Универзитет у Београду
Математички факултет

МАСТЕР РАД

Комбинаторика репрезентација симетричних и општих линеарних група $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Студент: Матеј Милићевић

Ментор: др Марко Радовановић

Београд
септембар 2017.

Садржај:

Увод **1**

1 Репрезентације коначних група **2**

2 Јангови таблои **10**

2.1 Јангови дијаграми и попуњавања 10

2.2 RSK алгоритам 11

3 Симетричне функције **15**

3.1 Прстен симетричних функција 15

3.2 Мономијалне, елементарне и
комплетне симетричне функције 16

3.3 Степени редови и скаларни производ 18

3.4 Шурове функције 21

4 Репрезентација $\mathbb{S}_n$ **24**

4.1 Дејство $\mathbb{S}_n$ на таблое 24

4.2 Шпехтов модул 25

4.3 Репрезентација $\mathbb{S}_n$ 29

4.4 Дуална конструкција 32

5 Репрезентација $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$ **37**

5.1 Шуров модул 37

5.2 Репрезентација $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$ 42

6 Гелфанд-Цетлинове базе **47**

6.1 Гелфанд-Цетлинови низови 47

6.2 Репрезентација $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ 47

Закључак **59**

Увод

Теорија репрезентација нам омогућава да апстрактне алгебарске структуре представимо као линеарна пресликвања векторских простора. Помоћу ње добијамо прелаз са апстрактних симбола на матрице. Комбинаторика нам додатно помаже да опишемо репрезентације. Успоставићемо везу између репрезентација група и симетричних функција користећи комбинаторне објекте као што су Јангови таблои и Гелфанд-Цетлинови низови.

Симетричне функције су један од најосновнијих појмова алгебарске комбинаторике. У раду са њима се појављују такозвани Костки и Литлвуд-Ричардсонови бројеви. Они се појављују и у Шубертовом калкулусу на грасманијанима. Показаћемо да они имају везе са иредуцибилним репрезентацијама симетричних и општих линеарних група $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Тиме ћемо добити алгебарски опис Косткиних и Литлвуд-Ричардсонових бројева, који су првенствено комбинаторни објекти.

1 Репрезентације коначних група

Подразумеваћемо да је сваки векторски простор над пољем $\mathbb{C}$ ако другачије није наглашено. Репрезентација групе G је хомоморфизам група $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, где је V комплексни векторски простор, а $\mathrm{GL}(V)$ група аутоморфизама од V. Често ћемо сам простор V називати репрезентацијом групе G, а уместо $\rho(g)(v)$ ћемо писати $g \cdot v$ јер имамо да G дејствује на V.

Даље подразумевамо да је група G коначна, као и да је V коначно-димензиони векторски простор. Степен репрезентације ρ је димензија векторског простора V.

Хомоморфизам репрезентација V и W групе G је линеарно пресликавање векторских простора φ такво да за свако $g \in G$ и $v \in V$ важи $\varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v)$, тј. следећи дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g\cdot"'] & W \arrow[d, "g\cdot"'] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & W \end{tikzcd}$$

за све $g \in G$. За такво пресликавање кажемо да је G-линеарно. Ако је хомоморфизам реперезентација бијекција, онда је он изоморфизам репрезентација.

Нека је $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ репрезентација групе G. Ако за векторски потпростор W од V важи $g \cdot W \subseteq W$ за свако $g \in G$, тј. W је G-инваријантан, тада је пресликавање из G у $\mathrm{GL}(W)$, дато са $g \mapsto \rho(g)_{|W}$, добро дефинисано и то је репрезентација група. За W кажемо да је подрепрезентација репрезентације V. Ако репрезентација V нема прави нетривијалан G-инваријантан потпростор, за V кажемо да је иредуцибилна репрезентација.

Лема 1.1 *Ако је $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ произвољна репрезентација коначне групе G и W њена подрепрезентација, тада постоји G-инваријантни потпростор U такав да $V = W \oplus U$. Тада кажемо да је V директна сума репрезентација W и U.*

Доказ: Узмимо произвољни хермитски производ $H : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ и дефинишимо нови хермитски производ $\tilde{H} : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ помоћу једнакости

$$\tilde{H}(v_1, v_2) = \sum_{g \in G} H(g \cdot v_1, g \cdot v_2),$$

за $v_1, v_2 \in V$. Овим смо добили хермитски производ такав да $\tilde{H}(h \cdot v_1, h \cdot v_2) = \tilde{H}(v_1, v_2)$, за све $h \in H$ и $v_1, v_2 \in V$. Тражени потпростор U је ортокомплемент потпросора W у односу на нови хермитски производ $\tilde{H}$. Како је $W = U^{\perp}$, важи $V = W \oplus U$. Треба још показати да U је G-инваријантан, тј. да за произвољне

$u \in U$ и $g \in G$ важи $g \cdot u \in U$. За свако $w \in W$ имамо

$$\tilde{H}(w, g \cdot u) = \tilde{H}(\underbrace{g^{-1} \cdot w}_{\in W}, u) = 0$$

па је U G-инваријантан. $\square$

Претходна лема нам даје следећу очигледну последицу:

Последица 1.2 *Свака репрезентација V коначне групе G се може представити као директна сума иредуцибилних репрезентација.*

Следеће тврђење зовемо Шурова лема:

Став 1.3 *Нека су*

$$\rho_1 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1) \quad \textit{и} \quad \rho_2 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_2)$$

две иредуцибилне репрезентације коначне групе G и нека је $\Psi : V_1 \longrightarrow V_2$ хомоморфизам репрезентација. Тада важе следећа тврђења:

(i) хомоморфизам Ψ је или изоморфизам или нула-пресликавање;

(ii) ако је $V_1 = V_2$, онда $\Psi = \lambda I$, где је $\lambda \in \mathbb{C}$, а I идентичко пресликавање.

Доказ: (i) Из дефиниције хомоморфизма репрезентација следи да је $\ker(\Psi)$ G-инваријантан потпростор од V_1. Нека су $g \in G$ и $v \in \ker(\Psi)$ произвољни. Тада

$$\Psi(g \cdot v) = g \cdot \Psi(v) = g \cdot 0 = 0,$$

па $g \cdot v \in \ker(\Psi)$, тј. $\ker(\Psi)$ је заиста G-инваријантан. Такође, $\mathrm{im}(\Psi)$ је G-инваријантан потпростор од V_2. Нека је $g \in G$ и $w \in \mathrm{im}(\Psi)$. Нека је $v \in V_1$ такво да $w = \Psi(v)$. Имамо

$$g \cdot w = g \cdot \Psi(v) = \Psi(g \cdot v),$$

одакле видимо да $g \cdot w \in \mathrm{im}(\Psi)$, тј. да је и $\mathrm{im}(\Psi)$ G-инваријантан.

Како су ово иредуцибилне репрезентације, имамо два случаја. Први случај је да је $\ker(\Psi) = V_1$, тада је $\Psi = 0$. У другом случају, $\ker(\Psi) = 0$, тада је $\mathrm{im}(\Psi) \neq 0$, па је $\mathrm{im}(\Psi) = V_2$ због иредуцибилности, одакле закључујемо да је Ψ изоморфизам. (ii) Ако је $V_1 = V_2$, онда је Ψ ендоморфизам комплексних векторских простора. Карактеристични полином има бар један корен $\lambda \in \mathbb{C}$ због алгебарске затворености поља комплексних бројева. Одавде закључујемо да $\Psi - \lambda I$ има нетривијално језгро, па из претходног закључујемо да $\Psi - \lambda I = 0$, тј. $\Psi = \lambda I$, што смо и хтели да докажемо. $\square$

Свака репрезентација $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ дефинише функцију $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}$ дату са

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)),$$

тј. $\chi_\rho(g)$ је траг линеарног пресликавања $\rho(g) : V \longrightarrow V$. За тривијалну репрезентацију $\rho_0 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, где је $V = \mathbb{C}$, дату са $g \mapsto \mathbf{1}_\mathbb{C}$, имамо карактер $\chi_{\rho_0}(g) = 1$, за све $g \in G$.

Пре него што наставимо, размотримо један еквивалентан начин на који можемо да посматрамо групни прстен $\mathbb{C}[G]$. Елементе $\mathbb{C}[G]$ можемо да видимо као функције $G \longrightarrow \mathbb{C}$, а операције између њих дефинисане тако да одговарају стандардној дефиницији операција у групном прстену. Ако су $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}[G]$, тада

$$(\phi_1 + \phi_2)(g) := \phi_1(g) + \phi_2(g), \quad g \in G,$$

и

$$(\phi_1\phi_2)(g) := \sum_{g_1 g_2 = g} \phi_1(g_1)\phi_2(g_2), , \quad g \in G.$$

Надаље ћемо слободно користити обе дефиниције групног прстена $\mathbb{C}[G]$.

Функција $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ је класна функција ако је инваријантна на класама конјугације, тј. за њу важи $f(ghg^{-1}) = f(h)$ за све $g, h \in G$. Пошто се траг не мења приликом конјугације, имамо да су карактери репрезентација класне функције.

Скуп класних функција $\mathbb{C}_{\mathrm{class}}(G)$ можемо видети као $\mathbb{C}$-векторски потпростор од $\mathbb{C}[G]$. Димензија тог потпростора је број класа конјугације групе G: базу чине функције-индикатори $\mathcal{O}_{[g]} : G \longrightarrow \mathbb{C}$, дате са,

$$\mathcal{O}_{[g]}(h) = \begin{cases} 0, & h \notin [g] \\ 1, & h \in [g] \end{cases}, \quad h \in G,$$

за све класе конјугације $[g]$ од G.

Став 1.4 *Нека су дате репрезентације $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ и $\tau : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$. Тада:*

(*i*) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$;

(*ii*) $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$;

(*iii*) $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$.

Доказ: (*i*) Репрезентација $\vartheta_1 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V \oplus W)$ је дата на очигледан начин

$$g \cdot (v + w) = g \cdot v + g \cdot w, \quad v \in V, w \in W, g \in G.$$

Нека је $g \in G$ фиксирано. Ако су $\{\lambda_i\}$ сопствене вредности од $\rho(g)$, а $\{\mu_j\}$ од $\tau(g)$, онда су $\{\lambda_i\} \cup \{\mu_j\}$ сопствене вредности од ϑ_1. Одавде следи $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.
(ii) Репрезентација $\vartheta_2 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V \otimes W)$ је дата са

$$g \cdot (v \otimes w) = g \cdot v \otimes g \cdot w, \quad v \in V, w \in W, g \in G.$$

Користимо ознаке из (i). Имамо да су $\{\lambda_i \mu_j\}$сопствене вредности од $\vartheta_2(g)$, па одатле следи $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$.
(iii) Репрезентација $\rho^* : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V^*)$ је дата са

$$\langle g \cdot f^*, v \rangle = \langle f^*, g^{-1} \cdot v \rangle, \quad v \in V, f^* \in V^*, g \in G$$

Сопствене вредности од $\rho(g)$ означимо опет са $\{\lambda_i\}$. Онда су $\{\lambda_i^{-1}\}$ сопствене вредности оператора $\rho^*(g)$. Због коначности групе G, сопствене вредности су корени јединице, па $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$. Одавде следи $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$. $\square$

Ако имамо репрезентацију $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, са V^G означавамо потпростор G-инваријантних вектора у V, тј.

$$V^G = \{v \in V \mid g \cdot v = v, \text{ за све } g \in V\}.$$

Приметимо да $V^G = \bigcap_{g \in G} \ker(\rho(g) - I)$

Став 1.5 *Нека је $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ произвољна репрзентација коначне групе G. Тада је пресликавање*

$$\Pi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \in \mathrm{End}(V)$$

пројекција са V на V^G.

Доказ: Нека је $v \in V^G$ произвољан вектор. Тада

$$\Pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{1}{|G|} |G| v = v,$$

па имамо да $v \in \mathrm{im}(\Pi)$. Како је v био произвољан из V^G, добијамо $V^G \subseteq \mathrm{im}(\Pi)$.

Нека је сад $v \in \mathrm{im}(\Pi)$, тј. постоји $w \in V$ такво да $\Pi(w) = v$. За произвољно $h \in G$ важи

$$h \cdot v = h \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot w \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (hg) \cdot w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot w = v,$$

стога $v \in V^G$, што нам даје да $\mathrm{im}(\Pi) \subseteq V^G$. Дакле, $\mathrm{im}(\Pi) = V^G$. Из претходних једнакости имамо да за свако $v \in V$, $\Pi^2(v) = \Pi(v)$, тј. $\Pi^2 = \Pi$, па Π заиста јесте пројекција. $\square$

На простору класних функција уводимо хермитски унутрашњи производ помоћу формуле

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g), \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{C}_{\text{class}}(G).$$

Пре него што искористимо дефинисани хермитски производ, наведимо пар примера репрезентација које ћемо користити. Ако имамо репрезентације $\rho_1 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1)$ и $\rho_2 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_2)$, тада имамо и репрезентацију $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(V_1, V_2))$. Она је дата са

$$\rho(g)(\varphi) = \rho_2(g) \circ \varphi \circ \rho_1(g^{-1}),$$

за $g \in G$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. За њен карактер важи $\chi_\rho = \overline{\chi_{\rho_1}} \chi_{\rho_2}$. То следи из става 1.4 и изоморфизма $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) \cong V_1^* \otimes V_2$. Други битан пример је такозвана регуларна репрезентација $R : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}[G])$. Ако је $\phi = \sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{C}[G]$, а $h \in G$, израз

$$h \cdot \phi = \sum_{g \in G} a_g h g = \sum_{g \in G} a_{h^{-1}g} g$$

даје дејство G на $\mathbb{C}[G]$. Карактер регуларне репрезентације је дат формулом

$$\chi_R(g) = \begin{cases} |G|, & g = e \\ 0, & g \neq e \end{cases}.$$

Фиксирајмо g. Елементи групе су база за $\mathbb{C}[G]$, и $g \cdot k = gk$, за све $k \in G$. Одавде имамо, у случају $g \neq e$, да су 0 на дијагонали матрице $R(g)$ у бази G, па је $\mathrm{Tr}(R(g)) = 0$. У случају $g = e$, због $e \cdot k = k$, видимо да је $\mathrm{Tr}(R(e)) = |G|$, па добијамо да је тачна претходно наведена формула.

Последица 1.6 *Важи следеће:*

(1) Ако је $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ репрезентација коначне групе G и χ_ρ њој придружен карактер, онда важи

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g).$$

(2) Ако су $\rho_1 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1)$ и $\rho_2 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_2)$ две иредуцибилне репрезентације групе G, онда је

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\rho_1}(g)} \chi_{\rho_2}(g) = \begin{cases} 1, & V_1 \cong V_2 \\ 0, & V_1 \ncong V_2 \end{cases}.$$

(3) Карактери иредуцибилних репрезентација коначне групе G чине ортонормиран систем у простору класних функција $\mathbb{C}_{\text{class}}(G)$ у односу на $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(4) Број неизоморфних иредуцибилних репрезентација коначне групе G је коначан и он није већи од броја класа конјугације групе G.

(5) Нека је $\{\rho_i : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_i) \,|\, i \in I\}$ коначан скуп свих иредуцибилних репрезентација групе G. Тада произвољну репрезентацију групе $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ можемо да разложимо као директну суму иредуцибилних

$$V \cong \bigoplus_{i\in I} V_i^{\oplus m_i(\rho)},$$

где су мултиплицитети $m_i(\rho)$ појављивања иредуцибилне компоненте V_i једнозначно одређени за свако $i \in I$.

(6) Нека је $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ произвољна репрезентација, а $\rho_i : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_i)$ иредуцибилна репрезентација која се појављује са мултиплицитетом $m_i(\rho)$ у V. Тада важи једнакост $m_i(\rho) = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i}\rangle$.

(7) Свака иредуцибилна репрезентација $\rho_i : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_i)$ коначне групе се појављује у регуларној репрезентацији $R : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}[G])$ са мултиплицитетом једнаким $m_i(R) = \dim V_i$.

(8) Нека је $\{\rho_i : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_i) \,|\, i \in I\}$ коначан скуп иредуцибилних репрезентација групе G. Тада важи формула

$$|G| = \sum_{i\in I} (\dim V_i)^2.$$

Доказ: (1) Како је $\Pi : V \longrightarrow V$, дефинисано у претходном ставу, пројекција на V^G, имамо да је $\mathrm{Tr}(\Pi) = \dim V^G$. Одавде следи

$$\mathrm{Tr}(\Pi) = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g),$$

одакле добијамо тражену једнакост.
(2) Нека је $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(V_1, V_2))$ раније наведена репрезентација. Како су V_1 и V_2 иредуцибилне репрезентације, на основу Шурове леме или $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) \cong \mathbb{C}$ или $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) \cong \mathbf{0}$. Тражену формулу добијемо применом једнакости $\chi_\rho = \overline{\chi_{\rho_1}}\,\chi_{\rho_2}$ и тврђења (1).
(3) Ово је последица тврђења (2).
(4) Раније смо видели да је димензија векторског простора $\mathbb{C}_{\mathrm{class}}(G)$ једнака броју класа конјугације, а како хермитски простор не може имати ортонормиран систем већи од своје димензије, добијамо тражено тврђење. Одавде добијамо да је број

неизоморфних иредуцибилних репрезентација коначне групе коначан.

