Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Bilinearna preslikavanja i neeuklidska geometrija

Master rad

Mentor:
Prof. dr Miodrag Mateljević

Student:
Saša Stojanović

Beograd, septembar 2017.

Sadržaj

1 Uvod

Otkako su Nikolaj Lobačevski i Janoš Boljaj, nezavisno jedan od drugog, u trećoj deceniji 19. veka postavili temelje geometrije koja negira peti Euklidov postulat, ona je postala jedna od najvećih fascinacija ljudskog roda. Beltrami je znatno doprineo razvoju hiperboličke geometrije, takođe. Razvivši polusferni model, uspeo je da dokaže ekvikonzistentnost hiperboličke geometrije sa euklidskom. Jedan od najvećih podstreka razvoju hiperboličke geometrije došao je sasvim neočekivano, otkrivanjem tesne veze iste sa kompleksnom analizom. Upravo tim pogledom na hiperboličku geometriju se bavi ovaj rad.

Autor napominje da rad sadrži dosta naprednijih matematičkih koncepata iz kompleksne analize i drugih matematičkih disciplina, te je namenjen studentima treće ili četvrte godine osnovnih studija na Matematičkom ili nekim srodnim tehničkim fakultetima. Svrha rada je da posluži kao skripta ili pomoćni materijal pri kursu hiperboličke geometrije. Iako stilski veoma siromašan, rad obiluje temeljnim dokazima većine tvrđenja, primerima i razmatranjima. Slike korišćene u radu rađene su u programskom paketu *Geogebra*, odnosno *Geogebra*3*D*.

Što se tiče strukture rada, podeljen je na 4 celine, takoreći na 4 poglavlja. U prvom poglavlju daje se veoma kratak istorijski uvod u temu, uz neke napomene koje su relevantne kasnije, poput stereografske projekcije i Rimanove sfere. Drugo poglavlje bavi se bilinearnim preslikavanjima, njihovim osobinama, automorfizmima, dvorazmeri i, najvažnije, klasifikaciji. Apel je autora da čitalac posebno obrati pažnju na ovo poglavlje. Treće poglavlje bavi se Poenkareovim disk i poluravanskim modelom, polazeći od Švarcove leme, a sa ciljem nalaženja različitih oblika funkcije $h-$rastojanja. Poslednje, četvrto poglavlje, govori o pojmovima hiperboličke geometrije: $h-$trouglu i $h-$krugu i njihovim površinama. Takođe, sadrži deo o trigonometriji $h-$trougla, a završava se geometrijskim pogledom na bilinearna preslikavanja.

Autor želi da se zahvali mentoru na svoj pomoći tokom izrade rada, kao i kolegama Lazaru Stanojkoviću, Nemanji Juriću i Stefanu Budimiroviću. Naravno, autor se najviše zahvaljuje svojoj porodici na strpljenju i podršci u toku izrade master rada.

2 Neki osnovni pojmovi geometrije

2.1 Aksiomatizacija geometrije

Geometrija se aksiomatski uvodi tako što se zadaju osnovni geometrijski pojmovi - tačka, prava i ravan, i osnovne relacije - relacija incidentnosti, relacija između i relacija podudarnosti parova tačaka. Zatim se navedu aksiome kojima se iskazuju veze osnovnih pojmova i osnovnih relacija. One (aksiome) predstavljaju osnovni „alat” , pored našeg britkog uma i moći rezonovanja, u dokazivanju teorema, lema, kao i tvrđenja manjeg ili većeg značaja a sve sa ciljem građenja neprotivrečne teorije. Postoji 5 grupa aksioma, od kojih prve 4 grupe čine teoriju apsolutne geometrije, dok izborom jedne od aksioma pete grupe, zajedno sa aksiomama prve četiri, govorimo o euklidskoj, odnosno hiperboličkoj geometriji.

Definicija 1. *Za tri ili više tačaka A,B,C,... kaže se da su kolinearne ako postoji prava koja ih sadrži; ako takva prava ne postoji, za pomenute tačke kaže se da su nekolinearne. Analogno, za četiri i više tačaka A,B,C,D,... kaže se da su komplanarne ako postoji ravan koja ih sadrži; ako takva ravan ne postoji, za pomenute tačke kaže se da su nekomplanarne.*

2.1.1 Aksiome veze

Aksioma 1. *Svaka prava sadrži najmanje dve tačke A i B.*

Aksioma 2. *Postoji najmanje jedna prava koja sadrži dve tačke A i B.*

Aksioma 3. *Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke A i B.*

Aksioma 4. *Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke A,B,C.*

Aksioma 5. *Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tačke A,B,C.*

Aksioma 6. *Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A,B,C.*

Aksioma 7. *Ako dve razne tačke A i B neke prave p pripadaju izvesnoj ravni π, tada sve tačke prave pripadaju ravni π.*

Aksioma 8. *Ako dve ravni α i β imaju jednu zajedničku tačku A, one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku B.*

Aksioma 9. *Postoje četiri nekomplanarne tačke A,B,C,D.*

2.1.2 Aksiome rasporeda

Aksioma 10. *Ako su A,B,C tri nekolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A,B,C)$[1], tada su svake dve od tačaka A,B,C među sobom različite.*

[1] B između A i C

Aksioma 11. *Ako su A,B,C tri nekolinearne tačke takve da je* $\mathcal{B}(A,B,C)$*, tada je* $\mathcal{B}(C,B,A)$*.*

Aksioma 12. *Ako su A,B,C tri nekolinearne tačke takve da je* $\mathcal{B}(A,B,C)$*, tada nije* $\mathcal{B}(A,C,B)$*.*

Aksioma 13. *Ako su* A *i* B *dve razne tačke neke prave* p*, tada na pravoj* p *postoji tačka* C *takva da je* $\mathcal{B}(A,B,C)$*.*

Aksioma 14. *Ako su A,B,C tri razne kolinearne tačke, tada važi najmanje jedna od relacija* $\mathcal{B}(A,B,C)$*,* $\mathcal{B}(A,C,B)$*,* $\mathcal{B}(C,A,B)$*.*

Aksioma 15. *(Pašova aksioma) Ako su A,B,C tri nekolinearne tačke i* p *prava koja pripada ravni ABC, ne sadrži tačku* A *i seče pravu* BC *u tački* P *takvoj da je* $\mathcal{B}(B,P,C)$*, tada prava* p *seče pravu* AC *u tački* Q *takvoj da je* $\mathcal{B}(A,Q,C)$ *ili pravu* AB *u tački* R *takvoj da je* $\mathcal{B}(A,R,B)$*.*

2.1.3 Aksiome podudarnosti

Aksioma 16. *Ako je* $(A,B) \cong (C,D)$ [2] *i* $A = B$*, tada je* $C = D$*.*

Aksioma 17. *Za svake dve tačke* A *i* B *imamo da je* $(A,B) \cong (B,A)$*.*

Aksioma 18. *Ako tačke A,B,C,D,E,F zadovoljavaju relacije* $(A,B) \cong (C,D)$ *i* $(A,B) \cong (E,F)$*, tada je* $(C,D) \cong (E,F)$*.*

Aksioma 19. *Ako su C i C' tačke otvorenih duži* (AB) *i* $(A'B')$ *takve da je* $(A,C) \cong (A',C')$ *i* $(B,C) \cong (B',C')$*, tada je i* $(A,B) \cong (A',B')$*.*

Aksioma 20. *Ako su A,B dve razne tačke i* C *kraj neke polupravе* p*, tada na polupravoj* p *postoji tačka* D *takva da je* $(A,B) \cong (C,D)$*.*

Aksioma 21. *Ako su A,B,C tri nekolinearne tačke i A,B tačke ruba neke poluravni* π *takve da je* $(A,B) \cong (A',B')$*, tada u poluravni pi postoji jedinstvena tačka C' takva je* $(A,C) \cong (A',C')$ *i* $(B,C) \cong (B',C')$*.*

Aksioma 22. *Ako su* A,B,C *i* A',B',C' *dve trojke nekolinearnih tačaka i* D,D' *tačke polupravih* BC *i* $B'C'$ *takve da je* $(A,B) \cong (A',B')$*,* $(B,C) \cong (B',C')$*,* $(C,A) \cong (C',A')$*,* $(B,D) \cong (B',D')$*, tada je i* $(A,D) \cong (A',D')$*.*

2.1.4 Aksiome neprekidnosti

Aksioma 23. *(Eudoks[3]-Arhimedova[4] aksioma) Ako su* AB *i* CD *bilo koje dve duži, tada na polupravoj* AB *postoji konačan niz tačaka* $A_1, A_2, ..., A_n$ *takvih da je* $\mathcal{B}(A, A_1, A_2, ..., A_n)$*, pri čemu je svaka od duži* $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$ *podudarna duži* CD *i* $\mathcal{B}(A,B,A_n)$*.*

[2] Uređeni par tačaka (A,B) podudaran sa uređenim parom tačaka (C,D).

[3] Eudoks sa Knida (408. p.n.e - 355. pne.) je bio grčki matematičar, astronom i naučnik, jedan od Platonovih učenika.

[4] Arhimed (oko 287. p.n.e - 212. pne.) bio je grčki fizičar, astronom i jedan od najvećih matematičara starog veka.

Aksioma 24. *(Kantorova[5] aksioma) Ako je* $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ...$ *niz zatvorenih duži neke prave, takvih da svaka od tih duži sadrži sledeću, tada postoji tačka* X *koja pripada svakoj duži tog niza.*

2.1.5 Aksiome paralelnosti

Aksioma 25. *(Plejferova[6] aksioma) Ako je* p *proizvoljna prava i* A *tačka van nje, tada postoji jedinstvena prava* a *koja je komplanarna sa pravom* p*, sadrži tačku* A *i nema zajedničkih tačaka sa pravom* p*.*

Aksioma 26. *(Aksioma Lobačevskog[7]) Postoje tačka* B *i prava* a *koja je ne sadrži takve da u njima određenoj ravni postoji više od jedne prave koja sadrži* B*, a sa* a *nema zajedničkih tačaka.*

[5]Georg Kantor (Petrovgrad, Rusija, 3. marta 1845. - Hale, Nemačka, 6. januara 1918.), nemački matematičar, utemeljivač teorije skupova.

[6]John Playfair(10. mart 1748. - 20. jul 1819.), škotski naučnik i matematičar, profesor prirodne filozofije na Univerzitetu u Edinburgu.

[7]Nikolaj Ivanovič Lobačevski, (1. decembar 1793., Novgorod - 24. februar 1856., Kazanj), ruski matematičar; sin arhitekte, rođen u Novogordskoj oblasti, postavio temelje neeuklidske geometrije.

2.2 Traktrisa i pseudosfera

2.2.1 Geometrija u „malom”

Jedna od ekvivalencija Plejferove aksiome je da je zbir uglova (euklidskog) trougla jednak π radijana. Logično, to znači da u neeuklidskim geometrijama postoji razlika između zbira uglova trougla i π radijana. Tu razliku nazivamo defekt trougla $E(T) = A(T) - \pi$. Naravno sa $E(T)$ označavamo defekt (ili eksces) ugla, dok sa $A(T)$ zbir uglova trougla u datoj geometriji. Jasno je da je u sfernoj geometriji $E(T) > 0$ (vrlo je lako naći trougao koji ima čak tri prava ugla), dok je u hiperboličkoj geometriji $E(T) < 0$. Metodama diferencijalne geometrije se dokazuje da je $E(T) = kA(T)$, gde je k Gausova[8] krivina, na površima konstantne krivine.

U ovom radu bavićemo se, skoro u celini, hiperboličkom geometrijom. Stoga, namera nam je da dokažemo logičku neprotivrečnost hiperboličke geometrije ravni, kao i da predstavimo neke njene modele. Želimo da u euklidskom prostoru nađemo površ na kojoj se realizuje hiperbolička planimetrija.

„No takva površ ne samo da nije nađena, nego je pokazano da ona i ne postoji. Pokazano je jedino da u prostoru Euklida postoji površ na kojoj se planimetrija Lobačevskog realizuje u malom. Ta površ je pseudosfera.” (citat iz knjige [3] sa spiska literature)

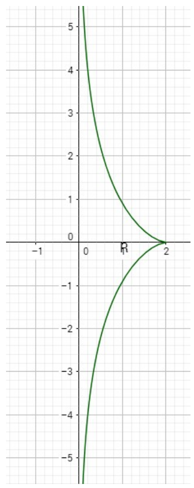
Grubo govoreći, realizovanje geometrije „u malom” podrazumeva da mali trougao, koji je deo površi konstantne Gausove krivine savršeno naleže na površ prilikom primene različitih geometrijskih transformacija (translacija, rotacija i sl.). Analogno, ukoliko površ nije konstantne krivine (a trougao jeste), tada trougao neće uvek biti savršeno nalegnut na površi. Radi jednostavnosti, posmatraćemo površi konstantne krivine. Kako je $k > 0$ kod sferne geometrije, a $k < 0$ kod hiperboličke, to možemo uzeti $k_s = +1$, $k_h = -1$ i $k_e = 0$ [9].

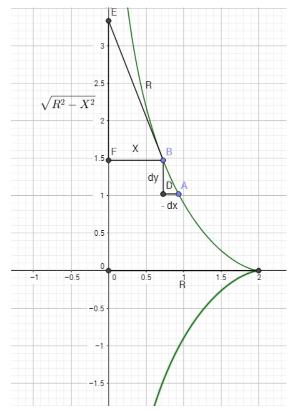
2.2.2 Traktrisa i pseudosfera

Na sledeće 2 slike prikazana je traktrisa (zelenom bojom). Pokušajmo da izvedemo njenu formulu.

[8] Jochann Karl Friedrich Gauss(30.4. 1777. - 23.2. 1855.) je nemački matematičar i naučnik poznat po ključnom doprinosu razvoju teorije brojeva, analize, diferencijalne geometrije, geodezije, magnetizma, astronomije i optike.

[9] k_e je oznaka za krivinu euklidske, k_h hiperboličke, dok je k_s oznaka za krivinu površi sferne geometrije.





$$\frac{dy}{-dx} = \frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}$$

$$dy = -\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}dx / \int$$

$$\int dy = -\int \frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}dx$$

$$y = y(x), y(R) = 0$$

$$y(x) = -\int_R^x \frac{\sqrt{R^2-t^2}}{t}dt$$

$$y(x) = \int_x^R \frac{\sqrt{R^2-t^2}}{t}dt$$

$$y(x) = \sqrt{R^2-t^2} + \frac{R}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{R^2-t^2}-R}{\sqrt{R^2-t^2}+R}\right| /_x^R$$

$(*)$

$$\int \frac{\sqrt{R^2-t^2}}{t}dt = \int \frac{\sqrt{R^2-t^2}\cdot t}{t^2}dt =$$

$$\left[\sqrt{R^2-t^2} = a, R^2-t^2 = a^2\right]$$

$$[tdt = -ada, t^2 = R^2-a^2]$$

$$\int \frac{-a^2da}{R^2-a^2} = \int \frac{(R^2-a^2-R^2)da}{R^2-a^2} =$$

$$\int da - R^2\cdot\int \frac{da}{R^2-a^2} = a + R^2\cdot\int\frac{da}{a^2-R^2} =$$

$$= a + \frac{R}{2}\ln\left|\frac{a-R}{a+R}\right| + const$$

$$y(x) = -\sqrt{R^2-x^2} - \frac{R}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{R^2-x^2}-R}{\sqrt{R^2-x^2}+R}\right| = -\sqrt{R^2-x^2} + \frac{R}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{R^2-x^2}+R}{\sqrt{R^2-x^2}-R}\right| =$$

$$= -\sqrt{R^2-x^2} + \frac{R}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{R^2-x^2}+R}{\sqrt{R^2-x^2}-R}\cdot\frac{\sqrt{R^2-x^2}+R}{\sqrt{(R^2-x^2+R)^2}}\right| = -\sqrt{R^2-x^2} + \frac{R}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{R^2-x^2}+R)^2}{-x^2}\right| =$$

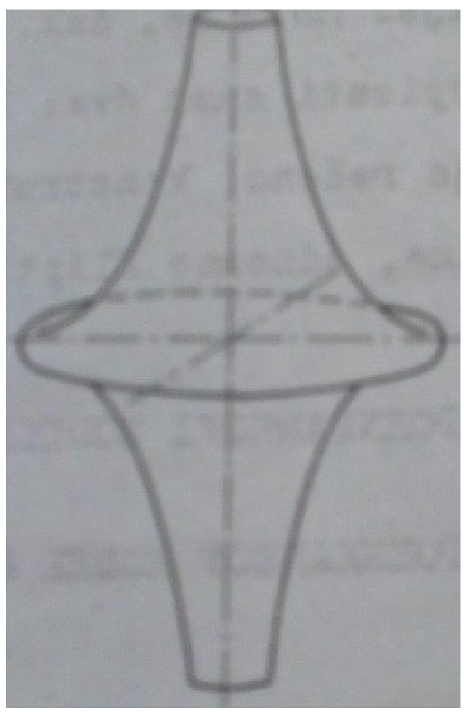
$$[x > 0] = -\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{R^2 - x^2} + R}{x} \right)^2 = -\sqrt{R^2 - x^2} + R \ln \frac{\sqrt{R^2 - x^2} + R}{x}$$

Navedeno razmatranje odnosilo se samo na pozitivni krak traktrise. Pošto je traktrisa simetrična u odnosu na x osu, to je formula sledeća:

$$y(x) = \pm \left(R \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - x^2}}{x} - \sqrt{R^2 - x^2} \right).$$

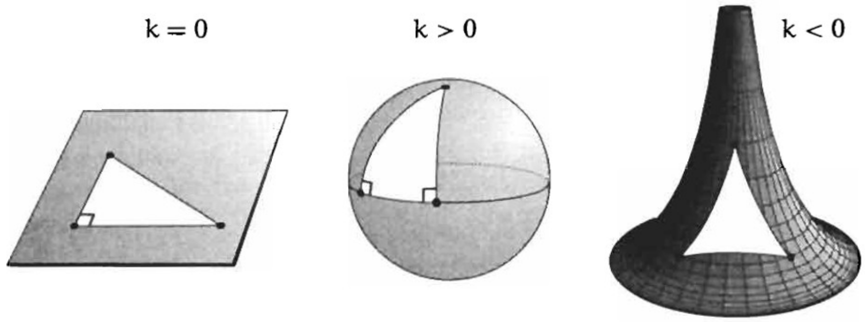
Pseudosfera radijusa R dobija se rotacijom traktrise oko svoje ose, što je u ovom slučaju x osa.

Može se pokazati da je pseudosfera površ konstantne Gausove krivine $k = -\frac{1}{R^2}$, gde je R poluprečnik osnove pseudosfere. Slično sfera ima konstantnu Gausovu krivinu $k = \frac{1}{R^2}$, gde je R poluprečnik sfere. Sada se naslućuje motivacija za naziv pseudosfera.



Slika 1: Pseudosfera

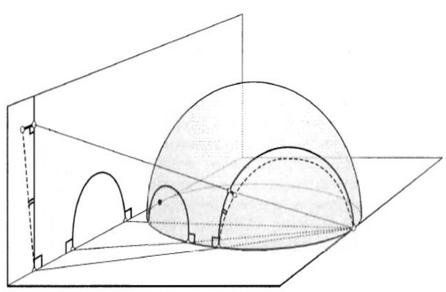
Sada kada znamo kako pseudosfera izgleda, možemo malo bolje da sagledamo koncept realizovanja geometrije „u malom” sa sledećih slika.



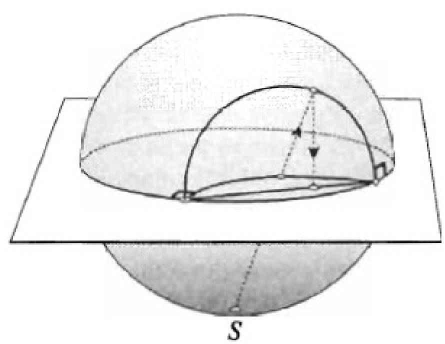
Slika 2: Površi različitih Gausovih krivina

2.2.3 Beltramijev polusferni model

Pošto smo naveli aksiome hiperboličke geometrije, kao i naveli suštinsku razliku između euklidske, sferne i hiperboličke geometrije (vrednost Gausove krivine), pogodno je navesti i modele hiperboličke planimetrije. Naravno, radi se o Poenkareovom disk modelu, Poenkareovom poluravanskom i Klajnovom disk modelu. U fokusu ovog rada biće samo prva dva. Istinu govoreći, iako ovi modeli nose imena Poenkare-a i Klajna, oni su dobijeni od strane Beltramija, projektovanjem polusfere na određene ravni.



Slika 3: Poluravanski model



Slika 4: Klajnov i Poenkareov disk model

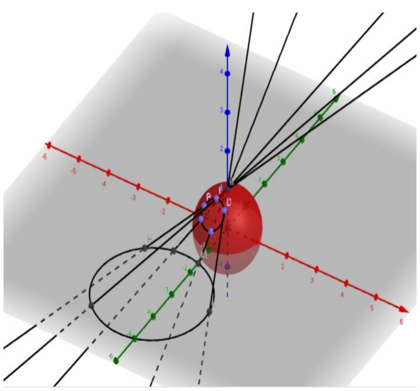
2.3 Stereografska projekcija i Rimanova sfera

Neka je $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ jedinična sfera čiji je centar koordinatni početak $O = (0, 0, 0)$. Upotrebom preslikavanja $w = x + iy$ možemo poistovetiti svaku tačku $(x, y, 0)$ $x0y$ ravni sa kompleksnim brojem $w = x + iy$. Time smo dobili kompleksnu ravan $\mathbb{C}$. Konstruišimo sledeće preslikavanje.

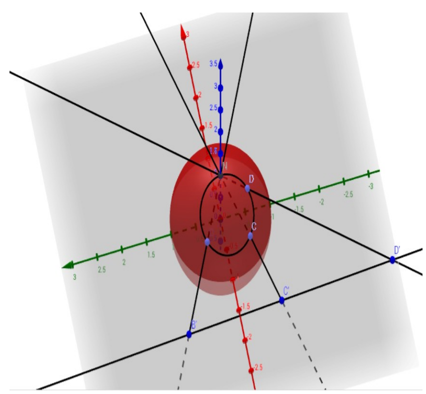
Neka je $N(0, 0, 1)$ severni pol sfere i P proizvoljna tačka sa iste $P \in \mathbb{S}^2 \backslash N$. Postoji jedinstvena prava p koja sadrži tačke N i P. Presek prave p sa kompleksnom ravni $\mathbb{C}$ označimo sa P'. Time smo dobili preslikavanje $\sigma : P \mapsto P'$ i jasno je da za svaku tačku $P \in \mathbb{S}^2 \backslash N$ postoji jedinstvena tačka P' tako da je $\sigma(P) = P'$. Specijalno $\sigma(S) = 0$, gde je $S = (0, 0, -1)$ južni pol sfere a $0 = 0 + 0 \cdot i$ koordinatni početak kompleksne ravni $\mathbb{C}$. Međutim, ono što primećujemo je da što je P bliže N, to je P' dalje od O. Stoga, možemo reći da je $\sigma(N) = \infty$. Ovako konstruisano preslikavanje naziva se stereografska projekcija. Preslikavanjem σ uspeli smo da svaku tačku sfere $\mathbb{S}^2$ poistovetimo sa tačkom iz proširene kompleksne ravni $\overline{\mathbb{C}}$. Tu sferu nazivamo Rimanovom sferom.

Jasno je stereografska projekcija slika jediničnu kružnicu na samu sebe, severnu hemisferu Rimanove sfere na spoljašnjost, a južnu hemisferu na unutršnjost jediničnog diska. Zanimljivo je primetiti sledeće: slika svakog kruga koji sadrži N je prava, dok je slika svakog kruga koji ne sadrži N takođe krug u proširenoj kompleksnoj ravni $\overline{\mathbb{C}}$. To nam daje motivaciju za sledeću definiciju.

Definicija 2. *Pod terminom uopštena kružnica u $\overline{\mathbb{C}}$ podrazumevamo kružnicu ili pravu u $\overline{\mathbb{C}}$. Prava predstavlja kružnicu beskonačnog poluprečnika.*



Slika 5: Stereografska projekcija kruga koji ne sadrži N



Slika 6: Stereografska projekcija kruga koji sadrži N

Napomena: Da bi se izbegle zabune u nastavku rada, prefiks „h-” odnosi se na odgovarajuće hiperboličke pojmove. Naime, h-prava predstavlja hiperboličku pravu, h-rastojanje predstavlja hiperboličko rastojanje...

S tim na umu, osvrćemo se na slike Beltramijevog polusfernog modela. Primećujemo da su u Klajnovom modelu jedine geodezijske h-prave delovi euklidskih pravih. U Poenkareovom disk modelu to su delovi euklidskih pravih i krugova. U poluravanskom modelu su to delovi euklidskih pravih i krugova normalnih na apsolutu.

3 Bilinearna preslikavanja

Pod terminom bilinearna (Mebijusova[10]) preslikavanja podrazumevamo svako preslikavanje $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$. Veliki deo ovog rada posvećen je proučavanju ovih preslikavanja, kao i njihove iznenađujuće tesne veze sa hiperboličkom geometrijom. Primetimo sledeće:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a\left(z+\dfrac{b}{a}\right)}{c\left(z+\dfrac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \dfrac{d}{c} + \dfrac{b}{a} - \dfrac{d}{c}}{z + \dfrac{d}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \left(1 + \frac{\dfrac{b}{a} - \dfrac{d}{c}}{z + \dfrac{d}{c}}\right) =$$

$$= \frac{a}{c} \cdot \left(1 + \frac{\dfrac{bc-ad}{ac}}{z+\dfrac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \cdot \frac{bc-ad}{ac\left(z + \dfrac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{z + \dfrac{d}{c}}.$$

Sada je jasan razlog postojanja uslova $ad - bc \neq 0$. Naime, ako je $ad - bc = 0$, to je $f(z) = \dfrac{a}{c}$ konstantno preslikavanje i kao takvo nam nije zanimljivo. Pošto je $f(z) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{z+\dfrac{d}{c}}$, ako proglasimo $A = \dfrac{a}{c}$, $B = \dfrac{bc-ad}{c^2}$, $C = \dfrac{d}{c}$, to je

$$f(z) = A + \frac{B}{z+C} = A + \frac{|B|e^{i \arg B}}{z+C}. \tag{1}$$

Pre nego što krenemo razmatranje bilinearnog preslikavanja kao kompozicije preslikavanja, ostaje samo da rešimo jednu nedoumicu.

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\}$$

Ovako definisano preslikavanje $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Međutim, možemo ga neprekidno dodefinisati $w(\infty) = \dfrac{a}{c}$, $c \neq 0$, $w\left(\dfrac{-d}{c}\right) = \infty$, $c \neq 0$, tj.

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{-d}{c}\right\}; \\ \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}, & z \in \mathbb{C}, c = 0; \\ \dfrac{a}{c}, & z = \infty, c \neq 0; \\ \infty, & z = \dfrac{-d}{c}, c \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

[10] August Ferdinand Mebijus (nem. August Ferdinand Möbius, 17.11.1790. - 26.9.1868.) - nemački matematičar i teorijski astronom.

Možemo nastaviti diskusiju o kompoziciji preslikavanja. Kao što možemo videti iz (1), bilinearno preslikavanje predstavlja kompoziciju sledećih preslikavanja:

- translacije $z_1 = z + C$ za vektor C,
- preslikavanja $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$, koje je kompozicija inverzije u odnosu na jediničnu kružnicu i refleksije u odnosu na realnu osu,
- rotacije $z_3 = e^{i \arg B} z_2$ za ugao $\arg B$,
- homotetije sa centrom u koordinatnom početku i koeficijentom $k = |B|$, $z_4 = |B| z_3$ i
- translacije $w = f(z) = A + z_4$ za vektor A.

