = 0$. Они су, као и ови, од користи при логаритмисању, а тако исто и за доказивање разних ставова у теорији елиптичких функција.

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

РАЗНИ ОБЛИЦИ РЕДОВА ЗА ОСНОВНЕ ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

26. РАЗВИЈАЊЕ У MACLAURIN-ОВ РЕД

Функције cn z и dn z су *парне*, а функција sn z *непарна* функција промењиве z. Па пошто вредност $z = 0$ није никакав сингуларитет ни за једну од тих функција, то се оне могу развити у редове облика

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} z &= A_1 z + A_3 z^3 + A_5 z^5 + \ldots \\ \operatorname{cn} z &= B_0 + B_2 z^2 + B_4 z^4 + \ldots \\ \operatorname{dn} z &= C_0 + C_2 z^2 + C_4 z^4 + \ldots \end{aligned} \tag{97}$$

Коефицијенти A_n одређују се помоћу обрасца

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\operatorname{sn} z \quad \text{за } z = 0. \tag{98}$$

Узастопни изводи функције sn добијају се пошавши од обрасца

$$\operatorname{sn}' z = \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z$$

из кога се диференцијаљењем и сменом извода функција cn z и dn z њиховим вредностима

$$\operatorname{cn}' z = -\operatorname{sn} z \cdot \operatorname{dn} z, \quad \operatorname{dn}' z = -k^2 \operatorname{sn} z \cdot \operatorname{cn} z$$

добија низ образаца

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}'' z &= 2k^2 \operatorname{sn}^2 z - (1+k^2)\operatorname{sn} z, \\ \operatorname{sn}''' z &= (6k^2 \operatorname{sn}^2 z - 1 - k^2)\operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z, \\ \operatorname{sn}'''' z &= 24k^2 \operatorname{sn}^3 z - 20(k^2 + k^4)\operatorname{sn}^2 z + (1 + 14k^2 + k^4)\operatorname{sn} z \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Кад се у тим обрасцима стави $z = 0$, добијају се за узастопне коефицијенте A_n вредности:

$$A_1 = \frac{1}{1!}, \quad A_3 = -\frac{1+k^2}{3!}, \quad A_5 = \frac{1+14k^2+k^4}{5!},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

На исти начин се одређују и коефицијенти B_n и C_n, а то су:

$$B_0 = 1, \qquad B_2 = -\frac{1}{2!},$$
$$B_4 = \frac{1+4k^2}{4!}, \quad B_6 = -\frac{1+44k^2+14k^4}{6!},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_0 = 1, \qquad C_2 = -\frac{k^2}{2},$$
$$C_4 = \frac{4k^2+k^4}{4!}, \quad C_6 = -\frac{16k^2-44k^4+k^6}{6!},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Као што се види, *општи коефицијенат Maclaurin-овог реда за сваку од функција* sn z, cn z, dn z, *је рационалан разломак, који за именилац има одговарајући факторијел, а за бројилац један полином по модулу* k, *чији су сви коефицијенти цели бројеви.*

Питање је још: за које ће вредности z добијени редови конвергирати? Пошто све три функције имају исте сингуларитете, а то су у њиховим паралелограмима полови

$$iK' \quad \text{и} \quad 2K + iK', \tag{99}$$

то ће сваки од горња три реда бити конвергентан за вредности z у кругу описаном око тачке $z = 0$ са полупречником једнаким одстојању те тачке до најближег јој пола, а то значи са полупречником K'. А сменивши у редовима (97) на десној страни z ма којом својом хомологом у равни z, добиће се нова три реда за sn z, cn z, dn z који ће конвергирати за све вредности z у кругу описаном око те хомологе са полупречником K'.

27. РАЗВИЈАЊЕ У LAURENT-ОВ РЕД

Означимо са α један ма који пол функције sn z. Пошто су сви полови првога реда, функција се може развити у Laurent-ов ред који ће бити конвергентан за све вредности z садржане у кругу који има за центар тачку $z = \alpha$, а за полупречник одстојање те тачке до најближег јој другог кога пола функције. Ред је облика

$$\operatorname{sn} z = \frac{B}{z-\alpha} + A_0 + A_1(z-\alpha) + A_2(z-\alpha)^2 + \ldots$$

Напред је показано да сви остаци функције, за све њене полове, имају за вредност једну или другу од вредности $-\frac{1}{k}$ или $+\frac{1}{k}$. Према томе је

$$B = \pm\frac{1}{k}.$$

Да би се одредили коефицијенти A_n, може се u сменити за $\operatorname{sn} z$ у једначини коју u задовољава

$$u'^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2), \tag{100}$$

па поредити међу собом чланове истих степена израза $\frac{1}{z-\alpha}$ и $(z-\alpha)$, пошто се на левој страни једначине (100) смени

$$u' = -\frac{B}{(z-\alpha)^2} + A_1 + 2A_2(z-\alpha) + 3A_3(z-\alpha)^2 + \ldots$$

па дакле

$$u'^2 = \frac{B^2}{(z-\alpha)^4} - \frac{2A_1B}{(z-\alpha)^2} + \frac{4A_2B}{z-\alpha} + 3A_3B + \ldots$$

а на десној страни,

$$u = \frac{B}{z-\alpha} + A_0 + A_1(z-\alpha) + A_2(z-\alpha)^2 + \ldots$$

Тако се нпр. налази да на левој страни не фигурише члан са $\frac{1}{(z-\alpha)^3}$; а на десној он фигурише и има за коефицијенат $4k^2B^3A_0$; па пошто су k и B различни од нуле, мора бити $A_0 = 0$

Ред је, дакле, облика

$$\operatorname{sn} z = \pm\frac{1}{k}\frac{1}{z-\alpha} + A_1(z-\alpha) + A_2(z-\alpha)^2 + \ldots \tag{101}$$

а ред за квадрат те функције је облика

$$\operatorname{sn}^2 z = \frac{1}{k^2}\frac{1}{(z-\alpha)^2} + M_0 + M_1(z-\alpha) + M_2(z-\alpha)^2 + \ldots \tag{102}$$

где се коефицијенти M_k одређују помоћу коефицијената A_n

Као што се види:

1° Ред за $\operatorname{sn} z$ не садржи члан независан од $(z-\alpha)$;

2° Ред за $\operatorname{sn}^2 z$ не садржи члан са $\dfrac{1}{z-\alpha}$ на првом степену.

Та на први поглед безначајна чињеница има своју нарочиту важност, што ће се видети из овога што следује.

Из обрасца (102) се види *да је остатак функције* $\operatorname{sn}^2 z$ *за ма који њен пол једнак нули.* И то је такође чињеница од важности за исту теорију, јер су многи резултати на њој основани.

28. ОСНОВНЕ ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ ИЗРАЖЕНЕ КАО КОЛИЧНИЦИ ЦЕЛИХ ФУНКЦИЈА

Напред је показано да никаква мероморфна двопериодична функција не може бити цела функција. Али, из опште теорије аналитичких функција зна се да се свака мероморфна функција може изразити као количник двеју целих функција. Потражимо које су то целе функције за $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$.

Тога ради уочимо функцију

$$Z(z) = k^2 \int_0^z \operatorname{sn}^2 z \cdot dz \tag{103}$$

која у теорији елиптичких функција игра доста важну улогу и назива се „зета-функција“.

Из обрасца (103) се види да $Z(z)$ не може имати других сингуларитета осим оних што их има $\operatorname{sn} z$, а то су полови ове функције. Из обрасца (102) добија се интеграцијом

$$\int \operatorname{sn}^2 z \cdot dz = -\frac{1}{k^2}\frac{1}{z-\alpha} + M_0(z-\alpha) + \frac{M_1}{2}(z-\alpha)^2 + \ldots + \text{const},$$

тако да се за $Z(z)$ добија ред

$$Z(z) = -\frac{1}{z-\alpha} + k^2 M_0(z-\alpha) + \frac{k^2 M_1}{2}(z-\alpha)^2 + \ldots + \text{const}, \tag{104}$$

из чега се види *да је сваки пол функције* $\operatorname{sn} z$ *пол првога реда за* Z(z) *и да су сви остаци ове функције за те полове једнаки* -1. У исти мах се види и то да је $Z(z)$ *мероморфна* функција.

Помоћу тако дефинисане функције $Z(z)$ формирајмо функцију

$$G(z) = e^{-\int_0^z Z(z)dz}, \tag{105}$$

па је очевидно да, кад би она имала сингуларитета, ови би могли произаћи само од функције $Z(z)$, па дакле би се сваки од њих морао поклопити са којим полом те функције. Али, ниједан пол $z = \alpha$ те функције не може бити сингуларитет за $G(z)$, јер се из обрасца (104) интеграцијом добија да је

$$\int Z(z)dz = -\log(z-\alpha) + \frac{k^2 M_0}{2}(z-\alpha)^2 + \frac{k^2 M_1}{6}(z-\alpha)^3 + \dots$$

тако да се може написати да је

$$G(z) = e^{\log(z-\alpha)} \cdot e^{f(z)} = (z-\alpha)e^{f(z)}, \tag{106}$$

где је $f(z)$ једна функција представљена редом уређеним по целим позитивним степенима разлике $(z-\alpha)$ и која, према томе, нема $z = \alpha$ као сингуларитет. Из тога се види *да је* G(z) *цела функција йромењиве* z *која има* $z = \alpha$ *као своју йросшу нулу, йа дакле као своју обичну шачку.*

Помоћу тако дефинисане целе функције $G(z)$ формирајмо сад функцију

$$G_1(z) = \operatorname{sn} z \cdot G(z). \tag{107}$$

Она се, према обрасцима (101) и (106), може написати у облику

$$G_1(z) = \left[\pm\frac{1}{k}\frac{1}{(z-\alpha)} + A_1(z-\alpha) + A_2(z-\alpha)^2 + \dots\right](z-\alpha)\, e^{f(z)} =$$

$$= \left[\pm\frac{1}{k} + A_1(z-\alpha)^2 + A_2(z-\alpha)^3 + \dots\right] e^{f(z)}.$$

Из тог се израза види да је $z = \alpha$ обична тачка за функцију $G_1(z)$. Па како сингуларитети те функције могу произлазити само од таквих вредности као што је $z = \alpha$, тиме је доказано да она нема никаквих сингуларитета, што значи *да је* $G_1(z)$ *цела функција йромењиве* z. Из (107) се тада добија да је

$$\operatorname{sn} z = \frac{G_1(z)}{G(z)}$$

тако, да је функција sn z изражена као количник двеју целих функција, за које се зна и њихов начин формирања.

На исти се начин, а имајући у виду да функције cn z и dn z имају исте полове и истога реда као и sn z, налази *да су и функције*

$$G_2(z) = \operatorname{cn} z \cdot G(z), \quad G_3(z) = \operatorname{dn} z \cdot G(z)$$

целе функције.

Функције $G, \mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \mathrm{G}_3$ увео је у теорију елиптичких функција Weierstrass и означио их је ознакама

$$G(z) = \mathrm{Al}z, \quad \mathrm{G}_1 = \mathrm{Al}_1 z, \quad \mathrm{G}_2 = \mathrm{Al}_2 z, \quad \mathrm{G}_3 = \mathrm{Al}_3 z$$

и тако означене оне носе назив *Weierstrass-ове функције* Al.

Помоћу њих се основне елиптичке функције изражавају у облику

$$\text{(108)} \qquad \mathrm{sn}(z) = \frac{\mathrm{Al}_1 z}{\mathrm{Al}z}, \quad \mathrm{cn}(z) = \frac{\mathrm{Al}_2 z}{\mathrm{Al}z}, \quad \mathrm{dn}(z) = \frac{\mathrm{Al}_3 z}{\mathrm{Al}z},$$

тако да се долази до овог резултата:

Свака од функција sn z, cn z, dn z, *изражава се као количник двеју целих функција; те функције су Weierstrass-ове функције* Al.

Такав начин изражавања основних елиптичких функција од нарочите је важности стога, што је употребљив за *све вредности* z *у равни те променљиве*, при чему се нема потребе водити рачуна ни о каквој конвергенцији, пошто су функције Al целе функције, па се могу развити у Maclaurin-ов ред конвергентан у целој равни z. При свима другим начинима изражавања елиптичких функција помоћу редова то није случај, јер је ред конвергентан и употребљив само у одређеној области равни z.

29. WEIERSTRASS-ОВЕ ФУНКЦИЈЕ Al

Те целе функције, чија је улога у теорији елиптичких функција наведена малочас, могу се, пре свега, развити у Maclaurin-ов ред конвергентан у целој равни z. Тако се налази да је

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}z &= 1 - \frac{A_4}{4!}z^4 + \frac{A_6}{6!}z^6 - \frac{A_8}{8!}z^8 + \ldots,\\
\mathrm{Al}_1 z &= z - \frac{B_3}{3!}z^3 + \frac{B_5}{5!}z^5 - \frac{B_7}{7!}z^7 + \ldots,\\
\mathrm{Al}_2 z &= 1 - \frac{C_2}{2!}z^2 + \frac{C_4}{4!}z^4 - \frac{C_6}{6!}z^6 + \ldots,\\
\mathrm{Al}_3 z &= 1 - \frac{D_2}{2!}z^2 + \frac{D_4}{4!}z^4 - \frac{D_6}{6!}z^6 + \ldots,
\end{aligned}$$

где је сваки од коефицијената A_n, B_n, C_n, D_n *рационалан разломак који има за именилац* n!, *а за бројилац по један полином по* k, *са коефицијентима целим бројевима.*

Поступним израчунавањем тих коефицијената налази се да је

$$\begin{array}{ll}
A_4 = 2k^2, & B_3 = 1+k^2, \\
A_6 = 8(k^2+k^4), & B_5 = 1+k^4+4k^2, \\
A_8 = 32(k^2+k^6)+68k^4, & B_7 = 1+k^6+9(k^2+k^4), \\
A_{10} = 128(k^2+k^8)+480(k^4+k^6), & B_9 = 1+k^8+16(k^2+k^6)-6k^4, \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
C_2 = 1, & D_2 = k^2, \\
C_4 = 1+2k^2, & D_4 = 2k^2+k^4, \\
C_6 = 1+6k^2+8k^4, & D_6 = 8k^2+6k^4+k^6, \\
C_8 = 1+12k^2+60k^4+32k^6, & D_8 = 32k^2+60k^4+12k^6+k^8, \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

Функције Al су међу собом везане разним коначним и диференцијалним релацијама, од којих ће бити изведене ове што следују.

Кад се у једначинама

$$\mathrm{sn}^2 z + \mathrm{cn}^2 z = 1, \quad k^2 \mathrm{sn}^2 z + \mathrm{dn}^2 z = 1$$

смене $\mathrm{sn}\, z$, $\mathrm{cn}\, z$, $\mathrm{dn}\, z$ својим вредностима

$$\text{(109)} \qquad \mathrm{sn}\, z = \frac{G_1(z)}{G(z)}, \quad \mathrm{cn}\, z = \frac{G_2(z)}{G(z)}, \quad \mathrm{dn}\, z = \frac{G_3(z)}{G(z)},$$

добијају се између функција G_k релације

$$\text{(110)} \qquad G_1^2 + G_2^2 = G^2, \quad k^2 G_1^2 + G_3^2 = G^2.$$

Међутим, из једначине (105) добија се да је

$$\log G = -\int_0^z Z(z)\, dz$$

одакле је, после два узастопна диференцијаљења,

$$(\log G)'' = -Z'(z).$$

Са друге стране из једначине (103) је

$$Z'(z) = k^2 \mathrm{sn}^2 z,$$

према чему је

$$(\log G)'' = -k^2 \mathrm{sn}^2 z = -k^2 \left(\frac{G_1}{G} \right)^2.$$

Одатле је

$$G_1 = \frac{G}{k}\sqrt{-(\log G)''}$$

или, кад се то развије,

(111) $$G_1 = \frac{1}{k}\sqrt{G'^2 - G\,G''},$$

а тај образац изражава функцију $\mathrm{Al}_1 z$ помоћу функције $\mathrm{Al} z$.

Из једначина (110), сменом (111), добијају се обрасци

(112) $$G_2 = \sqrt{G^2 + \frac{1}{k}(G\,G'' - G'^2)},$$

(113) $$G_3 = \sqrt{G^2 + G\,G'' - G'^2},$$

који изражавају функције $\mathrm{Al}_2 z$ и $\mathrm{Al}_3 z$ помоћу функцује $\mathrm{Al} z$.

Све три функције

$$\mathrm{Al}_1 z,\ \mathrm{Al}_2 z,\ \mathrm{Al}_3 z$$

изражавају се дакле помоћу основне функције $\mathrm{Al} z$ *и њеног првог и другог извода.*

Од интереса је приметити и то да се за $k = 0$ две од фукција Al своде на 1, а друге две на $\sin z$ и $\cos z$. Јер из обрасца (103) се види да се за $k = 0$ функција $Z(z)$ своди на нулу, што значи да се функција G своди на јединицу; пошто се тада $\mathrm{sn}\, z$ своди на $\sin z$, $\mathrm{cn}\, z$ на $\cos z$, а $\mathrm{dn}\, z$ на 1, то се види да за $k = 0$ функције Al постају

$$\mathrm{Al} = 1, \quad \mathrm{Al}_1 = \sin z, \quad \mathrm{Al}_2 = \cos z, \quad \mathrm{Al}_3 = 1.$$

Приметимо још и то, да функције Al нису једине помоћу којих се основне елиптичке функције изражавају као количници двеју целих функција. То се постиже и помоћу једне целе функције, коју је у теорију елиптичких функција увео Jacobi и која се може развити, за све вредности z, у ред облика

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{nz + an^2},$$

а где је a одређена константа, чији је реални део негативан, чиме је осигурана конвергенција реда.

Међутим, метода Weierstrass-а, напред изложена, која проблем решава помоћу функција Al, не само што је знатно простија од осталих, већ је и општија, јер се примењује и на друге елиптичке функције у бескрајном броју

30. РАЗВИЈАЊЕ У РЕД ЧИЈИ СУ ЧЛАНОВИ РАЦИОНАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ ИЗРАЗА e^{az}

Напред је проучена функција $f(z)$ изражена редом

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n, \tag{114}$$

где је

$$u_n=\frac{e^{z+n\omega}}{(e^{\alpha}-e^{z+n\omega})(e^{\beta}-e^{z+n\omega})}, \tag{115}$$

где су α, β, ω константе (реални део константе ω треба да је негативан), па је нађено да она има две периоде $\omega_1=\omega$ и $\omega_2=2\pi i$, а да као полове има вредности $z=\alpha$ и $z=\beta$, као и оне што се добијају из ових придавањем мултипла периода. Сви су ти полови првога реда.

Уочимо сад функцију

$$\varphi(z)=f(z)-\mu\cdot\operatorname{sn}\lambda z, \tag{116}$$

где су μ и λ две неодеђене константе. Подесним избором свих констаната може се учинити

1° да функција $\varphi(z)$ има периоде једнаке периодама функције $\operatorname{sn}\lambda z$;

2° да $\varphi(z)$ има исте полове као $\operatorname{sn}\lambda z$;

3° да $f(z)$ има за те полове исте остатке као $\mu\cdot\operatorname{sn}\lambda z$.

Пошто $\operatorname{sn}\lambda z$ има за периоде вредности

$$\frac{4K}{\lambda}\quad\text{и}\quad\frac{2iK'}{\lambda},$$

па дакле и вредност $-\dfrac{4K}{\lambda}$, то ће услов 1° бити испуњен кад се λ и ω изаберу тако да буде

$$\omega=-\frac{4K}{\lambda},\qquad 2\pi i=\frac{2iK'}{\lambda},$$

а то ће бити ако се узме

$$\lambda=\frac{K'}{\pi},\qquad \omega=-\frac{4K\pi}{K'}.$$

А пошто $\operatorname{sn}\lambda z$ има у основном паралелограму периода за полове вредности

$$\frac{iK'}{\lambda} = \pi i \quad \text{и} \quad \frac{2K + iK'}{\lambda} = \frac{2K\pi}{K'} + \pi i,$$

то ће услов 2° бити испуњен ка се за α и β узму те две вредности.

Тада обе функције $f(z)$ и $\mu \cdot \operatorname{sn} \lambda z$ имају исте полове, који су сви првога реда. Према ранијем општем ставу, који важи за све мероморфне двопериодичне функције, збир остатака за те полове једнак је нули за сваку појединце од тих функција, па дакле и за функције $\varphi(z)$, За функцију $\operatorname{sn} \lambda z$ ти су остаци, за један пол у основном паралелограму периода, $-\frac{1}{k\lambda}$, а за други пол $+\frac{1}{k\lambda}$. Јер, пошто је у близини једнога пола $t = a$ функције $\operatorname{sn} t$

$$\operatorname{sn} t = -\frac{1}{k}\frac{1}{t-a} + \dots$$

биће у близини пола $z = \frac{a}{\lambda} = \alpha$ функције $\operatorname{sn} \lambda z$

$$\operatorname{sn} \lambda z = -\frac{1}{k}\frac{1}{\lambda z - \alpha} + \dots = -\frac{1}{k\lambda}\frac{1}{z-\alpha} + \dots$$

тако, да ће остатак за тај пол бити $-\frac{1}{k\lambda}$, па за други пол он мора бити $+\frac{1}{k\lambda}$, пошто је збир остатака једнак нули. За функцију $\mu \cdot \operatorname{sn} \lambda z$ остатак за један пол биће, дакле, $-\frac{\mu}{k\lambda}$, а за други пол ће бити $+\frac{\mu}{k\lambda}$.

Са друге стране, за функцију $f(z)$ остаци такође морају бити међу собом једнаки а супротно означени, пошто је и њихов збир једнак нули. Нека су ти остаци $-B$ и $+B$; ако се за константу μ узме вредност

$$\mu = \frac{kBK'}{\pi},$$

биће испуњен и услов 3°.

Кад је тако изабрано свих пет констаната

$$\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu,\ \omega$$

функција $\varphi(z)$ ће испуњавати ове погодбе:

а) то је једна мероморфна двопериодична функција;

б) она има у своме основном паралелограму периода два пола, која су оба првог реда.

Међутим, остатак за сваки пол једнак је нули, пошто је тај остатак једнак разлици остатака функција $f(z)$ и $\mu \cdot \operatorname{sn} \lambda z$, а ови су међу собом једнаки. Према томе у Laurent-овом реду за $\varphi(z)$ недостајаће члан са $\dfrac{1}{z-\alpha}$, као и члан са $\dfrac{1}{z-\beta}$, што значи да су тачке $z=\alpha$ и $z=\beta$ обичне тачке за ту функцију. Па пошто она не може имати каквих других сингуларитета, осим α и β (и њихових хомолога), то би она била двопериодична фукција без сингуларитета; таква функција, према раније доказаном општем ставу своди се на константу.

Према томе је

$$f(z)-\mu\cdot\operatorname{sn}\lambda z=C$$

из чега се, сменивши z са $\dfrac{z}{\lambda}$, добија да је

$$\operatorname{sn} z=\frac{1}{\mu}f\left(\frac{z}{\lambda}\right)-C=\frac{\pi}{kBK'}f\left(\frac{\pi z}{K'}\right)-C. \tag{117}$$

Па пошто се $f(z)$ изражава као збир реда чији су чланови рационалне функције израза e^z, то се види *да се функција* $\operatorname{sn} z$ *може изразити као збир реда чији су чланови рационалне функције израза*

$$e^{az},\left(a=\frac{\pi}{K'}\right).$$

Константа C, пошто одговара датој функцији $\operatorname{sn} z$, добија се кад се у обрасцу (117) стави да је $z=0$, што даје

$$C=\frac{\pi}{kBK'}f(0)=\frac{\pi}{kBK'}\sum_{n-\infty}^{\infty}u_n,$$

где је

$$u_n=\frac{e^{n\omega}}{(e^{\alpha}-e^{n\omega})(e^{\beta}-e^{n\omega})}$$

пошто се у томе изразу смене α, β, ω напред нађеним вредностима.

Константа C се, дакле, добија као збир једнога реда који је конвергентан, јер је константа ω негативна, а његов се општи члан u_n за велике позитивне вредности n понаша као

$$\frac{e^{n\omega}}{e^{\alpha+\beta}}$$

тј. као општи члан геометријске прогресије

$$e^{\alpha+\beta}(q+q^2+q^3+\ldots)$$

где је

$$q = e^{\omega} < 1,$$

а за велике негативне вредности n он се понаша као $\dfrac{1}{e^{-n\omega}}$, тј. као члан геометријске прогресије

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \ldots$$

где је

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{e^{-\omega}} = e^{\omega} < 1.$$

Сличан се резултат добија и за друге две елиптичке функције cn z и dn z, пошто су им полови исти и истога реда као и за sn z.

ПЕТИ ОДЕЉАК

ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ ДЕФИНИСАНЕ ИНВЕРЗИЈОМ ОПШТИЈИХ ИНТЕГРАЛА

31. ИНВЕРЗИЈА ИНТЕГРАЛА ШТО САДРЖЕ КВАДРАТНИ КОРЕН ОПШТЕГ ПОЛИНОМА ТРЕЋЕГ ИЛИ ЧЕТВРТОГ СТЕПЕНА

У овоме што претходи проучене су функције дефинисане инверзијом интеграла

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \tag{118}$$

тј. интеграла у коме се под квадратним кореном налази један специјалан полином четвртог степена.

У овоме ће одељку бити проучене функције које се добијају инверзијом интеграла

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{F(u)}} \tag{119}$$

где је F (u) *ма какав полином четвртог степена*

$$F(u) = Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E \tag{120}$$

Пре свега, да би интеграл својом инверзијом могао дати какву двопериодичну функцију, све нуле полинома $F(u)$ морају бити просте. Јер, кад би која нула, нпр. $u = c$ била двострука, у $F(u)$ би се јавио као корени чинилац израз $(u-c)^2$, тако да би под квадратним кореном остао полином другога степена по u, а инверзије интеграла што садрже квадратни корен каквог полинома другог степена нису двопериодичне функције. Тако би исто било кад би корен био троструки или четвороструки, или кад више од једног корена не би били прости.

Нека су, дакле, c_1, c_2, c_3, c_4 нуле полинома $F(u)$, које су све просте, па се може написати

$$F(u) = A(u - c_1)(u - c_2)(u - c_3)(u - c_4).$$

Извршимо смену

$$u = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}, \quad du = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma y + \delta)^2}\, dy, \tag{121}$$

где су α, β, γ, δ неодређене константе. Таква смена претвара једначину

$$dz = \frac{du}{\sqrt{F(u)}}$$

у једначину облика

$$dz = \frac{dy}{\sqrt{\Phi(y)}},$$

где је $\Phi(y)$ полином опет четвртог степена. Подесним избором констаната α, β, γ, δ може се учинити да се последња једначина сведе на облик

$$dz = \frac{dy}{\sqrt{(1 - py^2)(1 - qy^2)}}, \tag{122}$$

где су p и q константе, што се добија стављајући да су коефицијенти степена y и y^3 једнаки нули, и да је коефицијенат степена y^4 једнак јединици, па се онда смени z са $\frac{z}{B}$.

Очевидно је да, ако се тражи да инверзија y интеграла једначине (122) буде двопериодична функција, ниједна од констаната p и q не може бити једнака нули, ни бескрајна, нити може бити $p = q$. И тада је могућно извршити такву смену промењиве y, да се једначина (122) сведе на облик

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}, \tag{123}$$

где ће k бити реалан број који лежи између 0 и 1.

Кад су p и q реални бројеви, таква је смена врло проста. Тако:

1° Кад су оба броја p и q истога знака, па се изврши смена

$$y = \frac{x}{\sqrt{q}}, \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{q}},$$

(где q означује онај од два броја који је већи по апсолутној вредности), једначина (122) претвара се у једначину (123) у којој је

$$(124) \qquad k = \sqrt{\frac{p}{q}}, \quad \text{па дакле} \quad 0 < k < q$$

и тада је

$$y = \frac{1}{\sqrt{q}} \operatorname{sn} z\sqrt{q},$$

где sn има за модуо вредност (124);

2° Кад су бројеви p и q супротних знакова , нпр. q позитиван, а p негативан, па се изврши смена

$$y = \frac{1}{\sqrt{q}}\sqrt{1-x^2}, \qquad dy = -\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

једначина (122) постаје (123), где је

$$(125) \qquad k = \sqrt{\frac{p}{p-q}}, \quad \text{па дакле} \quad 0 < k < 1$$

и тада је

$$y = -\frac{1}{\sqrt{q}} \operatorname{cn}\left(z\sqrt{q-p}\right),$$

где cn има за модуо k вредност (125).

У сваком случају, једначина (119) *не доводи ни до какве нове двопериодичне функције, већ само до рационалних комбинација функција* sn *az и* cn *az*, *где је* a *константа.*

До истог се резултата долази и у случају инверзије интеграла (119), *где је* F(u) *ма какав полином трећег степена*

$$F(u) = Bu^3 + Cu^2 + Du + E.$$

Тај се случај, у осталом, има сматрати као специјалан случај полинома $F(u)$ четвртог степена (120). Јер, кад се у интегралу (120) изврши смена

$$u = \frac{1}{\upsilon}, \qquad du = -\frac{d\upsilon}{\upsilon^2},$$

образац (120) постаје

$$z = -\int \frac{d\upsilon}{\sqrt{D\upsilon^4 + C\upsilon^3 + B\upsilon^2 + A\upsilon}},$$

па се дакле своди на случај полинома четвртог степена, али који има за једну своју нулу вредност $\upsilon = 0$. Одговарајућа тачка $u = \frac{1}{\upsilon}$ налази се тада у бескрајности, тако да се случај полинома трећег степена има сматрати као случај полинома четвртог степена, али који има једну од својих нула у бескрајности. Па пошто је свака нула овога полинома једна критичка тачка функције под интегралним знаком, то се случај полинома трећег степена има сматрати као да је то полином четвртог степена, али такав да функција под интегралним знаком има једну своју критичку тачку у бескрајности.

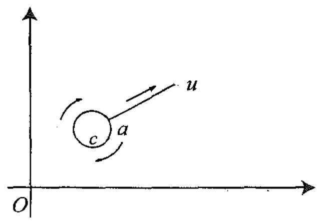
32. НЕКОЛИКО ОСОБИНА ТАКО ДЕФИНИСАНИХ ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА

Нека је c једна нула полинома трећег или четвртог степена $F(u)$, па посматрајмо интеграл

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{F(u)}}. \tag{127}$$

Према напред казаноме, c је проста нула за $F(u)$ кад год инверзија u интеграла (127) дефинише какву двопериодичну функцију. А тада се може доказати овај резултат:

Функција u *увек је парна функција променљиве* z.



Сл. 20.

Да би се то доказало, извршимо интеграцију (127) од тачке c до тачке u идући путањом cu, па ће интеграл имати извесну вредност z. Међутим, ако се, пре но што се пође тим директним путем, изврши око тачке c обрт дуж једнога малог круга (сл. 20), па се тек онда иде директним путем cu, интеграл ће бити једнак збиру два интеграла: једног узетог дуж малога круга, другога узетог дуж путање cu. Први је једнак нули, јер ако се, да би се извршила интеграција дуж круга, стави

$$z = c + re^{\theta i}, \qquad dz = rie^{\theta i} d\theta,$$

лако се уверавамо да интеграл тежи нули кад се r бескрајно смањује. Али, обилажењем око критичке тачке c мења се и детерминација квадратног корена полинома $F(u)$, тако да ако се пошло са (+), после обиласка имаће се (−). Па кад се, са тако промењеним детерминацијом, изврши интеграција дуж директне путање cu, интеграл ће имати вредност z, али са промењеним знаком.

Према томе, једној истој вредности u одговарају две једнаке, а супротно означене вредности $+z$ и $-z$, и обратно, тим двема вредностима одговара једна иста вредност u, што показује да је u, сматрано као функција променљиве z, одиста парна функција.

Тај закључак важи било да је полином F(u) *четвртог, било да је трећег степена.* Приметимо да он не важи кад се за доњу границу интеграла (127) узме каква вредност a која није нула полинома $F(u)$, јер у томе случају вредност $z = a$ није критичка тачка за квадратни корен (127) који, према томе, не мења знак при обиласку око тачке $z = a$.

Као што је показано, инверзија u интеграла (127) је једна рационална комбинација израза sn az и cn az, где је a одређена константа. Па пошто су те две функције униформне, таква ће бити и инверзија u. Она, очевидно, не може имати никаквих других сингуларитета осим полова: то је, дакле, *меромофна двопериодична функција променљиве* z.

Периоде ω_1 и ω_2 функције u поклапају се са заједничким периодима функција sn az и cn az, чија је рационална комбинација функција u. Као и те две функције, кад u добије једну вредност β за једну вредност $z = \alpha$, добиће исту вредност β и за још једну вредност z у своме паралелограму периода што садржи тачку α.

Према томе u ће имати у своме основном паралелограму периода две нуле, од којих је једна

$$z = \int_c^0 \frac{du}{\sqrt{F(u)}}. \tag{128}$$

Све су нуле *просте,* јер кад се у обрасцу

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{F(u)} \tag{129}$$

смени z једном таквом нулом, пошто је за њу $u = 0$, добија се за извод u' вредност $\sqrt{F(0)}$, различна од нуле.

Тако исто ће u имати у паралелограму *два пола,* од којих је један

$$z = \int_c^\infty \frac{du}{\sqrt{F(u)}}. \tag{130}$$

Кад је полином F(u) *четвртог степена, сви су полови првога реда*. Јер сменом

$$u = \frac{1}{\upsilon}, \quad du = -\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} \tag{131}$$

једначина (129) постаје

$$\frac{d\upsilon}{dz} = -\sqrt{\upsilon' \cdot F\left(\frac{1}{\upsilon}\right)} \tag{132}$$

па ако је

$$F(u) = Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E,$$

једначина (132) добија облик

$$\frac{d\upsilon}{dz} = -\sqrt{E\upsilon^4 + D\upsilon^3 + C\upsilon^2 + B\upsilon + A},$$

па, дакле, за $\upsilon = 0$ извод υ' добија вредност $-\sqrt{A}$, различну од нуле.

Међутим, *кад је полином* F(u) *трећег степена, сви су полови другог реда.* Јер ако је

$$F(u) = Bu^3 + Cu^2 + Du + E,$$

једначина (132) је

$$\frac{d\upsilon}{dz} = -\sqrt{E\upsilon^4 + D\upsilon^3 + C\upsilon^2 + B\upsilon}, \tag{133}$$

па за $\upsilon = 0$ извод υ' добија вредност једнаку нули, што значи да је сваки пол функције u пол вишега реда. Па како у основном паралелограму периода u добија једну исту вредност за две вредности z, па дакле има два пола, то се та два пола поклапају. *Функција* u *има, дакле, у паралелограму периода један пол, а тај је пол другога реда.*

33. WEIERSTASS-ОВА НОРМАЛНА ЕЛИПТИЧКА ФУНКЦИЈА

Као што је показано, смена (131) своди једначину

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{F(u)}, \tag{134}$$

где је $F(u)$ полином трећег степена, на једначину (133), где је под квадратним кореном полином четвртог степена, али који има вредност $\upsilon = 0$ као своју просту нулу. Тај квадратни корен има, дакле, $\upsilon = 0$ као своју критичку тачку, па се, према томе, у једначини (134) има сматрати као да јој је под квадратним кореном какав полином четвртог степена, али који има једну критичку тачку у бескрајности.

Узмимо за критичку тачку c ту вредност $c = \infty$ и уочимо интеграл

(135) $$z = \int_{\infty}^{u} \frac{du}{\sqrt{F(u)}},$$

где је

(136) $$F(u) = Bu^3 + Cu^2 + Du + E.$$

Смена

$$u = a\upsilon + b, \quad du = a\, d\upsilon,$$

(a и b су произвољне константе), своди једначину (135) на

$$z = a\int_{\infty}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\sqrt{F(\upsilon)}},$$

где је

$$\Phi(\upsilon) = M\upsilon^3 + N\upsilon^2 + P\upsilon + Q,$$

и где ће коефицијенти M и N имати за вредности

$$M = Ba^3, \quad N = a^2(3Bb + C).$$

Изаберимо за константе a и b такве вредности да буде $M = 4$, $N = 0$, што ће бити ако се узме

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{B}}, \quad b = -\frac{C}{3B},$$

па једначина (137) добија облик

(138) $$\sqrt[3]{\frac{B}{4}}\, z = \int_{\infty}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\sqrt{\Phi(\upsilon)}},$$

где је

(139) $$\Phi(\upsilon) = 4\upsilon^3 - g_2\upsilon - g_3,$$

и где су g_2 и g_3 стални коефицијенти.

Ставимо у (138) u на место υ и уочимо инверзију интеграла

(140) $$z = \int_{\infty}^{u} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}$$

Та инверзија носи назив *нормалне елиптичке функције*. Њу је у теорију елиптичких функција увео Weierstrass, означио је ознаком

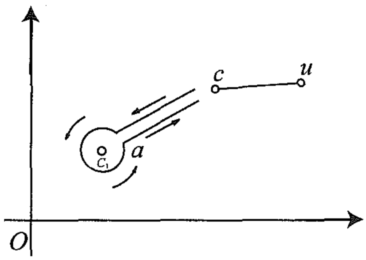
$$u = pz,$$

Испитао јој у појединостима особине и истакнуо на видик њене везе са осталим двопериодичним функцијама.

Из овога, што је напред казано, следује да је pz *мероморфна двопериодична функција* промењљиве z. Да бисмо јој одредили периоде, вратимо се напред посматраном случају кад је

$$z = \int_c^u \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \qquad F(u) = Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E,$$

па нека су c, c_1, c_2, c_3 нуле полинома $F(u)$. Оне су све просте и свака је од њих критичка тачка за квадратни корен под знаком интеграла.



Сл. 21.

Обележимо у равни промењљиве u две од тих нула, нпр. c и c_1 (сл. 21). Кад би се интеграл узео дуж директне путање cu, он би имао извесну вредност z. Ако се пре тога он узме дуж контуре која, полазећи од c, обиђе једним кружићем тачку c_1, па се врати у c, интеграл ће имати за вредност збир од три интеграла: једног узетог дуж путање ca, другога дуж кружића око c_1, и трећег дуж ac, у означеном на слици смислу.

Интеграл дуж кружића једнак је нули, о чему се лако уверавамо ставивши у

$$F(u) = A(u-c)(u-c_1)(u-c_2)(u-c_3),$$

да је

$$u = c_1 + re^{\theta i}, \qquad du = rie^{\theta i} d\theta,$$

и пустивши да се r бескрајно смањује

Интеграл дуж ac једнак је интегралу дуж ca, јер је обиласком око критичке тачке c_1 квадратни корен променио знак, па је још једном променио знак и тиме што је смисао интеграције дуж ac супротан ономе дуж ca.

Према томе ће интеграл дуж целе контуре имати за вредност

$$2\int_c^a \frac{du}{\sqrt{F(u)}},$$

па кад се кружић бескрајно смањи, тако да се тачке a и c_1поклопе, он ће имати за вредност $2K_1$, где је

$$K_1 = \int_c^{c_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}.$$

После тог обиласка стиже се у тачку c са вредношћу $2K_1$ интеграла, а са детерминацијом (–) квадратног корена под интегралним знаком (ако се не обилази и тачка c). Кад се после тога продужи интеграција дуж директне путање cu, стиже се у тачку u са вредношћу $2K_1 - z$ интеграла. Па пошто се обема путањама стиже у исту тачку u, то је

$$u(2K_1 - z) = u(z), \tag{141}$$

што значи да функција u добија једну исту вредност у двема тачкама z и $2K_1 - z$. А пошто је $u(z)$ парна функција (што следује из § 32), сменивши у (141) z са $-z$, добија се да је

$$u(z + 2K_1) = u(z),$$

што значи да функција $u(z)$ има за периоду $2K_1$ (исто би било и кад би се обишла и тачка c, јер је u парна функција).

Међутим, на место критичке тачке $u = c_1$, може се узети још и једна или друга од осталих критичких тачака c_2 и c_3. Ако се, дакле, означи да је

$$K_2 = \int_c^{c_2} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \quad K_3 = \int_c^{c_3} \frac{du}{\sqrt{F(u)}},$$

налази се да:

1° *функција* u *има једну исту вредност у тачкама*

$$z, \quad 2K_1 - z, \quad 2K_2 - z, \quad 2K_3 - z;$$

2° *она има као периоде*

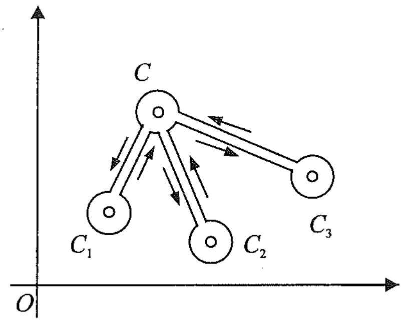
$$\omega_1 = 2K_1, \quad \omega_2 = 2K_2, \quad \omega_3 = 2K_3.$$

Тако би изгледало да u има три основне периоде. Али се лако доказује *да је трећа периода једнака збиру осталих двеју*, па да, према томе, она не представља несводљиву периоду.

Да бисмо се о томе уверили, посматрајмо интеграл

$$\int \frac{du}{\sqrt{F(u)}} \tag{141}$$

узет дуж контуре означене на сл. 22, а са полазном тачком c.



Сл. 22.

Интеграл дуж свакога од кружића око тачака c, c_1, c_2, c_3 једнак је нули, пошто се кружићи могу бескрајно смањивати а да интеграл дуж њих не измени своју вредност. Са друге стране, при обиласку око сваке од тих тачака квадратни корен мења знак. Према томе интеграл дуж целокупне контуре имаће за вредност

$$2K_1 + 2K_2 + 2K_3.$$

Са друге стране, према теореми о еквиваленци интегралних путања, тај ће интеграл бити једнак истоме интегралу узетом дуж круга C са центром у почетку, а који обухвата све четири тачке c, c_1, c_2, c_3. Тај се круг може и бескрајно ширити, јер функција под интегралним знаком (141) нема других сингуларитета осим те четири тачке. Из тога се закључује да је тај интеграл дуж круга C једнак нули. Јер кад се пусти да се тачка u бескрано удаљи од почетка, полином $F(u)$ се понаша као његов члан највишег степена Au^4, а интегрални елеменат као

$$\frac{du}{u^2\sqrt{A}}.$$

Кад се, дакле,ради те интеграције дуж C, стави

$$u = re^{\theta i}, \qquad du = rie^{\theta i} d\theta,$$

интегрални елеменат се понаша као

$$\frac{i}{\sqrt{A}} \frac{e^{-\theta i}}{r} d\theta;$$

он тежи нули кад r бескрајно расте, па ће тада и интеграл, узет између коначних граница 0 и 2π, такође тежити нули; како је његова вредност независна од полупречника r, то је она једнака нули.

Из тога следује да је

$$2K_1 + 2K_2 + 2K_3 = 0,$$

то јест

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

а одатле је

$$\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2);$$

па пошто, кад је $-\omega$ периода, и $+\omega$ је периода, то је горње тврђење доказано.

Напред је показано да кад u добије једну вредност β за једну вредност $z = \alpha$, она ту вредност β добија и у тачкама

$$\alpha' = 2K_1 - \alpha, \quad \alpha'' = 2K_2 - \alpha, \quad \alpha''' = 2K_3 - \alpha.$$

Лако се уверити да су тачке α'' и α''' хомологе тачке α', јер је

$$\alpha'' - \alpha' = 2K_2 - 2K_1 = \omega_2 - \omega_1,$$

$$\alpha''' - \alpha' = 2K_3 - 2K_1 = \omega_3 - \omega_1,$$

према чему је

$$\alpha'' = \alpha' + \omega_2 - \omega_1, \quad \alpha''' = \alpha' + \omega_3 - \omega_1,$$

што показује да се α'' и α''' разликује од α' само додатком периода.

Да би се све то, као и оно што је казано у § 32., применило на нормалну елиптичку функцију pz, треба узети да је $c = \infty$ (та је вредност једна критичка тачка за квадратни корен под интегралним знаком). И тада се налази ово што следује.

Функција pz, има две периоде, за које се могу узети две ма које од трију вредности

$$\omega_1 = 2\int_\infty^{c_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \quad \omega_2 = 2\int_\infty^{c_2} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \quad \omega_3 = 2\int_\infty^{c_3} \frac{du}{\sqrt{F(u)}},$$

где је

$$F(u) = 4u^3 - g_2 u - g_3;$$

трећа је периода своддива на оне две које се буду узеле, пошто је

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Нуле функције су вредности

$$z = -\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{F(u)}},$$

$$z' = 2K_1 - z = 2\int_\infty^{c_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}} + \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{F(u)}}$$

и хомологе тих вредности; све су нуле *просте.*

Сви су полови функције двоструки; сам почетак $z = 0$ је такав пол, јер се за пол добија вредност

$$z = \int_\infty^\infty \frac{du}{\sqrt{F(u)}} = 0,$$

а остали су полови њене хомологе

$$z = m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Пошто $z = 0$ није обична тачка за функцију, *шѿо се ова не може развиѿи у Maclaurin-ов ред*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

Али, пошто је $z = 0$ пол другога реда, она се за вредности z у близини тога пола *може развиѿи у Laurent-ов ред* облика

$$\frac{B_2}{z^2} + \frac{B_1}{z} + A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

А пошто је функција парна, тај ред мора садржати само парне степене променљиве z, па дакле је облика

$$pz = \frac{B_2}{z^2} + A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \ldots \tag{142}$$

из чега се види *да је осѿаѿак за ӣол* z = 0 *једнак нули, ӣа ће ѿако биѿи и за све осѿале ӣолове.*

Коефицијенти $B_2, A_0, A_2, A_4, \ldots$ одређују се сменом израза (142) и израза

$$p'z = -\frac{2B_2}{z^3} + 2A_2 z + 4A_4 z^3 + \ldots$$

у диференцијалној једначини

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)^2 = p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3 \tag{143}$$

коју задовољава функција pz. Упоређењем чланова са истим степенима променљиве z на левој и десној страни тако добијене једначине, налази се да је

$$B_2 = 1, \quad A_0 = 0,$$

$$A_2 = \frac{g_2}{20}, \quad A_4 = \frac{g_3}{28}, \quad A_6 = \frac{g_2^2}{240},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

И тако се може одредити колико се хоће узастопних коефицијената A_n.

Према томе *Laurent-ов ред за функцију pz је облика*

$$\text{(144)} \qquad \text{p}z = \frac{1}{z^2} + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \ldots$$

тј. ред не садржи ни члан са $\frac{1}{z}$, ни независан члан. На тој је чињеници основано *изражавање функције pz као количника двеју целих функција*. Потпуно слично ономе које је напред изложено за функције sn z, cn z, dn z.

34. АДИЦИОНА ТЕОРЕМА ЗА ФУНКЦИЈУ pz

На начин сличан ономе којим се долази до адиционе теореме за функције sin z и sn z, напред изложене, долази се и до адиционе теореме за функцију pz. Та теорема исказује *да се вредност* $p(\alpha + \beta)$ *изражава као алгебарска функција вредности*

$$p\alpha,\ p\beta,\ p'\alpha,\ p'\beta$$

тј. као алгебарска функција самих израза $p\alpha$ *и* $p\beta$ *у облику обрасца*

$$\text{(145)} \qquad p(\alpha + \beta) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'\alpha - p'\beta}{p\alpha - p\beta}\right)^2 - p\alpha - p\beta,$$

где још треба сменити $p'\alpha$ и $p'\beta$ њиховим вредностима

$$\text{(146)} \qquad \begin{aligned} p'\alpha &= \sqrt{4p^3\alpha - g_2 p\alpha - g_3}, \\ p'\beta &= \sqrt{4p^3\beta - g_2 p\beta - g_3}. \end{aligned}$$

Кад се β смени са $-\beta$ и примети да је pz парна, а $p'z$ непарна функција променљиве z, добија се образац

$$\text{(147)} \qquad p(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'\alpha + p'\beta}{p\alpha - p\beta}\right)^2 - p\alpha - p\beta,$$

па се од образаца (145) и (147) може чинити иста онаква употреба, као и од адиционих образаца за функцију sn z.

Тако, узевши да је $\beta = \alpha$, лева страна обрасца (145) постаје $p(2\alpha)$, а заграда на десној страни јавља се у облику $\frac{0}{0}$. Да би смо нашли њену праву вредност, ставимо да је $\beta = \alpha + h$, па пустимо да h тежи нули. Заграда тада постаје

$$\left[\frac{p'(\alpha+h)-p'\beta}{p(\alpha+h)-p\beta}\right]^2=\left(\frac{p''\alpha}{p'\alpha}\right)^2,$$

па је, дакле,

$$p(2\alpha)=\frac{1}{4}\left(\frac{p''\alpha}{p'\alpha}\right)^2-2p\alpha. \tag{148}$$

Према обрасцу (143) извод $p'\alpha$ изражава се као алгебарска функција израза $p\alpha$. Из истог обрасца добија се диференцијаљењем и скраћењем са $2p'\alpha$ да је

$$p''z=6p^2z-\frac{g_2}{2},$$

па се помоћу тога обрасца за други извод $p''z$ и обрасца (143) за први извод израза $p(2\alpha)$ изражава као рационална функција израза $p\alpha$ и $p\beta$.

Обрасци (145) и (147) доводе до образаца за збир и разлику израза $p\alpha$ и $p\beta$, који решавају исти задатак као и Napier-ови обрасци у Тригонометрији. Тако, ако се развију квадрати заграда у тим обрасцима, добија се

$$p(\alpha-\beta)-p(\alpha+\beta)=\frac{p'\alpha\cdot p'\beta}{(p\alpha-p\beta)^2};$$

па ако се ту стави да је

$$\alpha-\beta=a,\qquad \alpha+\beta=b,$$

одакле је

$$\alpha=\frac{b+a}{2},\qquad \beta=\frac{b-a}{2},$$

добија се образац

$$pa-pb=\frac{p'\left(\frac{b+a}{2}\right)\cdot p'\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\left[p\left(\frac{b+a}{2}\right)-p\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]},$$

а на сличан начин би се добио и образац за збир израза $p\alpha$ и $p\beta$.

35. ФУНКЦИЈА pz ИЗРАЖЕНА КАО КОЛИЧНИК ЦЕЛИХ ФУНКЦИЈА

Помоћу функције pz формирајмо функцију

(148) $$\zeta(z) = -\int pz \cdot dz.$$

Пошто се pz може, за вредности z у близини тачке $z = 0$, развити у ред облика

(149) $$pz = \frac{1}{z^2} + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \ldots$$

то се $\zeta(z)$ може развити у ред облика

(150) $$\zeta(z) = \frac{1}{z} + az^3 + bz^5 + \ldots$$

из чега се види да је ζ *непарна* функција променљиве z. Она не може имати других сингуларитета до оних што их има функција pz. Образац (150), који важи и кад се у њему тачка $z = 0$ смени ма којом својом хомологом, показује да ζ има *бескрајно много полова, који су сви првога реда и који су облика*

$$z = m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

(где су ω_1 и ω_2 напред одређене периоде функције pz), а *који сви имају за остатак* 1.

Међутим функција ζ *нема за периоде ни* ω_1 *ни* ω_2. Јер, ако је ω једна од тих периода, пошто је из (148)

$$\zeta'(z) = -pz,$$

извод $\zeta(z)$ има исте периоде као pz. Али то не важи и за саму функцију ζ, јер интеграција једначине

$$\zeta'(z + \omega) = \zeta'(z)$$

увлачи једну интеграциону константу C и даје

$$\zeta(z + \omega) = \zeta(z) + C$$

Ако се у тој једначини стави да је $z = -\dfrac{\omega}{2}$, добија се

$$\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right) + C,$$

што даје

$$C = 2 \cdot \zeta\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

па дакле

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + 2 \cdot \zeta\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

што показује да ω није периода функција ζ.

Формирајмо сад функцију

$$\sigma(z) = e^{\int \zeta(z)\, dz} \tag{151}$$

која се непосредно помоћу функције pz изражава у облику

$$\sigma(z) = e^{-\int\int pz \cdot dz}.$$

Пошто је

$$\int pz\, dz = \log z + \frac{A_2}{3} z^3 + \frac{A_4}{4} z^5 + \ldots,$$

то је

$$\sigma(z) = z e^{\varphi(z)}, \tag{152}$$

где је $\varphi(z)$ једна функција која има $z = 0$ као своју обичну тачку. Па како та функција не може имати других сингуларитета, до оних што их има pz, а то је тачка $z = 0$ и њене хомологе, то излази *да је* $\sigma(z)$ *цела функција променљиве* z.

Ако се сад уочи функција

$$G(z) = pz \cdot \sigma(z)^2, \tag{153}$$

из образаца (149) и (152) види се да ће тачка $z = 0$ бити обична тачка за функцију $G(z)$, јер се при множењу функција p и σ^2 члан $\frac{1}{z^2}$ потире са z^2. Па пошто и $G(z)$ не може имати других сингуларитета осим вредности $z = 0$ и њених хомолога то ће и та *функција* G(z) *бити цела функција променљиве* z.