(5) У (4) смо закључили коначност броја неизоморфних иредуцибилних репрезентација, а лема нам даје да постоји разлагање на директну суму. Јединственост таквог разлагања, тј. једнозначност мултиплицитета следи из (6).

(6) Из декомпозиције добијамо да је $\chi_\rho = \sum_{i\in I}\chi_{\rho_i}$, па из тврђења (2) добијамо тражену формулу.

(7) Користећи (6) и карактер регуларне репрезентације имамо следећи низ једнакости

$$\begin{aligned} m_i(R) &= \langle \chi_R, \chi_{\rho_i}\rangle \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_R(g)}\,\chi_{\rho_i}(g) \\ &= \frac{1}{|G|}\chi_R(e)\chi_{\rho_i}(e) \\ &= \frac{1}{|G|}|G|\mathrm{Tr}(\mathbf{1}_{V_i}) \\ &= \dim V_i. \end{aligned}$$

Добили смо тражену једнакост. Приметимо да је $m_i(R) > 0$ јер је сваки V_i димензије веће од 0.

(8) Из (7) имамо да важи $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{i\in I} V_i^{\dim V_i}$, па важи

$$\dim\mathbb{C}[G] = \sum_{i\in I}\dim(V_i^{\dim V_i}) = \sum_{i\in I}(\dim V_i)^2,$$

што смо и хтели да докажемо. $\square$

Нека је H подгрупа од G. Тада свака репрезентација V од G може да се рестикује да буде репрезентација од H. То се обележава $\mathrm{Res}_H^G V$. Нека је V репрезентација од G и $W \leq V$ H-инваријантан потпростор. За свако $g \in G$, потпростор $g\cdot W$ зависи само од gH јер $gh\cdot W = g\cdot(h\cdot W) = g\cdot W$. За $\sigma\in G/H$, пишемо $\sigma\cdot W$ за тај потпростор од V. Кажемо да је V индукована са W, ако се сваки елемент из V, може на јединствен начин записати као сума елемената таквих транслата од W, тј.

$$V = \bigoplus_{\sigma\in G/H}\sigma\cdot W.$$

Тада пишемо $V = \mathrm{Ind}_H^G W$.

Ако имамо $H \leq G$ и репрезентацију W од H, имамо репрезентацију V од G

$$V = \mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}[H]} W,$$

где је дејство G на V дато са

$$g\cdot(g'\otimes w) = gg'\otimes w.$$

За $\sigma \in G/H$, означимо са $g_\sigma \in G$ такво да је $g_\sigma H = \sigma$. Приметимо да базу од V чине $g_\sigma \otimes u$, за све $\sigma \in G/H$ и базне векторе u репрезентације W. Одавде следи да је

$$V \cong \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma \cdot W,$$

тј. $V = \mathrm{Ind}_H^G W$.

2 Јангови таблои

2.1 Јангови дијаграми и попуњавања

Јангов дијаграм је колекција ћелија поређаних у редове, који су лево поравнати, са нерастућим бројем ћелија у сваком реду. Ако укупно имамо n ћелија, број ћелија у сваком реду нам даје партицију броја n. Партицију ћемо углавном обележавати са малим словом грчког алфабета, најчешће λ. Имамо и обрнуто. За сваку партицију броја n имамо одговарајући Јангов дијаграм. Због овога, често ћемо поистовећивати партицију са дијаграмом и њега ћемо исто обележавати са λ. Партиција је дата низом неопадајућих позитивних целих бројева, то ћемо писати $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. Некад ћемо дозвољавати појављивање коначно или чак бесконачно много нула на крају, ако нам то олакшава запис. Дужина партиције $l(\lambda)$ је број λ_i различитих од 0. Такође ћемо партицију задавати са $\lambda = (d_1^{a_1}, d_2^{a_2}, \dots, d_s^{a_s})$ када желимо да укажемо на то да партиција број d_i садржи a_i пута , $1 \leq i \leq s$. Пишемо $\lambda \vdash n$ да означимо да је λ партиција од n. У том случају, за n пишемо $|\lambda|$, тј. ово је ознака за број чија је λ партиција. Пошто имамо једнозначну кореспонденцију између дијаграма и партиција, помоћу тога можемо дефинишемо конјуговану партицију. Ако нам је дата партиција λ, конјуговану партицију $\tilde{\lambda}$ добијамо тако што дијаграм од λ прочитамо по колонама.

Уписивање позитивних целих бројева у ћелије Јанговог дијаграма ћемо називати попуњавањем дијаграма и обележаваћемо га са T. Јангов табло, или само табло, је попуњавање за које важи да је:

• неопадајуће у сваком реду;

• строго растуће у свакој колони.

За табло кажемо да је табло на дијаграму λ. Стандардни табло је онај табло који је попуњен бројевима од 1 до $|\lambda|$, при чему се сваки од бројева појављује тачно једном.

Нека је λ дијаграм и T његово попуњавање. Фиксирајмо две колоне и по k ћелија у свакој од њих. Размену (између две колоне са изабраним скуповима од k ћелија) дефинишемо као попуњавање T', које добијамо од T тако што заменимо садржаје изабараних ћелија у левој колони са оним из десне, и обрнуто, при чему чувамо редослед из првобитног попуњавања T.

Уведимо уређења на Јанговим дијаграмима. Нека су $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ и $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_s)$ партиције, при чему дозвољавамо да при крају буду нуле како би записи били истих дужина. Ако за свако i, $1 \leq i \leq s$, важи $\lambda_i \leq \lambda'_i$, кажемо да је λ садржан у λ' и пишемо $\lambda \subseteq \lambda'$. Кажемо да је λ мањи од λ' у лексикографском поретку, у ознаци $\lambda \leq \lambda'$, ако за најмање i такво да $\lambda_i \neq \lambda'_i$ (ако такво постоји), важи $\lambda_i < \lambda'_i$. Приметимо да је ово тотално уређење. Рећи ћемо да λ' доминира λ, у ознаци $\lambda \trianglelefteq \lambda'$, ако за свако i важи $\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \leq \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_i$. За разлику од лексикографског уређења, $\subseteq$ и $\trianglelefteq$ нису релације тоталног поретка. Приметимо да из $\lambda \subseteq \lambda'$ следи $\lambda \trianglelefteq \lambda'$, што повлачи $\lambda \leq \lambda'$.

2.2 RSK алгоритам

Нека је дат табло T и природан број k. Овде ћемо увести операцију убацивања у ред броја k у табло T, скраћено убацивање, у ознаци $T \leftarrow k$. Ради лакшег записа, са T_{ij} ћемо обележавати уносе ћелије у i-том реду и j-тој колони. Ту ћелију ћемо некад природно означавати са (i, j). Нека је r највећи цео број такав да $T_{1,r-1} \leq k$. У случају да је $T_{11} > k$, узимамо да је $r = 1$. Ако T има $r-1$ колону, онда убацимо k на крај првог реда. Ако T ипак има бар r колона, заменимо T_{1r} са k. Тада се елемент $k' = T_{1r}$ шаље у други ред и поновимо наведени поступак и за њега. Ово настављамо све док се елемент не постави на крај реда, при чему је могуће да то буде први елемент новог реда. Овиме добијамо попуњавање $T \leftarrow k$ дијаграма са једном ћелијом више. Показаћемо да је и оно Јангов табло. Скуп ћелија које су учествовале у убацивању, називамо путањом убацивања и обележавамо са $I(T \leftarrow k)$.

Лема 2.1 *(а) Када убацујемо број k у табло T, онда се путања убацивања помера улево. Другим речима, ако $(r, s), (r + 1, t) \in I(T \leftarrow k)$, онда $s \leq t$.*

(б) Нека је T табло и j, k позитивни цели бројеви такви да $j \leq k$. Тада се путања $I(T \leftarrow j)$ налази строго лево у односу на $I((T \leftarrow j) \leftarrow k)$, тј. ако $(r, s) \in I(T \leftarrow j)$ и $(r, t) \in I((T \leftarrow j) \leftarrow k)$, онда је $s < t$. Такође, путања $I((T \leftarrow j) \leftarrow k)$ се не спушта испод $I(T \leftarrow j)$. Прецизније,

$$|I((T \leftarrow j) \leftarrow k)| \leq |I(T \leftarrow j)|.$$

Доказ: (а) Нека $(r, s) \in T$. Или ћелија $(r+1, s)$ не постоји или $T_{r+1,s} > T_{rs}$. У првом случају, очигледно не може да буде $t > s$ јер бисмо имали празнину у дијаграму. У другом случају, попуњавање $T \leftarrow k$ је растуће по редовима, па k не би могло да буде десно у односу на s-ту колону јер $k < T_{rs} < T_{r+1,s}$. Дакле, у оба случаја путања убацивања не може да иде удесно.

(б) Пошто број може само строго већи број да пошаље у нови ред приликом убацивања, одавде следи да се k убацује строго десно у односу на j у попуњавање $T \leftarrow j$. То даље повлачи, индукцијом по дужини путање, да се $I(T \leftarrow j)$ налази строго лево у односу на $I((T \leftarrow j) \leftarrow k)$. Елемент b најниже ћелије у $I(T \leftarrow j)$ се налази на крају реда по дефиницији убацивања. Из претходног имамо да се c, елемент најниже ћелије у $I((T \leftarrow j) \leftarrow k)$ налази десно од b, па не може бити у новом реду. Дакле, путања $I((T \leftarrow j) \leftarrow k)$ не иде испод путање $I(T \leftarrow j)$. $\square$

Последица 2.2 *Ако је T табло и $k \geq 1$, онда је и $T \leftarrow k$ табло.*

Доказ: Из дефиниције убацивања имамо да је попуњавање $T \leftarrow k$ растуће унутар редова. Остаје да докажемо да је строго растуће унутар колона. Број a може само строго већи број b да пошаље у нови ред. Из дела (a) леме 2.1, имамо да се b налази лево у односу на a, па испод a мора бити строго већи број у $T \leftarrow k$. Дакле, $T \leftarrow k$ јесте строго растуће по колонама. $\square$

Нека је $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ $\mathbb{N}$-матрица са коначним носачем. Можемо је посматрати као бесконачну матрицу са коначно много ненула уноса или $m \times n$ матрицу где су $a_{ij} = 0$ када је $i > m$ или $j > n$. Матрици A можемо да придружимо генерализовану пермутацију w_A дефинисану са

$$w_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_m \end{pmatrix},$$

при чему важи:

1° $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m$;

2° ако је $i_r = i_s$ и $r \leq s$, онда $j_r \leq j_s$;

3° за сваки пар (i, j) постоји a_{ij} вредности r таквих да $(i_r, j_r) = (i, j)$.

Свака матрица A јединствено одређује w_A, и обрнуто, сваки низ који задовољава претходне услове одређује матрицу са коначним носачем.

Сада ћемо матрици A, тј. генерализованој пермутацији w_A придружити уређени пар таблоа (T, S) на следећи начин. Нека је $(T(0), S(0) = (\emptyset, \emptyset)$, где је $\emptyset$ празан табло. Ако је $t < m$ и $(T(t), S(t))$ дефинисано онда

(*i*) $T(t+1) = T(t) \leftarrow j_{t+1}$;

(*ii*) $S(t+1)$ се добија од $S(t)$ тако што додамо ћелију да $T(t+1)$ и $S(t+1)$ имају исти облик и у њу ставимо i_{t+1}.

Поступак се завршава за $t = m$ и дефинишемо $(T, S) = (T(m), S(m))$. Ову кореспонденцију означавамо са $A \xrightarrow{\text{RSK}} (T, S)$ и називамо је RSK алгоритмом. Из последице 2.2 следи да је T табло. Остаје нам да покажемо да је S табло да би ово додељивање било добро дефинисано.

Како редом уносимо елементе у S који су растући, имамо да је S растуће по редовима и колонама. Остаје нам да покажемо да је S строго растуће унутар колона. Треба да покажемо да два једнака елемента из горњег реда у w_A не могу да се нађу у истој колони од S. Ако за неко k важи $i_k = i_{k+1}$, онда $j_k \leq j_{k+1}$. Из дела (б) леме 2.1 имамо да је путања убацивања $I(T(k) \leftarrow j_{k+1})$ строго десно у односу на путању $I(T(k-1) \leftarrow j_k)$, као и да неће продужити испод ње. Одавде следи да елементи најнижих ћелија тих путања леже у различитим колонама од T, па ће колоне од S бити строго растуће јер попуњавање прати облик од T. Дакле, и S је табло, па је ово придруживање добро дефинисано.

Пре него што наведемо главну теорему о RSK кореспонденцији, приметимо да можемо да извршимо операцију инверзну убацивању. Ако нам је дат табло $T \leftarrow k$, довољно нам је да знамо која ћелија додата првобитном дијаграму да бисмо утврдили T и k. Ако је b елемент додате ћелије, његова претходна позиција у реду изнад, најближа десном крају реда, на којој је број строго мањи од b. Онда за тај број поновимо поступак, и наставимо процес све док не добијемо број који је избачен из првог реда, тј. тражени број k.

Теорема 2.3 *RSK алгоритам је бијекција између $\mathbb{N}$-матрица $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ са коначним носачем и уређених парова Јангових таблоа (T, S) истог облика. У овој кореспонденцији*

$$j \text{ се појављује у } T \text{ тачно } \sum_i a_{ij} \text{ пута},$$

$$i \text{ се појављује у } S \text{ тачно } \sum_j a_{ij} \text{ пута}.$$

Доказ: Из дефиниције алгоритма следи да су T и S истог облика, као и да важе наведене једнакости. Пре доказа смо показали да су T и S заиста таблои. Остаје нам да утврдимо бијекцију између ова два скупа.

Нека је дата генерализована пермутација w_A и пар $(T, S) = (T(m), S(m))$ добијен од ње. Нека је S_{rs} најдесније појављивање највећег уноса у S. Из доказа да је S табло, имамо да се једнаки елементи уносе слева надесно, па је $S_{rs} = i_m$. Одавде имамо $S(m-1)$ и можемо да одредимо $T(m-1)$, зато што знамо коју ћелију смо додали $T(m-1)$ да бисмо добили T. Применом инверза убацивања ћелије добијамо j_m и $T(m-1)$. Дакле, добили смо (i_m, j_m) и $(T(m-1), S(m-1))$. Понављањем овог поступка добијамо w_A, па закључујемо да је додељивање инјективно. Нека је сада (T, S) произвољни пар таблоа истог дијаграма. Применимо претходни поступак и добијемо низ

$$w_A = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix},$$

за који нам остаје да утврдимо да задовољава услове генерализоване пермутације. Очигледно важи $i_1 \leq \cdots \leq i_m$. Остаје нам да покажемо да, ако $i_k = i_{k+1}$, онда важи

$j_k \leq j_{k+1}$. Нека је $i_k = S_{rs}$ и $i_{k+1} = S_{uv}$. Тада је $r \geq u$ и $s < v$. Путања инверзног убацивања, са изабраним T_{uv} креће из v-те колоне. Када се инверз примени за T_{rs}, пресек те путање са u-тим редом мора бити строго лево у односу на v-ту колону. Индукцијом по дужини путање инверза за T_{uv}, закључујемо да се он налази строго десно у односу на путање инверза T_{rs}. Дакле, на почетку се j_k налазио лево од j_{k+1}, па је $j_k \leq j_{k+1}$. Одавде добијамо, да је ово додељивање бијекција, што смо и хтели да докажемо. □

Ова кореспонденција ће нам бити од значаја када направимо везу између таблоа и симетричних фунцкија. Сада ћемо је применити да утврдимо још једну чињеницу везане за таблое.

Ако имамо матрицу пермутације A, односно пермутацију w_A, онда ће се она сликати у пар стандардних Јангових таблоа. Такође, ако имамо дат пар стандардних таблоа, инверзним поступком из доказа теореме ћемо добити пермутацију. Дакле, постоји бијекција између пермутација скупа $[n]$ и свих уређених парова таблоа дијаграма λ, где λ пролази свим партицијама λ од n, тј. важи:

Став 2.4 *За природан број n, важи једнакост*

$$n! = \sum_{\lambda} (f^{\lambda})^2,$$

где је f^{λ} број стандардних таблоа дијаграма λ.

