# ЧЛАНЦИ
# СТУДИЈЕ

# МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА

# САБРАНА ДЕЛА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Први део
2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Други део
3. МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
4. АЛГЕБРА
5. МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ
6. МАТЕМАТИЧКА ФЕНОМЕНОЛОГИЈА
7. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧКЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЈЕ
8. ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА – ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ
9. ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ – ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА
10. ЧЛАНЦИ – СТУДИЈЕ
11. ПУТОПИСИ – Први део
12. ПУТОПИСИ – Други део
13. МЕТАФОРЕ И АЛЕГОРИЈЕ
14. РИБАРСТВО
15. МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ – ПИСМА, БИБЛИОГРАФИЈА И ЛЕТОПИС

Завод за уџбенике и наставна средства у Београду објављује *Сабрана дела Михаила Петровића* у сарадњи са Математичким факултетом Универзитета у Београду и Друштвом математичара Србије.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

# САБРАНА ДЕЛА

КЊИГА 10

*Уредник*

ЖАРКО ЈОВИЋ

*Главни и одговорни уредник*

др ПЕТАР ПИЈАНОВИЋ

*За издавача*

проф. др ДОБРОСАВ БЈЕЛЕТИЋ, директор

ISBN 86-17-06521-4

Мих. Петровић

*Уредник*

ЖАРКО ЈОВИЋ

*Главни и одговорни уредник*

др ПЕТАР ПИЈАНОВИЋ

*За издавача*

[illegible], директор

ISBN 86-17-06521-4

Професор

**МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ**

Београд, 24. април 1868 – Београд, 8. јун 1943.

*У својој радној соби у дому на Косанчићевом венцу у Београду; спавао је на војничком гвозденом кревету, имао свој тоалет, једноставан сто, а често писао на колену. – „Професор Петровић је уживао у старом и патријахалном начину живота, а из дна душе мрзео све што је ново и модерно" – записао је Милутин Миланковић (1946.г). „Па као што, ваљда никад у животу, није обукао фрак, смокинг или редингот, нити метнуо на главу цилиндар, тако се енергично одупро да се његова соба патоше паркетом и снабде савременим намештајем и конфором; само у једноставно опремљеној соби осећао се он код своје куће".*

# МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

## ЧЛАНЦИ – СТУДИЈЕ

Популарни списи
и
примењена математика

Приредили

др Милосав Марјановић, проф. унив. и редовни члан САНУ

др Драган Трифуновић, проф. унив.

ЗАВОД ЗА УЏБЕНИКЕ
И НАСТАВНА СРЕДСТВА
БЕОГРАД
1999

**_ПОПУЛАРНИ СПИСИ_**

*Настава математике*

*Догађаји и портрети*

*Студије*

*

**_ПРИМЕЊЕНА МАТЕМАТИКА_**

*Механика*

*Теорија релативности*

*Рачунари*

*Астрономија, Хемија, Аналогије*

*Патенти*

*Све радове са француског језика у овој књизи превео је*
*др* **ДУШАН АДАМОВИЋ**, *проф. унив.*

# РЕЧ ПРИРЕЂИВАЧА

Дело математичара Михаила Петровића обилује већим бројем чланака и студија намењених *Школи*, наставном особљу и младим заљубљеницима у математику. Као издвојени у целини, сигурно, овде припадају и научникови радови из примењене математике који данас инспиративно делују у процесу наставе математике. Тако је Петровић на нашим просторима, сигурно, био зачетник оснивања и развијања *математичке лабораторије* у школама са мноштвом нумеричких таблица, рачунара, модела, разних математичких справа, скица и цртежа. Слично оним настојањима које је у Единбургу 1913. године Едмунд Витакер учинио са својом математичком лабораторијом у школи.

Утврдили смо да ова Петровићева штива имају савремене педагошке сокове, као и стваралаштво, које настава математике изнуђује, те је тако дошло до ове посебне књиге у *Сабраним делима Михаила Петровића*.

Садржај ове Петровићеве књиге може да послужи савременом читаоцу, математичару и другим образованим људима, као и подстрек за њихов даљи стручан рад, али и као информација шта је то професор Петровић стварао иза завесе која је ове теме одвајала од строгог научног рада.

Књига је подељена у два дела. У првом делу под насловом ***Популарни списи*** изложено је више Петровићевих чланака који се односе на школску математику. Овде је, пре свега, у веродостојном препису и преводу дато око двадесетак професорових изабраних чланака који се односе на наставу математике у основној и средњим школама. Ово Петровићево обраћање Школи вишезначно је и показује, поред осталог, да угледним научним посленицима није била страна школска математика, да Академији наука у Београду крајем 19. века и све до средине овог века, није било страно интересовати се за стваралаштво у педагогији, тј. методици математике. Чак, при изради наставних програма математике за школе видимо да су учествовали Михаило Петровић, Јован Карамата и други. Уосталом, из овакве оријентације, да Академија природних наука Српске краљевске академије води стручну бригу и све чини за успостављање што квалитетније наставе математике, – настао је и угледан часопис ***Математички лист*** (основан 1931/32.г) за више разреде основне школе и средњих школа који су уређивали и водили Јован Карамата, Радивој Кашанин, Михаило Петровић, Војислав В. Мишковић и други.

Када се у овој књизи читају и користе професорови чланци и студије напред исказане садржине, не треба заборавити да је Михаило Петровић био дугогодишњи члан и председник Просветног савета Министарства просвете и црквених послова Краљевине Србије,[1] да је годинама испитивао кандидате на професорском испиту,[2] оцењивао уџбенике и друге приручне књиге за Школу, те био много пута изасланик министра просвете на вишем течајном испиту (велика матура) у разним школама широм Србије. Значи, имао је у свом времену, наш професор све услове да утиче на наставу математике.

Петровић математичар није био ни часа наставник у основној или средњој школи. Али, његова знања која је понео из своје гимназије „новаковићевског концепта" од професора Сретена Стојковића, затим упознавање наставе математике у француским школама, посебно друговање са Емилом Борелом који је објавио више колекција уџбеника за основну и средње школе, као и интензивни контакти са Феликсом Клајном у међународној асоцијацији за наставу математике, – квалификовали су Петровића као човека Школе који је веома прецизно водио бригу о нивоу наставе математике, о математичкој култури наставника и одржавању трајног захтева у релацији: ***без добре Школе нема доброг Факултета (науке), и обратно, без добре науке нема и добре Школе***.

У посебном блоку овог дела књиге објављено је више Петровићевих студија историјског садржаја. Неоспорно, Петровићу је и циљ био да математичаре, нарочито оне у школама, упозна са више историјских догађаја у развоју математичких наука. Веома лепим језиком, *београдским стилом* – како је једном казао Иван Ђаја, а Милан Ђоковић записао, прилагођеним ширем читалаштву, Петровић износи развој француске математике у којој је и он себе изградио, о вечито нерешеним проблемима математике, о грешкама математичара и друго. Дакако, да је данас овај садржај веома потребан школи, савремен је и

---

[1] О овоме подробније у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића.*

[2] Д. Трифуновић – П. Перишић, *Математичар Петар Вукићевић,* Грађевинска књига, Београд 1997, стр. 214.

стапа се у сталне потхвате Школе да младост добије што ширу културу.

Своју љубав према интервалној математици и недовољно дефинисаним проблемима, Петровић је пренео и у наставу. Тако се често бави питањима неодређених задатака, немогућностима исказа и закључка, упозорава да у геометрији око може да превари и друго. Излаже проблеме који садрже „невидљиву" погрешку и слично. На оваквим садржајима Петровић развија своју методику и даје веома корисне савете читаоцу.

Поменимо на крају, да смо изложили скоро све Петровићеве педагошке радове објављене у Женеви у часопису L'Enseignement mathématique са циљем показивања високог степена његове педагошке стручности за наставу, као и да укажемо да је наш професор зашао и у публикације иностраних институција, што је Београду и овим просторима била посебна радост и срећа да виде да имају тако ваљаног човека Школе.

Други део књиге који носи наслов ***Примењена математика*** у веродостојном препису доноси више Петровићевих студија из механике, теорије релативности и рачунарства. Његова студија о примени Лагранжовог принципа у електрицитету, као да је антиципирала читав покрет 50-их и 60-их година у Билимовићевој школи механике о примени принципа механике у различитим областима физике.

Питали смо и покушали да пружимо одговор, одакле оваква преокупација једног математичара? Данашњем свету математичара на универзитетима је страна примењена математика; тај свет је остао без знања физике, астрономије, механике,... Да ли је направљена грешка?

Пре свега, Петровић је после завршених студија математике у Паризу на Faculté des Sciences (Licence ès Sciences mathématiques, 1892) наставио студије и пре полагања – одбране докторске дисертације (1894) завршио и студије физике (Licence ès Sciences physiques, 1893). На овим студијама обогатио је себе добрим и обимним течајевима рационалне механике, небеске механике (астрономија) и физикама (експериментална и теоријска) које су држали велика имена француске науке: Поенкаре, Липман, Апел, Кениг, Пела и други. Своје кретање у овим областима науке, Петровић је редовито називао *примењена математика*, желећи да (именом) термином успостави намеру да математиком хода кроз механику, физику, хемију и друге науке. То је, утврдили смо, директан утицај великог Поенкареа на Петровића студента у Паризу (1889–1894). Све је то довело да млади Петровић на Великој школи нешто пре доношења Закона о Универзитету (27. фебруар 1905) у окриљу Филозофског факултета и Математичког семинара оснује Катедру за примењену математику која је обухватала рационалну механику, небеску механику и теоријску (математичку) физику.

Имајући све ово у виду, овде подвлачимо, да се Петровић, као професор теоријске математике равноправно кретао у наведеним областима механике и физике. Његови радови из примењене математике, објављени у познатим и јаким часописима САД, Француске, Швајцарске и Немачке (нпр. L'Eclairage électrique, Journal de Physique théorique et appliquée,...), – потврђују поменуту одлику о ваљаности и значају ове Петровићеве делатности.

Нешто што посебно треба истаћи, јесте чињеница да је наш професор у оваквом расположењу, дошао и до своје конструкције рачунара за решавање обичних диференцијалних једначина, као првог апарата у свету који на принципу кретања течности решава задату једначину (признање немачке, руске и америчке науке). И Петровићеви патенти (заштићени у Француском патентном заводу) одсликавају Петровића као врсног практичара. Они су војног садржаја и као знак признања професоровој војној служби као резервног генералштабног потпуковника.

Из свега написаног, наслућује се да књига излаже Петровићево дело које ће заинтересовати многе посленике просвете, наставнике, ђаке жељнике већих знања, опште казано, нашу школу. Али, она пружа могућности великог ужитка и сваком ко хоће да у Петровићу проналази истраживача Природе, изумитеља и практичара.

8. јануар 1999.
Београд

*Драган Трифуновић*

# ПОПУЛАРНИ СПИСИ

# НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

## О ВАРЉИВИМ ДОКАЗИМА У ГЕОМЕТРИЈИ[*]

Дешава се у извесним врстама математичких задатака, да се, пошавши од прецизних, несумњивих теорема и резонујући сасвим тачно, долази до резултата очевидно нетачних. Старији су математичари налазили задовољства у тражењу таквих парадокса и давали их један другоме као загонетке на решавање. Неки су од тих парадокса и сувише плитки и разлог им је нпр. у недопуштеној примени извесних, и ако потпуно тачних, теорема на случај са којим се има посла; у томе што се не води рачуна о конвергенцији каквога употребљенога бескрајнога реда; у томе што је предвиђен какав имплицитан услов; у томе, што се има посла са количинама, што имају више вредности, а међу тим све те вредности не одговарају условима задатка итд. Али их, поред ових, има и таквих, да се са чисто математичког гледишта не може наћи апсолутно никакве грешке, а резултат је ипак нетачан.

На такве се интересантне случајеве нарочито може наићи у Геометрији, где један нарочити, за све те случајеве општи разлог, чини да је поред све очевидне апсурдности резултата до кога се долази, немогућно наћи и најмању математичку грешку.

Ми ћемо навести два већ позната таква случаја, карактеристична за ствар, о којој је овде реч.

Нека су дате две једнаке дужи (сл. 1)

$$AB = CD$$

које имају такав положај, да кад се $A$ састави са $C$, а $B$ са $D$, четвороугао $ABCD$ не буде трапез, тј. да стране $AC$ и $BD$ не буду међу собом паралелне.

Из тачака $E$ и $F$, које полове праве $AC$ и $BD$ подигнимо управне до њиховог пресека у тачки $O$ и продужимо управну $EO$ до пресека $H$ са

---

[*] Наставник, Београд 1900, t. XI, 1, стр. 1–3.

правом $BD$; угао $\varepsilon$, које то продужење гради са управном $EO$ очевидно је различан од нуле. Али ако тачку $O$ спојимо са теменима $A$, $B$, $C$, $D$, лако је доказати да су троугли $AOB$ и $COD$ подударни: то излази из тога, што је

$$AO = CO, \quad BO = DO, \quad AB = CD.$$

Према томе је

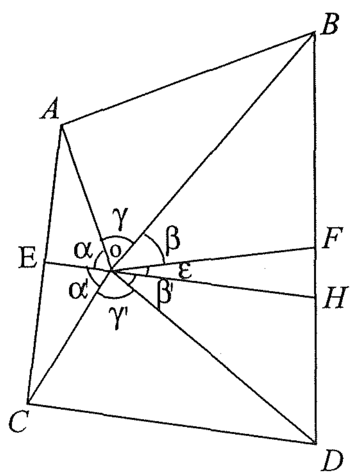
$$\angle\gamma = \angle\gamma'$$

а пошто је у исто време

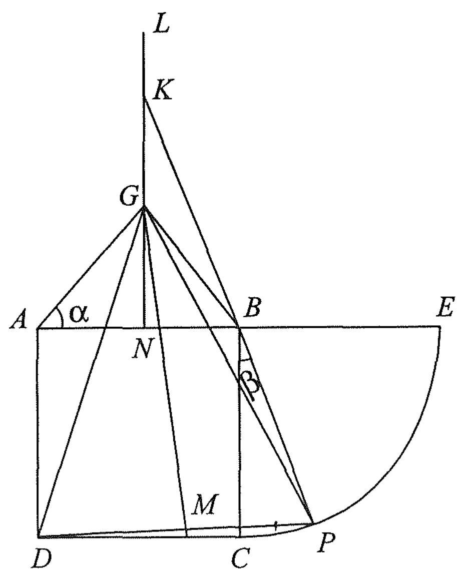
$$\alpha = \alpha' \quad \beta = \beta' + \varepsilon$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 180° = \alpha' + \beta' + \gamma'$$

то мора бити $\varepsilon = 0$. *Дакле за угао, који је очевидно различан од нуле, доказано је да је раван нули.*




*Слика 1*




*Слика 2*

Уочимо још један овакав карактеристичан пример. Нека је дат квадрат $ABCD$ (сл. 2); продужимо страну $AB$ и из темена $B$ са полупречником $AB$ опишимо лук $CE$ до пресека $E$ са продуженом страном $AB$. Повуцимо из $B$ произвољан полупречник $BP$ и означимо са $\beta$ угао $CBP$. Из тачке $N$, која полови дуж $AB$ подигнимо управну $NL$; за тим саставимо тачке $D$ и $P$ и на тачку $M$, која полови дуж $DP$, подигнимо управну $MG$, продужену до њеног пресека $G$ са правом $NL$. На послетку продужимо праву $BP$ до њеног пресека $K$ са правом $NL$ и повуцимо праве $AG$, $GD$, $GB$, $GP$.

Троуглови $GAD$ и $GBP$ подударни су, јер имају три стране једнаке

$$AG = BG, \quad DA = BP, \quad GD = GP$$

и према томе је

$$\angle GAD = \angle GBP,$$

а пошто је

$$\angle GAD = 90° + \alpha$$
$$\angle GBP = 90° + \alpha + \beta$$

*то излази да је* $\beta = 0$, *што је очевидно нетачно.*

У чему дакле лежи грешка? Она очевидно није математичке природе а извођење је правилно, основано на несумњивим теоремама и ни са које стране не може му се наћи ни најмања замерка. Грешка дакле мора бити у самим подацима: *она се мора састојати у немогућности онаквога распореда података, какав је у слици.*

И заиста, лако је уверити се и цртањем и рачуном, да на слици 1 пресечна тачка $O$ управних $EO$ и $FO$ никад не лежи у унутрашњости четвороугла $ABCD$, а ако се слика нацрта тако, да та тачка буде ван четвороугла, као што и треба да буде, не наилази се ни на какву нетачност.

Тако исто доказује се за слику 2 да ако се са $K$ означи тачка пресека праве $BP$ са управном $NL$, тачка $G$ увек се налази изнад тачке $K$, а не испод ове, као што је на слици. А кад је она изнад те тачке, не наилази се ни на какву нетачност.

Грешке овакве врсте лако је чинити нарочито онда, кад се на самој природи слике не може одмах уочити немогућност на њој означеног распореда: немогућност да се нпр. каква карактеристична тачка налази у извесној области равни или на извесном размаку какве праве, или да каква права има положај означен на слици итд. Шта више, има случајева, у којима се таква немогућност може доказати само врло пажљивим и тачним цртањем или заметним рачуном. Такви су случајеви више пута навођени као доказ надмоћности аналитичких доказа над геометријским, у погледу поузданости резултата.

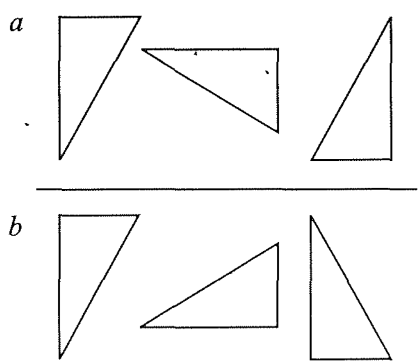
Обраћамо пажњу г.г. наставника математике на примере овакве врсте, као на интересантан и поучан предмет за студију. Било би од интереса наћи што већи број случајева, у којима се због поменуте врсте грешака долази до нетачних резултата, а где та грешка у цртању може на први поглед и не бити уочена. Поред тога, у свакоме таквом случају постоји по један положај тачака и правих, које састављају слику, а за који је погрешка најмања и најтеже пада у очи. Од интереса је тражити за дати случај такав најповољнији распоред елемената те слике.

# СТВАРНЕ И ПРИВИДНЕ ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕМОГУЋНОСТИ*

Помоћу лењира и шестара може се у равни хартије нацртати безброј геометријских слика. На тако нацртаним сликама може се поставити мноштво задатака од којих неки могу изгледати решљиви, али су у ствари нерешљиви, или обратно: могу изгледати нерешљиви, а у ствари они имају своје решење. Задаци прве врсте су *стварне геометријске немогућности,* а задаци друге врсте су *привидне геометријске немогућности.*

Тако нпр. једна иста слика може имати безброј разноврсних положаја у својој равни. Такви би нпр. били положаји правоуглог троугла означени на сл. 1*a*.

Али има и безброј положаја које првобитна слика не може никако заузети, ако се помера у равни. Такви би нпр. били положаји истога троугла *означени* на сл. 1*b*. (Покушај да тачно кажеш који су сви ти немогућни положаји).[1]



*Слика 1*

Исто тако, кад си нацртао једну слику, може се десити да, кад по њој повлачиш оловку, можеш прећи целу слику једним потезом, тј. тако да пређеш све њене саставне линије, а да ниједну од њих не пређеш више од једанпут. Такве су нпр. слике 2*a* и

---

* Прилог уџбенику А. Билимовић–Т.П. Анђелић, *Геометрија за II разред средњих школа*, Београд 1937, стр. 84–86.

[1] Интуитивно, подударност фигура описујемо тако што кажемо да једну од њих можемо померати, тако да је тим померањем долазило до поклапања са другом. „Материјализујући" те фигуре у виду жетона, померање до поклапања некад иде, а некад никако не иде без превртања супротне стране једног од тих жетона. Такође нам може

*b*, или слика 2*c*, која по предању представља Мухамедов потпис, или *замршена слика* 2*d* коју је саставио немачки геометар Листинг, или четворострука осмица (сл. 2*e*) итд.

Али има и слика које је немогућно тако прећи *једним потезом*, већ, пошто си један део слике тако прешао, мораш оловку подићи па почети друго повлачење од друге неке тачке на слици. Такве су нпр. три слике 3 *a*, *b*, *c*.

А има и таквих слика, код којих се то прекидање мора извршити и више од један пут док се цела слика не пређе. Такве су нпр. слике 3 *d*, *e*, *f*. (Провери колики је најмањи број прекидања са којим се може прећи цела слика, за сваку од три слике 3 *d*, *e*, *f*, као и за какву сличну слику коју ћеш сам нацртати).

---

изгледати да исто жетони имају неправилнији облик да ће такво поклапање бити тим теме.

Формално, две фигуре у равни $A$ и $A'$ су подударне ако постоји пресликавање

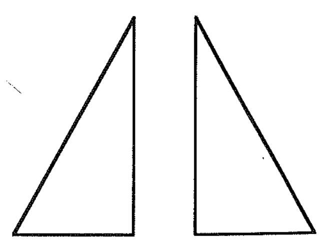
$$f : A \to A'$$

које је „на" и које чува растојања, тј. за сваке две тачке $a_1, a_2 \in A$

$$d\big(f(a_1), f(a_2)\big) = d(a_1, a_2).$$

Такво пресликавање $f$ називамо изометрија. Наведимо сад следећу фину геометријску теорему: Свака изометрија у равни је *транслација*, *ротација*, односно *симетрија* или је пак композиција *транслације* и *ротације* односно *транслације* и *симетрије*.

Враћајући се на описни језик, горња нам теорема каже да било које две подударне фигуре можемо довести до поклапања правећи највише два елегантна покрета, од следећих три: транслирајући, ротирајући или симетрично пребацујући једну од фигура. Као симетрично пребацивање мора бити укључено у реализацији подударности двеју фигура, тада кажемо да су оне *различито оријентисане*. Трагови у снегу наше леве и десне ципеле личе на подударне фигуре које су различито оријентисане. Слично, многе исте симетричне слике имају половине које су подударне али различито оријентисане (а што у природном језику изражавамо речима „леви" и „десни").



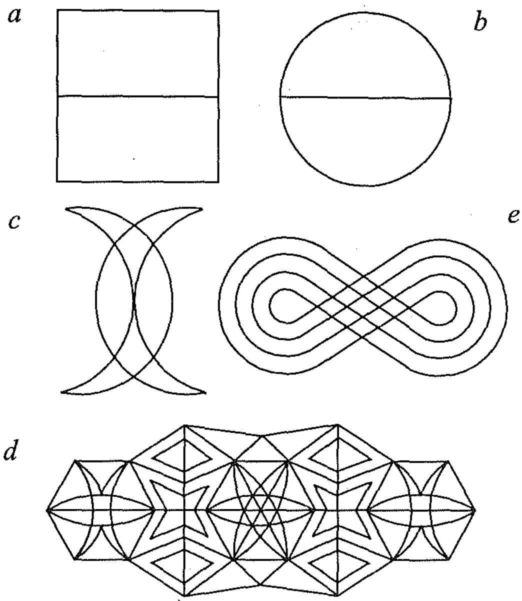
a) b)

Наведимо и овај занимљиви задатак са неке од руских олимпијада: Торту са послуживаоника под *a*), пребацити на послуживаоник под *b*), а да се лице торте не поквари (тј. без превртања).

(Разрежите ножем торту по линији од темена правог угла до средине хипотенузе. Те ћете делове лако пребацити, без превртања.)

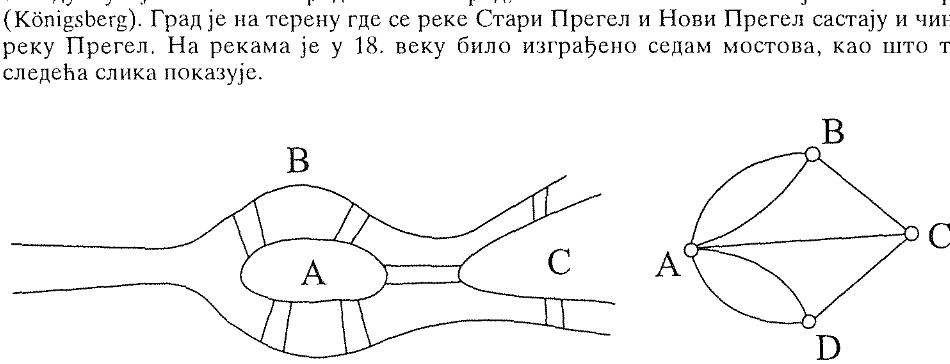
На таквим сликама може имати *чворова,* тј. тачака из којих полазе на разне стране више од две линије. Кад из једног чвора полазе линије у непарном броју, он се зове *непаран чвор*. Провери тачност тврђења: да би се слика могла прећи једним потезом, потребно је и довољно да она или нема ниједан непаран чвор, или да има свега два таква чвора.[2]

Према томе провери да је могуђно прећи једним потезом правилни петоугаоник са свима његовим дијагоналама (јер слика нема ниједан непаран чвор), а да је немогуђно тако прећи квадрат са његовим дијагоналама (јер слика има четири непарна чвора).

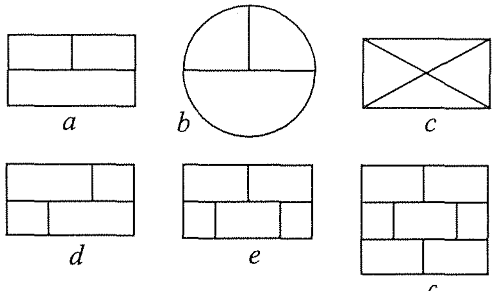



*Слика 2*

[2] Проблем „прелажења једним потезом" има интересантну историју. Наиме, на западу Русије налази се град Калининград, а његово немачко име је Кенигсберг (Königsberg). Град је на терену где се реке Стари Прегел и Нови Прегел састају и чине реку Прегел. На рекама је у 18. веку било изграђено седам мостова, као што то следећа слика показује.

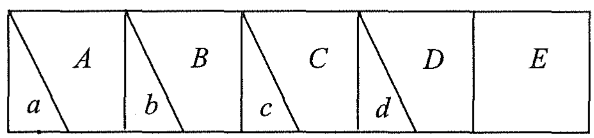



„Проблем Кенигсбершких мостова" био је да се испланира шетња у оквиру које би се сваки мост прешао тачно једанпут. Проблем је решио велики класични математичар Ојлер (Leanhard Euler, 1707–1783), представљајући подручја града тачкама и мостове линијама које их спајају.




*Слика 3*

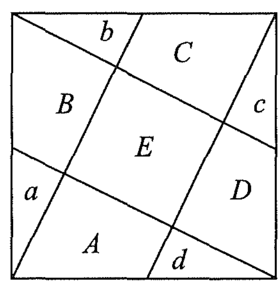
То би били примери стварних геометријских немогућности. Али има и *привидних геометријских немогућности*, тј. задатака за које би се на први мах могло помислити да су нерешљиви, а међутим они ипак имају своје потпуно и тачно решење.




a

Такав би нпр. био задатак: сложити пет датих квадрата тако да се од њих добије један квадрат. Задатак је, поред све своје привидне неодређености, потпуно решљив и решење се састоји у овоме: треба четири квадрата исећи онако како је означено на слици 4*a* па комаде сложити онако како је означено на слици 4*b*.

b




*Слика 4*

---

Тако се добија граф, а проблем се своди на то да се он нацрта у једном потезу, и тада кажемо да је тај граф описив.

Од Ојлера и потичу тврђења да сваки граф има паран број темена (чворова) непарног реда и да је описив само онда кад је тај број 0 или 2. Сва темена (њих 4) графа на горњој слици су непарног реда, па он није описив, нити је поменута шетња могућа.

Проблем Кенигсбершких мостова и његово решење су изванредна илустрација ефектности апстрактног начина мишљења.

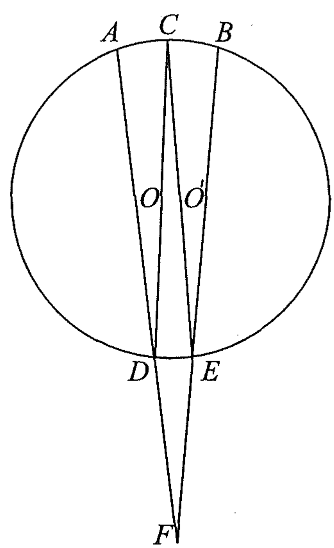
Сличан би био и задатак: исећи дати квадрат на двадесет троуглова, из којих би се могло саставити пет квадрата. Довољно је приметити да се сваки од комада $A$, $B$, $C$, $D$ може поделити на три једнака троугла, а квадрат $E$ на четири таква троугла.**

---

** Изложен Петровићев чланак поновљен је и у следећем издању Билимовић–Анђелићеве *Геометрије* (II, 1942), а Друштво математичара и физичара НР Србије објавило га је у књизи: Михаило Петровић, *Чланци*, Београд 1949, стр. 13–15 (пр. Д. Т.).

# ПОГРЕШНИ ГЕОМЕТРИЈСКИ ЗАКЉУЧЦИ ИЗ НЕПАЖЉИВО НАЦРТАНЕ СЛИКЕ*

У ранијем уџбенику за *Геомеӣрију* (II разред) наведено је све што треба знати за геометријско цртање. Поред употребе правила, која су за то наведена, цртање, чак и онда кад би за оно што се има у виду била довољна и само овлашна слика, треба вршити са пажњом, вољом и што је могуђно већом тачношћу. Кад би од непажње, или овлашности, произашла само недовољно тачна слика, али која је ипак довољна за геометријски закључак што се мисли из ње извући, та нетачност не би ништа кварила и са таквом би се сликом могло радити. Али се дешава да једна мала, на први поглед безначајна нетачност, коју је немогућно запазити ако се сасвим тачно не црта, доведе до слике која, и кад се најправилније и најтачније протумачи оно што се на њој види, води до потпуно погрешних, нетачних геометријских закључака.



*Слика 1*

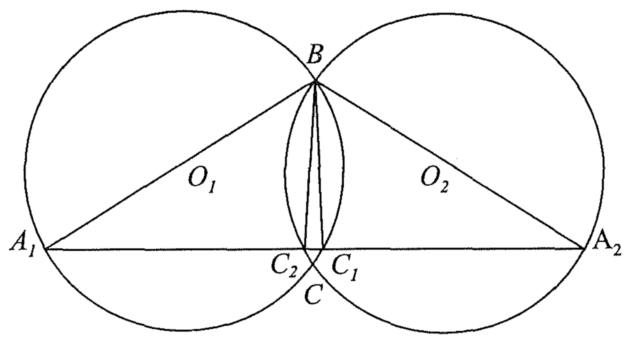
Да се тако шта одиста, и врло лако, може десити, видеће се из ових простих геометријских примера.

**1.** Нека је $AFB$ један ма какав оштар угао (сл. 1). Из двеју произвољних тачака $A$ и $B$ на његовим крацима повуци управне $AC$ и $BC$ чија пресечна тачка нека је $C$. Кроз три тачке $A$, $B$, $C$ повуци један круг, па нека су $D$ и $E$ његове пресечне тачке са крацима угла. Пошто је угао $DAC$ прав, то је $DC$ један пречник круга, а средина $O$

* Прилог уџбенику А. Билимовић–Т.П. Анђелић, *Геомеӣрија за III разред средњих школа,* Београд 1938, стр. 78–80.

тога пречника је средиште круга. Тако исто, пошто је угао $CBE$ прав, то је $EC$ један пречник круга, а средина $O'$ тога пречника је такође средиште истога круга. Тај круг дакле има више од једнога средишта.

Како је то могуће? Закључци са слике, онакве каква је, у свему су тачни; значи да не ваља слика. И одиста, да се тачно цртало, запазило би се да круг пролази кроз само теме $F$ угла $AFB$, а не кроз тачке $D$ и $E$ на крацима угла; у томе случају тачке $D$ и $E$ се поклапају са $F$, оба се пречника поклапају са пречником $CF$, а оба средишта падају у једну тачку, у право средиште круга. Из нетачне слике добијен је дакле, правилним закључивањем погрешан резултат.[1]




*Слика 2*

**2.** Нацртај два круга са средиштем у $O_1$ и $O_2$, који се секу у тачкама $B$ и $C$ (сл. 2). Повуци полупречнике $BO_1$ и $BO_2$ и продужи их до пресека $A_1$ и $A_2$ са круговима. Састави тачке $A_1$ и $A_2$ правом $A_1A_2$ и нека су $C_1$ и $C_2$ пресечне тачке те праве са круговима. Угао $BC_1A_1$ је прав, пошто је уписан у полукругу једнога круга. Тако исто и угао $BC_2A_2$ је прав, јер је уписан у полукругу другога круга. Према томе, из тачке $B$ могу се спустити две управне на једну исту праву $A_1A_2$.

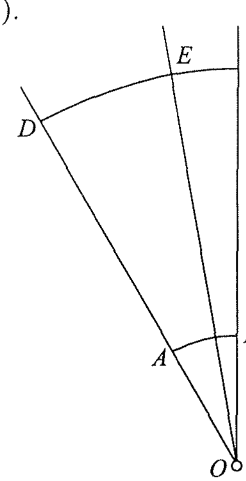
Како то може бити? Ево како: тачно одређена слика показала би да права $A_1A_2$ увек пролази кроз тачку $C$, тако да не постоје две тачке $C_1$ и $C_2$, већ се обе поклапају у тачки $C$; права $BC$ је тада једина управна из $B$ на $A_1A_2$, а нема их две.

**3.** Нека је $AOB$ ма какав угао (сл. 3). Продужимо му краке до тачака $C$ и $D$ тако да је

$$OC = 3 \cdot OB; \quad OD = 3 \cdot OA,$$

[1] Мисли се на правилно закључивање ослањањем на такву слику.

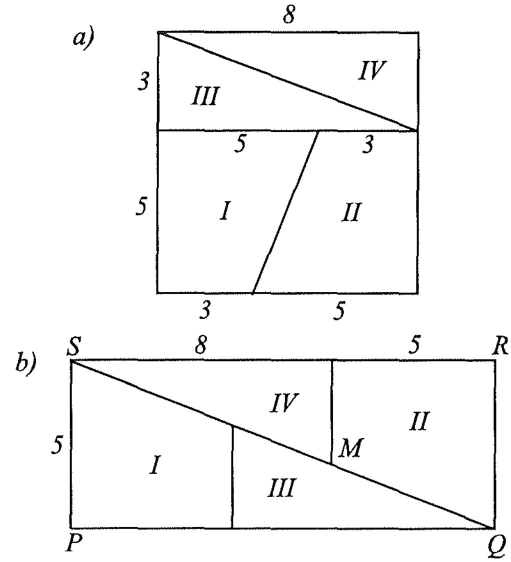
па из $O$ као средишта опишемо кружне лукове $BA$ и $CD$. Пошто лук $CD$ има полупречник три пута већи од полупречника лука $BA$, то је он три пута дужи од лука $BA$; лук $BA$ је, дакле, једнак једној трећини лука $CD$. Тај лук $BA$ може се, дакле, тачно три пута пренети на лук $CD$, па ће тиме овај бити подељен на три једнака дела. Тиме би се, дакле, управо добила тачна подела датог угла на три једнака дела (задатак који се назива „трисекција угла").




*Слика 3*

Међутим, као што ћеш доцније сазнати, доказано је да се трисекција угла не може ни на који начин извести помоћу шестара и лењира, то јест помоћу праволинијских и кружних слика. Па где је онда грешка? Ево где је: Кад би слику са пажњом цртао, приметио би да се лук $BA$ не може преносити на лук $CD$; то би могло бити само кад би они имали исте полупречнике, а то овде није случај. У ствари, ти можеш на лук $CD$ преносити, не лук $BA$, већ само његову тетиву, али тада ћеш се тачним цртањем уверити да се ова не може тачно три пута пренети дуж лука $CD$. Па пошто, на једноме истом луку $CD$ једнаким тетивама одговарају и једнаки лукови чије су то тетиве, то ни тај лук неће крајњим тачкама тих узастопно пренесених тетива бити тачно подељен на три једнака дела.

**4.** Нека је дат квадрат чија је страна једнака 8 сантиметара. Исеци га на четири дела I, II, III, IV онако како је то означено на слици (сл. 4 *a*), па те делове сложи овако како је то означено на другој слици (сл. 4 *b*). Тако се добија један правоугаоник чије су стране 5 cm и 13 cm. Тај правоугаоник и првобитни квадрати имају једнаке површине, јер ништа није ни додато ни одузето при исецању првобитне слике и склапању друге. Међутим квадрат има површину од $8 \cdot 8 = 64$ квадр. сантиметара, а правоугаоник површину од $5 \cdot 13 = 65$ квадр. сантиметара. Како је то могуће и у чему је грешка? Да си слике тачно цртао и тачно саставио исечке квадрата запазио би да слика 4 *b* није тачан правоугаоник, већ да би му требало одузети један делић површине, па да то буде, а тај делић износи управо један квадратни сантиметар. Његова дијагонала *SQ* није права већ преломљена линија, али је прелом тако слаб да се само кад се тачно ради може запазити. Доцније, кад будеш научио више рачунати са угловима, наћи ћемо да два комада те преломљене линије захватају међу собом угао од 1° 14′ 43″.




*Слика 4*

Из ових примера се јасно види да је, при геометријском цртању, корисно стећи навику да се црта са што је могућно већом пажњом и тачношћу, па чак и онда кад би се на први поглед могло задовољити и са овлашно израђеном сликом. Ако се нема таква стална навика, може се у каквој прилици десити да се на слици превиди каква ситна стварчица која може собом повући озбиљне последице, у облику крупних геометријских грешака и неистина, као што је то случај са напред наведеним примерима.

Осим тога на пажљиво израђеној слици често се може разазнати понешто на што се не би ни помишљало, или би га било тешко геометријски уочити и доказати, као што је, на пример, пресецање правих линија или кружних лукова у једној тачки, нарочити положај какве тачке са којом се има посла у задатку, према некој утврђеној тачки, или скупу утврђених тачака итд. А кад се тако шта на слици запази простим посматрањем, лакше се и са више воље то затим и размишљањем показује, но што би било кад се на слици не би видело да је одиста тачно.**

---

** Изложен Петровићев чланак поновљен је и у следећим издањима Билимовић-Анђелићеве *Геометрије* (II, 1942; III, 1943), а Друштво математичара и физичара НР Србије објавило га је у књизи: Михаило Петровић, *Чланци*, Београд 1949, стр. 16–19 (пр. Д. Т.).

# НЕОДРЕЂЕНИ, НЕМОГУЋНИ И НЕПОТПУНО ОДРЕЂЕНИ ПЛАНИМЕТРИЈСКИ ЗАДАЦИ*

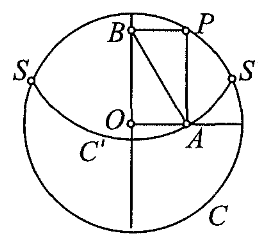
Планиметријски задаци решавају се или *геометријски* (конструкцијама) или *рачуном*. Мноштво планиметријских задатака, кад се решавају рачуном, своде се на једначину са једном непознатом; непозната дужина у задатку добија се решењем такве једначине.

Свака једначина првог степена са једном непознатом има решење, корен једначине. У планиметријским задацима та решења треба да имају смисла према геометријском значењу непознате $x$.

Али, дешава се у појединим задацима да, поред свега тога што унапред изгледа да ће једначина задатка насигурно бити првог степена по непознатој $x$, она се у крајњем резултату јавља у бесмисленом облику $a = b$, где су $a$ и $b$ два међу собом различита броја, и то ма каква била вредност непознате $x$, или се јавља у облику $a = a$ који не показује ништа.

Кад се добије тако што, закључује се да је задатак бесмислен, *немогућан*, тј. да не постоји никаква вредност непознате $x$ која задовољава услове задатка, а у неким посебним случајевима, да је задатак *неодређен*, тј. да свака вредност $x$ испуњава те услове.

Понекад се може одмах, и без икаквог рачунања, запазити да је задатак немогућан или неодређен. Тако, нпр., из произвољне тачке $P$ на кругу $C$ (сл. 1) спустимо управне $PA$ и $PB$ на два међусобно управна пречника круга, па тражимо да се одреди положај тачке $P$ тако да се кружни лук $SS'$ описан из тачке $B$ као центра са полупречником $BA$ поклопи са луком круга $C'$ чија је површина за дато $h$ већа или мања од површине круга $C$.



*Слика 1*

---

* Прилог уџбенику А. Билимовић–Т.П. Анђелић, *Геометрија за V разред средњих школа*, Београд 1940, стр. 157–160.

Пошто је дужина $BA$ једнака растојању тачке $P$ од средишта $O$ круга $C$, а ово је растојање једнако полупречнику тог круга, то је задатак очевидно *немогућан* кад се $h$ разликује од нуле, а неодређен кад је $h = 0$, јер у овоме последњем случају услов задатка је задовољен, па ма где се на кругу налазила тачка $P$.

Али то није свакад тако очигледно, па се немогућност или неодређеност задатка може запазити само кад се склопи једначина која изражава услов задатка.

Да би се имао један пример задатка такве врсте, подсетимо се да се под *аритметичком средином* двеју дужи $a$ и $b$ разуме дуж $\frac{a+b}{2}$, а под њиховом *геометријском средином* дуж $\sqrt{ab}$ (Како се конструишу те две средине помоћу датих дужи $a$ и $b$?).

Нека су $b$ и $c$ две дате утврђене дужи, а $x$ једна трећа, промењљива дуж, па помоћу њих конструишемо

1) аритметичку средину $p$ дужи $b$ и $c$, тј.

$$p = \frac{b+c}{2};$$

2) геометријску средину $q$ дужи $x + b$ и $x + c$, тј.

$$q = \sqrt{(x+b)(x+c)};$$

3) дужину $d = x + p$;

4) катету $l$ правоуглог троугла чија је једна катета $q$, а хипотенуза дужине $d$, тј.

$$l = \sqrt{d^2 - q^2}.$$

Поставимо тада задатак: Колика треба да је дуж $x$, па да дуж $l$ буде једнака једној унапред датој дужи $h$?

Из услова задатка треба да је

$$l^2 = d^2 - q^2 = (x+p)^2 - (x+b)(x+c) = p^2 + (2p - b - c)x - bc,$$

па кад се на десној страни $p$ смени својом вредношћу, члана са $x$ нестаје и једначина се своди на

$$l^2 = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

За $l$ се, дакле, добија једна од вредности

$$\frac{b-c}{2}, \frac{c-b}{2}, 0,$$

према томе да ли је дуж $b$ већа или мања од $c$, или су те две дужи једнаке.

Према томе имаће се ова два случаја:

1) ако се $\frac{1}{2}(b-c)$, односно $\frac{1}{2}(c-b)$ разликује од дате дужи $h$, задатак је *немогућан,* јер ни за какво $x$ неће бити $l = h$;

2) ако је $\frac{1}{2}(b-c)$, односно $\frac{1}{2}(c-b)$ једнако дужи $h$, задатак је *неодређен*, јер за свако $x$ биће $l = h$, па $x$ остаје потпуно неодређено.

*

Кад би се тражило да се, знајући само збир $s$ двеју катета $a$ и $b$ правоуглог троугла, израчуна његова хипотенуза $x$, одговорило би се да је задатак без смисла, неодређен, јер да би се помоћу катета израчунала хипотенуза, треба да су познате обе катете понаособ, а не само њихов збир.

Међутим, није баш сасвим тако. Задатак истина није потпуно одређен, али није ни потпуно неодређен; о хипотенузи се ипак може нешто казати што није баш тако очигледно. Тако, из идентичности коју је лако проверити

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\left[(a+b)^2 + (a-b)^2\right]$$

деобом са $(a+b)^2$ добија се да је

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2,$$

што показује да количник

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{x^2}{s^2}$$

има вредност већу од $\frac{1}{2}$, тј. да је $x$ веће од $\frac{s}{\sqrt{2}}$.

А из идентичности

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

добија се деобом са $(a+b)^2$ да је

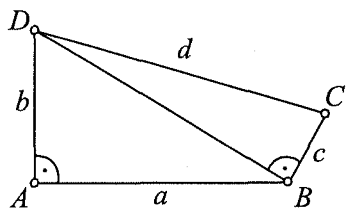
$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = 1 - \frac{2ab}{(a+b)^2},$$

што показује да исти количник $\frac{x^2}{s^2}$ има вредност мању од јединице, тј. да је $x$ мање од $s$. А пошто је

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071,$$

из тога се закључује *да се дужина хипотенузе увек налази између две дужи* 0,7071 $s$ и $s$, а такав резултат ипак казује нешто доста одређено.[1]

Сличан случај је и са овим задатком:



*Слика 2*

Дат је четвороугао $ABCD$ (сл. 2) у коме су угао између страна $AB$ и $AD$ и угао између стране $BC$ и дијагонале $BD$ прави.

Знајући збир $s$ страна $a$, $b$, $c$ израчунати четврту страну $d$ четвороугла.

Из слике је

$$d^2 = CD^2 = CB^2 + BD^2, \quad CB = c, \quad BD^2 = a^2 + b^2$$

и према томе

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Из идентичности коју је лако проверити

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}\left[(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right]$$

деобом са $(a+b+c)^2$ добија се да је

---

[1] Овај Петровићев „закључак" може се написати у облику неједнакости

(I) $$\frac{1}{\sqrt{2}} s \le x \le s.$$

Очигледно, ова се неједнакост могла добити на више различитих начина. На пример, из познате Петровићеве неједнакости за позитивну конвексну функцију $f(x)$ у интервалу $(a, b)$

$$f(\mu_n) \le M_n \le \frac{f(n\mu_n) - (n-1)f(0)}{n},$$

где је

$$\mu_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),\ M_n = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right)$$

и

$$x_n \ge 0, \quad x_n \in (a,b), \quad n\mu_n \in (a,b)$$

за свако $n$. Ако посматрамо функцију $f(x) = x^2$, тада за две вредности $x_1, x_2 > 0$ једноставно се добија Петровићева неједнакост (I) (пр. Д. Т.).

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}=\frac{1}{3}+\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{(a+b+c)^2}$$

из чега се види да количник

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}=\frac{d^2}{s^2}$$

има вредност већу од $\frac{s}{\sqrt{3}}$.

А из идентичности

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$$

деобом са $(a+b+c)^2$ добија се да је

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}=1-2\frac{ab+ac+bc}{(a+b+c)^2},$$

што показује да количник $\frac{x^2}{s^2}$ има вредност мању од 1, тј. да је страна $d$ мања од $s$. А пошто је

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}5774,$$

из тога се закључује да се дужина стране $d$ увек налази између дужи 0,5774 $s$ и $s$, а то такође казује нешто доста одређено.[2]

Такви су задаци многобројни, а њихова решења у показаноме облику показују да, поред све њихове привидне неодређености, они имају смисла, иако на први поглед могу изгледати бесмислени.[**]

---

[2] И код ове Петровићеве неједнакости

(II) $$\frac{1}{\sqrt{3}}s\le d\le s,$$

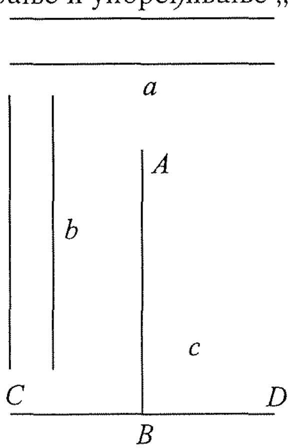
где је $s=a+b+c$, користећи се истом функцијом $f(x)=x^2$ за три вредности $a, b, c>0$, једноставно се добија (II) (пр. Д. Т.).

[**] Овај Петровићев чланак поновљен је и у следећем издању Билимовић–Анђелићеве *Геометрије* из 1944. године, а Друштво математичара и физичара НР Србије објавило га је у књизи: Михаило Петровић, *Чланци*, Београд 1949, стр. 25–29 (пр. Д. Т.).

# ВАРЉИВОСТ ОКА ПРИ УПОРЕЂИВАЊУ ДУЖИ И ПОВРШИНА*

Напред је, у овој књизи, показано како се међу собом упоређују две дужи и како се за то користи шестар. Помоћу те просте справе лако се одређује која је од две посматране дужи већа, или се утврђује да су оне међу собом једнаке. То исто се може урадити и помоћу обичног школског лењира подељеног на сантиметре и милиметре, на начин напред показан.

Ако се нема при руци ни шестар ни лењир, упоређивање се врши простим посматрањем обе дужи, или како се то каже „одока”. Извежбано око ће се ретко кад при таквом упоређивању преварити и наћи да је једна дуж већа од друге, ако су оне једнаке. Неизвежбано око може се лако понекад преварити и наћи нешто што није тачно, нарочито кад је при посматрању пажња недовољна и површна. Свако посматрање и упоређивање „одока” треба увек најпажљивије вршити, иако нам није увек потребна ни велика извежбаност ни нарочита пажња, па да упоредимо величине две дужи. Скоро увек то се види на први поглед. Само у неким случајевима, кад су дужи нарочито постављене једна према другој или кад су придодати неки додаци смишљени да варају око, може се варљивост ока показати под условом, да не пазимо довољно.



*Слика 1*

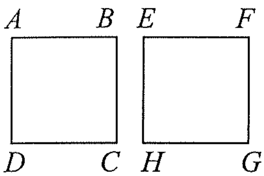
Тако се, нпр., нико неће преварити у упоређивању две дужи, ако су оне постављене једна поред друге онако као на сл. 1*a* или на сл. 1*b*. Свако ће на први поглед наћи да су оне једнаке међу собом. Али ће му се

---

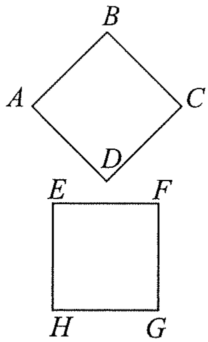
* Прилог уџбенику А. Билимовић–Т. П. Анђелић, *Геометрија за I разред средњих школа*, Београд 1940, стр. 73–76.

причинити, бар на први поглед без довољно пажње, да је дуж $AB$ већа од дужи $CD$ (иако су оне потпуно једнаке), кад су дужи постављене нормално једна на другу као на слици 1$c$.

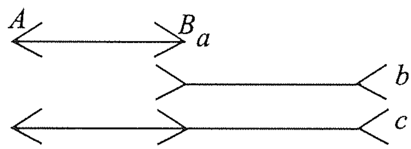
Нешто слично важи и за површине. Тако, нпр., за површине квадрата $ABCD$ и $EFGH$ постављених онако као на слици 2, свако ће и на први поглед наћи да су једнаке. Али ако су ти квадрати постављени онако као на слици 3, оку, без довољно пажње, причиниће се квадрат $ABCD$ већи од квадрата $EFGH$, иако су подударни квадрати.




*Слика 2*



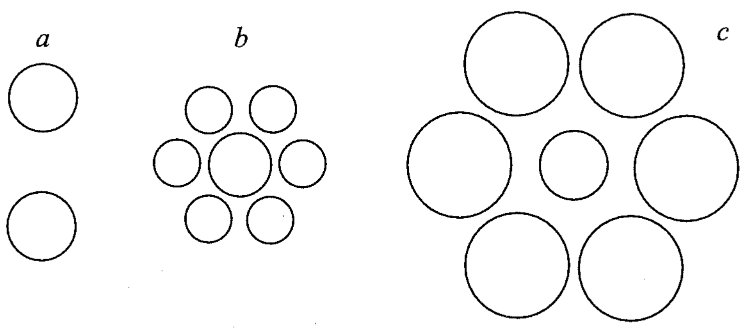

*Слика 3*




*Слика 4*

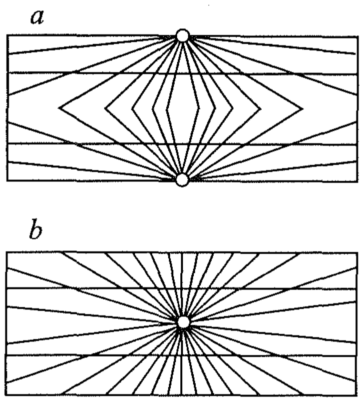
Таква варљивост ока показаће се и у случајевима кад се посматраној дужи или површини, како рекосмо, придају неки делови нарочито срачунати на то да изазову обману вида. То ће се видети из ових примера.

Кад се на крајевима дужи $AB$ нацрта по једна стрелица, најпре онако, како је на сл. 4$a$, а затим онако како је на сл. 4$b$ или 4$c$, оку ће се причинити, да је дуж на сл. 4$b$ и десна дуж на сл. 4$c$ већа од оне на сл. 4$a$, мада су оне све једнаке.




*Слика 5*

Кад се нацртају два једнака круга један поред другога (сл. 5$a$), онда се одмах види, да су једнаки. Ако један од њих окружимо мањим круговима као на сл. 5*b*, а други већим круговима као на сл. 5*c*, онда ће, кад се не пази довољно, круг на слици 5*b* изгледати већи од круга на слици 5*c*.




*Слика 6*

Такви нарочити додаци могу учинити и то да се и сам облик слике оку причињава *другојачи* но што је у ствари. Тако, нпр., ако се, пошто су повучене две паралелне праве на једној слици нацрта већи број косих правих линија као на сл. 6*a*, а на другој онако како показује сл. 6*b*, оку ће се причинити, да су на слици 6*a* те две паралелне праве у средини мало приближене једна другој, а на сл. 6*b* размакнуте једна од друге.

Кад имамо пред очима слике предмета који су у простору, онда треба пазити још више, јер је тамо још много лакше погрешити. За сада нека нам остане у памети, да око може да нас превари, ако нисмо довољно пажљиви и опрезни. Та варљивост ока нестаје кад се ствари посматрају пажљиво, а нарочито кад се зна на шта треба обратити нарочиту пажњу; али она може довести до погрешних процена, ако се ствар посматра овлаш и задовољи се са оним што се оку учини на први поглед. Оно што неће преварити, то је упоређивање вршено, не овлашним процењивањем „одока", већ мерењем на начин са којим си се већ упознао. За таква упоређивања мерењем има и много савршенијих инструмената од обичног шестара и школског лењира.[1]

---

[1] Напоменимо да су „варљивост ока" и „обмана вида" сликовито изражавање у случајевима визуелних илузија, које стварамо зависно од положаја неког објекта у оквирима различитих целина, у којима се он јавља као њихов део.

Напоменимо такође да перцепција није пуко виђење него и интерпретација тог виђења. Тако два подударна круга, нацртана на истом листу папира, имају подударне пројекције на мрежњачи (пуко виђење), али је наша интерпретација зависна од тога окружују ли их, на пример, већи или мањи кругови, као што то видимо на сл. 5*a* и 5*b*.

Илузије драматично илуструју принцип да *перцепција дела зависи од целине*, а тај принцип важи и шире, тј. не само у случају „варљивих" визуелних представа.

Читаоцу, са могуће ширим интересовањем за овакве садржаје, препоручујемо књигу В. Келер, *Гешталт психологија*, Нолит, 1985.

# СТЕРЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ*

Кад се једна количина $V$, из буди каквих разлога, не може тачно израчунати,[1] од интереса је наћи такве две количине $M$ и $N$ да се може поуздано тврдити да вредност $X$ није већа од $M$, ни мања од $N$. То се рачунски изражава *двосшруком неједначином*

$$N \leq X \leq M, \tag{1}$$

а геометријски на тај начин што се на бројној линији, која се пружа од $-\infty$ до $+\infty$, означи да тачка $X$ лежи између двеју тачака $M$ и $N$, или се са којом од њих поклапа.

До двоструких неједначина (1) долази се на разноврсне начине, према задатку са којим се има посла. Један од општијих начина, који се може искористити при стереометријским израчунавањима, основан је на употреби ових правила:

*Прво йравило.* – Кад су $a$ и $b$ два броја од којих ни један није негативан, увек је

$$0 \leq ab \leq \frac{(a+b)^2}{4},$$

што непосредно следује из идентичности

$$ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right].$$

---

* Српска академија наука, Зборник радова, књ. XXXV, Математички институт, књ. 3, Београд 1953, стр. 1–4. Овај чланак требало је да буде штампан као прилог у уџбенику *Геомеирија* за VI разред гимназије од А. Билимовића и Т. П. Анђелића. М. Петровић је предао писцима чланак фебруара 1941, а сачувао га је Т.П. Анђелић. – Исте, 1953. године овај је чланак објављен и у Настави математике и физике у средњој школи, Београд 1953, t. II, 4, стр. 181–183 (пр. Д. Т.).

[1] Мисли се да није одређен.

*Друго правило.* – Кад од $n$ бројева $a$, $b$, $c$, ... ниједан није негативан, увек је

$$\frac{(a+b+c+\ldots)^2}{n} \leq a^2+b^2+c^2+\ldots \leq (a+b+c+\ldots)^2,$$

што непосредно следује из двеју идентичности, лаке за проверавање

$$n(a^2+b^2+c^2+\ldots) = (a+b+c+\ldots)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2+\ldots,$$

и

$$a^2+b^2+c^2+\ldots = (a+b+c+\ldots)^2-2(ab+ac+bc+\ldots).$$

У стереометријским задацима се често наилази на изразе у којима се налазе производи двеју количина, или збирови квадрата двеју или више количина. Кад се на такве изразе примене горе наведена правила, долази се до *стереометријских неједначина* које могу имати своје занимљивости и интереса. То ће се видети из примера што следују.

1. *пример.* – Задатак да се израчуна запремина $V$ зарубљене купе, кад јој се зна висина $h$ и полупречник $\rho$ њеног средњег круга, не може се ни на који начин тачно решити. Али, као што се зна, ако се са $r$ и $r'$ означе полупречници кружних основица купе, а са $h$ њена висина, биће

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2+r'^2+rr'). \tag{2}$$

Па пошто је, према горњим правилима,

$$\frac{(r+r')^2}{2} \leq r^2+r'^2 \leq (r+r')^2, \quad 0 \leq rr' \leq \frac{(r+r')^2}{4},$$

а

$$\rho = \frac{r+r'}{2}, \quad (r+r')^2 = 4\rho^2,$$

то се према обрасцу (2) добива да је

$$V \leq \frac{\pi h}{4}(4\rho^2+\rho^2), \quad V \geq \frac{\pi h}{3}(2\rho+0),$$

према чему се за запремину $V$ добива двострука неједначина[2]

---

[2] Лако је извести следећу оштрију неједнакост

$$\pi h\rho^2 \leq V \leq \frac{4\pi}{3}h\rho^2.$$

Нека је $r = x$, $r' = 2\rho - x$, где $\rho \leq x \leq 2\rho$, тада функција

$$(2') \qquad \frac{2\pi}{3}h\rho^2 \le V \le \frac{5\pi}{3}h\rho^2.$$

Из тога се нпр., изводи закључак да не постоје две зарубљене купе које имају исти средњи круг и исту висину, а од којих би једна била, по запремини, више од $2^1/_2$ пута већа од друге.

2. *пример*. – Задатак да се израчуна запремина $V$ лоптиног слоја, кад се зна висина $h$ слоја и полупречник $\rho$ *његовог средњег круга*, такође се не може решити. Али, као што се зна, ако се са $r$ и $r'$ означе полупречници кругова што ограничавају слој, биће

$$(3) \qquad V = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h}{2}(r^2 + r'^2).$$

Пошто је $r + r' = 2\rho$, а према горњем правилу је

$$2\rho^2 \le r^2 + r'^2 \le 4\rho^2,$$

то се према обрасцу (3) добива да је,

$$\frac{\pi h^3}{6} + \pi h\rho^2 \le V \le \frac{\pi h^3}{6} + 2\pi h\rho^2.$$

Покушај да то искажеш у облику геометријског правила.

3. *пример*. – Задатак да се израчуна збир

$$S = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

квадрата углова ма каквог сферног троугла такође је нерешљив. Али, као што се зна, збир $(\alpha + \beta + \gamma)$ увек је већи од 180°, а мањи од 540°, или (кад се услови изразе у деловима равнога угла), тај је збир увек већи од $\pi$, а мањи од $3\pi$.

Према горњем правилу за $n = 3$ је

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3} \le S \le (\alpha+\beta+\gamma)^2.$$

Пошто је

$$\alpha+\beta+\gamma < 3\pi, \quad \alpha+\beta+\gamma > \pi,$$

---

$$V(x) = \frac{\pi h}{3}\left(x^2 + (2\rho - x)^2 + (2\rho - x)\right) = \frac{\pi h}{3}\left[(\rho - x)^2 + 3\rho^2\right],$$

за $x = \rho$ има минимум $V(\rho) = \pi h\rho^2$ (случај кад је зарубљена купа ваљак) и за $x = 2\rho$ максимум $V(2\rho) = \frac{4\pi}{3}h\rho^2$ (случај кад је зарубљена купа баш купа).

то је

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 9\pi^2, \qquad \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3} > \frac{\pi^2}{3},$$

из чега се изводи двострука неједначина

$$\frac{\pi^2}{3} < S < 9\pi^2.$$

Из тога се нпр. лако изводи закључак да не постоје два сферна троугла таква да је збир квадрата углова једнога од њих више од 27 пута већи од збира квадрата другога троугла.

*

У стереометрији има доста таквих тачно нерешљивих задатака, али за које се могу на показани начин поставити двоструке неједначине, што бар приближно одређују непознате вредности. Покушај да сам нађеш који од ових задатака.**

---

** Неједнакост (2′) била је предмет следећих радова: Б. Мартић, *Примедба на једну стереометријску неједначину М. Петровића*, САН, Зборник радова, књ. LXIX, Мат. Институт, књ. 8, Београд 1960, стр. 131–132; Д. Трифуновић, *Стереометријске неједначине*, MFL, Загреб 1956/57, t. VII, 2, стр. 55–58; Д.С. Митриновић, *Геометријске неједнакости*, Мат. библ., књ.31, Београд 1966, стр. 166; реферат у MR, XV, 7, p. 643; П. Васић, *Геометријске неједнакости у радовима Михаила Петровића*, Мат. библ., књ. 38, Београд 1968, стр. 105–112. У књизи Д. Трифуновић, *Моделно тумачење раста,* Шумарски факултет, Посебна издања, књ. 11, Београд 1995, стр. 68 изложена је потпуно другачија процена запремине трупца, тј. неједнакости (2′), а у књизи Д. Трифуновић, *Летопис живот и дело Михаила Петровића*, САНУ, Београд 1969, на стр. 420 показано је да је професор Антон Билимовић још 1953. године показао пооштрење Петровићеве неједнакости за запремину зарубљене купе (пр. Д. Т.).

# ЈЕДНО ПИТАЊЕ ИЗ НАСТАВЕ О ЛОГАРИТМИМА*

Гаусови логаритми дају могућност да се израчуна логаритам збира или разлике два броја, кад се знају логаритми самих тих бројева, а без потребе да се ови бројеви претходно израчунају помоћу обичних логаритамских таблица.

Међутим, рачуни те врсте захтевају употребу Гаусових таблица, које у обрасцу

$$\log(a+b) = \log b + B,$$

дају вредност $B$ што одговара датој вредности

$$A = \log b - \log a.$$

Исте таблице дају и логаритам разлике у облику

$$\log(a-b) = \log a - (B - A),$$

где је $A$ број који у таблицама одговара датој вредности

$$B = \log a - \log b.$$

Такве су нпр., таблице: Théodore Wittstein: *Logarithmes de Gauss à sept décimales, pour servir à trouver le logarithme de la somme ou de la diffèrence de deux nombres, leurs logarithmes étant donnés*, Hannover, Han'sche Hofbuchhandlung, 1866.

Овакви рачуни и овакве таблице поред све своје елементарности, нису предмет наставе из тога простог разлога, што су то специјалне таблице, мало распрострањене и које се ретко могу имати на располага-

* Гласник професорског друштва, Београд 1928, t. VIII, 1, стр. 42–45.

њу, а употребљавају се само при врло специјалним астрономским или статистичким израчунавањима.

Али зашто у наставу не би ушао следећи, тако исто елементаран начин, на који се може решавати исти проблем што га решавају Гаусове таблице, али који не захтева употребу тих таблица, већ само обичне тригонометријске таблице, које сваки рачунџија има на располагању?

Из обрасца

$$\log(a-b) = \log a + X, \quad (a > b) \tag{1}$$

где је

$$X = \log\left(1+\frac{b}{a}\right), \tag{2}$$

кад ставимо да је

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tang}^2\alpha < 1, \tag{3}$$

добије се да је

$$X = \log\sec^2\alpha = -2\log\cos\alpha \tag{4}$$

што доводи до овога става:

*Логаритам збира два броја* a > b > 0 *једнак је логаритму већега од њих, минус двострука вредност логаритма косинуса онога угла чији логаритам тангенса има за вредност*

$$\frac{1}{2}(\log b - \log a).$$

Тако исто, из обрасца

$$\log(a-b) = \log a + Y, \tag{5}$$

где је

$$Y = \log\left(1-\frac{b}{a}\right), \tag{6}$$

кад ставимо да је

$$(7) \qquad \frac{b}{a} = \sin^2 \beta < 1,$$

добија се да је

$$Y = 2 \log \cos \beta$$

што доводи до овога става:

*Логаритам разлике два броја* a > b > 0 *једнак је логаритму већега од њих, плус двострука вредност логаритма косинуса онога угла чији логаритам синуса има за вредност*

$$\frac{1}{2}(\log b - \log a).$$

Да би се, дакле, одредила вредност логаритма збира или разлике два броја $a > b > 0$ непосредно помоћу датих вредности log $a$ и log $b$, треба израчунати број

$$(8) \qquad M = \frac{1}{2}(\log b - \log a),$$

Затим, у таблицама које дају логаритме тригонометријских функција, наћи вредност

$$(9) \qquad \log \cos = X,$$

која одговара вредности

$$(10) \qquad \log \operatorname{tang} = M,$$

па ће бити

$$(11) \qquad \log(a + b) = \log a - 2X,$$

у истим таблицама наћи вредност

$$(12) \qquad \log \cos = Y,$$

која одговара вредности

$$(13) \qquad \log \sin = M,$$

па ће бити

$$(14) \qquad \log(a - b) = \log a - 2Y.$$

*Пример*. Нека је

$$\log a = 3{,}7835677; \quad \log b = 2{,}9664843$$

па је

$$M = \frac{1}{2}(\log b - \log a) = \bar{1}{,}5914583.$$

Углу, који као log tang има ову вредност $M$, одговара као log cos вредност

$$X = \bar{1}{,}9692029,$$

па је према томе

$$\text{(15)} \qquad \log (a + b) = 3{,}7835677 - 2\,X = 3{,}8451619.$$

Тако исто, углу који као log sin има вредност $M$, одговара као log cos вредност

$$Y = \bar{1}{,}9641015,$$

па је према томе

$$\text{(16)} \qquad \log (a - b) = 3{,}7835677 - 2\,Y = 3{,}7117707.$$

Обе вредности (15) и (16) тачне су на шест децимала.

Навешћемо још, као примену и ово правило: Кад знамо логаритам једнога, ма кога позитивнога броја $x$, *увек је*

$$\log(x+1) = -2\log\cos\alpha,$$

где $\alpha$ означује онај угао, чији log tang има за вредност $\frac{\log x}{2}$.

Тако исто, за $1 > x > 0$ *увек је*

$$\log(1-x) = -2\log\cos\beta,$$

где $\beta$ означује онај угао, чији log sin има за вредност $\frac{\log x}{2}$.

Као што се види, обично логаритамско-тригонометријске таблице дају, бар тако исто просто као и Гаусове, логаритам збира и разлике два броја помоћу самих логаритама тих бројева, а без потребе да се ови претходно израчунају.

Па нашто онда специјалне Гаусове таблице? И зашто овде показни начин не би ушао у елементарну наставу, кад је већ то случај са обичним тригонометријским таблицама, и кад горњи ставови исказују једну елементарну особину логаритама, која их на тако прост начин доводи у везу са тригонометријским функцијама и коју ученик средње школе може и треба да сазна?**

---

** Овај чланак је био прештампан у књизи: Михаило Петровић, *Чланци*, Друштво математичара и физичара НР Србије, Београд 1949, стр. 37–40. Иначе, овај Петровићев рад у целости је превод Петровићевог рада *Logarithme d'une somme et d'une différence*, L'Enseignement mathématique, 1927, t. XXVI, 4–6, pp. 300–302. Вероватно из ових разлога, Петровић у својој библиографији из 1938. године (Publications VI–VII) није навео чланак из Гласника професорског друштва. – О овом Петровићевом свођењу Гаусових таблица на обичне логаритамске таблице саопштавали су Fehr у FdM, B.54, S.590, Јован Карамата у FdM, B.54, S.76, као и Revue sémestrielles des publications mathématiques, 34 (1929), а Д. Трифуновић у MFL, Zagreb 1961/62, t. XII (задатак 508). – На једном предавању Д. Трифуновића на Семинару за историју математике МГУ (Москва, 4. новембар 1972), академик Адолф Павлович Јушкевич скренуо је пажњу предавачу, да је неколико математичара знатно пре Петровића дошло до тригонометријске смене која одређује логаритам збира и разлике (пр. Д. Т.).

# О ЗАВИСНОСТИ МЕЂУ ВЕЛИЧИНАМА У ЗАДАЦИМА*

Обично је циљ решавања математичких задатака да се, било рачуном било конструкциојм, из познатих одреде непознате величине. Дешава се често, међутим, да се резултат решеног задатка покаже као бесмислен – апсурдан, иако није учињена никаква грешка ни у рачуну, ни у конструкцији. Због тога је потребна увек дискусија задатка: да би се видело у колико и како разна од добијених решења одговарају стварности. – Ако је у задатку непозната величина, на пример, број људи, па се решавањем добије резултат $\sqrt{2}$, свако ће одмах рећи да је задатак практично немогућан, – па ма и имала алгебарска једначина, на коју се своди задатак, решење $\sqrt{2}$. Исто тако, ако су у задатку непознате величине углови троугла у равни, па се добију за њих као резултати решавања вредности: 60°, 100°, 40°, опет ће се рећи да је задатак немогућан, јер се зна да збир углова у равном троуглу износи 180°, а по овом задатку би износио 200°.

Откуда долази то да неки задаци могу довести до бесмислених резултата?

У сваком задатку има две врсте величина: познате и непознате. Задатак је у томе да се из познатих одреде непознате. Али ово ће бити могуће само онда, ако између познатих и непознатих величина постоји нека веза и ако познате величине уз то испуњавају неке услове. Ако међу њима нема везе, задатак је у основи бесмислен. Тако је већ опште познат онај пример: наћи године старости капетана лађе кад је дата дужина катарке.

Но осим тога, познате величине у задатку треба да испуњавају два главна услова:

---

* Математички лист за средњу школу, Београд 1932, t. I, 3–4, стр. 37–44; поменимо да је власник и уредник овог часописа био Јован Карамата и имао је југословенско уредништво (пр. Д. Т.).

1. *број познатих величина мора бити довољан да се из њих могу непознате одредити*, и

2. *познате величине морају бити једна од друге независне.*

Кад би био дат, на пример, задатак, да се помоћу једног познатог угла у троуглу одреде остала два, јасно је да се они не би могли одредити; јер ако је познат у троуглу један угао, може се рећи само колики је *збир* друга два угла, али не и колики сваки од њих. У овом задатку број познатих величина *није* довољан да би се непознате могле одредити. Ако задатак решавамо помоћу једначина, у таквом случају имаћемо више непознатих него једначина.

Кад би се дао задатак, да се са три позната елемента (стране и углови) конструише троугао, то се неће моћи извести ако су дати елементи три угла. Три угла у троуглу нису међу собом независне величине, између њих постоји зависност: њихов збир мора бити једнак 180°. Међутим, ако су дати елементи три стране, троугао ће се моћи конструисати и његови углови измерити или израчунати, јер три стране троугла су независне величине, – бар тако се обично каже.

Да ли је, ипак, тачно да су три стране троугла међу собом независне величине? Ако јесте, моћи ће се увек са њима конструисати троугао, ма какве биле те три дужине; ако није, моћи ће се наћи три дужине да се са њима не може образовати троугао. Тако, са дужинама 3, 4 и 5 могуће је конструисати троугао; али, на пример, са дужинама 3, 4 и 10 немогуће је троугао конструисати. Зашто? – Зато што стране троугла нису *потпуно* независне међу собом; међу њима постоји ипак извесна зависност, нека врста непотпуне везе: наиме, свака страна троугла мора бити мања од збира друге две. У првом случају је тај услов задовољен, у другом није.

Једна страна троугла је потпуно независна, или сасвим произвољна величина, и може се изабрати како се хоће; означимо је са $a$. И другу страну можемо изабрати по вољи, јер су две стране троугла једна од друге независне величине; означимо је са $b$. Али кад су две стране, $a$ и $b$, изабране, трећа страна, $c$, није више независна величина, онако као прве две. Истина, не можемо одредити тачно колика је, али знамо да мора бити мања од збира, а већа од разлике дужина првих двеју страна.

Један угао у троуглу већ није потпуно независна величина: он мора бити мањи од 180°. Кад тај угао – који ћемо обележити са $\alpha$ – тако изаберемо (на име да је $\alpha < 180°$), други угао, $\beta$, још мање је независан: он мора бити мањи од $(180° - \alpha)$. Кад су два угла изабрана, трећи угао, $\gamma$, потпуно је зависан, или одређен, јер је $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

Из тога се већ јасно види колико важну улогу игра таква непотпуна зависност, или недовољна слобода у избору познатих величина у задатку. У њој лежи извор главних тешкоћа, које и доводе до немогућних и бесмислених решења, – ако им се не обрати посебна пажња.

## ПРИМЕРИ ЗА ЈЕДАН МОГУЋАН И ЈЕДАН НЕМОГУЋАН ЗАДАТАК

**1.** – *Наћи катете* a *и* b *правоугла троугла, кад је дата хипотенуза* c – 5 *и збир катета* a – b = 7.

У овом задатку испуњен је услов $c < a + b$, јер је 5 < 7. За његово решење имамо две једначине

$$a + b = 7 \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 = 25.$$

Из прве имамо $b = 7 - a$, па ако то ставимо у другу, добићемо

$$a^2 + (7 - a^2) = 25, \quad \text{тј.} \quad 2a^2 - 14a + 24 = 0 \quad \text{или} \quad a^2 - 7a + 12 = 0.$$

Одавде излази

$$a = \frac{1}{2}\left(7 \pm \sqrt{49 - 48}\right) = \frac{1}{2}(7 \pm 1).$$

Према томе је

$$a_1 = 4, \qquad a_2 = 3;$$
$$b_1 = 3, \qquad b_2 = 4.$$

И тако је једна катета 3, друга 4.

**2.** – *Наћи катете* a *и* b *правоугла троугла, ако је дата хипотенуза* c = 5 *и збир катета* a + b = 8.

И у овом задатку је услов $c < a + b$ испуњен. За његово решење имамо две једначине

$$a + b = 8, \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 = 25.$$

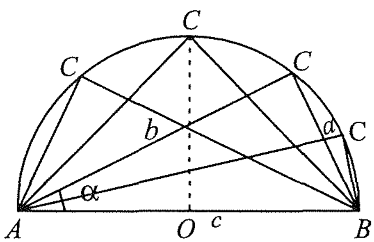
Сличним путем као и горе добијамо

$$b = 8 - a, \quad a^2 + 64 - 16a + a^2 = 25,$$

$$2a^2 - 16a + 39 = 0, \quad a\frac{1}{2}\left(8 \pm \sqrt{64 - 78}\right) = \frac{1}{2}\left(8 \pm \sqrt{-14}\right).$$

Овде под кореном стоји негативан број –14, дакле $b$ је имагинаран број. Према томе задатак је у овом случају практично немогућан: алгебарске једначине, до којих је проблем довео, имају решења у имагинарним бројевима, но таква решења немају никакво значење за наш геометријски проблем.

Зашто је у првом случају задатак могућан, а у другом немогућан? Зашто правоугли троугао чија је хипотенуза 5 и збир катета 7 постоји, а не постоји правоугли троугао чија би хипотенуза била 5, а збир катета 8? Да се не крије међу датим величинама ($c$ и $a + b$) у задатку нека непотпуна зависност? – Ако за троугао не ставимо никакав други услов, него дамо само једну његову страну, оне друге две могу бити ма какве, само мора њихов збир бити већи од дате стране. У горњем задатку садржан је, међутим, још један услов: троугао је правоугли, и то прав угао лежи супротно од дате стране – хипотенузе. У том случају лако је видети да не може збир катета бити произвољно велики. То се јасно види са слике 1. Сви правоугли троугли који имају за хипотенузу $c = \overline{AB}$ добиће се кад се над њом, као пречником, опише полукруг, па тачке на периферији споје са крајевима хипотенузе $A$ и $B$. Из слике се види да збир $\overline{AC} + \overline{CB}$ не може бити произвољно велики. Према томе, као што збир $a + b$ не може бити мањи од $c$, тако исто $a + b$ не може прећи једну извесну границу; само ову треба умети наћи.



*Слика 1*

Она се налази овако. Из слике 1 имамо

$$a = c\sin\alpha \quad b = c\cos\alpha,$$
$$a + b = c(\sin\alpha + \cos\alpha),$$
$$(a+b)^2 = c^2(\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) = c^2(1 + \sin 2\alpha).$$

Како је $\sin 2\alpha$ стално мањи од јединице, осим за $2\alpha = 90°$, тј. $\alpha = 45°$ када је једнак јединици, то је $(a+b)^2 \leq 2c^2$ или $a + b \leq c\sqrt{2}$. И тако збир катета $a + b$ мора задовољавати услове[1]

$$c < a + b \leq c\sqrt{2}.$$

Ми смо у оба наша задатка узели $c = 5$, па зато у њима мора бити

$$5 < a + b \leq 5\sqrt{2},$$

или $$5 < a + b \leq 5 \cdot 1,4142\ldots = 7,0710\ldots$$

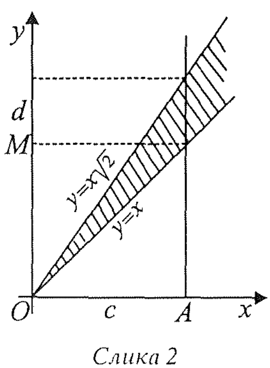
[1] Погледати у овој књизи Петровићев чланак *Неодређени, немоīућни и нейоūйуно одређени ūланимеūријски задаци* (пр. Д. Т.).

У првом задатку било је $a + b = 7$, и услов је био испуњен; у другом задатку је било $a + b = 8$, те горњи услов није испуњен, и то је узрок што је други задатак немогућан.

Ови прости примери јасно показују како се јавља и у чему се састоји *непотпуно одређена зависност* величинâ датих у задатку. Но видимо, осим тога, још и ово. Поменути други главни услов који треба да испуњавају дате величине, на име да познате буду међу собом независне, мора се још овако допунити: *између њих не сме постојати одређена зависност, али може постојати непотпуна зависност*, што је, у осталом, врло често и случај. – Зато, код сваког појединог задатка треба ову непотпуну зависност посебно испитати.

## О НЕПОТПУНОЈ ЗАВИСНОСТИ

Казаће се да између једне независне и других неких величина постоји *одређена зависност* кад се прва може из друге потпуно одредити. Тако је зависност хипотенузе $c$ од катета $a$ и $b$ одређена, јер је $c^2 = a^2 + b^2$. Другим речима, одређена зависност међу величинама изражава се једначинама. За зависност између једне величине и других неких величина казаће се да је *непотпуна*, ако се она не може из њих потпуно одредити. У таквим случајевима може се дати само *размак* у коме она мора лежати. На пример, између збира катета $s$ и хипотенузе $c$ зависност је непотпуна, јер је, као што смо горе показали, $c < s \leq c\sqrt{2}$. Другим речима, непотпуна зависност изражава се неједначинама.



*Слика 2*

За једну величину каже се да је *независна* од других величина ако се она може изабрати по вољи, без обзира на вредности оних осталих. На пример, једна страна паралелограма независна је од друге стране његове; али збир страна није независан од дијагонале или површине тога паралелограма. – Ако величина $y$ зависи од величине $x$, каже се да је $y$ функција од $x$, и пише се $y = f(x)$. Графички ће зависност бити приказана кривом линијом у правоуглом координатном систему, у коме су величине $x$ апсцисе, а величине $y$ ординате. – Ако је нека величина $s$ непотпуно зависна од величине $x$, вредностима $x$ не одговара по једна вредност $s$, него све вредности из једног размака чије су границе одређене том зависношћу. Графички ће бити приказана непотпуна зависност (в. сл. 2) не једном кривом линијом већ читавом *пругом*, ограниченом двема линијама –

доњом и горњом границом – између којих се зависна величина може слободно кретати. Уколико је пруга ужа, утолико је зависност потпунија.

Ако у горњем задатку означимо са $x$ величину $c$, једна од граничних линија представљена је правом $y = x$, а друга правом $y = x\sqrt{2}$ (в. сл. 2). Обе ове праве пролазе кроз почетак координатног система и заклапају са апсцисном осом угао: прва од 45°, а друга угао од 54° 44′. Пругом између њих приказана је графички непотпуна зависност: $c \leq s \leq c\sqrt{2}$.

## КАКО СЕ НАЛАЗИ НЕПОТПУНА ЗАВИСНОСТ МЕЂУ ВЕЛИЧИНАМА

После овог општег излагања намеће се самим собом питање: Како се може, у сваком појединoм задатку, открити непотпуна зависност? Јер, као што се могло видети и из горњег задатка, није увек лако одмах запазити да ли се и где се крије у задатку нека непотпуна зависност. Неке од ових помињу се у уџбеницима: на пример, да је једна страна троугла већа од разлике, а мања од збира друге две; друге су, опет, тако јасне да свакоме одмах падају у очи и о њих се неће нико огрешити ко иоле пази: на пример, да је дужина лука увек већа од тетиве. Непотпуна зависност која се јавља у наведеном задатку не спада ни у једну од тих врста и многи ће је превидети. Како треба радити па да се то не догоди?

Да одговор на ово питање буде јаснији, поново ћемо узети у обзир ранији задатак, али ћемо га овако поставити:

*Наћи катете* a *и* b, *кад је дата хипотенуза* c *и збир* s *катета* a *и* b.

За његово решење имамо ове две једначине

$$a + b = s, \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

У њима су познате величине $c$ и $s$, а непознате, које треба наћи, $a$ и $b$. Из прве једначине излази $b = s - a$ и, ако се та вредност стави у другу једначину, добија се

$$a^2 + s^2 - 2sa + a^2 = c^2, \quad \text{тј.} \quad 2a^2 - 2sa + (s^2 - c^2) = 0.$$

одакле је

$$a = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 2(s^2 - c^2)}}{2} = \frac{s \pm \sqrt{2c^2 - s^2}}{2}.$$

Ако сад ову вредност за $a$ унесемо у $b - s - a$, добија се

$$b = \frac{s \mp \sqrt{2c^2 - s^2}}{2}.$$

Може се, дакле, рећи да је једна катета

$$\frac{s + \sqrt{2c^2 - s^2}}{2},$$

друга

$$\frac{s - \sqrt{2c^2 - s^2}}{2}.$$

Да би ови резултати били практично могућни потребно је, прво, да вредности обеју катета буду реални и позитивни бројеви. За реалност је потребно да буде $2c^2 - s^2 \geq 0$ тј. $s^2 \leq 2c$. Како су $c$ и $s$ позитивни бројеви потребно је, дакле, да буде $s \leq c\sqrt{2}$. Ако је тако, резултати ће бити реални бројеви. Затим је потребно да резултати који дају вредности тражених катета буду позитивни бројеви. Прва катета је увек позитивна, јер је дата у облику збира два позитивна броја. Да бисмо и за другу катету добили позитиван број, потребно је да буде

$$s > \sqrt{2c^2 - s^2}, \quad \text{тј.} \quad s^2 > 2c^2 - s^2, \quad \text{тј.} \quad 2s^2 > 2c^2, \quad \text{тј.} \quad c^2 < s^2;$$

дакле, како су $c$ и $s$ позитивни бројеви, мора бити $c < s$. И тако, да бисмо у овом случају добили реална и позитивна решења, тј. да би задатак био практично могућан, мора бити:

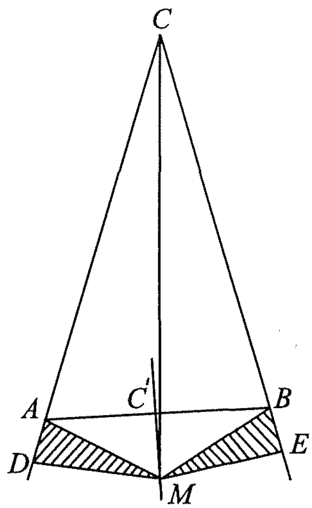
$$c < s \leq c\sqrt{2}.$$

Дошли смо, дакле, до истих оних услова које смо нашли и раније геометријским разматрањима.

На основу свега овога закључује се да одговор на постављено питање: Како се у сваком појединoм задатку може открити непотпуна зависност међу величинама? – гласи овако: *Задатак треба поставити у општим бројевима (величинама), решити га и извршити дискусију. Дискусија ће показати у којима се границама могу познате величине у задатку кретати да би он био практично могућан. При томе ће се уједно показати и непотпуна зависност међу величинама у задатку.* После тога тек могу се у задатак унети бројне вредности величина, – које се имају изабрати у границама одређеним непотпуном зависношћу величина о којима се ради.

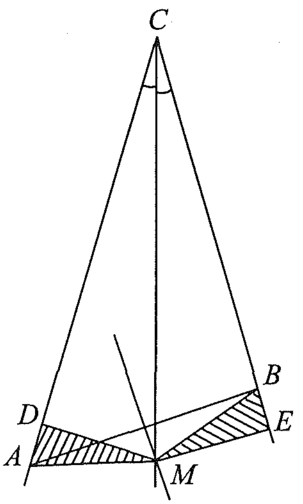
# НЕПОТПУНА ЗАВИСНОСТ ПРИ ГЕОМЕТРИЈСКИМ КОНСТРУКЦИЈАМА

Кад се геометријски задатак решава не рачуном већ конструкцијом, немогућност задатка испољава се обично на тај начин што се конструкцијом неће моћи извести. Ако се, на пример, зада конструкција троугла са странама 3, 4 и 10, па се нацрта страна дужине 10, опишу кругови из крајева те стране са полупречницима 3 и 4, ти се кругови неће сећи, те се неће моћи добити треће теме таквог троугла. Но при решавању и доказивању конструкцијом изложени смо још једној врсти грешака, које се рачуном саме од себе уклањају. Кад се једном задатак стави тачно у једначине, резултат који из њих следује је насигурно и потпуно тачан са гледишта алгебре, само што он не мора бити практично могућан. Међутим при решавању конструкцијом, обично се слика црта овлаш, без линеала и шестара, прави се такозвани шематички цртеж. Ако се том приликом не обрати пажња на непотпуне зависности међу датим елементима, може се доћи не само до немогућних задатака, него и до сасвим *погрешних* резултата. На пример:



*Слика 3*

У разностраном троуглу $ABC(\overline{AC} > \overline{BC})$, сл. 3, повуцимо симетрале стране $AB$ и угла код $C$. Како је по претпоставци посматрани троугао разностран, те ће се симетрале сећи у некој тачки $M$ (кад би троугао био једнокрак са крацима $AC$ и $BC$ оне би се поклопиле). Из тачке $M$ спустимо сад управне $MD$ и $ME$ на стране $CA$ и $CB$, па спојимо $M$ са тачкама $A$ и $B$. Лако је показати да су троуглови $MDA$ и $MEB$ подударни, јер је: 1. угао $ADM$ једнак углу $MEB$ (као прави углови); 2. страна $MD$ једнака страни $ME$ (јер се тачка $M$ налази на симетрали угла код $C$, па су троуглови $CMD$ и $CME$ подударни); и 3. страна $MA$ једнака страни $MB$ (пошто се тачка $M$ налази на симетрали стране $AB$, па су троуглови $MAC'$ и $MBC'$ подударни). Према томе је $\overline{AD} = \overline{BE}$. Како из подударних троуглова $CMD$ и $CME$ следује да је $\overline{CD} = \overline{CE}$, то је и $\overline{CA} = \overline{CB}$; ово се, међутим, не слаже са претпоставком од које смо пошли да је посматрани троугао разностран: у слици 4 је $\overline{CA} > \overline{CB}$. Поред тога, из овог доказа би излазило да сваки троугао мора бити равнокрак.




*Слика 4*

Где је грешка? Она није нигде у предњим извођењима и доказивањима подударности. Грешка је у последњем реду. Да би се, наиме, из $CD = CE$ и $AD = BE$ извело да је $\overline{CA} = \overline{CB}$, потребно је да се тачке $D$ и $E$ налазе на продужењу страна $CA$ и $CB$, као што је то у слици 3 и нацртано, јер тада одузевши $DA$ од $DC$ добијамо $CA$, а одузевши $EB$ од $EC$ добијамо $CB$. Но слика 3 је цртана руком, шематички, и погрешна је; тачан цртеж је дат у слици 4, и по њему се види да тачка $D$ лежи између тачака $A$ и $C$, а тачка $E$ ван тачака $B$ и $C$. Према томе је $\overline{CD} = \overline{CE}$, $AD = BE$, а дужина $2BE$ показује за колико је страна $CA$ дужа од стране $CB$. Погрешка долази отуда, што нисмо узели у обзир једну непотпуну зависност, наиме: да се тачка $D$ мора увек, кадгод је $\overline{CA} > \overline{CB}$, налазити између тачака $C$ и $A$, а не изван отсечка $CA$; ово се, истина, у почетку доказивања није могло одмах приметити. Да смо на овој непотпуној зависности задржали пажњу, то би нам пало у очи, и не бисмо дошли до погрешног резултата, који је чак и апсурдан, јер би према њему сваки троугао морао бити равнокрак.

Кадгод се, дакле, геометријски задатак решава конструкцијом, и ослања се на шематичке цртеже, треба обраћати пажњу на овакве непотпуне зависности, што одређују извесне размаке у којима се поједине тачке морају налазити, и о којима се при шематичком цртању мора водити рачуна; без тога би могли добити погрешне и апсурдне резултате. Ово се, истина, може избећи тачним цртањем, али само донекле, јер се код извесних цртежа са најмањим одступањем може прећи размак непотпуне зависности, и тиме доћи до погрешних закључака.

*

Изучавање непотпуних зависности предмет је нарочитог низа предавања на београдском Универзитету, али, наравно, стављено на ширу основу и вишу тачку гледишта. Како овакве непотпуне зависности, као што се из предњег излагања види, играју важну улогу и у средњошколској настави, овим је чланком, на елементаран начин, на њих указано.**

---

** Доцније, овај Петровићев чланак објављен је у књизи Михаило Петровић, *Чланци*, Друштво мат. и физ. НР Србије, Београд 1949, стр. 1–9 и код Нолита у књизи *Чланци из математике за ученике средњих школа*, Београд, 1957, стр. 5–12. О овом Петровићевом раду писали су А. Ремер у Гласнику Југ. проф. друштва за 1932. годину и Б. Ђерасимовић у MFL, Zagreb 1957/58, t. VIII, 1, стр. 3–6 (пр. Д. Т.).

# МОДУО ЈЕДНОГ ЗБИРА*

Елементарно и интуитивно јасно тврђење, према коме се модуо неког збира $\sum u_k$ највише једнак збиру модула бројева $u_k$, често се користи у доказима и у приближним рачунима. Исто толико интуитивно јасна тврђења која следе, а која истовремено дају доње и горње границе модула збира, могла би такође бити од аналогне користи.

**I.** – Нека је

$$u_1 = a_1 + ib_1, \quad u_2 = a_2 + ib_2, \quad u_3 = a_3 + ib_3, \ldots$$

неколико комплексних количина. Имамо

$$\operatorname{mod} \sum u_k = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

где симболи $P$ и $Q$ означавају редом апсолутне вредности збирова $\sum a_k$ и $\sum b_k$.

Из неједнакости и идентитета који следе

$$1 \geq \frac{P^2 + Q^2}{(P+Q)^2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)^2$$

излази да је

$$\frac{1}{2} \leq \frac{P^2 + Q^2}{(P+Q)^2} \leq 1.$$

Дакле: *модуо збира* $\sum u_k$ *има за вредност* θ (P+Q), *где* P *означава апсолутну вредност збира реалних делова бројева* $u_k$, Q *апсолутну*

---

* Наслов оригинала *Module d'une somme*, L'Enseiqnement mathématique, Genève 1917, t. XIX, 1–2, pp. 53–56 (датирано: Genève, janvier 1917).

*вредност збира коефицијената уз* i *истих бројева, а* $\theta$ *фактор чија се вредност налази између* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *и* 1.[1]

Граница $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ефективно се достиже кад је $P = Q$, а граница 1 кад су бројеви $u_k$ сви реални, или сви имагинарни.

Види се, на пример, такође да је,

$$\log \mathrm{mod} \sum u_k = \log(P+Q) - \delta,$$

где је $\delta$ позитивна вредност и од $\frac{1}{2}\log 2$ мања количина. Ако је логаритам са основом 10, $\delta$ се налази између 0 и 0,15051..., а ако је природни, $\delta$ припада интервалу између 0 и 0,34657... .

Подсетимо да, ако су бројеви $P$ и $Q$ истог знака, збир $P + Q$ се подудара са апсолутном вредношћу коефицијента уз $i$ израза $(1+i)\sum u_k$, а ако су $P$ и $Q$ супротних знакова, овај збир се поклапа са реалним делом истог израза, као што излази из формуле

$$(1+i)\sum u_k = (P-Q) + i(P+Q).$$

**II.** – Оно што претходи не намеће количинама $u_k$ никаква ограничења. Претпоставимо сада да сви реални делови $a_k$ имају исти знак, а такође и сви коефицијенти $b_k$ уз $i$, при чему та два знака могу бити било какви.

---

[1] Приметимо да се овде ради о дуплој неједнакости.

Нека су $a_1,\ldots,a_n$; $b_1,\ldots,b_n$ *низови негативних бројева* $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$, *тада важи*

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2} + \ldots + \sqrt{a_k^2+b_k^2} \geq \sqrt{A^2+B^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a_1^2+b_1^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2+b_n^2}\right).$$

Пишући $z_j = a_j + ib_j$, први део неједнакости важи без додатних ограничења и своди се на неједнакост

$$|z_1| + \ldots + |z_n| \geq |z_1 + \ldots + z_n|$$

(а која се лако доказује индукцијом, полазећи од $|z'| + |z''| \geq |z' + z''|$). За негативне бројеве $a$ и $b$ важи ова дупла неједнакост

$$a + b \geq \sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b),$$

(а она се лако доказује квадрирањем). Применом ове неједнакости, имаћемо

$$\sqrt{A^2+B^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(A+B) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1+b_1+\ldots+a_n+b_n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a_1^2+b_1^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2+b_n^2})$$

тј. тиме доказујемо и други део наведене неједнакости.