Једначина (153) тада даје

$$pz = \frac{G(z)}{\sigma(z)^2}, \tag{154}$$

а тиме је функција pz *изражена као количник двеју целих функција.*

Целе функције $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ увео је у теорију елиптичких функција Weierstrass и проучио им је особине. Оне су у тој теорији познате под називом „зета функција" и „сигма-функција".

Функција σ се изражава помоћу ζ обрасцем (151), а ζ се изражава помоћу σ обрасцем

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz}\log\sigma(z),$$

који се добија логаритмисањем и диференцијаљењем обрасца (151).

Из адиционе теореме за функцију pz изводи се за ζ образац

$$\zeta(\alpha+\beta) = \zeta(\alpha)+\zeta(\beta)+\frac{1}{2}\frac{p'\alpha - p'\beta}{p\alpha - p\beta}$$

који, у вези са обрасцима

$$pz = -\zeta'(z), \qquad p'z = -\zeta''(z),$$

изражава $\zeta(\alpha+\beta)$ помоћу израза

$$\zeta(\alpha), \zeta(\beta), \zeta'(\alpha), \zeta'(\beta), \zeta''(\alpha), \zeta''(\beta)$$

и то као рационалну функцију тих израза.

36. ВЕЗА ФУНКЦИЈЕ pz СА ФУНКЦИЈАМА sn z, cn z, dn z

Ако се у једначини

(155) $$dz = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

изврши смена

(156) $$u^2 = \frac{1}{\upsilon + a}, \qquad du = \frac{d\upsilon}{2(\upsilon+a)^{\frac{3}{2}}},$$

она постаје

(157) $$dz = \frac{-d\upsilon}{\sqrt{4\upsilon^3 + c\upsilon^2 + g\upsilon + h}},$$

где је

$$
\begin{aligned}
&c = 4(3a - k^2 - 1),\\
(158)\qquad &g = 12a^2 - 8a(1+k^2) + 4k^2,\\
&h = 4a^3 - 4a^2(1+k^2) + 4ak^2.
\end{aligned}
$$

Константа a може се изабрати тако да буде $c = 0$, што ће бити ако се узме

$$
(159)\qquad a = \frac{1+k^2}{3}.
$$

Заменом те вредности у једначинама (158) једначина (157) постаје

$$
(160)\qquad dz = \frac{-d\upsilon}{\sqrt{4\upsilon^3 + g_2\upsilon - g_3}},
$$

где је

$$
g_2 = -\frac{4}{3}(1 - k^2 + k^4), \qquad g_3 = \frac{4}{3}k^2(1+k^2).
$$

Између интеграла $u = \operatorname{sn} z$ једначине (155) и функције υ постоји релација (156) где a има вредност (159). Па пошто једначина (160) има за интеграл функцију $p\,z$, *што између* $p\,z$ *и* $\operatorname{sn} z$ *постоји веза*

$$
(161)\qquad \operatorname{sn}^2 z = \frac{1}{p\,z + \dfrac{1+k^2}{3}}
$$

или

$$
(162)\qquad p\,z = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 z} - \frac{1+k^2}{3}.
$$

Помоћу везе функције $\operatorname{sn} z$ са функцијама $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$, добијају се за ове функције њихове везе са $p\,z$, а то су

$$
\operatorname{cn}^2 z = 1 - \frac{1}{p\,z + \dfrac{1+k^2}{3}},
$$

$$
\operatorname{dn}^2 z = 1 - \frac{k^2}{p\,z + \dfrac{1+k^2}{3}}
$$

или

$$
p\,z = \frac{1}{1 - \operatorname{cn}^2 z} - \frac{1+k^2}{3},
$$

$$pz = \frac{k^2}{1-\mathrm{dn}^2 z} - \frac{1+k^2}{3}$$

Само треба приметити да везе изражене горњим обрасцем не важе за *ма какве* функције sn z (односно cn z и dn z) и pz. Функција pz садржи два променљива параметра g_2 и g_3; горње везе постоје између једне дате, уосталом ма које, функције sn z и једне тада *тачно одређене функције* pz, и то оне чији су параметри одређени помоћу модула k функције sn z обрасцима (158) и (159).

Из тих веза долази се и до закључка о вези између појединих особина функција sn z и њој одговарајуће функције pz. Тако: функција pz има за полове нуле функције sn z; за сваки пол функције sn z функција pz добија вредност $-\frac{1+k^2}{3}$ итд.

Везе између sn z, cn z, dn z и функција pz које имају друге параметре g_2 и g_3 компликованије су и не улазе у оквир ових предавања.

37. СВОДЉИВОСТ СВИХ МЕРОМОРФНИХ ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА НА ЛИНЕАРНЕ КОМБИНАЦИЈЕ ФУНКЦИЈЕ ζ И ЊЕНИХ ИЗВОДА

Нека је $F(z)$ једна ма која мероморфна двопериодична функција, чије периоде нека су ω_1 и ω_2. Означимо са

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

полове те функције у њеноме основном паралелограму периода, и нека је m_k ред пола α_k

Према општој Mittag - Leffler-овој теореми за изражавање мероморфних функција, може се написати да је

$$(163)\quad F(z) = \sum \left[\frac{A_k}{z-\alpha_k} + \frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2} + \ldots + \frac{H_k}{(z-\alpha_k)^m} \right] + G(z),$$

где је $G(z)$ једна цела функција и где се сумирање протеже на све полове α_k. Ред је конвергентан за све вредности z, осим за саме полове α_k.

Нека је pz нормална елиптичка функција која има исте периоде ω_1 и ω_2 које има и $F(z)$. Из обрасца (150) добија се да је

$$\frac{1}{z} = \zeta(z) - az^3 - bz^5 - \ldots,$$
$$\frac{1}{z^2} = -\zeta'(z) + 3az^2 + 5bz^4 + \ldots,$$
$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{2}\zeta''(z) - 3az - 10bz^3 + \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Сменивши у тим обрасцима z са $z-\alpha_k$ добија се низ образаца

$$\frac{1}{z-\alpha_k} = \zeta(z-\alpha_k) - \psi_1(z),$$
$$\frac{1}{(z-\alpha_k)^2} = -\zeta'(z-\alpha_k) + \psi_2(z),$$
$$\frac{1}{(z-\alpha_k)^3} = \frac{1}{2}\zeta''(z-\alpha_k) - \psi_3(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где су $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ функције које имају $z-\alpha_k$ као обичну тачку.

Множећи леве и десне стране последњих образаца са $A_k, B_k, \ldots, H_k$ и сабирајући тако добијене једначине, добија се

$$\frac{A_k}{z-\alpha_k} + \frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2} + \ldots + \frac{H_k}{(z-\alpha_k)^m} =$$

$$= M_0\zeta(z-\alpha_k) + M_1\zeta'(z-\alpha_k) + \ldots + M_m\zeta^{(m)}(z-\alpha_k) + \Phi_k(z),$$

где су $M_0, M_1, \ldots, M_m$ стални коефицијенти, а Φ_k једна функција која има α_k као своју обичну тачку.

Према обрасцу (163) може се тада написати да је

$$F(z) = \sum M_0\zeta(z-\alpha_k) + \tag{164}$$

$$+\sum\left[M_1\zeta'(z-\alpha_k) + .. + M_m\zeta^{(m)}(z-\alpha_k)\right] + H(z).$$

где се знак сумирања протеже на све полове α_k и где је $H(z)$ једна функција која има те полове као обичне тачке.

За први збир на десној страни једначине (164) може се доказати да представља једну функцију $\varphi(z)$ која има за периоде ω_1 и ω_2. Јер, ако се са ω означи једна или друга од тих периода, напред је показано да је

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + 2\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

према чему је

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z) + 2\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot\sum M_0. \tag{165}$$

Међутим, коефицијенти M_0 нису ништа друго до коефицијенти A што множе

$$\frac{1}{z-\alpha_1}, \quad \frac{1}{z-\alpha_2}, \quad \frac{1}{z-\alpha_3}, \ldots$$

у изразу (163) за функцију $F(z)$; то су, дакле, остаци те функције за њене полове $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Па пошто је $F(z)$ мероморфна двопериодична функција, то је збир тих остатака једнак нули, тако да је

$$\sum M_0 = 0,$$

и једначина (165) се своди на

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z),$$

што показује да $\varphi(z)$ има ω као периоду, па према томе има обе вредности ω_1 и ω_2 за периоде.

За други збир је очевидно да има те исте периоде, пошто је напред показано да те периоде има први извод $\zeta'(z)$, па ће их, према томе, имати и сви изводи те функције. Из тога следује да ће и $H(z)$ имати те исте периоде, као линеарна комбинација самих двопериодичних функција. Па пошто та функција има вредности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ као обичне тачке, а не може ван тих вредности имати никаквих сингуларитета, она је *цела* функција променљиве z. А како се цела функција, која има две периоде, своди на једну константу C, образац (164) постаје

$$F(z), = C + \sum\left[M_0\zeta(z-\alpha_k) + \right. \tag{166}$$

$$\left. + M_1\zeta'(z-\alpha_k) + \ldots + M_m\zeta^{(m)}(z-\alpha_k)\right]$$

и исказује ову теорему, познату под називом *Hermite-ове теореме:*

Свака мероморфна двопериодична функција F(z) *изражава се као линеарна комбинација ограниченог броја израза*

$$\zeta(z-\alpha_k), \quad \zeta'(z-\alpha_k), \quad \zeta''(z-\alpha_k), \ldots$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ *полови функције* F(z) *у њеноме паралелограму периода, а* ζ *означује Weierstrass-ову зета-функцију, формирану помоћу функције* $p z$ *која има исту периоду као* F(z).

Важност теореме лежи у томе, што она своди све мероморфне двопериодичне функције на једну једину функцију, а то је *зеша-функција.* Кад је ова проучена, може се сматрати да су проучене и све мероморфне двопериодичне функције у ономе што је за њих битно.

Једна од важних последица Hermite-ове теореме је ова:

Неодређени инпеграл

$$\int F(z)\,dz \tag{167}$$

једне ма које мероморфне двопериодичне функције изражава се као линеарна комбинација ограниченог броја израза

$$\log\sigma(z-\alpha_k), \qquad \frac{d}{dz}\log\sigma(z-\alpha_k), \qquad \frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z-\alpha_k), \ldots$$

где $\sigma(z)$ *означава Weierstrass-ову сигма-функцију, формирану помоћу функције* $p\,z$ *која има исшу периоду као* F(z).

То излази отуда што је

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz}\log\sigma(z),$$

па је према томе

$$\int \zeta(z-\alpha_k)\,dz = \log(z-\alpha_k),$$
$$\int \zeta'(z-\alpha_k)\,dz = \zeta(z-\alpha_k) = \frac{d}{dz}\log\sigma(z-\alpha_k),$$
$$\int \zeta''(z-\alpha_k)\,dz = \zeta'(z-\alpha_k) = \frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z-\alpha_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Такав је начин изражавања интеграла (167) сличан ономе на који се изражава интеграл једне рационалне функције $R(z)$. Као што се зна, таква функција се изражава као линеарна комбинација ограниченог броја израза

$$\frac{1}{z-\alpha_k}, \quad \frac{1}{(z-\alpha_k)^2}, \quad \frac{1}{(z-\alpha_k)^3}, \ldots$$

или, што је исто, као линеарна комбинација израза

$$\lambda(z-\alpha_k), \quad \lambda'(z-\alpha_k), \quad \lambda''(z-\alpha_k), \ldots$$

где је

$$\lambda(z) = \frac{1}{z},$$

а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ означују полове функције $R(z)$.

Интеграл

$$\int R(z)\, dz$$

изражава се, дакле, као линеарна комбинација ограниченог броја израза

$$\log(z-\alpha_k), \quad \frac{d}{dz}\log(z-\alpha_k), \quad \frac{d^2}{dz^2}\log(z-\alpha_k), \ldots$$

Функција $\frac{1}{z}$ је, дакле, *редуктивни елеменат* за све рационалне функције, а зета-функција је редуктивни елеменат за све мероморфне двопериодичне функције.

Тако исто, логаритам је такав елеменат за интеграл ма какве рационалне функције, а сигма-функција за ма какву мероморфну двопериодичну функцију.

38. СВОДЉИВОСТ СВИХ МЕРОМОРФНИХ ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА НА РАЦИОНАЛНЕ КОМБИНАЦИЈЕ ФУНКЦИЈА $\operatorname{sn} z$ И $\operatorname{sn}' z$

Према ономе што је горе показано, свака се мероморфна двопериодична функција $F(z)$ може изразити у облику (166) где је

$$\sum M_0 = 0, \tag{168}$$

и где су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ полови функције $F(z)$ садржани у њеном паралелограму периода.

Према напред доказаном обрасцу за све вредности α и β је:

$$\zeta(\alpha+\beta) = \zeta(\alpha)+\zeta(\beta)+\frac{1}{2}\frac{p'\alpha - p'\beta}{p\alpha - p\beta}, \tag{169}$$

па, кад се α смена са z, а β са $-\alpha_k$, добија се да је

$$\zeta(z-\alpha_k) = \zeta(z)-\zeta(\alpha_k)+\frac{1}{2}\frac{p'z - p'\alpha_k}{pz - p\alpha_k}, \tag{170}$$

тако да је

$$\sum M_0\zeta(z-\alpha_k) = \zeta(z)\sum M_0 - \sum M_0\zeta(\alpha_k) + \frac{1}{2}\sum M_0 \cdot \frac{p'z - p'\alpha_k}{pz - p\alpha_k}.$$

Пошто је израз

$$-\sum M_0\zeta(\alpha_k)$$

независан од z, па дакле представља једну константу C, то се према (168) налази да је

$$\sum M_0\zeta(z-\alpha_k) = C + \frac{1}{2}\sum M_0 \cdot \frac{p'z - p'\alpha_k}{pz - p\alpha_k}.$$

из чега се види да је израз

$$\sum M_0\zeta(z-\alpha_k) \tag{171}$$

рационална функција променљивих pz и $p'z$.

Из (170) се добија диференцијаљењем да је

$$\zeta'(z-\alpha_k) = \zeta'(z) + \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\frac{p'z - p'\alpha_k}{pz - p\alpha_k}. \tag{172}$$

Означено диференцијаљење на десној страни, кад се изврши, даје једну рационалну комбинацију функција

$$pz,\ p'z,\ p''z, \ldots; \tag{173}$$

па пошто је

$$\zeta'(z) = -pz, \qquad p''z = 6p^2z - \frac{g_2}{2}, \tag{174}$$

то се, према обрасцу (172), израз $\zeta'(z-\alpha_k)$, па дакле и збир

$$\sum M_1\zeta'(z-\alpha_k),$$

своди на рационалну комбинацију функција pz и $p'z$.

Диференцијаљењем обрасца (172) добија се $\zeta''(z-\alpha_k)$ као рационална комбинација функција $\zeta''(z)$ и (173), што се, према обрасцима (174) опет изражава рационално само помоћу pz и $p'z$. Према томе се и израз

$$\sum M_1\zeta(z-\alpha_k)$$

изражава рационално помоћу pz и $p'z$.

Продуживши тако, узастопним диференцијаљењима и сменом извода $p''z$ његовом вредношћу (174), налази се да се извод ма кога реда функције $\zeta(z-\alpha_k)$, па дакле и сви изрази

$$\sum M_n\zeta^{(n)}(z-\alpha_k)$$

такође изражавају рационално помоћу pz и $p'z$, што доводи до ове теореме:

Свака мероморфна двопериодична функција F(z) *изражава се као рационална комбинација функција* pz и $p'z$ *које имају исте периоде као* F(z).

А пошто се према обрасцу

$$p'z = \sqrt{4p^3z - g_2pz - g_3}$$

извод $p'z$ изражава као алгебарска функција нормалне функције pz, то та теорема доводи до ове:

Свака мероморфна двопериодична функција изражава се као алгебарска функција нормалне функције pz *која има исте периоде као* F(z).

Из обрасца

$$pz = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 z} - \frac{1+k^2}{3},$$

за који смо напред нашли да исказује везу између $\operatorname{sn} z$ и оне функције pz што њој одговара према вредности модула k, добија се

$$p'z = -\frac{2\operatorname{sn}'z}{\operatorname{sn}^3 z},$$

што доводи до теореме:

Свака мероморфна двопериодична функција F(z) *изражава се као рационална функција од* $\operatorname{sn} z$ *и* $\operatorname{sn}'z$*, везаних са одговарајућом јој функцијом* pz.

Напослетку, према обрасцу

$$\operatorname{sn}'z = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 z)(1-k^2\operatorname{sn}^2 z)},$$

извод $\operatorname{sn}'z$ изражава се као алгебарска функција основне елиптичке функције $\operatorname{sn} z$, што доводи до ове теореме:

Свака мероморфна двопериодична функција изражава се као алгебарска комбинација функције $\operatorname{sn} z$*, везане са одговарајућом јој функцијом* pz.

Те су теореме познате у теорији елиптичких функција под називом *Liouville-ових теорема*. Њихова важност лежи у томе, што оне своде све мероморфне двопериодичне функције на једну од њих, а то је било на pz, било на $\operatorname{sn} z$; све су остале само алгебарске комбинације тих специјалних функција.

То је и разлог због кога се мероморфне двопериодичне функције називају елиптичким функцијама. Тај се назив раније односио само на функције sn z, cn z, dn z; кад је показано да се и све мероморфне функције са две периоде своде на ове специјалне трансценденте, тај назив је обухватио и све њих.

ШЕСТИ ОДЕЉАК

ОПШТИ ПОГЛЕД НА ДВОПЕРИОДИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ

39. СЛИЧНОСТИ И РАЗЛИКЕ ИЗМЕЂУ ПРОСТОПЕРИОДИЧНИХ И ДВОПЕРИОДИЧНИХ ФУНКЦИЈА

Као што се види из свега овога што претходи, елиптичке функције, под којима се имају подразумевати уопште све мероформне двопериодичне функције, састављају једну класу аналитичких функција које показују велике сличности са елементарним тригонометријским функцијама и њиховим алгебарским комбинацијама и на које се оне своде за специјалну вредност модула k. Те су сличности истакнуте на видику у ономе што је напред изложено, и оне се састоје нпр. у периодичности, облицима кривих линија што их геометријски представљају, у адиционој теореми, у разноврсним обрасцима који им изражавају особине, у могућности изражавања функције мултипла променљиве помоћу функције саме те променљиве, итд.

Међутим, између простопериодичних и двопериодичних функција постоје и битне разлике. Постојање двеју периода чини да је скуп двопериодичних функција ужи но скуп простопериодичних функција, јер свака периода уноси собом један скуп погодаба које функција треба да испуни; две периоде уносе више тих погодаба него једна. А то повлачи собом често и битне разлике између та два скупа функција.

Тако, постоји бескрајно много целих функција са једном периодом: такве би нпр. биле функције

$$e^{z}, \quad e^{z^{m}}, \quad \sin z, \quad e^{\sin z}.$$

А не постоји никаква цела функција са две периоде.

Затим, свака је мероморфна двопериодична функција изражљива као алгебарска функција једне једине функције те врсте нпр. функције pz или $\operatorname{sn} z$. А никаква слична теорема не постоји за мероморфне простопериодичне функције.

Према Hermite-овој теореми свака се мероморфна функција са две периоде изражава као линеарна комбинација ограниченог броја израза

$$\zeta(z-\alpha_k),\qquad \zeta'(z-\alpha_k),\qquad \zeta''(z-\alpha_k),\ldots$$

док никаква слична теорема не постоји за мероморфне функције са једном периодом. Једна таква теорема у ствари постоји за тригонометријске функције, тј. за рационалне комбинације функција $\sin z$ и $\cos z$, јер се зна из елементарне анализе да се свака таква комбинација изражава као линеарна комбинација ограниченог броја израза:

$$\sin az,\qquad \cos az,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{z-\alpha_k}{2},\qquad \frac{d}{dz}\operatorname{ctg}\frac{z-\alpha_k}{2},\qquad \frac{d^2}{dz^2}\operatorname{ctg}\frac{z-\alpha_k}{2}\ldots,$$

где су α_k одређене константе.

Али се свака мероморфна простопериодична функција не може изразити као рационална комбинација функција $\sin az$ и $\cos az$, и последњи став не важи за све функције такве врсте.

Доказано је *да се елиптичке функције не могу свести ни на какве коначне комбинације елементарних функција*. То су, дакле, потпуно нове трансценденте које је требало проучити саме за себе, не тражећи да се оне сведу на елементарне функције, па да тек онда, преко ових буду проучене.

40. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КОЈЕ СЕ ИНТЕГРАЛЕ ПОМОЋУ ЕЛИПТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

Постоји бескрајно много алгебарских диференцијалних једначина првог, другог, трећег и вишег реда, које за своје интеграле имају елиптичке функције.

Тако нпр. једначина првог реда

(175) $$y'^2-(1-y^2)(1-k^2y^2)=0$$

има за општи интеграл

$$y=\operatorname{sn}(x+C).$$

Иста функција је и интеграл диференцијалне једначине другог реда

$$y''-ay^3-by=0,$$

где су a и b два стална броја везана релацијом

$$a + 2(b+1) = 0;$$

једначина се добија диференцијаљењем једначине (175).

Једначина првог реда

$$y'^2 - 4y^3 - \alpha y - \beta = 0 \tag{176}$$

има за општи интеграл

$$y = p(z + C) \tag{177}$$

са параметрима $g_2 = \alpha$, $g_3 = \beta$.

Једначина другог реда

$$y'' - 6y^2 - \frac{\alpha}{2} = 0$$

има функцију (177) као једну класу својих партикуларних интеграла

Исти је случај и са једначином трећег реда

$$y''' - 12yy' = 0$$

која се добија диференцијаљењем напред поменуте једначине

$$y'' - 6y^2 - \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Према Liouville-овој теореми свака је мероформна двопериодична функција изражљива као рационална комбинација

$$y = R(u, u')$$

основне елиптичке функције $u = \operatorname{sn} z$ и њеног извода $u' = \operatorname{sn}' z$.

Диференцијаљењем једначине (178) добија се

$$y' = \frac{\partial R}{\partial u} u' + \frac{\partial R}{\partial u'} u'', \tag{179}$$

па пошто је

$$u'^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2) = 1-(1+k^2)u^2 + k^2u^4, \tag{180}$$

$$u'' = 2k^2u^3 - (1+k)u, \tag{181}$$

елиминацијом трију непознатих u, u', u'' из четири једначине (178), (179), (180), (181) добија се једна алгебарска диференцијална једначина

$$F(y, y') = 0 \tag{182}$$

која садржи само функцију y и њен извод y'. Према томе:

Свака мероморфна двопериодична функција задовољава по једну алгебарску диференцијалну једначину првога реда која не садржи експлицитно интеграциону променљиву z.

А за такве једначине се зна да, кад им се познаје један њихов партикуларни интеграл $y = f(z)$, знаће се и општи интеграл који је

$$y = f(z+C).$$

Узастопним диференцијаљењем једначине (182) добијају се редом диференцијалне једначине другог, трећег и вишег реда; све ће њих задовољавати мероморфне функције са две периоде. Међутим постоји став:

Никаква диференцијална једначина

$$F(z, y, y', y'', \ldots) = 0, \tag{183}$$

алгебарска по z, y *и изводима, па ма кога реда она била, ако садржи експлицитно променљиву* z, *не може имати као интеграл никакву периодичну функцију.*

Јер, кад би се једначина (183) решила по z, добила би се једна једначина

$$z = \Phi(y, y', y'', \ldots), \tag{184}$$

где би Φ била алгебарска функција променљиве y и њених извода. Кад би једначина (183) имала као интеграл какву периодичну функцију са периодом ω, смена вредности z вредношћу $z + m\omega$ (где је m ма какав цео број) оставља вредности $y, y', y'', \ldots$ непромењене, а функција Φ може за те вредности имати највише онолико вредности колико она, као алгебарска функција, има разних својих детерминација, а ове су у коначном броју. Међутим лева страна једначине (184) имала би бескрајно много вредности $z + m\omega$, што је према самој једначини немогуће.

Но, као што је показано, једначине (184), у којима не фигурише z, могу имати као интеграле и просто-периодичне, и двопериодичне функције.

Тако исто постоји и бескрајно много система симултаних једначина које имају за интеграле двопериодичне функције. Такав је нпр. систем

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dz} - vw = 0, \\ (185) \qquad &\frac{dv}{dz} + uv = 0, \\ &\frac{dw}{dz} + k^2 uv = 0, \end{aligned}$$

где је k какав реалан број што се налази између 0 и 1. Систем има за интеграле

$$u = \operatorname{sn}(z + C_1),$$
$$v = \operatorname{cn}(z + C_2),$$
$$w = \operatorname{dn}(z + C_3),$$

о чему се лако уверити сменом тих израза у једначинама (185) и водећи рачун о обрасцима који изражавају изводе

$$\operatorname{sn}'z, \quad \operatorname{cn}'z, \quad \operatorname{dn}'z$$

помоћу функција

$$\operatorname{sn} z, \quad \operatorname{cn} z, \quad \operatorname{dn} z.$$

А лако се уверити, као и малочас у случају једначине (184), да никакав систем симултаних једначина

$$\frac{du}{dz} = f(z, u, v, w),$$
$$\frac{dv}{dz} = \varphi(z, u, v, w),$$
$$\frac{dw}{dz} = \psi(z, u, v, w),$$

где су f, φ, ψ, алгебарске функције променљивих које садрже, ако која од њих садржи експлицитно променљиву z, не може имати као интеграле периодичне функције.

Нека је наведено још и то, да су у теорији алгебарских диференцијалних једначина првога реда познати *потребни* и *довољни* услови да би дата једначина облика (182) имала као своје интеграле мероморфне двопериодичне функције. Проблем је решен применом општих Cauchy-евих теорема из теорије аналитичких функција.

41. КРАТКА ИСТОРИЈА ЕЛИПТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

Историја елиптичких функција може се поделити на две периоде:
1° проучавање *елиптичких интеграла*;

2° проучавање *елиптичких функција* као инверзија елиптичких интеграла.

Прва периода. – Под елиптичким интегралима подразумевају се интеграли у којима под интегралним знаком фигурише рационално: или сам квадратни корен из каквог полинома X четвртог или трећег степена, или поред њега још и сама независно променљива количина x. То су, дакле, интеграли облика

$$\int R(x, \sqrt{X})\, dx,$$

где је X какав полином четвртог или трећег степена по x, а R је рацинална функција двеју променљивих x и $\sqrt{X}$.

На такве је интеграле први наишао Wallis 1655. године, покушавајући да одреди дужину лука елипсе. Најдубља испитивања на елиптичким интегралима извршио је Euler који их је свео на неколико нормалних облика и овима испитао особине. Али оно, због чега су његова испитивања постала основица за теорију и елиптичких интеграла и елиптичких функција, јесте његов проналазак од 1751. године о интегралу диференцијалне једначине

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

где је X ма какав полином четвртог или трећег степена по променљивој x, а Y такав исти полином по променљивој y.

У ономе што је напред изложено наведен је облик тога интеграла и он је искоришћен за добијање основних резултата теорије елиптичких функција. Euler је тај, за теорију те класе функција, основни проналазак учинио сретним случајем, пробом, или, како он сам то каже „tentando et divinando“. Lagrange је 1768. године први дао прави, аналитички доказ Euler-овог резултата.

Међу многобројним испитивањима у области елиптичких интеграла после Euler-ових радова, највише се истичу опсежна Legendre-ова испитивања, вршена у правцу Euler-ових и публикована у великом делу тога математичара „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes“, штампаног 1825–1828. год. Пошто је елиптичке интеграле свео на утврђене типове, Legendre је ове у појединостима проучио, дао практичне методе за њихово бројно израчунавање и саставио таблице њихових бројних вредности.

Landen је доста унапредио теорију елиптичких интеграла поставивши методу за њихове модуларне трансформације, тј. за промену модула k у основном елиптичком интегралу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

и тиме, поред осталих користи, јако упростио и проширио употребу Legendre-ових таблица.

Друга периода. – У тој периоди историје елиптичких функција почиње проучавање тих функција као *инверзија елиптичких интеграла*. Оно почиње испитивањима Abel-a (1825 год.) и Jacobi-a (1828. год.), који су скоро у једно исто време, потпуно независно један од другога, дошли на идеју проучавања инверзије елиптичких интеграла. Они су одмах пронашли двопериодичност тих инверзија и поставили основне обрасце за њихову теорију, истакли на видик њихову адициону теорему и њене последице, нашли њихове изразе у облику бескрајних редова и количника таквих редова, изразили их у облику бескрајних продуката, нашли везе између разних елиптичких функција, везе између њихових периода и модула k итд.

Jacobi je главне резултате својих истраживања изнео у своме основном делу „Fundamenta nova theoriae funct. ellipt." публикованом 1829. год. У тим истраживањима основну улогу игра Jacobi-ева „тета-функција", о којој је било речи у предњим излагањима, и која је послужила као редуктивни елеменат за три основне елиптичке функције.

Jacobi и његови савременици употребљавали су за основне елиптичке функције $\operatorname{sn} z$ и $\operatorname{cn} z$ ознаке $\sin amz$ и $\cos amz$, као што је то поменуто у ранијим излагањима. Данашња означавања са $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ увео je Gudermann који je такође унапредио теорију тих функција.

Разумљиво je да општа Cauchy-ева теорија аналитичких функција имагинарне променљиве количине није могла остати без јаког утицаја на теорију елиптичких функција. Применом Cauchy-евих теорема учињени су велики напреци у тој теорији, а многи су, дотле већ познати резултати, постали боље расветљени кад се стало на гледиште опште Cauchy-еве теорије. Ова je нпр. довела Liouville-a (1847. гдо.) до појма паралелограма периода, до основног става по коме je интеграл двопериодичне функције, узет дуж паралелограма периода, једнак нули, до става по коме свака таква функција мора имати сингуларитета у равни независно променљиве количине итд., што му je све дало основицу за једну општу теорију двопериодичних функција.

Један од најважнијих резултата Liouville-ових истраживања je став да се све мероморфне функције са две периоде изражавају као рационалне комбинације функција $\operatorname{sn} z$ и $\operatorname{sn}' z$, а као алгебарске комбинације саме функције $\operatorname{sn} z$. Liouville je доказао и несводљивост елиптичких функција на елементарне функције, показавши да су то потпуно нове трансценденте, сасвим нов аналитички инструменат.

Општој теорији двопериодичних функција моћно је допринео и Jacobi, доказавши између осталога, и немогућност постојања униформних функција са више од две периоде, као став да количник двеју периода није никад реалан број.

Право порекло периода, са гледишта опште Cauchy-еве теорије функција, први је истакао на видик Puiseux, показавши како се периоде појављају кад променљива, од које зависи функција под интегралним знаком каквог криволинијског интеграла, описује разне путање у својој равни. У томе су погледу јако допринела расветљавању ствари и истраживања Riemann-a, који је нарочито истакао улогу алгебарских критичких тачака при јављању периода, употребивши при томе своју нову методу за проучавање рачвања и детерминација мултиформних функција и створивши појам Riemann-ових површина.

Од великог су значаја за развитак теорије елиптичких функција била Hermite-ова истраживања, отпочета 1844. год., вршена опет са гледишта Cauchy-еве теорије аналитичких функција. Поред многобројних резултата о трансформацијама елиптичких интеграла и елиптичких функција једних у друге, о везама између модула k и периода функције (модуларна функција), о аритметичким последицама појединих ставова теорије елиптичких функција итд. Hermite је доказао став од велике важности, да је свака мероморфна двопериодична функција изражљива као линеарна кобинација једне једине функције и њених извода, а то је „зета-функција" која је унапред проучена. Тиме је нађен један линеарни редуктивни елеменат за све функције те врсте а као непосредна последица тога става је чињеница да се интегал ма које мероморфне двопериодичне функције изражава као линеарна комбинација једне једине функције и њених извода, а то је функција $\log \sigma(z)$ која је такође напред проучена.

Теорију елиптичких функција су знатно унапредила и проширила истраживања Weierstrass-a, почета 1840. године, који је у ту теорију унео нове погледе и нове методе. Увођењем своје нормалне елиптичке функције pz, на место дотле уведене основне функције $\operatorname{sn} z$, Weierstrass је обрасце за елиптичке функције учинио простијим и симетричнијим. Осим тога, показало се да се тиме и сама метода истраживања олакшава и упрошћава. Weierstrass је развио потпуну теорију своје нормалне функције pz, прилагодио јој све до тада познате обрасце за елиптичке функције, нашао мноштво нових образаца и истакао на видик улогу те функције као редуктивног елемента за све остале мероморфне двопериодичне функције. Начин, на који је он изразио pz као количник двеју целих функција, много је општији од онога на који је Jacobi (помоћу своје „тета-функције“) решио проблем за функције sn z, cn z, dn z. Weierstrass-ов начин таквог изражавања је и простији, и протеже се и на друге двопериодичне функције. И метода коју је он увео, и облик који је он дао теорији елиптичких функција, знатно се разликују од онога што се имало до његових радова.

Briot и Bouquet су допринели теорији испитујући везу елиптичких функција са диференцијалним једначинама. Они су 1854. год. нашли да кад год је интеграл једне алгебарске диференцијалне једначине првога реда, која не садржи експлицитно независно променљиву z, *униформна* функција те променљиве, онда је тај интеграл увек:

1° или рационална,

2° или просто-периодична,

3° или двопериодична функција те променљиве.

Исти су математичари дали потребне и довољне услове за сваки од та три случаја, па дакле и за случај кад је интеграл двопериодична функција променљиве z. Они су своја истраживања проширили и на општији случај кад је интеграл *мулшиформна* функција променљиве z, али за једну дату вредност z има ограничен број својих вредности. За такве случајеве они су нашли да је интегал алгебарска функција или променљиве z, или израза e^{az}, или израза sn az (где је a сталан број) и дали су потребне услове за сваки од тих случајева.

Hermite и Picard су нашли за мноштво дифернцијалних једначина, а нарочито за извесне типове линеарних једначина са променљивим коефицијентима, да су им интеграли двопериодичне функције.

Упоредо са развијањем теорије елиптичких функција ишле су и њихове примене на разноврсне проблеме математичке анализе: Више Аритметике, Аналитичке Геометрије, Механике, Математичке Физике и др. Такве су примене доводиле до решења проблема која су била немогућна или непотпуна без увођења елиптичких функција. И те су примене биле један од разлога што се теорија елиптичких функција развила до данашње њене потпуности и обимности.

Студенти математике и сарадници професора Михаила Петровића – Тадија Пејовић, Антон Билимовић и Вјечеслав Жардецки, године 1924. када је на Филозофском факултету основано ***Удружење студената математике Универзитета у Београду****. Ова генерација започела је издавање литографисаних скрипата предавања Михаила Петровића и његових сарадника*

ИНТЕГРАЦИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПОМОЋУ РЕДОВА

ПРВИ ОДЕЉАК

ОПШТИ ПОЈМОВИ

1. ОПШТИ ПОЈМОВИ О ИНТЕГРАЦИЈИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Интегралити једну диференцијалну једначину p-тога реда

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}) = 0 \tag{1}$$

где је
$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

значи наћи такву функцију y независно промењљиве количине x, да кад се смени у једначини (1), ова буде идентички задовољена за произвољну вредност x.

Тако, на пример, једначина првога реда

$$y' - y = 0 \tag{2}$$

је идентички задовољена ако се узме да је

$$y = e^x;$$

једначина другога реда

$$y'' + ay = 0 \tag{3}$$

биће задовољена кад се стави да је

$$y = \sin x\sqrt{a}.$$

Као што се зна из опште теорије диференцијалних једначина, за сваку једначину (1) постоји, не једна, већ бескрајно много функција y које је задовољавају за произвољну вредност. Тако, једначина (2) је задовољена за

$$y = Ce^x$$

за произвољне вредности x и константе C; једначина (3) је задовољена за

$$y = C_1 \sin x\sqrt{a} + C_2 \cos x\sqrt{a}$$

за произвољне вредности x и константи C_1 и C_2.

Као што се опет зна из опште теорије диференцијалних једначина, за сваку једначину (1) постоји по једна функција променљиве x

$$(4) \qquad y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_p)$$

која садржи онолико произвољних констаната $C_1, \ldots, C_p$ колики је ред једначине; те се произвољне константе називају *интеграционим константама.*

Кад се у изразу (4) свих p интеграционих констаната оставе као произвољне, тај израз представља *општи интеграл* једначине (1). Кад се у њему, појединима од тих констаната, или свима, даду утврђене, одређене вредности, он представља по један *партикуларни интеграл* једначине: Очевидно је да кад се зна општи интеграл једне једначине, знаће се и сви његови партикуларни интеграли, којих има бескрајно много и међу собом се разликују само по вредностима које су придате појединим интеграционим константама у општем интегралу.

Под *интеграцијом* једначине (1) има се у главном разумети одредба

1° или њенога општег интеграла y;

2° или једнога њеног партикуларног интеграла y.

Кад је нађен општи интеграл, за једначину се каже да је *потпуно интеграљена*; кад је нађен један њен партикуларни интеграл, каже се да је *интеграљена у ужем смислу*.

У великом броју случајева, интеграл једначине, било општи, било партикуларни, састављен је из коначног броја комбинација елементарних функција, тј. оних које се из независно променљиве количине x добијају: сабирањем, одузимањем, множењем, дељењем, степеновањем са сталним или од x зависним изложиоцима, логаритмисањем и операцијама које се изражавају тригонометријским и циклометријским функцијама. То су, дакле, функције које се добијају елементарним комбинацијама ограниченог броја функција

$$x, \quad x^a, \quad e^x, \quad \sin x, \quad \arcsin x, \quad \log x.$$

У току развијања математичке анализе пришле су овим елементарним функцијама још и неке раније непознате функције (као што су нпр. елиптичке функције), тако да данас и оне улазе у оквир елементарних функција, а у тај ће оквир ући још која специјалнија врста функција кад ове буду тачно и у свима својим појединостима проучене.

Кад се, на ма који начин, успело изразити интеграл y у облику комбинација елементарних функција, каже се да је диференцијална једначина *интеграљена у коначном облику*, јер су онда све операције, на које се своди интеграл, сведене на коначни број обичних рачунских операција, које се могу рачунски до краја извршити. Такав је нпр. случај са једначинама (2) и (3).

Међутим, у великом броју случајева немогућно је изразити интеграл у таквом коначном облику, али се он изражава помоћу елементарних функција и интегралног знака $\int$. Наиме, интеграл се изражава помоћу елементарних функција и једнога коначног броја интеграла

$$\int X_1 dx, \quad \int X_2 dx, \quad \ldots$$

где су $X_1, X_2, \ldots$ опет одређене и познате комбинације елементарних функција, и где интегрални знаци могу бити и суперпонирани. У таквим се случајевима каже да је једначина *интеграљена елементарним функција и квадратурама*. Тако нпр. једначина првога реда

$$(5) \qquad xy' + e^x - x = 0$$

има за општи интеграл

$$(6) \qquad y = C + x - \int \frac{e^x}{x} dx;$$

она је дакле интеграљена на такав начин.

Дешава се и за једначине, које садрже функције непрецизиране, остављене у општем облику $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x), \ldots$ да се интеграл може изразити елементарним комбинацијама тих функција и ограниченим бројем квадратура, тј. интеграција извршених над тим функцијама и њиховим комбинацијама. Тако нпр. општи интеграл линеарне једначине првога реда

$$(7) \qquad y' + fy + \varphi = 0$$

(где су f и φ функције независно промењиве количине x) има облик

$$(8) \qquad y = e^{-\int f dx}\left[C + \int e^{\int f dx} \cdot \varphi \, dx\right].$$

Такав је случај и са једначином другога реда

$$yy'' + y'^2 + \varphi yy' = 0$$

(где је φ функција променљиве x), чији је општи интеграл

$$y = \sqrt{C_1 + C_2 \int e^{-\int \varphi dx}\, dx}\ .$$

Велики број, како појединачних диференцијалних једначина свакога коначног реда, тако и појединих општих типова једначина, могу се интегралити помоћу елементарних функција и квадратура. Али остаје непрегледна множина једначина за које се интеграл не изражава ни комбинацијама таквих функција, ни помоћу квадратура. За неке типове једначина успело се да се и докаже таква немогућност, као нпр. за општу Riccati-еву једначину

$$y' + fy^2 + \varphi y + \psi = 0$$

(где су f, φ, ψ функције независно променљиве x), или за општу линеарну једначину

$$y^{(p)} + fy^{(p-1)} + \varphi y^{(p-2)} + \ldots + \lambda y = 0$$

чији је ред $p \geq 2$. За друге типове једначина истина такве немогућност није доказана, али су сви покушаји да се оне интеграле у коначном облику и помоћу квадратура, остали безуспешни.

2. ОПШТИ ПОЈМОВИ О ИНТЕГРАЦИЈИ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГА РЕДА

Општи интеграл y дате диференцијалне једначине првога реда

(9) $$f(x, y, y') = 0$$

може се одредити у своја два разна облика:

1° Као функција променљиве x и интеграционе константе C, у облику

(10) $$y = \varphi(x, C)$$

или, општије, у облику једначине

(11) $$\psi(x, y, C) = 0$$

такве да y, одређено том једначином, задовољава једначину (9) за ма какве вредности x и C. Тако нпр. једначина

(12) $$y' - y = 0$$

има за општи интеграл

$$(13) \qquad y = Ce^x;$$

за једначину

$$(14) \qquad y' - xy = 0$$

то је

$$(15) \qquad y = Ce^{\frac{x^2}{2}};$$

за једначину

$$(16) \qquad yy' + x = 0$$

то је

$$(17) \qquad x^2 + y^2 + C = 0.$$

2° Као онај партикуларни интеграл исте једначине (9) који за $x = x_0$ добија вредност $y = y_0$, а кад се те вредности x_0 и y_0 сматрају као произвољне. Геометријски речено: као онај интеграл једначине чији геометријски представник (интегрална крива линија) пролази кроз произвољно узету тачку (x_0, y_0) у равни xOy.

Такав би нпр. интеграл за једначину (12) био

$$y = y_0 e^{(x-x_0)};$$

за једначину (14)

$$y = y_0 e^{\frac{x^2 - x_0^2}{2}}$$

а за једначину (16)

$$x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2 = 0.$$

Од облика 1° прелази се на облик 2° изразивши да интегрална крива пролази кроз тачку (x_0, y_0), што даје једначину

$$(17) \qquad y_0 = \varphi(x_0, C) \quad \text{односно} \quad \psi(x_0, y_0, C) = 0$$

и елиминишући константу C из двеју једначина (10), односно (11) и једначине (17). Тако се добија општи интеграл у облику

$$(18) \qquad y = \lambda(x, x_0, y_0) \quad \text{односно} \quad \mu(x, y, x_0, y_0) = 0.$$

На први поглед изгледало би да такав општи интеграл садржи две произвољне константе x_0 и y_0, што не би могло бити, јер две такве константе садржи општи интеграл само за једначине другога реда. Међутим, лако се уверити да поред свега тога што су обе константе x_0 и y_0 произвољне, оне се код једначина првога реда увек групишу у једну једину константу C. Јер ако се изрази да општи интеграл y одређен нпр. једначином

$$\varphi(x, y, C) = 0 \tag{19}$$

за $x = x_0$ добија вредност $y = y_0$, добија се условна једначина

$$\varphi(x_0, y_0, C) = 0 \tag{20}$$

из које, кад би се израчунало C, тако да је нпр.

$$C = \theta(x_0, y_0),$$

општи би интеграл била функција y одређена једначином

$$\varphi[x, y, \theta(x_0, y_0)] = 0$$

где су се обе произвољне константе x_0 и y_0 груписале у само једну, а та је $\theta(x_0, y_0)$.

У свему даљем излагању овде ће се узети у обзир овај други начин одредбе општега интеграла. Проблем интеграције једначине (9) јавља се тада у овоме облику:

A) *Наћи такав израз* y, *као функцију променљиве* x, *да једначина* (9) *буде идентички задовољена за ма какво* x, *и да тај израз за* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ *добије вредност* $\mathrm{y} = \mathrm{y}_0$.

Тада, ако су вредности x_0 и y_0 остављене произвољне, имаће се општи интеграл једначине; ако су те вредности утврђене, имаће се њен партикуларни интеграл, и то онај који за $x = x_0$ добија вредност $y = y_0$.

Међутим, било да се има посла са општим, било са партикуларним интегралом y, увек се проблем може свести на овај:

B) *Наћи такав израз* y *који идентички задовољава другу једну диференцијалну једначину, изведену из дате, и који ће за* x = 0 *имати за вредност* y = 0.

Јер ако су вредности x_0 и y_0 коначне, па се изврши смена

$$x = x_0 + t, \quad y = y_0 + u, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt} \tag{21}$$

и сматра се t као нова независно променљива количина, а u као нова непозната функција, добија се нова, трансформисана диферецијална једначина

$$F(t, u, u') = 0. \tag{22}$$

Кад је $x = x_0$ и $y = y_0$, биће $t = 0$ и $u = 0$. Према томе, наћи интеграл y једначине (9) који за $x = x_0$ добија вредност $y = y_0$, значи наћи интеграл u једначине (22) који за $t = 0$ добија вредност $u = 0$.

У случају кад је $x_0 = \infty$, а y_0 коначно, треба извршити смену

$$x = \frac{1}{t}, \quad y = y_0 + u, \quad \frac{dy}{dx} = -t^2 \frac{du}{dt};$$

кад је $y_0 = \infty$ а x_0 коначно, извршиће се смена

$$x = x_0 + t, \quad y = \frac{1}{u}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

и напослетку, кад је $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$ треба извршити смену

$$x = \frac{1}{t}, \quad y = \frac{1}{u}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{t^2}{u^2}\frac{du}{dt}$$

па ће добијена диференцијална једначина (22), својим интегралом који за $t = 0$ добија вредност $u = 0$, дати и интеграл y једначине (9) који за $x = x_0$ добија вредност $y = y_0$.

Кад је проблем одређивања интеграла формулисан у облику В), поставља се питање: како ће се доћи до интеграла који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$? Као што је напред казано, у непрегледном броју случајева не може се интеграл изразити помоћу елементарних функција и квадратура. Па и у случајевима кад је то могућно, добијени израз за интеграл често је тако компликован и неподесан за практично рачунање, да од таквог израза нема велике користи. У таквим случајевима или се гледа да се понешто у изразу y занемари, кад то неће много утицати на резултат рачуна, па ће се имати бар приближан израз за интеграл, или се покушава да се интеграл изрази у облику бескрајнога реда, чији је облик чланова такав да се са њима може лако рачунати, или се на њима може распознати каква нарочита појединост везана за интеграл.

Предмет ове књиге биће такав начин одредбе интеграла, тј. *проблем да се интеграл дате диференцијалне једначине одреди у облику каквога реда*

$$(23) \qquad y = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots$$

чији ће чланови бити какве просте функције независно променљиве количине x *и који ће бити такав да је*

$$(24) \qquad u_0(0) + u_1(0) + u_2(0) + \ldots = 0.$$

Код свакога реда (23) мора се водити рачун о томе за које ће вредности x он бити употребљив, тј. конвергентан. Према томе исказани проблем интеграције своди се на ова два задатка:

Први задатак: наћи *формално решење* проблема, тј. такав ред (23) са условном једначином (24), да y изражено тим редом идентички задовољи дату диференцијалну једначину и услов (24), без обзира на то да ли ће нађени ред конвергирати или не.

Други задатак: испитати за које ће вредности x нађени ред бити конвергентан.

Кад су, у датоме случају, решена оба та задатка сматра се да је проблем интеграције фактички решен, и добијени ред сматра да даје *фактично решење* проблема.

Лако се види из простих примера да није довољно знати само формално решење проблема, јер се може десити да добијени ред буде неупотребљив, јер није конвергентан ни за коју вредност x. Тако нпр. једначину

$$x^2 y' - y + x = 0$$

формално задовољава ред

$$y = 0!x + 1!x^2 + 2!x^3 + 3!x^4 + \dots$$

који задовољава и услов (24), али је он неупотребљив, јер не конвергира ни за коју вредност x.

Исти је случај и са редом

$$y = 0!\sqrt{x} + 1!(\sqrt{x})^2 + 2!(\sqrt{x})^3 + \dots$$

који формално задовољава диференцијалну једначину

$$x(2xy' + 1)^2 - y^2 = 0$$

као и услов (24), али не конвергира ни за коју вредност x.

Дешава се и то да је добијени ред конвергентан за неке вредности x, нпр. за оне што се налазе у једној одређеној области равни x, али да се не може употребити за ону вредност x за коју се тражи вредност интеграла. Тако нпр. ред

$$y = x + x^2 + x^3 + \dots$$

формално задовољава једначину

$$y' - (y+1)^2 = 0$$

и једначину (24) али је употребљив само за вредности x што се налазе у кругу полупречника 1 описаном око $x = 0$, јер је ред конвергентан само за такве вредности x.

Напослетку, дешава се и то да је нађено формално решење диференцијалне једначине у облику реда који конвергира за све вредности x за које се то тражи, али да ред не задовољава условну једначину (24). Такав је нпр. случај са простом једначином

$$y' = y$$

чији је општи интеграл

$$y = Ce^x$$

изражљив у облику реда

$$y = C + \frac{C}{1!}x + \frac{C}{2!}x^2 + \frac{C}{3!}x^3 + \ldots$$

конвергентног за сваку вредност x. Међутим, такав интеграл само тако може задовољити једначину (24) ако је $C = 0$, али у томе случају интеграл је идентички једнак нули за све вредности x; то дакле стварно није функција те промењиве.

Из таквих се примера јасно види да се самим формалним решењем не решава проблем интеграције; то решење још треба допунити решењем задатка конвергенције добијенога реда.

3. ФОРМАЛНО РЕШЕЊЕ У ОБЛИКУ РЕДА

Нека је дата диференцијална једначина

$$F(x, y, y') = 0 \tag{25}$$

па покушајмо задовољити је изразом интеграла y у облику Maclaurin-овог реда

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \tag{26}$$

Задатак се своди у првоме реду на то да се из саме једначине (25) израчунају коефицијенти $a_1, a_2, a_3, \ldots$ тако да изразом (26) та једначина буде задовољена. Претпоставивши најпре да одиста постоји такав један скуп тих коефицијената, да формално решење у облику (26) одиста постоји, одредба коефицијената може се извршити на овај начин:

Као што се зна биће

$$a_n = \frac{[y^{(n)}]}{n!} \tag{27}$$

где уопште под знаком $[\varphi]$ треба разумети резултат који се добија кад се у изразу φ смене нулом промењиве количине које φ садржи.

Међутим, из једначине (25) се види да ће вредност

$$a_1 = [y']$$

бити један од корена једначине

$$(28) \qquad F(0, 0, a) = 0$$

решене по a. Свакоме од таквих корена одговара, дакле, по једна могућна вредност коефицијента a_1.

Диференцијаљењем једначине (25) добија се

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0,$$

одакле је

$$y'' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}.$$

Израз на десној страни последње једначине, кад се у њему стави $x = 0, y = 0, \ y' = a$, постаће број $[y'']$. Ако се дакле тај израз означи са F_1, биће

$$a_2 = \frac{1}{2!}[F_1].$$

Диференцијаљењем једначине

$$y'' = F_1$$

добија се, пошто F_1 зависи од x, y, y',

$$y''' = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y' + \frac{\partial F_1}{\partial y'} F_1,$$

тако да, ако се израз на десној страни ове једначине означи са F_2, а кад се у њему стави $x = 0, y = 0, \ y' = a$, добијени резултат биће број $[y''']$ и према томе је

$$a_3 = \frac{1}{3!}[F_2].$$

Тако исто, пошто и F_2 зависи од x, y, y', диференцијаљењем једначине

$$y''' = F_2$$

добија се

$$y'''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} y' + \frac{\partial F_2}{\partial y'} F_1,$$

тако да, ако се израз на десној страни означи са F_3 и у њему стави $x = 0$, $y = 0$, $y' = a$, добијени резултат биће број $[y'''']$ и према томе је

$$a_4 = \frac{1}{4!}[F_3].$$

Продуживши те радње и даље, долази се до овога закључка:

Кад се формира низ функција

$$(29) \qquad F_1, F_2, F_3, \dots$$

трију променљивих x, y, y′, *које се једна из друге изводе по обрасцу*

$$(30) \qquad F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y'} F_1,$$

где је

$$(31) \qquad F_1 = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}$$

и где се индексу n *дају узастопне вредности* $n = 2, 3, 4, \dots$, *коефицијенат* a_n *имаће за вредност*

$$(32) \qquad a_n = \frac{1}{n!}[F_{n-1}]$$

где се под $[F_{n-1}]$ *има разумети резултат који се добија кад се у функцији* F_{n-1} *смени* $x = 0$, $y = 0$, $y' = \alpha$, *а где је* α *један ма који од корена једначине*

$$(33) \qquad F(0, 0, \alpha) = 0$$

решене по α.

Као што се види такав начин одредбе коефицијената a_n има смисла само онда кад све функције низа (29) имају за $x = 0$, $y = 0$, $y' = \alpha$ коначне и одређене вредности.