3.1 Osobine bilinearnih preslikavanja

Stav 1. *Bilinearno preslikavanje $w : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ je bijekcija.*

Dokaz. Dovoljno je da nađemo inverzno preslikavanje.

$$\begin{aligned}
w &= \frac{az+b}{cz+d},\ ad - bc \neq 0 \\
w(cz+d) &= az+b \\
wcz + wd &= az + b \\
z(wc - a) &= b - wd \\
z &= \frac{b - wd}{wc - a} \\
z &= \frac{(-d)z + b}{cw + (-a)},\ (-d)(-a) - bc = ad - bc \neq 0.
\end{aligned}$$

Dakle, inverzno preslikavanje je takođe bilinearno. Time je tvrđenje efektivno dokazano. Primetimo da smo dokazali i snažnije tvrđenje. Pošto je $w : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ bijekcija, neprekidno na osnovu načina definisanja, to je i w^{-1} neprekidno. Dakle, $w : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ je homeomorfizam. ■

Stav 2. *Skup svih bilinearnih preslikavanja $(B, \circ, f^{-1}, I)$ u odnosu na kompoziciju preslikavanja je nekomutativna grupa.*

Dokaz. $f_1(z) = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1},\ a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0,\ f_2(z) = \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2},\ a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
f_1 \circ f_2(z) = f_1(f_2(z)) &= \frac{a_1 \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{a_1(a_2 z + b_2) + b_1(c_2 z + d_2)}{c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_2)} \\
&= \frac{a_1 a_2 z + a_1 b_2 + b_1 c_2 z + b_1 d_2}{c_1 a_2 z + b_2 c_1 + d_1 c_2 z + d_1 d_2} = \frac{z \cdot (a_1 a_2 + b_1 c_2) + a_1 b_2 + b_1 d_2}{z \cdot (c_1 a_2 + d_1 c_2) + b_2 c_1 + d_1 d_2} = \frac{Az + B}{Cz + D}.
\end{aligned}$$

Potrebno je još proveriti da li važi $AD - BC \neq 0$.

$$(a_1a_2 + b_1c_2)(b_2c_1 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2)(c_1a_2 + d_1c_2) =$$
$$a_1a_2b_2c_1 + a_1a_2d_1d_2 + b_1b_2c_1c_2 + b_1c_2d_1d_2 - a_1a_2b_2c_1 - a_1d_1b_2c_2 - a_2d_2b_1c_1 - b_1d_1c_2d_2 =$$
$$a_1d_1(a_2d_2 - b_2c_2) + b_1c_1(b_2c_2 - a_2d_2) = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) \neq 0.$$

Jasno je da $I(z) = \dfrac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = z$ bilinearno preslikavanje, pa sledi $f \circ I = I \circ f = f$. Prethodno smo dokazali da ako je f bilinearno, to važi da je i f^{-1} bilinearno. Stoga je $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$. Međutim, uopšteno tvrđenje ne važi tj. $f \circ g \neq g \circ f$.

Primer 1.

$$f(z) = z + 1 \qquad (f \circ g)(z) = f(g(z)) = \frac{1}{z} + 1 = \frac{z+1}{z}$$
$$g(z) = \frac{1}{z} \qquad (g \circ f)(z) = g(f(z)) = \frac{1}{z+1}$$

Time je naš dokaz završen. ■

Stav 3. *(Kružno svojstvo) Bilinearna preslikavanja preslikavaju uopštene kružnice na uopštene kružnice.*

Dokaz. U dokazu ovog stava predstavljanje bilinearnih preslikavanja kao kompozicija preslikavanja pokazuje se veoma korisnim. Jasno je da translacija, homotetija i rotacija preslikavaju prave na prave i kružnice na kružnice. Stoga dovoljno je da posmatramo preslikavanje $J(z) = \dfrac{1}{z}$.

Kako je jednačina uopštene kružnice data sa $Ez\overline{z} + Iz + \overline{I}\overline{z} + H = 0$, $E, I, H \in \mathbb{C}$, dovoljno je posmatrati delovanje preslikavanja $J(z) = \dfrac{1}{z}$ na nju, kao što je dato u sledećem kratkom razmatranju.

$$J(z) = w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w}$$
$$E \cdot \frac{1}{w} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + I \cdot \frac{1}{w} + \overline{I} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + H = 0$$
$$E\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + I\frac{1}{w} + \overline{I}\frac{1}{\overline{w}} + H = 0 \;/ \cdot w\overline{w} \neq 0$$
$$Hw\overline{w} + \overline{I}w + I\overline{w} + E = 0, \; I \in \mathbb{C}$$

Dakle, preslikavanje $J(z) = \dfrac{1}{z}$ slika uopštenu kružnicu na uopštenu kružnicu, odakle sledi dokaz stava. ■

Stav 4. *(Konformno svojstvo) Bilinearna preslikavanja su konformna.*

Dokaz. Preslikavanje $f = f(z)$ (kako smo ga definisali u (2)) je konformno ako čuva veličinu i smer uglova. To je osobina analitičkih preslikavanja. Pošto je $f'(z) = \frac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{acz+ad-acz-bc}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$,
$z \in \mathbb{C}\backslash \left\{\frac{-d}{c}\right\}$, to je preslikavanje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konformno.

Kada je $z = \frac{-d}{c}$, $f(z) = \infty$, pa $f'(z)$ ne postoji. Posmatrajmo zato preslikavanje $F_1(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{cz+d}{az+b}$. Konformnost preslikavanja $F_1(z)$ u tački $z = \frac{-d}{c}$ povlačiće konformnost preslikavanja $f(z)$.

$$F_1'(z) = \left(\frac{cz+d}{az+b}\right)' = \frac{c(az+b)-(cz+d)a}{(az+b)^2} =$$
$$= \frac{acz+bc-acz-ad}{(az+d)^2} = \frac{bc-ad}{(az+b)^2}$$
$$F_1'\left(\frac{-d}{c}\right) = \frac{bc-ad}{\left(\frac{ad}{c}+b\right)^2} = \frac{bc-ad}{\left(\frac{bc-ad}{c}\right)^2} = \frac{c^2(bc-ad)}{(bc-ad)^2} = \frac{c^2}{bc-ad}$$

Zaključujemo, F_1 je analitička akko $c \neq 0, bc - ad \neq 0$.

Konačno za $z = \infty$ posmatrajmo preslikavanje $F_2(z) = f \circ J(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$. Iz konformnosti ovog preslikavanja u $z = 0$ slediće konformnost preslikavanja f u $z = \infty$.

$$F_2(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a\frac{1}{z}+b}{c\frac{1}{z}+d} = \frac{\frac{a+bz}{z}}{\frac{c+zd}{z}} = \frac{bz+a}{dz+c}$$
$$F_2'(z) = \left(\frac{bz+a}{dz+c}\right)' = \frac{b(zd+c)-(bz+a)d}{(dz+c)^2} = \frac{bdz+bc-bdz-ad}{(dz+c)^2} = \frac{bc-ad}{(dz+c)^2}$$

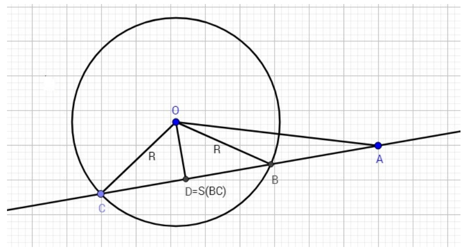
$$F_2'(0) = \frac{bc-ad}{c^2},\ c \neq 0, bc-ad \neq 0.$$

Poslednjim razmatranjem je stav u potpunosti dokazan. ■

3.1.1 Inverzija

3.1.1.1 Potencija u odnosu na krug

Neka su date kružnica k i tačka A u ravni. Prava l je proizvoljna prava koja sadrži tačku A, a čije su presečne tačke sa kružnicom k tačke B i C. Pokažimo da proizvod $AB \cdot AC$ ne zavisi od izbora prave l.



Slika 7: Potencija tačke u odnosu na krug

$$AB \cdot AC = (AD - DB) \cdot (AD + DB) = AD^2 - DB^2 = OA^2 - OD^2 - DB^2$$
$$= OA^2 - (OD^2 + DB^2) = OA^2 - OB^2 = OA^2 - R^2$$

Definicija 3. *Proizvod $AB \cdot AC = OA^2 - R^2$ naziva se potencija tačke A u odnosu na krug k, čiji je centar tačka O, a poluprečnik R (kao na slici iznad).*

3.1.1.2 Inverzija u odnosu na krug

Definicija 4. *Tačke z i z^* su simetrične u odnosu na kružnicu $K(z_0, R)$ ako pripadaju polupravi sa početkom u z_0 i $|z^* - z_0||z - z_0| = R^2$.*

Pošto je $z^* - z_0 = |z^* - z_0|e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$, kao i $z - z_0 = |z - z_0|e^{i\theta}$ jer pripadaju istoj polupravi, to je

$$z^* - z_0 = \frac{R^2}{|z - z_0|}e^{i\theta} = \frac{R^2}{|z - z_0|e^{-i\theta}} = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}.$$

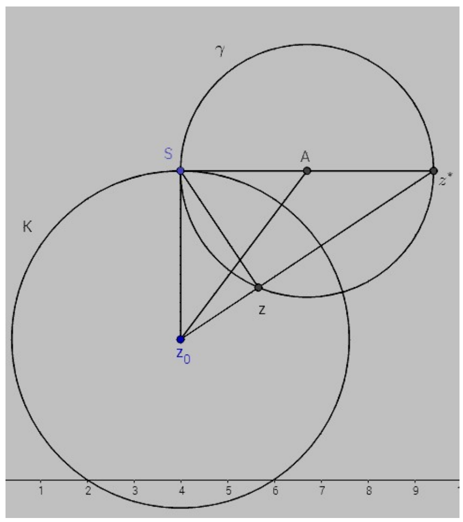
Preslikavanje u skladu sa datom definicijom, za koje važi $\mathfrak{I}_{K(z_0,R)}(z) = z^* = \dfrac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} + z_0$ naziva se inverzija u odnosu na krug $K(z_0, R)$. Specijalno, za $K = K(0, 1)$, $\mathfrak{I}_K(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$ je inverzija u jedinični krug. U kompoziciji sa refleksijom u odnosu na realnu osu $\mathfrak{R}(z) = \overline{z}$ dobijamo preslikavanje $J(z) = \dfrac{1}{z}$ (Redosled je nebitan, tj. $\mathfrak{I}_K \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{I}_K$).

Propozicija 1. *Tačke z i z^* su simetrične u odnosu na kružnicu K akko je svaka kružnica Γ u $\overline{\mathbb{C}}$ koja sadrži z i z^* ortogonalna na K (preuzeto iz knjige [5] sa spiska literature).*

Dokaz. Neka su z i z^* simetrične u odnosu na u odnosu na K i neka je γ proizvoljna kružnica koja sadrži ove tačke. Neka je $\zeta \in \gamma$ tačka takva da je prava određena tačkom z_0 i ζ tangenta kružnice γ. Na osnovu potencije u odnosu na kružnicu γ je $|z_0 - \zeta|^2 = |z_0 - z||z_0 - z^*|$ i otuda je $|z_0\zeta| = R$, tj. $\zeta \in K$. Dakle, tangenta $z_0\zeta$ na γ iz z_0 je radijus kružnice K, pa su kružnice ortogonalne (ako je γ prava, tada γ „prolazi"kroz z_0 i stoga je ortogonalna na

K).

Suprotno, ako je proizvoljna kružnica γ koja sadrži z i z^* (i specijalno, prava zz^*) ortogonalna na K, to tačke z i z^* pripadaju zraku sa početkom u z_0 i proizvod njihovih rastojanja od z_0 jednak je R^2. Otuda su z i z^* simetrične tačke u odnosu na K. ■



Slika 8: Inverzija tačke u odnosu na krug

Pre nego što nastavimo sa razmatranjem osobina bilinearnih preslikavanja, posvetimo još malo pažnje inverziji. Sledeće osobine inverzije u odnosu na krug navodimo bez dokaza.

1. Inverzija u odnosu na krug je bijekcija, koja slika unutrašnjost kruga na spoljašnjost i obratno ostavljajući tačke na kružnici nepokretnim.

2. Inverzija u odnosu na krug je involucija, tj. $\mathfrak{I}_{K(z_0,R)} \circ \mathfrak{I}_{K(z_0,R)} = Id$.

3. Kompozicija dve inverzije u odnosu na dva koncentrična kruga, $K_1(z_0, R_1)$ i $K_2(z_0, R_2)$, je homotetija sa koeficijentom $\dfrac{R_2^2}{R_1^2}$, tj. $\mathfrak{I}_{K(z_0,R_1)} \circ \mathfrak{I}_{K(z_0,R_2)} = \mathcal{H}_{z_0, \frac{R_2^2}{R_1^2}}$.

4. Inverzija u odnosu na krug slika uopštene kružnice na uopštene kružnice, grubo rečeno:

   - prava koja sadrži centar inverzije slika se sama na sebe,
   - prava koja ne sadrži centar inverzije slika se u krug koji sadrži centar inverzije,

- krug koji sadrži centar inverzije slika se u pravu koja ne sadrži centar inverzije,
- krug koji ne sadrži centar inverzije slika se u krug koji ne sadrži centar inverzije.

Za poslednju osobinu priložen je dokaz u slučaju inverzije u odnosu na jediničnu kružnicu, $J(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$. Kako je jednačina uopštene kružnice $Ez\overline{z}+Iz+\overline{I}\overline{z}+H=0$, to su

1. $Iz + \overline{I}\overline{z} = 0$ - prava koja sadrži centar kružnice,
2. $Iz + \overline{I}\overline{z} + H = 0, H \neq 0$ - prava koja ne sadrži centar kružnice.
3. $Ez\overline{z} + Iz + \overline{I}\overline{z} = 0, H, I \neq 0$ - krug koji sadrži centar kružnice,
4. $Ez\overline{z} + Iz + \overline{I}\overline{z} + H = 0, E, I, H \neq 0$ - krug koji ne sadrži centar kružnice.

Kada preslikavanjem $J(z)$ delujemo na opisane prave, odnosno krugove, jasno je da dobijamo sledeće rezultate:

$$1.\ I\frac{1}{\overline{z}} + \overline{I}\overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = 0$$
$$I\frac{1}{\overline{z}} + \overline{I}\frac{1}{z} = 0 \ / \cdot z\overline{z}$$
$$Iz + \overline{I}\overline{z} = 0$$

$$2.\ I\frac{1}{\overline{z}} + \overline{I}\overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} + H = 0$$
$$I\frac{1}{\overline{z}} + \overline{I}\frac{1}{z} + H = 0 \ / \cdot z\overline{z}$$
$$Iz + \overline{I}\overline{z} + Hz\overline{z} = 0$$

$$3.\ E\frac{1}{\overline{z}}\overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} + I\frac{1}{\overline{z}} + \overline{I}\overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = 0$$
$$E\frac{1}{\overline{z}}\frac{1}{z} + I\frac{1}{\overline{z}} + \overline{I}\frac{1}{z} = 0 \ / \cdot z\overline{z}$$
$$E + Iz + \overline{I}\overline{z} = 0$$

$$4.\ E\frac{1}{\overline{z}}\overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} + I\frac{1}{\overline{z}} + \overline{I}\overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} + H = 0$$
$$E\frac{1}{\overline{z}}\frac{1}{z} + I\frac{1}{\overline{z}} + \overline{I}\frac{1}{z} + H = 0 \ / \cdot z\overline{z}$$
$$E + Iz + \overline{I}\overline{z} + Hz\overline{z} = 0.$$

Analogno definišemo inverziju u odnosu na sferu.

Definicija 5. *Ako je z_0 centar sfere poluprečnika R tačka z slika se u tačku z^* ako pripadaju polupravi sa početkom u z_0 i $|z^* - z_0||z - z_0| = R^2$. Opisano preslikavanje nazivamo inverzija u odnosu na sferu sa centrom z_0 poluprečnika R.*

Inverzija u odnosu na sferu zadržava sve osobine inverzije u odnosu na krug, dok neke i uopštava. Naime, inverzija u odnosu na sferu preslikava ravni i sfere u ravni i sfere. Nije teško primetiti da za sferu σ sa centrom severnim polom $N(0,0,1)$ i poluprečnikom $R = \sqrt{2}$ stereografska projekcija predstavlja restrikciju inverzije u odnosu na sferu σ kojom se sfera $\mathbb{S}^2$ slika u ravan $\pi = \{(x,y,0)|\ x,y \in \mathbb{R}\}$, koju smo mi poistovetili sa $\mathbb{C}$.

Stav 5. *Bilinearna preslikavanja čuvaju simetriju.*

Dokaz. Tačke z i z^* su simetrične u odnosu na kružnicu K i L je bilinearno preslikavanje koje slika z i z^* u w i w^*, respektivno. Neka je Γ proizvoljna kružnica koja sadrži w i w^*. Tada je na osnovu kružnog svojstva $\gamma = L^{-1}(\Gamma)$ kružnica koja sadrži z i z^* i stoga je normalna na K. Otuda, kako je L konformno, kružnica $\Gamma = L(\gamma)$ je ortogonalna na $K_1 = L(K)$, pa su tačke w i w^* simetrične u odnosu na K_1. ■

Teorema 1. *Neka su z_1, z_2, z_3 i w_1, w_2, w_3 dve trojke međusobno različitih tačaka u $\overline{\mathbb{C}}$. Tada postoji jedinstveno preslikavanje $w = w(z)$ tako da je $w(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3$.*

Dokaz. Neka je $L_1 = L_1(z) = \dfrac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$ i $L_2 = L_2(w) = \dfrac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \dfrac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$. Preslikavanja L_1 i L_2 su bilinearna i važi $L_1(z_1) = 0 = L_2(w_1), L_1(z_2) = \infty = L_2(w_2)$ i $L_1(z_3) = 1 = L_2(w_3)$. Neka je $w = w(z) = L_2^{-1} \circ L_1(z)$. To preslikavanje je bilinearno kao kompozicija bilinearnih i važi $w(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3$.

Ostaje da dokažemo jedinstvenost ovog preslikavanja. Neka je $U = U(z)$ bilinearno preslikavanje t.d. je $U(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3$. Posmatrajmo preslikavanje $\lambda = L_2 \circ U \circ L_1^{-1}$.

$$\lambda(\infty) = L_2(U(L_1^{-1}(\infty))) = L_2(U(z_2)) = L_2(w_2) = \infty$$

Pošto preslikavanje λ fiksira tačku $z = \infty$, to je λ linearno preslikavanje, tj. $\lambda(z) = az + b, a, b \in \mathbb{C}$.
Analogno, $\lambda(0) = L_2(U(L_1^{-1}(0))) = L_2(U(z_1)) = L_2(w_1) = 0$, odakle sledi $b = 0$. Konačno, $\lambda(1) = L_2(U(L_1^{-1}(1))) = L_2(U(z_3)) = L_2(w_3) = 1$, što povlači $a = 1$. Dakle, $\lambda(z) = I(z) = z$.

$$\begin{aligned} I = \lambda &= L_2 \circ U \circ L_1^{-1} / \circ L_1 \\ L_1 &= L_2 \circ U / L_2^{-1} \circ \\ U &= L_2^{-1} \circ L_1 \end{aligned}$$

Ovim smo dokazali da svako preslikavanje $U = U(z)$ koje zadovoljava navedene uslove mora da bude oblika $w = L_2^{-1} \circ L_1$, čime smo dokazali jedinstvenost. ■

Primetimo da smo dokazali i sledeću posledicu.

Posledica 1. *Bilinearno preslikavanje čije su nepokretne tačke $0, 1$ i ∞ je identitet.*

3.2 Bilinearni izomorfizmi i automorfizmi

Definicija 6. *Konformno „1-1" preslikavanje f oblasti Ω_1 na oblast Ω_2 nazivamo konformni izomorfizam, a oblasti koje takvo preslikavanje dopuštaju su izomorfno ili konformno ekvivalentne. Izomorfizam oblasti na sebe naziva se konformni automorfizam.*[11]

[11] Preuzeto iz knjige [5] sa spiska literature.

Za svrhu pisanja ovog rada najzanimljivije su sledeće dve oblasti: $\mathbb{H} = \{z|\ \text{Im}\ z > 0\}$ - gornja poluravan i $\mathbb{D} = \{z|\ |z| < 1\}$ - jedinični disk. Granice ovih oblasti $\{z|\ z \in \mathbb{R}\}$ i $\{z|\ |z| = 1\}$ nazivaćemo apsoluta poluravanskog i Poenkareovog disk modela, respektivno.

Primer 2. *Odrediti opšti oblik bilinearnog izomorfizma $w : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$.*

Neka je $w : \mathbb{H} \to \mathbb{D},\ w = w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}}$.

Postoji $z_0 \in \mathbb{H}$ *tako da je* $w(z_0) = 0,\ z_0 = \dfrac{-b}{a},\ Im\ z_0 > 0$ *(prethodno smo dokazali da su bilinearna preslikavanja bijekcije, pa „na" važi). Tačke* z_0 *i* $\overline{z_0}$ *su simetrične u odnosu na* $\mathbb{R}$, *pa su* $w(z_0)$ *i* $w(\overline{z_0})$ *simetrične u odnosu na* $T = \{w|\ |w| = 1\}$, *tj.* $w(\overline{z_0}) = \infty$. *Stoga je* $\overline{z_0} + \dfrac{d}{c} = 0$, *odnosno* $\dfrac{d}{c} = -\overline{z_0}$. *Sledi,* $w(z) = \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$. *Kako je* $w(\mathbb{R}) = T$, *to je za (neko)* $x \in \mathbb{R},\ |w(x)| = 1$.

$$1 = |w(x)| = \left|\frac{a}{c} \cdot \frac{x - z_0}{x - \overline{z_0}}\right| = \left|\frac{a}{c}\right| \cdot \left|\frac{x - z_0}{x - \overline{z_0}}\right| = \left|\frac{a}{c}\right| \cdot \frac{|x - z_0|}{|x - \overline{z_0}|} = \left|\frac{a}{c}\right|$$

Zaključujemo da je $\dfrac{a}{c} = e^{i\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$ *odnosno opšti oblik bilinearnog izomorfizma* $w : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ *glasi*

$$w(z) = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}},\ Im\ z_0 > 0,\ \alpha \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Primer 3. *Odrediti opšti oblik bilinearnog automorfizma jediničnog diska $\mathbb{D}$.*

Neka je $w : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ w(z) = \dfrac{Az+B}{Cz+D} = \dfrac{A}{C} \cdot \dfrac{z + \frac{B}{A}}{z + \frac{D}{C}}$. *Analogno, postoji* $a \in \mathbb{D}$ *tako da je* $w(a) = 0, a = -\dfrac{B}{A}, a \neq -\dfrac{D}{C}$. *Nadalje postupamo isto kao u prethodnom primeru. Dakle,* $w\left(\dfrac{1}{\overline{a}}\right) = \infty,\ \dfrac{1}{\overline{a}} = -\dfrac{D}{C}$. *Preslikavanje* w *glasi* $w = w(z) = \dfrac{a\overline{a}}{c} \cdot \dfrac{z - a}{\overline{a}z - 1}$. *Kako je* $w(T) = T$, *moguće je naći tačku* $p \in \mathbb{D}$ *tako da je* $w(1) = p,\ p \in \mathbb{D}$.

$$1 = |p| = |w(1)| = \left|\frac{a\overline{a}}{c} \cdot \frac{1 - a}{\overline{a} - 1}\right| = \left|\frac{a\overline{a}}{c}\right| \cdot \left|\frac{1 - a}{\overline{a} - 1}\right| = \left|\frac{a\overline{a}}{c}\right| \cdot \frac{|1 - a|}{|\overline{a} - 1|} = \left|\frac{a\overline{a}}{c}\right|$$

To je $\dfrac{a\overline{a}}{c} = e^{i\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$, *odnosno opšti oblik bilinearnog automorfizma jediničnog diska je*

$$w = w(z) = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - a}{\overline{a}z - 1},\ a \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Napomena: U nastavku rada ćemo češće koristiti oblik $f(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$, koje ćemo nazivati $\varphi_a(z)$. Naravno, očigledno je da se radi o istom opštem preslikavanju, pošto je $f(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} = -e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{\overline{a}z-1} = e^{i\pi}\cdot e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{\overline{a}z-1} = e^{i(\alpha+\pi)}\dfrac{z-a}{\overline{a}z-1} = e^{i\beta}\dfrac{z-a}{\overline{a}z-1}$. Pokažimo da postoji još jedan ekvivalentan zapis opštih automorfizama oblasti $\mathbb{D}$.

Lema 1. *$f(z) = e^{i\theta}\cdot\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}, \theta\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{D}$ ako i samo ako $f(z) = \dfrac{Az+\overline{C}}{Cz+\overline{A}}$, $A, C\in\mathbb{C}, |A|^2-|C|^2=1$.*

Dokaz.

$$\Longrightarrow)\ f(z) = e^{i\theta}\cdot\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \theta\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{D}$$

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} = \frac{e^{i\theta}z - e^{i\theta}a}{-\overline{a}z+1} = e^{i\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}z - e^{i\frac{\theta}{2}}a}{-\overline{a}z+1} =$$

$$= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}z - e^{i\frac{\theta}{2}}a}{-e^{-i\frac{\theta}{2}}\overline{a}z + e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1-|a|^2}}z - \dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}a}{\sqrt{1-|a|^2}}}{\dfrac{-e^{-i\frac{\theta}{2}}\overline{a}}{\sqrt{1-|a|^2}}z + \dfrac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1-|a|^2}}} = \frac{Az+\overline{C}}{Cz+\overline{A}}$$

$$|A|^2-|C|^2 = |\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1-|a|^2}}|^2 - |\frac{-e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{a}}{\sqrt{1-|a|^2}}|^2 = \frac{1}{1-|a|^2} - \frac{|a|^2}{1-|a|^2} = 1$$

$$\Longleftarrow)\ f(z) = \frac{Az+\overline{C}}{Cz+\overline{A}},\ \ A, C\in\mathbb{C}, |A|^2-|C|^2=1$$

$$f(z) = \frac{Az+\overline{C}}{Cz+\overline{A}} = \frac{Az+\overline{C}}{Cz+\overline{A}}\cdot\frac{\frac{1}{A}\cdot e^{2i\arg A}}{\frac{1}{A}\cdot e^{2i\arg A}} = \frac{e^{2i\arg A}z + \frac{\overline{C}}{A}e^{2i\arg A}}{\frac{C}{A}e^{2i\arg A}z + \frac{\overline{A}}{A}e^{2i\arg A}} =$$

$$= e^{2i\arg A}\cdot\frac{z+\dfrac{\overline{C}}{A}}{\dfrac{C}{A}e^{2i\arg A}z + \dfrac{|A|e^{-i\arg A}}{|A|e^{i\arg A}}e^{2i\arg A}} = \frac{e^{2i\arg A}\left(z+\dfrac{\overline{C}}{A}\right)}{\dfrac{C}{A}e^{2i\arg A}z + e^{-2i\arg A}\cdot e^{2i\arg A}} =$$

$$= \frac{e^{2i\arg A}\left(z+\dfrac{\overline{C}}{A}\right)}{1+\dfrac{C}{A}e^{2i\arg A}z} = \frac{e^{2i\arg A}\left(z+\dfrac{\overline{C}}{A}\right)}{1+\dfrac{C}{|A|e^{i\arg A}}e^{2i\arg A}z} = \frac{e^{2i\arg A}\left(z+\dfrac{\overline{C}}{A}\right)}{1+\dfrac{C}{|A|}e^{i\arg A}z} = \frac{e^{2i\arg A}\left(z+\dfrac{\overline{C}}{A}\right)}{1+\dfrac{C}{|A|e^{-i\arg A}}z} =$$

$$= \frac{e^{2i\arg A}\left(z+\dfrac{\overline{C}}{A}\right)}{1+\dfrac{C}{\overline{A}}z} = \left[2\arg A = \alpha,\ a = \frac{-\overline{C}}{A}\right] = e^{i\alpha}\cdot\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

Ostaje još dokazati $\dfrac{-\overline{C}}{A} \in \mathbb{D}$, tj. $\left|\dfrac{-\overline{C}}{A}\right| < 1$. Kako je
$\left|\dfrac{-\overline{C}}{A}\right| < 1 \iff \left|\dfrac{-\overline{C}}{A}\right|^2 < 1 \iff \dfrac{|C|^2}{|A|^2} < 1 \iff \dfrac{|C|^2}{1+|C|^2} < 1$, to je lema dokazana. ■

3.3 Dvorazmera

Definicija 7. *Neka su* z_1, z_2, z_3, z_4 *četiri različita elementa proširene kompleksne ravni* $\overline{\mathbb{C}}$. *Izraz* $(z_1, z_2; z_3, z_4) = \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ *naziva se dvorazmera.*

Promatrajući različite izvore koji govore o dvorazmeri autor ovog rada naišao je na različite, naizgled protivrečne, definicije dvorazmere. Naime, pošto je dvorazmera funkcija četiri argumenta, jasno je da postoji 24 mogućih rasporeda istih, a samim time i 24 moguće definicije dvorazmere. Lako je dokazati sledeće:

$$\begin{aligned}(z_1, z_2; z_3, z_4) &= \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \\ &= \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = (z_2, z_1; z_4, z_3) \\ (z_1, z_2; z_3, z_4) &= \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} \\ &= \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} = (z_3, z_4; z_1, z_2) \\ (z_1, z_2; z_3, z_4) &= \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \\ &= \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1} = (z_4, z_3; z_2, z_1).\end{aligned}$$

Time smo dokazali :

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = (z_2, z_1; z_4, z_3) = (z_3, z_4; z_1, z_2) = (z_4, z_3; z_2, z_1).$$

Ovaj oblik dvorazmere možemo označiti sa $(z_1, z_2; z_3, z_4)_1$, a samim time ostale prikladno sa $(z_1, z_2; z_3, z_4)_2$, $(z_1, z_2; z_3, z_4)_3$, $(z_1, z_2; z_3, z_4)_4$, $(z_1, z_2; z_3, z_4)_5$ i $(z_1, z_2; z_3, z_4)_6$. Analogno prethodnom razmatranju se dokazuje:

$$\begin{aligned}(z_1, z_3; z_2, z_4) = (z_2, z_4; z_1, z_3) = (z_3, z_1; z_4, z_2) = (z_4, z_2; z_3, z_1) = (z_1, z_2; z_3, z_4)_2 \\ (z_1, z_4; z_2, z_3) = (z_2, z_3; z_1, z_4) = (z_3, z_2; z_1, z_4) = (z_4, z_1; z_3, z_2) = (z_1, z_2; z_3, z_4)_3 \\ (z_1, z_2; z_4, z_3) = (z_2, z_1; z_3, z_4) = (z_3, z_4; z_2, z_1) = (z_4, z_3; z_1, z_2) = (z_1, z_2; z_3, z_4)_4 \\ (z_1, z_3; z_4, z_2) = (z_2, z_4; z_3, z_1) = (z_3, z_1; z_2, z_4) = (z_4, z_2; z_1, z_3) = (z_1, z_2; z_3, z_4)_5 \\ (z_1, z_4; z_3, z_2) = (z_2, z_3; z_4, z_1) = (z_3, z_2; z_1, z_4) = (z_4, z_1; z_2, z_3) = (z_1, z_2; z_3, z_4)_6.\end{aligned}$$

Relativno lako se može pronaći veza između ovih 6 jedinstvenih definicija dvorazmere.

$$(z_1, z_2; z_3, z_4)_1 = \lambda, (z_1, z_2; z_3, z_4)_2 = 1 - \lambda, (z_1, z_2; z_3, z_4)_3 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$
$$(z_1, z_2; z_3, z_4)_4 = \frac{1}{\lambda}, (z_1, z_2; z_3, z_4)_5 = \frac{1}{1 - \lambda}, (z_1, z_2; z_3, z_4)_6 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Sledeće dve teoreme važe nezavisno od definicije dvorazmere. U njihovom dokazu, kao i u nastavku rada, koristiće se prvobitna definicija dvorazmere, koju ćemo ubuduće označavati kao i prvobitno, sa $(z_1, z_2; z_3, z_4)$. Zainteresovan čitalac je pozvan da prouči dokaze koristeći se nekom drugom definicijom.