Означивајући са $\alpha_k$ апсолутну вредност броја $a_k$, а са $\beta_k$ апсолутну вредност броја $b_k$, имаће се

$$\operatorname{mod} u_k = \operatorname{mod}(\alpha_k + i\beta_k),$$

и одатле, с обзиром на оно што претходи,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_k + \beta_k) \leq \operatorname{mod} u_k \leq \alpha_k + \beta_k .$$

Ставимо $k = 1, 2, 3, \ldots$ и саберимо тако добијене неједнакости. Примећујући да су сви бројеви $a_k$ истог знака, као и бројеви $b_k$, имаће се

$$\sum \alpha_k = \text{апс. вр. у } \sum a_k = P, \quad \sum \beta_k = \text{апс. вр. у} \sum b_k = Q;$$

тако се добија

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(P+Q) \leq \sum \operatorname{mod} u_k \leq P+Q,$$

или

$$(1) \qquad \sum \operatorname{mod} u_k = \lambda(P+Q),$$

са

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda \leq 1 .$$

Фактор $\lambda$ ће достићи своју границу $\frac{1}{\sqrt{2}}$ кад је истовремено

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3, \ldots,$$

а границу 1 кад је у сваком пару количина $(a_k, b_k)$ једна или друга од њих једнака нули.

Поредећи једнакост (1) са једнакошћу

$$\operatorname{mod} \sum u_k = \theta(P+Q), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \theta \leq 1,$$

која представља резултат онога што претходи, добија се

$$\operatorname{mod} \sum u_k = \frac{\theta}{\lambda} \sum \operatorname{mod} u_k .$$

Однос $\frac{\theta}{\lambda}$ ће притом достићи своју најмању могућу вредност кад је истовремено $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\lambda = 1$; да то буде случај, потребно је и довољно да је $P = Q$ и да, сем тога, у сваком пару количина $(a_k, b_k)$ једна од њих буде једнака нула. Однос $\frac{\theta}{\lambda}$ тада има вредност $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Највећа вредност истог односа очигледно је 1, јер је увек

$$\operatorname{mod} \sum u_k \leq \sum \operatorname{mod} u_k;$$

ова граница 1 ефективно се достиже кад су или сви бројеви $a_k$ истовремено, или истовремено сви бројеви $b_k$, једнаки нули (а тада имамо истовремено $\theta = 1$, $\lambda = 1$).

Тако се долази до следећег става:

*Када у неком збиру* $\sum \mathrm{u}_\mathrm{k}$ *реални делови бројева* $\mathrm{u}_\mathrm{k}$ *истог знака и истовремено коефицијенти уз* i *у бројевима* $\mathrm{u}_\mathrm{k}$ *имају исти знак, тада је*

$$\operatorname{mod} \sum u_k = \mu \sum \operatorname{mod} u_k,$$

*где је* $\mu$ *фактор чија се вредност налази између* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *и* 1.

Граница $\frac{1}{\sqrt{2}}$ се ефективно достиже кад је сваки члан $u_k$ реалан или чисто имагинаран и сем тога су збир реалних чланова $u_k$ и збир коефицијената уз $i$ у чисто имагинарним члановима $u_k$ по апсолутној вреднности једнаки. Граница 1 достиже се кад су сви чланови $u_k$ *сви* реални или су *сви* они чисто имагинарни.

Приметимо да је у *посматраном случају* (кад су сви бројеви $a_k$ истог знака, а такође и сви бројеви $b_k$) *разлика између логаритма модула збира и логаритма збира модула увек негативна по апсолутној вредности мања од* $\frac{1}{\sqrt{2}} \log 2$.**

---

** Приказан Петровићев рад реферисан је у FdM, B.46, S.104 (Ostrowski) и Revae sémestrielle publications mathematiques, t.XXVIII, 1920. Професор Д.С. Митриновић у раду *О једној неједнакости* (Мат. библ. 38 (1968), 93–96) анализује неједнакост

$$\left| \sum_1^n z_k \right| \geq (\cos\theta) \sum_1^n |z_k|,$$

која за $\theta = \pi/4$ постаје Петровићева. Митриновић закључује да је Петровић знатно пре H. S. Wilf-а (1963) дошао до наведене неједнакости. – Ова се Петровићева неједнакост налази и у књигама Јована Карамате *Теорија и пракса Stieltjes-ова интеграла*, САН, Београд 1949 и *Комплексан број са применом на елементарну геометрију*, Београд 1950. Приметимо, да је ову неједнакост Петровић строжије изнео у Publ. Math. de l'Université de Belgrad 2 (1933), 45–59 (пр. Д. Т.).

# О БРОЈУ e*

**1.** – Класично развијање у ред изражава број $e$ у облику збира разломака од којих сваки има за бројилац јединицу. Идентитет

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p)\, e^x \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n x^n\,,$$

где је

$$M_n = \frac{a_0}{n!} + \frac{a_1}{(n-1)!} + \frac{a_2}{(n-2)!} + \ldots + \frac{a_p}{(n-p)!},$$

даје могућност изражавања броја $e$, и то на бесконачно много начина, у облику збира несводљивих разломака чији су бројиоци различити од 1. Специјално:

*Могуће је изразити* e *као збир несводљивих разломака чији бројиоци образују природни низ непарних простих бројева*

$$1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

Заиста, на основу идентитета

$$(1) \qquad (x+1)e^x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n+1}{n!}\, x^n$$

добија се, за $x = 1$,

$$e = \sum_{0}^{\infty} \lambda_n\,,$$

где је

* Наслов оригинала *Sur le nombre e*, L'Enseignement mathématique, Genève 1921–1922, t. XXII, 1–2, pp. 48–50.

$$\lambda_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n!}. \tag{2}$$

Према познатој последици Вилсонове теореме, када је број $n + 1$ сложен и $n > 3$,

$$\frac{n!}{n+1} = \text{позитиван цео број},$$

а када је број $n + 1$ прост,

$$\frac{n!}{n+1} = \text{позитиван цео број} - \frac{1}{n+1}.$$

Одатле излази да су бројеви $\lambda_n$ разломци који, доведени у најпростији облик, имају за бројилац 1 кад је број $n + 1$ сложен, а $n + 1$ кад је тај број прост. Овим је тврђење доказано.

Број $e$ се тако може изразити у облику

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{s_n} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{p_n}{q_n}, \tag{3}$$

где су $p_n, q_n$ и $s_n$ позитивни цели бројеви такви да је, кад се разломак $\frac{p_n}{q_n}$ доведе у најпростији облик, $p_n$ $n$-ти *члан природног низа непарних простих бројева.*

**2.** – Са становишта претходног аритметичког својства број $e$ је само партикуларни случај једне шире класе бројева који имају исто својство.

Нека су $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ било који позитивни цели бројеви; посматрајмо функцију

$$f(x) = \frac{1}{0!\alpha_0} + \frac{x}{1!\alpha_1} + \frac{x^2}{2!\alpha_2} + \ldots,$$

холоморфну у читавој равни променљиве $x$. Добија се

$$\frac{d}{dx}\left[x f(x)\right] = \sum_0^\infty \frac{(n+1)x^n}{n!\alpha_n}$$

и одатле

$$\frac{f(1)+f'(1)}{2} = \sum_0^\infty \frac{\lambda^n}{\alpha_n},$$

где је $\lambda_n$ претходни број (2).

*Број*

$$M = \frac{f(1)+f'(1)}{2}$$

*може се, дакле, изразити у облику суме несводљивих разломака чији су сви бројиоци прости бројеви.*

У случају кад број $\alpha_n$, за прост број $n+1$, није дељив са $n+1$, број $M$ може се изразити у облику (3). Такав је, на пример, случај кад је

$$\alpha_n = (n!)^k, \quad \alpha_n = (n+2)(n!)^k, \text{ итд.},$$

где је $k$ позитиван цео број. Број $e$ одговара партикуларном случају када је

$$\alpha_n = 1, \quad f(x) = e^x.$$

Када је дата нека функција $\varphi(x)$ која се за $|x| \geq 1$ може развити у ред облика

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{x}{\alpha_1} + \frac{x^2}{\alpha_2} + \ldots,$$

где су $\alpha_n$ било какви позитивни цели бројеви, могуће је помоћу ње образовати претходни број $M$ у облику одређеног интеграла. Треба поћи од познатих формула које изражавају број $\frac{1}{n!}$ у облику одређеног интеграла, што ће омогућити да се функција $f(x)$ изрази помоћу функције $\varphi(x)$. Такве би, на пример, биле следеће формуле:

$$\frac{1}{n!} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos t}\cos(\sin t)\cos nt dt,$$

$$\frac{1}{n!} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos t}\sin(\sin t)\sin nt dt,$$

$$\frac{1}{n!} = \frac{e^{ac}}{2\pi e^n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{cti}}{(a+ti)^{n+1}}dt.$$

(где су $c$ и реалан део броја $a$ лозитивне количине).**

** Приказано у FdM, B.48, S.239 (Schrutka) и Revae sémestrielle publicantions mathématiques, 1922, t. XXX (пр. Д. Т.).

# ПРИМЕДБА О ИНТЕГРАЛУ $\int uvdx$*

Очигледно је да не постоји функција $u$ променљиве $x$ таква да одређени интеграл

$$(1) \qquad I = \int_0^\infty uvdx$$

има коначну, одређену и од нуле различиту вредност *било какав да је полином* v.

Треба, међутим, указати на следећу необичну чињеницу:

*Постоје функције* u *од* x *за које интеграл* (1) *има коначну, одређену и од нуле различиту вредност било какав да је полином* $v$ *од* $x$ *чији су коефицијенти алгебарски бројеви* (цели, рационални или алгебарски ирационални, реални или имагинарни, позитивни или негативни).

Такав је, на пример, случај функције

$$(2) \qquad u = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1},$$

где квадратни корен $\sqrt{x}$ има позитивну вредност.

Заиста, позната формула

$$(3) \qquad B_{2n} = \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

* Наслов оригинала *Remarques sur l'intégrales* $\int uvdx$, L'Enseignement mathématique, Genève 1919, t. XX, 4, pp. 268–270.

где симболи $B_2, B_4, B_6, \ldots$ означавају Бернулијеве бројеве, сменом $z^2 = x$ претвара се у

$$(4) \qquad B_{2n} = \frac{2n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

одакле се добија

$$(5) \qquad \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \lambda_n \pi^{2(n+1)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где је

$$(6) \qquad \lambda_n = 2^{2n+1} \frac{B_{2(n+1)}}{n+1}, \quad \lambda_0 = 2B_0 = \frac{1}{3}.$$

Ако је, дакле,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p$$

произвољан полином од $x$, добиће се

$$(7) \qquad \int_0^\infty \frac{p(x)}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx = \pi^2 Q(\pi^2),$$

где $Q(x)$ означава полином

$$Q(x) = a_0 \lambda_0 + a_1 \lambda_1 x + a_2 \lambda_2 x^2 + \ldots + a_p \lambda_p x^p.$$

Кад су бројеви $a_k$ *алгебарски*, бројеви $a_k \lambda_k$ су такође такви. Како алгебарска једначина не може имати за корен број $\pi^2$, *интеграл* (7) *је коначан, одређен и битно различит од нуле.*

Може се, помоћу функције (2), формирати мноштво функција $u$ за које интеграл (1) поседује претходно својство. Довољно је, на пример, сетити се функција на које је скренуо пажњу Стилтјес

$$u = e^{-\sqrt[4]{x}} \sin \sqrt[4]{x}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt[4]{x}} \cos \sqrt[4]{x},$$

као и великог броја других, за које имамо

$$\int_0^\infty u x^n dx = 0, \qquad \text{за } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ако се таква једна функција (или линеарна комбинација таквих функција) означи са $U$ и ако се стави

$$u = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} + U ,$$

интеграл (1) ће бити коначан, одређен и *од нуле различиш* за било који полином $v$ чији су коефицијенти алгебарски бројеви.**

** Доцније, у расправи *О иншеїралу йродукаша двеју функција*, JAZU, Rad, књ. 232, Загреб 1926, 92–98 Петровић је нашао нове услове и случајеве о коначности овог интеграла и *различиšоī* од нуле. Изложен рад је реферисан у FdM, B.47, S.227 (Winternitz) u B. 52, S. 234 (J. Карамата), као и у Revae sémestrielles publications mathématiques 1920, t. XXVIII (пр. Д. Т.).

# ДОГАЂАЈИ И ПОРТРЕТИ

## МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ НА БЕОГРАДСКОМ УНИВЕРЗИТЕТУ – КОШНИЦА НАУЧНОГ РАДА*

### ЈЕДНА НАША ВЕЛИКА НАУЧНА УСТАНОВА ЗА КОЈУ ТРЕБА ДА САЗНА И ШИРА ЈАВНОСТ

Крајем овога школског семестра биће, по Закону о чиновницима, стављена у пензију једна група најстаријих професора Београдског универзитета. Међу њима је редован професор Теоријске математике, који ту катедру држи на ранијој Великој школи и Универзитету још од 1894 године.

Пред таквим универзитетским догађајем, обратили смо се Математичком институту Београдског универзитета за обавештења о томе шта г. професор за собом оставља, шта је Семинар урадио за време његове сарадње у њему и како ће изгледати, примењена на Институт и катедру математике, стара изрека да „на млађима свет остаје."

#### Наша омладина воли математику

Обавештења и целокупна слика о томе раду које смо добили – а о тачности тих обавештења не може бити ни трунке сумње – такви су да о њима треба, најзад, да сазна и шира јавност.

Рад у Математичком институту састоји се од рада са студентима и од самосталног научног рада оних који Институт састављају и у њему послују. О раду са студентима (предавања, семинарски радови, испити,

---

* Дневни лист Политика, 8. мај 1938, стр. 9. Чланак је писан поводом пензионисања једне групе универзитетских професора; чланак је непотписан и без навођења имена чланова Математичког института, а написан је поводом Петровићевог одласка у пензију. Прегледом Заоставштине Михаила Петровића у Музеју града Београда утврдили смо да је овај чланак написао лично својом руком Михаило Петровић (пр. Д. Т.).

обавештења и упућивања) нема се шта нарочито истаћи, сем то да је математичка група на Филозофском факултету Београдског универзитета једна од двеју (друга је група књижевности) које дају највећи број студената. Математичка је група по броју студената, према школским годинама, час прва час друга, а у оваквом случају тај број излази на стотине.

### Научна дела наших математичара

Међутим, изненађује оно што се има рећи у погледу научног рада у Семинару. Са те стране, Математички институт Београдског универзитета неоспорно не уступа ниједноме од универзитетских института, семинара и завода у Југославији, а ни мноштву таквих установа на страним универзитетима. Он има у својој активи један непрекидан и обилан научни рад, чији су резултати били предмет многобројних стручних расправа и дела из области математичких наука, како чисто теоријских тако и примењених, објављених у издањима наших и европских академија наука и стручних научних корпорација.

У тим се радовима нашег Математичког института дају нови резултати, нове методе, нова решења проблема, нови докази познатих резултата, и тако даље, – каткад и из основа нове математичке теорије са којима је Институт излазио на светску научну позорницу у иностранству.

Дела чланова Београдског математичког института штампају се у издањима академија наука или највећих издавачких предузећа у Француској и Немачкој; научне расправе штампају се у публикацијама Париске, Белгијске, Пољске, Чешке, Српске и Југословенске академије наука и у стручним часописима широм целога света. Њих има на неколико стотина; они се цитирају у светској математичкој литератури и њима се служе они који се баве питањима из тих области.

### Научници који заузимају видна места у светској науци

Да чланови београдског Математичког института и лично као наставници, и као научници, заузимају видно место у светској науци, сведочи и то што су они позивани на стране универзитета да држе предавања из области својих струка и излажу своја лична научна потраживања. Један међу њима, позван од Савета париског Универзитета, држао је на Сорбони у Паризу, за време летњег школског семестра 1928 године, предавања из једне области математичке анализе коју је он основао и обрадио; исти члан Института, такође позван, држао је 1932 године низ предавања у Бриселу. Други један члан Института већ годинама предаје на белгијским универзитетима. Трећи је, позван од чехословачких универзитета, држао прошле године предавања у Прагу и Брну. Један је, у току зимског семестра ове школске године, на позив немачког министарства просвете, држао предавања на универзитетима у Берлину, Хамбургу, Гетинтену, Тибинтену и Гисену, а у овај мах је позван од Савета париског Универзитета да одржи низ предавања на Сорбони у Паризу. Један члан Института је године 1931 и 1933, по нарочитом позиву, учествовао у научној експедицији у северној, а 1935 године у јужној поларној области...

Неколико чланова београдског Математичког института чланови су наших и европских академија наука, као и многобројних научних друштава у иностранству. Српска краљевска академија има као своје чланове шест чланова Математичког института, а један је од њих био и председник Академије.

Број доктората из математичке групе на Београдском универзитету такође сведочи о активности и о успесима Математичког института. Из те групе наука, од оснивања Института до данас, положено је на Београдском универзитету петнаест доктората.

## Чиста љубав према науци

Петнаест доктора математичких наука које је створио Институт активно и са успехом раде на својој науци, и поред свега тога што неколицина њих имају да раде сасвим друге послове као гимназијски наставници, послове који не остављају довољно времена и не дају великих могућности за научан рад. Може се замислити колика је чиста љубав тих младих научника за своју науку кад се узме у обзир да је они обрађују потпуно незаинтересовано, без икаква изгледа да ће такав рад допринети њиховој службеној каријери и омогућити им улазак у Универзитет, где су сва места попуњена, а иначе их је врло мало.

Са колико незаинтересованости раде они на науци види се из тога што, на пример, на самом Београдском универзитету један доцент за математику, који је још, пре више година неоспорно имао пуно, и формално законске и научне, квалификације за редовног професора, и чије је научничко име добро познато и често цитирано у светској математичкој литератури, једва у току ове школске године могао постати ванредан професор. Асистент за математику, који је на томе месту већ више од десет година и за кога нам је речено да има све квалификације за ванредног професора, – ни до данас, опет из буџетских разлога, није могао постати ни доцент Универзитета. Један млађи гимназијски наставник, доктор математичких наука, са великим бројем самосталних радова и научних новина публикованих у издањима наших и страних академија наука, – поред свих својих квалификација за универзитетског наставника, нема за овај мах никаквих изгледа да као такав дође на Универзитет.

Томе треба још додати да су два млада доктора математичке групе Филозофског факултета у Београду одмах по положеном докторату добили помоћничка места на париском факултету наука (Сорбони). Најзад, треба нарочито истаћи да су успеси београдског Математичког института утолико више вредни пажње што се ту ради о космополитским областима науке, за које у културним земљама у иностранству има првокласних стручњака, па се сарадња баш наших научника ту не тражи без нарочитих и изузетних разлога.

**„У старо гвожђе"...**

Математички институт Београдског универзитета заиста је једна кошница рада, како школског и научног, тако и јавног. Институт је давао и увек даје тражена обавештења о разним стручним питањима свима који се за њих обраћају Универзитету, како појединим државним установама тако и приватним лицима. Он је формирао и дао и другим нашим факултетима одличне наставнике за математику и њене примене, који данас, поред школског рада, са успехом обрађују своју науку и као наставници и као научници.

И онда је сасвим разумљиво што нам је г. Професор, – који, после четрдесет и четири године непрекидне службе на Великој школи у Универзитету, кроз који дан занавек напушта дело руку својих, – кад смо га упитали како се због тога осећа и да ли је забринут за продужење тога свога дела у будућности – са осмехом задовољна човека одговорио да може потпуно мирно „отићи у старо гвожђе" и да га они које он оставља могу са пуним правом испратити као калуђери старога игумана:

– Путуј игумане, не брини за манастир!...

*

Читалац је запазио, наравно, једну ствар која је сасвим изузетна за новински чланак ове врсте: нисмо поменули ниједно име. На нашу жалост, не можемо донети имена чланова Математичког института о којима је овде реч: то је био услов под којим смо обавештења о Институту и добили. О Институту, рекли су нам, може се овом приликом писати, али о личностима – не.

Наши научници-математичари не желе, дакле, личну рекламу. Зато шира јавност и није досад могла бити обавештена о њиховим научним успесима.

Појмови наших математичара свакако су необични у данашње време, када се и најмањи, и ефемеран, успех – разглашује на сва звона...[1]

---

[1] Наравно, садашњи читалац овог чланка лако ће погодити да је г. Професор, који се после четрдесет и четири године непрекидног рада на Великој школи и Универзитету ставља у пензију, баш Михаило Петровић и да такође, том приликом, он говори испред Математичког института Београдског универзитета.

Духовна отменост, коју Петровић испољава не наводећи имена чланова Института, била је, како видимо, ретка врлина и те давне 1938. године. А та, тада скривена имена Михаила Петровића, Николе Салтикова, Милутина Миланковића, Антона Билимовића, Тадије Пејовића, Вјечислава Жардецког, Јована Карамате, Милоша Радојчића и др., данас нам сама говоре о изузетним резултатима и великом успону наше науке у том периоду, а о чему нам кроз овај чланак Петровић говори одмереним и правим начином.

Ако су се у времену овог чланка „и најмањи, и ефемерни успеси разглашавали на сва звона", како је тек то данас!

Нека овај чланак служи и тим исчезавајућим врлинама, које нам на тако леп начин рефлектује.

# ДИМИТРИЈЕ НЕШИЋ*

У Димитрију Нешићу, чији се живот угасио 26. Априла 1904. год., изгубила је и Југословенска Академија једнога свог члана, који је оставио трајног трага свога рада и чије ће се име са поштовањем помињати још у многобројним генерацијама наших раденика на пољу науке.

Нешић је рођен у Београду 2. Октобра 1836. год. У Београду је свршио основну школу, гимназију и две године лицеја; 1855. год. отишао је као државни питомац у Беч на политехнику, где је остао до 18. Септембра 1858. г. Из Беча је прешао на политехнику у Карлеруе и ту је остао до 1862. год. Те се године вратио у Србију, где је исте године постављен за суплента у лицеју, а затим 26. Септембра 1863. год. за редовног професора математике на београдској Великој Школи, која је тада тек била отворена.

Као професор и ректор Велике Школе Нешић је провео више од тридесет година, оставши у томе положају све до 20. Јануара 1894. г. У свима преображајима, кроз које је за то време пролазила Велика Школа, Нешић је активно суделовао, остављајући на свакоме послу отиске свога великог школског искуства и дајући својим ауторитетом правац овим преображајима. Најдубље и најдраже успомене, које је Нешић оставио за собом, и јесу баш оне, што их је као професор оставио у дугоме низу генерација ученика Велике Школе, у чијим је очима он и по самој својој појави и по преданости својој науци, по јасноћи у предавањима и уметности да веже пажњу за предмет који излаже, увек представљао идеал правога професора.

Али Нешић је имао великог утицаја на развијање просвете у Србији и ван своје катедре. Као дугогодишњи члан и председник Просветног Савета он је имао непосредна утецаја на просветне послове у нашој земљи, руководећи, својом свагдашњом преданошћу и савесношћу, пословима те врсте.

---

* Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Ljetopis za 1904, t. 19, Zagreb 1905, str. 84–87; некролог поводом смрти дугогодишњег професора Велике школе у Београду Димитрија Нешића. М. Петровић је ово посмртно слово писао као дописни члан JAZU (пр. Д. Т.).

Међу Нешићевим заслугама за јавни живот у Србији нарочито се истиче једна од општијег значаја: услуге које је он чинио при увођењу метарске системе мера у Србији. Он је и израдио закон о метарским мерама од 1872. год., који је, као Владин референт, и у Скупштини бранио; његова је популарна књига о метарским мерама омогућила и олакшала брзо и лако увођење нове системе у нашу земљу.

Политичке промене у Србији нису могле оставити недирнута и таквог једног радника, какав је био Нешић, и допустити му да своју каријеру заврши на послу, на коме је век провео и коме је био тако идеално предан. Јануара 1894. год. он је отишао са Велике Школе за министра просвете и у тој дужности остао до 21. Марта исте године. Тада је стављен на расположење, а 9. Маја 1894. год. постављен је за државног саветника; у томе је звању служио до 24. Јануара 1900. год., кад је стављен у пензију.

Глас, који је Нешић стекао као професор, био је увећан радовима на струци којом се бавио. Међу овим радовима једни су из школске књижевности (равна и сферна тригонометрија; алгебарска анализа; наука о комбинацијама), други су из математичке философије (о важности математике; борба Њутна и Лајбница за приоритет инфинитезималног рачуна; поглед на Лајбницову инфинитезималну методу) и, најзад, трећи су оригиналне расправе из области чисте математике, штампани у Гласнику Срп. Ученог Друштва (4 расправе) и у Гласу Срп. Краљ. Академије (5 расправа). Нарочита су успеха између свих књижевних радова Нешићевих имали његови уџбеници: тригонометрија и алгебарска анализа, који носе обележје свакога посла Нешићева: сређености и јасноће; они су у дугоме низу година служили нашим математичарима као изворна дела и као таква служе корисно и данас.

Радови на науци и просвети стекли су Нешићу признања у научним круговима и у нашој земљи и ван ње. Он је био члан Српског Ученог Друштва (10. Фебр. 1870), Срп. Краљ. Академије (5. Априла 1886), Југословенске Академије знаности и уметности (18. Дец. 1890). 18. Новембра 1892. г. постављен је за председника Српске Краљ. Академије Наука, у коме је положају остао три године.

И као човек и као професор и као научник Нешић ће остати као једна од најмилијих успомена у кругу својих ученика и савременика, као један од оних, који су и животом и радом служили за углед средини, у којој су живели.**

** Опширније у књигама: Д. Трифуновић, *Димитрије Нешић, зора српске математике*, Архимедес, Београд 1997, стр. 124 и Д. Трифуновић – П. Перишић, *Математичар Петар Вукићевић,* Грађевинска књига, Београд 1997, стр. 214 (пр. Д. Т.).

# АПСОЛУТНЕ И РЕСТРИКТИВНЕ МАТЕМАТИЧКЕ НЕМОГУЋНОСТИ[*]

Историја развитка математике[1] у току последњих неколико деценија показује једну одлику, која ће се узалуд тражити у њеним ранијим стадијима и која модерној математичкој анализи даје нарочиту ознаку. Док се раније држало за очито, да сваки проблем, који има свога смисла, мора имати и своје решење, тако да се на немогућности у томе смислу није ни помишљало, данас се о томе имају сасвим други погледи и друго искуство. Док су поједини проблеми у току векова кушали снаге математикâ, од најобичнијих до највећих, чију су пажњу баш својом резистентношћу непрекидно привлачили, а да при томе ни за један тренутак није долазила у питање сама могућност њихова решења, која се увек држала за очиту и ван сваке дискусије: данас се на ствар гледа сасвим другојачије и застаје онде, где ранији математичар није ни помишљао да застане. Показало се наиме, да постоји математичких проблема са очитим смислом, таквих, за које је одиста и тешко доћи на мисао, да проблем може и немати свога решења, и за које је заиста несхватљиво, из каквих би разлога могла потјецати апсолутна немогућност њихова решења, па да се ипак – кад се средствима модерне математичке анализе дубље и са јачим дисцернирањем загледа у природу несавладљивих тешкоћа, пред којима се застало – сагледа оно, што старији математичари ни у току векова нису могли сагледати: *айсолуйна немоїућносй* њихова решења, која ће постојати за вечита

---

[*] Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 204, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 57, Zagreb 1914, str. 131–140; саопштено у Разреду 4. јула 1914.

[1] Ова радња била је намијењена свечаној књизи за седамдесету годишњицу непрежаљенога предсједника Југословенске академије *Таде Смичикласа*. Али како је његово преминуће претекло почетак тискања те књиге, одустала је академија од свога наума, па је објелодањује овдје. – *Југославенска академија*.

времена, независно о људским напорима и употребљеним средствима у покушајима, да се до решења дође.

Први пример такве врсте дао је проблем решавања општих алгебарских једначина. После једначина првога и другог степена, којих је решење било познато још старим математичарима, затим после Tartaglia-ова и Cardan-ова решења једначине трећег степена и Ferrari-ева решења једначине четвртог степена, било је на реду и сасвим природно и логички мислити на алгебарско решење општих једначина истог и виших степена. После безбројних покушаја у дугоме низу деценија, да се проблем реши; после узалуд употребљене масе аналитичких досетака сваке врсте, Ruffini и Abel су у почетку прошлога века осетили, да је решење проблема апсолутно немогућно, па су успели дубоком и детаљном анализом проблема, да ту немогућност потпуно и докажу, на велико изненађење ових, који су се усиљавали наћи му решење, а на ту немогућност нису ни помишљали. Немогућност је то од оних, које су у самој природи ствари, и значи ово: није недовољно оно, што се данас о алгебарским једначинама зна, и не стоји то, да се још није наишло на сретну комбинацију алгебарских операција, која би – као код једначина степена нижег од 5 – одједном дала сва решења дате једначине вишег степена, него: такве операције апсолутно не постоје па ни једна од безбројних комбинација алгебарских симбола никад не може дати оно, што се тражи. Сваки покушај те врсте унапред је, и то за вечита времена, осуђен на неуспех.

Проблем квадратуре круга вековни је проблем, који је интензивно занимао генерације математичара у току десетина векова. По том, што очито и безусловно мора постојати квадрат површине једнаке са површином датога круга, држало се за очито и ван сваке сумње, да се такав квадрат може и одредити геометријском конструкцијом помоћу инструмената за цртање праве линије и кружних лукова. Безброј неуспелих покушаја у току толиког броја векова, да се проблем квадратуре круга у томе смислу реши, није сломио истраживаче, и позване и непозване, да о њему мисле. Број таквих решења, поднесених париској Академији Наука, био је у једно време толико велики, да им је академија морала једном за свагда затворити своја врата и објавити, да више не прима на оцену ни један математички рад, који би се односио на квадратуру круга. Проблем је, међутим, ушао у сасвим другу фазу од онда, од када се почело трагати за тим, да се докаже његова апсолутна немогућност, а то је у последње време и извршено. Liouville је најпре доказао у другој половини прошлога века, да Napier-ов број $e = 2{,}718...$ не може бити корен никакве квадратне ни биквадратне једначине са коефицијентима, који би били цели бројеви. Hermite је год. 1873. доказао, да је број $e$ чисто трансцендентан број, тј. да не може бити корен никакве алгебарске једначине са коефицијентима, који су цели бројеви. Користећи се познатом Euler-овом релацијом између броја $e$ и Ludolf-ова броја $\pi = 3{,}141\ldots$, Lindemann je затим доказао, да је и број $\pi$ чисто трансцендентан број. Па пошто се инструментима за цртање праве линије и кружних лукова (линеала и шестара) могу конструисати само оне дужине, које се из основне јединице рачунски изводе чисто алгебарским операцијама, то је Lindemann-овим резултатом једном за свагда скинут са дневног реда проблем квадратуре круга као апсолутно немогућан проблем. Сличној врсти проблема припада и проблем поделе угла на непаран број делова, али којега је апсолутна немогућност била много мање скривена, тако да ју је Wantzel потпуно доказао још 1837. године на елементаран начин.

Редукција бескрајнога броја трансцендената, на које се поступно наилазило у развитку математичке анализе, даје небројене случајеве таквих апсолутних математичких немогућности. За прве трансцендентне функције, које су уведене у математичку анализу као рачунски елементи – на елементарну експоненцијалну и њој инверсну логаритамску функцију – доказано је одмах, да су несводљиве на комбинације алгебарских функција у коначноме броју, да су то несводљиви рачунски елементи, самосталне математичке јединке, којих је редукција на још простије рачунске елементе апсолутна математичка немогућност.

Међутим доказана могућност, да се многобројне друге трансценденте сведу на комбинације алгебарских експоненцијалних и логаритамских функција у коначноме броју – као што је то било са тригонометријским и циклометријским функцијама, које је Euler свео на алгебарске комбинације поменутих елементарних трансцендената – одржавала је наду, да ће се бар оне трансценденте, до којих је довео инфинитезимални рачун, моћи такође свести на ове просте рачунске елементе. Интегрални је рачун био неисцрпан извор нових трансцендената, и за многе се од ових (често после дуготрајних безуспешних покушаја, а интервенцијом какова новога пронађеног математичког факта или какве нове аналитичке досетке) најпосле и успело, да се та редукција изврши. Тако је било: са трансцендентама, које се добијају интеграцијом рационалних функција; или с интеграцијом функција, што рационално зависе о интеграционој промењљивој количини и једном полиному другога степена по тој количини; или са интеграцијом пространих класа израза, што зависе о експоненцијалним или тригонометријским функцијама, итд.

Но поред свега тога за многе се од таквих трансцендената још одмах од почетка показало, да им је таква редукција немогућна и да се никаквом трансформацијом не могу свести на комбинације елементарних функција. Тако је нпр. било са функцијом, која носи име интегралнога логаритма и која има познату важну улогу у теорији простих бројева; или са интегралом елементарне експоненцијалне функције, у којој је интеграциона променљива количина смењена каквим својим степеном различним од јединице, или која је само подељена интеграционом променљивом количином; или са интегралима, који под интегралним знаком садрже квадратни корен из какога полинома степена вишега од 2, итд. Мада су те функције по своме току, по бескрајним редовима, у облику којих се могу изразити, и по облику интеграла, који их дефинишу, веома просте: сви покушаји, да се оне сведу на комбинације алгебарских, експоненцијалних и логаритамских функција у коначноме броју, разбијали су се о несавладљиве тешкоће, на које се наишло. Liouville-у је првоме год. 1833. и 1834. пошло за руком, да једном за свагда докаже апсолутну немогућност редукције великога броја тих трансцендената на комбинације поменутих елементарних функција и потпуну илузорност свакога покушаја у томе правцу. Том је приликом доказана несводљивост интегралнога логаритма и основних елиптичких интеграла, у којима под интегралним знаком фигурише квадратни корен из полинома трећег или четвртога степена, па тим самим и несводљивост трансцендената дефинисаних хиперелиптичним интегралима, у којима под интегралним знаком фигурише квадратни корен из полинома степена вишег од 4, па стим више несводљивог општега Abel-ова интеграла, у коме под интегралним знаком фигурише општа алгебарска функција.

У ту врсту немогућности долази и она, што произлази из хипер-трансцендентнога карактера једне масе иначе врло простих трансцендената: немогућност егзистенције икакве алгебарске диференцијалне једначине, коју би таква трансцендента задовољавала. Дуго се нпр. тражила алгебарска диференцијална једначина првога или ма каквога вишег реда, коју би задовољавала Legendre-ова функција $\Gamma(x)$, која је толико важна у најразноличнијим проблемима математичке анализе. Hölder је у последње време доказао, да је свако трагање у томе правцу илузорно, тј. да не постоји никаква диференцијална једначина, првог или вишег реда, која би изражавала какву алгебарску релацију између интеграционе променљиве количине, једне функције и ма количкога броја њених узастопних извода, а коју би могла задовољити функција $\Gamma(x)$. Писац је ових редова доказао такав исти резултат за велики број трансцендената $\sum a_n x^n$, – нпр. оних, за које општи коефицијенат $a_n$ садржи $n$ под каквим кореном или под знаком какве трансцендентне операције (осим експоненцијалне) и уопште за случајеве, кад $a_n$ није или рационалан број или рационална функција ограниченог броја ирационалитета, који се не мењају са $n$. За трансценденте такве врсте постоји математичка немогућност наћи такву алгебарску диференцијалну једначину, ни првога ни вишег реда, коју би таква трансцендента могла задовољити.

Пространо поље у математичкој анализи, на коме се при свакоме кораку наилази на апсолутне математичке немогућности, чине проблеми интеграције диференцијалних једначина. Још пионирима инфинитезималног рачуна пошла је за руком интеграција доста великога броја општих типова диференцијалних једначина – како првог, тако и вишег реда – као што су: општа линеарна једначина првога реда, Бернулијева једначина, хомогене једначине, једначине другога реда, које не садрже експлицитно интеграциону промењљиву количину и први извод, итд. Област таквих интеграбилних типова једначина доста је брзо исцрпена; оно, што је остајало, показало се или несавладљиво или је задавало таквих тешкоћа, да је требало чекати на какве нарочите, дотле неупотребљаване аналитичке досетке и нове напретке у целокупној математичкој анализи, па да се интеграција може извршити. За неке од таквих типова доказана је апсолутна немогућност њихове интеграције, као што је то нпр. са општом Riccati-евом једначином првога реда, општом линеарном једначином вишега реда итд. Тај је доказ пресекао свако даље трагање у томе правцу, колико се тиче ових типова једначина; отворено поље за даље истраживање остаје за оне многобројне типове диференцијалних једначина, за које нити је до данас доказана немогућност интеграције, нити се успело интегралити их.

Наведимо као пример таквих математичких немогућности и један куриозан случај из теорије бескрајних редова! Још од зачетака опште теорије редова било је познато за редове $\sum u_n$ са позитивним члановима, да је за конвергенцију реда потребна погодба, да израз $nu_n$ тежи нули, кад $n$ бескрајно расте, а да је зато у исто време и довољна погодба, да израз $n^k u_n$ где је $k$ ма какав број већи од 1, при том такође тежи нули. Било је дакле сасвим природно тражити такву функцију $\varphi(n)$, независну о природи посматранога реда, која би дала у исто време и потребну и довољну погодбу за конвергенцију реда, тј. која би била таква, да кадгод израз $\varphi(n)u_n$ тежи нули за $n$ бескрајно велико, ред је $\sum u_n$ извесно конвергентан, а да, кад год тај израз тежи граници различној од нуле, тај је ред извесно дивергентан. За таквом се функцијом одиста дуго времена и трагало; стални неуспех у томе приписивао се факту, да се још није наишло на праву функцију $\varphi(n)$, која решава проблем, али да ће се на њу једном свакако наићи. Abel је напослетку, трагајући и сам у томе правцу и наилазећи непрестано на негативне резултате, дошао на идеју, да потражи прави разлог такоме сталном неуспеху – и резултат, који је постигао и потпуно га доказао, био је овај: илузорно је трагати даље у поменутоме правцу, јер функција $\varphi(n)$, која би задовољавала горњу погодбу, апсолутно не постоји.

Таквих доказаних немогућности има данас велики број и у свима областима теоријске математике. Неке су од њих безусловне, *айсолуйне*; друге су *ресирикиивне* и важе само за нарочите случајеве, који настану, кад се каквоме општијем, иначе могућном проблему, импонирају какве нарочите комплементарне погодбе, какве рестрикције, које, док се дубоко не загледа у природу њихове улоге у проблему, ни у колико не кваре смисао и могућност тога проблема, али које га у ствари ипак чине илузорним. Такву врсту математичких немогућности имамо нпр. у проблему: наћи какву целу функцију, која остаје коначна, кад независно промењљива количина у ма коме правцу бескрајно расте; Liouville је доказао, да се таква функција не може наћи, јер она уопште и не постоји. Или у проблему: наћи какву целу функцију, која не добија две дате коначне вредности ни за коју вредност независно промењљиве количине, о којој она зависи; Picard је доказао илузорност проблема својом теоремом, да таква функција не постоји. Или у многобројним проблемима геометрије положаја (geometria situs), као што су нпр. они, који се састоје у томе, да се једна одређена контура, састављена од међусобно везаних црта, континуално једним потезом нацрта, а да се при томе ни преко једнога њена дела не пређе више од један пут (Clausen-ов доказ немогућности, да се праволинијска контура састављена од правоугаоника подељеног на пет редова, који су такође правоугаоници, пређе једним потезом); или у разноврсним проблемима теорије бројева итд.

Прави разлог таквих немогућности у великом броју случајева скривен је врло дубоко, и његово налажење често припада најтежим проблемима математичке анализе. Ваља се само сетити, колико је требало танчине у дисцернирању сићушних и на први поглед безначајних аналитичких факата, колико ингениозности у довођењу у везу међу собом диспаратних математичких истина и у истицању на видне резултујуће апсурдности, којом се такве немогућности увек доказују, па да се схвати, како је то могло бити, да се на доказ немогућности каткад најелементарнијих проблема имало чекати вековима и да се за неке од њих и данас чека. Abel-ов доказ немогућности решавања опште алгебарске једначине задаје толико тешкоћа, да се поред све своје капиталне математичке важности не излаже ни у највишој математичкој настави. Hermite-ов доказ трансцендентности броја *e*, који је и омогућио потпун математички доказ немогућности квадратуре круга, употребио је последње напретке модерне анализе и држи се узором математичке ингениозности. Picard-ов доказ немогућности егзистенције целе функције, која ни за какву вредност независно промењљиве количине не добија две дате коначне вредности, нарочито је карактеристичан пример те врсте: изведен први пут и на сувише неприродан начин из извесних специјалних особина елиптичких и модуларних функција, за које се могло чинити да не стоје ни у каквој вези са општим проблемом, о коме је реч, Picard-ов доказ упорно је одолевао свима безбројним покушајима, да се са неприродне основице, на којој је био, сведе на своју праву и природну основицу и ослободи оне извештачености, која је бунила и које је потреба била несхватљива; у томе се успело тек у најновије време, кад је Landau изнео свој доказ Picard-ове теореме основан само на резултатима данашње опште теорије функција. А о томе, каквих тешкоћа могу задавати и најелементарнији проблеми о математичким немогућностима, може се ценити по најкуриознијем случају такве врсте: по класичном и универзално познатом Fermat-овом проблему у теорији бројева, а који још и данас пркоси напорима највећих математичара.

Модерни критицизам, једна од главних ознака математичких радова последњих деценија, последица је искуства, које се стекло, о потреби, да се, пре него што се какав проблем узме у решавање, добро и до дна загледа, има ли он одиста решење, па ма колико се егзистенција решења чинила очевидна. Искуство о апсолутној немогућности проблема, које старијим математичарима не би ни на ум пало да имају могућност да посумњају, изазвало је данашњи скептицизам у математичкој анализи, који тражи, да се, не водећи рачуна о привидности, вероватноћи и аналогијама, са највећом ригорозношћу најпре осигура основица, па да се тек онда диже зграда. Тако је, у осталом, и потребно радити, да би се знало, шта се ради. Колико би била несигурна општа теорија алгебарских једначина, да Gauss није доказао, да свака алгебарска једначина насигурно има решења? Колико би била проблематична а можда и илузорна већина резултата данашње теорије диференцијалних једначина, да Cauchy није врло суптилном анализом несумњиво утврдио, да свака диференцијална једначина има своје решење, свој општи интеграл?

Па и сами негативни резултати, математичке немогућности, које ће се утврдити при дубљем испитивању некога проблема, могу исказивати важне аналитичке факте, тако исто драгоцене, као што су и они, што су садржани у позитивним, афирмативним резултатима. Доказ немогућности квадратуре круга изнео је на видик неколике фине а дубоко скривене разлике између алгебарских и трансцендентних бројева и отворио пространо поље за нова истраживања у аналитичкој теорији бројева и теорији функција. Picard-ова теорема о немогућности егзистенције такве целе функције, која ни за какве вредности независно променљиве количине не добија две дате вредности, поред свега свога негативног карактера представља једну од најважнијих и последицама најплоднијих тековина данашње математичке анализе; привидно безначајан факт, који она исказује, дао је моћно оруђе за решавање других проблема у позитивноме смислу, а понаособ за решавање мноштва нових проблема аналитичке теорије диференцијалних једначина. Помоћу те теореме Picard је нпр. прецизирао аналитичку природу униформних интеграла у неким општим случајевима диференцијалних једначина првога реда и свео њихову одредбу на одредбу рационалних интеграла. Помоћу исте теореме писцу је ових редова пошло за руком прецизирати број трансцендентних униформних интеграла једначина првога реда, испитати особине врло генералних диференцијалних једначина ма кога реда, које имају за интеграле униформне двогубо-периодичне функције, формирати прве интеграле таквих једначина итд.

По себи се разуме, да се сличне користи могу очекивати само од оних математичких немогућности, апсолутних или рестриктивних, које се могу потпуно доказати и којима се тачно може знати прави аналитички разлог. У такве немогућности никако не треба рачунати и оне, које се за такве држе само стога, што до данас никоме није пошло за руком, да противно докаже. На такве се недоказане или непотпуно доказане немогућности наилази на свакоме кораку и у свима областима математичке анализе. О томе, колико оне могу бити штетне, кад се створи неосновано или недовољно основано уверење, да су то одиста апсолутне математичке немогућности, даје најлепши пример историја проблема трију тела, решеног у најновије време. Вековни неуспешни напори математичара, да израчунају свих девет координата трију тела што се међу собом привлаче по Newton-ову закону, помоћу редова, који би конвергирали за све реалне вредности времена, створили су уверење, да је то апсолутно и немогућно учинити, тако да је и један од најкомпетентнијих познавалаца природе и историје тога проблема, директор париске опсерваторије Tisserand изјавио, да држи проблем за немогућан. Такво уверење о немогућности проблема одбијало је математичаре, да за његовим решењем интензивно трагају, и било један од разлога, што је проблем све до најновијега времена остао нерешен. Sundman-ово решење проблема трију тела, извршено најобичнијим средствима математичке анализе, и које је тек за последње године дана допрло до сазнања оних, који се о њему баве, показало је међутим, да је проблем био решљив и да је опште уверење о његовој нерешљивости било потпуно неосновано и ометало пут ка циљу, што се имао пред очима.

Проблеми, пред којима данас остају немоћна средства математичке анализе, не морају до века такви остати; тешкоће, несавладљиве за данашње математичаре, могу бити играчка за сутрашње. Али од тога чине велики изузетак они проблеми, за које се могло доказати потпуно и ригорозно нерешљивост за вечита времена, независну о природи употребљених аналитичких средстава и о будућим напрецима математичких наука. Тачно доказивање таквих апсолутних математичких немогућности – као што рекох – једна је од одлика модерне математичке анализе и последица је онога потпуно оправданог научног скептицизма, који се у последње време у њој тако јако развио.**

---

** У књизи *Matematička čitanka*, Zagreb 1947, под насловом *Matematičke nemogućnosti*, Миленко Севдић је објавио овај одломак из ове Петровићеве расправе (стр. 23–26). У целости је ова студија поновљена у књизи Михаило Петровић, *Чланци*, Друштво математичара и физичара НР Србије, Београд 1949, стр. 51–58. Извод ове Петровићеве радње, на немачком језику приредио је Владимир Варићак (Izvješća, sv. 3, Zagreb 1915, S. 107–114), а Szegö дао приказ у FdM, B.47, S.47 (пр. Д. Т.).

# МЕЂУНАРОДНИ САВЕЗ ЗА НАУЧНА ИСТРАЖИВАЊА*

Још у току рата покренут је између Академија и научних институција савезничких држава питање о организацији заједничког рада на научним истраживањима. Питање је у току 1918-те год. било толико претресано и тако прихваћено од стране представника науке, да је Краљевско Друштво у Лондону предложило један међународни састанак савезничких Академија. Састанак је одржан 9., 10. и 11. октобра 1918. год. у Лондону. На њему су узели учешћа представници Америке, Енглеске, Француске, Италије, Белгије, Србије и Бразилије. Нашу је Академију на томе састанку заступао њен члан г. Богдан Поповић. На њему је донесено неколико одлука које су поставиле темељ будућој удруженој сарадњи научних институција савезничких држава. Те су одлуке ове:

1. Једној нарочитој комисији (Commission d'étude) поверена је израда општега плана за међународну организацију заједничког рада на научним истраживањима, како на чистој науци, тако и на њеним индустријским применама.

2. Свака се од Академија, заступљених на томе састанку, позива да у својој земљи оснује један *Национални Савет* (Conseil national) за горње циљеве.

3. Ствара се један *Међународни Савет* (Consel international) за координацију рада Националних Савета.

4. Скреће се пажња Владама савезничких држава на важност будућих научних истраживања и потребу да се по свршетку рата повисе буџети и дотације за та истраживања.

5. Прекидају се, до нове одлуке, све релације са научним институцијама противничких држава.

---

* Српски књижевни гласник, Београд 1920, t. I, (н. сер.), 2, стр. 130–138.

Наш делегат је у име својих колега – напомињући да извесно може говорити и у име румунских и грчких колега и савезника, који нису били присутни Састанку – истакао разлику између потреба већих и мањих народа, и објавио је да ће своје предлоге учинити наши делегати на наредном Састанку, који је одређен за новембар 1918. у Паризу.

Према одлуци донесеној на Лондонском састанку, идући састанак представника научних институција савезничких држава одржан је у Паризу од 26. новембра до 1. децембра 1918. год. у згради Париске Академије Наука. Нашу су Академију заступали: њен председник г. Јован Жујовић и члан Михаило Петровић. На томе је састанку:

1. Формиран *Међународни Савет за научна истраживања* (Conseil international de Recherches), који је из своје средине, ради олакшања и убрзања рада, изабрао један *Извршни комитет* (Comité éxècutif) од 5 лица. Комитету је стављено у задатак претходно проучавање свих питања о којима има да одлучује Међународни Савет и обрада предлога за те одлуке, као и сазивање састанака тога Савета.

2. Усвојена основица за стварање Међународних *стручних* Савеза (астрономског, геодетског и геофиличког, хемијског, математичког, физичког, геолошког, биолошког, географског, за радиотелеграфију, за библиографију и научну документацију, за технику и патенте).

3. Изражене су жеље представника појединих савезничких институција о томе шта би се имало ефективно учинити ради олакшања и појачања заједничке сарадње на пословима који се имају у виду. Делегати су нпр. Срп. Краљ. Академије у име својих колега изразили и образложили усмено и писмено ове жеље: да се међу савезничким Академијама омогући позајмљивање ређих научних дела и стручних часописа; да се олакша, у библиотекама и лабораторијама свих савезничких држава, рад лицима која буду имала препоруку ма које од здружених Академија; да се у свакој земљи, а под окриљем Академије те земље, створи једна врста бироа за обавештавање, у коме би истраживачи свих земаља могли добити обавештења о питањима и проблемима за које има нарочитих специјалиста при тој Академији или у тој земљи.

Трећи, најважнији и по резултатима најплоднији састанак представника научних институција одржан је у Брислу од 18. до 28. јула 1919. г. у Академијској палати. Нашу су Академију на томе састанку представљали њени чланови г.г. Јован Цвијић и Мих. Петровић.

Ту су, пре свега, дефинитивно усвојени статути Међународног Савета за научна истраживања. Савет добија за дужност да оријентише и координира међународну активност на разним гранама науке и њених примена у савезничким земљама. Свака од тих земаља биће у вези са Саветом или преко своје националне Академије, или преко свога националног Савета, или преко других сличних националних научних институција, или, на послетку, преко своје Владе. Радом Међународног Савета управља његов Извршни Одбор састављен од 5 лица која се бирају на општим скуповима чланова Савета.

Свака од држава учесница плаћа Савету одређену годишњу котизацију у облику годишњих унитарних улога од којих један не прелази суму од 250 франака. Број ових улога зависи од броја становника у држави која их плаћа, и даје право на одређен број гласова на састанцима и решавањима. Наша би држава, према своме броју становника, имала да плаћа годишње по три унитарна улога и њени би представници имали право на три гласа. Закључени споразум важи од 1. јануара 1920. до 31. децембра 1931. г.

На Бриселском састанку су дефинитивно засновани и Стручни Међународни Савези: астрономски, геодетски, и геофилички, хемијски, физички, математички, геолошки, биолошки, географски, технички, за међународну радиотелеграфију, за библиографију и документацију, и за патенте. Сви су ови Савези формирани на једној широкој основици која даје потребну слободу научном раду у свакој од земаља учесница, али га оријентише, координира према општим циљевима и ставља му на услугу заједничка средства којима располаже Савез. А у томе и може лежати практичан интерес таквих Савеза и основне замисли која их је покренула и остварила.[**]

---

[**] О овим веома важним догађајима за научни живот нове државе после Првог светског рата, погледати *Летопис* у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића.* Занимљиви су и коментари у чланку *Математичко друштво* (Гласник професорског друштва, Београд 1921, t. I, 1, св. 5, стр. 236) од непознатог аутора (В.С.) (пр. Д. Т.).

# МЕЂУНАРОДНА КОМИСИЈА ЗА МАТЕМАТИЧКУ НАСТАВУ*

После дугог и исцрпног претреса питања о пропагацији математичких знања, о савременим потребама разних струка у којима су та знања главни или помоћни елеменат, и о томе колико је данашња математичка настава прилагођена тим потребама и правцима у којима се ове данас све више развијају, донесена је на конгресу математичара, држаном у Риму 6–11. априла 1908. године, једногласна одлука: да се приступи организацији колективног рада у свима културним земљама, на свестраном компаративном проучавању математичке наставе и на спреми материјала који би омогућио доношење одлуке о једновременим изменама у овој настави у земљама које буду вољне прићи томе покрету.[1]

У томе циљу конгрес је поверио професорима F. Klein-у (Гетинген), Sir G. Greenhill-у (Лондон), и H. Fehr-у (Женева) да конституишу једну ***Међународну комисију за математичку наставу*** која би имала да организује компаративно проучавање метода и програма у средњој математичкој настави у разним земљама, и да о томе спреми потребан материјал који би се имао претрести на једном међународном конгресу. Конституисање је комисије извршено одмах, још у току исте године; централни одбор, састављен од поменута три лица, одмах је (састанак у Келну, септембра 1908) саставио план за прве почетке рада, саопштио га Владама земаља за које се могло очекивати да ће се одазвати овоме међународном покрету и добивши повољне одговоре и пристанке готово свих Влада којима се обратио, централни је одбор одмах ступио у везу са одређеним делегатима разних држава, органи-

---

* Просветни гласник, Београд 1913, t. XXXIV, 8, стр. 724–731.

[1] Петровић је учествовао на конгресу у Риму са саопштењем *Sur une classe remarquable de séries entières.* О овом раду видети библ. јед. 96 у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића*, где је наведен одјек о овом Петровићевом саопштењу (R. Jentzsch, G. Pólya, P. Montel, J. Карамата и Д. С. Митриновић) (пр. Д. Т.).

зовао са овима целокупан посао и упутио га тако, да је он данас врло интензивно развијен и да ће се ускоро имати сав потребан материјал за дефинитиван претрес питања о математичкој настави. Рад је на томе данас у пуноме своме јеку; он се увелико врши у свима земљама које су се солидарисале са овим покретом и надати се да у томе, чим прилике буду допустиле, неће изостати ни наша земља, која у међународној комисији за математичку наставу има и свога званичног делегата.[2]

Намера ми је у овоме чланку упознати г.г. наставнике математике у нашим школама са тим како је поменути посао организован, на који се начин он данас врши, шта је до данас на њему урађено, и шта се од њега ишчекује кад он буде потпуно довршен.

## ОРГАНИЗАЦИЈА РАДА

а) *Државни делегати.* Међународна је комисија састављена од делегата свих држава које су се одазвале жељи конгреса и ради заједничког рада на послу повереном комисији, одредиле у овој своје званичне представнике. Данашњи је састав комисије овакав: у њој су 43 стална члана као представници 25 држава, како у Европи, тако и у Америци и Аустралији. Делегати су појединих држава ова лица:

Немачка: проф. *F. Klein* (Гетинген) и проф. *P. Staeckel* (Карлсруе).

Аустрија: проф. *E. Czuber*[3] , *W. Wirtinger* i *R. Suppantschitch* (Беч).

Белгија: проф. *J. Neuberg* (Лијеж).

Данска: проф. *P. Heegaard* (Копенхаген).

Шпанија: проф. *C. J. Rueda* (Мадрид).

Сједињене Државе: проф. *D. E. Smith* (Њујорк), проф. *W. Osgood* (Кембриџ Мас.) и проф. *W. A. Young*.

Француска: *A. de St. Germain*, *C. A. Laisant* и *C. Bourlet* (Париз).

---

[2] Делегат наше земље био је више година Михаило Петровић. После Другог светског рата, једно време ову дужност је вршио професор Никола Салтиков и на крају професор Ђуро Курепа (о овоме видети Наставу математике и физике за 1953.г.) (пр. Д. Т.).

[3] Чубер (E. Czuber) је познат математичар у нашој средини, не по резултатима, већ као професор Милутина Миланковића на Вишој техничкој школи у Бечу која је школовала мајсторе, инжењере и дипломиране инжењере. Чубер је био ближи пријатељ Кости Карамати (Земун) и највише учинио да Миланковић има веома повољне услове и удобан живот за време рата (1914–1918) у Будимпешти, где је у спокоју и миру нормално живео, примао плату и радио на својим расправама, а вратио се у Београд тек с пролећа 1919. године (пр. Д. Т.).

Грчка: проф. *C. Stephanos* (Атина).

Холандија: проф. *J. Cardinaal* (Делфт).

Угарска: проф. *M. Beke*, *C. Radoz* и *Ratz* (Будимпешта).

Енглеска: *Sir George Greenhill* (Лондон), проф. *E. W. Hobson* (Кембриџ) и *C. Godfroy* (Осборн).

Италија: проф. *G. Castelnuovo* (Рим), проф. *F. Euriques* (Болоња) и проф. *G. Seorza* (Палермо).

Норвешка: проф. *Alfsen* (Христијанија).

Португалска: проф. *G. Teixeira* (Порто).

Румунија: проф. *G. Tzitzeika* (Букурешт).

Русија: проф. *N. Sonin*, *Kojalovic* и *K. W. Vogt* (Петроград).

Србија: проф. *Мих. Пешровић* (Београд).

Шведска: проф. *H. von Koch* (Штокхолм).

Швајцарска: проф. *H. Fehr* (Женева)[4], *C. F. Geiser* (Цирих) и *J. H. Graf* (Берн).

Бугарска: *A. V. Sourek* (Софија).

Аустралија: проф. *Carlslaw* (Сиднеј).

Бразилија: проф. *E. R. Gabaglia* (Рио-Женеиро).

Колонија Кап: *M. Hough* (Краљ. опсерваторија на Capetown).

Мексико: *Valentin Gama* (опсерваторија на Гасиуава).

Јапан: проф. *R. Fujisawa* (Токио).

Делегати држава, које су биле званично заступљене на два међународна конгреса математичара, имају права учешћа у претресању питања о настави на конгресу и право гласа. Државе, које су имале на конгресима најмање десет представника, имају право на два или три делегата, али сви ови имају при решавању само један глас. Делегати држава које не задовољавају горњу погодбу учествују у раду комисије, али немају право гласа,

б) *Државни пододбори*. У државама које имају у међународној комисији своје делегате, основани су под-одбори за математичку наставу, у које поред делегата улази и потребан број стручних лица, којима је добро познато питање о математичкој настави у школама свих врста у земљи, основних, средњих, стручних и Универзитета. Ови под-

[4] Швајцарски математичар Фер био је близак колега Михаилу Петровићу. Околности су учиниле своје, да Јован Карамата почетком 50-их дође на катедру професора Фера у Женеви (пр. Д. Т.).

одбори имају за задатак да припреме сав материјал потребан за слику математичке наставе у земљи, да истакну искуство које се дотле буде стекло и поднесу евентуалне, образложене предлоге о изменама и допунама наставних програма. Тако припремљен и сређен материјал има се штампати о државном трошку у нарочитој једној публикацији на једноме од ових језика: француском, немачком, талијанском или енглеском. Та публикација треба из практичних разлога, а по нарочитој жељи централног одбора, да има формат (велика осмина) званичног органа међународне комисије, часописа *l' Enseignement mathématique*, који уређују професори Laisant (Париз) и Fehr (Женева). Потребан број (75) егземилара има се послати секретаријату међународне Комисије (110. Route de Florissant, Genève) за централни одбор и чланове комисије.

в) *Трошкови Међународне Комисије и ценшалноī одбора* покривају се годишњим улогом од сто динара, који уплаћује свака од држава учасница за време док комисија и централни одбор не заврше свој рад. Фонд образован од тих улога употребљује се на административне трошкове комисије и одбора, а поглавито на штампање комисијског званичног органа, циркулара и реферата о појединим питањима о математичкој настави, који се бесплатно шаљу делегатима држава учасница као и све публикације државних пододбора. Путни трошкови делегата за опште састанке Међународне Комисије падају на рачун тих држава.

## ДОСАДАШЊИ РАД

Првобитна одлука међународног конгреса математичара у Риму односила се само на средњу математичку наставу. Међутим, чим је централни одбор, конституисан на томе конгресу, отпочео свој рад, увидело се да нема места издвајању средњошколске математичке наставе од оне у основним, стручним и највишим школама. Све је то једно са другим везано тако, да те ***насшаве шреба да чине једну орīанску целину*** и да рад међународне комисије може само тако водити постављеноме циљу, ако се буде стало на такво једно шире гледиште. С тога је централни одбор још одмах у почетку организације рада донео одлуку да се рад комисије распрострe на целокупну математичку наставу, од најниже до највише, од оне где су математичка знања само један елеменат за опште образовање и за практичан живот, или помоћни елеменат за разне струке и каријере, па до оне где се знања прибављају због њих самих и где се има продирати до крајњих граница онога што се данас у математичким областима зна. То је основно гледиште на које је одбор стао при изради плана за претходни рад комисије, а који је резимиран у овоме:

*Створити тачну слику актуелног стања математичке наставе, од највише до најниже, у свима културним земљама и уочити савремене тежње и потребе које се у њој, тако простирано схваћеној, истичу.*

Извршење рада остављено је званичним делегатима појединих држава учесница и пододборима конституисаним у тим државама на поменути начин. Шта је све до сад на томе урађено, види се из самога списка публикација централног одбора и појединих пододбора у разним државама. Број штампаних реферата износи близу 300; они су распоређени на преко 160 свезака или брошура и представљају око 10.000 штампаних страна на великој осмини. Све то представља један обилат, поуздан и у сваком погледу драгоцен материјал, до кога се никад не би дошло без оваквога једног општег међународног покрета, као што је овај о коме је реч. Из њега се могу тачно видети: данашње стање математичке наставе у појединим земљама у појединим врстама школа у њима, побуде које су се имале у виду при формирању наставних програма, искуство које се стекло при извођењу тих програма и потребе које су се у томе осетиле.

У неколиким земљама још се ради на проучавању питања о настави и резултати ће ускоро бити публиковани. Целокупна колекција ових публикација налази се у Математичком семинару Филозофског факултета на Универзитету у Београду, где је г.г. наставници, који се о њој буду интересовали, могу разгледати.[5] Нека ми је допуштено надати се да ће се и код нас, чим прилике то буду допустиле, конституисати државни пододбор, који ће се придружити општем покрету, извршити поменути посао за нашу земљу и тиме искупити обавезе које је држава на се узела приставши на права и дужности у томе покрету, у корист математичке наставе у нашим школама а и у интересу самог угледа наших просветних завода.

Састанака Међународне Комисије било је до сада свега два. Не рачунајући у ове један састанак комисије у Бриславу (9–10. августа 1910) на који су били позвани само делегати неколиких суседних земаља, први састанак коме су присуствовали сви дотле пријављени званични делегати, јесте онај у Милану (18–21. септембра 1911), на коме су нарочито истакнута и претресана ова два основна питања, једно о средњој, друго о вишој математичкој настави.

[5] Нажалост, овај обиман и драгоцен материјал за наставу математике нестао је у пламену библиотеке Математичког семинара Филозофског факултета коју су немачке звери запалиле 17. октобра 1944 (пр. Д. Т.).

А) питање о систематском излагању математике и о стапању разних њених грана у средњошколској настави;

Б) питање о теоријској и практичној математичкој настави за слушаоце физичких и природних наука.

На другоме састанку у Кембрицу (август 1912) приликом међународног конгреса математичара, и на коме су такође узели учешћа делегати свих држава учесница, поред упознавања са рефератима о математичкој настави у појединим државама, претресана су још једном из основе питања А) и Б).[6] У вези са питањем А) истакнуто је и претресано питање о изазивању интуиције у средњошколској математичкој настави (реферат проф. D.E. Smith-a) а у вези са Б) питање о вишој математичкој спреми коју треба да имају физичари (референт проф. C. Runge).

Пошто је послу дат обим знатно већи од онога који се замишљао при оснивању Међународне Комисије, и узета у питање математичка настава у њеном најширем смислу, а посао прибирања потребног материјала у многим земљама није довршен (у нашој земљи због прилика у којима се налазила, он још није ни почет) на Кембрицском је конгресу донесена одлука да се посао продужи до идућег међународног конгреса математичара који ће се одржати у Штокхолму у току 1916 год.[7] Пре тога, а најдаље до марта 1914 године, има се довршити скупљање грађе од стране појединих државних пододбора. На једној претходној конференцији Међународне Комисије, која ће вероватно бити у марту 1914 год. имају се поднети штампане публикације у којима је та грађа сређена. Тако спремљена грађа ће се затим компаративно проучити, из ње ће се извући закључци, формирати мишљења и све ће се то изнети пред пуну и последњу седницу Комисије, која ће се одржати приликом међународног конгреса у Штокхолму 1916 год. То ће бити последњи састанак Међународне Комисије за математичку наставу, на којем ће се питање, постављено јој као циљ, дефинитивно претрести и из обилнога материјала, који ће дотле бити прикупљен, извући дефинитивни закључци, формулисани било у одлукама конгреса, било у апелу, који би се од његове стране упутио владама држава учесница, било напослетку, и на тај начин што ће се истаћи на видик појединa предоминирајућа мишљења, заједничке савремене потребе и тежње, и уоп-

---

[6] На конгресу у Кембрицу Петровић је учествовао са рефератом *Fonctions implicites oscillantes* (библ. бр. 113) и активно сарађивао у раду Међународне комисије за наставу математике. О овоме погледати у овој књизи чланак *Међународни конгрес математичара* (пр. Д. Т.).

[7] Петровић мисли на балканске ратове са Турцима и Бугарима (пр. Д. Т.).

ште све оно што се у томе материјалу може издвојити као заједничко и од несумњиво опште користи за питање на које се односи.

Шта се од свега тога има очекивати као практичан резултат?

О томе се за сада, док је посао међународне комисије и државних пододбора још у пуноме своме јеку, не може дати дефинитиван и поуздан одговор. Одлуке ће конгреса зависити од онога што буде у себи садржавао материјал, на чијем се припремању у овај мах ради; оне ће бити импозиране оним што се у томе материјалу буде утврдило као заједничко, несумњиво корисно и саобразно ономе што се данас тражи од математичке наставе. Али о њима се већ и данас, према до сада спремљеном и сређеном материјалу, према општем расположењу које је избило на досадашњим састанцима комисије и према правцима у којима се данас развијају потребе у математичкој настави, може имати извесних индикација које наговешћују бар општи смисао тих одлука и главно обележје основице на коју ће се, вероватно и природно, ставити математичка настава. Те се индикације могу резимирати у овоме:

*У нижој и средњој настави даће се што више маха* ***интуицији*** *и* ***експерименту****, са што мање формалистичког елемента; у стручној настави ће се математици, као основном помоћном елементу, дати чисто практичан, утилитаран карактер, а у вишој настави, где се математика има обрађивати ради ње саме, без обзира на њену улогу у другим областима знања, настава ће се имати развијати у правцу чисто логичком.*

О практичним појединостима начина на који ће се ове идеје провести кроз математичку наставу, о наставним програмима, који ће се имати радити у духу тих идеја, и уопште о реформама у настави које ће вероватно бити последице онога до чега се буде дошло при дефинитивном претресу питања на међународном конгресу, за сад је рано говорити. Несумњиво је, међутим, то да ће покрет, о коме је реч, донети собом реформе у математичкој настави у свима земљама и да ће се, поред све необавезности одлука конгреса, та настава поступно изједначавати и прилагођавати се, уколико то буду допуштале специјалне прилике у појединим земљама, општим савременим потребама. Је ли потреба наговештавати, поред опште користи која ће се имати од овога зближавања математичке наставе у разним земљама, још и несумњиву корист од реципроцитета и узајамних односа који ће тада постојати између школа једне исте врсте у разним земљама, а која би нарочито била осетна при случајевима преласка ученика из школе у једној у школу исте врсте у другој земљи?

Од интереса је навести да су идеје, које су у погледу реформе математичке наставе избиле у досадашњем раду међународне комисије, већ нашле одзива у појединим земљама, где се већ у велико приводе у дело. У томе се погледу на прво место истиче Енглеска, где се оснивају чак и ***лабораторије за математичку наставу***, и где и уџбеници, публиковани у последње време, носе обележје идеје очигледности и интуиције у облику обележеном на конгресу математичара у Кембриџу. Томе се покрету придружује и једна јака струја у Немачкој, поред све интензивности традиционалног логичког елемента који се провлачи кроз математичку наставу у њеним школама. Веома интересантан реферат који је проф. Е. Веке поднео на конференцији међународне комисије о школама у Угарској (в.: *Kurzer Bericht über die Tätigkeit der ungarischen Sub-kommission* von prof. E. Beke и извештај о раду комисије на конгресу 1912 год.) показује са коликом је једнодушношћу, вољом и интересовањем прихваћена идеја о очигледности и интуицији од целокупног наставничког тела на Универзитету, у средњим, стручним и основним школама. И оно што је ту од нарочитог интереса, јесте факт да је покрет, чији је израз и центар Међународна Комисија за математичку наставу, допро у све слојеве наставника без икакве званичне интервенције, једино по спонтаном и непосредном интересовању просветних радника за идеје које су избиле на јавност у томе покрету. Исти покрет налази одзива и у Румунији, где се у овај мах изводе наставне реформе.

Из свега тога може се видети да се стоји пред једном општом реформом математичке наставе у свима земљама и да ће покрет, из кога ће резултирати та реформа, морати захватити и наставу у нашој земљи.

Немогућно је у овоме кратком прегледу било улазити у излагање и претрес идеја које доминирају у овоме покрету; то ће бити, бар у најкраћим потезима, учињено на другоме месту. Колико би била пространа таква теза, може се ценити по литератури која се у току последње 2–3 године развила о томе питању, и која је толика и од толике важности, да је Влада Сједињених Држава, преко своје установе „Bureau of Education" одлучила да о своме трошку публикује *Библиографију математичке наставе*, чија је израда поверена професорима D. E. Smith-у (Њујорк) и C. Goldziher-у (Будим-Пешта). Један је део те библиографије већ изишао; он обухвата само за године 1910–1912 око 2000 наслова дела, расправа и бележака, класираних према својој садржини и врстама школа на које се односе. Према изјави уређивача, тај је материјал само једна трећина од онога којим они располажу, поред свега тога што је и сам тај материјал још врло непотпун, јер није обухватио све културне земље. То ће, како се надају уређивачи, бити сређено у једној доцнијој, знатно већој публикацији.

Циљ је овоме прегледу био само то да скрене пажњу оних који су позвани да се за то заинтересују на замашност и значај овога међународног покрета. Покрет ће и код нас ускоро наћи одзива и наша ће се земља, чим се за то укаже могућност, придружити општој струји која води основној реорганизацији математичке наставе према данашњим погледима и потребама.[8]

---

[8] Уз овај врло прегледни чланак, који покрива период 1908–1913. године, можда ће читаоцу бити занимљиви и следећи допунски подаци.

Почетком међународног општења математичара о питањима наставе, сматра се I Међународни конгрес математичара, одржан у Цириху 1897. године. У секцији „Историја и библиографија математике", саслушано је излагање познатог немачког математичара Феликса Клајна под насловом *О математичком образовању*, а у коме се он залепио за реформу наставе математике.

Године 1899., у Женеви, покренут је часопис *L'Enseignement mathèmatique* под редакцијом ур. Лезана и А. Фера, док су редакциони колегијум чинила таква имена као што су: А. Поенкаре, М. Кантор, П. Апел, Е. Пакар, Ф. Клајн, М.Т. Митаг-Лефлер и др. Већ у првом тому објављена је расправа А. Поенкареа *Логика и интуиција у математици као науци и у настави*.

Августа 1900. године, одржан је у Паризу II Међународни конгрес математичара, на коме је, први пут, организована секција посвећена настави (VI секција, „Настава и методе"), а у оквиру које је г. Хилберт изложио листу својих чувених проблема.

Реформисани програм за наставу математике у средњој школи усваја скуп одржан 1905. године у Мерану (Merano, тада град на северу Италије) и он је ушао у историју наставе под именом *Мерански програм*. Од тада, својом активном улогом, Ф. Клајн заузима водеће место у овом покрету.

Августа 1904. године, на III Међународном конгресу математичара у Хајделбергу, упућен је апел свим земљама да омогуће средства неопходна за осавремењавање наставе математике. У свом наступу, Ф. Клајн је подвргао аргументованој критици постојеће школске курсеве математике. Он, тада, такође поставља питање: који је то појам који доминира целокупном савременом математиком? Одговарајући, налази да је то појам функције и говори о значају развијања функционалног (функцијског) мишљења. Али и упозорава да није довољно дати ученицима дефиницију, већ да појам функције мора прожимати све садржаје математике у средњој школи.

Том приликом Клајн се такође заузимао за раније увођење у наставу координатних система, као и за уношење елемената калкулуса у средњошколске садржаје. Супротстављајући се онима који су сматрали да срењошколски програми треба да искључиво садрже елементарну математику, том приликом је Клајн изрекао своју чувену дефиницију „да је елементарно све оно што је доступно просечном ученику".

Од Конгреса у Цириху протекао је читав век, у знаку одупирућих конзервативних и екстремних радикалних тенденција између којих је текла настава математике. Ако постоји неко ко је у другој половини овог века заузимао оно место које је у првој половини имао Феликс Клајн, онда је то холандски математичар Ханс Фројдентал. Зато његову књигу: H. Freudenthal, *Weeding and Sowing*, D. Reidel Publ. Company, 1978; заинтересованом читаоцу, пре свега, препоручујемо.

# ФРАНЦУСКА МАТЕМАТИКА*

Много пута је речено да права, чиста наука нема ни отаџбине, ни граница, да нема науке ни француске, ни енглеске, ни немачке, већ да постоји само наука, која је општа и припада целоме свету. То је донекле и тачно у једноме извесном смислу, али не и са свих гледишта. Такво се тврђење не може примити ни за математичке науке, јер ове, поред апсолутности истина, које су њихов предмет и које су независне од људских схватања и путева којима се до њих долази, имају ипак и један специјалан карактер што их везује за личност. Јер, математичке науке имају се сматрати и као једна врста вештине, у којој лична осетљивост и укус остављају трага и где индивидуална конструктивна моћ и естетика играју знатну улогу. Математичке теорије су индивидуалне конструкције чија је грађа општа и на расположењу целоме свету, али у чијој композицији игра велику улогу архитекта и његове личне особине. Оно што се при таквим конструкцијама сматра као лепо, оно у чему се огледа стваралачка вештина и укус аутора, долази врло често од личних особина конструктора, па чак и од особина расе, од васпитања, од средине у којој је поникла ауторова активност.

У томе погледу има пуно смисла говорити о Француској Математици која има толику своју индивидуалност, да је иоле извежбаноме оку могућно, на једној научној конструкцији у области математике, распознати одлике и отиске француског стваралачког духа.

Али, поред тога, о француској математици се може говорити и са гледишта учешћа расе у стварању науке, са гледишта величине доприноса који је једна нација учинила на светској научној грађевини. Са тога гледишта ван сваке сумње је да француска наука заузима једно од највиднијих места у реду твораца данашње позитивне науке. Ни једна нација не може на пољу позитивне науке показати толики број великих имена, колико их може показати Француска.

---

* Летопис Матице српске, Нови Сад 1926, год. С, књ. 307, 3, стр. 207–220.

Да не помињемо оно што је опште познато: Декарта, који ствара Аналитичну Геометрију, откривајући начин да се геометријске фигуре представљају: алгебарским симболима и проучавају помоћу ових; да не говоримо о Паскалу који ствара рачун вероватноће и: отвара пространо поље једне од суптилнијих математичких дисциплина, или о Лагранжу који поред масе проналазака у чистој и примењеној математици, ствара данашњу најузвишенију партију математичке анализе: рачун варијација; или о Лапласу, творцу небеске механике и масе теорија које су данас основица разноврсним математичким дисциплинама; или о читавој плејади француских математичара из осамнаестога и почетка деветнаестог века, који знатно проширују границе области људског сазнања у свима правцима у којима се може употребити моћни научни инструменат, што га пружа математичка анализа, – ми ћемо се задржати нешто више на уделу који су имали нама по времену ближи француски научници на стварање и развијање модерне позитивне науке.

У току прве половине деветнаестог века три француска математичара: Фурије, Коши и Галоа, отварају нова, једно од другог сасвим раздвојена поља математичким дисциплинама, која су се од тада показала као јако плодна и на којима се, углавном, кретало оно, што се има сматрати као најважнији допринос математичкој згради од тада па до данас.

Обимно дело Фуријево о аналитичкој теорији топлоте, данас је класично не само у математичкој физици, за коју је и рађено, већ и у чистој математичкој анализи. Оно садржи клицу модерних метода у многобројним областима физичких појава, а само по себи на далеко је проширило границе наших сазнања о механизмима и току појава, као и о путевима за њихово проучавање. У ономе, што је Фурије створио, провлачи се свуда, као црвен конац, непрестана стална тежња да се, са једне стране математичке истине материјализују у облику конкретних појединости у природним појавама, а са друге стране, да ове појаве наведу аналитичара на проблеме које природа сама нуди. Та тежња за одржањем везе између чисто аналитичких факата и природних појава у којима се ови конкретно манифестују, једна је од основних одлика Фуријевих проналазака. Она је силно утицала на потоњи развој математичких, механичких и физичких теорија, ма да јој се, са апсолутног, чисто теоријског гледишта може много што-шта приговорити.

Неоспорно је да је математика у своме зачетку имала експериментални карактер, који је и за дуго време одржала. Геометрија је у своме почетку била једна грана физике, и многе геометријске особине, као што је особина хипотенузе у правоуглом троуглу, и разне особине правилних полигона, биле су нађене опажањем, практичним мерењем, а у чисто утилитарним циљевима. Па чак и пошто је код Грка створена чиста, рационална, незаинтересована наука, одржавао се непрестано контакт са конкретним фактима. Рационална наука непрестано је тражила објашњење конкретних факата помоћу једнога малога броја принципа који би обухватали бескрајно много диспаратних факата, а то се почело постизати помоћу математичких истина. За Питагорино се име нарочито везује тежња за изражавањем и објашњавањем свега и свачега помоћу бројева, и једна фамозна његова формула гласи: „ствари (бића) су бројеви". У исто се време развија и чиста, незаинтересована Геометрија, и Платон ставља на врата своје школе натпис: „Нека нико овамо не улази, ако није геометар".

Историја позитивне науке испољава, у једноме другом периоду времена, тесну везу између чисте и примењене математике. Довољно је навести пример кинематике и динамике, чије је развијање дало повода наглом развијању математичке анализе. Код Декарата, Хајгенса, Њутна, немогућно је раздвојити механичара и физичара од теоријског математичара, факат сличан ономе код великих уметника из доба Ренесансе, који су у једно исто време били научници, и сликари, и архитекте, и скулптори. Основне теореме модерне теорије функција поникле су из математичких теорија механичких и физичких појава. Француски математичар Клеро, у својој теорији облика земље наилази први пут на криволинијске интеграле и налази погодбе за њихову независност од интеграционе путање. Основне једначине за аналитичне функције једне комплексне променљиве количине јављају се први пут у расправи француског математичара и философа Даламбера о отпору течности. Многи резултати исте теорије налазе се и у радовима Лагранжа. На тај начин једна од најапстрактнијих и најсуптилнијих теорија чисте математичке анализе, теорија функција комплексних променљивих количина, поникла је из механичких и физичких проблема, под руком француских научника.

Тако је исто од пресудног значаја за развој математичке анализе било проучавање појава атракције. Теорија Њутновог потенцијала поставила је масу проблема од општег и великог теоријског значаја. Једначина, позната под именом Лапласове једначине, коју задовољава потенцијал, била је, а и данас је, извор за многобројне математичке и физичке проналаске. На њу се наилази у маси диспаратних појава, у хидродинамици, у теорији топлоте, у теорији електричних и магнетних појава, и она и данас даје сталног занимања аналистима.

Али изгледа да се ни у једној теорији не испољава у толикој мери веза између чисто математичких истина и конкретних природних појава, колико у аналитичкој теорији топлоте, која је бесмртно дело Фуријево. Методе интеграције помоћу једнога низа простих решења дате диференцијалне једначине, а на које се први пут наилази у Фуријевом делу, инспирисане су самим природним појавама, на које се односе и дају праву, тачну слику самога механизма и тока појава. Од појаве Фуријевих метода у врло честој је употреби формирање општих решења диференцијалних једначина, као и њихових партикуларних решења, што задовољавају дате граничне услове суперпозирањем бескрајног низа њихових простих решења. У таквим методама конкретна физичка посматрања чине двоструку услугу чистој математичкој анализи: са једне стране постављајући јој проблеме, а са друге стране, сугеришући јој начине за теоријско решавање таквих проблема.

Међутим, ма колико да су Фуријеве теорије и методе кренуле у напред чисту математичку анализу, ипак се има сматрати као недовољно оправдано, па чак и са више гледишта и претерано његово тврђење да је „дубље проучавање природних појава најиздашнији извор математичких проналазака". У много прилика ствар стоји сасвим обрнуто: математичка теорија претходи физичком сазнању и предвиђа појединости које би саме по себи остале незапажене. Треба ли за то лепшег и убедљивијег примера од радова француског физичара Френела, који је чистом математичком анализом предвидео све појединости појава интерференције, дифракције светлости итд., како оних, за које се дотле знало, тако и за дотле сасвим непознате појаве, на које се тим путем и наишло? Поред тога, чиста, теоријска математика има неоспорно право самосталне егзистенције, независно од услуга које она може, као научни инструменат, чинити у разним областима људског сазнања. Један од највећих и најдоследнијих математичких идеалиста, француски математичар Ермит имао је обичај рећи на својим предавањима на Сорбони да му се математички фактори и формуле привиђају као бића, étres mathèmatiques, која имају своју егзистенцију, свој живот, своје међусобне борбе, своја слагања и неслагања из којих резултира читав свет математичких истина.

Мада је једна од одлика француске науке баш то, што су једни исти научници обрађивали и усавршавали у једно исто време и чисту, теоријску математику, и готово све њене примене, ипак једна одабрана група математичара негује баш саму математичку анализу због ње саме као такве, не додирујући нигде њене могућне примене, нити водећи рачуна о њима. Док Фурије и његов знаменити савременик Поасон обрађују готово искључиво оне партије математике, које су у непосредној вези са физиком, дотле један од најдубљих истраживача који су икада постојали, Еварист Галоа, који губи живот у једноме бесмисленом двобоју у својој двадесет првој години, оставља дубок траг у најапстрактнијим партијама математике, далеко и од помисли на какве могуће примене. Галоа уводи у математику оригинални појам група супституције, показавши да свакој алгебарској једначини одговара једна таква група на којој се огледају битни карактери једначине. Уосталом, појмови, које је увео Галоа премашају област алгебре и распростиру се много даље, доводећи до генералне и врло плодне концепције операцијских група у најопштијем смислу. Галоа је оставио трага и у математичкој анализи својим истраживањима од врло велике вредности, о интегралима алгебарских функција. Његове су методе тако оригиналне, да је требало да прођу деценије, док је запажен и оцењен прави њихов смисао и важност. У математици постоји данас читава научна грана која је поникла из радова Галоа.

Трећи и неоспорно највећи од три наведена пионира модерне позитивне науке, Огистен Коши један је од највећих и најплоднијих математичара свих народа и свих времена. Са једном готово непојмљивом научном активношћу, која се распростирала на све гране и области теоријске и примењене математике, Коши је из основа преображавао дотадашње методе и теорије, отварао нова поља математичкој анализи и на оригиналне начине решавао дотле нерешљиве проблеме. Његово је највеће дело стварање модерне теорије аналитичких функција, која се битно разликује од дотадашње теорије функција реалних променљивих количина и чије су тешкоће заустављале и највеће дотадашње аналисте. Савладавши, помоћу нових метода и нових појмова које је увео, неколико од, дотле несавладљивих тешкоћа те врсте, и створивши једну нову врсту инфинитезималног рачуна, који је познат под именом „рачун остатака“ (calcul des residus), Коши се са ненадмашном виртуозношћу служи тим новим научним инструментом, и њиме продире у дубине океана проблема и враћа се са богатим пленом. За њега је толико пута казано да је дао новог живота математичкој анализи, а оно што је неоспорно, то је да модерни правци у многим областима математичких дисциплина полазе од КоШија који је био и велики теоретичар физике и механике, и велики проналазач у теоријској математици.

Међу научницима који, полазећи од Кошијевих радова као основице и идући његовим трагом, развијају до крајњих консеквенца његове идеје, прво место заузимају опет француски научници. Лиувил проналази неколике основне особине аналитичких функција и поставља темеље општој теорији двогубо-периодичних функција. Ермит улази дубоко у интимну структуру тих нових функција, а Пизе налази интиман и прецизан механизам мултиформности аналитичких функција. Брио и Буке су такође пионири Кошијевих идеја, и њихови проналасци у области теорије функција и теорије диференцијалних једначина чине епоху у историји развитка математичке анализе.

Оснивање модерне теорије функција има се сматрати као чисто францускo дело. Доцније су се, у току развијања те теорије, појавили нови правци, као нпр. онај у коме су радили немачки математичари, Вајерштрас и његови следбеници, али полазне тачке тих праваца опет су у Кошијевим проналасцима. Међу модерним француским математичарима који су знатно унапредили и развили теорију функција у Кошијевом правцу, истичу се: Поенкаре, Пикар, Апел, Гурса, Пенлеве, Адамар и Борел.

Пређимо сад на друго једно поље које одржава везу, са једне стране, са апстрактним областима теоријске математике, а са друге стране, са теоријама конкретних природних појава. То је теорија диференцијалних једначина која се, у ономе што је у њој најбитније, има опет сматрати као дело француских научника. Познато је да се целокупна динамика, математичка физика и простране области модерне теоријске хемије своде на диференцијалне једначине, обичне или парцијалне, које у себи садрже све што треба за објашњавање и предвиђање појединости проучаване појаве. Пре Коши ја апсолутно се ничим није могло утврдити да свака диференцијална једначина има своје решење. Коши је први дао за то несумњив доказ, а после њега су, опет фанцуски математичари, тај доказ прецизирали и проширили га на системе симултаних диференцијалних једначина, као и на парцијалне диференцијалне једначине. То су, у првоме реду, извели: Брио и Буке, Пикар, Поенкаре и Пенлеве, а нарочито Пикар својом методом сукцесивних апроксимација. Теорију диференцијалних једначина вишега реда, а са гледишта Кошијеве теорије аналитичких функција, највише је кренуо напред Пенлеве својим суптилним и дубоким истраживањима о диференцијалним једначинама са сталним сингуларним тачкама.

Тако је исто читава група француских математичара унапредила и развила теорију парцијалних диференцијалних једначина у правцу Кошијевих идеја, а међу њима се истичу Поенкаре, Пикар, Гурса, Адамар и др. Нарочито се у тој области истиче велики мемоар Поенкареа о парцијалним једначинама математичке физике, у коме је, између осталога, први пут несумњиво утврђена егзистенција хармонијских решења у проблему трептања мембране и њему сличним проблемима.

Примена теорије диференцијалних једначина на геометрију један је од специјалитета француске математике. Почевши од Монжа и Ампера, који су засновали ту грану истраживања, читава школа француских геометара, као што су: Лиувиљ, Бертран, Осиан Боне, Гурса, Гишар, Кенигз и Дарбу, на далеко су проширили границе ове математичке дисциплине. Нарочито место у тој школи геометара заузима Гастон Дарбу, који се неоспорно има сматрати као шеф те школе и који је за дуги низ година не само својим личним истраживањем дубоко продирао у тајне инфинитезималне геометрије, већ стварао и нараштаје научника који су ту геометрију са успехом обрађивали.

Тако је исто знатан допринос француских математичара и на свима областима позитивне науке. У области теорије бројева Ермит ствара методу испитивања дисконтинуалних низова бројева помоћу континуалних промењљивих количина, доказује трансцендентални карактер Неперовог броја, основице природних логаритама, и ствара могућност да се тако исто докаже и трансценденталност Лудолфовог броја и тиме једном за свагда тачно докаже немогућност решења вековног проблема – квадратуре круга. Жордан својом теоријом о еквиваленцији облика и група, Поенкаре својим прилозима теорији квадратичних облика, коју је применио и на теорију функција, Адамар својом асимтотном теоријом простих бројева, учинили су и потстакли знатне напретке у теорији бројева.

И истраживања на пољу чисте геометрије и аналитичне геометрије привлачила су велики број француских научника. Имена Ламеа, Дипена, Понслеа, Шала, Бертрана, Жордана, Лагера, Алфена и Ембера брињирају у тим областима математичких дисциплина, које, такође у својим најважнијим резултатима, носе обележје француске суптилности и француског стваралачког духа.

Једна нова грана математичке анализе, која носи име функционалног рачуна,[1] и која сваким даном добија све већу важност и сама по себи, и по применама које налази, има да, и за свој постанак и за свој данашњи ступањ савршенства, благодари француској науци. Као први одељак и клица овога рачуна има се сматрати рачун варијација који је замислио и као величанствену научну зграду створио Лагранж. Од тада, па до модерних радова Адамара на томе пољу, нижу се читаве групе француских аналиста који ту зграду допуњују и проширују.

У дугачкоме низу модерних француских математичара, који су моћно унапредили позитивну науку, са чијим је именима нераздвојан прогрес који је наука учинила за последњих неколико деценија, истиче се на првоме месту име знаменитог савременог математичара и научног филозофа, Анрија Поенкареа. Неко је једнога дана упитао великога хемичара Дима шта мисли о Клод-Бернару. „То није само један велики физиолог – одговорио је Дима – то је сама Физиологија“. У Француској ће вам сваки то рећи за Поенкареа: „то није само један велики математичар, то је сама математика“. Невероватна научна активност Поенкареа протезала се на све гране и области науке које су ма у каквој вези са математиком. На свима пољима оставља дубоке трагове

[1] Данас кажемо функционална анализа (пр. пр.)

свога проласка и у многим питањима и проблемима после његова проласка не остаје готово више ништа да се уради. Он је у једно исто време и најапстрактнији аналиста и најдубљи критичар конкретних механичких и физичких теорија.

Међу научним проналасцима Поенкареа ваља на првоме месту, и по дубини, и по важности, и по тешкоћама које су савладане, поменути његову теорију аутоморфних функција чије је стварање захтевало да се савладају тешкоће, које би без интервенције овога великог мајстора вероватно још за читаве генерације остале несавладљиве. Неочекивана интервенција геометрије Лобачевског, за коју се дотле није могло ни слутити да има какве год везе са проблемом аутоморфних функција, сматра се и сматраће се увек као ремек-дело Поенкареовог математичког генија.

Од великог су значаја за математичку анализу и многобројни други проналасци Поенкареа на пољу теорије аналитичких функција, као што су: теореме о асимтотним вредностима целих функција, о аналитичким облицима интеграла диференцијалних једначина и о кривим линијама које они представљају, о генерализацији Кошијеве теорије функција једне комплексне промењљиве количине и проширењу резултата ове теорије на функције од више комплексних промењљивих количина, о периодичности и периодама вишеструких интеграла итд.

Иако је више но ико од његових савременика, био апсорбован напорним истраживањима на апстрактној, теоријској, математичкој анализи, чији га проблеми ни у једној прилици, ни у једноме тренутку, као сенка нису напуштали, Поенкаре је стално мислио и на све могућне примене теоријске математике. Нарочито га је привлачила аналитичка механика и небеска механика. Плод његових дугих и дубоких размишљања о проблемима небеске механике појавио се у обимном делу у три свеске, које ће за дуги низ генерација остати права ризница за истраживања на томе пољу, а које носи наслов: *Les methodes nouvelles de ta mecanique celeste*. Уопште, једна од сталних карактеристика Поенкареове делатности била је његова навика да за свако дубље истраживање искује сам себи алат, да формира научни инструменат којим треба напасти објект за нападање и којим се најлакше продире до тајне коју он садржава. То се огледа и у његовим новим методама небеске механике, тако да су оне значајне не само по резултатима до којих су довеле, већ и по маси таквих научних алата којима су ти резултати откривени и који се могу употребити и у великом броју других тешких проблема.

Ми ћемо се задржати нешто више на Поенкареовим резултатима у чувеноме и прослављеноме *Проблему трију тела* који не престаје интересовати научни свет још од Њутна и на коме мало ко од великих аналитичара да није окушавао срећу.

Основни проблем небеске механике састоји се, као што се зна, у томе да се, знајући стање сунчаног система (тј. положаје и брзине тела што га састављају) у једноме датом тренутку времена, одреди рачуном стање система у једноме, ма коме, тренутку у току његовог кретања. Проблем је знатно упрошћен тиме што се, за главни циљ небеске механике, тела могу сматрати као материјалне тачке у којима су концентрисане масе тих тела. Математичка основица за његово решење нађена је у Њутновом закону универзалне гравитације, према коме се те материјалне тачке, две и две, међу собом привлаче тако, да је привлачна сила у сваком тренутку пропорционална масама тих тачака, а обрнуто пропорционална квадрату њиховог међусобног растојања. Са таквом основицом, и са такозваним почетним подацима о положајима и брзинама тих тачака у једноме датом тренутку времена, математички проблем постаје потпуно одређен и јавља се у овоме облику: проучити кретање једнога система материјалних тачака, које се међусобно привлаче по Њутновом закону гравитације. То је такозвани „Проблем *n* тела".

За $n = 2$ решење проблема је врло просто, и оно је одмах нађено још од оних који су га били и поставили. Математичка анализа показује да се у томе случају релативна путања једне тачке око друге своди на један конични пресек, чија се жижа налази у другој од двеју тачака; положај тачака на тим путањама и њихове брзине могу се израчунати за сваки дати тренутак времена.

Међутим, кад је број тела већи од два, показало се одмах да проблем задаје несавладљивих тешкоћа. И сам најпростији такав случај: проблем трију тела, који је, због занемарљивости једних маса у сунчаном систему наспрам других, и због незнатних утицаја врло удаљених маса, баш од највећег интереса за практичне циљеве у небеској механици, остао је у току векова нерешљив. На њему су, почевши од Њутна, највећи математичари: Ајлер, Лаплас, Лагранж, Поасон, Гаус, Јакоби, Бертран и други окушавали снагу, али се нису његовом тачном и потпуном решењу ни приближили. Са једнога по једног од проблема који су имали репутацију да су веома тешки, или несавладљиви, скидана је копрена, која им је заклањала решење; један по један од њих попуњавао је празна места у регистру онога до чега је допрло људско сазнање; али проблем трију тела остајао је увек непомичан и неприступан и најмоћнијим средствима математичке анализе.

Немогућно је овде улазити у дубље појединости разлога који су проблем чинили несавладљивим. Они не леже у немогућности да се проблем стави у једначине, који је посао већ давно и давно свршен; они су у томе, што је из тих једначина немогућно одредити тачне вредности оних непознатих, које се траже, а чије познавање, као функције времена, дефинише стање система у коме се хоће тренутку. Та немогућност, међутим, не лежи у самој природи ствари: решење ефективно постоји, само је оно скривено у диференцијалним једначинама проблема, а рачунски инструменат и рачунске операције, којима се данас располаже, нису довољно моћни да би се могли применити и на једначине проблема трију тела. Факт је, од прилике, сличне врсте оној које је и елементарни факт: да се логаритам једнога целога броја не може изразити, ни израчунати помоћу ограниченог броја елементарних рачунских операција са целим бројевима, као што су: сабирање, одузимање, множење, делење, степеновање и кореновање; тај логаритам, међутим постоји и до њега доводи једна од најпростијих трансцедентних рачунских операција, али коју је требало пронаћи. Тако исто и немогућност решења диференцијалних једначина проблема трију тела ваља схватити као немогућност да се *данашњим* рачунским инструментом извуче из тих једначина оно што се тражи, а да проналазак каквога новога рачунског елемента, какве нове рачунске операције, о каквима се данас и не слути, може у часу учинити проблем потпуно решљивим.