Функције низа (29) постају простије у овим случајевима:

1° Кад је дата диференцијална једначина написана у облику

$$(34) \qquad y' - f(x, y) = 0$$

биће

$$y'' - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

и према томе

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = f_1,$$
$$y''' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} f = f_2,$$
$$y'''' = \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} f = f_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

тако *да се низ* (29) *поклапа са низом функција*

(35) $$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

што зависе од двеју променљивих x, y, *а изводе се једна из друге по обрасцу*

(36) $$f_n = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} f, \quad f_0 = f(x, y).$$

Коефицијенат a_n дат је обрасцем

$$a_n = \frac{1}{n!}[f_{n-1}].$$

2° Кад диференцијална једначина не садржи променљиву y, тј. кад је облика

(37) $$F(x, y') = 0,$$

тада је a_1 једнако једноме од корена једначине

(38) $$F(0, \alpha) = 0.$$

Из (37) је

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0,$$

одакле је

$$y'' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = F_1,$$

затим

$$y''' = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y'} F_1 = F_2,$$

а из тога се добија једначина

$$y''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y'} F_1 = F_3.$$

Продуживши те радње и даље, долази се до закључка:

Низ (29) *функција, помоћу којих се, према обрасцу* (32), *израчунава коефицијенат* a_n, *јесте онај који се добија помоћу обрасца*

$$(39) \qquad F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y'} F_1$$

где је

$$(40) \qquad F_1 = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}.$$

У специјалном случају кад је једначина (37) написана у облику

$$(41) \qquad y' = f(x)$$

низ (29) се састоји из функција $f_1, f_2, f_3, \ldots$, *које се једна из друге изводе помоћу обрасца*

$$(42) \qquad f_n = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}, \quad f_0 = f(x).$$

3° Кад диференцијална једначина не садржи променљиву x, тј. кад је облика

$$(43) \qquad F(y, y') = 0$$

коефицијенат a_1 је једнак једноме од корена једначине

$$(44) \qquad F(0, \alpha) = 0$$

решене по α. Из (43) је

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0,$$

одакле је

$$y'' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}} = F_1$$

па се низ (29) *добија помоћу обрасца*

$$F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y'} F_1 \tag{45}$$

где је

$$F_1 = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}. \tag{46}$$

У специјалном случају кад је једначина (43) написана у облику

$$y' = f(y) \tag{47}$$

низ функција (29) састоји се из функција $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *које се једна из друге изводе по обрасцу*

$$f_n = y' \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}, \quad f_0 = f(y). \tag{48}$$

Кад су коефицијенти a_n на тај начин израчунати, од интереса је проверити да ред

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{49}$$

одиста задовољава диференцијалну једначину од које се пошло. Ради упрошћења ствари овде ће бити претпостављено да је једначина решена по изводу y', тј. дата у облику

$$y' = f(x, y). \tag{50}$$

Поред тога биће претпостављено да је функција $f(x, y)$ холоморфна функција променљивих x и y у близини вредности $x = 0, y = 0$.

Из (49) добија се да је

$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \tag{51}$$

где је

$$b_0 = a_1, \quad b_1 = 2a_2, \ldots, b_n = (n+1) a_{n+1}$$

и према овоме што претходи

$$b_n = \frac{n+1}{(n+1)!}[f_n] = \frac{1}{n!}[f_n] \tag{52}$$

где је f_n један члан низа $f_1, f_2, f_3, \ldots$, тј. тотални извод по x функције f_{n-1}, добијен узастопним диференцијаљењима првобитне функције $f_0 = f(x,y)$ по x и y, водећи рачуна о томе да је y функција променљиве x.

Са друге стране, пошто је $f(x,y)$ холоморфна функција променљивих x и y у близини вредности $x = 0$, $y = 0$, то кад се у њој смени y редом уређеним по степенима променљиве x, и сама се та функција може развити у такав један ред, па нека је то

$$f(x,y) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots \tag{53}$$

Коефицијенти реда биће

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{0!}[f], \\ A_1 &= \frac{1}{1!}\left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right] = \frac{1}{1!}[f_1], \\ A_2 &= \frac{1}{2!}\left[\frac{df_1}{dx}\right] = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} f\right] = \frac{1}{2!}[f_2], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{54}$$

из чега се види да је

$$A_n = \frac{1}{n!}[f_n] = b_n. \tag{55}$$

Према томе ред (51) који даје извод y', и ред (53) који даје функцију $f(x,y)$ пошто се у овој y смени редом (49), имају исте коефицијенте; та су два реда дакле међу собом једнака, тј.

$$y' = f(x,y), \tag{56}$$

што значи да y, дефинисано редом (49) одиста задовољава посматрану диференцијалну једначину.

4. ПРИМЕРИ ЗА ОДРЕДБУ ФОРМАЛНОГ РЕШЕЊА

У предњем одељку наведени начин за одредбу формалног решења проблема интеграције даје експлицитне изразе коефицијената a_n реда који представља то решење. Он даје могућност да се или израчуна a_n у облику обрасца који даје општи коефицијенат за ма какво n, или да се израчуна онолико првих коефицијената $a_1, a_2, a_3, \ldots$ колико се хоће. Ово је последње одређивање могућно у свима случајевима; оно прво је могућно само у појединим, ређим случајевима. Практична примена тога начина видеће се из ових неколиких примера:

1. **пример**. – Нека је дата једначина

$$y' = \frac{1}{2}(y - x + 1)^3 + 1,$$

па се налази да је

$$f_1 = \frac{1 \cdot 3}{4}(y - x + 1)^5,$$
$$f_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8}(y - x + 1)^7,$$
$$f_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{16}(y - x + 1)^9,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и уопште

$$f_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2^{n+1}}(y - x + 1)^{2n+3}$$

према чему се за коефицијенте интегралног реда добијају вредности

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

2. **пример**. – Дата је једначина

$$y' = \frac{1}{2}(1 + y)^3,$$

па се налази

$$f_1 = \frac{1 \cdot 3}{4}(1 + y)^5,$$
$$f_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8}(1 + y)^7,$$
$$f_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{16}(1 + y)^9,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и уопште

$$f_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2^{n+1}}(1 + y)^{2n+3}$$

према чему коефицијенти a_n имају исте вредности као коефицијенти у првоме примеру, осим a_1 који има вредност $\frac{1}{2}$.

3. **пример**. – Дата је једначина

$$(1-x^2)y'^2-4y^2-1=0,$$

па се налази

$$\begin{aligned} F_0 &= F = (1-x^2)y'^2-4y^2-1, \\ F_1 &= \frac{xy'+4y}{1-x^2}, \\ F_2 &= \frac{(5-2x^2)y'+12xy}{(1-x^2)^2}, \\ F_3 &= \frac{(33-18x^2)xy'+(32+28x^2)y}{(1-x^2)^3}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

тако да ће уопште F_n бити облика

$$F_n = \frac{p_n y' + q_n y}{(1-x^2)^n}$$

где су p_n и q_n полиноми n-тог степена по x.

Из диференцијалне једначине се налази да за $x=0, y=0$ извод y' има две вредности ± 1. Првој вредности одговара интеграл чији су коефицијенти

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{5}{6}, \quad a_4 = 0, \dots$$

а другој интеграл са коефицијентима

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{5}{6}, \quad a_4 = 0, \dots$$

4. **пример**. – Уочимо једначину општег облика

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{57}$$

где су P и Q полиноми по x и y, са претпоставком да је вредност $Q(0,0)$ различна од нуле. Једначина има један, и то само један интеграл који за $x=0$ добија вредност $y=0$, и он се може развити у ред

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

чији се коефицијенти израчунавају по обрасцу

$$a_n = \frac{r_n}{n!}$$

где r_n означава вредност коју добија за $x = 0$, $y = 0$ извесна одређена рационална функција R_n. Та је функција n-ти члан низа рационалних функција

$$R_1, R_2, R_3, \ldots$$

које се једна из друге изводе по обрасцу

$$R_n = \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} + \frac{P}{Q}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y}, \quad R_1 = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}. \tag{58}$$

Овде ће бити показано да се израчунавање коефицијената a_n може свести на израчунавање, не низа рационалних функција, него једнога низа полинома по x, y.

Лако се уверити да ће функција R_2 бити један полином по x, y, подељен са Q^3; да ће R_3 бити полином подељен са Q^5, и да ће уопште, ако се стави да је

$$R_n = \frac{P_n}{Q^{2n-1}}, \quad P_1 = P, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

P_n бити полином по x, y. Из једначине

$$R_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{Q^{2n-3}}$$

добија се да је

$$\frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} = \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial x} - (2n-3)\dfrac{\partial Q}{\partial x}\cdot P_{n-1}}{Q^{2n-2}},$$

$$\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y} = \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y} - (2n-3)\dfrac{\partial Q}{\partial y}\cdot P_{n-1}}{Q^{2n-2}}$$

па сменивши то у једначини (58) добија се

$$P_n = A\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + B\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} + (2n-3)\,CP_{n-1}, \quad (n = 2, 3, 4, \ldots) \tag{59}$$

где су A, B, C стални полиноми, тј. независни од индекса n, који се из датих полинома P и Q, што фигуришу у диференцијалним једначинама, изводе по обрасцима

$$A = Q^2, \quad B = PQ, \quad C = -\left(Q\frac{\partial Q}{\partial x} + P\frac{\partial Q}{\partial y}\right). \tag{60}$$

Коефицијенат a_n тада се јавља у облику

$$a_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{P_n}{Q^{2n-1}}\right]$$

па ако се са $p_1, p_2, p_3, \ldots$ означе чланови независни од x и y у полиномима $P_1, P_2, P_3, \ldots$, а са q такав члан у полиному Q, коефицијенат a_n изражен је обрасцем

$$a_n = \frac{p_n}{n!\,q^{2n-1}}.$$

Као што се види, израчунавање коефицијената интегралног реда једначине (57) своди се на одређивање чланова независних од x и y у полиномима $Q, P_1, P_2, P_3, \ldots$ који се један из другога изводе по обрасцу (59) у коме треба поћи од почетног полинома

$$P_1 = P(x, y)$$

што фигурише у самој датој диференцијалној једначини.

5. КОНВЕРГЕНЦИЈА ДОБИЈЕНОГ РЕДА

Овим што је довде изложено решен је задатак формалног решења у проблему интеграције диференцијалне једначине. Као што се види, у свима случајевима је могућно формирати ред

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{61}$$

који ће идентички задовољити дату једначину (56) и бити такав да за $x = 0$ даје вредност $y = 0$.

Али да би добијени ред дао и фактичко решење проблема, треба знати још и то да ли ће он бити конвергентан за вредности x за које се то тражи. Као што се зна, сваки Maclaurin-ов ред има свој *круг̄ конвергенције*; кад се вредност x налази у томе кругу, ред је насигурно конвергентан. Круг има за центар тачку $x = 0$; ако му је полупречник R бескрајно велики ред је конвергентан за све вредности x; ако је једнак нули, ред је дивергентан за све вредности x и неупотребљив; ако је коначан и различан од нуле, ред је конвергентан и употребљив за све вредности x што се налазе у кругу.

Кад би се могао познавати прави круг конвергенције, тј. такав да је ред конвергентан за све вредности x у унутрашњости круга, а дивергентан за све вредности x ван круга, имао би се најпространији могућни скуп вредности x за које би ред био конвергентан. Такав се круг осим у изузетним случајевима, не може одредити. Али се увек може одредити такав један круг, описан око $x = 0$, да се може насигурно тврдити да ће добијени ред за интеграл конвергирати за све вредности x што се налазе у његовој унутрашњости, без обзира на то да ли ће он конвергирати и за какве вредности ван круга. Очевидно је да кад се не може имати најпространији скуп вредности за које ће ред бити употребљив, упућени смо на то да се тражи један ма и ужи скуп таквих вредности какав буде могућно наћи.

За одредбу таквога једнога круга постоји *Cauchy-ева компаративна метода,* чији се принцип састоји у овоме:

Уочимо две диференцијалне једначине

$$y' = f(x, y) \tag{62}$$

$$v' = \varphi(x, v) \tag{63}$$

где су f и φ функције холоморфне у близини вредности $x = 0$, $y = 0$, $v = 0$. Те се функције тада могу развити у двоструке редове

$$f(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} x^m y^n, \tag{64}$$

$$\varphi(x, v) = \sum_m \sum_n B_{mn} x^m v^n, \tag{65}$$

који ће насигурно бити конвергентни у близини тих вредности.

Претпоставимо да су испуњени ови *Cauchy-ови услови*:

1° *да су сви коефицијенти* B_{mn} *реални и позитивни*;

2° *да модуо свакога коефицијента* A_{mn} *не премаши вредност одговарајућег коефицијента* B_{mn}, *тј. да је*

$$|A_{mn}| \le B_{mn}; \tag{66}$$

3° *да је интеграл једначине* (63) *холоморфна функција променљиве* x *за све вредности* x *у једноме одређеноме кругу* C *описаном око* x = 0.

Тада се, у таквим претпоставкама, доказује ова преходна теорема: *Ред*

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{67}$$

који је нађен као формално решење за диференцијалну једначину (62) *биће насигурно конвергентан за све вредности* x *што се налазе у кругу* C.

Доказ теореме је основан на овим двама ставовима, који ће претходно бити доказани:

Став A) Нека је $f(x)$ каква функција холоморфна за вредности x такве да је $|x|<r$, тј. за вредности x у кругу c полупречника r са центром у тачки $x=0$, и нека је M једна реална и позитивна вредност коју не премаша $|f(x)|$ кад x остаје у кругу c. Поред тога претпоставља се да је функција $f(x)$ непрекидна за вредности x на самоме кругу c. *Тада је за све вредности* x *у кругу* c

$$\left|\frac{d^m f}{dx^m}\right| < m!\frac{M}{r^m} \qquad (m=0,1,2,3,\ldots) \tag{68}$$

То излази непосредно из Cauchy-евог обрасца познатог из опште теорије аналитичких функција

$$\frac{d^m f}{dx^m} = \frac{m!}{r^m\cdot 2\pi i}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}d\theta \tag{69}$$

из кога излази да је

$$\left|\frac{d^m f}{dx^m}\right| < \left|\frac{m!}{r^m\cdot 2\pi i}\right|\int_0^{2\pi}|f(re^{\theta i})|\cdot|e^{-n\theta i}|\cdot d\theta$$

па пошто је

$$\left|\frac{m!}{r^m\cdot 2\pi i}\right| = \frac{m!}{2\pi r^m},\ |e^{-n\theta i}|=1,\ |f(re^{\theta i})|<M,$$

то је

$$\left|\frac{d^m f}{dx^m}\right| < \frac{m!}{2\pi r^m}M\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{M}{r^m}.$$

Став B) Нека је $f(x,y)$ каква функција холоморфна за вредности x такве да је $|x|<r$ и за вредности y такве да је $|y|<r'$ (тј. за вредности x у кругу c полупречника r, и за вредности y у кругу c' полупречника r', са центрима у $x=0$, односно $y=0$), а са претпоставком да је функција непрекидна за вредности x и y на самим круговима c и c'. Нека је M једна реална и позитивна вредност коју не премаша $|f(x,y)|$ кад x остаје у кругу c, а y у кругу c'. *Тада је за све такве вредности* x и y

$$\left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}f(x,y)\right| < \frac{m!}{r^m}\frac{n!}{r'^n}M, \qquad \begin{pmatrix} m=0,1,2,\ldots \\ n=0,1,2,\ldots\end{pmatrix}. \tag{70}$$

Став је непосредна последица става А). Јер ако се означи да је

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m} = \varphi(x, y)$$

биће према ставу А) за вредности x и y у круговима c и c'

$$|\,\varphi(x, y)\,| < \frac{M}{r^m} \tag{71}$$

па према истом ставу и

$$\left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}\right| < \frac{n!}{2\pi r'^n} N \tag{72}$$

где је N једна реална позитивна вредност коју не премаша $|\,\varphi(x, y)\,|$ кад x и y остају у круговима c и c'. Па пошто се према (71) може узети

$$N = \frac{M}{r^m}$$

и пошто је

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \cdot \partial y^n} f(x, y)$$

из (72) добија се неједначина (70).

Сад се на основу ставова А) и В) теорема што се има у виду доказује на овај начин:

Пошто је функција v холоморфна за вредности x у кругу C, она се може развити у ред

$$v = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \tag{73}$$

који ће бити конвергентан за такве вредности x. Упоредимо коефицијенте реда (67) са одговарајућим коефицијентима реда (73). Из ранијих образаца

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{1!}[f] \\
a_2 &= \frac{1}{2!}[f_1] = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right], \\
a_3 &= \frac{1}{3!}[f_2] = \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f_1}{\partial y}\right] = \\
&= \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} + f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]
\end{aligned} \tag{74}$$

. . . .

види се *структура* коефицијената a_n, која је оваква: a_n је са $n!$ подељен збир сабирака од којих је сваки једнак производу разних степена функције f и њених парцијалних извода по x и y.

Коефицијенти b_n добијају се кад се у обрасцима (74) функција f смени функцијом φ; они дакле имају исту структуру као коефицијенти a_n. Модуо свакога сабирка у обрасцима (74), према неједначинама

$$(75) \qquad |f(x,y)| < M$$

и (66) која се може написати у облику

$$(76) \qquad \left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f\right| < \left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \varphi\right|;$$

мањи је од модула одговарајућег сабирка у сличним обрасцима за коефицијенте b_n. Са друге стране, сви су парцијални изводи функције φ по x и v позитивни за $x = 0$, $v = 0$ по претпоставци 1°. Модуо сваког сабрика у обрасцима за b_n, пошто се у овима стави $x = 0$, $v = 0$, једнак је дакле самоме сабирку, па се из свега тога види да је и модуо коефицијента a_n мањи од збира таквих сабирака у изразу за b_n, па дакле мањи и од самог коефицијента b_n, тј.

$$|a_n| < b_n.$$

Па како је ред

$$v = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

конвергентан за вредности x у кругу C, биће у томе кругу конвергентан и ред

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

чиме је теорема доказана.

Узмимо сад за диференцијалну једначину (63) специјалну једначину

$$(77) \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{v}{r'}\right)} = \varphi(x,v),$$

где r, r', M имају малочас наведена значења. Кад се функција $\varphi(x,v)$ развије у двоструки ред по степенима променљивих x и v, из образаца

$$\frac{1}{1-\frac{x}{r}} = 1 + \frac{x}{r} + \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^3 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-\frac{v}{r'}}=1+\frac{v}{r'}+\left(\frac{v}{r'}\right)^2+\left(\frac{v}{r'}\right)^3+\ldots$$

множењем се добија да је

$$\varphi(x,v)=M\sum_m\sum_n\left(\frac{x}{r}\right)^m\left(\frac{v}{r'}\right)^n=\sum_m\sum_n B_{m,n}x^m v^n, \tag{78}$$

где општи коефицијенат има за вредност

$$B_{m,n}=\frac{M}{r^m r'^n}. \tag{79}$$

Као што се види, тај коефицијенат задовољава Cauchy-ев услов 1°.

Да је, са таквом једначином (77), задовољен и Cauchy-ев услов 2°, може се доказати на овај начин:

Зна се из теорије развијања функција $f(x,y)$ у двоструки Maclaurin-ов ред да коефицијенат $A_{m,n}$ има за вредност

$$A_{m,n}=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}f(x,y)\right] \tag{80}$$

где заграда, као и напред, означује број који се добија кад се у функцији $f(x,y)$ стави $x=0$, $y=0$. Према неједначини (70) тада се добија да је

$$|A_{mn}|<\frac{M}{r^m r'^n} \tag{81}$$

што према једначини (79) показује да је одиста

$$|A_{mn}|<B_{mn} \tag{82}$$

тј. да је задовољен и Cauchy-ев услов 2°.

Напослетку, да је једначином (77) задовољен и Cauchy-ев услов 3°, види се на овај начин:

Једначина (77) може се интегралити раздвојивши јој променљиве x и v, чиме се добија

$$\left(1-\frac{v}{r'}\right)dv=\frac{M}{1-\frac{x}{r}}.$$

Интегралећи добија се

$$v-\frac{v^2}{2r'}=-Mr\log\left(1-\frac{x}{r}\right)+C,$$

где је константа C одређена условом да за $x = 0$ буде $v = 0$, што захтева да буде $C = 0$. Ако се уведе та вредност за константу C и једначина се реши по v, добија се

$$v = r' \pm \sqrt{r'^2 + 2Mrr' \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)}.$$

Услов да за $x = 0$ буде $v = 0$ допушта пред квадратним кореном само знак минус; стога за интеграл v треба узети вредност

$$v = r' - \sqrt{r'^2 + 2Mrr' \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)}.$$

Тај је интеграл v холоморфна функција промењиве x у близини вредности $x = 0$, јер сингуларности функције произлазе само од једначине

$$r'^2 + 2Mrr' \log\left(1 - \frac{x}{r}\right) = 0$$

и

$$\log\left(1 - \frac{x}{r}\right) = 0.$$

Ова друга једначина даје као логаритамски критички сингуларитет вредност $x = r$, али овај не долази у обзир пошто се овде посматрају само вредности у кругу полупречника r.

Прва једначина, решена по x, има само један корен и то

$$x = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right). \tag{83}$$

Та је вредност x једини сингуларитет функције v, у кругу полупречника r и према томе та ће функција бити холоморфна докле год вредност x остаје у кругу C описаном око тачке $x = 0$ са полупречником

$$R = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right). \tag{84}$$

Са таквим кругом задовољен је дакле и Cauchy-ев услов 3°.

Из свега овога се види да специјална једначина (77) испуњава сва три Cauchy-ева услова да би могла играти улогу компаративне једначине за диференцијалну једначину (62). Према томе и ранијој претходној теореми ред (67), добијен на показани начин, биће и сам конвергентан у кругу C полупречника R одређеног обрасцем (84).

6. ИСКЉУЧИВОСТ ДОБИЈЕНОГ РЕДА КАО ИНТЕГРАЛА ЈЕДНАЧИНЕ

Остаје још последње питање, које треба решити да би се имало потпуно решење проблема интеграције: да ли је интеграл, добијен на показани начин у облику реда, једино могућно решење, или поред њега постоји и други који интеграл једначине који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$? Јер, ако би се показало да одиста постоји још који интеграл, добијен на други који начин, онда ово досадашње решење не би давало потпуно решење проблема интеграције.

Да тако постављено питање није излишно, може се видети из примера у којима диференцијална једначина одиста има више од једног интеграла који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$. Такав је нпр. случај са једначином

$$yy' - 1 = 0,$$

која има два интеграла

$$y = +\sqrt{2x} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{2x}$$

који су такви да обадва за $x = 0$ добијају вредност $y = 0$. Једначина

$$x(1+x)y' - (1+2x)y = 0$$

има бескрајно много таквих интеграла, јер је њен општи интеграл

$$y = Cx(1+x).$$

Осим тога, поред начина на који смо у овоме што претходи добили формално решење проблема интеграције, и који се састоји у израчунавању коефицијената a_n реда

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{85}$$

помоћу методе узастопних диференцијаљења, има и других начина за то израчунавање. Један би од њих био нпр. онај помоћу *методе неодређених коефицијената*, који се састоји у овоме:

Напишимо интеграл y у облику реда (85) са непознатим коефицијентима $a_1, a_2, a_3, \dots$, па се из тога добија

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots \tag{86}$$

Кад се редови (85) и (86) ставе у дату диференцијалну једначину на место y и y', добија се једна једначина

$$\Phi(x) = 0$$

у којој кад се лева страна уреди по степенима променљиве x, добија се једна једначина облика

$$M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \ldots = 0$$

чији ће коефицијенти зависити од коефицијената $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Да би та једначина могла постојати за произвољну вредност x потребно је и довољно да буде понаособ

$$M_0 = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \ldots$$

У извесним случајевима дешава се да се из ових једначина могу израчунати коефицијенти $a_1, a_2, a_3, \ldots$, тако да се за сваки од њих добије једна или више коначних и одређених вредности. Кад се један скуп тако одређених вредности прида тим коефицијентима, диференцијална једначина биће редом (85) идентички задовољена, а пошто се из (85) за $x = 0$ добија $y = 0$, тако добијени ред представља једно формално решење проблема.

1. **пример**. – Нека је дата једначина

$$(1-x)^2 y' + y + 1 = 0;$$

налази се на показани начин да је

$$a_1 = -1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{24}, \ldots$$

а општи коефицијенат a_n за $n = 3, 4, 5, \ldots$ израчунаће се из обрасца

$$a_n = \frac{(2n-3)\,a_{n-1} - (n-2)\,a_{n-2}}{n}$$

2. **пример**. – Дата је једначина

$$y' - e^x(1+y) = 0;$$

налази се да је

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{5}{8}, \ldots$$

а општи коефицијенат a_n за $n = 2, 3, 4, \ldots$ израчунаће се из обрасца

$$a_n = \frac{1}{n}\left(a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{1!} + \frac{a_{n-3}}{2\,!} + \ldots + \frac{a_1}{(n-2)\,!} + \frac{1}{(n-1)\,!}\right).$$

3. **пример**. – Дата је једначина

$$(1+x^2)y' - y + x = 0;$$

налази се да је

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{12}, \ldots$$

а a_n се израчунава за $n = 3, 4, 5, \ldots$

$$a_n = \frac{1}{n}(a_{n-1} - a_{n-2}).$$

4. **пример**. – Дата је једначина

$$y' - y^2 - x^2 = 0;$$

налази се да је

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{1}{54}, \ldots$$

а a_n се израчунава помоћу обрасца

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}.$$

Као што се види из таквих примера, начин који је напред употребљен за одредбу интеграла y у облику реда не мора бити једини начин за решење проблема и стога се одиста мора поставити питање: да ли је под претпоставком учињеном за функцију $f(x, y)$, добијено решење једини интеграл y једначине

$$y' = f(x, y)$$

који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$? Претпоставка је била та, да је $f(x, y)$ функција холоморфна у близини вредности $x = 0$, $y = 0$. Под таквом претпоставком може се доказати *да је добијено решење одиста једино решење тражене врсте.*

Да би се то доказало, нека су y и z два таква решења, па означимо њихову разлику $y - z$ са u. Тада је

$$u' = y' - z' = f(x, y) - f(x, z)$$

или

$$u' = \varphi(x, y, u)$$

где је

$$(87) \qquad \varphi(x, y, u) = f(x, y) - f(x, y-u).$$

Пошто је за $x = 0$ и $y = 0$, то мора бити за ту вредност x и $u = 0$. Кад се у $f(x, y)$ смени y нађеним интегралом, који је, као што смо видели, холоморфна функција променљиве x у кругу C, функција $\varphi(x, y, u)$ постаје холоморфна функција променљивих x и u за вредности x и u у близини вредности $x = 0$, $u = 0$. Она се тада може развити у ред уређен по степенима променљиве u

$$(88) \qquad \varphi(x, y, u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + \ldots$$

где ће коефицијенти $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ бити холоморфне функције променљиве x у близини вредности $x = 0$ (пошто је A_n n-ти парцијални извод функције φ по променљивој u, кад се у њему смени $u = 0$ и резултат подели са $n!$).

Из (87) се види да за $x = 0$ (пошто је тада и $y = 0$, $u = 0$) мора бити и $\varphi = 0$. Према једначини (88) то захтева да је $A_0 = 0$, а поред тога могу бити једнаки нули и још један или више првих коефицијената $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Нека је то случај са првих k коефицијената, тако да је

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_{k-1} = 0.$$

Једначина (84) се тада своди на

$$\varphi(x, y, u) = u^k \lambda(x, u)$$

где је

$$\lambda(x, u) = A_k + A_{k+1} u + A_{k+2} u^2 + \ldots$$

Кад се она напише у облику

$$(89) \qquad \frac{u'}{u} = u^{k-1} \lambda(x, u) \qquad (k \geq 1)$$

то, пошто логаритамски извод функције u постаје бескрајан кад је $u = 0$, тако би морало бити и са десном страном једначине (85). Али то је немогућно, пошто је $\lambda(x, u)$ холоморфна функција у близини вредности $x = 0$, $u = 0$. Једначина (85) је дакле немогућна ако u није идентички једнако нули, а тада је $y = z$ за прозвољну вредност x; интеграли y и z не разликују се, дакле, међу собом.

ДРУГИ ОДЕЉАК

ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ И ПРАКТИЧНА УПУТСТВА

7. ОСНОВНА ТЕОРЕМА О ФАКТИЧКОМ РЕШЕЊУ ПРОБЛЕМА ИНТЕГРАЦИЈЕ

Из целокупног досадашњег излагања изводи се основна теорема за интеграцију диференцијалних једначина првога реда у облику Maclaurin-овог реда, која носи назив *теореме Briot-Bouquet-a.*

Нека је дата једначина

$$y' = f(x, y) \tag{90}$$

где је $f(x, y)$ ма каква функција променљивих x и y, холоморфна у близини вредности $x = 0$, $y = 0$, као и за све вредности x у једноме кругу c описаном у равни променљиве x око тачке $x = 0$ и за све вредности y у једноме кругу c' описаном у равни променљиве y око тачке $y = 0$. Ако су r и r' полупречници кругова c и c', а M какав реалан позитиван број који не премаша вредност модула функције $f(x, y)$ док x и y остају у тим круговима, онда важи ова теорема, као резултат свега што је напред изложено:

Онај интеграл y *једначине* (90), *који за* x = 0 *добија вредност* y = 0 *увек се може развити у Maclaurin-ов ред*

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

чији се општи коефицијенат $\mathrm{a_n}$ *израчунава помоћу обрасца*

$$a_n = \frac{1}{n!}[f_{n-1}], \tag{91}$$

а где је $\mathrm{f_1, f_2, f_3}, \dots$ *низ функција које се једна из друге израчунавају помоћу обрасца*

$$(92) \qquad f_n = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + f\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}, \quad f_0 = f(x,y).$$

Добијени ред ће насигурно бити конвергентан за све вредности x *што леже у кругу* C *описаном у равни* x *око тачке* x = 0 *као центра са полупречником*

$$(93) \qquad R = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right).$$

Метода којом смо дошли до ове основне теореме, је *Cauchy-ева компаративна метода* која се састоји у томе да се добијени ред за интеграл y упореди са редом што даје интеграл v друге једне диференцијалне једначине првога реда, за који се зна један круг у коме ће ред што изражава v конвергирати. Теорему је први доказао Cauchy, али су је Briot и Bouquet учинили тачнијом, потпунијом и проширили јој област употребљивости.

С обзиром на напред наведену смену, којом се тачке x_0 и y_0 у својим равнима премештају у координатни почетак, теореми се може дати овај облик:

Нека је функција $f(x,y)$ холоморфна у близини вредности $x = x_0$, $y = y_0$, као и за све вредности x у кругу c описаном у равни x око тачке $x = x_0$, и за све вредности y у кругу c' описаном у равни y око тачке $y = y_0$; нека су r и r' полупречници тих кругова, а M какав реалан позитиван број који не премаша вредност модула функције $f(x,y)$ док x и y остају у тим круговима. Тада:

Онај интеграл y *једначине* (90), *који за* $x = x_0$ *добија вредност* $y = y_0$ *може се развити у Taylor-ов ред*

$$y = A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \dots$$

Општи коефицијенат A_n *реда израчунава се помоћу обрасца* (91), *али где* $[f_{n-1}]$ *означује број који се добија кад се у функцији* f_{n-1} *смени* $x = x_0$, $y = y_0$. *Низ функција* $f_1, f_2, f_3, \dots$ *опет се одређује помоћу обрасца* (92).

Добијени ред ће насигурно бити конвергентан за све вредности x *што леже у кругу* C *описаном у равни* x *око тачке* $x = x_0$ *као центра, са полупречником* (93).

Уосталом, напред је показано како се случај $x = x_0$, $y = y_0$ увек своди на случај $x = 0$, $y = 0$, тако да овај други облик теореме није општији од првога.

Приметимо да пошто је

$$\frac{r'}{2Mr} > 0,$$

то је

$$0 < e^{-\frac{r'}{2Mr}} < 1$$

и према томе

$$0 < 1 - e^{-\frac{r'}{2Mr}} < 1$$

па дакле

$$R < r.$$

Круг C у коме ће конвергирати интегрални ред y, садржан је, дакле, у кругу c у коме је функција $f(x, y)$, сматрана као функција промењљиве x, холоморфна.

8. ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ

Briot-Bouquet-ова основна теорема потпуно решава проблем интеграције диференцијалне једначине првога реда (90) помоћу Maclaurin-ових и Taylor-ових редова. Практична примена теореме на поједине дате случајеве захтева да се одреде полупречници r и r' кругова c и c', као и број M, за дату функцију $f(x, y)$.

A) *Одредба полупречника* r *и* r$'$.

Пре свега има случајева кад се може за r и r' узети један пар ма колико позитивних бројева; то су случајеви кад је $f(x, y)$ цела функција промењљивих x и y, нпр. какав полином по x и y.

Кад није такав случај, онда су један од два полупречника, или оба, ограничени. Холоморфност функције $f(x, y)$ уопште престаје за вредности x и y које задовољавају извесну једначину $\varphi(x, y) = 0$. Тако нпр. функција f престаје бити холоморфна за такве вредности x, y, кад она има који од облика

$$\frac{P(x, y)}{\varphi(x, y)}, \quad P(x, y)\sqrt[3]{\varphi(x, y)}, \quad \frac{P(x, y)}{\sqrt{\varphi(x, y)}}, \quad P(x, y)\log\varphi(x, y).$$

У случају кад φ садржи само x, холоморфност може престати само за оне вредности x за које је $\varphi(x) = 0$; кад φ садржи само y, она престаје само за оне вредности y за које је $\varphi(y) = 0$. Тада се у првом случају може за r узети модуо ма које вредности x ближе тачки $x = 0$ него ма који корен једначине $\varphi(x) = 0$, јер кад круг c има полупречник мањи од тога модула, тај круг не садржи у својој унутрашњости никакав сингуларитет функције f; за полупречник r' може се узети какав се хоће позитиван број. У другоме случају може се за r' узети модуо ма које вредности y ближе тачки $y=0$ него ма који корен једначине $\varphi(y)=0$, из истога разлога као у првом случају; за r се може узети ма какав позитиван број. Напослетку, кад се једначина $\varphi(x,y)=0$ распада на две једначине $\varphi_1(x)=0$ и $\varphi_2(y)=0$, узеће се за r модуо ма које вредности x ближе тачки $x=0$ него ма који корен једначине $\varphi_1=0$, а за r' модуо ма које вредности y ближе тачки $y=0$ него ма који корен једначине $\varphi_2=0$.

Али је проблем компликованији кад се функција φ не изражава у коме од облика

$$\varphi(x,y)=\varphi(x), \qquad \varphi(x,y)=\varphi(y), \qquad \varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y),$$

и уопште кад једначина $\varphi(x,y)=0$ нема корена $x=\alpha$ или $y=\beta$ где су α и β константе. У таквим се случајевима може поступити овако:

Пошто је функција $f(x,y)$ холоморфна за $x=0$, $y=0$, вредност $\varphi(0,0)$ је различна од нуле. У великом броју случајева могућно је наћи такву једну реалну функцију λ двеју промељивих количина да, ако се стави да је

$$|x|=\rho, \qquad |y|=\rho',$$

буде за све вредности x и y

$$|\varphi(x,y)|>\lambda(\rho,\rho') \qquad \lambda(0,0)>0.$$

При тражењу такве једне функције λ често помаже правило по коме је модуо збира мањи од збира модула, а већи од разлике модула, тј.

$$|u|-|v|<|u+v|<|u|+|v|.$$

Тако нпр. кад је

$$\varphi(x,y)=1+axy$$

биће

$$|\varphi(x,y)|>1-|axy|=1-\alpha\rho\rho', \qquad \alpha=|a|.$$

Кад је

$$\varphi(x,y)=1+ax^m y^n(b+cx^p)$$

биће

$$|\varphi(x,y)|>1-|ax^m y^n|\cdot|b+cx^p|,$$

па пошто је

$$|b+cx^p|<|b|+|c|\rho^p,$$

биће

$$|\varphi(x,y)|>1-\alpha\rho^m\rho'^n(\beta+\gamma\rho^p)$$

где је

$$\alpha = | a |, \quad \beta = | b |, \quad \gamma = | c | .$$

Кад је у датоме случају нађена таква једна функција $\lambda(\rho, \rho')$, онда постоји ово правило:

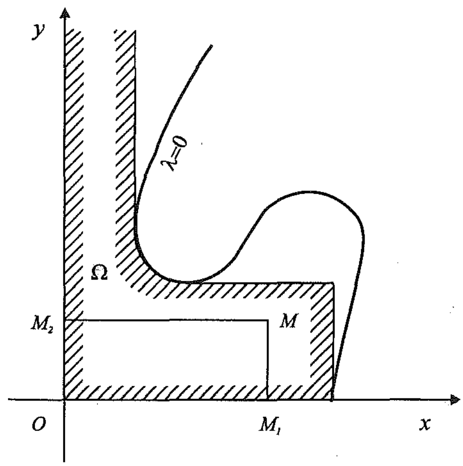
Ако се реални позитивни бројеви ρ *и* ρ' *сматрају као координате* x *и* y *једне покретне тачке* M(x, y) *у равни* xOy, *па се конструише реална крива*

$$(94) \qquad \lambda(x, y) = 0$$

и уочи област Ω (види слику) *која се састоји из свих могућних правоугаоника* OM_1MM_2 *са врховима у*

$$O(0,0), \quad M_1(x,0), \quad M(x,y), \quad M_2(0,y),$$

што се налазе цели у позитивној области криве (94), *тада се за* r *и* r′ *могу узети координате једне ма које тачке у тој области* Ω.



Да би се то доказало треба подсетити да, као што се зна из Аналитичке Геометрије, крива (94) дели раван xOy на *позитивну и негативну област* те криве, тј. такве две области, растављене самом том кривом, да за све тачке $M(x, y)$ у једној од њих функција λ остаје непрестано позитивна, а у другој непрестано негативна. Знак функције λ, онакав какав је за једну произвољно изабрану тачку једне такве области, остаје непромењен за све друге тачке M у истој области. Како је $\lambda(0,0) > 0$, позитивна област је увек она у којој је координатни почетак.

На пример, права линија

$$\lambda(x, y) = y + 2x + 3 = 0$$

дели раван xOy на две области; једна, у којој је координатни почетак, је позитивна, јер у њему функција λ има вредност +3; друга, у којој је нпр. тачка $x = -2$, $y = -5$, је негативна, јер у овој тачки функција има вредност – 6.

Тако исто круг

$$\lambda(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

дели раван на унутрашњу и спољашњу кружну област; за тачку $M(0, 0)$ функција λ има вредност -4, а нпр. за тачку $M(2, 3)$ она има вредност $+9$. Унутрашња област је негативна, а спољашња позитивна.

Кад је, дакле, конструисана крива (94) и одређена њена позитивна област, која ће садржати и координатни почетак, за све време док се тачка $M(x, y)$ помера у тој области, а у квадранту позитивних координата, функција λ не мења свој позитивни знак, па ће, дакле, за координате $x = r$, $y = r'$ једне ма које тачке $M(x, y)$ у истој области остати позитивна. То значи да ће за све тачке M постојати неједначина

$$|\varphi(x, y)| > \lambda(r, r') > 0.$$

Ако се шта више тачка M помера у области Ω, за време ма каквог померања од $M(0, 0)$ до $M(r, r')$, а док $|x| = \rho$ расте од нуле до r, а $|y| = \rho'$ од нуле до r', функција $\lambda(x, y)$ не може бити једнака нули. А то показује да, док се x креће у своме кругу c полупречника r и y у своме кругу c' полупречника r', ма како, функција $f(x, y)$ непрестано остаје холоморфна, чиме је горње тврђење доказано.

1. **пример**. – Нека је дата једначина облика

$$y' = \frac{p(x, y)}{a + bxy}$$

где је $p(x, y)$ полином по x, y, а a и b две позитивне константе. Холоморфност функције на десној страни једначине престаје кад је

$$a + bxy = 0.$$

Пошто је

$$|a + bxy| > a - b|x| \cdot |y| = a - b\rho\rho'$$

може се за r и r' узети апсциса и ордината једне ма које тачке $M(x, y)$ у негативној области равностране хиперболе

$$xy - \frac{a}{b} = 0$$

и то у квадранту позитивних координата, пошто се Ω подудара са том области.

2. **пример**. – Нека је дата једначина облика

$$y' = \frac{p(x, y)}{a + bx^2 + cy^2},$$

где су a, b, c позитивне константе. Холоморфност десне стране престаје кад је

$$a + bx^2 + cy^2 = 0,$$

а пошто је

$$| a + bx^2 + cy^2 | \geq a - | bx^2 + cy^2 |,$$

а

$$| bx^2 + cy^2 | \leq | bx^2 | + | cy^2 | = b\rho^2 + c\rho'^2.$$

то је

$$| a + bx^2 + cy^2 | \geq a - b\rho^2 - c\rho'^2.$$

За r и r' може се, дакле, узети апсциса и ордината једне ма које тачке $M(x, y)$ у унутрашњости круга

$$bx^2 + cy^2 - a = 0$$

описаног око координатног почетка, а у квадранту позитивних координата, пошто се опет Ω подудара са тим кружним квадрантом.

В) *Одредба броја* М.

Очевидно је да број M, који треба да је такав да га модуо функције $f(x, y)$ не премашује док x остаје у своме кругу c полупречника r, а y у своме кругу c' полупречника r', зависи од вредности r и r'. Проблем да се тачно нађе та зависност, нерешљив је, изузимајући неке врло просте случајеве. Али пошто ни сам услов, који одређује M, није прецизан, јер се тражи само то да тај број не буде мањи од поменутога модула функције $f(x, y)$, то је посао упрошћен и задатак одредбе броја M у непрегледном броју случајева решљив.

Пре свега, у многим случајевима помаже правило да је модуо збира мањи од збира модула, а већи од разлике модула. Тако нпр.

1° за једначину

$$y' = \sqrt{1 - xy}$$

биће

$$| 1 - xy | < 1 + rr', \quad r = | x |, \quad r' = | y |$$

па се може узети

$$M = \sqrt{1 + rr'};$$

2° за једначину

$$y' = \sqrt{x^2 - y^2}$$

према

$$| x^2 - y^2 | < r^2 + r'^2$$

може се узети

$$M=\sqrt{r^2+r'^2};$$

3° за једначину

$$y'^3-x^2y^5+1=0$$

може се узети

$$M=\sqrt[3]{1+r^2r'^5}.$$

Међутим постоји за одредбу броја M и једна општа *метода мајорирања*, која се састоји у овоме:

Кад је дата једначина

$$y'=f(x,y)$$

где је $f(x,y)$ функција холоморфна у близини вредности $x=0$, $y=0$, та се функција може развити у двоструки Maclaurin-ов ред

$$f(x,y)=\sum_m\sum_n A_{mn}x^my^n. \tag{95}$$

За функцију $f(x,y)$ каже се да је *мајорирана* једном функцијом $\lambda(r,r')$, израженом двоструким редом

$$\lambda(r,r')=\sum_m\sum_n B_{mn}r^mr'^n \tag{96}$$

где је

$$r=|\,x\,|,\qquad r'=|\,y\,|,$$

ако су коефицијенти B_{mn} реда (96) сви реални и позитивни а при том је за све вредности индекса n

$$|\,A_{mn}\,|\leq B_{mn}. \tag{97}$$

Пошто је

$$|\,f(x,y)\,|=\sum_m\sum_n |\,A_{mn}\,|\cdot|\,x^m\,|\cdot|\,y^n\,|,$$

а

$$|\,A_{mn}\,|\cdot|\,x^m\,|\cdot|\,y^n\,|\leq B_{mn}r^mr'^n$$

ће за све вредности x у кругу c полупречника r, и за све вредности y у кругу c' полупречника r' (са центрима у координатном почетку)

$$|\,f(x,y)\,|<\lambda(r,r'). \tag{98}$$

Задатак одредбе броја M сведен је дакле на

1° тражење реалних позитивних бројева B_{mn} за које ће постојати неједначина (97)

2° на сумирање помоћу њих формираног двоструког реда (96).

А кад је шо извршено, може се узеши

$$M = \lambda(r, r').$$

У појединим општијим случајевима број M се изражава непосредно помоћу саме функције $f(x, y)$. Тако ће бити кад су сви коефицијенти A_{mn} реални, а поред тога

1° или су сви они позитивни; тада се може узети

$$B_{mn} = A_{mn}$$

па дакле

$$\lambda(r, r') = \sum_m \sum_n A_{mn} r^m r'^n = f(r, r')$$

тако да ће бити

$$M = f(r, r');$$

2° или су сви коефицијенти парнога ранга m позитивни, а сви непарног ранга m негативни; тада се може узети

$$M = f(-r, r');$$

3° или су сви коефицијенти парнога ранга n позитивни, а сви непарног ранга n негативни; тада се може узети

$$M = f(r, -r').$$

Тако исто, у појединим општијим случајевима може се мајорирање функције $f(x, y)$ свести на мајорирање простијих функција. Такав је нпр. случај кад је функција $f(x, y)$ облика

$$f = \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3 + \ldots$$

где су φ_k и ψ_k функције променљивих x и y.

Пошто је тада

$$| f | < | \varphi_1 | \cdot | \psi_1 | + | \varphi_2 | \cdot | \psi_2 | + \ldots$$

то кад се знају мајорирати функције

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$
$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$$

имаће се мајорирана и функција $f(x, y)$, па ће се тиме, на горњи начин, одредити и број M.

Што се тиче задатка сумирања двоструког реда (96) којим се извршује мајорирање функције $f(x,y)$, а тиме и одредба броја M, он ће бити предмет одељка 10, ове књиге.

Овде ће бити наведено неколико примера, у вези са тим одељком 10.

1. **пример**. – Зна се да двоструки ред

$$\sum_m \sum_n \frac{1}{m!n!} r^m r'^n$$

има за збир функцију

$$\lambda(r, r') = e^{r+r'};$$

према томе за једначину

$$y' = Ae^x e^y, \quad A = \text{const} > 0$$

може се узети

$$M = Ae^{r+r'}.$$

2. **пример**. – Зна се да ред

$$\sum_m \sum_n (m+1)(n+1) r^m r'^n$$

има за збир функцију

$$\lambda(r, r') = \frac{1}{(1-r)^2(1-r')^2};$$

према томе за једначину

$$y' = \frac{A}{(1-x)^2(1-y)^2} \quad A > 0$$

може се узети

$$M = \frac{A}{(1-r)^2(1-r')^2}.$$

3. **пример**. Зна се да ред

$$\sum_m \sum_n \frac{(m+n)!}{m!n!a^m b^n} r^m r'^n$$

има за збир функцију

$$\lambda(r, r') = \frac{1}{1 - \dfrac{r}{a} - \dfrac{r'}{b}};$$

према томе за једначину

$$y' = \frac{A}{1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}}$$

(где су A, a и b позитивне константе) може се узети

$$M = \frac{1}{1 - \frac{r}{a} - \frac{r'}{b}}.$$

9. СПЕЦИЈАЛНИЈЕ КОМПАРАТИВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ У ПРОБЛЕМУ ИНТЕГРАЦИЈЕ

Као што се види из напред изложенога, одређивање круга C у коме ће добијени интегрални ред

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

дате диференцијалне једначине $y' = f(x, y)$ насигурно бити конвергентан, врши се компаративном методом, упоређујући тај ред са редом што даје интеграл

$$v = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

друге једне диференцијалне једначине

$$(99) \qquad v' = \varphi(x, v) = \sum_m \sum_n B_{mn} x^m v^n$$

која испуњава ове услове:

1° да су сви коефицијенти B_{mn} реални и позитивни;

2° да је за све вредности индекса m и n

$$| A_{mn} | \leq B_{mn};$$

3° да се може одредити полупречник R' круга C' у коме ће интеграл v бити холоморфна функција променљиве x.

Кад је, за дату диференцијалну једначину нађена таква једна једначина (99), може се тврдити *да ће интегрални ред прве једначине бити конвергентан за све вредности* x, *у кругу описаном око* x = 0, *као центра, са полупречником* R *који је бар толико велики колики је полупречник* R′ *круга* C′.

Једначина (99) је тада *компаративна једначина* за дату диференцијалну једначину

$$(100) \qquad y' = f(x, y)$$

Компаративних једначина има од две врсте:

1° једних што важе за све једначине (100) у којима је функција $f(x, y)$ холоморфна у близини вредности $x = 0, y = 0$; то су *опште компаративне једначине*.

2° других што важе за једначине (100) за које је потребно чинити за $f(x, y)$ какве нарочите претпоставке; то су *специјалније компаративне једначине.*

Све ово што је напред изложено за одређивање круга конвергенције C интегралног реда y, основано је на употреби Cauchy-еве компаративне једначине која је облика

$$v' = \frac{M}{(1-ax)(1-bv)}$$

где су a и b две реалне позитивне константе.

То, међутим, није једина могућна компаративна једначина и познато је више разних других диференцијалних једначина које играју исту компаративну улогу као и Cauchy-ева једначина. Такве би нпр. биле Weierstrass-ова једначина

$$v' = \frac{M}{1-ax-bv}$$

или Stäckel-ова једначина

$$v' = \frac{M}{(1-ax)^2(1-bv)}$$

о чијој употреби за одређивање круга конвергенције интегралног реда y овде неће бити говора, пошто је за циљ који се има пред очима била довољна Cauchy-ева једначина.

Специјалних комапративних једначина има мноштво, али је њихова област употребљивости много ужа. За могућност њихове употребе, у појединим датим случајевима, везане су одређене претпоставке о функцији $f(x, y)$ што фигурише у датој диференцијалној једначини.

Најчешће од тих претпоставака су оне *о начину рашћења или опадања коефицијената* A_{mn} двоструког реда

$$(101) \qquad y' = f(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} x^m y^n,$$

кад индекси m и n бескрајно расту. Како се подаци о томе начину рашћења или опадања могу искористити у проблему о коме је реч, видеће се нпр. из ових правила:

Нека су $\lambda(n)$ и $\mu(n)$ две реалне функције променљивог целога позитивног броја n и такве да изрази

$$\sqrt[n]{\lambda(n)}, \quad \sqrt[n]{\mu(n)}, \quad \frac{|A_{mn}|}{\lambda(m)\cdot\mu(n)}$$

остају коначни при бескрајном рашћењу индекса m и n. *Ако се тада стави да је*

$$\sum \lambda(n)x^n = X(x), \qquad (102)$$
$$\sum \mu(n)v^n = V(v),$$

диференцијална једначина

$$v' = \varphi(x, v) = AXV, \qquad (103)$$

где је A подесно изабран реалан позитиван број, играће улогу компаративне једначине за дату једначину (101).

Јер, под постављеним условима, оба реда (102) биће конвергентна у извесним круговима, описаним око почетка, са полупречницима различним од нуле. Са друге стране, услов да израз

$$\frac{|A_{mn}|}{\lambda(m)\cdot\mu(n)} \qquad (104)$$

не расте бескрајно при рашћењу индекса m и n, показује да постоји један реалан и позитиван број A такав да за све вредности тих индекса израз (104) има вредност непрестано мању од A. Тада је, ако се стави да је

$$A\lambda(m)\mu(n) = B_{mn}$$

за све вредности индекса

$$|A_{mn}| < B_{mn}.$$

Са друге стране, интеграл v једначине (103), који за $x = 0$ добија вредност $v = 0$, је изражен једначином

$$\int_0^v \frac{dv}{V} = A\int_0^x X dx \qquad (105)$$

и у свакоме датом случају може се одредити круг C' описан око почетка $x = 0$ у коме ће функција v, изражена обрасцем (105), бити холоморфна. Једначина (103) испуњава, дакле све услове који треба да су испуњени да би била компаративна једначина за једначину (101). *Полупре-*

чник R *круга конвергенције интегралног реда у једначине* (101) *биће, дакле, бар толико велики, колики је полупречник круга* C′.

А из тога се изводе нпр. ова правила:

1. **правило**. *Кад год израз*

$$m!n!|A_{mn}| \tag{106}$$

остаје коначан при бескрајном рашћењу индекса m *и* n, *за полупреник* R *може се узети вредност*

$$R = \log\left(1+\frac{1}{A}\right), \tag{107}$$

где A *означује једну горњу границу израза* (106).

Јер компаративна једначина,

$$v' = \varphi(x, v) = A\sum\frac{x^m v^n}{m!n!} = Ae^{x+v},$$

има за интеграл v, што за $x = 0$ добија вредност $v = 0$, израз

$$v = -\log[1 - A(e^x - 1)]$$

који има вредност (107) као свој од почетка $x = 0$ најмање удаљен сингуларитет.

2. **правило**. *Кад год израз*

$$\frac{|A_{mn}|}{(m+1)(n+1)} \tag{108}$$

остаје коначан при бескрајном рашћењу индекса m *и* n, *за полупреник* R *може се узети вредност*

$$R = \frac{1}{1+3A}, \tag{109}$$

где A *означава једну горњу границу израза* (108).