3 Симетричне функције

3.1 Прстен симетричних функција

Нека су $x_1, \ldots, x_n$ неодређене и посматрајмо прстен $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. На њега дејствује група $\mathbb{S}_n$ са $\sigma \cdot x_i = x_{\sigma(i)}$, за свако $i \in [n]$. Полиноме који су фиксирани при овом дејству зовемо симетрични полиноми и они чине потптрстен од $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ који означавамо са Λ_n. Сваки $f \in \Lambda_n$ можемо да представимо у облику

$$f = \sum_{r \geq 0} f^{(r)},$$

где су $f^{(r)}$ хомогени чланови степена r у f. Како су и $f^{(r)}$ симетрични, имамо заправо да је Λ_n градирани прстен, тј.

$$\Lambda_n = \bigoplus_{r \geq 0} \Lambda_n^r,$$

где су Λ_n^r групе симетричних полинома степена r у односу на сабирање.

Посматрајмо сад и Λ_{n+1}, прстен симетричих полинома са $n+1$ променљивом и уочимо природно дефинисан епиморфизам градираних прстена $\pi_n : \Lambda_{n+1} \longrightarrow \Lambda_n$, дат са

$$\pi_n(x_i) = \begin{cases} x_i, & i \in [n], \\ 0, & i = n+1 \end{cases}.$$

Ако погледамо по нивоима, $\pi_n : \Lambda_{n+1}^r \longrightarrow \Lambda_n^r$, имамо да је π_n сурјективно за свако $r \geq 0$ и изоморфизам за $r \leq n$.

Сада можемо дефинисати прстен симетричних функција. Нека је прво

$$\Lambda^r = \varprojlim_n \Lambda_n^r.$$

Имамо $\Lambda^r = \{(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \,|\, f_n \text{ симетрични полином степена } r \text{ са } n \text{ променљивих}, \pi_n(f_{n+1}) = f_n, \text{ за свако } n \in \mathbb{N}\}$. Полиноме f_n можемо да видимо као парцијалне суме реда f монома степена r са бесконачно много променљивих. Направимо и следећи градирани прстен

$$\Lambda = \bigoplus_{r \geq 0} \Lambda^r.$$

Његове елементе називамо симетричним функцијама и Λ се самим тим зове прстен симетричних функција. Овде ћемо имати епиморфизам $\theta_n : \Lambda \longrightarrow \Lambda_n$ који ће исто сликати x_m у 0, за све $m > n$.

Како је Λ слободан $\mathbb{Z}$-модул, у интересу нам је да одредимо различите базе за Λ.

3.2 Мономијалне, елементарне и комплетне симетричне функције

Нека је дата партиција $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, где подразумевамо да је само коначно много почетних чланова различито од 0. Она одређује моном $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots$. Мономијалну симетричну функцију m_λ дефинишемо као суму свих различитих монома који се добијају од x^λ пермутацијом променљивих. Када пресликамо m_λ са θ_n, добијамо мономијални симетрични полином $m_\lambda(x_1, \dots, x_n) \in \Lambda_n$. Слика је различита од 0 ако и само ако је $l(\lambda) \geq n$.

Став 3.1 *Мономијални симетрични полиноми $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ чине базу Λ_n, где λ пролази свим партицијама дужине $l(\lambda) \leq n$. Мономијалне симетричне функције чине базу за Λ, где λ пролази свим партицијама.*

Доказ: Нека је $f(x_1, \dots, x_n) \in \Lambda_n^r$, $r \leq n$, и нека се $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ појаваљује у f са коефицијентом $a \neq 0$, при чему је $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ максималан у лексикографском поретку n-торки. Због симетричности имамо да је λ партиција. Одавде, када одузмемо $am_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ од f опет добијамо симетричан полином степена r, али је он мањи у лексикографском поретку од f. Како има коначно много партиција од r, овај процес можемо да поновимо коначно много пута и добићемо 0 зато што увек добијамо симетричан полином истог степена. Одавде закључујемо да су мономијални симетрични полиноми степена r генератори за Λ_n^r, тј. да су $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ генератори за Λ_n.

Ако су два мономијална симетрична полинома различитих степена, они су очигледно линеарно независни. Зато посматрајмо, $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ који су сви степена r и нека је $\sum a_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_n) = 0$. Као малопре, узмемо максималну n-торку λ за коју је $a_\lambda \neq 0$. Међутим, одавде имамо да је коефицијент a_λ уз x^λ различит од 0, што је у контрадикцији са $\sum a_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_n) = 0$. Дакле, $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ чине базу за Λ_n, где λ пролази партицијама дужине мање од n. Из претходног следи да m_λ чине базу Λ где λ пролази свим партицијама. $\square$

Нека је $\mu = (1^r)$. Уводимо елементарну симетричну функцију

$$e_r = m_\mu = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}.$$

За $r = 0$, дефинишемо $e_0 = 1$. Нека је t додатна променљива. Тада имамо генераторну функцију

$$E(t) = \sum_{r \geq 0} e_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t). \tag{1}$$

Став 3.2 *За сваку партицију* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$*, нека је* $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots$*. Тада симетричне функције* e_λ *чине базу за* Λ*, где* λ *пролази свим партицијама. Еквивалентно,* $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]$ *и* $e_1, e_2, \ldots$ *су алгебарски независни над* $\mathbb{Z}$*.*

Доказ: Посматрајмо $e_{\tilde{\lambda}}$, где је $\tilde{\lambda}$ конјугована партиција од λ. Симетрична функција $e_{\tilde{\lambda}}$ је сума монома $(x_{i_1} \cdots x_{i_{\tilde{\lambda}_1}})(x_{j_1} \cdots x_{j_{\tilde{\lambda}_2}}) \cdots = x^\alpha$, где $i_1 < \cdots < i_{\tilde{\lambda}_1}$, $j_1 < \cdots < j_{\tilde{\lambda}_2}$, и тако даље. Поређајмо $i_1, \ldots, i_{\tilde{\lambda}_1}$ у прву колону дијаграма λ од врха ка дну, $j_1, \ldots, j_{\tilde{\lambda}_2}$ у другу колону дијаграма на исти начин, и поновимо за остале колоне док не попунимо λ. Приметимо да за свако $r \geq 1$, бројеви мањи или једнаки r морају да се налазе у првих r редова дијаграма. Одавде закључујемо да $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$, за свако $r \geq 1$, и онда можемо да изразимо $e_{\tilde{\lambda}}$ на следећи начин:

$$e_{\tilde{\lambda}} = m_\lambda + \sum_{\lambda \rhd \mu} a_{\lambda\mu} m_\mu,$$

где су $a_{\lambda\mu}$ ненегативни целобројни коефицијенти. Како добијамо систем једначина који има троугаони облик, видимо да можемо базу m_λ представимо као линеарну комбинацију e_μ. Тиме и добијамо да оне чине базу. $\square$

За свако $r \geq 1$, дефинишемо комплетну симетричну функцију степена r као суму свих монома степена r, тј.

$$h_r = \sum_{\lambda \vdash r} m_\lambda.$$

За $r = 0$, дефинишемо $h_0 = 1$. И овде имамо генераторну функцију,

$$H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1}. \tag{2}$$

Сада из једначина (1) и (2), добијамо $H(t)E(-t) = 1$, што нам даље даје

$$\sum_{j=0}^{s} (-1)^j e_j h_{s-j} = 0, \tag{3}$$

за свако $s \geq 1$. Како су e_r алгебарски независни, можемо да дефинишемо хомоморфизам прстена $\omega : \Lambda \longrightarrow \Lambda$, $e_r \mapsto h_r$, $r \geq 1$. Индукцијом по степену r симетричних функција и применом једнакости (3), добијамо $\omega(h_r) = e_r$, за свако $r \geq 1$. Уствари имамо $\omega^2(e_r) = \omega(\omega(e_r)) = e_r$, тј. $\omega^2 = \mathbf{1}_\Lambda$. Из става 3.2, добијамо да су $h_1, h_2, \ldots$ алгебарски независни над $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots] = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]$. Тиме смо и показали следећи став, тј. одредили смо још једну базу за Λ.

Став 3.3 *За сваку партицију* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$*, нека је* $h_\lambda = h_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots$*. Тада симетричне функције* h_λ *чине базу за* Λ*, где* λ *пролази свим партицијама.*

3.3 Степени редови и скаларни производ

За свако $r \geq 1$, дефинишемо ред степена r, $p_r = m_\mu = \sum x_i^r$, где је $\mu = (r)$. Генераторна функција је дата са

$$P(t) = \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} = \sum_i \frac{x_i}{1 - x_i t}, \tag{4}$$

што је уствари једнако $P(t) = \dfrac{H'(t)}{H(t)}$. Када запишемо $H'(t) = P(t)H(t)$, ако узмемо коефицијенте уз t^{r-1}, добијамо

$$r h_r = \sum_{j=1}^{r} p_j h_{r-j},$$

за свако $r \geq 1$. Индукцијом по r, добијамо да $h_r \in \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_r]$ и $p_r \in \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_r]$, па имамо:

Став 3.4 *Прстен симетричних функција са рационалним коефицијентима $\Lambda_\mathbb{Q}$ је једнак $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$ и $p_1, p_2, \dots$ су алгебарски независни над $\mathbb{Q}$. Еквивалентно, $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$ чине базу над $\mathbb{Q}$ за $\Lambda_\mathbb{Q}$.*

Слично претходном, имамо $P(-t) = \dfrac{E'(t)}{E(t)}$. Како инволуција ω слика слика $E(t)$ у $H(t)$, и обрнуто, као и њихове изводе, добијамо да $\omega(P(t)) = P(-t)$. То нам даје $\omega(p_r) = (-1)^{r-1} p_r$, за све $r \geq 1$.

Приметимо да је $\dfrac{H'(t)}{H(t)} = \dfrac{d}{dt} \log H(t)$. Из тога добијамо следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned} H(t) &= \exp\left(\sum_{r \geq 1} \frac{p_r t^r}{r}\right) \\ &= \prod_{r \geq 1} \exp \frac{p_r t^r}{r} \\ &= \prod_{r \geq 1} \left(\sum_{m_r \geq 0} \frac{1}{m_r!} \left(\frac{p_r t^r}{r}\right)^{m_r}\right). \end{aligned}$$

Ако је $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$, нека је

$$z_\lambda = \prod_{r \geq 1} (r^{m_r}\, m_r!),$$

па одатле имамо да је

$$h_n = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda. \tag{5}$$

Коефицијент z_λ је заправо број елемената које фиксирају пермутацију из $C(\lambda)$ при дејству конјугацијом. Помоћу тога можемо да одредимо $|C(\lambda)|$. Класа конјугације $C(\lambda)$ је орбита елемента

$$\begin{aligned} f &= \lfloor 1, 2, \dots, \lambda_1 \rceil \lfloor \lambda_1 + 1, \lambda_1 + 2, \dots, \lambda_1 + \lambda_2 \rceil \cdots \\ & \quad \lfloor \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1} + 1, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1} + 2, \dots, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \rceil \end{aligned}$$

при дејству $\mathbb{S}_n$ конјугацијом. Обележимо са m_r број циклуса дужине r. Пермутације које фиксирају f су одређене дејством на $1, \lambda_1+1, \dots, \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{k-1}+1$. Њих има z_λ, па из теореме о орбити и стабилизатору имамо да је $|C(\lambda)| = \dfrac{n!}{z_\lambda}$.

Нека су $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$ два низа независних промењљивих. За симетричну функцију $f \in \Lambda$, уводимо ознаке $f(x), f(y), f(xy)$, које редом означавају да је у питању функција по промењљивама $x_i, y_j, x_i y_j$. Ако сад искористимо то за случај степених редова, имамо

$$p_r(xy) = \sum_{i,j} (x_i y_j)^r = p_r(x) p_r(y),$$

одакле добијамо $p_\lambda(xy) = p_\lambda(x) p_\lambda(y)$, за све партиције λ.

Посматрајмо производ

$$\Pi(x, y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Имамо

$$\begin{aligned} \Pi(x, y) &= \sum_{n \geq 0} h_n(xy) \\ &= \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(xy), \end{aligned}$$

тј. према горе наведеном,

$$\Pi(x, y) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y). \tag{6}$$

Ако другачије распишемо, добијамо

$$\begin{aligned} \Pi(x, y) &= \prod_k H(y_k) \\ &= \prod_k \sum_{\alpha_k \geq 0} h_{\alpha_k}(x) y_k^{\alpha_k}, \end{aligned}$$

одакле даље следи

$$\begin{aligned} \Pi(x, y) &= \sum_\lambda h_\lambda(x) m_\lambda(y) \qquad (7) \\ &= \sum_\lambda m_\lambda(x) h_\lambda(y), \end{aligned}$$

где је друга једнакост само добијена заменом x и y.

Сада дефинишемо билинеарни производ на Λ који слика у $\mathbb{Z}$, такав да су базе (h_λ) и (m_λ) дуалне једна другој, тј. да је $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$, за све партиције λ и μ, где је $\delta_{\lambda\mu}$ Кронекерова делта.

Став 3.5 *За свако $r \geq 0$, нека су $(u_\lambda), (v_\lambda)$ базе за $\Lambda^r_{\mathbb{Q}}$, где су λ све партиције од r. Тада су следећа два услова еквивалентна:*

(а) $\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$, за све партиције λ, μ од r;

(б) $\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \Pi(x, y)$.

Доказ: Запишимо сваки вектор u_λ помоћу комплетних, а v_μ помоћу мономијалних симетричних функција:

$$u_\lambda = \sum_\rho a_{\lambda\rho} h_\rho, \quad v_\mu = \sum_\sigma b_{\mu\sigma} m_\sigma.$$

Тада

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \sum_\rho a_{\lambda\rho} b_{\mu\rho},$$

па (а) постаје еквивалентно са

$$\sum_\rho a_{\lambda\rho} b_{\mu\rho} = \delta_{\lambda\mu} \tag{а'}$$

На основу (7), услов (б) је еквивалентан

$$\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \sum_\rho h_\rho(x) m_\rho(y),$$

па имамо

$$\sum_\lambda a_{\lambda\rho} b_{\lambda\sigma} = \delta_{\rho\sigma}. \tag{б'}$$

Како су (а') и (б') еквивалентни, тако су и (а) и (б), што смо и хтели да докажемо. $\square$

Из претходног става и (6) добијамо $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda$, из чега следи да је скаларни прозивод симетричан и позитвно дефинитан и да симетричне функције p_λ чине ортогоналну базу за $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Из $\omega(p_r) = (-1)^r p_r$, добијамо да је $\omega(p_\lambda) = \pm p_\lambda$, стога на основу горње једнакости добијамо да је ω изометрија, тј. да је $\langle \omega(u), \omega(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ за све $u, v \in \Lambda$.

3.4 Шурове функције

Нека је λ партиција природног броја n. Кажемо да је табло T дијаграма λ тежине $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ ако се број i појављује $\alpha_i = \alpha_i(T)$ пута у њему. За Јангов табло T тежине α означавамо

$$x^T = x_1^{\alpha_1(T)} x_2^{\alpha_2(T)} \cdots .$$

Шурова функција s_λ дијаграма λ је дефинисана као сума

$$s_\lambda = \sum_T x^T,$$

по свим Јанговим таблоима T дијаграма λ.

Став 3.6 *За сваки дијаграм λ Шурова функција s_λ је симетрична функција.*

Доказ: Довољно је показати да се s_λ не мења када заменимо x_i и x_{i+1}. Нека је $|\lambda| = n$ и нека је $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ раставаљање од n; α_i, $i \in \mathbb{N}$, су ненегативни цели бројеви такви да их је коначно много различитих од 0 и $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i = n$. Са α' означимо $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i+2}, \dots)$. Скуп Јангових таблоа тежине α обележимо са $\mathcal{T}_{\lambda,\alpha}$, а скуп таблоа тежине α' са $\mathcal{T}_{\lambda,\alpha'}$. Желимо да конструишемо бијекцију између та два скупа, у којој ћемо мењати само ћелије у којима се појављују i и $i+1$.