У томе погледу тачно решење проблема трију тела није много одмакло од онога места на коме је стајало пре толико деценија. Али је зато учињено великих напредака у другим правцима у истоме проблему, којима је, или бачена нова светлост на природу и тешкоће проблема, или су се успеле задовољити бар извесне практичне потребе за астрономска израчунавања.

Радови Поенкареа бриљирају на томе терену и обележавају најзначајније напретке у томе правцу. На првоме месту, Поенкаре за врло генералне случајеве проблема трију тела налази такозвана „периодична“ и „асимтотна“ решења. Периодична решења истичу на видик периодично понављање међусобних положаја тачака у кретању, то јест факт да се тачке, по истеку једнога сталног, одређеног размака времена увек нађу у једноме истоме међусобном положају. Асимтотна решења показују да се путање тачака, по истеку довољно дугог размака времена, све више и више приближују оним путањама које су одређене периодичним решењима проблема. Од интереса је навести, да у општем случају, поред свега тога што је егзистенција периодичних решења несумњива, она ни до данас није потпуно и тачно доказана. Сам Поенкаре, пред крај свога живота, учинио је један покушај да то докаже, али је у његовом доказу остала једна празнина, која ће се, извесно, временом попунити.

Трагајући у другим правцима у истом проблему, Поенкаре је врло суптилном анализом успео истаћи на видик и неколике негативне резултате, који бацају светлост на аналитичку природу општега и потпуног решења проблема трију тела. Такав је један резултат његова чувена теорија по којој тај проблем не може имати других униформних првих интеграла осим интеграла живих сила и интеграла површина.

Покушавајући да координате покретних материјалних тачака изрази као функције времена, Поенкаре је дошао до једнога резултата, који је у последње време, после његове смрти, довео до потпуног теоријског решења тога проблема. Наиме, он је показао, у најопштијем случају проблема трију тела, без икаквих претпоставака о релативним величинама маса, које се међусобно привлаче, – да се координате могу израчунати у облику бескрајних редова, уређених по степенима једне извесне количине која зависи од времена и која расте од –1 до +1 за време, док време расте од – ∞ до +∞. Поенкаре је доказао и конвергенцију тих редова и њихову употребљивост за све реалне вредности времена. Али, једна, за онај мах слаба страна тих рачуна, навела је Поенкареа да изјави да и сам не верује да ће његови редови моћи бити од какве стварне користи у небеској механици. Та слаба страна био је факт да се ничим не може гарантовати за немогућност судара, нити се могу тачно, ни приближно предвиђати евентуални тренутци, кад судар може наступити. Осим тога, баш и да се ти тренутци могу предвиђати, судар двеју или трију маса у систему уноси у кретање претурбације, које се помоћу Поенкареових рачуна нису могле предвиђати, и од таквог једног тренутка његови редови губили би своју употребљивост и сам свој смисао.

Међутим, баш помоћу ових Поенкареових идеја проблем трију тела решен је у последње време теоријски тачно. Решио га је фински научник, Сундман, тадашњи астроном опсерваторије у Хелзингфорсу. Кад се редови, у облику којих је Сундман решио проблем, упореде са онима на које је у својим истраживањима наишао Поенкаре, али у чији интерес за небеску механику није веровао, види се јасно колико је Поенкаре, и не слутећи, био близу правога решења. Од последњег, дефинитивног корака задржао га је само поменути факт: да се не може гарантовати за немогућност судара и да се ништа не може казати о томе на који би начин нађени редови били измењени после судара. Сундман је успео да савлада и те тешкоће, и тиме се одмах користио да решење проблема приведе крају. Сундманово решење са чисто теоријског гледишта неоспорно чини епоху у историји вековног проблема трију тела; оно је у исти мах и једино решење, за које се данас може тврдити да обухвата ток појаве за вечита времена. Међутим не треба испустити из вида да је за такво решење основну идеју и основну рачунску методу први дао Поенкаре.

Истраживања Поенкареова о равнотежним облицима небеских тела испољавају једну невероватну моћ анализе. Проблем се састојао у томе да се одреде облици једне флуидне масе, чији се елементи међусобно привлаче по Њутновом закону, а која се обрће око своје осовине. За проблем се, до Поенкарових радова, држало да је потпуно решен и исцрпен. Још Маклорен је као равнотежне облике нашао обртни елипсоид; Јакоби је нашао да то може бити и елипсоид са три неједнаке осовине и мислило се да је на томе све свршено. Кад је Поенкаре 1885. год. узео у своје руке исти проблем, застао је и сам изненађен пред својим решењем, које показује да постоји бескрајно много разноврсних равнотежних облика за флуидну масу у обртању. Неки су од њих нестабилни, али их има и стабилних, а по мишљењу астронома, има их који су играли и космогонијску улогу. У осталом, ни космогонија није остала ван домашаја великог универсалног духа, какав је био Анри Поенкаре. У своме делу *Hypothéses cosmogoniques* Поенкаре уноси много светлости у Кант-Лапласову хипотезу о формацији сунчаног система, у Аренијусову хипотезу о термичној смрти васионе, коју јој спрема Карнотов принцип, у аналогије између млечног пута и Круксове зрачеће материје итд. Ни једно чисто научно дело није дало лепшу идеју о поезији науке од овога великога Поенкареовог дела.

Поенкаре је тако исто оставио дубока трага и на свима осталим пољима позитивне науке: на математичкој физици, теорији еластицитета, хидродинамици, аналитичкој теорији топлоте, термодинамици, капиларитету, оптици, електрицитету итд. Свуда се у тим областима испољава његов проналазачки, стваралачки дух и једна оштра и дубока критичност. Упознавајући се, пре но се сам зарони у своја истраживања у једној области, са радовима других, који су решавали исте проблеме, он не верује никоме и ничему што сам не провери. Само је тако могао наћи поменуте нове равнотежне облике флуидних тела обртању тамо, где се мислило да их више нема; само тако је и могао показати да проблеми еластичности, зависе не од двадесет и једног коефицијента еластичности као што је било утврђено пре њега, већ од двадесет и седам таквих коефицијената. Његова критичност ишла је већ до скептицизма. Он није веровао у апсолутну вредност теорија, и еклатантним примерима потврдио је своје омиљено тврђење да су теорије природне философије само једно привремено средство да се у што кондензованијем, комотном облику представи једна група факата и да, ако се за једну такву групу има једна теорија, могућно је за исту групу поставити колико се хоће тако исто доследних теорија.

Једном речи, Анри Поенкаре има се сматрати као синтеза модерне позитивне науке у најширем смислу те речи.[2] И сам по себи овакав представник француске позитивне науке био би довољан да маркира место, које је француска наука увек заузимала међу најузвишенијим

---

[2] У овом свом прегледу француске математике видимо да Петровић нарочито истиче огромно научно дело Поенкареа, бирајући да детаљније говори о његовим прилозима проблему трију тела. То је потпуно разумљиво, будући да је тај проблем тако дуго стајао нерешен и да је изазвао велико интересовање и генерације математичара којој је сам Петровић припадао. Поенкаре се сматра генијем равним Гаусу и највећим „предсказивачем" математике двадесетог века, па се следећих неколико напомена природно уклапају у овај чланак.

Поенкаре (Henri Jules Poincaré) је рођен у Несију 1854. године. Уписује Политехничку школу (École Polytechnigue), смер рударство (École des Mines) 1873., коју успешно завршава, а убрзо и одбрањује докторску тезу из математике. Од 1881. па до краја живота 1912., био је професор на Париском универзитету. Године 1887. постаје члан Француске академије наука, 1906. њен председник а 1908. године биран је у Француску академију (Academie Francaise), што је највећа почаст која се указује француским писцима.

Поенкаре је имао изузетну способност меморисања свега оног што је читао и визуализације оног што је чуо. Истицао је улогу несвесног у психологији математичког откривања и проналажења. По њему, изненадна илуминација која следи после дугог подсвесног рада мозга, почетак је сваког математичког открића. Сматрао је да постоји нека врста априорне математичке индукције независне од логике, па се зато, у филозофији математике, Поенкаре сматра претечом модерне интуиционистичке школе.

Поенкаре се такође сматра оснивачем данас врло развијене и значајне области савремене математике, која се зове алгебарска топологија, а чије су основне гране теорија хомотопија и теорија хомологија. Дефинишући за пар непрекидних пресликавања релацију хомотопности, а преко ње хомотопност и два геометријска објекта (одн. општије два тополошка простора) Поенкаре ствара основу на којој се гради теорија хомотопија, а главна инваријанта те теорије – фундаментална група заједно са многим примерима њеног рачунања такође од њега потиче.

За полиедре (као објекте који су грађени од симплекса) могу се посматрати формалне линеарне комбинације симплекса исте димензије и међу њима дефинисати релација хомологности, а што води дефинисању низа хомолошких група које су такође значајне тополошке инваријанте тих објеката. Рангови ових група називају се Бетијеви (Betti) бројеви. Ако за $n$-димензиони полиедар означимо са $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ број његових 0-симплекса, 1-симплекса,..., $n$-симплекса, а са $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ низ Бетијевих бројева, тада важи чувена Ојлер-Поенкареова формула

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \ldots + (-1)^n \alpha_n = \beta_0 - \beta_1 + \ldots + (-1)^n \beta_n,$$

која не само што генералише класичну Ојлерову формулу

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 - 0 + 1 = 2,$$

већ јој даје и дубину, показујући да је број који је вредност збира $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ (одн. генералније $\alpha_0 - \alpha_1 + \ldots + (-1)^n \alpha_n$) тополошко својство самог таквог геометријског објекта.

Ова формула и две поменуте фундаменталне релације везане су за чувену Поенкареову расправу *Analysis Situs*, J. Ecole palytech.1, 1– 121 (1895), са којом почиње топологија као математичка теорија и чиме раније појединачне интуитивне представе те врсте почињу да стичу свој прецизни логички код.

творевинама људског духа. Али он је оставио и масу следбеника, који данас носе високо уздигнуту заставу француске науке и не упуштају место које су им њихови претходници у наслеђе оставили. **

---

** Ради целине о француској математици погледати и Петровићев предговор за брошуру Ели Картана *Улоīа Француске у развоју маѿемаѿике*, Београд 1941 (пр. Д. Т.).

# КОЛЕЖ-ДЕ-ФРАНС*

Једна од највећих и најоригиналнијих просветних и научних установа у свету, *Колеж-де-Франс*, доживела је у току овога лета четврту стогодишњицу свога оснивања и прославила је онако како и заслужује стечени глас установе и корист за науку коју је донела у своме четиривековном раду и развитку. Од самога свога оснивања, 1530. године, па за све време свога дугог трајања и рада, Колеж-де-Франс је непрекидно имао пред очима циљ ради кога је и основан: тај циљ ни у једном тренутку, ни кроз све историјске буре и потресе кроз које се пролазило, није губљен из вида, и у томе погледу он даје један од најлепших примера вековне доследности, сталности и истрајности.

Повод оснивању ове значајне установе дала је тежња да се у основи измени дотадашња виша настава и начин обрађивања појединих области науке и књижевности. До њене појаве, Француски универзитет, са својим искључивим монополом за вишу наставу, био је везан како својим традицијама, тако и својим привилегијама. Не само да није примао никакве новине ни измене у начинима рада, већ их је свим својим силама и спречавао да се примају и уводе и у друге просветне установе тога времена. Четири тадања факултета, теолошки, правни, медицински и за вештине, сматрали су да се на њима може добити „све што је корисно а приступно људском сазнању“. Латински је био једини језик који је предаван и на коме се писало; науке, изузевши медицинске, излагане су потпуно схолостички, у облику бескрајних силогистичких дискусија и аргументирања, без ичега позитивног из чега би се дало нешто стварно научити. А имало је врло мало изгледа да би се таква настава, остављена самој себи реформисала или бар дала реформисати.

---

* Српски књижевни гласник, Београд, 1931, t. XXXIV (н.сер.), 4, стр. 285–289; објављено „поводом четврте стогодишњице“.

Међутим јавља се и почиње се по свету распростирати један нов дух; почињу се ширити нови погледи и начини схватања, дух Ренесанса. Благо од знања и мисли, дотле скривено у делима великих античких мислилаца, почело је избијати на површину; научни и књижевни узори, извучени из густога мрака у који су били утонули и вековима остали бескорисни, почели су утицати и на оне за које се могло мислити да ће остати упорни према новим струјама. И тада, пошто је земљиште већ било прилично припремљено, француски краљ Франсоа Први, а на неодољиво заузимање свога ученог библиотекара и великога познаваоца античке културе, Гијома Биде, оснује 1530 у Паризу једну установу у којој је била клица данашњега Колеж-де-Франс, којој је било намењено да развија вишу наставу у најслободнијем духу и које оставља дубок траг у историји француске духовне културе и опште науке. Ту су наставу изводили шест тзв. „краљевских лектора", два за грчки језик, три за јеврејски и један за математику; овим је 1534 придат још лектор за латински језик.

Успех нове наставе показао се као изванредан и оправдао сва очекивања. Слушалаца је било толико да се није имало довољно места. Ослободивши се силогизма, бесмислених и бескрајних дискусија које не доводе ни до чега, нарочито удешених зборника којима су замењивани оригинални текстови, нова настава је полазила од самих извора истицала пред задивљене слушаоце плодне идеје, дубоке мисли, поуздан научни материјал и стварне лепоте на које се наилазило. То је био смртан удар за схоластику, која је од тада поступно и потпуно и ишчезла из француских просветних и научних установа.

Добар глас установе пренео се и у XVII и XVIII век и тиме је и потпуно довршена њена унутрашња организација и јако се повећао број катедара. У XVII веку она је добила назив *Coliegium Regium Galliarum,* а тек у XVIII веку свој овдашњи француски назив. Тада је она већ имала дванаестину катедара и представљала је једну врсту универзитета, да никад није имала никакве званичне везе са овим. Предавани су: књижевност, право, историја, математика, физика и природне науке. На једној врсти њеног грба могло се прочитати „*docet omnia*". Готово једини од установа старог режима, Колеж је био поштеђен од Револуције и од свих потреса и бура кроз које је Француска пролазила.

У XIX веку почиње његово нагло напредовање и развијање, не само као установе за наставу већ, и то поглавито као извора за истраживање нових путева у наукама и нових праваца у свима областима духовне културе. Уводи се и давање санскрита, који предаје један од највећих филолога свих времена, Бирнуф. Шамполион ствара и уводи у наставу египтологију, која се после њега на Колежу нагло и успешно развија и у којој остављају дубок траг Летрон и Масперо. Уводи се асирска филологија и књижевност; развија се и јако унапређује настава јеврејског језика и књижевности (Ернест Ренан), оријенталске књижевности и археологија, што је створило данашњу велику оријенталистичку научну зграду којом се поноси Колеж-де-Франс. Данашње познавање класичне старине има у великој мери да захвали катедрама и напретцима које је добило на Колежу. Катедре за стране књижевности, међу којима и она за словенске језике и књижевности (Мицкијевић и Луј Леже), имале су сјајне представнике као што их имају и данас. Тако исто и историја са методама њених истраживања (Дону, Летрон, Мишел, Брин и др.), филозофија и психологије (Жуфроа, Франк, Сент-Илер, Бергсон, Рибо и др.), политичка економија и социологија (Сеј, Роси, Лероа-Болие, Лабулеј, Левасер и др.), естетика и историја вештина, историја наука (Лафит, Бутру и др.) све су те научне дисциплине имале првокласне наставнике на Колежу, који су својом наставом умели привући научно већ формиране слушаоце из свих делова света.

Математика је на Колежу предавана и обрађивана још од дана његовог оснивања. Доцније, крајем XVII века, придодата јој је астрономија и небеска механика (Лаланд, Деламбр, Сере, Леви). Математика за своје новије напретке и модерне правце много дугује радовима и предавањима својих наставника на Колежу (Жордан, Ембер, Адамар, Лебег). У великој мери је то случај и са физиком, експерименталном математиком (Био, Ампер, Савар, Рењо, Маскар, Бертран, Ланжвен) и са хемијом (Воклен, Тенар, Балар, Шиценберже, Бертло, Муре, Матињон, Делнин). Шта да се каже за природне науке, за које су на Колежу били наставници научници као Кивие, Сен-Клер-Девил, Фуке, Мишел-Леви, Флуран, Мареј и др.? Медицинске науке су на Колежу предаване такође још од његовог постанка, у почетку везана за природне науке; доцније се катедра раздвојила на анатомију и, као што се то онда звало, на практичну медицину, која је, између осталих, имала за наставнике људе као што су Корвизар, Лаенек, Клод-Бернар и Браун-Секар. Данас Колеж има четрдесет и седам редовних професора, неколико допунских и задужбинских катедара и дваестину научних лабораторија.

Што су овде наведена толика имена наставника, то је зато што та имена обележавају један велики део доприноса који је француска наука унела у светску духовну културу у току последња два века, и што су многа од њих прешла уске границе стручњачких кругова. Колеж-де-Франс, већ по основној идеји свога краљевског оснивача, увео је у своју наставу многе области науке које пре тога нису имале право грађанства. Као што је у једној прилици рекао један од најпознатијих његових представника, Ернест Ренан, Колеж је био нарочито намењен „наукама које су у повоју“, што је, уосталом, само донекле тачно. Нарочита улога коју је Колеж имао у развитку и распростирању идеја, била је одређена двема карактеристичним чињеницама. Прво, слобода излагања не само у избору предмета и тема, већ и идеја које се излажу и шире са његових катедара. Друго, велика широкогрудост према слушаоцима, од којих се не траже никакве званичне квалификације нити какве год обавезе. Чак и од наставника се не тражи да су професори од каријере; довољно је да имају својих научних новина, својих личних погледа и идеја о темама које ће излагати, да дају изгледа у наде да ће, у приликама какве им Колеж ставља на расположење, и својим будућим радом оправдати оно што професорски Савет, од кога зависи њихов избор, очекује од њих доводећи их на такво једно место као што је место наставника на Колеж-де-Франс. Мада је Колеж једна врста Народног универзитета за највише образовање и за научно већ увелико формиране слушаоце (од којих су многи већ и професори Универзитета), просто популарисање науке је са његових катедара искључено. На тим катедрама се, истина, често излажу дотле већ објављени резултати или већ распрострте идеје, али то само у случајевима кад је то или сасвим ново, или недовољно познато, тако да још није стигло продрти у слојеве оних који би се прихватили посла да то дубље разраде, развију, разгранају, а међутим, по својој важности, обећава да ће бити полазна тачка и извор за даља нова истраживања. Тако исто, и ни у коме случају, предавања на Колежу немају намену олакшању универзитетских испита, осим доктората, па и код ових само за обраду докторске тезе. Предавања су намењена поглавито истраживачима који су не само научно већ формирани, већ који на тим предавањима, као и у општењу са таквим научним саветницима као што су наставници Колежа, траже сугестије и специјална научна средства за своје радове. А пошто у целокупној настави на Колежу нема ничега званичног ни формалистичког, за слушаоце нема ни уписа, ни каквих год такса за плаћање. Као што постоји потпуна слобода излагања, тако је и ничим неограничена слобода долажења на предавања, без икаквих претходних квалификација, формалности или обавеза. Но ипак, кад за то има нарочитих, специјалних разлога, слушаоцу се од стране Колежа издаје, по завршеном курсу, нарочито уверење о уредном посећивању предавања, или о каквоме на Колежу довршеном значајнијем научном раду.

Познато је до каквих је позитивних резултата довело деловање ове велике научне установе, какви су се научници, истраживачи, пропагатори нових идеја и праваца истраживања у њој формирали и од каквог је подстрека она у своме четири-вековном деловању била за напретке на свима гранама науке. Велика имена која испуњавају један пространи део списка њених доданашњих наставника, читава литература научних новина и нових идеја које је она изазвала, подстрекла, омогућила и распрострла по научном свету, довољно су познати да би их требало у овоме кратком прегледу нарочито подвлачити. Поменућемо само да се традиције Колежа и данас одржавају у пуној мери и да, врло вероватно, будући Колеж-де-Франс, у погледу свога утицаја на развој људских сазнања, неће изостати иза овога који тоне у четиривековну прошлост.

На свечаностима прославе, на којој су учествовали представници готово свих Академија и Универзитета у свету (изузевши оне којима данашњи односи са Француском нису то допуштали), Српску краљевску академију заступао је потписати, београдски Универзитет г. проф. Павле Поповић, а Југославенску академију знаности и умјетности, као и загребачки Универзитет г. проф. Владимир Варићак.

# ГРЕШКЕ МАТЕМАТИЧАРА*

Ко не ради, неће ни грешити. Онај ко много ради, и кад је најјачи и најсигурнији у своме послу, подложан је грешкама које чак не морају ни бити у правој или обрнутој пропорцији са његовом јачином и сигурношћу. Грешење није одлика само слабих или осредњих интелектуалних радника. Оно је готово неминовно и за највеће научнике и за најпоузданије специјалисте у појединим областима науке. Историја наука пружа за то многе, често невероватне примере.

Није никакво чудо кад греше и велики умови пребацивши се на терен који није њихов, као нпр. La Bruyère, који је тврдио да је немогућно одредити одстојање Земље од Сунца; или Diderot, који је тврдио да је са Bernoulli-ем, Euler-ом и D'Alembert-ом математика завршила своју каријеру и да се не може даље ни развијати; или Laplace, који је тврдио да се не треба ни занимати сунчаним пегама, јер оне нису подложне никаквим правилностима; или Lavoisier, који је егзистенцију аеролита сматрао за бесмислицу, јер у празноме васионском простору не може бити камења. Galvani, кад је пронашао физиолошки ефекат електрицитета, био је исмејан од физичара свога времена. Auguste Comte је најозбиљније доказивао да се никад неће моћи сазнати хемијски састав звезда, а што је Kirchhoff убрзо затим демантовао проналаском спектроскопије. Наполеон није веровао у парну пловидбу. Thiers у железницу, итд.

Најчешће грешке великих књижевника су анахронизми и омашке из незнања или непажње. У *Хамлету* Шекспир говори о пуцњави топова, мада у време данског краљевића није још било ни трага од барута. Уосталом, он је у *Ромеу и Јулији* прогласио Верону за морску луку, а Чешку описује као земљу која лежи крај мора. Дима Отац, у своме популарном роману *Три мускетара*, чини грешку, јер ту у ствари

---

* Гласник Југословенског професорског друштва, Београд 1933, t. XIII, 10–12, стр. 874–881.

четири мускетара играју подједнако важну улогу. И сам Дима је то увидео и признао рекавши да „и у књижевности је добро ако се обећа три, а дâ четири“. Даниел Дефо у своме *Робинсону Крусоу* прича како се Робинсон једном сусрео са јатом пингвина; познато је, међутим, да на тропском острву Хуан Фернандез никад није могло бити пингвина. Сличних грешака има код Дантеа, Виктора Игоа, и других великих песника и књижевника; оне, уосталом, нису ниуколико смањиле вредност њихових дела.

Много је занимљивије кад озбиљне грешке чине сами стручњаци, на своме властитом терену, и то баш они који су много урадили у својим областима. Велики хемичар Dumas, који је много радио на хемоглобину, дошао је до закључка да је овај немогућно икаквим средством добити хемијски чист, што се убрзо затим показало као нетачно. Pasteur је порицао могућност да се хемијском синтезом створи какво органско једињење са молекуларном дисиметријом, а то је тврђење оборио Jungfleisch својим синтезама органских тела са ротаторном моћи. Енглески хемичар Henry тврдио је да се природа никад неће моћи подражавати вештачком синтезом органских једињења; ове се врше у живим организмима једном силом вишега реда, различном од силе афинитета; убрзо затим Woehler је вештачки произвео уре (карбамит) и отада су хемичари произвели на стотине хиљада органских једињења. Француски физичар Babinet је дубоком анализом доказивао немогућност функционисања прекоокеанског електричног кабла. Велики астроном Laland је најозбиљније математички доказивао апсолутну немогућност уздизања тешких тела у атмосферу, каквом силом чији је носилац само тело. Енглески научник Lardner је доказивао да је путовање парним бродом преко океана тако исто илузорно као путовање из Ливерпула на Месец. Arago је жалио будуће путнике на железници, што ће бити погушени у иоле већем тунелу, израчунавајући брзину којом ће дим из локомотиве излазити из тунела. Cuvier је тврдио да не постоји фосилни човек. Boyer је изјавио, почетком деветнаестог века, да је хирургија дала своју последњу реч и да се више нема у чему усавршавати. Velpeau је био убеђен да је бесмислено тражити да се при хируршким операцијама избегну болови; шест година после тога Wels је производио општу анестезију помоћу азотовог протоксида, а данас су анестезија, асепсија и антисепсија најобичније ствари.

*

Па ипак се може тврдити да су такве грешке произлазиле више из недовољног познавања ствари у време кад су чињене, из немогућности да се нешто провери итд. Али како да се разумеју грешке оних који све што треба имају пред очима и где се грешка има приписати искључиво интелектуалној функцији, и то на једноме сигурном терену? Како да се не застане пред фактом да су највећи математичари чинили грубе грешке, од којих понеке не би биле допуштене ни почетницима?

Newton је нпр. доказивао (*Principia*, Book I, Sect. VI) да је немогућа тачна квадратура за сваку затворену овалу са коначним бројем грана. Међутим доцније је показано да је она могућна за овалу чија је једначина облика

$$y^{2m} = (2n)^{2m} x^{2m(2n-1)}(a^{2n} - x^{2n})$$

где су $m$ и $n$ ма каква два цела позитивна броја. Доказ му је, дакле, нетачан. Тако му је исто нетачан и доказ немогућности квадратуре круга. Грешке је запазио и објавио D'Alempert.

Leibnitz-ова теорија оскулаторних кривих линија, публикована 1686 год., садржи мноштво нетачности. Тако исто и његова решења разних механичких проблема, као нпр. одредба притиска кугле приклештене између двеју стрмих равни; проблем кретања планета итд. У једној својој расправи од 1706. год. он признаје те грешке, али не пориче тачност резултата.

Leibnitz и Bernoulli имали су дуге препирке о питању: да ли негативни бројеви имају своје логаритме. Из тога што је

$$(-a)^2 = (+a)^2$$

закључивало се да је

$$2\log(-a) = 2\log(+a)$$
$$\log(-a) = \log(+a)$$

па, дакле, да $-a$ и $+a$ имају исти логаритам. Ни један ни други од ова два велика математичара нису порицали тачност обрасцу

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

до кога се долази из обрасца

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

стављајући да је $x = 1$.

Из образаца

$$n + n^2 - n^3 + \ldots = \frac{n}{1-n}$$
$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{n}{n-1}$$

Euler закључује да је

$$\ldots\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+1+n+n^2+\ldots=0$$

а на сличан начин доказује и образац

$$1-3+5-7+\ldots=0$$

сматрајући оба обрасца као математичке куриозитете.

Lagrange је доказивао (*Oeuvres*, t. III p. 714) да је сваки цео број $M$ једнак разлици квадрата два цела броја, што нпр. није тачно кад је $M$ двоструки прост број различан од 4.

Fermat је тврдио да су степени броја 2 увећани за 1 увек прости бројеви, што нису, јер је нпр. Euler нашао да је број $2^{32}+1$ дељив са 641.

Проучавајући кретање планета, Laplace је учинио једну грубу грешку, коју је открио и објавио Poinsot. Неки нетачни резултати истог великог математичара произлазе од тога што редови, на које је сводио проблем, нису конвергенти у ономе размаку времена на које их је примењивао.

Legendre, служећи се при једном доказу неодређеном једначином првога степена са две непознате, није запазио да јој коефицијенти нису међу собом прости бројеви и да, према томе, резултат до кога је дошао не важи.

Галилеј је тврдио, и често понављао, да се материјално тело, остављено самоме себи, без дејства икакве спољне силе, увек креће кружно, са једнаком брзином. Он налази да узрок појави морске плиме и осеке лежи искључиво у кретању Земље, а да Месец нема на то никаква утицаја. J. Bertrand је 1864. год. публиковао у Revue des Deux Mondes о Галилејевим теоријама једну опширну студију у којој је истакао мноштво грешака које данас не би учинио ни врло слаб астроном.

Bernoulli је тврдио да има начина да се тежиште једнога тела подигне а да се за то не употреби никаква сила. У цилиндричан суд наспе се живе, а преко ње азотна киселина. После извесног времена киселина ће растворити живу и суд ће отада садржати једну хомогену течну масу чије ће тежиште бити више од тежишта првобитне смеше, што је, уосталом, тачно. То је, по аутору, постигнуто аутоматски, без примењивања икакве спољне силе. Грешка је, међутим, очевидна: као сила, употребљен је хемијски афинитет. Око тога се између Bernoulli-а и Leibniz-а била развила жива препирка, у којој се други извињавао првоме да није мислио исмејавати га, већ да му је намера да сасвим објективно расправи ствар.

Невероватно је колико је нађено грешака и код врло познатих, па и највећих математичара не само свога доба, већ и свих времена. Овде ће бити наведена једна листа таквих случајева, између многих других од мањег интереса.

Код Descartes-a (*Géométrie*, на крају књ. II) наишао је P. Tannery на нетачно решење једнога геометријског проблема у тродимензијалном простору. Једно његово писмо, упућено Mersenne-y 29. авг. 1629. год., пуно је математичких грешака.

За једно Euler-ово тврђење о могућности решење неодређене једначине

$$x^2 - ay^2 = b$$

Lagrange је нашао да је погрешно (Oeuvres t. II p. 657).

У Lagrange-овој расправи у облику стубова (*Oeuvres*, t. II p. 129–169) Serret је нашао мноштво рачунских грешака, понајвише у параграфима 34, 35, 36. E. Picard је нашао да су му многе идеје нетачне, као и недостатке у тачности (Confér. sur le dévelepp. de l'Analyse math.).

D'Alembert je, решавајући проблеме рачуна вероватноће, чинио грубе грешке, које су обелоданили J. Bertrand (*Calcul des Probabilités*, Préace p. X et p. 2) и Delannoy.

Laplace је објавио своја схватања о примени рачуна вероватноће при суђењу, што се показало илузорно и без смисла.

Више озбиљних математичких грешака код творца таласне теорије светлости, Fresnel-a, нашли су Poisson и Verdet (*Oeuvres de Fresnel*, t. II p. 247).

За једну Plücker-ову теорему о коничним пресецима што пролазе кроз додирне тачке двоструких тангената једне линије четвртог степена, Jacobi је нашао да је нетачна (Jour. de Crelle 1850).

Tissot је (Nouv. Ann. 1862 p. 7) констатовао нетачности доказа код Legendre-a и Gauss-a.

Puiseux је обелоданио једну грешку Lagrange-a о сферноме клатну; Duhamel грешке Montucl-a и Monge-a о примени Roberval-ове методе на повлачење тангената на криве линије; Genocchi један нетачан доказ Euler-ов о критеријуму егзистенције имагинарних корена за неке једначине; Pontecoulant неке грешке Laplace-a (*Oeuvres*, t. XIII); Serret грешку Hesse-a о проблему трију тела; Bertrand и Combescure грешку Cauley-a о таласној површини; Rouché једну геометријску грешку Serret-a; Baker грешку Sylvester-a; Pringsheim и Molk грешку Duhamel-a; Catalan читав низ грешака J. Bertrand-a; Bioche геометријске грешке Poisson-a, Halphen-a, Dupin-a, Amiot-a; H. de La Goupillière грешку Euler-a о минимуму потенцијала; Bertrand грешке Fourier-a и Biot-a; Brassine грешку Fermat-a о законима Статике; Demoulin грешку Sophus Lie-a из геометрије комплекса; Bertrand грешку Lagrange-a о принципу најмање акције; Sabinine грешку Jacobi-a о истоме принципу; D'Alembert потпуну погрешност теорије Borda о кретању течности; Tannery грешку Chasles-а о жижама Декартове овале, а Retali грешку истога геометра о кретању тела у равни; Mansin грешку Poinsot-а; De Jonquières нетачност једне теореме Steiner-а о коначним пресецима; Moreau нетачност једне теореме Faure-а о линијама трећег степена; Heine нетачност једне аналитичке теореме Eisenstein-а; F. Klein грешку Beltrami-а из Riemann-ове *Геометрије*; Moret-Blanc више грешака De Coninck-а о особинама периодичних десетних разломака; Cole грешку Cayley-а о апстрактним групама шестога реда итд.

У теорији бројева констатована је грешка Euler-а да су бројеви

$$232 \times 57^2 + 1 \quad \text{и} \quad 232 \times 117^2 + 1$$

прости; први је дељив са 179, а други са 271. Plana је тврдио да је број $2^{53} - 1$ нема делитеља мањих од 50033; међутим нађено је да је он дељив са 6361.

Leibniz, у једном писму од 27. авг. 1676., огрешио се о општу теорију једначина, као што је то запазио G. Loria. Lagrange је (Oeuvres t. XIII) учинио доста грубу грешку у теорији редова. Cauchy је дао један нетачан доказ о тригонометријским редовима, као што је то запазио Lejeune-Dirichlet. Schlömilch је грешио у употреби диверегентних редова, Lamé у теорији еластичности, Faa de Bruno у теорији грешака, Fourier у теорији неодређених једначина итд.

Галилеј је мислио да је брахистохрона линија круг. Laplace је грешио примењујући своје обрасце из небеске механике на бројне податке. Challis је учинио читав низ грубих грешака, које је обелоданио Bertrand, о кретању чврсте кугле у еластичној течности, као и при формирању једне опште једначине хидродинамике. Abel је, као што су то запазили Sylow и Sophus Lie, грешио баш у теорији Абелових функција. Cayley је публиковао нетачности у теорији инваријаната везаних за Poncelet-ове полигоне (грешке је запазио и исправио Boulenger). Hermite је учинио грешку при испитивању реалности корена једне једначине, као и више грешака при бројном рачунању (запазио и исправио E. Picard). A. Mayer је учинио грешку из теорије парцијалних једначина (запазио и исправио J. Hadamard). Sophus Lie је дао нетачности у теорији минималних површина четвртог степена, које је исправио Richmond. Gegenbauer је публиковао читав низ нетачности; о множењу детерминаната непарне класе, о придатој[1] детерминанти (déterminant adjoint), о производу двеју специјалних детерминаната, о односима између бинерних алгебарских облика итд.; грешке је запазио Lecat. Gylden се преве-

[1] Данас кажемо „адјунгованој“ (пр. пр.).

рио, од почетка до краја, у својој новој хористичној методи у небеској механици, као што је то показао H. Poincaré. Sylvester је публиковао нетачности у своме раду о реалности корена једначине петога степена; њих је исправио Salmon. Cauchy је учинио једну основну грешку хотећи да докаже Euler-ову теорему о броју страна, ивица и рогљева полиедра, без икакве хипотезе о природи полиедра. Chasles, иако одлично обавештен у историји геометрије, чини историјску грешку тврдећи да је Диоклес за један век млађи од Папуса, не знајући да је Папус цитирао Диоклесову цисоиду.

За велику награду Академије наука у Паризу била је 1858. год. расписана студија о једној Legendre-овој теореми из теорије бројева (*Théorie des nombres*, t. II p. édit, 1830). Међутим 1873. год. Moreau је нашао да је теорема погрешна.

Један од интересантних примера грешака, које су у својим истраживањима починили велики математичари, даје историја једнога значајног проблема небеске механике. Године 1888. шведски краљ Оскар II, одушевљени покровитељ математичара, о чијем је трошку издаван одличан часопис Acta mathematica, расписао је био своју награду од 10.000 шведских круна за расправу у којој би било нових резултата о проблему трију тела, на коме је пре тога много рађено, а мало урађено. Награда је 21. јануара 1889. год. додељена расправи француског математичара Henri Poincaré-а, па затим оштампана у поменутом математичком часопису. Кад је свеска Acta mathematica, у којој је расправа требала да изиђе, била већ сложена, запажене су у овој толике, и то основне грешке, да је свеска морала бити задржана од пуштања у јавност, слог је растурен и расправа враћена писцу на прераду. Она је, исправљена, после тога поново оштампана и изишла у Acta t. 13, 1890. год. У њој Poincaré захваљује скандинавском математичару Phragmén-у што му је скренуо пажњу на једну велику, основну грешку у расправи, поред других грешака које је он сам исправио. Од првобитно оштампане расправе, пуне грешака, сачуван је један примерак, који сада има историјску вредност.

У истој расправи и сам Poincaré скреће пажњу на нетачности великог броја резултата у небеској механици, који потичу од употребљених дивергентних редова. Такви су нпр. редови Lindstedt-а и Gylden-а, двојице међу најпознатијим истраживачима у области небеске механике, а који су доиста знатно унапредили ту област примењене математике. Poincaré се у расправи ограђује од помисли да, обелодањујући те нетачности, умањује вредност радова поменута два математичара и астронома.

Такве су грешке многобројне, каштo и невероватне кад се погледа на то ко их је учинио. Оне су, у своје време, пре светског рата, биле изазвале нарочиту анкету и о томе је тада објављен доста обиман, иако још врло непотпун материјал, у изврсном математичком часопису Intermédiaire des mathématiciens (за године 1904–1914), који је после рата престао излазити.

Ретко је која од тих грешака имала какав утицај на развој математике, или бар на радове појединих математичара који су се на њих ослањали, или на њима даље зидали. Оне су или на време исправљене, или су остале незапажене баш зато што нису биле везане за резултате од неке велике, основне важности. Од тога је по кадшто било и изузетака, као што је нпр. случај са поменутом Legendre-овом теоремом из теорије бројева, која је изазвала чак и расписивање награде париске Академије наука, а међутим била је нетачна.

Да грешке математичара на које се други ослањају, могу имати и штетан утицај, стављајући истраживача на погрешну основицу, или га упућујући на погрешан пут, може се видети из овога примера, из скорашњег искуства:

На стр. 248–249 свога обимног дела *Traité du calcul diférentiel et intégral,* t. I, J. Bertrand наводи један низ образаца који се односе на просте бројеве. Ти обрасци дају вредности извесних бескрајних редова и бескрајних производа чији су чланови функције природног низа простих бројева. Међу осталим налази се и образац:

$$(\text{А}) \qquad 1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\ldots=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

срећом уз напомену да се он добија кад се функција

$$(\text{Б}) \qquad \cos\frac{\pi x}{6}+\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi x}{6}$$

изрази најпре на познати начин, у облику бескрајног производа чији су чиниоци линеарне функције променљиве $x$, па се затим тај производ, међусобним множењем чинилаца, развије у ред уређен по степенима те променљиве и уједначе са једне и друге стране чланови разних степена.

Кад би број $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ одиста био тачна вредност наизменичног реда чији су чланови изврнуте вредности чланова природног низа простих бројева, као што би се могло закључити из обрасца (А), могли би се из тога извести нови резултати од доста великог интереса за теорију простих бројева. Међутим, кад је један истраживач, у намери да искористи образац (А), покушао проверити га, нашао је да у њему, у бескрајном реду с леве стране, поред целога низа простих бројева, фигуришу као имениоци и сви сложени бројеви који су облика $6n-1$ и $6n+1$, што је још на време спречило објављивање нетачних резултата до којих је већ био дошао пошавши од непровереног истог обрасца. Јер, ко би могао мислити да се тако што може десити са обрасцима узетим из дела J. Bertrand-a, једнога од најпрецизнијих аналитичара, који је открио толике грешке код других математичара и на чија би се тврђења могао истраживач сигурно ослонити.

Само треба ствар лепо разумети. Оно што је допуштено онима који имају за собом велики научни багаж и који су много урадили па у нечему и грешили, не мора бити допуштено и онима код којих оно што су урадили није много наспрам онога у чему су грешили. А, као што је једном приликом рекао немачки књижевник и филозоф Лудвиг Бер (1786–1837), „заблуде, грешке и мане великих много су поучније него исправна дела малих".**

---

** Друштво мат. и физ. Србије издало је овај Петровићев чланак у књизи: М. Петровић, *Чланци*, Београд 1949, стр. 41–48. Такође, видети и рад *О грешкама математичара*, Мат. библ., књ. 20, Београд 1963, стр. 47–49 (пр. Д. Т.).

# КВАДРАТУРА КРУГА И ТРИСЕКЦИЈА УГЛА ПРЕД ПАРИСКОМ АКАДЕМИЈОМ НАУКА*

Ова два чувена проблема, који су од вајкада занимали и математичаре од заната и лаике, занимаће и убудуће бар оне који не знају тачно у чему се они састоје, али знају толико да је то нешто око чега су се ломила многа копља, па је ипак посао остао несвршен. Први појам о тим проблемима бар привидно је приступачан свакоме, па и ономе који једва има прве, основне, геометријске и рачунске појмове. И та је привидна приступачност и чинила да су о њима мислили и највише расправљали баш они који су за то најмање позвани, и чиниће да то тако буде и у будућности. Прави смисао проблема јасан је само за оне који су довољно упућени у питањима математичке анализе, а такви се сигурно неће више њима бавити.

Не мислим износити историју ових проблема, која је сама по себи врло занимљива, али која се може наћи у свакој историји математике. Намера ми је у овим редовима, према аутентичним податцима париске Академије наука, изнети какав је став према њима заузимала Академија, која је највише имала посла са стручним и лаичким покушајима да се они реше.

Пре свега, у *Историји академије* од 1775. год., стр. 61, налази се записана одлука Академије, да више неће улазити у испитивање решења проблема квадратуре круга, трисекције угла и удвајања коцке, која би јој била поднета ма од чије стране. При својој реконструкцији, на седници од 10. априла 1797. год., Академија, претрпана масом поднесених јој решења, ставља у дужност своме председништву да са што јачим публицитетом објави да она не само не мисли давати никакве награде за таква решења, већ да је одлучила да уопште и не узима у разматрање никакво решење поменутих проблема.

---

* Српски књижевни гласник, Београд 1928, t. XXIV, н. сер., 5, стр. 368–370.

И поред свих таквих категоричких изјава Академије, које су у неколико махова понављане, непрестано се одржавало мишљење да је у Академији резервисана једна знатна сума за награду срећном проналазачу решења једнога од тих проблема. Још у објави од 1775. год., којом Академија одлучно пориче постојање такве награде, стоји од речи до речи ово:

„Стално се проносе гласови да је француска влада одредила велику награду ономе који реши једно од горњих питања. Верујући у те лажне вести, маса људи лишени сваког математичког знања, одају се таквим беспредметним пословима, запуштајући своје праве послове и своје породичне бриге. Њихова упорност прелази у лудило, које је утолико теже за лечење што су проналазачи, који немају појма о правоме смислу проблема, и који су неспособни да разумеју о чему се ради, убеђени да их је Провиђење нарочито одредило да траже и нађу решење проблема и да они за своје успехе у томе имају да захвале једној врсти инспирације која не наилази на праве научнике."

На поменутој седници Академије од 10. априла 1797. год. прочитано је писмо калуђера Пласида Кинстле, из бенедиктинског манастира у Шварцаху (поред Рајне, маргравијат баденски) у коме свечано, на латинском језику, саопштава Академији да је инспирацијом, помоћу Провиђења, нашао решење проблема квадратуре круга и тражи да му се изда на то одређена награда. Одговор Академије била је опет једна објава горње врсте, са напоменом, да упућена јој решења Академија неће више ни заводити у своје књиге, нити их помињати у својим извештајима, нити уопште о њима водити ма каква рачуна.

На седници Академије од 19. октобра 1868. год. њен стални секретар, академичар Жозеф Бертран, поводом исувише учестаних проналазака поменутих проблема изјављује ово:

„Веровање у велику награду коју проналазач квадратуре круга има да прими од париске Академије, давнашње је; оно постоји и упорно се одржава још од оснивања Академије. Оно се, шта више, шири и по врло озбиљним књигама. Тако, нпр., у *Општој биографији* од Фирмин-Дидоа, која се рачуна као једно од врло добрих дела у свакоме погледу, изрично стоји да је Рује де Меле оставио Академији тестаментом легат од 125.000 франака, од које су суме интерес има употребити на награду онима који се буду бавили о квадратури круга и о сличним проблемима и нашли им решења. Међутим, у тестаменту нема о томе ни речи. Таква су веровања нарочито била распрострањена у XVIII веку. Један од проналазача је чак био тужио Даламбера, што је овај, не хотећи ни улазити у испитивање његовог решења квадратуре круга, оштетио га тиме материјално спречивши га на тај начин да добије награду Академије, коју он цени да износи 150.000 франака."

На истој седници Академија је поновила своју одлуку да се решења горњих проблема не само не узимају у поступак, већ да се и не заводе код Академије, нити да се помињу у њеним извештајима. Та одлука и данас важи и по њој се поступа. Једини је изузетак учињен кад су, седамдесетих и осамдесетих година прошлога века, најпре Ермит за Неперов број, а затим Линдеман за Лудолфов број, једном врло дубоком анализом доказали да ни један ни други број не могу бити корени никакве алгебарске једначине чији су коефицијенти цели бројеви. Тиме је била доказана апсолутна немогућност конструкције тих бројева у тачном математичком смислу, помоћу линеала и шестара. Тиме је и једном за свагда, дефинтивно, закључена историја квадратуре круга и сличних проблема, схваћених онако како их схвата тачна наука.

# КВАДРАТУРА КРУГА*

Квадратура круга и ректификација кружног обима (што је у суштини једно исто) су од оних проблема који су од вајкада занимали и математичаре од заната и лаике. На њему су радили, и мислили да су му нашли тачно решење, још антички математичари и философи. Плутарх уверава да је Анаксагора знао за тачну квадратуру круга, а мноштво других античких математичара имали су своја решења проблема, која су сматрали као тачна или приближна.

Овде се не мисли излагати историја проблема, која је сама по себи врло занимљива и иструктивна, а која се може наћи у свакој историји математике. Квадратура круга је и данас најпопуларнији проблем позитивне науке и он ће и у будућности занимати масе оних који не знају тачно у чему је ствар, али знају толико да је то нешто око чега су се ломила многа копља, па је ипак посао остао несвршен.

Први појам о проблему бар привидно је приступачан свакоме, па и ономе који једва има прве, основне, геометријске и рачунске појмове. Та је привидна приступачност и чинила да су о њему размишљали и највише расправљали баш они који су најмање за то позвани, а чиниће да тако буде и у будућности. И данас је прави смисао проблема јасан само за оне који су довољно упућени у питања више математичке анализе, а такви се сигурно неће више о њему бавити.

Академије наука, као и математичари од струке, били су претрпавани поднесеним им лаичким решењима, за која се захтевало да их проуче и чак и награде наградама што би се требале давати великим проналазачима. Од интереса је, према аутентичним подацима, изнети какав је став била принуђена заузети према проблему квадратуре круга Париска Академија Наука, која је највише имала посла и са стручним и са лаичким проналазачима те врсте.

---

* Гласник Југословенског професорског друштва, Београд 1938, t. XVIII, 7, стр. 603–609.

У Историји Академије од 1775. год., стр. 61, налази се записана одлука Академије, да више не улази у испитивање решења проблема квадратуре круга, трисекције угла и удвајања коцке, која јој буду поднесена ма од које стране. При својој реконструкцији, на седници од 10. априла 1797. године, Академија, претрпана масом поднесених јој решења, ставља у дужност своме председништву да се што јачим публицитетом објави да она не само не мисли давати никакве награде за таква решења, већ и да је одлучила да уопште и не узима у разматрање никакво решење поменутих проблема.

И поред свих таквих категоричких изјава Академије, које су у неколико махова понављане, непрестано се одржавало мишљење да је у Академији резервисана једна знатна сума за награду срећном проналазачу решења једнога од тих вековних проблема. Још у објави од 1775. год., којом Академија одлучно пориче постојање такве награде, стоји од речи до речи ово:

„Стално се проносе гласови да је француска Влада одредила велику награду ономе који реши једно од горњих питања. Верујући у те лажне вести, маса људи лишени сваког математичког знања, одају се таквим беспредметним пословима, запуштајући своје праве послове и своје породичне бриге. Њихова упорност прелази у лудило, које је утолико теже за лечење што су проналазачи, који немају појма о правоме смислу проблема, и који су неспособни да разумеју о чему се ради, убеђени да их је Провиђење нарочито одредило да траже и нађу решење проблема и да они за своје успехе у томе имају да захвале једној врсти инспирације која не наилази на праве научнике“.

На поменутој седници Академије од 10. априла 1797. год., прочитано је писмо калуђера Пласида Кинстле, из бенедиктинског манастира у Шварцаху (поред Рајне, маргравијат баденски), у коме свечано, на латинском језику, саопштава Академији да је инспирацијом, помоћу Провиђења, нашао решење проблема квадратуре круга и тражи да му се изда на то одређена награда. Одговор Академије био је опет једна објава горње врсте, са напоменом да упућена јој решења она неће више ни заводити у своје књиге, нити их помињати у својим извештајима, нити уопште о њима водити ма каква рачуна.

На седници Академије од 19. октобра 1868. год. њен стални секретар, академичар Жозеф Бертран, поводом и сувише учестаних „проналазака“ решења поменутих проблема, изјављује ово:

„Веровање у велику награду коју проналазач решења проблема квадратуре круга има да прими од Париске Академије, давнашње је; оно постоји и упорно се одржава још од оснивања Академије. Оно се, шта више, шири и по врло озбиљним књигама. Тако, на пример, у *Општој биографији* од Фирмин-Дидоа, која се рачуна као једна од врло добрих књига у свакоме погледу, изрично стоји да је Рује Де Меле оставио Академији тестаментом легат од 125 000 франака, од које се суме интерес има употребити на награду онима који се буду бавили о квадратури круга и о сличним проблемима, и нашли им решења. Међутим, у тестаменту нема о томе ни помена. Таква су веровања нарочито била распрострањена у осамнаестом веку. Један од проналазача је чак био тужио Даламбера што га је овај, не хотећи ни улазити у испитивање његовог решења проблема квадратуре круга, оштетио тиме материјално, спречивши га на тај начин да добије награду Академије, коју он цени да износи 150 000 франака".

На истој седници Академија је поновила своју одлуку да се решења таквих проблема и не узимају у поступак, па да се и не заводе код Академије, нити да се помињу у њеним извештајима. Та одлука и данас важи и по њој се поступа. Једини је изузетак учињен кад су, седамдесетих и осамдесетих година прошлога века, најпре француски математичар Ермит за број $e$ (основа природних логаритама), а затим немачки математичар Линдеман за број $\pi$ једном врло дубоком и суптилном анализом доказали да ни један ни други број не могу бити корени никакве алгебарске једначине чији су коефицијенти рационални бројеви, што је требало да учини крај покушајима да се проблем квадратуре круга реши конструктивним методама обичне геометрије.

*

У чему лежи разлог те немогућности и од чега она потиче, биће јасно кад се разјасни шта се има подразумевати под „геометријским конструкцијама". То је, уосталом, нешто што је врло познато, али о чему „проналазачи" слабо воде рачуна. Још Платон је чисто и јасно дефинисао шта се има разумети под тим појмом: конструкције помоћу најпростијих инструмената за прецизно цртање, а то су лењир и шестар. Платон је увек понављао да сматра само ону геометријску конструкцију за тачно извршљиву, која се из датих почетних елемената може извршити искључивом употребом лењира и шестара.

Таква дефиниција и данас важи, јер обична геометрија, у којој се проблеми решавају геометријским конструкцијама, при којима су елементи искључиво праве линије и кружни луци, решава своје проблеме посматрањем само тих простих линија, дакле, решава их само помоћу лењира и шестара. А конструкције које се могу вршити тим инструментима, јесу оне што се могу извести повлачењем правих линија и кругова, изналажењем пресека ових и спајањем тачака правим линијама и круговима.

Са рачунског гледишта, на тај се начин могу конструктивно вршити само рационалне рачунске операције (четири основне рачунске радње: сабирање, одузимање, множење и дељење) и још извлачење квадратног корена, при чему се те операције могу узастопце понављати колико се пута хоће. Знајући то, лако се доказује да, кад се пође од једне дате дужине узете за јединицу (на пример од полупречника датога круга), оно што се њоме конструктивно одређује помоћу лењира и шестара, представља увек један број сложен, по својој структури, из самих рационалних бројева и квадратних корена из таквих бројева или из квадратних корена опет таквих корена, при чему је и број рационалних бројева и квадратних корена што улазе у састав дефинитивно одређеног броја, увек коначан. Ни на какве рачунске елементе другога каквог облика не може се наићи ни у каквом проблему који се решава геометријским конструкцијама у горњем смислу. Из тога се оквира не може изаћи ни у коме случају, кад се конструкције врше искључиво лењиром и шестарем.

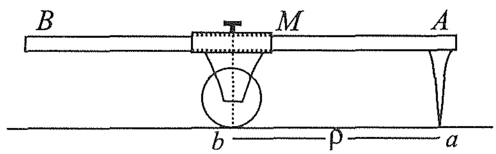
Према томе, никаква дужина која се из дате дужине не може рачунски извести у горњем облику, не може се геометријски конструисати. Да би се доказала немогућност геометријске конструкције једне дужине помоћу друге дате узете за јединицу, довољно је, дакле, доказати да је она рачунски неизражљива на горњи начин. На тај је начин доказана и немогућност геометријске конструкције дужине једнаке обиму круга са датим полупречником, или, што је исто, конструкције квадрата који има исту површину као круг датог полупречника. Наиме, доказано је да број $\pi$ којим треба помножити пречник да би се из овога добила дужина кружног обима, не само да је неизражљив помоћу рационалних операција извршених на рационалним бројевима и кореновањем таквих бројева поновљеним колико било пута, већ и да он уопште не може дати решење никакве алгебарске једначине, па ма колики био њен степен и ма какви били цели бројеви што фигуришу као коефицијенти такве једначине. Тиме је била тачно доказана апсолутна немогућност ректификације и квадратуре круга геометријском конструкцијом, а тиме је и једном за свагда, дефинитивно, закључена историја проблема квадратуре, схваћене онако како је схвата тачна наука.

*

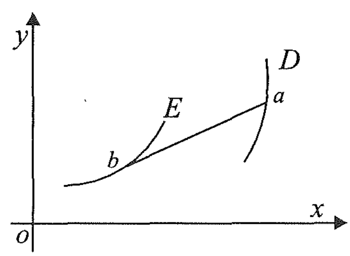
Тако доказана немогућност решења протумачена је често, од стране лаика, као немогућност да уопште постоји квадрат који има исту површину као круг датог полупречника, што је очевидно апсурд. Такав квадрат не само да очевидно увек постоји, *већ се може и мате-*

*машички шачно консшруисаши.* Само што таква конструкција није више чисто геометријска, у напред објашњеном смислу. Она се може тачно извршити уз припомоћ једнога веома простог инструмента, који није ни лењир ни шестар, већ једна проста справица која ради тако исто прецизно као и та два геометријска инструмента, али за коју, њоме изведене слике не улазе у оквир онога о чему се бави елементарна геометрија. Та справица оцртава фигуре сасвим различне од праве линије и круга, и то не овлашно или само приближно, већ са оном истом прецизношћу са којом лењир црта праву линију, а шестар кружни лук.

Та је справица „тракториограф", чији је облик означен на слици 1. Хоризонтална метална полуга *AB* носи на своме крају *A* вертикалну, на њој утврђену иглу, чији је врх окренут наниже; дуж полуге клизи један оквир *M* који се шрафом може притврдити на коме се хоће одстојању од *A* и који под собом носи точкић са оштрим ободом, што се креће око кратке хоризонталне осовине.



*Слика 1*

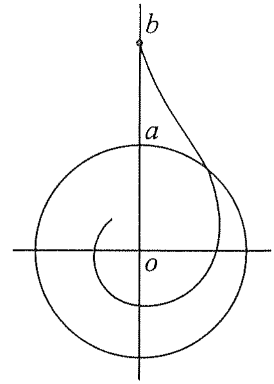


*Слика 2*

Кад се справица постави на хоризонталну подлогу, на пример на хоризонтални лист хартије, па се врх *a* игле руком повлачи по каквој линији *D* (сл. 2) (ова се назива „директриса" слике коју ће оцртавати точкић), точкић ће, обрћући се, оставити на хартији као траг једну криву линију *E* (која се назива „трактриса" линије *D*). Та крива *E* има у свакоме тренутку за дирку правац *ab* у коме се налази полуга инструмента; трактриса је, дакле, обвојница праваца *ab*, па се као за такву одређује и њена једначина за дату директрису.

Ако се за директрису узме дати круг, па се растојање *ab* шрафом утврди тако да буде једнако полупречнику круга и справицама се намести тако да њен точкић *b* буде на продужењу једнога произвољног круга, а врх игле *a* на пресечној тачки круга и тога пречника, точкић ће, кад се врх игле буде вукао по кругу, оставити на хартији траг у облику једне спирале која се асимптотно приближује центру *O* круга (сл. 3). Кад је та спирала на тај начин нацртана за дати круг, (један или више њених увојака), *онда се помоћу ње, правих линија и кружних лукова може шачно консшруисаши дужина једнака обиму дашога круга.*

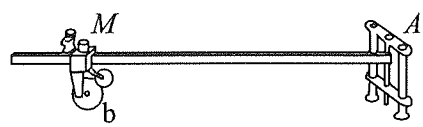
Као што се види, проблем квадратуре круга решљив је математички тачно кад се лењиру и шестару, као инструментима за цртање, придода тракториограф. Тачна квадратура круга може се увек извршити помоћу та три проста инструмента. Али при том треба имати на уму да то не даје квадратуру у њеном обичном смислу, онакву како се она схвата у елементарној геометрији, тј. квадратуру извршљиву искључиво помоћу правих линија и кружних лукова. То даје једно инструментално, али не и геометријско решење проблема. Немогућност квадратуре помоћу правих и кружних линија остаје и надаље, и остаће за навек онаква каква је од увек и била.




*Слика 3*

Нека буде поменуто још и то да је професор Љубомир Клерић[1] усавршио тракториограф у погледу лакости рада са њиме, давши му облик назначен на сл. 4. На крају *A* справе, око њене игле као вертикалне осовине, стављен је један метални оквир (јарам) који се може окретати око игле и служи за лако вођење ове по директриси. Над точкићем *b* утврђена је за сам оквир *M* једна направа која за време кретања непрестано маже обод точкића мастилом, што чини да точкић оставља јасан траг на хартији по којој се обрће. Трактриса се на тај начин оцртава са онаквом истом лакоћом и прецизношћу, као што обичан шестар оцртава кружне луке.

*




*Слика 4*

За праксу је потпуно безначајна математички тачна квадратура круга. Пракса се задовољава решењима која дужину кружног обима дају са довољно малом грешком, на пример таквом која не прелази један хиљадити, десет-хиљадити, сто-хиљадити итд. део дужине кружног пречника. То су тада *приближна решења проблема квадратуре круга*, на каква се наилазило још од најдавнијих времена и која су кроз векове занимала и математичаре и лаике.

---

[1] Љубомир Клерић (1844–1910), талентовани математичар, професор Велике школе у Београду, министар и најзад државни саветник. – Пр. ур. Гласника Југ. проф. друштва.

Међутим, у непрегледноме мноштву до данас познатих таквих решења има их и таквих која практичаре могу потпуно задовољити или својом простотом, или тачношћу коју она дају. Може ли, се, на пример, захтевати простије решење од онога које се исказује правилом: обим круга добија се кад се тространкој дужини пречника дода петина дужине стране квадрата уписаног у кругу? Грешка коју собом носи такво решење, мања је од два десетохиљадита дела пречника, тако да ће се на кругу, чији је полупречник један метар, имати грешка мања од пола милиметра, што у великом броју случајева потпуно задовољава праксу.

Хоће ли се већа тачност, па ма конструкција била и нешто компликованија, може се на разне начине искористити чињеница да се мноштво рационалних и квадратичних бројева разликују од броја $\pi$ тек у петој, шестој итд. децимали. Па пошто се такви бројеви, узевши полупречник круга за јединицу, могу конструисати употребом само лењира и шестара, то ће сваки од тих бројева довести до једне приближне геометријске конструкције ректифицираног кружног обима.

Према једној таквој конструкцији, обим круга једнак је четвртини дужи која се добија кад се петоструком пречнику круга дода дужина хипотенузе правоуглог троугла чија је једна катета сам пречник, а друга катета је пречник увећан седам и по пута. На кругу пречника један метар имаће се тада грешка мања од једног хиљадитог дела милиметра. А то су грешке са којима се могу задовољити и најтачнија практична мерења кружног обима.

Данас је потпуно беспредметно тражити нова приближна решења проблема квадратуре круга. Нова решења не би имала никаквог, ни теоријског ни практичног значаја. Теоријског, прво због тога што је математичка анализа једном за свагда доказала апсолутну немогућност тачне квадратуре помоћу геометријских конструкција у поменутом смислу, а друго с тога што је нађен начин да се он математички тачно реши једном врло простом справом која оцртава слике различне од комбинација правих линија и кружних лукова. Практичног због тога што се данас располаже мноштвом приближних решења која задовољавају захтеве практичара, како у погледу простоте, тако и у погледу приближности тачном решењу.

Приметићемо, завршујући, да ово што је напред казано о дужинама чије се израчунавање не своди на једначине првог или другог степена, или на комбинације ових, важи и за све друге задатке при којима се наилази на рачунске елементе различне од напред наведених, нпр. на извлачења трећег корена. То, међутим, не смета да се и дужине такве врсте могу конструктивно одређивати:

1° или *тачно*, али употребом још кога инструмента (поред лењира и шестара), као што је нпр. тракториограф;

2° или *приближно*, са приближношћу каква се жели, полазећи од чињенице да се алгебарски изрази најразличнијих облика могу изразити помоћу квадратних корена са већом или мањом приближношћу. Тако, на пример, дужина од $4+\sqrt{2}$ метра разликује се за мање од једнога стотог дела милиметра од дужине хипотенузе правоуглог троугла чија је једна катета 5 метара, а друга једнака трећини од $\sqrt{24}$ метра.

Међу проблемима који се могу решавати само на такве начине, налази се и проблем „трисекције угла", скоро тако исто популаран као и квадратура круга.[**]

[**] Овај занимљив Петровићев рад објавило је Друштво мат. и физ. Србије у књизи: М. Петровић, *Чланци*, Београд 1949, стр. 30–36. Погледати и рад Д. Трифуновић, *Метрологија и инструментална математика у делу Љубомира Клерића*, Годишњак града Београда, књ. XXII, 1975, стр. 97–116 (пр. Д. Т.).

# СТУДИЈЕ

## О ПРОПОРЦИОНАЛНОМ ПРЕДСТАВНИШТВУ*

Проблем пропорционалног представништва састоји се у избору једне бројно утврђене групе лица која би, у погледу политичких убеђења, била што вернији израз средине што их бира. То би, професорски схваћено, био једна врста проблема корелације, или, ако се хоће, и пропорционалног пресликавања. Као такав, могао би имати и своје тачно, професорско решење.

Али, у пракси се, поред горње основне погодбе, тражи и то да је решење практички и лако изводљиво, без заметних процедура, као и без рачунских и техничких компликација. Осим тога, могу долазити у обзир још и разни други захтеви који немају ничега заједничког са рачуницом. С тога питање о пропорционалном представништву није ни у једној земљи решено на начин који би могао задовољити, нити се и један од досадашњих изборних система у довољној мери приближује идеалном решењу проблема.

Намера је у овоме чланку бацити један летимичан поглед на разне облике који су у пракси давани решењу изборног питања, упоредити их међу собом и проценити у колико се они приближују циљу који се имао пред очима. О истом се питању, у сарадништву са поч. Костом Стојановићем, писац бавио у једној ранијој прилици (1906. г.), кад је проблем био актуелан за нашу земљу. Писац мисли да ће то ускоро бити случај, па да би могло бити од неког интереса подсетити на тај ранији приказ изборних система, допуњен понечим што је од тога доба у питању ново.

Два су принципа која се узимају за основице изборних система:

1. *принцип апсолутне или релативне већине*;
2. *принцип пропорционалности.*

---

* Гласник Југословенског професорског друштва, Београд 1936, t. XVI, 8, стр. 719–733.

Изборни систем основан на првоме принципу своди се на то да један кандидат (или листа кандидата) бива изабран ако је добио број гласова бар за јединицу већи од укупног броја гласова што су пали на све остале кандидате (или листе), тј. ако има *апсолутну већину гласова*. Ако на првом гласању ни један од кандидата не добије такву већину, на другоме гласању изабран је онај који има највећи број гласова, тј. *релативну већину гласова*. По кадшто се одмах бира релативном већином.

Мане су таквих система и сувише очигледне. У Скупштину могу, нпр. доћи представници изабрати једном половином целокупнога броја гласача у једној изборној области, а да друга половина не буде заступљена ни једним представником, или, да од две политичке групе са приближно истим бројем гласача једна има несразмерно више представника но друга. Такав је, нпр. један избор изазвао 1890. године у Швајцарској јаке нереде: 12.166 либерала добили су 35 посланика, док је 12.783 конзервативца добило 77 посланика. При другоме једном избору по истом систему, опет у Швајцарској, десила се та аномалија да је радикална већина од 5580 гласача добила 44 места, а конзерватина мањина од 5500 гласача 61 посланика. При изборима за енглески парламент 1874. год. извршеним по принципу већине, а који су и изазвали пад Гледстоновог кабинета, конзервативци су са својих 1,222.000 гласова добили 536 посланика, док су њихови противници, либерали, поред све своје већине од 1,436.000 гласова добили само 296 посланика, што је мањини омогућило владање земљом за време од шест година. На општинским изборима у Паризу 1900. године однели су победу националисти поред све своје мањине која је износила само 21% од целокупног изборног тела; док је, нпр. 880 бирача националиста у једноме изборном кварту добило једног представника у општинском одбору, 7563 републиканска бирача нису добили ни једнога, итд.

Али, и поред таквог, врло великог недостатка и нелогичности до којих могу довести изборни системи по принципу апсолутне или релативне већине, они се ипак одржавају због преваге коју неоспорно имају над осталим системима, да им је процедура, по којој се извршују, најпростија. Они су, уосталом, и потпуно правични у случајевима кад се гласа за само једног кандидата (или листу).

Циљ је изборних система по другоме од горњих принципа да се избегну нелогичности и аномалије до којих могу довести избори по принципу апсолутне или релативне већине. Тражи се да у телима, као што је, нпр. Народно Представништво, може већину сачињавати само група која је најприближнији израз средине од које је бирана, као и то да се и мањим, слабијим изборним групама омогући да, поред све своје бројне слабости, добију својих представника у броју који би што приближније одговарао њиховој јачини.

Идеални циљ, коме би се у примени принципа пропорционалности имало тежити, могао би се овако формулисати: ако $n$ изборних група

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

стоје једна према другој, према својим бројним јачинама, као

$$m_1 : m_2 : \ldots : m_{n-1} : m$$

учинити да оне буду и у телу, за које се врше избори заступљене у тој истој пропорцији.

Практична метода, која се намеће за решење таквога једнога проблема, била би непосредна примена аритметичког деобног правила (сложено правило тројно). Целокупан број гласача $N$ подели се бројем лица који има да се изабере; према количнику $Q$ (изборни количник) свакој се листи досуђује број кандидата сразмеран броју гласова. У томе циљу $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (јачине листа) сваке изборне групе деле се бројем $Q$; разултат деобе биће по један цео позитиван број

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

као количник за одговарајућу листу, и по један цео позитиван број

$$r_1, r_2, \ldots, r_n,$$

као остатак деобе, од којих је сваки, по природи ствари, мањи од броја $Q$.

Кад не би било ових остатака, имало би се идеално решење проблема пропорционалног представништва. Свака би листа $A_k$, добила онолики број представника, колики је њој одговарајући број $a_k$. Збир ових целих бројева $a_k$, па, дакле, и збир изабраних лица, био би тачно једнак са целокупним бројем $S$ лица која су се и имала изабрати, и тај би збир био сасвим правилно распоређен на све листе.

Али, сасвим другојаче стоји ствар кад се поменуте деобе не свршавају без остатка. Скуп тих остатака представља тада један број неупотребљених гласова о којима се већ и по томе мора водити рачуна што се распоредом изабраних лица на листе по количницима што им одговарају, не исцрпљује целокупан број $S$ лица која се имају изабрати; известан број изабраних лица мора се распоредити и на те неупотребљене гласове. И ту сад настаје тешкоћа: пошто је у принципу за једно представничко место потребан број гласова тачно једнак са изборним количником $Q$, а, међутим, је сваки остатак $r_k$ мањи од $Q$, па је, дакле, као број гласова недовољан за једнога представника, како би се скуп тих остатака најправичније распоредио на кандидатске листе, па да резултат избора буде што вернији израз изборне средине?

Поред све своје привидне простоте проблем није до данас ни у једној земљи и ни у једној установи решен на начин који би могао задовољити. Међу разноврсним изборним системима, предлаганим за такве допунске изборе по остацима, сваки има понеку добру страну која га, кад су испуњене извесне погодбе, приближује идеалном решењу проблема, али сваки има у исто време и недостатака који, кад су ипуњене извесне друге погодбе, могу доводити до нелогичности и аномалија још већих од оних до којих доводе избори по апсолутној и релативној већини.

Овде ће бити наведено и процењено неколико изборних система те врсте, који су званично усвојени у појединим државама и примењени у изборној пракси.

*

Као што се види из напред казанога, у системима пропорционалног представништва има две врсте изабраних лица:

1. она што су изабрана по *количницима* $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2. она што се бирају по *остацима* $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Назовимо, краткоће ради, *допунским местима* она места која се имају попунити избором по остацима. О местима под 1. не може бити спора; њихов је распоред на бирачке групе потпуно рационалан и правичан. Може бити речи само о допунским местима, и у томе се разликују међу собом разноврсни до сада примењивани изборни системи по принципу пропорционалности.

***I. Систем највећих остатака*** (швајцарски систем; женевски систем; систем Massau) састоји се у томе да се допунска места разделе по листама које имају највеће остатке, тако да прво допунско место добије листа која има највећи остатак, друго она чији остатак долази одмах по реду по његовој бројној вредности итд. Пошто је број допунских места, по природи ствари, мањи од броја места (или бар не премаша тај број), то свакој листи може припасти или само једно, или ни једно допунско место.

Систем је, нпр. у употреби у неколиким швајцарским кантонима. Он је био код нас уведен за изборе народних посланика Уставом од 1888. године, са изменама и допунама од 1893. године.

Замерке које се чине систему највећих остатака своде се на ово:

1. По њему допунска места добијају и оне листе, које немају ни битног услова који би, у принципу, требале имати да би уопште могле

имати својих представника, а то је да имају бар толико гласова колико износи изборни количник $Q$, тј. колико је потребно бар за једнога представника.

2. Дешава се да систем нарочито фаворизује једну бирачку групу, у случају, нпр. кад ова има више својих листа у истој изборној области и кад су сви остаци, што одговарају тим листама, такви да им се мора придодати по једно допунско место.

3. У случајевима кад има да се бира непаран број $2n + 1$ представника, дешава се да једна листа добије један број гласова.

$$\text{већи од } \left(n + \frac{1}{2}\right) Q, \text{ а мањи од } (n + 1)\, Q,$$

па да, дакле, има апсолутну већину, а да, међутим, добије само $n$ представника, тј. мањину у својој изборној обасти; довољно је да остатак, што одговара таквој листи, није толики да и њему припадне једно допунско место.

Узмимо, нпр. случај кад у изборима суделују три листе I, II, III са 3000 гласова распоређених на листе овако:

| I | II | III |
|---|---|---|
| 1600 | 700 | 700 |

Изборни је количник

$$Q = 3000 : 3 = 1000$$

према чему ће количници листе и остаци бити по листама овако распоређени:

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| количници: | 1 | 0 | 0 |
| остаци | 600 | 700 | 700 |

Листа I добила би по количнику једнога, а листа II и III по остацима два представника, тако да листа I, која има апсолутну већину бирача, има два пута мање представника но скуп осталих листа. И кад би се тако шта десило у више изборних области једне земље, могло би се, нпр. десити да странка, која има по бирачима апсолутну већину, не може владати.

***II. Strue-ов сиѿем*** (Нешателски систем) састоји се у томе да се сва допунска места придаду оној листи која буде имала највећи број гласова. Систем је за неко време био у употреби у неким изборним областима у Швајцарској, где је дао врло неповољне резултате. У Белгији је 1899. године изазвао читаву буру од негодовања и нереде стишане тек онда кад је пројекат закона, којим се он имао увести као државни изборни систем, био тргнут и клерикално министарство, које га је покушало увести, дало оставку.

Недостаци система су и више очигледни и чине га много нерационалнијим и од самога најпростијега система већине. По њему се, нпр. лако може десити да већину представника добије мањина бирача, ако је ова јаче концентрисана. Претпоставимо, нпр. случај да је 60.000 гласова распоређено на 5 бирачких листа I–V на овај начин

| I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|
| 19.000 | 18.000 | 9.000 | 8.000 | 6.000, |

а да има 6 представничких места. Према количнику

$$Q = 10.000$$

листа I и II добиле би свака по једно место, а сва допунска места припала би листи I. Ова би, дакле, листа са својих 19.000 гласова, према 60.000, добила пет представничких места, листа II са својих 18.000 гласова једно место, а листе III, IV, V са својих 23.000 гласова ни једно место.

***III. Mirman-ов сиси̅ем*** састоји се у томе да се допунска места придодају најјачим листама у изборној области, не по количницима или остацима, већ по броју гласова који су добиле. Најјача листа по броју гласова добила би прво, она после ње друго допунско место итд., док се број ових не исцрпе.

Овај је систем уведен у Швајцарскј (кантон Нешател) законом од 22. новембра 1894. године, заменивши Strue-ов систем који је показао врло неповољне резултате. Међутим, нелогичност и аномалије ипак нису тиме биле избегнуте. Од, нпр. три листе, од којих је I добила 1001 глас, II 1000 а III 999 гласова, а при избору три представника, листа III није добила ни једнога представника, листа II је добила једнога, а листа I два. Листа, дакле, која је имала мањину целокупног броја гласача (1001 према 3000) добила је већину представника (2 према 3), а то је баш оно што се хтело избећи овим системом.

При једним изборима, опет у Швајцарској, извршеним 1895. године, 1010 гласача имали су да изберу три представника, тако да је изборни количник био

$$Q = 1010 : 3 = 336{,}6 \ldots .$$

Распоред гласова на листе био је овакав:

| | | |
|---|---|---|
| либерална листа: | 677 гласова | $= 2 \times Q + 4$ |
| радикална листа: | 333 гласа | $= 0 \times Q + 333$ |

По Mirman-овом систему либерална листа је добила сва три представника, тако да су радикални бирачи остали без и једнога свога представника. Резултат је онај исти који би се имао и избором по принципу већине, или да су радикални бирачи дали своје гласове противницима.

***IV. Цушки сисшем*** је једна модификација система највећих остатака, примењена у Швајцарској (Кантон Цуг) законом од 1. септембра 1894. године, са циљем да се оној листи, која буде добила апсолутну већину гласова, осигура и апсолутна већина представника. Он се састоји у томе да, кад је једна листа добила апсолутну већину гласова, њој се придаје прво допунско место (као што би се радило и у примени Strue-овог или Mirman-овог система); ако преостаје још допунских места, ова се придају редом листама према величинама њихових остатака. На тај начин, листа са апсолутном већином гласова може, у повољном за њу случају, добити два допунска места. Кад ни једна листа нема апсолутне већине, систем се поклапа са системом највећих остатака.

Већ прва примена овога система, на изборима од 18. новембра 1894. године, у Цугу, дала је неповољне резултате и узбунила јавност у Швајцарској. 26.881 гласач имали су да изаберу седам представника, што је дало за изборни количник

$$Q = 26.881 : 7 = 3840.$$

Распоред гласова био је овакав:

| | | |
|---|---|---|
| конзервативна листа: | 15.482 гласа | $= 4 \times Q + 122$ |
| либерална листа: | 11.399 гласова | $= 2 \times Q + 3719$ |

Допунско место, према пропису система, придато је првој листи, тако да су конзервативци са својих 15.482 гласа добили пет, а либерали са 11.399 гласова само два представника.

***V. Hondt-ов сисшем*** (белгијски систем) састоји се у томе да се изборни количник $Q$, у свакој изборној области засебно, смени другим једним бројем $Q'$, мањим од $Q$, изабраним тако да збир количника

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

према којима се распоређује број представничких места на листе, буде тачно једнак са целокупним бројем представника који имају да се изаберу. У томе систему нема, дакле, допунских места; сва се места попуњавају према количницима деобе броја гласова, које су добиле поједине листе, бројем $Q'$.

Одређивање броја $Q'$ скопчано је са доста великим рачунским тешкоћама. Разне рачунске методе за његово практично израчунавање, а које све потичу од професионалних математичара, који имају циљ што простије одређивање тога броја према разним приликама на које се наилази у изборној пракси.

Из примера, који ће бити наведен, добиће се идеја о начину примене ове методе у пракси. Њих, нпр. 91.608 гласача, распоређених на листе I–IV, на овај начин:

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| 60.378 | 18.738 | 10.409 | 2.083 |

бирају 11 представника, тако да је изборни количник

$$Q = 91.608 : 11 = 8328.$$

Кад би се њиме делили бројеви гласова сваке листе и према добијеним количницима распоредио број представника по листама, имао би се овакав распоред:

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 1 | 0 |

па би, дакле, остало једно допунско место.

Али, ако се на место изборног количника $Q = 8328$ узме за делиоца мањи број $Q' = 7328$, имали би се овакви количници:

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 1 | 0 |

чији је збир тачно једнак броју представника што има да се изабере, и према томе не остаје ни једно допунско место.

Ни један од до сада предложених система пропорционалног представништва није дао повода тако живим дискусијама, као овај. Он је имао толико исто компентентних и одушевљених присталица, колико и угледних и одлучних противника. Велики број стручних математичара, угледних политичара, државника и социолога водио је борбу за систем и против њега. Он је у Белгији одмах одушевљено примљен, уведен изборним законом од 30. децембра 1899. године. У Француској је образована јака лига за његово увођење као изборног система при избору посланика. Са друге стране, како преко политичких, тако и преко многобројних стручних математичких публикација, систем је енергично нападан од научника и политичара. На којој је страни истина? То ће се моћи оценити из овога претреса аргумената који су навођени у нападима на систем и у његовој одбрани.

Један од најодушевљенијих поборника система, који је својим ауторитетом доста допринео да овај буде онако одушевљено примљен у Белгији, математичар Mansion, професор Универзитета у Гану, доказивао је да је у Hondt-овом систему број неупотребљених гласова сведен на свој могућни минимум, тако да систем најрационалније употребљава снагу целокупног изборног тела.

Међутим, поред свеколиког математичког апарата који је Mansion употребио да образложи своје тврђење, лако је се на врло прост начин уверити да је то тврђење нетачно. Узмимо, нпр. случај кад 24.000 бирача у једној изборној области имају да изаберу четири представника, а да су гласови овако распоређени на четири листе I–IV:

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| 12.000 | 6.000 | 3.800 | 2.200 |

Број места што би их листе добиле, био би то *Hondt*-овом систему овакав:

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 | 0 |

и остало би

$$3\,800 + 2\,200 = 6\,000$$

неупотребљених гласова. Међутим, по систему највећих остатака распоред места на листе био би овакав:

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 0 |

а број неупотребљених гласова био би 2 200, дакле, знатно мањи од онога по систему *Hondt*-а.

Као што се доцније показало, грешка из које потиче нетачност Mansion-овог тврђења, произашла је из сувише професорског схватања ствари, а поглавито од нетачне дефиниције „неупотребљених гласова“.

У математичкој теорији пропорционалног представништва, коју је поставио други један енергичан бранилац Hondt-овог система, француски професор Rouyer, истиче се на видик друга једна добра особина, коју, по нахођењу тога професора, има систем, а то је: да је по њему фаворизовање оних листа, што су њиме нарочито фаворизоване, сведено на најмању могућну меру.

Није потребно улазити дубоко у математичка разлагања, па да се увиди да се ни то тврђење не може одржати и да његова нетачност потиче из схватања онога што би се имало сматрати као фаворизовање једне листе. Кад је већ, по самој природи ствари, немогућно да свака листа добије број представничких места тачно пропорционалан својој стварној бројној јачини, онда бар учињена грешка треба да је сведена на минимум, тј. не би требало да је већа од једног представничког места. Такво је схватање једино правилно; као мера, у којој је једна листа $A$ јаче фаворизована од друге $B$, има се сматрати проста разлика између бројева места поклоњених једној и другој од тих двеју листа, независно од апсолутног броја гласова које су те листе добиле и према коме им је већ пре тога додељен правичан број места који би им припао по количнику. А та мера није у систему Hondt-а сведена на минимум.

И при том треба узети у обзир још један факат, о коме математичке теорије нису водиле рачуна, а то је: могућност да се грешке, учињене по систему Hondt-а, знатно појачају кад се то нарочито хоће, у корист једних, а на штету других бирачких група. Тако, коалицијом више слабијих група у једну, може се учинити да једна, иначе јака група, која би по својој јачини требала да има већину представничких места, добије број места несразмерно мањи од онога што одговара њеној релативној јачини. И ако се такве коалиције остваре у већем броју изабраних области, може се, нпр. учинити да странка, која је у земљи релативно најјача, не може доћи на владу.

Узмимо, нпр. овакав конкретан случај: странка $A$, која у изборној области (или у земљи) има 32.000 бирача, изашла је на биралиште са неколико листа, од којих је свака добила између 5 000 и 7 000 гласова. Четири друге, много слабије странке, које укупно имају 28.000 бирача, сложе се за једну листу, у којој би били заступљени представници све четири странке (или што је исто, да, ако су форме ради изнели више листа, бирачи гласају само за споразумну листу).

Претпоставимо да имају да се изберу четири представника. Применом система Hondt-а, а узевши за делилац вредност

$$Q' = 7\,000$$

сва би четири представничка места припала коалиционој групи $B$. У тој групи $B$ места би се разделила на коализиране странке од којих би свака добила, поред све своје бројне незнатности, по једнога представника, док странка $A$, поред све своје велике надмоћности, не би на тај начин добила ни једнога представника.

Могло би се, можда, приметити да је странка *А* сама крива за ову своју недаћу, а не изборни систем: није требала да се цепа на листе. Али је, ипак, неоспорно да не би требало допустити да један изборни систем, основан на принципу пропорционалности, омогућава у толикој мери фаворизирање тренутне коалиције слабијих странака против једне јаке, која би по својој надмоћности имала право да води прву реч у земљи, а која, међутим, тренутним споразумом слабијих странака (кога споразума нестаје одмах по свршеним изборима), може бити сасвим удаљена од утицаја на ток послова у земљи. Таква се аномалија не би могла десити по систему највећих остатака, по коме би странка А, поред све своје поцепаности на листе, ипак добила број представника приближно пропорционалан својој јачини.

Осим тога, систем Hondt-а има још један недостатак који се у самоме принципу не сме допустити кад се тражи да се задовољи равноправност свих бирача и представника у једној земљи. Претпоставимо, да је као што захтева равноправност и правичност, број представничких места за разне изборне области једне земље утврђен према бројевима бирача у тим областима, тако да на један приближно сталан број бирача дође по један представник. Пошто се по систему Hondt-а делилац $Q'$ мења од једне изборне области до друге, имајући за сваку од њих разну вредност са великим размаком могућних варијација, то ће у једној области један представник бити изабран са једним, у другој са другим, у трећој са трећим бројем гласова, тако да важност гласова, није ни приближно једнака у разним изборним областима. При изборима у Белгији 1900. године, извршеним по овоме систему, у једној је области требало 8256 гласова, а у другој 23.424 гласа за једнога посланика; важност првих гласова била је, дакле, скоро три пута већа но ових других. Таквој би неједнакости још и могло имати места кад би она произлазила од неједнако распоређеног броја представника на разне изборне области, кад се, нпр. на једној области, из нарочитих политичких разлога, одреди један, на другој области други број представника, независно од броја бирача којима оне располажу. Али се никако не може допустити да такве аномалије уноси у резултате избора сам изборни систем који, ако се хоће право пропорционално представништво, мора бити такав да сам собом не уноси никакве разлике у важности гласова бирача из разних изборних области.

На послетку, поред осталих недостатака које је излишно изложити после ових наведених, систем Hondt-а има још и ту незгоду што захтева доста заметне рачуне, који задају утолико већих тешкоћа у колико је већи број листа и представника који се имају бирати.

*

У парламентарном животу наше земље окушани су разни изборни системи, једни основани на принципу већине, други на принципу пропорционалног представништва. Промене и увођење нових система потицале су од политичких потреба и захтева, а не од какве тежње ка бољем и савршенијем. Углавном, истичу се два таква, међу собом антиподна система, један уведен са изричном намером да се у што јачој мери фаворизује група која у тај мах фактички влада земљом, а друга са циљем да, кад је већ сигурно да таква група има у земљи знатну већину, расподела мандата буде што правичније изведена. Прво обележје носи данашњи изборни систем; друго систем који је код нас био у употреби пре педесетину година, па је после краћег времена опет измењен.

По данашњем закону о избору народних посланика (закон од 10. септембра 1931. године, са изменама и допунама од 26. септембра 1931. године) за основицу изборног система узет је *принцип релативне већине, са нарочитим и обилним фаворизирањем најјаче земаљске листе.*

Број мандата утврђен је тако да Београд са својим подручјем добија три посланика; поједине бановине добијају број места по одређеној скали, сразмерно броју њихових становника, а поред тога бира се још и онолико посланика колико има носилаца земаљских листа које буду добиле преко 50.000 гласова. Овај последњи број мандата дели се на административне срезове и на она бановинска седишта која имају преко 50.000 становника, опет по утврђеној скали. У бановинама које имају више срезова но што им припада мандата, спајају се по два среза који ће се у изборном погледу сматрати као један. Према томе, укупни број народних посланика се не може унапред знати, јер се не може предвидети број листа које ће добити преко 50.000 гласова.

На основу резултата избора утврђује се најпре *најјача кандидатска земаљска листа*, тј. она која је добила *релативну већину*, сабирајући гласове које су добили сви кандидати везани за ову листу у целој земљи. Затим се утврђују сви они носиоци земаљских листа који имају преко 50.000 гласова у целој земљи. Најјача земаљска листа тада аутоматски добија: носиоце листе, сва три мандата са београдске листе и две трећине од укупног броја бановинских мандата. И то, она добија београдске мандате без обзира на то што би, евентуално, њени београдски кандидати добили најмањи број београдских гласача. Исто тако, она добија по две трећине мандата сваке бановине, без обзира на то што би, евентуално, у некој бановини она добила најмањи број гласова. Напослетку, та најјача земаљска листа има удела и у деоби преостале треће трећине мандата, ако збир гласова са свих осталих земаљских листа износи мање него број гласова те најјаче земаљске листе.

Поред тако расподељених мандата, у представништво улазе и носиоци свих земаљских листа које буду добиле преко 50.000 гласова, без обзира на то да ли им је при деоби већ додељен који бановински мандат или не. Ако која кандидатска листа за целу земљу није добила ни онолики број гласова колики је потребан број предлагача, она се не узима у обзир. А ако се деси да буду две најјаче земаљске листе са једнаким бројем гласова, онда се између њих понавља избор у законски одређеном року.

Непотребно је истицати недостатке оваквог изборног система, који су и сувише очевидни, па се стога систем и уводи у праксу само у изузетним приликама у којима то изискују нарочите политичке потребе, или кад се морају задовољити нарочити политички захтеви.

Али, наша је земља у једно време имала и један изборни систем који се прилично приближавао идеалном принципу равноправности и правичности при расподели мандата, принципу правога пропорционалног представништва. Систем је, поред тајног гласања, био уведен Уставом од 1888. године, а начин срачунавања при расподели мандата био је обухваћен чланом 86. Закона о изборима народних посланика од 25. марта 1890. године. Према томе закону:

Ако ни једна листа нема пун количник, број ће се посланичких места расподељивати по листама према остацима. У варошима које бирају више од једног посланика, број ће се гласача у њима поделити бројем посланика које варош има да изабере да би се добио количник према коме ће се свакој листи одредити пропорционални број посланичких места. У изборним окрузима, који имају да бирају и посланике са општим и посланике са нарочитим уставним погодбама (чл. 45. и 49. Устава), количник ће се на исти начин одредити посебно за сваку од тих врста кандидата.

Према чл. 87. истога изборног закона свакој ће се кандидатској листи дати онолико посланичких места колико се пута количник садржи у броју гласова које је листа добила. У свакој листи прво ће се додељено јој место дати кандидату који је на челу листе, па затим осталим кандидатима по реду, док се не исцрпе њено право на посланичка места. Ако се по томе рачуну не добије онолико посланика колико има да се изабере у томе изборном округу, или у тој вароши, посланичка места која преостану разделиће се између листа које имају остатке гласова најближе количнику; ако ти остаци буду једнаки на више листа, решиће се коцком којој ће се од таквих листа придати посланичко место.

Уставом од 1903. године измењен је изборни систем утолико, што кад једна кандидатска листа не добије количник, њени се гласови придају листи са највећим бројем гласова (чл. 92. Устава). Изборна процедура остала је иста, као и у закону од 25. марта 1890. године, са изменом коју је унео поменути чл. 92. Устава.

Кад се ова два изборна система упореде са онима напред изложеним, види се:

1. да се систем од 1888. године поклапао са системом највећих остатака;

2. да се систем од 1903. године приближује Strue-овом систему, од кога се разликује у толико што се сва допунска места не придају увек листи са највећим бројем гласова (као што је то у Strue-овом систему), већ нека од њих могу припасти и другим листама. Наиме, најјача листа појача се најпре придавши јој збир гласова свих оних листа које немају пун количник, па се тек онда допунска места расподељују на листе према остацима.

Напред је показано да међу разним системима, увођеним у изборну праксу, Strue-ов систем стоји најгоре у погледу рационалности и правичности. Било је лако предвидети да ће он и код нас довести до истих аномалија, као и у другим земљама у којима је био примењен. И то се одиста показало при изборима од 1904. године, извршеним по томе систему. Показало се, наиме, да су се резултати мало разликовали од оних до којих би довели избори по принципу релативне већине, и да су се често са овим потпуно поклапали. Тако је било потпуно промашено оно што се у начелу тражи од пропорционалног представништва. Па кад се већ пристајало на то, зашто се гломазна изборна процедура по томе систему није заменила много простијом процедуром система већине?

Писац ових редова налази, без устезања, да ако би се кад год у нашој земљи мислио применити принцип пропорционалног представништва, требало би се вратити изборном систему уведеном ***Уставом од 1888. године***, тј. систему највећих остатака. Тиме се не мисли рећи да је систем савршен, нити да се он бар јако приближује савршенству. Ни њиме се не постиже увек права пропорционалност; и он у појединим случајевима, на које се може наићи у изборним борбама, доводи до аномалија о којима је већ било речи. Али, довољно је упоредити га са другим системима пропорционалног представништва, па да се види да су у њему нелогичности још најмање, као и то да су случајеви у којима се оне могу јављати, мање чести но у осталим системима те врсте.

Замерка, на пример, која се чини систему највећих остатака, да по њему допунска места добијају и оне листе које немају ни толико гласова, колико износи изборни количник, није толико јака; она би имала вредности кад би се уопште могла остварити потпуна пропорционалност. Аномалија би очевидно била знатно већа кад једна листа, чији би број гласова био за нешто мало нижи од количника, не би добила ни једног представника, као што је случај код других система пропорционалног представништва.

Нешто јача би била замерка да систем нарочито фаворизује цепање једне политичке групе на више листа у једној изборној области, којим се поступком може покадшто постићи да једна таква група добије више представника но што би одговарало њеној бројној јачини. То би, на пример, био случај кад би неколико листа те групе имало такве остатке, да би им се по овоме морало придати по једно допунско место. Али, сведимо и ту замерку на њену праву вредност: таквих фаворизирања има и у свима осталим системима и она су по самој природи ствари неизбежна. Питање може бити само о честини таквих случајева у разним системима, о релативним вероватноћама да ће се они десити и о могућним ризицима у које би се упуштале поједине групе прибегавајући овоме или ономе споразуму, а са циљем да изиграју пропорционалност представништва.

Упоредимо у томе погледу *систем највећих остатака* са системом Hondt-а, чија је рационалност тако одушевљено истицана од његових поборника; остале наведене системе не вреди ни узимати у обзир према ономе што је напред о њима речено. Као што систем *највећих остатака* нарочито фаворизује цепање једне јаче бирачке групе на више листа, тако систем Hondt-а нарочито фаворизује тренутне коалиције слабијих група против једне јаче, на начин који је показан при излагању тога система. Али, (и ту излази јасно на видик превага система највећих остатака) бирачка група, која би покушала да буде фаворизирана тим системом, излаже се ризику да изгуби или смањи и онај број мандата који би јој правилном, неизвештаченом применом система, сигурно припао. Другојачије стоји ствар са системом Hondt-а. Ризик од тренутних коалиција по томе систему сведен је на нулу, и коалиране групе могу тиме само добити. Осим тога, поједине политичке групе не могу, по самој природи ствари, бити тако компактне као друге; ове ће последње самим тиме бити нарочито фаворизоване системом Hondt-а.

Напослетку, ни замерка да систем највећих остатака доводи до те могућности, да једна бирачка група има апсолутну већину у својој изборној области, па да ипак добије мањину представника у тој области, није толико јака да чини овај систем нерационалнијим од других. Поменуто је да се такав случај може десити кад се бира непаран број $2n+1$ представника, а при том се деси да најјача листа добије број гласова који лежи између

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)Q \quad \text{и} \quad (n+1)Q;$$

она тада може добити $n$ представничких места, дакле, мањину, ма да је она у апсолутној већини. Али, треба приметити да је овде учињена грешка свега за једно представничко место, јер кад би група о којој је реч добила $n + 1$ место, она би имала већину. Међутим, грешка од једнога представничког места, као најмања могућна грешка, мора се допустити, јер се грешке ни у пропорционалним системима ни на који начин не могу потпуно избећи. А кад се такве минималне грешке од једнога места уопште допусте, лако се опет увиђа једна превага овога система над осталима: по њему се једној листи никад не може учинити неправичност већа од једнога представничког места. По систему Hondt-а те неправичности могу, као што је напред показано, бити веће.

Писац мисли да је тиме довољно образложено тврђење да је, од свих до сад увођених изборних система по принципу пропорционалности, систем највећих остатака, поред свих својих недостатака, ипак најрационалнији.**

---

** Није позната примена ове Петровићеве расправе. Поменимо, да је пре Првог светског рата Петровић у сарадњи са школским другом Костом Стојановићем, министром народне привреде, објавио сличну студију у часопису Мисао; в. Библ. јед. 311 у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића* (пр. Д. Т.).

# О ЈЕДНОЈ ФУНКЦИЈИ*

**1.** Нека је

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

низ позитивних реалних бројева, а $f(x)$ конвексна реална функција у интервалу $(a, b)$ која садржи бројеве (1).