Јер компаративна једначина

$$v' = \varphi(x, y) = A\Sigma(m+1)(n+1)x^m v^n = \frac{A}{(1-x)^2(1-v)^2}$$

има за интеграл v, који за $x = 0$ добија вредност $v = 0$, израз

$$v = 1 - \sqrt[3]{\frac{1-(1+3A)x}{1-x}}$$

а овај има вредност (109) као свој сингуларитет најближи почетку.

3. **правило**. *Кад год су коефицијенти* A_{mn} *сви реални и позитивни, а израз*

$$m!n!A_{mn} \tag{110}$$

монотоно расте при рашћењу индекса m *и* n, *за компаративну једначину дате диференцијалне једначине*

$$y' = f(x, y) \tag{111}$$

може се узети једначина

$$v' = \varphi(x, v) \tag{112}$$

где је $\varphi(x, v)$ *ма који парцијални извод* $\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial v^q}$ *функције* f(x, v).

Јер, пошто израз (110) монотоно расте при рашћењу индекса, биће за свако m, n, p

$$m!n!A_{mn} \leq (m+p)!(n+q)!A_{m+p,n+q}$$

па дакле

$$A_{mn} < B_{mn}$$

где је

$$B_{mn} = \frac{(m+p)!(n+q)!}{m!n!} A_{m+p,n+q},$$

тако да ће једначина

$$v' = \varphi(x, v) = \Sigma\Sigma B_{mn} x^m v^n$$

играти улогу компаративне једначине за једначину (111) кад год интеграл v задовољава горе наведени услов. Међутим је овде

$$\Sigma\Sigma B_{mn} x^m v^n = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial v^q} f(x, v)$$

а та једначина насигурно има свој интеграл v, што за $x = 0$ добија вредност $v = 0$, као холоморфну функцију променљиве x у близини вредности $x = 0$.

Приметићемо да из горњег услова везаног за израз (110) следује да коефицијенат A_{mn} не опада никад брже него израз

$$\frac{1}{m!n!}$$

у току поступног рашћења индекса m и n.

Правило доводи до закључака од интереса кад се примени нпр. на једначину

$$y' = p(x, y) + \psi(x, y)$$

где је p полином по x и y, а ψ произвољна функција, таква да десна страна једначине задовољава услов везан за израз (110).

10. СУМИРАЊЕ ДВОСТРУКИХ РЕДОВА У ПРОБЛЕМУ ИНТЕГРАЦИЈЕ

Као што је показано, и формирање компаративних једначина, и одредба броја M за Cauchy-еву компаративну једначину захтева сумирање двоструких Maclaurin-ових редова

$$z = \sum_m \sum_n A_{mn} x^m y^n. \tag{113}$$

Проблем сумирања нема оштег решења, али се он може решити у великоме броју општијих случајева, и то баш у онима који су од нарочитог интереса у проблему интеграције. Најважнији од таквих случајева садржани су у ставовима који следују.

1. **став**. *Да би функција* z *дефинисана редом* (113) *била изражљива као збир партикуларних интеграла парцијалне диференцијалне једначине*

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{114}$$

потребно је и довољно да израз A_{mn}, *пошто се у њему смени* m *са* x, *а* n *са* y, *буде збир партикуларних интеграла једначине* (114).

То следује из тога што једначина (114) има за општи интеграл

$$z = XY, \tag{115}$$

где је X произвољна функција променљиве x, а Y произвољна функција променљиве y. Јер је из (115)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X'Y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = XY', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = X'Y'$$

и једначина (114) је задовољена за произвољне функције X и Y.

Ако је, дакле, функција (113) једнака збиру партикуларних интеграла једначине (114), она је облика

$$z = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \dots \tag{116}$$

где је X_k функција променљиве x, а Y_k функција променљиве y.

Онај део двоструког реда (113) што произлази од члана $X_k Y_k$ облика је

$$(\Sigma a_m x^m)(\Sigma b_n y^n)$$

и његов коефицијенат продукта $x^m y^n$ изражава се као збир чланова облика $\alpha_m \beta_n$, где се α_m мења само са индексом m, а β_n само са индексом n. Према томе, и сам коефицијенат A_{mn} изражава се као збир чланова облика $\alpha_m \beta_n$ па, дакле, кад се у њему смени m са x, а n са y, он ће постати линеарна и хомогена комбинација интеграла једначине (114).

Обрнуто, кад год буде наступио овај последњи случај, z је збир чланова облика

$$\Sigma\Sigma \alpha_m \beta_n x^m y^n = (\Sigma \alpha_m x^m)(\Sigma \beta_n y^n) = X_k Y_k$$

па је, дакле, функција (113) збир партикуларних интеграла једначине (114). Услов, исказан горњим ставом, у исто је време и потребан и довољан.

Из свега тога излази и овај, сам по себи очевидан закључак:

2. **став**. *Кад год је функција* (113) *изражљива као збир партикуларних интеграла једначине* (114)*, она је изражљива као хомогена квадратична функција двеју или више функција што зависе само од по једне променљиве* x *или* y*, тако да је она облика* (116).

А из тога се добија и овај закључак:

Да би функција (113) и сама била интеграл једначине (114), потребно је и довољно да то буде случај и са функцијом A_{xy}, тј. да она буде продукат двеју функција, од којих једна зависи само од x, а друга само од y. Такав ће исти облик тада имати и функција z.

I

Једна пространа класа редова (113), који испуњавају услове ових ставова, јесте она за коју је коефицијенат A_{mn} *рационална* функција:

1° ограниченог броја израза

$$a_m, a'_m, a''_m, \dots \tag{117}$$

што се мењају само са индексом m;

2° ограниченог броја израза

$$(118) \qquad b_n, b'_n, b''_n, \ldots$$

што се мењају само са индексом n.

Таква рационална функција ће испуњавати услове горњих ставова кад год су јој полови *сталени*, тј . независни од индекса m и n, или кад полова и нема, у коме се случају коефицијенат A_{mn} своди на полином по изразима (117) и (118).

У овоме последњем случају A_{mn} је збир ограниченог броја чланова облика

$$(119) \qquad a_m^p, a_m'^{p_1}, a_m''^{p_2}, \ldots b_n^q, b_n'^{q_1}, b_n''^{q_2}, \ldots,$$

тј. облика $\alpha_m \beta_n$, па је, дакле, функција A_{xy} збир партикуларних интеграла једначине (114). Функција z је облика (116), где је број функција X_k и Y_k ограничен.

У првом случају, тј. кад рационална функција има полова, а ови су стални, међу изразима (117) налазиће се ограничен број израза облика

$$\frac{1}{[a_m^{(k)} - c_k]^{p_k}},$$

а међу изразима (118) ограничен број израза облика

$$\frac{1}{[b_n^{(k)} - d_k]^{q_k}},$$

где су c_k и d_k стални, од m и n независни бројеви, а p_k и q_k цели позитивни стални бројеви. Функција z биће опет облика (116), тј. биће збир ограниченог броја партикуларних интеграла једначине (114).

Елиминацијом функција

$$(120) \qquad X_1, X_2, X_3, \ldots$$

$$(121) \qquad Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$$

и њихових узастопних извода по x и y из низа једначина које се добијају узастопним парцијалним диференцијаљењима израза (116) по x и y, добија се једна парцијална једначина која не садржи ни једну од функција (120) и (121) ни њихове изводе. Та је једначина облика

$$(122) \qquad P(z, p, q, r, s, t, \ldots) = 0,$$

где је P полином по функцији z и њеним парцијалним изводима $p, q, r, s, t, \ldots$ по x и y. Кад се ред једнога парцијалног извода сматра као степен, тај је полином хомоген; његови коефицијенти су цели бројеви.

У случају нпр. кад је

$$z = X_1Y_1 + X_2Y_2,$$

тј. кад се коефицијенат A_{mn} изражава као збир од два члана облика $\alpha_m\beta_n$, једначина (122) је у своме развијеном облику,

$$\begin{aligned}\tag{123} &\left(z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \\ &-z\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} + \\ &+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = 0.\end{aligned}$$

А за општи случај важи овај

3. **став**. *Кад год је* A_{mn} *облика претпостављеног у овоме параграфу, функција* z *је интеграл једне парцијалне диференцијалне једначине коначног реда облика* (123) *који зависи само од броја чланова* $\alpha_{\mathrm{m}}\beta_{\mathrm{n}}$ *на чији се збир своди* A_{mn} а не зависи од облика израза α_{m} и β_{n}.

Једна иста парцијална једначина (123) важи за све двоструке потенцијалне редове z за које се коефицијенат A_{mn} изражава као збир од једнога истог броја чланова $\alpha_m\beta_n$. Ако је овај број p, једначина је $2p$-ога реда.

II

Узмимо као пример случај кад је

$$A_{mn} = Q_{mn}A_mB_n, \tag{124}$$

где су A_m и B_n чланови ма каквих бескрајних низова

$$\begin{aligned}\tag{125} &A_0, A_1, A_2, \ldots,\\ &B_0, B_1, B_2, \ldots,\end{aligned}$$

а Q_{mn} полином по једноме ограниченом броју чланова

$$\begin{aligned}\tag{126} &m, \lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m, \ldots\\ &n, \mu_1^n, \mu_2^n, \mu_3^n, \ldots\end{aligned}$$

где су λ_k и μ_k бројеви независни од m и n, као и коефицијенти полинома Q_{mn}.

Коефицијенат A_{mn} и тада је једнак збиру ограниченог броја сабирака облика

$$Cm^p n^q M^m N^n A_m B_n,$$

где су C, M, N константе независне од m и n, а p и q цели позитивни бројеви такође независни од m и n. Функција A_{xy} је, дакле, збир партикуларних интеграла једначине (114). Према томе, функција z, дефинисана двоструким редом

$$z = \Sigma\Sigma A_{mn} x^m y^n$$

једнака је збиру ограниченог броја чланова облика $X_p Y_q$, где је

$$X_p = A\,\Sigma m^p A_m (Mx)^m, \quad Y_q = B\,\Sigma n^q B_n (Ny)^n,$$

и где су A и B две константе.

Уочимо тада две функције

$$(127) \qquad U_p(t) = \Sigma m^p A_m t^m, \quad V_q(t) = \Sigma n^q B_n t^n,$$

па ће бити

$$(128) \qquad X_p = AU_p(Mx), \quad Y_q = BV_q(Ny).$$

Међутим, функције U_p и V_q одређене су рекурсивним обрасцима

$$(129) \qquad U_k(t) = t\frac{d}{dt}U_{k-1}(t), \quad V_k(t) = t\frac{d}{dt}V_{k-1}(t),$$

са почетним вредностима

$$(130) \qquad U_0(t) = \Sigma A_m t^m, \quad V_0(t) = \Sigma B_n t^n.$$

Помоћу тако одређених функција U_k и V_k функција z се изражава као збир ограниченог броја чланова облика

$$(131) \qquad CU_p(Mx)\cdot V_q(Ny).$$

Ако се сингуларитети функције $U_0(t)$ означе са

$$(132) \qquad \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots,$$

а сингуларитети функције $V_0(t)$ са

$$(133) \qquad \eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots,$$

сингуларитети функције z ће бити

$$(134) \qquad x = \frac{\xi_0}{M}, \quad x = \frac{\xi_1}{M}, \quad x = \frac{\xi_2}{M}, \ldots$$

$$(135) \qquad y = \frac{\eta_0}{N}, \quad y = \frac{\eta_1}{N}, \quad y = \frac{\eta_2}{N}, \ldots$$

Функција z биће холоморфна у кругу полупречника

$$R = \frac{\xi}{M},$$

у равни променљиве x, и у кругу полупречника

$$R' = \frac{\eta}{N},$$

у равни променљиве y, где ξ и η означују најмању међу вредностима (132) и (133).

1. **пример**. – Нека је

$$A_m = 1, \quad B_n = 1,$$

а знак $\Sigma\Sigma$ се распростире на вредности

$$(136) \qquad \begin{aligned} m &= 0, 1, 2, 3, \ldots \\ n &= 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Тада је

$$U_0 = V_0 = \frac{1}{1-t}, \quad U_1 = V_1 = \frac{t}{(1-t)^2},$$

$$U_2 = V_2 = \frac{1+t}{(1-t)^3}, \quad U_3 = V_3 = \frac{4+2t}{(1-t)^4}, \ldots$$

Све су функције $U_k(t)$ и $V_k(t)$ рационалне, *па ће функција* z *бити рационална функција променљивих* x *и* y, *која ће имати за полове вредности*

$$x = \frac{1}{M}, \quad y = \frac{1}{N}.$$

Тако се нпр. налази да је

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (am + bn + c) x^m y^n =$$

$$= aU_1(x)\cdot V_0(y) + bU_0(x)\cdot V_1(y) + cU_0(x)\cdot V_0(y),$$

па пошто је

$$U_0(t) = V_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m = \frac{1}{1-t},$$

$$U_1(t) = V_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} m\, t^m = \frac{t}{(1-t)^2},$$

то је

$$z = \frac{ax}{(1-x)^2(1-y)} + \frac{by}{(1-x)(1-y)^2} + \frac{c}{(1-x)(1-y)}.$$

Тако се исто налази да је

$$z = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(am+bn+c)^2\, x^m y^n =$$

$$= a^2U_2(x)\cdot V_0(y) + b^2U_0(x)\cdot V_2(y) + c^2U_0(x)\cdot V_0(y) +$$

$$+2abU_1(x)\cdot V_1(y) + 2acU_1(x)\cdot V_0(y) + 2bcU_0(x)\cdot V_1(y),$$

па пошто

$$U_0, V_0, U_1, V_1$$

имају исте вредности као малочас, а

$$U_2(t) = V_2(t) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} m^2 t^m = \frac{1+t}{(1-t)^3},$$

то, кад се све сведе, добија се за z израз

$$z = \frac{Ax^2y^2 + Bx^2y + Cxy^2 + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx + Hy + I}{(1-x)^3(1-y)^3},$$

где су $A, B, \ldots, I$ константе чије су вредности

$$A = c^2 + 2(ab - ac - bc), \quad B = b^2 - 2c^2 - 2(ab - 2ac - bc),$$

$$C = a^2 - 2c^2 - 2(ab - ac - 2bc), \quad D = b^2 + c^2 - 2ac,$$

$$E = -2(a^2 + b^2 - 2c^2) + 2(ab - 2ac - 2bc), \quad F = a^2 + c^2 - 2bc,$$

$$G = a^2 - 2(b^2 + c^2 - ac), \quad H = b^2 - 2(a^2 + c^2 - bc), \quad I = a^2 + b^2 + c^2.$$

Као специјалан случај добија се образац

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)^2\,x^m y^n = \frac{2x^2y^2+x^2y-xy^2+x^2-2xy+y^2-x-y+2}{(1-x)^3(1-y)^3}$$

Исто тако је и

$$z=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(am^2+bn^2)\,x^m y^n=$$

$$=\frac{(a+b)(1-2xy)+bx^2(1+y)+ay^2(1+x)+(a-2b)x-(2a-b)y}{(1-x)^3(1-y)^3},$$

тако да је

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(m^2+n^2)\,x^m y^n=\frac{xy(x+y-4)+x(x-1)+y(y-1)+2}{(1-x)^3(1-y)^3}.$$

2. **пример**. – Нека је

$$A_m=\frac{1}{m!},\quad B_n=\frac{1}{n!},$$

а знак ΣΣ се распростире на све вредности (136). Тада је

$$U_0=V_0=e^t,\quad U_1=V_1=te^t,$$

$$U_2=V_2=(1+t)\,e^t,\quad U_3=V_3=(2+t)\,e^t,$$

$$U_4=V_4=(3+t)\,e^t,\ldots$$

Функција z *је полином по променљивима* x, y *и по разним експоненцијалним функцијама*

$$e^{a_1x},\quad e^{a_2x},\quad e^{a_3x},\ldots$$
$$e^{b_1y},\quad e^{b_2y},\quad e^{b_3y},\ldots$$

где су a_k *и* b_k *константе чији је број ограничен.*

3. **пример**. – Нека је

$$A_m=\frac{(2m)!}{(m!)^2},\quad B_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

а знак ΣΣ се распростире на све вредности (136). Тада је

$$U_0=V_0=\frac{1}{\sqrt{1-4t}},\quad U_1=V_1=\frac{2t}{(\sqrt{1-4t})^3},$$

$$U_2 = V_2 = \frac{2t+8t^2}{(\sqrt{1-4t})^5}, \ldots$$

Функција z *је алгебарска функција променљивих* x *и* y, *која има вредности*

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1}{4}$$

као алгебарске критичке тачке другога реда.

4. **пример**. – Нека је A_m рационална функција променљиве m чији су полови сви прости и једнаки негативним сталним целим бројевима; нека је B_n функција такве исте врсте променљиве n. Поред тога, знак $\Sigma\Sigma$ односи се на вредности

$$m = 1, 2, 3, \ldots; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Тада су A_m и B_n облика

$$A_m = \frac{P(m)}{(m+\alpha_1)(m+\alpha_2)\ldots(m+\alpha_p)},$$

$$B_n = \frac{Q(n)}{(n+\beta_1)(n+\beta_2)\ldots(n+\beta_q)},$$

где су α_k и β_k цели позитивни бројеви независни од m и n, а $P(m)$ и $Q(n)$ су полиноми по m, односно по n.

Растављањем рационалних функција A_m и B_n на просте елементе добија се

$$A_m = C + M, \quad B_n = C' + N,$$

где је

$$M = \sum \frac{R_k}{m+\alpha_k}, \quad N = \sum \frac{R'_k}{n+\beta_k}$$

и где су

$$C, C', R_k, R'_k$$

константе независне од m и n, и то R_k и R'_k су остаци функција A_m и B_n за њихове полове $-\alpha_k$ и $-\beta_k$. Тада је

$$U_0(t) = \frac{C}{1-t} + \sum \frac{R_1 t^m}{m+\alpha_1} + \sum \frac{R_2 t^m}{m+\alpha_2} + \ldots,$$

$$V_0(t) = \frac{C'}{1-t} + \sum \frac{R'_1 t^m}{m+\beta_1} + \sum \frac{R'_2 t^m}{m+\beta_2} + \ldots$$

Међутим, образац

$$\log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \ldots - \frac{t^p}{p} -$$

$$-t^p\left(\frac{t}{1+p} + \frac{t^2}{2+p} + \frac{t^3}{3+p} + \ldots\right)$$

даје непосредно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n+p} = -\frac{1}{t^p}\left[\log(1-t) + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^p}{p}\right],$$

према чему се налази да је

$$U_0(t) = \frac{C}{1-t} - \log(1-t)\left(\frac{R_1}{t^{\alpha_1}} + \frac{R_2}{t^{\alpha_2}} + \ldots\right) - S(t),$$

где је $S(t)$ збир чланова

$$\frac{R_k}{t^{\alpha_k}}\left(t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^{\alpha_k}}{\alpha_k}\right)$$

за

$$k = 1, 2, 3, \ldots, h,$$

а где h означава број полова рационалне функције A_m.

Функција $V_0(t)$ има исти облик, само што су у њој константе C и R_k смењене константама C' и R'_k, а полови α_k са β_k.

Из тих се почетних функција, помоћу напред наведених рекурсивних образаца, могу изразити потребне функције U_k и V_k а *тиме ће бити сумиран дати ред z помоћу ограниченог броја рационалних и логаритамских функција.*

III

Уочимо исти случај као у одељку II, а са том разликом што је Q_{mn} полином по једном ограниченом броју чланова

$$\frac{1}{m}, \lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m, \ldots,$$
$$\frac{1}{n}, \mu_1^n, \mu_2^n, \mu_3^n, \ldots,$$

где су λ_k и μ_k стални бројеви (независни од m и n) као и коефицијенти полинома Q_{mn}

Израчунавање функције z је исто као у одељку II, са том разликом што функције U_k и V_k имају другојаче облике. На име, биће

$$U_k(t) = \sum \frac{A_m}{m^k} t^m, \quad V_k(t) = \sum \frac{B_n}{n^k} t^n.$$

Те су функције у исти мах одређене и рекурсивним обрасцима

$$U_k(t) = \int U_{k-1}(t) \frac{dt}{t}, \quad V_k(t) = \int V_{k-1}(t) \frac{dt}{t},$$

са почетним функцијама

$$U_0(t) = \Sigma A_m t^m, \quad V_0(t) = \Sigma B_n t^n.$$

Оне се, уосталом, могу имати и непосредно изражене у облику одређеног интеграла. Тако, из интегралног обрасца

$$\frac{1}{m^k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty e^{-mu} u^{k-1} du$$

добија се да је

$$U_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty U_0(te^{-u})\, u^{k-1} du,$$

$$V_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty V_0(te^{-u})\, u^{k-1} du.$$

У специјалном случају кад је

$$A_m = 1, \quad B_n = 1,$$

а сумирање ΣΣ се протеже на вредности

$$m = 1, 2, 3, \ldots$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

биће

$$U_0(t) = V_0(t) = \sum_{m=1}^\infty t^m = \frac{t}{1-t},$$

$$U_1(t) = V_1(t) = -\log(1-t), \ldots$$

Функције $U_k(t)$ и $V_k(t)$ се, уосталом, изражавају и непосредно у облику одређеног интеграла

$$U_k(t) = V_k(t) = \frac{t}{(k-1)!}\int_0^{\infty} \frac{u^{k-1}du}{e^u - t}.$$

Функција z *је тада једна мултиформна функција променљивих* x *и* y, *која има вредности* x = 1, y = 1 *за логаритамске критичке тачке.*

Уочимо још и случај кад је

$$A_{mn} = (A_m + B_n)\,Q_{mn}$$

где су A_m, B_n, Q_{mn} исти као у одељку II. Коефицијенат A_{mn} тада је збир ограниченог броја чланова од две врсте, једних облика

$$Cm^p n^q M^m N^n A_m,$$

других облика

$$Cm^p n^q M^m N^n B_n,$$

па је, дакле, функција A_{xy} опет збир партикуларних интеграла парцијалне једначине (114).

За чланове првога облика је

$$U_0(t) = \Sigma A_m t^m, \quad V_0(t) = \frac{1}{1-t},$$

а за чланове другога облика

$$U_0(t) = \frac{1}{1-t}, \quad V_0(t) = \Sigma B_n t^n,$$

па би се функције $U_k(t)$ и $V_k(t)$ израчунале помоћу рекурсивних напред наведених образаца, а помоћу њихових квадратичких комбинација била би изражена и функција z.

IV

У многим случајевима могућно је сумирати и двоструке редове

(137) $$z = \Sigma\Sigma C_{mn} x^m y^n,$$

у којима општи коефицијенат C_{mn} не испуњава услове предњих ставова, али их задовољава пошто се подели каквим изразом B_{mn} што зависи од индекса m и n.

Такве су врсте редови (137) у којима је функција C_{xy} двеју променљивих x и y једнака продукту два фактора:

1° једнога A_{xy} који је једнак збиру ограниченог броја партикуларних интеграла парцијалне једначине.

2° једнога B_{xy} који је такав да је могућно сумирати ред

(138) $$\varphi(x, y) = \Sigma\Sigma B_{mn} x^m y^n.$$

Уочимо, као пример, случај кад фактори A_{mn} и A_m имају облик претпостављен у одељку II. Општи коефицијенат C_{mn} тада је једнак збиру ограниченог броја израза облика

$$Cm^p n^q M^m N^n B_{mn},$$

тј. збиру ограниченог броја партикуларних интеграла једначине (138), (где су C, M, N константе, а p и q стални позитивни цели бројеви).

Функција (137) је изражљива као збир ограниченог броја израза облика

$$CU_{p,q}(Mx, Ny),$$

где је

$$U_{p,q}(x, y) = \Sigma\Sigma m^p n^q B_{mn} x^m y^n.$$

Међутим, функције $U_{p,q}$ се могу одредити помоћу једног или другог рекурсивног обрасца

$$U_{p,q} = x \frac{\partial}{\partial x} U_{p-1,q}, \quad U_{p,q} = y \frac{\partial}{\partial y} U_{p,q-1},$$

где почетна функција $U_{0,0}$ има за израз

$$U_{0,0}(x, y) = \varphi(x, y).$$

Тако нпр. за двоструки ред

$$\sum\sum \frac{(m+n)!}{(m+n)\,m!\,n!} x^m y^n,$$

где се сумирање распростире на све вредности 0, 1, 2, 3, ... индекса m и n, осим на пар $m = 0$, $n = 0$, зна се да има за збир функцију

$$\varphi(x, y) = -\log(1 - x - y).$$

Тој функцији одговарају функције $U_{p,q}$ облика

$$U_{1,0} = \frac{x}{1 - x - y}, \quad U_{0,1} = \frac{y}{1 - x - y},$$

$$U_{1,1}=\frac{xy}{(1-x-y)^2},\quad U_{2,0}=\frac{x(1-y)}{(1-x-y)^2},$$

$$U_{0,2}=\frac{y(1-x)}{(1-x-y)^2},\quad U_{2,1}=\frac{xy(1+x-y)}{(1-x-y)^3},$$

$$U_{1,2}=\frac{xy(1-x+y)}{(1-x-y)^3},\quad U_{2,2}=\frac{xy(1-x^2-y^2+4xy)}{(1-x-y)^4},\ldots$$

па се, према томе, увек може сумирати сваки ред облика

$$\sum\sum\frac{(m+n-1)!}{m!n!}A_{mn}x^my^n.$$

Сваки такав ред има, дакле, за збир једну квадратичну комбинацију функције $\log(1-\mathrm{x}-\mathrm{y})$ *и рационалних функција променљивих* x *и* y.

Тако исто, за двоструки ред

$$\Sigma\Sigma B_{mn}x^my^n,$$

где је

$$B_{mn}=\frac{[1\cdot3\cdot5\ldots(2m-1)][1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)]}{2\cdot4\cdot6\ldots2(m+n)},\tag{139}$$

зна се да има за збир функцију

$$\varphi(x,y)=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-y}}}{1+\sqrt{(1-x)(1-y)}},$$

као и то да ред

$$\Sigma\Sigma B_{mn}x^{2m}y^{m-2n},$$

где је

$$B_{mn}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\cdot\frac{1}{2^m}\tag{140}$$

има за збир функцију[1)]

$$\varphi(x,y)=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-y+\sqrt{1-x^2}}.$$

[1)] Hermite: *Cours d'Analyse de l'École Polytechique*, p. 64.

Помоћу горњих рекурсивних образаца одређују се из ових почетних функција одговарајуће им функције $U_{p,q}$, које ће све бити алгебарске функције променљивих x и y.

Сваки двоструки ред

$$z = \Sigma\Sigma A_{mn} B_{mn} x^m y^n, \tag{141}$$

где B_{mn} *има за израз* (139) *или* (140), *има за збир по једну алгебарску функцију променљивих* x *и* y.

На исти би се начин сумирали редови (141) за које B_{mn} и $\varphi(x, y)$ имају који од ових облика:

1° $B_{mn} = \dfrac{(m+n)!}{m!n!}$, $\qquad \varphi(x, y) = \dfrac{1}{1-x-y}$;

2° $B_{mn} = 1$, $\qquad \varphi(x, y) = \dfrac{1}{1-xy}$;

3° $B_{mn} = \dfrac{(2m)!}{(m!)^2}$, $\qquad \varphi(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4xy}}$;

4° $B_{mn} = \dfrac{am+bn+c}{m!n!}$, $\qquad \varphi(x, y) = (ax+by+c)\, e^{x+y}$.

У случајевима 1° и 2° функција z је *рационална* функција променљивих x и y; у случају 3° z је *алгебарска* функција тих променљивих, а у случају 4° z је *цела* трансцендентна функција истих променљивих.

У случају 4°, кад је сумирање распрострто на вредности

$$m = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

налази се да је

$$\varphi(x, y) = (ax+by+c)\, e^{x+y} - (ax+c)\, e^x - (by+c)\, e^y + c,$$

а одговарајуће функције $U_{p,q}$ добијају се помоћу напред наведених рекурсивних образаца.

V

Ово, што је довде изложено, налази непосредну примену у *проблему мајорирања двоструких потенцијалних редова*

$$f(x, y) = \Sigma\Sigma a_{mn} x^m y^n. \tag{142}$$

Пошто је увек

$$|\, f(x, y)\,| < \Sigma\Sigma\, |\, a_{mn}\,|\, r^m r'^n, \quad r = |\, x\,|, \quad r' = |\, y\,|, \tag{143}$$

то, кад год се $|a_{mn}|$ може мајорирати каквим изразом A_{mn} онаквог облика о каквом је напред била реч, тј. таквим да је A_{xy} један интеграл, или збир ограниченог броја, овога пута реалних и позитивних, партикуларних интеграла парцијалне диференцијалне једначине

$$zs - pq = 0,$$

биће

$$|f(x, y)| < F(x, y), \tag{144}$$

где је

$$F(x, y) = \Sigma\Sigma A_{mn} x^m y^n. \tag{145}$$

Из овога што претходи види се да је у непрегледном броју случајева *могућно имати мајоранту функцију* F(x, y) *изражену у експлицитном облику као функцију променљивих x* и *y*.

А то се опет непосредно примењује на *проблем интеграције диференцијалних једначина првога реда*

$$y' = f(x, y) \tag{146}$$

помоћу редова

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{147}$$

Главни део проблема састоји се у одредби једнога круга, описаног око тачке $x = 0$ у равни променљиве x, у коме ће ред (147), за дату једначину (146), бити насигурно ковергентан.

Уочимо интеграл једначине (146) који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$ и претпоставимо да се функција $f(x, y)$ може развити у ред (142) чији је општи коефицијенат a_{mn} могућно мајорирати каквим реалним и позитивним изразом A_{mn} о коме је малочас била реч. Тада ће функција $f(x, y)$ бити мајорирана одговарајућом функцијом $F(x, y)$ која ће бити збир партикуларних интеграла парцијалне једначине

$$zs - pq = 0.$$

Означимо са v овај интеграл диференцијалне једначине

$$v' = F(x, v), \tag{148}$$

који за $x = 0$ добија вредност $v = 0$. *Полупречник* R *круга конвергенције интегралног реда* (147) *биће бар толики колики је полупречник* R′ *круга холоморфности интеграла* v.

Међутим, функција F је тада облика

$$F(x, v) = X_1 V_1 + X_2 V_2 + \ldots$$

где X_k зависе само од x, а V_k само од v, па се подесним избором те мајорантне функције може учинити да одговарајућа једначина (148)

$$v' = X_1 V_1 + X_2 V_2 + \ldots$$

буде интеграбилна, или да јој се бар може и без интеграције одредити полупречник R' холоморфности њеног интеграла v. Тада горњи став даје један круг описан око тачке $x = 0$, у коме ће интегрални ред (147) насигурно конвергирати.

То ће бити расветљено следећеим примерима.

1. **пример**. – Нека су

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots; \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$$

два низа позитивних бројева, таквих да количник

$$\frac{|a_{mn}|}{\lambda_m \mu_n} \tag{149}$$

остаје коначан при бескрајном рашћењу индекса m и n; нека је A један сталан позитиван број који није премашен вредношћу количника (149). Тада се може узети

$$A_{mn} = A\lambda_m \mu_n,$$

па ће у компаративном реду (145) бити испуњени напред постављени услови. Функција $F(x, y)$ биће

$$F(x, y) = A\Sigma\Sigma\lambda_m \mu_n x^m y^n = A\lambda(x) \cdot \mu(y),$$

где је

$$\lambda(x) = \Sigma\lambda_m x^m, \quad \mu(y) = \Sigma\mu_n y^n,$$

а компаративна једначина (148) је тада

$$v' = A\lambda(x)\mu(v). \tag{150}$$

Полупречник R круга конвергенције интегралног реда

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{151}$$

једначине (146) биће бар толики, колики је полупречник R' круга холоморфности интеграла v једначине (150), датог једначином

$$\int_0^v \frac{dv}{\mu(v)} = \int_0^x \lambda(x)\, dx.$$

Тако нпр. у специјалном случају кад је

$$\lambda_m = \frac{1}{m!}, \quad \mu_n = \frac{1}{n!},$$

тј. кад модуо општег коефицијента a_{mn} дате диференцијалне једначине (146), у вези са изразом (142), не опада спорије него израз

$$\frac{1}{m!n!},$$

може се узети

$$A_{mn} = \frac{A}{m!n!}.$$

Компаративна једначина (150) је

$$v' = A\sum\sum\frac{x^m v^n}{m!n!} = Ae^{x+v},$$

а њен интеграл, који за $x = 0$ добија вредност $v = 0$, је

$$v = \log(1 + A - Ae^x).$$

Његов круг холоморфности има за полупречник

$$R' = \log\left(1 + \frac{1}{A}\right)$$

и у томе кругу ред (151), што представља интеграл једначине (146), насигурно је конвергентан.

У специјалном случају кад λ_m и μ_n расту брже но 2^m и 2^n, може се узети

$$A_{mn} = 2^{m+n}A.$$

Компаративна једначина (150) је

$$v' = A\Sigma\Sigma 2^{m+n}x^m v^n = \frac{A}{(1-2x)(1-2v)}$$

а њен интеграл, који за $x = 0$ добија вредност $v = 0$, јер

$$v = 1 - \sqrt{1 + 2A\log(1-2x)}.$$

Он је холоморфан у кругу полупречника

$$R' = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2A}}}{2},$$

па ће у томе кругу бити конвегрентан и интегрални ред (151) једначине (146).

На овај последњи случај се своде и једначине (146) у којима количник

$$\frac{|a_{mn}|}{m^2+n^2}$$

остаје коначан и не премаша један сталан број A. Довољно је приметити да је за све позитивне вредности индекса m и n

$$m^2+n^2 \leq 2^{m+n}.$$

2. **пример**. – Уочимо случај кад се за A_{mn} може узети какав израз облика

$$A_{mn} = \alpha_m\beta_n + \lambda_m\mu_n,$$

тако, да је A_{xy} један партикуларни интеграл парцијалне једначине (123).

Нека је

$$\Sigma\alpha_m x^m = \alpha(x), \quad \Sigma\lambda_m x^m = \lambda(x),$$

$$\Sigma\beta_n y^n = \beta(y), \quad \Sigma\mu_n y^n = \mu(y),$$

па ће једначина (148) бити

(152) $$v' = \alpha(x)\cdot\beta(v)+\lambda(x)\cdot\mu(v).$$

Кад су функције α, β, λ, μ такве, да је једначина (152) интеграбилна, полупречник круга холоморфности њеног интеграла v, који за $x=0$ добија вредност $v=0$, даће једну доњу границу полупречника круга конвергенције интеграла (147) једначине (146). Једна од таквих једначина је нпр. Bernoulli-ева једначина, која се и у општем случају може интегралити.

11. РЕДОВИ ШТО ИЗРАЖАВАЈУ ОПШТИ ИНТЕГРАЛ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГА РЕДА

Општи интеграл диференцијалне једн[illegible]не првог реда

(153) $$y' = [illegible]$$

тј. њен интеграл који [illegible]вољну вредност $x = x_0$ добија произвољну вредност $y = y$[illegible]жен је једном релацијом

(154) $$F(x, y, x_0, y_0) = 0$$

где је F функција четири променљиве

(155) $$x, y, x_0, y_0$$

у којој се x може пермутовати са x_0, y са y_0, а да при томе функција не промени своју вредност

Кад пар вредности (x_0, y_0) не представља никакву сингуларну тачку функције $f(x, y)$, општи интеграл y може се изразити у облику потенцијалног реда

(156) $$y = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots$$

где су коефицијенти A_n функције променљивих x_0, y_0.

Један произвољно узет ред (156) може, али не мора бити општи интеграл какве једначине првог реда. Тако нпр. ред у коме је

$$A_0 = y_0, \quad A_n = x_0 y_0 + (n-1) x_0^2 y_0^2$$

није општи интеграл никакве једначине (153); напротив, ред у коме је

$$A_0 = y_0, \quad A_n = \frac{y_0}{n!}$$

општи је интеграл једначине

$$y' = y.$$

У овоме су одељку постављена и потпуно решена ова два питања:

1° *Какве потребне и довољне услове треба да испуне коефицијенти* A_n *реда* (156), *па да тај ред представља општи интеграл какве диференцијалне једначине првог реда облика* (153)?

2° *У случајевима кад су ти услови испуњени, наћи диференцијалну једначину за коју такав ред* (156) *изражава њен општи интеграл.*

Нека је (153) једначина чији је општи интеграл ред (156). Тада је

(157) $$A_0 = y_0, \quad A_1 = \left[\frac{dy}{dx}\right] = [f(x, y)] = f(x_0, y_0),$$

где уопште израз $[\varphi]$ означава вредност коју добија каква функција φ једне променљиве x за $x = x_0$, или функција двеју променљивих x, y за $x = x_0$, $y = y_0$.

Формирајмо неограничен низ функција

(158) $$f_1, f_2, f_3, \dots$$

промењљивих x, y дефинисаних рекурентном релацијом

$$f_n = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + f\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{159}$$

где је почетна функција

$$f_0 = f(x, y), \tag{160}$$

па ће бити

$$A_n = \frac{1}{n!}[f_{n-1}] \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{161}$$

Релација (159) може се написати и у облику

$$[f_n] = \left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}\right] + [f]\left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\right] \tag{162}$$

из чега се, према (157), (159) и (161) добија

$$(n+1)A_{n+1} = \frac{\partial A_n}{\partial x_0} + f(x_0, y_0)\frac{\partial A_n}{\partial y_0}. \tag{163}$$

То показује да израз

$$\Delta = \frac{(n+1)A_{n+1} - \dfrac{\partial A_n}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial A_n}{\partial y_0}} \tag{164}$$

има једну исту вредност за све вредност $n = 1,2,3, \dots$ и да се та вредност поклапа са $f(x_0, y_0)$. Друга једначина (157) тада показује да су x_0 и y_0 везани диференцијалном једначином

$$\frac{dy_0}{dx_0} = f(x_0, y_0). \tag{165}$$

Вредност израза Δ је иста као и вредност коефицијента A_1, а то је $f(x_0, y_0)$. Једначина (160) добија се, дакле, кад се у једначини

(166) $\frac{dy_0}{\dots}$ [illegible]

смени x_0 са x, y_0 с[illegible] $\frac{\dots}{dx_0}$ са $\frac{dy}{dx}$.

На тај су начин нађени *потребни* услови да би ред (156) био општи интеграл какве једначине (153). Лако се доказује да су то у исто време и *довољни* услови за то; доказ је истоветан са оним којим је у 3. одељку ове књиге доказано да кад се коефицијенти реда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

израчунају узастопним диференцијаљењем једначине (153) и деобом добијених извода са n, такав ред формално задовољава једначину (153).

На тај начин добијено је решење постављених питања у облику ова два става:

1. **став**. *Да би ред* (156) *представљао општи интеграл какве диференцијалне једначине првога реда, потребно је и довољно да израз* Δ *има једну исту вредност за све вредности* $n = 1, 2, 3, \dots$

А кад је тај услов испуњен, решење другога од постављених питања дато је овим ставом:

2. **став**. *Диференцијална једначина, чији је општи интеграл тада изражен редом* (156) *добија се кад се у коефицијенту* A_1 *смени* x_0 *са* x, y_0 *са* y, *па се резултат изједначи са* $\dfrac{dy}{dx}$.

У случају кад се тражи да диференцијална једначина (153), чији општи интеграл треба да буде ред (156), не садржи експлицитно променљиву x, једначина (159) се своди на

$$f_{n+1} = f\frac{\partial f}{\partial y},$$

а једначина (162) на

$$[f_{n+1}] = [f]\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right],$$

према чему је

$$(n+1)A_{n+1} = f(x_0, y_0)\frac{\partial A_n}{\partial y_0}$$

из чега следује

3. **став**. *Да би ред* (156) *представљао општи интеграл какве диференцијалне једначине првога реда која не садржи експлицитно независно променљиву количину* x, *потребно је и довољно да израз*

$$\Delta = \frac{(n+1)A_{n+1}}{\dfrac{\partial A_n}{\partial y_0}} \tag{167}$$

има једну исту вредност за све вредности n = 1, 2, 3, ...

И у томе случају је одговарајућа диференцијална једначина одређена ставом 2.

Као што се види, да ли ће дати ред (156) бити или не општи интеграл какве једначине првога реда, зависи искључиво од тога *да ли ће његови коефицијенти* A_n *имати за инваријанту израз* Δ. А кад је то случај, *диференцијална једначина тога реда добија се из саме вредности те инваријанте.*

За ред (156) нпр. за који је

$$A_0 = y_0, \quad A_n = \frac{y_0}{n!}$$

инваријанта је

$$\Delta = y_0;$$

за ред за који је

$$A_0 = y_0, \quad A_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!}(y_0 - x_0 + 1)^{2n+1}$$

она је

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(y_0 - x_0 + 1)^3 + 1;$$

за ред за који је

$$A_0 = y_0, \quad A_n = y_0\left[\frac{(2x_0)^n}{n!} + \frac{(2x_0)^{n-2}}{1!(n-2)!} + \frac{(2x_0)^{n-4}}{2!(n-4)!} + \ldots\right]$$

она је

$$\Delta = 2x_0 y_0;$$

за ред где је

$$A_0 = y_0, \quad A_n = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!(n-1)!(2y_0)^{2n-1}}$$

она је

$$\Delta = \frac{1}{y_0};$$

за ред за који је

$$A_0 = y_0, \quad A_{4n} = \frac{y_0}{(4n)!}, \quad A_{4n+2} = -\frac{y_0}{(4n+2)!},$$

$$A_{4n+1} = \frac{\sqrt{1-y_0^2}}{(4n+1)!}, \quad A_{4n+3} = -\frac{\sqrt{1-y_0^2}}{(4n+3)!},$$

налази се да је

$$\Delta = \sqrt{1-y_0^2}.$$

Ово што је напред изложено, може се представити и на овај начин.

Уопште једна функција

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \tag{168}$$

која садржи две произвољне константе C_1 и C_2, општи је интеграл једне диференцијалне једначине другог реда која не садржи ни C_1 ни C_2. Та се једначина своди на једначину првога реда кад се између двеју констаната успостави каква релација

$$\Psi(C_1, C_2) = 0. \tag{169}$$

Тако нпр. функција
$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

је општи интеграл једначине
$$y'' + y = 0;$$

то је, међутим, општи интеграл једначине

$$y'^2 + y^2 - 1 = 0$$

кад се међу константама успостави релација

$$C_1^2 + C_2^2 - 1 = 0.$$

Али, функција (168) може бити општи интеграл једначине првог реда (која не садржи ни C_1 ни C_2) а да константе C_1 и C_2 не престану бити произвољне, тј. да не морају бити међу собом везане. Такав је случај са функцијом
$$y = \varphi(x, x_0, y_0)$$

што представља интеграл какве једначине првога реда који за произвољну вредност $x = x_0$ добија произвољну вредност $y = y_0$: довољно је узети $x_0 = C_1$, $y_0 = C_2$.

Тако нпр. функција
$$y = C_1 e^{x-C_2}$$

општи је интеграл једначине

$$y' - y = 0; \tag{170}$$

функција

$$y = \sin(\log C_1 x + C_2)$$

је општи интеграл једначине

(171) $$x^2 y'^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Општи разлог таквог факта је очевидан: у таквим случајевима увек постоји једна одређена функција

(172) $$\lambda(C_1, C_2)$$

двеју констаната C_1 и C_2 таква да кад се стави да је

$$\lambda(C_1, C_2) = C$$

обе константе C_1 и C_2 нестају у изразу општега интеграла y, који постаје функција променљиве x и константе C; ова тада игра улогу једине интеграционе константе.

Тако нпр. у случају једначине (170) константа C је израз

$$C = C_1 e^{-C_2};$$

за једначину (171) она је

$$C = \log C_1 + C_2.$$

Уочимо сад општи проблем:

Кад је дат потенцијални ред

(173) $$y = A_0 + A_1(x - A) + A_2(x - A)^2 + \dots$$

где су $A, A_0, A_1, A_2, \dots$ функције двеју произвољних констаната C_1 и C_2.

1° *наћи потребне и довољне услове за егзистенцију једне диференцијалне једначине првога реда, која не садржи* C_1 *и* C_2 *чији ће општи интеграл бити изражен редом* (173);

2° *наћи ту диференцијалну једначину у случају кад она постоји.*

Ако се стави да је

(174) $$A(C_1, C_2) = \alpha, \quad A_0(C_1, C_2) = \beta$$

параметри ће α и β бити познате фунције констаната C_1 и C_2. Сменивши њима те константе, функција y постаје

$$y = \beta + B_1(x - \alpha) + B_2(x - \alpha)^2 + \dots$$

где ће коефицијенти $B_1, B_2, B_3, \dots$ бити познате функције параметра α и β, и проблем се своди на онај напред решен у овоме одељку; y треба да буде интеграл какве једначине првога реда који за $x = \alpha$ добија вредност $y = \beta$.

Да ли ће ред (173) бити или не општи интеграл какве једначине првога реда, зависи од тога да ли ће његови коефицијенти B_n имати за инваријанту израз Δ (у коме A_k треба сменити са B_k) или не. А кад је то случај, диференцијална једначина се добија елиминацијом двеју констаната C_1 и C_2 из трију једначина

$$(175) \qquad A(C_1, C_2) = x, \quad A_0(C_1, C_2) = y, \quad A_1(C_1, C_2) = \frac{dy}{dx}.$$

Да бисмо одредили, помоћу C_1 и C_2, константу C која ће играти даљу улогу једине интеграционе константе у општем интегралу y, приметимо да су C_1 и C_2, ма да су им вредности произвољне (као што је и случај са x_0, y_0), везани диференцијалном релацијом што следује из односа

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = A_1(C_1, C_2) = \frac{\partial A}{\partial C_1} + \frac{\partial A}{\partial C_2} \cdot \frac{d\,C_2}{d\,C_1}.$$

То је диференцијална једначина

$$(176) \qquad \frac{dC_2}{dC_1} = \Phi(C_1, C_2)$$

где је Φ одређена функција констаната C_1 и C_2 која има за израз

$$(177) \qquad \frac{\dfrac{\partial A_0}{\partial C_1} - A_1(C_1, C_2)\dfrac{\partial A}{\partial C_1}}{A_1(C_1, C_2)\dfrac{\partial A}{\partial C_2} - \dfrac{\partial A_0}{\partial C_2}};$$

о томе се уверавамо диференцијаљењем првих двеју једначина (175) и сменом добијених dx и dy у трећој од тих једначина.

Кад се општи интеграл једначина (176) *напише у облику*

$$\mu(C_1, C_2) = \text{const}$$

израз μ *игра улогу константе* C.

12. АНАЛИТИЧКО ПРОДУЖЕЊЕ РЕДА ШТО ИЗРАЖАВА ИНТЕГРАЛ ЈЕДНАЧИНЕ

Кад је дата једначина

$$(178) \qquad y' = f(x, y)$$

где је функција $f(x, y)$ холоморфна у близини вредности $x = 0$, $y = 0$, применом основне Briot-Bouquet-ове теореме добија се интеграл, који за $x = 0$ постаје $y = 0$, у облику реда

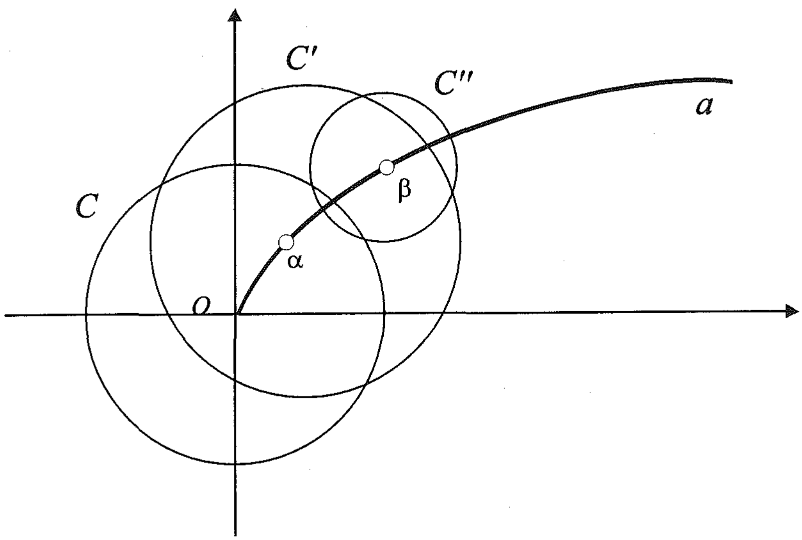
$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{179}$$

који је конвергентан за све вредности x што се налазе у кругу C описаном око почетка са полупречником R, за који је напред показано како се одређује.

Кад се вредност x, за коју се тражи вредност интеграла y налази у томе кругу, ова се вредност израчунава непосредно из обрасца (179). Међутим, *из тога се реда може, посредним путем, израчунати и вредност интеграла и у којој се хоће тачки* x = a *(осим изузетних и изолованих таквих тачака) ван круга* C.

То се може вршити обичним *аналитичким продужавањем* функције дефинисане редом који важи за једну област равни x, на тачке x што се налазе ван те области.

Нека се тражи да се, искористивши образац (179), израчуна вредност интеграла y за $x = a$, где је a једна дата тачка у равни x ван круга конвергенције C реда (179). Ако је a обична тачка за интеграл y изражен тим редом, онда се такво аналитичко продужавање извршује на овај начин.



Саставимо почетак $x = 0$ са тачком a једном произвољном путањом Oa, уочимо на тој путањи једну произвољну тачку $x = \alpha$ у унутрашњости круга C (в. слику). Пошто је та тачка у кругу C, за њу ће важити ред (179), па се из тога реда могу израчунати узастопни изводи функције y у облику

$$
(180) \qquad \begin{aligned}
y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots \\
y'' &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4\cdot a_4x^2 + \ldots \\
y''' &= 2\cdot 3a_3x + 2\cdot 3\cdot 4a_4x + 3\cdot 4\cdot 5a_5x^2 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Из образаца (179) и (180), где су редови насигурно конвергентни за $x = \alpha$, могу се израчунати вредности

$$A_0, A_1, A_2 \ldots$$

које добијају $y, y', y'', y''' \ldots$ за $x = \alpha$, па кад су оне израчунате, интеграл y може се, за вредности x у близини тачке α, изразити у облику реда

$$
(181) \qquad y = A_0 + \frac{A_1}{1!}(x-\alpha) + \frac{A_2}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots
$$

који ће бити конвергентан за све вредности x у унутрашњости извесног круга C' описаног око тачке α као центра. Полупречник R' тога круга одредио би се преместивши координатни почетак у равни x у тачку α и применивши напред наведени за то поступак.

Опишимо тада око тачке α тај круг C' и уочимо у његовој унутрашњости, а на путањи Oa, једну тачку $x = \beta$. Пошто је та тачка у кругу C', за њу ће важити ред (181) па се из тога реда могу израчунати узастопни изводи функције y у облику

$$
(182) \qquad \begin{aligned}
y' &= \frac{A_1}{0!} + \frac{A_2}{1!}(x-\alpha) + \frac{A_3}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots \\
y'' &= \frac{A_2}{0!} + \frac{A_3}{1!}(x-\alpha) + \frac{A_4}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Из образаца (181) и (182), где су редови конвергентни за $x = \alpha$, могу се израчунати вредности

$$B_0, B_1, B_2, \ldots$$

које добијају $y, y', y'' \ldots$ за $x = \beta$, па кад су оне израчунате, може се за вредности x у близини тачке β интеграл y изразити у облику реда

$$
y = B_0 + \frac{B_1}{1!}(x-\beta) + \frac{B_2}{2!}(x-\beta)^2 + \ldots
$$

и тај ће ред бити конвергентан за све вредности x у унутрашњости извесног круга C'' описаног око тачке β као центра, а чији би се полупречник R'' одредио на исти начин као полупреник R'.

И тај би се поступак продужио идући путањом Oa, све дотле док последњи круг $C^{(k)}$ не обухвати и тачку a. Кад то буде, онда ће последњи тако добијени ред за y важити и бити конвергентан и за вредност $x = a$, па ће се помоћу њега моћи непосредно израчунати вредност интеграла за ту вредност x.

Поступак изузетно неће важити ако произвољно изабрана путања Oa пређе преко каквога сингуларитета $x = c$ функције $f(x, y)$, јер ће такав сингуларитет, према условима који се претпостављају за ту функцију, у тренутку кад се идући путањом Oa наиђе на њега, онемогућити даље кретање на досадашњи начин у правцу тачке a. Метода за одредбу последњег полупречника $R^{(k)}$ тада изневерава и чини немогућним даље аналитичко продужавање интеграла дуж те путање. Тада се мора изменити путања Oa и покушати други какав пут којим би се од последњег кружног центра пришло тачки a.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК

НЕОДРЕЂЕНИ ОБЛИЦИ

13. СЛУЧАЈ КАД ДЕСНА СТРАНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПОСТАЈЕ БЕСКРАЈНА ЗА $x = 0, y = 0$

Претпоставка, на којој је основана основна Briot-Bouquet-ова теорема о изражавању интеграла диференцијалне једначине, као и теорема исте врсте за систем симултаних једначина, састоји се у томе да је у једначини

$$y' = f(x, y) \tag{183}$$

функција $f(x, y)$ холоморфна за почетне вредности $x = 0$, $y = 0$ промењљивих x и y, тј. да је она за тај пар вредности коначна, одређена и да ни једна друга од тих двеју вредности није критички сингуларитет фунције. Тај услов није испуњен

1° или кад за $x = 0$, $y = 0$ функција $f(x, y)$ добија бескрајно велику вредност, а функција $\dfrac{1}{f}$ је холоморфна за те вредности променљивих;

2° или кад се вредност $f(0, 0)$ јавља у неодређеном облику $\dfrac{0}{0}$.