Teorema 2. *Funkcija $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ je bilinearno preslikavanje akko čuva dvorazmeru.*

Dokaz. $\Rightarrow$) Neka je $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ bilinearno preslikavanje tj. $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
(f(z_1, f(z_2); f(z_3), f(z_4)) &= \frac{f(z_1) - f(z_3)}{f(z_2) - f(z_3)} : \frac{f(z_1) - f(z_4)}{f(z_2) - f(z_4)} = \\
&= \frac{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}}{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}} : \frac{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d}}{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d}} = \\
= \frac{\frac{(az_1+b)(cz_3+d) - (az_3+b)(cz_1+d)}{(cz_1+d)(cz_3+d)}}{\frac{(az_2+b)(cz_3+d) - (az_3+b)(cz_2+d)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}} &: \frac{\frac{(az_1+b)(cz_4+d) - (az_4+b)(cz_1+d)}{(cz_1+d)(cz_4+d)}}{\frac{(az_2+b)(cz_4+d) - (az_4+b)(cz_2+d)}{(cz_2+d)(cz_4+d)}} = \\
&= \frac{(cz_2+d)[(az_1+b)(cz_3+d) - (az_3+b)(cz_1+d)]}{(cz_1+d)[(az_2+b)(cz_3+d) - (az_3+b)(cz_2+d)]} : \\
&\frac{(cz_2+d)[(az_1+b)(cz_4+d) - (az_4+b)(cz_1+d)]}{(cz_1+d)[(az_2+b)(cz_4+d) - (az_4+b)(cz_2+d)]} = \\
= \frac{[(az_1+b)(cz_3+d) - (az_3+b)(cz_1+d)][(az_2+b)(cz_4+d) - (az_4+b)(cz_2+d)]}{[(az_2+b)(cz_3+d) - (az_3+b)(cz_2+d)][(az_1+b)(cz_4+d) - (az_4+b)(cz_1+d)]} &= \\
&= \frac{(acz_1z_3 + adz_1 + bcz_3 + bd) - (acz_1z_3 + adz_3 + bcz_1 + bd)}{(acz_2z_3 + adz_3 + bcz_3 + bd) - (acz_2z_3 + adz_3 + bcz_2 + bd)} \cdot \\
&\frac{(acz_2z_4 + adz_2 + bcz_4 + bd) - (acz_2z_4 + adz_4 + bcz_2 + bd)}{(acz_1z_4 + adz_1 + bcz_4 + bd) - (acz_1z_4 + adz_4 + bcz_1 + bd)} = \\
&= \frac{adz_1 + bcz_3 - adz_3 - bcz_1}{adz_2 + bcz_3 - adz_3 - bcz_2} \cdot \frac{adz_2 + bcz_4 - adz_4 - bcz_2}{adz_1 + bcz_4 - adz_4 - bcz_1} = \\
&= \frac{ad(z_1 - z_3) - bc(z_1 - z_3)}{ad(z_2 - z_3) - bc(z_2 - z_3)} \cdot \frac{ad(z_2 - z_4) - bc(z_2 - z_4)}{ad(z_1 - z_4) - bc(z_1 - z_4)} = \\
&= \frac{(ad-bc)(z_1 - z_3)}{(ad-bc)(z_2 - z3)} \cdot \frac{(ad-bc)(z_2 - z4)}{(ad-bc)(z_1 - z_4)} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z4} = \\
&= \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = (z_1, z_2; z_3, z_4)
\end{aligned}
$$

Zaključujemo da f čuva dvorazmeru.

$\Leftarrow$) Neka $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ čuva dvorazmeru i neka je npr. $z_1 = z$, $z_2 = 1$, $z_3 = 0$, $z_4 = \infty$. Važi $(f(z), f(1); f(0), f(\infty)) = (z, 1; 0, \infty) = z$.

$$\frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)} : \frac{f(z)-f(\infty)}{f(1)-f(\infty)} = z$$
$$\frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)} \cdot \frac{f(1)-f(\infty)}{f(z)-f(\infty)} = z$$
$$\frac{f(z)-f(0)}{f(z)-f(\infty)} = \frac{f(1)-f(0)}{f(1)-f(\infty)} \cdot z$$

$$(f(1)-f(\infty))f(z)-(f(1)-f(\infty))f(0) = (f(1)-f(0))zf(z)-(f(1)-f(0))zf(\infty)$$
$$(f(1)-f(\infty)-(f(1)-f(0))z)f(z) = (f(1)-f(\infty))f(0)-(f(1)-f(0))zf(\infty)$$
$$f(z) = \frac{(f(0)-f(1))f(\infty)z+(f(1)-f(\infty))f(0)}{(f(0)-f(1))z+f(1)-f(\infty)}$$

Dobijeno preslikavanje je bilinearno. Ostaje još da proverimo da li važi uslov $ad-bc \neq 0$.

$ad-bc = (f(0)-f(1))f(\infty)(f(1)-f(\infty))-(f(1)-f(\infty))f(0)(f(0)-f(1)) =$
$(f(0)-f(1))(f(1)-f(\infty))(f(\infty)-f(0)) \neq 0$
pošto važi $f(0) \neq f(1),\ f(1) \neq f(\infty),\ f(\infty) \neq f(0)$, po pretpostavci. ■

Teorema 3. *Dvorazmera $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ je realna akko z_1, z_2, z_3 i z_4 pripadaju uopštenoj kružnici u $\overline{\mathbb{C}}$.*

Dokaz. $\Rightarrow$) Neka je $(z_1, z_2; z_3, z_4) = t, t \in \mathbb{R}$, tj. $(z_1, z_2; z_3, z_4) = (t, 1; 0, \infty) = t$.
Posmatrajmo sledeću funkciju, $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$,
$f(z) = \dfrac{(z-z_3)(z_2-z_4)}{(z-z_4)(z_2-z_3)} = \dfrac{z-z_3}{z_2-z_3} \cdot \dfrac{z_2-z_4}{z-z_4} = \dfrac{z-z_3}{z_2-z_3} : \dfrac{z-z_4}{z_2-z_4} = (z, z_2; z_3, z_4)$.
Iz definicije ove funkcije zaključujemo da je $f(z_1) = (z_1, z_2; z_3, z_4) = t,\ f(z_2) = 1,\ f(z_3) = 0,\ f(z_4) = \infty$. Dakle, preslikavanje f je bilinearno i $f : \{z_1, z_2, z_3, z_4\} \to \{t, 1, 0, \infty\}$. Međutim, to je i f^{-1} bilinearno i $f^{-1} : \{t, 1, 0, \infty\} \to \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Pošto $\{t, 1, 0, \infty\}$ pripadaju uopštenoj kružnici u $\overline{\mathbb{C}}$, odnosno $\overline{\mathbb{R}}$, to možemo primeniti prethodno dokazano kružno svojstvo bilinearnih preslikavanja na preslikavanje f^{-1}, odakle sledi da $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ pripadaju uopštenoj kružnici u $\overline{\mathbb{C}}$.

$\Leftarrow$) Neka z_1, z_2, z_3, z_4 pripadaju uopštenoj kružnici u $\overline{\mathbb{C}}$. Nađimo vrednost dvorazmere. Uočimo bilinearno preslikavanje f t.d. $f(z_2) = 1, f(z_3) = 0$ i $f(z_4) = \infty$. Na osnovu prethodno dokazane teoreme, ovo preslikavanje postoji i jedinstveno je. Sledi $(z_1, z_2; z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)) = (f(z_1), 1; 0, \infty)$. Pošto z_1, z_2, z_3, z_4 pripadaju uopštenoj kružnici u $\overline{\mathbb{C}}$ (po pretpostavci), sledi da isto važi i za $f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)$. Kako $1, 0, \infty \in \overline{\mathbb{R}}$, to je $f(z_1) \in \mathbb{R}$. Nije teško zaključiti da je tada $f(z_1) = (f(z_1), 1; , 0, \infty) = (z_1, z_2; z_3, z_4) \in \mathbb{R}$, čime smo dokazali da je dvorazmera realna. ■

3.4 Klasifikacija bilinearnih preslikavanja

3.4.1 Klasifikacija bilinearnih preslikavanja prema broju fiksnih tačaka

Pošto smo proučili različite osobine bilinearnih preslikavanja, nastavljamo ovo poglavlje sa namerom klasifikovanja tih preslikavanja, u odnosu na broj fiksnih tačaka.

Definicija 8. *Bilinearna preslikavanja f_1 i f_2 su konjugovana*[12] *ako postoji bilinearno preslikavanje g tako da važi*

$$f_1 = g^{-1} \circ f_2 \circ g \; (f_2 = g \circ f_1 \circ g^{-1}).$$

Iako smo termin fiksna (nepokretna) tačka koristili u razmatranju inverzije pod predpostavkom da čitalac zna šta ona predstavlja, pokazuje se veoma pogodnim definisanje tog termina na ovom mestu, a sa ciljem eliminisanja mogućih nedoumica.

Definicija 9. *Fiksna (nepokretna) tačka bilinearnog preslikavanja $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ je tačka $z \in \overline{\mathbb{C}}$ tako da važi $f(z) = z$.*

Lema 2. *Konjugovana bilinearna preslikavanja f_1 i f_2 imaju jednak broj fiksnih tačaka.*

Dokaz. Tačka z je fiksna tačka preslikavanja f_1 ako i samo ako $f_1(z) = z$
ako i samo ako $(g^{-1} \circ f_2 \circ g)(z) = z$
ako i samo ako $f_2(g(z)) = g(z)$ akko $g(z)$ je fiksna tačka preslikavanja f_2
ako i samo ako f_1 i f_2 imaju jednak broj fiksnih tačaka. ■

Podsetimo se načina na koji smo definisali bilinearna preslikavanja u (2). Pošto je $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$, to je ∞ fiksna tačka akko $c = 0$. Čini se prirodnim da naše razmatranje broja fiksnih tačaka bilinearnih preslikavanja granamo na dva slučaja: $c = 0$ i $c \neq 0$.

$c = 0: \; f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$, $z = \infty$ je fiksna tačka

1) $\dfrac{a}{d} = 1$

$$f(z) = z + \frac{b}{d}$$

1.1) $b = 0$

$$f(z) = z$$

1.2) $b \neq 0$

$$f(z) = z + \frac{b}{d} \neq z$$

2) $\dfrac{a}{d} \neq 1$

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$$

$$\left(\frac{a}{d} - 1\right) z = -\frac{b}{d} \; / \cdot d$$

$$(a-d)\,z = -b$$

[12] Čita se kon - jugovana.

Ne računajući identičko preslikavanje, koje ima beskonačno fiksnih tačaka, u slučaju 1.2) postoji samo jedna fiksna tačka, ∞, dok u slučaju 2) ima dve fiksne tačke, ∞ i $z = \dfrac{b}{d-a}$.

$c \neq 0: \ f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $z = \infty$ nije fiksna tačka.

$$f(z) = z \ \textit{ako i samo ako} \ \frac{az+b}{cz+d} = z \ \textit{ako i samo ako}$$
$$az + b = cz^2 + dz \ \textit{ako i samo ako} \ cz^2 + z(d-a) - b = 0.$$

Fiksne tačke su rešenja kvadratne jednačine $cz^2 + z(d-a) - b = 0$, tj.
$z_{1,2} = \dfrac{a-d}{2c} \pm \sqrt{\dfrac{(a-d)^2 + 4bc}{4c^2}}$. Primetimo da smo dokazali sledeću teoremu.

Teorema 4. *Bilinearna preslikavanja, koja nisu identitet, imaju jednu ili dve fiksne tačke.* ∎

Ako je $z = \infty$ jedina fiksna tačka preslikavanja f, to je $f(z) = z + B$, $B \neq 0$. Takođe, kada je pored $z = \infty$ još jedna tačka fiksna, ona mora biti $z = \dfrac{b}{d-a}$. Specijalno, za $b = 0$, fiksna je tačka $z = 0$. Zaključujemo da bilinearno preslikavanje koji ostavlja fiksnim tačke $z = \infty$ i $z = 0$ ima oblik $f(z) = Az, \ A \neq 0, \ A \neq 1$.

Teorema 5. 1. *Ako f ima dve različite fiksne tačke, tada je f konjugovano sa $g(z) = \lambda z, \ z \in \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$,*

2. *Ako f ima jednu fiksnu tačku, tada je f konjugovana sa $g(z) = z + 1$.*

Dokaz. 1. Neka su z_1 i z_2 ($z_1 \neq z_2$) fiksne tačke bilinearnog preslikavanja f. Konstruišemo bilinearno preslikavanje L t.d. $L(z_1) = 0$ i $L(z_2) = \infty$ i posmatramo preslikavanje $g(z) = (L \circ f \circ L^{-1})(z)$.

$$L(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} = w \implies z - z_1 = w(z - z_2)$$
$$z - z_1 = wz - wz_2, \ wz_2 - z_1 = z(w-1)$$
$$z = \frac{wz_2 - z_1}{w-1}, \ L^{-1}(z) = \frac{z \cdot z_2 - z_1}{z-1}$$
$$g(0) = L(f(L^{-1}(0))) = L(f(z_1)) = L(z_1) = 0$$
$$g(\infty) = L(f(L^{-1}(\infty))) = L(f(z_2)) = L(z_1) = \infty$$

Na osnovu prethodno izloženog postoji $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$ tako da je $g(z) = \lambda z$ i $g = L \circ f \circ L^{-1}$.

Napomena: Preslikavanje L nije jedinstveno, ali preslikavanje g jeste!

Neka su L_1 i L_2 dva bilinearna preslikavanja t.d. $L_1(z_1) = L_2(z_1) = 0$ i $L_1(z_2) = L_2(z_2) = \infty$.

$$(L_1 \circ f \circ L_1^{-1})(0) = L_1(f(z_1)) = L_1(z_1) = 0$$
$$(L_2 \circ f \circ L_2^{-1})(0) = L_2(f(z_1)) = L_2(z_1) = 0$$
$$(L_1 \circ f \circ L_1^{-1})(\infty) = L_1(f(z_2)) = L_1(z_2) = \infty$$
$$(L_2 \circ f \circ L_2^{-1})(\infty) = L_2(f(z_2)) = L_2(z_2) = \infty$$
$$\implies L_1 \circ f \circ L_1^{-1} = g = L_2 \circ f \circ L_2^{-1}$$

2. Neka je z_1 fiksna tačka bilinearnog preslikavanja f. Postupamo analogno prethodnom dokazu, samo dva puta.

$$L(z_1) = \infty,\ L(z) = \frac{1}{z - z_1} = w \ \ sledi\ \ 1 = w(z - z_1),\ 1 = wz - wz_1$$
$$1 + wz_1 = wz,\ z = \frac{1 + wz_1}{w},\ L^{-1}(z) = \frac{z \cdot z_2 + 1}{z}$$
$$h(\infty) = L(f(L^{-1}(\infty))) = L(f(z_1)) = L(z_1) = \infty$$
$$\implies\ postoji\ \ B \neq 0,\ h(z) = z + B,\ h(z) = L \circ f \circ L^{-1}$$
$$\implies\ b \neq 0,\ P(z) = \frac{1}{b}z,\ P^{-1}(z) = bz,\ (P \circ h \circ P^{-1})(z) = g(z) = z + 1.$$

Zaključujemo da je traženo preslikavanje $K(z) = (P \circ L)(z) = \dfrac{1}{b(z - z_1)}$ za koje važi da je $g = K \circ f \circ K^{-1}$. Time je naš dokaz završen. ■

Definicija 10. *(Klasifikacija bilinearnih preslikavanja) Bilinearna preslikavanja, koja nisu identitet, imaju jednu ili dve fiksne tačke. Ako imaju jednu fiksnu tačku, ona su konjugovana sa translacijom $T_1(z) = z + 1$ i nazivaju se **parabolička**. Ona koja imaju dve fiksne tačke konjugovana su sa preslikavanjem $g(z) = \lambda z$ i pripadaju jednoj od 3 klase preslikavanja:*

- ***hiperbolička*** - $\lambda \in (0, +\infty) \backslash \{1\}$, *tj.* $g(z)$ *je homotetija,*
- ***eliptička*** - $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R} \backslash \{2k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$, *tj.* $g(z)$ *je rotacija,*
- ***loksodromička*** - *nisu ni hiperbolička, ni eliptička,* $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$, $|\lambda| \neq 1,\ \theta \in \mathbb{R} \backslash \{2k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$, *tj.* $g(z)$ *je kompozicija homotetije i rotacije.*

3.4.2 Klasifikacija bilinearnih preslikavanja pomoću matrica

Ako koeficijente bilinearnog preslikavanja prikažemo u obliku 2×2 matrice i uporedimo koeficijente kompozicije 2 bilinearna preslikavanja sa koeficijentima matrice proizvoda, uviđamo nešto vrlo zanimljivo.

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1},\ f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

$$(f_2 \circ f_1)(z) = f_2(f_1(z)) = \frac{a_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{\dfrac{a_2(a_1 z + b_1) + b_2(c_1 z + d_1)}{c_1 z + d_1}}{\dfrac{c_2(a_1 z + b_1) + d_2(c_1 z + d_1)}{c_1 z + d_1}} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 z + a_2 b_1 + b_2 c_1 z + b_2 d_1}{a_1 c_2 z + b_1 c_2 + c_1 d_2 z + d_1 d_2} = \frac{z \cdot (a_1 a_2 + b_2 c_1) + a_2 b_1 + b_2 d_1}{z \cdot (a_1 c_2 + d_2 c_1) + b_1 c_2 + d_1 d_2}$$

$$A(f_2 \circ f_1) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ a_1 c_2 + d_2 c_1 & b_1 c_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

$$A(f_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, A(f_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$A(f_2) \cdot A(f_1) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + c_1 d_2 & b_1 c_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

Zaista, važi $A(f_2 \circ f_1) = A(f_2) \cdot A(f_1)$! Naravno, pošto važi za kompoziciju 2 preslikavanja, to važi za kompoziciju proizvoljno mnogo, pošto znamo da su bilinearna preslikavanja u odnosu na kompoziciju preslikavanja nekomutativna grupa (bitan je raspored). Pošto smo ustanovili vezu između matrice i bilinearnog preslikavanja, razmotrićemo dve najvažnije funkcije koje se tiču matrica, determinantu i trag matrice. One će nam pomoći da produbimo prethodnu klasifikaciju.

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ A(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \det A(f) = ad - bc,\ ad - bc \neq 0$$

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\alpha}{\alpha} \cdot \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\alpha a z + b\alpha}{\alpha c z + d\alpha},\ A(f) = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\det A(f) = \alpha^2 (ad - bc)$$

Primećujemo da u opštem slučaju determinanta bilinearnog preslikavanja nije jednoznačno određena. Zbog toga je potrebno normalizovati bilinearno preslikavanje.

$$\det A(f) = 1 \iff \alpha^2 (ad - bc) = 1$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{ad - bc},\ \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{ad - bc}}$$

Jedina nedoumica ostaje izbor predznaka, ali to neće predstavljati veliki problem. Od sada nadalje podrazumevamo da su bilinearna preslikavanja normalizovana. Uvedimo trag matrice $A(f)$ normalizovanog bilinearnog preslikavanja $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc = 1$ sa $\mathrm{Tr}(A(f)) = a+d$. Trag bilinearnog preslikavanja, kao i njegovi koeficijenti, određen je do na predznak. Zbog toga nam je daleko zanimljiviji njegov kvadrat, $\tau(A(f)) = (a+d)^2$. Razmatranje ovog preslikavanja pokazaće se veoma plodonosnim.

Propozicija 2. $\tau(A(f_2) \cdot A(f_1)) = \tau(A(f_1) \cdot A(f_2))$.

Dokaz.

$$A(f_2) \cdot A(f_1) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + c_1d_2 & b_1c_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

$$\tau(A(f_2) \cdot A(f_1)) = (a_1a_2 + b_2c_1 + c_2b_1 + d_1d_2)^2 = I$$

$$A(f_1) \cdot A(f_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + c_2d_1 & b_2c_1 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

$$\tau(A(f_1) \cdot A(f_2)) = (a_1a_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1d_2)^2 = II$$
$$I = II$$

■

Propozicija 3. *Ako je f_1 konjugovano sa f_2, sledi da je $\tau(A(f_1)) = \tau(A(f_2))$.*

Dokaz. Na osnovu gore pomenutog razmatranja važi:

$$f_2 = g \circ f_1 \circ g^{-1} \implies \tau(A(f_2)) = \tau(A(g \circ f_1 \circ g^{-1})) = \tau(A(g) \cdot A(f_1) \cdot A(g^{-1})).$$

Pošto je kompozicija bilinearnih preslikavanja takođe bilinearno preslikavanje, to je $p = f_1 \circ g^{-1}$ bilinearno preslikavanje, tj. $A(p) = A(f_1 \circ g^{-1}) = A(f_1) \cdot A(g^{-1})$, na osnovu razmatranja. Sledi, na osnovu propozicije,
$\tau(A(f_2)) = \tau(A(g) \cdot A(p)) = \tau(A(p) \cdot A(g)) = \tau(A(f_1) \cdot A(g^{-1}) \cdot A(g))$.
Pošto je $g^{-1} \circ g = Id$, to je $A(g^{-1}) \cdot A(g) = A(g^{-1} \circ g) = A(Id) = E$. Konačno, $\tau(A(f_2)) = \tau(A(f_1) \cdot E) = \tau(A(f_1))$. ■

Teorema 6. *Normalizovano bilinearno preslikavanje, koje nije identitet,* $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc=1$ *je*

- ***parabolično*** $\iff$ $\tau(A(f)) = 4$,
- ***eliptično*** $\iff$ $\tau(A(f)) \in [0,4)$,
- ***hiperbolično*** $\iff$ $\tau(A(f)) \in (4,+\infty)$,
- ***loksodromično*** $\iff$ $\tau(A(f)) \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = \{z|\ z\in\mathbb{R}, z\geq 0\}$.

Dokaz. Neka normalizovano bilinearno preslikavanje $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc=1$ ima jednu fiksnu tačku, što znači da je konjugovano sa translacijom $T_1(z) = z+1$. Na osnovu prethodne dve propozicije zaključujemo

$$\tau(A(f)) = \tau(A(T_1)) = \tau\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = (1+1)^2 = 2^2 = 4.$$

Normalizovano bilinearno preslikavanje koje ima dve fiksne tačke ima jedan od dva oblika, $f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$, $\dfrac{a}{d} \neq 1$, $ad = 1$ ili $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc=1$. U oba slučaja moraćemo posebno da razmatramo sve tri vrste mogućih preslikavanja.

1. $f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$, $\dfrac{a}{d} \neq 1$, $ad = 1 \implies d = \dfrac{1}{a} \implies f(z) = a^2z + ba$.