Означимо са $\mu$ и $M$ аритметичке средине бројева $x_i$, и бројева $f(x_i)$, тј. нека је

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{p},$$

(2) $$M = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_p)}{p}.$$

Очигледно је да се $M$ не може сматрати функцијом од $\mu$. Ипак, се не може рећи да *датој* промени величине $\mu$ одговара сасвим *произвољна* промена величине $M$: између ове две промене постоји нека зависност, која се може изразити на следећи начин:

*Вредност* M *варира око средње вредности*

$$\frac{f(p\mu) + pf(\mu) + (p-1)f(0)}{2p}$$

*а амплитуде тих варијација, која никад не може бити премашена, али за било коју функцију* f(x), *може бити ефективно достигнута*, *има за вредност*

---

* Наслов оригинала: *Sur une fonctionnelle,* Publications mathematiques de l'Universite de Belgrad, Belgrade, 1932, t. I, pp. 149–156.

$$(3) \qquad \frac{f(p\mu)+pf(\mu)+(p-1)f(0)}{2p}.$$

Да бисмо доказали овај став, приметимо најпре да он изражава двоструку неједнакост.

$$(4) \qquad f(\mu) \le M \le \frac{(p-1)f(0)+f(p\mu)}{p},$$

доказаћемо да та неједнакост важи за све позитивне вредности $x_k$, и за сваку у интервалу $(a, b)$ конвексну функцију $f(x)$.

Што се тиче прве неједнакости (4), приметићемо да је то добро позната *Јенсенова* неједнакост, која важи за свако реално $x_k$. А што се друге неједнакости тиче, она је у једном од мојих радова[1] доказана само за аналитичке функције чији *Тејлоров* развитак има позитивне коефицијенте. Ова неједнакост, међутим, важи за сваку у интервалу $(a, b)$, конвексну функцију $f(x)$, а може се доказати њеним извођењем из једног општијег става који је доказао г. Ј. *Караматā* у истој свесци овог часописа (стр. 145).

Реч је о следећем ставу:

Да би неједнакост

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{p} f(x_k) \le \sum_{k=1}^{p} f(X_k),$$

важила за сваку конвексну функцију $f(x)$, потребно је и довољно да буде

$$(6) \qquad X_1+X_2+\ldots+X_k \le x_1+x_2+\ldots+x_k$$

за свако $k = 1, 2, \ldots, p-1$ и

$$(7) \qquad X_1+X_2+\ldots+X_p = x_1+x_2+\ldots+x_p$$

при чему се претпоставља да су бројеви $x_k$ и $X_k$, поређани по величини,

Ако се узме да је

$$(8) \qquad \begin{aligned} X_1 &= X_2 = \ldots = X_{p-1} = 0 \\ X_p &= x_1+x_2+\ldots+x_p, \end{aligned}$$

---

[1] *Теорема о аритметичкој средини позитивних количина*, l'Enseignement mathématique, мај-јули 1916; Женева.

услови (6) и (7) ће бити испуњени за све позитивне бројеве $x_k$, па неједнакост (5) постаје

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq (p-1)f(0) + f(x_1 + x_2 + \ldots + x_p);$$

ова неједнакост еквивалентна је другој неједнакости (4), коју је требало доказати.

Приметимо да су доња и горња граница величине $M$, које даје двострука неједнакост (4), ефективно достигнуте за било коју конвексну функцију $f(x)$. Доња граница достигнута је кад су сви бројеви $x_k$ међусобно једнаки, а горња граница кад су сви они сем једног једнаки нули.

Амплитуда варирања величине $M$ око своје средње вредности (2) изражава се тако помоћу аритметичке средине μ функционеле.

$$\text{(9)} \qquad \Delta(f,p) = \frac{f(px) - pf(x) + (p-1)f(0)}{p},$$

примењене на функцију $f(x)$ и за број $p$.

**2.** Функционела $\Delta(f,p)$ има аритметичку особину на коју ће бити указано у ономе што следи.

Назовимо бројем $e_p$ *придруженом позитивном целом броју* p, сваки позитиван цео број $n$, за који је разлика $p^{n-1}-1$ дељива са $n$, а при том број $p$ није дељив бројем $n$. Означимо са $E_p$ скуп свих бројева $e_p$. Овај скуп садржи све *просте бројеве* који не деле $p$ (*Фермаова* теорема); да неки број $n$, који припада скупу $E_p$ буде прост број, довољно је да $p^x$ не буде дељиво са $n$ када је $x$ једнако аликватном делу броја $n-1$(*Ликасова* теорема ). Скуп $E_p$ садржи такође сложене бројеве $e_p$ који не испуњавају последњи услов; ти бројеви су углавном ретки. Најмањи од сложених бројева међу бројевима $e_2$ је број

$$e_2 = 341 = 11 \cdot 31,$$

а затим долазе бројеви

$$\left.\begin{aligned} e_2 &= 1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 \\ e_2 &= 4369 = 17 \cdot 257 \end{aligned}\right\} \text{ итд.}$$

Да би, на пример, неки број између 2 и 341, био број $e_2$, потребно је и довољно да он буде прост.

Да би цео број између 341 и 4362 био неки број $e_2$, потребно је и довољно да он буде прост или 1105.

Пустимо да $\alpha$ узима вредности из низа целих бројева $n = e_p$ и израчунајмо одговарајуће целе бријеве

$$\lambda_n = \frac{p^{n-1} - 1}{n}.$$

Тачке равни, које ћемо назвати *Фёрмаовим* тачкама придруженим позитивном целом броју $p$, су тачке $(\alpha, \beta)$ које имају за апсцису неки број

$$\alpha = n = e_p,$$

а за ординату одговарајући број

$$\beta = \lambda_n.$$

Тако су у случају $p = 2$, ова тачка са координатама

$$(3,1), (5,3), (7,9), (11,93), (13,315) \text{ итд.}$$

После овога, нека је

(10) $$\Delta(f, p) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots),$$

развитак функционеле $\Delta$; његов полупречник корвергенције биће $\frac{R}{p}$, где $R$ означава полупречник конвергенције реда

(11) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Ово својство се састоји у следећем:

*Коефицијенаӣ* $\mathrm{b_n}$ *је цео умножак броја* $\mathrm{na_n}$ *за сваки ранḡ једнак неком броју* $\mathrm{e_p}$; *он је умножак несводљивим разломком броја* $\mathrm{na_n}$ *за сваки друḡи ранḡ* n.

Наиме, налази се

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_n = (p^{n-1} - 1) a_n;$$

да би број $\frac{(p^{n-1} - 1)}{n}$ био цео, потребно је и довољно да $n$ буде неки број $e_p$.

Одавде излази да се двострука вредност амплитуде (3) може развити у ред по степенима аритметичке средине $\mu$.

$$h_2 \mu^2 + h_3 \mu^3 + \ldots$$

чији је коефицијенат $h_n$ цео умножак броја $na_n$, за $n$ једнако неком броју $e_p$ а умножак несводљивим разломком за свако друго $n$.

На пример, у случају кад су сви бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_p$ садржани у интервалу $\left(0, \frac{1}{p}\right)$, а је функција $f(x)$ је

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

види се да аритметичка средина

$$M = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \ldots + \frac{1}{1-x_p}\right],$$

варира око средње вредности

$$\frac{1}{2p}\left[\frac{1}{1-p\mu} + \frac{1}{1-\mu} + p - 1\right],$$

при чему је амплитуда варирања половина вредности

$$\frac{1}{p}\left[\frac{1}{1-p\mu} - \frac{1}{1-\mu} + p - 1\right] = h_n\mu^2 + h_3\mu^3 + \ldots,$$

где је

$$h_n = p^{n-1} - 1.$$

Уколико се ранг $n$ налази између 2 и 341, да би коефицијенат $h_n$ развитка

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-2x} - \frac{2}{1-x}\right]$$

био цео умножак броја $n$, потребно је и довољно да број $n$ буде прост.

Посматрајмо још функционелу

$$(12) \qquad \Delta(f,p) - mxf' = \frac{1}{p}\left[f(px) - pf(x) + (p-1)f(0)\right] - mxf'(x),$$

где је $m$ параметар. Њен развитак по степенима промењљиве $x$ има за коефицијент уз $x^n$ израз

$$(p^{n-1} - mn - 1)\,a_n;$$

да он буде нула, потребно је и довољно да је

$$m = \frac{p^{n-1}-1}{n}.$$

Одатле излази следеће: *да би члан ранīа* n *био лакунарни члан развиШка* (12), *йоШребно је и довољно да* (m, n) *буде Фермаова Шачка, йридружена броју* p, *или йак да се* n *йодудара са ранīом некоī лакунарноī члана функције* f(x).

**3**. Према претходном,

$$(13) \qquad \Delta_1(f,p) = \int_0^x \Delta(f,p)\frac{dx}{x}$$

је функционела са особином да је *коефицијенШ* $g_n$ *њеноī развиШка*

$$(14) \qquad \Delta_1(f,p) = g_2x^2 + g_3x^3 + \dots$$

*цео умножак коефицијенШа* $a_n$, *кад īод је* n *неки број* $e_n$; *Шај коефицијенШ је умножак разломком броја* $a_n$ *за све осШале вредносШи* n.

Наиме, имамо

$$g_n = \frac{p^{n-1}-1}{n}a_n.$$

Такав је, на пример, случај интеграла

$$(15) \qquad \Delta_1(f,2) = \frac{1}{2}\int_0^x \left[f(2x) - 2f(x) + f(0)\right]\frac{dx}{x},$$

где је $f(x)$ било која позитивна и конвексна функција у интервалу $(a, b)$, која је холоморфна за $x = 0$. Да би, кад се ранг налази између 2 и 341, коефицијенат $g_n$ био цео умножак одговарајућег коефицијента функције $f(x)$, потребно је и довољно да број $n$ буде прост.

У партикуларном случају кад је

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

добија се

$$\Delta_1(f,2) = \frac{1}{2}\log\frac{(1-x)^2}{1-2x},$$

а ова функција заиста има својство да је њен коефицијент уз $x_n$ цео број или разломак, према томе, да ли број $n$ јест или није неки број $e_2$. Од коефицијената чији се ранг налази између 2 и 341, они чији је ранг прост број цели су бројеви; а они чији је ранг сложен број разломљени су бројеви.

Посматрајмо још криволинијски интеграл

$$(16) \qquad J(\alpha,\beta)=\int \frac{\Delta(f,p)-\beta f}{z^{\alpha+1}}\,dz,$$

(где $f$ замењује ознаку $f(z)$, а $\alpha$ и $\beta$ су параметри) узет дуж неке затворене контуре која не садржи ниједан сингуларитет функције $f$.

Како се интеграл

$$\int \frac{dz}{z^{\alpha+1}}$$

анулира за сваку позитивну целу вредност параметра $\alpha$, интеграл $J$ своди се на

$$J(\alpha,\beta)=\int\left[\frac{1}{p}f(pz)-\beta f(z)\right]z^{-\alpha}dz.$$

Неодређена једначина $J(\alpha,\beta)=0$ има бесконачно много решења у позитивним целим бројевима; *да пар позитивних целих бројева* $(\alpha,\beta)$ *буде једно од њих, потребно је и довољно: или да тачка* $(\alpha-1,\beta)$ *буде Фермаова тачка придружена броју* p, *или да се* $\alpha-1$ *подудара са рангом неког лакунарног члана развитка функције* f(z).

Наиме, за цело позитивно $\alpha$ налази се

$$J(\alpha,\beta)=(\lambda_{\alpha-1}-\beta)\,a_{\alpha-1}.$$

Ако се за контуру интеграције узме круг чији је центар у почетку, а полупречник му је нека дужина мања од $\dfrac{R}{p}$, добићемо један сличан исказ за одређене интеграле облика

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{p}f(pre^{ti})-\beta f(re^{ti})\right]e^{-\alpha ti}dt.$$

За позитивно цело $\alpha$ овај интеграл има вредност

$$2\pi r^{\alpha}(\lambda_{\alpha}-\beta)\,a_{\alpha},$$

тако да, на пример, интеграл

$$H(\alpha,\beta)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}f(2re^{ti})-\beta f(re^{ti})\right]e^{-\alpha ti}dt,$$

има следећу особину:

Да би се $H(\alpha,\beta)$ акумулирало у некој тачки равни ($\alpha$, $\beta$) (где су $\alpha,\beta$ позитивни цели бројеви), која се налази између правих $\alpha=2$ и $\alpha=341$, потребно је и довољно: или да $\alpha$ буде прост број, а $\beta$ ордината одговарајуће Фермаове тачке, или да се $\alpha$ подудара са рангом неког лакунарног члана функције $f(x)$.

Овај исказ се очигледно примењује на реалне интеграле облика

$$\int_0^{2\pi}\Phi(t,\beta)\cos\alpha t\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi}\Phi(t,\beta)\sin\alpha t\,dt.$$

који зависе од извесне конвексне функције, иначе произвољне, и где параметар $\beta$ фигурише линеарно, као и на цела и чисто имагинарна решења интеграла облика

$$\int_0^{2\pi}\Phi(t,\beta)\,e^{\alpha t}dt.^{**}$$

---

** О овом раду и опште, о Петровићевој неједнакости

$$f(\mu_n)\le M\le\frac{f(n\mu_n)+(n-1)f(0)}{n},$$

за позитивне конвексне функције $f(x)$, где је

$$\mu_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\qquad M_n=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n},$$

писали смо опширно у 8. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића* (пр. Д. Т.).

# НЕКОЛИКО ПОСЕБНИХ ОБЛИКА ТЕОРЕМЕ О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ*

**1.** Вредности функције

$$(1) \qquad \frac{(1+t^m)^p}{1+t^{mp}},$$

где су $m$ и $p$ било који реални бројеви, никад не излазе изван интервала $\Delta$, чије су границе 1 и $2^{p-1}$, ма каква да је ненегативна реална вредност променљиве $t$. Ово се увиђа било непосредно из израза (1), било стављајући

$$(2) \qquad \mathrm{t}^{\mathrm{m}} = \mathrm{tang}^2 \mathrm{z},$$

што овој израз претвара у

$$(3) \qquad \frac{1}{\sin^{2p} z + \cos^{2p} z}.$$

Одатле излази да се, ако су $u$ и $v$ било које две позитивне реалне количине, вредност израза

$$(4) \qquad \frac{(u^m + v^m)^p}{u^{mp} + v^{mp}}$$

увек налази у интервалу $\Delta$. Границе 1 и $2^{p-1}$ тог интервала биће достигнуте кад је једна од величина $u$ и $v$ нула, или кад је $u = v$.

Такође, кад су бројеви $u$ и $v$ позитивни, увек важи

$$(5) \qquad \log(u^m + v^m) = \frac{1}{p}\log(u^{mp} + v^{mp}) + \frac{p-1}{p}\theta \log 2,$$

---

* Наслов оригинала: *Quelques formes spéciales du théoréme de la moyenne*, Nouvelles amales de mathematiques, Paris 1914, t. XIV, 4–7, pp. 179–184.

$$(6) \qquad \log(u^{mp} + v^{mp}) = p\log(u^m + v^m) - (p-1)\theta \log 2,$$

где је $\theta$ нека количина између 0 и 1.

**2.** Нека су $u$, $v$ и $w$ три функције једне променљиве $x$ које су реалне и позитивне у посматраном интервалу од $x = a$ до $x = b$. Према ономе што претходи, имаћемо

$$(7) \qquad (u^m + v^m)^p = (u^{mp} + v^{mp})\overline{\omega},$$

где је $\overline{\omega}$ функција од $x$ чије су вредности, за било које позитивно $x$, садржане у интервалу $\Delta$. Одатле се изводи, примењујући обичну теорему о средњој вредности, следећи исказ:

*Ако су функције* u, v *и* w *реалне и позитивне у интервалу* (a, b), а m *и* n *су било какве реалне константе, тада је*

$$(8) \qquad \int_a^b w(u^m + v^m)^p\,dx = \lambda\left[\int_a^b w\,u^m dx + \int_a^b w\,v^m dx\right],$$

*где се коефицијент* $\lambda$ *налази између бројева* 1 *и* $2^{p-1}$.

Кад је $m$ паран цео број, тада ће се, означавајући са $|a|$ апсолутну вредност реалне количине $a$, имати, било какав да је знак функција $u$ и $v$ у интервалу $(a, b)$

$$(9) \qquad \frac{(u^m + v^m)^p}{u^{mp} + v^{mp}} = \frac{\left\{|u|^m + |v|^m\right\}^p}{|u|^{mp} + |v|^{mp}} = \overline{\omega},$$

па једнакост (8) постаје

$$(10) \qquad \int_a^b w(u^m + v^m)^p\,dx = \lambda\left[\int_a^b w|u|^{mp} dx + \int_a^b w|v|^{mp} dx\right];$$

*она тада важи било какав да је знак функција* u *и* v *у интервалу* (a, b).

Кад се стави $p = \dfrac{1}{m}$, једнакост (10) постаје

$$(11) \qquad \int_a^b w(u^m + v^m)^{\frac{1}{m}}\,dx = \lambda\left[\int_a^b wu\,dx + \int_a^b wv\,dx\right],$$

где, уколико је $m$ цео паран број, на десној страни треба $u$ и $v$ редом заменити са $|u|$ и $|v|$.

Исто тако, стављајући $p = -\frac{1}{m}$, имаће се

$$(12)\qquad \int_a^b \frac{w dx}{(u^m + v^m)^{\frac{1}{m}}} = \lambda \left[ \int_a^b \frac{w\,dx}{u} + \int_a^b \frac{w\,dx}{v} \right],$$

уз претходну напомену. У партикуларном случају кад је $m = 2$ једначина (11) и (12) постају редом

$$(13)\qquad \int_a^b w\sqrt{u^2 + v^2}\,dx = \lambda_1 \left[ \int_a^b wu\,dx + \int_a^b wv\,dx \right],$$

$$(14)\qquad \int_a^b \frac{w dx}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lambda_2 \left[ \int_a^b \frac{w}{u}\,dx + \int_a^b \frac{w}{v}\,dx \right],$$

где се коефицијент $\lambda_1$ налази између бројева

$$(15)\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071\ldots \text{ и } 1,$$

а коефицијент $\lambda_2$ између бројева

$$(16)\qquad \frac{1}{\sqrt{8}} = 0,3535\ldots \text{ и } 1.$$

**3.** Ове формуле омогућују, на пример, поређење интеграла елиптичког, хиперелиптичког типа, итд. са интегралима рационалних функција.

За $w = 1$, $u = 1$, $v = y'$,
где је $y$ у интервалу $(a, b)$ растућа функција од формула (13) даје

$$(17)\qquad \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \lambda_1 \left[ (b - a) + y(b) - y(a) \right],$$

а у случају опадајуће функције *u* добија се

$$(18)\qquad \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \lambda_1 \left[ (b - a) + y(a) - y(b) \right].$$

*Ово изражава једну теорему о средњој вредности која се односи на лукове равних кривих* и којом ћу се на другом месту позабавити.

**4.** Уколико су функције $u$, $v$ и $w$ реалне и позитивне у интервалу $(a, b)$, а $m$ и $p$ било које реалне константе, једнакост (5) доводи до

$$\int_a^b w\log(u^m+v^m)dx=\frac{1}{p}\int_a^b w\log(u^{mp}+v^{mp})\,dx+\theta\frac{p-1}{p}\log 2\int_a^b w\,dx, \tag{19}$$

односно до

$$\int_a^b w\log(u^{mp}+v^{mp})dx=p\int_a^b w\log(u^m+v^m)dx-\theta(p-1)\log 2\int_a^b w\,dx, \tag{20}$$

где се вредност $\theta$ налази између бројева 0 и 1. Ако је $m$ паран цео број, ове формуле важе било какав да је знак функција $u$ и $v$ у интервалу $(a, b)$ уколико се у интегралима $u$ и $v$ редом замене са $|u|$ и $|v|$. *Ове формуле изражавају теорему о средњој вредности која се односи на интеграле облика*

$$\int_a^b w\log(u^k+v^k)dx. \tag{21}$$

Кад се стави $p=\dfrac{1}{m}$, формула (19) даје, за било које реално $m$,

$$\int_a^b w\log(u^m+v^m)dx=m\int_a^b w\log(u+v)\,dx+\theta(1-m)\log 2\int_a^b w\,dx,$$

где ће се, кад је $m$ паран цео број, у интегралу на десној страни $u$ и $v$ редом заменити са $|u|$ и $|v|$.

Одатле се закључује, на пример, да је разлика између Јенсеновог интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z)|\,d\theta$$

и интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(P+Q)\,d\theta,$$

где су апсолутне вредности реалног дела и коефицијента уз $i$ броја $f(\rho e^{\theta i})$ означене редом са $P$ и $Q$, *садржане у интервалу између* $-\dfrac{1}{2}\log 2$

*и* 0 *било каква да је посматрана аналитичка функција* $f(z)$[1] Приметићу, на крају, да је ово што је претходило само партикуларни случај следеће општије чињенице, чије ћу последице развити на другом месту:

Ако су количине $x_i$ све реалне и позитивне а $p$ је било која реална вредност, важи једнакост

$$(x_1 + \ldots + x_n)^p = \theta(x_1^p + \ldots + x_n^p),$$

где је $\theta$ количина чија се вредност увек налази између 1 и $n^{p-1}$.

---

[1] *Видети* један други облик теореме о средњој вредности у мојој белешци *Théorème de la moyenne sans restriction*, Nouvelles Annales, 4. серија, т. XIII, септембар 1913.

# РЕЛАЦИЈЕ НЕЈЕДНАКОСТИ ИЗМЕЂУ АРИТМЕТИЧКЕ И ГЕОМЕТРИЈСКЕ СРЕДИНЕ[*]

Нека је $f(x)$ функција која се, у околини тачке $x = 0$, може развити у потенцијални ред

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{1}$$

где је сваки коефицијент $a_i$ реалан и ненегативан, а при том прва два коефицијента $a_0$ и $a_1$ могу, уосталом, имати било какве реалне вредности.

Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реалне и позитивне количине чији је збир мањи од полупречника конвергенције реда (1).

Означимо са

$$\mu = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{и са} \quad M = \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \tag{2}$$

редом аритметичку средину $\mu$ количина $x_i$ и аритметичку средину $M$ одговарајућих вредности функције $f(x)$.

У једној расправи која ускоро треба да изађе[1] доказао сам формулу

$$M = \Phi_1(\mu) + \theta\,\Phi_2(\mu), \tag{3}$$

са

$$\Phi_1(\mu) = f(\mu), \quad \Phi_2(\mu)\frac{f(n\mu) + (n-1)f(0)}{n} - f(\mu),$$

---

[*] Наслов оригинала: *Relations d'inégalité entre les moyennes arithmétiques et géometriques*, Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences, Paris 1916, t. CLXIII, 4, pp. 81–84; приказао у Париској академији наука проф. Емил Пикар 24. јула 1916. (пр. Д. Т).

[1] *Теорема о аритметичкој средини позитивних количина*, l'Énseignement mathématique, бр. 3–4, мај–јули 1916, стр. 163–176.

где је $\theta$ чинилац који се стално налази између 0 и 1.

Исто тако, имамо

$$(4) \qquad M = \xi f\left(\frac{\mu}{\xi}\right) + (1-\xi) f(0),$$

где се множилац $\xi$ налази између $\frac{1}{n}$ и 1. Ове границе су ефективно достигнуте за произвољну функцију $f(x)$: граница 0 множиоца $\theta$ и 1 множиоца $\xi$ кад су сви бројеви $x_i$ међусобно једнаки; граница 1 за $\theta$ и $\frac{1}{n}$ за $\xi$ кад све количине, сем једне од њих, теже нули.

*Одатле се могу извести релације неједнакости између аритметичке и геометријске средине количина већих од* 1. Нека је $z_1, \ldots, z_n$ низ таквих количина; ставимо

$$x_i = \log z_i, \quad f(x) = e^x$$

и потом

$$\mu_1 = \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n}, \quad P = \sqrt[n]{z_1 z_2 \ldots z_n}, \quad M_1 \frac{\log z_1 + \ldots + \log z_n}{n},$$

Уколико се узме да $M_1$ игра улогу количине $\mu$, а $\mu_1$ улогу количине $M$, долази се до формула

$$(5) \qquad \mu_1 = P + \theta\left(\frac{P^n - 1}{n} - P + 1\right) \quad (0 \leq \theta \leq 1),$$

$$(6) \qquad \mu_1 = \xi P^{\frac{1}{\xi}} + (1-\xi) \quad (\frac{1}{n} \leq \xi \leq 1).$$

Из (6) излази

$$(7) \qquad P = \left(1 + \frac{\mu_1 - 1}{\xi}\right)^{\xi},$$

а како је десна страна једнакости (7) растућа функција од $\xi$ у интервалу у коме та промењива варира, добиће се

$$(8) \qquad (n\mu_1 - n + 1)^{\frac{1}{n}} \leq P \leq \mu_1$$

и одатле

$$(9) \qquad P = \chi_1 + \theta \chi_2 \quad (0 \leq \theta \leq 1),$$

са

$$(10) \qquad \chi_1 = (n\mu_1 - n + 1)^{\frac{1}{n}}, \quad \chi_2 = \mu_1 - (n\mu_1 - n + 1)^{\frac{1}{n}}.$$

Множиоци $\theta$ и $\xi$ ефективно достижу своје назначене границе када су сви бројеви $z_i$ међусобно једнаки ($\theta = 1$, $\xi = 1$), или, пак, кад су сви бројеви $z_i$, уз изузетак једног од њих, једнаки $1\left(\theta = 0, \xi = \frac{1}{n}\right)$.

Међу применама свих врста ових формула, указаћемо у главним цртама неке које се односе на диференцијалне једначине.

Претпоставимо да је посматрана таква једначина написана у облику

$$(11) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) + \varphi(x, y) = F(x),$$

и означимо са $D$ област $(x, y)$ – равни заједничку позитивним областима двеју кривих

$$(12) \qquad \varphi(x, y) - 1 = 0 \quad \text{и} \quad F(x) - \varphi(x, y) - 1 = 0.$$

Ако се стави

$$z_1 = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right), \quad z_2 = \varphi(x, y),$$

у области $D$ имаћемо $z_1 > 1$, $z_2 > 1$, а примена формуле (9) претвара једначину (11) у

$$(13) \qquad f = (\chi_1 + \theta\chi_2)^2 \quad (0 \le \theta \le 1),$$

где је

$$\chi_1 = \sqrt{F(x) - 1}, \quad \chi_2 = \frac{F(x)}{2} - \sqrt{F(x) - 1}.$$

Вредност десне стране једначине (13) налази се између

$$\chi_1^2 = F(x) - 1 \quad \text{и} \quad (\chi_1 + \chi_2)^2 = \frac{F(x)^2}{4},$$

па се стога једначина (11) трансформише у једначину

$$(14) \quad f(x, y) f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = \left[F(x) - 1\right]^2 + \theta\left[\frac{F(x)^2}{4} - F(x) + 1\right]$$

са $0 \leq \theta \leq 1$. Дешава се, у пространим класама случајева, да се једначина (14) може интегралити помоћу квадратура које се примењују на њену десну страну; примена обичне теореме о средњој вредности доводи тада до изражавања функције $y$ у облику

$$y = \psi_1(x) + \theta\,\psi_2(x),$$

где се $\theta$ чинилац налази између 0 и 1, а $\psi_1$ и $\psi_2$ су одређене функције од $x$. Свака грана и интегралне криве једначине (11), садржана у области $D$ биће онда представљена по једном једначином облика (15), која тако даје неку врсту *теореме о средњој вредности која се односи на интеграле* у *посматраног типа.*

Такав је, на пример, случај:

1. Једначине Рикатија

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y^2 = q(x);$$

2. Једначине

$$q(y)\frac{dy}{dx} + p(x)\,\varphi(x,y)^2 + r(x)\,\varphi(x,y) = 0,$$

написане у облику

$$\frac{q(y)}{\varphi(x,y)}\frac{dy}{dx} + p(x)\,\varphi(x,y) = -r(x);$$

3. Једначине

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^m + p(x)\,\varphi(x,y)^2 + r(x)\,\varphi(x,y) = 0,\ldots$$

Формуле (3) и (4) могу се на сличан начин применити, а у наведеној расправи у том смислу бавио сам се важном једначином

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f(x),$$

за чије се реалне интеграле може, овим поступком извршити потпуно квантитативно испитивање.**

---

** Рад је приказан у Revue sémestrielles publications mathématiques, 1917, t. XXV, а Д.С. Митриновић у својој књизи *Nejednakosti*, Beograd 1965, стр. 234–235 користи се њиме (пр. Д. Т.).

# ЕЛЕМЕНТАРНА РЕЛАЦИЈА ИЗМЕЂУ ПРАВИХ И КРИВИХ ДУЖИ*

Елементарна релација која ће овде бити изложена не претпоставља ништа о природи кривих линија на које се односи а тако исто не претпоставља ни познавање једначина тих кривих линија. Она вреди за ма какав произвољно повучен и ма како, правилно или неправилно извијуган лук у равни, а при том је тако елементарна, да претпоставља само најпростија правила обичне планиметрије и тригонометрије. Наиме, она је непосредна последица једне двоструке неједначине између дужине хипотенузе и збира дужина катета једнога ма каквог правоуглог троугла, а чије је извођење веома просто.

Нека су $a$ и $b$ дужине катета, $c$ дужина хипотенузе једнога правоуглог троугла, ако се количник

$$\frac{c}{a+b}$$

означи са $\theta$, биће

$$\theta = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}{1+\frac{b}{a}}.$$

Означимо са $\alpha$ угао између хипотенузе и катете $a$, па ће бити

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tang}\alpha,$$

према чему је

$$\theta = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha},$$

---

* Српска краљевска Академија, Глас, књ. XCIII, Први разред, књ. 39, Београд 1921, стр. 62–74; саопштено у Академији природних наука 25. новембра 1913.

или

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}}.$$

Пошто угао $\alpha$ лежи између 0° и 90°, $\sin 2\alpha$ је увек позитиван и према томе је

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \theta < 1.$$

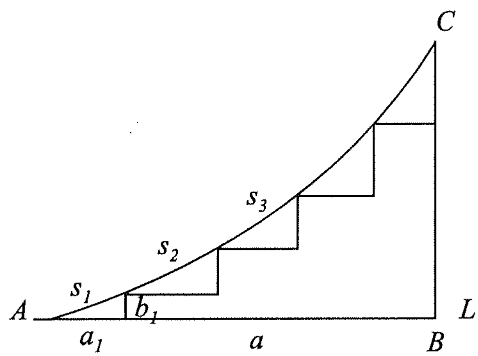
Дакле: између хипотенузе $c$ и катета $a$ и $b$ једнога ма каквог правоуглог троугла постоји релација

$$c = \theta(a+b),$$

где је $\theta$ један бројни коефицијенат чија вредност увек лежи између

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071 \quad \text{и} \quad 1.$$

Уочимо сад један ма какав криволинијски лук $s$, за који ће, за први мах, бити претпостављено да према једној утврђеној правој $L$, повученој кроз његову почетну тачку $A$, у посматраноме размаку никако не опада (сл. 1).



Слика 1

Поделимо лук $s$ на бескрајан број делова $s_1, s_2, s_3, \ldots$; из почетне тачке свакога од ових повуцимо паралелну правој $L$, а из његове завршне тачке управну до пресека са том паралелном. Нека су

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ (a_3, b_3),\ \ldots$$

одговарајући, тако добијени одсечци на тим паралелним и управним правама. Идентификујући бескрајно мали лук $s_n$ са хипотенузом правоуглог троугла чије су катете $a_n$ и $b_n$, биће према горњем елементарном правилу

$$\frac{a_1+b_1}{\sqrt{2}} < s_1 < a_1 + b_1,$$

$$\frac{a_2+b_2}{\sqrt{2}} < s_2 < a_2 + b_2,$$

..........................

одакле је, пошто су све дужине $a_i$, $b_i$, $s_i$ позитивне

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sum a_i + \sum b_i) < \sum s_i < \sum a_i + \sum b_i.$$

А пошто је

$$\sum a_i = a,$$
$$\sum b_i = b,$$
$$\sum s_i = s,$$

где је $s$ целокупна дужина лука $AC$, $a$ и $b$ дужине одсечака

$$AB = a \quad \text{и} \quad CB = b,$$

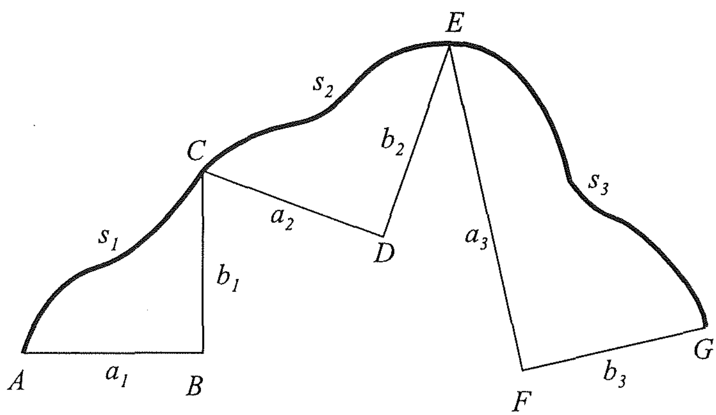
то се види да је

(1) $$s = \theta(a+b),$$

где је θ поменути бројни коефицијенат.

Уочимо сада, (сл. 2 или сл. 3) један ма какав лук $s$ и поделимо га на произвољан број једнаких или неједнаких делова

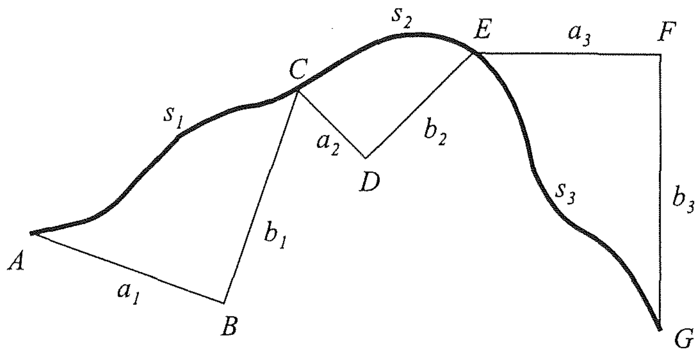
$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$




*Слика 2*

Повуцимо из почетне тачке свакога од тих делова $s_i$ једну произвољну праву $L_i$, али такву да јој се одговарајући лук $s_i$ никако не приближује; из завршне тачке лука $s_i$ спустимо управну $H_i$ на праву $L_i$, и нека су $a_i$ и $b_i$ тако добијени одсечци на правама $L_i$ и $H_i$, па ће бити уопште

$$\frac{a_i + b_i}{\sqrt{2}} < s_i < a_i + b_i$$




*Слика 3*

и према томе

$$\frac{M_s}{\sqrt{2}} < s < M_s,$$

где $M_s$ означује целокупну дужину испреламане линије *ABCDEFG*...

Отуда овај резултат: *ма какав био дати лук* s, *ако се са* $M_s$ *означи дужина једне ма које од бескрајно многих на горњи начин дефинисаних испреламаних линија што одговарају томе луку, дужина лука има за вредност*

$$s = \theta \cdot M_s, \tag{2}$$

*где је* $\theta$ *један бројни коефицијенат чија вредност лежи између* 0.7071 *и* 1.

Прва би екстремна вредност коефицијента $\theta = 0{,}7071$ одговарала специјалноме случају кад је лук $s$ састављен из праволинијских делова, са којима би одговарајући праволинијски делови испреламане линије $M_s$ заклапали углове од 45°; друга екстремна вредност $\theta = 1$ одговарала би случају кад се лук $s$ поклапа са самом том испреламаном линијом.

Једначина (2) показује да узевши да је

$$s = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)M_s,$$

тј.

$$s = 0{,}8535\, M_s;$$

*учињена при томе грешка никад по апсолутној вредности не достиже величину*

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)M_s = 0{,}1465\, M_s,$$

*тј. никад не достиже* 15% *дужине испреламане линије* $M_s$.

У исто време једначина (2) даје једну интересантну релацију између дужина $M_s$ и $M'_s$ двеју ма којих од бескрајно многих испреламаних линија дефинисаних на горњи начин, а које одговарају једноме истом луку $s$: пошто је тада

$$\theta M_s = \theta' M'_s,$$

где су $\theta$ и $\theta'$ одговарајући бројни коефицијенти дужина $M_s$ и $M'_s$, то је

$$M'_s = \frac{\theta}{\theta'} M_s,$$

или

$$M'_s = \lambda' M_s, \tag{3}$$

где је $\lambda'$ један бројни коефицијенат чија вредност лежи између

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071 \quad \text{и} \quad \sqrt{2} = 1,4142.$$

Као што се, дакле, види: *размера дужина двеју ма којих од бескрајно многих испреламаних линија, што одговарају једноме истоме луку* s, *јесте један број, који варира само у границама од 9.7071 до 1.4142.*

Сви се ти резултати могу, уосталом, доказати, и то на врло прост начин, и интегралним рачуном. Очевидно је, да је за то довољно доказати образац (1) за случај представљен сликом 1. Узевши праву $L$ за $x$-осовину, а управну на $L$ у почетној тачки $A$ лука за $y$-осовину, биће

$$s = \int_0^a dx \sqrt{1 + y'^2}.$$

Ако се стави да је

$$\sqrt{1 + y'^2} = \theta (1 + y'),$$

а са $\beta$ означи угао дирке на луку, у његовој тачки $(x, y)$, са правом $L$ биће

$$\theta = \frac{\sqrt{1 + y'_2}}{1 + y'} = \frac{1}{\sin\beta + \cos\beta},$$

или

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin 2\beta}}, \tag{4}$$

и тада је

$$s = \int_0^a \theta (1 + y')\, dx. \tag{5}$$

Према оријентацији праве $L_s$, извод $y'$ увек је позитиван и угао $\beta$ лежи између граница 0° и 90°. Према томе, вредност $\theta$, дефинисана обрасцем (4), увек је позитивна и лежи између 0.7071 и 1. Са друге стране, према теореми *средњих вредности,* образац се (5) може написати у облику

$$s = \theta_1 \int_0^a (1 + y')\, dx,$$

или

$$s = \theta_1 \big[ y + x \big]_0^a = \theta_1 (a + b), \tag{6}$$

где је $\theta_1$ једна вредност променљиве $\theta$, која лежи између граничних вредности ове променљиве, чиме је горњи резултат доказан.

Исти се резултат може изразити и у облику ове аналитичке теореме, која је од интереса за интегрални рачун и која представља једну врсту *теореме средњих вредности* за интеграле облика

$$\int_0^a dx \sqrt{1 + f(x)^2}\,. \tag{7}$$

Ма какве биле интегралне границе $a$ и $b$ и ма каква била функција $f(x)$ која не мења знак у размаку од $a$ до $b$, увек је

$$\int_a^b dx \sqrt{1 + f(x)^2} = \theta \left[ b - a + \int_a^b f(x) dx \right], \tag{8}$$

где је $\theta$ један бројни коефицијенат чија вредност лежи између 0.7071 и 1 и где се у интегралу на десној страни $f(x)$ има сматрати као позитивно.

Теорема је непосредна последица резултата под (1) кад се узме да је

$$y = \int f(x)\, dx.$$

Тако, нпр. вредност елиптичког интеграла

$$\int_0^a dx \sqrt{1 + hx^4}\,,$$

(где је $h$ позитивна константа) за ма какво $x$ лежи између

$$0,7071 \left( x + \frac{\sqrt{h}}{3} x^3 \right),$$

и

$$x + \frac{\sqrt{h}}{3} x^3.$$

Тако би се исто добило других интересантних резултата применом теореме на интеграле који дају дужине лукова појединих важнијих кривих линија у равни.

Нека је, напослетку, у истој врсти идеја, наведена и једна проста релација између величине површине ограничене трима правим и једном кривом линијом, и одговарајуће површине ограничене ректификованим луком те криве линије.

Ако се стави да је

$$(9) \qquad \sqrt{1+y'^2} = \xi\, x(1+y'),$$

према овоме што претходи $\xi x$ (са погодбом претпостављеном у сл. 1) може варирати само између $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1. Интеграцијом, и применивши на интеграл на десној страни теорему средњих вредности, једначина (9) даје

$$(10) \qquad s = \xi_1 \left( \frac{x^2}{2} + \int_0^x xy'dx \right),$$

где је $\xi_1$ једна вредност променљиве $\xi$, што лежи између

$$\frac{1}{x\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x}.$$

Делимична интеграција, међутим, даје

$$\int_0^x xy'dx = xy - P,$$

где је $P$ величина површине ограничене апсцисном осовином, луком $s$ криве линије и ординатом у крајњој тачки тога лука, тако, да једначина (10) помножена вредношћу $x$, даје

$$xs = \xi_1 x \left( \frac{x^2}{2} + xy - P \right).$$

Па пошто $\xi_1 x$ варира само у границама од $\frac{1}{\sqrt{2}}$ до 1, то ако се са $Q$ означи величина површине $xs$ правоугаоника чије су стране дужина апсцисе и дужина ректификованог лука $s$, што тој апсциси одговара, добија се релација

$$(11) \qquad P = \frac{x^2}{2} + xy - \lambda Q,$$

где је $\lambda$ један бројни коефицијенат чија вредност лежи између 1 и 1.4142.

Та релација изражава ово правило:

Ако се из почетне тачке једнога ма каквог лука $s$ повуче произвољна права дуж $L$ тако, да се лук тој дужи никако не приближује, између површине $P$ (ограничена дужи $L$, луком $s$ и управном $H$ на $L$ из крајње тачке лука) и површине $Q$ правоугаоника чије су стране дуж $L$ и ректификовани лук $s$ постоји релација

$$(12) \qquad P = M - \lambda Q,$$

где је $M$ збир површине полуквадрата чија је страна дуж $L$, и правоугаоника чије су стране дуж $L$ и управна $H$.

*Величина површине* P *увек, дакле, лежи између граница*

$$(13) \qquad M - 1{,}4142Q \quad \text{и} \quad M - Q$$

*и обратно: површина* Q *увек лежи између граница*

$$(14) \qquad 0{,}7071(M - P) \quad \text{и} \quad M - P.$$

Приметимо још да се површина $Q$ може увек непосредно мерити ректификујући курвиметром лук $s$.

Релација (1), за општи случај кад координатни почетак није у почетној тачки $A$ лука $s$, постаје

$$(15) \qquad s = \theta\left[(x - x_0) + (y - y_0)\right],$$

где су $(x_0, y_0)$ координате тачке $A$. Она даје, *без икакве интеграције*, једну врсту решења, иначе, у општем случају нерешивог проблема: *одредити криве линије* C *чија је дужина лука, рачуната од једне почетне тачке до једне, ма које тачке* M (x, y) *на кривој, одређена и дата функција* f (x, y) *координата тачке* M. Пошто је једначина проблема

$$(16) \qquad s = f(x, y)$$

то се све *растуће* гране тражених кривих линија, карактерисаних поменутом особином, добијају решењем коначне једначине

$$(17) \qquad f(x, y) - \theta\, y = \theta(x - x_0 - y_0)$$

по $y$ и сменивши у добијеноме решењу $\theta$ једном функцијом променљиве $x$ која варира између 0.7071 и 1. Улогу интеграционе константе игра скуп координата $(x_0, y_0)$, и кад је овај утврђен, могу се формирати граничне криве линије између којих леже све растуће гране кривих линија $C$.

Све растуће гране кривих чији је лук, нпр. линеарна функција ординате.

$$s = \varphi(x)y + \psi(x), \tag{18}$$

где су $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ма какве дате функције апсцисе $x$, дате су општим обрасцем

$$y = \frac{\theta(x - x_0 - y_0) - \psi(x)}{\varphi(x) - \theta}, \tag{19}$$

где функција $\theta$ варира само у поменутим уским границама.

Кад је, нпр.

$$s = (mx + n)y - ax,$$

где су $a$, $m$, $n$, позитивни коефицијенти, и то

$$a > 1, \quad n > 1,$$

а за координатни се почетак узме почетна тачка лука, једначина је (19)

$$y = \frac{(a + \theta)x}{mx + n - \theta}, \tag{20}$$

тако да све растуће гране одговарајућих кривих $C$ леже за све позитивне вредности апсцисе, између граничних кривих

$$y = \frac{(a + 0,7172)x}{mx + n - 0,7172}, \tag{21}$$

и

$$y = \frac{(a + 1)x}{mx + n - 1}. \tag{22}$$

За *опадајуће* криве (извод $y'$ негативан) важи основна диференцијална релација

$$\sqrt{1 + y'^2} = \theta(1 - y'), \tag{23}$$

према чему је

$$s = \theta\left[(x - x_0) - (y - y_0)\right] = f(x, y),$$

одакле се добија резултат сличан малопређашњем.**

** Реферисано у FdM, B.48, S.259 (Neder) (пр. Д. Т.).

# ПРИЛОГ ИСТОРИЈИ ЈЕДНОГА ПРОБЛЕМА ТЕОРИЈЕ ФУНКЦИЈА*

У последње време много је рађено о проблему асимтотних вредности целих функција, нарочито од стране Скандинавских математичара. Проблем обухвата, поред многобројних других проблема истога значаја, и питање о броју коначних асимтотних вредности којима тежи једна цела функција $f(z)$ кад независно промењива количина $z$ бескрајно расте у разним правцима у својој равни што полазе из координатног почетка. Остављајући на страну бескрајно велику вредност коју, према Liouville-овој теореми, има свака цела функција као једну од својих асимтотних вредности, колики уопште може бити број коначних асимтотних вредности једне такве функције? Да ли постоји једна стална одређена граница за тај број, или постоје целе функције са оноликим бројем асимтотних вредности колики се хоће?

Решење питања данас је познато, као и његова веза са разним другим питањима из теорије целих функција. Али, до пре извесног броја година сам проблем није у томе облику експлицитно ни постављан, ни решаван. Држим да ће бити од историјског интереса да овде саопштим један до сада нигде необјављени резултат Henri Poincaré-а, који се односи директно на питање о броју могућних асимтотних вредности једне целе функције. Он је садржан у једноме његовом приватном писму од марта 1911. г. које се налази код мене у оригиналу.

Резултат је овај:

Могућно је конструисати једну целу функцију $F(z)$ која тежи у напред датим границама

$$(1) \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n$$

---

* Српска краљевска Академија, Глас, књ. CXXXIV, Први разред, књ. 63, Београд 1929, стр. 85–90; саопштено у Академији природних наука 21. јануара 1929.

(произвољно изабраним и чији је број онолико велики колико се хоће), кад $z$ бескрајно расте у правцима које дефинишу унапред дати аргументи

$$(2) \qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n.$$

У томе циљу уочимо познату Mittag-Leffler-ову трансценденту

$$(3) \qquad \mathrm{E}_\alpha(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

а која има ове познате аналитичке особине:

1. Кад је аргуменат променљиве $z$ једнак нули, тј. кад је $z$ реалан позитиван број, функција (3) има реалну позитивну вредност и тежи граници $+\infty$ кад $z$ бескрајно расте;

2. Кад аргуменат променљиве $z$ лежи између

$$(4) \qquad \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{и} \quad 2\pi - \frac{\alpha\pi}{2}$$

функција (3) тежи нули кад $z$ бескрајно расте.

Функција

$$(5) \qquad \Phi(z) = e^{-\mathrm{E}_\alpha(z)}$$

представља, дакле, једну целу функцију која тежи нули кад $z$ бескрајно расте са аргуметном 0, а која тежи јединици кад $z$ расте са ма којим аргументом што лежи између граница (4).

Посматрајмо сада функцију

$$(6) \qquad F(z) = \sum_{m=1}^{m=n} A_m - \sum_{m=1}^{m=n} A_m \Phi(ze^{i\varphi_m}),$$

претпоставивши да је број $\alpha$ изабран довољно мали да би број $\dfrac{\alpha\pi}{2}$ био мањи од разлике два ма која од аргумената (2).

Тада, кад $z$ бескрајно расте са аргуметном $\varphi_j$ сви изрази

$$(7) \qquad \Phi(ze^{-i\varphi_m})$$

теже јединици, осим израза

$$(8) \qquad \Phi(ze^{-\varphi_j})$$

који тежи нули.

Дакле: функција $F(z)$ тежи граници $A_j$ кад $z$ расте у правцу који је дефинисан аргументом $\varphi_j$. Учинивши да је узастопце

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

$F(z)$ ће редом тежити границама (1). Број тих граничних вредности може, дакле, бити онолики колики се хоће.

Приметићемо још да се цела функција $F(z)$ може лако представити у облику реда

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{9}$$

Ако се, краткоће ради, стави да је

$$\lambda_n = -\frac{1}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \tag{10}$$

налази се да ће коефицијенат $b_n$ реда

$$\Phi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots \tag{11}$$

бити одређен линеарним рекурсивним обрасцем

$$nb_n + 1 \cdot \lambda_1 b_{n-1} + 2 \cdot \lambda_2 b_{n-2} + \ldots + (n-1)\lambda_{n-1} b_1 + n\lambda_n b_0 = 0,$$

а општи коефицијенат $a_k$ функције $F(z)$ биће

$$a_k = \left[A_1 e^{-ki\varphi_1} + A_2 e^{-ki\varphi_2} + \ldots + A_n e^{-ki\varphi_n}\right] b_k,$$

где $A_1 \ldots A_n$ и $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ имају горња значења.

Данас је познат велики број целих функција које имају горњу особину. Али, држим да треба сачувати од заборава пример те врсте, који је дао H. Poincaré.**

---

** Рад је приказао J. Карамата у FdM, B.55, S.18, као и Revue sémestrielle publientions mathematiques, 1932, t. XXXVI. Анализа рада подробније изнета у расправи D. Trifunović, *Contribution à l'histoire d'un problème de la théorie des fonctions*, Cahiers du Sém. d'Histoire des Math., Paris 1987, 8, pp. 19–24 (пр. Д. Т.).

# ПРИМЕДБА О КАНОНСКОМ ПРОИЗВОДУ ПРИМАРНИХ ФАКТОРА*

Означимо са $G(x)$ ма коју *целу* функцију промењиве величине $x$, изразиву у облику канонског производа

$$G(x) = \prod (u_n). \tag{1}$$

Weierstrass-ових примарних фактора $u_n$, чији облик зависи на познати начин од *врсте* (genre, Gattung) функције $G(x)$.

Означимо даље са $\varphi(x)$ ма коју функцију која за све реалне вредности $x$ варира између два коначна, од нуле различна позитивна броја $N$ и $M$. Таква је, нпр. функција

$$\varphi(x) = a + be^{-hx^2}$$

(где су $a, b, h$ позитивне константе), или функције

$$\varphi(x) = a + b \sin hx$$

(где је $0 < b < a$) итд.

Овде ће бити доказани ови резултати:

I. *Ниједна диференцијална једначина*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \varphi(x) y = 0 \tag{2}$$

*не може имати као интеграл какву функцију* G(x) *нулте врсте.*

---

* Српска краљевска Академија, Глас, књ. CXXVIII, Први разред, књ. 59, Београд 1927, стр. 163–169, саопштено у Академији природних наука 26. децембра 1927.

Да бисмо то доказали, споменимо се познате особине количника $\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}$, према којој, ако је у једном размаку $(a, b)$ променљиве $x$ непрестано

$$(3) \qquad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} < \mu(x),$$

и ако се са $v$ означи један ма који интеграл једначине

$$(4) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} - \mu(x)v = 0$$

две узастопне просте нуле функције $v$ у размаку $(a, b)$ обухватају *најмање* једну нулу функције $y$; две узастопне просте нуле функције $y$ обухватају *највише* једну нулу функције $v$. Ако $y$ и $v$ имају у томе размаку једну заједничку нулу $x = \beta$, променљива $x$, растући, почевши од $\beta$, наићи ће прво на једну нулу функције $y$, па затим на једну нулу функције $v$. Па пошто је

$$\frac{1}{y}\frac{d^2v}{dx^2} = -\varphi(x) < -N$$

то, ако се за $\mu(x)$ узме $-N$, тако да једначина (4) постане

$$(5) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + Nv = 0,$$

види се да $y$ има *најмање* онолико реалних нула колико их има интеграл

$$v = \sin x\sqrt{N}$$

једначине (5), тј. бескрајно много. То у исто време показује да, ако се узастопне нуле функције $y$ означе са

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

а узастопне нуле функције $v$ са

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$$

онда, пошто је ред

$$\frac{1}{|\mu_1|} + \frac{1}{|\mu_2|} + \frac{1}{|\mu_3|} + \ldots$$

дивергентан јер је $\mu_n = \pm\frac{n\pi}{\sqrt{N}}$ биће сигурно дивергентан и ред

$$\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{|\alpha_2|}+\frac{1}{|\alpha_3|}+\ldots,$$

па утолико пре и такав ред за *све* нуле функције $y$, како реалне, тако и имагинарне. Према томе, $y$ одиста не може бити цела функција $G(x)$ *нулте* врсте.

То, уосталом, важи и у случају кад су претпостављене погодбе за функцију $\varphi(x)$ остварене било само за позитивне вредности $x$, почевши од једне вредности $x=\alpha$, па до $x=\infty$, било само за негативно $x$, почевши од једне вредности $x=-a$, па до $x=-\infty$.

II. У случају кад се функција $\varphi(x)$ своди на једну константу $a$, ниједан од њених интеграла $y$ нема имагинарних нула и сваки од њих је по једна функција $G(x)$ *прве* врсте: то су функције облика

$$y=C_1\sin(C_2+x\sqrt{a}),$$

где су $C_1$ и $C_2$ константе. Сличан факт постоји и за ма какву функцију $\varphi(x)$, јер се може доказати овај резултат:

*Свака функција* G(x), *која задовољава какву диференцијалну једначину* (2) *а нема имагинарних нула, или их има само у ограниченом броју, цела је функција прве врсте.*

То излази из познате особине количника $\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}$ према којој, ако је у једноме размаку $(a, b)$ променљиве $x$ непрестано

(6) $$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}>\lambda(x)$$

и ако се са $u$ означи један ма који интеграл једначине

(7) $$\frac{d^2u}{dx^2}>\lambda(x)u=0$$

две узастопне просте нуле функције $u$, што се налазе у размаку $(a, b)$, обухватају *највише* једну нулу функције $y$; две узастопне просте нуле функције $y$ обухватају *најмање* једну нулу функције $u$. Ако $y$ и $u$ имају у томе размаку једну заједничку нулу $x=\beta$, променљива $x$, растући, почевши од $\beta$, наићи ће најпре на једну нулу функције $u$, па затим на једну нулу функције $y$. Па пошто је

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}=-\varphi(x)>-M$$

то, ако се за $\lambda(x)$ узме $-M$, тако да једначина (7) постане

$$\frac{d^2u}{dx^2}+Mu=0 \tag{8}$$

види се да $y$ има *највише* онолико реалних нула колико их има интеграл

$$u=\sin x\sqrt{M}$$

једначине (8).

Из тога се изводи да, ако се са

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

означе узастопне нуле функције $u$, то, пошто је ред

$$\frac{1}{|\lambda_1|^2}+\frac{1}{|\lambda_2|^2}+\frac{1}{|\lambda_3|^2}+\ldots$$

конвергентан, јер је

$$\lambda_n=\pm\frac{n\pi}{\sqrt{M}},$$

биће сигурно конвергентан и ред

$$\frac{1}{|\alpha_1|^2}+\frac{1}{|\alpha_2|^2}+\frac{1}{|\alpha_3|^2}+\ldots$$

Конвергенција неће бити нарушена кад се овоме реду придодају чланови што произлазе од имагинарних нула, пошто су ове по претпоставци у ограниченом броју. Функција $G(x)$, која задовољава једначину (2), је, дакле, *йрве* врсте.

Као последица овога што претходи излази непосредно и овај резултат:

*Свака функција* G(z) *више врсте од* 1, *која би задовољавала какву диференцијалну једначину облика* (2), *морала би имаши бескрајно много реалних и бескрајно много имагинарних нула.*[**]

---

[**] Рад је приказао Ј. Карамата у FdM, B.54, S.470, као и Revue sémestrielles publications mathmatiques, 1932, t. XXXVI (пр. Д. Т.).

# О ЈЕДНОЈ ЗНАЧАЈНОЈ КРИВОЈ*

Крива $C$ дефинисана једначином

$$y = \frac{e^{-x}}{x}\int_0^x \frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1}\,dx, \tag{1}$$

(где су $\alpha$ и $\beta > \alpha$ два позитивна цела броја већа од 4) има, десно од осе $Oy$, сликом приказани облик. Она пролази кроз координатни почетак, поседује један позитиван максимум и има осу $Ox$ као осимтоту. Ово се лако увиђа кад се примети да је


*Слика 1*

$$\frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1} = x^2 + x^{\alpha+1} + \ldots + x^{\beta-1}, \tag{2}$$

одакле излази

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1} = \frac{x^2}{\alpha+1} + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+2} + \ldots + \frac{x^{\beta-1}}{\beta}. \tag{3}$$

Једначина криве $C$ може се, дакле, овако написати

---

* Наслов оригинала: Sur une courbe remarquable, Sphinx, Bruxelles 1936, t. VI, 11, pp. 103–104.

$$(4) \qquad y = e^{-x}p(x),$$

где је $p(x)$ полином (3). Извод функције $y$ је

$$(5) \qquad y' = Q(x)e^{-x},$$

где је $Q(x)$ полином

$$(6) \qquad Q(x) = p'(x) - p(x) = \frac{\alpha}{\alpha+1}x^{\alpha-1} + C_1x^{\alpha} + C_2x^{\alpha+1} + \ldots - \frac{x^{\beta-1}}{\beta},$$

са

$$(7) \qquad C_k = \left[(\alpha+k)^2 - (\alpha+k) - 1\right] : \left[(\alpha+k)(\alpha+k+1)\right].$$

Како је број $\alpha+k$ већи од 2, сви коефицијенти $C_k$ су позитивни, због чега полином $Q(x)$, будући да има само једну смену, поседује највише једну позитивну нулу. Он такву једну нулу ефективно има, јер је за $x$ = мали позитиван број вредност $Q(x)$ позитивна, док је она за довољно велико $x$ негативна. Ова једина нула одговара максимуму функције $y$, јер, ако би то био минимум, функција $y$ би морала прећи кроз још један максимум да би коначно опадала све до нуле.

Укупна површина $S$ криве $C$ десно од осе $Ox$ има следећу значајну аритметичку особину:

*Кад год* S *није цео број, његов децимални део је допуна до јединице децималног дела збира реципрочних вредности простих бројева између* $\alpha$ *и* $\beta$.

Да бисмо то увидели, пођимо од формуле

$$(8) \qquad S = \int_0^\infty y\,dx = \int_0^\infty p(x)e^{-x}dx,$$

која даје

$$(9) \qquad S = A_{\alpha+1} + A_{\alpha+2} + A_{\alpha+3} + \ldots + A_{\beta},$$

где је

$$A_n = \frac{1}{n}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)!/n.$$

Но, као што је познато, кад год је $n > 4$ сложен број, факторијел $(n-1)!$ дељив је са $n$; кад год је $n$ прост број, важи једнакост

$$(n-1)!/n = \text{цео број } -\frac{1}{n}.$$

Како однос $(n-1)!/n$ за $n=2$ узима вредност $\frac{1}{2}$, за $n=3$ вредност $1-\frac{1}{3}$ и за $n=4$ вредност $1+\frac{1}{2}$, имаће се

$$S = \text{цео број} - (1/p + 1/p' + 1/p'' + \ldots), \tag{10}$$

где су $p, p', p'', \ldots$ прости бројеви између $\alpha$ и $\beta$. Тако је теорема доказана.

У случају кад интервал $(\alpha, \beta)$ садржи само један прост број, овај је тачно једнак $1/(1-\lambda)$, где $\lambda$ означава децимални део броја $S$. И уопште:

*Децимални део збира реципрочних вредности који се налазе између датих целих бројева $\alpha$ и $\beta$ тачно је једнак допуни до јединице децималног дела одређеног интеграла*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\Phi(x)\,dx,$$

где је

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1}\,dx.\text{**}$$

** Рад реферисан у FdM, B.62, S.125 (W. Hahn) (пр. Д. Т.).

# АБЕЛОВИ ИНТЕГРАЛИ СА АЛГЕБАРСКО-ЛОГАРИТАМСКИМ ГРАНИЦАМА*

**1.** Посматрајмо интеграл

$$J = \int_{x_0}^{x} y\, dx, \tag{1}$$

где је $y$ алгебарска функција од $x$ дефинисана датом релацијом

$$f(x, y) = 0, \tag{2}$$

коју увек можемо претпоставити написаном у таквом облику да $f$ буде полином по $x$ и $y$. Кад се у њему групишу чланови са парним и непарним степенима променљиве $y$, полином се може написати у облику

$$f(x, y) = y f_1(x, y) + f_2(x, y), \tag{3}$$

где су $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ полиноми који садрже само парне степене од $y$:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = q_0 + q_2 y^2 + q_4 y^6 + \dots \\ f_2(x, y) = p_0 + p_2 y^2 + p_4 y^6 + \dots, \end{cases} \tag{4}$$

где су $p_i$ и $q_i$ полиноми од $x$.

Предмет овог чланка су интеграли $J$ за које су испуњени следећи услови:

1. степен полинома $p_i$ није већи од степена полинома $q_i$ и

2. сви полиноми $q_i$ који нису идентички једнаки нули имају исти знак за све реалне вредности и променљиве $x$.

За интеграле $J$ који испуњавају ове услове доказаћемо следећи став:

---

* Наслов оригинала: *Intégrales abeliennes à bornes algebrico-logarithmiques*, Bulletin des Sciences mathematiques, Paris 1937, t. LXI, 2, pp. 290–295.

*Интеграл* J *може се, за свако реално* x, *изразити у облику*

$$J = \Phi_1(x) + \theta\Phi_2(x), \tag{5}$$

*где је* $\theta$ *број који се налази између* 0 *и* 1 *и где су* $\Phi_1$ *и* $\Phi_2$ *алгебарско-логаритамске функције које су коначне за свако реално* x, *при чему границе* 0 *и* 1 *могу ефективно бити достигнуте, било за свако реално* x, *било за партикуларне вредности те променљиве.*

Да бисмо то доказали, приметимо да се увек може претпоставити да су све функције $q_i$ позитивне; ако то не би био случај, довољно би било изменити знаке функција $p_i$.

Искористимо потом елементарни став према коме, уколико су бројеви $\beta_k$ и $\lambda_k$ позитивни, а бројеви $\alpha_k$ имају било какве знаке, тада се вредност односа

$$\frac{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_n}{\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \ldots + \beta_n\lambda}$$

налази између најмање и највеће вредности односа

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Одатле излази да се вредност десне стране једначине (2), претходно доведене у облик

$$y = -\frac{p_0 + p_2 y^3 + p_4 y^4 + \ldots}{q_0 + q_2 y^2 + q_4 y^4 + \ldots}, \tag{6}$$

налази између најмање вредности $R_1(x)$ и највеће вредности $R_2(x)$ односа

$$-\frac{p_0}{q_0}, -\frac{p_2}{q_2}, -\frac{p_4}{q_4}, \ldots \tag{7}$$

а према (6), то исто ће важити за $y$. Вредности интеграла $J$ налазиће се, према томе, између граница

$$\int_{x_0}^{x} R_1(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{x_0}^{x} R_2(x)\,dx, \tag{8}$$

при чему ови интеграли остају коначни за сваку реалну вредност $x$, коначну или бесконачну. Функције $\Phi_1$ и $\Phi_2$ из формуле (5) су онда

$$(9)\qquad \begin{cases} \Phi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} R_1(x)\,dx, \\ \Phi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \left[R_2(x) - R_1(x)\right] dx, \end{cases}$$

и оне се изражавају алгебарским и логаритамским функцијама, чиме је став доказан.

Рационалне функције $R_1$ и $R_2$ могу се подударити час са једним, час са другим паром, за све вредности промењиве $x$ садржане у различитим интервалима између $-\infty$ и $+\infty$, али став због тога није мање тачан.

Овом ставу може се дати следећи облик:

*Увек се могу наћи две алгебарско-логаритамске функције* $\Phi_1$ *и* $\Phi_2$ *такве да вредност израза*

$$\frac{J - \Phi_1}{\Phi_2}$$

*остаје између граница* 0 *и* 1 *за све реалне вредности променљиве* x.

Границе 0 и 1 величине $\theta$ ефективно се достижу за партикуларне вредности променљиве $x$, тј. за заједничке реалне корене алгебарских једначина

$$p_i q_j - p_j q_i = 0.$$

За те вредности променљиве $x$ долази до прелаза од једног пара функција $R_1$ и $R_2$ на неки други, али функције $\Phi_1$ и $\dfrac{J - \Phi_1}{\Phi_2}$ увек се изражавају алгебарско-логаритамским функцијама од $x$.

У специјалном случају када је релација (2) линеарна по $y$, границе 0 и 1 достигнуте су за сваку реалну вредност промењиве $x$.

Посматрајмо као пример интеграл $Jy$ коме је $y$ алгебарска функција дефинисана релацијом

$$X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + X_3 y^3 = 0,$$

где су $X_i$ полиноми

$$\begin{aligned} X_0 &= 3x^4 + 7x^2 + 3, \\ X_1 &= x^4 + 2x^2 + 1, \\ X_2 &= x^2 - 4x^2 + 4, \\ X_3 &= x^2 - 6x + 10. \end{aligned}$$

Имамо

$$\frac{X_0}{X_1} = 3 + \frac{x^2}{(1+x^2)^2},$$
$$\frac{X_2}{X_3} = 1 + \frac{2(x-3)}{(x-3)^2+1}.$$

Полиноми $X_1$ и $X_3$ позитивни су за сваку реалну вредност промењиве $x$. Дакле,

$$\int_{x_0}^{x} R_1(x)\,dx = -\int_{x_0}^{x} \frac{X_0}{X_1}\,dx = -3x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C_1,$$
$$\int_{x_0}^{x} R_2(x)\,dx = -\int_{x_0}^{x} \frac{X_2}{X_1}\,dx = -x - \log(x^2 - 6x + 10) + C_2,$$

где су $C_1$ и $C_2$ константе које зависе од $x_0$.

**2.** Уколико су дата два полинома $X_1$ и $X_3$ позитивна за сваку реалну вредност промењиве $x$, постоји фиксни позитиван број такав да је производ $X_1X_3$ већи од $\lambda$ за реално $x$. Онда се, под претпоставком да су полиноми $X_1$ и $X_3$ узајамно прости, познатим поступком могу одредити друга два полинома $X_0$ и $X_2$ таква да је

$$X_0X_3 - X_1X_2 = \mu, \tag{10}$$

где је $\mu$ произвољно изабрана константа. За то треба спровести тражење највећег заједничког делиоца полинома $X_1$ и $X_3$, тако да се добију следеће релације (под претпоставком да степен полинома $X_3$ није мањи од степена полинома $X_1$; у супротном случају треба разменити улоге ова два полинома)

$$X_3 = X_1Q + R,$$
$$X_1 = RQ_1 + R_1,$$
$$R = R_1Q_2 + R_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

где су $Q, Q_1, Q_2, \dots$ ознаке коефицијената, а $R, R_1, R_2, \dots$ узастопни остаци при дељењу. Вредности $R, R_1, R_2, \dots$ које се одатле изводе, наиме

$$R = X_3 - X_1Q,$$
$$R_1 = X_1(1 + QQ_1) - X_3Q_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

показују да се остатак било ког ранга изражава помоћу полинома $X_1$ и $X_3$ комбинацијом облика

$$X_0X_3 - X_1X_2,$$

где су $X_0$ и $X_2$ полиноми од $x$. Али, последњи од тих остатака је, под прихваћеном претпоставком, константа, што доказује тврђење и даје могућност ефективног формирања релације (10). Константа $\mu$ може бити произвољно изабрана; она се по вољи мења множењем полинома $X_0$ и $X_2$ погодно изабраним бројем.

С друге стране, очигледно је, према начину образовања полинома $X_0$ и $X_2$, да су њихови степени редом мањи од степена полинома $X_1$ и $X_3$. Одатле излази да, ако се, под претпоставком да полиноми $X_1$ и $X_3$ испуњавају горње услове, за $X_0$ и $X_2$ узму тако образовани полиноми, разлика

$$\frac{X_0}{X_1} - \frac{X_2}{X_3} = \frac{\mu}{X_1X_3}$$

ће бити позитивна и мања од $\frac{\mu}{\lambda}$. Разлика

$$R_2(x) - R_1(x),$$

у другој формули (9), биће, дакле, позитивна, а функција $\Phi_2$ ће бити мања од вредности

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mu}{\lambda}\,dx = \frac{\mu}{\lambda}(x - x_0).$$

Посматрајмо сада интеграл $J$ у коме је $y$ алгебарска функција дефинисана неком релацијом написаном у облику (6). Нека су

$$\frac{p_h}{q_h} \quad \frac{p_k}{q_k}$$

односи који дају две претходне функције

$$\Phi_1 = -\int_{x_0}^{x} \frac{p_h}{q_h}\,dx,$$

$$\Phi_2 = -\int_{x_0}^{x} \left[\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_h}{q_h}\right]dx.$$

Ако се, после понављања претходног доказа, узму за

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,$$

полиноми

$$X_0 = p_h,\ X_1 = q_h,\ X_2 = p_k,\ X_3 = q_k,$$

долази се до ових резултата:

*Ако су два дата полинома* $q_h$ *и* $q_k$ *узајамно прости, постоје полиноми* $p_h$ *и* $p_k$ *такви да се интеграл* J *разликује од неке алгебарско-логаритамске функције од* x *за количину мању од унапред дате линеарне функције од* x, *која се анулира* за $x - x_0$.

Приметимо још да претходно тврђење са формулом (5), важи и за Abel-ов интеграл

$$J = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx,$$

где је $y$ алгебарска функција од $x$ – дата релацијом (2), кад год је $\varphi$ полином од $x$ и $y$ и при том монотона функција сваке од ових променљивих.**

---

** Рад реферисан у FdM, B.63, S.339 (H. Knesr) u Zbl, B.17, S.258 (Otto-Heinrich Keller) (пр. Д. Т.).

# БЕРТРАНОВ ПОСТУЛАТ КАО ПОСЛЕДИЦА ГОЛДБАХОВЕ ХИПОТЕЗЕ*

Следеће тврђење, које важи за све позитивне целе бројеве исте парности, веома је очигледно:

**1.** *Геометријска средина два таква цела броја* $\alpha$ *и* $\beta$ *једнака је једној катети правоуглог троугла који има за хипотенузу аритметичку средину ових бројева, а за другу катету има неки други цели број.*

Јер, пошто је аритметичка средина

$$m = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

цео број , то ће се, ако се стави

$$\alpha = m - k, \quad k = 1, 2, \ldots, m - 1,$$

имати

$$\beta = m + k,$$

и одатле

$$\alpha \beta = m^2 - k^2,$$

или

$$m^2 = q^2 + k^2, \text{ где је } q = \sqrt{\alpha\beta},$$

што доказује тврђење.

Нека је сада ($P$) нека класа позитивних целих бројева $\alpha$, $\beta$ исте парности, али таква да не садржи све позитивне целе бројеве исте парности. Исказ I, које важи за све бројеве из ове класе, никако нема за последицу следећи исказ:

---

* Наслов оригинала: *Le postulatum de Bertrand Comme conséquence du théorème de Goldbach*, Sphinx, Bruxelles, 1938, t. VIII, 2, pp. 19–20.

**2.** *Сваком позитивном целом броју* m *може се придружити пар бројева из класе* (P) *чија је аритметичка средина* m, *а њихова геометријска средина је једна катета правоуглог троугла која има за хипотенузу* m, *а за другу катету неки позитиван цео број.*

Међутим, исказ II. важи за сваку класу $(P)$ са особином да је сваки позитиван цео број $m$ аритметичка средина два броја из класе; ову особину назваћемо особином Δ. За такву једну класу позитивних целих бројева, може се показати да:

**3.** *Ако је* m, *било који позитиван број, између* m *и* 2 m *увек се налази бар један број из класе* (P).

Заиста, ако су $\alpha$ и $\beta$ два броја из класе $(P)$, чија је аритметичка средина $m$, може се ставити

$$\alpha = m - k, \quad \beta = m + k,$$

где је $k$ неки позитиван цео број мањи од $m$. Број $\alpha$ ће, дакле, бити један од бројева $1, 2, \ldots, m-1$, а $\beta$ ће бити један од бројева $m+1, m+2, \ldots, 2m-1$. Број $\beta$ се, према томе, налази између $m$ и $2m$, што доказује тврђење.

Истовремено се види следеће:

Када $m$ припада класи $(P)$, тада ће, будући да јој $m + 1$ не припада (стога што није исте парности као $m$), број $\beta$ ће бити један од бројева $m + 2$, $m + 3$, ..., $2m - 1$; између $m + 1$ и $2m$ се, дакле, налази бар један број из класе.

Кад $2m - 1$ припада класи $(P)$, то није случај са $2m - 2$. Када је $\beta$ један од бројева $m + 1$, $m + 2$, ..., $2m - 1$, између $m + 1$ и $2m - 2$ налази се, бар један број из класе.

Најзад, кад истовремено бројеви $m$ и $2m - 1$ припадају класи $(P)$, тада се, стога што је $\beta$ један од бројева $m + 2$, $m + 3$, ..., $2m - 3$, између $m + 1$ и $2m - 2$ налази најмање један број из класе.

Ако би Goldbah-ова теорема, према којој се сваки паран позитиван цео број може изразити као збир два проста броја, била строго доказана, онда би један занимљив пример класе $(P)$ са особином Δ представљао *природни низ простих бројева*. Али ова теорема, коју је без доказа формулисао Голдбах у једном писму упућеном Ојлеру (1742) и чија је тачност потврђена емпиријски, још увек чека свој доказ.

Управо је у току ове године (1937) г. Виноградов[1] успео, користећи средства модерне анализе, да строго докаже Варингову теорему

[1] L.A. Vinogradow – Representation of an odd number as a sum of three primes (C.R. Acad. Sc. U.R.S.S., pp. 169–172).

(1782), према којој је сваки непаран позитиван број збир три проста броја. На основу истог доказа такође је установио да је Голдбахова теорема тачна, за „скоро све парне позитивне целе бројеве $n$"(у смислу да број позитивних целих бројева који су мањи од $n$, а нису обухваћени доказом, подељен са $n$, теже нули када се $n$ бесконачно увећава).

На основу тога може се, дакле, тврдити да искази II и III важе за скоро све позитивне целе бројева $m$. Строги доказ Goldbah-ове теореме проширио би ова два исказа на све позитивне целе бројеве $m$. Но, из исказа III, интуитивне последице те теореме, тада би се добио непосредан и један од најједноставнијих доказа Бертрановог постулата, који се односи на просте бројеве, а доказао га је, са недостижном виртуозношћу Чебишев. Он је био пошао од приближне форме функције која изражава број простих бројева мањих од произвољног датог броја $m$.**

---

** Рад је реферисан у FdM, B.64, S.100 (W. Weber) (пр. Д. Т.).

# О РАВНОТЕЖНИМ ФИГУРАМА ДВА ДОГАЂАЈА СА ЈЕДНАКИМ ВЕРОВАТНОЋАМА*

Кад два догађаја $P$ и $P'$ који се међусобно искључују, имају исту вероватношћу, и кад се учини да се они, са вероватноћама, дешавају велики број пута, број дешавања таквог једног све ће се мање разликовати од броја дешавања другог догађаја, уколико је целокупан број $n$ њихова дешавања већи; кад $n$ бескрајно расте, та два броја теже да се међусобно изједначе.

Сваки низ од $n$ таквих догађаја, састављен из $p$ дешавања догађаја $P$ и $p' = n - p$ дешавања догађаја $P'$, биће назван *фигуром* n-*тог реда* за та два догађаја. Такве би, нпр. биле:

фигуре другог реда: $PP, PP'\ P'P, P'P'$;

фигуре трећег реда: $PPP, PPP', PP'P, P'PP, PP'P', P'PP', P'P'P'$ итд.

Број свих могућих фигура $n$-тог реда износи $2^n$.

Једна фигура сматраће се као *равнотежна фигура* за посматрана два догађаја $P$ и $P'$ кад је у њој број догађаја $P$ једнак броју догађаја $P'$. Ред такве једне фигуре увек је *паран*.

Проблем, који се овде има у виду, је овај:

*Колика је вероватноћа* $s_{2n}$ *да ће се у низу од* 2n *узастопних догађаја* P *и* P′ *имати бар једна равнотежна фигура*?

Проблем је од интереса, нпр. у играма са две могућности (парно и непарно, црно и бело, лице и наличје итд.). Ту је од интереса знати вероватноћу да ће играч у низу од датога броја $2n$ удара, а у току флуктуација добитака и губитака, бити у равнотежи, тј. да ће бар једанпут наступити моменат у коме ће он повратити све што је дотле изгубио. А тај ће моменат наступити кад се најдаље на $2n$-том удару добије једна равнотежна фигура. Колика је вероватноћа да ће то бити?

---

* Српска краљевска Академија, Глас, књ. CLXXXV, Први разред, књ. 92, Београд, 1940, стр. 99–108; саопштено у Академији природних наука 16. децембра 1940.

Проблем је формално већ решен у рачуну вероватноће. Ту се за вероватноћу $p_{2n}$ да ће се број догађаја $P$ *тачно* на $2n$-том удару изједначити са бројем догађаја $P'$ налази да она има за вредност

$$(1) \qquad p_{2n} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}, \quad p_2 = \frac{1}{2}.$$

Према томе, да би се то изједначење десило *најдаље* на $2n$-том удару, вероватноћа је

$$(2) \qquad s_{2n} = p_2 + p_4 + p_6 + \ldots + p_{2n} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \ldots + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}.$$

Међутим, ако се примети да је

$$(3) \qquad \begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2}, \\ p_4 &= \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \\ p_6 &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \\ p_8 &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{2n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot [2n-3]}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2(n-1)} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}, \end{aligned}$$

па се једначине (3) међу собом саберу, добија се да је

$$(4) \qquad p_2 + p_4 + p_6 + \ldots + p_{2n} = 1 - \alpha_n,$$

где је

$$(5) \qquad \alpha_{2n} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n},$$

из чега се изводи овај резултат:

1. Вероватноћа $s_{2n}$ да ће се најдаље до $2n$-тог удара закључно имати једна равнотежна фигура, има за вредност

$$s_{2n} = 1 - \alpha_{2n}.$$

2. Вероватноћа $s'_{2n}$ да се у току $2n$ узастопних удара неће имати ни једна равнотежна фигура, има за вредност

$$s'_{2n} = \alpha_{2n}.$$

Као што се види, практични проблеми из теорије игара са две могућности које се међусобно искључују, своде се на израчунавање броја $\alpha_{2n}$ за дати број удара $2n$. А за израчунавање тога броја има се образац (5), који се може написати још и у облику

$$\alpha_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}. \tag{10}$$

Према Stirling-овом обрасцу за велике вредности $n$ је

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot e^{-n} \cdot n^{n+\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

према чему се налази да је за велике вредности $n$

$$\alpha_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}, \tag{12}$$

па пошто $\alpha_{2n}$ тежи нули за $n = \infty$, те се потврђује да вероватноћа $s_{2n}$ постаје извесност $s_{2n} = 1$, да ће се за велики број удара број догађаја $P$ и $P'$ изједначити.

Али за праксу је од важности питање:

Колики је број $\alpha_{2n}$ *за дати коначан број удара* $2n$?

За неколико првих удара за то је довољан образац (5). Али је образац заметан и неупотребљив за мало већи број удара, па чак и онда кад се тражи само приближна вредност те вероватноће.

Овде ће бити показано *како се за* $\alpha_{2n}$ *може одредити један довољно узак размак у коме се та вредност насигурно налази.*

То ће се учинити помоћу једне двоструке неједнакости до које је дошао Чебишев и која је оваквог облика:

За ма какво позитивно $m$ је

$$\lambda(m) < m! < \mu(m), \tag{13}$$

где су $\lambda(m)$ и $\mu(m)$ функције броја $m$ дате обрасцима

$$\begin{aligned} \lambda(m) &= 2{,}50 \cdot m^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{-m}, \\ \mu(m) &= 2{,}53 \cdot m^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{-m} \cdot e^{\frac{1}{12m}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Применивши образац на израз (10), налази се да је

$$L_1(n) < \alpha_{2n} < L_2(n), \tag{15}$$

где је

$$L_1(n) = h_1 \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{6n}}, \tag{16}$$

$$L_2(n) = h_2 \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{24n}}, \tag{17}$$

где су $h_1$ и $h_2$ бројне константе чије су вредности

$$h_1 = \frac{2,50}{(2,53)^2}\sqrt{2} = 0,5523\ldots, \tag{18}$$

$$h_2 = \frac{2,53}{(2,50)^2}\sqrt{2} = 0,5725\ldots. \tag{19}$$

Тако се, нпр. налази да је за 50 удара ($n = 25$)

$$0,10974\ldots < \alpha_{50} < 0,11469\ldots, \tag{20}$$

а за 100 удара ($n = 50$)

$$0,07785 < \alpha_{100} < 0,08103. \tag{21}$$

Размак је, као што се види, довољно узак и за праксу довољан.

Применом неједначина (20) долази се, нпр. до овога резултата:

1. – Вероватноћа да ће се најдаље до 50-ог удара закључно имати једна равнотежна фигура, има за вредност

$$0,88531 < s_{50} < 0,89026, \tag{22}$$

тако да се може узети да је

$$s_{2n} = 0,88531 + \theta \cdot 0,00495. \quad 0 < \theta < 1. \tag{23}$$

Ако се узме $s_{2n} = 0,88873$ грешка је мања од 0,00247, тј. мања од $3\,^{00}\!/\!_{00}$.

2. – Вероватноћа да се у току од 50 узастопних удара неће имати ниједна равнотежна фигура, има за вредност

$$0,10974 < s'_{2n} < 0,11469, \tag{24}$$

тако да се може узети да је

$$s'_{50} = 0,10974 + \theta \cdot 0,00495. \tag{25}$$

Као што се види, вероватноћа да ће се имати бар једна равнотежна фигура више но $7\,\frac{1}{2}$ пута је већа од оне да се неће имати никаква таква фигура. Према томе:

Ако играч $A$ при добитку има да добије по 1 свој улог, играч $A'$ треба, кад он буде добио, да добије бар $7\,\frac{1}{2}$ пута свој улог.

Ово што претходи даје и идеју о томе колико је тачно уверење које постоји код играча на рулети, да има сигуран начин на који ће играч, нпр. у току једнога дана, играјући непрестано по један улог на једну од двеју могућности, нпр. на парно, бити у добитку за један свој улог. Играч резонује овако: ако од почетка игре почне губити, пошто не може непрестано преовлађивати непарно, јер обе могућности имају исту вероватноћу $\frac{1}{2}$, то мора једанпут наступити тренутак кад ће се број парних и непарних међу собом изједначити, а затим преовладати парно бар за јединицу; у томе тренутку играч је у добитку за један улог, па треба онда да прекине игру.

Међутим, по рачуну вероватноће ствар стоји овако:

Вероватноћа да ће се у $2n$ узастопних удара имати бар једанпут равнотежа између парног и непарног износи

$$s_{2n} = 1 - \alpha_{2n}.$$

Ако равнотежа одиста буде постигнута за то време, потребно је још да одмах после тога буде још један удар у корист парнога, за шта је вероватноћа $\frac{1}{2}$. Да би, дакле, играч био у добитку за један улог, потребно је да се десе два догађаја потпуно независна један од другога: 1. да се појави једна равнотежна фигура; 2. да после ње испадне парно. За први догађај вероватноћа је $s_{2n}$, а за други $\frac{1}{2}$. Вероватноћа да се они оба десе, је

$$q_{2n} = s_{2n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-\alpha_{2n}}{2}.$$

Пошто је

$$0 \le \alpha_{2n} < 1, \quad \text{то је} \quad q_{2n} \le \frac{1}{2},$$

где једнакост постоји само за $n = 1$, тј. за први удар, и за $n = \infty$. За све остале вредности $n$ вероватноћа $q_{2n}$ је мања од $\frac{1}{2}$, тј. вероватније је да играч неће бити у добитку, него да хоће.

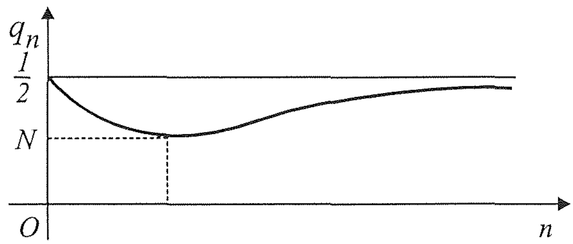
Нпр. да ће у току 50 удара, ако изгуби на првоме удару, играч бити бар једанпут у добитку, вероватноћа лежи у размаку између

$$0{,}4426 \quad \text{и} \quad 0{,}4451,$$

а да неће бити у добитку вероватноћа лежи између

$$0{,}5548 \quad \text{и} \quad 0{,}5574.$$

Крива линија што представља вероватноћу $y = q_{2n}$,




*Слика 1.*

као функцију броја $n$ има облик означен сликом, са једним минимум $N$.**

** Приметимо, да је о теорији вероватноће у Петровићевом делу писао Стеван Стојановић: *Феноменолошко пресликавање у теорији вероватноће*, Дијалектика 3 (1968), 2, стр. 51–58 (пр. Д. Т.).

# ПРИМЕЊЕНА МАТЕМАТИКА

# МЕХАНИКА

## РЕШЕЊЕ ПРОБЛЕМА ТРИЈУ ТЕЛА*

Основни проблем небеске механике састоји се, као што се зна, у томе да се, знајући стање сунчаног система (положаје и брзине тела што га састављају) у једноме датом тренутку (почетне погодбе при кретању система), одреди рачуном стање система у једноме, ма коме, тренутку у току његовог кретања. Проблем је знатно упрошћен тиме што се, за главни циљ небеске механике, тела могу сматрати као материјалне тачке у којима су концентрисане масе тих тела. Математичка основица за његово решење нађена је у Њутновом закону универзалне гравитације, према коме се материјалне тачке, две и две, међу собом привлаче тако да је привлачна сила у свакоме тренутку пропорционална масама тих тачака, а обрнуто пропорционална квадрату њиховог међусобног растојања. Са таквом основицом проблем постаје математички потпуно одређен и јавља се у овоме облику: проучити кретање једнога система од $n$ материјалних тачака које се међусобно привлаче по Њутновом закону гравитације (*проблем* n *тела*).

За $n = 2$ решење је проблема врло просто, и оно је одмах нађено још од оних који су га били и поставили. Математичка анализа показује да се у томе случају релативна путања једне тачке око друге своди на један конични пресек, чија се жижа налази у тој другој тачки; положај тачака на тим путањама и њихове брзине могу се израчунати за сваки дати тренутак.

Међутим, за $n$ веће од 2 показало се одмах да проблем задаје несавладљиве тешкоће. И сам најпростији такав случај: *проблем трију тела*, који је, због занемарљивости једних маса у сунчаном систему наспрам других, и због незнатних утицаја врло удаљених маса, баш од највећег интереса за практичне циљеве у небеској механици, за коју би био велики напредак кад би се могао потпуно проучити утицај ма и само двеју препондерантних маса на трећу посматрану масу, остао је у

---

* Српски књижевни гласник, Београд, 1913, t. XXXI, 10, стр. 747–756.

току векова нерешљив. На њему су, почевши од Њутна, највећи математичари: Ајлер, Лаплас, Лагранж, Поасон, Гаус, Јакоби, Бертран, Поенкаре и други окушавали снагу, али се нису његовом тачном и потпуном решењу ни приближили. Са једнога по једног од проблема са репутацијом да су веома тешки или несавладљиви, скидана је копрена која им је заклањала решење; један по један од њих попуњавао је празна места у регистру онога до чега је допрло људско сазнање; али проблем трију тела остајао је увек непомичан и неприступан ни најмоћнијим средствима математичке анализе.

Немогућно је овде улазити у дубље појединости разлога који су проблем чинили несавладљивим. Они не леже у немогућности да се проблем стави у једначине, који је посао већ давно и давно потпуно свршен; они су у томе што је из тих једначина немогућно одредити тачне вредности оних непознатих које се траже, а чије познавање, као функција времена, дефинише стање система у коме се хоће тренутку. Математички казано: немогућно је експлицитно и тачно интегралити диференцијалне једначине на које је проблем сведен, а које су таквог облика и структуре да су све досадашње методе за интеграцију немоћне да из њих извуку потребне интеграле у којима се састоји решење проблема трију тела, а који би дефинисали координате тачака као функције времена. Та немогућност, међутим, не лежи у самој природи ствари; интеграли постоје, само су они скривени у диференцијалним једначинама проблема, и рачунски елементи и операције, којима се данас располаже, нису довољно генерални да би се могли применити и на једначине проблема трију тела и њиховим комбинацијама у ограниченом броју немогућно је изразити те интеграле у тачном и експлицитном облику. Факт је, од прилике, сличне врсте оној које је и елементарни факт: да се логаритам једнога целог броја не може изразити, ни израчунати помоћу ограниченог броја елементарних рачунских операција са целим бројевима (сабирања, одузимања, множења, дељења, степеновања и кореновања); тај логаритам, међутим, постоји и до њега доводи једна од најпростијих трансцендентних рачунских операција. Тако исто и немогућност интеграције диференцијалних једначина проблема трију тела ваља схватити као немогућност да се данашњим рачунским инструментом извуче из једначине оно што се тражи, а да проналазак каквога новога рачунског елемента, какве нове рачунске операције, о каквима се за сад и не слути, може у часу учинити проблем потпуно решљивим.

У томе погледу тачно, експлицитно решење проблема трију тела није много одмакло од онога места на коме је стајало пре толико деценија. Али је за то учињено великих напредака у другим правцима, којима је, или бачена нова светлост на природу и тешкоће проблема, или су се успеле задовољити бар извесне практичне потребе за астрономска израчунавања.

Тако, нађено је партикуларних решења проблема трију тела, то јест потпуних решења проблема за поједине нарочите специјалне случајеве. Лагранж је, на пример, потпуно проучио случај кад су растојања трију тачака непрестано у константној међусобној пропорцији за све време кретања, и нашао да се у томе специјалном случају такве три тачке непрестано налазе на теменима једнога равностраног троугла, или да су непрестано на једној правој линији, према томе какве су почетне погодбе при кретању.

Поенкаре је за врло генералне случајеве проблема нашао тakozвана *периодична* и *асимптотна* решења. Периодична решења истичу на видик периодичност међусобних положаја тачака у кретању, то јест факт да се тачке по истеку једнога сталног, одређеног размака времена увек нађу у једноме истом међусобном положају. Асимтотна решења показују да се путање тачака, по истеку једнога довољно дугог размака времена, све више и више приближују оним путањама које су одређене периодичним решењима проблема. Од интереса је навести, да у општем случају, поред свега тога што је егзистенција периодичних решења несумњива, она ни до данас није потпуно доказана. Сам Поенкаре, пред крај свога живота, учинио је један покушај да то докаже, али је у његовом доказу остало празнина, које ће се можда, ускоро попунити.

Трагајући у другим правцима, поједини математичари су успели истаћи на видик неколике негативне резултате, који бацају светлост на аналитичку природу општега и потпуног решења проблема трију тела. За практичне астрономске потребе, као и уопште у свима проблемима небеске механике, у којима се, бар у првој апроксимацији може задовољити и са познавањем кретања за време једнога ограниченог размака времена, постоје разноврсне приближне методе, које са практички довољном прецизношћу дају све количине, потребне за познавање кретања, као функције времена. Те количине у данашњој небеској механици добијају се у облику тригонометријских бескрајних редова, у којима време фигурише под знаком синуса или косинуса и који конвергирају за све вредности времена у једноме ограниченом размаку времена, но ипак довољно пространом за данашња обична практична астрономска приближна израчунавања.

Међутим, ти редови са огранченом конвергенцијом, као и све што је до сад нађено у проблему трију тела, не допуштају предвиђање појединости кретања у једноме дугоме размаку времена, а још мање допуштају то предвиђање за сваки дати тренутак, док време поступно расте од $-\infty$ до $+\infty$. Они се не могу сматрати као математичко решење проблема, у коме се тражи да се координате, што дефинишу међусобне положаје трију тела, изразе као експлицитне функције времена, које би одређивале те координате за вечита времена то јест за све могућне реалне вредности времена. Ти тригонометријски редови имају се сматрати само као провизорна приближна решења, којима се астрономи, у недостатку тачног и потпуног решења, могу само привремено задовољити. Сви покушаји да се координате трију материјалних тачака изразе као функције времена, у облику редова који би конвергирали за све могуће вредности времена, остајали су безуспешни. Једна од главних сметњи за формацију таквих редова помоћу средстава које пружа данашња математичка анализа јесте неизвесност, која се никако није могла отклонити, у погледу могућности судара двеју од те три материјалне тачке, или свих трију уједанпут, и у погледу пертурбације које би судар унео у кретање система. Математички казано: нису се могли предвидети тренуци судара, који би извесно имали бити сингуларитети функција што одређују координате трију тачака, нити се могла сазнати аналитичка природа тих сингуларитета за функцију на коју се односе. А зна се у математичкој анализи, да облик реда, у који се може развити једна функција за све вредности независно променљиве количине, зависи на првом месту од аналитичке природе њених сингуларитета.

После великих напора Поенкареових да се приближи решењу, који су истина, расветлили поједине тачке у томе вековном аналитичком проблему, али ипак нису довели циљу што се има пред очима, проблем се трију тела, и у овоме погледу у коме је овде реч, то јест схваћен као проблем изражавања међусобних положаја посматраних трију материјалних тачака помоћу бескрајних редова, конвергентних за све реалне вредности времена, почео сматрати као нерешљив помоћу средстава којима располаже данашња математичка анализа. Један од најкомпетентнијих познавалаца тога питања, француски математичар и директор париске опсерваторије Тисран, у своме великом делу *Mécanique céleste* (том IV) тврди, на пример, ово: „тачно решење проблема трију тела није се још од Лагранжа, помакло напред и може се тврдити да је оно и немогућно“. Под тачним решењем проблема Тисран је подразумевао онакво решење о каквом је овде реч, то јест експлицитно решење помоћу бескрајних редова конвергентних и употребљивих за све реалне вредности времена. На тај начин створено уверење о нерешљивости проблема данашњим рачунским инструментом и учинило је да су га се математичари у последње време нерадо прихватили и да је он одбијао чак и оне који су по области свога рада и математичкој ерудицији били најпозванији да се о њему баве.

*

Тако је стајала ствар до пре неколико месеца, кад се десио један неочекивани случај, коме тешко да има равна у историји наука и који је целу ствар одједанпут и из основа изменио. Прелиставајући један, не баш тако познати и врло мало распрострањени, математички часопис („Acta Societatis Scientiarum Fennicae“, публикацију Финскога друштва за науку у Хелзингфорсу) француски математичар и професор на Сорбони Емил Пикар, пуким случајем, запази у њему једну математичку расправу, која му одмах привуче пажњу и пред којом застаде изненађен. У тој расправи, која је још од 1906. године, Пикар је, на своје велико изненађење, нашао на још 1906. године решен проблем трију тела, чије је решење, свршено обичним средствима математичке анализе, у томе маломе часопису стајало за толико година скривено, а о чему нико, осим самога аутора расправе, није ни слутио. Аутор је расправе Сундман, астроном опсерваторије у Хелзингфорсу, до пре неколико месеци потпуно непознат у круговима истраживача на пољу математике. Своје решење проблема саопштио је први пут 17. децембра 1906., а затим 18. јануара 1909. године Финскоме Научном Друштву, и на томе је ствар и остала све док поменутим случајем није дошло до сазнања Пикара, чијом је иницијативом одмах изашла у ширу јавност. Саопштивши одмах Сундманово решење Париској академији наука, и учинивши да сам аутор понова и у дубљим појединостима изложи своје рачуне, овога пута у великоме и угледном математичком часопису Acta mathematica (t. XXXV), Пикар је учинио да решење проблема, које је могло још годинама лежати незапажено у маломе финском часопису, добије најширу публикацију и допре до сазнања оних који су позвани да се о њему баве и који би, незнајући да је престала потреба трагати више у томе правцу, узалуд и од сада трошили на то своје снаге.