3° или кад је једна или друга, или обе вредности $x = 0$, $y = 0$, критички алгебарски или трансцендентни сингуларитет функције $f(x, y)$.

У таквим случајевима поменуте теореме су неупотребљиве, јер није задовољен основни услов под којим су оне изведене.

Тако нпр. десна страна једначине

$$y' = \frac{y-1}{x}$$

за $x = 0$, $y = 0$ постаје бескрајна; не постоји ни један интеграл који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$. То се види из израза општег интеграла који је

$$y = 1 + Cx.$$

Десна страна једначине

$$y' = -\frac{y}{x^2}$$

за $x = 0$, $y = 0$ јавља се у неодређеном облику $\frac{0}{0}$; има бескрајно много интеграла који за $x = 0$ добијају вредност $y = 0$, али поред те вредности они добијају и сваку другу, произвољну вредност и не могу се развити у ред уређен по степенима променљиве x; то се види из израза општег интеграла који је

$$y = Ce^{\frac{1}{x}}$$

и који има вредност $x = 0$ као свој есенцијални сингуларитет.

Десна страна једначине

$$y' = \frac{1}{2}\frac{1+y^2}{(1+x)y}$$

постаје бескрајна; једначина има интеграла који за $x = 0$ добијају вредност $y = 0$; али се ти интеграли не могу развити у ред уређен по степенима променљиве x, што се види из израза општег интеграла

$$y = \sqrt{x + C(1+x)};$$

таква су два партикуларна интеграла

$$y = -\sqrt{x} \quad \text{и} \quad y = +\sqrt{x}$$

који одговарају вредности $C = 0$ интеграционе константе.

Напослетку, десна страна једначине

$$y' = \frac{y-1}{x+\sqrt{x}}$$

постаје бескрајна за $x = 0$, $y = 0$, а има и вредност $x = 0$ као критичку тачку; постоји интеграл који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$, али се он не може развити у ред по степенима променљиве x, што се види из израза општег интеграла који је

$$y = 1 + C(1+\sqrt{x}).$$

Може се изузетно десити да се и у коме од таквих случајева, и то само у појединачним случајевима, ипак интеграл може изразити у облику Maclaurin-овог реда

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

али, то тада неће више бити последица наведених општих теорема већ ће се десити из других, за такве једначине специјалних разлога.

За такве случајеве, кад функција $f(x, y)$ није холоморфна за почетни пар вредности $x = 0$, $y = 0$, јавља се питање: *у ред каквог облика*

(184) $$y = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

може се тада развити интеграл у *који за* x = 0 *добија вредност* y = 0, *а да ред буде насигурно конвергентан за вредности* x *у некој области равни* x?

Од горе поменутих случајева те врсте у овом ће одељку бити расправљен онај кад за $x = 0$, $y = 0$ функција $f(x, y)$ добија бескрајно велику вредност.

Нека је, дакле, дата једначина (183) у којој је

$$f(0, 0) = \infty.$$

Ако се једначина напише у облику

(185) $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} = \varphi(x, y)$$

функција $\varphi(x, y)$ је холоморфна за $x = 0$, $y = 0$, јер је вредност $\varphi(0, 0)$ тачно одређена и једнака нули. Она се, према томе може развити у ред уређен по степенима променљиве x

(186) $$\varphi(x, y) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots, \qquad A_0 = \varphi(0, y),$$

где ће коефицијенти бити холоморфне функције променљиве y, од којих се поједини могу свести и на константу. Као што ће се видети, *облик реда* (184) *и аналитичка природа интеграла* у *зависи поглавито од коефицијента* A_0.

Да би се то показало, разликујмо ова два случаја:

Први случај: претпоставимо да коефицијенат A_0 не зависи од y. Тада он мора бити једнак нули, да би било

(187) $$\varphi(0, 0) = 0.$$

Ако се тада број првих коефицијената реда (186), који су једнаки нули, означи са k, тако да је

$$A_0 = A_1 = \dots = A_{k-1} = 0, \qquad A_k \neq 0$$

па да се ред своди на

$$(188) \qquad \varphi(x, y) = A_k x^k + A_{k+1} x^{k+1} + A_{k+2} x^{k+2} + \ldots$$

из (185) и (188) се добија да је

$$(189) \qquad \frac{dx}{x^k} = (A_k + A_{k+1} x + A_{k+2} x^2 + \ldots)\, dy.$$

Са друге стране, пошто је $\varphi(x, y)$ холоморфна функција промењљивих x и y за $x = 0$, $y = 0$, према теореми Briot-Bouquet-а за једначину (185) постојаће интеграл x који ће такође бити холоморфна функција промењљиве y за $y = 0$. Кад се тај интеграл x смени на десној страни једначине (189), она постаје

$$\psi(y)\, dy$$

где је $\psi(y)$ такође холоморфна функција промењљиве y за $y = 0$, и једначина (189) постаје

$$\frac{dx}{x^k} = \psi(y)\, dy.$$

Интегралећи обе стране у границама 0 и x, односно 0 и y, добија се

$$\int_0^x \frac{dx}{x^k} = \int_0^y \psi(y)\, dy.$$

Пошто је $k \geq 1$, било да је $k = 1$ или да је $k > 1$, лева страна последње једначине има бескрајно велику вредност, а десна страна остаје коначна, што је немогућно. То показује *да у овом случају не постоји никакав интеграл у једначине* (183) *који за* x = 0 *добија вредност* y = 0.

Такав се случај јавља, на пример, за једначину

$$y' = \frac{y-1}{x}.$$

Ако се ова напише у облику

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y-1} = A_0 + A_1 x,$$

биће

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{1}{y-1},$$

а израз општег интеграла

$$y = 1 + Cx$$

показује да једначина одиста нема ниједан интеграл који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$.

Други случај: претпоставимо да коефицијенат A_0 зависи од y. Како је он холоморфна функција променљиве y, може се развити у ред облика

$$(189^{\text{bis}}) \qquad A_0 = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots,$$

где ће коефицијенти a_n бити стални бројеви (независни од x и y). А пошто за $y = 0$ мора бити $A_0 = 0$, да би се имала једначина (187), то мора бити $a_0 = 0$, а поред њега може бити једнак нули још и један известан број узастопних првих коефицијената a_n. Означимо са m број таквих коефицијената, тако да је

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{m-1}, \qquad a_m \neq 0,$$

па ће се ред (189^{bis}) јавити у облику

$$(190) \qquad A_0 = a_m y^m + a_{m+1} y^{m+1} + a_{m+2} y^{m+2} + \ldots$$

Као што је казано, пошто је $\varphi(x, y)$ холоморфна функција променљивих x и y у близини вредности $x = 0$, $y = 0$, може се на једначину (185) применити основна Briot-Bouguet-ова теорема, према којој се тада интеграл x, који за $y = 0$ добија вредност $x = 0$, може развити у ред облика

$$(191) \qquad x = B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \ldots,$$

који ће бити конвергентан за све вредности x у једноме кругу описаном око тачке $x = 0$ у равни x.

Коефицијенти B_n би се могли израчунати опет по истој теореми, али се лакше до резултата, што се има у виду, долази на овај начин:

Очевидно је да, ако се у једначини (185) смени функција $\varphi(x, y)$ својим изразом (186), па се у овоме коефицијенат A_0 смени редом (190), а x редом (191), добиће се једна једначина која мора бити идентички задовољена, пошто је x један њен интеграл. Та је једначина

$$(192) \qquad \begin{aligned} &B_1 + 2B_2 y + 3B_3 y^2 + \ldots = \\ &= (a_m y^m + a_{m+1} y^{m+1} + a_{m+2} y^{m+2} + \ldots) + \\ &+ A_1 (B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \ldots) + \\ &+ A_2 (B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \ldots) + \ldots \end{aligned}$$

Пошто за $y = 0$ треба да буде $x = 0$, та једначина (191) показује да мора бити $B_0 = 0$. Кад се то уведе у једначину (192), члан који не садржи y на левој страни је B_1, а на десној не постоји, мора дакле бити и $B_1 = 0$. А кад се и то уведе у једначину, њен члан са y на првом степену на левој страни има за коефицијенат $2B_2$, а на десној страни број помножен са B_1; према томе је и $B_2 = 0$. Продужујући и даље тако са осталим степенима променљиве y, до њеног $(m-1)$-ог степена закључно, налази се да је

$$B_0 = B_1 = B_2 = \ldots = B_m = 0.$$

Члан који садржи y^m на левој је страни $(m+1)B_{m+1}y^m$, на десној $a_m y^m$, према чему је

$$B_{m+1} = \frac{a_m}{m+1},$$

па пошто је коефицијенат a_m различан од нуле, тако ће бити и са коефицијентом B_{m+1}. Према томе се интегрални ред (191) своди на

$$x = B_{m+1}y^{m+1} + B_{m+2}y^{m+2} + B_{m+3}y^{m+3} + \ldots \tag{193}$$

а из њега се добија једначина

$$\frac{dx}{dy} = (m+1)B_{m+1}y^m + (m+2)B_{m+2}y^{m+1} + (m+3)B_{m+3}y^{m+2} + \ldots \tag{194}$$

Извршимо у тој једначини смену

$$x = t^{m+1}, \quad dx = (m+1)\,t^m dt \tag{195}$$

према чему је

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{dy} = (m+1)\,t^m\,\frac{dt}{dy},$$

па ће, кад се то смени у једначини (194), ова постати

$$(m+1)\,t^m\,\frac{dt}{dy} = (m+1)B_{m+1}y^m + (m+2)B_{m+2}y^{m+1} + \ldots,$$

што се може написати у облику

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(m+1)\,t^m}{(m+1)B_{m+1}y^m + (m+2)B_{m+2}y^{m+1} + (m+3)B_{m+3}y^{m+2} + \ldots}$$

или

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{t}{y}\right)^m \frac{1}{B_{m+1} + \dfrac{m+2}{m+1}B_{m+2}y + \dfrac{m+3}{m+1}B_{m+3}y^2 + \ldots}. \tag{196}$$

Са друге стране, ако се и непосредно у једначини (193) изврши иста смена (195), добија се

$$t^{m+1} = B_{m+1}y^{m+1} + B_{m+2}y^{m+2} + B_{m+3}y^{m+3} + \dots,$$

одакле је

$$\left(\frac{t}{y}\right)^{m+1} = B_{m+1} + B_{m+2}y + B_{m+3}y^2 + \dots$$

Сменом те вредности у једначини (196) добија се једначина

$$\text{(197)} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{[B_{m+1} + B_{m+2}y + B_{m+3}y^2 + \dots]^{\frac{m}{m+1}}}{B_{m+1} + \frac{m+2}{m+1}B_{m+2}y + \frac{m+3}{m+1}B_{m+3}y^2 + \dots}.$$

За $y = 0$ десна страна ове једначине своди се на вредност

$$\frac{(B_{m+1})^{\frac{m}{m+1}}}{B_{m+1}} = B_{m+1}^{-\frac{1}{m+1}},$$

а пошто је коефицијенат B_{m+1} различит од нуле, биће и ова последња вредност коначна. Вредности $t = 0$, $y = 0$ не представљају, дакле, никакве сингуларитете функције на десној страни једначине (197), па се на ту једначину може применити основна Briot-bouquet-ова теорема. Према овој, интеграл y једначине (197), који за $t = 0$ добија вредност $y = 0$ може се развити у ред облика

$$\text{(198)} \qquad y = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \dots$$

који ће бити конвергентан за све вредности t у једноме кругу описаном око тачке $t = 0$ у равни t.

Кад се у реду (198) смени t његовом вредношћу

$$t = x^{\frac{1}{m+1}},$$

он постаје

$$\text{(199)} \qquad y = \alpha_1 x^{\frac{1}{m+1}} + \alpha_2 x^{\frac{2}{m+1}} + \alpha_3 x^{\frac{3}{m+1}} + \dots,$$

из чега се види *да се интеграл* y *дате једначине*

$$\text{(200)} \qquad y' = f(x, y)$$

може развити у ред уређен по степенима вредности $x^{\frac{1}{m+1}}$.

А пошто најмања вредност коју може имати m је $m = 1$, то је изложилац $\frac{1}{m+1}$ увек прави разломак, чија је најмања могућна вредност $\frac{1}{2}$, и према томе *је вредност* x = 0 *увек алгебарски критички сингуларитет интеграла* y; *ред такве критичке алгебарске тачке једнак је броју* m *повећаном за јединицу.*

А из свега овога што претходи изводи се овај општи закључак:

Нека је дата диференцијална једначина (200), где је $f(x, y)$ функција која за $x = 0$, $y = 0$ добија бескрајно велику вредност, али таква да је њена реципрочна функција

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$$

холоморфна за $x = 0$, $y = 0$. Вредност

$$\varphi(0, y) = A_0$$

биће тада или идентички једнака нули, или ће зависити од променљиве y. За један и други случај важе теореме:

1. **теорема**. *Кад је вредност* A_0 *независна од* y *(у коме случају она је идентички једнака нули), не постоји интеграл једначине* (200) *који за* x = 0 *добија вредност* y = 0.

Прост пример за то даје једначина

$$y' = \frac{y-1}{x}, \qquad y = 1 + Cx.$$

2. **теорема**. *Кад вредност* A_0 *зависи од* y *и развије се у ред уређен по степенима променљиве* y, *па се са* m *означи најнижи степен тога реда по* y, *интеграл који за* x = 0 *добија вредност* y = 0 *има вредност* x = 0 *као алгебарску критичку тачку* (m + 1)-*ог реда и може се развити у ред облика*

$$y = \alpha_1 x^{\frac{1}{m+1}} + \alpha_2 x^{\frac{2}{m+1}} + \alpha_3 x^{\frac{3}{m+1}} + \ldots,$$

конвергентан на вредности x *у једноме кругу описаном око тачке* x = 0 *у равни* x.

Одредба коефицијената α_n и његовог круга конвергенције врши се применом основне Briot-Bouquet-ове теореме на једначину (197), пошто она, ради одредбе коефицијената B_n, који су за то потребни, буде претходно примењена на једначину (185).

Прост пример за то даје једначина

$$y' = \frac{1}{y}, \qquad y = \sqrt{C + 2x}.$$

14. СЛУЧАЈЕВИ КАД СЕ ДЕСНА СТРАНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЗА $x = 0$, $y = 0$ ЈАВЉА У ОБЛИКУ $\frac{0}{0}$

Кад је диференцијална једначина

$$(201) \qquad y' = f(x, y)$$

таква да се вредност $f(0,0)$ јавља у облику $\frac{0}{0}$, проблем интеграције помоћу редова постаје много тежи, и он ни до данас још није у потпуности решен, јер још има специјалних, у томе погледу недовољно проучених случајева.

Овде ће бити проучени најважнији и најчешћи случајеви, у којима се проблем интеграције може до краја решити. Проблем се може разложити на поједине специјалније проблеме који ће бити редом расправљени.

А) Одредба инфинитезималног реда интеграла

Кад једна променљива количина y, функција независно променљиве количине x, тежи нули ако x тежи нули, она постаје бескрајно мала количина у исто време кад и променљива x. Под *инфинитезималним редом* бескрајно мале количине y разуме се такав један позитиван број μ, да количник

$$\frac{y}{x^{\mu}}$$

тежи коначној и од нуле различној граници H кад x тежи нули.

Пошто се тражи интеграл који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$, то, ако је μ инфинитезимални ред интеграла, биће за вредности x у близини вредности $x = 0$

$$\frac{y}{x^{\mu}} = H + \varepsilon,$$

где ε тежи нули кад x тежи нули, што се може написати у облику

(202) $$y = Hx^{\mu} + \delta,$$

где и δ тежи нули кад x тежи нули.

Функција $f(x, y)$ јавља се за $x = 0$, $y = 0$ у облику $\frac{0}{0}$. Ми ћемо узети да то долази отуда, што је $f(x, y)$ количник

(203) $$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$$

двеју функција φ и ψ холоморфних у близини вредности $x = 0$, $y = 0$, и таквих да је

$$\varphi(0, 0) = 0, \quad \psi(0, 0) = 0.$$

Функције φ и ψ могу се, према томе, развити у двоструке Maclaurin-ове редове

$$\varphi(x, y) = \sum_m \sum_n B_{mn} x^m y^n,$$

$$\psi(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} x^m y^n,$$

конвергентне у извесним круговима описаним око $x = 0$ и $y = 0$ у равнима променљивих x и y.

Заменивши те изразе у једначини (201) написаној у облику

$$\psi(x, y) y' = \varphi(x, y)$$

или, према (202), одакле је

(204) $$y' = \mu H x^{\mu - 1} + \delta',$$

у облику

(205) $$\mu H \psi(x, y) x^{\mu - 1} = \varphi(x, y) + \eta$$

налази се кад се обе стране, после те смене, уреде по степенима променљиве x, ово што следује:

1° на левој страни чланови најнижег реда налазиће се међу члановима облика

$$A_{m'n'} x^{m' + \mu n' + \mu - 1},$$

2° на десној страни они ће се налазити међу члановима облика

$$B_{mn} x^{m + n\mu}.$$

Чланови најнижег степена по x на левој и десној страни морају бити међу собом једнаки; нека је на левој страни то члан који одговара вредностима индекса

$$n' = \alpha', \quad m' = \beta',$$

а на десној страни члан што одговара вредностима индекса

$$n = \alpha, \quad m = \beta.$$

Тада треба да је

$$\beta' + \mu\alpha' + \mu - 1 = \beta + \mu\alpha,$$

одакле је

(206) $$\mu = \frac{1+\beta-\beta'}{1+\alpha'-\alpha}.$$

Пошто су α, α', β, β' цели бројеви, то једначина (206) показује *да је инфинитезимални ред интеграла* у *у општем случају рационалан број.* Изузетак би могао бити само у случају кад је у један исти мах

$$1+\beta-\beta' = 0, \quad 1+\alpha'-\alpha = 0,$$

у коме се случају μ јавља у неодређеном облику $\frac{0}{0}$.

Једначина (205) важи за сваки пар изложилаца

$$m' + \mu n' + \mu - 1 \quad \text{и} \quad m + \mu n$$

променљиве x на левој и десној страни једначине (205) пошто се у овој смене y и y' својим вредностима (202) и (204), али сваки такав пар не одговара услову који се има у виду, а то је да тако, помоћу одговарајућег обрасца (206), добијен број μ буде *мањи* од свију оних до којих би довели остали парови изложилаца. Такав се најмањи број μ може у свакоме датом случају одредити рачунски, али Briot и Bouquet су дали једну геометријску конструкцију која тај број одређује помоћу коефицијента правца једне од страна извесне полигоналне линије, која у реалној равни xOy пролази кроз извесне тачке

$$M(\alpha, \beta+1) \quad \text{и} \quad M'(\alpha'+1, \beta)$$

а све остале тачке оставља на својој десној страни. Коефицијенат правца једне ма које од страна такве полигоналне линије, кад му се промени знак, даје тражени број μ, и свака од тих страна одређује по један такав број који се може сматрати као инфинитезимални ред по једнога од могућних интеграла y једначине (201). Таква је линија позната под именом *Briot-Bouquet-ове полигоналне линије* везане за дату диференцијалну једначину (201).

В) Редукција диференцијалне једначине на упрошћени облик

Нека је μ један од тако добијених бројева што представљају инфинитезимални ред интеграла y, и нека су

$$n = \alpha, \quad m = \beta, \quad n' = \alpha', \quad m' = \beta'$$

изложиоци што фигуришу у члану најмањег степена променљиве x на левој и десној страни једначине (205) после поменуте смене.

Пошто је μ рационалан број, ставимо да је

$$\mu = \frac{p}{q},$$

где су p и q два цела несводљива броја и извршимо у једначини смену

(206) $$x = t^q, \quad y = vt^p,$$

где је t нова независно променљива количина, а v нова непозната функција.

Према (206) и пошто је $\mu q = p$ биће

$$\frac{y}{x^\mu} = \frac{y}{t^{\mu q}} = \frac{y}{t^p} = v$$

а пошто количник $\dfrac{y}{x^\mu}$ тежи за $x = 0$ коначној и од нуле различној граници, види се да ће и функција v за $x = 0$ тежити таквој истој граници коју ћемо означити са λ.

Члан

$$A_{\beta'\alpha'} x^{\beta'} y^{\alpha'}$$

развитка функције ψ, на левој страни једначине (205), што одговара најмањем броју μ, горњом сменом постаје

$$A_{\beta'\alpha'} v^{\alpha'} t^{p\alpha' + q\beta'}$$

а одговарајући му члан на десној страни исте једначине постаје

$$B_{\beta\alpha} v^{\alpha} t^{p\alpha + q\beta}$$

а извод y' постаје

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}(vt^p)\frac{dt}{dx} = \frac{pvt^{p-1} - t^p \dfrac{dv}{dt}}{qt^{q-1}}.$$

Према томе, једначина (201), написана у облику

$$\psi(x,y)y' = \varphi(x,y)$$

таквом сменом помножена са qt^{q-1} постаје

$$(207)\,(A_{\beta'\alpha'}v^{\alpha'}t^{p\alpha'+q\beta'} + \ldots)\left(pt^{p-1}v - t^p\frac{dv}{dt}\right) = (B_{\beta\alpha}v^{\alpha}t^{p\alpha+q\beta} + \ldots)qt^{q-1}$$

где неисписани чланови на левој и десној страни садрже више степене променљиве t.

По дефиницији броја μ, најмањи степен променљиве t на левој страни је

$$p\alpha' + q\beta' + p - 1$$

а на десној то је

$$p\alpha + q\beta + q - 1$$

а лако се увиђа да су та два изложиоца међу собом једнаки, јер је

$$\mu = \frac{p}{q} = \frac{1+\beta-\beta'}{1+\alpha'-\alpha}$$

а према тој једнакости је

$$p\alpha' + q\beta' + p = p\alpha + q\beta + q.$$

Ако се заједничка вредност ова два броја означи са h најмањи степен променљиве t на левој и десној страни једначине (207) биће t^{h-1}, па кад се једначина подели са t^{h-1} она постаје

$$(208)\qquad (A_{\beta'\alpha'}v^{\alpha'} + \ldots)\left(pv + t\frac{dv}{dt}\right) = q(B_{\beta\alpha}v^{\alpha} + \ldots)$$

где неисписани чланови садрже степене променљиве t.

Кад се у једначини (208) стави $t = 0$, она даје за v коначну и од нуле различну вредност, ону исту која је малочас означена са λ. Резултат те смене биће извесна једначина

$$(209)\qquad \Phi(\lambda) = 0$$

која одређује ту вредност λ. У тој ће једначини фигурисати само чланови леве и десне стране једначине (208) који не садрже t, а таквих чланова може бити и више од два, јер чланова најнижега степена у једначини (207) може бити два или више од два.

Једначина (209) је облика

$$(210) \qquad p(A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \ldots) = q(B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha} + \ldots),$$

па уочимо један њен корен λ. За тај ће корен, за овај мах, бити претпостављено да не поништава у исти мах посебице и леву и десну страну једначине (210); у даљем излагању биће испитан и такав изузетан случај.

Уводимо нову непознату функцију

$$(211) \qquad w = v - \lambda$$

која ће бити једнака нули за $t = 0$, јер је тада $v = \lambda$. По биномном обрасцу тада ће бити

$$A_{\beta'\alpha'}v^{\alpha'} = A_{\beta'\alpha'}(\lambda + w)^{\alpha'} = A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \alpha' A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'-1}w + \ldots$$

а тако исто и

$$B_{\beta\alpha}v^{\alpha} = B_{\beta\alpha}(\lambda + w)^{\alpha} = B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha} + \alpha B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha-1}w + \ldots$$

где неисписани чланови садрже као чинилац више степене променљиве w.

Таквом сменом једначина (208) постаје

$$(212) \qquad \begin{aligned} &(A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \alpha' A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'-1}w + \ldots)\left(p\lambda + pw + t\frac{dw}{dt}\right) = \\ &= (B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha} + \alpha B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha-1}w + \ldots)\, q, \end{aligned}$$

где неисписани чланови у заградама садрже више степене променљиве w, као и разне степене t променљиве.

Међутим, чланови без w и t са леве и десне стране једначине (212) улазе у састав једначине (209), написане у облику (210), и они ишчезавају, пошто је њихов алгебарски збир, због саме ове једначине, једнак нули. А кад се ти чланови изоставе и једначина (212) после тога реши по изразу $t\frac{dw}{dt}$, добија се једначина

$$(213) \qquad t\frac{dw}{dt} = \frac{\alpha q B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha-1}w - \alpha' p A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'-1}w - pA_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'}w + \ldots}{A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \alpha' A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'-1}w + \ldots},$$

где неисписани чланови садрже степене променљиве t и више степене променљиве w.

Сви сабирци у бројитељу десне стране једначине (213) садрже као чинилац било w, било t, а тако исто и сви сабирци именитеља, осим првога сабирка, који то не садржи. Према томе за $t = 0$, $w = 0$ бројитељ постаје једнак нули, а именилац је различан од нуле. Једначина (213) је, дакле, облика

$$t \frac{dw}{dt} = F(t, w), \tag{214}$$

где је F функција променљивих t и w, холоморфна за $t = 0$, $w = 0$, која и сама постаје једнака нули за те вредности променљивих.

Као закључак из свега овога добија се ова теорема:

Кад је дата диференцијална једначина

$$y' = f(x, y)$$

таква, да се вредност $f(0, 0)$ *јавља у облику* $\frac{0}{0}$, *једначина је у општем случају, сменом независно променљиве и непознате функције свођљива на облик*

$$x \frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{215}$$

где је F *функција променљивих* x *и* y, *холоморфна за* x = 0, y = 0.

Изузетни случај биће испитан у току даљег излагања.

C) Проучавање редуковане једначине

Пошто је функцја F холоморфна у близини вредности x и y, она се може развити у двоструки Maclaurin-ов ред облика

$$F(x, y) = ay + bx + cy^2 + exy + hx^2 + \ldots$$

где ће недостајати члан без x и y, пошто је $F(0, 0) = 0$. Коефицијенти

$$a, \quad b, \quad c, \quad e, \quad h\ldots$$

су стални бројеви. И онда треба испитати: у какав се ред може развити интеграл y једначине

$$xy' = ay + bx + cy^2 + exy + hx^2 + \ldots \tag{216}$$

(где неисписани чланови садрже степене променљивих x и y више од 2) који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$. Биће показано да *природа интеграла и облик интегралног реда зависе првенствено од коефицијента* a, тј. од коефицијента члана са првим степеном промењљиве y на десној страни једначине (216).

Коефицијенат a може бити реалан или имагинаран. Кад је реалан, извесном сменом промењљиве y може се увек учинити да он буде *негативан*, изузимајући случај кад је он једнак нули, у коме случају га треба оставити таквог какав је. Ако је имагинаран, извесном сменом може се увек учинити да његов реалан део буде *негативан* (или нула). То се постиже сменом функције y

$$y = -\left(\frac{b}{a-1} + z\right)x \tag{217}$$

где је z нова непозната функција. Одатле је

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a-1} - z - x\frac{dz}{dx} \tag{218}$$

па дакле

$$x\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a-1} - xz - x^2\frac{dz}{dx} \tag{219}$$

а у исто време је

$$ay + bx + \ldots = -\frac{ab}{a-1}x - axz + bx + \ldots \tag{220}$$

Кад се, дакле, према једначини (216) уједначе (219) и (220) добија се једначина

$$-xz - x^2\frac{dz}{dx} = -axz + \ldots \tag{221}$$

где ће сви неисписани чланови садржати x^2 као чинилац, јер сви они садрже било x, било y, а y према (217) садржи x као чинилац. Једначина (221), скраћена са x па решена по изразу $x\dfrac{dz}{dx}$ постаје

$$x\frac{dz}{dx} = (a-1)z + \Delta \tag{222}$$

где Δ означује скуп чланова који садрже као чиниоце x и z.

Једначина (222) изражава $x\dfrac{dz}{dx}$ као функцију промењљивих x и z холоморфну за $x = 0$, $z = 0$ и где десна страна једначине постаје једнака нули за те вредности x и z. Једначина је, дакле, истога облика као једначина (216), само што је у њој коефицијенат непознате функције на првом степену смањен за јединицу. Једини случај кад је такво смањивање немогућно, био би тај кад је $a = 1$, јер је тада смена (217) немогућна. Тај изузетан случај биће у даљем излагању накнадно испитан.

Поновивши исту смену (217) на новој једначини (222), добила би се опет једначина истога облика, али где би коефицијенат a, био смањен за две јединице. И ако се смена понови онолико пута колико има целих јединица у реалном делу броја a, добиће се једначина истога облика (216), али *где ће реални део тога броја бити или нула, или негативан број.*

У свему што следује биће претпостављено да је такво свођење већ извршено, тј. да је реални део броја a нула или негативан број. Вратимо се тада диференцијалној једначини

$$xy' = ay + bx + \ldots = f(x, y) \tag{223}$$

где је такав коефицијенат a и покушајмо задовољити је интегралним редом облика

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots \tag{224}$$

Ако такав ред може задовољити једначину (223) онда се његов општи коефицијенат израчунава по обрасцу

$$A_n = \frac{1}{n!}[y^{(n)}]. \tag{225}$$

Узастопни изводи $y', y'', y''', \ldots$ функције y, потребни за то израчунавање, одредили би се из саме диференцијалне једначине (223). Кад би се они израчунавали на обичан начин, као за једначину

$$y' = f(x, y),$$

где је f холоморфна функција за $x = 0$, $y = 0$, вредности

$$[y'],\ [y''],\ [y'''], \ldots$$

јавиле би се у облику $\dfrac{0}{0}$ и биле би неодређене. Међутим начин, који ће овде бити сад употребљен, не доводи до те неодређености.

Означимо са r и r' полупречнике кругова описаних у x-равни око средишта $x = 0$, односно у y-равни око средишта $y = 0$, и таквих да је $f(x, y)$ за све вредности x и y у тим круговима и на њиховим рубовима холоморфна. Нека је M максимимум модула те функције у посматраној области. Посматрајмо претходно обичну једначину

$$u = f(x, u). \tag{226}$$

Она одређује u као имплицитну функцију од x, која је за $x = 0$ једнака нули, јер је $f(0, 0) = 0$, а осим тога и униформна око $x = 0$, јер када то не би била, $y = 0$ би био вишеструки корен једначине

$$u - f(0, u) = 0,$$

дакле би се поништио и извод леве стране те једначине, тј. било би

$$1 - \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right] = 0,$$

што значи $1 - a = 0$, а то не може бити јер је по претпоставци $a \neq 1$. Дакле $u(x)$ је холоморфан око $x = 0$, па се може развити у ред облика

$$u = B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots \tag{227}$$

Израчунајмо узастопне изводе функције $u(x)$. Из (226) се добија

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}, \\
\frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2}, \\
\frac{d^3u}{dx^3} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^3u}{dx^3},
\end{aligned} \tag{228}$$

. . . .

Одатле се добија за $x = 0$, $u = 0$, имајући у виду и развитак функције $f(x, y)$ у обрасцу (223),

$$\begin{aligned}
\left[\frac{du}{dx}\right] &= \frac{b}{1-a}, \\
\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right] &= \frac{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]}{1-a}, \\
\left[\frac{d^3u}{dx^3}\right] &= \frac{\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots\right]}{1-a},
\end{aligned} \tag{229}$$

. . . .

Како је $a \neq 1$, именитељи су различити од нуле, дакле леве стране имају коначне вредности. Од њих ће зависити величина круга конвергенције реда (227). Да би се добио један круг у коме ће тај ред насигурно конвергирати, тражи се једна функција $v(x)$, чији ће Maclaurin-ов ред бити мајорантни ред за ред (227). Таква се функција добија пошавши од функције

$$\varphi(x, v) = Av + Bx + M\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{xv}{rr'} + \frac{v^2}{r'^2} + \ldots + \frac{x^m v^n}{r^m r'^n} + \ldots\right),$$

где A означава такав позитиван број мањи од 1, да је $1 - A \leq | 1 - a |$, а B модуо b. Лако се налази

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = B,$$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right] = A,$$

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right] = \frac{2M}{r^2},$$

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial v}\right] = \frac{M}{rr'},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и уопште

$$\left[\frac{\partial^{m+n}\varphi}{\partial x^m \partial v^n}\right] = \frac{m!\,n!\,M}{r^m r'^n},$$

а то значи, према значењу величина M, r и r' и према ставу В) поглавља 5, да за модуо сваког извода функције $f(x, u)$ постоји однос

$$\text{(230)} \qquad \operatorname{mod}\left[\frac{\partial^{m+n}\varphi}{\partial x^m \partial u^n}\right] \leq \left[\frac{\partial^{m+n}\varphi}{\partial x^m \partial v^n}\right].$$

Посматрајмо сада једначину

$$\text{(231)} \qquad v = \varphi(x, v)$$

Она одређује v као функцију од x, слично као једначина (226) што одређује u као функцију од x. Зато се, слично обрасцима (228), добија

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

$$\text{(232)} \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и отуда

$$\left[\frac{dv}{dx}\right]=\frac{B}{1-A},$$

$$\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]=\frac{\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial v}\,\frac{dv}{dx}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]}{1-A}, \tag{233}$$

. . . .

Имениоци су позитивни, а исто тако и изводи функције φ за $x=0$, $v=0$. Прва једначина даје $\left[\frac{dv}{dx}\right]$ као позитивну величину. Сменивши је у другу једначину, добија се бројилац у тој једначини као збир позитивних величина; дакле је и $\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]$ позитивна величина. На тај начин се показује да су уопште сви изводи функције v по x за $x=0$ позитивни.

Упоредимо сада обрасце (229) и (233). Пошто је $\mid 1-a\mid \geq 1-A$, то је

$$\operatorname{mod}\left[\frac{du}{dx}\right]\leq\left[\frac{dv}{dx}\right]. \tag{234}$$

У другој једначини (229) добиће се вредност већа по модулу, ако се место модула бројиоца узме збир модула његових чланова, а тада се налази да је, на основу образаца (230) и (234).

$$\operatorname{mod}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}\,\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]\leq$$

$$\leq\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]+2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial v}\right]\cdot\left[\frac{dv}{dx}\right]+\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right]\cdot\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right],$$

а одатле следује

$$\operatorname{mod}\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]\leq\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right].$$

Тако се добија и даље, дакле уопште

$$\operatorname{mod}\left[\frac{d^nu}{dx^n}\right]\leq\left[\frac{d^nv}{dx^n}\right].$$

Дакле ће Maclaurin-ов ред за $v(x)$ бити заиста мајорантан за ред (227) функције $u(x)$. Једначина (231) која дефинише функцију $v(x)$ уствари је алгебарска и може се писати у облику

$$\left(\frac{M}{r}-B\right)x+\left(\frac{M}{r'}-A+1\right)v+M=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{v}{r'}\right)},$$

те јој се лакше може наћи и полупречник R конвергенције њеног Maclaurin-овог реда. Кад је овај нађен, знамо дакле да ред (227) насигурно конвергира у кругу $|x|<R$.

После ових припремних посматрања једначине (226) и њеног решења датог у облику (227) може се доказати *да је диференцијална једначина* (223) *заиста задовољена интегралним редом облика* (224), *и да овај насигурно конвергира у кругу чији полупречник има поменуту величину* R.

Узастопним диференцијаљењем једначине (223) добија се

$$\begin{aligned} &y'+xy''=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y',\\ (235)\qquad &2y''+xy'''=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y'',\\ &3y'''+xy''''=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y}y''',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

а кад се стави $x=0$, $y=0$ и примети да се други члан на левој страни сваке једначине губи и даје $\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=a$ одатле произлази

$$\begin{aligned} &[y']=\frac{b}{1-a},\\ (236)\qquad &[y'']=\frac{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2\right]}{2-a},\\ &[y''']=\frac{\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\ldots\right]}{3-a},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

и уопште

$$[y^{(n)}]=\frac{\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+\ldots\right]}{n-a}.$$

Пошто је реални део броја a негативан, то ако се стави $a=-\alpha+\beta i$, биће

$$|1-a|^2=(1+\alpha)^2+\beta^2, \quad |n-a|^2=(n+\alpha)^2+\beta^2, \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

дакле

$$|n-a|\geq|1-a|. \tag{237}$$

Према томе је

$$\operatorname{mod}[y^{(n)}]\leq \operatorname{mod}\frac{\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+\ldots\right]}{1-a}. \tag{238}$$

Међутим израз на десној страни ове неједначине истоветан је са модулом десне стране у одговарајућој једначини (229), дакле је

$$\operatorname{mod}[y']\leq \operatorname{mod}\left[\frac{du}{dx}\right],$$
$$\operatorname{mod}[y'']\leq \operatorname{mod}\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right],$$
$$\operatorname{mod}[y''']\leq \operatorname{mod}\left[\frac{d^3u}{dx^3}\right],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\operatorname{mod}[y^{(n)}]\leq \operatorname{mod}\left[\frac{d^nu}{dx^n}\right],$$

а то значи да је уопште и

$$|A_n|\leq|B_n|. \tag{239}$$

Отуда следује обећани закључак, да је и интеграл

$$y=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

посматране диференцијалне једначине

$$xy'=f(x,y)$$

конверīенѿан у круīу $|x| < R$.

Напослетку остаје још и питање: да ли на горњи начин добијени интегрални ред (224) даје једини интеграл једначине (223) који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$? Може се доказати да је то одиста случај: под досадашњом претпоставком, да је реални део броја a негативан или једнак нули то је једини интеграл те врсте који је холоморфна функција променљиве x.

Да би се то доказало, нека је y интеграл представљен редом (223), а $y + z$ други један интеграл једначине (223) који за $x = 0$ постаје $y + z = 0$, што значи да за $x = 0$ треба да буде и $z = 0$. Пошто оба интеграла треба да задовоље исту једначину (223), треба да буде

$$xy' = ay + bx + cy^2 + \dots$$

$$x(y' + z') = a(y + z) + bx + c(y + z)^2 + \dots$$

Кад се прва једначина одузме од друге, на десној страни разлике нестаће свих чланова који зависе само до x или само од y, тако да ће сви чланови што остају садржати променљиву z, што даје

$$xz' = az + 2cyz + kz^2 + \dots$$

Ако се у тој једначини y смени својим интегралним редом (224), она се претвара у једну једначину чија ће десна страна бити састављена:

1° из једнога реда облика

$$(240) \qquad az + lz^2 + sz^3 + \dots = z\varphi(z)$$

што зависи само од променљиве z;

2° из једнога двоструког реда по x и z, чији сваки члан садржи и x и z [јер је скуп чланова што зависе само од x ишчезао малопређашњим одузимањем, а скуп чланова што зависе само од z издвојен је као ред (240)], и који ће према томе бити облика

$$xz\,\psi(x, z)$$

где је ψ једна функција холоморфна за вредности $x = 0$, $y = 0$. Кад се у тој функцији смени z својим изразом као холоморфна функција променљиве x, ψ ће бити холоморфна функција саме променљиве x (за $x = 0$), која ако се означи са $\lambda(x)$, нова, тако трансформисана једначина биће облика

$$xz' = z\,\varphi(z) + xz\,\lambda(x)$$

па се, делећи је са $xz\,\varphi(z)$, а затим множећи са dx, из ње добија

(241) $$\frac{dz}{z\varphi(z)} = \frac{dx}{x} + \frac{\lambda(x)}{\varphi(z)}dx.$$

Функција

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{a + lz + sz^2 + \ldots}$$

пошто је холоморфна за $z = 0$, може се развити у ред облика

$$\frac{1}{a} + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$$

а функција $\dfrac{\lambda(x)}{\varphi(z)}$, кад се у њој смени z холоморфном функцијом промењиве x (каква се претпоставља да је) постаје и сама холоморфна функција те промењиве, која ће бити означена са $\mu(x)$.

Једначина (241) помножена са a, јавља се дакле у облику

$$\frac{dz}{z} + a(C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + \ldots)\,dz = a\frac{dx}{x} + a\mu(x)dx$$

па се, интегралећи јој леву страну у границама z_0 и z, а десну у границама x_0 и x, добија

$$\log\frac{z}{z_0} + aC(z) = \log\left(\frac{x}{x_0}\right)^a + aL(x)$$

где је

$$C(z) = C_1(z - z_0) + \frac{C_2}{2}(z^2 - z_0^2) + \ldots,$$

$$L(x) = \int_{x_0}^{x}\mu(x)\,dx,$$

а одатле је

(243) $$\frac{z}{z_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^a e^{a[L(x) - C(z)]}.$$

Пустимо сад да x тежи нули. Лева страна једначине (243) тежиће такође нули, пошто по претпоставци и z тада тежи нули. Функције $C(z)$ и $L(x)$ теже коначним границама па дакле израз

$$e^{a[L(x) - C(z)]}$$

остаје при том коначан и различан од нуле. А да би се видело што ће бити са изразом

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^a$$

ставимо да је

$$\frac{x}{x_0} = \rho e^{\theta i}, \qquad a = \alpha + \beta i$$

па ће бити

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^a = \rho^\alpha e^{-\beta\theta} \cdot e^{(\beta \log\rho + \alpha\theta)i},$$

из чега је

$$\left|\frac{x}{x_0}\right| = \rho^\alpha e^{-\beta\theta}.$$

Кад је α негативно, израз на левој страни добија бескрајно велику вредност кад вредност x, па према томе и ρ, тежи нули; кад је $\alpha = 0$, тај израз постаје $\rho^{-\beta\theta}$ и има коначну и од нуле различну вредност.

Једначина (243) има, дакле, за $x = 0$, $z = 0$ своју леву страну једнаку нули, а своју десну страну бескрајно велику или коначну и од нуле различну. Пошто тако не може бити, не може постојати ни претпоставка да поред нађеног интеграла y једначине (223) постоји још један холоморфан интеграл $y + z$ који би, као и онај први, добио вредност $z = 0$ за $x = 0$. Нађени интеграл y, изражен у облику реда (224), једини је интеграл те врсте.

А из целе ове дискусије изводи се теорема:

Кад год је у редукованој диференцијалној једначини (223), тј. сведеној на облик

$$xy' = ay + bx + cy^2 + exy + hx^2 + \dots \tag{244}$$

реални део коефицијента a *негативан, или једнак нули, једначина има један, и то само један холоморфан партикуларни интеграл који за* x = 0 *добија вредност* y = 0. *Тај се интеграл може развити у ред уређен по степенима променљиве* x, *који ће бити конвергентан у једноме одређеном кругу описаном око тачке* x = 0.

Интеграл се, у појединим специјалним случајевима, може свести и на y идентички $=0$, као што је нпр. случај са једначином

$$xy' = -my + \alpha xy, \qquad m > 0,$$

чији је општи интеграл

$$y = C\frac{e^{\alpha x}}{x^m}.$$

D) Изузетни случајеви

I

Видели смо у одељку под А), пре редуковања диференцијалне једначине на облик (244), да се инфинитезимални ред μ интеграла y, који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$, израчунава из једне једначине облика

$$(245) \qquad \alpha'\mu + \beta' + \mu - 1 = \alpha\mu + \beta$$

где су α, β, α', β' изложиоци променљивих x и y што фигуришу у извесна два члана једначине (205).

Број μ је у општем случају *реалан рационалан број*. Али се може десити да је једначина (245) идентички задовољена за произвољну вредност μ, што ће бити кад је у једно исто време

$$1 - \alpha + \alpha' = 0, \quad 1 + \beta - \beta' = 0,$$

и оно што је напред казано у вези са рационалношћу броја μ, тада више не важи. Број μ тада може бити и *ирационалан*, као и *имагинаран*; у таквом изузетном случају може се десити да се у интегралу y јављају ирационални или имагинарни степени, па да је вредност $x = 0$ *трансцедентан критички сингуларитет интеграла*.

Такав је, на пример, случај са диференцијалном једначином

$$xy' = \lambda y,$$

где је λ какав реалан позитиван ирационалан, или имагинаран број са позитивним реалним делом. Тада је

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0$$

и једначина (245) своди се на идентичност. Општи интеграл једначине

$$y = Cx^{\lambda}$$

показује да сви партикуларни интеграли добијају за $x = 0$ вредост $y = 0$, а имају вредност $x = 0$ као трансцендентну критичку тачку.

II

У одељку В), при редукцији диференцијалне једначине (201) на сведени облик (223), било је претпостављено за једначину (209)

$$\Phi(\lambda) = 0,$$

која је облика (210) тј.

$$(246) \qquad p(A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \ldots) = q(B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha} + \ldots),$$

да њен уочени корен λ не поништава у исти мах посебице и једну и другу страну једначине. Проучимо сад такав изузетан случај, кад је за такав корен λ

$$A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \ldots = 0, \quad B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha} + \ldots = 0.$$

Тада се чланови на левој и десној страни једначине (208), који не садрже t потиру и једначина (208) јавља се у облику

$$(g't + h'v + \ldots)\, t\frac{dv}{dt} = gt + hv + \ldots,$$

тј. у облику

$$(247) \qquad t\frac{dv}{dt} = \frac{gt + hv + \ldots}{g't + h'v + \ldots}$$

где неисписани чланови садрже више степене променљивих t и v. Ако се тад изврши смена

$$gt + hv = tu,$$

где је u нова непозната функција, добија се

$$(248) \qquad v = \frac{t}{h}(u - g), \quad \frac{dv}{dt} = \frac{u-g}{h} + \frac{t}{h}\frac{du}{dt},$$

тако да ће чланови трансформисане једначине, који садрже степене променљиве u, садржати толике исте степене променљиве t.

Лева страна једначине (247) таквом сменом добија облик

$$atu + bt + \frac{t^2}{h}\frac{du}{dt}$$

а десна страна облик

$$\frac{tu + \ldots}{lt + ktu + \ldots}$$

где неисписани чланови садрже више степене променљиве t. Скративши бројитељ и именитељ са t, последњи се израз јавља у облику

$$(249) \qquad \frac{u + \ldots}{l + ku + \ldots}$$

где неисписани чланови садрже степене променљиве t.

Са друге стране, пошто, кад се у једначини (247) смени v својом вредношћу (248), именитељ израза на десној страни добија облик

$$\left(g' - \frac{gh'}{h}\right) t + \frac{h'}{h} ut + \ldots,$$

то коефицијенат l у изразу (249) има за вредност

$$l = g' - \frac{gh'}{h}.$$

Једначина (247), дакле, сменом (248) постаје

$$atu + bt + \frac{t^2}{h}\frac{du}{dt} = \frac{u + \ldots}{l + ku + \ldots}$$

или

$$(250) \qquad l^2 \frac{du}{dt} = \frac{hu + \ldots}{l + ku + \ldots} - ahut - bht = \frac{hu + st + \ldots}{l + ku + \ldots}.$$

Ако је $l \neq 0$ десна страна последње једначине је једнака нули за $t = 0$, $u = 0$ и холоморфна функција променљивих t и u за те њихове вредности. Она се према томе може развити у двоструки ред по степенима тих променљивих, па ће једначина (250) постати

$$(251) \qquad t^2 \frac{du}{dt} = \alpha u + \beta t + \ldots$$

где неисписани чланови садрже више степене променљивих t и u.

Као што се види, *наместо редуковане једначине ранијег облика*

$$xy' = ay + bx + \ldots$$

јавља се редукована једначина облика

$$(252) \qquad x^2 y' = ay + bx + \ldots$$

где неисписани чланови, кад постоје, садрже више степене променљивих x *и* y.

За једначине облика (252) *вредност* x = 0 *је уопште есенцијални сингуларитет интеграла* y. То се види, нпр. на простоме примеру једначине

$$(253) \qquad x^2 y' = au$$

чији је општи интеграл

$$y = Ce^{-\frac{a}{x}}$$

и има вредност $t = 0$ као есенцијалну тачку.

Исто се види и из потпуније једначине

$$x^2 y' = ay + bx \tag{254}$$

чији је општи интеграл

$$y = e^{-\frac{a}{x}} \left(C + b \int e^{\frac{a}{x}} \frac{dx}{x} \right)$$

и има такође $x = 0$ као есенцијалну тачку.

Од интереса је навести за једначине облика (252) још и ову особеност: у општем случају, кад би се покушало да се једначина задовољи редом облика

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots \tag{255}$$

сви би се коефицијенти $A_1, A_2, A_3, \dots$ могли израчунати из саме једначине; сви би били коначни и одређени, и тако формирани ред би одиста задовољавао диференцијалну једначину, па ипак, не би био конвергентан ни за коју вредност x.

Тако нпр., ако се y, дефинисано редом (255), смени у једначини (254), па се међу собом уједначе коефицијенти истих степена променљиве x са леве и десне стране једначине, добија се низ једначина

$$aA_1 + b = 0,$$
$$A_1 = aA_2, \quad 2A_2 = aA_3, \quad 3A_3 = aA_4, \dots$$

из којих се налази да је

$$A_1 = -\frac{b}{a}, \quad A_2 = -1!\frac{b}{a^2}, \quad A_3 = -2!\frac{b}{a^3}, \dots$$

и уопште

$$A_n = -(n-1)!\frac{b}{a^n}.$$

Међутим, тако одређен ред

$$y = -b\left[\frac{x}{a} + 1!\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 2!\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 3!\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \dots\right]$$

није конвергентан ни за коју вредност x. На исту се чињеницу наилази и за општу једначину (252), изузимајући њен специјалан случај (253), у коме се налази за све коефицијенте A_n да су једнаки нули. Све то произлази из тога, *што је вредност* $x = 0$ *есенцијални сингуларитет интеграла, па се овај може развити не по степенима променљиве* x, *већ по степенима променљиве* $\frac{1}{x}$, као што се то види и из горњих примера.

III

Видели смо у предњем одељку II да се диференцијална једначина (247) сменом

$$gt + hv = tu$$

своди на облик

$$t^2 \frac{du}{dt} = \frac{hu + st + \dots}{l + ku + \dots}$$

где коефицијенат l има за вредност

$$l = g' - \frac{gh'}{h}.$$

Може се у коме специјалном случају десити да буде $l = 0$; једначина се тада своди на облик

$$t^2 \frac{du}{dt} = \frac{hu + st + \dots}{ku + \dots} \tag{256}$$

и њена десна страна није више холоморфна за $t = 0$, $u = 0$. Ако се тада у (256) изврши смена слична малопређашњој, тј. ако се стави да је

$$hu + st = vt$$

где је v нова непозната функција, нова ће једначина бити облика

$$t^3 \frac{dv}{dt} = \frac{h_1 v + s_1 t + \dots}{l_1 + k_1 v + \dots}.$$

Ако би се десило да је и $l_1 = 0$, извршили бисмо понова смену исте врсте, која би се понављала све дотле док се не дође у именитељу до једнога коефицијента l који више није једнак нули. Последња тако добијена једначина била би облика

$$t^m \frac{dw}{dt} = \frac{hw + qt + \dots}{l + pt + \dots}.$$

Па пошто је тада десна страна једначине холоморфна за $t = 0$, $w = 0$, она се може развити у двоструки ред по степенима промењљивих t и w, тако да се једначина своди на дефинитиван облик

(257) $$x^m y' = ay + bx + \ldots$$

Таква једначина уопште (изузимајући неке врло специјалне случајеве) нема интеграла y који би за $x = 0$ добио вредност $y = 0$, а који би се могао развити у ред облика

(258) $$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

као што се то већ види из специјалних случајева те једначине, као што су једначине (253) и (254).

IV

При проучавању редуковане једначине

(259) $$xy' = ay + bx + \ldots$$

видели смо да кад коефицијенат a има свој реални део негативан или једнак нули, он се може развити у ред облика (258), који ће бити конвергентан за вредности x у једном одређеном кругу описаном око тачке $x = 0$ у равни промењљиве x. Осим тога показано је да поред тако одређеног интеграла y не постоји више никакав интеграл који испуњава услов да за $x = 0$ добије вредност $y = 0$.

Кад број a не испуњава такав услов, настају изузетни случајеви, и ови могу бити разноврсни. Сваки од њих захтева нарочито проучавање, слично ономе које је изведено у досадашњем излагању. Резултати у погледу развијања интеграла у ред такође су разноврсни, према аритметичким појединостима везаним за број a. Тако на пример:

За случајеве *кад је реални део броја* а *позитиван*, Briot и Bouquet, употребом исте методе која је употребљена у овоме што претходи, нашли су да

1° Једначина (259) има опет за интеграл ред облика (258), али поред њега може имати још и бескрајно много других интеграла који за $x = 0$ добијају вредност $y = 0$, али се не могу развити у ред облика (258).