   Tačke $\dfrac{b}{d-a} = \dfrac{b}{\dfrac{1}{a}-a}$ i ∞ su fiksne. Postupamo isto kao što smo postupali prilikom prve klasifikacije. Preslikavanje $L(z) = z - \dfrac{b}{\dfrac{1}{a}-a} = z - \dfrac{ba}{1-a^2}$ je takvo da važi $L\left(\dfrac{b}{\dfrac{1}{a}-a}\right) = 0$, $L(\infty) = \infty$, $L^{-1}(z) = z + \dfrac{ba}{1-a^2}$.

$$g(z) = (L\circ f\circ L^{-1})(z) = L\left(f(z+\frac{ba}{1-a^2})\right) = L\left(a^2(z+\frac{ba}{1-a^2}) + ba\right) =$$
$$= a^2\left(z+\frac{ba}{1-a^2}\right) + ba - \frac{ba}{1-a^2} = a^2z + \frac{ba^3}{1-a^2} + ba - \frac{ba}{1-a^2} = a^2z +$$
$$+\frac{ba^3 + ba(1-a^2) - ba}{1-a^2} = a^2z + \frac{ba^3 + ba - ba^3 - ba}{1-a^2} = a^2z,\ \lambda = a^2$$
$$g(z) = a^2z = \frac{a\cdot z + 0}{0\cdot z + \dfrac{1}{a}}$$

   (a) **eliptično**
   $|\lambda| = 1,\ \lambda \neq 1 \iff |a^2| = 1,\ a^2 \neq 1 \iff |a| = 1,\ a \neq \pm 1$

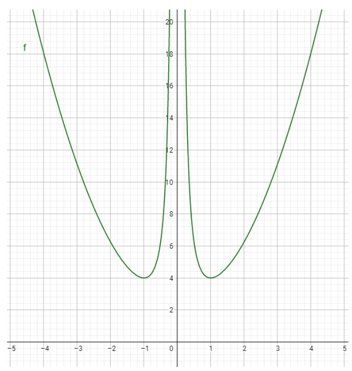
$\implies a = e^{i\theta},\ \theta \in (0, \pi)$

$\tau(A(f)) = \tau(A(g)) = \tau\left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\right) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 = 4\cos^2\theta,$

$\theta \in (0, \pi) \implies \tau(A(f)) \in [0, 4)$

(b) **hiperboličko**

$$\lambda \in (0, +\infty)\backslash\{1\} \iff a^2 \in (0, +\infty)\backslash\{1\} \iff a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\}$$
$$\tau(A(f)) = \tau(A(g)) = \tau\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2$$
$$a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\} \implies \tau(A(f)) \in (4, +\infty)$$

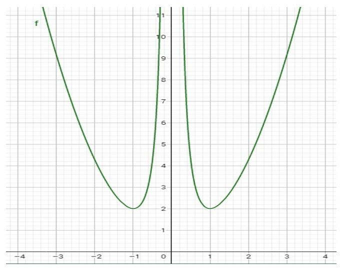


Slika 9: $f(x) = (x + \frac{1}{x})^2$

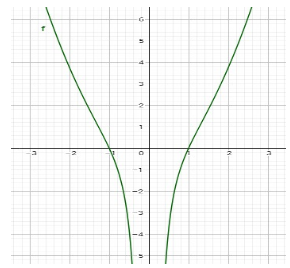
(c) **loksodromičko**

$$\lambda = a^2 \in \mathbb{C},\ |\lambda| \neq 1 \iff |a^2| \neq 1 \iff |a| \neq 1$$
$$\iff a = \rho e^{i\theta},\ \theta \in (0, \pi),\ \rho \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$$
$$\tau(A(f)) = \tau(A(g)) = \tau\left(\begin{pmatrix} \rho e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho}e^{-i\theta} \end{pmatrix}\right) = \left(\rho e^{i\theta} + \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}\right)^2 =$$
$$= \rho^2 e^{2i\theta} + 2 + \frac{1}{\rho^2}e^{-2i\theta} = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + 2 + \frac{1}{\rho^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta) =$$
$$= \rho^2\cos 2\theta + i\rho^2\sin 2\theta + 2 + \frac{1}{\rho^2}\cos 2\theta - i\frac{1}{\rho^2}\sin 2\theta =$$
$$= \cos 2\theta \cdot \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) + 2 + i\sin 2\theta \cdot \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)$$

Na osnovu grafika sledećih funkcija zaključujemo da je
$\tau(A(f)) \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$.



Slika 10: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$



Slika 11: $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

2. $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$

   Fiksne tačke su $z_{1,2} = \dfrac{a-d}{2c} \pm \sqrt{\dfrac{(a-d)^2 + 4bc}{4c^2}}$. Pošto je $(a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4ad + 4bc = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a+d)^2 - 4$, važi

$$z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}.$$

$$L(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2},\ L^{-1}(z) = \frac{z_2 \cdot z - z_1}{z - 1}$$

$$g(z) = (L \circ f \circ L^{-1})(z) = L\left(f\left(\frac{z_2 \cdot z - z_1}{z-1}\right)\right) = L\left(\frac{a\dfrac{z_2 \cdot z - z_1}{z-1} + b}{c\dfrac{z_2 \cdot z - z_1}{z-1} + d}\right) =$$

$$= L\left(\frac{a(z_2 z - z_1) + b(z-1)}{c(z_2 z - z_1) + d(z-1)}\right) = \frac{\dfrac{a(z_2 z - z_1) + b(z-1)}{c(z_2 z - z_1) + d(z-1)} - z_1}{\dfrac{a(z_2 z - z_1) + b(z-1)}{c(z_2 z - z_1) + d(z-1)} - z_2} =$$

$$= \frac{a(z_2 z - z_1) + b(z-1) - z_1(c(z_2 z - z_1) + d(z-1))}{a(z_2 z - z_1) + b(z-1) - z_2(c(z_2 z - z_1) + d(z-1))} =$$

$$= \frac{az_2 z - az_1 = bz - b - z_1(cz_2 z - cz_1 + dz - d)}{az_2 z - az_1 + bz - b - z_2(cz_2 z - cz_1 + dz - d)} =$$

$$= \frac{z \cdot (az_2 + b) - (az_1 + b) - z_1(z \cdot (cz_2 + d) - (cz_1 + d))}{z \cdot (az_2 + b) - (az_1 + b) - z_2(z \cdot (cz_2 + d) - (cz_1 + d))} =$$

$$= \frac{z \cdot ((az_2 + b) - z_1(cz_2 + d)) - (az_1 + b) + z_1(cz_1 + d))}{z \cdot ((az_2 + b) - z_2(cz_2 + d)) - (az_1 + b) + z_2(cz_1 + d)} =$$

$$= \frac{(az_2 + b) - z_1(cz_2 + d)}{z_2(cz_1 + d) - (az_1 + b)} z = \frac{z_2(cz_2 + d) - z_1(cz_2 + d)}{z_2(cz_1 + d) - z_1(cz_1 + d)} z =$$

$$= \frac{(z_2 - z_1)(cz_2 + d)}{(z_2 - z_1)(cz_1 + d)} z = \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} z = \lambda z$$

$$g(z) = \lambda z,\ \lambda = \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} = \frac{c \cdot \dfrac{a - d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} + d}{c \cdot \dfrac{a - d + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} + d} =$$

$$= \frac{a - d - \sqrt{(a+d)^2 - 4} + 2d}{a - d + \sqrt{(a+d)^2 - 4} + 2d} = \frac{a + d + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}$$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{a + d + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}} + \frac{a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{a + d + \sqrt{(a+d)^2 - 4}} =$$

$$= \frac{(a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 4})^2 + (a + d + \sqrt{(a+d)^2 - 4})^2}{4} =$$

$$= \frac{2(a+d)^2 + 2((a+d)^2 - 4)}{4} = \frac{4(a+d)^2 - 8}{4} = (a+d)^2 - 2$$

Stoga je $\tau(A(f)) = \tau(A(g)) = \lambda + \dfrac{1}{\lambda} + 2.$

(a) **eliptičko**

$$|\lambda| = 1,\ \lambda \neq 1,\ \lambda = e^{i\theta},\ \theta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi]$$

$$\tau(A(f)) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 2 = 2\cos\theta + 2 = 2(\cos\theta + 1) = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\implies \tau(A(f)) \in [0, 4)$$

(b) **hiperboličko**

$$\lambda \in (0, +\infty) \backslash \{1\} \implies \lambda + \frac{1}{\lambda} > 2$$

$$\tau(A(f)) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 > 2 + 2 = 4 \implies \tau(A(f)) \in (4, +\infty)$$

(c) **loksodromičko**

$$\lambda = \rho e^{i\theta},\ \rho \neq 1,\ \theta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi]$$

$$\tau(A(f)) = \rho e^{i\theta} + \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} + 2 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta) + 2 =$$

$$\rho\cos\theta + i\rho\sin\theta + \frac{1}{\rho}\cos\theta - i\frac{1}{\rho}\sin\theta + 2 = \cos\theta\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + 2 + i\sin\theta\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) =$$

$$\implies \tau(A(f)) \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^+.$$

$\blacksquare$

4 Modeli hiperboličke planimetrije

4.1 Poenkareov disk model

Lema 3. *(Švarcova[13] lema) Neka je $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $|f(z)| \leq 1$, za svako $z \in \mathbb{D}$ i $f(0) = 0$. Tada važi $|f(z)| \leq |z|$, za svako $z \in \mathbb{D}$ i $|f'(0)| \leq 1$. Ako važi $|f(z)| = |z|$, za svako $z \in \mathbb{D}$ ili $|f'(0)| = 1$ to je $f(z) = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z}$. Kako je $\lim_{z\to 0} \varphi(z) = \lim_{z\to 0} \dfrac{f(z)}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z)-0}{z-0} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z)-f(0)}{z-0} = f'(0)$, to je $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Označimo sa $D_r = \{z|\ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r\}$ i $T_r = \{z|\ z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ krug i kružnicu poluprečnika r, respektivno. Pošto važi $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, to sigurno za restrikciju funkcije $\varphi : \overline{D_r} \longrightarrow \mathbb{C}$ važi $\varphi \in \mathcal{H}(D_r)$, $\varphi \in C(\overline{D_r})$. Tada, na osnovu principa maksimuma modula, funkcija $|\varphi| : \overline{D_r} \longrightarrow \mathbb{R}$ dostiže maksimum na T_r, tj.

$$|\varphi(z) = \left|\frac{f(z)}{z}\right| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}, \quad \textit{za svako } z \in \overline{D_r}.$$

Fiksirajmo tačku $z_0 \in \mathbb{D}$ t.d. za svako r, $|z_0| \leq r < 1$ odakle sledi $z_0 \in \overline{D_r}$ i $|\varphi(z_0)| \leq \dfrac{1}{r}$. Kada pustimo r da teži 1, to je $|\varphi(z_0)| \leq \lim_{r\to 1^-} \dfrac{1}{r}$, odnosno $|\varphi(z_0)| \leq 1$. Ako je $z_0 \neq 0$, to je $|\varphi(z_0)| = \dfrac{|f(z_0)|}{|z_0|} \leq 1 \iff |f(z_0)| \leq |z_0|$. Ako je $z_0 = 0$, sledi $|\varphi(0)| = |f'(0)| \leq 1$. Ako je $|\varphi(z)| = 1$, za neko $z \in \mathbb{D}$ sledi na osnovu teoreme Liuvila[14] da je $|\varphi| \equiv 1$, odnosno $\varphi(z) = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tj. $f(z) = e^{i\alpha}z$. ∎

U nastavku rada sledi lanac lema i teorema koje se oslanjaju na Švarcovu lemu i koje se mogu učiniti veoma zamornim i (ne daj Bože) nepotrebnim. Čitalac se moli da se naoruža strpljenjem, jer će nagrada biti vredna truda. Kao posledicu tog lanca tvrđenja dobićemo metriku u Poenkareovom disk modelu.

Teorema 7. *Ako je $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, tada je $\dfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \dfrac{1}{1-|z|^2}$, za svako $z \in \mathbb{D}$. Jednakost važi akko $f \in Aut(\mathbb{D})$.*

Dokaz. Podsetimo se opšteg oblika automorfizma oblasti $\mathbb{D}$, $f(z) = e^{i\alpha} \cdot \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$. Pogodno je označiti sa $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$, pošto će dato preslikavanje imati velikog udela u radu.

Uočimo proizvoljnu tačku $z \in \mathbb{D}$ i preslikavanje $F = \varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z}$,

---

[13] Karl Herman Amandus Švarc (nem. Karl Hermann Amandus Schwarz; 25.1.1843. - 30.11.1921.) - bio je nemački matematičar, poznat po svojim delima na polju kompleksne analize.

[14] Žozef Liuvil (franc. Joseph Liouville; 24.3.1809. - 8.9.1882.) - francuski matematičar.

$F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ i $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ kao kompozicija preslikavanja sa istim osobinama. Očigledno $|F(\xi)| \leq 1$.

$$F(0) = \varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z}(0) = \varphi_{f(z)}(f(\varphi_{-z}(0)) = \varphi_{f(z)}(f(z)) = 0.$$

Na osnovu Švarcove leme važi $|F(\xi)| = |(\varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z}(\xi))| \leq |\xi|$, *za svako* $\xi \in \mathbb{D}$ i $|F^{'}(0)| \leq 1$.

$$|F^{'}(0)| = |(\varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z})^{'}(0)| = |\varphi^{'}_{f(z)}(f(\varphi_{-z}(0))) \cdot f^{'}(\varphi_{-z}(0)) \cdot \varphi^{'}_{-z}(0)| =$$
$$= \left[\varphi^{'}_a(z) = \frac{1 - \overline{a}z + (z-a)\overline{a}}{(1-\overline{a}z)^2} = \frac{1 - \overline{a}z + \overline{a}z - |a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}\right] =$$
$$= \left|\frac{1 - |f(z)^2|}{(1 - \overline{f(z)}f(z))^2} \cdot f^{'}(z) \cdot \frac{1 - |-z|^2}{(1 - \overline{(-z)} \cdot 0)^2}\right| = \left|\frac{1 - |f(z)|^2}{(1 - |f(z)|^2)^2} \cdot f^{'}(z)(1 - |z|^2)\right| =$$
$$= \left|\frac{f^{'}(z)(1-|z|^2)}{1 - |f(z)|^2}\right| \leq 1 \iff \frac{|f^{'}(z)(1-|z|^2)|}{|1 - |f(z)|^2|} \leq 1 \iff \frac{|f^{'}(z)||1-|z|^2|}{|1 - |f(z)|^2|} \leq 1.$$

Na osnovu uslova teoreme jasno je da je $|1 - |z|^2| = 1 - |z|^2$ i $|1 - |f(z)|^2| = 1 - |f(z)|^2$ odakle sledi $\dfrac{|f^{'}(z)|(1-|z|^2)}{1-|f(z)|^2} \leq 1 \iff \dfrac{|f^{'}(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \dfrac{1}{1-|z|^2}$. Time smo dokazali prvi deo teoreme.

Ako je $|F^{'}(0)| = 1$, to je $\dfrac{|f^{'}(z)|}{1-|f(z)|^2} = \dfrac{1}{1-|z|^2}$ i $F(\xi) = e^{i\alpha}\xi$, za svako $\xi \in \mathbb{D}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Suprotno, ako je $F(\xi) = e^{i\alpha}\xi$, za svako $\xi \in \mathbb{D}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, to je $|F^{'}(0)| = 1$ i $\dfrac{|f^{'}(z)|}{1-|f(z)|^2} = \dfrac{1}{1-|z|^2}$. Dakle, važi ekvivalencija. Dokažimo još da to mora da znaži da je $f \in Aut(\mathbb{D})$.

Neka je $F(\xi) = e^{i\alpha}\xi$, $\alpha \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{D}$. Prema prethodnom razmatranju to je ekvivalentno sa $|F^{'}(0)| = 1$ i $\dfrac{|f^{'}(z)|}{1-|f(z)|^2} = \dfrac{1}{1-|z|^2}$. Međutim, važi sledeće.

$$F(\xi) = (\varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z})(\xi) \iff e^{i\alpha} Id = \varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z} \;/ \circ \varphi_z$$
$$e^{i\alpha} \circ \varphi_z = \varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z} \;/ (\varphi_{f(z)})^{-1} \circ \iff f = (\varphi_{f(z)})^{-1} \circ e^{i\alpha} Id \circ \varphi_z.$$

Potrebno je naći $\varphi_a^{-1}(z)$.

$$\varphi_a(z) = w = \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \iff w(1-\overline{a}z) = z - a \iff$$
$$\iff w - w\overline{a}z = z - a \iff w + a = z \cdot (1 + \overline{a}w) \iff z = \frac{w+a}{1+\overline{a}w}$$
$$\varphi_a^{-1}(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z} = \frac{z-(-a)}{1-\overline{(-a)}z} = \varphi_{-a}(z)$$

To povlači da je $f(\xi) = \varphi_{-f(z)}(e^{i\alpha} Id(\varphi_z(\xi))) = \varphi_{-f(z)}(e^{i\alpha}\varphi_z(\xi))$, a pošto je opšti oblik bilinearnog automorfizma oblasti $\mathbb{D}$ dat sa $f(z) = A \cdot \varphi_b(z)$, to je

$f \in Aut(\mathbb{D})$. Ako pokažemo još da iz $f \in Aut(\mathbb{D})$ sledi $\dfrac{|f^{'}(z)|}{1-|f(z)|^2} = \dfrac{1}{1-|z|^2}$, to je dokaz naše teoreme završen.
Neka je $f \in Aut(\mathbb{D})$, tj. $f(z) = e^{i\alpha} \cdot \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$.

$$f^{'}(z) = e^{i\alpha}\varphi_a^{'}(z) = e^{i\alpha} \cdot \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}$$

$$|f^{'}(z)| = \left|e^{i\alpha} \cdot \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}\right| = |e^{i\alpha}| \cdot \left|\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}\right| = \frac{|1-|a|^2|}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}$$

$$1-|f(z)|^2 = 1 - \left|e^{i\alpha} \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = 1 - \left|e^{i\alpha}\right|^2 \cdot \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = 1 - \frac{|z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{|1-\overline{a}z|^2 - |z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}$$

$$\frac{|f^{'}(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} \cdot \frac{|1-\overline{a}z|^2}{|1-\overline{a}z|^2 - |z-a|^2} = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2 - |z-a|^2} =$$

$$= \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) - (z-a)(\overline{z}-\overline{a})} = \frac{1-|a|^2}{1-a\overline{z}-\overline{a}z+|a|^2|z|^2-|z|^2+\overline{a}z+a\overline{z}-|a|^2} =$$

$$= \frac{1-|a|^2}{1-|a|^2-|z|^2+|a|^2|z|^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-|a|^2)(1-|z|^2)} = \frac{1}{1-|z|^2}$$

■

Lema 4. *Ako je $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tada je $|\varphi_{f(z)}(f(w))| \le |\varphi_z(w)|$, za svako $z, w \in \mathbb{D}$. Jednakost važi akko $f \in Aut(\mathbb{D})$.*

Dokaz. Funkcija $F = \varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z}$ pod datim uslovima zadovoljava uslove Švarcove leme, pa za proizvoljnu tačku $w \in \mathbb{D}$ važi $\varphi_z(w) \in \mathbb{D}$ i $|F(\varphi_z(w))| \le |\varphi_z(w)|$. Naravno, to je $|(\varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z})(\varphi_z(w))| \le |\varphi_z(w)|$ akko $|\varphi_{f(z)}(f(w))| \le |\varphi_z(w)|$, čime smo dokazali lakši deo leme. Nastavak dokaza odigrava se u dve etape. Prvo ćemo dokazati $|F(\xi)| = |\xi|$ akko $|\varphi_{f(z)}(f(w))| = |\varphi_z(w)|$ a zatim $|\varphi_{f(z)}(f(w))| = |\varphi_z(w)|$ akko $f \in Aut(\mathbb{D})$ i dokaz će slediti na osnovu tranzitivnosti.

1. $|F(\xi)| = |\xi|$ akko $|\varphi_{f(z)}(f(w))| = |\varphi_z(w)|$

   $\Longrightarrow)$

   $$|F(\xi)| = |\xi| \text{ } akko \text{ } |F(\varphi_z(w))| = |\varphi_z(w)|, \ \forall w \in \mathbb{D}$$
   $$akko \text{ } |(\varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z})(\varphi_z(w))| = |\varphi_z(w)| \text{ } akko \text{ } |\varphi_{f(z)}(f(w))| = |\varphi_z(w)|$$

   $\Longleftarrow)$
   $|\varphi_{f(z)}(f(w))| = |\varphi_z(w)|$ akko $|(\varphi_{f(z)} \circ f)(w)| = |\varphi_z(w)|$. Iz načina konstruisanja funkcije F jasno je da je $F \circ \varphi_z = \varphi_{f(z)} \circ f$. Neka je $\xi \in \mathbb{D}$ proizvoljna tačka i $w = \varphi_{-z}(\xi)$, tj. $\xi = \varphi_z(w)$.

   $$|F(\xi)| = |F(\varphi_z(w))| = |(\varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z})(\varphi_z(w))| =$$
   $$= |(\varphi_{f(z)} \circ f)(w)| = |\varphi_{f(z)}(f(w))| = |\varphi_z(w)| = |\xi|.$$

2. $|\varphi_{f(z)}(f(w))| = |\varphi_z(w)|$ akko $f \in Aut(\mathbb{D})$

$\Longrightarrow)$
$|\varphi_{f(z)}(f(w))| = |\varphi_z(w)|$ akko $|F(\xi)| = |\xi|$, tj. $F = e^{i\alpha}Id$ odakle sledi $f = \varphi_{-f(z)}(e^{i\alpha}Id \circ \varphi_{-z})$, iz čega zaključujemo $f \in Aut(\mathbb{D})$.

$\Longleftarrow)$
$f \in \mathbb{D} \implies f(z) = e^{i\alpha} \cdot \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$

$$\varphi_{f(z)}(f(w)) = \frac{f(w)-f(z)}{1-\overline{f(z)}f(w)} = \frac{e^{i\alpha}\cdot\frac{w-a}{1-\overline{a}w} - e^{i\alpha}\cdot\frac{z-a}{1-\overline{a}z}}{1-\overline{e^{i\alpha}\cdot\frac{z-a}{1-\overline{a}z}}\cdot e^{i\alpha}\cdot\frac{w-a}{1-\overline{a}w}} =$$

$$= \frac{e^{i\alpha}\cdot\left(\frac{w-a}{1-\overline{a}w} - \frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)}{1-e^{-i\alpha}\cdot\frac{\overline{z}-\overline{a}}{1-\overline{z}a}\cdot e^{i\alpha}\cdot\frac{w-a}{1-\overline{a}w}} = e^{i\alpha}\cdot\frac{\frac{(w-a)(1-\overline{a}z)-(z-a)(1-\overline{a}w)}{(1-\overline{a}w)(1-\overline{a}z)}}{1-\frac{(\overline{z}-\overline{a})(w-a)}{(1-\overline{a}z)(1-\overline{a}w)}} =$$

$$= e^{i\alpha}\cdot\frac{\frac{(w-a)(1-\overline{a}z)-(z-a)(1-\overline{a}w)}{(1-\overline{a}w)(1-\overline{a}z)}}{\frac{(1-a\overline{z})(1-\overline{a}w)-(\overline{z}-\overline{a})(w-a)}{(1-\overline{a}z)(1-\overline{a}w)}} =$$

$$e^{i\alpha}\cdot\frac{w-w\overline{a}z-a+|a|^2z-z+zw\overline{a}+a-|a|^2w}{1-\overline{a}w-a\overline{z}+|a|^2w\overline{z}-w\overline{z}+a\overline{z}+\overline{a}w-|a|^2}\cdot\frac{1-a\overline{z}}{1-\overline{a}z} =$$

$$e^{i\alpha}\cdot\frac{w-z+|a|^2z-|a|^2w}{1-w\overline{z}+|a|^2w\overline{z}-|a|^2}\cdot\frac{1-a\overline{z}}{1-\overline{a}z} = e^{i\alpha}\cdot\frac{(w-z)(1-|a|^2)(1-a\overline{z})}{(1-\overline{z}w)(1-|a|^2)(1-\overline{a}z)} =$$

$$\implies \varphi_{f(z)}(f(w)) = e^{i\alpha}\cdot\frac{(w-z)(1-a\overline{z})}{(1-\overline{z}w)(1-\overline{a}z)}.$$

$$|\varphi_{f(z)}(f(w))| = \left|e^{i\alpha}\cdot\frac{(w-z)(1-a\overline{z})}{(1-\overline{z}w)(1-\overline{a}z)}\right| = \left|\frac{(w-z)(1-a\overline{z})}{(1-\overline{z}w)(1-\overline{a}z)}\right| =$$

$$= \left|\frac{w-z}{1-\overline{z}w}\right|\cdot\left|\frac{1-a\overline{z}}{1-\overline{a}z}\right| = \left|\frac{w-z}{1-\overline{z}w}\right|\cdot\left|\frac{1-a\overline{z}}{1-\overline{a\overline{z}}}\right| = \left|\frac{w-z}{1-\overline{z}w}\right| = |\varphi_z(w)|.$$

■

Uvedimo funkciju $\delta : \mathbb{D}\times\mathbb{D} \longrightarrow [0,+\infty)$, $\delta(z,w) = |\varphi_z(w)|$ i ispitajmo njene osobine.

1. Ako je $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, tada je $\delta(f(z), f(w)) = \delta(z,w)$ akko $f \in Aut(\mathbb{D})$ (upravo dokazano).

2. Funkcija δ meri rastojanje na $\mathbb{D}$:

   - za svako $z, w \in \mathbb{D}$, $\delta(z,w) \geq 0$, $\delta(z,w) = 0 \iff z = w$;

- za svako $z, w \in \mathbb{D}$, $\delta(z, w) = \delta(w, z)$;
- za svako $z, w, \xi \in \mathbb{D}$, $\delta(z, w) \leq \delta(z, \xi) + \delta(\xi, w)$.

Očigledno je $\delta(z, w) \geq 0$, $\delta(z, w) = 0$ akko $\left|\dfrac{w - z}{1 - \overline{z}w}\right| = 0$ akko $|w - z| = 0$ akko $w - z = 0$ akko $w = z$.
$\delta(z, w) = \left|\dfrac{w - z}{1 - \overline{z}w}\right| = \dfrac{|w - z|}{|1 - \overline{z}w|} = \dfrac{|z - w|}{1 - \overline{\overline{z}w}} = \dfrac{|z - w|}{|1 - \overline{z}w|} = \left|\dfrac{z - w}{w - \overline{w}z}\right| = \delta(w, z)$.

Dokaz nejednakosti trougla pokazaće se malo zahtevnijim. Uz malo muke nalazimo

$$1 - (\delta(z_1, z_2))^2 = 1 - (\delta(z_2, z_1))^2 = 1 - |\varphi_{z_2}(z_1)|^2 = 1 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2}z_1}\right|^2 =$$
$$= 1 - \frac{(z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})}{(1 - \overline{z_2}z_1)(1 - z_2\overline{z_1})} = \frac{(1 - \overline{z_2}z_1)(1 - z_2\overline{z_1}) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})}{(1 - \overline{z_2}z_1)(1 - z_2\overline{z_1})} =$$
$$= \frac{1 - z_2\overline{z_1} - \overline{z_2}z_1 + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} - |z_2|^2}{|1 - \overline{z_2}z_1|^2} = \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \overline{z_2}z_1|^2},$$

odakle sledi

$$\implies 1 - (\delta(|z_1|, -|z_2|))^2 = \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{(1 + |\overline{z_2}||z_1|)^2} = \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{(1 + |z_2||z_1|)^2}.$$

Pošto je $|1 - \overline{z_2}z_1| \leq 1 + |\overline{z_2}||z_1| = 1 + |z_2||z_1|$, to je

$|1 - \overline{z_2}z_1|^2 \leq (1 + |z_2||z_1|)^2$, tj.

$$\frac{1}{|1 - \overline{z_2}z_1|^2} \geq \frac{1}{(1 + |z_2||z_1|)^2}.$$

Lako je videti da sledi

$$1 - \delta^2(z_1, z_2) = \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \overline{z_2}z_1|^2} \geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{(1 + |z_2||z_1|)^2} = 1 - \delta^2(|z_1|, -|z_2|)$$

odnosno $\delta^2(z_1, z_2) \leq \delta^2(|z_1|, -|z_2|)$. Pošto je funkcija δ nenegativna, važi $\delta(z_1, z_2) \leq \delta(|z_1|, -|z_2|)$, tj.

$$\delta(z_1, z_2) \leq \delta(|z_1|, -|z_2|) = \left|\varphi_{|z_1|}(-|z_2|)\right| = \left|\frac{-|z_2| - |z_1|}{1 + |\overline{z_1}||z_2|}\right| = \left|\frac{-(|z_1| + |z_2|)}{1 + |z_1||z_2|}\right| = \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1||z_2|}.$$

Primenimo dokazane nejednakosti da bismo dokazali treći uslov.

$$\delta(z, w) = \delta(\varphi_\xi(z), \varphi_\xi(w)) \leq \frac{|\varphi_\xi(z)| + |\varphi_\xi(w)|}{1 + |\varphi_\xi(z)|\,|\varphi_\xi(w)|} = \frac{\delta(z, \xi) + \delta(\xi, w)}{1 + \delta(z, \xi) \cdot \delta(\xi, w)} \leq \delta(z, \xi) + \delta(\xi, w)$$

Lema 5. *Funkcija* $\lambda : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty),\ \lambda(z_1, z_2) = \ln \dfrac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)}$ *meri rastojanje na* $\mathbb{D}$.