Нека је $T \in \mathcal{T}_{\lambda,\alpha}$. Ако колона не садржи ниједну од ћелија са i или $i+1$, замена на њу не утиче, па не разматрамо тај случај. Ни случај када су обе овакве ћелије у истој колони нас не занима, зато што ту замена не може да се изврши, а да попуњавање остане табло. Стога, посматрамо колоне у којима се налазе ћелије са i, а не $i+1$. Аналогно разматрање ће важити и за обрнут случај. Нека се у реду налази r ћелија са уносом i, испод којих нису ћелије са уносом $i+1$ и s ћелија са уносом $i+1$, изнад којих нису ћелија са уносом i. Тада направимо други табло од претходног, тако што у левих s од тих $r+s$ ћелија упишемо i, а у десних r ћелија унесемо $i+1$. Понаваљањем овог поступка за сваки ред, добијамо табло $T' \in \mathcal{T}_{\lambda,\alpha'}$. Овиме смо конструисали бијекцију $\mathcal{T}_{\lambda,\alpha} \longrightarrow \mathcal{T}_{\lambda,\alpha'}$, $T \mapsto T'$. Пошто је Шурова функција сума монома индексираних таблоима, из претходног закључујемо да нисмо променили ништа када заменимо промењљиве, већ само променимо редослед сумирања. Дакле, s_λ се не мења ако заменимо x_i и x_{i+1}, тј. s_λ је симетрична. $\square$

Ако је α раставлјање природног броја n и $\lambda \vdash n$, са $K_{\lambda\alpha}$ означавамо број таблоа тежине α. Њих зовемо Косткини бројеви. Приметимо да из дефиниције Шурове функције следи

$$s_\lambda = \sum_\alpha K_{\lambda\alpha} x^\alpha,$$

где је сума по свим растављањима од α. Претходни став повлачи

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda\mu} m_\mu. \tag{8}$$

Став 3.7 *Претпоставимо да су μ и λ партиције истог природног броја. Ако је $K_{\lambda\mu} \neq 0$, онда је $\mu \trianglelefteq \lambda$. Додатно, $K_{\lambda\lambda} = 1$.*

Доказ: Нека је $K_{\lambda\mu} \neq 0$. То значи да постоји табло T дијаграма λ тежине μ. Нека је k произвољан природан број. Тада се бројеви од 1 до k морају налазити у првих k редова таблоа T. У супротном, претпоставимо да постоји i такво да је $i > k$ и да се k налази у i-том реду. Међутим, то је немогуће јер су таблои строго растући по колонама. Пошто је k било произвољно, због претохдног, имамо да за свако k важи $\mu_1 + \cdots + \mu_k \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$, тј. $\mu \trianglelefteq \lambda$. Ако је $\lambda = \mu$, онда за свако i, у i-том реду мора да се налази само број i, па постоји само један такав табло, тј. $K_{\lambda\lambda} = 1$. $\square$

Применом овог става на (8), добијамо троугаони систем једначина

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\lambda \triangleright \mu} K_{\lambda\mu} m_\mu,$$

са јединичном дијагоналом, па закључујемо

Последица 3.8 *Шурове функције s_λ чине базу за Λ^n, кад λ пролази свим партицијама од n, односно Шурове функције s_λ чине базу за Λ кад λ пролази свим партицијама.*

Желимо да покажемо да је ово ортонормирана база у односу на раније дефинисани скаларни производ.

Став 3.9 *Важи Кошијев идентитет:*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y).$$

Доказ: Посматрајмо

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \prod_{i,j} \left(\sum_{d_{ij} \geq 0} (x_i y_j)^{d_{ij}} \right).$$

Члан $x^\alpha y^\beta$ добијамо бирањем $\mathbb{N}$-матрице са коначним носачем за коју важи

$$\sum_j d_{ij} = \alpha_i, \text{ за свако } i \geq 1 \quad \text{и} \quad \sum_i d_{ij} = \beta_j, \text{ за свако } j \geq 1.$$

Одавде имамо да је коефицијент уз $x^\alpha y^\beta$ број $N_{\alpha\beta}$ оваквих матрица. Коефицијент уз члан $x^\alpha y^\beta$ у изразу $\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y)$ је једнак броју $n_{\alpha\beta}$ парова Јангових таблоа (T, S), где су T тежине α, S тежине β. Међутим, теорема 2.3 нам даје бијекцију између транспоната наведених матрица и оваквих парова таблоа, па важи $N_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta}$, одакле следи тражена једнакост. $\square$

На основу ставова 3.5 и 3.9, имамо да Шурове функције чине ортонормирану базу за Λ.

Последица 3.10 *За произвољу партицију μ важи једнакост*

$$h_\mu = s_\mu + \sum_{\lambda \rhd \mu} K_{\lambda\mu} s_\lambda$$

Доказ: Користимо ортонормираност Шурових функција, дуалност база мономијалних и комплетних функција и једнакост из става 3.7

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\lambda \rhd \mu} K_{\lambda\mu} m_\mu$$

Пошто Шурове функције чине базу, запишимо

$$h_\mu = \sum_\lambda c_{\lambda\mu} s_\lambda,$$

за неке коефицијенте $c_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}$. Како Шурове функције чине ортонормирану базу, имамо

$$c_{\lambda\mu} = \langle h_\mu, s_\lambda \rangle = \langle h_\mu, m_\lambda + \sum_{\lambda \rhd \nu} K_{\lambda\nu} m_\nu \rangle = K_{\lambda\mu},$$

одакле следи тражена једнакост. $\square$

На крају овог дела ћемо дати још једну формулу где користимо базу коју чине Шурове функције. Нека су λ и μ произвољне партиције. Тада

$$s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu,$$

где сума иде по свим партицијама ν. Целобројни коефицијенти $c^\nu_{\lambda\mu}$ се зову Литлвуд-Ричардсонови бројеви. Они су ненегативни и постоји њихов комбинаторни опис.

4 Репрезентација $\mathbb{S}_n$

4.1 Дејство $\mathbb{S}_n$ на таблое

У овом делу ћемо подразумевати да су сва попуњавања дијаграма λ са n ћелија, бројевима од 1 до n, без понављања. Симетрична група $\mathbb{S}_n$ дејствује на скуп оваквих попуњавања тако што број i у ћелији замени са $\sigma(i)$, $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Дијаграм добијен од T помоћу σ ћемо обележавати са $\sigma \cdot T$. Са $R(T)$ ћемо обележавати подгрупу од $\mathbb{S}_n$, која се састоји од пермутација које чувају редове, тј. пермутују уносе између ћелија које се налазе у истом реду. Очигледно важи $R(T) \cong S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_k}$, за партицију $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0)$. Овакве подгрупе од $\mathbb{S}_n$ често називамо Јанговим подгрупама. Аналогно дефинишемо и подгрупу $C(T)$, пермутација које чувају колоне. За њих важи

$$R(\sigma \cdot T) = \sigma \cdot R(T) \cdot \sigma^{-1}, \quad C(\sigma \cdot T) = \sigma \cdot C(T) \cdot \sigma^{-1},$$

за свако $\sigma \in \mathbb{S}_n$.

Лема 4.1 *Нека су T и T' попуњавања дијаграма λ и λ'. Претпоставимо да λ не доминира строго λ'. Тада ће важити један од следећа два исказа:*
(i) Постоје бар два различита броја који се појављују у истом реду у T' и истој колони у T;
(ii) $\lambda' = \lambda$ и постоје пермутације $p \in R(T')$ и $q \in C(T)$ такве да $p' \cdot T' = q \cdot T$.

Доказ: Претпоставимо да не важи (i). Тада се уноси у првом реду од T' морају налазити у различитим колонама од T. Одавде имамо да $\lambda_1' \leq \lambda_1$ и да постоји $q_1 \in C(T)$ такво да се сви уноси из првог реда у T' налазе и у првом реду у $q_1 \cdot T$. Како $C(T)$ чува колоне, а не важи (i), имамо сад да се елементи из другог реда у T', налазе у различитим колонама од $q_1 \cdot T$. Пошто су T и $q_1 \cdot T$ истог облика, имамо $\lambda_1' + \lambda_2' \leq \lambda_1 + \lambda_2$ Такође, сад имамо $q_2 \in C(T)$ такво да се елементи из прва два реда у T' налазе и у прва два реда у $q_2 \cdot q_1 \cdot T$. Настављајући овај поступак, добијамо елементе $q_1, q_2, \ldots, q_k \in C(T)$ такве да се елементи из првих k редова у T' налазе и у првих k редова у $q_k \cdot \cdots \cdot q_2 \cdot q_1 \cdot T$. Одавде, као малопре, закључујемо да $\lambda_1' + \cdots + \lambda_k' \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$, па $\lambda' \trianglelefteq \lambda$.

Како λ не доминира строго λ', важи $\lambda = \lambda'$. Ако је k број редова у λ, узмемо елемент $q = q_1 \cdot \cdots \cdot q_k \in C(T)$ и онда ће $q \cdot T$ и T' имати исте уносе по редовима. Тада постоји пермуутација p' која чува редове у T' таква да $p' \cdot T' = q \cdot T$, што је и требало да докажемо. $\square$

Нека је S неко попуњавање дијаграма μ. Запишимо све уносе из S, од дна до врха, почевши од леве колоне и померајући се надесно. Ову реч зовемо реч-колона и обележавамо са $\omega_{\mathrm{col}}(S)$. Уведимо линеарно уређење $>$ на свим попуњавањама $n = |\lambda| = |\lambda'|$ ћелија различитим бројевима од 1 до n. Ако је λ строго мање од λ' у лексикографском поретку, тада $T' > T$. Ако важи $\lambda = \lambda'$, онда је $T' > T$ ако се највећи број, који се појављује у различитим ћелијама у T и T', раније појављује у T' када посматрамо реч-колоне од T' и T.

За стандардне таблое, ово уређење има следећу особину. Ако је T стандардни табло, онда

$$p \cdot T \geq T, \quad T \geq q \cdot T,$$

за све $p \in R(T)$ и $q \in C(T)$. То се види зато што се највећи унос у T са p помери улево, а са q нагоре.

Последица 4.2 *Нека су T и T' стандардни таблои такви да $T' > T$. Тада постоје два различита броја таква да се налазе у истом реду у T' и истој колони у T'.*

Доказ: Како је $T' > T$, дијаграм попуњавања T не може строго да доминира дијаграм од T'. Претпоставимо супротно, да не постоји тражени пар бројева. На основу леме имамо $p' \in R(T')$ и $q \in C(T)$ такве да $p \cdot T' = q \cdot T$. Пошто су T и T' таблои, из претходно наведене особине имамо $T \geq q \cdot T = p' \cdot T' \geq T'$, што је у контрадикцији са $T' > T$. $\square$

4.2 Шпехтов модул

Уведимо релацију еквиваленције на попуњавањима дијаграма λ тако што су T и T' у релацији ако и само ако имају исте уносе унутар редова. Класе називамо таблоидима и таблоид који одговара T обележавамо са $\{T\}$. Приметимо да $\{T\} = \{T'\}$ кад постоји $p \in R(T)$ такво да $p \cdot T = T'$. Сада имамо и дејство $\mathbb{S}_n$ на таблоидима дато са $\sigma \cdot \{T\} = \{\sigma \cdot T\}$, $\sigma \in \mathbb{S}_n$.

Означимо са A групни прстен $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$. Репрезентација групе $\mathbb{S}_n$ је леви A-модул. За дато попуњавање T дијаграма са n ћелија, при чему се сваки број од 1 до n појављује једном, дефинишемо

$$a_T = \sum_{p \in R(T)} p, \quad b_T = \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(q) q.$$

Уведимо и ознаку c_T за производ $b_T \cdot a_T$. Наведене елементе зовемо Јангови симетризери. Покажимо неке особине a_T и b_T. Нека је $g \in C(T)$ произвољно.

Тада

$$\begin{aligned} g \cdot b_T &= g \cdot \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(q) q \\ &= \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(q) g \cdot q \\ &= \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(g)\operatorname{sgn}(g)\operatorname{sgn}(q) g \cdot q \\ &= \operatorname{sgn}(g) \sum_{g \cdot q \in C(T)} \operatorname{sgn}(g \cdot q) g \cdot q \\ &= \operatorname{sgn}(g) b_T \end{aligned}$$

Добили смо да важи $g \cdot b_T = \operatorname{sgn}(g) b_T$, за свако $g \in C(T)$. Исто, $b_T \cdot g = \operatorname{sgn}(g) b_T$. Слично се показује $a_T \cdot f = f \cdot a_T = a_T$ за све $f \in R(T)$. Као последицу претходних једнакости, имамо $a_T \cdot a_T = |R(T)| a_T$ и $b_T \cdot b_T = |C(T)| b_T$.

Дефинишемо комплексни векторски простор M^λ чију базу чине сви таблоиди $\{T\}$ дијаграма λ, где $\lambda \vdash n$. Како $\mathbb{S}_n$ дејствује на таблоидима, дејствује и на M^λ, па је M^λ један леви A-модул. За попуњавање T дијаграма λ, дефинишемо елемент

$$v_T = b_T \cdot \{T\} = \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(q) \{q \cdot T\}.$$

Нека је $\sigma \in \mathbb{S}_n$ произвољна пермутација. Користећи $C(\sigma \cdot T) = \sigma \cdot C(T) \cdot \sigma^{-1}$, добијамо

$$\begin{aligned} \sigma \cdot v_T &= \sigma \cdot \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(q) \{q \cdot T\} \\ &= \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(q) \{\sigma \cdot q \cdot T\} \\ &= \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(\sigma \cdot q \cdot \sigma^{-1}) \{\sigma \cdot q \cdot \sigma^{-1} \cdot \sigma \cdot T\} \\ &= \sum_{\tilde{q} \in C(\sigma \cdot T)} \operatorname{sgn}(\tilde{q}) \{\tilde{q} \cdot \sigma \cdot T\} \\ &= v_{\sigma \cdot T} \end{aligned}$$

Дакле, $v_{\sigma \cdot T} = \sigma \cdot v_T$, за све T и свако $\sigma \in \mathbb{S}_n$.

Лема 4.3 *Нека су T и T', редом, попуњавања дијаграма λ и λ', и претпоставимо да λ не доминира строго λ'. Ако постоји пар различитих бројева који се појављују у истом реду од T' и истој колони од T, онда $b_T \cdot \{T'\} = 0$. У супротном, $b_T \cdot \{T'\} = v_T$ или $b_T \cdot \{T'\} = -v_T$.*

Доказ: Ако постоји такав пар бројева, онда имамо транспозицију τ која им мења места. Она припада $R(T')$ и $C(T)$. Тада $b_T \cdot \tau = -b_T$. Одатле

$$b_T \cdot T' = b_T \cdot \{\tau \cdot T'\} = -b_T \cdot \{T'\},$$

па важи $b_T \cdot \{T'\} = 0$.

Ако не постоји такав пар, онда из леме 4.1 постоје $q \in C(T)$ и $p' \in R(T')$ такви да $p' \cdot T' = q \cdot T$. Даље имамо

$$\begin{aligned} b_T \cdot \{T'\} &= b_T \cdot \{p' \cdot T'\} \\ &= b_T \cdot \{q \cdot T\} \\ &= \mathrm{sgn}(q) b_T \cdot \{T\} \\ &= \mathrm{sgn}(q) v_T, \end{aligned}$$

одакле закључујемо да је $b_T \cdot \{T'\} = v_T$ или $b_T \cdot \{T'\} = -v_T$. $\square$

Шпехтов модул S^λ је потпорстор простора M^λ разапет векторима v_T, за сва попуњавања T дијаграма λ различитим елементима од 1 до $|\lambda|$. Како за свако $\sigma \in \mathbb{S}_n$ и попуњавање T важи, $\sigma \cdot v_T = v_{\sigma \cdot T}$, имамо да је S^λ A-подмодул од M^λ и важи $A \cdot v_T = S^\lambda$.

Из дефиниције видимо да ниједно v_T није нула, па је и Шепхтов модул различит од нуле. Такође, $S^\lambda \cong S^{\lambda'}$ ако и само ако $\lambda = \lambda'$. То закључујемо применом леме 4.3 и особина b_T јер важи

$$b_T \cdot M^\lambda = b_T \cdot S^\lambda = \mathbb{C} v_T \neq 0$$

и

$$b_T \cdot M^{\lambda'} = b_T \cdot S^{\lambda'} = 0,$$

кад је $\lambda < \lambda'$. Аналогно за $\lambda' < \lambda$. Последица ових једнакости је и иредуцибилност репрезентације S^λ.

Из последице 1.6 имамо да иредуцибилних репрезентација коначне групе не може бити више него класа конјугације. Како $\mathbb{S}_n$ има онолико класа конјугације, колико има партиција од n, из претходног добијамо:

Став 4.4 *За сваку партицију λ од n, S^λ је иредуцибилна репрезентација од $\mathbb{S}_n$. Свака иредуцибилна репрезентација од $\mathbb{S}_n$ је изоморфна тачно једном S^λ.*

Помоћу наредне леме ћемо показати који Шпехотви модули чине M^λ.