2° *Кад је* а *какав реалан, позитиван и рационалан број* $\frac{m}{n}$, интеграл y се може развити у ред уређен по степенима израза $\sqrt[n]{x}$

$$y = A_1 \sqrt[n]{x} + A_2 (\sqrt[n]{x})^2 + A_3 (\sqrt[n]{x})^3 + \ldots$$

конвергентан за вредности x у једноме одређеном кругу описаном око тачке $x = 0$ у равни x. Тај интеграл има вредност $x = 0$ као своју *алгебарску критичку тачку* n-*тога реда*, а осим њега једначина нема никаквих других интеграла који за $x = 0$ добијају вредност $y = 0$.

Прост пример за то даје једначина

$$xy' = \frac{m}{n} y$$

чији је општи интеграл

$$y = C(\sqrt[n]{x})^m.$$

3° *Кад је* a = 1, *а коефицијенат* b *различан од нуле,* не постоји интеграл y који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$ и који би се могао развити у ред облика (258), али има бескрајно много таквих интеграла који се могу развити у редове других облика.

Прост пример даје једначина

$$xy' = y + bx$$

чији је општи интеграл

$$y = Cx + bx \log x.$$

4° *Кад је* a = 1, b = 0, једначина има бескрајно много интеграла који за $x = 0$ добијају вредност $y = 0$ и од којих се сваки може развити у ред (258).

Прост пример даје једначина

$$xy' = y$$

чији је општи интеграл

$$y = Cx.$$

Да би се како треба разумели резултати Briot-Bouquet-a, треба имати у виду да они под интегралом y, који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$, разумеју и тривијални интеграл y идентички једнак нули, као и сваки интеграл

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n,$$

чији се интегрални ред своди на ограничен број чланова.

Тако нпр. једначина

$$y' = y, \quad y = Ce^x$$

има као једини свој интеграл, који испуњава услов $x = 0$, $y = 0$, тривијални интеграл y идентички $= 0$.

Једначина

$$xy' = ay, \quad y = Cx^a, \quad a > 0,$$

има бескрајно много интеграла са условом $x = 0$, $y = 0$, међу којима је и тривијални интеграл $y = 0$. Кад је a какав имагинаран број са позитивним реалним делом, тако да је

$$a = \alpha + \beta i, \quad \alpha > 0,$$

постоји интеграл y идентички једнак нули, и поред њега бескрајно много интеграла који за $x = 0$ постају $y = 0$, а који се не могу развити у ред уређен по степенима променљиве x. Ти су интеграли облика

$$y = Cx^{p+qi} = Cx^p[\cos(q \log x) + i \sin(q \log x)].$$

Допуњујући резултате Briot-a и Bouquet-a, Poincaré је доказао још и ове теореме:

5° *Кад је* a *какав цео позитиван број*, једначина има бескрајно много партикуларних интеграла који за $x = 0$ постају $y = 0$, а сваки се од њих може развити у ред по степенима двеју променљивих t и z, које су

$$t = x, \quad z = \log x.$$

Прост пример даје једначина

$$xy' = y + bx$$

чији је општи интеграл

$$y = Cx + bx \log x.$$

6° *Кад* a *није цео позитиван број, а има свој реалан део позитиван*, једначина има један интеграл који за $x = 0$ постаје $y = 0$, и који се може развити у ред уређен по степенима променљиве x; поред њега она има још бескрајно много интеграла који такође постају $y = 0$ за $x = 0$, а од којих се сваки може развити у ред по степенима двеју променљивих t и u које су

$$t = x, \quad u = x^a.$$

Прост пример даје једначина

$$xy' = ay + bx$$

чији је општи интеграл

$$y = \frac{b}{1-a}x + Cx^a$$

који, кад је реални део броја a позитиван, тежи нули за $x = 0$, а само се један од партикуларних интеграла, онај што одговара вредности константе $C = 0$, своди на ограничен ред по степенима променљиве x.

15. СЛУЧАЈ КАД ДЕСНА СТРАНА ЈЕДНАЧИНЕ ИМА ВРЕДНОСТИ $x = 0, y = 0$ КАО КРИТИЧКЕ СИНГУЛАРИТЕТЕ

Кад је дата диференцијална једначина

$$y' = f(x, y) \tag{260}$$

може се десити да почетни пар вредности $x = 0$, $y = 0$ поништава какав поткорени израз што фигурише у функцији $f(x, y)$. То се, на пример, дешава кад једначина (260) представља једно решење по изводу y' какве алгебарске диференцијалне једначине

$$F(x, y, y') = 0 \tag{261}$$

где је F полином по x, y, y'. Тада је пар вредности $x = 0$, $y = 0$ један пар *алгебарских критичких тачака* функције $f(x, y)$.

У какав се ред тада може развити интеграл y једначине, који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$?

Уочимо најпре једначину

$$f_2(x, y)\, y'^2 + f_1(x, y)\, y' + f_0(x, y) = 0 \tag{262}$$

где су f_0, f_1, f_2 полиноми по x и y. Она има два решења по изводу y' и то

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4 f_0 f_2}}{2 f_2}, \\ y' &= \frac{-f_1 - \sqrt{f_1^2 - 4 f_0 f_2}}{2 f_2}. \end{aligned} \tag{263}$$

Претпоставимо најпре да функција

$$f_1^2 - 4 f_0 f_2 \tag{264}$$

(која је полином по x и y) није једнака нули за $x = 0$, $y = 0$. Онда се за y' имају два проста корена (263) једначине (262), различна један од другога. Пар $x = 0$, $y = 0$ није никакав пар алгебарских критичких сингуларитета за функцију на десној страни једначине (260).

У свакој од двеју једначина (263) десна страна је функција холоморфна за $x = 0$, $y = 0$, па се према томе на обе те једначине може применити основна Briot-Bouquet-ова теорема; према овој, свака ће од тих двеју једначина дати по један интеграл који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$ и који се може развити у ред облика

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

конвергентан за вредности x у једноме кругу описаном око тачке $x = 0$ у равни x, одређеном на начин који прописује та теорема.

Изузетак се може имати само у случајевима кад десна страна једначине постане бескрајна за $x = 0, y = 0$, или се јави у облику $\frac{0}{0}$; у тим би се случајевима интеграл проучио на напред наведени начин, после подесне смене промењљивих.

Претпоставимо сад да функција (264) добија вредност нулу за пар вредности $x = 0, y = 0$. Тада се оба корена (263) једначине (262) стапају у један њен двоструки корен, који је

$$y' = -\frac{f_1}{2f_2},$$

а такав пар вредности x, y је један пар алгебарских критичких тачака за десну страну једне и друге једначине (263). То су тада алгебарске критичке тачке другога реда, јер корени чиниоци што им одговарају стоје под знаком квадратног корена. А пошто је $x = 0$ таква критичка тачка за извод y' (једнак десној страни тих једначина), то ће вредност $x = 0$ бити алгебарска критичка тачка другога реда и за само y. Према познатој теореми из теорије функција, y се тада *може развити у ред уређен по степенима израза* $\sqrt{x}$, *који ће бити конвергентан у једноме одређеном кругу око* $x = 0$ *у равни* x.

Уочимо сад општу алгебарску диференцијалну једначину првога рада, која се увек може написати у облику

$$f_m y'^m + f_{m-1} y'^{m-1} + \ldots + f_1 y' + f_0 = 0 \tag{265}$$

где су

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m \tag{266}$$

дати полиноми по промењљивима x и y.

Сменимо у функцијама (266) вредности $x = 0$, $y = 0$, па ће оне постати константе

$$C_k = [f_k], \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

а тако исто ће и извод y' том сменом постати једна константа λ. За те вредности x и y једначина (265) се претвара у обичну алгебарску једначину m-тог степена

$$C_m \lambda^m + C_{m-1} \lambda^{m-1} + \ldots + C_1 \lambda + C = 0$$

или у скраћеном облику

$$(267) \qquad \Phi(\lambda) = 0.$$

Претпоставимо најпре да су сви корени једначине (267) прости; да би тако било, потребно је и довољно да, ако је α један корен те једначине, извод $\frac{d\Phi}{d\lambda}$ буде различан од нуле за $\lambda = \alpha$. Једначина (265) има тада m решења облика

$$(268) \qquad y' = f(x, y)$$

и пар вредности $x = 0$, $y = 0$ није пар критичких сингуларитета ни за једно од тих решења. Функција $f(x, y)$, ако је за тај пар вредности коначна и не јавља се у облику $\frac{0}{0}$, биће холоморфна функција промењљивих x и y за те њихове вредности и примена основне Briot-Bouquet-ове теореме довешће до развитка интеграла y у облику реда

$$(269) \qquad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots;$$

свако од m решења (268) доводи до једнога таквог интеграла, па према томе:

Кад су корени алгебарске једначине сви прости, диференцијална једначина (265) има m *интеграла који за* x = 0 *добијају вредност* y = 0, *и од којих се сваки може развити у по један ред* (269) *конвергентан у одређеном кругу у равни* x.

Претпоставимо сад да једначина (267) има вишеструких корена, и нека је $\lambda = \alpha$ један такав корен p-тога реда. Да би тако било, потребно је и довољно да за $\lambda = \alpha$ буде

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{d\lambda^2} = 0, \quad \ldots, \frac{d^{p-1}\Phi}{d\lambda^{p-1}} = 0.$$

Диференцијална једначина (265) тада има једно решење (268) по изводу y', у коме ће пар вредности $x = 0$, $y = 0$ бити један пар алгебарских критичких тачака p-тога реда за одговарајућу функцију $f(x, y)$, па дакле ће вредност $x = 0$ бити алгебарска критичка тачка p-тога реда за извод y', а према томе и за сам одговарајући интеграл y. Овај се, дакле, *може развити у ред уређен по степенима израза* $\sqrt[p]{x}$ *који ће бити конвергентан у одређеном кругу у равни* x.

Свакоме вишеструком корену алгебарске једначине (267) одговараће по један интеграл y такве врсте за диференцијалну једначину (265). И као што се види, *облик реда у који се може развити интеграл, зависи од природе корена једначине* (267), *тј. од тога да ли су ти корени прости или вишеструки, и кога су они реда.*

Изузетак се јавља само онда кад функција $f(x, y)$ за $x = 0$, $y = 0$ добија бескрајно велику вредност, или се појави у облику $\frac{0}{0}$. У таквим случајевима треба одговарајућу једначину (268) проучити на напред наведени начин.

16. ПРАКТИЧНО УПУТСТВО ЗА ИНТЕГРАЦИЈУ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГА РЕДА У ОБЛИКУ РЕДОВА

Из целокупног досадашњег излагања може се, као крајњи резултат, извући ово опште практично упутство које решава проблем интеграције диференцијалне једначине првога реда у облику ограничених или неограничених редова:

Претпоставиће се да је једначина решена по изводу y', тј. да је написана у облику

$$y' = f(x, y) \tag{270}$$

па да се тражи онај њен партилуларни интеграл који за $x = x_0$ добија вредност $y = y_0$, где су x_0 и y_0 две унапред произвољно дате коначне вредности.

Сменом

$$\xi = x + x_0, \quad \eta = y + y_0$$

једначина (270) своди се на другу

$$\eta' = \varphi(\xi, \eta)$$

чији одговарајући партикуларни интеграл η треба да за $\xi = 0$ добије вредност $\eta = 0$.

Кад је вредност x_0 бескрајна, треба извршити смену

$$x = \frac{1}{\xi};$$

кад је вредност y_0 бескрајна извршиће се смена

$$y = \frac{1}{\eta};$$

а кад су обе те вредности бескрајне, треба извршити обе смене

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \frac{1}{\eta}.$$

Овде ће бити претпостављено да су такве смене већ извршене и да је (270) добијена једначина чији интеграл y за $x = 0$ треба да добије вредност $y = 0$.

Разликујмо тада ове случајеве:

Први случај: нека је функција $f(x, y)$ холоморфна за $x = 0$, $y = 0$, па ће се на диференцијалну једначину (270) применити основна Briot-Bouquet-ова теорема, по којој ће се интеграл y имати у облику ограниченог или неограниченог реда облика

$$(271) \qquad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

где се коефицијенти $a_1, a_2, a_3, \ldots$ израчунавају по упутству те теореме (в. 1. одељак). Нађени ред ће бити конвергентан за вредности x што се налазе у кругу описаном у равни x око тачке $x = 0$ са полупречником

$$R = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right)$$

где су r и r' полупречници два таква круга (једнога c у равни x, другога c' у равни y) да је функција $f(x, y)$ холоморфна за све вредности x у кругу c и за све вредности y у кругу c'; M је ма какав реалан и позитиван број од кога модуо функције $f(x, y)$ никако није већи па ма где се налазиле вредности x и y у својим круговима c и c'. Вредности r, r', M, потребне за одређивање полупречника R, одређују се по упутству садржаном у 1. одељку.

Тако добијен интеграл (271) једини је холоморфан интеграл који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$. Он се, уосталом, у појединим специјалним случајевима своди и на тривијални интеграл y идентички $= 0$, који се има сматрати као специјалан случај реда (271), као случај у коме је

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0.$$

Тако исто, у појединим случајевима сви коефицијенти a_n, почевши од једног одређеног ранга p, могу бити једнаки нули; ред се тада своди на ограничен број чланова, тј. на полином

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1}.$$

Други случај: нека функција $f(x, y)$ добије бескрајно велику вредност за $x = 0$, $y = 0$, али тако да је њена реципрочна функција

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$$

холоморфна за те вредности x и y.

Кад се функција $\varphi(x, y)$ развије у ред по степенима променљиве x, тако да је

$$\varphi(x, y) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

коефицијенти $A_0, A_1, A_2, \ldots$ могу бити или сталне количине, или функције променљиве y, холоморфне за $y = 0$.

Облик реда у који се може развити интеграл који за $x = 0$ постаје $y = 0$, зависи једино од коефцијента A_0, и то на овај начин:

1° кад је идентички $A_0 = 0$, не постоји ни један интеграл који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$;

2° кад A_1 није идентичкки $= 0$, он не може бити константа, већ само каква функција променљиве y која се може развити у ред облика

$$A_0 = \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \ldots$$

Тај ред може почињати са чланом који садржи y на првом, другом итд. степену; нека је m најнижи степен променљиве y у томе реду. Тада се интеграл може развити у ред уређен по степенима израза $\sqrt[m+1]{x}$

$$y = a_1 \sqrt[m+1]{x} + a_2 (\sqrt[m+1]{x})^2 + a_3 (\sqrt[m+1]{x})^3 + \ldots \tag{272}$$

и вредност $x = 0$ је алгебарска критичка тачка $(m + 1)$-ог реда за интеграл.

Коефицијенти и круг конвергенције реда одређују се применом основне Briot-Bouquet-ове теореме на извесну једначину облика

$$\frac{du}{dt} = \varphi(t, u)$$

која је у вези са једначиним (270) и у којој је φ холоморфна функција променљивих t и u за вредности $t = 0, u = 0$; то је једначина (185) проучена у 13. одељку.

Интеграл (272) је једини интеграл једначине (270) који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$. И он се у појединим специјалним случајевима може свести на тривијалан интеграл y идентички $= 0$, или на полином по изразу $\sqrt[m+1]{x}$.

Трећи случај: нека функција $f(x, y)$ за $x = 0$, $y = 0$ добије неодређену вредност $\frac{0}{0}$. Напишимо је тада у облику

$$\psi(x, y) y' = \varphi(x, y) \tag{273}$$

где су φ и ψ холоморфне функције променљивих x и y за $x = 0$, $y = 0$, које постају обе једнаке нули за те вредности x и y.

Одредимо најпре инфинитезимални ред μ интеграла y, по упутствима изложеним у 14. одељку под А), па уочимо један од тако добијених рационалних бројева μ (кад их буде више од једнога, са сваким од њих треба урадити све оно што будемо урадили са једним од њих). Сваки тако одређени број μ биће облика

$$\mu = \frac{p}{q}$$

где су p и q два цела броја.

Извршимо у једначини (273) смену

$$x = t^q, \quad y = vt^p \tag{274}$$

где је t нова независно променљива, а v нова непозната функција. Доказује се [14. одељак под B)] да v има за $t = 0$ коначну и од нуле различну вредност λ; ова ће бити корен извесне једначине

$$\Phi(\lambda) = 0$$

која се добија кад се у једначини (273) изврши смена (274), па се потом у њој стави да је $v = 0$ (чланови са изводом v' тиме отпадају из једначине, јер у овој увек поред тога извода стоји као чинилац који степен променљиве t).

Израчунајмо корене

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

те једначине и уочимо један, који било од њих (са сваким од њих треба урадити оно исто што будемо урадили са тим првим); нека је то λ_1, па извршимо нову смену

$$v = \lambda_1 + w$$

где је w нова непозната функција. Кад се у новој тако добијеној једначини скрати све што се може, па се једначина реши по изразу $t\dfrac{dw}{dt}$, и десна страна тако добијеног решења развије по степенима променљивих t и w, добија се дефинитивна редукована једначина облика

$$t\frac{dw}{dt} = aw + bt + \ldots \tag{275}$$

где неисписани чланови садрже више степене променљивих t и w (ако таквих чланова уопште има).

Проблем је на тај начин сведен на одређивање реда у који се може развити интеграл w једначине (275) који за $t = 0$ добија вредност

$w = 0$. Облик реда ће зависити поглавито од коефицијента a, а тај коефицијенат није ништа друго до вредност коју добија за $t = 0$, $w = 0$ први парцијални извод десне стране једначине (275) по променљивој w. Сам начин зависности облика реда од броја a исказан је у овим правилима:

1° Кад је реални део броја a реалан и негативан или једнак нули, интеграл w може се развити у ред по степенима променљиве t, а то је тада једини интеграл једначине који за $t = 0$ добија вредност $w = 0$. Коефицијенти реда и његов круг конвергенције одређује се по упутству датом у 14. одељку под С).

2° Кад је реални део броја a позитиван, али a није цео позитиван број, једначина има један интеграл w који се може развити по степенима променљиве t, али поред њега постоји још бескрајно много интеграла w који задовољавају услов да за $t = 0$ постају $w = 0$, а сваки се од њих може развити у ред уређен по степенима променљивих t и t^a.

3° Кад је a какав цео позитиван број, не постоји ниједан интеграл w који би се могао развити у ред по степенима променљиве t (са условом $t = 0$, $w = 0$), али постоји бескрајно много интеграла (са тим условом), који се могу развити у ред по степенима израза t и $\log t$.

Изузетни случајеви. Примењујући ова правила за случајеве кад се за почетне вредност $x = 0$, $y = 0$ десна страна диференцијалне једначине јавља у облику $\frac{0}{0}$, може се наићи на изузетне случајеве у којима та правила не важе. Поглавити случајеви такве врсте били би ови:

I. Може се дести да се једначина, која одређује инфинитезимални ред μ интеграла y своди на идентичност. Тада μ може бити и ирационалан број, а вредност $x = 0$ може бити трансцендентан сингуларитет интеграла y. За такав случај не постоји никаква општа метода за одредбу интеграла y који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$.

II. Кад се буде нашло да је

$$\mu = \frac{p}{q}$$

где су p и q два цела броја, па се изврши смена

$$z = t^{\frac{1}{q}}, \quad u = vt^p$$

добија се за $t = 0$ једначина

$$\Phi(\lambda) = 0$$

где λ означава вредност коју добија v за $t = 0$. Ова је једначина облика

$$p(A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \ldots) = q(B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha} + \ldots)$$

па се може десити да њен уочени корен λ поништава посебице и једну и другу заграду. Тада ће се, као што је показано, нова диференцијална једначина са променљивима t и v, јавити у облику

$$t\frac{dv}{dt} = \frac{gt + hv + \dots}{g't + h'v + \dots}$$

где неисписани чланови садрже више степене променљивих t и v. Ако се изврши поновна смена

$$gt + hv = tu$$

(где је u нова непозната функција), па се скрати све што се може, и реши једначина по изразу

$$t^2\frac{du}{dt}$$

једначина ће се, пошто се њена десна стана развије по степенима променљивих t и u јавити у облику

$$t^2\frac{du}{dt} = \alpha u + \beta t + \dots$$

где неисписани чланови садрже више степене променљивих t и u. Вредност $t = 0$ тада је уопште есенцијални сингуларитет интеграла y.

У још изузетнијим случајевима (напред наведеним) диференцијална једначина се сличним сменама своди на облик

$$t^m\frac{du}{dt} = au + bt + \dots$$

где је m какав цео позитиван број.

Четврти случај: нека је пар вредности $x = 0$, $y = 0$ један пар алгебарских критичких сингуларитета функције $f(x, y)$. Тада је $x = 0$ такође алгебарска критичка тачка интеграла y који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$. Интеграл се може развити у ред облика

$$y = a_1\sqrt[p]{x} + a_2(\sqrt[p]{x})^2 + a_3(\sqrt[p]{x})^3 + \dots$$

где је p цео број већи од јединице, који се увек може одредити. Сменом

$$x = t^p$$

интеграл y постаје холоморфна функција променљиве t, па се коефицијенти $a_1, a_2, a_3, \dots$ могу израчунавати по општем обрасцу

$$a_n = \frac{1}{n!}[y^{(n)}]$$

где се вредности

$$y', y'', y''', \ldots$$

израчунавају из саме диференцијалне једначине и оних које се добијају њеним узастопним диференцијаљењима.

Кад је, према свему томе, на тај начин нађен у облику реда интеграл y, који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$, треба се обрнутим путем, помоћу дотле учињених смена променљивих количина, вратити на првобитне променљиве x и y. А ако се тражило да се нађе интеграл y који за $x = x_0$ добија вредност $y = y_0$, онда се одговарајућом сменом напред поменуте врсте треба вратити на првобитну диференцијалну једначину.

17. КОЕФИЦИЈЕНАТ a_n ИНТЕГРАЛНОГ РЕДА КАО ФУНКЦИЈА СВОГА РАНГА n

Ретки су случајеви кад се коефицијенат a_n интегралног реда

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

дате диференцијалне једначине може одредити као експлицитна функција свога ранга n, па да се тако у облику једнога општег обрасца имају сви коефицијенти a_n.

Такав је, нпр. случај са једначином

$$y' = \alpha y + \beta$$

за коју је

$$a_n = \frac{\beta\alpha^{n-1}}{n!}$$

или једначином

$$y' = \frac{1}{2}(y - x + 1)^3 + 1$$

за коју је

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

У општем случају коефицијенти се израчунавају постепено, један из другог, било по методи неодређених коефицијената, која доводи до рекурсивне релације између једнога низа узастопних коефицијената, или, као што је показано у 19. одељку, помоћу обрасца

$$a_n = \frac{1}{n!}[f_{n-m}] \quad (n = m, m+1, m+2, \ldots)$$

(где је m ред диференцијалне једначине) који своди израчунавање коефицијената на одредбу низа функција f_k везаних напред наведеном рекурсивном диференцијалном релацијом.

Али у сваком случају познате су неке опште особине коефицијената a_n везаних за опште облике диференцијалних једначина, а које се могу сазнати без потребе да једначина буде интеграљена, тј. без потребе да се зна тачан аналитички израз тих коефицијената. Такве су особине изражене:

1° у неједначинама што се односе на коефицијенат a_n сматран као функција свога ранга n;

2° у ставовима што се односе на брзину рашћења или опадања коефицијената кад им ранг n бескрајно расте;

3° у ставовима што се односе на аритметичке особине коефицијената.

Ставови под 3° биће предмет 22. одељка ове књиге; у овоме ће одељку бити речи о ставовима под 2°и 3°.

I

Кад каква једначина

$$v' = \varphi(x, v) \tag{276}$$

има особине које се траже за компаративну једначину дате диференцијалне једначине

$$y' = f(x, y) \tag{277}$$

или каквога система (који се, као што ће бити показано, увек своди на систем симултаних једначина првога реда) онда, ако се са b_n означи општи коефицијенат интегралног реда

$$v = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \tag{278}$$

једначине (276), а општи интеграл дате једначине (277) гласи

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \tag{279}$$

за коефицијенте оба реда важиће општа неједначина

$$|a_n| < b_n.$$

А у толико пре, кад се за b_n може познавати каква неједначина

$$b_n < c_n,$$

важиће за a_n неједначина

$$|a_n| < c_n.$$

Тако, Cauchy-ева општа компаративна једначина

$$v' = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{v}{r'}\right)} \tag{280}$$

има као интеграл који за $x = 0$ добија вредност $v = 0$, функцију

$$v = r' - \sqrt{r'^2 - 2rr'\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}$$

холоморфну у одређеном кругу описаном око $x = 0$ у равни x.

Самим тиме што постоји такав холоморфни интеграл компаративне једначине (280), зна се, према Cauchy-евој неједначини, да за ред (278) важи неједначина

$$b_n < \frac{A}{r^n}$$

где A означава какав позитиван број који није премашен од модула функције v док x остаје у кругу полупречника r у равни x, у коме је десна страна једначине (277) холоморфна. Према томе:

Општи коефицијенат a_n *интегралног реда* (279) *једначине* (277) *задовољава за све вредности* n *неједначину*

$$|a_n| < \frac{A}{r^n}. \tag{281}$$

Та неједначина не претпоставља ништа друго о функцији $f(x,y)$ осим то да је она холоморфна за почетне вредности $x = 0$, $y = 0$. Међутим, кад се о тој функцији зна још шта ближе, могу се имати и ниже, па дакле пробитачније границе за тај коефицијенат. До таквих граница доводе, на пример, специјалније компаративне једначине, али чије искоришћавање захтева још и суплементарне претпоставке или о самој функцији $f(x,y)$, или о интегралу y.

Тако, као што је напред показано, кад је коефицијенат двоструког реда

$$f(x,y) = \Sigma\Sigma A_{mn}x^m y^n$$

такав да израз

$$m!n!|A_{mn}|$$

остаје коначан при бескрајном рашћењу индекса m и n, *модуо коефицијента* $\mathfrak{a}_n$ *интегралног реда мањи је но коефицијенат* $\mathfrak{b}_n$ *функције*

$$v = -\log[1 - A(e^x - 1)]$$

као интеграла компаративне једначине

$$v' = Ae^{x+v}, \quad A > 0.$$

Тако исто, кад израз

$$\frac{|A_{mn}|}{(m+1)(n+1)}$$

остаје коначан при бескрајном рашћењу индекса m и n, *модуо коефицијента* $\mathfrak{a}_n$ *мањи је од коефицијента* $\mathfrak{b}_n$ *функције*

$$v = 1 - \sqrt[3]{\frac{1-Ax}{1-x}}, \quad A > 1,$$

као интеграла компаративне једначине

$$v' = \frac{\alpha}{(1-x)^2(1-v)^2}.$$

Разне друге компаративне једначине, везане за претпоставке о начину рашћења или опадања коефицијента A_{mn} функције $f(x,y)$ при рашћењу индекса m и n, доводе до разних других горњих граница за модуо кеофицијента a_n.

Али до таквих горњих граница може се доћи и чинећи претпоставке о самоме интегралу y једначине (277), као функцији променљиве x. Једна врло општа таква граница, која важи за општу алгебарску диференцијалну једначину првога реда

$$f(x, y, y') = 0 \tag{282}$$

(где се увек, не умањујући генералност, може сматрати да је f несводљив полином по x, y, y') добија се применом једне теореме коју је доказао Lindelöf у погледу горње границе за ма који реални интеграл y једначине (282), при рашћењу променљиве x у реалном позитивном правцу. Теорема гласи:

Почевши од једне довољно велике позитивне вредности x, *вредност интеграла* y *никако не премаша вредност функције*

$$\lambda(x) = e^{\alpha x^{m+1}} \tag{283}$$

где је m *стеӣен ӣолинома* f *ӣо* x, *а* α *ӣозиӣивна консӣанӣа која се може израчунаӣи из саме диференцијалне једначине.*

Lindelöf је дао и начин за израчунавање константе α; њена вредност, смењена у $\lambda(x)$, одређује величину горње границе *ма коїа* реалног интеграла једначине (282). Та граница може бити и стварно достигнута у појединим специјалним случајевима, што се види на примеру једначине

(284) $$y' - (m+1)x^m y = 0,$$

чији је општи интеграл

$$y = Ce^{x^{m+1}}.$$

Уочимо сад оне интеграле y једначине (282) који су *целе функције ӣромењљиве* x *чији су коефицијенӣи* a_n *сви реални ӣозиӣивни бројеви.*

Пошто су x, α, a_n позитивни, то је

$$x = |x| = r \qquad y = |y| = a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \ldots$$

па ће према горњој теореми бити за довољно велике вредности x непрестано

(285) $$|y| < e^{\alpha r^{m+1}}$$

што значи да израз

$$|y|\, e^{-\alpha r^{m+1}}$$

не постаје бескрајно велики кад r бескрајно расте. Постоји, дакле, један коначан позитиван број A такав да је за све вредности x непрестано

$$|y|\, e^{-\alpha r^{m+1}} < A,$$

што значи да је за све вредности x

(286) $$|y| < Ae^{\alpha r^{m+1}}.$$

Према општој Cauchy-евој неједначини за $|a_n|$ биће тада

(287) $$|a_n| < \frac{|y|}{r^n} < A\frac{e^{\alpha r^{m+1}}}{r^n}.$$

Пошто је y по претпоставци цела функција, може се полупречнику r дати каква се хоће вредност од 0 до $+\infty$. Израз на десној страни неједначине (287) достиже свој минимум за

$$r = \gamma n^{\lambda}$$

где су γ и λ рационални бројеви

$$\gamma = \left[\frac{1}{(m+1)\alpha}\right]^{\frac{1}{m+1}}, \qquad \lambda = \frac{1}{m+1}.$$

За саму вредност тога минимума налази се да је она

$$A\frac{\beta^n}{n^{\lambda n}}$$

где је β константа

$$\beta = [(m+1)\,e\alpha]^{\lambda}$$

а из тога се види *да је за уочене интеграле* у

$$a_n = |\,a_n\,| < A\frac{\beta^n}{n^{\lambda n}}. \tag{288}$$

Из тога се закључка могу извести разноврсне појединости за целе функције са позитивним коефицијентима a_n, које задовољавају какву алгебарску дифернцијалну једначину првог реда. Тако:

I. *За све позитивне вредности* x *интеграл не премаша вредност специјалне целе функције*

$$\varphi(x) = A\sum_{n=0}^{\infty} n^{-\lambda n}\beta^n x^n. \tag{289}$$

Јер према неједначини (288), а пошто су a_n и x позитивни, мора бити и

$$y < \varphi(x).$$

II. *Узастопне нуле* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ *интеграла* у *не расту, при рашћењу свога ранга* n, *спорије но што расте вредност* n^{λ}.

Јер, према неједначини (288), вредност $\sqrt[n]{|\,a_n\,|}$ не опада спорије од вредности $n^{-\lambda}$, и према томе $|\,a_n\,|^{-\frac{1}{n}}$ не расте спорије од n^{λ}. А према једној теореми коју је доказао Hadamard, за целе функције уопште, модуо n-те нуле α_n такве једне функције расте брже, при рашћењу њеног ранга n, него што расте израз $|\,a_n^{-\frac{1}{n}}\,|$. Па пошто тај израз не расте спорије од n^{λ}, тако ће исто бити и са нулом α_n.

III. *Кад год интеграл* у, *израчунат у облику реда са позитивним коефицијентима* a_n, *представља какву целу функцију променљиве* x, *врста (genre, Gattung) те функције је један од бројева*

$$0, 1, 2, \ldots, (m+1).$$

То је последица неједначине (286) и става који је доказао Hadamard за целе функције уопште, да кад је модуо једне такве функције мањи од вредности израза

$$e^{\alpha r^p}, \qquad r = |x|,$$

где је α каква позитивна константа, врста функције не премаша број p.

Од интереса је напоменути да став III не важи и за интеграле алгебарских диференцијалних једначина вишега реда; то се може видети на примеру једначине другога реда

$$yy'' - y'^2 - yy' = 0$$

која има, као једну класу својих партикуларних интеграла, целе функције

$$y = Ce^{e^x}, \qquad C > 0.$$

Пошто су сви изводи функције y позитивни за $x = 0$, то су и сви њени коефицијенти a_n позитивни; међутим y је цела функција бескрајне врсте.

Исто се види и на примеру интегралног реда који изражава целу функцију

$$y = e^{e^x} P(x)$$

где је P какав полином чији су коефицијенти сви позитивни; таква функција задовољава једну алгебарску диференцијалну једначну другога реда, а међутим њена је врста бескрајна.

А тако исто треба приметити и то, да целе функције, о каквима је реч, а које су интеграли алгебарских диференцијалних једначина, *могу бити ма које коначне врсте*. То се види на примеру једначине првог реда

$$y'^2 + p^2(1-y^2)x^{2(p-1)} = 0$$

(p – цео позитиван број), која има за партикуларни интеграл

$$y = \frac{1}{2}(e^{x^p} + e^{-x^p}) = \cos(ix^p) = 1 + \frac{x^{2p}}{2!} + \frac{x^{4p}}{4!} + \frac{x^{6p}}{6!} + \ldots$$

Нека је, напослетку, наведено и то да горња граница $m + 1$ за врсту интеграла y бива и стварно достигнута у појединим специјалним случајевима, као што је то нпр. за диференцијалну једначину (284) чији је општи интеграл цела функција $(m + 1)$-те врсте

Ставу III може се дати и овај облик:

IV. *Кад год какав ред*

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{290}$$

који изражава интеграл какве алгебарске диференцијалне једначине првог реда, има своје коефицијенте a_n *позитивне, а представља какву целу функцију променљиве* x, *степен диференцијалне једначине по* x *никад није мањи од врсте те целе функције, смањене за јединицу.*

II

Посматрајмо сад случај кад интегрални ред (290) какве алгебарске диференцијалне једначине првог реда *има све своје коефицијенте* a_n *једнаке позитивним рационалним бројевима,* а представља какву *целу функцију* променљиве x.

Такав случај наступа, на пример, за диференцијалну једначину облика

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{291}$$

где су P и Q полиноми по x и y чији су коефицијенти позитивни рационални бројеви, са условом да буде

$$Q(0, 0) \neq 0.$$

Сви узастопни изводи интеграла y, добијени узастопним диференцијаљењима једначине (291), биће рационалне функције променљивих x и y, које ће све имати као именилац одређен степен полинома Q. Кад се у њима стави $x = 0$, $y = 0$ и резултат подели са одговарајућим факторијелом $n!$, добија се коефицијенат a_n као позитиван рационалан број. Само треба још додати и то да, према једној познатој теореми из аналитичке теорије диференијалних једначина првог реда, између свију једначина облика (291), једина чији *општи* интеграл може бити цела функција, је линеарна једначина

$$y' = f(x)y + \varphi(x)$$

где су f и φ полиноми по x. Међутим, и друге једначине облика (291) могу имати *партикуларних* интеграла који су целе функције.

На све једначине

$$f(x, y, y') = 0 \tag{292}$$

(f несводљив полином по x, y, y') чији интеграл има коефицијенте a_n позитивне и рационалне, а представља какву целу функцију, примењују се непосредно сви ставови из прошлог параграфа.

На пример, ранији став даје једну горњу границу интеграла y, изражавајући да за позитивне вредности x функција никад не премаша вредност

$$Ae^{\alpha x^{m+1}}.$$

Али, поред тако одређене *горње* границе коју интеграл не може *премашити*, може се поставити и једна *доња* граница коју он никад не може *подбацити* за такве вредности x. Шта више, тако нађена доња граница важиће и за интеграле опште алгебарске диференцијалне једначине ма кога коначног реда p

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0. \tag{293}$$

Да би се одредила таква једна доња граница, применићемо на интеграл y једну теорему коју је доказао Polya за интеграле једначине (293). Теорема гласи:

За сваки интеграл y *једначине* (293) *који се изражава у облику реда*

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

чији су коефицијенти рационални бројеви, а који је конвергентан за све вредности x *у равни променљиве* x, *израз*

$$\frac{|\log a_n|}{n(\log n)^2}$$

не тежи граници $-\infty$ *при бескрајном рашћењу броја* n.

Пошто је у овде посматраном случају коефицијенат a_n реалан, позитиван и тежи нули кад n бескрајно расте (јер је интеграл y цела функција са реалнм позитивним коефицијентима a_n), теорема доводи до закључка да израз

$$-\frac{\log a_n}{n(\log n)^2} = \frac{\log \dfrac{1}{a_n}}{n(\log n)^2}$$

остаје, за све довољно велике вредности n, мањи од једнога коначног позитивног броја h. Из тога излази да је за сваку вредност

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

непрестано

$$a_n > e^{-hn(\log n)^2}. \tag{294}$$

Интеграл y посматране аналитичке природе за све позитивне вредности x премаша вредност специјалне целе функције

$$\mu(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-hn(\log n)^2} x^n. \tag{295}$$

Неједначине (288) и (294) постављају границе могућним варијацијама коефицијената a_n и њиховом начину опадања при бескрајном рашћењу њиховог ранга n. Тако

1° Једначина (288) ограничава брзину опадања коефицијента a_n у томе смислу што према њој a_n *опада брже него израз*

$$\frac{\beta^n}{n^{\lambda n}}$$

или, што је исто, него израз

$$\frac{1}{n^{\lambda n}} = e^{-\lambda n \log n};$$

пошто сменом $x = \dfrac{t}{\beta}$ нестаје фактора β^n у изразу за a_n.

2° неједначина (294) ограничава брзину опадања коефицијената a_n у томе смислу што према њој a_n *опада спорије него израз*

$$e^{-hn(\log n)^2}.$$

Као што се види:

Низ коефицијената $\mathrm{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) *не може опадати ни сувише споро, ни сувише брзо, већ најспорије онако како опада израз* $\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{n} \log \mathrm{n}}$, *а најбрже онако како опада израз* $\mathrm{e}^{-\mathrm{hn}(\log \mathrm{n})^2}$.

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

18. СИСТЕМИ СИМУЛТАНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГА РЕДА

Cauchy-ева компаративна метода примењује се, не само на обичне диференцијалне једначине, већ и на системе симултаних једначина. Овде ће бити у томе погледу проучен систем облика

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),
\end{aligned}
\tag{296}
$$

где су $y_1, y_2, \ldots, y_n$ непознате функције независно променљиве количине x, везане међу собом системом од n диференцијалних једначина првога реда (296).

Претпоставимо да је свака од датих функција

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \tag{297}$$

холоморфна функција променљиве x у једноме кругу полупречника r, описаном око тачке $x = 0$ у равни променљиве x, као и холоморфна функција променљивих

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \tag{298}$$

у близини вредности

$$y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_n = 0, \tag{299}$$

тј. у по једноме кругу описаном око тих вредности у равни сваке од тих n променљивих.

Означимо са r' полупречник најмањега од тих n кругова, а са M један број такав да га не премаша модуо ни једне од n функција (297) док променљиве остају у својим круговима полупречника r и r', тј. такав да је за све такве вредности променљивих непрестано

$$|f_1| \leq M, |f_2| \leq M, \ldots, |f_n| \leq M. \tag{300}$$

Формирајмо функцију $n + 1$ променљивих количина

$$\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y_1}{r'}\right)\ldots\left(1 - \frac{y_n}{r'}\right)} \tag{301}$$

па упоредимо интеграле система (296) са интегралима система

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= \varphi(x, v_1, v_2, \ldots, v_n), \\ \frac{dv_2}{dx} &= \varphi(x, v_1, v_2, \ldots, v_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dv_n}{dx} &= \varphi(x, v_1, v_2, \ldots, v_n). \end{aligned} \tag{302}$$

Узастопним диференцијаљењима једначина (296) по x и сменама извода

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$$

њиховим вредностима из једначина (296) добија се један систем једначина које изражавају узастопне више изводе функција

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \tag{303}$$

као функције променљивих x и (303).

Тако исто, поступним диференцијаљењима једначине (302) по x и сменама извода

$$\frac{dv_1}{dx}, \frac{dv_2}{dx}, \ldots, \frac{dv_n}{dx} \tag{304}$$

њиховим вредностима из једначина (302) добија се систем једначина које изражавају узастопне више изводе функција

(305) $$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

као функције променљивих x и (305):

На тај начин добијени изводи функција y_k и функција v_k имају исту структуру и изражавају се; сваки извод, као збир сабирака који су производи разних степена функција (297), односно функције φ, и њихових парцијалних извода по променљивима x и (303), односно x и (305).

Међутим, на исти начин као и за обичну диференцијалну једначину првога реда, који је напред изложен, уверавамо се да је модуо свакога парцијалног извода ма које од функција (297) мањи од одговарајућег парцијалног извода функције φ. То ће тада важити и за вредности које ти изводи добијају за

(306) $$\begin{aligned} x &= 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \ldots, y_n = 0, \\ x &= 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \ldots, v_n = 0, \end{aligned}$$

па ће, према неједначинама (300) и једначини (301) то исто важити и за вредности самих функција (297) и функције φ. Биће дакле

$$| f_k(0, 0, 0, \ldots, 0) | < \varphi(0, 0, 0, \ldots, 0),$$

$$\left| \frac{\partial^{m+n+p+\ldots}}{\partial x^m \partial y_1^n \partial y_2^p \ldots} f_k(0, 0, 0, \ldots, 0) \right| < \frac{\partial^{m+n+p+\ldots}}{\partial x^m \partial v_1^n \partial v_2^p \ldots} \varphi(0, 0, 0, \ldots, 0),$$

а из тога се, као и у ранијем случају обичне диференцијалне једначине првога реда, закључује да, ако се са α_k^i означи вредност коју добија i-ти извод функције y_k по x за $x = 0$, а са β_k^i вредност коју добија i-ти извод функције v_k по x, увек ће бити

(307) $$| \alpha_k^i | < \beta_k^i,$$

при чему треба имати у виду да су све вредности β_k^i, добијене на такав начин, очевидно реалне и позитивне; то следује из саме структуре извода (304) и чињенице коју је лако проверити да функција φ, дефинисана једначином (301), и сви њени парцијални изводи, имају за

(308) $$x = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \ldots, v_n = 0$$

реалне и позитивне вредности.

Претпоставимо, за један тренутак, да систем (296) има као своје формално решење један систем вредности (303) изражен у облику Maclaurin-ових редова који за $x = 0$ дају $y_k = 0$

$$
(309) \qquad
\begin{aligned}
y_1 &= a_1^1 x + a_1^2 x^2 + a_1^3 x^3 + \ldots,\\
y_2 &= a_2^1 x + a_2^2 x^2 + a_2^3 x^3 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= a_n^1 x + a_n^2 x^2 + a_n^3 x^3 + \ldots,
\end{aligned}
$$

а да, тако исто и систем (302) има као формално решење један систем вредности (305) изражен у облику редова који за $x = 0$ дају $v_k = 0$

$$
(310) \qquad
\begin{aligned}
v_1 &= b_1^1 x + b_1^2 x^2 + b_1^3 x^3 + \ldots,\\
v_2 &= b_2^1 x + b_2^2 x^2 + b_2^3 x^3 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_n &= b_n^1 x + b_n^2 x^2 + b_n^3 x^3 + \ldots,
\end{aligned}
$$

Пошто је

$$a_k^i = \frac{\alpha_k^i}{k!}, \qquad b_k^i = \frac{\beta_k^i}{k!},$$

то је према неједначини (307)

$$| a_k^i | < b_k^i$$

што значи да је коефицијенат од x^n сваке од функција y_k мањи од коефицијента од x^n функције v_k. Ако је, дакле, сваки од редова (310) конвергентан за вредности x у једноме кругу C_k описаном у равни x око тачке $x = 0$, у томе ће кругу насигурно бити конвергентан и одговарајући ред (309) истога ранга k.

Међутим, систем (302) је могућно интегралити и одредити кругове C_k свакога његовог интеграла v_k. Из једначина (302) се види да је за произвољне вредности променљивих x и v_k

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx} = \ldots = \frac{dv_n}{dx}$$

одакле је

$$v_2 = v_1 + C_1, \quad v_3 = v_1 + C_2, \ldots, v_n = v_1 + C_{n-1}$$

где су $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ интеграционе константе. Па пошто за $x = 0$ свако v_k треба да је једнако нули, добија се да је за произвољне вредности x

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_n.$$

Систем (302) се тада своди на једну једину једначину

$$\frac{dv}{dx} = \varphi(x, v, v, \ldots, v)$$

тј. према (301), на обичну диференцијалну једначину првога реда

$$\frac{dv}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{v}{r'}\right)^n}.$$

Кад се ова напише у облику

$$\left(1-\frac{v}{r'}\right)^n dv = \frac{M}{1-\frac{x}{r}}dx$$

добија се интеграцијом

$$\frac{r'}{n+1}\left[1-\left(1-\frac{v}{r'}\right)^{n+1}\right] = -Mr\log\left(1-\frac{x}{r}\right)$$

одакле се налази да интеграл v, који за $x = 0$ добија вредност $v = 0$, има за израз

$$v = r'\left[1-\sqrt[n+1]{1+\frac{(n+1)Mr}{r'}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right].$$

Тај је интеграл v холоморфна функција променљиве x у близини вредности $x = 0$, јер сингуларитети функције произлазе само од једначине

$$1+\frac{(n+1)Mr}{r'}\log\left(1-\frac{x}{r}\right) = 0.$$

Та једначина, решена по x, има само један корен, и то

$$x = r\left(1-e^{-\frac{r'}{(n+1)Mr}}\right).$$

Та је вредност једини сингуларитет функције v, и према томе та ће функција бити холоморфна докле год x остаје у кругу C описаном око тачке $x = 0$ са полупречником

$$R = r\left(1-e^{-\frac{r'}{(n+1)Mr}}\right)$$

Пошто је функција v холоморфна у томе кругу C, она се може развити у ред

$$(311) \qquad v = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

па пошто су све функције v_k једнаке међу собом и са функцијом v, свака се од њих може развити у исти ред (311) са истим кругом конвергенције C. А кад је то случај, према ономе што је малочас казано, биће у томе истоме кругу C конвергентни и сви редови (309) који дају формално решење у проблему интеграције система (296). А такво формално решење постоји: то је оно што се добија кад се коефицијентима a_k^i у обрасцима (309) даду вредности

$$a_k^i = \frac{\alpha_k^i}{k!}$$

На тај начин се долази до овога резултата за систем (296):

Нека је дат систем

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n),$$

где је свака од функција $f_1, \dots, f_n$ холоморфна функција променљиве x у кругу полупречника r описаном око тачке $x = 0$ у равни x, и тако исто холоморфна функција променљивих $y_1, \dots, y_n$ у свакоме од кругова полупречника r' описаних око тачака $y_1 = 0, \dots, y_k = 0$ у равнима тих променљивих. Означимо са M један број такав да га не премаша модуо ни једне од n функција $f_1, \dots, f_n$ док свака од променљивих остаје у своме кругу, па је у овоме што претходи доказана ова *основна теорема* за интеграцију система (296) помоћу редова облика

$$(312) \qquad y_k = a_k^1 x + a_k^2 x^2 + a_k^3 x^3 + \dots$$

Свака се непозната функција $y_1, \dots, y_n$, *као интеграл система* (296) *који за* $x = 0$ *добија вредност* $y_k = 0$, *може развити* у *ред облика* (312), *који ће насигурно конвергирати за све вредности* x *у кругу описаном око* $x = 0$ *са полупречником*

$$R = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{(n+1)Mr}}\right).$$

Очевидно је да та теорема и проширује на системе симултаних једначина основну Briot-Bouquet-ову теорему за случај обичних диференцијалних једначина првога реда, на коју се она своди у случају кад је $n = 1$.

Теорема је, као што се види, изведена употребом компаративних једначина за сваку од једначина степена (296) а свака од њих има облик Cauchy-еве компаративне једначине за диференцијалну једначину првога реда. Међутим, као и за ову, могу се, под нарочитим претпоставкама за функције $f_1, \dots, f_n$, употребити и друге, специјалније компаративне једначине, које важе само за такве случајеве.

Тако нпр. кад се свака од функција $f_1, \dots, f_n$ развије у двоструки ред по степенима променљивих

$$x, y_1, y_2, \dots, y_n, \tag{313}$$

тако да је систем (296) написан у облику

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1 = \Sigma A^1_{m,p\dots} x^m y_1^p \dots y_n^s, \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2 = \Sigma A^2_{m,p\dots} x^m y_1^p \dots y_n^s, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n = \Sigma A^n_{m,p\dots} x^m y_1^p \dots y_n^s, \end{aligned} \tag{314}$$

онда, ако су сви коефицијенти A реални и позитивни и такви да израз

$$m!\,p!\dots A^i_{m,p\dots}$$

монотоно расте при рашћењу индекса m, p ..., *за сваку од једначина*

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n)$$

може се узети једначина

$$\frac{dv_k}{dx} = \varphi_k(x, v_1, \dots, v_n)$$

где је φ_k *ма који парцијални извод, и ма кога реда, функције* f_k *по променљивима* (313).

Доказ правила је исти као доказ III правила у 9. одељку.

19. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И СИСТЕМИ СИМУЛТАНИХ ЈЕДНАЧИНА ВИШЕГА РЕДА

I

Диференцијална једначина m-тога реда

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) \tag{315}$$

може се увек свести на систем од m симултаних једначина првога реда. Ако се стави да је

$$y = y_0, y' = y_1, y'' = y_2, \ldots, y^{(m-1)} = y_{m-1},$$

имаће се систем од m једначина првога реда

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dx} &= y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dy_{m-1}}{dx} &= f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}). \end{aligned} \tag{316}$$

Претпоставивши да је f холоморфна функција промењљивих

$$x, y, y', \ldots, y^{(m-1)} \tag{317}$$

и то у кругу полупречника r описаном у равни x око тачке $x = 0$, и промењљивих $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ у свакоме од кругова полупречника r' описаних око тачака

$$y = 0, y' = 0, \ldots, y^{(m-1)} = 0. \tag{318}$$

она ће то исто бити и за промењљиве

$$x, y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}. \tag{319}$$

Ако се тада означи са M један број такав да га не премашају ни вредност r', ни модуо функције f док свака од промењљивих (317), односно (319) остаје у своме кругу, може се применити горња основна теорема, која доводи до овога резултата:

Свака од променљивих $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$, *па дакле и сам интеграл* y *диференцијалне једначине* (315) *који, као и сви његови изводи до* (m – 1)-*ог закључно, добија вредност нулу за* x = 0, *може се развити у ред облика*

$$(320) \qquad a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \ldots$$

који ће бити конвергентан за све вредности x *што леже у кругу описаноме око тачке* x = 0 *у равни* x, *са полупречником*

$$R = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{(n+1)Mr}}\right).$$

Тако нпр. диференцијална једначина другога реда

$$y'' = f(x, y, y')$$

имаће за свој интеграл y, који као и његов извод y', постаје једнак нули за $x = 0$, ред облика

$$a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

који ће бити конвергентан за све вредности x у кругу описаном око $x = 0$ у равни x са полупречником

$$R = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{3Mr}}\right).$$

Остаје да се покаже како се израчунавају коефицијенти

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \ldots$$

реда (320). Из једначине (315) добија се диференцијаљењем по x

$$y^{(m+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(m-1)}} f.$$

Десна страна једначине је функција променљивих

$$(321) \qquad x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$$

која, ако се означи са f_1, биће

$$y^{(m+1)} = f_1(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}).$$

Диференцијалећи поново по x, добија се

$$y^{(m+2)} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(m-1)}} f.$$

где ће опет десна страна бити функција промењивих (321), која ако се означи са f_2, биће

$$y^{(m+2)} = f_2(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}).$$

Продуживши тако и даље, добиће се низ израза за више изводе функције y у облику

$$y^{(n)} = f_{n-m}(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}),$$

$$n = m+1, \quad m+2, \quad m+3, \ldots$$

ī де се низ функција

(322) $$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

изводи, једна из друīе, ūо рекурсивном обрасцу

$$f_k = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y^{(m-1)}} f$$

са почетном функцијом

$$f_0 = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}).$$

Ако се тада са $[f_k]$ означи резултат који се добија кад се у функцији f_k смени

$$x = 0, y = 0, y' = 0, \ldots, y^{(m-1)} = 0$$

коефицијенти се израчунавају по обрасцу

$$a_{m+n} = \frac{1}{(n+m)!}[f_n], \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Применимо такав начин одређивања коефицијената a_n на једначину h-тог реда

(323) $$y^{(h)} = R(x, y, y', \ldots, y^{(h-1)})$$

где је R рационална функција промењивих

(324) $$x, y, y', \ldots, y^{(h-1)}.$$

Ставимо да је

(325) $$y^{(k)} = y_k, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots h)$$

па ће једначина (323) бити облика

$$(326) \qquad y_h = \frac{P}{Q}$$

где су P и Q полиноми по променљивима

$$x, y_0, y_1, \ldots, y_h$$

где се, ради холоморфности функције R у близини вредности

$$(327) \qquad x = 0, y = 0, y' = 0, \ldots, y^{(h)} = 0$$

претпоставља да је

$$Q(0, 0, 0, \ldots, 0) \neq 0.$$

Тада се интегралу који, као и његови узастопни изводи до $(h-1)$-ог закључно, за $x = 0$ добија вредност нулу, може развити у ред

$$(328) \qquad y = a_h x^h + a_{h+1} x^{h+1} + a_{h+2} x^{h+2} + \ldots$$

Коефицијенат степена x^n израчунава се помоћу обрасца

$$(329) \qquad a_n = \frac{r_n}{n!}, \quad n = h+1, h+2, h+3, \ldots,$$

где r_n означује вредност, коју за вредности (327) добија једна извесна функција R_n; ова је функција n-ти члан низа функција

$$R_h, R_{h+1}, R_{h+2}, \ldots$$

које се једна из друге израчунавају помоћу рекурсивног обрасца

$$(330)\, R_n = \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0} + y_2 \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1} + \ldots + y_{h-1} \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-2}} + \frac{P}{Q} \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}$$

са почетном функцијом

$$R_1 = \frac{P}{Q},$$

што се доказује, као и за диференцијалне једначине првога реда у 4. одељку, и на истоветан начин, узастопним диференцијаљењима једначине (323) по x, водећи рачуна о једначинама (323), (325), (326).