Dokaz. Očigledno je $\lambda(z_1, z_2) \geq 0$ na osnovu iste osobine funkcije δ.

$$\lambda(z_1, z_2) = 0 \iff \ln \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} = 0 \iff \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} = 1$$
$$\iff 1 + \delta(z_1, z_2) = 1 - \delta(z_1, z_2) \iff \delta(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2$$
$$\lambda(z_1, z_2) = \ln \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} = \ln \frac{1 + \delta(z_2, z_1)}{1 - \delta(z_2, z_1)} = \lambda(z_2, z_1)$$

Kao i u prethodnom dokazu, dokazivanje nejednakosti trougla je daleko teže.

$$\lambda(z_1, z_3) \leq \lambda(z_1, z_2) + \lambda(z_2, z_3)$$
$$\iff \ln \frac{1 + \delta(z_1, z_3)}{1 - \delta(z_1, z_3)} \leq \ln \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} + \ln \frac{1 + \delta(z_2, z_3)}{1 - \delta(z_2, z_3)}$$
$$\iff \ln \frac{1 + \delta(z_1, z_3)}{1 - \delta(z_1, z_3)} \leq \ln \left(\frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} \cdot \frac{1 + \delta(z_2, z_3)}{1 - \delta(z_2, z_3)} \right)$$
$$\iff \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} \leq \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} \cdot \frac{1 + \delta(z_2, z_3)}{1 - \delta(z_2, z_3)} \iff$$
$$(1 + \delta(z_1, z_3))(1 - \delta(z_1, z_2))(1 - \delta(z_2, z_3)) \leq (1 - \delta(z_1, z_3))(1 + \delta(z_1, z_2))(1 + \delta(z_2, z_3)).$$

Uvedimo smene: $A = \delta(z_1, z_2),\ B = \delta(z_2, z_3),\ C = \delta(z_1, z_3)$.

$$\iff (1 + C)(1 - A)(1 - B) \leq (1 - C)(1 + A)(1 + B)$$
$$\iff (1 + C)(1 - B - A + AB) \leq (1 - C)(1 + B + A + AB)$$
$$\iff 1 - B - A + AB + C - BC - AC + ABC \leq 1 + B + A + AB - C - BC - AC - ABC$$
$$\iff -B - A + AB + ABC + C \leq B + A - C - ABC$$
$$\iff 2C + 2ABC \leq 2A + 2B \ / : 2$$
$$\iff C + ABC \leq A + B \iff C(1 + AB) \leq A + B$$
$$\iff C \leq \frac{A + B}{1 + AB} \leq A + B$$
$$\iff \delta(z_1, z_3) \leq \delta(z_1, z_2) + \delta(z_2, z_3)$$

Dokazali smo tvrđenje za funkciju δ, odakle proizilazi odgovarajuće tvrđenje za funkciju λ. Jednakost važi akko $z_1 = z_2$ ili $z_2 = z_3$. ∎

Lema 6. *Ako je* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$*, tada je* $\lambda(f(z_1), f(z_2)) \leq \lambda(z_1, z_2)$*, za svako* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$*. Jednakost važi akko* $f \in Aut(\mathbb{D})$.

Dokaz. Kako je $\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \delta(z_1, z_2)$ i funkcija $\ln \dfrac{1 + t}{1 - t}$ rastuća $(f^{'}(t) = \dfrac{2}{1 - t^2} > 0.\ t \in (-1, 1))$, sledi

$$\lambda(f(z_1), f(z_2)) = \ln \frac{1 + \delta(f(z_1), f(z_2))}{1 - \delta(f(z_1), f(z_2))} \leq \ln \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} = \lambda(z_1, z_2).$$

Jednakost važi akko $\delta(f(z_1), f(z_2)) = \delta(z_1, z_2)$, a dokazali smo da to tvrđenje važi akko $f \in Aut(\mathbb{D})$. ■

Definicija 11. *Neka je ρ neprekidna nenula funkcija na $\mathbb{D}$. Izraz $\rho(z)|dz|$ nazivamo elementom dužine luka na $\mathbb{D}$. Neka su $z, w \in \mathbb{D}$ i $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}$ glatka kriva koja povezuje z i w, $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$. Definišemo „h-dužinu" krive γ na $\mathbb{D}$ sa $l_{\mathbb{D}}(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz|$. Uzimajući infimum po svim mogućim glatkim krivama koje spajaju z i w određujemo metriku na $\mathbb{D}$,*

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = \inf_\gamma l_{\mathbb{D}}(\gamma).$$

Posmatrajmo $\delta(z_1, z_2) = \delta(z_2, z_1) = |\varphi_{z_2}(z_1)| = \left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1}\right|$. Kada z_1 teži z_2, to $\delta(z_1, z_2)$ teži $\dfrac{|dz|}{1 - z^2}$. Time funkcija $f(z) = \dfrac{1}{1 - z^2}$ postaje dobar kandidat za funkciju ρ, koju nazivamo hiperboličkom gustinom metrike.

Podsetimo se opšteg bilinearnog izomorfizma $w : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}$, $w(z) = e^{i\alpha} \cdot \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$. Nalazimo mu inverz veoma lako na sleći način:

$$w(z - \overline{z_0}) = e^{i\alpha}(z - z_0) \iff wz - w\overline{z_0} = e^{i\alpha} z - e^{i\alpha} z_0$$
$$\iff z(w - e^{i\alpha}) = w\overline{z_0} - e^{i\alpha} z_0 \iff z(w) = \frac{w\overline{z_0} - e^{i\alpha} z_0}{w - e^{i\alpha}}.$$

Neka je $\alpha = 0, z_0 = i$, što povlači da je preslikavanje $z : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}$ dato sa

$$z(w) = i \cdot \frac{1 + w}{1 - w}.$$

Diferencirajmo dato preslikavanje.

$$z = i \cdot \frac{1 + w}{1 - w} \; / \; d$$
$$dz = i \cdot d\left(\frac{1 + w}{1 - w}\right)$$
$$dz = i \cdot \frac{1 - w + 1 + w}{(1 - w)^2} dw$$
$$dz = \frac{2i}{(1 - w)^2} dw \; / \; | \quad |$$
$$|dz| = \frac{2|dw|}{|(1 - w)^2|} = \frac{2|dw|}{|1 - w|^2}$$

Pošto je Im $z = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$ to je

$$\text{Im } z = \frac{1}{2i}\left(i \cdot \frac{1+w}{1-w} - \overline{i \cdot \frac{1+w}{1-w}}\right) = \frac{1}{2i}\left(i \cdot \frac{1+w}{1-w} + i \cdot \frac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+w}{1-w} + \frac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+w)(1-\overline{w}) + (1+\overline{w})(1-w)}{(1-w)(1-\overline{w})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{= 1 - \overline{w} + w - |w|^2 + 1 - w + \overline{w} - |w|^2}{(1-w)(\overline{1-w})} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - 2|w|^2}{|1-w|^2} = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}$$

Sledi, $\dfrac{1}{|1-w|^2} = \dfrac{\text{Im } z}{(1-|w|^2)}$. Dakle, važi $|dz| = 2|dw| \cdot \dfrac{\text{Im } z}{1-|w|^2}$, tj.

$$\frac{|dz|}{\text{Im } z} = \frac{2|dw|}{1-|w|^2}.$$

Zaključujemo da je hiperbolička gustina $\rho_{\mathbb{D}}(z) = \dfrac{2}{1-|z|^2}$, dok je $\rho_{\mathbb{H}}(z) = \dfrac{1}{\text{Im } z}$.

U nastavku rada nastavićemo sa pretpostavkom da je $\rho_{\mathbb{D}}(z) = \dfrac{2}{1-|z|^2}$. Ona će biti opravdana dokazom da je $\rho_{\mathbb{H}}(z) = \dfrac{1}{\text{Im } z}$ i ovom vežbom.

Propozicija 4. *Ako je $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, onda je $\rho(f(z))|f'(z)| \leq \rho(z)$, $\forall z \in \mathbb{D}$. Jednakost važi akko $f \in Aut(\mathbb{D})$.*

Dokaz.

$$\rho(f(z))|f'(z)| \leq \rho(z),\ \forall z \in \mathbb{D}$$
$$\iff \frac{2}{1-|f(z)|^2} \cdot |f'(z)| \leq \frac{2}{1-|z|^2}$$
$$\iff \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

Na osnovu dokaza prethodnih tvrđenja, sledi dokaz. ■

Propozicija 5. *Ako je $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, onda je $l_{\mathbb{D}}(f \circ \gamma) \leq l_{\mathbb{D}}(\gamma)$ za svaku glatku krivu $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}$. Jednakost važi akko $f \in Aut(\mathbb{D})$.*

Dokaz.

$$l_{\mathbb{D}}(f \circ \gamma) = \int_{f \circ \gamma} \rho(w)|dw| = \int_0^1 \rho(f(\gamma(t)))|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt =$$
$$\int_{\gamma} \rho(f(z))|f'(z)||dz| \leq \int_{\gamma} \rho(z)|dz|$$

Ako je $f \in Aut(\mathbb{D})$, važi $\dfrac{2|f^{'}(z)|}{1-|f(z)|^2} = \dfrac{2}{1-|z|^2}$, odnosno $\displaystyle\int_\gamma \frac{2|f^{'}(z)|}{1-|f(z)|^2} = \int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}$, tj. $l_\mathbb{D}(f\circ\gamma) = l_\mathbb{D}(\gamma)$. Ako je $l_\mathbb{D}(f\circ\gamma) = l_\mathbb{D}(\gamma)$, sledi $\displaystyle\int_\gamma \rho(f(z))|f^{'}(z)||dz| = \int_\gamma \rho(z)|dz|$, tj. $\displaystyle\int_\gamma \frac{2|f^{'}(z)|}{1-|f(z)|^2}|dz| = \int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$, iz čega sledi $\displaystyle 2\int_\gamma \left(\frac{f^{'}(z)}{1-|f(z)|^2} - \frac{1}{1-|z|^2}\right)|dz| = 0$.

Pošto je $F(z) = \dfrac{f^{'}(z)}{1-|f(z)|^2} - \dfrac{1}{1-|z|^2} \geq 0$ i $\displaystyle\int_\gamma F(z)|dz| = 0$ to je $F(z) \equiv 0$, odnosno $\dfrac{f^{'}(z)}{1-|f(z)|^2} = \dfrac{1}{1-|z|^2}$, što je ekvivalentno sa $f \in Aut(\mathbb{D})$. ■

Lema 7. *Neka su $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Ako je $f \in Aut(\mathbb{D})$ onda važi $d_\mathbb{D}(f(z_1), f(z_2)) = d_\mathbb{D}(z_1, z_2)$.*

Dokaz. Imajmo na umu da i dalje nemamo konkretnu formulu za $d_\mathbb{D}$, već $d_\mathbb{D}(z_1,z_2) = \inf\{\int_\gamma \rho(z)|dz|| \ \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D} \ je \ glatka \ kriva, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2\}$ i $d_\mathbb{D}(f(z_1), f(z_2)) = inf\{\int_\Gamma \rho(z)|dz|| \ \Gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D} \ je \ glatka \ kriva, \Gamma(0) = f(z_1), \Gamma(1) = f(z_2)\}$.

Zaključujemo $\{\int_{f\circ\gamma} \rho(z)|dz| \mid \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2\} \subset \{\int_\Gamma \rho(z)|dz| \mid \Gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}, \Gamma(0) = f(z_1), \Gamma(1) = f(z_2)\}$.
Kako je $\int_{f\circ\gamma} \rho(z)|dz| = \int_\gamma \rho(f(z))|f^{'}(z)||dz| = \int_\gamma \rho(z)|dz|$ to je $\{\int_\gamma \rho(z)|dz| \mid \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2\} \subset \{\int_\Gamma \rho(z)|dz| \mid \Gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}, \Gamma(0) = f(z_1), \Gamma(1) = f(z_2)\}$.
Sledi $\inf\{\int_\gamma \rho(z)|dz| \mid \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2\} \geq \inf\{\int_\Gamma \rho(z)|dz| \mid \Gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}, \Gamma(0) = f(z_1), \Gamma(1) = f(z_2)\}$, odnosno $d_\mathbb{D}(z_1,z_2) \geq d_\mathbb{D}(f(z_1), f(z_2))$.

Obratno sledi iz sledećeg:

$$\begin{aligned} f \in Aut(\mathbb{D}) &\implies f^{-1} \in Aut(\mathbb{D}) \\ \implies d_\mathbb{D}(f(z_1), f(z_2)) &\geq d_\mathbb{D}(f^{-1}(f(z_1)), f^{-1}(f(z_2))) \\ \iff d_\mathbb{D}(f(z_1), f(z_2)) &\geq d_\mathbb{D}(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Spajanjem ove dve nejednačine dobijamo dokaz propozicije,tj.

$$d_\mathbb{D}(z_1,z_2) = d_\mathbb{D}(f(z_1), f(z_2))$$

■

Teorema 8. $d_\mathbb{D}(z_1, z_2) \equiv \lambda(z_1, z_2)$.

Dokaz. Neka su $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Posmatrajmo funkciju $f(z) = e^{-i\cdot arg\varphi_{z_1}(z_2)}\varphi_{z_1}(z)$. Očigledno, $f \in Aut(\mathbb{D})$, na osnovu dela rada o određivanju opšteg oblika bilinearnog automorfizma oblasti $\mathbb{D}$. Čitalac je pozvan da, po potrebi, ponovo pročita taj deo rada.

$$f(z_1) = e^{-i\cdot arg\varphi_{z_1}(z_2)} \cdot \varphi_{z_1}(z_1) = e^{-i\cdot arg\varphi_{z_1}(z_2)} \cdot 0 = 0$$
$$f(z_2) = e^{-i\cdot arg\varphi_{z_1}(z_2)} \cdot \varphi_{z_1}(z_2) = e^{-i\cdot arg\varphi_{z_1}(z_2)} \cdot |\varphi_{z_1}(z_2)| \cdot e^{i\cdot arg\varphi_{z_1}(z_2)} = |\varphi_{z_1}(z_2)|$$

Sledi, $d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) = d_{\mathbb{D}}(0, |\varphi_{z_1}(z_2)|)$.
Time je završena prva etapa našeg dokaza. Druga će zahtevati od nas da nađemo krivu $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D},\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = |\varphi_{z_1}(z_2)|$ na kojoj se ostvaruje minimalno rastojanje.
Neka je $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D},\ \gamma(0) = 0, \gamma(1) = |\varphi_{z_1}(z_2)|$ proizvoljna glatka kriva i označimo sa $r = r(z_1, z_2) = |\varphi_{z_1}(z_2)|$.

$$\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t),\ \gamma^{'}(t) = \alpha^{'}(t) + i\beta^{'}(t) \Longrightarrow |\gamma(t)|^2 \geq |\alpha(t)|^2, |\gamma^{'}(t)| \geq |\alpha^{'}(t)|$$
$$\Longrightarrow 1 - |\gamma(t)|^2 \leq 1 - |\alpha(t)|^2 \Longrightarrow \frac{1}{1-|\gamma(t)|^2} \geq \frac{1}{1-|\alpha(t)|^2}\ i\ |\gamma^{'}(t)| \geq |\alpha^{'}(t)|$$
$$\Longrightarrow \frac{|\gamma^{'}(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} \geq \frac{|\alpha^{'}(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}$$

$$\int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_0^1 \frac{2|\gamma^{'}(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt \geq \int_0^1 \frac{2|\alpha^{'}(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}dt \geq \int_0^1 \frac{2\alpha^{'}(t)}{1-(\alpha(t))^2}dt =$$
$$= \Big[u = \alpha(t),\ du = \alpha^{'}(t)dt\Big] = \int_0^r \frac{2du}{1-u^2} = \ln\frac{1+u}{1-u}\ /_0^r = \ln\frac{1+r}{1-r}$$

U skladu sa dosadašnjom definicijom funkcije $d_{\mathbb{D}}$ sledi

$$d_{\mathbb{D}}(0,r) = \inf\left\{\int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \mid \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = r\right\} \geq \ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Uočimo sledeću (očigledno) glatku krivu koja spaja 0 i r.
$\gamma_1(t) = rt, t \in [0,1],\ \gamma_1(1) = r$

$$\int_{\gamma_1} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_0^1 \frac{2rdt}{1-r^2t^2} = [u = rt,\ du = rdt] = \int_0^r \frac{2du}{1-u^2} = \ln\frac{1+u}{1-u}\ /_0^r = \ln\frac{1+r}{1-r}$$

Zaključujemo

$$d_{\mathbb{D}}(0,r) = \inf\left\{\int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \mid \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D},\ \gamma(0), \gamma(1) = r\right\} =$$
$$= \min\left\{\int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \mid \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D},\ \gamma(0), \gamma(1) = r\right\} = \ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Kada spojimo delove obe etape dokaza u jedan zaključak sledi

$$d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{D}}(0, |\varphi_{z_1}(z_2)|) = \ln\frac{1+|\varphi_{z_1}(z_2)|}{1-|\varphi_{z_1}(z_2)|} = \ln\frac{1+\delta(z_1,z_2)}{1-\delta(z_1,z_2)} = \lambda(z_1,z_2).$$

■

Prethodna teorema čini sledeća dva tvrđenja očiglednim.

Propozicija 6. *$d_{\mathbb{D}}$ meri rastojanje na $\mathbb{D}$.*

Propozicija 7. *Neka su $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Ako je $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tada važi $d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) \leq d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$. Jednakost važi akko $f \in Aut(\mathbb{D})$.*

4.1.1 Veza između funkcija λ i δ

$$
\begin{aligned}
\lambda(z_1, z_2) &= \ln \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} \\
e^{\lambda(z_1, z_2)} &= \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} \\
e^{\lambda(z_1, z_2)} - e^{\lambda(z_1, z_2)} \cdot \delta(z_1, z_2) &= 1 + \delta(z_1, z_2) \\
e^{\lambda(z_1, z_2)} - 1 &= \delta(z_1, z_2) + e^{\lambda(z_1, z_2)} \delta(z_1, z_2) \\
e^{\lambda(z_1, z_2)} - 1 &= \delta(z_1, z_2)(1 + e^{\lambda(z_1, z_2)}) \\
\delta(z_1, z_2) &= \frac{e^{\lambda(z_1, z_2)} - 1}{e^{\lambda(z_1, z_2)} + 1}
\end{aligned}
$$

Pošto važi

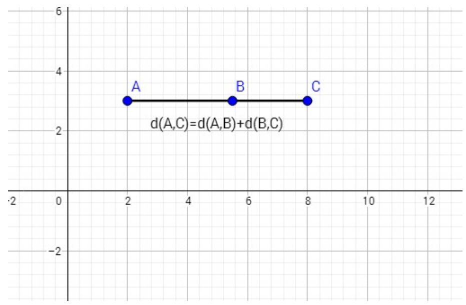
$$
\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x}}{\dfrac{e^{2x} + 1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \implies \tanh \frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}
$$

sledi

$$
\delta(z_1, z_2) = \tanh \frac{\lambda(z_1, z_2)}{2}.
$$

U uvodnom poglavlju rekli smo da su geodezijske linije u $\mathbb{D}$ delovi pravih kroz 0 i delovi krugova koji ne sadrže 0. Sada nam je jasno da nismo bili dovoljno precizni. Ako je $\Gamma = f \circ \gamma$, $f(z) = e^{-i \cdot \arg \varphi_{z_1}(z_2)} \varphi_{z_1}(z_2)$ deo prave linije koji sadrži 0 i $|\varphi_{z_1}(z_2)|$, onda je Γ geodezijska linija i $\Gamma \perp \mathbb{T} = \{z | \; |z| = 1\}$. Kako je f bilinearno (štaviše $f \in Aut(\mathbb{D})$), to je i f^{-1} bilinearno (ista napomena), pa je glatka kriva $f^{-1}(\Gamma) = \gamma$ koja prolazi kroz tačke z_1 i z_2 uopšteni krug i $\gamma \perp \mathbb{T}$ (bilinearna preslikavanja čuvaju uglove). Dakle, izvodimo zaključak da su jedine geodezijske krive Poenkareovog disk modela $\mathbb{D}$ delovi pravih u $\mathbb{D}$ koje prolaze kroz 0 i delovi kružnica u $\mathbb{D}$ koji su ortogonalni na $\mathbb{T}$.

Dokazali smo da je $\lambda(z_1, z_2) = \ln \dfrac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)}$ funkcija kojoj se meri hiperboličko rastojanje, skraćeno „h-rastojanje” na $\mathbb{D}$, dok se funkcijom $\delta(z_1, z_2) = |\varphi_{z_1}(z_2)|$ meri pseudohiperboličko rastojanje. Razlog zbog kog funkcija δ ne meri $h-$rastojanje, već pseudohiperboličko rastojanje je taj što nije aditivna duž geodezijskih linija. U euklidskoj geometriji važi aditivnost duži koje pripadaju istoj pravoj (slika ispod) i kao analogon tome očekuje se aditivnost $h-$duži duž geodezijskih linija u hiperboličkoj geometriji. Uverimo se u to.



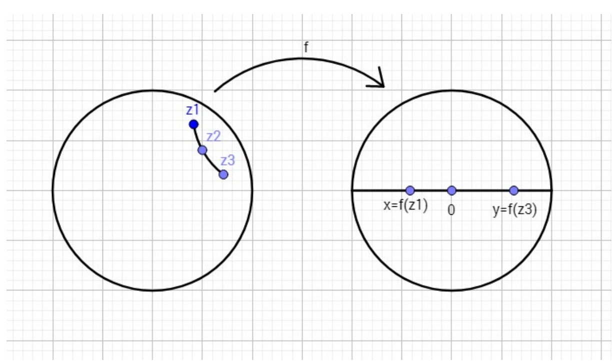
Slika 12: aditivnost duži

Lema 8. *Ako su z_1, z_2 i z_3 tri različite tačke u $\mathbb{D}$ koje se nalaze, u tom redosledu, duž geodezijske linije, tada je $d_{\mathbb{D}}(z_1, z_3) = d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) + d_{\mathbb{D}}(z_2, z_3)$.*

Dokaz. Ako z_1, z_2 i z_3 pripadaju pravoj koja prolazi kroz 0, aditivnost trivijalno važi (pošto je ona tada deo euklidske prave). Neka je, dakle, u pitanju netrivijalan slučaj. Neka je $f \in Aut(\mathbb{D})$, $f(z) = e^{-i \arg \varphi_{z_2}(z_3)} \varphi_{z_2}(z)$. Tada je $f(z_1) = e^{-i \arg \varphi_{z_2}(z_3)} \varphi_{z_2}(z_1), f(z_2) = 0, f(z_3) = |\varphi_{z_2}(z_3)|$. k je krug u $\overline{\mathbb{C}}$ određen sa z_1, z_2, z_3 i $k \perp \mathbb{T}$. Sledi, $f(k)$ je krug u $\overline{\mathbb{C}}$, određen sa $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ i $f(k) \perp \mathbb{T}$. Pošto su $f(z_3) \in \mathbb{R}, f(z_2) = 0 \in \mathbb{R}$, to je i $f(z_1) \in \mathbb{R}$, odakle zaključujemo da je $f(k) = \mathbb{R}$. Kako je $f(z_2) = 0, f(z_3) > 0$, to je $f(z_1) < 0$. Neka je $x = f(z_1)$ i $y = f(z_3)$.

$$d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) = d_{\mathbb{D}}(x, 0) = \ln \frac{1 + |x|}{1 - |x|} = \ln \frac{1 - x}{1 + x}$$

$$d_{\mathbb{D}}(z_2, z_3) = d_{\mathbb{D}}(f(z_2), f(z_3)) = d_{\mathbb{D}}(0, y) = \ln \frac{1 + |y|}{1 - |y|} = \ln \frac{1 + y}{1 - y}$$



$$d_{\mathbb{D}}(z_1, z_3) = d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_3)) = d_{\mathbb{D}}(x, y) = d_{\mathbb{D}}(0, |\varphi_x(y)|) =$$

$$= \ln \frac{1 + \left|\dfrac{y-x}{1-\overline{x}y}\right|}{1 - \left|\dfrac{y-x}{1-\overline{x}y}\right|} = \ln \frac{1 + \left|\dfrac{y-x}{1-xy}\right|}{1 - \left|\dfrac{y-x}{1-xy}\right|} = \ln \frac{|1-xy| + |y-x|}{|1-xy| - |y-x|} =$$

$$= \ln \frac{1-xy+y-x}{1-xy-y+x} = \ln \frac{1-x+y(1-x)}{1-y+x(1-y)} = \ln \frac{(1-x)(1+y)}{(1-y)(1+x)}$$

$$d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) + d_{\mathbb{D}}(z_2, z_3) = \ln \frac{1-x}{1+x} + \ln \frac{1+y}{1-y} = \ln \frac{(1-x)(1+y)}{(1+x)(1-y)} = d_{\mathbb{D}}(z_1, z_3)$$

■

Kao što je bilo za očekivati, funkcija $\lambda \equiv d_{\mathbb{D}}$ je aditivna duž geodezijskih linija. Međutim, to ne važi za funkciju δ.

Lema 9. *Neka su z_1, z_2, z_3 tri različite tačke u $\mathbb{D}$. Tada važi $\delta(z_1, z_3) < \delta(z_1, z_2) + \delta(z_2, z_3)$.*

Dokaz.

$$\lambda(z_1, z_3) \leq \lambda(z_1, z_2) + \lambda(z_2, z_3)$$

$$\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1} \implies \tanh x \nearrow,\ x \in \mathbb{R},\ \tanh x = 0 \iff x = 0$$

Iz prethodne dve činjenice zaključujemo

$$\delta(z_1, z_3) = \tanh\left(\frac{1}{2}\lambda(z_1, z_3)\right) \leq \tanh\left(\frac{1}{2}(\lambda(z_1, z_2) + \lambda(z_2, z_3))\right).$$

Kako je $\tanh(x+y) = \dfrac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \dfrac{\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y} =$

$= \dfrac{\dfrac{\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y}}{\dfrac{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y}{\cosh x \cosh y}} = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$, sledi

$\delta(z_1, z_3) \leq \dfrac{\tanh\left(\frac{1}{2}\lambda(z_1, z_2)\right) + \tanh\left(\frac{1}{2}\lambda(z_2, z_3)\right)}{1 + \tanh\left(\frac{1}{2}\lambda(z_1, z_2)\right)\tanh\left(\frac{1}{2}\lambda(z_2, z_3)\right)}$. Pošto su z_1, z_2, z_3 različite tačke, to je $\lambda(z_1, z_2) > 0, \lambda(z_2, z_3) > 0 \Longrightarrow \tanh\left(\frac{1}{2}\lambda(z_1, z_2)\right) > 0$, $\tanh\left(\frac{1}{2}\lambda(z_2, z_3)\right) > 0$. Sledi, $\delta(z_1, z_3) < \tanh\left(\frac{1}{2}\lambda(z_1, z_2)\right) + \tanh\left(\frac{1}{2}\lambda(z_2, z_3)\right) = \delta(z_1, z_2) + \delta(z_2, z_3)$. ■

Dakle, za funkciju δ važi stroga nejednakost trougla. Međutim, specijalno kada su z_1, z_2 i z_3, tim redom, različite tačke duž geodezijske linije u $\mathbb{D}$, važi stroga nejednakost, što povlači da ne važi aditivnost duž geodezijskih linija za funkciju rastojanja δ.

4.2 Poluravanski model

Lema 10. *Ako je* $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ *neprekidna, realna funkcija tako da je* $\int_f \mu(z)|dz| = 0$ *za svaku deo-po-deo glatku krivu* $f : [a,b] \longrightarrow \Omega$*, tada je* $\mu \equiv 0$.

Teorema 9. $\rho_{\mathbb{H}}(z) = \dfrac{1}{\text{Im } z}$.