Лема 4.5 *Нека је $h : M^\lambda \longrightarrow M^{\lambda'}$ хомоморфизам репрезентација од $\mathbb{S}_n$. Ако S^λ није садржано у језгру од h, онда $\lambda' \trianglelefteq \lambda$.*

Доказ: Нека је T попуњавање дијаграма λ такво да v_T не припада језгру од h. Пошто је h пресликавање репрезентација, важи

$$b_T \cdot h(\{T\}) = h(b_T \cdot \{T\}) = h(v_T) \neq 0,$$

одакле закључујемо да постоји попуњавање T' дијаграма λ' такво да $b_T \cdot \{T'\} \neq 0$. Претпоставимо да λ не доминира строго λ', као и да нису једнаке партиције. Тада се ради о случају (i) леме 4.1, па из леме 4.3, имамо да је $b_T \cdot \{T'\} = 0$, чиме добијамо контрадикцију. Дакле, мора $\lambda' \trianglelefteq \lambda$. $\square$

Последица 4.6 *За $\nu \triangleright \lambda$, постоје ненегативни цели бројеви $k_{\nu\lambda}$ такви да важи*

$$M^\lambda \cong S^\lambda \oplus \bigoplus_{\nu \triangleright \lambda} (S^\nu)^{\oplus k_{\nu\lambda}}$$

Доказ: Обележимо са $k_{\nu\lambda}$ број колико пута се Шпехтов модул S^ν појављује у растављању репрезентације M^λ. За свако ν, имамо пројекцију $M^\nu \longrightarrow S^\nu$. Ако се S^ν појављује у M^λ, онда Шпехтов модул S^ν није садржан у језгру композиције утапања $S^\nu \longrightarrow M^\lambda$ и пројекције $M^\nu \longrightarrow S^\nu$. Одавде, на основу претходне леме, добијамо да је $\lambda \trianglelefteq \nu$. Када је $\nu = \lambda$, применом једнакости $b_T \cdot M^\lambda = b_T \cdot S^\lambda = \mathbb{C}v_T$ за произвољно T, добијамо $k_{\lambda\lambda} = 1$, па добијамо тражени израз. $\square$

Став 4.7 *Елементи v_T, где су T стандардни таблои, чине базу за S^λ.*

Доказ: Вектор v_T је линеарна комбинација $\{T\}$, са коефицијентом 1, и и таблоида $\{q \cdot T\}$, за $q \in C(T)$, са коефицијентима 1 или -1. Нека је $\sum x_S v_S = 0$, где ниси сви коефицијенти једнаки 0. За таблое смо приметили да важи $T > q \cdot T$, за $q \in C(T) \setminus \{\mathrm{id}\}$, у претходно дефинисаном уређењу $>$. Додатно, како је оно линеарно, у изразу $\sum x_S v_S = 0$ постоји максимално T, за које се $\{T\}$ појављује са коефицијентом различитим од нуле. То је у контрадикцији са линеарном независношћу таблоида у M^λ, па морају сви коефицијенти x_S бити нула. Одавде добијамо и да је димензија векторског простора S^λ бар f^λ, број стандардних таблоа дијаграма λ.

На основу става 2.4 важи једнакост

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!,$$

што нам даје

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (\dim(S^\lambda))^2 \geq \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!,$$

где је прва једнакост из последице 1.6. Одавде добијамо да је $\dim(S^\lambda) = f^\lambda$, за све λ, одакле следи да v_T разапињу S^λ, где T пролази стандардним таблоима на λ. $\square$

Вратимо се на репрезентацију $\rho : \mathbb{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(M^\lambda)$. Како таблоиди $\{T\}$ чине базу за M^λ, траг елемента $\rho(g)$ је број фиксираних таблоида дејством $g \cdot \{T\} = \{g \cdot T\}$. Нека g припада класи конјугације $C(\mu)$, $\mu \vdash n$. Пермутација g ће фиксирати таблоид $\{T\}$ ако сви елементи истог цикла, у циклусној декомпозицији, припадају истом реду. Обележимо са m_q број q-циклова у циклусној декомпозицији g, а са $r(p,q)$ број циклова дужине q које смо сместили у p-ти ред таблоида $\{T\}$, тј. чији се сваки елемент налази у том реду. Тада је број таблоида фиксираних са g једнак

$$\sum \prod_{q=1}^{n} \frac{m_q!}{r(1,q)! \dots r(n,q)!} \tag{1}$$

где је сума по свим $(r(p,q))_{1 \le p,q \le n}$ таквим да

$$\sum_{j=1}^{n} j r(p,j) = \lambda_p, \quad \sum_{i=1}^{n} r(i,q) = m_q,$$

за све p и q од 1 до n. Са друге стране за свако q

$$(x_1^q + \dots + x_n^q)^{m_q} = \sum \frac{m_q!}{r(1,q)! \dots r(n,q)!} x_1^{qr(1,q)} \dots x_n^{qr(n,q)},$$

где је сума по свим $(r(p,q))_{1 \le p,q \le n}$ таквим да $\sum_{i=1}^{n} r(i,q) = m_q$, за све q од 1 до n. Искористимо што мономијалне функције чине базу за Λ и запишимо

$$p_\mu = \sum_\lambda \xi_\mu^\lambda m_\lambda. \tag{2}$$

Одавде се закључује да је број из једнакости (1) коефицијент ξ_μ^λ уз $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ у полиному $p_\mu(x_1, \dots, x_n) = \prod_{q=1}^{n} (x_1^q + \dots + x_n^q)^{m_q}$.

Лема 4.8 *Вредност карактера M^λ на класи конјугације $C(\mu)$ је коефицијент ξ_μ^λ од x^λ у p_μ.*

4.3 Репрезентација $\mathbb{S}_n$

За попуњавање T дијаграма λ, имамо Јангову подгрупу $R(T) \le \mathbb{S}_n$. Вектори $\sigma \cdot \{T\}$, где σ пролази кроз све представнике класа у $\mathbb{S}_n / R(T)$, чине базу за M^λ. То повлачи да је M^λ изоморфна репрезентацији коју индукује тривијална $\mathbb{I}$:

$$M^\lambda = \mathrm{Ind}_{R(T)}^{\mathbb{S}_n}(\mathbb{I}) = \mathbb{C}[\mathbb{S}_n] \otimes_{\mathbb{C}[R(T)]} \mathbb{C} \tag{3}$$

Посматрајмо репрезентације од $\mathbb{S}_n$ и релацију еквиваленције на њима, такву да су две репрезентације еквивалентне ако и само ако су изоморфне. Дефинишимо

R_n као слободну комутативну групу над класама иредуцибилних репрезентација. Ако за репрезентацију V од $\mathbb{S}_n$ важи $V \cong \bigoplus (S^\lambda)^{\oplus m_\lambda}$, она одређује класу $[V]$ у R_n са $[V] = \sum m_\lambda [S^\lambda]$. Еквивалентно, R_n можемо да видимо као слободну Абелову групу над класама еквиваленције $[V]$ свих репрезентација $\mathbb{S}_n$ модуло подгрупа генерисана са $[V \oplus W] - [V] - [W]$. Нека је

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n,$$

где је $R_0 = \mathbb{Z}$. Дефинишемо производ $\circ : R_n \times R_m \longrightarrow R_{n+m}$ формулом

$$[V] \circ [W] = \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m}^{\mathbb{S}_{n+m}} V \otimes W.$$

Репрезентација $V \otimes W$ од $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m$ је дата са

$$(\sigma, \tau) \cdot (v \otimes w) = \sigma \cdot v \otimes \tau \cdot w,$$

и $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m$ се посматра као подгрупа од $\mathbb{S}_{n+m}$ на стандардан начин, $\mathbb{S}_n$ дејствује на првих n, а $\mathbb{S}_m$ на последњих m бројева. Индукована репрезентација се дефинише формулом

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m}^{\mathbb{S}_{n+m}} V \otimes W = \mathbb{C}[\mathbb{S}_{n+m}] \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m]} (V \otimes W). \tag{4}$$

Овај производ је добро дефинисан, и R је комутативни, асоцијативни градирани прстен са јединицом.

Дефинишимо скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на R_n тако да база коју чине $[S^\lambda]$, $\lambda \vdash n$, буде ортонормирана. Ако су $V = \bigoplus (S^\lambda)^{\oplus m_\lambda}$ и $W = \bigoplus (S^\lambda)^{\oplus n_\lambda}$ две репрезентације од $\mathbb{S}_n$, следи да

$$\langle [V], [W] \rangle = \sum m_\lambda n_\lambda.$$

Применом последице 1.6 на претходну једнакост, добијамо

$$\langle [V], [W] \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \chi_V(\sigma^{-1}) \chi_W(\sigma), \tag{5}$$

где су χ_V и χ_W, редом, карактери репрезентација V и W. Раније смо показали да је $|C(\mu)| = \dfrac{n!}{z_\mu}$, па нам ово даје формулу

$$\langle [V], [W] \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\mu} \frac{1}{z_\mu} \chi_V(C(\mu)) \chi_W(C(\mu)). \tag{6}$$

Како имамо два градирана прстена, репрезентација и симетричних функција, дефинишимо адитивни хомоморфизам $\varphi : \Lambda \longrightarrow R$ на базним елементима нивоа са $\varphi(h_\lambda) = [M^\lambda]$, за све партиције λ.

Теорема 4.9 *Хомоморфизам $\varphi : \Lambda \longrightarrow R$ је хомоморфизам градираних прстена и то изометрички изоморфизам. Такође, за Шурове функције s_λ важи $\varphi(s_\lambda) = [S^\lambda]$.*

Доказ: У случају $\lambda = (n)$, имамо да је $R(T) = \mathbb{S}_n$. Из једнакости (3), добијамо

$$M^\lambda = M^{(n)} = \operatorname{Ind}_{\mathbb{S}_n}^{\mathbb{S}_n}(\mathbb{I}) = \mathbb{I}_n,$$

па закључујемо да се h_n са φ слика у класу тривијалне репрезентације. Пошто $\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots]$, да бисмо показали да је φ хомоморфизам, довољно је показати да

$$[M^{(\lambda_1)}] \circ \dots \circ [M^{(\lambda_k)}] = [M^\lambda],$$

за $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Нека је T попуњавање λ, редом од 1 до n, по редовима од врха ка дну, слева надесно унутар редова. Тада је $R(T) = \mathbb{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathbb{S}_{\lambda_k}$. Сада тражена једнакост следи из једнакости (3), примењењене на изабрано λ и T. Последица 4.6 нам даје да $[M^\lambda]$ чине базу за R, па добијамо да је φ изоморфизам.

Да бисмо доказали остатак теореме, користићемо степене редове. Желимо да дефинишемо хомоморфизам $\psi : R \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{Q}}$ такав да је композиција $\psi \circ \varphi$ утапање Λ у $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Ако применимо дуалност база мономијалних и комплетних фунцкија на једнакост (2), добијамо

$$h_\lambda = \sum_\mu \frac{1}{z_\mu} \xi_\mu^\lambda p_\mu,$$

Помоћу овога можемо да одредимо где ψ слика $[M^\lambda]$. Из леме 4.8 имамо да је вредност карактера M^λ на класи конјугације $C(\mu)$ баш коефицијент ξ_μ^λ. Тиме дефинишемо ψ са

$$\psi([V]) = \sum_\mu \frac{1}{z_\mu} \chi_V(C(\mu)) p_\mu.$$

Пресликавање ψ је адитиван хомоморфизам из горње дефиниције, а на основу претходног имамо да је $\psi \circ \varphi$ утапање Λ у $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Како је φ изоморфизам Λ и R, следи да је ψ инверзан изоморфизам R и Λ.

Да бисмо доказали да је φ изометрија, довољно је показати да то важи за ψ. Из дефиниције ψ, имамо

$$\langle \psi([V]), \psi([W]) \rangle = \sum_{\lambda,\mu} \frac{1}{z_\mu z_\lambda} \chi_V(C(\lambda)) \chi_W(C(\mu)) \langle p_\lambda, p_\mu \rangle.$$

Из $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda$, и једнакости (6), добијамо

$$\langle \psi([V]), \psi([W]) \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \chi_V(\sigma) \chi_W(\sigma) = \langle [V], [W] \rangle,$$

за произвољне репрезентације V и W, па закључујемо да је ψ изометрија, а самим тим и φ.

Из последица 3.10 и 4.6 имамо

$$h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\nu \rhd \lambda} K_{\nu\lambda} s_\nu \quad \text{и} \quad [M^\lambda] = [S^\lambda] + \sum_{\nu \rhd \lambda} k_{\nu\lambda}[S^\nu].$$

Како је $\phi(h_\lambda) = [M^\lambda]$, следи

$$\varphi(s_\lambda) = [S^\lambda] + \sum_\nu d_{\nu\lambda}[S^\nu],$$

за неке $d_{\nu\lambda} \in \mathbb{Z}$. Међутим, φ је изометрија. Стога важи

$$1 = \langle s_\lambda, s_\lambda = \langle \varphi(s_\lambda), \varphi(s_\lambda) \rangle = 1 + \sum_\nu d_{\nu\lambda}^2,$$

што значи да су коефицијенти $d_{\nu\lambda}$ једнаки 0, па добијамо тражену једнакост $\varphi(s_\lambda) = [S^\lambda]$. $\square$

Ова теорема нам даје једнозначну кореспонденцију између Шурових функција и иредуцибилних репрезентација симетричне групе. Дакле, све што знамо о симетричним функцијама, можемо да пренесемо на репрезентацију $\mathbb{S}_n$.

Последица 4.10 *Важи Јангово правило:*

$$M^\lambda \cong S^\lambda \oplus \bigoplus_{\nu \rhd \lambda} (S^\nu)^{\oplus K_{\nu\lambda}},$$

где су $K_{\nu\lambda}$ Косткини бројеви.

Последица 4.11 *Важи Литлвуд–Ричардсоново правило:*

$$S^\lambda \circ S^\mu \cong \bigoplus_\nu (S^\nu)^{\oplus c^\nu_{\lambda\mu}},$$

где су $c^\nu_{\lambda\mu}$ Литлвуд–Ричардсонови бројеви.

4.4 Дуална конструкција

Сада ћемо се бавити дуалном конструкцијом, која ће нам касније послужити када се будемо бавили репрезентацијом опште линеарне групе $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$. Посматраћемо таблоиде колона уместо таблоиде редова као малопре, уз мали додатак. Увешћемо оријентацију на таблоидима. Два таблоида су у истој класи еквиваленције ако имају исте уносе по колонама. Они су исте оријентације ако је пермутација, која слика једно попуњавање дијаграма у друго, парна, односно различите ако је непарна. Ако имамо попуњавање T, онда ћемо писати $[T]$ за таблоиде чија је оријентација одређена са T. Писаћемо $-[T]$ ако су таблоиди добијени од непарних пермутација T.

За партицију λ од n, са $\tilde{M}^\lambda$, означавамо векторски простор над $\mathbb{C}$, чију базу чине таблоиди, не узимајући у обзир њихов знак. Симетрична група $\mathbb{S}_n$ дејствује на $\tilde{M}^\lambda$ према правилу $\sigma\cdot[T]=[\sigma\cdot T]$. Тада је $\tilde{M}^\lambda$ репрезентација симетричне групе. Дефинишимо $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$-подмодул $\tilde{S}^\lambda$ од $\tilde{M}^\lambda$ разапет елементима

$$\tilde{v}_T = a_T\cdot[T] = \sum_{p\in R(T)}[pT].$$

Аналогно случају таблоида редова имамо да важи $\tilde{v}_{\sigma\cdot T}=\sigma\cdot\tilde{v}_T$, као и

Став 4.12 *Важи*

$$\tilde{M}^\lambda = S^\lambda \oplus \bigoplus_{\tilde{\nu}\rhd\tilde{\lambda}} (S^\nu)^{\oplus K_{\nu\lambda}},$$

где су $K_{\tilde{\nu}\tilde{\lambda}}$ Косткини бројеви.

Дефинишимо сурјекције

$$\alpha:\tilde{M}^\lambda\longrightarrow S^\lambda,\quad [T]\mapsto v_T;$$

$$\beta: M^\lambda\longrightarrow \tilde{S}^\lambda,\quad \{T\}\mapsto \tilde{v}_T.$$

Ово су добро дефинисани хомоморфизми $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$-модула. Покажимо за α, слично је за β. Довољно је показати да је $\alpha(\sigma\cdot[T])=\sigma\cdot v_T$. Међутим, то следи из тога што је $v_{\sigma\cdot T}=\sigma\cdot v_T$, при чему ће се то слагати са променом оријентације за $\sigma\in C(T)$. У том случају, важи $\sigma\cdot v_T=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot v_T$, јер $g\cdot b_T=\operatorname{sgn}(g)b_T$, за све $g\in C(T)$.

Лема 4.13 *Нека су $i_R: S^\lambda\hookrightarrow M^\lambda$ и $i_C:\tilde{S}^\lambda\hookrightarrow\tilde{M}^\lambda$ утапања. Тада су*

$$g_\lambda := \beta\circ i_R : S^\lambda\longrightarrow\tilde{S}^\lambda \quad \text{и} \quad \tilde{g}_\lambda := \alpha\circ i_C:\tilde{S}^\lambda\longrightarrow S^\lambda$$

изоморфизми.