Овде ће у најкраћим потезима бити изложени главни моменти Сундмановог решења проблема трију тела, и то, разуме се, само утолико уколико га је могућно ослободити чисто математичке одеће и аналитичких формула у којима се оно поглавито и састоји, а којима није место у оваквоме једном прегледу.

Поенкаре је показао 1886. године у најопштијем случају тога проблема, без икаквих претпоставака о релативним величинама маса које се међусобно привлаче, (али претпостављајући само то да никако нема судара у систему), да се координате трију тачака могу израчунати у облику бескрајних редова, уређених по степенима једне извесне количине, која зависи од времена, и која расте од $-1$ до $+1$ за време док време расте од $-\infty$ до $+\infty$. Редови су конвергентни и били би употребљиви за све могуће реалне вредности времена. Али, оно што им потире сваку вредност, чинећи им немогућном употребу у аналитичким спекулацијама или практичним израчунавањима, био је факт да се ничим не може гарантовати за немогућност судара нити се могу тачно или приближно предвиђати тренуци кад судар може наступити. Осим тога, баш и да се могу предвиђати тренуци судара, судар двеју или свих трију маса у систему уноси у кретање пертурбације које се помоћу Поенкареових редова нису могле предвиђати, и од таквог једног тренутка ти редови сасвим губе своју употребљивост и сам свој смисао. То је и навело Поенкареа да, излажући своје рачуне, изјави да и сам не верује да ће његови редови моћи бити од користи у небеској механици.[1]

Главна ствар у Сундмановим истраживањима било је, пре свега, питање о могућности судара и затим тражење бескрајних редова за израчунавање координата трију тачака за вечита времена, то јест, тражење таквих редова који не би губили свој смисао и своју употребљивост ни после судара, па било да је број судара ограничен или неограничен.

У погледу питања о могућности судара, Сундман је нашао, да изузимајући само један врло специјалан случај, о коме практички не треба ни рачуна водити, судар је свих трију тачака одједном уопште немогућан. Али су за то могућни делимични судари између двеју маса и такви су баш судари били оно пред чиме се застајало у свима досадашњим истраживањима о проблему о коме је реч, а што је дало повода горњој Поенкареовој изјави. Сундман, међутим, није застао пред том препоном. Имајући пред очима факт, познат у данашњој општој теорији функција, о такозваном аналитичком продужавању функција, према коме сингуларитети функција, кад им се зна аналитичка природа, нису никаква сметња за ширење области у којој функција има смисла, Сундман је поставио себи за задатак да примени методе модерне теорије функција и теорије диференцијалних једначина на одређивање улоге, коју моменат судара, сматран као сингуларитет интеграла тих једначина, игра према овим интегралима, сматраним као функције времена. Резултат истраживања, које је са потпуним успехом до краја извео, био је тај, да поменути моменти играју према интегралима проблема улоге алгебарских критичких сингуларитета трећега реда. Помоћу тога основног резултата, до кога је одиста било врло тешко доћи, а који одједном отклања све препоне пред којима се дотле морало стати, било је сад лако, данашњим аналитичким методама, формирати бескрајне

[1] О Поенкареовим доприносима погледати Петровићев чланак *Француска математика* у овој књизи (пр. Д. Т.).

редове у облику којих ће се изразити интеграли проблема, то јест, девет координата трију материјалних тачака у проблему, и који ће бити употребљиви за све реалне вредности времена. Сундман је то одмах и урадио, и редови, које је он на тај начин нашао за изражавање координата тачака у проблему, потпуно задовољавају све оно што се тражило од тачног решења проблема трију тела у смислу у коме се оно данас тражи: они дају свих девет координата трију материјалних тачака што се међусобно привлаче по Њутновом закону, у облику бескрајних редова, уређених по степенима једне количине која се и сама мења у току времена по једноме познатом закону; редови су конвергентни за све реалне вредности времена и према томе употребљиви за изражавање тих координата за вечита времена, па ма какве биле почетне погодбе при кретању.

Тиме је први пут добио своје решење један од великих проблема природне философије, који је у току више од два века задржавао и највеће математичаре, у коме су узалуд окушавана и најмоћнија средства математичке анализе и за који је већ изгледао да ће морати чекати можда још који век, док се не нађе какав нов аналитички инструменат, о коме се данас не може ни слутити, па да и он од овога добије своје решење. И као што се више пута дешавало у сличним приликама, сад, кад се има решење проблема и кад су познате појединости начина на који су савладане до сад несавладљиве тешкоће у њему, видело се да поједини математичари, који су пре Сундмана покушавали решити исти проблем, нису били баш тако далеко од решења, да су већ наилазили на неке од Сундманових основних резултата, али да, или им нису тачно схватили улогу коју су ови били позвани да играју у дефинитивном решењу проблема, или се дешавало да ни један од тих Сундманових претходника није имао све те резултате у једанпут, а да ови, изоловани од других и сваки за себе, нису били у стању довршити проблем. Сад се, на пример, зна да је немачком математичару Вајерштрасу био познат факт (или да га је бар наслутио) да тренутак судара игра улогу алгебарског критичког сингуларитета трећег реда; то се види тек сада из једнога приватног Вајерштрасовог писма писаног 1889. године шведском математичару Митаг-Лефлеру, а публикованог тек на неколико година после Сундманове публикације о проблему трију тела; Вајерштрас у томе писму, на једноме месту где додирује то питање, узгред помиње поменути факт, који је основица Сундмановом решењу, али оставивши га без доказа. Са друге стране, кад се редови, у облику којих Сундман решава проблем, упореде са онима на које је у својим истраживањима наишао Поенкаре 1886. године, о којима је напред било речи и у чији велики интерес за небеску механику, као што је поменуто, није ни он сам веровао, види се да су врло сличног облика и да је Поенкаре, и не слутећи о томе, био близу правог решења. Од последњег, дефинитивног корака ка решењу проблема задржао га је поменути факт: да се не може гарантовати за немогућност судара и да се ништа не може казати о томе на који би начин нађени редови били измењени после судара, чија се ни могућност ни немогућност није могла предвиђати. Као што је наведено, Сундман је успео да отклони обе те тешкоће и одмах се тиме користио да решење проблема приведе крају.

Да ли је Сундмановим решењем проблем трију тела исцрпен и скинут са дневног реда у небеској механици и математичкој анализи? Да ли је то решење последња реч која се о њему имала рећи и после које би била беспослица трагати више у томе правцу? Свакако, да то неће бити и да је далеко од тога. Сундманови бескрајни редови имају за себе једну, са гледишта чисте математичке анализе, ненадмашно добру страну: конвергенцију за све реалне вредности времена, што се у чистој математици сматра за савршенство. Али, њима недостаје нешто што је од интереса и важности како за математичку анализу, тако и за конкретне потребе небеске механике. Познато је у анализи колико су редови, уређени по степенима једне променљиве количине, мало подесни за проучавање тока функције коју они представљају, а нарочито за проучавање квантитативних и квалитативних појединости тих функција, као што су: периодичност, симетрије, асимтотне вредности, осцилаторни карактер и промене осцилаторних амплитуда итд. Осим тога, показало се да је немогућно из тих редова извести она партикуларна решења проблема, која су још раније нађена, нити се они могу ма у колико упростити хипотезом, која је остварена у доста великом броју специјалнијих конкретних проблема небеске механике: да је једна од трију маса веома мала наспрам осталих двеју или да је једна од њих јако препондерантна. Очевидно је да је све што се до данас зна о проблему трију тела, садржано већ у Сундмановом решењу, пошто је ово опште и не претпоставља никакве специјалне погодбе; али од самога тога факта, па до могућности да се он истакне на видик из самих Сундманових редова, читава је провала. Тај велики недостатак немају, међутим, обични тригонометријски редови, у облику којих се данас приближно израчунавају тражене количине у небеској механици, и у којима се, поред свеколике њихове несавршености, дивергенције и ограничене употребљивости, саме собом истичу на видик поменуте квалитативне и квантитативне појединости, партикуларна решења за поједине специјалне случајеве, упрошћена због незнатности појединих маса, итд. Остаје, дакле, отворено једно широко поље за тражење нових решења, која би, такође, имала бити карактерисана неограниченом конвергенцијом, а не би имала поменуте недостатке *Сундмановог* решења.

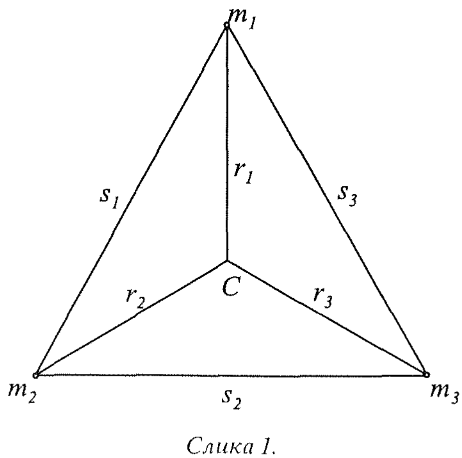
При свем том, и у свакоме случају, Сундманово решење проблема трију тела представља са гледишта чисте математичке анализе, по својој генералности и неограниченој конвергенцији, једно савршенство, и оно је у томе погледу до данас једино такво решење проблема. Са тога гледишта, оно несумњиво чини епоху у историји тога проблема, јер је оно у исто време и једино решење, за које се може тврдити да обухвата ток појаве за вечита времена.

# ПРИМЕДБА О ПРОБЛЕМУ ТРИЈУ ТЕЛА*

Један од два позната специјална случаја кад се проблем трију тела може решити у елементарно-коначном облику, је онај кад се три масе, што се међусобно привлаче, налазе на теменима равностраног троугла.

Показано је већ у једном од ранијих бројева у овоме листу[1] како се основне јединице, које у поменутоме специјалном случају решавају проблем кретања трију маса око њиховог заједничког средишта, могу извести елементарно-геометријским путем.

Примедба, која је предмет овог саопштења, односи се на то решење проблема и допуњује у рачунском погледу, а на врло елементаран начин, резултате поменуте г.г. аутора. А ово саопштавам сматрајући да, кад су у теорији проблема од интереса специјални случајеви што се односе на распоред маса у простору, свакако, могу бити од неког интереса и случајеви што се односе на њихове релативне величине.




*Слика 1.*

Означимо са:

1. $$s = s_1 = s_2 = s_3$$

дужине страна равностраног троугла маса $m_1, m_2, m_3$;

2. $$r = r_1 = r_2 = r_3$$

одстојање маса од заједничког им средишта $C$;

3. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ резултујућа убрзања трију маса у правцима $r_1, r_2, r_3$;

4. $k$ фактор пропорционалности убрзања маса;

---

* Гласник Југословенског професорског друштва, Београд, 1935, t. XVI, 3, стр. 241–252.

[1] А. Билимовић и Бран. Петронијевић, *Прилог решењу проблема трију тела*, Гласник Југословенског професорског друштва, књ. XV, св. 10, Јуни 1935 г.

5. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ хомогене функције маса,

$$\lambda_1 = m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2$$
$$\lambda_2 = m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2$$
$$\lambda_3 = m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2$$

6. $\mu$ тоталну масу система

$$\mu = m_1 + m_2 + m_3 .$$

Поменута г.г. аутори су елементарно-геометријским путем извели једначине

$$(1)\qquad \begin{aligned} s_1 &= \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_1}} r_1, & s_2 &= \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_2}} r_2, & s_3 &= \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_3}} r_3; \\ \gamma_1 &= \frac{k\lambda_1^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} \frac{1}{r_1^2}, & \gamma_2 &= \frac{k\lambda_2^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} \frac{1}{r_2^2}, & \gamma_3 &= \frac{k\lambda_3^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} \frac{1}{r_3^2}. \end{aligned}$$

Кад се имају пред очима ти обрасци, намеће се питање: да ли се може казати шта општије кад постоје какви нарочити односи између величина трију маса које се привлаче?

Најопштији би случај те врсте био онај кад између маса постоји једна релација

$$(2)\qquad F(m_1, m_2, m_3) = 0 .$$

Функција $F$ би очевидно морала бити хомогена, јер би се, иначе релација мењала са мењањем јединица мера, што не сме бити. Али, ни једна од таквих релација (2) не елиминира из образаца за одстојање $r$ и убрзања $\gamma$ све три масе $m_1, m_2, m_3$; једна од тих маса увек ће остати да фигурише у поменутим обрасцима, а то чини да је о $r$ и $\gamma$ немогуће рећи нешто опште, што не би захтевало познавање ни једне од трију маса.

Међутим, оно што се увек може учинити кад постоји ма каква релација (2) између величина трију маса, јесте то: *да се одреде размаци могућних варијација количника* $\frac{r}{s}$ *и убрзања* $\gamma$, *а која одредба не захтева познавање појединачних маса.*

Тако, кад се стави да је

$$\frac{m_2}{m_1} = x, \quad \frac{m_3}{m_1} = y;$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\mu} = z_1, \quad \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\mu} = z_2, \quad \frac{\sqrt{\lambda_3}}{\mu} = z_3$$

(према чему су $z_1, z_2, z_3$ апсолутни бројеви, независни од јединица мера за масе), добија се да је

$$(3) \qquad \begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{1+x+y}, \\ z_2 &= \frac{\sqrt{1+y+y^2}}{1+x+y}, \\ z_3 &= \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+y}, \end{aligned}$$

чему кад се придода релација (2), која постаје

$$(4) \qquad F(1,x,y)=0,$$

$z_1, z_2, z_3$ се јављају као функције само једне независно променљиве количине, нпр. $x$. Свака од тих трију функција има по једну доњу и по једну горњу границу својих могућних варијација за позитивне вредности $x$ и $y$, па би се, одредивши ове, тада имале и границе за варијације вредности

$$(5) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{\lambda_1^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} = \mu z_1^3, \\ u_2 &= \frac{\lambda_2^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} = \mu z_2^3, \\ u_3 &= \frac{\lambda_3^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} = \mu z_3^3. \end{aligned}$$

Одређивање доњих и горњих граница за $z_1, z_2, z_3$ може се вршити или по обичним правилима за одређивање максимума и минимума функција што зависе од једне променљиве количине $x$, или на друге које начине познате у општој теорији бројних размака.

Овде ће бити наведен који случај ове последње врсте.

Уочимо случај кад је једна од трију маса геометријска средина других двеју, тако да је, нпр.:

$$(6) \qquad m_1^2 = m_2 m_3.$$

Тада је

$$xy = 1, \quad y = \frac{1}{x},$$

па израз $z_1$ постаје

$$z_1 = \frac{\sqrt{1 + x^2 + \dfrac{1}{x^2}}}{1 + x + \dfrac{1}{x}}. \tag{7}$$

Познато је да за све позитивне вредности $a, b, c$ вредност израза

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a + b + c},$$

лежи у размаку између[1]

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5774\ldots \quad \text{и} \quad 1,$$

па је, дакле

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\theta,$$

где је $\theta$ један број који лежи између 0 и 1. Па пошто је

$$s_1 = \frac{r_1}{z_1},$$

то следује став:

I. *Кад је троугао распореда трију маса равностран, а једна од маса је геометријска средина других двеју, за одговарајуће одстојање масе од средишта* C *важи образац*

$$\frac{r}{s} = 0,5774 + 0,4226\,\theta, \quad 0 < \theta < 1$$

са 4 децимала тачно.

А из образаца (5) види се да одговарајућа вредност $\mu_1$ лежи између бројева

$$\frac{\mu}{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu}{\sqrt{27}} = 0,1924\ldots \quad \text{и} \quad \mu,$$

тако да је

[1] Ово се једноставно добија из познате раније наведене Петровићеве неједнакости за позитивне конвексне функције (пр. Д. Т.).

$$u_1 = \frac{\mu}{\sqrt{27}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{27}}\right)\theta\mu, \qquad 0 < \theta < 1,$$

па пошто је

$$\gamma_1 = \frac{ku_1}{r_1^2},$$

то следује став:

II. *Кад су испуњене погодбе става I, за резултујуће убрзање одговарајуће масе у правцу њеног одстојања од средишта* C *важи образац*

$$\gamma = (0,1924 + 0,8076\,\theta)\frac{k\mu}{r^2}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

А пошто је

$$r_1 = z_1 s_1,$$

то кад се убрзање $\gamma$ изрази помоћу стране $s$ троугла распореда маса, добија се

$$\gamma_1 = \frac{k\mu z_1}{s^2},$$

из чега следује овај став:

III. *Кад су испуњене погодбе става I, за резултујуће убрзање* $\gamma$ *одговарајуће масе важи образац*

$$\gamma = (0,5774 + 0,4226\,\theta)\frac{k\mu}{s^2}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

*

Назовимо троуглом (Г) сваки троугао чија је једна од трију страна геометријска средина других двеју. Такви троуглови имају интересантне геометријске особине које би било вредно нарочито разрадити. А уколико се, у вези са њима, тиче механичког проблема који се овде има у виду, могу се доказати ови ставови:

IV. *Кад је троугао распореда маса равностран, а величине маса образују један троугао* (Г), *за одстојање одговарајуће масе од средишта* C *важи образац*

$$\frac{r}{s} = 0,5774 + 0,1296\,\theta, \qquad 0 < \theta < 1.$$

То је последица геометријског става по коме, кад су $a, b, c$ стране једног (ма каквог) троугла, количник

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a+b+c},$$

лежи у размаку између бројева

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Према томе је

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\theta, \qquad 0 < \theta < 1,$$

а из тога и обрасца

$$r_1 = z_1 s_1$$

следује став IV.

V. *Кад су испуњене погодбе става IV, за резултујуће убрзање* $\gamma$ *важе обрасци*

$$\gamma = (0{,}1924 + 0{,}1611\,\theta)\frac{k\mu}{r^2}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$\gamma = (0{,}5774 + 0{,}1296\,\theta)\frac{k\mu}{s^2}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Јер је

$$\gamma_1 = \frac{ku_1}{r_1^2} = \frac{k\mu z_1}{s_1^2},$$

где је

$$u_1 = z_1^3,$$

а $z_1$ се налази у размаку између бројева (8), што значи да се $u_1$ налази у рамаку између бројева

$$\frac{1}{\sqrt{27}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{8}}$$

из чега непосредно следује став V.

*

Уочимо сад општи случај кад маса $m_1$ није тачно геометријска средина других двеју маса $m_1$ и $m_2$, већ да постоји одступање $\delta$, тако да је

$$m_2 m_3 = m_1^2 + \delta .$$

Тада, ако се, краткоће ради, стави да је

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = M$$

биће

$$\lambda_1 = M + \delta ,$$

па, дакле

$$z_1 = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\mu} = \frac{\sqrt{M}}{\mu}\sqrt{1+\frac{\delta}{M}} .$$

Па пошто се, за ма какве $m_1, m_2, m_3$, вредност $M$ налази у размаку између вредности

$$\frac{\mu^2}{3} \quad \text{и} \quad \mu^2 ,$$

то ће се апсолутан број

$$\tilde{\omega} = \sqrt{1+\frac{\delta}{M}}$$

налазити у размаку између вредности

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{1+\frac{\delta}{\mu^2}} \quad \text{и} \quad \tilde{\omega}_2 = \sqrt{1+\frac{3\delta}{\mu^2}} .$$

А како се апсолутан број $\frac{\sqrt{M}}{\mu}$ налази у размаку између вредности $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и 1, то ће се $z_1$ налазити између апсолутних бројева $\frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{3}}$ и $\tilde{\omega}_2$, па је, према томе

$$z_1 = \frac{\tilde{\omega}_1}{\sqrt{3}} + \left(\tilde{\omega}_2 - \frac{\tilde{\omega}_1}{\sqrt{3}}\right)\theta, \qquad 0 < \theta < 1 .$$

Помоћу тога обрасца за $z_1$ добија се и одговарајући му образац за

$$u_1 = \mu\, z_1^3 ,$$

и ти обрасци, уведени у рачун, доводе до размака у којима ће се, у општем случају, кретати вредности количника $\frac{r}{s}$ и убрзања $\gamma$. *Ти су размаци изражени помоћу тоталне масе система и одступања* $\delta$ *од геометријске средине, и не захтевају познавање појединачних маса* $m_1$, $m_2$, $m_3$.

Ако се, при томе, унесе и погодба да величине трију маса које се међусобно привлаче, образују један троугао, *ти се размаци могу још сузити*. У томе случају $M$ лежи између вредности

$$\frac{\mu^2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{\mu^2}{2},$$

па даље број $\tilde{\omega}$ лежи између бројева

$$\rho_1 = \sqrt{1+\frac{2\delta}{\mu^2}} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \tilde{\omega}_2 = \sqrt{1+\frac{3\delta}{\mu^2}},$$

па ће се $z_1$ налазити у размаку између апсолутних бројева

$$\frac{\rho_1}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \frac{\rho_2}{\sqrt{2}},$$

тако да ће бити

$$z_1 = \frac{\rho_1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{\rho_2}{\sqrt{2}} - \frac{\rho_1}{\sqrt{3}}\right)\theta, \qquad 0 < \theta < 1,$$

Према обрасцима

$$\frac{r_1}{s_1} - z_1, \qquad \gamma = \frac{kz_1^3}{r^2} = \frac{k\mu z_1}{s^2},$$

добијају се тада ставови који, у случају кад су масе распоређене на теменима равностраног троугла, а њихове величине образују један ма какав троугао, прецизирају размаке за $\frac{r}{s}$ и $\gamma$. Одредба таквих размака захтева такође познавање само тоталне масе система и одступање једне од њих од геометријске средине других двеју.

Завршујући, додаћу једну рачунску примедбу о троугловима (Г), о којима је напред била реч.

Сваки равностран троугао је очевидно један троугао (Г). Ни један равнокраки троугао није (Г), јер се из релације

$$a^2 = bc$$

види да кад су две од страна $a, b, c$ троугла међу собом једнаке, и трећа је једнака са њима.

Троугли (Г) могу се, дакле, тражити само међу троугловима чије су стране

$$(9) \qquad a, a+p, a+q, \quad (p<q),$$

где су $p$ и $q$ позитивне дужине.

Међутим, ни страна $a$, ни страна $a + q$ не могу бити геометријске средине других двеју страна, пошто је

$$a^2 > (a+p)(a+q),$$
$$(a+q)^2 > a(a+p).$$

Може, дакле, бити само

$$(a+p)^2 = a(a+q),$$

што захтева да буде

$$a = \frac{p^2}{q-2p}, \tag{10}$$

и према томе да је

$$q > 2p. \tag{11}$$

Са друге стране, пошто збир ма које две од страна (9) треба да је већи од треће стране, тј.

$$2a+p > a+q,$$
$$2a+q > a+p,$$
$$2a+p+q > a,$$

добијају се три условне једначине

$$a > q-p,$$
$$a > p-q,$$
$$a > -(p+q),$$

од којих су последње две саме по себи задовољене, пошто је

$$a > 0, \quad p < q$$

а прва, у вези са једначином (10) захтева да је

$$\frac{p^2}{q-2p} > q-p.$$

Множећи обе стране ове неједначине позитивном количином $q-2p$, добија се условна неједначина

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2 - \frac{3q}{p} + 1 < 0,$$

што захтева да се вредност количника $\frac{q}{p}$ налази између корена квадратне једначине

$$x^2 - 3x + 1 = 0,$$

тј. између бројева

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

А пошто према неједначини (11) треба да је

$$\frac{q}{p} > 2,$$

то мора бити

$$2 < \frac{q}{p} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}618\ldots$$

а из тога следује овај резултат:

*Да би троугао, чије су стране*

$$a, \quad a+p, \quad a+q, \quad (0 < p < q)$$

*био један троугао* (Г), *потребно је и довољно да буде*

$$\frac{q}{p} = 2 + 0{,}6180\,\theta, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$a = \frac{p^2}{q-2p}.$$

Такви би, нпр. били троуглови чије су стране

4, 6, 9 или 9, 12, 16.

У првоме примеру је

$$p = 2, \quad q = 5, \quad a = 4$$

а у другоме

$$p = 3, \quad q = 7, \quad a = 9$$

и горњи су услови задовољени.

# НЕКОЛИКО НОВИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДОПРИНОСА ПРОБЛЕМУ ТРИЈУ ТЕЛА*

У току ове године, професори Универзитета у Београду дали су неке доприносе проблему трију тела, руководећи се идејом да би бар у неким партикуларним случајевима овај проблем требало да *дойусти решења која захтевају само елеменшарна расуђивања, чисшо геомеириjска или алгебарска.*

Диференцијалне једначине проблема трију тела могу се строго интегралити у случају кад међусобна растојања тих тела имају константне односе. Овај случај обухвата следећа два подслучаја: кад три масе образују једнакостранични троугао, и кад оне остају стално на правој линији. То су, као што се зна, једино познати случајеви у којима је проблем трију тела решив.

Прво решење овако поједностављеног проблема, добијено методама елементарне геометрије, потиче од Чернија (1906), али овај аутор третира проблем као проблем релативног кретања две масе око треће. Г. М. Миланковић, са Универзитета у Београду, у својој Небеској механици дао је једно решење овог проблема помоћу векторског рачуна.

Господа А. Билимовић и Б. Петронијевић, такође са Универзитета у Београду, проучавали су проблем кретања три масе око њиховог заједничког центра маса, и то интуитивним и чисто геометријским поступцима, који не захтевају коришћење никакве врсте диференцијалних једначина.[1]

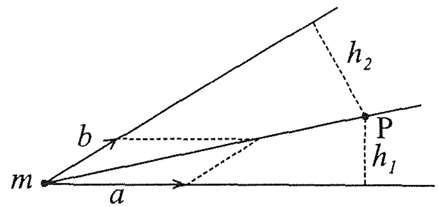
---

* Наслов оригинала: *Quelques contributions élémentaires récentes an problème des trois corps*, Publ. de l'Observatoire astronomique de l'Universite de Belgrade, Belgrade, 1938, t. IV, pp. 53–61.

[1] А. Балимовић и Б. Петронијевић, *Прилог решавању проблема трију тела*, Гласник Југословенског професорског друштва, књ. XV, св. 10, јун 1935.

Помоћу најелементарнијих расуђивања која користе сличност најпре се доказују следеће две кинематичке чињенице, које се односе на кретање једне од три масе привлачене другим двема.

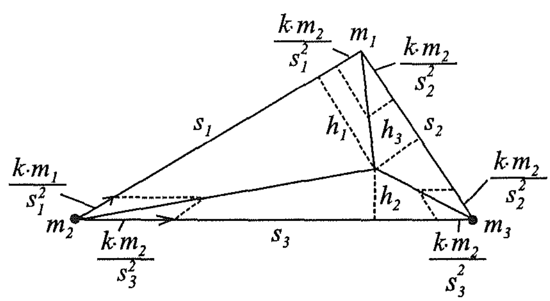
Ако сегменти $a$ и $b$, својим дужинама и својим правцима, представљају убрзања масе $m$ и ако су $h_1$ и $h_2$ дужине нормала спуштених из произвољне тачке $P$ (сл. 1) са правца резултујућег убрзања на правце убрзања $a$ и $b$, тада је




*Слика 1*

$$ah_1 = bh_2.$$

Обрнуто, уколико су $h_1$ и $h_2$ дужине нормала спуштених из произвољне тачке $P$, садржане у углу који образују убрзања $a$ и $b$, на правце тих убрзања и ако су производи $ah_1$ и $bh_2$ једнаки, тада се тачка $P$ налази на правцу резултујућег убрзања.




*Слика 2*

Ово непосредно доводи до следећег става, који се односи на кретање три масе $m_1, m_2$ и $m_3$ које се међусобно привлаче по Њутновом закону гравитације:

I. *Правци резултујућих убрзања три масе смештене у теменима троугла секу се у тачки која се налази у унутрашњости троугла тих маса.*

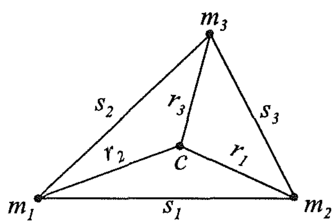
II. *Кад год се, за масе смештене у теменима троугла, правци резултујућих убрзања секу у центру маса, троугао је једнакостранични.*

III. *Кад год се три масе налазе у теменима једнакостраначног троугла, правци резултујућих убрзања пролазе кроз центар маса.*

Г. Б. Петронијевић[2] проширио је ове ставове на случај кад се три масе привлаче по било каквом закону облика

$$F = kr^n,$$

где $F$ означава привлачну силу, $r$ растојање, а $n$ цео позитиван или негативан број различит од јединице. У случају када је $n = 1$ пресечна тачка праваца убрзања обавезно се поклапа са центром маса.




*Слика 3*

Г. В. Жардецки[3], са Универзитета у Београду, установио је да став I важи у општем случају било каквих привлачних или одбојних силе сагласних са принципом једнакости акције и реакције. У случају кад су све силе привлачне или су све оне одбијне, пресечна тачка се налази у унутрашњости троугла; кад их истовремено има и привлачних и одбијних, та тачка је изван троугла.

Нека су:

1. $s = s_1 = s_2 = s_3$ дужине страница једнакостраничног троугла маса $m_1, m_2$ и $m_3$;

2. $r = r_1 = r_2 = r_3$ растојања маса од њиховог центра маса;

3. $\gamma_1, \gamma_2$ и $\gamma_3$ резултујућа убрзања три масе у одговарајућим правцима $r_1, r_2$ и $r_3$;

4. $k$ фактор пропорционалности између убрзања и маса;

5. $\lambda_1, \lambda_2$ и $\lambda_3$ три хомогене функције маса;

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2 \\ \lambda_2 &= m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2 \\ \lambda_3 &= m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2; \end{aligned} \tag{1}$$

6. $\mu$ тотална маса система

$$\mu = m_1 + m_2 + m_3.$$

Господа А. Билимовић и Б. Петронијевић[4] извели су, такође чисто геометријским расуђивањима, следећих шест формула

---

[2] Б. Петронијевић, *Неколико релативних теорема поводом проблема трију тела*, Гласник Југосл. проф. друштва, књ. XVI, св. 8 , 1935.

[3] В. Жардецки, *Поводом једне теореме која се односи на проблем трију тела*, Гласник Југословенског професорског друштва, књ. XVI, св. 1, 1935.

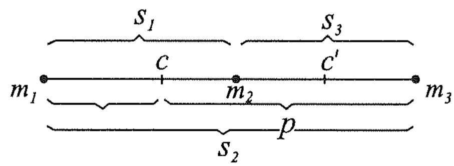
[4] Види наведено.

$$(2) \qquad s_1 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_1}} r_1, \quad s_2 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_2}} r_2, \quad s_3 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_3}} r_3,$$

$$(3) \qquad \gamma_1 = \frac{k\lambda_1^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} \cdot r_1^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_2 = \frac{k\lambda^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} \cdot r_2^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_3 = \frac{k\lambda^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} \cdot r_3^{\frac{1}{2}},$$

које важе у случају када се три масе, смештене у теменима једнакостраничког троугла, узајамно привлаче по Њутновом закону.

На основу формула за убрзања $\gamma_1, \gamma_2$ и $\gamma_3$ лако се доказује да се три масе крећу око заједничког центра маса по конусним пресецима. Ако су ти конусни пресеци елипсе, оне су сличне, али не морају бити подударне. Троугао масе неће престати да буде једнакостраничан у току кретања система; његове стране ће се периодично увећавати или смањивати, а три масе ће истовремено пролазити кроз перихеле и афеле на својим елипсама.




*Слика 4*

У случају кад се три масе које се привлаче по Њутновом закону налазе на истој правој, и када се центар ових маса налази између маса $m_1$ и $m_2$, аутори изражавају резултујуће убрзање $\gamma_1$ масе $m_1$ формулом

$$r_1 = \frac{\left[m_2 + m_3(I+a)\right]^2 \left[m_3 + m_2(I+a)^2\right]}{(m_1+m_2+m_3)^2 (I+a)^2} \cdot \frac{1}{r_1^2},$$

где $r_1, r_2$ и $r_3$ означавају редом растојања маса од центра $C$ ове три масе; затим да је

$\rho$ растојање центра $C'$ две масе $m_2$ и $m_3$ од центра $C$; а

$s_1, s_2, s_3$ су редом међусобна растојања $m_1$ и $m_2$, $m_1$ и $m_3$ и $m_2$ и $m_3$;

$p$ и $q$ су редом растојања $m_2$ и $m_3$ од центра $C'$;

$a$ је вредност, константна или променљива, односа $\frac{s_3}{s_1}$.

Формуле за резултујућа убрзања $\gamma_2$ и $\gamma_3$ маса $m_2$ и $m_3$ биле би:

$$\gamma_2 = k \frac{(m_1 a^2 - m_3)(m_1 - a m_3)^2}{(m_1+m_2+m_3)^2 a^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

$$\gamma_3 = k \frac{\left[m_1(1+a)^2 + m_2 a^2\right]\left[m_1(1+a) + m_2 a\right]^2}{(m_1+m_2+m_3)^2 a^2 (1+a)^2} \cdot \frac{1}{r_3^2}.$$

На основу ових формула лако се закључује да ће трајекторије три масе око њиховог центра бити конусни пресеци; ове масе ће остати стално на правој само ако је $a$ = const, тј.ако се односи њихових растојања од центра $C$ не мењају у току кретања. Кад су трајекторије елипсе, оне ће бити сличне и масе ће пролазити кроз њихове перихеле и афеле.

2. Претпоставимо сада да три масе задовољавају дату нумеричку релацију:

$$F(m_1, m_2, m_3) = 0. \tag{4}$$

Функција $F$ треба да буде хомогена, да би релација била независна од избора јединице мера. У том случају *могуће је одредити интервале варирања убрзања* $\gamma$ *и односа* $\dfrac{r}{s}$ *у току кретања, при чему ти интервали остају исти за све масе које задовољавају релацију* (4).[5]

У том циљу, ставимо

$$\frac{m_2}{m_1} = x, \quad \frac{m_3}{m_1} = y,$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\mu} = z_1, \quad \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\mu} = z_2, \quad \frac{\sqrt{\lambda_3}}{\mu} = z_3;$$

$z_1, z_2, z_3$ ће бити апсолутни бројеви, независи од јединице мере; имаћемо

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}{1 + x + y}, \\ z_2 &= \frac{\sqrt{1 + y + y^2}}{1 + x + y}, \\ z_3 &= \frac{\sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x + y}. \end{aligned} \tag{5}$$

С обзиром на релацију (4) која се може написати у облику

$$F(1, x, y) = 0,$$

величине $z_1, z_2$ и $z_3$ изражавају се као функције само једне променљиве, величине $x$, на пример. Свака од ове три функције има доњу и горњу

[5] Михаило Петровић, *Примедба о проблему трију тела*, Гласник југосл. проф. друштва, књ. XVI, св. 3, 1935.

границу вредности које узима за позитивне вредности промењиве $x$; ове границе ће одредити и границе у којима варирају вредности

$$(6)\qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{\lambda_1^{\frac{3}{2}}}{\mu_2} = \mu z_1^2, \\ u_2 &= \frac{\lambda_2^{\frac{3}{2}}}{\mu_2} = \mu z_2^2, \\ u_3 &= \frac{\lambda_3^{\frac{3}{2}}}{\mu_2} = \mu z_3^2. \end{aligned}$$

Посматрајмо, у својству примера, случај кад је једна од три масе геометријска средина друге две, на пример кад је:

$$m_1^2 = m_2 m_3.$$

Број $z_1$ ће тада бити

$$z_1 = \frac{\sqrt{1_1 + x^2 + \frac{1}{x_2}}}{1 + x + \frac{1}{x}},$$

и за све позитивне вредности $x$ налазиће се између

$$\frac{1}{\sqrt{3}} 0,5774\ldots \quad \text{и} \quad 1;$$

имаће се, дакле,

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\theta,$$

где је неки број између 0 и 1. С обзиром на релацију

$$s_1 = \frac{r_1}{z_1},$$

закључујемо онда следеће:

I. *Кад су три масе смештене у теменима једнакостраничног троугла, имаће се, уколико је једна од њих геометријска средина друге две, у току кретања стално*

$$\frac{r}{s} = 0,5774 + 0,4226\,\theta,$$

где смо се ограничили на прве четири децимале.

Формуле (6) показују тада да се одговарајућа вредност $\mu_1$ налази између

$$\frac{\mu}{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu}{\sqrt{28}} = 0{,}1924\mu \quad \text{и} \quad \mu,$$

одакле се закључује, с обзиром на релацију

$$\gamma_1 = \frac{k\mu}{r_1^2}.$$

следеће:

II. *Кад су испуњени услови става* I, *у току кретања стално је*

$$\gamma = (0{,}1924 + 0{,}8076\,\theta')\frac{k\mu}{r_2}.$$

Најзад, услед релације

$$r_1 = z_1 s_1,$$

која изражава резултујуће убрзање $\gamma$ помоћу стране $s$ једнокостраничног троугла на коме су распоређене масе, имаће се

$$\gamma_1 = \frac{k\mu z_1}{s^2},$$

што доводи до следећег закључка:

III. *Уколико су услови става* I *испуњени, у току кретања стално је*:

$$\gamma = (0{,}5774 + 0{,}4226\,\theta'')\frac{k\mu}{s_2}, \quad 0 < \theta'' < 1.$$

Размотримо, као други пример, случај кад је троугао у чијим су теменима три масе једнакостраничан, а три дужине сразмерне величинама маса образују троугао чија је једна страна геометријска средина друге две.

Лако се доказује да, ако су ове три масе

$$m_1 = m, \quad m_2 = m + p, \quad m_3 = m + q, \quad 0 < p < q,$$

тада је, да би оне образовале троугао (Г), потребно и довољно да се нумеричка вредност $\frac{q}{p}$ налази између

$$2 \quad \text{и} \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}61180\ldots,$$

тј. да буде

$$\frac{q}{p} = 2 + 0,6180\,\theta, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$m = \frac{p^2}{q^{-2}p},$$

а тај ће услов, на пример, бити испуњен кад су величине маса

$$m_1 = 4\alpha, \quad m_2 = 6\alpha, \quad m_3 = 9\alpha,$$

или, пак, када је

$$m_1 = 9\alpha, \quad m_2 = 12\alpha, \quad m_3 = 16\alpha \quad \text{итд.}$$

при чему је $\alpha$ произвољна вредност.

*Под претпоставком да је тај услов испуњен, имаће се*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r}{s} = 0,5774 + 0,1296\,\theta && 0 < \theta < 1 \\ &\gamma = (0,1924 + 0,1611\,\theta')\frac{k\mu}{r^2} && 0 < \theta' < 1 \\ &\gamma = (0,5774 + 0,1296\,\theta'')\frac{k\mu}{s^2} && 0 < \theta'' < 1 \end{aligned}\right\} 1$$

Ово је непосредна последица геометријског става према коме се, за стране $a$, $b$ и $c$ било каквог троугла, вредност односа

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a + b + c}$$

увек налази између $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$; из њега излази

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\theta,$$

па се нумеричка вредност величине $u_1$ се налази између $\frac{1}{\sqrt{27}}$ и $\frac{1}{\sqrt{8}}$, тако да имамо

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{27}} + \left(\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{27}}\right)\theta.$$

Посматрајмо сада општи случај кад је маса $m_1$ различита од геометријске средине маса $m_2$ и $m_3$, тако да је

$$m_2 m_3 = m_1^2 + \delta;$$

$\delta$ је одступање од геометријске средине. Ако се стави

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = M,$$

имаће се

$$\lambda_1 = M + \delta,$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\mu} = \frac{\sqrt{M}}{\mu}\sqrt{1+\frac{\delta}{M}}.$$

За било какве масе $m_1, m_2$ и $m_3$ вредност $M$ се увек налази између $\frac{\mu^2}{3}$ и $\mu^2$, одатле излази да се апсолутни број

$$\omega = \sqrt{1+\frac{\delta}{M}}$$

налази између бројева

$$\omega_1 = \sqrt{1+\frac{\delta}{\mu_2}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{1+\frac{3\delta}{\mu^2}},$$

а одатле се лако изводи да је

$$z_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{3}} + \left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{\sqrt{3}}\right)\theta, \quad 0 < \theta < 1;$$

уз помоћ ове формуле могуће је прецизирати интервале варирања односа $\frac{r}{s}$ и убрзања $\gamma$ у општем случају. *Ови интервали изражавају се помоћу укупне масе* $\mu$ *система и одступања* $\delta$ *без захтева да се познају саме масе* $m_1, m_2$ и $m_3$.

*

Штампање ове Ноте било је завршено када је Г. Драгољуб Марковић, гимназијски професор у Петрограду[6], скренуо ми је пажњу на околност да се, остајући код општег случаја, тј. не претпостављајући никакву релацију између три масе, могу побољшати претходне дво-

[6] Данашњи *Зрењанин* (пр.прев.).

струке неједнакости. Г. Марковић до тога долази користећи елементарну чињеницу да се, уколико су бројеви $b_i$ и $\lambda_i$ позитивни, вредност односа

$$\frac{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2}{b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2}$$

налази између $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$.

Из једнакости (2) написаних у облику

$$\left(\frac{r_1}{s_1}\right)^2 = \frac{\lambda_1}{\mu^2}, \quad \left(\frac{r_2}{s_2}\right)^2 = \frac{\lambda_2}{\mu^2}, \quad \left(\frac{r_3}{s_3}\right)^2 = \frac{\lambda_3}{\mu^2},$$

изводи се, после сабирања,

(7) $$3\left(\frac{r}{s}\right)^2 = \frac{2p+q}{p+2q},$$

где је

(8) $$\begin{aligned} p &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \\ q &= m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3. \end{aligned}$$

Како је $p \geq q$, то се, кад се у (7) стави

$$p = q + \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0,$$

добија

(9) $$3\left(\frac{r}{s}\right)^2 = \frac{3q+2\varepsilon}{3q+\varepsilon'}.$$

Вредност десне стране једнакости (9) налази се између 1 и 2, ово доводи до двоструке неједнакости

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{r}{s} \leq \sqrt{\frac{2}{3}},$$

тј. до неједнакости

(10) $$0,5774 \leq \frac{r}{s} \leq 0,8165$$

тако да се може написати

(11) $$\frac{r}{s} = 0,5774 + \theta \cdot 0,2391 \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

На тај начин добијени интервал за однос $\frac{r}{s}$ најужи је могући, јер његови крајеви могу ефективно бити достигнути. Заиста, њехов леви крај $\frac{1}{\sqrt{3}}$ достигнут је у случају кад су три масе међусобно једнаке, а десни кад су две масе занемарљиве у односу на трећу.

Коришћењем овог резултата, налази се да убрзање $\gamma$ задовољава једну од две двоструке неједнакости

$$0,1924\frac{k}{r^2} \leq \gamma \leq 0,5443\frac{k\mu}{r^2}$$

$$0,5774\frac{k\mu}{s^2} \leq \gamma \leq 0,8165\frac{k\mu}{s^2},$$

при чему је овако добијени интервал најужи могући.

Ове нејднакости дају:

$$\gamma = (0,1924 + \theta \cdot 0,3519)\frac{k\mu}{r^2},$$

$$\gamma = (0,5774 + \theta \cdot 0,2391)\frac{k\mu}{s^2}.**$$

** О учешћу проф. Драгољуба Марковића у решавању проблема трију тела погледати одељак *Писма* у 15. књизи *Сабрана дела Михаила Петровића* (пр. Д. Т.).

# ФИЗИЧКИ ПРИМЕРИ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ЛАГРАНЖЕВИХ ЈЕДНАЧИНА*

За један исти феномен и *без измене сис̄тема* $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ који га дефинише, могу се написати Лагранжеве једначине:

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

са различитим изразима за функције $T$ и $Q_k$.

Следећа класа феномена даје за то један интуитиван пример, у коме се могу препознати конкретна значења чланова једначина, или сагледати корисност трансформације са аналитичког становишта. Посматрајмо феномене који се састоје у истовременим колебањима неког система $q_k$ у коме се свака брзина варијације $q'_k$ мења непосредно под истовременим дејством, с једне стране једног скупа сила које су функције параметара $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и времена, а, с друге стране, отпора који варира непосредно услед саме брзине $q'_k$.

Под претпоставком да су коефицијенти инерције $\lambda_k$ величина $q_k$ константни (коефицијенти деловања $\mu_k$ отпора $\mu_k q'_k$ при том могу експлицитно варирати са временом), феномен је одређен системом једначина:

$$(2) \qquad \lambda_k \frac{dk}{dt} = X_k - \mu_k q'_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \begin{matrix} \lambda_k > 0 \\ \mu_k > 0 \end{matrix},$$

где је $X_k$ тотална компонента сила (различитих од отпора) које делују непосредно на $q_k$. Кад се стави:

$$(3) \qquad 2T = \lambda_1 q_1'^n + \ldots + \lambda_n q_n'^2,$$

$$(4) \qquad Q_k = X_k - \mu_k q'_k,$$

---

* Наслов оригинала: *Exemples physiques de transformations des équations de Lagrange*, CR du Cengrès de l'Asos. franc. pour..., Le Hàvre 1928, pp. 98–92.

једначине (2) добијају облик Лагражевих једначина са чланом $\frac{\partial T}{\partial q_k}$ идентички једнаким нули.

С друге стране, кад се стави

$$2T = e^{\frac{1}{\lambda_1}\int \mu_1 dt} q_1'^2 + \ldots + e^{\frac{1}{\lambda_n}\int \mu_n dt} q_n'^2, \tag{5}$$

$$Q_k = \frac{1}{\lambda_k} e^{\frac{1}{\lambda_k}\int \mu_k dt} X_k, \tag{6}$$

једначина (2) могу се написати у истом Лагранжевом облику, *али са сасвим различитим изразима за* 2T *и* $Q_k$. Члан $\frac{\partial T}{\partial q_k}$ који је у оба случаја идентички једнак нули, појављује се кад се промени систем.

Будући да, тако, имамо два облика Лагранжевих једначина

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q_k'}\right) = Q_{1,k} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial q_k'}\right) = Q_{2,k}, \tag{7}$$

за исти феномен и исти систем, може их се, на познати начин, образовати бесконачно много.

На пример, у случају кад су величине $\lambda_k$ и $\mu_k$ константне, стављајући $\frac{\mu_k}{\lambda_k} = \alpha_k$ имаће се:

$$\begin{aligned} 2T_1 &= \lambda_1 q_1'^2 + \ldots + \lambda_n q_n'^2, & Q_{1,k} &= X_k \mu_k q_k', \\ 2T_2 &= e^{\alpha_1 t} q_1'^2 + \ldots + e^{\alpha_n t} q_n'^2, & Q_{2,k} &= \frac{e^{\alpha_n t}}{\lambda_n} X_k, \end{aligned}$$

па се може ставити

$$\begin{aligned} 2T &= 2A_1T_1 + 2A_2T_2 = \sum_{k=1}^{k=n} (A_1\lambda_k + A_2 e^{\alpha_k t}) q_k'^2, \\ Q_k &= A_1 Q_{1,k} + A_2 Q_{2,k} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(A_1 + \frac{A_2}{\lambda_k} e^{\alpha_k t}\right) X_k - A_1 \mu_k q_k', \end{aligned}$$

где су $A_1$ и $A_2$ произвољне константе.

Облик израза за $2T$ и $Q_k$ који ће се узети зависиће од разматрања са подручја физике која би се могла укључити у третирање проблема, или пак од чисто аналитичких расуђивања која би он захтевао. Тако би први облик Лагранжових једначина, онај у који ће се за $T$ узети функција $T_1$ и за $Q_k$ израз $Q_{1,k}$, требало употребити када је корисно груписати и учинити лако уочљивим, у самим једначинама, с једне стране силе инерције (које би тада садржале леве стране једначина), а, с друге стране силе познатих конкретних природа које учествују у збивању (оне би биле садржане у десним странама једначина).

Други облик, са изразима $P_2$ и $Q_{2,k}$, од нарочитог је интереса кад се силе које дејствују $X_k$ изводе из једне функције $(q_1,\ldots,q_n,t)$, то исто ће онда важити и за десне стране Лагранжевих једначина, па се проблем може третирати Хамилтоновим, Јакобијевим и Поасоновим методама. Овај други облик своди се на утапање проблема у други проблем који је дефинисан истим системом лишеним отпора, а у коме, међутим, коефицијенти инерције $\lambda_k$ и тоталне компоненте сила које дејствују у току времена варирају редом према следећим законима:

$$e^{\frac{1}{\lambda_k}\int \mu_k dt} \quad \text{и} \quad \frac{X_k}{\lambda_k} e^{\frac{1}{\lambda_k}\int \mu_k dt}.$$

Ако силе $X_k$ потичу од функције силе $U$, ове силе ће бити изведене из функције:

$$U' = \frac{U}{\lambda_k} e^{\frac{1}{\lambda_k}\int \mu_k dt}.$$

Класа феномена на коју смо указали обухвата најпре, као специјални случај, кретање материјалних тачака, слободних или принуђених на клизање по извесној површини или кривој, под дејством сила које зависе од координата и времена, и од отпора пропорционалног брзини тачке (проблем који је проучавао Г. Елиот). Улогу величина $\lambda$ играју масе тачака, улогу величина $q$ специфични отпор средине, а улогу величина $q$ компоненте брзина.

Она, такође, обухвата ротационо кретање једног скупа замајаца снабдевених крилцима у некој средини која пружа отпор сразмеран брзини крилаца. Улогу величина ту би играле угловне брзине замајаца, улогу величине $\lambda$ њихови моменти инерције, а улогу величина Е специфични отпор средине помножен одговарајућим растојањем крилца од осе ротације.

Иста ова класа обухвата исто тако феномен истовременог пражњења групе $n$ електричних кондензатора, подржане скупом $n$ електромоторних сила $E_1,\ldots,E_n$ од којих би свака била уметнута у по једно од $n$ кола и зависила од скупа електричних пуњења $q_1,\ldots,q_n$ кондензатора. Ако су редом са $l_k$ и са $r_k$ означени коефицијенти самоиндукције и специфични омски отпор $k$-тог кола, а са $c_k$ капацитет одговарајућег кондензатора, феномен ће бити одређен системом једначина

$$l_k q_k'' = -E_k - \frac{1}{c} q_k - (r_k + l_k') q_k' \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$\left( l_k' = \dfrac{dl_k}{dt} \right)$ (које претпостављају да се сматра позитивним интензитет струје пражњења кад се одговарајуће електрично пуњење смањује). Улогу величина $\lambda$ сада играју величине $l$, улогу величина $\mu$ величине $r + l$, а ону величина $X$ силе $-E - \dfrac{1}{c} q$ (уметнуте електромоторне силе и Кулонове електромоторне силе у колима). Улогу отпора сразмерних брзинама играју контраелектромоторне силе $-(r + l')q'$ пропорционалне одговарајућим интензитетима струја пражњења. Када се електромоторне силе $E_k$ изводе из неке функције $(q_1, \ldots, q_n, t)$ силе $Q_k$ ће бити изведене из функције облика:

$$Ae^{\int \frac{r_k}{l_k}} \left( U + \sum \frac{1}{2c_k} q_k'^2 \right),$$

па се проблем може третирати Хамилтоновим или Јакобијевим методама.

Исти случај јавља се у великом броју других проблема који су *аналитички аналогни* претходном проблему, на пример, кад су по средини истовремене вибрације $n$ дијапазона, кад постоји унутрашњи отпор трења пропорционалан аналогији и отпор средине пропорционалан брзини вибрације, при чему те отпоре одржавају спољашње силе које зависе од скупа $(q_1, \ldots, q_n)$ елонгација. Улогу величина $\lambda$ при том би играле вибрирајуће масе, ону величина $rq'$ унутрашње силе трења, а ону величина $\dfrac{q}{c}$ силе еластичности.

Исто ово би се добило у познатом хидрауличном феномену, аналогном претходном: кретању течности у судовима спојеним врло кратким хоризонталним цевима. Такође би се исто имало у случају феномена варијација $n$ струја у систему $n$ кола, непокретних и међусобно изолованих и без осетне узајамне индукције, под дејством $n$ електромоторних сила од којих је свака уметнута у једно од кола и зависи од скупа $(q_1, \ldots, q_n)$ количина електрицитета подељеног на $n$ кола. Улогу величине $\lambda_k$ тада би играо коефицијент $l_k$ самоиндукције $k$-тог кола; улогу величине $\mu_k$ играо би специфични омски отпор $r_k$, а ону величина $X_k$ електромоторна сила $E_k$ уметнута у коло.**

---

** Рад је реферисан у FdM, B.57, S.1038 (пр. Д. Т.).

# ВРЕДНОСТ АКЦИЈЕ ДУЖ РАЗЛИЧИТИХ ТРАЈЕКТОРИЈА*

Посматрајмо кретање холономног система са к степена слободе, са везама које не зависе од времена, под дејством сила изведених из функције сила $U$ и нека је, са параметрима $q_1,\dots,q_k$ који образују систем ортогоналних координата,

$$J = \int\limits_{(P_0)}^{(P_1)} \sqrt{L_1 dq_1^2 + \dots + L_n dq_n^2}$$

израз *акције* дуж произвољне трајекторије која пролази кроз два дата положаја $P$ и $P_1$ система, при чему су коефицијенти $L_i$ функције од $q_1,\dots,q_k$ и константе живих сила $h$ одређене везама и обликом функције сила $U$.

У овој белешци показујем један начин добијања горње и доње границе вредности акције дуж различитих трајекторија које пролазе кроз дате положаје $P$ и $P_1$ и међусобног поређења вредности дуж тих трајекторија.

У том циљу, посматрајмо два положаја $P$ и $P_1$ система који су довољно блиски да, дуж лука $s = P_0P_1$ посматране трајекторије $T$ између тих положаја, ниједан од диференцијала $\sqrt{L_i}\, dq_i$ *не мења знак*. Како ти диференцијали представљају лучне елементе координатних линија које формирају у ортогоналном систему $(q_1,\dots,q_k)$ акцију $J$ као своју резултанту, ово се своди на претпоставку да су положаји $P$ и $P_1$ међусобно довољно блиски да акција дуж лука $s$ има *непроменљив ток* у односу на координатне линије, при чему се ова непроменљивост састоји у немању смера рашћења тих саставних лукова.

* Наслов оригинала: *Valeur de l'action le long de diverses trojectoires*, Compes rendus des séances de l'Academie des Sciomces, Paris 1917, t. CLXIV, 4, pp. 166–169; приказао у Париској академији наука професор Пол Апел 22. јануара 1917. (пр. Д. Т.).

Нека је $\varepsilon_k$ јединица са непромењивим знаком израза $\sqrt{L_k}dq_k$ дуж лука $s$; стављајући, ради краћег изражавања,

$$\varepsilon_k\sqrt{L_k}dq_k = \alpha_k,$$

имаће се дуж лука $s$

$$J = \int_{(P_0)}^{(P_1)} \sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2}.$$

Како су све величине $\alpha_k$ позитивне, вредност односа

$$\frac{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2}{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)^2}$$

стално ће се налазити између $\frac{1}{n}$ и 1, при чему се те границе достижу, прва кад су дуж лука све величине $\alpha_i$ међусобно једнаке, а друга када су све величине сем једне једнаке нули.

Нека је $\mu$ неки интеграциони множилац израза $\sum\alpha_k$, тако да је $\mu\sum\alpha_k$ тотални диференцијал неке функције $f$. Постојање множиоца $\mu$ обезбеђено је за било који систем са степеном слободе мањим од 3. То исто је случај када координатне линије образују изометријску мрежу, тако да је $L_1 = L_2 = \ldots = L_k$ интеграциони множилац, тада ће бити $\frac{1}{\sqrt{L_1}}$. Исто ће се имати у неограниченом броју других случајева.

У таквим случајевима биће

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2} = \theta(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) = \theta\frac{dF(f)}{\mu F'(f)},$$

где $F$ означава произвољну функцију једне променљиве, а $\theta$ је фактор који се стално налази између $\frac{1}{\sqrt{n}}$ и 1.

Изаберимо произвољну функцију $F$ тако да израз $\mu F'(f)$ има сталан знак дуж лука $s$ и нека су $M$ и $N$ највећа и најмања апсолутна вредност коју тај израз узима дуж тог лука. Како највећа вредност од $\frac{\theta}{\mu F'(f)}$ износи $\frac{1}{N}$, а најмања $\frac{1}{M\sqrt{n}}$, обична теорема о средњој вредности, примењена на интеграл $J$, доводи до следећег исказа.

*Акција* J *дуж лука* s *једнака је айсолушној вредносши* H *разлике вредносши које узима функција* F(f) *у двема шачкама* $P_0$ *и* $P_1$ *йомноженој факшором који се налази између īраница* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *и* 1.

Тако имамо теорему о средњој вредности за акцију $J$:

$$J = \lambda H \quad \text{са} \quad \frac{1}{M\sqrt{n}} \leq \lambda \leq \frac{1}{N}.$$

Ова теорема даје начин међусобног поређена акција $J$ и $J'$ *са истим током* (са истим $\varepsilon_k$) дуж две произвољне трајекторије $T$ и $T'$. Бирајући произвољну функцију $F$ тако да $\mu F'(f)$ задржава исти знак дуж лукова $P_0P_1$ обе трајекторије и означавајући са $\lambda', M'$ и $N'$ редом количине $\lambda, M$ $N$ које се односе на трајекторију $T'$, налази се

$$J' = \xi J,$$

где се фактор $\xi$ налази између $\frac{M'\sqrt{n}}{N}$ и $\frac{N'}{M\sqrt{n}}$. Специјално: *акција дуж лука* $\mathrm{s} = \mathrm{P_0P_1}$ *природне трајекторије никад не може бити више од* $\frac{\mathrm{M}'\sqrt{n}}{\mathrm{N}}$ *пута мања од акције дуж лука* $\mathrm{s} = \mathrm{P_0P_1}$ *произвољне трајекторије посматране врсте.* Очигледно је, уосталом, да се у овим исказима могу заменити $(M, M')$ и $(N, N')$ највећом и најмањом вредношћу коју узима израз $\mu F'(f)$ у посматраној области хиперпростора $(q_1, \ldots, q_k)$, што садржи трајекторије које се пореде.

Применимо ове резултате на кретање слободне материјалне тачке под дејством сила изведених из функције сила $U$, при чему је координатни систем $(x, y, z)$ праволинијски и ортогоналан. Имаћемо

$$J = \int_{(P_0)}^{(P_1)} \sqrt{2(U+h)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

и, означавајући са $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и $\varepsilon_3$ јединицу снабдевену редом знацима диференцијала дуж лука $s = P_0P_1$ трајекторије, може се ставити

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}, \qquad f = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 z, \qquad F(f) = f.$$

Претходна количина $H$ биће збир апсолутних вредности прираштаја координата $x$, $y$ и $z$ при прелазу са положаја $P_0$ на положај $P_1$ покретне тачке. Израз

$$\mu F'(f) = \frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}$$

задржава исти знак каква било да је трајекторија и, уколико су са $A$ и $B$ означене редом највећа и најмања вредност функције $U + h$ дуж лука $s$ (или пак у некој области која тај лук садржи), биће

$$M = \frac{1}{\sqrt{2B}}, \quad N = \frac{1}{\sqrt{2A}},$$

тако да је $J = \lambda H$, где је $\lambda$ фактор који се налази између $\sqrt{\frac{2B}{3}}$ и $\sqrt{2A}$.

Било би, такође, лако упоредити вредности акције дуж различитих трајекторија које пролазе кроз исте тачке $P_0$ и $P_1$, довољно блиске да лукови $P_0P_1$ посматраних трајекторија не мењају ток (непроменљивост величина $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и $\varepsilon_3$).**

** Рад је реферисан у FdM, B.46, S.1184 (Engel) i Revue sémestrielles publications mathématiques, 1917, t.XXV (пр. Д.Т.).

# ТЕОРИЈА РЕЛАТИВНОСТИ

## ТЕОРИЈА РЕЛАТИВИТЕТА*

У току последњих година учинила је прави преврат у схватањима једна теорија готово и незапажена пре двадесет и неколико година, кад се први пут појавила са циљем да на један, према дотадашњим појмовима необичан начин, објасни извесне специјалне, у то време загонетне физичке појаве. Необичност теорије произлазила је од тога што јој је и сама основица у несагласности са најобичнијим, најосновнијим и од вајкада утврђеним појмовима, у чију неприкосновеност није нико ни помишљао да дирне. Теорија, иначе, нема у себи ничега метафизичког; она је потпуно реалистичка, основана на реалним фактима која данас нико не може порећи и, кад се пође од тих факата, њена је логичка и математичка едификација у свима појединостима беспрекорна.

Математичка *теорија релативитета*, о којој је реч, поникла је из покушаја да се објасне извесне парадоксалне појаве које произлазе из врло брзих кретања материјалних делића, или тела, или електрона, а које је класична (*Галилејева* и *Њутнова*) механика била немоћна да објасни. Наиме, она је имала да образложи негативан резултат свих дотадашњих покушаја да се апсолутно кретање једнога система, онакво какво је, истакне на видик експериментима извршеним у самоме систему, без поређења са нечим ван система, а који су резултати, према класичној механици, требали бити позитивни.

И по класичној механици, ма какве механичке појаве што се дешавају у каквоме систему што се креће униформно и праволинијски, дешавају се за посматрача, који се креће са системом, тако као да је сам систем непокретан. Посматрач, херметички затворен, на пример, у Жил Верновом пројектилу и избачен са овим из топа, не би могао ни на какав начин, без каквог спољнег знака, констатовати униформно праволинијско кретање своје и пројектила у коме је. Међутим, по истој механици, било би му сасвим могућно констатовати такво кретање

* Српски књижевни гласник, Београд 1921, t.II, 1, стр. 29–41.

помоћу подесних оптичких или електричних експеримената извршених у самоме покретном систему. Тако, по теорији распростирања светлости, основаној на класичној механици, претпоставља се егзистенција једне средине која је у миру и која проноси трансверзалне светлосне таласа са једном одређеном брзином, као што ваздух проноси звучне таласе. Пошто та средина, етар, нема транслаторног кретања у правцу распростирања светлосних таласа, по класичној механици могло се очекивати да ће се подесним оптичким или електричним експериментом успети истаћи на видик и мерити апсолутно кретање система у коме је посматрач, на пример, транслаторна брзина наше земље према етру.

Такав један експеримент замислио је и практички извео најпре Michelson (1881. године), а затим Morley (1887. године). Земља у своме годишњем кретању има извесну брзину транслације која се поступно и лагано мења у току године, тако да разлика брзина, што одговара њеним двама дијаметрално супротним положајима на орбити (нпр. онима у јануару и јулу) достиже 60 километара у секунди. Та је разлика, дакле, толика да би се несумњиво морала констатовати на веома осетљивом апарату који је за тај циљ био нарочито конструисан и на коме се апсолутно кретање земље, по предвиђањима класичне механике, имало манифестовати у деформацији оптичке слике што произлази од интерференције два подесно изабрана светлосна зрака. Међутим, од свега тога није могло бити ништа: поред све своје крајње осетљивости, апарат није констатовао предвиђену деформацију интерференцијске слике. Тако су исто и сви доцнији покушаји дали само негативне резултате.

Тиме је било констатовано да је, супротно предвиђањима класичне механике, немогућно истаћи на видик и мерити чисто земаљским експериментима брзину земље према непокретној средини кроз коју се она креће. Чак је констатовано и то, да се никаквим физичким експериментом извршеним у каквоме систему који се креће транслаторно и са једнаком брзином, не може то кретање ни мерити ни истаћи на видик, ако се оно не упореди са другим нечим што је ван система.

Тај је факт био полазна тачка за теорију релативитета. Он се показао да је у несагласности или са другом једном масом непобитних физичких факата, или са самим основама класичне механике. Према једном елементарном ставу ове механике, у чију тачност дотле није никоме падало на памет да посумња, транслаторна брзина једнога тела $A$ према једноме телу $B$, које се и само креће транслаторном једнаком брзином $x$ према једноме трећем непокретном телу $C$, а кад се $A$ креће према $C$ транслаторном брзином $y$, има за вредност разлику брзина $y$ и $x$ (адициона теорема о брзинама). Критичка анализа поменутих експеримената са негативним резултатима доводи до те дилеме да: или је овај последњи став, један од темељаца класичне механике, нетачан, или је нетачно да се светлост у вакууму распростире радијално константном брзином. Међутим, овај је последњи факт утврђен многобројним и разноврсним физичким експериментима и астрономским посматрањима. Па ипак, физичари и астрономи су се били нашли у недоумици шта да мисле о својим методама за које су држали да су стварно и несумњиво утврдиле поменути прост закон распростирања светлости.

Тада је се појавила једна, за ондашње појмове фантастична теорија са циљем да доведе у склад резултате поменутих експеримената и физички факт о радијалном распростирању светлости у вакууму константном брзином. То је довођење у склад извршено на рачун дотадашње адиционе теореме о брзинама, која уступа место једноме другом, компликованијем закону за комбиновање транслаторних брзина, а који логички резултира из једне просте, али ипак фантастичне хипотезе. Наиме, H. A. Lorentz и Fitz-Gerald, независно један од другога (1903–1904. године), уводе у Механику хипотезу да се сва тела, кад се налазе у униформном транслаторном кретању, *скраћују* у правцу кретања, и да је то скраћивање (*Lorentz-ова контракција*) утолико јаче уколико је већа брзина транслаторног кретања. Ту контракцију не може ни на какав начин констатовати посматрач који би био везан за тело што се креће, пошто би сви инструменти за мерење, по истој хипотези, били скраћени у истој пропорцији у којој и тело које се мери, али би њу могао констатовати посматрач са какве утврђене тачке ван покретног система.

Lorentz-ове математичке формуле, које према тој хипотези одређују величину контракције, таквог су облика, да је, према њима, контракција једнака нули кад је тело непокретно, и неосетна за мале брзине; да је утолико мања уколико је мањи количник брзине тела и брзине светлости; да расте са рашћењем тога количника, и да би се димензија тела у правцу кретања имала, по тим формулама, свести на нулу кад је тај количник једнак јединици, тј. кад се брзина тела изједначи са брзином светлости.

И хипотеза и математичка теорија која је из ње изведена, сматране су, у време кад су се појавиле, као једна математичка жонглерија која не одговара реалности, али која је имала бар своје занимљивости у томе што је, без икаквих нових хипотеза, потпуно објашњавала негативност резултата експеримената Michelson-а, Morley-а, и других. У исто време, услед Lorentz-ове контракције, сферична тела у покрету прелазе у елипсоиде спљоштене у правцу кретања, и то утолико јаче уколико је кретање брже, што је дало Lorentz-у могућности да без икаквих других хипотеза логички објасни једну масу парадоксалних електродинамичких и електромагнетских појава.

Али, основне формуле те теорије имају још једну, за природну филозофију врло важну математичку особину, због које су после кратког времена привукле пажњу механичара и физичара. Као што је познато, описивање механичких појава у простору и времену служи се једном, реалном или замишљеном, чврстом основом $B$ за поређење (координатни систем), према којој се појединости појаве обележавају подесно изабраним скупом координата. Описати једно стање у једноме датом тренутку, значи прецизирати бројне вредности тих координата у томе тренутку. Описати дату појаву у датоме размаку времена (закон по коме се појава збива у томе размаку времена), значи прецизирати начин на који се бројне вредности координата мењају у току тога времена. Ако се буде променио координатни систем $B$, очевидно је да се тиме уопште мењају и вредности координата и закони промена у којима се налази појава. За прелаз из једнога таквог система $B$ у други какав систем $B'$ класична механика прописује један скуп формула које изражавају вредности координата и времена у систему $B'$ кад се оне знају за систем $B$ и кад се зна положај или кретање система $B'$ према $B$ (такав скуп формула носи име *Галилејеве трансформације*). Једно просто математичко резоновање доводи до закључка да, кад је дато више система $B, B', B'', \ldots$ непокретних или у униформном транслаторном кретању један према другом, за посматраче који би били чврсто везани за по један такав систем, треба да важи један исти закон појаве. Тачније казано: облик једначина које исказују законе просторно-времених појава у каквоме систему, не треба да се мења кад се за основицу поређења (координатни систем) наизменце узима какав непокретан и какав покретан систем који је према првоме у униформно транслаторном кретању.

Али, искуство (поменути парадоксални експерименти) и доцнији развитак електродинамике показали су да кад су транслаторне брзине врло велике (осетне према брзини светлости) и кад се за прелаз из једнога система $B$ на други какав систем $B'$ употреби Галилијева трансформација на коју упућује класична механика, горњи факт о непромењивости облика закона појава престаје да важи. Међутим, кад се прелаз изврши помоћу Lorentz-ових формула (чији скуп, удешен за тај прелаз, носи име *Lorentz-ове трансформације*), та непромењивост остаје и за мале и за велике транслаторне брзине једнога система према другоме.

Тај је факт убрзо по појави Lorentz-ове теорије привукао пажњу професора А. Einstein-а, који је од тада успео наведену математичку жонглерију претворити у озбиљну, реалистичку, до краја логичку, хармоничну и данас опште примљену *теорију релативитета*, помоћу које се не само објашњавају познате, већ и предвиђају непознате механичке, физичке и астрономске појаве.

Пре свега, усвојивши *a priori* принцип да једначине појава треба да задржавају један исти облик за ма какве униформне транслаторне брзине једнога од компаративних система $B, B', B'', \ldots$ према другима, Einstein је извео Lorentz-ове формуле на један чисто кинематички начин и генералисао га за све врсте кретања. Тиме су те формуле добиле сигурну математичку основицу на којој се данас налазе. Постигавши то, Einstein се више није устручавао изнети на видик све логичке последице до којих доводе те формуле, па ма колико да су те последице у несагласности са свима појмовима који су дотле сматрани за неприкосновене. Такве су последице многобројне и разноврсне, и оне су, као што је поменуто, учиниле прави преврат у дотадашњим схватањима. Шта више, Einstein је за своје закључке, који руше утврђене појмове и схватања, нашао и просте, интуитивне доказе који су учинили да његове теорије постану схватљивије, природније и сводљиве на обична, кадшто најелементарнија резоновања.

Мада у модерној теорији релативитета, коју је Einstein на тај начин створио, разрадио и дао јој облик у коме је она данас примљена у ред великих, универзалних теорија природне филозофије, поглавити интерес лежи у њеној чисто математичкој разради, у коју је тешко ући и математичару од заната, ипак ће се овде покушати да се изложи бар оно што је у њој најприступачније и што јој даје главни карактер.

На самим основним Lorentz-овим једначинама, које су полазна тачка за теорију релативитета и које је Einstein, као што је наведено, извео на један чисто кинематички начин, јасно се истичу ови математички факти:

1. *Просторно растојање двеју тачака једнога чврстог тела зависи од начина кретања компаративног тела (координатног система);*

2. *Временско растојање два догађаја зависно је од начина кретања компаративног тела.*

Оба су факта, међутим, у апсолутној противречности са класичном механиком, па и са самим основним појмовима о простору и времену. По новој теорији, једна, нпр. полуга, утолико је *краћа* уколико се брже креће у правцу своје дужине; њена би дужина била *једнака нули* кад би се она кретала брзином светлости; та би дужина била *имагинарна* кад би се полуга кретала брзином већом од брзине светлости. По основним формулама те теорије, брзина светлости, тј. брзина од 300.000 километара у секунди, игра улогу једне граничне брзине, коју никакво реално тело не може ни прећи ни достићи. На исти начин, и исте формуле, исказују чудноват факт да један часовник, услед свога кретања, иде *спорије* но кад је непокретан, и то утолико спорије уколико се брже креће; брзина светлости и овде игра улогу једне недостижне граничне брзине, при којој би времена дужина једне секунде била бескрајно велика.

Пре теорије релативитета у механици и физици је сматрано, без икакве дискусије и као несумњиво, да су просторни подаци о једноме чврстом телу и времени подаци нешто *апсолутно,* тј. независно од начина кретања било компаративног тела, било тела или догађаја на које се такви подаци односе. Einstein, међутим, показује на најелементарнији начин, и на најпростијим примерима, фактични релативитет појма просторних димензија и појма времена.

Тако, за основни појам, полазну тачку при физичком мерењу времена: *истовремености* догађаја, може се на овоме простом примеру уочити његов релативитет. Замислимо да се у двама, једно од другога удаљеним местима $A$ и $B$ праве железничке пруге појаве два светлосна сигнала упаљена једним истим електричним апаратом, једним притиском на електрично дугме. За онога који је дугме притиснуо, јасно је да су се оба сигнала појавила истовремено. Али, како би то било за једнога посматрача који би за ту истовременост имао да сазна чистим посматрањем? Јасно је да, ако би посматрач стао на пругу, тачно у тачку $M$ која представља средину пута од $A$ до $B$, он би сигнале у $A$ и $B$ приметио одиста истовремено (нпр. помоћу два вертикална огледала нагнута једно према другоме за 90). Али, ако би посматрач био у возу који се креће врло великом брзином од $A$ у правцу ка $B$, па наишао на тачку $M$ тачно у тренутку кад је притиснуто дугме које пали сигнале у $A$ и $B$, он у томе тренутку неће запазити оба сигнала истовремено. Нестајање истовремености долази, очевидно, отуда што се светлост креће коначном брзином и што се посматрач великом брзином удаљава од $A$ и приближује тачки $B$.

Догађаји, дакле, који се констатују као истовремени у односу на једно непокретно компаративно тело, неће се као такви констатовати у односу на какво тело које се креће, и обрнуто (релативитет истовремености). Па како је на истовремености догађаја основано физичко мерење времена, Einstein закључује да: свако компаративно тело има своје нарочито време, према начину свога кретања; један времени податак има само онда смисла, ако је у исто време прецизирано и компаративно тело за који је везан тај податак. Једна иста појава има разно трајање према томе да ли се ово односи на сталан или покретан систем у коме се посматра или из кога се посматра; разлика у трајању утолико је већа уколико је већа брзина кретања система.

Слична је ствар и са просторним подацима. Растојање, нпр. двеју тачака $P$ и $Q$ у самоме возу који се креће, може се равноправно мерити, нпр. на ова два начина: 1. узевши сам воз као координатни систем и преносећи јединицу мере (нпр. метар) дуж вагонских подова од $P$ до $Q$; 2. узевши саму пругу као координатни систем и одређујући на њој две тачке $P'$ и $Q'$ са којима ће се истовремено, наишавши на њих, поклопити тачке $P$ и $Q$. Према ономе што је казано о истовремености догађаја уопште, јасно је да ће ова два, на први поглед потпуно равноправна начина мерења растојања довести до различних резултата, и да ће разлика бити утолико већа уколико је већа брзина воза. У томе и лежи прави, физички смисао Lorentz-ове контракције и релативитета просторних димензија. Један податак те врсте има само онда смисла ако је у исто време прецизирано и компаративно тело за које је такав податак везан. Један исти просторни елеменат имаће разне величине према томе да ли се односи на сталан или покретан компаративни систем; разлика ће у тим величинама бити утолико већа уколико се систем брже креће.

Природно је да ће исти случај бити и са свима механичким и физичким факторима сложеним из просторних и времених елемената, као што су, нпр. брзина, убрзање, разни интензитети, итд. Али Einstein је отишао још даље и исте закључке применио и на појам *масе* и *енергије*. Обична физика познаје два, један од другога независна *закона одржања*: закон масе и закон енергије. Теорија релативитета доводи до те последице да се та два закона имају спојити у један. Математички израз енергије, по тој теорији, сасвим је различан од онога у класичној механици; то више није половина производа масе и квадрата брзине. Међутим, релативистички израз енергије своди се на овај последњи кад је координатни систем непокретан; разликује се од њега неосетно кад је брзина кретања система мала, и разликује се све више уколико је та брзина већа. Из истога се израза види да кад енергија једнога тела прирасте за $x$, његова инертна маса самим тиме прираштује за $x$ подељено квадратом брзине светлости. Инертна маса једнога тела није, дакле, константна, као што се сматра у класичној механици, већ се и она мења са прираштајем енергије. Шта више, инертна маса тела може служити и као мерило саме енергије тела, па ма како то изгледало несхватљиво са гледишта обичне механике. Закон одржања масе једнога система стапа се са законом одржања енергије и важи, по теорији релативитета, само дотле док енергија тела остаје непромењена. Међутим, прираштај масе, тј. количник прираштаја енергије и квадрата брзине светлости, обично је, због велике брзине светлости, врло мали занемарљив према првобитној маси коју је тело имало пре промене енергије, тако да се та промена у маси не може ни констатовати докле год прираштај енергије не буде довољно велики да би поменути количник имао осетну вредност. Отуда и долази то да, у обичној механици и физици, постоји засебан, самосталан закон одржања масе. Овај је, дакле, тачан само као прва апроксимација и не вреди више за велике промене енергије.

Немогућно је на овоме месту изнети многобројне математичке и филозофске консеквенце које логички излазе из основних формула теорије релативитета, као и масу из основа нових појмова које та теорија уноси у механику и физику, а који се, према ранијим неприкосновеним појмовима, имају сматрати као права јерес (инерција енергије, материјализација енергије, тежина енергије, инерција гравитације и прираштај масе повећањем те инерције, утицај гравитације на електромагнетне и светлосне појаве, итд.). Али, ако се од једне теорије тражи, не да представља апсолутну истину, већ, као што то тражи H. Poincaré, да је до краја логична, да обухвати и објасни целокупан комплекс појава на које се односи, не долазећи у сукоб ни са једном појединошћу тих појава, и да омогући предвиђање нових појединости у овима, па и само предвиђање нових појава, онда се може тврдити да Einstein-ова теорија релативитета има пуно право грађанства у природној филозофији.

Einstein-ова теорија, као што је поменуто, доводи за мале брзине кретања до истих математичких резултата до којих доводи и класична механика, на коју се она, у ствари, и своди за мале брзине као на једну прву апроксимацију. Али, кад су брзине веће, упоредљиве са брзином светлости, таква апроксимација више не важи и теорија релативитета потпуно напушта терен класичне механике. У формулама се појављују корективни чланови, као последица основне хипотезе о контракцији; ти чланови дају сасвим други облик целој ствари и доводе до закључака апсолутно контрадикторних са онима из класичне механике.

Између многобројних појава које су необјашњиве по класичној механици, а које теорија релативитета објашњава врло просто и прецизно, овде ће бити наведене две астрономске, чије је релативистичко предвиђање и објашњење изазвало сензацију и придобило за теорију и највеће скептике.

Још од Levirrier-а стајао је нерешен проблем да се нађе разлог и постави тачна теорија констатованог прогресивног кретања перихелије планете Меркура, која је у несагласности са Њутновим законом гравитације. Покушавана су разна, више или мање усиљена објашњења, нпр. помоћу хипотезе да констатоване пертурбације произлазе од једне зоне материјалних делића сличних онима од којих произлази зодијакална светлост. Einstein-ова теорија гравитације, основана, без икаквих споредних хипотеза, на чистој теорији релативитета, решила је одмах проблем, брзо и просто. По Einstein-овим рачунима секуларно кретање перихелије Меркура требало је да износи 43 лучне секунде;

астрономска посматрања дала су за то кретање вредност од 45 лучних секунда, што се сматра да је више но довољно па да се може тврдити да су опажања у пуној мери потврдила рачунске резултате.

Друга од појава, о којима је реч, била је сасвим нова, како за механичаре и астрономе, тако и за физичаре. По Einstein-овој теорији гавитације, утицај се гравитације мора осећати на свима физичким процесима без изузетка, па, дакле, и на светлосним појавама. Једначине његове теорије прецизирају, шта више, и јачине тих утицаја. Један од закључака који излазе из тих једначина, јесте тај да се светлосни зраци, при проласку кроз једно гравитационо поље, деформишу, криве. Применивши своје рачуне на сунчано гравитационо поље, Einstein је нашао да се један праволинијски зрак, пролазећи кроз непосредну близину сунца, мора утицајем гравитације преломити и скренути од свога правца за један угао који износи 1,75 лучне секунде. Мада је ствар изгледала невероватна, астрономи су нашли прецизан начин да истакну на видик то скретање, ако оно у истини постоји, и да га у томе случају тачно измере. Предложена метода је била природна и проста: она се састојала у томе да се приликом тоталног помрачења Сунца фотографишу у једно исто време и Сунце и звезде некретнице које су му на небеском своду врло блиске, тако да зрак од такве једне звезде, пре но што допре до фотографског апарата на земљи, прође врло близу сунца. Ако би било поменутог скретања светлосног зрака, ово би се морало показати на фотографији и одредити помоћу разлике између раздаљине слике Сунца и звезде што одговара њиховим астрономски предвиђеним положајима на фотографији, и раздаљине која се ефективно буде нашла. Подесна се прилика за то била указала при тоталном помрачењу сунца од 30. маја 1919. године. Две енглеске мисије, послате тога ради на Принчево Острво (Африка) и у Собрал (Бразилија) под управом астронома Eddington-а и Crommelin-а, имале су да реше ствар позитивно или негативно. Прва је мисија констатовала скретање које је варирало између 1,3 и 1,9 лучне секунде, а друга скретање од 1,98 лучне секунде. Те бројке потврђују Einstein-ова предвиђања и доказују не само тачност његових рачуна (а тиме и вероватност теорије на којој су основани), већ јасно истичу на видик и стварност једну сасвим нову врсту физичких појава коју је Einstein тачно предсказао: утицај гравитационих поља на светлосно поље. Било је и објекција таквоме тумачењу резултата поменутих мисија; постављено је питање: у чему се запажени ефекат разликује од онога што би произвела обична светлосна рефракција у сунчаној атмосфери? Али, убрзо се увидело да тај ефекат не може произлазити од рефракције. Пре свега, показало се да је величина скретања, саобразно Einstein-овим рачунима, обрнуто пропорционална одстојању звезде од центра сунца, што никако не би могло бити по закону светлосне рефракције. Осим тога, рачун показује да би, у случају кад би то скретање долазило од рефракције, око Сунца морала бити једна атмосфера која би, још на доста великом одстојању од 15 лучних минута од Сунца, требало да има густину од 0,01 према густини обичног ваздуха. То је, међутим, немогућно, јер би то онда указивало на једну изванредно просторну и густу атмосферу око Сунца, која би давала врло осетан отпор кометама што у њу зађу (нпр. онима од 1880. и 1882. године). Такав отпор није констатован. Поменуто помрачење Сунца било је, дакле, прилика за један несумњив и еклатантан успех теорије релативитета, која је од тада привукла пажњу најскептичнијих физичара, астронома и математичара.

Остаје још да се истакне један аспекат теорије релативитета који уноси нове погледе у саме основне концепције и примарне елементе људског сазнања.

Простор је један тродимензионалан континуум. Тиме се хоће да каже да се у њему положај једне тачке може утврдити помоћу три броја $x, y, z$ (координате тачке) и да свакој тачки одговара бескрајан број њој толико блиских тачака колико се хоће и чији се положај опет може утврдити помоћу одговарајућа три броја $x', y', z'$ блиска бројевима $x, y, z$.

Аналогно томе, свет физичких појава које се дешавају у простору и времену, сматра се као један четвородимензионалан континуум. Тиме се хоће да каже да се сваки догађај у њему може обележити са четири броја: координате $x, y, z$ места на коме се десио, и тренутка $t$ у коме се десио, и то тако да се сваком догађају може, бар у мислима, придати бескрајан број њему колико се хоће блиских догађаја, од којих се сваки може обележити једним скупом бројева $(x, y, z, t)$ блиских првоме скупу.

У обичној физици димензији $t$ придаје се један самосталан значај, различан од онога што се придаје просторним димензијама $x, y, z$. Сматра се да време игра једну самосталну, издвојену улогу која и чини да се оно сматра као један самосталан континуум. Јер, у обичној физици време је нешто апсолутно, тј. независно од положаја и од промена положаја. Његов „неумитни ток“ апсолутно је независан од просторних елемената. Та неумитност, која собом „вуче догађаје“, чини да се у многобројним метафорама и алегоријама времену придаје и извесна активна, стваралачка или деструктивна улога која му очевидно ни по чему не припада („време је највећи лекар“, „време је најбоље решето“, „време ради за ту ствар“, „време оставља трагове и измичући гађа стрелама“, „свака секунда рањава, последња убија“, итд.).

Као што је напред показано, по теорији релативитета таква подвојеност улога просторних елемената и времена не постоји. По тој теорији свет физичких појава сматра се као један четвородимензионалан континуум у коме су све четири димензије *равноправне*, тј. ни једна од њих не игра какву нарочиту, издвојену улогу. Али, у томе још не лежи прави филозофски значај, теорије релативитета. Minkowski je запазио да четвородимензионални просторно-времени континуум теорије релативитета, са својим скупом основних једначина које га карактеришу, показује са математичког гледишта најдубљу аналогију са обичним, тродимензионалним континуумом Еуклидовог геометријског простора, и извео је ту аналогију у свима појединостима. Аналогија је потпуна кад се на место обичне времене координате $t$ узме њој пропорицонална имагинарна величина $ct\sqrt{-1}$, где је $c$ брзина светлости. Тада сви природни закони, који задовољавају погодбе теорије релативитета, добијају такве математичке облике, у којима координата времена игра тачно ону исту улогу коју играју и три просторне координате. Скуп такве четири просторно-времене координате тачно одговара скупу трију просторних координата Еуклидове геометрије. Тачан смисао и прави значај ове запаске Minkowski-а могу осетити и схватити само математичари, али и за лаика није без интереса да сазна да улога која је од вајкада придавана Хроносу, божанској персонификацији времена, није онаква каква би му по праву имала припасти.

Све ће то, можда, у блиској будућности бити схватљиво, природно, очевидно, и обична ствар за сваког иоле образованог човека. Данас је, међутим, то још научна јерес, која тек има да пробија себи пут и којој је суђено да само својим еклатантним практичним успесима придобија за себе скептике.

# ФИЗИЧКЕ КОНСТАНТЕ У ТЕОРИЈИ РЕЛАТИВИТЕТА[*]

*Физичке константе*, или физички *коефицијенти* су у класичној, не – релативистичкој физици стални бројеви који карактеришу по једну интимну особину материје. Питање о томе да ли се, и на који начин, ти коефицијенти према теорији релативитета мењају при релативном кретању посматрача и материје на које се односе, мало је до сада додиривано. Па и уколико је то чињено, резултати се не слажу и тврђења појединих релативиста противуречe једна другима.

Тако, за коефицијенат електричне проводљивости (специфички електрични отпор) $\rho$ велики број релативиста сматра, експлицитно или прећутно, да је непроменљив при једнаком праволинијском релативном кретању.[1] Уосталом, и Maxwell-ове једначине за електрицитет, које остају непромењене у теорији релативитета, претпостављају непроменљивост коефицијента $\rho$ који се сматра као константа што карактерише материју на коју се односи.

Са друге стране, поједине релативисте сматрају да релативно кретање мења бројеве који изражавају физичке коефицијенте. Тако проф. L. G. Du Pasquier долази до закључка да при једнаком праволинијском кретању посматрача и материје коефицијенат $\varphi$ расте у обрнутој пропорцији са Lorentz-овим фактором

$$\lambda = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

---

[*] Српска краљевска Академија, Глас, књ. CXXVII, Први разред, књ. 58, Београд 1927, стр. 1–16; саопштено у Академији природних наука 1. новембра 1926.

[1] B. n. pr. H. A. Lorentz: *Maxwell's electromagnet*, Theorie Encyclop, der math. Wiss. V. 2. t. I. 1924. p. 89. – H. A. Lorentz: *Weiterbildung der Maxw. Theorie* (ibid. p. 256). – M. von Laue: *Die Relativitälstheorie*, 4[e] édit, t. I. p. 20.

где је $v$ релативна брзина посматрача и материје, а $c$ = 300.000 Km. Sec.[2] представљајући брзину распростирања светлости у Галилејевом простору.[2]

Проф. Du Pasquier додаје да тај резултат изгледа као специјалан случај једнога општијег закона према коме се сви физички коефицијенти мењају при релативном кретању посматрача и материје. Међутим, он не наводи ништа прецизније о облику таквога закона.

Питање о тој промењљивости коефицијената предмет је ове расправе која се ограничава на случај једнаког праволинијског кретања.

*

Као и у обичном електростатичком систему мера, тако и Lorentz-овом систему мера који важи у теорији релативитета, сваки се физички коефицијенат може изразити помоћу три основне величине: дужине $L$, масе $M$ и времена $T$. Начин на који промене ових основних величина утичу на промене једног одређеног коефицијента $P$ исказује се *димензионим обрасцима* облика

$$[L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}], \tag{1}$$

где су $\alpha,\beta,\gamma$ позитивни или негативни бројеви, стални за један одређен коефицијенат $P$. Величина $P$ може се увек изразити као продукат од:

1. једнога апсолутног броја $P_{0,0,0}$ нулте димензије по $L, M, T$, тј. независног од промена тих основних величина;

2. једне величине $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ која према величинама $L, M, T$ има димензије $\alpha,\beta,\gamma$ и која се мења само при променама основних величина $L, M, T$ (при променама јединица мере за дужину, масу и време), али и то тако да при томе бројеви $\alpha,\beta,\gamma$ остају непромењиви.

Апослутан број $P_{0,0,0}$ добија се експериментом и он је увек одређена функција извесних дужина

$$l_1, l_2, \ldots, l_h,$$

извесних маса

$$m_1, m_2, \ldots, m_k,$$

и извесних размака времена

$$t_1, t_2, \ldots, t_i,$$

[2] Compte Rendu de la séance de la Société suisse de Physique, tenue à Lausanne le 24. Mai 1924. – Compte Rendu du Congrés de Liège 1924. de l'Association Française pour l'Avancemenet des Sciences.

које се величине непосредно мере. Облик те функције мења се не само од једнога коефицијента до другог, већ и за један исти коефицијенат од једне експерименталне методе за његову одредбу до друге. Али, у свима случајевима та ће функција бити нулте димензије по дужинама, масама и временим размацима што у њој фигуришу.

У обичној физици јединице мере за дужину, масу и време не мењају се при релативном кретању посматрача и апарата за мерење коефицијента $P$, па према томе оба броја $P_{0,0,0}$ и $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ остају непромењени кад се из мировања пређе у кретање.

Међутим, по теорији релативитета, при релативном кретању посматрача и апарата, неке од тих величина могу остати и непромењене, али неке се могу и мењати. Тако, у случају кад се посматрач налази према апарату у једнаком праволинијском кретању, дужине $l$ управне на правац кретања остају непромењене, а дужине паралелне томе правцу скраћују се пропорционално томе фактору. Из тога излази да ће се оба броја $P_{0,0,0}$ и $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ мењати при релативном кретању и да ће начин тога мењања зависити не само од брзине и правца кретања, већ и од оријентације појединих делова апарата према томе правцу.

Из тога се види:

1. *да не може постојати никакав општи закон варијације једнога одређеног коефицијента при једнаком праволинијском кретању*, онакве врсте какве су ти закони, нпр. за промене дужина, маса, размака времена, енергије итд.;

2. *да за сваки коефицијенат, за једну уочену методу његовог одређивања и за једну одређену оријентацију појединих делова апарата за то одређивање, постоји по један закон варијације који се мења од једног специјалног случаја до другог.*

Одређивање тога закона своди се, у првоме реду, на одредбу облика функције величина $l, m, t$ из које се у посматраноме случају, кад се у њој буду дужине, масе и размаци времена сменули њиховим бројним вредностима, израчунава апсолутан број $P_{0,0,0}$, што одговара релативној непокретности посматрача и апарата. Затим је потребно знати облик у који иста функција прелази кад се претпостави да се посматрач налази у релативном кретању према апарату. За то није довољно знати само начин промена величина $l, m, t$ при томе кретању, већ и то да ли ће у теорији релативитета, при кретању, важити везе између појединих елемената из којих, у случају непокретности, резултира нађени облик поменуте функције и, ако то није случај, како се те везе модификују при кретању и какав облик функције оне, тако измењене, имају за последицу.

Осим тога, при самоме мерењу величина $l, m, t$, чије се бројне вредности имају сменити у тако одређеној функцији, треба водити рачуна и о овоме факту: свако се мерење своди на констатовање међусобног поклапања групе од двеју или више просторних тачака, или на констатовање истовремености таквих поклапања на једноме истом месту. По теорији релативитета нека су од таквих поклапања независна од релативног кретања посматрача и апарата, тј. она, ако су констатована кад су посматрач и апарат у релативној непокретности, остаће као таква и при релативном кретању ових. Али у великоме броју случајева неће бити тако: поклапања, констатована при релативној непокретности, нестају при релативном кретању. За одлучивање о томе са чиме се од овога двога у једноме датом конкретном случају има посла, потребно је за сваки специјалан случај нарочито испитивање.

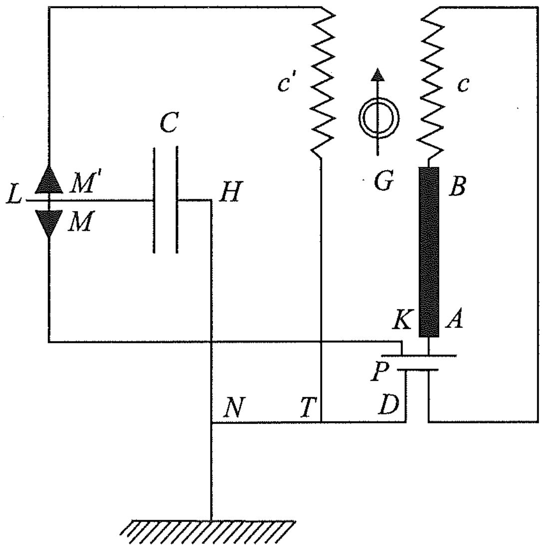
*

Да бисмо ова општа разматрања учинили јаснијим, применимо их на један интересантан специјални случај, који је и дао повода дискусијама овакве врсте.

У својој ранијој расправи *Durées physiques indépendantes des dimensions spatiales*[3] ја сам, са гледишта теорије релативитета, разматрао један, дотле недовољно запажен, експеримент проф. Lippmann-а, намењен одредби једне апсолутне јединице мере за време. Експеримент, замишљен и изведен пре појаве теорије релативитета (1887.год.), основан је на томе факту, да у електростатичком систему мера електрични отпор проводника има димензије времена и, у ствари, одиста и представља један одређени размак времена. Тако, ако се једно електрично коло изложи утицају електромоторне силе једнаке јединици мере за силу, и ако коло има отпор једнак отпору коцке од живе која би имала дужину ивице једнаку јединици мере за дужине, тада, да би кроз коло прошла јединица количине електрицитета, потребан је један размак времена који је тачно, по својој бројној вредности, једнак специфичном отпору $\rho$ живе. И оно што је при томе од нарочите важности, јесте факат да на ту бројну вредност $\rho$ ни уколико не утичу промене јединица мере за дужину и масу, пошто она не зависи од ових, већ само од времена.