Dokaz. Tražimo neprekidnu, nenula funkciju na $\mathbb{H}$ tako da je $l_\rho(f) = l_\rho(\gamma \circ f)$. Pošto je $l_\rho(f) = \displaystyle\int_f \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(f(t))|f^{'}(t)|dt$ i $l_{\gamma\circ f} = \displaystyle\int_{\gamma\circ f} \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(\gamma(f(t)))|\gamma^{'}(f(t))||f^{'}(t)|dt$ sledi

$$\int_a^b \rho(f(t))|f^{'}(t)|dt = \int_a^b \rho(\gamma(f(t)))|\gamma^{'}(f(t))||f^{'}(t)|dt\ ,$$

za svaki deo-po-deo gladak put $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{H}$ i automorfizam oblasti $\mathbb{H}$, γ.
$\displaystyle\int_z^b (\rho(f(t)) - \rho(\gamma(f(t)))|\gamma^{'}(f(t))|)|f^{'}(t)|dt = 0 \iff \int_a^b \mu_\gamma(f(t))|f^{'}(t)|dt = 0.$
Na osnovu leme sledi $\mu_\gamma \equiv 0$, tj. $\mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma^{'}(z)| = 0$.
Neka su γ i φ dva automorfizma oblasti $\mathbb{H}$.

$$\begin{aligned}\mu_{\gamma\circ\varphi}(z) &= \rho(z) - \rho(\gamma(\varphi(z)))|\gamma^{'}(\varphi(z))||\varphi^{'}(z)| = \rho(z) - \rho(\varphi(z))|\varphi^{'}(z)| + \rho(\varphi(z))|\varphi^{'}(z)| \\ &-\rho(\gamma(\varphi(z)))|\gamma^{'}(\varphi(z))||\varphi^{'}(z)| = \rho(z) - \rho(\varphi(z))|\varphi^{'}(z)| + |\varphi^{'}(z)|(\rho(\varphi(z)) - \\ &\rho(\gamma(\varphi(z)))|\gamma^{'}(\varphi(z))|) = \mu_\varphi(z) + \mu_\gamma(\varphi(z))|\varphi^{'}(z)|\end{aligned}$$

Analizirajmo efekat preslikavanja $\gamma(z) = az + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ na μ. Prvo, neka je $a = 1$.

$0 = \mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma^{'}(z)| = \rho(z) - \rho(z+b)$, tj. $\rho(z) = \rho(z+b),\ b \in \mathbb{R}$.
Zaključujemo da $\rho(z)$ ustvari zavisi od Im z, odnosno $\rho(z) = \rho(i \cdot \text{Im } z)$. Za $z = x + iy$ to je $\rho(z) = \rho(iy)$, pa funkciju ρ možemo posmatrati kao realnu funkciju $\rho(z) = \rho(iy) = r(y)$. Neka je $b = 0$.
$0 = \mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma^{'}(z)| = \rho(z) - a\rho(az)$, tj. $\rho(z) = a\rho(az)$. To povlači $r(y) = a\rho(ax + iay) = ar(ay)$, odnosno $r(ay) = \dfrac{1}{a}r(y)$. Za $y = 1$, sledi $r(a) = \dfrac{1}{a}r(1)$, gde je $r(1)$ neka konstanta, npr. c.
Dakle, $\rho(z) = \rho(Rez + i\,\text{Im } z) = \rho(i\,\text{Im } z) = r(\text{Im } z) = \dfrac{c}{\text{Im } z}$, $c > 0$. Bez umanjenja opštosti, možemo uzeti da je $c = 1$, tj. $\rho(z) = \dfrac{1}{\text{Im } z}$.
Potrebno je proveriti i druga dva generatora[15], $K(z) = \dfrac{-1}{z}$ i $B(z) = -\overline{z}$.

[15] Pročitati napomenu posle dokaza ove teoreme.

$$0 = \mu_K(z) = \rho(z) - \rho(K(z))|K^{'}(z)| = \rho(z) - \rho\left(\frac{-1}{z}\right) \cdot \frac{1}{|z|^2}$$

Uzimajući $\rho(z) = \dfrac{1}{\text{Im } z}$ dobijamo

$$\rho\left(\frac{-1}{z}\right) = \rho\left(\frac{-\overline{z}}{|z|^2}\right) = \frac{1}{\text{Im }\left(\frac{-\overline{z}}{|z|^2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{|z|^2}\text{Im }(-\overline{z})} = \frac{|z|^2}{\text{Im }(-\overline{z})} = \frac{|z|^2}{\text{Im } z}$$

$$\rho(z) - \rho\left(\frac{-1}{z}\right)\frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{\text{Im } z} - \frac{|z|^2}{\text{Im } z} \cdot \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{\text{Im } z} - \frac{1}{\text{Im } z} = 0$$

Pošto $B^{'}(t)$ ne postoji, moraćemo po definiciji, tj. proveravamo da li važi $l_\rho(B \circ f) = l_\rho(f)$. Neka je $f(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a, b]$.

$$(B \circ f)(t) = B(f(t)) = -x(t) + iy(t), t \in [a, b]$$

$$l_\rho(B \circ f) = \int_{B\circ f} \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(B(f(t)))|(B(f(t)))^{'}| = \int_a^b \frac{1}{\text{Im }(B(f(t)))}|f^{'}(t)|dt$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\text{Im }(f(t))}|f^{'}(t)|dt = \int_f \rho(z)|dz| = l_\rho(f)$$

Kako je l_ρ invarijanta u odnosu na sve generatore, to je l_ρ invarijanta u odnosu na svaki bilinearni izomorfizam oblasti $\mathbb{H}$, odakle sledi $\rho(z) = \rho_{\mathbb{H}}(z) = \dfrac{1}{\text{Im } z}$. ■

Napomena: Unija svih preslikavanja $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ i preslikavanja $C(z) = \overline{z}$ čini takozvanu uopštenu Mebijusovu grupu, u oznaci $Mob(\mathbb{H})$. Može se pokazati da ova grupa sadrži dva tipa preslikavanja -
$f_1(z) = \dfrac{az + b}{cz + d},\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1$, koje predstavlja opšti automorfizam oblasti $\mathbb{H}$ i $f_2(z) = \dfrac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d},\ a, b, c, d$ su čisto imaginarni brojevi, $ad - bc = 1$. Ova grupa ima tri generatorna preslikavanja: $\gamma(z) = az + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ K(z) = \dfrac{-1}{z}$ i $B(z) = -\overline{z}$.
Ako $c = 0$, to je $f_1(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d},\ ad = 1 \implies \dfrac{a}{d} = a^2 > 0$, tj. $f_1 \equiv \gamma$.
Ako je $c \neq 0$, tada je $f_1(z) = f(K(g(z)))$, gde su $g(z) = c^2 z + d,\ f(z) = z + \dfrac{a}{c}$.
Svako preslikavanje oblika f_2 može se zapisati kao $B \circ m$, gde je m preslikavanje tipa f_1.
Primetimo da to znači da opšte automorfizme oblasti $\mathbb{H}$ generišu samo preslikavanja γ i K, tj. da je za dokaz teoreme, a i nastavak rada, bilo dovoljno proveriti samo ta dva preslikavanja.

Definicija 12. *Ako su $z, w \in \mathbb{H}$, sa $\Gamma[z, w]$ označavamo skup svih deo-po-deo glatkih puteva $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}$ takvih da je $f(a) = z$ i $f(b) = w$ (koji povezuju z i w na $\mathbb{H}$)*

Definicija 13. *Funkcija* $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ *data sa* $d_{\mathbb{H}}(z,w) = \inf\{l_{\rho_{\mathbb{H}}}(f) = l_{\mathbb{H}}(f) |\ f \in \Gamma[z,w]\}$ *je* $h-$*rastojanje tačaka* z *i* w *na* $\mathbb{H}$.

Lema 11. *Za svako* $z, w \in \mathbb{H}$ *i bilinearno preslikavanje* $\gamma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ *važi* $d_{\mathbb{H}}(z,w) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(z), \gamma(w))$.

Dokaz. Postupamo analogno dokazu za $d_{\mathbb{D}}$.

$$\{f|\ f \in \Gamma[z,w]\} \subset \{\gamma \circ f|\ f \in \Gamma[z,w]\} \subset \{g|\ g \in \Gamma[\gamma(z), \gamma(w)]\}$$

Kako je $l_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) = l_{\mathbb{H}}(f)$ i $A \subset B \implies \inf A \geq \inf B$, to je

$$d_{\mathbb{H}}(\gamma(z), \gamma(w)) = \inf\{l_{\mathbb{H}}(g)|\ g \in \Gamma[\gamma(z), \gamma(w)]\}$$
$$\leq \inf\{l_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f)|\ f \in \Gamma[z,w]\} \leq \inf\{l_{\mathbb{H}}(f)|\ f \in \Gamma[z,w]\} = d_{\mathbb{H}}(z,w)$$

Drugi deo dokaza sledi iz činjenice da je γ^{-1} takođe bilinearno i $\gamma^{-1} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$.

$$\{g|\ g \in \Gamma[\gamma(z), \gamma(w)]\} \subset \{\gamma^{-1} \circ g|\ g \in \Gamma[\gamma(z), \gamma(w)]\} \subset \{f|\ f \in \Gamma[z,w]\}$$
$$d_{\mathbb{H}}(z,w) = \inf\{l_{\mathbb{H}}(f)|\ f \in \Gamma[z,w]\} \leq \inf\{l_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1} \circ f)|\ g \in \Gamma[\gamma(z), \gamma(w)]\}$$
$$\leq \{l_{\mathbb{H}}(g)|\ g \in \Gamma[\gamma(z), \gamma(w)]\} = d_{\mathbb{H}}(\gamma(z), \gamma(w))$$

∎

Primer 4. *Postoji bilinearno preslikavanje* $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ *koje slika* $h-$*pravu u* $\mathbb{H}$ *na* $I = \{z|\ Rez = 0,\ Im\ z > 0\}$.

Dokaz. Izaberimo tačku a na posmatranoj $h-$pravi l. Postoji bilinearno preslikavanje m tako da je $m(a) = i$. Neka je $\varphi = \angle(I, m(l))$ u smeru od I do $m(l)$. Bilinearno preslikavanje $n_\theta(z) = \dfrac{\cos\theta \cdot z - \sin\theta}{\sin\theta z + \cos\theta}$ takođe fiksira i, $\angle(I, n_\theta(I)) = 2\theta$. Ako uzmemo $\theta = \dfrac{\varphi}{2}$ sledi da su $n_\theta(I)$ i $m(l)$ dve $h-$prave koje sadrže i, za koje važi $\angle(I, m(l)) = \angle(I, n_\theta(I)) = \varphi$. Zaključujemo da je $m(l) = n_\theta(I)$, pa je traženo preslikavanje $n_\theta^{-1} \circ m$. ∎

Na osnovu prethodne vežbe zaključujemo da za dve proizvoljne tačke $z, w \in \mathbb{H}$ je moguće naći bilinearno preslikavanje γ tako da se $h-$prava l koja ih sadrži slika na I.

Neka je $\gamma(z) = \mu i,\ \gamma(w) = \lambda i, \mu < \lambda$. Ako je $\mu > \lambda$, uzima se preslikavanje $K \circ \gamma, K(z) = \dfrac{-1}{z}$.

$$\int_\alpha \rho_{\mathbb{H}}(z)|dz| = \int_\alpha \frac{|dz|}{Im\ z} = [\alpha(t) = x(t) + iy(t), t \in [0,1],\ |\alpha'(t)| \geq |y'(t)|,$$
$$Im\ (\alpha(t)) = Im\ (iy(t))] = \int_0^1 \frac{|\alpha'(t)|dt}{Im\ (\alpha(t))} \geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|dt}{Im\ (\alpha(t))} = \int_0^1 \frac{y'(t)dt}{Im\ (iy(t))} =$$
$$[u = y(t), du = y'(t)dt] = \int_\mu^\lambda \frac{du}{Im\ (iu)} = \int_\mu^\lambda \frac{du}{u} = \ln|u|\ /_\mu^\lambda = \ln\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|$$

tj. $d_{\mathbb{H}}(z,w) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(z),\gamma(w)) = d_{\mathbb{H}}(\mu i,\lambda i) \geq \ln\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|$.

Uočimo sledeću glatku krivu koja spaja tačke μi i λi, $\alpha_1(t) = it$, $t \in [\mu,\lambda]$, $\alpha_1^{'}(t) = i$.

$$\int_{\alpha_1} \rho_{\mathbb{H}}(z)|dz| = \int_{\alpha_1} \frac{|dz|}{Im\ z} = \int_{\mu}^{\lambda} \frac{|\alpha_1^{'}(t)|dt}{Im\ (\alpha_1(t))} = \int_{\mu}^{\lambda} \frac{1\cdot dt}{t} = \ln\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|.$$

Analogno dokazu za $d_{\mathbb{D}}$ zaključujemo

$$d_{\mathbb{H}}(\mu i,\lambda i) = \inf\left\{\int_{\alpha} \rho_{\mathbb{H}}(z)|dz| \mid \alpha \in \Gamma[\mu i,\lambda i]\right\} =$$
$$= \min\left\{\int_{\alpha} \rho_{\mathbb{H}}(z)|dz| \mid \alpha \in \Gamma[\mu i,\lambda i]\right\} = \ln\frac{\lambda}{\mu}.$$

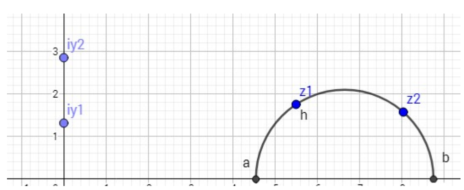
Sledi da je (jedna od) formula za hiperboličko rastojanje u $\mathbb{H}$ data sa

$$d_{\mathbb{H}}(z,w) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(z),\gamma(w)) = d_{\mathbb{H}}(\mu i,\lambda i) = \ln\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| = \ln\frac{\lambda}{\mu},\ \lambda,\mu > 0,\ \lambda > \mu.$$

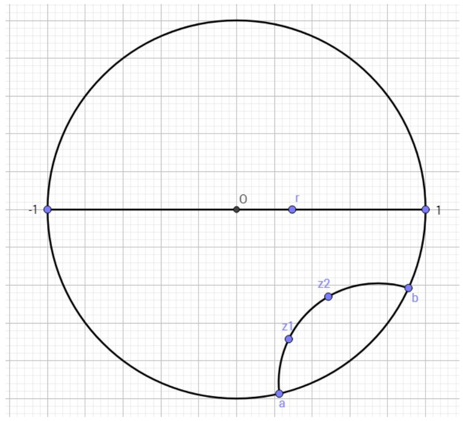
Naravno, ako je $\lambda < \mu$, to je $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, odnosno $\ln\frac{\lambda}{\mu} < 0$, što nije u skladu sa osobinama funkcija rastojanja.

Definicija 14. *Ako su $z,w \in \mathbb{H}$ proizvoljne tačke, da bi se odredilo $h-$rastojanje, potrebno je konstruisati bilinearno preslikavanje $\gamma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $\gamma(z) = \mu i$ i $\gamma(w) = \lambda i$. Tada je $h-$rastojanje u $\mathbb{H}$ između tačaka z i w data sa* $d_{\mathbb{H}}(z,w) = d_{\mathbb{H}}(\mu i,\lambda i) = \left|\ln\frac{\lambda}{\mu}\right|$.

Postoji još nekoliko formula za $h-$rastojanje u $\mathbb{H}$, koje su u skladu sa prethodnom definicijom. Pokušajmo ih naći.
Neka je situacija kao na slici. Preslikavanje $L(z) = \frac{z-a}{b-z}$ slika z_1 u iy_1, z_2



u iy_2, a u 0 i b u ∞. Pošto je dvorazmera invarijanta bilinearnog preslikavanja to je $[z_1,z_2;b,a] = [L(z_1),L(z_2);L(b),L(a)] = [iy_1,iy_2;\infty,0] = \frac{y_2}{y_1}$. Sledi, $d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2) = \left|\ln\frac{y_2}{y_1}\right| = |\ln[z_1,z_2;b,a]|$. Analogno se može postupiti i u slučaju Poenkareovog disk modela.



$$[z_1, z_2; b, a] = [0, r; 1, -1] = \frac{-(r+1)}{r-1} = \frac{1+r}{1-r}$$
$$\implies d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = |\ln[z_1, z_2; b, a]|$$

Nastavimo sa ispitivanjem različitih zapisa formula za izračunavanje $h-$ *rastojanja* u $\mathbb{H}$, sa ciljem da pronađemo još jedan unificiran način izračunavanja $h-$ rastojanja, osim gore pomenute formule koja sadrži dvorazmeru.
Neka su tačke $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. Posmatrajmo preslikavanje $T_{z_2}(z) = \dfrac{z - z_2}{z - \overline{z_2}}$. Preslikavanje T_{z_2} slika $\mathbb{H}$ u $\mathbb{D}$, tačke z_1 i $\overline{z_1}$ na $T_{z_2}(z_1)$ i $T_{z_2}(\overline{z_1})$, simetrično u odnosu na $\mathbb{T} = \{z|\ |z| = 1\}$, zbog osobine bilinearnih preslikavanja da čuvaju simetriju. Naravno, $T_{z_2}(z_2) = 0$ i $T_{z_2}(\overline{z_2}) = \infty$.

$$(z_1, \overline{z_1}; z_2, \overline{z_2}) = \frac{z_1 - z_2}{\overline{z_1} - z_2} : \frac{z_1 - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \overline{z_2}} : \frac{\overline{z_1} - z_2}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} = \frac{T_{z_2}(z_1)}{T_{z_2}(\overline{z_1})}$$

Kako su tačke $T_{z_2}(z_1)$ i $T_{z_2}(\overline{z_1})$ simetrične u odnosu na $\mathbb{T}$, to je $T_{z_2}(z_1)\cdot\overline{T_{z_2}(\overline{z_1})} = 1$, tj. $T_{z_2}(\overline{z_1}) = \dfrac{1}{\overline{T_{z_2}(z_1)}}$. Sledi $(z_1, \overline{z_1}; z_2, \overline{z_2}) = T_{z_2}(z_1) \cdot \overline{T_{z_2}(z_1)} = |T_{z_2}(z_1)|^2$.
Uvedimo funkciju $\delta(z_1, z_2) = |T_{z_2}(z_1)|$. Kako je $\delta^2(z_1, z_2) = (z_1, \overline{z_1}; z_2, \overline{z_2}) = (L(z_1), L(\overline{z_1}); L(z_2), L(\overline{z_2})) = \delta^2(L(z_1), L(z_2))$ za proizvoljni bilinearni automorfizam L oblasti $\mathbb{H}$ i pošto je δ nenegativna na osnovu načina definisanja, to je funkcija δ invarijanta u odnosu na bilinearne automorfizme oblasti $\mathbb{H}$. Kada povežemo ovaj zaključak sa prethodnim razmatranjem o dvorazmeri, dobijamo

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(L(z_1), L(z_2)) = \delta(iy_1, iy_2) = |T_{iy_2}(iy_1)| = \left|\frac{iy_1 - iy_2}{iy_1 - \overline{iy_2}}\right| = \left|\frac{iy_1 - iy_2}{iy_1 + i\overline{y_2}}\right| =$$
$$= \left|\frac{y_1 - y_2}{y_1 + \overline{y_2}}\right| = \left|\frac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2}\right| = \frac{y_2 - y_1}{y_2 + y_1} = \frac{\frac{y_2}{y_1} - 1}{\frac{y_2}{y_1} + 1} = \frac{e^{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)} - 1}{e^{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)} + 1} = \tanh\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2}.$$

Uočavamo analogiju sa odgovarajućim funkcijama Poenkareovog disk modela. Zaista, ovako definisana funkcija δ predstavlja pseudohiperboličko rastojanje na $\mathbb{H}$. Iako nismo to dokazali, moguće je formalnim putem, kroz niz lema i teorema, analogno dokazu za slučaj Poenkareovog disk modela, doći do rastojanja i pseudohiperboličkog rastojanja u $\mathbb{H}$, ali nama će ovo razmatranje biti dovoljno. Sada možemo da uvedemo jednoobrazne oznake za rastojanje, odnosno pseudohiperboličko rastojanje, u $\mathbb{H}$. Dakle, $\lambda_{\mathbb{H}} = d_{\mathbb{H}},\ \delta_{\mathbb{H}} = \delta$.

Teorema 10. *1.* $\lambda_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \dfrac{|z_1 - z_2|^2}{2Im\ z_1 Im\ z_2}\right)$,

2. $\lambda_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \dfrac{2|z_1 - z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}\right)$.

Dokaz. 1.

$$\cosh \lambda_{\mathbb{H}} = \frac{e^{\lambda_{\mathbb{H}}} + e^{-\lambda_{\mathbb{H}}}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 + \delta_{\mathbb{H}}}{1 - \delta_{\mathbb{H}}} + \frac{1 - \delta_{\mathbb{H}}}{1 + \delta_{\mathbb{H}}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + \delta_{\mathbb{H}})^2 + (1 - \delta_{\mathbb{H}})^2}{(1 - \delta_{\mathbb{H}})(1 + \delta_{\mathbb{H}})} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + 2\delta_{\mathbb{H}}^2}{1 - \delta_{\mathbb{H}}^2} = \frac{1 + (\delta_{\mathbb{H}})^2}{1 - (\delta_{\mathbb{H}})^2} = 1 + \frac{2\delta_{\mathbb{H}}^2}{1 - \delta_{\mathbb{H}}^2} = 1 + \frac{2\left|\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - \overline{z_2}}\right|^2}{1 - \left|\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - \overline{z_2}}\right|^2} =$$

$$= 1 + \frac{\dfrac{2|z_1 - z_2|^2}{|z_1 - \overline{z_2}|^2}}{\dfrac{|z_1 - \overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2}{|z_1 - \overline{z_2}|^2}} = 1 + \frac{2|z_1 - z_2|^2}{|z_1 - \overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2}$$

Potrebno je još da izrazimo $|z_1 - \overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2$.

$$|z_1 - \overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - \overline{z_2})\overline{(z_1 - \overline{z_2})} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} =$$
$$(z_1 - \overline{z_2})(\overline{z_1} - z_2) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 - z_1 z_2 - \overline{z_1}\,\overline{z_2} + |z_2|^2 - |z_1|^2$$
$$+ z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} - |z_2|^2 = z_1(\overline{z_2} - z_2) - \overline{z_1}(\overline{z_2} - z_2) = (z_1 - \overline{z_1})(\overline{z_2} - z_2) =$$
$$= 2iIm\ z_1 \cdot (-2i)Im\ z_2 = -4i^2 Im\ z_1 Im\ z_2 = 4Im\ z_1 Im\ z_2$$

Sledi,

$$\lambda_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \operatorname{arccosh}(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2Im\ z_1 Im\ z_2}),\ \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),\ x \geq 1.$$

2.

$$\cosh \lambda_{\mathbb{D}} = \frac{e^{\lambda_{\mathbb{D}}} + e^{-\lambda_{\mathbb{D}}}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 + \delta_{\mathbb{D}}}{1 - \delta_{\mathbb{D}}} + \frac{1 - \delta_{\mathbb{D}}}{1 + \delta_{\mathbb{D}}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \delta_{\mathbb{D}}^2 + 1 - \delta_{\mathbb{D}}^2}{(1 - \delta_{\mathbb{D}})(1 + \delta_{\mathbb{D}})} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + 2\delta_{\mathbb{D}}^2}{1 - \delta_{\mathbb{D}}^2} = \frac{1 + \delta_{\mathbb{D}}^2}{1 - \delta_{\mathbb{D}}^2} = 1 + \frac{2\delta_{\mathbb{D}}^2}{1 - \delta_{\mathbb{D}}^2} = 1 + \frac{2\left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|^2}{1 - \left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|^2} =$$

$$= 1 + \frac{2\dfrac{|z_2 - z_1|^2}{|1-\overline{z_1}z_2|^2}}{\dfrac{|1-\overline{z_1}z_2|^2 - |z_2 - z_1|^2}{|1-\overline{z_1}z_2|^2}} = 1 + \frac{2|z_1 - z_2|^2}{|1-\overline{z_1}z_2|^2 - |z_2 - z_1|^2}$$

$$|1-\overline{z_1}z_2|^2 - |z_2 - z_1|^2 = (1-\overline{z_1}z_2)\overline{(1-\overline{z_1}z_2)} - (z_2 - z_1)\overline{(z_2 - z_1)} =$$
$$(1-\overline{z_1}z_2)(1 - z_1\overline{z_2}) - (z_2 - z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) = 1 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_2|^2$$
$$+\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} - |z_1|^2 = 1 - |z_1|^2 + |z_2|^2(|z_1|^2 - 1) = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

Sledi,

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{2|z_1 - z_2|^2}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}\right), \ \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \ x \geq 1. \tag{5}$$

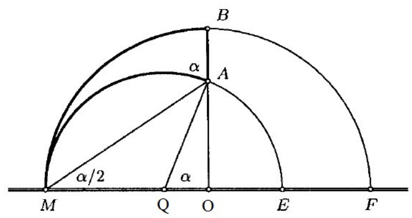
■

Analizirajmo malo dokazane formule. Ako u prvoj formuli uzmemo bar jednu tačku (z_1 ili z_2) tako da pripada realnoj osi, odnosno da joj je imaginaran deo jednak 0, primećujemo da je $h-$rastojanje beskonačno. Zaključujemo da je $h-$rastojanje između proizvoljne tačke u $\mathbb{H}$ i tačke na realnoj osi beskonačno, a tačke na realnoj osi se, shodno tome, nazivaju beskonačno daleke tačke.
Analogno važi i za drugu formulu, tj. uzevši bar jednu tačku sa oboda jediničnog kruga ($\mathbb{T} = \{z | \ |z| = 1\}$), dobijamo beskonačno rastojanje. Dakle, u Poenkareovom disk modelu $\mathbb{D}$, tačke koje se nalaze na jediničnoj kružnici $\mathbb{T}$ nazivaju se beskonačno daleke tačke.

Prethodni zaključak može se izvesti i iz drugih oblika funkcija $h-$rastojanja u $\mathbb{H}$, odnosno $\mathbb{D}$, ali je mišljenje autora da su prethodno dokazane formule najprikladnije za to. Takođe, uprkos činjenici da se izvedeni zaključak navodi u većini relevantne literature bez dokaza, često i kao uvod u znatno komplikovanija razmatranja, autor se nada da će ga čitalac ceniti, pošto je izveden kao posledica duge i pedantne sekvence dokazivanja, ma kako trivijalno delovao.

4.3 Funkcija Lobačevskog

Neka je posmatrani model $\mathbb{H}$. Analogno se može dokazati u bilo kom drugom modelu hiperboličke planimetrije.
Podsetimo se da smo već dokazali $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i) = \ln \frac{\lambda}{\mu}, \ \lambda, \mu > 0$, $\lambda > \mu$. Radi lakoće zapisa označimo $h-$rastojanje sa d i posmatrajmo sledeću sliku. Tačke $A(\mu i)$ i $B(\lambda i)$ nalaze se na imaginarnoj osi i posmatrana $h-$dužina je $d_{\mathbb{H}}(A, B) = d$. Iz našeg dosadašnjeg znanja poluravanskog modela znamo da su $h-$prave MF i ME polukružnice normalne na apsolutu, tj. realnu osu. Stoga, ako obeležimo $\angle MAB = \alpha$, jasno je da je $\angle MAB = \angle AQE = \alpha$, kao uglovi sa normalnim kracima. Takođe, pošto je $\angle AME$ periferijski ugao



naspram $h-$prave (luka) AE, to je $\angle AME = \frac{1}{2}\angle AQE = \frac{1}{2}\alpha$.
Kako je $d = \ln\frac{OB}{OA}$, sledi

$$e^d = \frac{OB}{OA} = \frac{OM}{OA} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$
$$\Longrightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = e^{-d} \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg} e^{-d},\ \alpha = 2\operatorname{arctg} e^{-d}.$$

Primetimo da što je tačka A bliža tački B, tj. kad $d \longrightarrow 0$, to $\alpha \longrightarrow \frac{\pi}{2}$. Slično, što se tačka A približava 0, tj. kad $d \longrightarrow \infty$, to $\alpha \longrightarrow 0$.
Ako označimo sa $\Pi(d) = \alpha = 2\operatorname{arctg} e^{-d}$ tzv. funkciju Lobačevskog, primećujemo da funkcija $\Pi(d)$ opada od $\frac{\pi}{2}$ do 0 kad d raste od 0 do ∞.