Овде ће бити показано да се израчунавање коефицијената може свести на израчунавање, не низа рациналних функција, већ једнога низа полинома по променљивима (324).

Лако се уверавамо, као и за једначине првога реда, да је уопште

$$(331) \qquad R_n = \frac{P_n}{Q^{2n-2h+1}}, \quad P_h = P, \quad (n = h, h+1, h+2, \ldots)$$

где је P_n полином по променљивима (324). Сменивши n са $n-1$ добија се

$$(332) \qquad R_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{Q^{2n-2h-1}}$$

одакле се парцијалним диференцијаљењима добија низ једначина

$$(333) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} &= \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial x} - (2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial x}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}, \\ \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0} &= \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_0} - (2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_0}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}, \\ \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1} &= \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_1} - (2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_1}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}} &= \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-1}} - (2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}. \end{aligned}$$

па се из последње од њих добија

$$(334) \qquad \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}\frac{P}{Q} = \frac{PQ\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-1}} - (2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}PP_{n-1}}{Q^{2n-2h+1}}.$$

Из образаца (330) и (331) је

$$P_n = Q^{2n-2h+1}\left(\frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} + y_1\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0} + y_2\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1} + \ldots + y_{h-1}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-2}} + \frac{P}{Q}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}\right)$$

а кад се ту смене парцијални изводи фунције R_{n-1} њиховим изразима (333) и (334) добија се

$$(335) \qquad \begin{aligned} P_n = {} & A\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + H_0\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_0} + H_1\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_1} + H_2\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_2} + \\ & + \ldots + H_{h-2}\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-2}} + B\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-1}} + (2n-2h-1)CP_{n-1} \end{aligned}$$

где су

$$A, B, C, H_0, H_1, \dots, H_{h-2}$$

стални полиноми по променљивима $x, y_0, y_1, \dots, y_h$, тј. независни од ранга n коефицијента a_n; а који имају за изразе

$$A = Q^2, \quad B = PQ,$$

$$C = -Q\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Q}{\partial y_1} + \dots + y_{h-1}\frac{\partial Q}{\partial y_{h-2}} + \frac{P}{Q}\frac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}\right),$$

$$H_0 = y_1 Q^2, \quad H_1 = y_2 Q^2, \quad H_2 = y_3 Q^2, \dots, \quad H_{h-2} = y_{h-1} Q^2.$$

Израчунавање коефицијената a_n своди се дакле на одредбу сталних од променљивих $x, y_0, \dots, y_h$ независних чланова $p_h, p_{h+1}, p_{h+2}, \dots$ низа полинома

$$P_h, P_{h+1}, P_{h+2}, \dots$$

који се један из другога поступно израчунавају из обрасца (336) и сталнога члана q полинома Q. То израчунавање бива по општем обрасцу

$$a_n = \frac{p_n}{n!\, q^{2n-2h+1}} \quad (n = h, h+1, h+2, \dots) \tag{336}$$

при чему један исти број q важи за све коефицијенте a_n

Приметићемо још да се и на диференцијалне једначине вишега реда могу применити специјалније компаративне једначине, према претпоставкама које се буду чиниле о функцији f у једначини

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}). \tag{337}$$

Напослетку, нека је примећено да се и системи симултаних једначина вишега реда, облика

$$\frac{d^m y_k}{dx^m} = f_k\left(x, y_1, \dots, y_n; \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_k}{dx}; \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^2 y_k}{dx^2}, \dots\right) \tag{338}$$

могу свести на систем симултаних једначина првога реда. То се постиже увођењем нових непознатих функција

$$y_1 = z_1, \qquad y_2 = z_2, \dots, \qquad y_n = z_n,$$

$$\frac{dy_1}{dx} = z_{n+1}, \quad \frac{dy_2}{dx} = z_{n+2}, \dots, \quad \frac{dy_n}{dx} = z_{2n},$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = z_{2n+1}, \quad \frac{d^2 y_2}{dx^2} = z_{2n+2}, \dots, \quad \frac{d^2 y_n}{dx^2} = z_{3n},$$

. . . .

чији ће број бити mn па се систем (338) своди на систем првога реда састављен из mn једначина облика

$$\frac{dz_k}{dx} = z_{n+k},$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{dz_{(m-1)n+k}}{dx} = f_k(x, z_1, z_2, \dots, z_{mn}).$$

Напослетку, нека је примећено и то, да се, како у систему првога реда, тако и у систему вишега реда, *увек може учинити да систем не садржи независно променљиву количину* по којој се врши интеграција. Довољно је, поред уведених нових непознатих функција, увести још једну u, дефинисану једначином $u = x$, што у дати систем уводи још једну нову једначину, а та је

$$\frac{du}{dx} = 1$$

што број једначина повећава за јединицу. То је од интереса у извесним питањима у теорији симултаних једначина.

II

Општи интеграл диференцијалне једначине p-тога реда

$$y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}) \tag{339}$$

је њен интеграл који за произвољну вредност $x = x_0$ добија такође произвољну вредност $y = y_0$, а његових $p-1$ узастопних извода $y', y'', \dots, y^{(p-1)}$ добијају произвољне вредности $y_0', y_0'', \dots, y_0^{(p-1)}$. Он је изражен једном једначином

$$F(x, y, x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(p-1)}) = 0 \tag{340}$$

где је F функција $p+3$ промењљивих $x, y, x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(p-1)}$. Вредности

$$x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(p-1)} \tag{341}$$

којих има $p+1$, играју улоге интеграционих констаната које се увек могу сменити скупом од p произвољних констаната, на начин сличан ономе који је наведен раније за диференцијалне једначине првога реда.

Кад је функција F холоморфна за вредности (341), општи интеграл се може изразити у облику реда

$$(342) \qquad y = A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+A_3(x-x_0)^3+\ldots$$

где су коефицијенти A_n одређене функције променљивих (341).

Један произвољно узет ред (342) може, али не мора бити општи интеграл какве једначине (339). Могу се, дакле, поставити питања:

1° *Какве потребне и довољне услове треба да испуне коефицијенти* A_n *реда* (342), *па да тај ред представља општи интеграл какве диференцијалне једначине* (339)?

2° *У случајевима кад су ти услови испуњени, наћи диференцијалну једначину* (339) *за коју уочени ред представља општи интеграл.*

Нека је (339) једначина чији је општи интеграл (342). Тада је

$$(343) \qquad \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{1!}[y'] = \frac{y_0'}{1!}, \quad A_2 = \frac{1}{2!}[y''] = \frac{y_0''}{2!}, \ldots, \\ A_p &= \frac{1}{p!}[y^{(p)}] = \frac{1}{p!} f(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)}) \end{aligned}$$

где у овој прилици знак $[\varphi]$ означава вредност коју добија функција φ променљивих $x, y, y', y'', \ldots$ кад се у њој те променљиве смене вредностима (341).

Као што је у претходном параграфу речено, ако се формира низ функција $f_1, f_2, f_3, \ldots$ променљивих $x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}$ а по рекурсивном обрасцу

$$(344) \qquad f_k = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y^{(p-1)}} f,$$

где је почетна функција

$$f_0 = f(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}),$$

n-ти извод функције y по x биће f_{n-1}, и према томе је

$$(345) \qquad A_n = \frac{1}{n!}[f_{n-1}].$$

Кад се у једначини (344) променљиве $x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}$ смене вредностима (341) и има се у виду да је

$$[y'] = 1!A_1, \qquad [y''] = 2!A_2, \quad \ldots$$

$$[f_n] = (n+1)!A_{n+1}, \quad [f_{n-1}] = n!A_n, \quad \ldots$$

$$\left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}\right] = n!\frac{\partial A_n}{\partial x_0}, \qquad \left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\right] = n!\frac{\partial A_n}{\partial y_0}, \quad \ldots$$

деобом добијене једначине са $n!$ добија се

$$(n+1)A_{n+1} = \frac{\partial A_n}{\partial x_0} + 1!A_1\frac{\partial A_n}{\partial y_0} + 2!A_2\frac{\partial A_n}{\partial y_0'} + \ldots$$

$$\ldots + (p-1)!A_{p-1}\frac{\partial A_n}{\partial y^{(p-2)}} + p!A_p\frac{\partial A_n}{\partial y^{(p-1)}}.$$

Решивши једначину по A_p налази се да израз

$$\Delta = \frac{(n+1)A_{n+1} - \dfrac{\partial A_n}{\partial x_0} - 1!A_1\dfrac{\partial A_n}{\partial y_0} - 2!A_2\dfrac{\partial A_n}{\partial y'} - \ldots - (p-1)!A_{p-1}\dfrac{\partial A_n}{\partial y^{(p-2)}}}{p!\dfrac{\partial A_n}{\partial y^{(p-1)}}}$$

има за вредност

$$A_p = \frac{1}{p!}[f] = \frac{1}{p!}f(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)})$$

А пошто је у исто време и

$$A_p = \frac{1}{p!}\left[\frac{d^p y}{dx^p}\right] = \frac{1}{p!}[y^{(p)}] = \frac{y_0^{(p)}}{p!} = \frac{1}{p!}\frac{d^p y_0}{dx_0^p}$$

јер је, по дефиницији, $y_0^{(k)}$ вредност коју добија k-ти извод функције y кад се у овој стави да је $x = x_0$, то се налази да су промењиве (341) међу собом везане диференцијалном једначином

$$\frac{d^p y_0}{dx_0^p} = f(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)}).$$

На тај је начин добијено решење постављених питања у облику ова два става:

1. **став**. *Да би ред* (342), *где су коефицијенти* A_n *дате функције произвољних констаната* $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)}$, *представљао општи интеграл диференцијалне једначине* p-*тога реда* (338), *потребно је и довољно да израз* Δ *има једну исту вредност за све вредности индекса* n *веће од нуле.*

А кад је тај услов испуњен, решење другога од постављених питања дато је овим ставом:

2. **став**. *Диференцијална једначина, чији је ойшйи инйеграл йада изражен редом* (342), *добија се кад се у коефицијенйу* A_p *смене* $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p-1)}$ *вредносйима* $x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}$, *йа се резулйай изједначи са* $y^{(p)}$.

Као што се види, да ли ће дати ред (342) бити или не општи интеграл какве једначине p-тога реда (339), зависи искључиво од тога *да ли ће његови коефицијенйи* A_n *имайи за инваријанйу израз* Δ. А кад је то случај, диференцијална једначина добија се из израза саме те инваријанте.

III

Завршујући овај одељак, подсетићемо на једну основну разлику што постоји између алгебарских диференцијалних једначина првога реда и једначина вишега реда, у погледу сингуларитета њихових интеграла.

За једну се диференцијалну једначину

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

каже да је *алгебарска*, кад је F алгебарска функција променљивих $y, y', y'', \ldots$, и онда се једначина увек може написати у таквом облику да је F полином по тим променљивим, са коефицијентима који могу бити ма какве функције променљиве x, алгебарске или трансцендентне (понекад се тражи да су и те функције алгебарске; диференцијална једначина је тада алгебарска у ужем смислу).

За алгебарске диференцијалне једначине првога реда полови и алгебарске критичке тачке (алгебарски сингуларитети) могу бити *сйални* или *йокрейни*, тј. могу бити исти за све партикуларне интеграле једначине, или се мењати од једног партикуларног интеграла до другог. У првоме случају они се не мењају са интеграционом константом у изразу општега интеграла; у другом случају они се мењају са том константом.

Тако нпр. једначина

$$(1+x)y' + y = 0$$

има за општи интеграл

$$y = \frac{C}{x+1}$$

па дакле њени интеграли имају сталан пол првога реда $x = -1$.

Једначина

$$x^3y' + y^2 - 3x^2y = 0$$

има за општи интеграл

$$y = \frac{x^3}{x + C}$$

па дакле њени интеграли имају покретан пол првога реда $x = -C$.

Једначина

$$2xy' - y = 0$$

има за општи интеграл

$$y = C\sqrt{x};$$

њени интеграли имају сталну алгебарску критичку тачку другога реда $x = 0$.

Једначина

$$2xyy' - 2y^2 - x^3 = 0$$

има за општи интеграл

$$y = x\sqrt{x + C}$$

па њени интеграли имају покретну алгебарску критичку тачку другога реда $x = -C$.

За једначину

$$xy' + a = 0$$

је општи интеграл

$$y = C - a \log x$$

па јој интеграли имају сталну критичку логаритамску тачку $x = 0$.

За једначину

$$x^2y' + ay = 0$$

општи је интеграл

$$y = Ce^{\frac{a}{x}}$$

и сви њени интеграли имају сталну есенцијалну тачку $x = 0$.

Painlevé је доказао *да никаква алгебарска диференцијална једначина* првога реда

(346) $$F(x, y, y') = 0$$

не може имати покретних трансцендентних сингуларитета (нпр. покретних логаритамских критичких тачака, или есенцијалних сингуларитета). Кад год интеграл има покретних сингуларитета, *ти сингуларитети могу бити само или полови, или алгебарске критичке тачке.*

Painlevé-ова теорема важи само за алгебарске, али не важи и за трансцендентне диференцијалне једначине првога реда, тј. оне које се не могу написати у облику (346) где би F био полином по x и y. Такве једначине могу (премда не морају) имати и покретних трансцендентних сингуларитета (логаритамских или есенцијалних). Тако на пример:

Трансцендентна диференцијална једначина

$$y' - e^{-y} = 0$$

има за општи интеграл

$$y = \log(x + C)$$

па јој интеграли имају покретну логаритамску критичку тачку $x = -C$.

Трансцендентна једначина

$$y' + y(\log y)^2 = 0$$

има за општи интеграл

$$y = e^{\frac{1}{x+C}}$$

и интеграли јој имају као покретну есенцијалну тачку $x = -C$.

Али, и у томе лежи једна основна разлика између алгебарских диференцијалних једначина првога реда и оних вишега реда, Painlevé-ова теорема не важи за једначине вишега реда. *Једначина вишега реда*

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

где је F *алгебарска функција променљивих* y, y′, y″,… *може имати као покретне и трансцендентне интегралне сингуларитете.*

Да то одиста може бити, види се из оваквих примера:

Једначина другога реда

$$y'' + y'^2 = 0$$

има за општи интеграл

$$y = C_1 + \log(x + C_2)$$

па јој интеграли имају покретну логаритамску критичку тачку $x = -C_2$.

Израз

$$y = C_1 e^{\frac{1}{x+C_2}}$$

је општи интеграл једне алгебарске једначине другога реда, коју је лако формирати логаритмисањем и диференцијaљењем два пута узастопце; интеграли те једначине имају покретну есенцијалну тачку $x = -C_2$.

То су чињенице које треба имати на уму кад се тражи да се интеграл дате диференцијалне једначине или система симултаних једначина (који се, као што се зна, може свести и на обичне диференцијалне једначине) развије у ред. Јер као што је познато из опште теорије аналитичких функција, облик реда у који се може развити једна функција у близини једне дате тачке x_0, битно зависи од природе те тачке у погледу на ту функцију. Ставови изложени у овоме што претходи, дају облик интегралног реда дате једначине, а из тога облика се може сазнати и природа тачке x_0 као обичне тачке или сингуларитета за интеграл.

20. ИНТЕГРАЦИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА И СИСТЕМА ЗА МА КАКВЕ КОНАЧНЕ ПОЧЕТНЕ ВРЕДНОСТИ ПРОМЕНЉИВИХ

У одељцима што претходе показано је како се извршује интеграција диференцијалних једначина и система у облику редова, кад се тражи да интеграл за $x = 0$ има вредност нулу, као и то да узастопни изводи

$$y', y'', y''', \dots$$

до извода датога ранга, буду сви једнаки нули за $x = 0$. То су тзв. *почетни услови* који су у досадашњем излагању били везани за *почетне вредности променљивих*

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0, \quad y'' = 0, \dots$$

У случајевима кад је интеграл реалан, тај услов значи геометријски да интегрална крива пролази кроз координатни почетак у равни xOy и да у њему има додир $(m-1)$-ог реда са апсцисном осовином, где m означава ред диференцијалне једначине.

Међутим, такви почетни услови могу бити и општији, или друге какве врсте. Може се, на пример, тражити да интеграл за дату почетну вредност $x = x_0$ променљиве x има као своју почетну вредност $y = y_0$, а да тако исто почетне вредности извода за $x = x_0$ буду

$$y' = y_0', \quad y'' = y_0'', \quad y''' = y_0''', \dots, y^{(m-1)} = y_0^{(m-1)}$$

где су $y_0, y_0', y_0'', y_0''', \dots$ унапред дате вредности.

Кад је интеграл реалан, као и све дате вредности $x_0, y_0, y_0', y_0'', y_0''', \dots, y^{(m-1)}$, тај услов геометријски значи да интегрална крива линија пролази кроз дату тачку (x_0, y_0) у равни xOy и да у њој има додир $(m-1)$-ог реда са извесном параболом $(m-1)$-ог степена.

Задатак се решава ставивши да је

$$
\begin{aligned}
&x = x_0 + t \\
&y = P(x) + u(x - x_0)
\end{aligned}
\tag{347}
$$

где је t нова независно променљива количина, u нова непозната функција, а P полином $(m-1)$ степена по x.

Ако се стави да је

$$
P(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_{m-1} x^{m-1}
\tag{348}
$$

а тражи се интеграл једначине такав, да за $x = x_0$ он и његови узастопни изводи до $(m-1)$-ог закључно добијају дате вредности

$$
y = y_0, \quad y' = y'_0, \ldots, y^{(m-1)} = y_0^{(m-1)}
\tag{349}
$$

коефицијенти $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{m-1}$ израчунавају се из m условних једначина

$$
\begin{aligned}
y_0 &= P(x_0) + u(0), \\
y'_0 &= P'(x_0) + u'(0), \\
y''_0 &= P''(x_0) + u''(0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_0^{(m-1)} &= P^{(m-1)}(x_0) + u^{(m-1)}(0).
\end{aligned}
\tag{350}
$$

Ако се дакле полином $P(x)$ изабере тако да буде

$$
\begin{aligned}
P(x_0) &= y_0, \\
P'(x_0) &= y'_0, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
P^{(m-1)}(x_0) &= y_0^{(m-1)}
\end{aligned}
\tag{351}
$$

па се са тако изабраним полиномом на датој диференцијалној једначини изврши смена

$$
\begin{aligned}
y &= P(x) + u(x - x_0), \\
y' &= P'(x) + u'(x - x_0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(m-1)} &= P^{(m-1)}(x) + u^{(m-1)}(x - x_0)
\end{aligned}
\tag{352}
$$

једначина ће бити трансформисана у нову дифернцијалну једначину

$$
\Phi(t, u, u', u'', \ldots u^{(m)}) = 0.
\tag{353}
$$

Пошто су тада испуњени услови (351), интеграл u треба, према условнм једначинама (350) да је такав, да за $x = x_0$ он и његови узастопни изводи до $(m-1)$-ог закључно добијају вредности

$$(354) \qquad u = 0, u' = 0, \ldots u^{(m-1)} = 0.$$

Али, кад је $x = x_0$, онда је $t = 0$, што значи да после извршене смене

$$x = x_0 + t$$

интеграл једначине (353) треба да за $t = 0$ испуни услове (354). А тражење таквог интеграла је задатак који је био предмет свега досадашњег излагања.

Пошто је

$$P^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{m-k-1} \frac{(n+k)!}{n!} h_{n+k} x^n,$$

то условне једначине (351), написане у обрнутом реду, у своме развијеном облику су

$$(m-1)!\,h_{m-1} = y_0^{(m-1)},$$

$$(m-2)!\,h_{m-2} + \frac{(m-1)!}{1!} h_{m-1} x_0 = y_0^{(m-2)},$$

$$(m-3)!\,h_{m-3} + \frac{(m-2)!}{1!} h_{m-2} x_0 + \frac{(m-1)!}{2!} h_{m-1} x_0 = y_0^{(m-3)},$$

$$(m-4)!\,h_{m-4} + \frac{(m-3)!}{1!} h_{m-3} x_0 + \frac{(m-2)!}{2!} h_{m-2} x_0 + \frac{(m-1)!}{3!} h_{m-1} x_0 = y_0^{(m-4)},$$

. . . .

Из прве једначине добија се непосредно коефицијенат h_{m-1}; заменом у другој, добија се једначина која даје коефицијенат h_{m-2}; заменом оба нађена коефицијента у трећој, добија се једначина која даје коефицијенат h_{m-3} и продужујући тако, имаће се редом сви коефицијенти полинома $P(x)$. Сменом (347) свешће се тада задатак на онај кад су почетне вредности непознате функције и њених $(m-1)$ узастопних извода све једнаке нули.

Кад буде одређен, у облику реда, интеграл

$$u(x - x_0) = u(t)$$

нове трансформисане једначине, који за $t = 0$ добија вредности (354), ставивши у њој да је

$$t = x - x_0, \quad u(t) = u(x - x_0),$$

добија се интеграл

$$y = P(x) + u(x - x_0)$$

дате диференцијалне једначине, који ће испуњавати дате почетне услове.

Почетни услови могу бити и какве друге врсте, на пример

1° да интегрална крива пролази кроз дати скуп тачака;

2° или да она пролази кроз одређени број датих тачака и да у свакој од њих има додир одређеног реда са датом кривом линијом.

У случају нпр. једначине другога реда

$$f(x, y, y', y'') = 0 \tag{355}$$

може се тражити да интегрална крива пролази кроз дату тачку (x_0, y_0) и да ту њена тангента има дати коефицијенат правца α. Тада једначина

$$f(x_0, y_0, \alpha, y_0'') = 0 \tag{356}$$

одређује други извод y_0'' на тој кривој у тачки (x_0, y_0).

Кад се изврши смена (347) и за полином P узме се линеарна функција

$$P(x) = ax + b,$$

условне једначине (351) за тај полином су

$$P(x_0) = ax_0 + b = y_0, \quad P'(x_0) = a = \alpha,$$

одакле се налази

$$a = \alpha, \quad b = y_0 - \alpha x_0,$$

тако да P треба да буде

$$P(x) = (x - x_0)\alpha + y_0.$$

Кад се у једначини (355) буде извршила смена

$$x = x_0 + t, \quad y = P(x) + u(x) \tag{357}$$

где x и y добију вредности x_0 и y_0, тако да извод y' добије задату вредност α, биће $t = 0$, а за ту вредност променљиве t функција $u(x)$ ће добити вредност $u(x_0)$, која ће према другој једначини (357) бити једнака нули. Задатак је, дакле, сведен на ранији случај кад су почетне вредности независно променљиве количине и непознате функције једнаке нули.

У случају једначине трећег реда

$$f(x, y, y', y'', y''') = 0 \tag{358}$$

може се нпр. тражити да интегрална крива пролази кроз дату тачку (x_0, y_0) и да у овој изводи y' и y'' имају дате вредности β и α. Тада једначина

$$f(x_0, y_0, \beta, \alpha, y_0''') = 0$$

решена по y''', одређује вредност коју ће имати извод y''' у тачки (x_0, y_0).

Кад се изврши смена (347), па се за полином P узме полином другога степена

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

условне једначине за тај полином су

$$P(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = y_0,$$

$$P'(x_0) = 2ax_0 + b = \beta,$$

$$P''(x_0) = 2a = \alpha.$$

Из њих се налази да треба да је

$$a = \frac{\alpha}{2}, \quad b = \beta - \alpha x_0, \quad c = y_0 - \beta x_0 + \frac{\alpha^2}{2} x_0,$$

тако да P буде полином

$$P(x) = \frac{\alpha}{2} x^2 + (\beta - \alpha x_0) x + \left(y_0 - \beta x_0 + \frac{\alpha}{2} x_0^2 \right).$$

Из тога се добија да је

$$P'(x) = \alpha x + (\beta - \alpha x_0)$$

па кад се у једначини (358) буде извршила смена (347) онда, кад x и y добију вредности x_0 и y_0, тако да извод y' добије вредност β, а да други извод y'' добије вредност α,

1° функција $u(x)$ ће добити вредност $u(x_0)$ која ће, према једначини

$$y = P(x) + u(x)$$

бити једнака нули;

2° извод $u'(x)$ ће према једначини

$$y' = P'(x) + u'(x)$$

добити вредност

$$y_0' - P'(x) = y_0' - \beta = 0.$$

Задатак је опет сведен на ранији случај кад су почетне вредности промељиве t и непознате функције u једнаке нули.

Уочимо још, као пример сличне врсте, задатак у коме се тражи да интегрална крива једначине трећег реда (358) пролази кроз дату тачку

(x_0, y_0) и да у њој има тангенту с датим коефицијентом правца β и једну дату кривину δ. Ако се тада стави да је у тачки (x_0, y_0)

$$y_0' = \beta, \quad y_0'' = \alpha,$$

пошто кривина у тачки (x, y) има за израз

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

за одредбу вредности α имаће се једначина

$$(1+\beta^2)^{\frac{3}{2}}\delta - \alpha = 0. \tag{359}$$

Кад се израчуна α имаће се као почетни услов

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = \beta, \quad y'' = \alpha,$$

па се сменом (347) проблем своди на онај кад су почетни услови

$$t = 0, \quad u = 0, \quad u' = 0$$

и решава се на показани начин, одредбом полинома $P(x)$ који испуњава услове задатка.

Сваком ће пару решења једначина (359) одговарати по једно решење проблема интеграције.

ПЕТИ ОДЕЉАК

СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАЈЕВИ И ОСОБИНЕ ИНТЕГРАЛА

21. ИНТЕГРАЛ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА ИЗРАЖЕН КАО ПОЗНАТА ФУНКЦИЈА РЕДА ОДРЕЂЕНОГ ОБЛИКА

Постоји мноштво случајева кад се интеграл алгебарске диференцијалне једначине првога реда

$$f(x, y, y') = 0 \tag{360}$$

изрази у облику *алгебарске* функције каквога реда познатог облика, добијеног на начин изложен у ранијим одељцима кад функција f испуњава нарочите, за то потребне услове.

Уочимо један од таквих општијих случајева. Сматрајмо у једначини (360) реалне променљиве y и y' као апсцису и ординату једне тачке $M(y, y')$ у равни yOy', па ће једначина (360) представљати у тој равни једну класу алгебарских кривих линија C, у којој променљива x игра улогу параметра по коме се једна крива те класе разликује од друге, исте класе.

Постоји увек могућност да се однос између y и y', дат једначином (360), изрази у облику двеју параметарских једначина

$$y = \varphi(x, t), \tag{361}$$

$$y' = \psi(x, t), \tag{362}$$

таквих, да кад се из (361) и (362) елиминише параметар t, добија се једначина (360). Из тих се једначина тада добија да је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dx} = \psi(x, t) \tag{363}$$

одакле је

$$\frac{dt}{dx} = f_1(x, t) \tag{364}$$

где је

$$f_1 = \frac{\psi - \dfrac{d\varphi}{dx}}{\dfrac{d\varphi}{dt}}. \tag{365}$$

На диференцијалну једначину првог реда (364), где је независно промењива количина x, а непозната функција t, може се тада применити све што је напред изложено о интегралу једначине израженом у облику реда. Ако се за једначину (360) тражи интеграл y, који за дату вредност $x = x_0$ добија дату вредност $y = y_0$, онда су почетни услови за једначину (364)

$$x = x_0 \quad t = \text{корен једначине } \varphi(x_0, \alpha) = 0$$

решене по α. У случају кад је ова једначина идентички задовољена за ма какво α, може се за α узети каква се хоће произвољна вредност.

Ако је α један корен једначине (а са сваким њеним кореном треба учинити ово што ће се урадити са овим уоченим), смена

$$t = z + \alpha$$

своди почетне услове трансформисане једначине

$$\frac{dz}{dx} = f_1(x, z + \alpha) = f_2(x, z) \tag{366}$$

на $x = 0$, $z = 0$, па се проблем одредбе интеграла z у облику реда решава на напред изложене начине, према томе да ли је за $x = 0$, $z = 0$ функција $f_2(x, z)$ холоморфна, или добија бескрајно велику вредност, или се јавља у неодређеном облику $\dfrac{0}{0}$, или има алгебарских критичких или трансцендентних сингуларитета.

У случају кад је та функција холоморфна за $x = 0$, $z = 0$, интеграл се може, по теореми Briot-Bouquet-а развити у Maclaurin-ов ред

$$z = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

који ће бити конвергентан у кругу описаном око тачке $x = 0$ у равни x, са полупречником R одређеним том теоремом.

Непозната функција t биће тада изражена у облику реда

$$t = \alpha + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{367}$$

па кад се то смени у једначини (361), *имаће се интеграл једначине* (360) *изражен у облику једне познате алгебарске функције* φ *променљиве* x *и реда* (367).

У случају кад функција $f_2(x, z)$ добија за $x = 0, z = 0$ бескрајно велику вредност, али нема алгебарских критичких или трансцендентних снгуларитета, интеграл z развиће се у ред облика

$$z = a_1\sqrt[m]{x} + a_2(\sqrt[m]{x})^2 + a_3(\sqrt[m]{x})^3 + \ldots$$

а непозната t у облику

$$t = \alpha + z.$$

Тако би се исто и у осталим побројаним случајевима одредио облик реда за интеграл z, из чега би се имао и ред за интеграл t, па би се његовом заменом у једначини (361) *имао интеграл* у *једначине* (361) *опет као алгебарска функција променљиве* x *и тога реда.*

Један општи случај за који је познат начин изражавања променљивих y и y' у облику параметарских једначина (361) и (362), је тај кад криве C састављају једну класу *уникурсалних кривих линија.* Под таквим кривим линијама разумеју се оне криве за које се координате x и y могу изразити као *рационалне функције* једнога параметра t. Њихова је општа теорија разрађена у аналитичкој геометрији; овде ће се само подсетити на неколике одлике таквих кривих линија, које служе за њихово распознавање.

Свака алгебарска крива m-*тог степена, која има једну вишеструку тачку* (m – 1)-*ог реда, уникурсална је.*

Јер, као што је познато из аналитичке геометрије, кад се вишеструка тачка пренесе у координатни почетак, једначина криве добија облик

$$\varphi_{m-1}(x, y) + \varphi_m(x, y) = 0$$

где φ_{m-1} и φ_m означују хомогене полиноме по x и y који су $(m-1)$-ог, односно m-тог степена. Променљива права

$$y = tx$$

што пролази кроз координатни почетак, обрћући се око почетка променом параметра t, сече криву у $m - 1$ тачака које се поклапају са почетком, и још у једној покретној тачки чије су координате изражене једначинама

$$x = -\frac{\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)},$$
$$(368) \qquad y = -\frac{t\,\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)},$$

из чега се види да је крива уникурсална.

Тако су уникурсалне криве и

1° *све криве другога степена* ($m = 2$);

2° *све криве трећега степена* ($m = 3$) *са једном двоструком или повратном тачком*, као што су нпр. цисоида и строфоида;

3° *све криве четвртог степена* ($m = 4$) *са једном троструком тачком, или са три двоструке или повратне тачке*;

4° *све криве* m-*тог степена са*

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} \tag{369}$$

двоструких или повратних тачака.

Као што се зна из аналитичке геометрије, број (369) је у исто време и највећи могућни број таквих тачака које може имати једна крива m-тог степена, а да се не разложи на више кривих нижега степена од m.

За криве другога степена, што пролазе кроз координатни почетак и чија је општа једначина

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0$$

параметарске једначине (368) су

$$x = -\frac{D + Et}{A + Bt + Ct^2}, \quad y = -\frac{Dt + Et^2}{A + Bt + Ct^2}.$$

За криве трећега степена под 2° (што пролазе кроз почетак), а чија је општа једначина

$$Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + Gy^3 + Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0,$$

$$x = -\frac{A + Bt + Ct^2}{D + Et + Ft^2 + Gt^3}, \quad y = -\frac{At + Bt^2 + Ct^3}{D + Et + Ft^2 + Gt^3}.$$

Кад је дата алгебарска диференцијална једначина (360) и претворена у параметарске једначине (361) и (362), наместо сталних коефицијената у њима, као у случају алгебарских кривих линија, фигурисаће коефицијенти који ће бити функције независно промењиве количине x као параметра.

Тако нпр. за једначину

$$y'^2 + y^2 + xy = 0$$

параметарске једначине су

$$y = \varphi(x, t) = -\frac{x}{1+t^2},$$

$$y' = \psi(x, t) = -\frac{xt}{1+t^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{1+t^2}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{2xt}{(1+t^2)^2},$$

па је одговарајућа диференцијална једначина (364)

$$\frac{dt}{dx} = \frac{(1+t^2)(1-xt)}{2xt}.$$

Нека је, напослетку, поменуто и то да се параметарске једначине за једну дату диференцијалну једначину (360) могу каткад лакше добити у облику једначина трансцендентних по параметру t, али са којима је ипак лако рачунати. Само што ће се у таквим случајевима добити интеграл *y не као алгебарска, већ као трансцендентна функција* добијенога реда. Пример за то даје диференцијална једначина

$$y'^2 + y^2 - f(x) = 0$$

за чије се параметарске једначине могу узети

$$(370) \qquad y = \sqrt{f(x)}\sin t, \qquad y' = \sqrt{f(x)}\cos t,$$

пошто се њиховим квадрирањем и сабирањем добија једначина (370). Из њих се добија за t диференцијална једначина

$$(371) \qquad \frac{dt}{dx} = 1 - \frac{1}{2}\frac{f'(x)}{f(x)}\operatorname{tg} t.$$

Кад је функција $f(x)$ холоморфна и различна од нуле за $x = 0$, та једначина даје за интеграл, који за $x = 0$ добија вредност $t = 0$ један конвергентан ред уређен по степенима променљиве x, па ће се интеграл y, што за $x = 0$ добија вредност $y = 0$ добити у облику

$$y = \sqrt{f(x)}\sin t,$$

где t треба сменити тако добијеним редом.

Нека је поменуто да се једначина (371) подесном сменом независно променљиве количине x и непознате функције t своди на једначину облика

$$\frac{du}{d\xi} = F(\xi) + u^3$$

чији се интеграл u може развити у Taylor-ов или Maclaurin-ов ред, према датим почетним условима и аналитичкој природи функције $F(\xi)$.

22. АРИТМЕТИЧКЕ ОСОБИНЕ КОЕФИЦИЈЕНТА a_n ИНТЕГРАЛНОГ РЕДА

I

Коефицијенти a_n редова

(372) $$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

у облику којих се изражавају интеграли диференцијалних једначина или система, имају и својих *аритметичких особина*, које су од толико већег интереса што произлазе из чињеница *аналитичке* природе, везаних за диференцијалне једначине, а са којима би изгледало да оне не могу стајати ни у каквој вези. Међутим таквих веза између аритметичких и аналитичких чињеница одиста има и неке од њих су истакнуте на видик у ставовима који су предмет овога одељка.

Пре свега, поједине од таквих чињеница запажају се већ на први поглед на самој диференцијалној једначини, кад се води рачуна о начину израчунавања коефицијента a_n из саме једначине.

Тако, пођимо од чињенице да се за интеграл једначине p-тог реда

(373) $$y^{(p)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)})$$

који испуњава почетне услове

(374) $$x = 0, \quad y = 0, y' = 0, \ldots, y^{(p-1)} = 0$$

општи коефицијенат a_n израчунава по обрасцу

(375) $$a_n = \frac{1}{n!}[f_{n-p}] \qquad (n = p, p+1, p+2, \ldots)$$

где је

(376) $$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

низ функција које се изводе једна из друге по рекурсивном обрасцу

$$f_k = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y^{(p-1)}} f \qquad (k = p+1, p+2, p+3, \ldots)$$

са почетном функцијом

$$(377) \qquad f_0 = f(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}).$$

Уочимо случај кад је функција f *полином* по свима променљивима

$$(378) \qquad x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}.$$

које садржи. Према самоме начину формирања низа (376) очевидно је да ће свака од функција f_k бити полином по променљивим (378), и да ће сваки коефицијенат b таквога полинома бити један број који се из коефицијената a самога полинома f добија сабирањима и множењима међу собом и са сталним целим бројевима што проистичу од изложилаца променљивих (378) при узастопним диференцијаљењима. Осим тога, после n диференцијаљења број n се увек појављује само или као сабирак, или као чинилац у облику бројева

$$(379) \qquad n, \quad n-1, \quad n-2, \ldots$$

или као изложилац било каквог сталног броја, било једнога броја који је опет састављен из сабирака и чинилаца облика (379).

Из начина формирања низа (376) тада се види да ће број $[f_n]$ бити састављен из сабирака од којих је сваки једнак производу разних коефицијената a, чинилаца (379) и чинилаца облика λ^n, где је λ или какав сталан број, или опет број састављен из чинилаца облика (379). А таква структура истиче на видик ове чињенице:

I. *Коефицијенат* a_n *интегралног реда једначине (373) не може садржати у своме саставу никакве ирационалне бројеве који не улазе у састав самих коефицијената* a.

Кад a_n садржи ма један од таквих бројева, може се тврдити да функција y, дефинисана редом (372), не може бити интеграл никакве једначине (373), у којој је функција f полином по (378) који не садржи такве ирационалности.

Тако, на пример, ред (372) у коме би ма и један коефицијенат садржао $\sqrt{2}$ на непарном степену, или $\log 3$, може само тако бити интеграл какве једначине (373) ако који од њених коефицијената a садржи те ирационалности.

II. *Коефицијенат* a_n *не може садржати у своме саставу никакву функцију индекса* n *која није* $1°$ *или производ чинилаца који су стални,* *од n независни бројеви, или су облика* (379), *или облика* λ^n (*где је* λ *од* n *независан број*); 2° *или збир ограниченога броја таквих сабирака, а који број може и расти са бројем* n.

Кад a_n није таквог облика, може се такође тврдити да функција y дефинисана редом (372) није интеграл никакве једначине (373). Такав је нпр. случај кад a_n садржи експлицитно функцију

$$\sqrt{a+bn} \quad \text{или} \quad \log(a+bn)$$

или кад n фигурише у имениоцу коефицијента a_n на други који начин, а не као производ ограниченог броја целих бројева мањих од n (пошто се a_n добија из броја $[f_{n-p}]$ деобом са $n!$).

III. *Кад су коефицијенти полинома* f *цели бројеви, производ* $n!a_n$ *је за све вредности индекса* n *цео број.*

Кад је ма један од тих производа рационалан разломак или ирационалан број, ред y не може бити интеграл никакве једначине (373) такве врсте. Тако нпр. он тада не може бити интеграл никакве линеарне једначине

$$y^{(p)} + p_1(x)y^{(p-1)} + \ldots + p_{p-1}(x)y' + p_p(x)y = 0$$

где су $p_1, p_2, p_3, \ldots$ полиноми по x чији су коефицијенти цели бројеви.

Такав је исти случај и кад је a_n ирационалан број чији је именилац дељив са каквим простим бројем већим од n.

II

Посматрајмо сад општу диференцијалну једначину коначнога реда p, алгебарску по променљивима (378), написану у облику

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0 \tag{380}$$

где је f полином по променљивима $x, y, y', \ldots$ које садржи.

Овде ће бити изложен један начин одредбе коефицијената интегралног реда, различан од онога раније приказаног, а из кога се боље може сагледати алгебарска структура тих коефицијената.

Елиминишући x из двеју једначина

$$f = 0 \quad \text{и} \quad \frac{df}{dx} = 0$$

добија се једначина

$$Q(y, y', y'', \dots, y^{(p+1)}) = 0 \tag{381}$$

где је Q полином по промењљивима

$$y, y', y'', \dots, y^{(p+1)}. \tag{382}$$

Свака функција y, која задовољава једначину (380), задовољава у исти мах и једначину (381).

Нека је сад:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{383}$$

један Maclaurin-ов ред, који задовољава какву једначину облика (380), па потражимо општи облик коефицијената a_n таквог једног реда, као функције коефицијената $a_0, a_1, a_2, \dots$ што му претходе.

Познато је да су коефицијенти:

$$A_0^0, A_1^0, A_2^0, \dots$$

реда:

$$y^p = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^p = A_0^0 + A_1^0 x + A_2^0 x^2 + \dots \tag{384}$$

одређени системом линеарних једначина:

$$\begin{aligned} &\alpha_{01} a_0 A_1^0 + \alpha_{10} a_1 A_0^0 = 0 \\ &\alpha_{02} a_0 A_2^0 + \alpha_{11} a_1 A_1^0 + \alpha_{20} a_2 A_0^0 = 0 \\ &\alpha_{03} a_0 A_3^0 + \alpha_{12} a_1 A_2^0 + \alpha_{21} a_2 A_1^0 + \alpha_{30} a_3 A_0^0 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{385}$$

где су α_{ik} цели бројеви и то:

$$\alpha_{ik} = k - pi \tag{386}$$

и где је:

$$A_0 = a_0^p. \tag{387}$$

Из тога се лако изводи да кеофицијенат A_n^0 има за израз:

$$A_n^0 = \frac{a_0^{p-n}}{n!} P_n(a_0, a_1, \dots, a_n) \tag{388}$$

где је P_n полином по $a_0, a_1, \dots, a_n$ [и то $(n - k + 1)$-ог степена по a_k за $k > 0$, а $(n - 1)$-ог степена по a_0] са коефицијентима који су сви цели бројеви.

Ако се сад коефицијенат a_k смени са:

$$\frac{(m+k)!}{k!}a_{m+k}$$

који израз представља коефицијенат од x^k у Maclaurin-овом реду што одговара изводу $y^{(m)}$ функције y, налази се да општи коефицијенат A_n^m реда:

$$[y^{(m)}]^q = A_0^m + A_1^m x + A_2^m x^2 + \dots \tag{389}$$

има за израз

$$A_n^m = \frac{a_m^{q-n}}{(m!)^n n!} Q_n^m(a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n}) \tag{390}$$

где је Q_n^m полином по $a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n}$ [чији је степен по a_k број $n+m-k+1$ за $k>m$, а који је степена $n-1$ по a_m] са коефицијентима који су цели бројеви, и где је:

$$A_0^m = (m!a_m)^q. \tag{391}$$

Уочимо сад коефицијенат λ_n производа:

$$[y]^{p_0}[y']^{p_1}[y'']^{p_2}\dots[y^{(m)}]^{p_m} = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots \tag{392}$$

и потражимо његов израз као функцију коефицијената: $a_0, a_1, a_2, \dots$ саме функције y.

Лако се налази да је:

$$\lambda_n = \Sigma A_i^0 A_j^1 \dots A_h^m \tag{393}$$

где је:

$$i+j+\dots+h=n. \tag{394}$$

Али сваки је коефицијенат A_i^s полином првог степена по коефицијенту a_{i+s} који у њему фигурише и који у исто време представља онај међу коефицијентима a_k, садржаним у A_i^s, који је највишега ранга.

У исто време очевидно је да:

1° Између свих коефицијената:

$$A_i^0,\ A_i^1,\ A_i^2, \dots, A_i^m,$$

онај што садржи a_k највишега ранга, јесте коефицијенат A_i^m коме одговара a_{i+m} као a_k највишега ранга.

2° Између свих коефицијената

$$A_0^m, \ A_1^m, \ A_2^m, \dots, A_k^m,$$

онај што садржи a_k највишега ранга, јесте коефицијенат A_h^m, коме одговара a_{h+m} као a_k највишега ранга.

3° Највећа вредност коју може имати h према погодби (394) јесте $h = n$, у коме је случају

$$i = j = \dots = 0.$$

Из тога излази непосредно да је производ:

$$A_i^0 A_j^1 \dots A_h^m \tag{395}$$

полином првога степена по a_{n+m} тако да је за $n > 0$

$$\lambda_n = U_n a_{n+m} + V_n \tag{396}$$

где су U_n и V_n полиноми по

$$a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n+m-1}$$

са коефицијентима рационалним по

$$a_0, a_1, \dots, a_m$$

и где су бројни коефицијенти тих рационалних функција и сами рационални бројеви. Први коефицијенат λ_0 има, у осталом, за израз:

$$\lambda_0 = M a_0^{p_0} a_1^{p_1} \dots a_m^{p_m} \tag{397}$$

где је M извесан цео број.

Уочимо, напослетку, коефицијенат μ_n од x^n у збиру једнога ограниченога броја p чланова облика (392), помножених са сталним бројевима:

$$H_1, H_2, \dots, H_p.$$

Према овоме, што је горе казано, коефицијенат ће μ_n за $n > 0$ бити облика:

$$\mu_n = X_n a_{n+m} + Y_n \tag{398}$$

где су X_n и Y_n полиноми по

$$a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n+m-1}$$

са коефицијентима који су облика

$$\Sigma\alpha_i H_i$$

а где су α_i извесне рационалне функције по

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$$

са бројним коефицијентима који су сви рационални бројеви. Коефицијенат μ_0 има за израз

$$\mu_0 = \Sigma\lambda_0$$

и он је извесан полином по

$$a_0, a_1, \ldots, a_m$$

са коефицијентима који су облика

$$\Sigma M_i H_i$$

где су M_i цели бројеви.

Помоћу ових елемената лако се решава и постављени проблем: одредити општи коефицијенат a_n Maclaurin-овог реда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{399}$$

који задовољава какву диференцијалну једначину алгебарску по x, y и изводима функције y по x.

Пошто се једначина увек може довести на облик:

$$\Phi(y, y', y'', \ldots) = 0 \tag{400}$$

где је Φ збир једнога ограниченог броја p чланова облика

$$H_i y^{p_0} y'^{p_1} \ldots y^{(m)^{p_m}} \tag{401}$$

то ће Maclaurin-ов ред, у који се претвара полином Φ, кад се у њему буде сменило y редом (399) бити:

$$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots \tag{402}$$

где су $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ горе одређивани коефицијенти, тако да је коефицијенат μ_n дат обрасцем (398). Да би ред (399) задовољавао једначину (400) потребно је и довољно да буде: $\mu_n = 0$, па дакле према обрасцу (398)

$$X_n \cdot a_{n+m} + Y_n = 0 \tag{403}$$

одакле је:

$$a_{n+m} = -\frac{Y_n}{X_n}. \tag{404}$$

Отуда овај први резултат:

Кад год какав ред

(405) $$y = \Sigma a_n x^n$$

задовољава какву алгебарску диференцијалну једначину коначнога реда m, *коефицијенат* a_n, *почевши од ранга* n = m + 1, *може се изразити као рационална функција претходних коефицијената*:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$$

и извесног ограниченог броја ирацинaлних количина које не могу бити различне од оних што већ фигуришу у самој датој диференцијалној једначини; осим тога коефицијенти ових ирационалних количина увек су реални цели бројеви.

Ако се сад у обрасцу (404) смењује узастопце n са $n-1$, $n-2$, итд. из низа тако добијених једначина може се a_n израчунати као рационална функција само коефицијената $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ и долази се до овог резултата:

Коефицијенат a_n *је рационална функција количина*

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$$

са коефицијентима који су полиноми по коефицијентима саме диференцијалне једначине, а бројни коефицијенти ових полинома су реални цели бројеви.

Оно, дакле, што се у општем коефицијенту a_n може мењати са индексом n јесу: изложиоци поменутих полинома и цели бројеви што фигуришу у коефицијентима тих полинома. Сви ирационалитети, који би фигурисали у a_n *независни су од* n. Осим тога ти су ирационалитети рационалне комбинације оних ирационалитета што фигуришу у првих $m+n$ коефицијената реда [а који, у осталом могу бити ма какве природе, пошто су ови коефицијенти произвољни] и у коефицијентима $H_1, H_2, H_3, \ldots$ саме диференцијалне једначине.

Отуда овај закључак:

Кад год један ред (405) *задовољава какву алгебарску диференцијалну једначину, његов је општи коефицијенат* a_n *или рационалан број, или рационална функција једнога ограниченога броја ирационалитета који се не мењају са* n; *бројни коефицијенти те рационалне функције сви су реални цели бројеви.*

Тај став истиче на видик *хипер-трансцендентан карактер* непрегледнога мноштва трансцендената дефинисаних редом

(406) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

тј. *немогућност да функција, коју ред представља, буде интеграл какве алгебарске диференцијалне једначине коначног реда.* А та ће немогућност постојати кад год ред не испуњава услове последњег става.

На завршетку ових излагања биће наведена једна општа аритметичко-аналитичка теорема коју је доказао Hurwitz дубљом анализом структуре коефицијента a_n реда (406) који задовољава какву алгебарску диференцијалну једначину

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0. \tag{407}$$

Теорема се односи на редове (406) чији су коефицијенти a_n *рационални* бројеви, и њој се може дати следећи облик:

Кад год ред, пошто му се коефицијенти a_n сведу на најпростији израз, задовољава какву диференцијалну једначину (407), постоји један позитиван цео број λ и један низ позитивних целих бројева

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

са овом особином везаном за коефицијенте a_n реда:

Ако се са $p(z)$ *означи полином* n- *тог степена*

$$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n$$

сваки прост број са којим је дељив који од именилаца коефицијената

$$a_\lambda, a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \ldots$$

садржан је као чинилац у одговарајућем целом броју

$$p(\lambda), \quad p(\lambda)\cdot p(\lambda+1), \quad p(\lambda)\cdot p(\lambda+1)\cdot p(\lambda+2), \ldots$$

а сви су ти цели бројеви различни од нуле.

Теорема доводи и до овога става као своје последице:

Ако се са β_n *означи највећи прост број са којим је дељив именилац коефицијента* a_n, *логаритам броја* β_n *не расте, при рашћењу индекса* n, *брже него* $\log n$.

А тај став доводи такође до закључака о хипер-трансцендентном карактеру непрегледног мноштва редова, тако да они не могу бити интеграли никакве алгебарске диференцијалне једначине. Такав је нпр. случај са целом функцијом променљиве x која је представљена редом

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{(2^2)!} + \frac{x^3}{(3^3)!} + \frac{x^4}{(4^4)!} + \ldots$$

Док раније наведена теорема Pólya доказује хипер-трансцендентан карактер функција једном *чисто аналитичком* особином коефицијента a_n, теорема Hurwitz-а га истиче на видик помоћу једне *аритметичко-аналитичке* особине тога коефицијента.

III

Ставови и чињенице које ће бити предмет параграфа што следује основани су на неколиким *чисто аритметичким или аритметичко-аналитичким помоћним ставовима*, чији се докази налазе у уџбеницима за вишу аритметику или за Алгебарску Анализу. Ти се докази неће излагати, пошто ће ставови овде послужити само као помоћно средство за оно што се мисли доказати. Ставови су ови што следују.

Први помоћни став. *Да би број* $(n-1)!+1$ *био дељив са целим позитивним бројем* n, *потребно је и довољно да* n *буде прост број.*

То је позната у Аритметици Wilson-ова теорема, која се за потребе овога што следује може исказати у овоме облику: ако се означи да је

$$\frac{(n-1)!+1}{n}=\lambda,$$

за сваки прост број n је

$$\lambda = M$$

а за сваки сложен број n је

$$\lambda = M-\frac{1}{n}$$

где је M цео број. Одатле следује као последица

Други помоћни став. *За сваки прост број* n *је*

$$\frac{(n-1)!}{n}=M-\frac{1}{n}$$

а за сваки сложен број, осим за $n=4$, *је*

$$\frac{(n-1)!}{n}=M;$$

за $n=4$ *је*

$$\frac{(n-1)!}{n}=\frac{3}{2}.$$

Тај став налази честе примене у истраживањима аритметичких особина интегралних редова, и он ће овде бити често примењиван.

Трећи помоћни став. *Кад је* n *какав прост број са којим није дељив цео број* a, *израз*

$$\mu = \frac{a^{n-1} - 1}{n}$$

је цео број.

То је Fermat-ов аритметички став о простим бројевима. Он не даје, као Wilson-ов став, потребне и довољне услове да би израз μ био цео број, јер има и сложених бројева n за које је μ цео број. Такви су бројеви јако разређени у природноме низу целих бројева, и они су названи Fermat-овом бројевима; такви ће сложени бројеви, за специјалан случај кад је $a = 2$, овде бити означени са

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

Број c_k је, дакле, ма који сложен број n за који је

$$\mu = \frac{2^{n-1} - 1}{n} = \text{цео број}.$$

По једној Lucas-овој аритметичкој теореми, да би један број n био један број c_k, потребно је да њиме буде дељив не само број $2^{x-1} - 1$, већ и бар још један број $2^z - 1$, где је z какав цео број мањи од $x - 1$. Стога су ти бројеви ретки; најмањи су међу њима бројеви

$$c_1 = 341 = 11 \cdot 31,$$
$$c_2 = 1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17,$$
$$c_3 = 4369 = 17 \cdot 257.$$

Постоје таблице тих бројева које дају све бројеве c_k што леже између 0 и 100,000.000 (таблице Lehmer-а и Polutet-а). Из њих се види да између 0 и 1000 леже 3 таква броја; између 0 и 10,000 има их 22; имеђу 0 и 100.000 има их 79; између 0 и 1,000.000 има их 247; између 0 и 10,000.000 их је 750, а између 0 и 100,000.000 има их свега 2037.