Експеримент се, у својој суштини, своди на то да се два антагонистичка кола једнога диференцијалног галванометра $G$ (сл. 1) вежу у једно исто време са половима једнога галванског елемента $P$.

[3] Zürich. J. Fregy S. A. 1924.




*Слика 1*

Кроз прво коло, које има известан отпор $R$ (нпр. отпор једнога живиног стуба $AB$) галвански елеменат испушта континуалну струју јачине $i$, а кроз друго коло исти елеменат врши један испрекидани низ испражњавања, пунећи и испражњујући наизменично један кондензатор капацитета $C$ (што се врши, нпр. отварајући и затварајући наизменце струју елемента $P$ помоћу једне плочице $L$ која вибрира).

Кад оба кола пропуштају једну исту количину електрицитета у једноме истом размаку времена $\tau$, игла галванометра остаје за то време непрестано у једноме равнотежном положају. Прво коло пропушта за то време количину електрицитета једнаку вредности $\frac{E}{R}i$, где $E$ означава електромоторну силу елемента $P$. У другоме колу оптерећење кондензатора је $CE$, а за време $\tau$ број његових испражњавања је $\frac{\tau}{t}$, где $t$ означује размак времена између два узастопна испражњавања ($\tau$ и $t$ могу се изразити у каквим се хоће јединицама мере за време, јер то не утиче на број испражњавања кондензатора). Према томе, друго коло пропушта у размаку времена $\tau$ количину електрицитета једнаку вредности

$$CE\frac{\tau}{t}. \tag{2}$$

Погодба за равнотежу је, дакле,

(3) $$\frac{E}{R}\tau = CE\frac{\tau}{t},$$

одакле је

(4) $$t = CR.$$

Међутим, капацитет кондензатора је

(5) $$C = \frac{S}{2\pi e},$$

а отпор живиног стуба има за вредност

(6) $$R = \rho\frac{l}{s},$$

где су:

$S$ = површина кондензатора;
$e$ = дебљина кондензатора (растојања његових арматура);
$l$ = дужина живиног стуба АБ;
$s$ = површина пресека тога стуба.

Према томе је

(7) $$t = n\rho,$$

где је

(8) $$n = \frac{1}{2\pi}\frac{S}{s}\frac{l}{e} = \text{апсолутан број.}$$

На тај начин, размак времена $t$ између два догађаја (два узастопна испражњавања кондензатора) изражава се као продукат једне специфичне константе материје (специфичног електричног отпора живе) и једнога апсолутног броја који се мења од једнога размака времена до другог.

Сам коефицијенат отпора $\rho$ добија се у облику

(9) $$\rho = mt,$$

где је

(10) $$m = 2\pi\frac{S}{s}\frac{e}{l},$$

тако, да улогу броја $P_{0,0,0}$ игра апсолутан број $m$, а улогу броја $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ игра величина $t$, за коју је

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1.$$

У колико ће се тај резултат променити кад се стане на гледиште теорије релативитета?

Да би се то видело, претпоставимо да је Lippmann-ов експеримент изведен у једноме систему $S$, или да га посматра посматрач $A'$ који припада једноме систему $S'$, што се налази у једнаком праволинијском релативном кретању према систему $S$. Ми ћемо се најпре уверити да целокупно извођење, којим посматрач $A$, у систему $S$ долази до обрасца (9), вреди и за посматрача $A'$, тако да обрасци који ће важити за овога посматрача, нису ништа друго до обрасци који важе за посматрача $A$, пошто се у овима дужине и размаци времена смене вредностима које за њих буде нашао посматрач $A'$.

Тога ради приметићемо ово:

1. Lorentz-ов систем мера, који важи у теорији релативитета, подудара се, у погледу димензија, са обичним електростатичким системом мера. Према томе, и са гледишта релативитета, коефицијенат $\rho$ има димензије једнога размака времена.[4]

2. Ohm-ов закон, према коме континуална струја једнога галванског елемента производи у размаку времена $\tau$ количину електрицитета чија је вредност $E\frac{\tau}{R}$, важи такође и у релативистичкој електродинамици за тела која су у релативном кретању према посматрачу.[5] Разлика потенцијала (електромоторна сила) $E$, отпор $R$, и размак времена $\tau$ могу се мењати у току кретања и постати $E', R', \tau'$, али количник $\frac{E'}{R'}$, представљаће непрестано количину електрицитета у јединици времена, а вредност $\frac{E'}{R'}\tau'$, представљаће исту количину за време $\tau'$.

3. Факт да друго електрично коло диференцијалног галванометра пропушта количину електрицитета $CE\frac{\tau}{t}$ важи и за релативисте за систем у кретању, под погодбом да се величине $C, E, \tau, t$, промене у $C', E', \tau', t'$. У исто време, зна се да је и са гледишта теорије релативитета за мерење једне количине електрицитета сасвим свеједно да ли она долази од једног галванског елемента или од испражњавања

---

[4] в. нпр. Maxwell: *Traité d'electr. et du magnetisme*, t. I. p. 458.

[5] в. нпр. M. von Laue: *Die Relat. Theorie*, 4$^{e}$ edit. t. I. p. 176. – H. A. Lorentz, Loc. cit. p. 94 et p. 150.

једног кондензатора[6] , према чему, кад је успостављена равнотежа на диференцијалном галванометру, мора бити

$$(11) \qquad \frac{E'}{R'}\tau' = C'E'\frac{\tau'}{t'},$$

као и у случају релативне непокретности.

4. То успостављање равнотеже је оно што је најглавније у Lippmann-овом експерименту, јер је равнотежа трајна, а не тренутна. Међутим, зна се да се трајне равнотеже не нарушавају при кретању система. Оне се своде на трајно поклапање двеју релативистичких тачака (тачка – догађај) на истоме месту и у истоме тренутку, а таква поклапања имају један одређен и апсолутан смисао који важи за све посматраче, било у мировању или кретању. Ако је, дакле, такво поклапање постигнуто за посматрача у систему $S$, оно остаје у важности и за посматрача у систему $S'$.

А из свега тога излази овај закључак:

Размак времена $\Delta t$ између два узастопна испражњавања кондензатора биће за посматрача у систему $S$ дат обрасцем

$$(12) \qquad \Delta t = n\rho,$$

где је

$$(13) \qquad n = \frac{1}{2\pi}\frac{S}{s}\frac{l}{e},$$

а за посматрача у систему $S'$ обрасцем

$$(14) \qquad \Delta t' = n'\rho',$$

где је

$$(15) \qquad n' = \frac{1}{2\pi}\frac{S'}{s'}\frac{l'}{e},$$

а где $\rho'$ представља коефицијенат електричног отпора живе на 0°C. мерен од посматрача у систему $S'$. Па пошто је, према теорији релативитета

$$(16) \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\lambda},$$

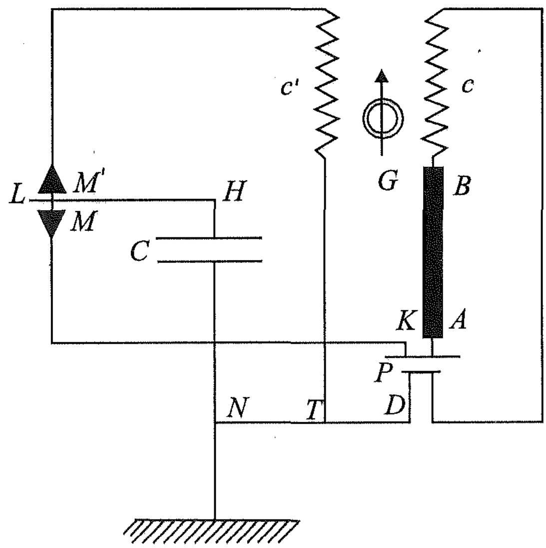
где је $\lambda$ Lorentz-ов фактор, то се добија да је

[6] в. нпр. Max Born: *La Théorie de la Relativité*, p. 155.

(17) $$\rho' = \frac{\theta}{\lambda}\rho,$$

где је

(18) $$\theta = \frac{S}{S'}\frac{e'}{e}\frac{l}{l'}\frac{s'}{s}.$$




*Слика 2*

Обе вредности $\theta$ и $\lambda$, па, дакле, и њихов количник $\frac{\theta}{\lambda}$, су апсолутни бројеви, независни од избора јединица мере за дужине, масе и размака времена. Међутим, број $\theta$, па, дакле, и $\frac{\theta}{\lambda}$, *зависе од оријентације појединих делова апарата према правцу релативног кретања, и од брзине тога кретања*. А како то утиче на промене коефицијента $\rho$ кад га одређује посматрач из система $S'$, види се из ових случајева:

***Први случај***: нека су арматуре кондензатора паралелне живином стубу $AB$, а правац кретања управан на живин стуб (сл. 1); тада се налази

(19) $$\rho' = \lambda\rho.$$

***Други случај***: нека су арматуре кондензатора и правац кретања паралелни живином стубу (сл. 1), па се налази

(20) $$\rho' = \frac{\rho}{\lambda^3}.$$

***Трећи случај***: нека су арматуре, као и правац кретања, управне на живином стубу (сл. 2), па ће бити

(21) $$\rho' = \frac{\rho}{\lambda}.$$

***Четврти случај***: нека су арматуре управне на живином стубу, а правац кретања паралелан томе стубу, па је

(22) $$\rho' = \frac{\rho}{\lambda}.$$

Као што је то први приметио проф. Du Pasquier, и као што се види из набројаних случајева, ако се у Lippmann-овом експерименту дâ таква оријентација појединим деловима апарата, да су арматуре кондензатора паралелне живином стубу, закон по коме се коефицијенат ρ мења при релативном кретању, *не зависи од правца кретања и тај је коефицијенат тада обрнуто пропорционалан Lorentz-овом фактору* ρ.

Али, већ при другој каквој оријентацији делова тај је закон сасвим другог облика, као што је то, нпр. у првоме од набројаних случајева, где се ρ мења пропорционално фактору λ, или у другоме случају, где је тај коефицијенат обрнуто пропорционалан трећем степену тога фактора.

Из тога се већ јасно види оно што смо горе тврдили: да закон промене коефицијента ρ зависи не само од брзине релативног кретања посматрача и апарата, већ и од оријентације појединих делова апарата према правцу кретања. А кад се узме у обзир и то да за мерење истога коефицијента постоји више метода са разноликим распоредом и оријентацијом појединих дужина, јасно је да је неодређеност тога закона још већа и да свака метода доводи до више разноликих закона те врсте.

*

Посматрајмо са још једног гледишта Lippmann-ов експеримент, који, са гледишта обичне, класичне механике, неоспорно пружа начин за апсолутно мерење времена, независно од свих могућих астрономских пертурбација које могу мењати секунду као јединицу мере.

Видели смо да је, по тој методи, размак времена између два узастопна испражњења кондензатора дат обрасцем

(23) $$\Delta t = n\rho,$$

где је $n$ апсолутан број дат обрасцем (13).

За посматрача у покретном систему $S'$ исти би размак времена био дат обрасцем

$$\Delta t' = n'\rho', \tag{24}$$

где је $n'$ апсолутан број дат обрасцем (15), према чему је

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \theta\frac{\rho'}{\rho}, \tag{25}$$

где је $\theta$ апсолутан број дат обрасцем (18).

Кад су арматуре кондензатора управне на живином стубу, ма какав био правац релативног кретања увек је $\theta = 1$, тако да је

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\rho'}{\rho}. \tag{26}$$

Као што је казано, Maxwell-ове једначине, за које се у теорији релативитета сматра да дају један од најчвршћих ослонаца тој теорији, изрично претпостављају да је вредност коефицијента $\rho$ независна од кретања. Физичар из чијих је радова и поникла теорија релативитета, H. A. Lorentz, изрично каже да тај коефицијенат сматра за непромењљив број, као што га сматра и релативистички теоретичар, проф. M. von Laue.

Али, ако се тако узме, онда је

$$\rho' = \rho,$$

па, дакле и

$$\Delta t' = \Delta t,$$

што би довело до овога резултата који је у потпуној несугласици са теоријом релативитета:

Lippmann-ов експеримент, са подесном оријентацијом делова апарата, пружао би могућност да се време мери на један начин у коме се просторни елементи сами собом елиминишу и који доведе до резултата мерења потпуно независног од релативног кретања посматрача и апарата.

Ја сам тај резултат изнео у наведеној својој расправи и он је дао повода дискусијама између релативиста[7] који су нашли да је он пот-

---

[7] Séance de la Soc. suisse de Physique du 24. Mai 1924 (Lausanne). – Congrés de l'Assoc. française pour l'avancement des Sciences (Liége, Juillet 1924).

пуно оправдан ако се остане при тврђењу да је коефицијенат $\rho$ апсолутна константа и у теорији релативитета.

Да би се несугласица избегла, проф. Du Pasquier[8] , да би се, по његовим речима „одржала теорија релативитета" налази да се горње тврђење о непромењљивости коефицијента $\rho$ мора сменити другим, према коме би *вредност тога коефицијента била обрнуто пропорционална Lorentz-овом фактору* $\lambda$.

И одиста, такав се закон слаже са оним до кога се долази у напред наведеном трећем и четвртом случају размештаја делова у Lippmann-овом апарату (арматуре кондензатора управне на живином стубу). Али се он већ не слаже са оним законима за те промене до којих доводи оријентација апарата у наведеноме првом и другом случају (арматуре кондензатора паралелне живином стубу): у првоме случају отпор $\rho$ се мења пропорционално фактору $\lambda$, а у другом он је обрнуто пропорционалан трећем степену тога фактора.

Закон проф. Du Pasquier-а важио би, дакле, само за једну специјалну оријентацију делова Lippmann-овог апарата; за друге оријентације важили би сасвим други закони, мада су и метода одређивања коефицијента $\rho$ и апарат за то одређивање једни исти.

*

Случај коефицијента $\rho$ довољно илуструје оно што ће се имати и за ма који други физички коефицијенат. Ти коефицијенти не само да по теорији релативитета не могу бити сталне количине и не само да се мењају у току релативног кретања посматрача и материје, већ те промене уопште и не подлежу каквоме сталном, апсолутном закону. Начин промена зависи од случајности на које се може наићи при избору метода за одређивање коефицијената, при оријентисању појединих делова апарата којим се буду вршила мерења и при изменама правца релативног кретања посматрача и апарата. Мењање метода, распореда апарата и правца кретања доводиће не само до разних вредности за један исти коефицијенат материје, већ и до разних облика закона по којима се ови мењају при релативном кретању.

Но, ипак, поред све те неодређености, може се извести један општији закључак.

Апсолутан број $P_{0,0,0}$, што одговара једној уоченој физичкој константи и који је, за једну одређену експерименталну методу одређивања те константе, увек одређена функција извесних дужина $l_1, l_2, l_3, \ldots$,

[8] L. G. Du Pasquier: *Une methode de Lippmann pour mesurer le temps absolu envisagée au point de vue de la relativité*, Compte rendu du Congrés de A.F.A.S. de Liège 1924, p. 5.

извесних маса $m_1, m_2, m_3, \ldots$, и извесних размака времена $t_1, t_2, t_3, \ldots$, што се непосредно мере, нулте је димензије по свима тим елементима. Другим речима: у тој функцији фигуришу само количници дужина, количници маса и количници размака времена, тако, да је она облика

$$P_{0,0,0} = \Phi\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{l_3}{l_4}, \ldots; \frac{m_1}{m_2}, \frac{m_3}{m_4}, \ldots; \frac{t_1}{t_2}, \frac{t_3}{t_4}, \ldots\right). \tag{27}$$

Претпоставимо да је употребљена метода такве врсте да везе између појединих елемената у њој, које буду важиле за случај непокретности, важе и у теорији релативитета при једнаком праволинијском релативном кретању посматрача и апарата (као што је, нпр. случај са Lippmann-овом методом одређивања коефицијента ρ). Претпоставимо такође да се сама мерења своде на посматрање таквих поклапања подела скале и покретних делова употребљеног инструмента за мерење, која су независна од релативног кретања, тј. која су таква да, ако су константована кад су посматрач и инструменат у релативној непокретности, она остају као таква и при релативном кретању ових. Такав је случај кад је метода мерења једна од „метода нуле“, као што је то било при напред наведеном одређивању коефицијента отпора ρ.

Кад би се све величине једне исте врсте: дужине, масе и размаци времена мењали на један исти начин при једнаком праволинијском кретању, тако да количници

$$\frac{l_k}{l_h}, \frac{m_k}{m_h}, \frac{t_k}{t_h} \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots \\ h = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix} \tag{28}$$

остану непромењени у току таквог кретања, број $P_{0,0,0}$ остао би и сам непромењен. Али, та непромењивост важи само за масе и размаке времена, пошто је

$$\begin{aligned} m'_k &= \frac{m_k}{\lambda} & m'_h &= \frac{m_h}{\lambda} \\ t'_k &= \frac{t_k}{\lambda} & t'_h &= \frac{t_h}{\lambda} \end{aligned} \tag{29}$$

али не важи за дужине. Наиме за дужине оријентисане у правцу кретања биће

$$l'_i = \lambda l_i,$$

а за дужине управне на правац кретања је

$$l'_i = l_i.$$

Из тога излази да ће, у општем случају, апсолутан број $P_{0,0,0}$ бити облика $f(\lambda)$, где је $f$ функција само једне променљиве количине, која ће зависити не само од употребљене методе за одредбу посматраног физичког коефицијента, већ и од оријентације инструменталних делова према правцу кретања.

Што се тиче броја $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ који се, кад нема релативног кретања, мења само при променама јединица мере за дужине, масе и времена, при чему бројеви $\alpha,\beta,\gamma$, остају непроменљиви, он, кад су посматрач и апарат у једнаком праволинијском релативном кретању, добија нову вредност

$$P'_{\alpha,\beta,\gamma} = \left(\frac{L'}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{M'}{M}\right)^{\beta}\left(\frac{T'}{T}\right)^{\gamma} P_{\alpha,\beta,\gamma}. \tag{30}$$

А пошто је

$$L' = \lambda L, \quad M' = \frac{M}{\lambda}, \quad T' = \frac{T}{\lambda}, \tag{31}$$

то је

$$P'_{\alpha,\beta,\gamma} = P_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda^{\alpha-\beta-\gamma} \tag{32}$$

из чега се, комбинујући га са оним што је напред казано за број $P_{0,0,0}$, долази до овога општег закључка:

Кад год је свака од дужина, чије величине утичу на резултат одредбе једнога физичког коефицијента, оријентисана или у правцу кретања, или управно на тај правац, *вредност је коефицијента једнака оној коју он има при релативној непокретности, помноженој вредношћу* $\mathrm{F}(\lambda)$, *где је* $\lambda$ *Lorentz-оф фактор, а* $\mathrm{F}$ *функција једне променљиве количине.*

Облик функције $F$ зависи од употребљене методе за мерење и од оријентације инструменталних делова према правцу релативног кретања.**

---

** Рад је приказан у FdM, B.54, S.949–950 (J. Карамата) и Revue sémestrielles publications mathématiques, 1932, t. XXXVI (пр. Д. Т.).

# ФИЗИЧКЕ МЕРЕ ЗА ВРЕМЕ*

Какву год да имамо идеју о природи времена, његово *непосредно* мерење није могуће. Не може се остварити јединица трајања, да би се она затим пренела на неко протекло трајање. Треба, дакле, време мерити *посредно*, помоћу трагова које оставља његово деловање.

Ови трагови се манифестују, уопште, као промене у току времена. Тако је кретање пружило најближе и најједноставније средство за мерење времена. Дефинисање непроменљиве јединице времена није ишло без озбиљних тешкоћа, али ове су ипак биле ублажаване експериментима утврђеном чињеницом да су се различита кретања подвргавала на сагласан начин еквивалентним мерама времена. Ритмичка кретања уводе појам једнаких времена и дају јединицу за његово мерење: наизменично ређање дана и ноћи као и годишњих доба, ротација земље, зидни часовник са клатном, ручни часовници са опругом, светлосне вибрације. Идеја времена обухвата идеју *трајања* и идеју *истовремености*. Инструменти за мерење трајања су часовници чије се функционисање заснива на следећој последици принципа довољног разлога: ако се под строго једнаким условима понове феномени исте врсте, њихова трајања су иста.

Велики астрономски часовник, онај који представља ротација земље, даје универзално усвојену јединицу времена, *секунд* који се одређује са великом тачношћу и лакоћом. Али ова јединица није апсолутно непроменљива. Трајање дневног кретања подложно је деловању вековних узрока поремећаја, од којих се неки, као што су колебања плиме и осеке, не могу ни израчунавати. Јединица времена, *секунд*, од тога трпи вековне варијације, веома споре, које би ипак, бар једанпут у сваком столећу, требало контролисати индиректно и независно од било које астрономске чињенице.

---

* Наслов оригинала: *Étalons physiques de temps*, Publ. de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, Belgrade 1933, t. II, pp. 5–10.

Али како дефинисати, у ту сврху, неку јединицу времена која би била апсолутно непроменљива, па би могла да послужи за такву контролу? Таква једна јединица требало би да буде независна од било које конвенције учињене ради мерења и од каквог било избора јединице који учествује у њеном одређивању. Поступак овог одређивања требало би да буде такав да не долази у обзир мерење сталних или променљивих величина, него само констатовање неке равнотеже, неког трајног слагања које би се по вољи могло регулисати и посматрати. Да ли се може доћи до таквог једног поступка?

Одговор пружа чињеница да кретање материјалних система није једино чиме се мери време. Могуће је замислити и остварити поступке *физичкоī мерења* времена, које се не позива на кретање система, у коме, дакле, утицај геометријских и механичких елемената, који су уведени као помоћни елементи, сам себе елиминише.

Могућност таквог поступка може се предвидети теоријски на основу димензионалних формула за физичке величине. Тако, претпоставимо да такве величине које чине низ

(1) $$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

имају као димензионалне формуле

(2) $$\begin{aligned} P_1 &= \left[L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1}\right] \\ P_2 &= \left[L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2}\right] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n &= \left[L^{\alpha_n} M^{\beta_n} T^{\gamma_n}\right], \end{aligned}$$

где су $\alpha_i, \beta_i$ и $\gamma_i$ фиксирани рационални бројеви. Нека је

(3) $$\varphi(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

неки израз који је, због формула (2), првог степена по $T$ а нултог степена по $L$ и $M$.* На пример, у случају када је могуће одредити $n$ фиксних рационалних бројева

(4) $$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

тако да буде

---

* Слова *L, M* и *T* означавају редом француске речи које њима почињу: *longueur* (дужина), *masse* (маса) и *temps* (време), (прим. прев.).

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n = 0$$
$$\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \ldots + \lambda_n\beta_n = 0$$
$$\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \ldots + \lambda_n\gamma_n = 1,$$

производ

$$P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} \ldots P_n^{\lambda_n}$$

ће представљати такав један израз (3). Тако дефинисана величина

$$Q = \varphi$$

*имаће онда димензије времена и биће независна од избора јединица дужине и масе.*

Претпоставимо још: 1. да $Q$ представља неку физичку величину која мери извесну специфичну особину материје, што ће рећи једну *специфичну константу*; 2. да, кад већ $Q$ има димензије времена, неки производ $\lambda Q$ где је $\lambda$ *апстрактан број*, представља известан конкретан временски интервал, обележен са два позната догађаја.

У тим условима, *величина $\lambda Q$ ће дати меру једног интервала времена која не зависи од избора јединица дужине и масе.*

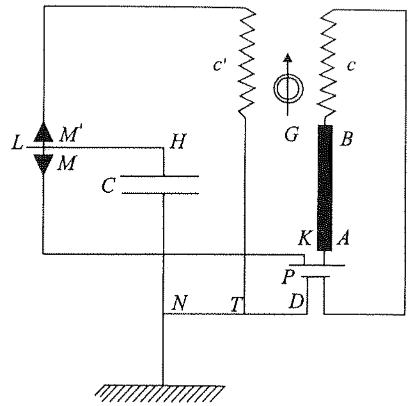
Међу оваквим величинама $Q$ налази се *специфични електрични отпор* (електрична отпорност) супстанце проводника за коју је претпостављено да се може поново наћи са самом собом идентична у истим условима температуре, притиска, итд. Одређености ради, изаберимо живу на температури од 0°, за коју се може одредити, помоћу више метода и са великом прецизношћу, отпорност $\varphi$ у апсолутним електростатичким јединицама. Константа $\varphi$ дефинише једно специфично својство мерења; она је према томе, апсолутно непроменљива физичка величина. Изражена у електростатичким јединицама, величина $\varphi$ је нултог степена по $L$ и $M$ и првог степена по $T$. Али то није једноставно величина која има димензије времена: то је *конкретан временски интервал* између два позната догађаја.

Да бисмо то показали, посматрајмо следећи уређај који је 1887. године изумео г. Липман. Овај велики физичар га је на следећи начин описао:[1]

Једна батерија $P$ електромоторне силе $E$ активира истовремено два супротна кола диференцијалног галванометра $G$. У првом колу галванометра, које има отпор $R$ (на пример, онај стуб живе $AB$), батерија шаље непрекидну струју са интензитетом $i$; у другом колу батерија шаље испрекидан низ пражњења добијених периодичним пуње-

[1] *Г. Липман, О једној апсолутној јединици времена*, Compt. rend. de l'Acad. des Sciences 1887. T. CIV N° 16, стр. 1070–1074.

њем, помоћу батерије, једног кондензатора са капацитетом $C$, који се затим празни кроз ово коло (на пример, помоћу вибрирајућег језичка $L$). Игла галванометра остаје у равнотежи ако две струје дају једнаке количине електрицитета у току извесног времена $\tau$.



*Слика 1*

Претпоставимо да је овај услов равнотеже испуњен и да је игла у равнотежном положају. Притом се услов равнотеже описује као што следи. У току времена $\tau$, непрекидна струја даје количину електрицитета $\frac{E}{R}\tau$; с друге стране, свако пуњење кондензатора једнако је $CE$ а број пражњења у току времена $\tau$ једнак је $\frac{\tau}{t}$, где је $t$ временски интервал између два узастопна пражњења; овде је претпостављено да су $\tau$ и $t$ изражени помоћу претпостављене јединице времена. Друго коло даје, дакле, количину електрицитета једнаку

$$CE\frac{\tau}{t},$$

па се; као услов равнотеже, добија

$$\frac{E}{R}\tau = CE\frac{\tau}{t},$$

одакле излази

(6) $$t = CR.$$

Но, како је капацитет кондензатора

$$C = \frac{S}{2\pi e},$$

где је $S$ површина а $e$ густина кондензатора и како је

$$R = \rho\frac{l}{s},$$

где су $s$ и $l$ редом пресек и дужина живиног стуба $AB$, налази се

(7) $$t = \lambda\rho,$$

где је

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{S}{s} \cdot \frac{l}{e} \text{ апстрактан број.}$$

*Временски интервал* t *између два догађаја* (два узастопна пражњења кондензатора) *на тај начин мери се производом једне специфичне и непромењиве константе материје и једног апстрактног броја који се мења од једног временског интервала до другог.*

Таква би била вредност времена $t$ добијена остављајући све јединице неодређене. Како специфична константа $\rho$ има димензије времена, могуће је изразити је помоћу секунди, тада би се имало $t$ у секундима. Стављајући $\rho = 1$, добија се апсолутна вредност $\theta$ истог временског интервала изражена том јединицом, у облику

$$\theta = \lambda = \text{апстрактан број.}$$

Такође ће том јединицом узетом за комутатор, који производи узастопна пуњења и пражњења кондензатора, један размак вибрирања, трајање једне вибрације, бити изражено апстрактним бројем $\lambda$.

Таква јединица времена на тај начин добијена је од *неуништивог временског узорка*: то је временски интервал између два узастопна пражњења кондензатора када је, уколико Липманов уређај има за константу $\lambda = 1$, брзина пражњења регулисана тако да се игла галванометра одржава на нули.

Може изгледати необично, каже Липман, што се иза назива електричног отпора крије један интервал времена повезан са једном специфичном особином материје. Али довољно је сетити се да су, у електростатичком систему, јачине струје брзине протицања и да су отпори трајање времена, наиме време потребно да струја у одређеним условима протекне. Ако се посматра коло чији је отпор једнак отпору коцке живе чија је страна јединица дужине, за протицање кроз то коло јединице количине електрицитета биће потребно одређено време, а то је управо $\rho$. Могло би изгледати да ће то време зависити од избора јединица дужине и масе; али саме димензије величине $\rho$ показују да оне на њега не утичу. А видели смо како се може остварити временски интервал који би био познати умножак величине $\rho$.

Колики је степен тачности коме се можемо надати од тог поступка мерења времена? Да би то установио, Липман поступа на следећи начин.

У формули (6) величине $C$ и $R$ треба да буду познате у апсолутним вредностима, што значи да ће се знати да је $C$ једнако $p$-тострукој вредности капацитета сфере полупречника $h$, тако да ће се имати

$$C = ph.$$

Исто тако, знаће се да је $R$ једнако $q$-тострукој вредности коцке од живе чија је страна $h$, тако да је

$$R = q \cdot \frac{\rho}{h}.$$

Онда се добија

$$t = pq \cdot \rho.$$

Стављајући $\rho = 1$, добија се апсолутна вредност овог интервала (на пример трајање једне вибрације комутатора) у зависности од те јединице, у облику производа два апстрактна броја

$$t = pq.$$

Да се добије $q$, најпре ће бити потребно конструисати живин стуб познатих димензија: овај проблем решио је Међународни биро за тежине и мере када је био конструисан законски om. За законски om претпоставља се да има, по дефиницији, отпор једнак 10600-струкој вредности отпора коцке, од живе чија је страна 0,01 m. Добијена тачност налази се између граница

$$\frac{1}{50\,000} = 0{,}00002 \quad \text{и} \quad \frac{1}{20\,000} = 0{,}00005.$$

Да би се добило $p$, требало би конструисати раван кондензатор познатог капацитета; овде би се тешкоћа састојала у познавању са довољном тачношћу дебљине ваздушне плочице. Са тим циљем могу се као арматуре употребити две оптички обрађене стаклене површине, које су посребрене да би се учиниле проводницима, али доста лако како би се помоћу провидности добили Физоови прстени интерференције. *Можемо се тако надати постизању тачности стохиљадитог реда за вредност апстрактног броја* pq.

Липманов апарат крајње је осетљив на промене брзине комутатора. Ако је подешен тако да намагнетисана игла буде на нули, довољно је да та брзина веома мало порасте па да се равнотежа поремети и да игла скрене у одговарајућем смеру; ако се, обрнуто, брзина смањи, преовладаће дејство супротног кружног тока, па ће игла скренути у супротном смеру. Ова скретања су, шта више, сразмерна променама брзине. Са батеријом која даје 10 пражњења у секунди и са Томсоновим диференцијалним галванометром од $10^{-10}$ ампера, добијена осетљивост износи $10^{-6}$, што ће рећи да се промена брзине за њен милиони деo показује скретањем игле за један милиметар после једног секунда. Ова осетљивост се, уосталом, може неограничено увећавати уколико се увећавају димензије апарата.

Може се, додаје овоме Липман, пронаћи тако са великом тачношћу брзина комутатора која остаје увек иста, под условом да чврсти делови апарата (кондензатор и отпорник) буду заштићени од онога што проузрокује мењања и увек употребљавани на истој температури. Апарат би, уосталом, био у најбољим условима непромењивости, јер су му сви делови масивни и непокретни; од њих се само тражи да буду са себи самима идентични, а није потребно бавити се трошењем точкова, старошћу уља, ни променама тежине. Овај систем, дакле, даје еталон времена који заиста не може пропасти, тј. може се неограничено дуго одржавати.

*

Зашто Липманова идеја није остварена, чак је астрономи нису ни узели у разматрање, мада је она сасвим остварљива, а може се и усавршити и бити од неоспорне користи за астрономију?

Зашто она остаје као позив великог физичара, упућен астрономима, да се један пут бар у току века покуша извођење поређења узорака за мерење астрономског и физичког времена – да би се одатле извеле последице?

Колико због своје неоспорне занимљивости толико због своје важности, ово питање изгледа нам достојно међународне сарадње, за коју не би требало штедети ни напоре ни средства.

# АСТРОНОМИЈА – ХЕМИЈА ЕЛЕКТРИЧНЕ АНАЛОГИЈЕ

# ПОВОДОМ ЈЕДНЕ НЕДАВНЕ ПРИМЕНЕ АСТРОНОМИЈЕ НА КЛИМАТОЛОГИЈУ*

Један нов научни подухват управо је у току ове године окончан на Универзитету у Београду, сарадњом математичара и астронома који предају математичку физику, небеску механику и астрономију на Факултету природних наука овог Универзитета. Подухват се састоји у формирању једне приближне слике тока осунчавања површине Земље, као и односа који постоји између осунчавања и температуре земљине површине с једне и атмосфере с друге стране.

У својој класичној *Математичкој теорији топлоте*, већ се Поасон бавио овим проблемом, али непознавање закона зрачења није му дозволило да дође до његовог решења. Други аутори, на пример, Мер, Винер, Анго, Зенкер и Хан, дали су извесну математичку слику осунчавања земаљског глобуса, али нису проучавали однос између тог осунчавања и температуре.

Г. М. Миланковић, професор примењене математике на Факултету природних наука, прихватио се задатка добијања решења проблема које би било онолико потпуно колико је то могуће при актуелном стању сазнања физике а која се односе на зрачење Сунца и на атмосферску апсорпцију. Са тим циљем, требало је пре свега објаснити неке противречности и отклонити неке грешке из ранијих теорија – које су се односиле на расподелу сунчевог зрачења на површини Земље. Пошто је то учињено, било је потребно математичким изразима за осунчавање Земље дати облик погодан за израчунавање њихових секуларних (вековних) варијација. Тада је установљено да проблем палеоклиме и, посебно, проблем ледених доба може бити обухваћен облашћу ових истраживања. Тек пошто је реализовао овај програм, г. Миланковић је могао предузети истраживање повезаности између стања

---

* Наслов оригинала: *A propos d'une récente application de l'astronomie à la climatologie*, Publications de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, Belgrade 1932, t. I, pp. 7–12.

осунчаности и температуре других небеских тела, чије површине имају температуре одређене зрачењем Сунца.

Проблем који је требало решити имао је два различита дела: физички и астрономски. Први од њих, заснован на једном скупу чисто физичких закона и теорија, тиче се интензитета осунчавања Земље под утицајем атмосферске апсорпције, и то у посматраном тренутку; он зависи само од тренутног положаја планете у односу на Сунце и своди се на један геометријски проблем. Други, много занимљивији, део односи се на колебања осунчавања у току времена и зависи од релативногкретања Земље у односу на Сунце; он се своди на један астрономски проблем. Коришћењем метода небеске механике, могуће је тада математичким формулама приказати не само дневне и годишње варијације осунчавања у посматраној тачки површине Земље, него такође и вековни ток тих варијација. Г. Миланковић, у сарадњи са својим колегом г. Мишковићем, професором Астрономије на Факултету природних наука на Универзитету у Београду, тако је дошао до једне математичке слике третираног проблема, у којој формуле и нађене нумеричке вредности имају право научно утемељење, сасвим лишено емпиријских обележја.

Познато је, заиста, да колебања у току осунчавања Земље зависе од варирања њених орбиталних елемената, наиме: од промена ексцентрицитета $e$, нагиба елиптике $\varepsilon$ и лонгитуде перихела $\pi$. Ове промене долазе од истовременог пертурбирајућег дејства свих тела у сунчевом систему, првенствено великих планета, на елиптичке елементе кретања Земље око Сунца. У небеској механици доказује се да се то дејство састоји из два различита дела: један зависи од конфигурације посматраних тела, било оне међусобне, било према њиховим језгрима и перихелима, и враћа се на исто заједно са том конфигурацијом по истеку извесног времена. Ово је такозвани део *периодичних неједнакости*. Други, такозвани део *секуларних неједнакости*, – односи се на орбиталне елементе, и споро расте са временом.

Један од фундаменталних проблема који су се постављали у небеској механици био је да се зна да ли се секуларна варирања орбиталних елемената могу увећавати преко свих граница, па чак и пореметити стабилност система, или не могу. Одговор је гласио да секуларне варијације планетарних елемената, уз изузетак варијација лонгитуда перихела и језгра, остају затворене у уским границама, тако да ти елементи осцилују око неке средње вредности, од које се оне никад не удаљују за више од врло малих количина. Заиста, дакле, секуларне неједнакости приказују се исто тако у облику периодичних варијација, али чији су периоди много дужи од оних у случају периодичних неједнакости у правом смислу речи. Према томе, са аналитичког становишта оне се могу изразити такође у тригонометријском облику, као функција времена, чији су само периоди веома дуги.

За текуће потребе астрономских посматрања, тј. уколико су по среди интервали времена који не прелазе једну или две хиљаде година, с обзиром на спорост промена, оне се изражавају са задовољавајућом прецизношћу у облику алгебарских функција. Али то није случај кад се поставља питање израчунавања секуларних варијација за дуже временске интервале, нарочито за удаљене геолошке епохе, прошле или будуће. То је проблем из области небеске механике чије је решење, како теоријско тако и нумеричко, привлачило најпознатије астрономе и геометре из претходних времена.

Најпре Лагранжу, па затим Лапласу припада приоритет постављања основа теорије вековних неједнакости у кретању планета периодичног облика. Лагранж је, поред тога, први израчунао нумеричке вредности тих неједнакости за елементе шест тада познатих, великих планета. Али, мада су резултати тих рачуна били далеко од тога да дају слику реалног стања ствари, услед недовољних података о броју планета и о тачним вредностима њихових маса, ови теоријски радови двојице француских математичара били су од капиталног значаја за развој небеске механике.

После Лагранжа, рачуне у вези са секуларним неједнакостима предузео је, касније, Понтекулан, који је пред себе поставио задатак да их исправи уводећи у њих нову планету Уран, чији су елементи управо били одређени, као и нове вредности планетарних маса. Међутим, Понтекуланови резултати били су само грубо приближни, јер у то време планета Нептун још није била откривена, а такође и стога што су масе планета тада још биле недовољно познате.

Тек је средином прошлог века Леверије, примењујући математички апарат Лагранжа и Лапласа, могао да из њих извуче сву корист за израчунавања секуларних неједнакости. И да нам његово откриће планете Нептун није омогућило да увидимо да су она била исто тако непотпуна, Леверијеов рад би, колико својом елеганцијом, толиком својом тачношћу, без сумње остао база свих каснијих радова посвећених секуларним неједнакостима. Јер, дајући нумеричке вредности секуларним неједнакостима, Леверије је у исти мах израчунао коефицијент корективних чланова, у случају кад би масе планета добиле нека мања увећања.

Такође, из истог разлога, неких двадесет година касније Џ. Н. Стоквел наставља иста рачунања за осам главних планета, користећи последња одређивања њихових маса и одговарајућих орбиталних елемената.

Ово је био последњи потпуни рад ове врсте у небеској механици. Отада је Харцер истина поново извео исте рачуне; али, кад је овај његов рад био завршен, испоставило се да, због грешке у једној од полазних једначина, резултати тих рачуна нису могли бити искоришћени.

Овај летимични историјски преглед омогућује да се види докле је небеска механика стигла у израчунавању секуларних неједнакости. Долази се тако до закључка да се рад Стоквела наметао уколико је реч о решавању проблема колебања у ходу осунчавања зависном од секуларних неједнакости. И то утолико више што је, полазећи од истог тог рада, Пилагрим израчунао нумеричке вредности од $e$, $\varepsilon$ и $\pi$ за 1010 миленијума пре 1850. године. У свом првом раду и г. Миланковић се послужио овим радовима Стоквела и Пилигрима у примени своје нове математичке теорије која се односи на расподелу варијација сунчевих зрачења на површини планета, и Земље посебно.

Али, мада доста сагласни, бар у својим главним цртама, са данашњим сазнањима о променама климе на Земљи добијеним геолошким и палеоклиматским методама, резултате које је изложио у овом првом раду у очима аутора нове теорије, није требало сматрати коначним. Стога што су, с једне стране, ипак остала нека неслагања у појединостима између у геологији усвојених становишта и оних у овој новој теорији. С друге стране, зар нису Стоквелови и Пилигримови радови имали за базу одређивања маса планета која су данас већ застарела? Зар није било оправдано надати се да ће се, преузимајући исти овај посао, али уз исправљање вредности маса и идући нешто даље у погледу прецизности нумеричких рачуна, доспети до савршеног слагања између теорије и понашања проучаваних феномена?

Колико год да је овај задатак могао изгледати тегобан, будући да се састојао у поновном извођењу овог посла од самог почетка, пошто су на масама планета извршене корекције проистекле из последњих њихових одређивања, па затим поново израчунате вредности секуларних неједнакости за елементе кретања планета (што је обухватило 600 000 година пре 1800), г. Миланковић га је предузео без колебања. Помогнут од стране г. В. В. Мишковића, директора Астрономске опсерваторије Универзитета у Београду, који је преузео сва астрономска рачунања, могао је да приведе успелом завршетку ове радове на проверавању своје нове теорије промена климе на Земљи.

Међутим, не треба изгубити из вида да тако формирана слика представља само оно што би се могло назвати *математичком климом*, која не би требало да се разликује од климе која се опажа ако би се поседовала савршена теорија. Али, заиста је природно што је, како би се реализовао постављени задатак и привео добром завршетку предузети значајан посао, било потребно дозволити извесна упрошћења и занемарити поремећаје и утицаје од секундарне важности.

Тако се, на првом месту, само непотпуно познају закони зрачења, на пример. На другом месту, било је неопходно, да би се проблем свео на коначан број интеграбилних диференцијалних једначина, прихватити за стање на површини Земљине кугле и за стање њене атмосфере, као упрошћења, читав низ претпоставки које у стварности никад нису у потпуности остварене, али које се могу допустити у првој апроксимацији. Такве претпоставке обично се чине у проблемима код којих, међу многим узроцима који одређују феномен, мали број њих, а то су управо они најбоље познати, има претежну важност. Такав је, на пример, случај привлачних сила Сунца и Месеца у феномену плиме и осеке, у коме локалне или случајне околности, као што су конфигурација морског дна, степен стешњености вода тлом, правац ветрова, играју тек споредну улогу која се може занемарити а да тиме не буде преиначено оно што је у том феномену битно. У оваквом односу, упрошћавања физичког реда која је увео аутор теорије математичке климе сасвим су оправдана. Најважнија упрошћавања ове природе биће сажето приказана у ономе што следи.

Претпостављено је да је површина планете потпуно хоризонтална, као и да је хомоген материјал на површини који је чврст или течан и образује слој што учествује у разменама температуре. Атмосфера је изложена дејству тежине и задовољава законе идеалног гаса, па се тако налази, у погледу небулозности, у средњем стању, а његов састав и његова влажност зависе само од висине изнад површине Земље. Зрачење Сунца које продире у атмосферу, зрачење површине Земље и тамно зрачење атмосфере понашају се као зрачења одређене таласне дужине, тако да је комбиновани Кирхов-Стефанов закон овде применљив на сва три зрачења. Губици сунчевог зрачења у топлотном билансу Земље, које производе одбијање светлости од стране облака, честица атмосфере и површине тла, биће изведени у облику неке средње вредности зрачења пре његовог продирања у атмосферу. До размена топлоте између површине Земље и атмосфере долази само зрачењем. Притом се не узимају у обзир струје које у атмосфери настају услед поремећаја њене механичке равнотеже. Од свих тих претпоставки, ова последња је најважнија што се тиче последица; она оставља ван домета истраживања читав низ метеоролошких феномена.

У току рачунања учињена упрошћавања, ради савлађивања тешкоће аналитичке природе или оних у вези са практичним рачуном, исто тако су оправдана иако сужавају на више или мање осетан начин подручје важења добијених резултата у односу на променљиве. Таква би, на пример, била она која се састоје у заустављању неког развоја у ред на извесном броју његових првих чланова, у третирању неке променљиве као константе или као линеарно варирајуће величине у извесном довољно малом временском интервалу, или као дате својом средњом вредношћу у том интервалу, итд...

Али најозбиљније тешкоће са којима се сукобљавамо у овом проблему долазе од неизвесности на чему смо у израчунавању орбиталних елемената Земље за врло дуга времена. Ова неизвесност траје и данас, и поред напретка постигнутог у методама рачуна и у познавању нумеричких вредности које се појављују у рачунима. Она се увећава неизвесношћу одговора на питање где смо са израчунавањем маса планета, или чак броја ових. Ове неизвесности, које немају важности за временски интервал који би одговарао текућим потребама астрономских посматрања, стичу пресудну важност кад су у питању врло дуги интервали.

Све ово чини да слику климе на Земљи коју даје дело г. Миланковића треба сматрати почетном математичком сликом, која би са реалном сликом требало да се слаже у битним цртама, које би са овом последњом требало да имају као заједнички елемент карактеристичне одлике климе, при чему би ово слагање трајало у одређеном временском интервалу. Али не треба вршити њену екстраполацију изван овог трајања њеног важења. Свакако, међутим, то трајање се може проширивати, али би било пожељно да се претходно оно прецизније упозна у вези са садашњим стањем слике. То би захтевало темељнију ревизију рачунских поступака са становишта оцене утицаја упрошћавања, као и дубље испитивање утицаја могућих грешака у процењивању секуларних варирања орбиталних елемената. Ова сазнања дозволиће тада да се на начин који не подлеже сумњи утврди трајање у питању и пружиће могућност да се оно прошири у мери у којој се буде усавршавало познавање проблема.

У сваком случају, дело г. Миланковића донело је науци први пут једну заиста научну слику тока осунчавања површине Земље, односа између осунчавања и температуре површине глобуса, као и температуре његове атмосфере; то је прва егзактна математичка слика климе на Земљи, у њеним битним цртама и за одређени интервал времена. То је такво дело да Анали Астрономске опсерваторије у Београду сматрају својом дужношћу да је препоруче пажњи астронома.[1]

---

[1] Радови професора Миланковића изложени су у његовим књигама:

1. *Theorie mathematique des plenomènes thérmiqnes proetnits par la radiation salaire*, Париз 1920.

2 *Mathematische Klimalehre und Astronomische Theorie der Klimaschwalungen* (Landbuch der Klimatologie heransgegeban von W. Köjpn und R. Leiger, Verlag von Gebr. Bocutraeger Berlin 1930.

# ХЕМИЈА И МАТЕМАТИКА*

Одавна је речено да се математиком не налази ништа ван онога што је већ садржано у подацима од којих она полази. Али тај садржај, по начину како се представља нашим запажањима, може бити очигледан или неприступан, са свима нијансама између тога двога. За природу нема простоте ни компликованости, површности или дубине истина, али је има, у свима могућним ступњима, за људска схватања и истраживања.

Значај математике у њеним конкретним применама лежи у тачности и поузданости научног инструмента који она пружа да се дође до истина скривених у полазним подацима. То што вреди за примене математике уопште, вреди и за њене примене у хемији. У тим применама имају се као подаци сматрати: са једне стране утврђене или хипотетичке релације и правилности између количина са којима се има посла; са друге стране бројни подаци који би били дати за поједине специјалне случајеве обухваћене таквим релацијама и правилностима.

Почевши од практичног хемичара, који само врши хемијске анализе, па до чистих теоретичара који у хемију уводе нове хипотезе и отварају нова поља за истраживања, сваки хемичар има да *рачуна,* да врши израчунавања било помоћу простих аритметичких радњи, било са компликованијим рачунским инструментом који дају разне партије теоријске математике.

Атомска хипотеза, са својим законом простих и умножених пропорција, своди квалитативан и квантитативан опис ма какве хемијске реакције на *хемијске једначине.* Из ових хемичар, знајући количину једнога од активних реагенаса или од продуката реакције, *израчунава* количину свију осталих тела, реагенаса или продуката реакције.

---

* Споменица педесетогодишњице професорског рада Симе М. Лозанића, Београд 1922, стр. 18–23.

Вршећи квантитативне хемијске анализе, хемичар одређује једне количине непосредно, *мерењем* по тежини или запремини; друге одређује индиректно, *рачуном*, из тако добијених података, опет помоћу хемијских једначина. Свака је непосредна одредба подложна грешкама мерења, већим или мањим према приликама и извежбаности са којом се врши. Питање о величини таквих грешака неприступно је рачуну; извежбан хемичар може, у најбољем случају, знати границе које једна грешка те врсте у датоме случају, по својој апсолутној вредности, не може прећи, али јој не може одредити ни тачну ни приближну вредност. Међутим, питање о томе уколико једна већ учињена непосредна грешка утиче на величине резултујућих грешака при израчунавањима којима се из добијених података долази до крајњих количина што се анализом и траже, чисто је *рачунско йишање*: оно се решава *рачуном*, обичним или инфинитезималним, из напред познатих, утврђених или хипотетичких, релација између количина одређених непосредним мерењем и оних које се из њих израчунавају. Исти рачун даје и границе између којих се, у датоме случају, могу кретати вредности ових последњих количина кад се знају највеће могућне грешке учињене при непосредним мерењима, а које извежбан хемичар увек може знати.

Математички инструменат пружа у хемијским анализама не само средство за бројно израчунавање непознатих количина, већ и критеријуме за остварљивост и пробитачност једне хемијске анализе у погледу њене осетљивости и прецизности. Све је то, разуме се по себи, већ садржано у релацијама што везују количине са којима се има посла; заслуга је математичког инструмента та што он такве појединости, а које могу бити врло скривене, каткад и неприступне обичном запажању, на свој начин открива и извлачи на видик. Довољно је нпр. подсетити да особине једне нарочите класе детерминаната, на које се наилази у математичкој теорији индиректних квантитативних хемијских анализа, конкретно протумачене, доводе до овога резултата, који би иначе, бар у општем случају, могао остати незапажен: индиректне анализе смеше $n$ тела, кад је број хетерогених операција у њима мањи од $n-2$, неостварљиве су; такве анализе са искључиво хомогеним операцијама остварљиве су само у случају кад смеша садржи два тела што се имају квантитативно одредити.

Велики број хемијских количина (констаната или функција) *израчунавају* се из њихових релација, коначних или инфинитезималних, са другим количинама. У таквим рачунима хемичар се сусреће како са најелементарнијим рачунским радњама, тако и са најсуптилнијим проблемима математичке анализе. Данашња физичка хемија, модерна хемијска динамика, које се сваким даном све више прецизирају и развијају, представљају простране математичко-хемијске дисциплине у којима математички апарат, из једнога врло ограниченог броја хипотеза, изводи непрегледан број аналитичних истина које имају конкретно хемијско значење и које, потврђене експериментом, учвршћују хипотезе које су до њих довеле.

Сетимо се, у томе реду мисли, једнога од елементарних, за то, примера. Један од аспеката хемијских реакција у чије је испитивање ушла математичка анализа, јесте нпр. кинетички ток реакција. Ма како, у извесним случајевима, изгледале брзе и тренутне, реакције ипак трају једно коначно време, за које се количине продуката реакције мењају са временом по одређеном закону. Ти су закони, за *простране* категорије реакција, скривени у овим двема општим правилностима.

1. У једноме елементу времена, прираштај концентрације смеше, у којој се збива реакција, по једноме ма коме од продуката реакције, пропорционалан је томе елементу времена и концентрацијама смеше, у томе тренутку, по оним телима у смеши која активно суделују у реакцији при формирању тога продукта.

2. У сваком тренутку, за време трајања реакције, постоји пропорционалност, са једне стране између количина утрошених активних тела, а са друге стране између количина продуката реакције међу собом.

Појединости кинетичког тока реакције само су логичке последице тих принципа. Њихово се сазнавање своди на интеграцију одређених диференцијалних једначина првога реда, чији облик не зависи од хемијске природе тела што активно суделују у реакцији, ни од физичких прилика у којима се ова врши, већ само од броја тих тела. Конкретна природа реагенаса и физичке прилике утичу само на величине констаната што фигуришу у једначинама. Интеграцијом једначина добија се однос што постоји између времена и утрошене количине једног од активних тела, почевши од посматраног тренутка; у томе односу садржане су, и простом анализом истичу се на видик, појединости кинетичког тока реакције. Експериментална потврда тако добијених резултата налази се у подударању непосредно мерених количина активних тела и продуката у разним тренуцима за време трајања реакције, и оних које су, за исте тренутке, израчунате из поменутог односа.

Обрнуто, хемијске појаве дају једно од средстава за *материјализацију математичких проблема.* Ова се састоји у томе да се за један дати математички проблем нађе конкретна појава за коју ће важити математичке релације истога облика као и оне што се добијају решењем тога проблема. Дешава се, при таквој материјализацији, да каква појединост, која је скривена у једначинама одговарајућег проблема, а до које би било тешко доћи рачуном или математичком анализом, постаје сама собом очигледна у конкретној појави која проблем материјализује.

Као пример такве материјализације и услуга које она може чинити математичкој анализи, може служити позната Riccati-јева диференцијална једначина, која се, као што се зна, никаквим аналитичким средством, бар у њеном општем облику, не може интегралити. Међутим, једначина је материјализована кинетичким током нормалне, хомогене, бимолекуларне хемијске реакције која се збива између двеју течности, кад се учини да се ове механички уливају у суд у коме се збива реакција, и то тако да се зна брзина њиховог придолажења као функција времена. Количине формираних продуката реакције у току времена, од почетка трајања реакције, добиле би се, са једне стране, интеграцијом једне Riccati-јеве једначине, са друге стране, те се исте количине могу добити непосредним мерењем у разним тренуцима за време трајања реакције; интерполацијом таблице тако добијених вредности имао би се таблицом изражен кинетички ток реакције. Крива линија, која би се добила као графички представник те таблице, поклапала би се врло приближно са интегралом одговарајуће Riccati-јеве једначине, која би на тај начин била *хемијски интеграљена.* Поред тога, из самога начина на који придолажење реагенаса утиче на брзину реакције, јасно се види на који ће начин количине формираних продуката, тј. интеграли диференцијалне једначине, расти или опадати са убрзањем или успоравањем придоласка реагенаса.

Треба, такође, навести да хемичар при решавању својих проблема наилази и на чисто математичке задатке, у којима и сами елементи рачуна, онакви какви се непосредно јављају, имају чисто *математички карактер.* Пример за то пружа данашња теорија хемијских комбинација, слична алгебарској комбинаторици, у којој се израчунава број могућних једињења са истим елементима и истим бројем њихових атома, а разном хемијском структуром. Тако је нпр. Flawicki одређивао број могућних изомерија засићених моно-хидроксилних алкохола; Cayley је израчунао број могућних изомерија парафина; Schiff је то исто учинио за изомерне олефине. Г. С. Лозанић се у више својих радова бавио о питању броја врста изомерија код појединих парафина и о закону рашћења тога броја код даљих хомолога. Питање је од важности и за хемију и математику. Кад се буду сазнале све могуће врсте структурних изомерија парафина и њихових деривата, и уоче правилности у низовима њихових бројева, моћи ће се формирати *теорија хемијских пермутација, комбинација и варијација*, различна од теорије сличних математичких јединки по томе што се у првима изостављају хемијска понављања, а води се рачуна о размаку бочних чланова. Г. С. Лозанић, поред својих прилога тој теорији, учинио је један интересантан покушај систематизирања досадашњих резултата на томе пољу, као први корак за стварање опште теорије.

На послетку, хемичар има често да се бави и питањима *квалитативне математике,* где се не траже бројне вредности количина, већ само квалитативне појединости њихових промена (да ли, у одређеним приликама, расту или опадају, јачају или слабе; имају ли максимуме или минимуме; да ли осцилирају око једне утврђене вредности итд.). Зна се нпр. да у пространим групама хемијских једињења супституција једнога елемента другим што припада истој хемијској групи, има за ефекат одређену модификацију хемијских или физичких особина тела. Те су модификације једног, унапред познатог смисла за одређену серију елемената или функционалних група. Нпр. свака група $CH_2$ у нормалним алкохолима тежи да им повиси температуру кључања за приближно сталан број степени. У нормалним угљоводоницима свака таква група тежи да им повиси температуру кључања за известан број степени који сам опада уколико расте број тих група.

Према једној новијој теорији ацидитета хемијских тела (de Forgrand) поједини су елементи и хемијски комплекси карактерисани тежњом да уносе одређене промене у ацидитет тела у чији састав улазе; правац тих промена познат је нпр. за водоник, групе OH, $CH_2$, COOH итд. Кад су такве тежње познате бар по своме смислу, хемичар *предвиђа* смисао, а каткад и релативну величину модификација које ће произаћи од истовремених утицаја таквих узрока.

Из ове овлашне слике јасно је да данашњи хемичар не само да мора знати добро рачунати, но мора бити упознат и са методама више математичке анализе. А како разумевање и употреба тих метода захтевају познавање готово целокупног математичког апарата, није претерано кад се каже да данашњи хемичар мора бити у исто време и математичар. Хемичар будућности мораће све више то бити, јер је несумњиво да ће хемија, у току свога развића, све више добијати обележје математичке дисциплине.

# ЕЛЕКТРИЧНЕ АНАЛОГИЈЕ*

Кад је велики енглески физичар Томсон (Sir William Tomson – Lord Kelvin), приликом једнога свога бављења у Паризу, посетио париску електричну централу, упутио је инжењеру и шефу радника стручњака централе који су га пратили, овакво питање: „Шта бисте ви, господо, одговорили кад би вас ко запитао шта је то електрицитет, са којим ви проводите свој век?“ Инжењер и шеф радника су се збуњено погледали и одговорили да они то не знају. Sir Tomson се на то благо насмешио и додао да и он о томе нема појма.

Па како се то дâ схватити да се за један такав фактор и у науци и у практичном животу, као што је електрицитет, не зна ни шта је он у ствари, а међутим у модерној физици и данашњој техници баш тај фактор је све и сва, тако да је данас тешко и замислити како би изгледале и наука и техника кад њега не би било?

Одговор је једноставан, прост и за свакога разумљив. Електрицитет се, у незнању у коме смо о његовој интимној суштини, упоређује са нечим што се добро познаје, а према извесним заједничким особинама онога што се упоређује и онога са чиме се упоређује. Наиме, још први испитивачи електричних појава запазили су велику сличност, са једне стране топлотних, са друге стране хидрауличких појава, са појавама електрицитета. То је одмах дало повода хипотезама које су се показале као сасвим оправдане, и преношењу закључака из теорије поменутих двеју врста појава у област електрицитета. То се преношење показало у стварности као сасвим оправдано и оно је довело до модерних теорија о електричним појавама, које су, независно од тога шта је електрицитет, основа данашњој науци и целокупној електротехници.

Није у науци ретка ствар да каква појава, једним својим изгледом, више или мање овлашно, подсећа на какву другу, од ње сасвим различиту појаву са којом нема никакве стварне везе, али је са њоме у нечем

---

* Наука и техника, Београд 1941, t. I, 3, стр. 141–151.

слична. Али од тога, па до права да се теорија једне од двеју појава, само на основи такве сличности, пренесе на другу, још је врло далеко. Сличност је често варљива. У историји науке нису ретки случајеви где је она доводила до нетачних закључака. Али у случају електричних појава она се, проверавањем закључака до којих је доводила и потпуним слагањем са стварношћу, не само показала као поуздана водиља, већ је и омогућила целокупну данашњу теорију електрицитета и његових техничких примена.

Једна од првих запажених електричних аналогија је она што постоји између електричних и хидрауличких појава. Аналогије те врсте су многобројне; овде ће се подсетити само на најпростије међу њима.

**1.** Кад у електричном елементу, састављеном од плоче цинка и плоче бакра замочених у закисељену воду, отпочне хемијска реакција, ствара се електрична струја која ће кружити у елементу и то у унутрашњости овога у правцу од цинка ка бакру, а споља, кроз проводну жицу, од бакра ка цинку.

Упоредимо такав електрични елеменат са ротативном пумпом чији би излазни отвор био једном цеви везан са улазним отвором. Кад је све то напуњено водом, па се осовина пумпе стави у покрет у једном одређеном смислу, нпр. у смислу кретања казаљке на сату, вода ће бити потерана у одређеном правцу, као што ће у електричном елементу образована струја протицати у правцу од цинка ка бакру. Вода ће из пумпе излазити кроз излазни отвор, протицаће кроз цев и опет улазити у пумпу кроз њен улазни отвор. На тај начин ће се образовати једна водена струја која ће имати одређени правац у унутрашњости пумпе, а њему супротан правац ван ове, у спојној цеви која је враћа у пумпу. Пумпа и цев образују једно хидраулично коло кроз које ће протицати водена струја и које је у томе погледу сасвим слично електричном колу у елементу, кроз које ће протицати електрична струја. И тада се може сматрати као позитиван крај таквог хидрауличног кола излазни отвор пумпе, а као негативан крај њен улазни крај. Појава је у томе погледу потпуно слична оној у електричном елементу, у коме хемијска реакција производи са електрицитетом учинак сличан ономе што га производи елиса пумпе са водом. У елементу, електрицитет излази кроз бакарну плочу која представља позитиван пол елемента, а враћа се у елеменат кроз плочу од цинка која представља негативан пол елемента. И још једна сличност. У хидрауличкој појави проводник је шупаљ; то је цев чији дуварови задржавају течност да се не растура на све стране и дају јој правац протицања; у електричној појави проводник је метална жица која струји даје правац, а оно што чини да се електрицитет не растура на све стране, то је ваздушни слој око жице. Тај слој игра у електричној појави исту улогу коју играју дуварови проводне цеви у хидрауличкој појави. Тако исто, улога хидрауличког притиска у другој појави иста је као и улога електричног напона у првој појави, итд.

**2.** Друга једна, тако исто проста аналогија између електричних и хидрауличких појава састоји се у овоме. Кад течност протиче кроз какву цев, брзина протицања зависи од јачине силе (притиска) која ставља течност у покрет, и од отпора у цеви; брзина је утолико већа, уколико је притисак већи, а утолико мања, уколико је већи отпор. Тако је исто и са електричном струјом. Према Ohm-овом закону јачина струје сразмерна је електромоторној сили која је одржава, а обрнуто сразмерна електричном отпору проводника. Али, ако се континуална електрична струја спроведе кроз коло у коме се ствара самоиндукција, она ће изазвати једну индуковану струју супротног смисла, која ће слабити првобитну струју тако, да ће она достићи своју нормалну јачину, одређену Ohm-овим законом, тек после извесног времена. Напротив, кад првобитне струје нагло нестане, самоиндукција ће изазвати једну индуковану струју истог смисла као првобитна струја, тако да ће се струја што ће протицати кроз електрично коло још за неко време продужити. Ствар се дешава тако као да електрицитет има инерцију сличну оној коју има течност.

Кад се нагло успостави веза између два резервоара са течношћу на различитим нивоима, и одоздо спојена једном цеви, течност ће почети протицати кроз цев од резервоара са вишим нивоом ка резервоару са нижим нивоом. Али брзина истицања неће одмах, тренутно, бити она која би, по хидрауличком закону, одговарала разлици нивоа. Треба да протекне једно одређено време па да, због инерције течности, та брзина достигне своју нормалну величину. Електрична инерција, оличена у самоиндукцији, игра у електричној појави исту улогу коју игра инерција течности у хидрауличној појави; електрични отпор игра при томе исту улогу коју игра механички отпор при протицању течности. А све то повлачи са собом једне исте математичке односе и чињенице у обема врстама међу собом тако диспаратних појава.

**3.** Разне друге, више или мање потпуне аналогије постоје између електричних, термичких, механичких и хидродинамичких појава. Тако, стационарна стања електрицитета, стационарна стања топлоте при њеноме распростирању кроз хомогене средине, и перманентно ротационо кретање нестишљивих течности састављају једну аналошку групу која је играла важну улогу у развићу читавих одељака модерне математичке физике.

Уочимо, најпре, један скуп наелектрисаних проводника у каквој диелектричној средини. Означивши са $V$ електрични потенцијал система (који је функција геометријских координата $x$, $y$, $z$), стационарно је стање карактерисано таквим једним распоредом потенцијала у тој средини, која задовољава Laplace-ову једначину

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0; \tag{1}$$

на површинама свих проводника потенцијал тада има једну исту, сталну вредност.

Означивши са $X$, $Y$, $Z$ компоненте електростатичког поља у једној тачки $P(x,y,z)$ поља, а са $k$ специфичну индукторску моћ диелектричне средине, израз

$$k\,\Delta(V)=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) \tag{2}$$

представљаће притицај (flux) електростатичке силе, који излази из јединице запремине, посматране у тачки $P$. Једначина

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0 \tag{3}$$

изражава чињеницу да је тај притицај једнак нули за све тачке диелектричне средине; то је тзв. једначина континуитета посматранога поља. Електрично поље је у једној, ма којој тачки управно на еквипотенцијалној површини што пролази кроз ту тачку; линије силе у пољу секу ортогонално све те површине.

Претпоставимо сад да је диелектрична средина смењена каквом средином што проводи топлоту, хомогеном и изотропном; да је затим, сваки од наелектрисаних проводника смењен по једним топлотним извором, који ослобађа или апсорбује топлоту, и да му се на површини одржава стална температура, једна иста за све те изворе. Нека су $X$, $Y$, $Z$ компоненте топлотног притицаја у тачки $P(x,y,z)$, карактерисаној температуром $V$, и нека је $k$ коефицијент термичке проводљивости средине. Кад је појава термичких модификација средине ушла у стационарно стање, поменути фактори непрестано су везани једначином (2), а једначина (1) исказује да је топлотни притицај, што излази из јединице површине посматране у тачки $P$, једнак нули за све тачке средине: то је једначина континуитета за тај притицај. Једначина $V=\text{const.}$ дефинише изотермичке површине; топлотни је притицај у свакој тачки управан на изотермичкој површини што пролази кроз ту тачку; линије притицаја у проводној средини секу ортогонално све те површине.

Напослетку, уочимо одговарајућу хидродинамичку појаву исте аналошке групе. Претпоставимо да је диелектрична средина у првој, електричној појави смењена каквом течношћу, нестишљивом и без трења, а да су наелектрисани проводници смењени порозним површинама, и да је брзина течности у свакој тачки једне такве површине управна на њој. Претпоставимо, затим, да је кретање течности иротационо; зна се да тада постоји једна функција $V$ геометријских координата (потенцијал брзине) која постаје једнака нули за тачке у бескрајности (као и одговарајуће функције $V$ у електричној и термичкој појави: електрични потенцијал у првој, а температура у другој појави аналошке групе) и која за све тачке $P(x, y, z)$ течности задовољава Laplace-ову једначину (1). Између компонената $X, Y, Z$ брзине у таки $P$, потенцијала брзине $V$ и коефицијента пермеабилитета $k$ постоји и у овоме случају, у теорији појаве позната релација (2), чија лева и десна страна дају разне изразе за притицај течности што излази из јединице запремине посматране у тачки $P$. Једначина (3) тада исказује чињеницу да је тај притицај једнак нули за све тачке простора заузетог течношћу, тј. да ни у једној тачки тога простора не може бити нагомилавања течности: то је, дакле, једначина континуитета за брзине. Једначина $V = \text{const.}$ дефинише еквипотенцијалне површине; брзина је, у свакој тачки $P$, управна на еквипотенцијалној површини што пролази кроз ту тачку; линије притицаја секу ортогонално све те површине.

И уопште, аналогија између појава ове аналошке групе тако је потпуна, да се сваки математички резултат, добијен у једној, ма којој од њих, може, придавши му само одговарајуће конкретно значење, пренети на остале појаве у аналошкој групи; хомологи су елементи, при томе, истакнути у овој таблици.

| појава | $V$ | $X, Y, Z$ | $k$ |
|---|---|---|---|
| електрична | електрични потенцијал | компоненте електростатичког поља | специфична индукторска моћ средине |
| термичка | температура | компоненте топлотног притицаја | коефицијент термичке проводљивости |
| хидрауличка | потенцијал брзина | компоненте брзина | коефицијент пермеабилитета |

**4.** Једну пространу групу електричних аналогија пружају међу собом диспаратне појаве које је проучио Helmholtz и назвао их *цикличким појавама*. Претпоставимо да се у једном материјалном систему дешавају промене овакве врсте.

1) Материјални делићи, из којих је састављен систем, крећу се веома брзо са приближно сталном брзином, и то тако да чим је при томе кретању један делић померен са свога места, он је, по истеку једног врло кратког времена, замењен другим делићем који тада има исту брзину и исти правац кретања као и први. У једној, дакле, ма којој тачки простора који систем заузима, неће за време трајања појаве бити осетних промена; целокупно стање система не мења се осетно у току времена. Нека је тада $(q_1, q_2, \ldots, q_h)$ систем променљивих количина такав, да је у тренутку $t$ положај свакога делића одређен вредностима елемената $q_1 \ldots q_h$ у томе тренутку.

2) Једно стање (или особина) $E$, везано за такав систем, мења се веома споро у току времена, тако да су те промене неосетне за један краћи размак времена, али осетне за дуже размаке. Нека је $(q_{h+1}, q_{h+2}, \ldots, q_h)$ систем променљивих количина који својим величинама у тренутку $t$ одређују стање или особину $E$ у томе тренутку.

Скуп елемената $(q_1 \ldots q_h)$ назива се *цикличким координатама* у појави, а скуп елемената $(q_{h+1}, \ldots, q_k)$ *координатама са спорим варијацијама* у посматраној појави. Појаве, које се састоје у променама цикличких координата и координата са спорим варијацијама Helmholtz је назвао *цикличким појавама*. Координате са спорим варијацијама играју улоге параметара у диференцијалним једначинама које регулишу промене цикличких координата. Ако размак времена, у коме се појава посматра, не прелази једну одређену границу, ови параметри могу се сматрати као сталне количине у томе размаку, тако да се може сматрати да се посматрана цикличка појава за то време састоји само у цикличком кретању материјалних делића што састављају систем.

Према броју цикличких координата, цикличке појаве разликују се на појаве *моноцикличке*, *бицикличке* итд. Моноцикличке су оне са само једном цикличком координатом; број координата са спорим варијацијама може, уосталом, бити ма колики. Helmholtz је потпуно разрадио теорију цикличких, а нарочито моноцикличких појава, а интерес теорије лежи у томе што се показало да међу собом диспаратне појаве могу бити обухваћене том теоријом и тиме бити скупљене у једну аналошку групу.

1) Према Maxwell-овој теорији електрицитета, протицање електричне струје кроз проводну жицу има се сматрати као једна моноцикличка појава. Брзина промене цикличке координате $q$ расте упоредо са јачином струје: компонента силе која производи то протицање

расте упоредо са електромоторном силом која се налази у електричном колу. Циклично кретање дешава се делимично у етру, а делимично у самоме материјалу проводника. Оно се мења кад проводна жица мења свој облик или положај, параметри који одређују тај облик или положај играју улоге координата са спорим варијацијама; брзина једног пондерабилног или импондерабилног делића жице или околине (управо брзина у једној тачки система, са којом ти делићи пролазе кроз ту тачку) игра улогу првог извода цикличке координате.

2) По Helmholtz-овој теорији се и термичке промене имају сматрати као нарочита врста моноцикличких појава. Улогу цикличке координате игра средња брзина кретања материјалних делића, а улогу координата са спорим варијацијама играју параметри чије споре варијације буду пратиле промене цикличне координате (нпр. геометријски елементи при ширењу тела: електрично стање тела и др.).

3) Према Maxwell-овој теорији, кретање електрицитета у систему из два електрична кола и две струје које се међу собом индукују, има се сматрати као једна бицикличка појава, са распоредом улога сличним ономе под 1). Исти је случај и са системом састављеним од једне електричне струје и једног перманентног магнета. Maxwell-ове једначине за појаве такве врсте нису ништа друго до опште Lagrange-ове једначине за бицикличке појаве.

До данас проучене аналогије електричних појава са појавама сасвим друге конкретне природе, са којима оне немају никакве везе, тако су потпуне, да се може тврдити ово: има таквих аналошких група, које обухватају и електричне појаве, да свакој математичкој појединости једне које било од њих, одговара слична појединост у електричној појави и обрнуто. Диференцијалне једначине једне од појава аналошке групе исте су за све појаве обухваћене групом, само што променљиве количине, фактори и константе у њима имају разна конкретна значења, према појави на коју се односе. Све оно што се из тих једначина изводи за једну врсту појава аналошке групе, важи и за све остале појаве исте групе кад се само одговарајућим променљивим количинама, факторима и константама, придаду конкретна значења елемената што у свима појавама групе играју исте улоге.

Један од најлепших примера такве потпуне аналогије даје аналошка група коју, између осталих, састављају ове међу собом тако диспаратне појаве:

а) испражњавање електричног кондензатора са сталним или променљивим капацитетом, електричним отпором и коефицијентом самоиндукције;

б) осцилаторно кретање клатна са сталном или променљивом масом, трењем и отпором средине кроз коју се креће;

в) осцилаторно кретање течности у пресавијеној цеви, на којој је једна страна отворена, а друга затворена, пошто се ова затворена страна нагло отвори.

*

Математичке аналогије између диспаратних појава, као водиље, чиниле су знатних услуга при изграђивању појединих теорија које састављају разне гране данашње математичке физике. Кад је већ запажена, или наслућена таква аналогија међу двема појавама до једне одређене тачке, сматрано је за вероватно да ће она важити и на даље, преко те тачке, тако да, кад је већ разрађена математичка теорија једне од њих, оне чија је теорија приступачнија, она је, са одговарајућом својом конкретном интерпретацијом, примењивана и на другу од двеју појава. Верификоване, или нетачне, консеквенце имале су пресуђивати о томе у колико су претпостављене или проширене аналогије у таквим случајевима одговарале стварности.

То је био начин на који су Ohm, Lame, Maxwell, Sir W. Thomson, Kirchhoff, Helmholtz и др. изграђивали своје теорије еластичности, атракције, распростирања електрицитета итд., вођени наслућеним аналогијама међу појавама. Ohm је нпр. поставио своју теорију распростирања електрицитета преневши у њу и оне исте претпоставке о механизму тога распростирања, и исто математичко извођење које је Fourier већ био увео и проверио као тачно, изграђујући своју теорију распростирања топлоте. Maxwell-ове су теорије, готово све, сугериране наслућеним аналогијама: његове су нпр. основне једначине електро-магнетизма добијене асимилацијом електромагнетних појава једној врсти вихорастог кретања течности, за које су те једначине очевидније.

Поред теоријског интереса који имају математичке аналогије међу појавама, оне могу, у исто време, бити и моћно оруђе за проналаске нових конкретних чињеница у природним појавама, које би, без аналогија као водиља, могле остати незапажене, или би бар њихово проналажење било остављено случају. Конкретан пример за то, између многобројних случајева такве врсте, дају аналогије везане за принцип одржања енергије, Carnot-ов принцип и њихове аналитичке последице у разним врстама појава. Lippmann-ове аналогије између термодинамичких и електричних појава, при којима принцип одржања електрицитета игра, у електричним појавама, исту улогу коју игра Carnot-ов принцип у термичким појавама, доводе за електричне флуктуације до низа математичких релација аналогних онима у термодинамици. А те релације конкретно растумачене, тада су довеле до тога да се предвиде и нове појаве које би, вероватно, да нису биле тако предвиђене, могле остати још дуго време незапажене. Такве су нпр. биле ове појаве:

а) промене капацитета електричних кондензатора, чије су арматуре растављене слојем гаса, кад му се мења притисак. Рачуном се предвидело да је капацитет сразмеран притиску (чињеница коју је експериментом проверио Boltzmann): при сталном притиску запремина гаса се смањује сразмерно разлици потенцијала двеју арматура (чињеница коју је проверио Quinske за угљен-диоксид);

б) електричне модификације при компресији кристала, при чему се, кад је кристал комprimиран у правцу једне од својих оса, јавља у њему електрична поларизација истога смисла као она коју изазива повишење температуре; рачуном се предвидело да је она пропорционална јачини компресије и да је нестаје са нестанком ове. Обрнуто: кад се кристал наелектрише, он се издужује на исти начин као што би то било повишавањем температуре, а величина тог издуживања пропорционална је електричном потенцијалу (чињенице које су експериментом проверили P. и J. Curie на турмалину, топазу и кварцу). А пошто се таквим модификацијама мења и сама струкура кристала, оне морају собом, у исто време, повлачити и промене његових оптичких особина, што је такође проверено експериментом;

в) ширење стаклених арматура електричних кондензатора кад се ови пуне електрицитетом, и контракција при њиховом испражњавању: рачун је предвидео да је линеарно ширење при томе срамерно квадрату разлике потенцијала двеју арматура (чињеница коју су констатовали Govi и Doter);

г) електро-капиларне појаве, које је Lippmann предвидео као једну од последица поменутих аналогија, и то проверио експериментом. Рачуном је нашао, и то проверио, да јачина ефекта капиларности између живе и закисељене воде зависи од разлике потенцијала тих двеју течности и да се, обрнуто, величина те разлике мења кад се на ма који начин, акцијом спољних сила, мења величина њихове додирне површине.

Али, и саме по себи, независно од услуга које су чиниле као водиље у истраживањима, електричне аналогије имају и свој нарочити философски интерес. Велики проблем природне философије састоји се у томе, да се све оно што се мора претпостављати ради разумевања природних појава, као и број закона који обухватају оно што се у природи дешава, сведе на што је могућно мању меру. Проблем ће бити утолико више олакшан, уколико буде већи број запажених и потврђених аналогија међу диспаратним појавама.[**]

---

[**] Ова Петровићева разматрања унео је Владимир Петровић у свој уџбеник *Основи електротехнике II*, Београд 1941, стр. 256, (пр. Д. Т.).

# РАЧУНАРИ

# О ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА ПРВОГА РЕДА*

## КОЈЕ СЕ МОГУ ГРАФИЧКИ ИНТЕГРАЛИТИ ПОМОЋУ Г. КЛЕРИЋЕВОГ ШЕСТАРА

Нека је дата диференцијална једначина првога реда

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{1}$$

Ставимо у њој

$$\begin{aligned} x &= X + k\cos\alpha, \\ y &= Y + k\sin\alpha, \\ \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}\alpha, \end{aligned} \tag{2}$$

где је $k$ стална, а $Y, X$, $\alpha$ промењљиве количине, и нека је

$$\Phi(X, Y, \alpha) = 0 \tag{3}$$

нова, тако добијена једначина. Може се доказати:

Кад год је могућно изабрати сталну количину $k$ тако, да промењљиве $\alpha$ нестане у једначини (3), тј. да се ова сведе на једну једначину

$$\Psi(X, Y) = 0, \tag{4}$$

између $X$ и $Y$, диференцијална једначина (1) може се графички интегралити помоћу г. Клерићевога шестара и то тако, да се интеграли једначине (1) добијају као тракторије криве, представљене једначином (4).

Јер, ако у (4) ставимо вредности

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. LI, Први разред, књ. 18, Београд 1896, стр. 313–316, саопштио у Академији природних наука проф. Љубомир Клерић 15. јуна 1896.

$$(5) \qquad \begin{aligned} X &= x - k\cos\alpha, \\ Y &= y - K\sin\alpha, \end{aligned}$$

а затим, према обрасцу $\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\alpha$, ставимо још да је

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$
$$\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

једначина (4) постаје

$$(6) \qquad \Psi\left(x - \frac{k}{\sqrt{1+y'^2}}, y - \frac{ky'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

и ова једначина, према самоме начину свога постанка, мора бити идентична са датом диференцијалном једначином (1) (или једначином B страна 252).

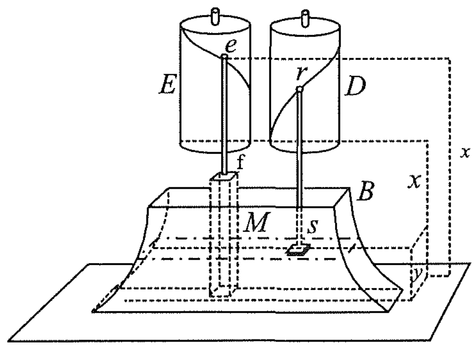
Али једначина (6) дефинише тракторије криве $\Psi(X,Y)=0$ са сталном раздаљином $k$. Према томе ма који партикуларни интеграл једначине (1) биће једна тракторија криве (4) са раздаљином $k$. Све те интеграле имаћемо, дакле, конструишући све могућне тракторије поменуте криве, са истом раздаљином $k$, а са разним почетним тачкама. Улогу интеграционе константе игра почетни положај шестара.**

---

** Како ће у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића* бити посебно анализовани рачунари у Петровићевом делу, то су у овом поглављу изостављене спуштенице о *одјеку* (пр. Д. Т.).

# О ЈЕДНОМ ПОСТУПКУ ГРАФИЧКЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА*

Замислимо апарат који је на следећи начин конструисан. Два вертикална цилиндра $E$ и $D$, истог пречника, окрећу се, под дејством једног часовничарског механизма, истом брзином и униформно око својих оса. На крају $f$ једне шипке $ef$, која може да клизи по вертикали, учвршћено је призматично чврсто тело $M$. Претпоставимо да се ово тело $M$ може више или мање дубоко потопити у живу која се налази у посуди $B$, чије су две стране паралелне равни цртежа, друге две су цилиндричне и управне на ту раван, а доња страна је равна и хоризонтална. Замислимо да истовремено жива истиче кроз отвор $O$ који се налази на доњој страни посуде $B$ и чија се ширина може по вољи регулисати.




*Слика 1*

Ниво живе ће расти или ће се спуштати према томе да ли је тело $M$ у њу више или мање дубоко загњурено. Уколико су облик тела $M$ и посуде $B$, као и ширина отвора $O$ утврђени, закон варирања висине $y$ нивоа (која се рачуна почев од једне утврђене хоризонталне равни, на пример почев од доње стране посуде) са временом $t$ зависиће од начина

---

* Наслов оригинала: *Sur un procédé d'integration graphique des équations différentielles*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1897, t. CXXIV, 20, pp. 1081–1084; приказао у Парискоj академији наука професор Пол Апел 17. маја 1897.

на који се загњурује тело $M$, тј. од закона варирања са временом растојања $x$ између краја $e$ шипке $ef$ и доње стране посуде $B$.

Но, може се учинити да то растојање $x$ буде унапред дата функција $f(t)$ времена $t$, на следећи начин. Претпоставимо да је цилиндар $E$ обавијен листом папира на коме је нацртана крива $\eta = f(\xi)$, при чему се апсциса $\xi$ рачуна дуж периферије базе цилиндра, а ордината $\eta$ дуж генератриса, почев од непокретне базе посуде $B$. Ако се за јединицу дужине узима дужина лука који опише било која тачка цилиндра у јединици времена, имаће се

$$\eta = f(t).$$

Учинимо да се крај $e$ полуге $ef$ у сваком тренутку налази на кривој $\eta = f(t)$, на пример водећи га руком, док се цилиндар окреће; онда ће се имати у сваком тренутку

$$x = f(t).$$

Означимо са $a$ површину хоризонталног пресека тела $M$, са $z$ растојање између базе цилиндра $E$ и нивоа површине живе, са $\Phi(y)$ површину хоризонталног пресека посуде $B$ на висини $y$ изнад доње стране. Ако се, у временском интервалу $dt$, загњури тело $M$ тако да се $x$ промени у $x - dx$, а $y$ у $y + dx$, количина течности која се подигла изнад нивоа $y$ изнеће

$$\left[\Phi(y) - a\right] dy.$$

Ова количина једнака је разлици количине течности коју ће потиснути тело $M$ кад оно буде потопљено за $dz$ и оне која ће истећи кроз отвор $O$ у току времена $dt$. Одатле се изводи једначина

$$\left[\Phi(y) - a\right] dy = a dz - \lambda \sqrt{y} dt,$$

где је

$$\lambda = \mu \Omega \sqrt{2g}$$

(при чему је $\mu$ коефицијент контракције живе, $\Omega$ површина отвора $O$, а $g$ гравитациона константа). А како је у сваком тренутку

$$z = x - y = f(t) - y,$$

диференцијална једначина проблема биће

$$\text{(1)} \qquad \Phi(y) \frac{dy}{dt} + \lambda \sqrt{y} - a f'(t)\, dt = 0.$$

Интеграл $y = \varphi(t)$ који за $t = 0$ узима вредност $y = h$, једнаку почетној вредности висине нивоа, представља закон варирања те висине са временом. Крај $r$ шипке $rs$, која, снабдевена на свом доњем крају $s$ једним пловком, клизи вертикално кроз цев $l'$ онолико колико се ниво живе пење или спушта, исцртаваће график овог интеграла на хартији којом је обавијен цилиндар $D$.

Тако се добија графичка интеграција свих једначина облика (1) и оних које се из њих изводе сменама облика

$$t = \psi(\xi), \quad y = \theta(u);$$

за то је само потребно на погодан начин изабрати функције $\Phi(y)$ и $f(t)$, тј. облик посуде $B$ и криве повучене на цилиндру $E$.

Дајући, на пример, посуди $B$ такав облик да буде

$$\Phi(y) = \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}$$

и повлачећи на цилиндру криву која одговара функцији

$$f(t) = a\int \chi(t)dt,$$

крива $(y, t)$ коју ће исцртати крај $r$ полуге $rs$ биће таква да је у сваком тренутку вредност $\sqrt[4]{y(t)}$ једнака одговарајућој вредности интеграла $u(t)$ Рикатијеве једначине

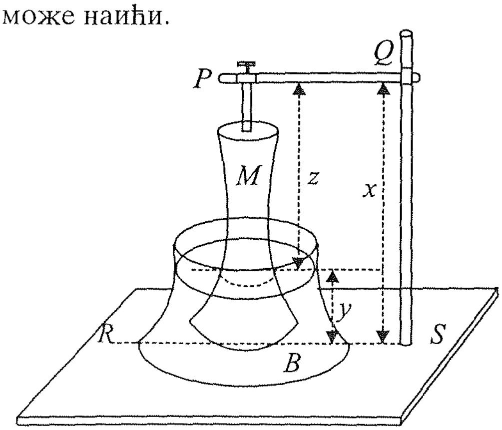
$$\frac{du}{dt} = \chi(t) - \lambda u^2,$$

која за $t = 0$ узима вредност $\sqrt[4]{h}$, где $h$ означава почетну вредност висине нивоа.

Слични принципи могу се применити на многе друге типове једначина. Лако је увидети могућност конструисања више врста нових интеграфа једноставних склопова, заснованих на претходном принципу. Најзад, имаће се и нови типови једначина које се могу графички интегралити дајући телу $M$ различите облике или чинећи да површина отвора $O$ варира са временом, према датим законима.

# О ХИДРАУЛИЧНОЈ ИНТЕГРАЦИЈИ*

Намеран сам скренути пажњу г. г. техничара на један прост хидраулички принцип, помоћу кога се може вршити графичка интеграција било обичних диференцијалних израза, било и самих диференцијалних једначина. Овакве интеграције своде се на тражење интегралне криве линије, чија једначина задовољава дату диференцијалну једначину и задатак би био довршен, кад би се имала таква крива линија, што одговара датој диференцијалној једначини. Ја сам у једноме ранијем раду (*Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, Mai 1897*) показао, како се до конструкција ових интегралних кривих може доћи хидрауличним путем; овде ћу извести генерализацију принципа употребљенога у томе раду и навести начине за његово практично реализовање. Изложени резултати могу, уосталом, бити од интереса и за решавање извесне класе питања из хидраулике, на која се и у практици може наићи.




*Слика 1*

Замислимо да се чврсто тело $M$ (сл. 1) спушта више или мање дубоко у течност, која се налази у суду $B$. Ниво течности мењаће се по извесном закону, који зависи од облика тела $M$ и суда $B$, а кад су ови утврђени, варијација нивоа зависи од растојања $x$ између подлоге тела $M$ и једне сталне хоризонталне равни, за коју се може узети раван дна суда $B$.

---

* Српски технички лист, Београд 1898, t. IX, 1–2, стр. 1–2; рад доспео уредништву 5. фебруара 1898.

Означимо са $x$ и $y$ растојања подлоге $PQ$ тела $M$ и нивоа $ab$ од сталне равни $RS$; са $z$ растојање нивоа од равни $PQ$ и нека су $\Phi(y)$ и $F(z)$ површине хоризонталних пресека суда $B$ на висини $y$ и тела $M$ на висини $z$. Функције $\Phi$ и $F$ зависе од облика суда $B$ и тела $M$ и тачно су одређене, кад су ови облици одређени.

Потражимо однос, који постоји између промењивих $x$ и $y$ при поменутом померању тела $M$.

Ако се тело $M$ спусти у течност за толико, да се растојање $x$ смени на $x - dz$ а да се ниво течности у суду $B$ подигне од $y$ на $y + dy$, количина течности, која се издигла за $dy$ изнад нивоа $y$ биће

$$\left[\Phi(y) - F(z)\right] dy.$$

Ова је количина равна количини течности истиснуте телом $M$, кад ово утоне у течност за $dz$, а ова је

$$F(z)\, dz.$$

Отуда једначина

$$\left[\Phi(y) - F(z)\right] dy = F(z)\, dz,$$

а пошто је у сваком тренутку

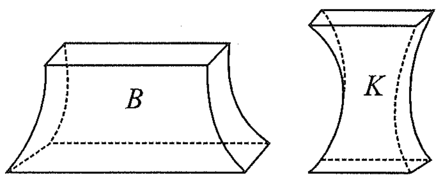
$$z = x - y,$$

то једначина постаје

$$\Phi(y) \frac{dy}{dx} = F(x - y).$$

То је диференцијална једначина проблема и њеном се интеграцијом добија тражени однос између промењивих $x$ и $y$. Једначина је првога реда и према томе њен општи интеграл садржи једну интеграциону константу, која се у свакоме датом случају одређује на овај начин: ако се почетна раздаљина $x$ означи са $h$ а почетна висина нивоа течности са $k$, онда интеграл $y$ треба да за $x = h$ има вредност $k$; из једначине, која исказује тај услов израчунава се интеграциона константа помоћу датих вредности $h$ и $k$.

На томе се принципу може основати једна метода: за графичку интеграцију пространих класа диференцијалних једначина, међу којима се налази и типова, што се за данас ни једном од познатих метода не могу интегралити; затим, за одређивање вредности одређених интеграла; за конструкције кривих линија, у чијим једначинама фигуришу неодређени интеграли; за конструкције разноликих алгебарских и трансцендентних кривих и уопште за графичко решавање разноликих проблема. Свакоме од таквих проблема одговара нарочити облик суда $B$ и тела $M$.



Слике 2 и 3

Приметимо да је у практици најподесније дати суду $B$ и телу $M$ такве облике, да имају по две стране равне и паралелне међу собом (нпр. паралелне равни слике) тако, да су хоризонтални пресеци сви правоугаоници исте ширине (сл. 2 и 3).

Тада ће бити

$$\Phi(y) = \alpha\varphi(y),$$
$$F(z) = \beta\Theta(z),$$

где су $\alpha$ и $\beta$ растојања паралелних страна суда $B$ и тела $M$, а $\varphi(y)$ и $\Theta(z)$ њихове ширине на висинама $y$ и $z$.

На тај начин лако је остварити какав се хоће облик функција $\varphi(y)$ и $\Theta(z)$: на плочи од какве материје, која се лако реже, ваљало би нацртати одговарајућу криву линију, чија је ордината у хоризонталном правцу $\Theta(z)$ и по њој изрезати тело $M$; цртајући на таквој једној плочи одговарајућу криву, чија је ордината у хоризонталном правцу $\varphi(y)$, изрезали би по таквој кривој равне стране суда $B$, а помоћу ових лако је склопити и сам суд.

Диференцијална једначина тада постаје

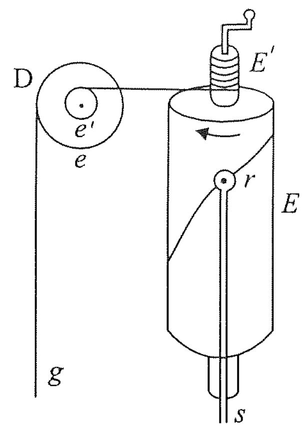
$$\alpha\varphi(y)\frac{dy}{dx} = \beta\Theta(x-y).$$

Раздаљина $x$ може се мењати на разне начине, од којих ћу овде навести оне, који изгледају најподеснији за практичну реализацију.

## Први начин

Замислимо један вертикалан цилиндар $E$, (сл. 4) који се може окретати око своје вертикалне осовине, и један колотур $D$, који се може окретати око своје хоризонталне осовине, управно на равни слике. Вежимо цилиндар и колотур једним концем тако, да кад се крај $g$ конца буде кретао наниже, цилиндар се окреће у правцу стрелице и то тако, да је увек лук описан ма којом тачком периферије цилиндра раван дужини, коју је прешао крај конца $g$. То ће се постићи нпр. ако пречник тачке $e'$ буде раван пречнику продужења цилиндра $E'$, а пречник тачке $e$ раван пречнику цилиндра $E$.

Утврдимо чврсто тело $M$ на крају конца $g$, који се може кретати једино у вертикалном правцу навише и наниже. За доњи крај $s$ друге једне шипке $rs$, која се такође може кретати само у вертикалном правцу, утврдимо пловак, који ће пливати на површини течности у суду $B$ и који ће се у овој спуштати или дизати према мењању нивоа $y$ течности. За горњи крај $r$ исте шипке утврдимо једну писаљку која ће при окретању цилиндра остављати траг на његовом омотачу.



*Слика 4*

Потапајући постепено тело $M$ у течност, ниво ће се у суду $B$ постепено дизати и писаљка $r$ описаће криву, дефинисану диференцијалном једначином

$$\alpha \varphi(y) \frac{dy}{dx} = \beta \Theta(x-y),$$

где ће $x$ бити апсциса ма које тачке те криве, мерена на периферији цилиндра, а $y$ ордината; крива, тако добијена, представљаће онај партикуларни интеграл ове једначине, који за $x = h$ има вредност $y = k$, где $h$ и $k$ означују почетне вредности дужине $x$ а $k$ почетни ниво течности.

Апарат, дакле, може служити за графичку интеграцију диференцијалних једначина облика

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\psi(x-y);$$

за тај посао треба само суду $B$ дати такав облик да је

$$\varphi(y) = \frac{1}{\alpha f(y)},$$

а телу $M$ такав облик, да је

$$\Theta(z) = \frac{1}{\beta}\psi(z),$$

где су $\alpha$ и $\beta$ дебљине суда $B$ и тела $M$. Интегралну криву имаћемо оцртану на омотачу цилиндра $E$, који још само ваља развити у раван. Ако се тражи да интеграл за $x = x_0$ има дату вредност $y = y_0$ онда ваља почетној дужини $x$ и нивоу течности $y$ дати те вредности $x_0$ и $y_0$.

Приметимо и то, да кад би између пречника точкова $e$ и $e'$ постојао однос

$$r = \lambda r'$$

а између пречника цилиндара $E$ и $E'$ однос

$$R = \mu R'$$

крива, коју описује писаљка на омотачу цилиндра $E$ биће интеграл једначине

$$\alpha \lambda \mu \varphi(y) = \frac{dy}{d\xi} = \beta \Theta\left(\frac{\xi}{\lambda\mu} - y\right),$$

пошто тада између апсциса $\xi$ те криве и њима одговарајућих дужина $x$ постоји однос

$$\xi = \lambda \mu x.$$

Испитајмо неколико интересантнијих специјалних случајева овакве графичке интеграције.

1. *Нека је тело* М *призматично*, тако да је

$$\Theta(z) = \text{const} = \beta'.$$

Тада је

$$x = \frac{\alpha}{\beta\beta'} \int \varphi(y)\, dy,$$

и апарат би био *интеграф и интегратор* за криву, која се добија у пресеку суда $B$ са равни слике.