5 Hiperbolička geometrija

5.1 $H-$trougao

5.1.1 Trigonometrija $h-$trougla

Sledeće tri propozicije će nam pomoći u nalaženju kosinusne teoreme hiperboličke geometrije.

Propozicija 8. *$h-$krug sa centrom 0 i $h-$poluprečnikom r je euklidski krug sa centrom u 0 i poluprečnikom* $\tanh \frac{r}{2}$.

Dokaz.

$$z \in k_h(0,r) \iff d_{\mathbb{D}}(0,z) = r \iff \ln \frac{1+|z|}{1-|z|} = r \iff \frac{1+|z|}{1-|z|} = e^r$$
$$\iff 1+|z| = (1-|z|)e^r \iff |z| + |z|e^r = e^r - 1 \iff |z|(e^r+1) = e^r - 1$$
$$\iff |z| = \frac{e^r-1}{e^r+1} = \tanh\frac{r}{2} \iff k_h(0,r) = k\left(0, \tanh\frac{r}{2}\right)$$

■

Propozicija 9. *Za svako $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ važi*

1. $\cosh^2 z_1 - \sinh^2 z_1 = 1$,
2. $2\cosh z_1 \sinh z_1 = \sinh 2z_1$,
3. $\sinh^2 z_1 = \frac{1}{2}\cosh 2z_1 - \frac{1}{2}$,
4. $\cosh^2 z_1 = \frac{1}{2}\cosh 2z_1 + \frac{1}{2}$,
5. $\sinh^2 z_1 \cosh^2 z_2 + \cosh^2 z_1 \sinh^2 z_2 = \frac{1}{2}\cosh 2z_1 \cosh 2z_2 - 1$,
6. $1 - \tanh^2 z_1 = \operatorname{sech}^2 z_1$.

Dokaz.

$$\cosh^2 z_1 - \sinh^2 z_1 = \left(\frac{1}{2}(e^{z_1}+e^{-z_1})\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^{z_1}-e^{-z_1})\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2z_1}+2+e^{-2z_1}) -$$
$$\frac{1}{4}(e^{2z_1}-2+e^{-2z_1}) = \frac{1}{4}(e^{2z_1}+2+e^{-2z_1}-e^{2z_1}+2-e^{-2z_1}) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

$$2\sinh z_1 \cosh z_1 = 2\cdot\frac{1}{2}(e^{z_1}-e^{-z_1})\cdot\frac{1}{2}(e^{z_1}+e^{-z_1}) = \frac{1}{2}\left((e^{z_1})^2 - (e^{-z_1})^2\right) =$$
$$\frac{1}{2}(e^{2z_1}-e^{-2z_1}) = \sinh 2z_1$$

$$\frac{1}{2}\cosh 2z_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(e^{2z_1} + e^{-2z_1}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(e^{2z_1} - 2 + e^{-2z_1}) =$$
$$\left(\frac{1}{2}(e^{z_1} - e^{-z_1})\right)^2 = \sinh^2 z_1$$

$$\frac{1}{2}\cosh 2z_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(e^{2z_1} + e^{-2z_1}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(e^{2z_1} + 2 + e^{-2z_1}) =$$
$$\left(\frac{1}{2}(e^{z_1} + e^{-z_1})\right)^2 = \cosh^2 z_1$$

$$\sinh^2 z_1 \cosh^2 z_2 + \cosh^2 z_1 \sinh^2 z_2 = \frac{1}{2}\cosh 2z_1 \cosh 2z_2 - 1 =$$
$$\left(\frac{1}{2}(e^{z_1} - e^{-z_1})\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}(e^{z_2} + e^{-z_2})\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(e^{z_1} + e^{-z_1})\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}(e^{z}_2 - e^{-z_2})\right)^2 =$$
$$\frac{1}{4}(e^{2z_1} - 2 + e^{-2z_1})\frac{1}{4}(e^{2z_2} + 2 + e^{-2z_2}) + \frac{1}{4}(e^{2z_1} + 2 + e^{-2z_1})\frac{1}{4}(e^{2z_2} - 2 + e^{-2z_2}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(e^{2z_1} + e^{-2z_1}) - 1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(e^{2z_2} + e^{-2z_2}) + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(e^{2z_1} + e^{-2z_1}) + 1\right)\cdot$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(e^{2z_2} + e^{-2z_2}) - 1\right) = \frac{1}{4}(\cosh 2z_1 - 1)(\cosh 2z_2 + 1) + \frac{1}{4}(\cosh 2z_1 + 1)(\cosh 2z_2 - 1) =$$
$$= \frac{1}{4}(\cosh 2z_1 \cosh 2z_2 + \cosh 2z_1 - \cosh 2z_2 - 1 + \cosh 2z_1 \cosh 2z_2 - \cosh 2z_1 + \cosh 2z_2 - 1) =$$
$$= \frac{1}{4}(2\cosh 2z_1 \cosh 2z_2 - 2) = \frac{1}{2}(\cosh 2z_1 \cosh 2z_2 - 1)$$

$$1 - \tanh^2 z_1 = 1 - \left(\frac{e^{2z_1} - 1}{e^{2z_1} + 1}\right)^2 = \frac{(e^{2z_1} + 1)^2 - (e^{2z_1} - 1)^2}{(e^{2z_1} + 1)^2} =$$
$$= \frac{e^{4z_1} + 2e^{2z_1} + 1 - e^{4z_1} + 2e^{2z_1} - 1}{(e^{2z_1} + 1)^2} = \frac{4e^{2z_1}}{(e^{2z_1} + 1)^2} = \left(\frac{2e^{z_1}}{e^{2z_1} + 1}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{2}{e^{z_1} + e^{-z_1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cosh z_1}\right)^2 = \operatorname{sech}^2 z_1$$

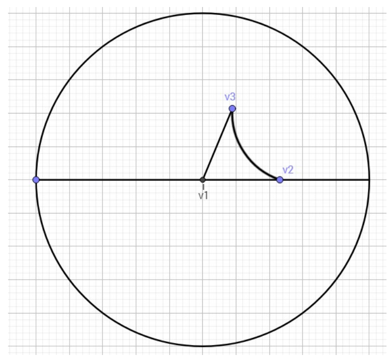
■

Propozicija 10. *Za svaki par tačaka $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ važi*

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)\right) = \frac{1}{2}(\cosh d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) - 1).$$

Dokaz. Dokaz se oslanja na formulu za rastojanje u Poenkareovom disku $\mathbb{D}$, (5), i 3. stavku prethodne propozicije. ■

Neka je T kompaktan $h-$trougao u $\mathbb{D}$ sa temenima v_1, v_2 i v_3 i neka su a, b, c $h-$dužine stranica naspram temena v_1, v_2, v_3, respektivno, i unutrašnji uglovi α, β i γ kod temena v_1, v_2 i v_3, respektivno. Kako bilinearni automorfizmi oblasti $\mathbb{D}$ čuvaju uglove i $h-$rastojanje, to možemo izabrati $f \in Aut(\mathbb{D})$ t.d. $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = r > 0$, $f(v_3) = se^{i\alpha}, \alpha \in (0, \pi)$ i $d_{\mathbb{D}}(v_i, v_j) = d_{\mathbb{D}}(f(v_i), f(v_j))$, $i \neq j, i, j = 1, 2, 3$. Radi lakoće zapisa, pretpostavimo da je već izvršeno preslikavanje f i proglasimo $v_1 = 0, v_2 = r > 0$ i $v_3 = se^{i\alpha}, \alpha \in (0, \pi)$. Na osnovu prve propozicije zaključujemo $r = \tanh \frac{c}{2}, s = \tanh \frac{b}{2}$, gde je r euklidska dužina stranice $v_1 v_2$, a c $h-$dužina iste stranice, odnosno analogno za s i b u odnosu na stranicu $v_1 v_3$. Primenimo euklidsku kosinusnu teoremu na euklidski trougao sa temenima v_1, v_2 i v_3.



Slika 13: h-trougao

$$|v_2 - v_3|^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos \alpha$$

$$|v_2 - v_3|^2 = \tanh^2 \frac{c}{2} + \tanh^2 \frac{b}{2} - 2 \tanh \frac{c}{2} \tanh \frac{b}{2} \cos \alpha$$

Na osnovu druge propozicije važi da je

$$\frac{|v_2 - v_3|^2}{(1 - |v_2|^2)(1 - |v_3|^2)} = \frac{|v_2 - v_3|^2}{(1 - r^2)(1 - s^2)} = \sinh^2 \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(v_2, v_3) \right) = \sinh^2 \frac{a}{2}.$$

Sledi, na osnovu stavki treće propozicije

$$|v_2 - v_3|^2 = (1 - r^2)(1 - s^2) \sinh^2 \frac{a}{2} = \left(1 - \tanh^2 \frac{c}{2}\right) \left(1 - \tanh^2 \frac{b}{2}\right) \sinh^2 \frac{a}{2} =$$

$$= \operatorname{sech}^2 \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{b}{2} \sinh^2 \frac{a}{2}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{sech}^2 \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{b}{2} \sinh^2 \frac{a}{2} = \tanh^2 \frac{c}{2} + \tanh^2 \frac{b}{2} - 2 \tanh \frac{c}{2} \tanh \frac{b}{2} \cos \alpha$$

$$\iff \frac{\sinh^2\frac{a}{2}}{\cosh^2\frac{c}{2}\cosh^2\frac{b}{2}} = \frac{\sinh^2\frac{c}{2}}{\cosh^2\frac{c}{2}} + \frac{\sinh^2\frac{b}{2}}{\cosh^2\frac{b}{2}} - 2\,\frac{\sinh\frac{c}{2}}{\cosh\frac{c}{2}}\frac{\sinh\frac{b}{2}}{\cosh\frac{b}{2}}\cos\alpha \;/\cdot\cosh^2\frac{c}{2}\cosh^2\frac{b}{2}$$

$$\iff \sinh^2\frac{a}{2} = \sinh^2\frac{c}{2}\cosh^2\frac{b}{2} + \sinh^2\frac{b}{2}\cosh^2\frac{c}{2} - 2\sinh\frac{c}{2}\sinh\frac{b}{2}\cosh\frac{c}{2}\cosh\frac{b}{2}\cos\alpha$$

$$\iff \frac{1}{2}\cosh a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cosh b\cosh c - 1) - \frac{1}{2}\sinh b\sinh c\cos\alpha \;/\cdot 2$$

$$\iff \cosh a - 1 = \cosh b\cosh c - 1 - \sinh b\sinh c\cos\alpha$$

$$\iff \cosh a = \cosh b\cosh c - \sinh b\sinh c\cos\alpha$$

Formula

$$\cosh a = \cosh b\cosh c - \sinh b\sinh c\cos\alpha \tag{6}$$

naziva se *I* kosinusna teorema hiperboličke geometrije. Specijalno, za $\alpha = \frac{\pi}{2}$, dobija se

$$\cosh a = \cosh b\cosh c \tag{7}$$

koju nazivamo Pitagorinom teoremom hiperboličke geometrije. Pokušajmo da izvedemo sinusnu teoremu hiperboličke geometrije iz kosinusne. Označimo sa $A = \cosh a, B = \cosh b$ i $C = \cosh c$. Zaključujemo

$$\cos\alpha = \frac{\cosh b\cosh c - \cosh a}{\sinh b\sinh c} = \frac{BC - A}{\sinh b\sinh c}$$

$$\Longrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{BC - A}{\sinh b\sinh c}\right)^2 \;/\cdot\sinh^2 b\sinh^2 c$$

$$\sin^2\alpha\sinh^2 b\sinh^2 c = \sinh^2 b\sinh^2 c - (BC - A)^2 =$$

$$(\cosh^2 b - 1)(\cosh^2 c - 1) - (BC - A)^2 = (B^2 - 1)(C^2 - 1) - (BC - A)^2$$

$$= B^2C^2 - B^2 - C^2 + 1 - B^2C^2 + 2ABC - A^2 = 1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\sinh^2 a} = \frac{1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC}{\sinh^2 a\sinh^2 b\sinh^2 c} = K$$

Analogno se dobija $\frac{\sin^2\beta}{\sinh^2 b} = K$ i $\frac{\sin^2\gamma}{\sinh^2 c} = K$. Kada spojimo sve tri jednakosti u jednu dobijamo $\frac{\sin^2\alpha}{\sinh^2 a} = \frac{\sin^2\beta}{\sinh^2 b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sinh^2 c}$ odnosno $\frac{\sinh^2 a}{\sin^2\alpha} = \frac{\sinh^2 b}{\sin^2\beta} = \frac{\sinh^2 b}{\sin^2\beta}$. Pošto su sve navedene funkcije pozitivne pod uslovima datim u ovom razmatranju, to možemo uzeti kvadratni koren jednačine, čime dobijamo

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma} \tag{8}$$

koju nazivamo sinusna teorema hiperboličke geometrije. Jasno je da zamenom stranica i odgovarajućeg naspramnog ugla dobijamo tri varijante kosinusne teoreme:

$$\begin{aligned}
\cosh a &= \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos\alpha \\
\cosh b &= \cosh a \cosh c - \sinh a \sinh c \cos\beta \\
\cosh c &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma
\end{aligned}$$

odnosno, u skladu sa uvedenim smenama,

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{BC - A}{\sinh b \sinh c} = \frac{BC - A}{\sqrt{(B^2-1)(C^2-1)}} \\
\cos\beta &= \frac{AC - B}{\sinh a \sinh c} = \frac{AC - B}{\sqrt{(A^2-1)(C^2-1)}} \\
\cos\gamma &= \frac{AB - C}{\sinh a \sinh b} = \frac{AB - C}{\sqrt{(A^2-1)(B^2-1)}}.
\end{aligned}$$

Takođe, na osnovu prethodnog izvođenja, znamo

$$\sin\alpha = \frac{1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC}{\sinh^2 b \sinh^2 c} = \frac{1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC}{(B^2-1)(C^2-1)}.$$

Dakle, $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC}{(B^2-1)(C^2-1)}}$.

Analogno, $\sin\beta = \sqrt{\dfrac{1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC}{(A^2-1)(C^2-1)}}$.

Nađimo vrednost izraza $-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cosh c$.

$$\begin{gathered}
-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cosh c = \frac{A - BC}{\sinh b \sinh c} \cdot \frac{AC - B}{\sinh a \sinh c} + \\
+ \sqrt{\frac{1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC}{(B^2-1)(C^2-1)}} \cdot \sqrt{\frac{1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC}{(A^2-1)(C^2-1)}} \cdot C \\
\frac{(A - BC)(AC - B)}{(C^2-1)\sqrt{(A^2-1)(B^2-1)}} + \frac{1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC}{(C^2-1)\sqrt{(A^2-1)(B^2-1)}} \cdot C \\
\frac{A^2C - AB - ABC^2 + B^2C + C - A^2C - B^2C - C^3 + 2ABC^2}{(C^2-1)\sqrt{(A^2-1)(B^2-1)}} = \\
\frac{-AB + ABC^2 + C - C^3}{(C^2-1)\sqrt{(A^2-1)(B^2-1)}} = \frac{AB(C^2-1) - C(C^2-1)}{(C^2-1)\sqrt{(A^2-1)(B^2-1)}} = \\
\frac{(AB - C)(C^2-1)}{(C^2-1)\sqrt{(A^2-1)(B^2-1)}} = \frac{AB - C}{\sqrt{(A^2-1)(B^2-1)}} = \cos\gamma
\end{gathered}$$

Jednačina koju smo upravo dokazali

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cosh c \tag{9}$$

naziva se II kosinusna teorema hiperboličke geometrije. Ona ne važi u euklidskoj geometriji, niti ima neki ekvivalent u istoj.

5.1.2 Površina $h-$trougla

Lema 12. *Zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog $h-$trougla je manji od π.*

Dokaz. Dokažimo u $\mathbb{D}$. Ako je proizvoljni $h-$trougao takav da mu je jedno teme 0, tada su mu dve stranice delovi polupravih iz 0, a treća je deo kružnice. Stoga su $h-$uglovi na trećoj stranici očigledno manji od odgovarajućih euklidskih uglova, pa važi tvrđenje. Ako proizvoljan trougao u $\mathbb{D}$ nema za jedno teme 0, uvek je moguće izabrati bilinearni automorfizam oblasti $\mathbb{D}$ koji slika jedno teme trougla u 0, čime se dobija prethodni slučaj. Time je dokaz završen. ■

Definicija 15. *Teme $h-$poligona u $\mathbb{H}$ je idealno ako se dve $h-$linije koje ga sadrže seku u ∞.*

Definicija 16. *Površina oblasti X u $\mathbb{H}$ data je sa*
$P_{\mathbb{H}}(X) = \int_X \rho_{\mathbb{H}}^2(z)|dz| = \int_X \frac{1}{(\text{Im } z)^2}|dz| = \int_X \frac{1}{y^2}dxdy.$

Teorema 11. *Površina oblasti X u poluravanskom modelu $\mathbb{H}$ je invarijantna u odnosu na delovanje opštih automorfizama oblasti $\mathbb{H}$.*

Dokaz. Dokaz ove teoreme je primer primene teoreme o promeni koordinata. Takodje, pošto smo uspostavili identifikaciju tačaka iz xy ravni sa tačkama $z = x + iy$ iz $\mathbb{C}$ (specijalno $\mathbb{H}$), ništa nas ne sprečava da opšte bilinearne automorfizme oblasti $\mathbb{H}$, koje su funkcije oblika $f = f(z)$ posmatramo kao vektorske funkcije F dve promenljive, x i y.
Površina skupa $F(X)$ data je sa

$$\int_{F(X)} \rho_{\mathbb{H}}(x,y)dxdy = \int_X (\rho_{\mathbb{H}} \circ F)(x,y)|\det(DF)|dxdy\ .$$

Kako je opšti oblik automorfizma oblasti $\mathbb{H}$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{(cz+d)(c\overline{z}+d)} = \frac{acx^2+acy^2+bd+bcx+adx}{(cx+d)^2+c^2y^2} + i\cdot\frac{y}{(cx+d)^2+c^2y^2},$$
$$a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1,$$

za funkciju F izabraćemo funkciju
$F(x,y) = \left(\frac{acx^2+acy^2+bd+bcx+adx}{(cx+d)^2+c^2y^2}, \frac{y}{(cx+d)^2+c^2y^2}\right).$
Računski se pokazuje da je $DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{(cx+d)^2-c^2y^2}{((cx+d)^2+c^2y^2)^2} & \frac{2cy(cx+d)}{((cx+d)^2+c^2y^2)^2} \\ \frac{-2cy(cx+d)}{((cx+d)^2+c^2y^2)^2} & \frac{(cx+d)^2-c^2y^2}{((cx+d)^2+c^2y^2)^2} \end{pmatrix}$
i $\det(DF(x,y)) = \frac{1}{((cx+d)^2+c^2y^2)^2}$.

Da bismo izračunali površinu oblasti u $\mathbb{H}$ moramo da integralimo funkciju gustine $\rho_{\mathbb{H}}(x,y) = \frac{1}{y^2}$, odnosno $(\rho_{\mathbb{H}} \circ F)(x,y) = \frac{((cx+d)^2+c^2y^2)^2}{y^2}$. Sledi

$$P_{\mathbb{H}}(F(X)) = \int_{F(X)} \rho_{\mathbb{H}}(x,y)dxdy = \int_{F(X)} \frac{1}{y^2}dxdy = \int_X (\rho_{\mathbb{H}} \circ F)(x,y)\,|\det(DF(x,y))|dxdy =$$
$$= \int_X \frac{((cx+d)^2+c^2y^2)^2}{y^2} \cdot \frac{1}{((cx+d)^2+c^2y^2)^2}dxdy = \int_X \frac{1}{y^2}dxdy = P_{\mathbb{H}}(X).$$

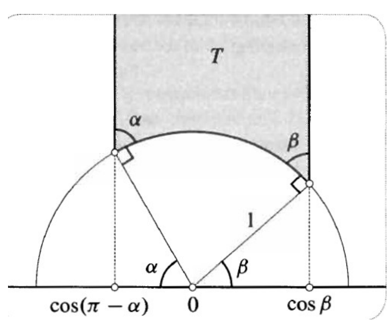
Time je teorema dokazana. ■

Lema 13. *Ako je T hiperbolički trougao sa jednim idealnim temenom i unutrašnjim uglovima kod druga dva α i β, tada je $P_{\mathbb{H}}(T) = \pi - (\alpha+\beta)$.*

Dokaz. Bez umanjenja opštosti, neka je ivica $h-$trougla konačne dužine deo polukruga jedinične kružnice (kao na slici). Naravno, u slučaju kada je ivica konačne dužine deo polukruga u $\mathbb{H}$ sa centrom u tački a i poluprečnikom R, dovoljno je primeniti bilinearno preslikavanje $f(z) = \frac{z-a}{R}$ na trougao, čime se problem svodi na prethodni slučaj.

$$P_{\mathbb{H}}(T) = \int_T \frac{1}{(Im\ z)^2}|dz| = \Big[z = x+iy,\ x \in [\cos(\pi-\alpha), \cos\beta],\ y \in [\sqrt{1-x^2}, \infty]\Big]$$
$$= \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2}\right) dx = \left[\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y}^2 = \frac{-1}{y} \Big/_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] =$$
$$= \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [x = \cos\theta,\ dx = -\sin\theta d\theta] = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta d\theta}{\sin\theta} =$$
$$= -\theta \Big/_{\pi-\alpha}^{\beta} = \theta \Big/_{\beta}^{\pi-\alpha} = \pi - \alpha - \beta = \pi - (\alpha+\beta)$$

■

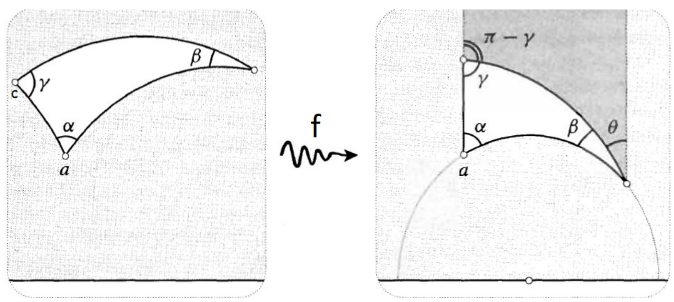


Teorema 12. *(Gaus-Boneova formula) Neka je T proizvoljni $h-$trougao sa unutrašnjim uglovima α, β i γ u odgovarajućim temenima a, b i c, respektivno. Tada je $P_{\mathbb{H}}(T) = \pi - (\alpha+\beta+\gamma)$.*

Dokaz. Ako je slučaj kao na levoj strani sledeće slike, prvo se izvrši bilinearno preslikavanje f, $h-$rotacija oko tačke a koja dovodi stranicu ac u vertikalni položaj. Primećujemo da je tada površina $h-$trougla jednaka razlici površina $h-$trougla sa jednim idealnim temenom, tj.

$$P_{\mathbb{H}}(T) = \pi - (\alpha + (\beta + \theta)) - (\pi - ((\pi - \gamma) + \theta)) =$$
$$= \pi - \alpha - \beta - \theta - \pi + \pi - \gamma + \theta = \pi - \alpha - \beta - \gamma = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

■



Definicija 17. *$h-$poligon u $\mathbb{H}$ sa konačno mnogo stranica je razloživ ako ne sadrži $\mathbb{H}$.*

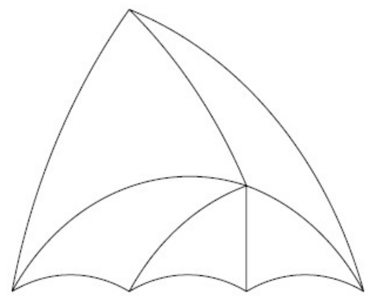
Teorema 13. *Neka je S razloživ $h-$poligon sa temenima $v_1, v_2, ..., v_n$ i unutrašnjim uglovima kod svakog temena $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, respektivno. Tada je $P_{\mathbb{H}}(S) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.*

Dokaz. Ideja je da se $h-$poligon razloži na $h-$trouglove, iskoristi Gaus-Boneova formula za površinu svakog $h-$trougla, a zatim primeni sumacija.

Neka je izvršena dekompozicija $h-$poligona na n $h-$trouglova, u oznaci T_i, $i = 1, 2, ..., n$, kao na slici. Označimo tačku u unutrašnjosti $h-$poligona sa x i uglove sa temenom u x sa λ_i, $, i = 1, 2, ..., n$. Jasno je da je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 2\pi$. Takođe, izvršivši dekompoziciju $h-$poligona primećujemo da se svaki ugao α_i, $i = 1, 2, ..., n$ deli na dva manja ugla. Označimo ih sa $\alpha_{i\ 1}$ i $\alpha_{i\ 2}, i = 1, 2, ..., n$. Numeracija svih pomenutih uglova vrši se u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu. Dodajmo takođe da je $\alpha_{n+1\ 1} = \alpha_{1\ 1}$, pa sledi

$$P_{\mathbb{H}}(S) = \sum_{i=1}^{n} P_{\mathbb{H}}(T_i) = \sum_{i=1}^{n} [\pi - (\alpha_{i\ 2} + \alpha_{i+1\ 1} + \lambda_i)] = n\pi - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i2} + \alpha_{i+11} + \lambda_i)$$
$$= n\pi - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i+11} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) = n\pi - 2\pi - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i+11} \right) =$$
$$= (n-2)\pi - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} \right) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i1} + \alpha_{i2}) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ .$$

■



Slika 14: Razloživa jednakost površina

5.2 $H-$krug

Lema 14. *Hiperbolički krug u* $\mathbb{D}$ *je euklidski i obratno, mada se centar i* $h-$*centar, kao i poluprečnik i* $h-$*poluprečnik mogu razlikovati.*

Dokaz. Napomena: Dokaz ove leme predstavlja u velikoj meri parafraziranje dokaza iste leme u knjizi [1] sa spiska literature.
Lakši slučaj smo dokazali prvom propozicijom. Neka je C $h-$krug u $\mathbb{D}$ sa $h-$centrom c i $h-$poluprečnikom s. Neka je $m \in Aut(\mathbb{D})(m(z) = \varphi_c(z)$, npr.) bilinearno preslikavanje koje slika c u 0 i čuva rastojanje. Tada je $m(C)$ hiperbolički krug u $\mathbb{D}$ sa $h-$centrom 0 i $h-$poluprečnikom s. Na osnovu propozicije, $m(C)$ je takođe i euklidski krug sa centrom u 0 i poluprečnikom $s^{'}$. Pošto je m bilinearno i $m \in Aut(\mathbb{D})$ to je m^{-1} bilinearno i $m^{-1} \in Aut(\mathbb{D})$ i m^{-1} slika uopštene krugove u $\overline{\mathbb{C}}$ na uopštene krugove u $\overline{\mathbb{C}}$. Kako ne postoji tačka u $\mathbb{D}$ koja se slika u ∞ (pošto se radi o izomorfizmu oblasti $\mathbb{D}$), to su uopštenu krugovi u $\overline{\mathbb{C}}$ zapravo krugovi, pa je $C = m^{-1}(m(C))$ takođe euklidski krug u $\mathbb{D}$ kao slika euklidskog kruga $m(C)$.
Suprotno, neka je C euklidski krug u $\mathbb{D}$. Bez umanjenja opštosti je to krug čiji centar c nije 0 (taj smo slučaj pokrili propozicijom). Neka je L euklidska linija koja prolazi kroz 0 i euklidski centar kruga C,c, i $L \perp C$. L je takođe i $h-$linija u $\mathbb{D}$ (štaviše, geodezijska linija). Neka je tačka p takva da je $d_{\mathbb{D}}(p, a_1) = d_{\mathbb{D}}(p, a_2)$, gde je $L \cap C = \{a_1, a_2\}$. Izaberimo $m \in Aut(\mathbb{D})$ koji slika p u 0 i L u $\mathbb{R}$. m čuva rastojanje, pa su slike tačaka a_1 i a_2 tačke s i $-s$, $s \in \mathbb{R}$. $m(C)$ je euklidski krug (na osnovu propozicije) i $m(C) \perp \mathbb{R}$. $m(C)$ je takođe i hiperbolički krug sa $h-$centrom u 0. Sledi, $m^{-1}(m(C)) = C$ je hiperbolički krug u $\mathbb{D}$.