Доказ: Нека је T произвољно попуњавање дијаграма λ различитим бројевима од 1 до n. Дефинишимо n_λ као кардиналност скупа

$$\{(p_1,q_1,p_2,q_2)\in\mathbb{S}_n^{\times 4}\,|\,p_1,p_2\in R(T),\, q_1,q_2\in C(T), p_1q_1p_2q_2=\mathrm{id},\, \operatorname{sgn}(q_1)=\operatorname{sgn}(q_2)\}.$$

Број n_λ не зависи од избора T. Ако бисмо уместо T, изабрали $\sigma\cdot T$, за неко $\sigma\in\mathbb{S}_n$, уместо група $R(T)$ и $C(T)$ бисмо само имали $\sigma\cdot R(T)\cdot\sigma^{-1}$ и $\sigma\cdot C(T)\cdot\sigma^{-1}$. Показаћемо да су композиције

$$\tilde{g}_\lambda\circ g_\lambda : S^\lambda\longrightarrow S^\lambda \quad \text{и} \quad g_\lambda\circ\tilde{g}_\lambda:\tilde{S}^\lambda\longrightarrow\tilde{S}^\lambda$$

заправо множење са n_λ.

Хомоморфизам β слика $v_T = b_T \cdot \{T\}$ у $b_T \cdot \tilde{v}_T = (b_T \cdot a_T) \cdot [T]$ што α слика у $(b_T \cdot a_T) \cdot v_T$. Из дефиниције v_T имамо једнакост

$$(b_T \cdot a_T) \cdot v_T = \sum_{\substack{q_1, q_2 \in C(T) \\ p_1 \in R(T)}} \operatorname{sgn}(q_1 q_2) \{q_1 \cdot p_1 \cdot q_2 \cdot T\}.$$

Фиксирајмо $q \in C(T)$ и посматрајмо једначину $\{q_1 \cdot p_1 \cdot q_2 \cdot T\} = \{q \cdot T\}$, са условом $\operatorname{sgn}(q_1 q_2) = \operatorname{sgn}(q)$. Пошто је $\{q \cdot T\} = \{\sigma \cdot T\}$ онда када постоји пермутација $p \in R(T)$ таква да $q = \sigma p$, добијамо да претходна једначина, са задатим условом, има баш n_λ решења, тј. да важи $(b_T \cdot a_T) \cdot v_T = n_\lambda v_T$. Овиме смо показали да је $\tilde{g}_\lambda \circ g_\lambda$ изоморфизам, а на сличан начин се показује да је то и композиција $g_\lambda \circ \tilde{g}_\lambda$. Одавде добијамо да су g_λ и $\tilde{g}_\lambda$ изоморфизми, што смо и хтели да докажемо. $\square$

Претходна лема нам даје да су S^λ и $\tilde{S}^\lambda$ изоморфне репрезентације. Добили смо дуалну конструкцију иредуцибилних репрезентација симетричне групе. Међутим, желимо да видимо $\tilde{S}^\lambda$ на још један начин.

Нека је $\mu = \tilde{\lambda}$ и $l = \lambda_1$. За $1 \leq j \leq l-1$ и $1 \leq k \leq \mu_{j+1}$ и попуњавање T дијаграма λ различитим бројевима од 1 до n, дефинишемо

$$\pi_{j,k}(T) = \sum [S] \in \tilde{M}^\lambda,$$

где је сума по свим попуњавањима S добијених од T разменом између j-те и $(j+1)$-ве колоне, са фиксираним k-точланим скуповима у изабраним колонама. Помоћу тога дефинишемо Q^λ као потпростор од $\tilde{M}^\lambda$, разапет елемнтима облика

$$[T] - \pi_{j,k}(T),$$

где T пролази попуњавањима дијаграма λ различитим бројеима из $[n]$, $1 \leq j \leq l-1$ и $1 \leq k \leq \mu_{j+1}$. Потпростор $\tilde{Q}^\lambda$ је $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$-модул јер се дефиниција $\pi_{j,k}$ слаже са дејством симетричне групе на таблоиде, тј. $\pi_{j,k}(\sigma \cdot T) = \sigma \cdot \pi_{j,k}(T)$, $\sigma \in \mathbb{S}_n$.

Лема 4.14 *Класе $[T]$, где T пролази стандардним таблоима на λ, разапињу количнички простор $\tilde{M}^\lambda / Q^\lambda$.*

Доказ: Уведимо уређење на попуњавањима T од λ. Пишемо $T' \succ T$ ако у најдеснијој колони по којој се разликују, у најнижој ћелији која има различит унос, T' има већи број од T. Стаднардни таблои су максимални у овом уређењу, тако да је довољно показати, ако T није стандардни табло, да га можемо представити преко линеарне комбинације класа $[S]$, $S \succ T$, користећи релације у Q^λ. Ако T није растуће по колонама, тада га можемо заменити са T', попуњавањем којем су уређене колоне. Тада је $[T'] = \pm[T]$ и $T' \succ T$, па нам то дозвољава да претпоставимо да T јесте растуће по колонама. Ако T са растућим колонама није табло, онда можемо да претпоставимо да k-та ћелија у j-ој колони од T има већи унос од k-те у $j+1$ колони. Тада, за свако од попуњавања S у $\pi_{j,k}$, важи $S \succ T$, што нам завршава доказ јер је овај процес коначан. $\square$.

Следећи став ће нам омогућити да видимо $\tilde{S^\lambda}$ на други начин.

Став 4.15 *Простор Q^λ је језгро пресликавања $\alpha : \tilde{M}^\lambda \longrightarrow S^\lambda$, $[T] \mapsto v_T$.*

Доказ: Довољно је доказати да је Q^λ садржано у језгру. Тада α можемо факторисати кроз $\tilde{M}^\lambda$, тј. добијамо сурјекцију $\tilde{M}^\lambda \longrightarrow S^\lambda$. Одатле закључујемо да је $\tilde{M}^\lambda$ димензије бар $f^\lambda = \dim(S^\lambda)$. Међутим, из претходне леме закључујемо да димензија не може бити већа од f^λ, па добијамо да ово пресликавање мора бити изоморфизам, што значи да је $Q^\lambda = \ker(\alpha)$.

Фиксирајмо j, $1 \leq j < \lambda_1$ и нека је Y непразан подскуп ћелија $(j+1)$-ве колоне попуњавања T дијаграма λ различитим бројевима од 1 до n. Дефинишемо $\gamma_Y(T) \in \tilde{M}^\lambda$ формулом

$$\gamma_Y(T) = \sum \epsilon_{(S,T)}[S],$$

где је сума по свим попуњавањима S добијених од T разменом између j-те и $(j+1)$-ве колоне, са подскупом од Y у десној и скупом ћелија исте кардиналности у левој колони. Са $\epsilon_{(S,T)}$ смо означили знак пермутације такве да је $S = \sigma \cdot T$. Тврдимо да $\gamma_Y(T) \in \ker(\alpha)$ за све T и Y.

Нека је X скуп уноса j-те колоне. Дефинишимо подгрупе $K \leq H \leq \mathbb{S}_n$, где се H састоји од пермутација чије рестрикције на $[n] \backslash (X \cup Y)$ су идентитете, а K подгрупа од H која слика X и Y у себе саме. Пошто је $K \leq C(T)$, важи $k \cdot [T] = \mathrm{sgn}(k)[T]$, за све $k \in K$. То нам даје једанкост

$$\sum_{k \in K} \mathrm{sgn}(k) k \cdot [T] = |X|!|Y|![T]$$

Елемент $\gamma_Y(T)$ можемо видети као $\sum \mathrm{sgn}(\sigma)[\sigma \cdot T]$, где је сума по представницима класа H/K. Одатле имамо једнакост

$$|X|!|Y|!\gamma_Y(T) = \sum_{h \in H} \mathrm{sgn}(h) h \cdot [T].$$

Дакле, треба показати

$$\sum_{h \in H} \mathrm{sgn}(h) h \cdot v_T = \sum_{q \in C(T)} \mathrm{sgn}(q) \left(\sum_{h \in H} \mathrm{sgn}(h) h \cdot \{q \cdot T\} \right) = 0.$$

За свако $q \in C(T)$, $q \cdot T$ мора имати бар два елемента из $X \cup Y$ у истом реду. Нека је τ транспозиција таква два елемента. Тада

$$\sum_{h \in H} \mathrm{sgn}(h) h \cdot \{q \cdot T\} = \sum_{g} \mathrm{sgn}(g) g \cdot (\mathrm{id} - \tau) \cdot \{q \cdot T\},$$

где је друга сума по представницима g класа у $H/\langle\tau\rangle$. То је једнако 0 јер $\tau\cdot\{q\cdot T\} = \{q \cdot T\}$. Одавде закључујемо да $\gamma_Y(T) \in \ker(\alpha)$.

Сада тврдимо да важи једнакост

$$\pi_{j,k}(T) - [T] = \sum_Y (-1)^{|Y|}\gamma_Y(T),$$

где је сума по свим подскуповима Y од скупа првих k ћелија у $(j+1)$-вој колони попуњавања T. Обележимо са W скуп првих k ћелија $(j+1)$-ве колоне. У једнакости

$$\sum_Y (-1)^{|Y|}\gamma_Y(T) = \sum_Y (-1)^{|Y|}\left(\sum \epsilon_{(S,T)}[S]\right),$$

друга сума је по попуњавањима S добијених од T разменом, где су изабрани подскуп Z од W и скуп у j-ој колони. Ако је $Z = W$, онда се свако S појављује тачно једном и $\epsilon_{(S,T)} = (-1)^k$, па у том случају добијамо $\pi_{j,k}(T)$. Када је $Z = \emptyset$, имамо да се $S = T$ појављује једном за свако непразно Y, па добијамо уз $[T]$ коефицијент

$$\sum_{l=1}^{k}(-1)^l\binom{k}{l} = -1.$$

Када је $0 < |Z| < k$, S се појављује за свако Y које садржи Z. Такво Y је облика $Z \cup V$, за сваки подскуп V од $W \setminus Z$ и коефицијент је $(-1)^{|Y|}(-1)^m = (-1)^{|V|}$. Одавде је коефицијент уз S

$$\sum_V (-1)^{|V|} = \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l} = 0.$$

Тиме смо показали тражену једнакост, па закључујемо да се $\pi_{j,k}(T) - [T]$ могу записати као линеарна комбинација елемената $\gamma_Y(T)$. Одавде следи $\pi_{j,k}(T) - [T] \in \ker(\alpha)$, тј. да је $Q^\lambda \subseteq \ker(\alpha)$. $\square$

Из претходне леме закључујемо да је $\tilde{M}^\lambda/Q^\lambda \cong S^\lambda$ и добијамо:

Последица 4.16 *Векторски простор S^λ је задат генераторима v_T, где T пролази свим попуњавањима дијаграма λ различитим бројевима од 1 до n и релацијама облика $v_T - \sum v_S$, где је сума по свим S добијеним из T разменом између суседних колона са изабраних k ћелија.*

Овакве релације ће се појавити и у случају $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$ и претходну последицу ћемо искористи при анализирању репрезентације опште линеарне групе.

5 Репрезентација $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$

5.1 Шуров модул

Нека је R комутативни прстен, а E R-модул. За дату партицију λ, са $E^{\times\lambda}$ обележавамо Декартов производ $n = |\lambda|$ копија E, при чему су позиције елемената у n-торци одређене ћелијама Јанговог дијаграма λ. Другим речима, $v \in E^{\times\lambda}$ се задаје одабиром елемента из E за сваку ћелију у λ.

За дати R-модул F, посматрајмо пресликавања $\varphi : E^{\times\lambda} \longrightarrow F$ која имају следеће особине:

(1) φ је мултилинеарно.

(2) φ је алтернирајуће по елементима унутар колоне.

(3) За свако $v \in E^{\times\lambda}$, $\varphi(v) = \sum \varphi(w)$, где је сума по свим $w \in E^{\times\lambda}$ добијених из v разменом између две дате колоне са датим подскупом ћелија у десној колони.

Из особина (1) и (2) закључујемо да $\varphi(v) = -\varphi(v')$ ако је v' добијено из v заменом садржаја између две ћелије исте колоне. Из ове две особине имамо да је довољно посматрати размене када су десној колони бирају ћелије са почетка. Такође, приметимо да, ако је у десној изабраној колони, дужине c, изабрано k ћелија, имамо $\binom{c}{k}$ могућих размена.

Мултилинеарна пресликвања из $E^{\times\lambda}$ са овим особинама, заједно са R-модулима у које сликају, можемо да посматрамо као категорију. За два објекта (F_1, φ_1) и (F_2, φ_2), морфизам између њих је хомоморфизам R-модула $f : F_1 \longrightarrow F_2$ такав да $f \circ \varphi_1 = \varphi_2$. Сада можемо да дефинишемо Шуров модул као универзални објекат у овој категорији. То је R-модул E^λ, уз који имамо пресликавање $E^\lambda \longrightarrow E^{\times\lambda}$, $v \mapsto v^\lambda$, такво да за сваки R-модул F и свако $\varphi : E^{\times\lambda} \longrightarrow F$ са особинама (1), (2) и (3), постоји јединствени хомоморфизам модула $\tilde{\varphi} : E^\lambda \to F$ такав да $\varphi(v) = \tilde{\varphi}(v^\lambda)$ за све $v \in E^{\times\lambda}$.

Конструишимо E^λ. Ако Јангов дијаграм λ има r колона, означимо њихове дужине са μ_i, где $1 \leq i \leq r$. Обележимо R-модул $\bigwedge^{\mu_1} E \bigotimes_R \cdots \bigotimes_R \bigwedge^{\mu_r} E$ са $F^\lambda(E)$ и дефинишемо пресликавање $\delta : E^{\times\lambda} \longrightarrow F^\lambda(E)$ на природан начин: за $v \in E^{\times\lambda}$, прво узмемо антисиметрични производ елемената у ћелијама исте колоне, затим узмемо тензорски производ добијених елемената. Уместо $\delta(v)$, писаћемо $\wedge v$. Приметимо да δ задовољава особине (1) и (2). Нека је $Q^\lambda(E)$ подмодул од $F^\lambda(E)$ генерисан елементима облика $\wedge v - \sum \wedge w$, где је сума по свим w који су добијени од v разменом између две изабране колоне са фиксираним ћелијама у десној.

Ако је $\pi : F^\lambda(E) \longrightarrow F^\lambda(E)/Q^\lambda(E)$ пројекција, онда $\pi \circ \delta$ задовољава особине (1), (2) и (3). Означимо $F^\lambda(E)/Q^\lambda(E)$ са E^λ и уведимо ознаку v^λ за $\pi \circ \delta(v)$, где $v \in E^{\times\lambda}$. Тада је $(E^\lambda, \pi\circ\delta)$ универзални објекат у категорији; ако имамо пресликавање $\varphi : E^{\times\lambda} \longrightarrow F$, онда можемо дефинисати $\tilde{\varphi} : E^\lambda \longrightarrow F$ на генераторима са $\tilde{\varphi}(v^\lambda) = \varphi(v)$, $v \in E^{\times\lambda}$. Тиме смо добили модул E^λ са траженим особинама.

Из конструкције добијамо да је додељивање Шуровог модула E^λ R-модулу E функторијално, тј. хомоморфизам модула $f : E \longrightarrow F$ одређује хомоморфизам $f^\lambda : E^\lambda \longrightarrow F^\lambda$. Он је задат на генераторима v^λ, $v = (v_1, \ldots, v_{|\lambda|})$, једнакошћу $f^\lambda(v^\lambda) = (f(v_1), \ldots, f(v_{|\lambda|}))^\lambda$.

Нека су e_1,...,e_m неки елементи из E. Ако имамо попуњавање T дијаграма λ елементима из $[m]$, онда можемо да добијемо елемент из $E^{\times\lambda}$ тако што свако i у T заменимо са e_i. Слику овог елемента у E^λ ћемо означавати са e_T.

Лема 5.1 *Ако је E слободан са базом $e_1, \ldots, e_m$, онда је $E^\lambda \cong F/Q$, где је F слободан на елементима e_T за сва попуњавања T дијаграма λ из $[m]$ и где је Q подмодул генерисан елементима:*

(i) e_T *ако T има два иста елемента у колони;*

(ii) $e_T + e_{T'}$ *где је T' добијено из T заменом садржаја између две ћелије у колони;*

(iii) $e_T - \sum e_S$, *где је сума по свим S добијених из T разменом као у (3).*

Напомена: Овде имамо злоупотребу нотације. Прво смо са e_T обележили елементе у E^λ добијане на описани начин, а сад су нам то генератори неког слободног R-модула, где сваком попуњавању T, одговара различити елемент e_T. Ова лема нам показује да ту нема неке кључне разлике у случају слободних модула.