Овакав би се прост апарат могао у практици употребљавати за конструкцију разноликих кривих линија, а мењајући димензије $\beta$ и $\beta'$ тела $M$ имале би се те линије у разним размерама.

Ако се нпр. за пресек суда $B$ узме један део хиперболе, чија је апсциса $y$ а ордината $\frac{k}{y}$, крива описана на омотачу цилиндра биће експоненцијална крива

$$y = Ce^{\frac{kx}{\beta\beta'}\chi}$$

помоћу које се нпр. могу графички израчунавати логаритми.

Ако је суд $B$ клинаст, тако да је

$$\varphi(y) = ay + b,$$

траг писаљке $r$ биће парабола

$$x = \frac{\alpha}{\beta\beta'}\left(\frac{ay^2}{2} + by + c\right).$$

Ако су криве, добијене пресеком суда $B$ са равни слике, кружни луци, тако да је

$$\varphi(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$$

траг писаљке $r$ биће трансцендентна крива

$$x = \frac{\alpha}{\beta\beta'} \int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \arcsin\frac{x}{r} \quad \text{итд.}$$

2) *Ако је суд* В *йризмашичан*, тако да је

$$\varphi(y) = \text{const} = \alpha'$$

онда апарат конструише интеграле диференцијалне једначине

$$\alpha\alpha' \frac{dy}{dx} = F(x - y).$$

Тако нпр. ако је тело $M$ клинасто, тако да је

$$\Theta(z) = az + b,$$

траг писаљке $r$ биће интеграл линеарне диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(x - y) + B}{\alpha\alpha'}.$$

И у томе облику апарат може служити као интеграф и интегратор, јер ако се стави да је

$$x - y = z,$$

једначина постаје

$$\frac{dz}{dx} = 1 - F(z),$$

одакле је

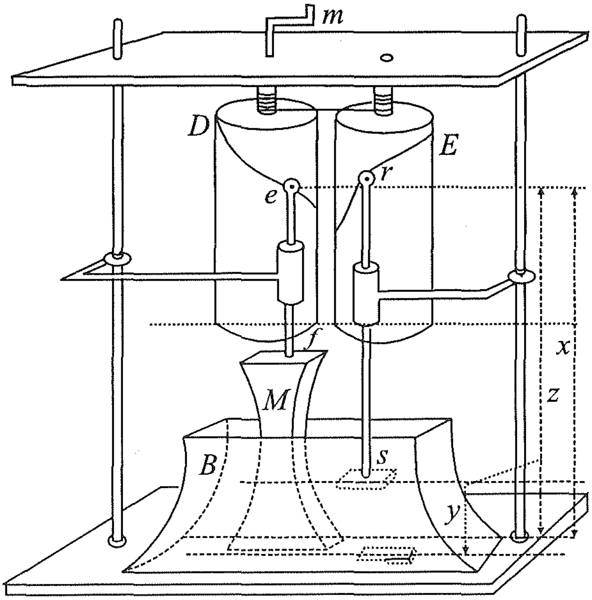
$$x = \int \frac{dz}{1 - F(z)}.$$

Но само, пошто писаљка $r$ описује криву $(x, y)$, то да би се из већ готове слике добило $z$, што одговара једноме датом $x$, ваља од $x$ одузети $y$ са слике, пошто је $z = x - y$.

Дајући суду $B$ и телу $M$ разноврсне друге облике, имали би апарат за конструкције интеграла разноликих диференцијалних једначина и за континуалну конструкцију разноврсних алгебарских и трансцендентних кривих линија.

### Други начин

Замислимо (сл. 5) два вертикална цилиндра $D$ и $E$ истога пречника, везана међу собом тако, да кад се цилиндар $E$ окреће ручицом $m$ око своје осовине, и цилиндар се $D$ окреће у истоме правцу са истом угловном брзином. Утврдимо чврсто тело $M$ на крају $f$ шипке $ef$, која се може кретати једино у вертикалном правцу навише и наниже и која на своме врху $e$ има металан шиљак, који у сваком тренутку додирује омотач цилиндра $D$. За доњи крај $s$ друге шипке $rs$, која се такође може кретати само у вертикалном правцу навише и наниже, утврдимо пловак, који ће шипку дизати или спуштати према мењању нивоа течности у суду $B$. За горњи крај $r$ исте шипке утврдимо једну писаљку, која ће при окретању цилиндра $E$ остављати траг на његовом омотачу.



*Слика 5*

Замислимо на хартији у равни конструисану једну криву

$$\eta = f(\xi),$$

а затим хартију омотану око цилиндра $D$.

Ако се цилиндри почну окретати помоћу ручице $m$ и ако се шиљак $e$ шипке $ef$ руком управља тако, да непрестано остаје на кривој

$$\eta = f(\xi)$$

малопређашње раздаљине $x$ биће у свакоме тренутку

$$x = \eta = f(\xi)$$

и нивоа течности $y$ у суду $B$, сматрана као функција дужине $\xi$, биће дата интеграцијом диференцијалне једначине

$$\alpha\,\varphi(y)\frac{dy}{d\xi} = \beta\Theta\left[f(\xi) - y\right]t'(\xi),$$

где интеграл $y$ за $\xi$ = почетној апсциси нпр. $\xi = 0$ треба да има вредност $y$ = почетној висини течности $k$, која на тај начин игра улогу интеграционе константе. *Интегрална крива ове диференцијалне једначине биће дакле оцртана писаљком* r *на омотачу цилиндра* E.

Тако, ако је тело $M$ призма, чија површина основице нека је $a$, крива описана писаљком $r$ биће интеграл диференцијалне једначине

$$\alpha\,\varphi(y)\frac{dy}{d\xi} = a\,\beta\,t'(\xi),$$

одакле је

$$\int_h^y \varphi(y)\,dy = \frac{a\beta}{\alpha}\left[f(\xi) - f(0)\right]$$

и апарат би могао служити за решавање оваквих једначина по $y$. Ако је поред тога и суд $B$ призма, чији је пресек троугласт, тако да је

$$\varphi(y) = \alpha' y,$$

последња једначина постаје

$$\frac{\alpha' y^2}{2} = \frac{a\beta}{\alpha} f(\xi) + C,$$

одакле је

$$y = \sqrt{\frac{2a\beta}{\alpha} f(\xi) + C'}$$

и апарат би могао служити за решење задатка: кад је конструисана крива

$$\eta = f(\xi),$$

извршити континуалну конструкцију криве

$$y = \sqrt{f(\xi)}.$$

И уопште, дајући суду $B$ згодан облик, а узимајући тело $M$ призматично, апарат може служити за решење задатка: помоћу конструисане линије $\eta = f(\xi)$ извршити континуалну конструкцију криве

$$y = \Psi[f(\xi)],$$

где је $\Psi$ каква унапред дата функција.

У овоме облику, као што је лако увидети, апарат може служити на разне начине и као интеграф, интегратор, пантограф итд. А као такав он се може употребити у свима питањима, која се своде на проучавање интегралних кривих линија, као нпр. за одређивање варијација статичних момената површина, момената лепљивости, количине механичког рада итд.

### Трећи начин

Замислимо исти апарат као у II начину, али са овим додацима.

1. Цилиндар $D$ креће се, помоћу сатног механизма, сталном угловном брзином, тако да једна тачка на његовом омотачу за јединицу времена пређе јединицу дужине пута. Услед везе са цилиндром $E$ и овај ће се кретати истом брзином.

2. Течност из суда $B$ непрестано отиче кроз један отвор величине $\Omega$ на дну пола суда, удешен тако, да контракција буде потпуна.

Писаљка $r$ описаће тада на омотачу цилиндра $E$ извесну криву, чија се диференцијална једначина овако налази. Ако се у интервалу времена $dt$ тело $M$ спусти у течност за толико, да се растојање $x$ смени на $x-dx$ а да се ниво течности у суду $B$ подигне од $y$ на $y+dy$, количина течности, која се издигла за $dy$ изнад нивоа $y$ биће

$$\left[\alpha\,\varphi(y)-\beta\,\Theta(z)\right]dy$$

и она је равна разлици количине течности, истиснуте телом $M$, кад ово потоне у течност за $dz$ и количине течности истекле из суда $B$ за време $dt$, тј. разлици

$$\beta\,\Theta(z)\,dz-\lambda\sqrt{y}\,dt\,,$$

где је

$$\lambda=\mu\Omega\sqrt{2g}\,,$$

$\mu$ је коефицијенат контракције течности, $\Omega$ површина отвора а $g$ убрзање теже.

Отуда једначина

$$\left[\alpha\,\varphi(y)-\beta\,\Theta(z)\right]dy=\beta\,\Theta(z)\,dz-\lambda\sqrt{y}\,dt\,,$$

а пошто је (ако је, као што је претпостављено, на омотачу цилиндра $D$ нацртана линија $\eta=f(\xi)$ по којој једнако клиза метални шиљак $e$, а међу тим ма која тачка тога омотача при окретању цилиндра пређе за јединицу времена јединицу дужине пута), у сваком тренутку

$$z=x-y=f(t)-y,$$

то ће диференцијална једначина трага писаљке $r$ на омотачу цилиндра $E$ бити

$$\alpha\,\varphi(y)\frac{dy}{dt} + \lambda\sqrt{y} - af'(t) = 0,$$

где интеграл $y$ за $t = 0$ треба да има вредност $h$ = почетној висини нивоа течности изнад контракционе равни. Овај интеграл биће дакле графички представљен на омотачу цилиндра $E$. Све диференцијалне једначине, које се могу свести на овај последњи облик, могу се дакле тим путем графички интегралити.

Ако је нпр. тело $M$ призматично, тако да му је површина пресека управног на равни слике = $a$, па дакле

$$\beta\,\Theta(z) = a,$$

а суд $B$ има такав облик да је

$$\alpha\,\varphi(y) = \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}},$$

онда ако се стави да је

$$u = \sqrt[4]{y}$$

крива $(u, t)$ биће интеграл Riccati-јеве једначине

$$\frac{du}{dt} = af'(t) - \lambda u^2$$

о чему се лако уверавамо заменом горњих вредности у диференцијалној једначини. Крива $(y, t)$, описана писаљком $r$ на омотачу цилиндра $E$, јесте дакле таква, да у сваком тренутку вредност

$$u = \sqrt[4]{y},$$

представља одговарајућу вредност интеграла Riccati-јеве једначине. А опоменувши се, да се Riccati-јева једначина уопште ни једном од познатих метода не може интегралити, као и тога, да се на њу своди веома велик број општих диференцијалних једначина и да је њена интеграција у вези са великим бројем питања из више геометрије, механике и физике, лако је увидети важност овакве графичке интеграције.

Приметимо, да учинивши да се величина отвора $O$ мења са временом по извесним унапред датим законима, имали би нове типове диференцијалних једначина, које се могу интегралити хидрауличним путем. А таква се мењања величине отвора могу остварити нпр. помоћу једнога трећег, хоризонталног цилиндра, на чијем би омотачу била оцртана крива линија, што одговара датоме закону те варијације.

*

Принцип интеграције, истакнут у овоме раду, може се остварити још и на друге веома разнолике начине и поље за комбинације овакве врсте веома је пространо. Свакоме начину његовога реализовања одговарају читаве класе диференцијалних једначина првога реда, које се њиме могу интегралити и читаве класе кривих, које се могу континуално конструисати.

***Најпослетку, завршавајући, додајем да су сви до сад предложени интеграфи и апарати за графичку интеграцију појединих врста диференцијалних једначина основани на употреби принципа сасвим друге, чисто кинематичне, природе, који су мање подесни за реализацију и доводе до типова једначина много мање општих, но хидраулични принцип о коме је овде била реч. Нарочито се простотом конструкције и генералношћу проблема, које решава, одликује апарат сл. 4.***

Опис свију до сад познатих апарата за графичку интеграцију може се наћи у: *Catalog mathematischer und mathematisch-plysikalischer Modelle, Apparate und Instrumente,* von Walther Dyck Prof. au der techn. Hochschule, München 1892–1893. Издање друштва Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

# АПАРАТ СА ТЕЧНОШЋУ ЗА ГРАФИЧКУ ИНТЕГРАЦИЈУ ИЗВЕСНИХ ТИПОВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА*

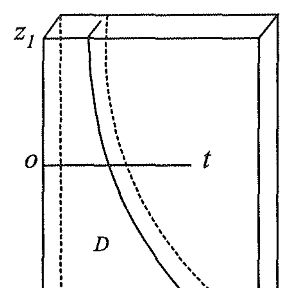
У свом чланку *О хидрауличкој интеграцији диференцијалних једначина* (American Journal of Mathem., vol. XX, № 4), изложио сам једну методу која може да послужи за графичку интеграцију диференцијалних једначина првог реда. Могуће је варирати распоред делова апарата, а самим тим и типове једначина које се том методом могу интегралити.

По мојим упутствима конструисан је један апарат ове врсте, што је било нарочито лако урадити; он је могао да послужи за директно цртање графика интеграла извесних класа једначина. Ове једначине се, истина, могу интегралити и аналитички, али згодно је, за примене, имати методу за брзу и сигурну механичку конструкцију њихових интегралних кривих.

## ОПИС И ФУНКЦИОНИСАЊЕ АПАРАТА

Претпоставимо да је на једној плочици једнаке дебљине (на пример, на дрвеној дасци), обележен систем правоуглих координатних оса *oz, ot* (сл. 1); нека је затим на њој нацртана дата крива

$$t = F(z)$$



*Слика 1*

---

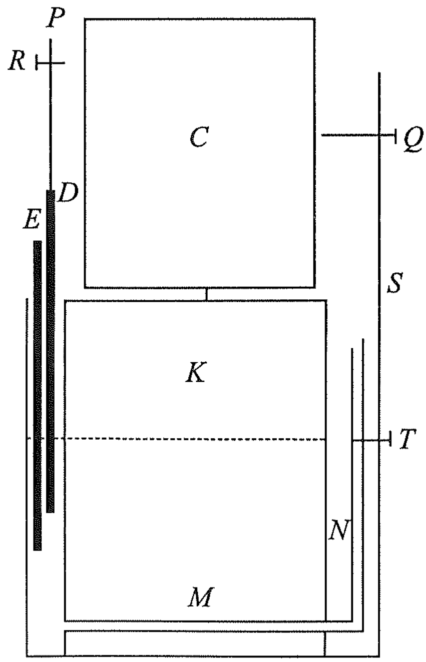
* Наслов оригинала: *Appareil à liquide pour l'intégration graphique de certains types d'équations différentielles,* American Journal of Mathematics, Baltimore 1899, vol. XXII, 1, pp. 1–12.

и нека је исечена површина ограничена двема правама $z_1$ и $z_2$, тако извученом кривом и $z$-осом (ако би се крива простирала са обе стране $z$-осе, плочица би се исекла по овој кривој и двема правама $z_1$ и $z_2$). Овај исечени део биће у оном што следи називан: *плочица D*.

Повуцимо затим на другој плочици, такође једнаке дебљине, систем координатних оса $ov$, $ow$ и дату криву

$$w = \Phi(v)$$

и, као у ономе што претходи, исецимо део плочице између криве и две праве $v_1$ и $v_2$. Овај исечени део назваћемо: *плочица E*.



*Слика 2*

Претпоставимо сада да су на цилиндру $C$ повучене две осе $O\xi$ и $Ox$ тако да оса $O\xi$ буде паралелна основи цилиндра и да је оса $Ox$ једна од његових генератриси. Нацртајмо потом дату криву

$$x = \theta(\xi).$$

После овога, претпоставимо да смо конструисали апарат по следећој схеми.

Посуда $K$ (сл. 2) која има облик паралелопипеда у вези је преко хоризонталне цеви $M$ са другом вертикалном цеви $N$. Цилиндар $C$ постављен је на неку подлогу (на пример, на дрвени сандук) и може се полако окретати око вертикалне осе, било под дејством неког сатног механизма, било ручицом која се окреће руком.

Плочица $E$ учвршћује се тако да буде потопљена у посуди $K$ и да буде непокретна у току експеримента.

Плочица $D$, такође потопљена у посуди, учвршћена је за крај полуге $P$ која може да клизи вертикално. На полузи $P$ учвршћен је репер $R$; држећи га руком, може се, померајући га вертикално заједно са полугом (па стога и заједно са плочицом $D$) постићи да се, кад се цилиндар $C$ окреће, репер стално налази на кривој $x = \theta(\xi)$ нацртаној унапред на цилиндру.

Сипајмо затим у посуду $K$ било какву течност, до неке произвољне висине. Кад цилиндар $C$ почне да се окреће, а услед померања у сваком тренутку репера $B$ овај се стално налази на кривој $x = \theta(\xi)$, ниво течности ће се подизати или спуштати заједно са дужином $\xi$ коју ће прећи нека тачка цилиндра према неком закону који зависи од облика

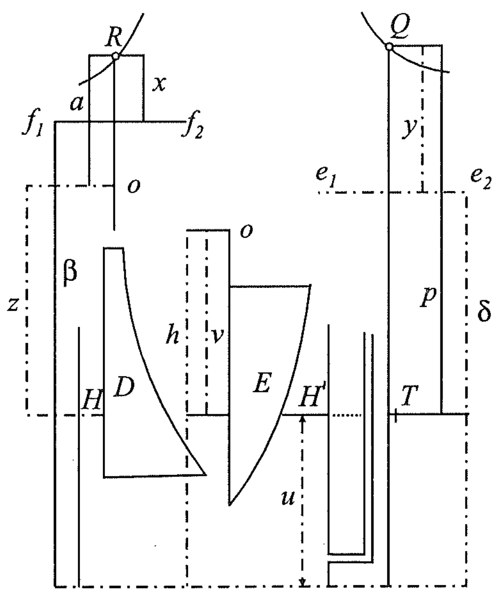
1. криве $x = \theta(\xi)$ нацртане на цилиндру;
2. криве $t = F(z)$, по којој је била исечена плочица $D$;
3. криве $w = \Phi(v)$, по којој је била исечена плочица $E$.

Претпоставимо да је једна вертикална полуга $S$ смештена поред цеви $N$ и да она може да клизи вертикално, као и да се на њој налази репер $T$ на доњем крају и оловка $Q$ на висини цилиндра. Ако посматрач у сваком тренутку премешта репер $T$ тако да његов врх буде стално на висини нивоа течности у цеви $N$ и да је, помоћу једног завртња, учвршћена оловка $Q$ на полузи тако да растојање $QT$ буде непроменљиво у току премештања, оловка ће на ротирајућем цилиндру описати извесну криву

$$y = \chi(\xi),$$

која зависи од три податка 1, 2 и 3 и чију ћемо диференцијалну једначину потражити.

У том циљу означимо (сл. 3) са:




*Слика 3*

$a$ и $b$ – уједначене дебљине плочица $D$ и $E$;
$l$ и $g$ – ширина и дебљина посуде $K$;
$r$ – полупречник цеви $N$;

$\alpha$ – растојање репера $R$ од тачке $O$, координатног почетка плочице $D$;

$h$ – растојање координатног почетка за плочицу $E$ од равни дна посуде $K$;

$\beta$ – растојање осе $f_1f_2$ координате $\xi$ на цилиндру $C$ у равни дна посуде $K$;

$\rho$ – растојање од оловке $Q$ до нивоа течности;

$\delta$ – растојање од осе $e_1e_2$ координате $\xi$ која се односи на криву $y = \chi(\xi)$, коју описује оловка $Q$, до равни дна посуде, могло би се довести до подударања ове осе и осе $f_1f_2$ која се односи на криву описану репером $R$; али, како те две криве варирају у супротним смеровима, у пракси је корисно, ради смањења висине цилиндра, изабрати висину те осе;

$x$ – ординату криве $x = \theta(\xi)$ повучене на цилиндру;

$y$ – ординату криве $y = \chi(\xi)$ коју описује оловка $Q$;

$z$ – растојање тачке $O$ од нивоа течности;

$u$ – висину тог нивоа мерену од дна посуде $K$;

$v$ – растојање координатног почетка од плочице $E$ на нивоу течности.

Количине $a, b, l, g, r, \alpha, h, \beta, \rho, \delta$ су константе за дати експеримент, а $x, y, z, u, v$ променљиве.

После овога, нека је $HH'$ почетни ниво течности. Кад се плочица $D$ загњури тако да се $x$ промени у $x - dx$, запремина $dV$ течности која се подигла изнад првобитног нивоа $u$ биће

$$dV = gldu + r^2\pi du - b\Phi(v)\,du - \alpha F(z)\,du, \tag{1}$$

а како је

$$u = y + \delta - \rho, \tag{2}$$

$$v = h - u = h + \rho - \delta - y, \tag{3}$$

стављајући, краткоће ради,

$$gl + r^2\pi - b\Phi(h + \rho - \delta - y) = \Phi(y), \tag{4}$$

$$aF(z) = \psi(z), \tag{5}$$

имаће се

$$dV = \left[\Phi(y) - \psi(z)\right]dy. \tag{6}$$

Али та запремина једнака је услед потапања плочице $D$ премештеној запремини. Како је ширина дела потопљеног испод нивоа $HH'$ једнака $F(z)$, његова дебљина $a$ и висина $-dx$, његова запремина биће

$$-a\,F(z)\,dx = -\psi(z)\,dx\,,$$

одакле излази једнакост

$$(7) \qquad \left[\Phi(y) - \psi(z)\right] dy = -\psi(z)\,dx\,.$$

Али у сваком тренутку је

$$(8) \qquad u + z + \alpha = x + b\,,$$

и одатле

$$(9) \qquad \begin{cases} z = x - y + \lambda \\ x = z + y - \lambda\,, \end{cases}$$

са

$$(10) \qquad \lambda = \beta + \delta - \alpha - \rho;$$

стога се једначина (7) може написати у једном од следећих облика:

$$(11) \qquad \Phi(y)\,dy + \psi(z)\,dz = 0\,,$$

$$(12) \qquad \left[\Phi(y) - \psi(x - y + \lambda)\right] \frac{dy}{dx} + \psi(x - y + \lambda) = 0\,.$$

Тако изгледа диференцијална једначина проблема. Ако је

$$(13) \qquad \eta(z, y, C) = 0$$

општи интеграл једначине (11), општи интеграл једначине (12) биће

$$(14) \qquad \eta(x - y + \lambda, y, C) = 0;$$

обрнуто, ако је

$$f(x, y, C) = 0$$

општи интеграл једначине (12), такав интеграл једначине (11) биће

$$f(z + y - \lambda, y, C) = 0\,.$$

Стога, ако је крива описана на цилиндру и дуж које се помера репер $R$

$$x = \theta(\xi)$$

и ако је општи интеграл једначине (11) дат са (13), крива $y = \chi(\xi)$ описана оловком $Q$ биће одређена са

$$\chi\left[\theta(\xi) - y + \lambda, y, C_1\right] = 0\,,$$

где је $C_1$ једна партикуларна вредност интеграционе константе, одређена, на пример, условом, наметнутим кривој $y = \chi(\xi)$, да пролази кроз дату тачку $\xi = \xi_0$, $y = y_0$; ово даје три једначине

$$x_0 = \theta(\xi_0), \quad z_0 = x_0 + y_0 + \lambda, \quad \eta(z_0, y_0, C) = 0,$$

које одређују вредност константе $C$.

Приметимо такође да, будући да имамо:

1. криву $x = \theta(\xi)$, унапред нацртану;
2. криву $y = \chi(\xi)$, нацртану на цилиндру оловком $Q$;
3. почетне вредности $\xi_0, z_0, y_0$ (везане, уосталом, релацијом

$$z_0 = \theta(\xi_0) - y_0 + \lambda$$

и од којих су стога две произвољне), вредност променљиве $z$ која одговара датој вредности променљиве $y$ (и обрнуто) биће одређена на следећи начин.

Ако је $y = y_1$ дата вредност променљиве $y$, одговарајућа вредност променљиве $z$ је ордината једне од пресечних тачака криве

$$y = \theta(\xi) - y_1 + \lambda \tag{15}$$

и права

$$\chi(\xi) = y_1,$$

паралелних са $y$-осом.

Обрнуто, ако је $z_1$ дата вредност променљиве $z$, одговарајућа вредност променљиве $y$ је ордината једне од пресечних тачака криве

$$y = \chi(\xi)$$

и криве

$$y = \theta(\xi) - z_1 + \lambda. \tag{16}$$

Криве (15) и (16) нису ништа друго до крива $x = \theta(\xi)$ померена у правцу $x$-осе.

## ПРИМЕНА НА НЕКЕ ПРОБЛЕМЕ

I. Најпре, апарат може да послужи као ***интегратор***, тиме што омогућује израчунавање вредности неког одређеног интеграла

$$J = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz.$$

Претпоставимо:

1. да је плочици $E$ дат облик паралелопипеда, тако да имамо

$$\Phi(y) = \text{const} = B;$$

2. да је крива $x = \theta(\xi)$ било која права

$$x = m\xi + n;$$

3. да је плочици $D$ дат такав облик да претходна функција $F(z)$ буде једнака $f(z)$, тј. да буде

$$\psi(z) = \alpha f(z).$$

Интеграл једначине (11) биће тада

$$y = -\frac{\alpha}{B}\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz + y_0,$$

а с друге стране, вредност $y_1$ која одговара вредности $z = z_1$ биће ордината пресечне тачке праве

$$y = m\xi + \lambda_1$$

(где је $\lambda_1 = n + \lambda - z_1$) и криве $y = \chi(\xi)$ нацртане оловком $Q$. После одређивања ове вредности $y_1$, имаће се

$$J = -\frac{B}{\alpha}(y_1 - y_0).$$

II. Апарат може да послужи такође као ***интеграф***. Претпоставимо:

1. да је плочици $D$ дат облик паралелопипеда тако да буде

$$F(z) = \text{const} = H;$$

2. да је крива $x = \theta(\xi)$ било каква права

$$x = m\xi + n.$$

Диференцијална једначина (12) тада, пошто се стави

$$dx = m\,d\xi,$$

постаје

$$\left[\Phi(y) - \alpha H\right]dy = -m\alpha H(\xi - \xi_0).$$

Одатле и према једначини (4), да би апсциса $\xi$ криве $y = \chi(\xi)$, нацртане на цилиндру оловком $Q$, представљала у сваком тренутку вредност датог интеграла

$$J = \int_{y_0}^{y} f(y)\,dy,$$

потребно је и довољно да буде

$$\frac{\alpha H - \Phi(y)}{m\alpha H} = f(y),$$

тј. да крива по којој је била исечена плочица $E$ буде таква да је

$$\Phi(y) = \alpha_1 f(k-y) + \alpha_2,$$

са

$$\alpha_1 = \frac{m\alpha H}{b}, \quad \alpha_2 = \frac{gl + r^2\pi - \alpha H}{b}; \quad k = h + \rho - \delta.$$

III. Апарат се може применити на графичку интеграцију једначина облика

$$f(y)\,dy + \psi(z)\,dz = 0, \tag{17}$$

где су $f$ и $\psi$ дате позитивне функције.

Ради тога треба плочици $D$ дати такав облик да буде

$$F(z) = \frac{1}{\alpha}\psi(z),$$

а плочици $E$ такав да је

$$\Phi(y) = \beta_1 - \beta_2 f(k-y),$$

са

$$\beta_1 = \frac{gl + r^2\pi}{b}, \quad \beta_2 = \frac{1}{b}, \quad k = h + \rho - \delta;$$

најзад, за криву $x = \theta(\xi)$ узеће се било која права. Према претходно реченом, кад се располаже кривом $y = \chi(\xi)$ извученом оловком $Q$ и почетним вредностима $\xi_0, z_0, y_0$, из тога се лако изводи вредност $y$ која одговара датој вредности променљиве $z$ (или обрнуто), где су променљиве $y$ и $z$ везане претходном диференцијалном једначином.

IV. Апарат се такође може прилагодити графичкој интеграцији једначина облика

$$F\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right) = 0, \tag{18}$$

које се не могу непосредно написати у облику (17), али у којима једначине могу бити раздвојене помоћу неке смене независно променљиве облика

$$\xi = M(y+z),$$

где је $z$ нова независно променљива, а $M$ дата функција.

Заиста, кад се изврши ова смена, променљиве $y$ и $z$ ће бити везане диференцијалном једначином облика $f(y)\,dy + \Psi(z)\,dz = 0$ (где ћемо претпоставити да су функције $f$ и $\varphi$ позитивне). С друге стране, означавајући са $N(\xi)$ инверзну функцију функције

$$\xi = M(t),$$

имаће се

$$N(\xi) = y + z = x + \lambda = \theta(\xi) + \lambda$$

и одатле

$$\theta(\xi) = N(\xi) - \lambda.$$

Према томе, да би оловка $Q$ цртала интегралну криву једначине (18), потребно је и довољно:

1. да се плочици $D$ дâ такав облик да буде

$$F(z) = \frac{1}{\alpha}\varphi(z),$$

а плочици $E$ такав да је

$$\Phi(y) = \beta_1 - \beta_2 f(k-y);$$

са

$$\beta_1 = \frac{gl + r^2\pi}{b}, \quad \beta_2 = \frac{1}{b}, \quad k = h + \rho - \delta;$$

2. да крива $x = \theta(\xi)$ буде следећа:

$$x = N(\xi) - \lambda,$$

где $\lambda$ има претходно значење.

V. Апарат се може подесити за решавање следећег проблема: кад су дате произвољне функције

$$\tau = \Omega(t)$$

и било каква већ нацртана крива $x = \theta(\xi)$, нацртати криву

$$y = \Omega\left[\theta(\xi)\right].$$

Приметивши да, ако је та крива она коју описује оловка $Q$, тада је

$$y = \Omega(x) = \Omega(z + y - \lambda),$$

па стога $y$ дефинисано овом једначином као функција од $z$ мора задовољити претходну једначину

$$\Phi(y)\, dy + \psi(z)\, dz = 0$$

(при чему је тај услов, уосталом, и довољан). Овај услов не зависи од облика криве $x = \theta(\xi)$ а кад се он испуни за било коју од ових кривих биће испуњен и за сваку другу криву.

Он ће се реализовати дајући плочицама $D$ и $E$ погодне облике. Приметимо да се последњи услов своди на следећи услов: ако је

$$t = \Delta(\tau)$$

инверзна функција функције

$$\tau = \Omega(t),$$

тада $z$ дефинисано са

$$z = \Delta(y) - y + \lambda$$

мора задовољити једначину (11), што се може остварити на више начина. На пример, плочици $D$ би се дао облик паралелопипеда а плочици $E$ такав облик да буде

$$1 - \Delta'(y) = \Phi(y);$$

или би се пак плочици $E$ дао облик паралелопипеда ширине $B$, а плочици $D$ такав облик да буде

$$y = \Omega(z + y - \lambda)$$

у односу на $y$ итд.

Уместо једне покретне и једне непокретне плочице, може их се имати више. Означимо покретне плочице са $D_i$ а непокретне са $E_i$. Претпоставимо да се све плочице $D_i$ крећу независно једне од других и да плочици $D_i$ одговара крива

$$x = \theta_i(\xi),$$

нацртана на цилиндру. Означавајући, као у претходном, са

$$t_i = F_i(z)$$

криву по којој је исечена плочица $D_1$, и са $d_i$ дебљину ове; са

$$w_i = \Phi_i(v_i)$$

криву по којој је исечена плочица $E_i$ и са $b_i$ дебљину ове последње, лако се налази да ће се промена нивоа течности садржане у посуди $K$, кад цилиндар почне да се окреће, покоравати диференцијалној једначини

$$(19) \qquad \Phi(y)dy + \sum \psi_i(z_i)\,dz_i = 0,$$

где је, краткоће ради, стављено

$$\Phi(y) = gl + r^2\pi - \sum b_i \Phi_i(k_i - y),$$

$$\psi_i(z_i) = \alpha_i F_i(z_i),$$

при чему су величине $k_i$ извесне константе. Означавајући са

$$(20) \qquad \omega(y, z_1, z_2, \ldots, z_k) = 0$$

релацију између променљивих $y$ и $z_i$ изражену једначином

$$(21) \qquad \int \Phi(y)\,dy + \sum \int \Psi_i(x_i)\,dx_i + \mathrm{const},$$

крива коју описује оловка $Q$ има једначину

$$y = \chi(\xi)$$

која се добија кад се величине $z_1, z_2, \ldots, z_k$ елиминишу из једначине (20) и једначина

$$(22) \qquad \begin{cases} z_1 = \theta_1(\xi) - y + \lambda_1, \\ z_2 = \theta_2(\xi) - y + \lambda_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_k = \theta_k(\xi) - y + \lambda_k, \end{cases}$$

где слова $\lambda_i$ означавају извесне константе аналогне претходним константама $\lambda$.

Могу се тако, полазећи од било које једначине облика (19) и замењујући у њој променљиве $z_i$ њиховим вредностима (22) (где функције $\theta_i$ и константе $\lambda_i$ могу бити било какве), образовати једначине првог реда по $\xi$ и $y$ чије је интегралне криве могуће нацртати оловком $Q$ у апарату.

*Примедба.* – Уграбио сам сада прилику да укажем на неке рачунске грешке које су ми се поткрале у наведеном Чланку; добиће се тачне формуле замењујући у том Чланку једначину (1) следећом једначином

$$\left[\Phi(y) - F(x)\right]dy = -F(x)\,dx$$

(у шта је лако уверити се) и мењајући онда формуле које из (1) следе. Ово, уосталом, не погађа значење методе и не мења типове једначина које се описаним поступком могу интегралити.

# ГРАФИЧКА ИНТЕГРАЦИЈА ИЗВЕСНИХ ТИПОВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА*

У часопису Dingler's polytechn. Journal (1897; Bd. 305) г. Клерић је описао један крајње једноставан апарат, који је назвао *шракшориоīраф*, јер он може да послужи за описивање једним непрекидним потезом тракторије било какве дате равне криве. Апарат се може прилагодити, многим другим графичким решењима, једној лакој и тачној конструкцији бројева $\pi$ и $e$, дељењу лука кружнице на $n$ једнаких делова, итд.

Хтео бих овде да приметим да би, лако модификован, апарат г. Клерића могао да послужи за графичку интеграцију, веома једноставну и лаку, извесних типова диференцијалних једначина првог реда.

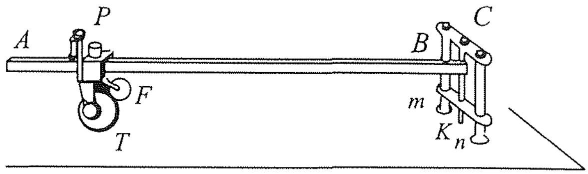
Замислимо, наиме, апарат конструисан на следећи начин: на металној шипци $AB$ (сл. 1) помера се вертикални точкић $T$, који може бити учвршћен помоћу једног завртња $P$, на произвољном растојању од крајње тачке $B$ шипке. Точкић се придржава једним стременом и ослања се, дејством своје тежине, на хоризонтално раширену хартију; могуће је, уосталом, оптеретити га по вољи помоћу додатног тега.

Угао који раван точкића заклапа са вертикалном равни што пролази кроз шипку може бити сталан или варирати по неком датом закону, који зависи од конструкције апарата.[1]

---

* Наслов оригинала: *Intégration graphique de certains types d'équations différentielles du premier ordre*, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris 1899, t. XXVII, pp. 200–205.

[1] У апарату г. Клерића овај угао стално је једнак нули, а модификација коју би у њему требало учинити да би се оно што следи могло применити састојала би се у давању овом углу неке вредности различите од нуле, сталне или по датом закону промењиве.




*Слика 1*

Кретање шипке воде две карике $m$ и $n$, учвршћене за ножић $K$, којим се следи дата крива, мада он може узети било који правац, јер се шипка може слободно окретати око осе $CK$.

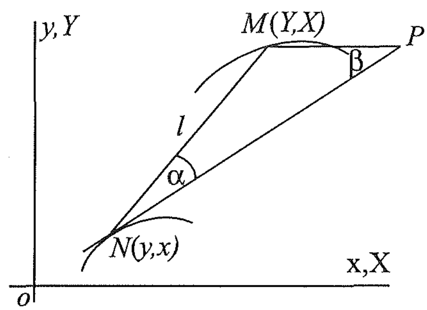
Точак $F$, који прелази преко точкића $T$, премазан је неком материјом која боји (на пример, штампарским мастилом) и преноси ову на точкић $T$, који тада оставља траг на хартији.

Када се ножић $K$, вођен карикама $m$ и $n$ које се држе у руци, помера по датој кривој (Г), траг који на хартији оставља точкић $T$ биће извесна крива ($\Gamma'$), обвојница пресечних тачака хоризонталне равни и равни точкића.

Да би се нашла једначина те криве ($\Gamma'$), која одговара датој кривој, узмимо да је

$$F(X,Y)=0 \tag{1}$$

једначина криве по којој се помера ножић $K$; нека је, даље $M\ (X,\,T)$ (сл. 2) произвољна тачка ове криве a $N(x,y)$ одговарајућа тачка криве ($\Gamma'$), коју повлачи кружић.




*Слика 2*

Означимо са $\alpha$ угао који шипка заклапа са равни точкића; са $\beta$ угао, константан или променљив, који та раван образује са $X$-осом; са $l$ константну дужину $MN$ шипке, а са $b$ дужину $MP$ која се, на правој паралелној $x$-оси на којој лежи тачка $M$, налази између шипке и пројекције равни точкића.

Имамо, према распореду на слици:

$$\begin{cases} X = x + l\cos(\alpha+\beta), \\ Y = y - l\sin(\alpha+\beta). \end{cases} \tag{2}$$

Кад се примети да је

$$\sin\alpha = \frac{b}{l}\sin\beta, \tag{3}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = y', \tag{4}$$

једначине (2) могу се написати у облику

$$\begin{cases} \left[(X-x)(1+y'^2)+by'^2\right]^2 + (b^2-l^2)y'^2 - l^2 = 0, \\ \left[(Y-y)(1+y'^2)-by'^2\right]^2 + y'^2\left[(b^2-l^2)y'^2 - l^2\right] = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Дужина $l$ је фиксирана: то је изабрана дужина шипке. Дужина $b$ може бити фиксирана, или се може мењати заједно са једном или више количина $x, y, y', X, Y$.

Претпоставимо најпре да је она фиксирана. Тада ће се диференцијална једначина криве $(\Gamma')$, коју повлачи точкић, добити елиминацијом величине $X$ и $Y$ из једначине (1) и (5). Та једначина гласи

$$\begin{cases} F\left\{x + \dfrac{\sqrt{l^2+(l^2-b^2)y'^2} - by'^2}{1+y'^2},\right. \\ \left. y + \dfrac{y'\left[b+\sqrt{l^2+(l^2-b^2)y'^2}\right]}{1+y'^2}\right\} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Интеграциона константа биће одређена условом да почетни положај тачке $N$ буде онај који је унапред дат.

У партикуларном случају кад је $b = 0$, апарат се своди на онај Клерићев, а диференцијална једначина (6) постаје

$$F\left(x + \frac{l}{\sqrt{1+y'^2}}, y + \frac{ly'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \tag{7}$$

и дефинише тракторије криве $F(X,Y) = 0$, које се тако описују на континуиран начин помоћу овог апарата померањем ножића $K$ дуж криве $F = 0$.

Ако је $b = l$, диференцијална једначина постаје

$$F\left(x + l\frac{l-y'^2}{1+y'^2}, y + \frac{2ly'}{1+y'^2}\right) = 0. \tag{8}$$

Овај би се случај могао остварити и помоћу једног једноставног зглобног уређаја у облику паралелограма чије би стране имале фиксиране дужине, при чему би једна страна била шипка, а пројекција равни точкића његова дијагонала; најзад, две његове стране од којих једна пролази кроз тачку $M$ а друга кроз $N$ остајале би стално паралелне $x$-оси. Са овим уређајем, ако би се, на пример крива $F(X,Y)=0$ свела на праву

$$Y+mX+n=0,$$

точкић би описивао интеграле диференцијалне једначине

$$(y+mx+p)y'^2+2ly'+(y+mx+q)=0,$$

где је

$$p=n-ml, \quad q=n+ml.$$

Али, могуће је учинити да се $b$ мења са $x, y, y', X$ и $Y$. Закон тог мењања може се приказати са

$$\Phi(b,x,y,y',X,Y)=0, \tag{9}$$

тако да ће се добити диференцијална једначина првог реда, коју задовољава крива повучена точкићем, кад се величине $b$, $X$ и $Y$ елиминишу из једначина (1), (5) и (9).

Случај који је нарочито лако остварити је онај у коме $b$ варира са $y'$ према закону

$$b=\frac{\lambda\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

где је $\lambda$ било која позитивна константа. Такав закон ће важити ако се спулема која држи точкић учврсти тако да раван точкића образује непроменљив угао $\alpha$ са шипком.

Тада би се имало

$$X=x+\frac{\mu-\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad Y=y+\frac{\lambda-\mu y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

са

$$\lambda=t\sin\alpha, \quad \mu=t\cos\alpha,$$

па би крива коју би, при померању ножића $K$ дуж неке криве $F(X,Y)=0$, описивао точкић била интеграл диференцијалне једначине

$$F\left(x+\frac{\mu-\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}, y+\frac{\lambda-\mu y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0.$$

Ако би се, на пример, крива $F=0$ свела на праву

$$Y+mX+n=0,$$

точкић би описивао интеграле једначине

$$\left[(y+mx+n)^2-q^2\right]y'^2+2pqy'+\left[(y+mx+n)^2-p^2\right]=0,$$

где је

$$p=\lambda+m\mu, \quad q=\mu+m\lambda.$$

Претпоставимо да смо начинили апарат у коме $b$ варира према датом закону

(10) $$\Phi(b,x,y,y',X,Y)=0.$$

Да би се нека једначина првог реда

(11) $$f(x,y,y')=0$$

могла интегралити помоћу једног таквог апарата, довољно је да се, уколико је

(12) $$\Psi(X,Y,l,y')=0$$

резултат елиминација величина $x$, $y$ и $b$ из једначина (10), (11) и (5), парцијални извод $\dfrac{\partial\psi}{\partial y'}$ анулира за извесну вредност $l=\lambda$ независну од $y',X$ и $Y$. Јер, ако је тај услов испуњен, биће довољно дати шипци дужину $\lambda$ да би се једначина (12) свела на једначину

(13) $$\chi(X,Y)=0,$$

која садржи само променљиве $X$ и $Y$. Тада ће криве које описује точкић док се ножић $K$ помера дуж криве (13) бити интеграли диференцијалне једначине (11).

# КВАДРАТУРА ПОМОЋУ КУРВИМЕТРА*

Криве линије

$$(1) \qquad y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x},$$

где су $A$, $B$ и $\alpha$ ма какве реалне константе везане релацијом

$$(2) \qquad AB = \frac{1}{4\alpha^2},$$

имају ту интересантну особину, сличну особини праве линије, да им је површина, ограничена $x$ - осом, двема ма којим ординатама и луком криве линије увек једнака површини правоугаоника чија је основица дужина лука криве између крајњих ордината, а висина стална и једнака апсолутној вредности дужине $\frac{1}{\alpha}$.

То излази непосредно отуда што је за ове криве, као што се лако уверити

$$(3) \qquad 1 + y'^2 = a^2 y^2$$

и према томе

$$(4) \qquad P = \frac{1}{\alpha} S,$$

где је $S$ дужина лука, а $P$ површина. Те криве линије имају дакле ту особину да се могу *квадрирати ректификацијом њиховога лука*, тако, да им се квадратура може увек извршити помоћу курвиметра.

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. XCIII, Први разред књ. 39, Београд 1921, стр. 50–61; саопштено у Академији природних наука 25. новембра 1913.

Лако се, у исто време, увиђа и то да су криве (1), поред правих линија паралелних $x$-оси, једине линије за које између површине $P$ и лука $S$ постоји релација облика

$$P = hS, \tag{5}$$

где је $h$ стална количина; то се види из израза општега интеграла диференцијалне једначине првога реда

$$y'^2 = \frac{y^2}{h^2} - 1, \tag{6}$$

који је

$$y = \frac{h}{2}\left(Ce^{\frac{x}{h}} + \frac{1}{C}e^{-\frac{x}{h}}\right), \tag{7}$$

где је $C$ интеграциона константа.

Међутим то ипак нису једине криве чија се квадратура може извршити помоћу курвиметра. Очевидно је нпр. да ће то исто бити и у случају кад су лук $S$ и површина $P$ везани релацијом

$$P = kS + \int_a^b f(x)\,dx, \tag{8}$$

где је $k$ каква стална количина, $f(x)$ каква позната функција променљиве $x$, а $a$ и $b$ крајње апсцисе. Површина би се $P$ тада имала као збир одговарајуће површине криве

$$y = f(x) \tag{9}$$

и правоугаоника чија је основица дужина лука посматране криве, а висина стална и једнака апсолутној вредности дужине $k$.

Потражимо све криве линије које имају такву особину. Диференцијаљењем једначине (8) добија се

$$y = k\sqrt{1 + y'^2} + f(x) \tag{10}$$

из чега се види да су једине криве линије са горњом особином оне, које се добијају интеграцијом диференцијалне једначине првога реда

$$k^2y'^2 - y^2 + 2f(x)y - f(x)^2 + k^2 = 0, \tag{11}$$

где функција $f(x)$ може бити ма каква, и мењајући је добијају се бескрајно многе криве линије које се могу квадрирати ректификацијом помоћу курвиметра.

Навешћемо један факт сличне врсте везан за криве линије што се добијају интеграцијом диференцијалних једначина првога реда облика

$$(12) \qquad y'^2 - \varphi(x)y^2 - \psi(x)y - \lambda(x) = 0,$$

где су $\varphi$ и $\psi$ ма какве функције променљиве $x$, а $\lambda$ функција те променљиве дата обрасцем

$$(13) \qquad \lambda = \frac{\psi^2}{4\varphi} - 1.$$

Једначина се (12) може написати у облику

$$y\sqrt{\varphi} = \sqrt{1 - y'^2} - \frac{\psi}{2\sqrt{\varphi}}$$

одакле је, интегралећи обе стране између датих граница $a$ и $b$

$$(14) \qquad \int_a^b y\sqrt{\varphi} \cdot dx = S - \int_a^b \frac{\psi}{2\sqrt{\varphi}}\, dx.$$

Кад је размак $(a, b)$ такав да је у њему функција $\varphi$ коначна и позитивна, а интеграл $y$ једнога истог знака, биће

$$\int_a^b y\sqrt{\varphi} \cdot dx = \sqrt{\varphi(c)}\int_a^b y\, dx \qquad (a < c < b)$$

и тада је према (14)

$$(15) \qquad P = \frac{1}{\sqrt{\varphi(c)}}\left[S - \int_a^b \frac{\psi}{2\sqrt{\varphi}}\, dx\right].$$

Ако се дакле одреди површина $Q$ једнака разлици површине правоугаоника са основицом једнаком луку криве линије а висином једнаком јединици, и површине, између истих граница, што одговара кривој линији

$$y = \frac{\psi(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}}$$

величина површине $P$ ограничена једном ма којом интегралном кривом линијом (72) лежаће између површина $\lambda Q$ и $\mu Q$, где су $\lambda$ и $\mu$ најмања и највећа вредност коју добија функција

$$\sqrt{\varphi(x)}$$

у размаку $(a, b)$. У таквим се случајевима помоћу курвиметра могу одредити границе између којих лежи величина тражене површине; кад су те границе довољно уске, имаће се на тај начин и сама приближна квадратура.

Постоји још један интересантан општи случај кад се квадратура може извршити помоћу курвиметра. То је случај кад су површина $P$ и лук $S$ везани каквом сталном релацијом

$$\varphi(P, S) = 0 \tag{16}$$

независном од тачака између којих се посматрају. Егзистенција и познавање такве једне релације (16) за једну дату криву линију повлачила би са собом могућност квадратуре те криве помоћу курвиметра: измеривши курвиметром дужину лука криве између датих крајњих тачака, и преневши је, као апсцису $S$ на апсцисну осовину, одговарајућа ордината криве линије (16) дала би основицу правоугаоника, са висином равном јединици, чија ће површина бити једнака траженој површини уочене криве линије.

Потражимо, дакле, све криве карактерисане особином (16). Изразивши из (16) $P$ и $S$ као функције једнога параметра $t$, имаће се нпр.

$$\begin{aligned} S &= \lambda(t), \\ P &= \mu(t), \end{aligned} \tag{17}$$

одакле је означивши, уопште, са $z'$ извод функције $z$ по $x$

$$\begin{aligned} S' &= \sqrt{1+y'^2} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}, \\ P' &= y = \frac{d\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}. \end{aligned} \tag{18}$$

Деобом једначина (18) добија се

$$\frac{1}{y}\sqrt{1 \pm y'^2} = \frac{\frac{d\lambda}{dt}}{\frac{d\mu}{dt}} = \chi(t), \tag{19}$$

где је $\chi$ одређена функција параметра $t$, одакле је опет диференцирањем по $x$

$$\left(\frac{1}{y}\sqrt{1+y'^2}\right)' = \frac{d\chi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}. \tag{20}$$

Деобом једначине (20) другом од једначина (18) добија се

$$\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}\sqrt{1+y'^2}\right)' = \frac{\dfrac{d\chi}{dt}}{\dfrac{d\mu}{dt}} = \Theta(t), \tag{21}$$

где је $\Theta$ одређена функција параметра $t$. Елиминишући параметар $t$ из (19) и (21) добија се једна релација

$$\Phi(u,v)=0, \tag{22}$$

између количина

$$u=\frac{1}{y}\sqrt{1+y'^2}, \tag{23}$$

$$v=\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}\sqrt{1+y'^2}\right)' = \frac{y'y''}{y\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y'\sqrt{1+x'^2}}{y^2}, \tag{24}$$

која представља диференцијалну једначину тражених кривих линија. Као што се види, то је једначина другога реда и припада типу једначина

$$F(y,y',y'')=0,$$

које експлицитно не садрже независно промењљиву количину $x$.

Од интереса је и обрнути задатак: кад је дата каква једначина

$$f(y,y',y'')=0, \tag{25}$$

која експлицитно не садржи промењљиву $x$, распознати да ли су њене интегралне криве линије карактерисане поменутом особином да се могу квадрирати ректификацијом. Решење је задатка, према овоме што је довде казано, веома просто: елиминишући $y'$ и $y''$ из трију једначина (23), (24) и (25), добија се једна једначина

$$\psi(y,u,v)=0 \tag{26}$$

између $y$, $u$, $v$; та једначина треба да се сама собом своди на једну релацију

$$\Phi(u,v)=0 \tag{27}$$

само између $u$ и $v$. А кад је то већ случај, одговарајућа релација између $P$ и $S$ налази се на овај начин: изразивши из (27) $u$ и $v$ као функције једног параметра $t$, нпр.

$$u = p(t), \tag{28}$$

$$v = q(t), \tag{29}$$

једначина (28), према (23) и (18) може се написати у облику

$$\frac{dS}{dP} = p(t), \tag{30}$$

а једначина (29) у облику

$$\frac{du}{dP} = q(t), \tag{31}$$

одакле је

$$dP = \frac{du}{q(t)} = \frac{1}{q(t)}\frac{dp}{dt}dt. \tag{32}$$

Интеграцијом једначине (32) добило би се $P$ као функција параметра $t$, нпр.

$$P = \xi(t) + C_1, \tag{33}$$

где је $C_1$ интеграциона константа, а заменом вредности (32) у (30) добило би се

$$dS = \frac{p(t)}{q(t)}\frac{dP}{dt}dt, \tag{34}$$

одакле се интеграцијом добија и $S$ као функција параметра $t$ нпр.

$$S = \eta(t) + C_2 \tag{35}$$

где је $C_2$ интеграциона константа; елиминацијом параметра $t$ из (33) и (35) и специфицкујући константе $C_1$ и $C_2$ према почетним погодбама за $P$ и $S$ добија се тражена релација између ових количина, која ће важити за све интеграле дате диференцијалне једначине (25).

*

Уопште, курвиметар, чија се права улога своди на непосредно мерење дужине лукова, може се практички употребити и за квадратуре извесних класа кривих линија и за одредбу интеграла извесних класа функција, било као интеграф, било као интегратор.

Тако кад год су две функције $F(x)$ и $S(x)$ везане међу собом релацијом

$$F^2 - S^2 = 1 \tag{36}$$

површина ограничена $x$-осом, двема крајњим ординатама што одговарају апсцисама $x = a$ и $x = b$, и кривом линијом

$$y = f(x) \tag{37}$$

једнака је површини правоугаоника висине = 1 са основицом једнаком дужини лука криве линије

$$y = \int S(x)\,dx \tag{38}$$

између тачака $x = a$ и $x = b$; кад год је могуће тачно конструисати криву (38), курвиметар ће, мерећи дужину њеног лука између тих тачака, дати у исто време и тачну величину површине криве линије (37).

Тако исто, кад год је могућно приближно конструисати криву линију (38), увек ће бити могућно, тачку по тачку, конструисати криву линију

$$y = \int dx\sqrt{1 + S^2} \tag{39}$$

мерећи курвиметром дужине лука криве (38), од једне почетне тачке, узастопце до тачака $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и преносећи их на дијаграму ($x$, $y$) као ординате што одговарају апсцисама $x_1, x_2, x_3, \ldots$; помоћу те криве увек је могућно одредити бројну вредност интеграла (39) између ма каквих граница.

Тако нпр. елиптичком интегралу

$$\int dx\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x}\,,$$

одговарала би као крива (38) проста крива

$$y = k\cos x\,,$$

коју је врло лако конструисати и на којој се непосредно курвиметром могу одређивати бројне вредности елиптичког интеграла.

Тако се исто вредности елиптичког интеграла

$$\int dx\sqrt{h + kx^4}\,,$$

где су $h$ и $k$ две позитивне константе, могу непосредно мерити курвиметром, као дужине $s\sqrt{h}$, где је $s$ дужина лука параболе трећег степена

$$y = \frac{x^3}{3}\sqrt{\frac{k}{h}}\,,$$

коју је лако конструисати.

Узевши

$$S(x) = x,$$

величина ће се интеграла

$$(40) \qquad J = \int_0^x dx\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2},$$

добити курвиметром као дужина лука параболе

$$(41) \qquad y = \frac{x^2}{2}$$

између тачака $x = 0$ и $x = x$.

Ставивши да је

$$x + \sqrt{1+x^2} = a,$$

за $x > 0$ биће увек $a > 1$, налази се да је

$$x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right),$$

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right),$$

$$x\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{4}\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right),$$

и према томе, и према обрасцу (40) биће

$$(42) \qquad \log a = 2L - \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right),$$

где $L$ означује дужину лука параболе (41) између тачака

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right).$$

Као што се види и логаритми се могу практички одређивати непосредним мерењем дужине лука помоћу курвиметра. Сличан је случај и са великим бројем других трансцендентних функција.

Приметимо и то, да кад год је могућно конструисати у поларним координатама (сматрајући $x$ за поларни угао, а $y$ за потег) криву линију

$$(43) \qquad y = S(x)$$

увек је могућно, помоћу курвиметра, одредити бројну вредност одређеног интеграла

$$J = \int_a^b dx \sqrt{S^2 + S'^2} \tag{44}$$

интеграл се $J$ може непосредно измерити као дужина лука криве линије (43) између њених тачака које одговарају поларним угловима $a$ и $b$.

Тако се нпр. интеграл

$$\int e^{-x^2} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \tag{45}$$

(који се иначе ни на који начин не може израчунати у експлицитном и коначном облику) може непосредно мерити курвиметром као дужина лука криве линије

$$y = e^{-x^2} \tag{46}$$

између њених тачака што одговарају поларним угловима који се поклапају са интегралним границама. Конструкција је криве (46) веома проста и лака, и кад је она једном за свагда извршена, израчунавање интеграла (45) између ма каквих граница може се сматрати као свршено.

Исти је случај и са општијим типом интеграла

$$\int e^{f(x)} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx, \tag{47}$$

где је $f(x)$ ма каква дата функција промењљиве $x$; интеграл се може мерити као дужина лука криве линије

$$y = e^{f(x)} \tag{48}$$

такође између њених тачака којима, као поларни углови, одговарају саме интегралне границе.

Курвиметар се, уосталом, може употребити и за графичку интеграцију многобројних типова диференцијалних једначина. Тако, ако се у једној датој једначини другога реда

$$S(x, z', z'') = 0, \tag{49}$$

која не садржи експлицитно функцију $z$, смени

$$\begin{aligned} z'' &= \frac{y'y''}{z'}, \\ z' &= \sqrt{1 + y'^2}, \end{aligned} \tag{50}$$

и ако се нова тако добијена једначина

$$f(x, y', y'') = 0, \tag{51}$$

може интегралити, помоћу курвиметра може се увек интегралити и сама дата једначина (49), пошто је интеграл ове једнак дужини лука одговарајућег интеграла једначине (49).

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
OFFICE NATIONAL DE LA PROPRIÉTÉ INDUSTRIELLE

# BREVET D'INVENTION

---

# ПЕТРОВИЋЕВИ ПАТЕНТИ
# У
# ФРАНЦУСКОМ ПАТЕНТНОМ ЗАВОДУ

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

OFFICE NATIONAL DE LA PROPRIÉTÉ INDUSTRIELLE.

# BREVET D'INVENTION.

**XII. – Instruments de précision, électricité.**

3. – POIDS ET MESURES, INSTRUMENTS DE MATHÉMATIQUES, COMPTEURS ET PROCÉDÉS D'ESSAI.

**N° 413.730**

## Télémètre à sextant.

MICHEL PETROVITCH ET MILORAD TERZITCH RÉSIDANT EN SERBIE.

**Demandé le 11 février 1910.**
Délivré le 2 juin 1910. – Publié le 17 août 1910.

Cette invention a pour objet des télémètres qui sont basés sur le principe du sextant et dans lesquels la distance réelle de l'objet visé au poste d'observation est déterminée d'après la valeur de l'angle visuel et de l'angle parallactique correspondant, et d'après la distance entre les deux points d'observation.

Avec les instruments connus de ce genre la distance cherchée ne pouvait être déterminée que par le calcul, par ce moyen que l'objet dont il s'agissait de déterminer la distance, était visé de deux points d'observation différents, en ayant recours au besoin à un deuxième objet choisi au hasard, les angles étant mesurés ensuite et la distance cherchée déterminée trigonométriquement d'après ces angles et la distance des deux points d'observation entre eux.

L'invention a alors pour but de perfectioner ces instruments de telle manière qu'ils expriment la distance cherchée par un multiple de la distance de deux points d'observation, de telle façon que le réflecteur mobile ou miroir est amené après la première visée à la main, au moyen d'un dispositif mécanique, dans une position qui correspond à un angle parallactique déterminé qui résulte du rapport donné de la base (c'est-à-dire de la distance de deux points d'observa-...

*Почела је 1910. година када је Михаило Петровић за потребе Војно-техничког завода у Крагујевцу радио на конструкцији даљинара земаљске артиљерије. „Молим да се саопшти професору г. др Мики Петровићу, да овде дође, те да овери цртеже за израду даљинара“ – писао је 29. децембра 1910. управник Војно-техничког завода у Крагујевцу. До проналаска свог даљинара Петровић је дошао заједно са познатим стручњаком за геодезију, генералом Милорадом Терзићем. Овај проналазак је патентиран у Француском патентном заводу (BF 1910, No. 413730). Патент је био брзо запажен и 1912. године откупљен за потребе руске артиљерије ради уградње на оруђима.*

Изглед прве стране овог патента.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

OFFICE NATIONAL DE LA PROPRIÉTÉ INDUSTRIELLE.

# BREVET D'INVENTION.

**V. – Machines.**

3. – ORGANES, ACCESSOIRES ET ENTRETIEN DES MACHINES.

**N° 463.082**

**Changement de vitesse.**

M. MICHEL PETROVITCH RÉSIDANT EN SERBIE.

**Demandé le 29 septembre 1913.**
Délivré le 8 décembre 1913. – Publié le 13 février 1914.

Le présente invention a pour objet un changement de vitesse comportant une série de roues de diamètres différents, placées sur un même axe par ordre de grandeur, et des rampes dentées intermédiaires qui permettent à une autre roue ou couronne dentée de passer de l'une à l'autre des premières roues sans cesser d'engrener soit avec celles-ci, soit avec les rampes. Bien entendu toutes les dentures ont un même pas.

Suivant la présente invention, chaque roue est reliée à la suivante par deux rampes inclinées en sens inverses de sorte qu'il est possible de faire passer la couronne dentée également d'une petite roue à une grande et d'une grande roue à une petite quel que soit le sens de rotation des roues; il est par suite possible de toujours passer d'une vitesse à une autre sans avoir à changer le sens de rotation des roues et sans cependant jamais dégrener.

Une forme d'exéctuion d'un changement de vitesse suivant cette invention est représentée au dessin ci-annexé à titre d'exemple.

La fig. 1 en est une élévation de face et la fig. 2 une élévation de côté. Dans la fig. 1 les dentures ne sont représentées que par leurs cercles primitifs.

Dans cette forme d'exécution, la couronne dentée 1 peut engrener successivement avec quatre roues dentées 2, 3, 4, 5 de diamètres différents, montées sur un même axe 6, et reliées les unes aux autres par des rampes intermédiaires 7, 8, 9.

Entre les roues 2 et 3, par exemple, sont disposées, symétriquement par rapport à un plan diamétral, les deux rampes 7 inclinées en sens inverses, chacune d'elles s'étendant sur un arc au plus égal à une demi-circonférence et se raccordant tangentiellement à la périphérie desdites roues 2 et 3.

La même disposition est adoptée pour les rampes 8 et 9. Dans la forme d'exécution représentée chaque rampe a une forme demicirculaire; mais on pourra sans s'écarter de l'invention remplacer le demi-cercle par toute autre courbe convexe se raccordant tangentiellement aux deux roues adjacentes en des points distants l'un de l'autre d'au plus une demi-circonférence, par exemple un arc d'ellipse, une anse de panier, etc. En particulier, il sera avantageux de ménager un arc d'une certaine longueur entre les points de raccorment des deux rampes opposées sur une même roue afin de faciliter le passage de la couronne de la roue sur l'une ou l'autre des rampes, ou inversement; par exemple les rampes reliant les roues 2 et 3 pourront se raccorder tangentiellement en *a a* avec la roue 2 et en *b b* avec la roue 3, de sorte qu'on disposera de tout l'arc *a a* pour faire glisser axialement la couronne 1 de 2 sur 7 et de tout l'arc *b b* pour la faire glisser axialement de 3 sur 7.

Bien entendu, toutes les dentures ont même pas et se raccordent les unes aux autres à tous les points de tangence; cette condition implique certaines relations entre les longueurs des arcs *a a*, *b b*, etc., les formes des rampes et les rayons des roues, mais il est facile d'y satisfaire toujours soit par le calcul, soit par tàtonnement.

On doit observer aussi que dans la forme d'exécution représentée toutes les rampes sont excentrées d'un même côté de l'axe 6; cette disposition facilite aussi le passage de la couronne d'une roue à une autre quelconque dans les dens sens mais n'est pas absolument nécessaires; on pourra par exemple placer l'excentricité des rampes 8 à l'opposé de celle des rampes 7 et 9 pour équilibrer dans une certaine mesure l'ensemble des roues.

On a représenté chaque groupe de rampes opposées comme formant une roue dentée droite ordinaire, c'est-à-dire limitée par deux plans perpendiculaires à l'axe de rotation, mais il va sans dire qu'on pourra limiter les denture des rampes par des surfaçes hélicoïdales telles que *c*, *d*, *e*, *f* par exemple (fig. 2).

## RÉSUMÉ.

Ce changement de vitesse, comportant plusieurs roues dentées de diamètres différents placées sur un même axe et reliées par des rampes dentées, est caractérisé par les points suivants:

1° Le passage entre deux roues consécutives est assuré par deux rampes opposées inclinées en sens inverses.

2° Les extrémités de ces rampes se raccordent tangentiellement avec les roues.

3° Les naissances des rampes opposées sur une même roue sont préférablement séparées l'une de l'autre par un arc de cercle d'une certaine longueur.

4° Les excentricités de toutes les rampes sont préférablement placées toutes sur un même côté de l'axe.

MICHEL PETROVITCH.

Par procuration:

E. BLÉTRY.

N° 463.082 M. Petrovitch Pl. unique

Fig. 1.

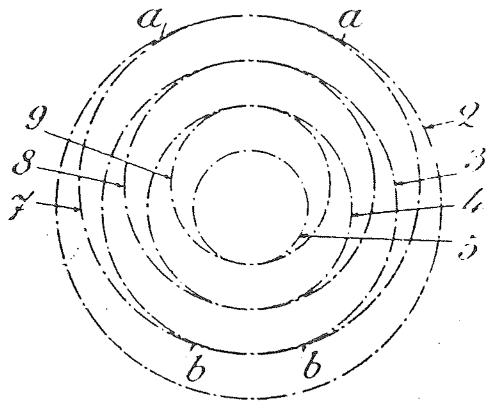
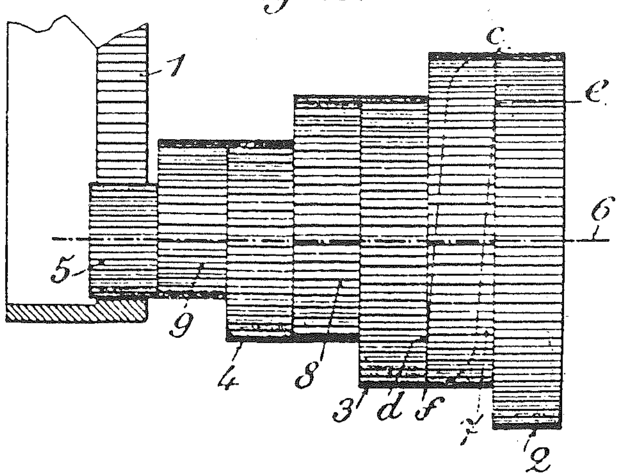



Fig. 2.




*Изглед патента Михаила Петровића из 1913. године о промени брзина при раду мотора (изглед прве, друге и треће стране овог патента). Професор је имао израђен прототип овог патента, а на конгресу опште механике у Лијежу, Петровић је 14. новембра 1930. изложио теоријске основе свог патента о аутоматском мењачу у моторним возилима (Engrenages en vrille)*

# RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

# OFFICE NATIONAL DE LA PROPRIÉTÉ INDUSTRIELLE.

# BREVET D'INVENTION.

**XII. – Instruments de précision, électricité.**

1. – HORLOGERIE.

**N° 480.788**

**Cadran calendrier pour objets d'horlogerie, de bijouterie et autres.**

M. MICHEL PETROVITCH RÉSIDANT EN SERBIE.

**Demandé le 27 janvier 1916, à 15$^{h}$ 50$^{m}$, à Paris.**
Délivré le 1$^{er}$ juillet 1916. – Publié le 21 septembre 1916.

L'objet de la présente invention est un dispositif simple, peu encombrant et économique pour transformer toute montre, horloge, bracelet-montre, chaîne de montre ou autres objets, en calendrier annuel, permettant de trouver instantanément par un calcul mental facile et rapide, le jour de la semaine correspondant à une date considérée de l'année courante. Ce dispositif diffère de ceux utilisés dans les montres-calendriers et les horloges-calendriers existantes par le fait qu'il n'exige pas de changements de mécanisme qui ne s'y trouve pas engagé et qu'il se réalise simplement en adjoignant au cadran ordinaire, marquant les heures (ou à un cadran quelconque indiquant les mois), un cadran supplémentaire composé de 12 coefficients convenablement choisis, valables pour l'année courante.

Le cadran supplémentaire est placé de manière qu'à chaque nombre du cadran des heures ou des mois correspond un coefficient de cadran supplémentaire. En convenant par exemple que chacun des nombres I–XII du premier cadran définisse un mois dans l'ordre naturel de leur succession (I = janvier, II – février, etc.), et que les nombres 0, 1, 2 ... 6 soient les numéros des jours (0 = dimanche, 1 = lundi, 2 = mardi, etc.), le coefficient rattaché à un mois considéré de l'année courante est déterminé de manière que le numéro du jour correspondant à la date considérée de ce mois, et quelle que soit celle-ci, ne soit autre que le plus petit nombre qu'il faut retrancher de la somme de la date et du coefficient cherché pour que la différence soit divisible par 7.

Le dessin ci-joint représente, à titre d'exemple, une forme de réalisation de l'invention, appliquée à l'année 1916, les coefficients changeant chaque année.

La fig. 1 représente un cadran circulaire, et

La fig. 2, un cadra rectiligne.

Les coefficients varieront d'une année à une autre, mail ils sont faciles à déterminer et à remplacer par ceux rattachés à une année quelconque. Le cadran supplémentaire une fois placé, pour connaitre le jour de la semaine à laquelle tombe une date donnée, on ajoute simplement la date au coefficient correspondant au mois considéré; le jour demandé sera indiqué par celui des nombres 0, 1, 2 ... 6 qu'il faut retrancher de cette somme pour la rendre divisible par 7. Ainsi, je jour auquel tombe le 13 juin 1916, est indiqué par le nombre 2 qu'il faut retrancher de 13 + 3 pour la rendre divisible par 7 : c'est donc un mardi.

Les coefficients du cadran supplémentaire seront inscrits, gravés, collés, soit sur la plaque même du cadran des heures, ou des mois, soit sur le pourtour de la montre, de l'horloge, soit sur la couronne du bracelet-montre, soit sur une surface annulaire changeable, concentrique au cadran des heures, etc. Les cadrans supplémentaires et celui des heures ou des mois, peuvent également être placés sur une plaquette ou sur un médaillon, chacune des deux faces de la plaquette ou du médaillon portant une moitié des cadrans, ou bien les deux faces portant les cadrans pour deux années consécutives. De même on peut construire des chaines de montre composées de 6 ou 12 pièces (boucles ou plaquettes), dont chacune correspondrait à un mois, etc. Les deux cadrans peuvent aussi être construits sous la forme d'un petit appareil-bijou de poche, permettant de permuter entre eux les nobmres 0, 1 ... 6, de sorte qu'un même appareil puisse servir indéfiniment et indistinctement pour toutes les années, ou bien les inscrire pour un nombre limitee d'années fixées à l'avance.

Dans la présente description on a prévu que les coefficients portés sur le cadran ou dispositif supplémentaire ajouté au cadran primitif de la montre ou de l'horloge commencent par zéro (le dimanche commençant par un zéro).

Mais il serait aussi possible de faire commencer les coefficients par 1 en les comptant de 1 à 7, au lieu de 0 à 6, le dimanche commençant alors par 1 au lieu de 0.

Les coefficients pourraient être peints, tracés ou collés sur le verre de la montre qui constituerait ainsi le cadran supplémentaire.

Ils pourraient encore être tracés ou collés sur une bague ou un anneau ou dispositif entourant le cadran.

Les cadrans peuvent aussi être rectilignes ou tracees d'une autre manière quelconque suivant l'objet sur lequel ils seront appliqués.

On pourrait également tracer sur une même bague ou surface les coefficients correspondant à plusieurs années successives, de manière à éviter d'être obligé de changer tous les ans le dispositif portant les coefficients.

L'invention pourrait être réalisé de toute autre manière, par exemple en reportant les coefficients sur le cadran ou sur le verre de montre ou d'horloge par décalcomanie.

RÉSUMÉ.

Les points principaux de la présente invention sont:

1° Un dispositif de cadran courbe ou rectiligne pour montres, horloges ou objets quelconques comportant à côté des douze chiffres ordinaires indiquant les heures ou bien à côté des douze indications des mois, des chiffres supplémentaires permettant de trouver par une opération d'arithmétique simple et instantanée le jour de la semaine correspondant à une date donnée.

2° Le dispositif d'exécution de cette invention comporte l'addition au cadran des heures ou des mois, d'un cadran supplémentaire ou bague, ou anneau, plaquette ou dispositif quelconque portant douze coefficients convenablement choisis, ce cadran ou dispositif supplémentaire étant de préférence amovible, pouvant être à simple ou à double face, ou encore comporter sur une même face ou sur ses deux faces les coefficients correspondant à plusieurs années successives, les coefficients pouvant être répartis en lignes courbes ou en lignes droties suivant l'application.


MICHEL PETROVITCH.

Par procuartion:

E. WATTIER.

№ 480.788 M. Petrovitch Pl. unique

*Fig. 1.*

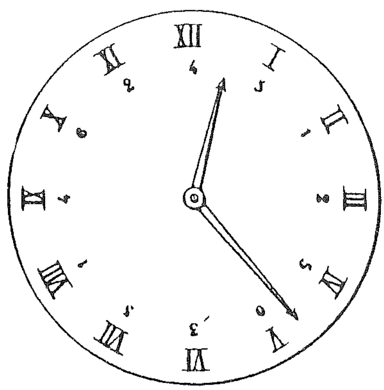


*Fig. 2.*

| I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 |

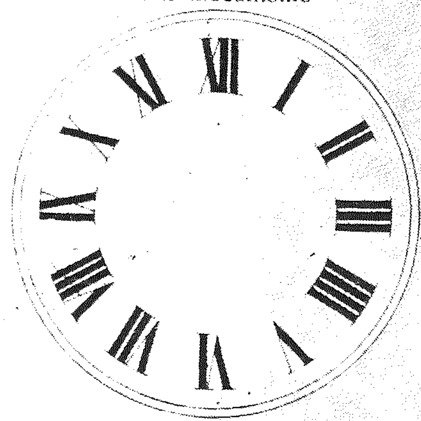
*Изглед патента Михаила Петровића из 1916. године о бројчанику календара*

*Петровићев патент из 1916. године назван Systéme Petrovitch реализовала је фирма „Calendaria" из Цириха на чврстом картону са часовним механизмом. У књижарама Швајцарске и Француске могао се врло повољно добити.*

# Horloge-Calendrier

sans mécanisme

Réglage mensuel



Système Petrovitch
Breveté S.G.D.E.

A

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dimanche... | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 |
| Lundi....... | 1 | 8 | 15 | 22 | 29 | 36 |
| Mardi........ | 2 | 9 | 16 | 23 | 30 | 37 |
| Mercredi ... | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 | |
| Jeudi ........ | 4 | 11 | 18 | 25 | 32 | |
| Vendredi.... | 5 | 12 | 19 | 26 | 33 | |
| Samedi....... | 6 | 13 | 20 | 27 | 34 | |

## RÈGLE

Au commencement de chaque mois mettez la grande aiguille du cadran sur le nombre I-XII correspondant à ce mois, et la petite aiguille sur le nombre 0-6 correspondant sur le tableau B à ce mois et à l'année courante. Ceci étant fait, pour trouver le jour de la semaine correspondant à une date donnée au courant de ce mois, ajoutez cette date au nombre 0-6 marqué par la petite aiguille du cadran; le jour cherché sera indiqué sur le tableau A par la somme ainsi obtenue.

B

| | 1917 | 1918 | 1919 | 1920* | 1921 | 1922 | 1923 | 1924* | 1925 | 1926 | 1927 | 1928* | 1929 | 1930 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier. | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 0 | 1 | 2 |
| Février. | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 0 | 1 | 2 3 | 4 | 5 |
| Mars .... | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| Avril .... | 6 | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 0 | 1 |
| Mai ...... | 1 | 2 | 3 | 5 | 0 | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 |
| Juin ..... | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| Juillet... | 6 | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 0 | 1 |
| Août..... | 2 | 3 | 4 | 6 | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 0 | 2 | 3 | 4 |
| Sept. .... | 5 | 6 | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 0 |
| Octobre | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| Nov...... | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| Déc. ..... | 5 | 6 | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 0 |

Les années bissextiles sont marquées *

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

OFFICE NATIONAL DE LA PROPRIÉTÉ INDUSTRIELLE.

# BREVET D'INVENTION.

VI. – **Marine et navigation.**

1. – CONSTRUCTION DES NAVIRES ET ENGINS DE GUERRE.

**N° 515.072**

**Dispositif pour assurer la flottabilité des navires en danger.**

M. MICHEL PETROVITCH RÉSIDANT EN SERBIE.

**Demandé le 24 novembre 1917, à 15$^{h}$ 57$^{m}$, à Paris.**
Délivré le 20 novembre 1920. – Publié le 24 mars 1921.

[Brevet d'invention dont la délivrance a été ajournée en exécution de l'art. 11§7 de la loi du 5 juillet 1844 modifiée par la loi du 7 avril 1902.]

La présente invention a pour objet un dispositif servant à assurer la flottabilité des navires en danger, par exemple lorsqu'ils sont ou risquent d'être endommagés par une collision, une mine, une torpille, un échouage, etc.

Ce dispositif consiste essentiellement en un certain nombre de récipients extensibles fixés en différents points du navire et reliés chacun à une source respective de gaz ou d'air comprimé par l'intermédiaire d'un robinet ou organe équivalent qui peut être ouvert d'une part à volonté et d'autre part automatiquement sous l'influence d'un endommagement subi par une partie quelconque du navire.

Ces récipients sont préférablement répartis en plusieurs groupes, la capacité et le nombre des récipients de chaque groupe étant déterminés de manière que ceux-ci, une fois gonflés, assurent largement la flottabilité du navire.

Le dispositif ainsi agencé présente les propriétés suivantes:

1° Avant l'instant du danger les récipients extensibles sont dégonflés et n'occupent qu'une place réduite, ne gênant pas, n'encombrant pas et ne diminuant pas sensiblement la capacité de chargement du navire;

2° A l'instant du danger un certain nombre de ces récipients, ceux dont le fonctionnement se trouve utile à cet ...

*Изглед прве стране Петровићевог запаженог патента (BF 1920, No 515072) за потребе опремања бродова*

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

OFFICE NATIONAL DE LA PROPRIÉTÉ INDUSTRIELLE.

# BREVET D'INVENTION.

**V. – Machines.**

8. – MOTEURS DIVERS.

**N° 495.040**

**Moteur.**

M. MICHEL PETROVITCH RÉSIDANT EN SERBIE.

**Demandé le 15 février 1918, à 15$^{h}$ 56$^{m}$, à Paris.**
Délivré le 15 juin 1919. – Publié le 26 septembre 1919.

[Brevet d'invention dont la délivrance a été ajournée en exécution de l'art. 11§7 de la loi du 5 juillet 1844 modifiée par la loi du 7 avril 1902.]

Le motour faisant l'objet de cette invention utilise pour son fonctionnement cinématique les propriétés d'un dispositif spécial de transformation de mouvement transmettant l'effort moteur d'un ou plusieurs pistons cylindriques ordinaires à mouvement rectiligne alternatif à un arbre moteur dirigé parallèlement à l'axe de ce piston, ou de ces pistons, sans intermédiaire de bielles et manivelles, sous la forme d'un couple moteur à bras de levier constant, supprimant les forces d'inertie transversales par rapport à l'axe du piston et assurant ainsi l'équilibrage transversal du moteur. De plus, l'emploi du dispositif permet de donner à l'arbre une grande vitesse e rotation par un mouvement relativement lent et à longue course du piston, ce qui permet d'utiliser l'agent moteur avec des grandes détentes. Étant placé en dehors des cylindres moteurs, le dispositif est accessible et facile à surveiller et à graisser; enfin, il permet de donner au moteur une forme tubulaire de faible section, ou une forme aplatie qui peut souvent être appréciée.

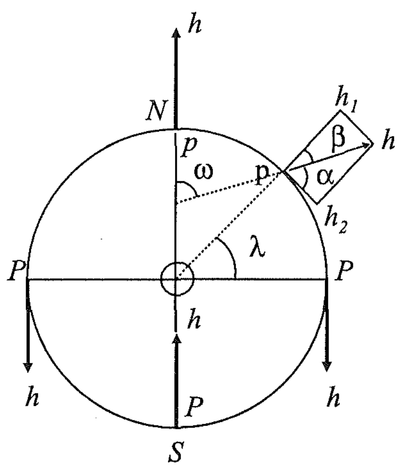
Ce dispositif de transformation de mouvement, qui s'adapte aussi bien aux moteurs à vapeur ou à gaz comprimé qu'aux moteurs à explosion, comporte en principe ...

*Изглед прве стране Петровићевог патента (BF 1919, No 495040) за потребе опремања речних пристаништа*

# СКРЕТАЊЕ МАГНЕТНЕ ИГЛЕ У БЛИЗИНИ ПОКРЕТНЕ МАГНЕТНЕ МАСЕ*

Под утицајем земљиног магнетизма, једна гвоздена маса на површини мора бива намагнетисана у правцу и смислу земаљског магнетног поља, тј. у правцу и смислу југ–север ($SN$). Око гвоздене масе ствара се једно магнетно поље, чији интензитет, правац и смисао у једној произвољној тачки $P$ у близини масе зависе:

1. од магнетног момента $M$ магнета који образује маса;
2. од одстојања $r$ тачке $P$ од центра магнетне масе;
3. од латитуде $\lambda$ тачке $P$, тј. угла између праве што спаја тачку $P$ са центром магнета, и правца запад–исток.




*Слика 1*

Претпостављајући да су димензије магнетне масе занемарљиве према растојању $r$, интензитет, правац и смисао магнетног поља $L$ у тачки $P$ могу се одредити на овај елементаран начин који даје приближну слику појаве, у многим случајевима довољну за прву апроксимацију.

Радијална компонента $h_1$ и тангенцијална компонента $h_2$ поља у тачки $P$ (сл. 1) имају за изразе

$$h_1 = \frac{2M}{r^3} \sin \lambda, \tag{1}$$

---

* Српска краљевска академија, Глас, књ. XCV, Први разред, књ. 40, Београд 1921, стр. 89–97; саопштено у Академији природних наука 3. јуна 1920.

(2) $$h_2 = -\frac{M}{r^3}\cos\lambda,$$

према чему ће интензитет поља $L$ у тачки $P$ имати за израз

(3) $$h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \frac{M}{r^3}\sqrt{1 + 3\sin^2\lambda}\,.$$

Угао $\alpha$ између правца поља и управне на потег $OP$ одређен је познатом једначином

(4) $$\mathrm{tg}\alpha = 2\mathrm{tg}\lambda.$$

Означивши са

$$\beta = 90 - \alpha$$

угао правца $Ph$ и $OP$, биће

(5) $$\mathrm{cotg}\beta = 2\mathrm{tg}\lambda$$

и та једначина, са релацијом

$$\omega = (90° - \lambda) + \beta,$$

где је $\omega$ угао између правца $Ph$ и правца југ–север, потпуно одређују правац и смисао поља $L$ у тачки $P$. Правац је одређен једначином

(6) $$\mathrm{tg}\omega = \frac{\mathrm{tg}\lambda}{1 + 2\mathrm{tg}^2\lambda},$$

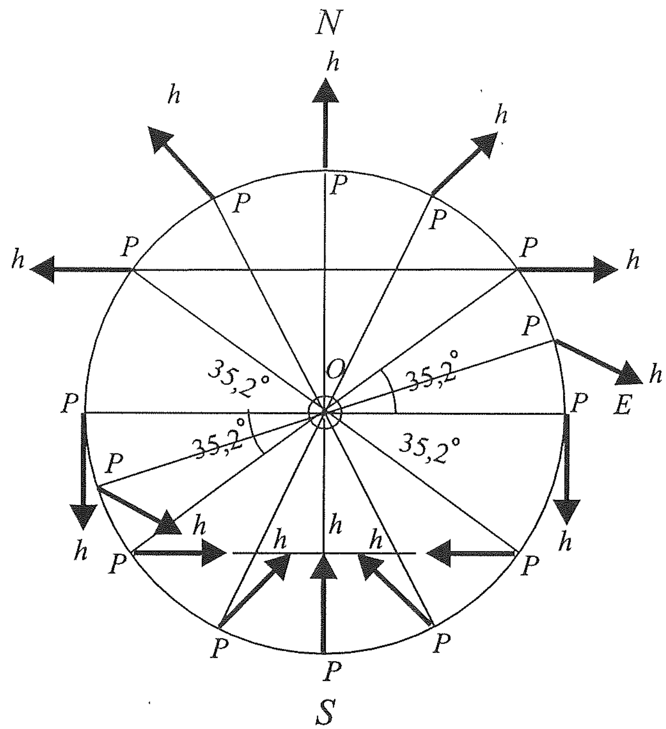
која експлицитно исказује начин на који угао $\omega$ варира са латитудом $\lambda$.

Помоћу једначина (3) и (6) могу се пратити промене поља $L$ кад се тачка $P$, или магнетна маса, буду кретале по површини мора. Правац и смисао поља представљени су сликом 2, где центар $O$ представља положај гвоздене масе. Тај се правац и смисао поклапају са правцем и смислом југ–север кад се тачка $P$ и гвоздена маса налазе на правцу југ–север. Правац се такође поклапа са правцем југ–север, али је по смислу супротан овоме, кад се тачка $P$ и гвоздена маса налазе на правцу запад–исток. Поље $L$ је управно на правац земаљског магнетног поља кад је

$$\mathrm{tg}\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm 0,7071\ldots$$

тј. кад тачка $P$ има за латитуду

$$\lambda = 35{,}2°$$




*Слика 2*

или коју од остале три, у томе погледу еквивалентне латитуде које је лако прецизирати.

Интензитет $h$ поља $L$ варира од вредности

$$h = \frac{M}{r^3}, \tag{7}$$

која одговара положајима $\lambda = 0$ тачке $P$, тј. случају кад се та тачка и магнетна маса налази на правцу запад–исток до вредности

$$h = \frac{2M}{r^3}, \tag{8}$$

која одговара положајима $\lambda = 80°$ тачке $P$, тј. случају кад се та тачка и магнетна маса налазе на правцу југ–север.

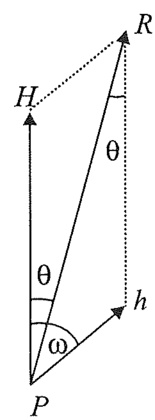
Кад латитуда тачке $P$ износи $\lambda = 35{,}2°$ (или коју од овој еквивалентних трију вредности), поље има правац запад–исток (или исток–запад) и има за интензитет

$$h = \frac{M\sqrt{2}}{r^3}. \tag{9}$$

Приметимо још и то да се правац и смисао поља $L$ могу одредити и помоћу једнога простог апарата конструисаног на овај начин: замислимо да се по периферији круга $C$, чији је полупречник једнак јединици, котрља једна затворена слика $S$, симетрична према једној, у односу на $S$, сталној правој $T$ на којој је означен један, према $S$ утврђен смисао, и која, према томе, мења свој положај, правац и смисао при томе котрљању. Очевидно је из слике 2 да је слику $S$ могућно изабрати тако, да се при њеном котрљању по кругу $C$ правац и смисао праве $T$, у односу на утврђени координатни систем састављен из два један на други управна пречника круга $C$, тачно поклапају са правцем и смислом магнетног поља $L$. Тако изабрана слика остаје непроменљива за све могућне случајеве који се могу имати у појави о којој је реч у овој расправи. Било би од интереса одредити њену једначину у једноме утврђеном координатном систему; коефицијенти те једначине играли би улоге *физичких констаната* у појавама те врсте: они остају непромењени па ма какве вредности имали латитуда $\lambda$ покретне тачке $P$, магнетни моменат $M$ и одстојање $r$ (претпостављајући, наравно, да је ово довољно велико према димензијама магнетне масе).

*

Ако се у тачки $P$ налази осовина једне магнетне игле чија је дужина занемарљива према одстојању $r$ тачке $P$ од магнетне масе, игла ће, комбинованом акцијом земљиног магнетизма који има сталан правац $SN$, и магнетног поља $L$ гвоздене масе која са правцем $SN$ гради променљив угао $\omega$, бити скренута са правца $SN$ за један одређен угао $\Theta$. Величина се тога угла може одредити из елемената $h$, $\lambda$ и интензитета $H$ земљиног магнетизма, као угао који гради правац $SN$ са правцем дијагонале паралелограма (сл. 3), чије су стране $h$ и $H$, а угао између ових $\omega$. Из троугла $PhR$ добија се




$$\frac{h}{H} = \frac{\sin\Theta}{\sin(\omega - \Theta)}, \tag{10}$$

*Слика 3*

одакле се, помоћу елемената $h$, $H$, $\omega$ одређује скретање $\Theta$. Међутим, угао $\omega$ зависи од угла $\lambda$ и одређен је помоћу овога релацијама (5) и (6), тако да ће угао $\Theta$ бити одређен елементима $h$, $H$, $\lambda$ помоћу релација (5), (6), (10).

У специјалном случају кад је $\lambda = 35{,}2°$, тј. кад поље $L$ има правац запад–исток или исток–запад, биће $\omega = 90°$ и према томе

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{tg}\Theta = \frac{h}{H} = \frac{M\sqrt{2}}{Hr^3}.$$

Да би се добила конкретна приближна слика о величинама које могу имати скретања магнетне игле у тачки $P$ под утицајем покретне магнетне масе, претпоставимо нпр. да се тачка $P$ налази са том масом на једној правој чији се правац тачно или приближно поклапа са правцем запад–исток. Угао $\Theta$ ће тада бити одређен обрасцем (11).

Означимо са $V$ запремину гвоздене намагнетисане масе, а са $k$ магнетну надражљивост материјала што састављa ту масу, па ће бити

$$\text{(12)} \qquad M = kVH,$$

према чему образац (11) постаје

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{tg}\Theta = \frac{KV\sqrt{2}}{r^3}.$$

Уочимо нпр. конкретан случај кад је магнетна маса састављена из 10 000 тона мекога челика (случај великога броја француских и енглеских оклопњача) чија је густина 7,7 а магнетна надражљивост $k = 17$. Запремина масе ће бити

$$V = \frac{10{,}000.000}{7{,}7} = 1{,}300.000 \text{ куб. дециметара}$$

тј.

$$V = 1{,}3 \cdot 10^3 \text{ куб. метара.}$$

Према томе ће бити

$$\mathrm{tg}\Theta = \frac{1{,}3 \cdot 10^3 \cdot 1{,}414 \cdot 17}{r^3},$$

тј.

$$\mathrm{tg}\Theta = \frac{31250}{r^3},$$

тако, да се за разна одстојања $r$ тачке $P$ од магнетне масе, а у правцу запад–исток или исток–запад, добија ова таблица скретања магнетне игле:

| $r$ | $\Theta$ између | | |
|---|---|---|---|
| $100^{m}$ | 1° | и | 2° |
| $90^{m}$ | 2° | и | 3° |
| $80^{m}$ | 3° | и | 4° |
| $70^{m}$ | 5° | и | 6° |
| $60^{m}$ | 8° | и | 9° |
| $50^{m}$ | 13° | и | 14° |
| $40^{m}$ | 25° | и | 26° |
| $30^{m}$ | 49° | и | 50° |
| $20^{m}$ | 75° | и | 76° |
| $10^{m}$ | 88° | и | 89° |

Овај елементарни приближни рачун претпоставља да је челична маса компактна; кад би то било какво шупље тело, запремина би $V$ била већа, као и магнетни моменат $M$. У томе случају, као и у случају кад растојање двају магнетних полова те масе није занемарљиво према одстојању тачке $P$ од масе, рачун је знатно компликованији и излази ван оквира ове елементарне практичне студије. Скретања су тада *осетнија* од оних у простоме случају о коме је овде била реч.

Приметимо и то да се у посматраноме простом случају *смисао* скретања $\Theta$ магнетне игле у једној произвољној тачки $P$, а према правцу југ–север, увек поклапа са смислом ротације која би се имала извршити да би се од правца југ–север прешло на правац магнетног поља $L$ у тачки $P$. Тај је смисао, према томе, увек онај који се види из сл. 2. Међутим *величине* скретања расту све брже уколико се растојање између тачке $P$ и магнетне масе смањује. Девијације су тачно једнаке нули за тачке $P$ које се налазе на правој што пролази кроз центар магнетне масе и има за правац југ–север, и то ма колико било растојање тачке од магнетне масе; оне су неосетне кад је тачка у непосредној близини те праве и постају све осетније кад се тачка, одржавајући исто одстојање од масе, удаљава од те праве.

*

Проблем, о коме је овде било речи, може наћи интересантних примена за извесне практичне циљеве. Један брод на мору може нпр. бити аутоматски управљан тако да на сигурно и аутоматски избегне једну подводну, невидљиву, повећу гвоздену масу. Он, тако исто, може бити аутоматски управљан тако да сам, аутоматски, коригује свој правац при приближавању једној гвозденој маси, тако да на ову насигурно удари. Такви су проблеми практички решљиви комбинацијом горњих рачунских резултата о смислу и величини скретања магнетне игле приближавању једној магнетној маси, и познатог факта да се може поставити физичка веза између промена правца магнетне игле и једнога низа сталних електричних контакта око ње, и да се при том ни најмање не ослаби осетљивост игле. Проблем је, као што се зна, решен помоћу варнице Ruhmkorf-овог калема која скаче са врха игле на овоме најближи електрични контакт, на начин који је већ употребљен нпр. у Bersier-овој бусоли; прелазећи са једнога контакта на други (у току скретања игле), струја ставља интензивније или слабије у покрет један мали електрични серво-мотор који управља крмилом брода. Тиме се поставља физичка веза између правца магнетне игле и правца самога брода, а користећи се горњим рачунским резултатима може се на један прост начин постићи да та веза буде таква, да брод кад буде ушао у зону осетне акције магнетне масе, буде од ове аутоматски удаљен или к њој управљен, према томе како се кад хоће.

Егзистенција такве зоне, као и приближна слика о њеноме пространству и јачини њеног утицаја на магнетну иглу, истакнути су на видик оним што је напред казано. А ако се опоменемо да је пространство те зоне, кад магнетна маса није компактна, *веће* но у напред претпостављеном случају, као и да је њено дејство на магнетну иглу *осетније* кад растојање двају магнетних полова те масе није занемарљиво према растојању игле од масе, јасно је да се са таквом једном основицом може рачунати при решавању великога броја практичних проблема.**

---

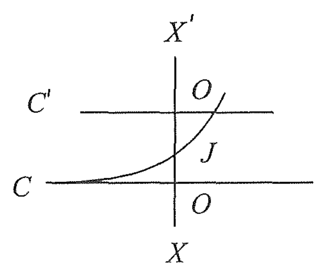
** Рад настао као теоријска основа Петровићевог патента; в. библ. јед. у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића* (пр. Д. Т.).

# ЗУПЧАСТИ УРЕЂАЈИ У ВИДУ СВРДЛА*

Ако су два зупчаника $A$ и $A'$, са различитим пречницима али са истим ходом, учвршћена за исту осовину и окрећу се у истом смеру, размотрити следећи проблем.

*Преместити на непрекидан начин један трећи зупчаник (или зупчасти обруч)* B *од једног од ових зупчаника до другог а да* B *не престаје да својим зупцима захвата било* A *или* A′, *било међузупце помоћу којих се постиже ово премештање.*

Проблем може бити решен помоћу *зупчастог уређаја у виду сврдла* који спаја зупчанике $A$ и $A'$ и образује један посредни зупчасти уређај $I$ који *стално*, у току читавог овог премештања, *захвата* зупчаник (или зупчасти обруч) $B$.




*Слика 1*

I. – У том циљу, размотримо почетне кругове $C$ и $C'$ зупчаника $A$ и $A'$ (сл. 1); нека су $O$ и $O'$ њихови центри а $XX'$ њихова заједничка оса ротације. Одредимо на зарубљеном конусу $(C)$ чије су базе кругови $C$ и $C'$ криву $J$ такву да, кад се она у одређеном смеру опише, пројекција померања на осу $XX'$ буде пропорционална угловном померању дуж круга $C$.