Четврти помоћни став. *Кад год ред*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{408}$$

чији су коефицијенти рационални бројеви, представља какву алгебарску функцију променљиве x, *постоји један сталан, од* n *независан цео број* k *такав да су сви производи*

$$a_n k^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

цели бројеви.

То је Eisenstein-ова теорема која даје потребне услове да би ред (408) представљао алгебарску функцију променљиве x. Она не даје у исти мах и довољне услове за то, јер има и трансцендентних функција које, развијене у ред (408) имају као коефицијенте a_n бројеве за које постоји број k са наведеном аритметичком особином. Таква је нпр. функција $f(x)$ дефинисана елиптичким одређеним интегралом

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-16a^2x^2t^2)}}$$

где је a какав рационалан број $\frac{p}{q}$, која кад се развије у ред (408), има за коефицијенат a_n израз

$$a_{2n}=\binom{2n}{n}^2 a^{2n}=\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{q^{2n}}p^{2n};$$

у томе је случају $k=q$, јер је

$$a_{2n}q^{2n}=(n+1)(n+2)\dots 2n\cdot p^{2n}=\text{цео број},$$

а сви коефицијенти a_{2n+1} су једнаки нули, пошто је $f(x)$ парна функција.

Као пример алгебарске функције за коју важи став, уочимо функцију

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

где је

$$a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}.$$

Тај се коефицијенат може написати у облику

$$a_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\dots 2n}{(2\cdot 4\cdot 6\dots 2n)^2}=\frac{\lambda_n}{2^{2n}}$$

где је

$$\lambda_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Познато је из теорије факторијела да је λ_n увек цео број; он је једнак броју $\binom{2n}{n}$ тј. коефицијенту средњега члана у биномном обрасцу за $(1+x)^{2n}$. Према томе, ако се за k узме $k=4$, израз a_nk^n је одиста цео број.

Из Eisenstein-ове теореме изводи се као последица

Пети помоћни став. *Кад год ред* (408) *представља какву алгебарску функцију променљиве* x, *прости бројеви са којима је дељив именилац* a_n *у ограниченом су броју, не растући бескрајно при бескрајном рашћењу индекса n.*

Јер, пошто је

$$a_n k^n = h_n$$

где је h_n цео број, добија се да је

$$a_n = \frac{h_n}{k^n}$$

што показује да именилац коефицијента a_n не може имати за делитељ ниједан прост број који није делитељ сталног броја k, а ови су делитељи у ограниченом броју и не расту бескрајно при бескрајном рашћењу индекса n.

Тај став истиче на видик трансцендентан карактер мноштва функција дефинисаних редом (408) са рационалним коефицијентима a_n. Тако нпр. редови

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

имају коефицијенте чији су имениоци дељиви са простим бројевима који бескрајно расту са рашћењем ранга коефицијента; они, дакле, не могу представљати алгебарске функције променљиве x. И одиста, први ред представља логаритамску функцију $\log(1+x)$, а други експоненцијалну функцију e^x.

Шести помоћни став. *Кад год се ред* (408) *изражава у коначном облику помоћу елементарних, тј. алгебарских, експоненцијалних и логаритамских функција, највећи прост број, са којим је дељив именилац коефицијента* a_n, *не расте брже но што расте ранг* n *коефицијента.*

Ту је теорему дао без доказа Чебишев, али су сви покушаји да се она или тачно докаже, или нађе да је нетачна, остали безуспешни, премда сва испитивања у томе правцу нагињу томе да је теорема тачна. Она даје могућност да се чисто аритметичким посматрањима истакне на видик несводљивост појединих редова на коначне комбинације елементарних функција. Тако нпр. број n^2+1 је дељив са простим бројевима који расту брже него n; према томе ред (408) чији је општи коефицијенат

$$a_n = \frac{1}{n^2+1}$$

несводљив је на коначне комбинације елементарних функција.

У параграфима што следују ти ће аритметички и аритметичко-аналитички ставови бити примењени на испитивање аритметичких особина коефицијента a_n интегралног реда диференцијалних једначина.

IV

Предмет овога параграфа биће диференцијалне једначине облика

$$f(x, y, y', y'', \ldots) = 0 \tag{409}$$

где је f полином по промењивим $x, y, y', y'', \ldots$ које садржи са коефицијентима који су *рационални бројеви* (и за које се може узети да су *цели бројеви*, пошто се ослобађањем од именилаца увек случај може на то свести).

Уочимо најпре једначину првога реда

$$f(y, y') = 0 \tag{410}$$

која не садржи експлицитно промењиву x. Њен интеграл, који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$, добија се инверзијом Abel-овог интеграла

$$x = \int_0^y Y dy \tag{411}$$

где је Y алгебарска функција промењиве y дефинисана релацијом

$$f\left(y, \frac{1}{Y}\right) = 0. \tag{412}$$

Са претпоставком да та једначина, решена по Y, има један корен Y који је холоморфна функција промењиве y у близини вредности $y = 0$ и који за $x = 0$ добија вредност једнаку каквоме рационалном броју, може се доказати овај став:

Промењива x *дефинисана диференцијалном једначином* (410) *може се развити у ред*

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots \tag{413}$$

где се коефицијенат b_n *добија као коефицијенат степена* x^n *у развитку функције*

$$f(x) = xe^{\frac{x}{k}} \tag{414}$$

(k = *подесно изабран цео позитиван број*) *кад се овај помножи једним рационалним бројем* λ_n; *број* λ_n *је цео број кад је* n *сложен број; кад* λ_n *има свој именилац различан од јединице,* n *је прост број.*

Да би се то доказало, приметимо да пошто је Y функција променљиве y холоморфна за $y = 0$, она се у близини те вредности y може развити у конвергентан ред

$$Y = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots \tag{415}$$

Коефицијенти c_n тога реда биће сви *рационални бројеви*, што се види из овога што следује.

Коефицијенат c_0 је вредност коју добија Y за $y = 0$, и она је, као што је претпостављено, рационалан број. Диференцијаљењем једначине (412) по x добија се

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial Y} Y' = 0$$

одакле се, пошто је

$$y' = \frac{1}{Y}$$

и кад се стави да је

$$-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{1}{Y}}{\dfrac{\partial f}{\partial Y}} = f_0(y, Y), \tag{416}$$

решењем по Y' добија да је

$$Y' = f_0(y, Y).$$

Диференцијаљењем ове једначине по x налази се да је

$$Y'' = \frac{\partial f_0}{\partial y} y' + \frac{\partial f_0}{\partial Y} Y'$$

одакле се, сменивши

$$y' = \frac{1}{Y}, \quad Y' = f_0,$$

добија

$$Y'' = f_1(y, Y)$$

где је

$$f_1 = \frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{1}{Y} + \frac{\partial f_0}{\partial Y} f_0.$$

Поновним диференцијаљењем добија се

$$Y''' = f_2(y, Y)$$

где је

$$f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{1}{Y} + \frac{\partial f_1}{\partial Y} f_0,$$

па ће уопште бити

$$Y^{(n)} = f_{n-1}(y, Y)$$

где је f_{n-1} члан низа функција $f_0, f_1, f_2, \dots$ које се једна из друге израчунавају по рекурсивном обрасцу

$$f_k = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y}\frac{1}{Y} + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial Y} f_0,$$

са почетном функцијом (416).

Коефицијенат c_n израчунава се по обрасцу

$$c_n = \frac{1}{n!}[f_{n-1}]$$

где $[f_{n-1}]$ означава број који се добија кад се у функцији f_{n-1} смени

$$y = 0, \quad Y = c_0.$$

Па пошто су сви коефицијенти функција f_k рационални бројеви, очевидно је да ће тако исто бити и са коефицијентима c_n.

Из обрасца (411) добија се тада да је

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots \tag{417}$$

где је

$$b_n = \frac{c_{n-1}}{n} = \mu_n \frac{c_{n-1}}{(n-1)!}, \quad \mu_n = \frac{(n-1)!}{n}. \tag{418}$$

Са друге стране, пошто ред (415) представља алгебарску функцију променљиве y, а коефицијенти су му рационални бројеви, према четвртом помоћном ставу постојаће један цео позитиван број k такав да је сваки производ

$$c_n k^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

цео број, који ако се означи са M_n биће

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= M_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1}, \\ b_n &= \mu_n M_{n-1} h_{n-1}, \\ h_{n-1} &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Међутим h_{n-1} означава коефицијенат степена y^n у развитку функције (414). А према другом помоћном ставу број μ_n ће бити

1° цео број кад је n ма какав сложен број осим $n = 4$;

2° несводљив рационалан разломак кад је n прост број; може се десити да се именилац тога разломка скрати упоредо са целим бројем M_n, али је сигурно то да кад тај именилац остане различан од јединице, n је прост број и као такав остаће у изразу за μ_n, па дакле и у имениоцу коефицијента c_n.

Тиме је став доказан. А лако се увиђа да ће сличан став важити и за општу једначину (409) кад је она таква да се из ње једна која било од променљивих $y, y', y'', \ldots$ што у њој фигуришу, изражава као *рационална функција* осталих, а коефицијенти те функције су *рационални бројеви*. И став ће важити не само за почетне услове

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0, \quad y'' = 0, \ldots$$

него и за услове

$$x = m, \quad y = n_0, \quad y' = n_1, \quad y'' = n_2, \ldots$$

где су $m, n_0, n_1, n_2, \ldots$ ма какви *рационални бројеви.*

За случај једначина првога реда

$$(419) \qquad y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

где су P и Q полиноми по x и y *са рационалним коефицијентима*, а за интегрални ред y може се доказати ова аритметичка особина:

Напред је показано (4. одељак) да се израчунавање коефицијента a_n интегралног реда y своди на одредбу сталних чланова $p_1, p_2, p_3, \ldots$ у полиномима $P_1, P_2, P_3, \ldots$ који се један из другог израчунавају помоћу рекурсивног обрасца (59) и помоћу сталног члана q полинома Q; тада је коефицијенат a_n изражен обрасцем

$$(420) \qquad a_n = \frac{p_n}{n!\, q^{2n-1}}$$

што се може написати у облику

$$a_n = \frac{k_n}{n!q^{2n}}$$

где је k_n цео број qp_n. Из тога се види да:

Коефицијенат $\mathrm{a_n}$ *за* n = 1, 2, 3, ... *интегралног реда једнак је коефицијенту степена* $\mathrm{x^n}$ *у развитку експоненцијалне функције*

$$f(x) = e^{\frac{x}{q^2}}$$

помноженом једним целим бројем.

То очевидно важи и за случај кад диференцијална једначина (419) не садржи експлицитно независно променљиву количину x. У томе случају она припада типу једначина (410) па интегрални ред има још и ту аритметичку особину да му је коефицијенат a_n једнак коефицијенту степена x^n у развитку функције

$$f(x) = x\, e^{\frac{x}{k}}$$

(где је k подесно изабран цео позитиван број), помножен једним рационалним бројем, који се своди на цео број кад је n какав сложен број, а кад му је именилац различан од јединице, n је прост број.

Горњи став за једначину (419) уопштава се и проширује и на диференцијалне једначине вишега реда

$$y^{(p)} = \frac{P}{Q} \tag{421}$$

где су P и Q полиноми по променљивим

$$x, y, y', \ldots, y^{(p-1)} \tag{422}$$

чији су коефицијенти *рационални бројеви* (што се увек може свести на случај кад су коефицијенти *цели* бројеви).

Као што је напред показано (19. одељак), израчунавање коефицијента a_n интегралног реда y своди се тада на одредбу сталних чланова $p_1, p_2, p_3, \ldots$ у полиномима $P_1, P_2, P_3, \ldots$ који се један из другога израчунавају помоћу рекурсивног обрасца (335) и помоћу сталног члана q полинома Q; тада је

$$a_n = \frac{p_n}{n!q^{2n-2p+1}} \quad (n = p+1, p+2, p+3, \ldots)$$

што се може написати у облику

$$a_n = \frac{k_n}{n!q^{2n}}$$

где је k_n цео број $p_n q^{2p-1}$. А то показује да горњи став за једначину (419) одиста важи и за једначину (421).

V

Нека је сад дата ма каква, алгебарска или трансцендентна диференцијална једначина

$$(423) \qquad y' = f(x, y)$$

где се за функцију f претпоставља само то да је холоморфна функција променљивих x и y за $x = 0$, $y = 0$.

Према основној Briot-Bouquet-овој теореми, интеграл једначине, који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$ изражава се у облику реда

$$(424) \qquad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

конвергентног у кругу који одређује та теорема.

Формирајмо помоћну функцију

$$(425) \qquad \varphi(x, u, u') = \frac{f(x, u + xu') - 2u'}{x}$$

а помоћу ње низ функција

$$(426) \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$$

трију променљивих x, u, u' које се једна из друге израчунавају по рекурсивном обрасцу

$$\varphi_n = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u} u' + \varphi \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u'}$$

са почетном функцијом

$$\varphi_0 = \varphi(x, u, u').$$

Уочимо низ бројева

$$(427) \qquad A_1, A_2, A_3, \dots$$

где A_n означује број који се добија кад се у функцији φ_{n-2} низа (426) смени

$$(428) \qquad x = 0, \quad u = 0, \quad u' = \frac{1}{2} f(0,0).$$

Тада постоји једна чисто аритметичка веза између двају низова бројева

$$A_5, A_6, A_7, \ldots$$
$$a_5, a_6, a_7, \ldots$$

и та се веза изражава овим ставом:

Кад год је који од бројева $\mathrm{A_n}$ *једнак реципрочној вредности каквог целог (позитивног или негативног) броја, да би тако исто било и са коефицијентом* $\mathrm{a_n}$ *истога ранга, потребно је и довољно да буде испуњен један или други од ова два аритметичка услова:*

1° *или да цео број* $\dfrac{1}{\mathrm{A_n}}$ *буде дељив са* $\mathrm{n} + 1$;

2° *или да* n *није какав прост број смањен за јединицу.*

Да би се то доказало, приметимо да, пошто једначина (423) има интеграл y који се у близини вредности $x = 0$ може развити у ред (424) диференцијална једначина другога реда

$$(429) \qquad u'' = \varphi(x, u, u')$$

такође има интеграл u који се у близини вредности $x = 0$ може развити у ред

$$(430) \qquad u = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

Јер, ако се у једначини (429) изврши смена

$$(431) \qquad (xu)' = xu' + u = y$$

из чега се добија да је

$$(432) \qquad y' = xu'' + 2u',$$

према (425), (429) и (432) добија се да је

$$y' = x\,\varphi(x, u, u') + 2u' = f(x, u + xu') = f(x, y)$$

из чега се види да функција

$$y' = (xu)'$$

задовољава једначину (423). Према томе је

$$(xu)' = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

а одатле се, за интеграл u који за $x = 0$ добија вредност $u = 0$, добија израз

$$u = \frac{1}{x}\int y\,dx = \frac{a_1}{2}x + \frac{a_2}{3}x^2 + \frac{a_3}{4}x^3 + \ldots$$

што показује да се он одиста може развити у ред (430), као и то да коефицијенат b_n тога реда има за израз

$$b_n = \frac{a_n}{n+1}. \tag{433}$$

Међутим, исти коефицијенат b_n може се израчунати и помоћу бројева A_n низа (427), јер се из једначине (429) узастопним диференцијаљењима добија да је

$$u''' = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}u' + \frac{\partial\varphi}{\partial u'}\varphi = \varphi_1,$$

$$u'''' = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}u' + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u'}\varphi = \varphi_2,$$

. . . .

и уопште

$$u^{(n)} = \frac{\partial\varphi_{n-3}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{n-3}}{\partial u}u' + \frac{\partial\varphi_{n-3}}{\partial u'}\varphi = \varphi_{n-2}, \quad (n = 4, 5, \ldots)$$

из чега се види да је

$$b_n = \frac{A_n}{n!}. \tag{434}$$

Уједначивши десне стране једначине (433) и (434) добија се да је

$$a_n = \lambda_n A_n, \quad \lambda_n = \frac{n+1}{n!}.$$

Да би коефицијенат a_n био једнак реципрочној вредности каквог целог броја, потребно је и довољно 1° или да именилац броја A_n буде дељив са $n + 1$; 2° или да λ_n буде реципрочна вредност каквог целог броја. Према другом помоћном ставу, пошто је по претпоставци $n > 4$, да би слов 2° био испуњен, потребно је и довољно да $n + 1$ буде сложен број, чиме је став доказан.

Један став сличне врсте може се доказати и за први извод y' диференцијалне једначине (423). Формирајмо помоћну функцију

$$\psi(x, u) = \frac{f(x, xu) - u}{x} \tag{435}$$

и помоћу ње низ функција

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \tag{436}$$

двеју променљивих x и u, које се једна из друге израчунавају по рекурсивном обрасцу

$$\psi_n = \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} + \psi \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u}$$

са почетном функцијом

$$\psi_0 = \psi(x, u).$$

Уочимо низ бројева

$$C_1, C_2, C_3, \ldots$$

где C_n означује број који се добија кад се у функцији ψ изврши смена

$$x = 0, \quad u = f(0, 0). \tag{437}$$

Тада између низова бројева

$$C_5, C_6, C_7, \ldots$$
$$\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \ldots$$

где су α_n коефицијенти реда

$$y' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

постоји аритметичка веза изражена овим ставом:

Кад год је који од бројева $\mathrm{C_k}$ *једнак реципрочној вредности каквог целог (позитивног или негативног) броја, да би тако исто било и са коефицијентом* α_n, *потребно је и довољно да буде испуњен један или други од два аритметичка услова*:

1° *или да цео број* $\dfrac{1}{\mathrm{C_k}}$ *буде дељив са* k + 1;

2° *или да* k *није какав прост број смањен за јединицу.*

Да би се то доказало, ставимо да је

$$\frac{y}{x} = u.$$

Партикуларном интегралу

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{438}$$

једначине (423) одговара партикуларни интеграл

$$u = \frac{y}{x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots \tag{439}$$

једначине

$$u' = \psi(x, u) \tag{440}$$

који за $x = 0$ добија вредност

$$u = a_1 = f(0, 0).$$

Према једначини (439) и ранијем правилу за израчунавање коефицијената интегралног реда, биће

$$c_n = \frac{C_n}{n!}, \tag{441}$$

па пошто се из (438) и (439) види да је у исто време и

$$c_n = a_{n+1} \tag{442}$$

упоређењем једначина (441) и (442) добија се да је

$$a_{n+1} = \frac{C_n}{n!},$$

а како је

$$\alpha_n = (n+1)\, a_{n+1}$$

налази се да је

$$\alpha_n = \lambda_n A_n, \quad \lambda_n = \frac{n+1}{n!}$$

па се доказ довршује као и у претходном случају.

Први пример. За диференцијалну једначину

$$y' = \frac{x+1}{x} y + x \tag{443}$$

је

$$\psi(x, u) = 1 + u$$

па се налази да је

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \ldots = 1 + u$$

и према томе

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = 1.$$

Једначина (440) овде је

$$u' = 1 + u;$$

и она има као партикуларни интеграл

$$u = e^x - 1;$$

једначина (443) има као одговарајући партикуларни интеграл

$$y = x\,(e^x - 1)$$

који има за извод

$$y' = (x+1)\,e^x - 1$$

који развијен у ред даје

$$y' = 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{7}{720}x^6 + \frac{1}{630}x^7 + \dots$$

па се на томе реду непосредно проверава да су коефицијенти оних степена x_n једнаки реципрочној вредности каквога целог броја за које је $n+1$ сложен број; они то нису за оне вредности n за које је $n+1$ прост број.

Други пример. За диференцијалну једначину

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{x^2 - y^2} \tag{444}$$

је

$$\psi(x, u) = \sqrt{1-u^2}$$

па се налази да је

$$\psi_{4k} = \sqrt{1-u^2}, \quad \psi_{4k+1} = -u,$$
$$\psi_{4k+2} = -\sqrt{1-u^2}, \quad \psi_{4k+3} = u,$$

и према томе сви бројеви C_n имају за вредност 0, – 1, + 1. То доводи за ред у који се може развити извод y' до истог закључка као у првоме примеру. А закључак се проверава непосредно на интегралу y који је

$$y = x \sin x$$

чији се извод

$$y' = \sin x + x\cos x$$

може развити у ред

$$y' = 2x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{20}x^3 - \frac{1}{630}x^4 + \dots$$

23. АРИТМЕТИЧКЕ ОСОБИНЕ ИНТЕГРАЛА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

У одељку што претходи изложене су неколике аритметичке особине коефицијената a_n интегралног реда диференцијалне једначине или система, првога или вишег реда. Од интереса је сазнати и за поједине аритметичке особине самога интеграла. Такве су нпр. особине везане за вредности које интеграл добија кад се у њему независно промењљива количина x смени целим бројем, или за нуле интеграла, његове максимуме и минимуме, његове асимптотске вредности, појединих геметријских елемената интегралне криве линије итд. У овоме ће одељку бити дат одговор на неколика питања те врсте, а која се нарочито тичу улоге *простих бројева* у чисто аналитичким проблемима интеграције диференцијалних једначина

I

Посматрајмо скуп функција

$$y = \Phi(x)$$

које имају ту особину да за $x =$ ма коликом целом позитивном броју m функција добија вредност $\Phi(m)$ која је *рационалан број*. Нека су p и q бројилац и именилац тога рационалног броја после извршеног могућног скраћивања, тако да је

$$\Phi(m) = \frac{p}{q}.$$

Лако се уверити да постоје

1° такве функције $\Phi(x)$ да кад год је именилац q различан од јединице, он је увек *сложен број*. Таква је нпр. према Wilson-овој теореми (помоћни став у 22. одељку) функција

$$\Phi(x) = \frac{1+\Gamma(x)}{x}.$$

Функције те врсте овде ће бити означене као *функције* $\lambda(x)$;

2° такве функције $\Phi(x)$ да кад год је именилац q различан од јединице, он је увек *прост број*. Таква је нпр. опет према Wilson-овој теореми, функција

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(x)}{x} \qquad \text{за } x > 4.$$

Функције те врсте овде ће бити означене као *функције* $\mu(x)$.

На питање да ли алгебарске диференцијалне једначине

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0 \tag{445}$$

могу имати међу својим интегралима и функције $\lambda(x)$ или $\mu(x)$, може се дати овај одговор.

Све до данас познате функције $\mu(x)$ су *хипертрансцендентне*, тј. нису интеграли никакве једначине (445). Али то не важи и за функције $\lambda(x)$: *диференијалне једначине* (445) *могу имати као своје интеграле функције* $\lambda(x)$.

Да бисмо се о томе уверили, посматрајмо функцију

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{\alpha x} - 1\right) \quad \text{где је} \quad \alpha = \log 2 = 0,693147\ldots \tag{446}$$

То је једна функција $\lambda(x)$, јер се она може написати у облику

$$y = \frac{2^{x-1} - 1}{x}$$

а према Fermat-овој теореми (помоћни став у 22. одељку) израз $2^{x-1} - 1$ је дељив са x кад год је x цео прост број; ако, дакле, вредност функције y за $x =$ цео број има именилац различан од јединице, тај именилац је сложен број и y је једна функција $\lambda(x)$. Међутим, та функција y је интеграл линеарне једначине првога реда

$$xy' + (1 - \alpha x)y - \alpha = 0. \tag{447}$$

Међу функцијама $\lambda(x)$ могу се разликовати

1° једне, које ће бити означене са $\lambda_1(x)$, и за које је $\lambda_1(x)$ цео број кад год је x цео *прост број*, а разломак кад год је x цео *сложен број*. Таква је нпр. функција

$$\lambda_1(x) = \frac{1 + \Gamma(x)}{x};$$

2° друге, које ће бити означене са $\lambda_2(x)$, за које, кад x не премаша један утврђен број M, вредност $\lambda_2(x)$ има горњу аритметичку особину функција $\lambda_1(x)$.

За до сада познате функције $\lambda_1(x)$ не постоји никаква диференцијална једначина (445) која би њих имала као своје интеграле. Али то не важи и за функције $\lambda_2(x)$: *постоје диференцијалне једначине* (445) *што имају као свој интеграл коју од функција* $\lambda_2(x)$.

Да бисмо се о томе уверили, уочимо функцију

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{\alpha x} - 1\right) + \frac{a}{2\pi}R(x)\sin 2\pi x \tag{448}$$

где је a произвољан рационалан број, а $R(x)$ рационална функција облика

$$R(x) = \frac{1}{x-c_1} + \frac{1}{x-c_2} + \ldots + \frac{1}{x-c_p}$$

а где $c_1, c_2, \ldots, c_p$ означује скуп Fermat-ових бројева који не премашују дати број M (в. помоћни став у 22. одељку).

Лако се уверити да са таквом структуром рационалне функције $R(x)$ функција y има ту особину да постаје цео број кад се x смени ма којим простим бројем, а да постаје разломак кад се x смени ма којим сложеним бројем мањим од M. Јер, према Fermat-овој теореми, за $x =$ прост број први сабирак функције y је цео број, а други сабирак постаје једнак нули; за $x =$ сложен број $\leq M$ (осим $x = c_1, c_2, \ldots, c_p$) први сабирак је разломак, а други сабирак једнак нули; за саме вредности $x = c_1$, $c_2, \ldots, c_p$ први је сабирак цео број, а други је разломак (што се види применом L'Hospital-овог правила на тај сабирак). То показује да функција y одиста има одлику функција $\lambda_2(x)$.

Међутим, *та функција* y *је интеграл једне диференцијалне једначине другога реда облика*

$$Py''^2 + Qy' + S = 0 \tag{449}$$

где су P, Q, S полиноми по y и y'; коефицијенти тих полинома су рационалне функције променљиве x чији су коефицијенти цели бројеви. Полином P је другога степена, Q је трећег, а S четвртог степена по y и y'. Једначина (449) добија се кад се једначина (448) диференцијали два пута узастопце, па се из тако добијених двеју једначина и једначине (448) елиминишу $\sin 2\pi x$ и $\cos 2\pi x$.

Кад је $M < 341$, пошто не постоји ниједан број c_k мањи од M, функција y се своди на функцију (446), а диференцијална једначина (449) на једначину (447).

Кад је $M < 1105$, пошто постоји само један број c_k мањи од M, а то је $c_1 = 341$, функција y је

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{\alpha x} - 1\right) + \frac{a}{2\pi}\cdot\frac{\sin 2\pi x}{x-341}.$$

Кад је $M < 4369$, пошто постоје само два броја c_k мања од M, а то су $c_1 = 341$ и $c_2 = 1105$, функција y је

$$(450)\quad y=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{\alpha x}-1\right)+\frac{a}{2\pi}\cdot\frac{2x-1446}{x^2-1446x+376805}\sin 2\pi x.$$

II

Зна се да постоји бескрајно много функција $\theta(x)$ које су униформне у целој равни промењиве x и имају ту одлику да постају једнаке нули за све *просте бројеве* x, веће од 2, а различне су од нуле за све *сложене бројеве*. Али ни једна од таквих функција није интеграл никакве једначине (445).

По аналогији са оним што је казано у параграфу I, поставља се питање: да ли има таквих функција $\theta(x)$ које задовољавају какву од једначина (445), а имају ту аритметичку особину за све бројеве x што не премашају један дати број M?

Одговор на питање је позитиван: *постоје диференцијалне једначине* (445) *што имају за интеграл коју од таквих функција* $\theta(x)$.

Да би се то видело, пођимо од једначине првога реда

$$(451)\qquad \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{y'}{\lambda_2'}\right)^2+y^2-1=0$$

где је λ_2 једна од функција (448) из параграфа I. Елиминацијом трансцендената e^{ax} и $\sin 2\pi x$ из једначине (451) и двеју једначина које се из ове добијају двама узастопним диференцијаљењима, долази се до једне алгебарске диференцијалне једначине трећега реда

$$f(x,y,y',y'',y''')=0$$

која има за један свој партикуларни интеграл функцију

$$y=\sin(2\pi\lambda_2)$$

а та функција, према аритметичкој особини функције λ_2, постаје једнака нули кад је x ма какав прост број, а различна је од нуле кад је x какав сложен број што не премаша M.

Али функције $\theta(x)$ такве врсте могу, поред простих бројева, имати као своје реалне нуле још и друге бројеве који нису цели, пошто се може десити да функција $\lambda_2(x)$ постане цео број и за коју вредност x који није цео број. Поставља се, дакле, питање: да ли има таквих функција $\theta(x)$ које задовољавају какву диференцијалну једначину (445), а које би имале као своје реалне нуле што не премашају дати број M, искључиво просте бројеве x?

Одговор је и на то питање позитиван: *йостоје диференцијалне једначине* (445) *шшо имају за иншеграл коју од шаквих функција* $\theta(x)$. Таква би нпр. једна функција била

$$\theta(x) = 2 - \cos 2\pi x - \cos 2\pi\lambda_2$$

јер, да би она за реално x добила вредност нулу, потребно је и довољно да буде у један исти мах

$$\cos 2\pi x = 1, \quad \cos 2\pi\lambda_2 = 1;$$

прва једначина показује да x треба да је цео број, а друга да је λ_2 цео број, па дакле тај цео број x треба да буде једнак ма коме простом броју; за ма какав сложен број што не премаша M то неће бити случај.

Међутим та функција $\theta(x)$ је интеграл једне алгебарске диференцијалне једначине која се добија елиминацијом трансцендената из једначине (451) и оних што се из ње добијају узастопним диферецијалењима.

III

У погледу асимптотских вредности интеграла алгебарских диференцијалних једначина може се тврдити да и оне могу бити у вези са простим бројевима. Тако, има пространих класа једначина првога или вишег реда чији општи, или који партикуларни интеграл *има за асимйшошску вредносш број који се изражава йомоћу йросших бројева шшо не йремашају један ушврђен број* M.

Уочимо нпр. једначину другога реда

$$y'' + \varphi(y)y'^2 + f(x)y' = 0 \tag{452}$$

где је $\varphi(y)$ дата функција променљиве y, а $f(x)$ дата функција променљиве x. Сменом

$$y' = zY, \tag{453}$$

одакле је

$$y'' = Yz' + YY'z^2, \tag{454}$$

једначина (452) постаје

$$z' + (Y' + \varphi Y)z^2 + fz = 0. \tag{455}$$

Изаберимо Y тако да буде

$$Y' + \varphi Y = 0, \tag{456}$$

тј. тако да је

$$Y = e^{-\int \varphi(y)\,dy}, \tag{457}$$

па се једначина (455) своди на

$$z' + f(x)z = 0, \tag{458}$$

а ова има за општи интеграл

$$z = C' e^{-\int f(x)\,dx}, \tag{459}$$

где је C' интеграциона константа.

Према обрасцима (453), (457) и (459) општи интеграл једначине (452) је

$$y = \psi\left[C + C'\int_0^x e^{-\int f(x)\,dx}\,dx\right], \tag{460}$$

где $y = \psi(t)$ означује инверзију интеграла

$$\int e^{\int \varphi(y)\,dy}\,dy = t. \tag{461}$$

Уочимо специјалан случај кад је:

1° инверзија $\psi(t)$ периодична функција променљиве t;

2° функција $f(x)$ има облик

$$f(x) = 1 - \frac{P_m'(x)}{P_m(x)}, \tag{462}$$

где P_m означује полином $(m-1)$-ог степена

$$P_m(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{m}, \tag{463}$$

где су имениоци сабирака чланови природног низа целих бројева који не премашају m.

Тада је

$$\int f(x)\,dx = x - \log P_m(x)$$

и према томе

$$e^{-\int f(x)dx} = e^{-x}P_m(x).$$

Општи интеграл једначине (452) је дакле

(464) $$y = \psi\left[C + C'\int_0^x P_m(x)\, e^{-x}dx\right],$$

а асимптотска вредност $y(\infty)$ интеграла за $x = \infty$ је

(465) $$y(\infty) = \psi(C + C'I_m),$$

где је

$$I_m = L_1 + L_2 + \ldots + L_m,$$

$$L_n = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \frac{(n-1)!}{n},$$

Пошто је, према ранијем помоћном ставу (22. одељак)

за n = прост број $\qquad \dfrac{(n-1)!}{n} = M - \dfrac{1}{n},$

за n = сложен број (осим 4) $\qquad \dfrac{(n-1)!}{n} = N,$

за $n = 4$ $\qquad \dfrac{(n-1)!}{n} = 1 - \dfrac{1}{2},$

(где су M и N цели бројеви), то ће бити

$$y(\infty) = \psi(C + C's_m - C'A),$$

где је A цео број, а s_m означује бројну константу

(466) $$s_m = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots$$

једнаку збиру реципрочних вредности природног низа простих бројева који не премашују m.

Ако се узму у обзир они интеграли y што одговарају вредности интеграционе константе

(467) $$C' = \omega,$$

где је ω елементарна периода функције $\psi(t)$, биће

(468) $$y(\infty) = \psi(C + \omega s_m),$$

из чега се види да:

Алгебарска једначина другога реда (452), *кад се у њој алгебарске функције* f(x) *и* φ(y) *изаберу на горе наведени начин, има једну класу интеграла у што зависе од једне интеграционе константе* C *и чија се асимптотска вредност изражава помоћу природног низа простих бројева мањих од једнога одређеног броја.*

Такав је нпр. случај са једначином

$$(y'' + fy')(1 - y^2) + yy'^2 = 0,$$

кад је f рационална функција променљиве x облика (462). Тој једначини одговара

$$\varphi(y) = \frac{y}{1 - y^2}, \quad Y = \sqrt{1 - y^2}, \quad \psi(t) = \sin t,$$

тако да је њен општи интеграл

$$y = \sin\left[C + C'\int_0^x e^{-x} P_m(x)\,dx\right].$$

Она класа интеграла те једначине што одговара вредности $C' = 2\pi$ константе C', има горе наведену аритметичку особину: њихова асимптотска вредност је

$$y(\infty) = \sin(C + 2\pi s_m).$$

IV

Поједини геометријски елементи интегралне криве линије такође могу бити у вези са простим бројевима и изражавати се помоћу ових. Као пример, овде ће бити показана таква веза што постоји између простих бројева и површине интегралне криве за алгебарску диференцијалну једначину другога реда формирану на овај начин:

Пођимо од линеарне једначине првога реда

(469) $$f(x)y' + \varphi(x)y + \psi(x) = 0$$

где је

$$f(x) = xe^x, \quad \varphi(x) = \frac{d}{dx}(xe^x), \quad \psi(x) = -\left(\frac{x^\beta - x^\alpha}{x - 1}\right)$$

а α и β $(\alpha < \beta)$ означују два ма каква цела позитивна броја већа од 4.

Кад се из (469) и једначине

$$fy'' + (\varphi + f')y' + \varphi' y + \psi' = 0$$

која се добија диференцијаљењем једначине (469) елиминише e^x, добија се једна диференцијална једначина другога реда

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{470}$$

где је F полином по x, y, y', y''; то је једначина која се овде има у виду.

Једначина (469) има као један свој партикуларни интеграл функцију

$$y = \frac{e^{-x}}{x}\int_0^x \frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1}\,dx \tag{471}$$

па ће њу имати за партикуларни интеграл и једначина (470). Интегрална крива пролази кроз координатни почетак, има са десне стране осовине Oy један позитивни максимум и осовина Ox јој је асимптота, а у исто време и дирка у почетку, То се види из тога што је

$$\frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1} = x^\alpha + x^{\alpha+1} + \ldots + x^{\beta-1} \tag{472}$$

према чему је

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1}\,dx = \frac{x^\alpha}{\alpha+1} + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+2} + \ldots + \frac{x^{\beta-1}}{\beta}.$$

Једначина интегралне криве може се, дакле, написати у облику

$$y = e^{-x}P(x)$$

где је $P(x)$ полином (472). Извод y' је

$$y' = Q(x)\,e^{-x}$$

где је Q полином

$$Q(x) = P'(x) - P(x) = \frac{\alpha}{\alpha+1}x^{\alpha-1} + C_1 x^\alpha + C_2 x^{\alpha+1} + \ldots - \frac{x^{\beta-1}}{\beta},$$

а $C_1, C_2, \ldots$ су константе изражене обрасцем

$$C_k = \frac{(\alpha+k)^2 - (\alpha+k+1)}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}.$$

Из тога се види да ће за $x = 0$ бити $y' = 0$, тј. да интегрална крива додирује апсцисну осовину у координатном почетку. А пошто је број $\alpha + k$ већи од 2, коефицијенти C_k су сви позитивни, тако да полином $Q(x)$ има свега једну промену знака својих сабирака, па према томе он има највише једну позитивну нулу. Та нула одиста постоји, јер за довољно малу позитивну вредност x вредност $Q(x)$ је позитивна, док за врло велике вредности x она је негативна (пошто је $\beta - 1$ највиши степен у полиному Q). Тој јединој нули полинома Q одговара једна максимална функција y, јер кад би то био један њен минимум, функција би морала проћи кроз још један максимум пре но што почне опадати и тежити нули као граничној вредности.

Целокупна површина S интегралне криве линије, што се налази са десне стране ординатне осовине, има тада ову аритметичку особину:

Кад год је површина S *изражена каквим децималним бројем, децимални део тога броја једнак је допуни до јединице децималног дела збира реципрочних вредности свих простих бројева што се налазе између* α *и* β.

Да би се то доказало, пођимо од обрасца

$$S = \int_0^\infty y\,dx = \int_0^\infty e^{-x}P(x)\,dx$$

из кога се добија да је

$$S = A_{\alpha+1} + A_{\alpha+2} + A_{\alpha+3} + \dots$$

где је

$$A_n = \frac{1}{n}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

што према познатом интегралном обрасцу

$$\int_0^\infty x^p e^{-x}dx = p!$$

даје

$$A_n = \frac{(n-1)!}{n}.$$

Према помоћном ставу из 22. одељка, кад год је $n > 4$ какав сложен број, факторијел $(n-1)!$ је дељив са n, а кад год је $n > 4$ какав прост број, биће

$$\frac{(n-1)!}{n} = \text{цео број} - \frac{1}{n}.$$

Према томе ће бити

$$S = \text{цео број} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} + \ldots \right)$$

где су $p, p', p'', \ldots$ узастопни прости бројеви што се налазе између α и β, као што је требало доказати.

ПРИЛОЗИ

ПРЕДАВАЊА НА БЕОГРАДСКОМ УНИВЕРЗИТЕТУ

ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

од

МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА

ИЗДАЊЕ ЗАДУЖБИНЕ ЛУКЕ ЋЕЛОВИЋА • ТРЕБИЊЦА

БЕОГРАД

1 9 3 7

ПРЕДАВАЊА НА БЕОГРАДСКОМ УНИВЕРЗИТЕТУ

ИНТЕГРАЦИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПОМОЋУ РЕДОВА

ОД

МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА

ИЗДАЊЕ ЗАДУЖБИНЕ ЛУКЕ ЋЕЛОВИЋА-ТРЕБИЊЦА

БЕОГРАД

1 9 3 8

Између два рата на Универзитету у Београду излазила је серија ***Предавања на Београдском универзитету****. Већина ових књига штампане су средствима из Задужбине Луке Ћеловића Требињца (1854–1931), међу највећим добротворима Универзитета у Београду.*

Поред изложене две књиге, Михаило Петровић је у овој серији објавио још један уџбеник ***Рачунање са бројним размацима****, Београд, 1932. (Подробније у књизи 8* ***Сабраних дела Михаила Петровића****.)*

ДВА УЏБЕНИКА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

У овој књизи *Сабраних дела Михаила Петровића* (1868–1943) изложена су његова два уџбеника: *Елиптичке функције* и *Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова.*

Практично, ови Петровићеви текстови у садашњим оквирима носе печат четвртог издања. Наиме, школске 1925/26. године Петровић је започео свој курс елиптичких функција за студенте математике на Филозофском факултету у Београду. У то време овај се предмет није полагао одвојено, већ у саставу Математичке анализе (други део). Петровић је дозволио да студенти начине скрипта о елиптичким функцијама по његовим предавањима. Тако је и било, а професор је припремљена скрипта прегледао и одобрио за литографисање (умножавање). То је време првих година рада Удружења студената математике Универзитета у Београду (основано 1926), те оно већ 1927. године издаје литографисана Петровићева предавања под називом *Теорија елиптичних функција* (стр. 138; 20,6 × 29)[1] Ова скрипта студенти су поново издали и наредне, 1928. године. Занимљиво је приметити да су студенти математике ова предавања издали и 1937. године, не знајући да професор Петровић припрема у тој истој години штампани уџбеник под називом *Елиптичке функције.*

У 1929. години појавила су се још једна скрипта припремљена на сличан начин – *Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова*. Радило се такође о предавањима Михаила Петровића, овај пут у оквиру предмета Диференцијалне једначине.

Као што је наведено, Петровићева књига о елиптичким функцијама изашла је 1937. године на 131 страни формата 8°, у издању Задужбине Луке Ћеловића Требињца (1854–1931), великог добротвора Универзитета у Београду. Књига је изашла у серији *Предавања на Београдском универзитету* у 500 примерака. Наредне, 1938. године, у тој серији је исти издавач објавио уџбеник *Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова* на 219 страна формата 8°, такође у тиражу од 500 примерака.

---

[1] Д. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, САНУ, Београд 1969, стр. 325–329.

Тако се догодило да крај свог радног века Михаило Петровић обележи уџбеником из диференцијалних једначина, области у којој је почео свој научни опус далеке 1894. године аналитичком теоријом диференцијалних једначина[2]. При том ваља поменути да је, за разлику од својих претходника, као што су, на пример, Димитрије Нешић (1836–1904) и Богдан Гавриловић (1864–1947), Петровић избегао да се упусти у писање уџбеника у младим годинама. У почетку се трудио да што више оригиналних научних прилога објави у најугледнијим светским часописима, а писање уџбеника и монографија оставио је за позније године.

Треба казати неколико речи о уделу Драгослава С. Митриновића (1908–1995) у припреми уџбеника о елиптичким функцијама. Када је Петровић потпуно припремио рукопис *Елиптичке функције* за штампу, млади Митриновић (било му је 29 година) понудио се да води коректуре. Из једног Петровићевог писма Митриновићу, које је објавио Математички весник 12 (1960), стр. 165, сазнајемо да је рукопис предат штампарији 5. јануара 1937. године, да је коректуре радио Митриновић, а да су после тога завршни преглед обавили Милош Радојчић (1903–1975) и сам Петровић.

Митриновић, као Петровићев ученик у правом значењу речи (студије, докторат, сарадник) и даље је, на неки начин, „водио рачуна" о овим уџбеницима. Тако је објавио реферате о књигама у Jahrbuch über die Fortschritte der mathematik, 63, стр. 998, односно 64, стр. 419. Наводимо превод приказа уџбеника о интеграцији диференцијалних једначина помоћу редова. „Прецизно и систематско излагање методе Briota-a и Bouquet-a о интеграцији диференцијалних једначина првог реда помоћу Тејлорових редова. Поједностављени поступак одређивања коефицијената реда који представља интеграл. Из овог поступка следе ставови о коефицијентима. Открића за једначине вишег реда и системе једначина. Интересантна аритметичка својства коефицијената, као и самих интеграла."

Овим приказима Митриновић је скренуо светској јавности пажњу да се у Београду, на Универзитету, већ предају озбиљни научни течајеви студентима математике.

Поводом стогодишњице рођења Михаила Петровића, на предлог Д. С. Митриновића, „Грађевинска књига" из Београда прештампала је Петровићеве књиге *Елиптичке функције* и *Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова* и издала их 1969. године у тиражу од по 2000 примерака. Редактори ових издања били су Милорад Бертолино (1929–1980) и Петар Васић (1934–1996). За ово издање, професор Митриновић написао је студију о Михаилу Петровићу, пуну података из живота и дела свог професора.

Садашње издање редиговано је према оригиналима из 1937, односно 1938. године, при чему су, наравно, коришћена запажања која су учинили претходни редактори.

---

[2] M. Petrovich, *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations differentielles algebriques*, Thése, Paris 1894, p. 109.

Проф. Dr МИХ. ПЕТРОВИЋ

ТЕОРИЈА
ЕЛИПТИЧНИХ ФУНКЦИЈА

БЕОГРАД

Издање Удружења Студената Математике

— 1927 —

Литографисана скрипта са предавања професора Михаила Петровића (насловна страна издања 1927. г.)

Текстови о којима је реч, осим уџбеничког, имају свакако и монографски карактер. Наиме, у њима се, чак и са гледишта данашње науке, излажу теме које често нису садржане у стандардним универзитетским курсевима. Истина, неке од тих тема нису данас у актуелном тренду развоја математике, али свакако оне садрже довољно интересантних детаља и за данашњег читаоца. Посебно се то односи на појмове о елиптичким функцијама који су једно време били потиснути из универзитетских курсева, али који у најновијим достигнућима математике поново заузимају заслужено место. Томе ће сигурно допринети најновија истраживања везана за алгебарске криве која су, између осталог, довела до решења Фермаовог проблема.

Један од разлога што се наведени текстови не могу, у правом смислу те речи, сматрати монографијама, јесте недостатак детаљније библиографије. Због тога не можемо рећи којим се основним изворима аутор користио приликом припремања књига, мада је сигурно да су то били текстови његових француских професора. Такође, није јасно да ли се неки од резултата могу приписати самом Михаилу Петровићу. При том, сам аутор је активно радио у наведеним областима. Тако, на пример, у области двопериодичних функција, значајни су његови радови:

1. *Un mode général de representation des fonctions elliptiques,* CR Acad. Sci. Paris 198 (1934), pp. 698–700.

2. *Изражавање дво-периодичних функција помоћу одређених интеграла*, Глас CLXV (1935), стр. 137–152 (са Ј. Караматом).[3]

3. *Приближно изражавање елиптичких помоћу елементарних функција*, Глас CLXXXIX (1946), стр. 47–70.

Посебно је занимљив рад под 2, зато што је у њему исправљен један погрешан резултат Поенкареа[4] о представљању двопериодичних функција помоћу интеграла. То је, иначе, по свој прилици, једини рад у којем је Петровић имао коаутора – то је био његов најбољи ученик Јован Карамата (1902–1967).

С друге стране, као што је већ речено, аналитичка теорија диференцијалних једначина је била прва област у којој је Петровић давао научне прилоге. Некако у исто време када је радио на књизи *Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова*, он је у Академији наука 29. новембра 1937. године саопштио рад *Потенцијални редови што изражавају општи интеграл какве диференцијалне једначине првога реда* (Глас CLXXVIII (1939), стр. 31–42)[5]. Овде је Петровић са становишта научне расправе показао прави оригинални

[3] Овај рад је објављен и на француском: M. Petrovitch–J. Karamata, *Representations des fonctions dobulement periodiques au moyen des integrales definies*, Acad. royale de Serbie, Bulletin A, 2 (1935), pp. 239–243.

[4] H. Poincaré, *Sur les invariants arithmétiques*, Comptes Rendus du 10me Congrés de l'Assoc. franc. pour l'avancements des Sciences (1881), pp. 109–117.

[5] И овај рад је објављен и на француском: M. Petrovitch, *Serie taylorienne exprimant l'intégrale générale d'une équations différentielle du premier ordre*, Acad. Royale de Serbie, Bulletin A, 5 (1939), pp. 21–23.

прилаз интеграцији помоћу редова, што су и потврдили у реферативним часописима P. Franklin (MR XI, p. 247), H. Geppert (Zbl. 21, S. 225) и H. Wittich (FdM. 65, S. 369–370).

Начин излагања материјала у уџбеницима је непосредан и јасан. Са гледишта нивоа строгости који је уобичајен у савременим уџбеницима, вероватно би се могле ставити извесне замерке, на пример, код образлагања неких граничних прелаза или код прецизирања неопходних и довољних услова код ставова о егзистенцији и јединости решења. Међутим, пажљиви читалац лако може свако од тих „спорних" места допунити прецизнијим образложењем. С друге стране, ниво излагања је у неким деловима и виши од оног у данашњим додипломским курсевима. Тако , на пример, у оба уџбеника се слободно користе резултати о аналитичким функцијама комплексне промењливе и целокупно излагање подразумева одговарајућа знања.

Као и у осталим књигама ових сабраних дела, приликом редиговања текста извршене су само оне измене које су биле неопходне. Тако су, наравно, исправљене штампарске грешке и неки ситнији пропусти суштинског карактера којих није било много (неки од њих уочени су у претходној редакцији). Правопис је прилагођен савременом, али терминологија није мењана, чак ни тамо где су одступања релативно велика у односу на садашњу. Тако, на пример, задржани су термини „интеграција" и „интеграл" уместо „решавање" и „решење" диференцијалне једначине, „врста" уместо „поредак" целе функције и слично. Такође, нису вршене корекције у смислу прилагођавања конвенцијама које се углавном сада користе, по којима се, на пример, елиптичке функције не убрајају у елементарне. И, наравно, задржан је стил излагања Михаила Петровића који је веома жив и који, претпостављамо, одражава и стил његових предавања која су била врло популарна. Петровић није био професор који се студентима обраћао великом строгошћу и проблемима тешким, скоро нерешивим за тај узраст. Тражио је доступност „градива" свима, „ко жели више, ето му часописи и дела на страним језицима" – говорио је често Петровић.

Као пензионисани редовни професор универзитета ангажован је да хонорарно предаје студентима математике (1938–1941). То је чинио са 4 часа недељно предавајући баш *Интеграцију диференцијалних једначина помоћу редова*. То је и време када су се математичари из старе зграде Универзитета преселили у нову (1938) и био је сав срећан због тако великог гранања струке и веома повољних услова за рад.

Неоспорно, ове Петровићеве књиге су уџбеници за студенте и одсликавају ниво ондашње наставе на Универзитету, као и сам професоров став. Са данашњег становишта у њима има архаичности, непотпуних исказа и слично. Али, оне данас представљају историјски споменик, оне неопходне степенице којима се наша математика пењала.

Зоран Каделбург

ЛИТЕРАТУРА

Овде је наведена литература коју је Михаило Петровић цитирао у два изложена уџбеника. У загради су наведене стране на којима се та дела помињу.

1. C. Hermite, *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* (180)
2. K. G. J. Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functiae ellipticae* 1829 (117)
3. A. M. Legendre, T*raité des functions elliptiques et des integrales euleriennes*, 1825–1828 (116)

РЕГИСТАР ПОЈМОВА

РЕГИСТАР ЛИЧНИХ ИМЕНА

САДРЖАЈ

стр.

ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

Први одељак

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ О ПЕРИОДИЧНИМ ФУНКЦИЈАМА

Други одељак

ГЕНЕРАЛНОСТИ О ДВОПЕРИОДИЧНИМ ФУНКЦИЈАМА

Трећи одељак

ОСНОВНЕ ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

Четврти одељак

РАЗНИ ОБЛИЦИ РЕДОВА ЗА ОСНОВНЕ ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

Пети одељак

ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ ДЕФИНИСАНЕ ИНВЕРЗИЈОМ ОПШТИХ ИНТЕГРАЛА

Шести одељак

ОПШТИ ПОГЛЕД НА ДВОПЕРИОДИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ

ИНТЕГРАЦИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПОМОЋУ РЕДОВА

Први одељак

ОПШТИ ПОЈМОВИ

Други одељак

ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ И ПРАКТИЧНА УПУТСТВА

Трећи одељак

НЕОДРЕЂЕНИ ОБЛИЦИ

Четврти одељак

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Пети одељак

СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАЈЕВИ И ОСОБИНЕ ИНТЕГРАЛА

ПРИЛОЗИ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА
Књига 9

ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ – ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА

Прво издање, 1997. година

Издавач

Завод за уџбенике и наставна средства
Београд, Обилићев венац 5

Ликовни уредник

АИДА СПАСИЋ

Графички уредник

ДУШАН МИЛОСАВЉЕВИЋ

Коректор

ДУШАН МАТИЋ

Обим: 21 штампарски табак
Формат: 17 × 24 cm
Тираж: 500 примерака

Рукопис предат у штампу августа 1997. године.
Штампање завршено септембра 1997. године.

Штампа

БИГЗ, Београд

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.583(075.8)

ПЕТРОВИЋ, Михаило
Елиптичке функције ; Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова / Михаило Петровић ; приредио Зоран Каделбург. – [1. изд.]. – Београд : Завод за уџбенике и наставна средства, 1997 (Београд : БИГЗ). – 333 стр. : граф. прикази ; 24 cm. – (Сабрана дела Михаила Петровића ; књ. 9)

Слика аутора. – Тираж 500. – Стр. 319–328: Два уџбеника Михаила Петровића / Зоран Каделбург. – Библиографија: стр. 325. – Регистар.
1. Петровић, Михаило: Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова
517.912(07.8)
а) Специјалне функције б) Диференцијалне једначине – Решавање
ИД=56886540

9 788617 346780

ISBN 86-17-05893-5

К. Б. 34678