Доказ: Имамо да је пресликавање $F \longrightarrow E^\lambda$, дато са $e_T \mapsto e_T$, за попуњавање T, епиморфизам јер су e_T генератори од E^λ због мултилинеарности. Такође, како се генератори од Q овим пресликавањем сликају у 0 (због особина (2) и (3)), имамо епиморфизам $\psi : F/Q \longrightarrow E^\lambda$. То је заправо изоморфизам. Кад T прође свим попуњавањима дијаграма λ, e_T чине базу за $E^{\otimes\lambda}$. Користећи везе (i) и (ii), добијамо модул $F^\lambda(E) = \bigwedge^{\mu_1} E \bigotimes_R \cdots \bigotimes_R \bigwedge^{\mu_r} E$. Базу тог модула чине e_T, за T са строго растућим садржајем колона. На крају, везе у (iii) генеришу подмодул $Q^\lambda(E)$ због мултилинеарности и чињенице да је E слободан. Дакле, ψ је изоморфизам јер $E^\lambda = F^\lambda(E)/Q^\lambda(E)$. $\square$

Лема 5.2 *За сваке две $p \times p$ матрице M и N, и $1 \leq k \leq p$,*

$$\det M \det N = \sum \det M' \det N'$$

где је сума по свим паровима матрица (M', N') добијених од M и N заменом фиксираног скупа k колона N са било којих k колона M, таквом да се чува поредак колона.

Доказ: Можемо да претпоставимо, због тога што је детерминанта мултилинеарно алтернирајуће пресликавање колона, да фиксирани скуп колона матрице N чине баш првих k колона. Ако матрицу M чине колоне $v_1, \ldots, v_p \in R^p$, а N чине $w_1, \ldots, w_p \in R^p$, уведимо ознаке

$$|v_1 \ldots v_p| = \det M, \quad |w_1 \ldots w_p| = \det N.$$

Уведимо пресликавање $g : (R^p)^{p+1} \longrightarrow R$:

$$g(v_1, \ldots, v_p, w_1) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} |v_1 \ldots w_1 \ldots w_k \ldots v_p||v_{i_1} \ldots v_{i_k} w_{k+1} \ldots w_p|,$$

где су у суми колоне $w_1, \ldots, w_k$ редом замењене колонама $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$. Да бисмо показали да важи једнакост из леме, довољно је доказати да је f алтернирајућа функција колона (мултилинеарна је због мултилинеарности детерминанте) јер тада она мора бити нула. За то нам је довољно да покажемо да је $g(v_1, \ldots, v_p, w_1) = 0$ кад су неке две узастопне колоне једнаке, $v_i = v_{i+1}$, $1 \leq i < p$, или $v_p = w + 1$. Ово је тачно у првом случају јер замена чува поредак колона и детерминанта је алтернирајућа функција колона. У другом случају, дефинишемо функцију $h : (R^p)^{p+1} \longrightarrow R$:

$$h(v_1, \ldots, v_p, w_2) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} |v_1 \ldots w_1 \ldots w_k \ldots v_p||v_{i_1} \ldots v_{i_k} w_{k+1} \ldots w_p|.$$

Сада је довољно да покажемо да је $h(v_1, \ldots, v_p, w_2) = 0$ кад су неке две узастопне колоне једнаке, $v_i = v_{i+1}$, $1 \leq i < p$, или $v_p = w_2$. У оба случаја је то тачно из истих разлога као и у првобитном случају малопре. Одавде закључујемо да је h алтернирајућа, па тиме и g, из чега следи тражена једнакост. $\square$

Нека су $Z_{i,j}$ неодређене, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, и означимо са $R[Z]$ прстен полинома са наведеним променљивама и коефицијентима у R. За произвољну p-торку $i_1, \ldots, i_p$ елемената из $[m]$, где је $p \leq m$, уводимо алтернирајућу функцију

$$D_{i_1,\ldots,i_p} = \begin{vmatrix} Z_{1,i_1} & \ldots & Z_{1,i_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{p,i_1} & \ldots & Z_{p,i_p} \end{vmatrix}$$

За Јангов дијаграм λ са највише n редова и за произвољно попуњавање T од λ са бројевима из $[m]$, уводимо

$$D_T = \prod_{j=1}^{l} D_{T(1,j),\ldots,T(\mu_j,j)},$$

где је μ_j дужина j-те колоне од λ, $l = \lambda_1$ и $T(i,j)$ је садржај ћелије у i-том реду и j-тој колони.

Лема 5.3 *Ако је E слободан са базом $e_1, \ldots, e_m$, онда постоји канонски хомоморфизам $E^\lambda \longrightarrow R[Z]$ дат са $e_T \mapsto D_T$ за све T.*

Доказ: Како је E слободан модул, можемо да користимо лему 5.1. Довољно је да покажемо да D_T задовољава особине које одговарају (i), (ii) и (iii). Због тога што је детерминанта мултилинеарна алтернирајућа функција колона, имамо да D_T задовољава особине које одговарају (i) и (ii): $D_T = 0$ кад T има исти елемент у две различите ћелије исте колоне, $D_T + D_{T'} = 0$ кад је T' добијено од T заменом садржаја између две ћелије у колони. Остаје нам још да покажемо да $D_T = \sum D_S$ где је сума по свим S добијеним из T разменом између две колоне са фиксираним скупом ћелија у десној колони. Нека лева колона има елементе $i_1, \ldots, i_p$ у својим ћелијама, а десна $j_1, \ldots, j_q$. Означимо

$$M = \begin{pmatrix} Z_{1,i_1} & \ldots & Z_{1,i_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{p,i_1} & \ldots & Z_{p,i_p} \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} Z_{1,j_1} & \ldots & Z_{1,j_q} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ Z_{p,j_1} & \ldots & Z_{p,j_q} & I_{p-q} \end{pmatrix}.$$

и приметимо да је

$$\det N = \begin{vmatrix} Z_{1,j_1} & \ldots & Z_{1,j_q} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ Z_{p,j_1} & \ldots & Z_{p,j_q} & I_{p-q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{1,j_1} & \ldots & Z_{1,j_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{q,j_1} & \ldots & Z_{q,j_q} \end{vmatrix}.$$

Применом леме 5.2 на ове две матрице и изабрани подскуп колона друге матрице (који одговара изабарним ћелијама у размени), добијамо тражену једнакост. □

Шуров модул E^λ може да се добије када у релацији (3) дозвољавамо само размене између суседних колона. Довољно је показати да је подмодул $Q^\lambda(E)$ из конструкције генерисан елементима $\wedge v - \sum \wedge w$, где $v \in F^\lambda(E)$, а $w \in F^\lambda(E)$ су добијени из v разменом између изабраних суседних колона са фиксираним ћелијама у десној колони. Један начин да се докаже је индукцијом по броју колона између две које учествују у размени.

Теорема 5.4 *Ако је E слободан са базом $e_1, \dots, e_m$, онда је E^λ слободан на елементима e_T, где су T таблои на λ са уносима из $[m]$.*

Доказ: Уведимо поредак на попуњавањима дијаграма: $T \succ T'$ ако и само ако у најдеснијој колони која је различита, у најнижој ћелији по којој се разликују, већи унос је у T'. Покажимо прво да су e_T генератори, где су T таблои. Нека су F и Q из леме 5.1. Показаћемо да је довољно да свако T које није табло можемо да представимо као линеарну комбинацију елемената из Q и елелемената e_S, за које важи $S \succ T$. Такође, можемо да претпоставимо да су уноси по колонама T строго растући; корситећи везе (i) и (ii), можемо да заменимо e_T са $e_{T'}$, где су уноси по колонама у T' строго растући. Приметимо да тада $T' \succ T$. Нека T није табло, тј. нека за k-ти ред важи да је број у j-тој ћелији строго већи од броја у $j+1$-вој. Тада $e_T - \sum e_S \in Q$, где су S сви дијаграми добијени разменом првих k кутија $j+1$-ве и k кутија j-те колоне у T. Такође, за свако такво S важи $S \succ T$. Дакле, показали смо да свако e_T, где T није табло, можемо да представимо као тражену линеарну комбинацију. Овај процес се завршава, тј. сваки e_T можемо да представимо као линеарну комбинацију $e_{T'}$, где су T' таблои, и елемената из Q. То следи из тога што има коначно много попуњавања (истим бројевима) која су већа од T у овом поретку, као и због чињенице, да ако нема већег, онда је попуњавање табло.

Докажимо сад да су овакви e_T линеарно независни. На основу леме 5.3, довољно је доказати да су одговарајући D_T линеарно независни. Уведимо поредак на $Z_{i,j}$: $Z_{i,j} < Z_{i',j'}$ ако и само ако $i < i'$ или $i = i'$ и $j < j'$. Моном по овим промењљивама M_1 је мањи од M_2, у ознаци $M_1 < M_2$, ако и само ако најмање $Z_{i,j}$ које се појављује на различит степен, је мањег степена у M_1 него у M_2. Како важи да је $M_1N_1 < M_2N_2$ кад $M_1 < M_2$ и $N_1 \leq N_2$, имамо да је најмањи моном у $D_{i_1,\dots,i_p}$, $i_1 < \dots < i_p$, производ елемената на дијагонали $Z_{1,i_1} \dots Z_{p,i_p}$. Из овога следи да је најмањи моном у D_T, за T које има растуће колоне, $\prod (Z_{i,j})^{m_T(i,j)}$, где је $m_T(i,j)$ број појаваљивања j у i-том реду, а производ је по свим i и j, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Уведимо сада поредак за таблое: $T < T'$ ако и само ако у првом реду по ком се разликују, у првој ћелији по којој се разликују, број је већи у T'. Другачије речено, $T < T'$ ако и само ако за најмање i за које постоји j такво да $m_T(i,j) \neq m_{T'}(i,j)$, и за најмање такво j, важи $m_T(i,j) < m_{T'}(i,j)$. Из овога и на основу претходног разматрања, следи, ако $T < T'$, онда је најмањи моном који се појављује у D_T мањи од најмањег монома у $D_{T'}$. Нека је $\sum r_T D_T = 0$, где $r_T \in R$ и нису сви једнаки нули. Узмимо минимално S такво да $r_S \neq 0$. Тада је коефицијент уз $\prod (Z_{i,j})^{m_T(i,j)}$ у $\sum r_T D_T$ баш r_S, што није могуће јер је $\sum r_T D_T = 0$. Одавде следи да су сви r_T једнаки нули, тј. да су e_T линеарно независни. Како смо показали да они чине и генераторни скуп, доказали смо да заправо чине базу за E^λ. $\square$

Последица 5.5 *Пресликавање* $E^{\lambda} \longrightarrow R[Z]$ *је мономорфизам и и његова слика* D^{λ} *је слободна на полиномима* D_T*, где су* T *таблои на* λ *са уносима из* $[m]$.

Како је E^{λ} функторијално, сваки ендоморфизам од E одређује ендоморфизам од E^{λ}. Одавде имамо и дејство групе $\mathrm{GL}(E)$ на E^{λ}. Ако је E слободан модул са датом базом, онда је $\mathrm{End}_R = M_m R$. Нека је $g = (g_{i,j}) \in M_m R$ и T је попуњено бројевима $j_1, \dots, j_{|\lambda|}$. Тада, због мултилинеарности и једнакости

$$g \cdot e_j = \sum_{i=1}^{|\lambda|} g_{i,j} e_i,$$

важи:

$$g \cdot e_T = \sum g_{i_1,j_1} \dots g_{i_{|\lambda|},j_{|\lambda|}} e_{T'} \qquad (*)$$

где је сума по свим попуњавањима T' добијених од T заменом вредности $(j_1, \dots, j_{|\lambda|})$ са $(i_1, \dots, i_{|\lambda|})$.

5.2 Репрезентација $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$

Нека је сада E m-димензиони векторски простор над пољем $\mathbb{C}$. Тада је и $V = E^{\lambda}$ векторски простор, а његову базу чине таблои са уносима из $[m]$. Из једнакости (*) следи да је репрезентација $\rho : \mathrm{GL}(E) \longrightarrow \mathrm{GL}(E^{\lambda})$, дата са $\rho(g)(e_T) = g \cdot e_T$, полиномијална. Показаћемо да је она и иредуцибилна репрезентација опште линеарне групе.

Изаберимо базу за E, чиме идентификујемо $\mathrm{GL}(E)$ са $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. Нека је $H \leq \mathrm{GL}(E)$ подгрупа дијагоналних матрица и обележимо са x елементе $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Вектор v репрезентације V се назива тежински тежине $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ где су α_i, $1 \leq i \leq m$, целобројни коефицијенти ако важи $x \cdot v = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} v$ за све $x \in H$. Обележимо са $B \leq \mathrm{GL}_m(E)$ подгрупу горњих троугаоних матрица. Тежински вектор v је вектор највеће тежине ако $B \cdot v = \mathbb{C}^{\times} v$.

Лема 5.6 *Једини вектор највеће тежине у* E^{λ}*, до на множење скаларом, је* $e_{U(\lambda)}$ *где је* $U(\lambda)$ *табло на* λ *у чијем* i*-том реду је само* i.

Доказ: Из једнакости (*), следи да је свако $e_T \in V$ тежински вектор, при чему је α_i број колико пута се i појављује у T. Нека је табло $T = U(\lambda)$ и $g \in B$. Како $g \cdot e_T = \sum g_{i_1,j_1} \dots g_{i_{|\lambda|},j_{|\lambda|}} e_{T'}$ и $g_{i,j} = 0$, за $i > j$, једини e'_T уз који је коефицијент различит од нуле је баш e_T. Дакле, он јесте вектор највеће тежине.

Претпоставимо да $T \neq U(\lambda)$. Нека је p-ти први ред у коме се појављује број већи од p и нека је најмањи елемент већи од p у том реду q. Дефинишимо елемент $g \in B$:

$$g_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ или } (i,j) = (p,q) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тада је $g \cdot e_T = \sum g_{i_1,j_1} \dots g_{i_{|\lambda|},j_{|\lambda|}} e_{T'} = \sum e_S$, где је друга сума по S који су добијени из T, заменом неких q са p. Уз e_S, за S које је добијено од T тако што је у p-том реду свако q замењено са p, коефицијент је 1, па e_T не може бити вектор највеће тежине. Овим смо показали да је једини вектор највеће тежине$e_{U(\lambda)}$. $\square$

Користићемо следећу чињенице: репрезентација V од $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$ је иредуцибилна ако и само ако има јединствени вектор највеће тежине, до на множење скаларом; две репрезентације су изоморфне ако и само ако њихови вектори највеће тежине имају исте тежине.

Теорема 5.7 *Ако λ има највише m редова, онда је репрезентација E^λ од* $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$ *иредуцибилна са вектором највеће тежине $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. Ово су све иредуцибилне полиномијалне репрезентације од* $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$. *Додатно, за све $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, где су $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_m$ цели, постоји јединствена иредуцибилна репрезентација од* $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$ *са вектором највеће тежине α. Она је изоморфна $E^\lambda \otimes D^{\otimes k}$, где је $k \in \mathbb{Z}$ и $\lambda_i = \alpha_i - k \geq 0$ за све i, где је $D^{\otimes k}$ једнодимензиона репрезентација дата са $g \mapsto \det(g)^k$.*

Доказ: Из претходног имамо да је E^λ иредуцибилна репрезентација. Остаје нам да покажемо да су све иредуцибилне полиномијалне репрезентације $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$ баш Шурови модули.

Нека је W иредуцибилна полиномијална репрезентација $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$. Тада она има јединствени вектор највеће тежине $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, где су α_i ненегативни јер је W полиномијална. Одабиром погодне базе за W имамо да је α заправо партиција. Међутим, одавде следи да је $W \cong E^\alpha$, што смо и хтели да докажемо.

Иредицубилне репрезентације су јединствено одређене својим вектором највеће тежине. Репрезентација $E^\lambda \otimes D^{\otimes k}$ има вектор највеће тежине α, где $\alpha_i = \lambda_i + k$, па важи последњи део тврђења. $\square$

Сада ћемо прићи репрезентацији $\mathrm{GL}_m\mathbb{C}$ на другачији начин и утврдићемо везу Шпехтових и Шурових модула. И даље је E m-димензиони комплексни векторски простор над пољем $\mathbb{C}$. Симетрична група дејствује здесна на $E^{\otimes n} = E \otimes_{\mathbb{C}} \dots E \otimes_{\mathbb{C}} E$ на стандардан начин:

$$(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) \cdot \sigma = u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(n)}, \quad u_1, \dots, u_n \in E \text{ и } \sigma_{\in} \mathbb{S}_n.$$

Такође, имамо дејство слева групе $\mathrm{GL}(E)$ на $E^{\otimes n}$, која проистиче из дејства на E:

$$g \cdot (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = g \cdot u_1 \otimes \cdots \otimes g \cdot u_n, \quad u_1, \ldots, u_n \in E \text{ и } g \in \mathrm{GL}(E).$$

За репрезентацију M симетричне групе $\mathbb{S}_n$ уводимо векторски простор $E(M)$ дефинисан са

$$E(M) = E^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]} M.$$

За претходна дејства $\mathbb{S}_n$ и $\mathrm{GL}(E)$ на $E^{\otimes n}$ важи

$$(g \cdot (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)) \cdot \sigma = g \cdot ((u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \cdot \sigma),$$

па имамо дејство слева $\mathrm{GL}(E)$ на $E(M)$:

$$g \cdot (w \otimes v) = (g \cdot w) \otimes v, \quad g \in \mathrm{GL}(E), w \in E^{\otimes n} \text{ и } v \in M.$$

Дакле, $E(M)$ је репрезентација $\mathrm{GL}(E)$, и то полиномијална.