---

* Наслов оригинала: *Engrenages en vrille*, Congrès international de mécanique générale, Liége 1930, pp. 3–15.

Имаће се (сл. 2), са коефицијентом ове пропорционалности $K$,

$$CT = K \cdot AN. \tag{1}$$

С друге стране, уколико је $\gamma$ половина угла при врху конуса, имамо:

$$CT = MP = Z = PN \cdot \mathrm{cotg}\gamma = (R - \rho)\mathrm{cotg}\gamma; \tag{2}$$

$$AN = s = \frac{R\pi}{180}\theta, \tag{3}$$

(где угао $\theta$ треба да буде изражен степенима и децималним деловима степена).

Из (1), (2) и (3) излази:

$$\rho = R(1 - \lambda\theta), \tag{4}$$

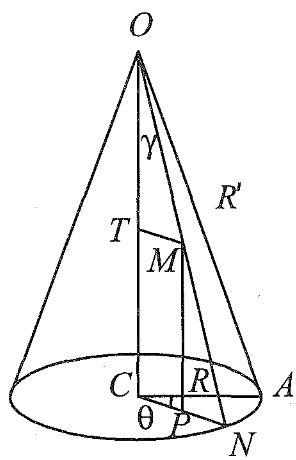
где је

$$\lambda = \mathrm{const} = \frac{K\pi \mathrm{tang}\gamma}{180}. \tag{5}$$

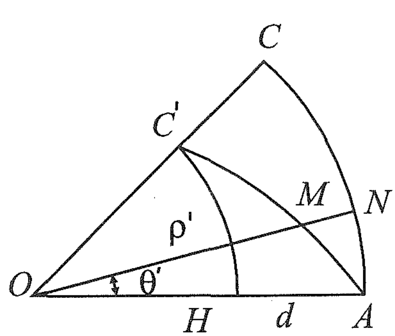
Једначина (4) је поларна једначина пројекције криве $J$ на раван базе конуса. Да би се добила сама крива $J$, треба јој прикључити једначину:

$$s = R\lambda\theta : \mathrm{tang}\gamma = \mu R\theta \tag{6}$$

$$\mu = \mathrm{const} = \frac{K\pi}{180} \tag{7}$$




*Слика 2*




*Слика 3*

Одредимо сада коефицијент $K$ тако да вертикално померање $CT$, које је једнако нули кад је $AN = 0$, буде једнако растојању $CC = d$ од зупчаника $C$ до зупчаника $C'$ кад тачка $N$ опише $n$ кругова. За то треба да буде

$$(8) \qquad K = \frac{CT}{AN} = \frac{CC'}{2nR\pi} = \frac{d}{2nR\pi}.$$

Ако се зарубљени конус ($C$) развије у некој равни, узимајући теме конуса за пол $O$ (сл.3) а праву $OHA$ за поларну осу, дужина $OM$ постаје потег $\rho'$ тачке $M$ у овом равном систему. Како је на том конусу

$$\rho = CP = TM = OM \cdot \sin\gamma,$$

имаће се

$$(9) \qquad \rho = \rho' \sin\gamma.$$

Поларни угао $\theta'$ тачке $M$ у овом систему биће одређен као што следи.

Периферија круга који чини базу конуса има полупречник

$$(10) \qquad R = R' \sin\gamma,$$

где $R'$ означава растојање између било које тачке на овој периферији и темена $O$ конуса. Дакле (сл. 2) угао $s$ има дужину

$$(11) \qquad s = \frac{R\pi\theta}{180}.$$

Када буде развијен у равни, имаће дужину

$$(12) \qquad s = AN = \frac{R'\pi}{180}\theta'.$$

Будући да ове две формуле изражавају исту дужину, имамо $R\theta = R'\theta'$, или, с обзиром на (10):

$$(13) \qquad \theta' = \theta \sin\gamma.$$

Између поларних координата $(\theta, \rho)$ тачке $M$ на конусу и поларних координата $(\theta', \rho')$ исте тачке после развијања конуса у равни (при чему се теме конуса узима за почетак а генератриса која пролази кроз тачку $A$ за поларну осу) постоје, према томе, релације:

$$(14) \qquad \theta = \frac{\theta'}{m}, \quad \rho = m\rho', \text{ где је } m = \text{const} = \sin\gamma.$$

Најчешће су дати полупречници $R$ и $r$ ($R > r$) два зупчаника и растојање $d$ њихових база. Означивши са $h$ висину конуса, имаће се

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{R}{h}, \quad \frac{r}{R} = \frac{h-\alpha}{h}$$

и стога

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{R-r}{d}. \tag{15}$$

Елемент лука криве $J$ дат је са

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dp)^2 + (dz)^2,$$

а како из (4) и (6) излази

$$d\rho = -R\lambda d\theta, \quad dz = \mu R d\theta,$$

добија се

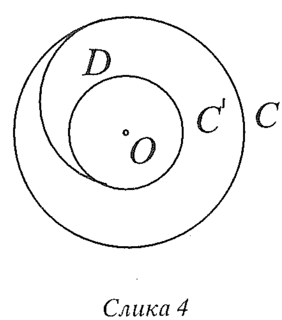
$$S = H\theta\frac{\pi}{180}, \tag{16}$$

где је

$$H = \text{const} = \frac{KR}{\cos\gamma}.$$

Одатле се изводи следећи резултат, који је од практичне користи у примени криве $J$ на проблем којим се бавимо.

Дужина лука криве $J$ на конусу, мерена дуж криве од тачке $\theta = 0$ до неке тачке $\theta = \theta_1$, једнака је дужини лука периферије описане у равни круга $C$ која има заједнички центар са $C$ и $H$ као полупречник, при чему се тај лук мери од тачке $\theta = 0$ до тачке $\theta = \theta_1$.

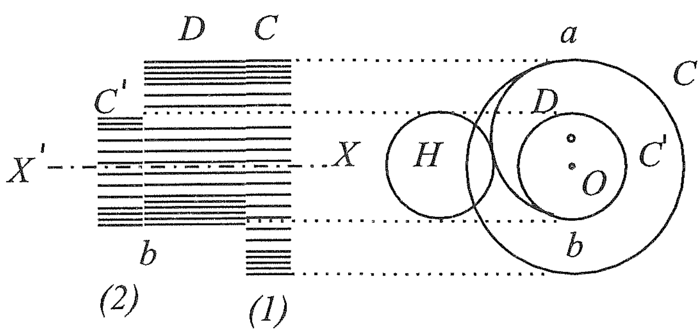


*Слика 4*

Да бисмо имали израз за угао равне криве $J'$ који потиче из развијања конуса у равни, довољно је само у (16) заменити $\theta$ са $\dfrac{\theta'}{m}$.

Велики број особина кривих $J$ и $J'$ добија се једноставно помоћу *йолукриволинијских координаша*, које сам употребио у проучавању извесних класа равних и левих кривих.[1]

II. – Кад је крива $J$ тако одређена, претпоставимо да су два на почетку дата круга $C$ и $C'$ спојена таквом једном кривом (сл. 4) која одговара вредности $K$ одређеној на претходни начин. Слика 5 приказује овај систем, при чему је крива $D$ пројекција криве $J$ у равни круга $C$, одређена тако да се прелаз са $C$ на $C'$ дуж криве $J$ изводи у току једне полуротације.




*Слика 5*

Начинимо два зупчаника (1) и (2) (сл. 5) који имају $C$ и $C'$ као првобитне кругове, при чему зупци имају исти ход. На цилиндричној површини која има за директрису лук $ab$ криве $D$ а за генератрису неку паралелу са осом ротације $XX'$, начинимо једно озупчење (1′) са зупцима који су прави и паралелни са том генератрисом, при чему су број и профили ових зубаца одређени следећим условима: један помоћни зупчаник $P$ треба да буде у стању да захвата оба зупчаника (1) и (2), као и озупчење (1′). Како се полупречник кривине криве $D$, а следствено такође и полупречник почетног тренутног круга цилиндричног озупчења (1′), мења дуж криве $D$, ту имамо једно озупчење са променљивим профилом зубаца, па би требало, бар теоријски, одредити тај профил за сваки од зубаца посебно, према уобичајеним пругама реципрочних профила. Практично, с обзиром на дозвољено одступање, угао $ab$

[1] М. Петровић: *О једном сисшему йолукриволинијских координаша*, Véstnik Král. česke spol. nauk, Праг 1898.

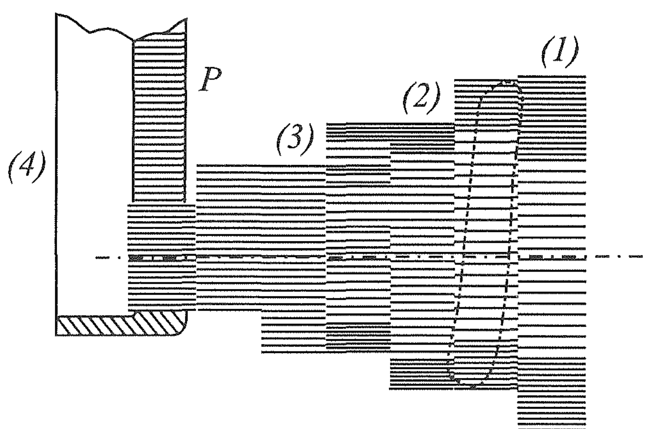
криве $D$ ће се поделити на мањи број лукова кругова који замењују, са траженом тачношћу, одговарајуће делове лука $ab$, па ће се онда за сваки од тих кружних лукова начинити по једна обична пруга профила која одговара неком непромењивом почетном кругу.

Претпоставимо да у низу озупчења који је тако формиран од зупчаника (1) и (2), зупчастог цилиндра (1′) и помоћног зупчаника $P$, овај последњи може да клизи дуж своје осовине П, која се може померати паралелно самој себи тако да $P$ стално захвата цилиндрично озупчење (1′), и поред промењивости његовог почетног круга у датом тренутку. Благодарећи особини криве $J$ да је, док се описује у одређеном смеру, пројекција померања на осовину ротације $XX'$ пропорционална угловном померању око те исте осовине, лако је остварити назачено двоструко померање зупчаника $P$ помоћу вођења које се на више начина може постићи. Помоћу једног таквог вођења, центар зупчаника ће, у траженом тренутку и излазећи од положаја $a$ (сл. 5) у коме $P$ захвата (1), почети да клизи дуж осе П, која ће се и сама померати дуж криве $D$ да би, на крају овог кретања, после траженог броја обртања система, стигла у положај $b$, у коме ће $P$ захватати (2) а да тај зупчаник не престаје, у току тог премештања, да захвата било зупчанике (1) или (2), било посредно озупчење (1′).

Такав један низ озупчења остварује дакле, непрекидно премештање покретног зупчаника $P$ од зупчаника (1) до зупчаника (2) а да захватање у низу не престаје ни у једном тренутку у току тог кретања. Да би премештање од једног од зупчаника до другог могло да се изведе без обзира на смер овог кретања, и то без промене смера ротације који је заједнички за ова два зупчаника, довољно је повезати те зупчанике двема зупчастим цилиндричним површинама (1′) и (1″) који су симетрични у односу на пречник $O$ зупчаника (1) и тангенцијално спојени са зупчаницима (1) и (2). Заједничкој генератриси ове две површине, на којој се укрштају две путање зупчаника $P$, одговарали би заједнички зупци. Две површине би улоге двеју рампи које спајају зупчанике (1) и (2), нагнуте у супротним смеровима и такве да омогућују, без промене смера ротације и без губљења захвата ма у ком тренутку, да зупчаник $P$ прође како од (1) до (2) тако од (2) до (1) једноставном променом смера праволинијског клизања зупчаника дуж његове осе $H$, клизања које се изводи одговарајућим вођењем.

III. – Посматрајмо сада низ зупчаника (1), (2), (3)..., различитих пречника и истог хода, намештених на истој осовини и на њој поређаних по величини њихових пречника и распоређених дуж те заједничке осовине тако да се њихови почетни кругови $C, C', C'', \ldots$ налазе сви на једном истом конусу. У овако образованом ротирајућем блоку, повезали по два узастопна зупчаника симетричним двоструким зупчастим цилиндричним површинама, описаним у претходном параграфу, тако да један зупчаник $P$ може, вођењем које га приморава да врши двоструко премештање, лонгитудинално и радијално, прећи са једног зупчаника у систему на други без прекида захватања било тих зупчаника било цилиндричних рампи које их спајају (сл. 6).

Тако се добија низ зупчаника који остварује трансмисију са позитивним покретањем, при чему однос брзина у тој трансмисији може бити измењен и може узети толико различитих вредности колико има зупчаника $C, C', C'', \ldots$ а да се мотор ниједног тренутка не искључи; при томе су зупчаници стално у захвату, а смер ротације блока не мења се какав било да је смер промене брзине.




*Слика 6*

Тако добијена промена брзине није прогресивна у уобичајеном значењу речи, јер се једино могу искористити оне брзине које одређују зупчаници $C, C', C'', \ldots$ Али у току прелаза са једне од две узастопне брзине на другу све брзине између њих такође се постижу, мада у врло кратком интервалу времена. Пар мотора, који се не зауставља у току овог прелаза, не пролази кроз вредност нулу у овом временском интервалу, што отклања незгоде од обичних уређаја за промену брзине, које иначе потичу од сличног дисконтинуитета.

Ово карактеристично својство описаног низа зупчаника дозвољава, на пример, да се тај низ комбинује са неким механизмом који по-креће центрифуга ради аутоматског произвођења тог прелаза под утицајем промене рада отпора, при чему се тако остварује трансмисија покретачких парова који су онолико велики колико се жели.**

** Рад је настао као теоријска основа Петровићевог патента *Changement de vitesse* из 1913 године. – Пронађен је Петровићев извештај са овог конгреса којег у целости доносимо (пр. Д. Т.).

САВЕТУ ФИЛОСОФСКОГ ФАКУЛТЕТА

*Од 31. авгуса до 7. сешембра ш. г. одржан је у* Лијежу *међународни* Конгрес за Општу Механику. *Захваљујући помоћи добијеној из Фонда Луке Ћеловића, пошписани је учесшвовао на шоме Конгресу и на њему приказао један свој научни рад о чему му је часш поднеши Савешу следећи извешшај:*

*Рад Конгреса, који је одржан под покровишељсшвом Краља Белгије и на коме су узели учешћа делегаши гошово свих држава Европе и Америке, ошворен је у присусшву белгиских највиших просвешних власши и сасшојао се у обавешшењима и предавањима најпознашијих сшручњака о последњим напрецима и новинама у обласшима Опшше Механике, као и у саопшшењима појединих учесника о новим резулшашима до којих су дошли. Време између конференција и приказа нових резулшаша било је испуњено корпорашивним посешама изложаба у Лијежу и Анверсу, и великих индусшријских предузећа у разним крајевима Белгије.*

*Пошписани је на Конгресу акшивно учесшвовао приказом свога рада о спиралној шрансмисији крешања, којим је решен проблем да се помоћу чврсше кинемашичке везе између појединих органа машина за шрансмисију изврши коншинуалан прелаз снаге са једног кружног зупчаника на друге различних пречника, без и једног шренушка прекида кинемашичке везе. Принцип је приказан и као пракшички осшварен на моделу који даје машеријалну реализацију машемашичког решења проблема. Извод шога рада одмах је одшшампан у књизи о радовима Конгреса, која је изашла још за време његовог шрајања, а биће одшшампана у свој пошпуносши у књизи у којој ће биши објављен целокупан рад Конгреса.*

*Захвалан Фонду Луке Ћеловића на могућносши коју му је дао да прикаже свој рад на месшу и у прилици где је шо било од највећег иншереса учиниши, пошписани захваљује и Савешу Факулшеша на одлуци, која му је прибавила шу могућносш.*

*31. Окшобра 1930. г.* *Проф. Теоријске Машемашике*

*Београд* *Мих. Пешровић, с. р.*

# ПРИЛОЗИ

# ПЕТРОВИЋ О СВОЈИМ РАЧУНАРИМА И ДРУГИМ ПРИМЕНАМА*

## МЕХАНИЧКА ИНТЕГРАЦИЈА

Интеграли и апарати за механичку интеграцију диференцијалних једначина који су до данас предлагани заснивају се на коришћењу кинематичких принципа, на пример, оних који се односе на особине рулета.

Г. Петровић врши интеграцију помоћу принципа сасвим друкчије природе, који се лако могу применити и који доводе до једноставних апарата способних за интеграцију општих типова једначина првог реда.

Ако се неко чврсто тело $M$ више или мање дубоко потопи у течност садржану у посуди $B$, ниво течности ће порасти или опасти према извесном закону који зависи од геометријског облика тела $M$ и посуде $B$. Кад су ти облици једанпут фиксирани, промена висине $y$ нивоа, мерене од утврђене хоризонталне равни, зависиће само од промене дубине $x$ потапања.

Релација између $x$ и $y$ изражава се неком диференцијалном једначином првог реда у којој се променљиве могу раздвојити. Апарат који је на основу ових принципа г. Петровић конструисао допушта тако интеграцију сваке једначине облика

$$f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0;$$

притом интегралну криву непосредно описује, на једном цилиндру у обртању, покретна оловка која бележи промене висине нивоа течности. Функције $f(x)$ и $\varphi(x)$ овде се неограничено мењају се обликом тела $M$ и посуде $B$[1].

---

* У књизи *Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrović*, Paris 1922, Петровић је описао своје дело до 1922. године, те је посебно изложио свој рад на рачунарима и другим применама. Професор је, свакако, писао о себи у трећем лицу (пр. Д. Т.).

[1] M. W. – A. Price описао је овај апарат у чланку: *Petrovitch's Apparatus for integrating differential equations of the first order* (*Philosophical Magazine*, may 1900); он је ту додао нове случајеве који се могу интегралити овим поступком. – Белешка Г. Петровића репродукована је у *Журналу за физику*, 1897, стр. 476–479. Његов поступак такође је изложен, непотпуно, у радовима: L. Jacob, *Механички рачун* (*Научна енциклопедија*, стр. 342–357; O. Doin) и H. de Morin, *Апарати за интеграцију* (*Општа научна енциклопедија*, стр. 6–194; Париз, Gauthier-Villars), итд. *Видети* примедбе аутора у *Оп-*

Г. Љ. Клерић[2] је конструисао један крајње једноставан апарат, назван *трактoриограф* – стога што може да послужи за описивање једним непрекидним потезом трактрије било које дате равне криве.

Г. Петровић је записао да овај апарат, лако модификован, може такође да послужи за графичку интеграцију, врло једноставну и удобну, извесних класа диференцијалних једначина првог реда. Такав је, на пример, случај једначине

$$F\left(x+\frac{\mu-\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}},\, y+\frac{\lambda+\mu y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0,$$

где је $F$ било која функција две променљиве. На пример, у случају кад се крива $F=0$ своди на праву дуж које се помера ножић апарата, траг који на хартији оставља покретан точак у апарату представља интеграл једначине облика

$$f(x,y)\,y'^2+ay'+\varphi(x,y)=0,$$

где су $f$ и $\varphi$ полиноми другог степена по $x$ и $y$, а $a$ константа.

Курвиметар који служи за мерење дужина лукова може такође бити употребљен за квадратуру извесних класа диференцијалних једначина.

Тако, криве

$$y=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x},$$

где су $A$, $B$ и $\alpha$ константе међусобно везане релацијом

$$4\alpha^2AB-1=0,$$

имају особину, аналогну једном својству правих линија, да је површина ограничена $x$-осом, луком криве и ординатама крајева тог лука једнака површини чија је основица дужина истог лука а висина апсолутна вредност броја $\dfrac{1}{\alpha}$.

Г. Петровић указује на бројне класе кривих, дефинисаних диференцијалним једначинама, чије се квадратуре могу извршити ректификацијама. Одатле изводи један једноставан и практичан механички поступак израчунавања одређених интеграла са произвољним границама, који се, на пример, може применити на интеграле

$$\int dx\sqrt{1+k^2\sin^2 x},\quad \int dx\sqrt{1+k^2x^4},\quad \int e^{-x^2}\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

---

*штој ревији наука*, у броју од 30. јуна 1913, стр. 475. – Апарат је био приказан на изложби у Лондону 1907, на којој је добио почасну диплому.

[2] *Dingler's Polytechn. Journal*, 1897, Bd. 305.

Нека су $A_i$ активне материје, а $B_i$ производи неке *нормалне* хемијске реакције која не производи секундарне реакције и догађа се између $n$ течности. Варирање количине производа $B_i$ у току времена регулише закон који се добија интеграцијом једначина

$$\frac{dy_i}{dt} = C_i \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $y_i$ означава количину производа $B_i$ која се ствара у току реакције у временском интервалу између тренутака $t = 0$ и $t = t$; количине $\omega_i$ су концентрације смеше у $A_i$, а $C_i$ је коефицијент који се мења са физичким условима, али се може учинити константним за дату реакцију.

Количине $\omega_i$ могу варирати са временом, и то не само због сталног трошења активних материја у току реакције, него и услед деловања спољних узрока. Тако се може постићи да више течности $A_i$ притиче у посуду у којој се одиграва реакција, према познатим законима (истичући, на пример, кроз отворе на дну судова познатих облика). Водећи рачуна о томе да су потрошене количине материја $A_i$ у сваком тренутку међусобно сразмерне, укупна количина производа $B_i$ мењаће се у току времена по закону одређеном интегралом диференцијалне једначине првог реда облика

$$\frac{dy}{dt} = H(\varphi_1 - y)(\varphi_2 - y)\dots(\varphi_n - y), \tag{69}$$

где је $H$ одређена константа, а симболи $\varphi_i$ означавају позитивне функције времена.

Обрнуто: одређујући, гравиметријским или волуметријским мерењима, количине производа $B_i$ које одговарају различитим временским интервалима $(0, t)$, добиће се на дијаграму $(y, t)$ тачке које припадају једној интегралној кривој једначине (69).

Ово је *хемијски поступак* г. Петровића за интеграцију једначина облика (69). На пример, помоћу неке бимолекуларне реакције (на пример, оне која се одвија између хлората поташе и сулфата гвожђа у киселом раствору), могла би се извршити интеграција Рикатијеве једначине

$$\frac{dy}{dt} = H(\varphi_1 - y)(\varphi_2 - y),$$

са приближношћу која зависи од прецизности извршених мерења.

## ОСОБИНЕ ЈЕДНАЧИНА ДИНАМИКЕ

Општи проблем кретања покретне тачке са координатама $\xi$, $\eta$ и $\zeta$ под дејством сила које *алгебарски* зависе од положаја тачке и од њене брзине, а могу се и експлицитно мењати са временом, своди се, кад се стави

$$\xi = \frac{1}{x}, \quad \eta = \frac{1}{y}, \quad \zeta = \frac{1}{z},$$

на интеграцију симултаних једначина облика

$$(71) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=s} f_i(t)\, x^{l_i} y^{m_i} z^{n_i} \left(\frac{dx}{dt}\right)^{\lambda_i} \left(\frac{dy}{dt}\right)^{\mu_i} \left(\frac{dz}{dt}\right)^{\nu_i} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^{k_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=s'} \varphi_i(t)\, x^{l'_i} y^{m'_i} z^{n'_i} \left(\frac{dx}{dt}\right)^{\lambda'_i} \left(\frac{dy}{dt}\right)^{\mu'_i} \left(\frac{dz}{dt}\right)^{\nu'_i} \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^{k'_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=s''} \psi_i(t)\, x^{l''_i} y^{m''_i} z^{n''_i} \left(\frac{dx}{dt}\right)^{\lambda''_i} \left(\frac{dy}{dt}\right)^{\mu''_i} \left(\frac{dz}{dt}\right)^{\nu''_i} \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^{k''_i} = 0, \end{cases}$$

где су $f_i$, $\varphi_i$ и $\psi_i$ дате функције времена $t$ а експоненти

$$(72) \qquad \begin{cases} l_i, \ m_i, \ n_i, \ \lambda_i, \ \mu_i, \ \nu_i, \ k_i, \\ l'_i, \ m'_i, \ n'_i, \ \lambda'_i, \ \mu'_i, \ \nu'_i, \ k'_i, \\ l''_i, \ m''_i, \ n''_i, \ \lambda''_i, \ \mu''_i, \ \nu''_i, \ k''_i \end{cases}$$

су позитивни цели бројеви или су једнаки нули.

Помоћу експонената (72) г. Петровић формира извесне *рационалне* бројеве $M_i$, показујући занимљиве доносе између њих, неких значајних особености система (71) и кретања покретне тачке.

Нека је $t = t_1$ време потребно покретној тачки да из почетног положаја стигне до координатног почетка; ова вредност уопште зависи од почетних услова и мења се са њима, сем у значајним случајевима *таутохронизма* кретања у односу на координатни почетак. Но, када су неки од бројева $M_i$ *негативни, једнаки нули или се јављају у облику* $\frac{0}{0}$ [рећи ћемо, у том случају да су *испуњени услови* (С)], свакако је испуњен један или други од следећих услова:

1° *или је вредност* t = t₁ *трансцендентан сингуларитет координата* $\xi$, $\eta$ *и* $\zeta$ *који варира са почетним подацима*;

2° *или је кретање таутохроно у односу на координатни почетак*, у том смислу што време потребно покретној тачки да из било које тачке стигне у координатни почетак – не зависи од почетних услова.

Одатле излази, на пример, следећа последица:

Кадгод једначине кретања (71) испуњавају услове (С) и интеграле са *униформним* функцијама времена без покретних есенцијалних сингуларитета, или *алгебарским* функцијама времена, или *алгебарским комбинацијама униформних функција* без покретних есенцијалних сингуларитета – *кретање је таутохроно у односу на координатни почетак.*

Други ставови М. Петровића односе се на случај кад су извесни рационални бројеви $M_i$ по апсолутној вредности *већи од неког утврђеног целог броја или се пак јављају у облику* $\frac{0}{0}$. У овом случају:

1° или је $t = t_1$ *трансцендентни сингуларитет* координата ξ, η и ζ који зависи од почетних услова;

2° или је могуће фиксирати два тренутка $t'$ и $t''$ таква да *може бити* $t' \leq t_1 \leq t''$ *само ако је кретање таутохроно у односу на координатни почетак.*

Г. Петровић исто тако доказује, истим расуђивањима, неке друге ставове који се односе на број пролазака покретне тачке кроз координатни почетак у одређеном временском интервалу, као и на време које је покретној тачки потребно да од почетног стигне до неког посматраног положаја.

## АКЦИЈА ДУЖ РАЗЛИЧИТИХ ТРАЈЕКТОРИЈА

Посматрајмо кретање холономног система са $k$ степена слободе и са везама које не зависе од времена, под дејством сила изведених из функције сила $U$, и нека је, са параметрима $q_1, q_2, \ldots, q_k$ који образују систем ортогоналних координата,

$$J = \int_{(P_0)}^{(P_1)} \sqrt{L_1 dq_1^2 + \ldots + L_k dq_k^2}$$

израз за *акцију* дуж произвољне трајекторије која пролази кроз два дата положаја $P_0$ и $P_1$ система, при чему су $L_i$ функције параметара $q_1, \ldots, q_k$ и константе $h$ живих сила, одређених везама и обликом функције сила $U$.

Г. Петровић је формулисао више ставова који дају горње и доње границе вредности акције дуж различитих трајекторија које пролазе кроз дате положаје $P_0$ и $P_1$, и омогућују међусобно поређење вредности акција дуж тих трајекторија. Ово претпоставља да су ова два положаја $P_0$ и $P_1$ међусобно довољно блиски да дуж лука $s = P_0 P_1$ трајекторије ниједан од диференцијала $\sqrt{L_i}\, dq_i$ *не мења знак*; ово се своди на претпоставку да акција дуж лука $s$ има *непроменљиво понашање*, при чему се непроменљивост састоји у немењању смера рашћења елемената $\sqrt{L_i}\, dq_i$.

Поредећи, на пример, међусобно акције које имају *исто понашање* дуж произвољне две трајекторије (исте знаке диференцијала $\sqrt{L_i}\, dq_i$), он долази до следећег резултата: *акција дуж лука* $s = P_0P_1$ *природне трајекторије не може никад бити више него* μ *пута мања од акције дуж лука* $s = P_0P$ *произвољне трајекторије посматране врсте, где је* μ *број који се увек може израчунати.*

Примењујући овај поступак на кретање *слободне* материјалне тачке под дејством сила које се изводе из функције сила $U$, при чему је координатни систем линеаран и ортогоналан, г. Петровић добија следећи резултат:

Ако се са $H$ означи збир апсолутних вредности коначних прираштаја координата при прелазу из положаја $P_0$ у положај $P_1$ покретне тачке, а са $A$ и $B$ највећа и најмања вредност функције $U + h$ (где је $h$ константа живих сила) дуж лука $s$, *акција дуж* s *има за вредносӣ* λH, *īде се вредносӣ факӣора* λ *увек налази између* $\sqrt{\frac{2B}{3}}$ *и* $\sqrt{2A}$.

## ПРИНЦИП МИНИМУМА У ЕЛЕКТРОДИНАМИЧКИМ И ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИМ ПОЈАВАМА

Сваки проблем динамике може се решити тражећи вредности убрзања које у сваком тренутку чине минималном извесну функцију $R$ другог реда у односу на ове, а чији је начин формирања показао г. Апел.

Та функција има облик

$$R = S - \Sigma Q_k q_k'',$$

где је $S$ енергија убрзања, која зависи само од система $q_k$, док чиниоци $Q_k$ зависе од сила које дејствују.

Код природног кретања, убрзања $q_k''$ у сваком тренутку су она која чине израз $R$ минималним у том тренутку; ово својство доводи непосредно до једначина г. Апела

$$\frac{\partial S}{\partial q_1''} = 0, \ \frac{\partial S}{\partial q_2''} = 0, \dots \ .$$

Исти ови услови проширују се на физичке феномене, а г. Петровић указује на изразе који играју улогу израза $S, Q, R$ и $q$ у разним електричним појавама, а посебно у оним електродинамичким и електромагнетским. Он примећује да опште Максвелове једначине, на погодан начин доведене у облик једначина г. Апела, омогућују да се формулише један општи принцип минимума по коме се управљају електрични феномени. Сваком феномену одговара неки скуп $(S, Q_k, R, q_k)$ такав да су у природном току феномена величине $q_k''$ такве да у сваком тренутку чине минималним израз $R$.

## ПРАЖЊЕЊЕ КОНДЕНЗАТОРА

У класичној теорији пражњења кондензатора, претпоставља се да капацитет $C$, отпор $R$ и коефицијент самоиндукције $L$ остају непромењени у току ове појаве. Карактер пражњења битно зависи од знака количине

$$\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}, \tag{73}$$

а пражњење ће бити *конӣинуирано* или *осцилаӣорно* према томе да ли је та количина позитивна или негативна; учестаност осцилације зависи од саме вредности ове количине.

Г. Петровић се бави општим случајем у коме се капацитет, отпор и коефицијент самоиндукције *мењају са временом* на непрекидан начин, уосталом било какав, у току феномена. Он гради једну потпуну теорију овог феномена користећи извесне опште ставове о линеарним диференцијалним једначинама другог реда са промењивим коефицијентима, које се добро примењују на проблем. Употребљена метода не захтева интеграцију једначине проблема, уосталом немогућу у већини случајева. Он долази до увида у особености проблема проучавањем само једне функције времена, коју назива *карактеристичном функцијом* феномена, а која је дата изразом

$$\overline{\omega}(t) = \frac{1}{CL} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right);$$

у случају кад су $C$, $R$ и $L$ инваријабилне величине она се своди на константу (73).

Функција $\overline{\omega}(t)$ поседује то фундаментално својство да *природа пражњења у датом временском интервалу од тренутка* $\mathrm{t} = \mathrm{t}_1$ *до тренутка* $\mathrm{t} = \mathrm{t}_2$ *битно зависи од знака функције* $\overline{\omega}(\mathrm{t})$ *у том интервалу*. Наиме:

1° у сваком временском интервалу у коме је карактеристична функција стално *негативна* пуњење кондензатора може променити смер само једном; пре и после те промене пражњење је *непрекидно*;

2° у сваком временском интервалу у коме је ова функција *позитивна* пражњење је осцилаторно.

У овом последњем случају, уколико су са $M$ и $N$ означене највећа и најмања од вредности које узима карактеристична функција у временском интервалу $(t_1, t_2)$ *електрично пуњење кондензатора мењаће знак у том интервалу, најмање онолико пута колико има целих јединица у броју*

$$\frac{(t_2 - t_1)\sqrt{N}}{\pi},$$

*а највише онолико пута колико има целих јединица у броју*

$$\frac{(t_2 - t_1)\sqrt{M}}{\pi} + 2.$$

Ако је, сем тога, карактеристична функција стално *опадајућа* док $t$ варира од $t_1$ до $t_2$, тада временски интервал између две узастопне промене знака пражњења *постаје све већи, остајући притом мањи од* $\dfrac{\pi}{\sqrt{N}}$. Ако је ова функција стално растућа у интервалу $(t_1, t_2)$, временски интервал између две промене знака *постаје све мањи, остајући притом већи од* $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}}$.

Када, док $t$ варира од $t_1$ до $\infty$, карактеристична функција опада остајући позитивна и тежи ка некој вредности $\rho$ различитој од нуле, *пражњење ће има-*

*ши бесконачно много осцилација; трајање једне полуосцилације постајаће све дуже, али никад неће премашити вредност* $\frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$ *и тежиће ка њој.*

Напротив, када, док $t$ варира од $t_1$ до $\infty$, карактеристична функција расте и тежи ка коначној граници $\rho$, *трајање једне полуосцилације постаће скоро константно у току времена и тежиће ка граници* $\frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$.

Осцилације, као и у случају обичног пражњења, биће *све више амортизоване* и појава ће престати да се примећује после извесног, дужег или краћег времена.

Ово омогућује да се промене пуњења представе једном кривом. Она осцилује изнад и испод $t$-осе; у зависности од начина на који варира карактеристична функција, растојање између узастопних тачака у којима крива сече $t$-осу биће све мање остајући притом веће од извесне вредности различите од нуле, или ће бити све веће и притом неће прелазити извесну коначну вредност. Учесталост осцилација зависиће од вредности карактеристичне функције; амплитуде осцилација стално се смењују почев од извесне тачке $t$. Крива интензитета тока пражњења показује варијације исте врсте.

Једначине на које г. Петровић своди феномен омогућују, благодарећи познатим Штурмовим теоремама о линеарним једначинама другог реда чији коефицијенти зависе од променљивог параметра, да се међусобно упореде различити експерименти у којима се један од фактора $C$, $R$ и $L$ не мења у току експеримента, али варира од једног до другог експеримента, а притом друга два фактора имају исте законе варирања у експериментима који се пореде. Оне дозвољавају да се добије тачан увид у утицај који промена било ког од та три фактора врши на *ритам* осцилација, на њихову *учесталост* и на криву која приказује феномен.

Добијени резултати преносе се на случај *подржаног пражњења*, кад је, у коло у коме долази од пражњења, уметнута једна константна или у току времена променљива електромоторна сила и кад је систем изложен дејству неког константног или променљивог магнетног поља.

## ХЕМИЈСКА ДИНАМИКА

Проблем одређивања у сваком тренутку $t$ брзине неке хомогене хемијске реакције, и количина производа реакције образованих од почетка ове до тренутка $t$, решава се помоћу два принципа, од којих први даје величине сила трансформације које дејствују, а други даје израз за везе:

1° увећање концентрације смеше, у течности у којој се догађа реакција било кога од производа реакције у сваком временском интервалу $dt$ пропорционално је производу концентрација у смеши у односу на активне материје које учествују у реакцији и у односу на само време $dt$;

2° постоји, у току реакције, пропорционалност између количина активних материја потрошених до тренутка $t$ и количина производа реакција насталих до тог тренутка.

Г. Петровић развија логичке последице ова два принципа образујући и проучавајући диференцијалне једначине до којих они доводе.

У случају кад се физички услови у којима се реакција одвија не мењају у току ове, а и саму реакцију не компликују секундарне реакције које се унутар исте смеше догађају, проблем се своди на једну диференцијалну једначину првог реда у којој време не фигурише експлицитно и која се интеграли једном квадратуром.

Када се физички услови мењају у току реакције, коефицијенти једначине постају функције времена, а интеграција је мање једноставна. Од свих физичких утицаја који изазивају мењање коефицијената једначине, најосетнији је и најтеже се може избећи онај који потиче од промена температуре. За дату егзотермичку или ендотермичку реакцију која се дешава између течних материја $A_i$ и у којој настају производи $B_i$, а није праћена секундарним реакцијама ни променама стања, г. Петровић:

1° даје један приближан закон мењања температуре $T$ смеше са потрошеним количинама $x_i$ активних материја $A_i$;

2° израчунава време потребно да смеша стекне дату температуру;

3° израчунава време потребно да дата количина активних материја буде потрошена у току реакције, или пак да настане дата количина производа реакције.

Закон под 1° нарочито је једноставан: коришћењем једне функције температуре која се додељује реакцији и коју је проучавао Бертло (Berthelot) у својој *Хемијској механици*, г. Петровић долази до *хиперболичког закона*

$$(P - NT)(M + Nx_i) = \text{const.}, \tag{74}$$

где су $M$ и $N$ константе одређене почетним количинама и специфичним топлотама течности $A_i$ и производа $B_i$, као и почетном количином и специфичном топлотом неутралне течности којом је смеша разређена; $P$ је константа која се експериментално одређује Бертлоовом методом. Константна вредност израза (74) позитивна је или негативна, према томе да ли је реакција егзотермичка или ендотермичка.

У случају кад се једна секундарна реакција или више њих одвија унутар исте смеше, при чему оне троше једну исту активну материју, проблем се своди на известан систем симултаних једначина чији су коефицијенти константе или зависе од времена, према томе да ли су физички услови непромењиви или се мењају у току реакције. Г. Петровић даје начин образовања овог система једначина за различите интересантне случајеве који се могу јавити.

# ИЗРАЧУНАВАЊЕ ГРЕШАКА У КВАНТИТАТИВНИМ ХЕМИЈСКИМ АНАЛИЗАМА

Г. Петровић је ближе проучио проблем одређивања утицаја нетачности података на крајњи резултат неке квантитативне хемијске анализе.

У већини анализа, количине које треба одредити израчунавају се помоћу других количина које се одређују непосредним гравиметријским или волуметријским мерењима. Тежине тако учињених директних грешака зависе од природе хемијских операција помоћу којих се изводи анализа. Г. Петровић је развио једну потпуну теорију метода квантитативне анализе које се сада користе, са становишта тежина учињених директних грешака и утицаја ових на резултат анализе. Он решава, за све методе анализе, следећи проблем од практичне важности: знајући, у некој анализи, горње границе учињених грешака код директно измерених количина, одредити горње границе грешака које оне повлаче за количине што се одређују рачуном.

Погодна интерпретација особина једне класе детерминаната на коју се наилази у овој теорији доводи до једног доста необичног резултата, који је и од практичног интереса:

Претпоставимо да се, уместо да се одвоји и појединачно мери свака од $n$ материја $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (на пример, $n$ различитих метала) у смеши која се анализира, изводи са том смешом низ операција $O_1, O_2, \ldots, O_n$, исти за све материје $A_i$ и у броју једнаком броју материја; да се, после сваке операције $O_k$, мери тежина свих њених производа заједно. Тако добијени подаци дају један систем линеарних једначина, чији је број једнак броју материја $A_i$ и које служе за израчунавање количина ових материја садржаних у првобитној смеши (индиректна анализа).

Међутим, практичари су уочили да ова метода постаје, у неким случајевима, илузорна, будући да је тада систем тако добијених једначина неодређен. Г. Петровић, у вези са овим, долази до следећег општег резултата:

Назовимо *хомогеном* операцију $O_k$ која све материје заједно претвара у једињења исте врсте (на пример, у сулфате, хлориде, карбонате) или у саме елементе, а *хетерогеном* ону која материје $A_i$ претвара у једињења различитих врста (једне, на пример, у хлориде, друге у карбонате, итд.).

*Да анализа буде остварива, потребно је и довољно да број хомогених операција* $O_k$ *не прелази 2, тј. да број хетерогених операција не буде мањи од* $n-2$.

# ОСОБИНЕ ИЗОМЕРНИХ ХЕМИЈСКИХ ЈЕДИЊЕЊА

Нека је $D_1, D_2, D_3, \ldots$ низ изомерних хемијских једињења, која истовремено садрже неколико елемената $E_i$, истих за сва једињења, и неколико група $G_i$ такође истих за сва једињења, која се једна од других разликују само распоредом елемената $E_i$ у групи $G_i$. Нека је $\alpha$ неки коефицијент који дефинише извесно физичко, хемијско итд. својство, а $\alpha_i$ вредност тог коефицијента која одговара једињењу $D_i$.

Експериментални подаци указују на постојање низова

$$\text{(E)} \qquad E_1, E_2, E_3, \ldots$$

и низова

$$\text{(G)} \qquad G_1, G_2, G_3, \ldots$$

са следећим својством: могу се чланови низа $E_i$ с једне и чланови низа $G_i$ с друге стране поређати по реду одговарајућих величина једног истог коефицијента $\alpha$ додељеног посматраним једињењима $D_i$, тако да, за такав низ $(E)$, као и за такав низ $(G)$, коефицијент $\alpha$ *расте* са рангом члана низа и да, шта више, поредак чланова у сваком од низова $(E)$ и $(G)$ *остаје исти било каква да је хемијска природа једињења* $D_i$.

Тако, на пример, низ $(E)$ образован од халогена: флуор, хлор, бром, јод, и низ $(G)$ који чине функционалне групе $CH, CH^2, CH^3$ поседују такво једно својство у односу на температуру кључања $\alpha$ хемијских једињења, и то било какви да су по среди халоген и врста једињења.

Г. Петровић, после овог запажања, одатле изводи закључке о релативним величинама једног таквог коефицијента додељеног неком датом низу изомерних хемијских једињења. Сваки пут, на пример, кад се, при прелазу са једног једињења ($D_i$) на друго ($D_j$) из посматраног низа, не врши никакав прелаз са десне стране на леву ни у низу $(E)$ ни у низу $(G)$ – коефицијент $\alpha$ се *увећава*; а сваки пут кад не долази ни до каквог прелаза са леве стране на десну у овим низовима, $\alpha$ се *смањује*. Ово повећање или смањење било би *слабије* ако би се изоставио један од тих прелаза или више њих.

Г. Петровић примењује ову интуитивну схему на низове изомерних полихалогених једињења $D_1, D_2, D_3, \ldots$ дајући улогу чланова низа $E_i$ редом једињењима Fl, Cl, Br, I, а улогу чланова низа $G_i$ једињењима $CH, CH^2, CH^3$. Од три изомерна једињења, од којих сваки садржи један атом хлора и један атом брома, оно које групе CHCl и $CH^2Br$ садржи почеће да кључа на *мање високој* температури него оно које садржи групе $CH^2$ и CHClBr. Исто тако, једињење које садржи групе CHCl и $CH^2Br$ кључаће на *вишој* температури него једињење које садржи групе CHBr и $CH^2Cl$.

Експериментални подаци, уосталом, у потпуности потврђују ова предвиђања. Било би од интереса проширити их на друге коефицијенте $\alpha$ (на специфичну топлоту, латентну топлоту испаравања, коефицијент дилатације, индекс преламања, електрични отпор, итд.) и на друга изомерна једињења. Схватљиво је какве услуге могу пружити слична разматрања одређивању формула за конституисање изомерних једињења.

# ПЕТРОВИЋ О СВОЈИМ ПАТЕНТИМА

***Мерење расѿојања***. – Више система инструмената за мерење растојања засновано је на принципу секстанта, што значи да је реално растојање посматраног предмета од места посматрања одређено у зависности од визуелног угла, од одговарајућег паралитичког угла и од растојања између две тачке посматрања. Са познатим инструментима ове врсте, тражено растојање може бити одређено само рачуном, поступком уочавања предмета са два места посматрања, уз прибегавање, у случају потребе, једном другом, произвољно изабраном помоћном предмету, после чега се мере углови, а тражено растојање се одређује тригонометријски, коришћењем углова и растојања између две тачке посматрања.

Инструмент Петровића и Терзића (из 1910) усавршава ове инструменте на тај начин што тражено растојање изражава непосредно једним умношком растојања две тачке посматрања. Принцип се састоји у томе да се између углова и дужина које треба посматрати успостави одређени однос, који тада представља константу инструмента. У Петровић-Терзићевом инструменту та константа је известан заокружен број у децималном систему, по могућству број 100 или неки умножак тог броја, тако да одређивање растојања не захтева никакав рачун. (*Француски ѿаѿенѿ*, N° 413730 *ȝодине* 1910)

***Намаȝнеѿисана иȝла у ѿокреѿном маȝнеѿном ѿољу***. – Г. Петровић је конституисао једну елементарну теорију дејства покретног магнетског поља које делује на намагнетисану иглу. Из ње он изводи једно једноставно и практично правило за одређивање смера и величине скретања игле у зависности од магнетног момента гвоздене масе, од растојања од игле до те масе и од географске ширине масе. Томе је додао занимљива запажања у вези са могућношћу аутоматског исправљања правца, на површини мора, брода са погодном аутоматском крмом, а који се приближава некој гвозденој маси коју треба достићи или избећи.

***Моȝућносѿ ѿоѿаѿања брода***. – Увек је могуће обезбедити броду релативну потопљивост и учинити га непотопљивим специјалним уређајем за оптерећење и погодним „пуњењем“. У случају кад се немају ова средства, могли би се празни простори попунити празним непромочивим кесама које би играле улогу пуњења; али ово би повукло ту незгоду да захвата и закрчује корисне просторе брода, да омета активности на њему. Као пуњења могле би се, међутим, употребити растегљиве посуде (џепови са гасом) направљени од платна које не пропушта ни воду ни гас, са великом отпорношћу и такве да, кад нису надуване, заузимају ограничен простор, а надуване, у самом тренутку опасности, обезбеђују пловност брода.

Но, уколико би надувавање у тренутку опасности било *заједничко*, неко оштећење централног резервоара у коме се производи гас под притиском, или можда неки прекид у систему управљања или у систему командовања, могло би имати за последицу отказивање рада инсталације у критичном тренутку. Да би се та опасност отклонила, требало би вршити надувавање *појединачно* или *по групама апарата,* тако да неповољно дејство оштећења инсталације буде *локализовано.* Свака растегљива посуда притом би била снабдевена сопственом боцом са компримованим ваздухом или гасом, са славином и уређајем за отварање такође појединачним, који би, покренут електричном или пнеуматичном командом у тренутку опасности, отворио славину и пустио гас из боце да истекне у посуду за надувавање са којом је у вези.

Али, чак и кад се то уради, неће тиме бити отклоњена још једна опасност: неки прекид у систему командовања (електричног или пнеуматичног) могао би зауставити један или више апарата чије би функционисање могло бити од користи или чак неопходно у тренутку опасности.

Било би, стога, потребно, пошто се ови апарати распореде по броду, спојити неком инсталацијом за командовање на растојању известан број апарата, који тако образују једну групу (сектор) апарата којима се командује, тако да се њихово пуштање у рад може произвести истовремено и тренутно, и то на следећа два начина: 1. *аутоматски*, чим се неко оштећење инсталације за командовање догоди; 2. *вољно,* кад апарати једног сектора, чије се функционисање у тренутку опасности сматра корисним, нису у том тренутку активирани.

Ова идеја остварена је у уређају г. Петровића. Конструкција апарата је једноставна, лака и не кошта много; њихово намештање на било какав брод обавља се једноставно и брзо, (*Француски патент*, N° 96371 *из* 1918).

# РАЧУНАРСТВО И ДРУГЕ ПРИМЕНЕ У ДЕЛУ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

У историји наука веома често се наилази на личности научника који су стварали у више области науке. Ми данас кажемо да је Њутн велики математичар, али он је и велики физичар, геодета и металург; исто важи и за Декарта, Лајбница, Ојлера, па све до Поенкареа и Пенлевеа. То је доба када специјализације није ни било. Наш Михаило Петровић припада групи математичара која је радила, и то веома успешно, у неколико научних области. Он је сигурно у националној историји математике последњи математичар који је имао овако широк и разноврстан спектар деловања. Дакако, да савременом математичару, који је прошао све највише школе и потврде – физика, астрономија, механика,... потпуно су стране науке, те они остају потпуно закопчани за *примене* у природним и друштвеним наукама.

Одакле оваква Петровићева кретања у науци? Где је он дознавао лепоте природних наука и *примене* математике у њима? Све је то, сигурно, дала добра школа младом Петровићу. Ето примера, да само добра школа може да створи добру науку, и обратно. У школи је заљубљеник у хемију; мирис хемијске лабораторије Велике школе која је била поред гимназије, одвео је Петровића на студије Природно-математичког одсека Филозофског факултета. То је време када се нису студирале групе предмета. Све до пред крај 19. века математичке науке се нису студирале на Великој школи. Можда је то погодовало младом Петровићу. Упознао је основе физике, више механика, астрономију, минералогију, хемију... Он се још у првој години *лично определио* за математику, али није напустио да грчом знатижељника све о Природи чита и учи.

У Паризу на студијама и усавршавању на Faculté des Sciences и École Normale Supérieure (1889–1894) Петровић је поред студија математичких наука (Licence ès Sciences mathématiques), дипломирао и физичке науке (Licence ès Sciences physiques) што је обухватало општу и рационалну механику, математичку физику (професор Поенкаре), теоријску и експерименталну физику и астрономију. Значи, Петровићево дело у другим областима науке, које смо назвали ПРИМЕНЕ, није на нивоу интелектуалног лаика, већ професионалног радника.

По завршеним студијама у Паризу, Петровић је на Великој школи у Београду равноправно, колико математичар, толико и физичар. Учинио је у Паризу даљу надградњу докторатом из математичких наука и тако стекао основну науку у којој ће радити као оригинални стваралац.[1]

***Теорија релативности.*** – У време појаве Ајнштајнове нове науке, Петровић је стајао по страни. Било му је јасно, да је још мали број људи који схватају побуде нове механике, специјално релативистичке кинематике. Посматра и прати настојања Владимира Варићака у Загребу и диви му се, како је успео да изађе из еуклидске геометрије и ствара у новој науци. Петровић је увидео да Варићак припада мањој групи научника на почетку ове теорије која, не само да је схватила Ајнштајнове поруке, већ и стваралачки са оригиналним доприносима радила. У 1911. години Петровић предлаже Српској краљевској академији да се Варићаков обиман рад *Интерпретација теорије релативности у геометрији Лобачевског* објави у Гласу.[2]

У исто време, посматра у Београду свог новог колегу грађевинског инжењера Милутина Миланковића (дошао на Универзитет 2. октобра 1909) како полако учи рационалну и небеску механику, да би то исто предавао студентима и, по наговору Владимира Варићака, јавља се у новој науци. То је време лутања овог Славонца, те пише „младалачки рад" *O teoriji Michelsonova eksperimenta* (JAZU, Rad 190, Zagreb 1912), који је уздржано оцењен од самог Варићака и доцније Татомира П. Анђелића. Сам Миланковић за своју прву радњу вели: „Кад је ова радња предана за штампу, сазнао сам од др Варићака да су напуштањем другог постулата теорије релативности, негативан резултат Michelsonova покуса хтјели протумачити већ Comstoca, Tolman и Stewart".[3]

У послератним годинама теорија релативитета нагло избија у први план многих научника и установа. Скоро да није било угледног научног радника који није писао о овој „сензационалној теорији" из 1905. године. Наука је поделила људе на присталице и противнике Ајнштајнове, али постепено је релативитет добијао све већи број својих истраживача.

Михаило Петровић такође није могао да остане по страни и предузима истраживања у овој новој области физике. Жеље нису биле чисто теоријске природе, већ усмерене експерименту којим је хтео да добије ***апсолутну јединицу за време*** на коју нема утицаја место, брзина, маса и други механички параметри (референтни координатни систем).

Петровић је објавио четири рада из теорије релативности:

---

[1] У овом прилогу књиге изложићемо у краћем обиму садржаје Петровићевог рада у научним областима ван математике.

[2] Глас СКА, Београд 1911, књ. LXXXIII, стр. 211–255. О Варићаковом раду у теорији релативности најбоље погледати студије Ђуре Курепе у Математичком гласнику (1947. г.) и Математичком веснику (1969. г.).

[3] М. Миланковић, наведено, стр. 70. Подробније у књигама Драган Трифуновић, *Тиха и усрдна молитва Милоша Радојчића*, Народна књига, Београд 1995; Д. Трифуновић–П. Перишић, *Математичар Петар Вукићевић*, Грађевинска књига, Београд 1998; стр. 216.

- ТЕОРИЈА РЕЛАТИВНОСТИ, Српски књижевни гласник, Београд 1921, t. II (н. сер.), 1, стр. 29–41.
- DURÉES PHYSIQUES INDÉPENDANTES DES DIMENSIONS SPATIALES, Zürich–Paris 1924, p. 28.
- ФИЗИЧКЕ КОНСТАНТЕ У ТЕОРИЈИ РЕЛАТИВИТЕТА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CXXVII, Први разред, књ. 58, Београд 1927, стр. 1–16.
- ÉTALONS PHYSIQUES DE TEMPS, Publications de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, Belgrade 1933, t. II, pp. 5–10.

У Српском књижевном гласнику Петровић одаје велико признање Ајнштајну, задовољан је новим приступом механици, када је Њутнова механика само један специјалан случај релативистичке механике. То је Петровићу, као математичару, било јако блиско и узбудљиво. Личило му је на нееуклидске геометрије, где је Еуклидова геометрија само једна из скупа од девет геометрија (по програму Феликса Клајна).

Средишна Петровићева расправа је књига из 1924. године. У њој инсистира на категорији апсолутног времена, што је навело многе да закључе, да је Петровић противник Ајнштајнове теорије. Да ли је тако?

Ову посебну књигу Петровић је саопштио и у Париској академији наука (седница од 10. марта 1924). Према рефератима о овој књизи научна јавност се уздржавала од изношења мишљења о Петровићевој концепцији апсолутне јединице за време (Kratzer, Esclangon, Metz, С. Марковић и др.). Највише похвала дао је Dopp у Revue des questions scientifiques (1924, V, p. 507–508), а канадски математичари позивају Петровића на свој конгрес (Toronto) како би им изложио нов начин мерења времена.[4]

Принцип Петровићеве методе састоји се у једној на први поглед чисто математичкој чињеници, али за коју Петровић налази и једну интересантну физичку интерпретацију која га је и довела до методе мерења времена. „Време се може мерити помоћу извесних физичких величина које мере одређују специфичну особину материје и које су независне од места посматрања и од брзине кретања, тако да разни посматрачи, ма где они били и ма каквим се брзинама они кретали, морају за те физичке особине, па дакле и за само време налазити исти број. Метода је општа и обухвата разне физичке факторе такве врсте."

Да би показао да је ова метода не само практички остварљива, већ и врло прецизна, Петровић излаже у појединостима један њен специфичан случај: мерење времена помоћу специфичног електричног отпора једне одређене хемијске супстанце, на пример живе, у одређеним, увек истоветним физичким приликама (иста температура, притисак итд.). Такву једну методу, а ради одредбе апсолутне јединице мере, употребио је француски физичар Липман, Петровићев професор на Нормалној школи у Паризу (1890–1894). Према овој

[4] Према Петровићевом извештају са конгреса у Торонту, предавање о новом мерењу времена није одржао.

методи, специфични електрични отпор живе има ***исту бројну вредност*** коју има и један известан размак времена регулисан нарочитим електричним апаратом, и то на такав начин да једнакост између бројних вредности отпора и тога размака времена није ниуколико поремећена кретањем посматрача. Па, пошто је овај отпор у истоветним физичким приликама апсолутна физичка константа, то ће и на тај начин одређен размак времена бити независан од кретања посматрача.

Петровић се не задржава на последицама које собом повлачи могућност таквих начина мерења времена. Непосредне су последице, уосталом, и саме по себи очевидне: релативисте могу бити у праву што примењују своје закључке само на време мерено на начине који улазе у оквир њихових посматрања, али никако не и на време мерено на начине овакве какве излаже Петровић. Њихови начини мерења већ унапред садрже у себи оно што се у резултату јавља као особеност (дилатација времена као последица самога претпостављеног начина распростирања светлости на коме је основано мерење времена), и оно што из тога изводе није ништа друго до оно што су сами унапред у то ставили.

Петровић је завршио своју студију изреком енглеског релативисте Едингтона, која умногоме илуструје суштину Петровићевог резултата

$$t = \lambda t_1, \quad \lambda = 1,$$

да је време увек једнако сопственом времену: „Открили смо чулне отиске стопала на обали онога што се не зна. Да бисмо себи објаснили откуда ти отисци, конструисали смо теорије, све оштроумније и све дубље једна од друге. Напослетку смо успели реконструисати створа који је оставио те отиске, и нашло се да тај створ није нико други но сами ми!“

Петровићев рад у теорији релативности може се заправо свести на питање: како и чиме, којим инструментом у новој науци мерити време, када и тај сам инструмент подлеже законима релативистичке кинематике? У Цириху, Женеви, Паризу, на седницама друштава за физику професор Ди Паскије је заговарао да се дебатује о Петровићевом апсолутном мерењу времена.[5] Сачувана је и обимна преписка о овом Петровићевом резултату.[6] Из ње наводимо само један детаљ из писма Петровићевог колеге са студија у Паризу (École Normale Supérieure) А. Котна, који је у настави на Факултету наука у Паризу заменио професора нобеловца Липмана. „... Имам много посла овде, где сам наследио г. Липмана и моји дани увек су исувише кратки. Твоја брошура *Физичка трајања...* ме је наравно веома заинтересовала, и то не само зато што ме је подсетила на време кад смо заједно слушали курс професора Липмана. Не видим какве бих примедбе овом твом раду могао да учиним, али релативисти су сигурно много незгоднији од мене, а питам се неће ли они сада заступати неко мењање... или диелектричне константе при кретању. – У сваком

[5] Опширније у Петровићевој књизи из 1924. године.

[6] Видети поглавље *Писма* у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића.*

случају, не видим какве би примедбе могао да учини један обичан експериментални физичар као што сам ја. Изгледа ми... да пример који наводиш није једини: Може се, на пример, помоћу електрицитета дефинисати време, коришћењем једног кондензатора, једног великог отпорника и једног волтметра..."[7]

***Фотографија у боји.*** – Како је професор Липман, чијим се резултатима користио Петровић у апсолутном мерењу времена, – проналазач фотографије у природним бојама (1891. г.), то се овде враћамо младом Петровићу који је у овом проналаску активно учествовао.

У историји фотографије у Србији постоје неколико крупних личности око којих се много шта дешавало, развијало, пресудно урадило. Поменимо само дела Анастаса Јовановића, Ђорђа М. Станојевића[8] и Милана Јовановића, па се задивити успесима и лепоти њиховог рада. У жељи да записом о једном догађају у Паризу у проналаску фотографије у природним бојама приложимо историји српске фотографије, односно делу поменутих стваралаца, наводимо да је Михаило Петровић учествовао у проналаску фотографије у боји. Мали податак, а тако велики за националну историју наука, као и саму Петровићеву личност. Овом чињеницом, мало познатом нашем свету науке и културе, потврђује се привржeност према Michel Petrovich-у проналазача професора Липмана, потоњег добитника Нобелове награде за физику (1908. г.) код којег је Петровић дипломирао физичке науке (Licence ès sciences physiques) 1893. године и био му најбољи студент.

Волео је Петровић рад у лабораторијама и сигурно се у њима на École Normale Supérieure и Facilté des Sciences показао као најбољи. Да ли су то одсјаји и настављено искуство из хемијске лабораторије коју је далеке 1883. године као гимназијалац опремио у својој кући и вршио експерименте? Ето примера једне воље и љубави према природним наукама ђака новаковићевске гимназије у Србији који се винуо у свет и добио све одлике.

Професор Габријел Липман увидео је Петровићеве способности за лабораторијски рад, те га непосредно укључује у своје тајне проналаска фотографије у боји. Било нам је лако да ово установимо прелиставајући Петровићеве радове из физике и феноменологије (учења о аналогијама) објављене уочи Првог светског рата, а такође и из његових писама из Париза.[9] Ево једног примера. Петровић у писму пише: „Познате су ми све појединости", што је сигурно доказ да је лично радио са професором Липманом на проналаску. У једном писму из Париза свом блиском другу Павлу Павловићу (13. фебруар 1891) дословно пише: „Од новости да ти наведем фотографију у боји, пронађену пре неколико дана; пронашао је Lippmann, професор физике. Није потребна никаква измена ни у апарату ни у препаратима досадашњим, већ само извесна мала измена у распореду осетљивог слоја и у фотографској плочи.

[7] Писмо број 125; превод са француског језика др Душан Адамовић, проф. унив.

[8] О Станојевићевом раду на фотографији погледати Д. Трифуновић, Зборник Народног музеја, књ. XIV/2, Београд 1990, стр. 41–80 и тамо даље.

[9] Консултовати 6. и 15. књигу *Сабраних дела Михаила Петровића.*

Ако би те интересовало могао бих ти послати тачан опис, јер сам присуствовао опитима Lippmann-овим, и познате су ми све појединости. Метод је савршено употребљив за непокретне предмете али још није довољно усавршен за покретне."[10]

Почетком априла 1894. Енглези су замолили да професор Липман дође у Лондон и изведе демонстрацију настанка фотографије у природним бојама (филм у боји (плоча), снимање и израда фотографије у боји). Професор Липман је повео у Лондон свог најбољег сарадника на проналаску Михаила Петровића. Из Лондона јавља се свом другу Павлу (1. мај 1894), даје опис пута и боравка са напоменом: „Како ме ђаво донесе овде не питај; доста ти је то да сам добио муле подвоза са једним професором физике и да сам похитао да га што боље употребим".[11]

*Треба памтити да је математичар Петровић волео рад у лабораторији, многе примене и да је учествовао у рађању фотографије у природним бојама.*

***Прилози астрономским наукама***. – Вечито расположен да изналази спој математике и праксе, природних и примењених наука, Петровића су у астрономији највише интересовали случајеви где се математика може применити. Он се увек трудио, да у споју ових двеју величанствених наука, изложи своје оригиналне резултате и методе које је он увео у науку. Иако су то ***проблеми примене***, Петровић није био репродуктиван математичар, већ свој, прави стваралац. Наведимо неколико примера.

*

Професор је био упознат да се на астрономским опсерваторијама изводе масовни прорачуни, махом једнолични који прелазе у досаду и опасност погрешака.[12] А, моћних рачунара није било. Једина рачунарска средства биле су логаритамске таблице, логаритмар (шибер) и по која стона ручна машина (калкулатор) или већи адијатор. Из ових разлога Петровић предлаже астрономима да се користе нумеричким спектрима којима се добија знатна уштеда, економичност калкулација. Рецимо, множење великог броја уређених парова реалних бројева и њихово сабирање, своди се само на једно множење.[13] Тако, за коначних $n$ уређених парова $(p_i, x_i)$ налазимо укупан број операција

[10] Писмо број 14 у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића.*

[11] Писмо број 33.

[12] Писац ових редова имао је прилику да се увери у обимност прорачуна, у све тешкоће и олакшице које прате овај рад. У САНУ, Глас, књ. CCCXXXIII, 1972. године академик В. В. Мишковић објавио је *Прилог проблематици планетоида*, где је изложио прорачуне Драгана Трифуновића.

[13] Погледати 5. књигу *Сабраних дела Михаила Петровића.*

$$n \times m + (n-1) \times s,$$

где $m$ означава операцију множења, а $s$ операцију сабирања и, који се замењује само једним множењем

$$S_1 \times S_2,$$

где су $S_1, S_2$ два нумеричка спектра настала од бројева $p_i, x_i$.

По казивању професора Станимира Фемпла писцу ових редова, примена Петровићевих спектара, које је он пронашао за време рата далеке 1917. године,[14] није дуго трајало на Астрономској опсерваторији у Београду. Било је, можда, само 2–3 покушаја. Спектри су природни бројеви великих дужина што је посебно отежавало њихову примену. Поменимо овом приликом, да је развој нумеричке анализе и рачунарства успоравао актуелност Петровићевих спектара, како би на крају потпуно ишчезнули из домена науке. Нажалост, остали су само у домену историје наука као споменик Петровићевом оригиналном покушају у нумеричкој анализи.

Наведимо Петровићеве радове који по садржају припадају астрономији:

● PROBLÈMES D'INTÉGRATION QUALITATIVE EN ASTRONOMIE, Annuaire pour l'an 1930, Publications de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrad, Belgrad 1929, t. II, pp. 121–124.

● LE PROCÉDÉ SPECTRAL DE CALCUL NUMÉRIQUE EN ASTRONOMIE, Annaire pour l'an 1931, Publications de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, Belgrade 1930, t. III, pp. 127–132.

● A PROPOS D'UNE RÉCENTE APPLICATION DE L'ASTRONOMIE À LA CLIMATOLOGIE, Mémoires, Publications de l'Observatoire astronomique de l'Universite de Belgrade, Belgrade 1932, t. I, pp. 7–12.

● УПУТСТВО ЗА ГРАФИЧКИ РАЦИОНАЛИЗАТОР, Српска академија наука, Зборник радова, књ. XXXV, Математички институт, књ. 3, Београд 1953, стр. 6–8.

Поменимо у краћој анализи неке Петровићеве радове, а више намере које је желео да угради у рад астронома. Као творац *методе упоредивих диференцијалних једначина* саветује астрономима да из облика диференцијалне једначине извлаче особине решења. Једноставно казано, Петровић нуди савршен алат у директном проучавању интеграла диференцијалних једначина и излаже пример.

Додајмо да је оваквим радовима Петровић желео да помогне у излагању насталих публикација на Астрономској опсерваторији у Београду: Mémoires, Annuaire,... Биле су међународног значаја, те је требало водити бригу о њиховом садржају. Друго. Опсерваторија у Београду и Сеизмолошки завод припадали су Универзитету у Београду. Петровић је ове установе користио да

---

[14] Тачно, 30. априла 1917. када је у Париској академији наука саопштен први Петровићев рад о нумеричким спектрима.

запошљава младе, талентоване и већ потврђене математичаре, док од власти не добије радно место на Универзитету. Овим је професор побеђивао numerus clausus који је владао на Универзитету. То је био случај са Јованом Караматом, Милошем Радојчићем и другим математичарима.

*

Петровић је изузетно волео да решава неодређене задатке.[15] Ту су долазиле до изражаја његове неједнакости и слично. Такав један случај био је у астрономској пракси. Академик Војислав В. Мишковић саопштио је професору Петровићу проблем „о квазиидентичним опозицијама планетоида и њихову улогу у идентификовању недовољно посматраних тих објеката. За примену идеје требало је одредити периоде, за сваки од познатих планетоида, после којих се они враћају у опозицију са Земљом *у исти*, или *приближно исти* положај као и у извесној, произвољно изабраној, почетној опозицији. Другим речима, требало је, за сваки од познатих планетоида, а у то време било их је око 1200 познатих, апроксимирати однос средњих сидеричких дневних окретања (или револуција) планетоида и Земље што је могуће простијим разломком, то јест са што мањим апсолутним вредностима и бројилаца и именилаца".[16]

Значи, требало је извршити апроксимацију разломка

$$\lambda = \frac{M}{N}, \quad M < N$$

једним новим разломком $\frac{q}{p}(q < p)$ са условима:

1) $p \ll N, q \ll M$;
2) да процена грешке

$$\delta = \left| \frac{M}{N} - \frac{q}{p} \right|$$

буде што више задовољавајућа, при чему су $M, N, p, q$ природни бројеви.

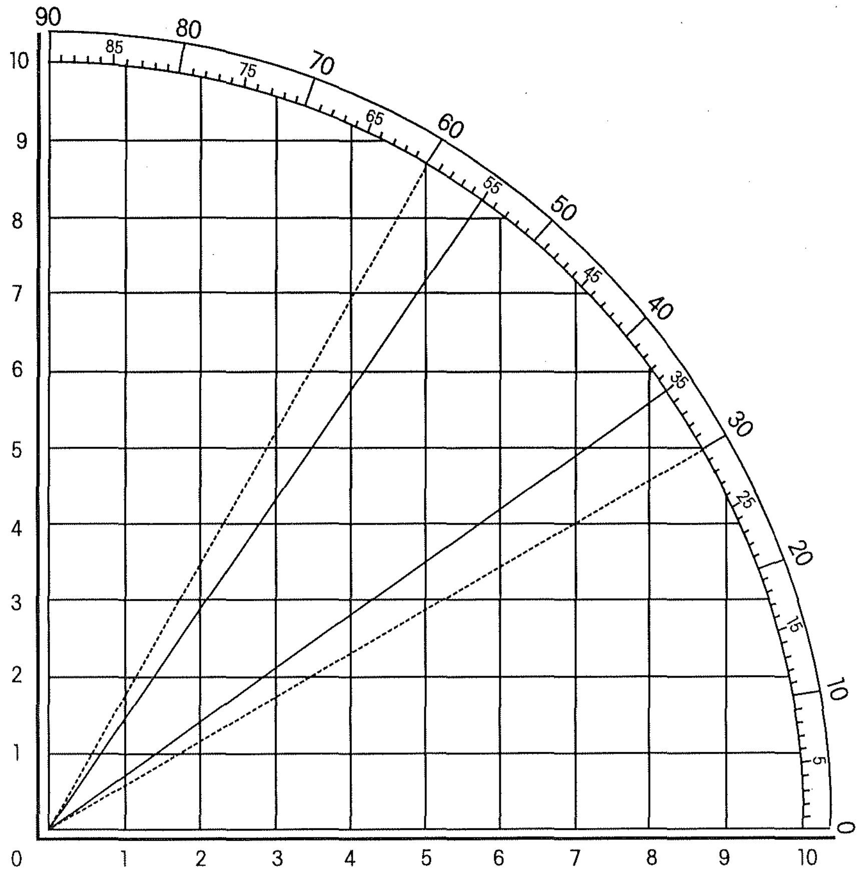
Петровић је ову Мишковићеву жељу решио тако, што је астроному пружио цртеж *Графичког рационализатора* и *Упутство за рад* које гласи: „Да би се приближно рационализирао дати број $\lambda$, помножимо га целим бројем $k$ изабраним тако да $k\lambda$ лежи између 0,7 и 1,7. – Израчунати $k\lambda$ са 4 децимале тачно, па из таблица наћи угао $\alpha$ који има тако нађену вредност као тангенс. – Одредити на кружном квадранту тачку $A$ којој одговара угао $\alpha$. –

---

[15] Види први део ове књиге.

[16] Академик В. В. Мишковић сачувао је оригинал Петровићевог прилога и објавио га 1953. године у Зборнику радова Мат. института, књ. 3, стр. 6–8.

Тада ако су $p$ и $q$ цели бројеви једнаки апсциси и ординати онога темена $S$ квадрата мреже које је најближе правој $OA$, биће приближно




*Графички рационализатор Михаила Петровића*

$$\lambda = \frac{q}{kp},$$

са грешком $\delta$ која се одређује или рачунски као разлика

$$\lambda - \frac{q}{kp},$$

или геометријски по обрасцу

$$\delta = \frac{q-\beta}{kp},$$

где је $\beta$ = ордината тачке у којој права $OA$ сече ординату темена $S$."

Овде је остало отвореним, како је Петровић дошао до графичког рационализатора, тј. до услова

$$0,7 \leq k\lambda \leq 1,7,$$

при чему је

$$\lambda = \frac{M}{N} \sim \frac{q}{kp}.$$

Нека у систему $(xOy)$дати разломак $\lambda$ представља коефицијент правца праве $y = \lambda x$, те се њена ротација око $O(0,0)$ може исказати коефицијентом правца $k\lambda$ и то тако да овај падне између 0,7 и 1,7. У ствари, Петровић је тако бирао $k$, да угао $\alpha$ буде $35° \leq \alpha \leq 60°$.

*

Посебну пажњу желимо указати Петровићевој студији о Миланковићевим настојањима у историји Земље као планете Сунчевог система.[17] Професор опширно излаже проблем примене математике у метеорологији и астрофизици. Пружио је историјски пресек овог проблема. Очигледно, Петровић доказује да Миланковић није први применио математичке методе у метеорологији. Посебно је важно поменути, да Петровић инсистира на *груйном раду* математичара са Факултета природних наука у Београду са посебним освртом на значај В. В. Мишковићевог удела.[18] Из текста извире постојање читаве *радне груйе*, али Петровић не помиње имена, што је велика штета. По нашим сазнањима то су: Војислав В. Мишковић, Павле Вујевић, Вјечеслав Жардецки, Драгослав С. Митриновић и Станимир Фемпл. Мишљења смо да овај Петровићев текст из 1932. године треба афирмисати у данашњим круговима посленика Миланковићевог дела.

*

После Првог светског рата Србија је у Јовану Цвијићу, Михаилу Петровићу, Јовану Жујовићу,... имала велике личности света. Многе су капиталне ствари за државу решавали. Поменимо само њихово мишљење и став у добијању ратне одштете. Они су, редовито, мислили на развој науке у земљи и у том правцу предлагали шта треба добити за Универзитет. Тако су уделом и личним заузимањем Михаила Петровића математичари од ратне одштете добили комплете многих капиталних дела светске математичке књижевности, читаве колекције разних часописа и друго. У овим настојањима од Петровића и групе математичара пошао је *йредлог* да Београд сагради нову астрономску опсерваторију и за њу из ратне одштете добије потребну нову и савремену

[17] Овај Петровићев текст објављен је у другом делу ове књиге.

[18] Петровић не пише Филозофски факултет, већ Факултет природних наука, што је нешто ново. Да ли је већ тада било речи о раздвајању групе предмета са Филозофског факултета у Природно-математички факултет што је урађено тек 1947. године?

инструментацију. Речено било, али и остварено успешно. Овде доносимо, илустрације ради, само први став овог предлога од 30. априла 1925.[19]

Филозофском факултету

*Потписати наставници математских наука Београдског Универзитета убеђени да је за развитак и напредак не само егзактних наука, но и целокупне наше културе и одржавања веза између ње и западних култура неопходно потребно да на нашем Универзитету и Држави буде заступљена и Астрономска Наука у оној мери, која одговара културном нивоу Универзитета и Државе, сматрају за потребно да се поред досада учињених мера предузму још и следеће:*

***1. Да се део Авале, који лежи изнад изохипсе 480, а обухвата шест хектара, резервише за подизање астрономске опсерваторије.***

*Овај је корак неминовно потребан пошто је у данашњој Опсерваторији, стешњеној у вароши и опкољеној зградама, искључена потпуно свака могућност за успешан астрономски рад. Сем тога, та Опсерваторија је већ заузета метеоролошком службом и треба да постане централом целе метеоролошке службе у Краљевини, тако да би била искључена могућност да се у истој згради развија и астрономска опсерваторија.*

*Авала, међутим, својом висином (522 m) и непосредном близином престоници, пружа могућност да се на њој с временом развије опсерваторија, која би по свом положају и атмосферским условима била најбоља од свих опсерваторија европских престоница.*

...........

Значи, по овој замисли Петровића и његових сарадника, опсерваторија је требало да буде на Авали. Одлуке краља Александра I за локацију споменика *Гробу незнаном јунаку* одвела је осниваче Михаила Петровића, Богдана Гавриловића, Антона Билимовића, Војислава В. Мишковића, Милутина Миланковића, Радивоја Кашанина и друге, на огранке Фрушке горе. Као што је познато, Београдска опсерваторија изграђена је на Великом Врачару, Звездари, тада најпогоднијем месту београдске околине.

***Прилози механичким наукама.*** – Под утицајем професора Пенлевеа, Петровић је имао велика интересовања у механичким наукама. Пенлеве је био веома угледан математичар који се равноправно кретао и стварао у механичким наукама, чак је по позиву у Шведској предавао обиман курс механике. И Петровић као математичар повремено се окреће механици, њу користи као ***модел науке*** преко које ће исказати своја учења о аналогијама, тј. у математичкој феноменологији. Више је страних аутора писало да је Петровић дошао до ***генералисане рационалне механике*** као научне потке за гра[illegible]погледа на аналогије у природи и друштву. Поред овог уопштења рационалне механике,

[19] Архив Србије, БУ – 1925/327.

Петровића интересује ***йроблем шрију шела***, ***йримена йринцийа механике*** у физици и друго.

Наведимо шта је све Петровић објавио из механике:

- REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DE DYNAMIQUE ET SUR LE MOUVEMENT TAUTACHRONE, American Journal of Mathematics, Baltimore 1896, vol XVIII, 2, pp. 135–144.
- КРЕТАЊЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ У СЛУЧАЈЕВИМА КАД ОТПОР СРЕДИНЕ ЗАВИСИ ОД БРЗИНЕ И ПОЛОЖАЈА ТАЧКЕ, Београд 1909 (рукопис).
- РЕШЕЊЕ ПРОБЛЕМА ТРИЈУ ТЕЛА, Српски књижевни гласник, Београд 1913, t. XXXI, 10, стр. 747–756.
- VALEUR DE L'ACTION LE LONG DE DIVERSES TRAJECTOIRES, Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences, Paris 1917, t. CLXIV, 4, pp. 166–169.
- EXEMPLES PHYSIQUES DE TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE, Comptes rendus du Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, Le Hâvre 1929, pp. 88–92.
- UN PROBLÈME SUR LA CHALEUR RAYONNANTE, Publications mathematiques de l'Université de Belgrade, Belgrade 1932, t. I, pp. 1–7.
- ПРИМЕДБЕ О ПРОБЛЕМУ ТРИЈУ ТЕЛА, Гласник Југословенског професорског друштва, Београд 1935, t. XVI, 3, стр. 244–252.
- QUELQUES CONTRIBUTIONS ÉLÉMENTAIRES RÉCENTES AN PROBLÈME DES TROIS CORPS, Mémoirs, Publications de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, Belgrade 1936, t. III, pp. 19–28.

Приметимо, да овај озбиљан Петровићев обим у механици није нашао места у историји механичких наука код Срба коју је у 2–3 наврата састављао Татомир П. Анђелић. А, било би веома корисно да се у тој националној историји науке обради проблем трију тела, као научни материјал којим су се бавили многи наши ствараоци од Милутина Миланковића, преко Антона Билимовића, Добривоја Михаиловића, Вјечеслава Жардецког, Бранислава Петронијевића, до Михаила Петровића. Или, указати на Петровићеве примене принципа механике у физици, што је сигурно антиципирало читаву школу механике коју је засновао и успешно водио Антон Билимовић после Другог светског рата. Како је могуће остати равнодушан пред чињеницом да је Петровић још при крају прошлог века у веома угледном часопису Сједињених Америчких Држава American Journal of Mathematics (Baltimore) објавио запажену студију о диференцијалним једначинама динамике материјалне тачке!

Верујемо, да ће наша средина кад-тад добити човека који ће алатом историје наука обрадити ово Петровићево дело у механичким наукама.

***Крийшоīрафија***. – Криптографија, која укључује проблем изналажења система шифровања и дешифровања писма (кодирање писма једног језика употребом декадних цифара), окупља обично математичаре који познавањем комбинаторике постављају што оптималније системе. Знајући за ово, председник Министарског савета, др Владан Ђорђевић ангажовао је младог професора математике на Великој школи да, као члан комисије, прегледа систем шифровања који је пронашао Живојин Ћирић, библиотекар Министарства грађевина.

Рад у комисији за оцену Ћирићевог система директно је утицао да се Петровић више заинтересује за криптографију и почне самостално да ради на системима шифровања и дешифровања.

Петровић је овом послу озбиљно пришао и постигао огромне успехе. Од 1899. па до 1941. у нашој земљи, за потребе дипломатије и војске, користили су се системи криптографије које је урадио Михаило Петровић. Обимност ових послова, као и добијени нови резултати у криптографији, дају за право да се криптографија третира као посебна област Петровићевог опуса.

Петровић у овој примењеној науци није радио на дохват, већ врло студиозно, равноправно свом раду у другим научним гранама математике. Рад на криптографији одвешће Петровића у време I светског рата у Посланство Краљевине Србије у Швајцарској, а ради истих послова, уочи II светског рата, у 73. години живота биће мобилисан као резервни потпуковник и доцније заробљен (Сарајево, април 1941).

По правилу, у криптографији се не објављују радови, аутори су непознати, а њихови системи шифровања остају вечита тајна. Ипак, успели смо да установимо три Петровићева текста из криптографије:

- TRANSFORMATEUR DES CHIFFRES, Genève 1917, p. 50.
- ШИФРОВАЊЕ И ДЕШИФРОВАЊЕ – СИСТЕМ М. П. – УПУТСТВО, Женева 1917, стр. 17.
- КРИПТОГРАФИЈА, Школа за обуку на шифри у 14 свезака (Српскохрватски језик), Главни Ђенералштаб, Одељење обавештајно, Одсек за шифре, Београд 1928, стр. 128.

Боравећи у Женеви, Петровић је радио на новој варијанти система шифровања дипломатске поште. Ратне прилике захтевале су од Петровића да у овом послу буде што хитрији и што дискретнији. Требало је припремити Крфску конференцију и друго. У овој 1917. години саставио је нов систем шифровања и доставио га Посланству у Берну. Предложени систем био је врло успешан и одмах је ушао у употребу, а председник Никола Пашић одао је признање капетану Михаилу Петровићу.[20]

Свој систем криптографије, урађен за време Првог светског рата у Швајцарској (1917), Петровић је по завршетку рата исправио и знатно усавршио. Исправљени систем *Три картона* био је врло успешан и дуго се задржао у употреби за потребе дипломатије и војске. 5. децембра Петровић је завршио исправку система и обраћа се министру спољних послова:

[20] Видети одељак ПИСМА у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића*.

*„По поруци Министарства част ми је поднети нов систем за шифровање депеша, о коме сам раније имао споразум са помоћником г. Министра г. Др. Михаилом Гавриловићем.*

*Систем има над досадашњим превагу у томе*

*1° што је шифровање по њему боље скривено, јер се и последња шифра шифрује а не дописује онаква каква је (као до сада);*

*2° што један прибор за шифровање даје 720 разних кључева (на место 196 као до сада);*

*3° што се у њему промена кључа врши само једном петоцифреном групом, која и извештава дешифрера о тој промени и даје у исто време нов кључ (што се до сада постизало помоћу двеју петоцифрених група);*

*4° што не захтева никакав апарат, не квари се, заузима веома мали простор и лако се чува и преноси;*

*5° што се после извесног времена могу врло лако променити свих 720 кључева: промена се састоји само у томе да се на већ постојећих 10 картона, не мењајући им ни централну таблицу, ни нумере на наличју, преко црних цифара прилепе две узане траке од хартије на којима су одштампане две нове пермутације цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (таквих парова пермутација има на хиљаде милијарди).*

*Сам механизам шифровања и дешифровања не разликује се много од досадашњег, тако да ће се они који су већ радили по досадашњем систему, лако и са мало пажње прилагодити новоме систему.*

*Прибор је израђен у 100 примерака од којих сваки стаје по 4 динара. Те примерке предајем Министарству заједно са упутством за шифровање и дешифровање. Све је израђено у дефинитивном облику тако да се може одмах разаслати Посланствима и пустити у рад почевши од једног унапред одређеног дана. Молим Господина Министра да изволи наредити да ми се по овде приложеноме рачуну изволи исплатити сума од 400 дин. коју сам исплатио за материјал и израду овога прибора.*

*У исто време молим да Господин Министар изволи донети одлуку о суми која ми се има издати за откуп система и за рад око његове практичне израде.“*

Доцније, 1928, Петровић је систем *Три картона* изложио у свом уџбенику (скрипта) *Криптографија* за потребе школе за обуку на шифрама при Обавештајном одељењу Главног генералштаба Југословенске војске. Скрипта су била подељена у 14 свезака на 169 страна 21 × 29,7.

***Патенти***. – Ретки су математичари који су се интересовали изумима различитог садржаја, патентима. У Петровићевом делу нашли смо пет патената који су заштићени у Француском патентном заводу и који су настали у ратним временима (1910–1920). То су све оригинална практична решења за потребе наоружања српске војске пре свега. У овој књизи их доносимо непреведене, у оригиналном облику. Њихов садржај је данас потпуно неактуелан, те смо овако поступили. Они у овој књизи стоје као споменик једном добу, када је Петровић путем патената пружио неколико изума потребних војним снагама. Поменимо да је патент о промени брзине мотора имао израђен прототип, а „вечити календар" имао у Швајцарској тиражну дистрибуцију по киосцима.

Наведимо редом Петровићеве патенте:

- TELEMETRE À SEXTANT, BREVET D'INVENTION, Paris 1910, No. 413.730 (са М. Терзићем)
- CHANGEMENT DE VITESSE, Brevet d'invention, Paris 1913, No. 463082.
- CODRAN CALENDRIER POUR OBJETS D'HORLOGERIE, de bijouterie et autres, Brevet d' invention, Paris 1916, No. 480.788.
- DISPPOSITIF POUR ASSURER LA FLOTTABILITÉ DES NAVIRES EN DANGER, Brevet d'invention, Paris 1921, No. 515.072.
- MOTEUR, Brevet d'invetion, Paris 1919, No. 495.040.

***Прилози хемији.*** – И хемија није изостала у Петровићевим применама математике. Хемију је заволео још у гимназији и своје погледе није склањао од ове науке. Када би дошао до новог резултата у математици, увек се питао, да ли је могућа његова примена у хемији. Ово се најбоље огледа у раду о Рикатијевој диференцијалној једначини у Прагу 1896. године када је дошао до пропозиције о аналогном рачунару у облику хемијске реакције која би решавала многе неинтеграбилне случајеве диференцијалних једначина. У расправи *Карактеристична константа бројних низова* из 1936. године излаже примену добијене константе на атомске и молекуларне тежине хемијских елемената и једињења.

Често је говорио о свом начелу у експерименталном раду и давао савете: *„Мерити нешто, а не познавати грешку која је учињена при мерењу, боље је и не мерити."* Из ових побуда у Српској краљевској академији објављује обимну студију пуну практичних савета *О утицају нетачних података на резултате квантитативних хемијских анализа* (1903. г.), а доцније, од 1928. године на Филозофском факултету држи курсеве из *Елементарне теорије грешака.* Генерације хемичара и физичара причало је о овим Петровићевим предавањима све до иза Другог светског рата (Вукић Мићовић, Павле Савић, ...).

Општи поглед на однос ових двеју наука може се пратити у Петровићевом раду *Хемија и математика* из 1922. године и тако, упознати све научникове жеље у хемији. Веома рано два објављена рада у Париској академији наука *Sur la dynamique des réactions chimiques homogènes avec dégagement on absorption de chaleur* (1897. г.) и Српској краљевској академији *Прилози хемијској кинетици* (1898. г.), – указују на сву озбиљност Петровићевих жеља у хемији. Ако се присетимо, да је до скора важило начело, да се у хемији веома мало може применити математика, то ове две поменуте расправе настале пре једног века из Петровићевог пера, показују и доказују много. Петровић је уистину био савремен научник и у многим покушајима ишао испред свог времена.

Наведимо Петровићеве радове из хемије:

- SUR L'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLE DE RICCATI ET SES APPLICATIONS CHIMIQUES, Věstnik, Praha 1896, t. XXXIX, pp. 1–25.
- SUR LA DYNAMIQUE DES RÉACTIONS CHIMIQUES HOMOGÈNES AVEC DÉGAGEMENT ON ABSORPTION DE CHALEUR, Comptes rendus, Paris 1897, t. CXXIV, 24, pp. 1344–1346.

ПРИЛОЗИ ХЕМИЈСКОЈ КИНЕТИЦИ, Српска краљевска академија, Глас, књ. LVII, Први разред, књ. 21, Београд 1898, стр. 207–277.

- О УТИЦАЈУ НЕТАЧНИХ ПОДАТАКА НА РЕЗУЛТАТЕ КВАНТИТАТИВНИХ ХЕМИЈСКИХ АНАЛИЗА, Српска краљевска академија, Глас, књ. LXVII, Први разред, књ. 26, Београд 1903, стр. 69–151.
- ХЕМИЈА И МАТЕМАТИКА, Споменица Симе М. Лозанића, Београд 1912, стр. 18–23.
- ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРИЈА ГРЕШАКА, Београд 1930, стр. 158.
- КАРАКТЕРИСТИЧНА КОНСТАНТА БРОЈНИХ НИЗОВА, Гласник Југословенског професорског друштва, Београд 1936, t. XVII, 2–3, стр. 148–157.

***Рачунари***. – Разне направе које су човеку олакшавале рад на прорачунима, освајале су пажњу младог Петровића. У кабинету за геодезију Техничког факултета у Београду посматра рад и корист рачунарских апарата: интеграфа, планиметра, курвиметра, пантографа, адијатора и логаритмара. Свему се дивио и размишљао да ће и он у математичким инструментима имати нешто да саопшти. Околности студија у Београду и Паризу испуниле су Петровићеву жељу. Најпре је добио награду за урађен Светосавски темат на Великој школи у Београду о кинематичким справама за одређивање површина равних фигура (1889. г.). По доласку из Париза, онако млад са пуним очима запажања и моћи, доказује у Српској краљевској академији да се Клерићев тракториограф може корисно употребити и за интеграцију диференцијалних једначина одређених класа (1896. г.). Овом приликом академик Љубомир Клерић наводи „да сада млади колега М. Петровић ради на потпуно новом уређају за решавање диференцијалних једначина".

Петровић је радио у областима аналогних рачунских машина и ту постигао велике резултате. Добио је велика признања светске науке, као и награде за изложене рачунаре на светској изложби у Паризу (1900), Лондону (1907) и Риму (1911).

Петровићеви хидроинтегратори и кинематори у целости су обрађени и анализовани од стране писца ових редова. Наша национална историја наука изборила се да светска наука призна и потврди, да је Михаило Петровић први у свету саградио аналогну рачунску машину за решавање шире класе диференцијалних једначина, а која ради на принципу потапања једног тела у суд са водом одређеног облика. О свему овоме погледати у књизи Д. Трифуновић, *Проучавање моделовања у делу Михаила Петровића*, Нови Сад, 1976, стр. 399.

Доносимо Петровићеве радове у којима је изнео своја оригинална решења аналогних рачунских машина:

- ИЗЛОЖИТИ СВЕ НАЧИНЕ РАЧУНАЊА ПОВРШИНЕ УОПШТЕ, КАКО ИЗ ОРИГИНАЛНИХ МЕРА, ТАКО И ИЗ ПЛАНОВА СНИМЉЕНИХ ГРАФИЧКИМ ПУТЕМ, ЗАЈЕДНО СА СРЕДСТВИМА (ПЛАНИМЕТРИМА) ЗА РАЧУНАЊЕ ПОВРШИНА, ОД НАЈПРОСТИЈИХ ДО НАЈСЛОЖЕНИЈИХ И НАЈУПОТРЕБЉИВИЈИХ У ПРАКСИ, Темати за Светосавску награду на Великој школи у Београду, Београд 1889, АС, ВШ, 1889, 47.
- О ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА ПРВОГА РЕДА КОЈЕ СЕ МОГУ ГРАФИЧКИ ИНТЕГРАЛИТИ ПОМОЋУ Г. КЛЕРИЋЕВОГ ШЕСТАРА, Српска краљевска академија, Глас, књ. LI, Први разред, књ. 18, Београд 1896, стр. 313–316.
- SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE RICCATI ET SES APPLICATIONS CHIMIQUES, Věstnik, Praha 1896, t. XXXIX, pp. 1–25.
- SUR UN PROCÉDÉ D'INTÉGRATION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1897, t. CXXIV, 20, pp. 1081–1084.
- О ХИДРАУЛИЧНОЈ ИНТЕГРАЦИЈИ, Српски технички лист, Београд 1898, стр. 1–6 (двостубне).
- SUR L'INTÉGRATION HYDRAULIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS, Baltimore 1898, t. XX, 4, pp. 293–300.
- APPAREIL À LIQUIDE POUR L'INTÉGRATION GRAPHIQUE DE CERTAINS TYPES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, American Journal of Mathematics, Baltimore 1899, t. XXII, 1, pp. 1–12.
- INTÉRATION GRAPHIQUE DE CERTAINS TYPES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris 1899, t. XXVII, pp. 200–205.
- КВАДРАТУРА ПОМОЋУ КУРВИМЕТРА, Српска краљевска академија, Глас, књ. XCIII, Први разред, књ. 39, Београд 1921, стр. 50–61.

# РЕГИСТАР ЛИЧНИХ ИМЕНА

# САДРЖАЈ



## ПОПУЛАРНИ СПИСИ

### НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ



### ДОГАЂАЈИ И ПОРТРЕТИ

## СТУДИЈЕ



# ПРИМЕЊЕНА МАТЕМАТИКА

## МЕХАНИКА



## ТЕОРИЈА РЕЛАТИВНОСТИ

## АСТРОНОМИЈА – ХЕМИЈА ЕЛЕКТРИЧНЕ АНАЛОГИЈЕ



## РАЧУНАРИ



## ПЕТРОВИЋЕВИ ПАТЕНТИ У ФРАНЦУСКОМ ПАТЕНТНОМ ЗАВОДУ



# **ПРИЛОЗИ**

## ПЕТРОВИЋ О СВОЈИМ РАЧУНАРИМА И ДРУГИМ ПРИМЕНАМА

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
**САБРАНА ДЕЛА**
**Књига 10**

**ЧЛАНЦИ – СТУДИЈЕ**

Прво издање, 1999. година

*Издавач*

Завод за уџбенике и наставна средства
Београд, Обилићев венац 5

*Ликовни уредник*

АИДА СПАСИЋ

*Лектор*
МИРЈАНА ВАСИЉЕВИЋ

*Корице*

АИДА СПАСИЋ

*Графички уредник*

ДУШАН МИЛОСАВЉЕВИЋ

*Коректори*

ТАТЈАНА ЗОРИЋ
ЗОРИЦА БАЧКОВИЋ
ГОРИЦА МАРКОВИЋ

*Обим*: 25 3/4 штампарских табака

*Формат*: 17 × 24 cm

*Тираж*: 1000 примерака

Рукопис предат у штампу маја 1999. године.

Штампање завршено маја 1999. године.

*Штампа*

БИГЗ, Београд

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

929:51 Петровић М.

ПЕТРОВИЋ, Михаило Н.
Чланци, студије : популарни списи и примењена математика / Михаило Петровић ; приредили Милосав Марјановић, Драган Трифуновић ; [све радове на француском језику превео је Душан Адамовић]. – [1. изд.]. – Београд : Завод за уџбенике и наставна средства, 1999 (Београд : БИГЗ). – 410 стр. : илустр. ; 24 cm. – (Сабрана дела / Михаило Петровић ; књ. 10)

Слика аутора. – Тираж 1000. – Стр. 9–12: Реч приређивача / Драган Трифуновић. – Стр. 382–398: Рачунарство и друге примене у делу Михаила Петровића / Драган Трифуновић. – Регистар.

ISBN 86-17-06521-4

371.3: :51 51–7

а) Петровић, Михаило (1868–1943) б) Математика ц) Математика – Настава – Методика
ИД=74703628

9 788617 346797

ISBN 86-17-06521-4

К. Б. 34679