■

Propozicija 11. *Obim hiperboličkog kruga h−poluprečnika r je* $2\pi\sinh r$.

Dokaz.

$$O(C_h(0,r)) = \int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}|dz| = \Big[\ \gamma(t) = \tanh\frac{r}{2}\cos t + i\tanh\frac{r}{2}\sin t,$$

$$\gamma^{'}(t) = -\tanh\frac{r}{2}\sin t + i\tanh\frac{r}{2}\cos t\ \Big] = \int_0^{2\pi}\frac{2\tanh\frac{r}{2}}{1-\tanh^2\frac{r}{2}}dt = 2\pi\cdot\frac{2\tanh\frac{r}{2}}{1-\tanh^2\frac{r}{2}}\frac{r}{2} =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{2\cdot\frac{e^r-1}{e^r+1}}{1-\left(\frac{e^r-1}{e^r+1}\right)^2} = 4\pi\cdot\frac{\frac{e^r-1}{e^r+1}}{\frac{e^{2r}+2e^r+1-e^{2r}+2e^r-1}{(e^r+1)^2}} = 4\pi\cdot\frac{(e^r-1)(e^r+1)}{4e^r} =$$

$$= \pi\cdot\frac{e^{2r}-1}{e^r} = \pi\cdot(e^r-e^{-r}) = 2\pi\cdot\frac{1}{2}(e^r-e^{-r}) = 2\pi\sinh r$$

■

Propozicija 12. *Površina h−diska h−poluprečnika r jednaka je* $4\pi\sinh^2\frac{r}{2}$.

Dokaz.

$$P(D_h(0,r)) = P\left(D(0,\tanh\frac{r}{2})\right) = \iint_{D\left(0,\tanh\frac{r}{2}\right)}\frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2}dxdy =$$

$$= \Big[\ x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, J = R, R\in[0,\tanh\frac{r}{2}], \theta\in[0,2\pi]\ \Big] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\tanh\frac{r}{2}}\frac{4}{(1-R^2)^2}RdR\right)d\theta = 2\pi\cdot\int_0^{\tanh\frac{r}{2}}\frac{4}{(1+R)^2(1-R)^2}RdR =$$

$$= \Bigg[\int\frac{4RdR}{(1+R)^2(1-R)^2} = \int\left(\frac{1}{(1-R)^2}-\frac{1}{(1+R)^2}\right)dR = \int\frac{dR}{(1-R)^2} -$$

$$\int\frac{dR}{(1+R)^2} = \frac{1}{1-R}+\frac{1}{1+R} = \frac{2}{1-R^2}\Bigg] = 2\pi\cdot\frac{2}{1-R^2}\ \Big/_0^{\tanh\frac{r}{2}} =$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{1-\tanh^2\frac{r}{2}}-1\right) = 4\pi\cdot\frac{1-1+\tanh^2\frac{r}{2}}{1-\tanh^2\frac{r}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{\sinh^2\frac{r}{2}}{\cosh^2\frac{r}{2}}}{\frac{\cosh^2\frac{r}{2}-\sinh^2\frac{r}{2}}{\cosh^2\frac{r}{2}}} = 4\pi\frac{\sinh^2\frac{r}{2}}{1} = 4\pi\sinh^2\frac{r}{2}$$

■

5.3 Gausova krivina

Definicija 18. *Funkcija $k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $k(z) = k(\rho_\Omega(z)) = \dfrac{-1}{\rho^2_\Omega(z)} \triangle (\ln(\rho_\Omega(z)))$ naziva se Gausova krivina na Ω, gde je $\rho_\Omega(z)|dz|$ Rimanova metrika na Ω i $\triangle$ Laplasijan.*

Teorema 14. *Gausova krivina na $\mathbb{D}$ i $\mathbb{H}$ je jednaka -1.*

Dokaz. Dokaz se izvodi računskim putem, u skladu sa prethodnom definicijom. Pošto je $\rho_\mathbb{D}(z) = \dfrac{2}{1-|z|^2} = \dfrac{2}{1-x^2-y^2}$, $z = x+iy$ sledi

$$k_\mathbb{D}(x,y) = -\frac{(1-x^2-y^2)^2}{4} \triangle \left(\ln \frac{2}{1-x^2-y^2}\right)$$

$$f(x,y) = \ln \frac{2}{1-x^2-y^2}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{2} \cdot \frac{-2\cdot(-2x)}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{2x}{1-x^2-y^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2(1-x^2-y^2) - 2x\cdot(-2x)}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{2-2x^2-2y^2+4x^2}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{2+2x^2-2y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{2} \cdot \frac{-2\cdot(-2y)}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{2y}{1-x^2-y^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{2(1-x^2-y^2) - 2\cdot(-2y)}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{2+2y^2-2x^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$\triangle f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = \frac{2+2x^2-2y^2+2+2y^2-2x^2}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$\Longrightarrow k_\mathbb{D}(x,y) = \frac{-(1-x^2-y^2)^2}{4} \cdot \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} = -1$$

Analogno se radi i za $\rho_\mathbb{H} = \dfrac{1}{Im\ z} = \dfrac{1}{y}$, $z = x+iy$.

$$k_\mathbb{H}(x,y) = -y^2 \triangle \left(\ln \frac{1}{y}\right)$$

$$f(x,y) = \ln \frac{1}{y}$$

$$f_x(x,y) = f_{xx}(x,y) = 0,\ f_y(x,y) = y \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{-1}{y}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{1}{y^2} \Longrightarrow \triangle f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = \frac{1}{y^2}$$

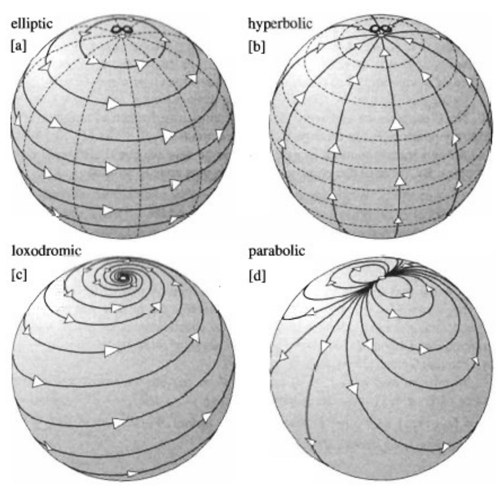
$$\Longrightarrow k_\mathbb{H}(x,y) = -y^2 \cdot \frac{1}{y^2} = -1.$$

∎

5.4 Bilinearna preslikavanja sa stanovišta geometrije

Sledeći deo rada tiče se geometrijskog viđenja klasifikacije bilinearnih preslikavanja i u velikoj meri predstavlja parafraziranje delova teksta iz knjige [7] sa spiska literature. Slike su takođe preuzete iz iste knjige.

Čitaocu se savetuje da ponovo pročita deo rada koji se tiče klasifikacije bilinearnih preslikavanja. Iz iste znamo da su eliptička preslikavanja konjugovana sa rotacijom $\mathcal{R}_\theta$, hiperbolička sa homotetijom $\mathcal{H}_{0,\,\lambda}$ i loksodromička sa preslikavanjem $g(z) = \lambda z,\ |\lambda| \neq 1,\ \lambda \in \mathbb{C}$, koje prestavlja kompoziciju rotacije i homotetije. Naravno, jasno je da su tada trivijalno $\mathcal{R}_\theta, \mathcal{H}_{0,\,\lambda}$ i $g(z) = \lambda z,\ |\lambda| \neq 1,\ \lambda \in \mathbb{C}$ eliptička, hiperbolička i loksodromička preslikavanja, respektivno, tj. njihovi arhetipovi. Znamo, takođe, da su parabolička preslikavanja konjugovana sa translacijom $T_1 = z + 1$, pa je T_1 arhetip paraboličkog preslikavanja. Ovi arhetipovi će zaokupiti našu pažnju u nastavku rada. Jasno je da preslikavanje u $\overline{\mathbb{C}}$ „indukuje" isto preslikavanje na Rimanovoj sferi $\mathbb{S}^2$, pa ćemo posmatrati, na kratko, Rimanovu sferu. U skladu sa stereografskom projekcijom severni pol sfere N poistovećujemo sa tačkom $z = \infty$, a južni pol S sa tačkom $z = 0$. Naše tvrđenje o broju invarijantnih tačaka se potvrđuje, to su 0 i ∞ za prva 3 preslikavanja i ∞ za četvrto. Invarijantne krive prikazane su strelicama.



Slika 15: Arhetipovi preslikavanja na Rimanovoj sferi

5.4.1 Inverzija - II deo

Već smo rekli da je inverzija u odnosu na krug $K(z_0, R)$ ima oblik $\mathcal{J}_K(z) = \frac{R^2}{\overline{z}-\overline{z_0}} + z_0$. Zapišimo taj izraz malo drugačije.

$$\mathcal{J}_K(z) = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} + z_0 = \frac{R^2 + z_0\overline{z} - z_0\overline{z_0}}{\overline{z} - \overline{z_0}} = \frac{z_0 \cdot \overline{z} + R^2 - |z_0|^2}{1 \cdot \overline{z} - \overline{z_0}} = \frac{A\overline{z} + B}{C\overline{z} + D}$$

Proverimo još ponašanje kompozicije 2 inverzije.

$$\mathcal{J}_{K_2} \circ \mathcal{J}_{K_1}(z) = \mathcal{J}_{K_2}\left(\frac{A_1\overline{z} + B_1}{C_1\overline{z} + D_1}\right) = \frac{A_2\dfrac{A_1\overline{z} + B_1}{C_1\overline{z} + D_1} + B_2}{C_2\dfrac{A_1\overline{z} + B_1}{C_1\overline{z} + D_1} + D_2} =$$

$$= \frac{A_2(A_1\overline{z} + B_1) + B_2(C_1\overline{z} + D_1)}{C_2(A_1\overline{z} + B_1) + D_2(C_1\overline{z} + D_1)} = \frac{\overline{z} \cdot (A_1A_2 + B_2C_1) + A_2B_1 + B_2D_1}{\overline{z} \cdot (A_1C_2 + D_2C_1) + B_1C_2 + D_1D_2} =$$

$$= \frac{A\overline{z} + B}{C\overline{z} + D} = \mathcal{J}_{K_3}(z)$$

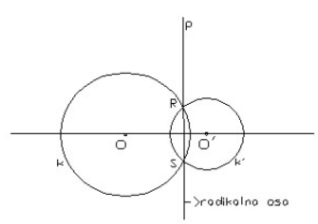
Dakle, inverzija u odnosu na krug je zapravo bilinearno preslikavanje[16] i, samim time, nema potrebe za razdvajanje ta dva pojma. Pošto je kompozicija dve inverzije bilinearno preslikavanje i kompozicija dva bilinearna preslikavanja (a samim time i konačno mnogo) je bilinearno preslikavanje, to povlači da je kompozicija parno mnogo inverzija bilinearno preslikavanje. To nam daje motivaciju za sledeću teoremu, za koju ćemo priložiti samo skicu dokaza. Ali, pre toga, jedna mala digresija.

5.4.2 Radikalna osa i pramenovi kružnica

Definicija 19. *Radikalna osa predstavlja skup tačaka koje imaju jednake potencije u odnosu na 2 zadata kruga.*

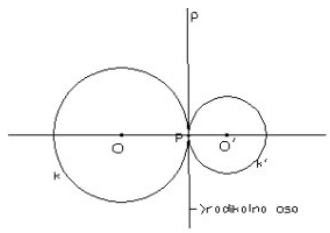
Razlikujemo 3 slučaja:

1. krugovi se seku - njihova radikalna osa sadrži presečne tačke tih dvaju krugova,

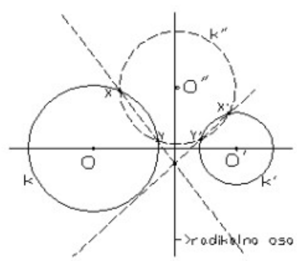


[16] potklasa bilinearnih preslikavanja

2. krugovi se dodiruju - njihova radikalna osa je zajednička tangenta tih dvaju krugova u njihovoj dodirnoj tangenti,



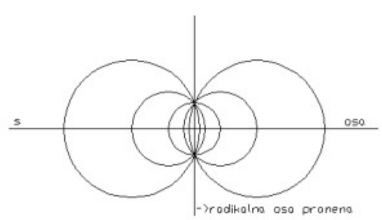
3. krugovi su disjunktni - zadati krugovi se preseku trećim i ponovi se slučaj 1) dva puta.



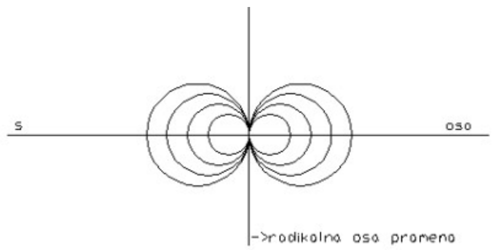
Definicija 20. *Skup svih krugova jedne ravni od kojih svaka 2 za radikalnu osu imaju istu pravu zvaćemo pramenom krugova.*

Definišimo sada tri vrste pramenova krugova:

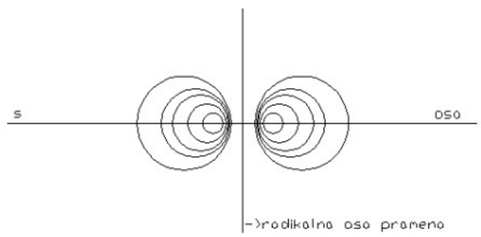
1. eliptički - svaka dva kruga pramena seku se u dvema različitim tačkama,



2. parabolički - svaka dva kruga pramena dodiruju se u istoj tački,



3. hiperbolički - svaka dva kruga pramena su disjunktni.



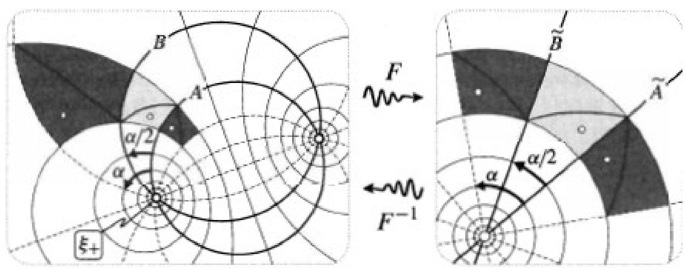
Pošto posmatramo podskupove produžene kompleksne ravni $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{D}$, to slike pramenova, tj. njihove grafičke reprezentacije, neće biti „cele". U $\mathbb{H}$ to će biti polukrugovi i poluprave, kao radikalne ose, odnosno delovi krugova i pravih u $\mathbb{D}$.

5.4.3 Dekompozicija bilinearnih preslikavanja

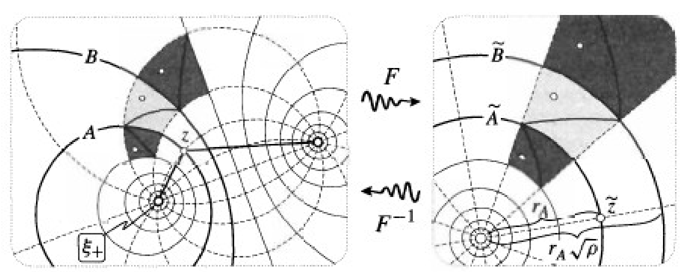
Teorema 15. *Eliptička, hiperbolička i parabolička preslikavanja mogu se izraziti kao kompozicija* 2 *inverzije, a loksodromska kao kompozicija* 4 *inverzije.*

Dokaz. Način na koji se dokazuje ova veoma bitna teorema je tako što se odgovarajuća preslikavanja prvo svedu na svoje arhetipove. Zatim se vrši dekompozicija arhetipova, a zatim se inverznim preslikavanjem nađe traženo preslikavanje „u originalu". Jasno je da će osobina bilinearnih preslikavanja da čuvaju simetriju imati velikog udela u dokazu.

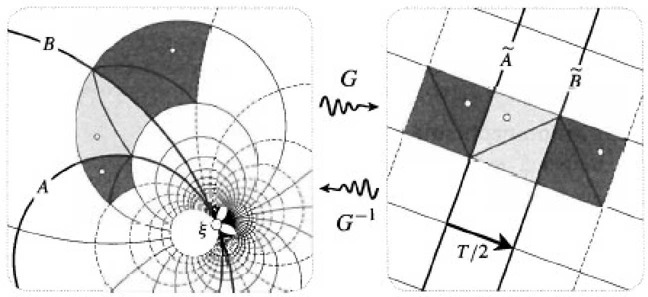
-eliptički slučaj: Pošto je arhetip rotacija koja se može rastaviti na kompoziciju 2 refleksije čije su ose seku pod uglom $\frac{\alpha}{2}$, to je $f = \mathcal{J}_B \circ \mathcal{J}_A$, gde su $\mathcal{J}_A$ i $\mathcal{J}_B$ $h-$refleksije, odnosno inverzije, i kružnice A i B se seku u fiksnim tačkama preslikavanja f pod uglom od $\frac{\alpha}{2}$.



-hiperbolički slučaj: Kako je arhetip homotetija, koja se može rastaviti na kompoziciju 2 inverzije u odnosu na koncentrične kružnice sa koeficijentom $\frac{r_B^2}{r_A^2}$, to je $f = \mathcal{J}_B \circ \mathcal{J}_A$, gde su A i B koncentrične $h-$kružnice koje ne sadrže fiksne tačke preslikavanja i $\frac{r_B^2}{r_A^2} = \lambda$, gde se radi o odnosu kvadrata dva $h-$polupre čnika $h-$kružnica.



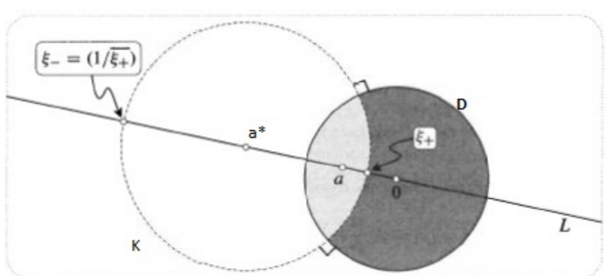
-parabolički slučaj: Kako je arhetip translacija $\mathcal{T}_s$, koja se može rastaviti na kompoziciju dve refleksije čije su ose paralelne i udaljene $\frac{s}{2}$ (na slici označeno sa $\left.\frac{T}{2}\right)$ jedna od druge, to sledi $f = \mathcal{J}_B \circ \mathcal{J}_A$, gde su A i B kružnice koje se dodiruju u fiksnoj tački preslikavanja.



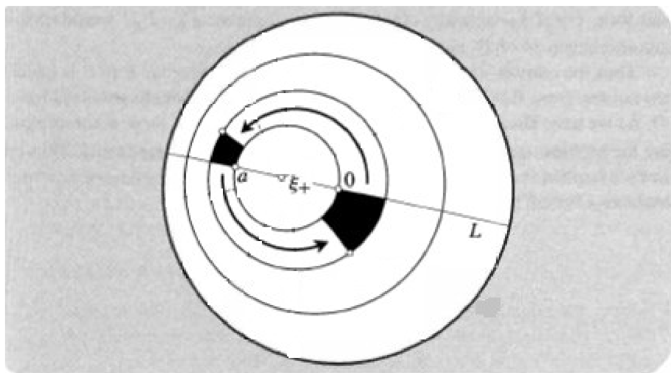
-loksodromski slučaj: Pošto je arhetip kompozicija rotacije i homotetije, koje se pojedinačno rastavljaju na kompoziciju 2 preslikavanja, jasno je zašto se svako loksodromsko preslikavanje rastavlja kao kompozicija 4 inverzije. Zaista, $f = (\mathcal{J}_{B'} \circ \mathcal{J}_{A'}) \circ (\mathcal{J}_B \circ \mathcal{J}_A) = (\mathcal{J}_B \circ \mathcal{J}_A) \circ (\mathcal{J}_{B'} \circ \mathcal{J}_{A'})$, gde su A i B kružnice koje se seku u fiksnim tačkama preslikavanja f, dok su kružnice A' i B' ortogonalne na A i B. ■

5.4.3.1 Geometrijska interpretacija preslikavanja $f(z) = \frac{z-a}{\overline{a}z-1}$

Očigledno, $f(a) = 0$ i $f(0) = a$. Štaviše, f je jedini bilinearni automorfizam oblasti $\mathbb{D}$ koji međusobno razmenjuje tačke a i 0. To znači da, ako konstruišemo preslikavanje g sa ovim svojstvima, tada je $f \equiv g$.
Tražimo inverziju $\mathcal{J}_K$ za koju je $\mathcal{J}_K(a) = 0$ i $\mathcal{J}_K(0) = a$. Kako su tačke a i $a^* = \frac{1}{\overline{a}}$ simetrične tačke u odnosu na $\mathbb{D}$, to su $\mathcal{J}_K(a)$ i $\mathcal{J}_K\left(\frac{1}{\overline{a}}\right)$ simetrične u odnosu na $\mathcal{J}_K(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Pošto je $\mathcal{J}_K(a) = 0$, to je $\mathcal{J}_K\left(\frac{1}{\overline{a}}\right) = \infty$. Po definiciji inverzije, centar inverzije se slika u ∞ (gledajući inverziju kao preslikavanje $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$), odakle zaključujemo da je centar kruga tačka $\frac{1}{\overline{a}}$. Pošto je inverzija



antikonformno preslikavanje[17], to moramo uraditi kompoziciju sa još jednim preslikavanjem. Imajući u vidu da su tačke a i 0 već zamenile mesta, moramo izabrati preslikavanje koje fiksira pravu $L = a0$. Dakle, $f = \mathcal{R}_L \circ \mathcal{J}_K$. Pažljivim razmatranjem zapažamo da je raspored preslikavanja nebitan, tj. $f = \mathcal{R}_L \circ \mathcal{J}_K = \mathcal{R} \circ \mathcal{J}_K$. Fiksne tačke ovog preslikavanja su tačke preseka kruga inverzije K i prave L, u oznaci ξ_+ i ξ_- . f je konjugovano sa $g = -z = e^{i\pi}z$, pa ovo preslikavanje predstavlja $h-$rotaciju za π oko tačke preseka $\mathcal{J}_K$ i L koja se nalazi u $\mathbb{D}$ u pozitivnom smeru.



5.4.4 Pramenovi i epicikli $h-$ravni u oba modela

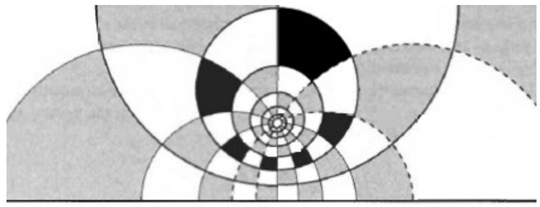
Definicija 21. *Neka je χ pramen pravih i X proizvoljna tačka u ravni π tog pramena koja ne pripada svim pravama pramena χ. Skup svih tačaka ravni π osnosimetričnih tački X u odnosu na prave pramena χ zvaćemo epiciklom i obeležavaćemo ga sa $\varepsilon(\chi, X)$.*

U geometriji Lobačevskog postoje 3 vrste pramenova pravih:

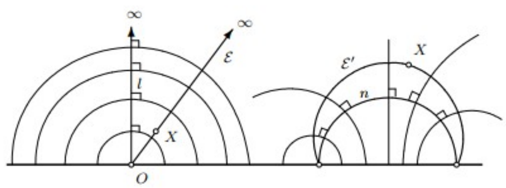
- eliptički - pramen konkurentnih $h-$pravi,
- hiperbolički (ili ortogonalni) - pramen hiperparalelnih $h-$pravi,
- parabolički - pramen paralelnih $h-$pravi, tj. onih $h-$pravi koje se seku u jednoj tački A apsolute.

Epicikli koji odgovaraju navedenim pramenovima su krugovi, ekvidistante i oricikli, redom.
Poluravanski model:

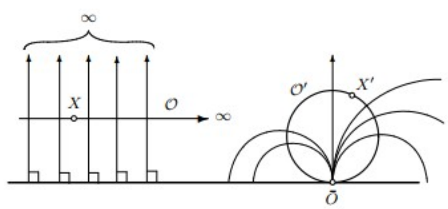
[17] čuva vrednost ugla, ali ne i smer



Slika 16: Epicikl eliptičkog pramena

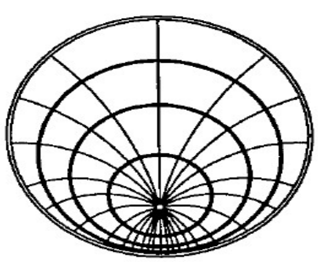


Slika 17: Epicikli hiperboličkog pramena

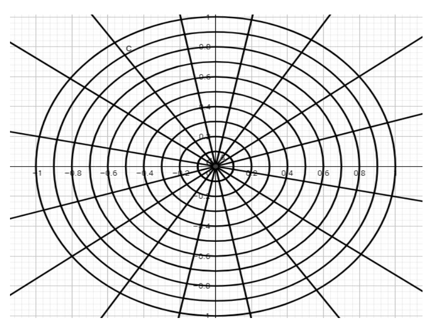


Slika 18: Epicikl paraboličkog pramena

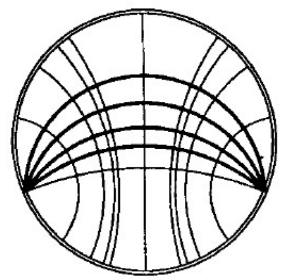
Poenkareov disk model:



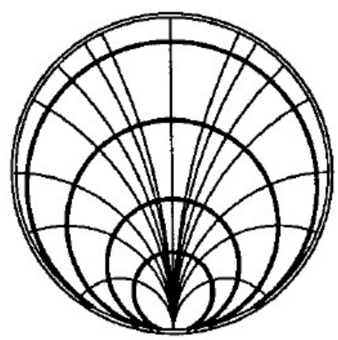
Slika 19: Epicikl eliptičkog pramena



Slika 20: Epicikl eliptičkog pramena



Slika 21: Epicikl hiperboličkog pramena



Slika 22: Epicikl paraboličkog pramena

6 Zaključak

Završimo rad citatom iz knjige [3] sa spiska literature. U njemu prof. dr Mileva Prvanović govori o neprotivrečnosti Poenkareovog disk modela, ali se analogno može tvrditi i za poluravanski model, kao i za Klajnov model, koji, iako pomenut, nije bio u fokusu ovog rada.

„Osnovni objekti tog modela su objekti geometrije Euklida. Osnovne relacije (relacija pripadanja, relacija između, relacija podudarnosti) su u stvari izvesne Euklidske relacije između Euklidskih objekata. Drugim rečima, cela $H-$geometrija posmatranog modela je jedan deo geometrije Euklida. Svakoj teoremi Hiperbolične geometrije odgovara jedna teorema u ovom modelu, a ova je opet, teorema geometrije Euklida. Dakle, ako bi u Hiperboličnoj geometriji postojala neka neprotivrečnost, ona bi se pojavila i u Poenkareovom modelu, pa dakle i u geometriji Euklida. Otuda ova osnovna teorema:

Teorema 16. *Ako je geometrija Euklida neprotivrečna, neprotivrečna je i Hiperbolična geometrija."*

Literatura

[1] Anderson J., Hyperbolic Geometry, 2ed, Springer, 2005.

[2] Marek Svetlik, Beleške sa predavanja iz Geometrijske teorije funkcija

[3] Mileva Prvanović, Neeuklidske geometrije, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad 1971.

[4] Miodrag Mateljević, Hyperbolic Geometry and Schwarz lemmma, Matematički fakultet, 2015.

[5] Miodrag Mateljević, Kompleksne funkcije, Matematički fakultet, Beograd 2006.

[6] Srđan Vukmirović, Modeli geometrije Lobačevskog, skripta, 2005. http://alas.matf.bg.ac.rs/vsrdjan/files/geomlob.pdf

[7] Tristan Needham, Visual Complex Analysis, Oxford University Press Inc. , 2004.

[8] V.V. Prasolov, V.M. Tikhomirov, Geometry, American Mathematical Society, 2001.

[9] Zoran Lučić, Euklidska i Hiperbolička geometrija, Matematički fakultet, Beograd 1997.