Претходна конструкција је функторијална: хомоморфизам $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$-модула $\varphi : M \longrightarrow N$ одређује хомоморфизам $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(E)]$-модула $E(\varphi) : E(M) \longrightarrow E(N)$, при чему још имамо, ако је φ епиморфизам, да је то и $E(\varphi)$.

Наведимо неке примере за конкретне репрезентације M, које ћемо касније применити. Ако је $M = \mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$, тада је

$$E(M) = E^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]} M = E^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]} \mathbb{C}[\mathbb{S}_n] \cong E^{\otimes n}.$$

Размотримо сад случај M^λ, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$. Нека је T произвољно попуњавање дијаграма λ из $[n]$, без понављања. Тада уочимо пресликавање $\varphi : \mathbb{C}[\mathbb{S}_n] \longrightarrow M^\lambda$, дато са $x \mapsto x \cdot \{T\}$. Оно је епиморфизам $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$-модула и важи да је језгро леви идеал генерисан са $p - \mathrm{id}$, где су p елементи Јангове подгрупе $R(T)$. Очигледно је $\langle p - \mathrm{id} \rangle_{p \in R(T)} \subseteq \ker(\varphi)$. Покажимо и други смер. Нека $\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} a_\sigma \sigma \in \ker(\varphi)$. За њега важи

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} a_\sigma \sigma \cdot \{T\} = 0.$$

Због линеарне независности таблоида, довољно је да гледамо пермутације које шаљу T у исту класу. Нека су σ_1 и σ_2 такве, тј. нека важи $\sigma_1 \cdot \{T\} = \sigma_2 \cdot \{T\}$. Тада је $\sigma_2 = p\sigma_1$, за неко $p \in R(T)$. Ако важи $a\sigma_1 \cdot \{T\} + b\sigma_2 \cdot \{T\} = 0$, онда мора бити $a = -b$ јер је $\{\sigma_1 \cdot T\} = \{\sigma_2 \cdot T\}$. Дакле, $a\sigma_1 + b\sigma_2 \in \langle p - \mathrm{id} \rangle$. Помоћу овога, индукцијом закључујемо да $\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} a_\sigma \sigma \in \langle p - \mathrm{id} \rangle_{p \in R(T)}$. Добили смо да важи и други смер, па $\ker(\varphi) = \langle p - \mathrm{id} \rangle_{p \in R(T)}$.

Применимо сада функтор E на ово пресликавање. Имамо $E(\varphi) : E^{\otimes n} \longrightarrow E(M^\lambda)$. Како је φ сурјекција, то је и $E(\varphi)$. Из функторијалности, имамо да је језгро овог пресликавање генерисано са

$$u_{p(1)} \otimes \cdots \otimes u_{p(n)} - u_1 \otimes \cdots \otimes u_n,$$

где p пролази $R(T) \cong \mathbb{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{\lambda_k}$. Одавде добијамо да је

$$E(M^\lambda) \cong \mathrm{Sym}^{\lambda_1}(E) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_k}(E).$$

Аналогно томе, за репрезентацију $\tilde{M}^\lambda$ симетричне групе $\mathbb{S}_n$ имамо $E(\tilde{M}^\lambda) \cong \bigwedge^{\mu_1}(E) \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{\mu_l}(E)$, где је $\tilde{\lambda} = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$.

Став 5.8 *Постоји канонски изоморфизам* $E^\lambda \cong E(S^\lambda)$.

Доказ: Нека је $\mathrm{v} \in E^{\times\lambda}$ и U попуњавање дијаграма λ различитим бројевима од 1 до n. Обележимо са $\mathrm{v}(U)$ елемент $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in E^{\otimes n}$, где су v_i елементи у v из ћелије са уносом i попуњавања U. Нека је пресликавање $\psi : E^{\times\lambda} \longrightarrow E(S^\lambda)$ дато са

$$\mathrm{v} \mapsto \mathrm{v}(U) \otimes v_U,$$

где је v_U генератор Шпехтовог модула S^λ. Оно не зависи од избора U. Ако имамо друго попуњавање, оно је једнако $\sigma \cdot U$, за неко $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Тада

$$\mathrm{v}(\sigma \cdot U) \otimes v_{\sigma \cdot U} = \mathrm{v}(\sigma \cdot U) \otimes \sigma \cdot v_U = \mathrm{v}(\sigma \cdot U) \cdot \sigma \otimes v_U = \mathrm{v}(U) \otimes v_U,$$

при чему смо искористили да је $\mathrm{v}(\sigma \cdot U) \cdot \sigma = \mathrm{v}(U)$, што следи из дефиниције. Пресликавање ψ је мултилинеарно због мултилинеарности тензорског производа. Нека је v вектор са једнаким уносима у две различите ћелије исте колоне. Тада постоји транспозиција $\tau \in C(U)$ таква да $\mathrm{v}(U) = \mathrm{v}(\tau \cdot U)$, што нам даље даје

$$\mathrm{v}(U) \otimes v_U = \mathrm{v}(\tau \cdot U) \otimes v_{\tau \cdot U} = \mathrm{v}(U) \otimes \tau \cdot v_U = -\mathrm{v}(U) \cdot v_U,$$

одакле следи да је $\mathrm{v}(U) \otimes v_U = 0$, тј. добили смо да је ψ алтернирајуће по колонама. Нека је сад $\mathrm{v} \in E^{\times\lambda}$ произвољан вектор и нека су w вектори добијеним неком произвољном разменом између фиксираних колона са одређеним бројем ћелија. Попуњавања која њима одговарају обележимо са W. Тада $\mathrm{w}(U) \otimes v_U = \mathrm{v}(U) \otimes v_W$, па

$$\begin{aligned} v - \sum w &\mapsto \mathrm{v}(U) \otimes v_U - \sum \mathrm{w}(U) \otimes v_U \\ &= \mathrm{v}(U) \otimes v_U - \sum \mathrm{v}(U) \otimes v_W \\ &= \mathrm{v}(U) \otimes (v_u - \sum v_W) \\ &= \mathrm{v}(U) \otimes 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Овиме смо добили да ψ задовољава (1), (2) и (3) из 5.1, па даље закључујемо да је $E^\lambda = E(\tilde{M}^\lambda)/E(Q^\lambda)$. Одавде следи да је $E^\lambda \cong E(S^\lambda)$ јер је $S^\lambda = \tilde{M}^\lambda / Q^\lambda$ и због функторијалности. $\square$

Пошто имамо везу Шурових и Шпехтових модула, можемо да применимо оно што знамо из репрезентација симетричних група. Ако применимо претходни став на наведене примере, имамо:

Последица 5.9 *Постоје следећи изоморфизми:*

$$E^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda};$$

$$\mathrm{Sym}^{\lambda_1} E \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_n} E \cong E^\lambda \oplus \bigoplus_{\nu \rhd \lambda} (E^\nu)^{\oplus K_{\nu\lambda}};$$

$$\bigwedge^{\mu_1} E \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{\mu_m} E \cong E^{\tilde{\mu}} \oplus \bigoplus_{\tilde{\nu} \rhd \mu} (E^\nu)^{K_{\tilde{\nu}\mu}};$$

где су $K_{\nu\lambda}$, $K_{\tilde{\nu}\mu}$ Косткини бројеви.

Нека је $\lambda \vdash l, \mu \vdash k$ и $l + k = n$. Тада

$$\begin{aligned}
E(S^\lambda \circ S^\mu) &\cong E^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]} (\mathbb{C}[\mathbb{S}_n] \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_l \times \mathbb{S}_k]} (S^\lambda \otimes S^k)) \\
&\cong (E^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]} \mathbb{C}[\mathbb{S}_n]) \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_l \times \mathbb{S}_k]} (S^\lambda \otimes S^\mu) \\
&\cong E^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_l \times \mathbb{S}_k]} (S^\lambda \otimes S^\mu) \\
&\cong (E^{\otimes l} \otimes E^{\otimes k}) \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_l \times \mathbb{S}_k]} (S^\lambda \otimes S^\mu) \\
&\cong (E^{\otimes l} \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_l]} S^\lambda) \otimes (E^{\otimes k} \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_k]} S^\mu) \\
&\cong E(S^\lambda) \otimes E(S^\mu),
\end{aligned}$$

где смо искористили да $\mathbb{S}_l$ и $\mathbb{S}_k$ дејствују, редом, на првих l и задњих k координата тензорског производа $E^{\otimes n}$. Када применимо став 5.8 и последицу 4.11 на претходни низ изоморфизама, добијамо:

Последица 5.10 *Важи*

$$E^\lambda \otimes E^\mu \cong \bigoplus_\nu (E^\nu)^{\oplus c^\nu_{\lambda\mu}},$$

где су $c^\nu_{\lambda\mu}$ Литлвуд-Ричардсонови бројеви.

6 Гелфанд-Цетлинове базе

6.1 Гелфанд-Цетлинови низови

У овом делу уводимо нови комбинаторни појам, који је у вези са Јанговим таблоима. Нека је n природан број. Уведимо троугаони низ ненегативних целих бројева,

$$\begin{array}{ccccccccc} m_{n1} & & m_{n2} & & \dots & & m_{nn} \\ & m_{n-1,1} & & \dots & & m_{n-1,n-1} & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & m_{21} & & m_{22} & & \\ & & & m_{11} & & & \end{array},$$

такав да важи $m_{k,i+1} \leq m_{k-1,i} \leq m_{ki}$, где $i = 1, \dots, k-1$, за свако $k = 1, \dots, n$. Приметимо да бројеви у сваком реду одређују партицију. Обележимо са $\lambda^{(i)}$ партицију одређену бројевима у i-том реду, где редове посматрамо одоздо нагоре. Због наведених особина, имамо и да важи $\lambda^{(1)} \subseteq \lambda^{(2)} \subseteq \dots \subseteq \lambda^{(n)} = \lambda$. Овакав низ зовемо Гелфанд-Цетлинов низ придружен партицији λ и обележавамо га са Λ.

Успоставимо везу са таблоима, коју смо навели на почетку овог дела. Ако имамо низ Λ, са n редова, придружен партицији λ, попунимо дијаграм λ тако што убацујемо број k у ћелије $\lambda^{(k)} \setminus \lambda^{(k-1)}$, за $k \geq 2$, и број 1 у $\lambda^{(1)}$. Добијено попуњавање јесте табло због услова $m_{k,i+1} \leq m_{k-1,i} \leq m_{ki}$, $i = 1, \dots, k-1$, јер нам то даје да постоји највише једна ћелија у истој колони у $\lambda^{(k)} \setminus \lambda^{(k-1)}$. Обрнуто, ако нам је дат Јангов табло T дијаграма λ, са попуњавањем из $[n]$, низ Λ можемо да добијемо на следећи начин. Највиши ред, који је дужине n, имамо јер је $\lambda = \lambda^{(n)}$. Избацивањем ћелија које садрже n, добијамо дијаграм $\lambda^{(n-1)}$ и његово попуњавање које остаје табло. Понављамо поступак. Ако имамо ред $\lambda^{(k)} = (m_{k1}, \dots m_{kk})$, избацивањем ћелија које садрже k, добијамо $\lambda^{(k-1)} \subseteq \lambda^{(k)}$. Из разлога што су редови партиције, такве да $\lambda^{(k-1)} \subseteq \lambda^{(k)}$, као и због тога што се у сваком кораку добија табло, имамо да важи $m_{k,i+1} \leq m_{k-1,i} \leq m_{ki}$, $i = 1, \dots, k-1$. Дакле, из таблоа T смо добили Гелфанд-Цетлинов низ Λ. Из претходног следи:

Став 6.1 *Нека је λ партиција, а n неки природан број. Тада постоји бијекција између скупа Јангових таблоа дијаграма λ, попуњеног бројевима из $[n]$ и скупа Гелфанд-Цетлинових низова Λ, са n редова, придружених партицији λ.*

6.2 Репрезентација $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$

Нека је $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ Лијева алгебра $n \times n$ матрица над пољем $\mathbb{C}$, са стандардним сабирањем и множењем скаларом, при чему је комутатор дефинисан формулом

$[A,B] = AB - BA$, за све $A, B \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$. Репрезентација Лијеве алгебре $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ је линеарно пресликавање $\rho : \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$, које се слаже са комутатором, тј. $[X,Y]v = X(Y(v)) - Y(X(v))$, за све $X, Y \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ и све $v \in V$, где користимо скраћени запис $X(v) = \rho(X)(v)$. Из ове дефиниције имамо да је коначнодимензиона репрезентација V одређена матрицама реда N, таквим да $A \mapsto a$ и $B \mapsto b$ повлачи $\lambda A \mapsto \lambda a$ и $[A,B] \mapsto [a,b]$. Као и случају репрезентације групе, желимо да одредимо иредуцибилне репрезентације, а оне су јединствено одређене векторима највеће тежине. Ако је дата партиција λ, означимо такву репрезентацију са V_λ.

Обележимо са E_{ik} матрице стандардне базе за $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$, $1 \leq i, k \leq n$. Из дефиниције комутатора имамо

$$\begin{aligned}
[E_{ik}, E_{kl}] &= E_{il} \quad (i \neq l), \\
[E_{ik}, E_{ki}] &= E_{ii} - E_{kk}, \\
[E_{ij}, E_{kl}] &= 0 \quad (j \neq k \text{ и } i \neq l).
\end{aligned}$$

Обележимо са e_{ik} матрице реда N које одговрају претходним, у репрезентацији ρ. Како је свака матрица у $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ линеарна комбинација E_{ik}, следи да је репрезентација јединствено одређена елементима e_{ik}. Дакле, одређивање иредуцибилне репрезентације од $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ се своди на налажење n^2 матрица e_{ik} таквих да:

$$\begin{aligned}
[e_{ik}, e_{kl}] &= e_{il} \quad (i \neq l), \\
[e_{ik}, e_{ki}] &= e_{ii} - e_{kk}, \\
[e_{ij}, e_{kl}] &= 0 \quad (j \neq k \text{ и } i \neq l).
\end{aligned} \tag{1}$$

Став 6.2 *Постоји база ξ_λ од V_λ, параметризована низовима Λ, где базне матрице $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ дејствују на њих формулама*

$$\begin{aligned}
E_{kk}\xi_\Lambda &= \left(\sum_{i=1}^{k} m_{ki} - \sum_{i=1}^{k-1} m_{k-1,i}\right)\xi_\Lambda, \\
E_{k,k+1}\xi_\Lambda &= -\sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki} - l_{k+1,1})\cdots(l_{ki} - l_{k+1,k+1})}{(l_{ki} - l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki} - l_{kk})}\xi_{\Lambda+\delta_{ki}}, \\
E_{k+1,k}\xi_\Lambda &= \sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki} - l_{k-1,1})\cdots(l_{ki} - l_{k-1,k-1})}{(l_{ki} - l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki} - l_{kk})}\xi_{\Lambda-\delta_{ki}}.
\end{aligned}$$

Низови $\Lambda \pm \delta_{ki}$ се добијау из Λ заменом m_{ki} са $m_{ki} \pm 1$, док је $l_{ki} = m_{ki} - i + 1$. Подразумева се $\xi_\Lambda = 0$ кад Λ није дефинисано. Са $\wedge$ смо означили избацивање фактора $l_{ki} - l_{ki}$ из производа.

Доказ: Прво ћемо показати да важе релације (1) за дефинисана дејства. Након тога ћемо, помоћу индукције, дефинисати дејства произвољних E_{ij} и проверити релације (1) за њих. Нека је Λ произвољан Гелфанд-Цетлинов низ. Покажимо $[E_{kk}, E_{k,k+1}] = E_{k,k+1}$.

$$\begin{aligned}
[E_{kk}, E_{k,k+1}]\xi_\Lambda &= E_{kk}(E_{k,k+1}(\xi_\Lambda)) - E_{k,k+1}(E_{kk}(\xi_\Lambda)) \\
&= E_{kk}\left(-\sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}\xi_{\Lambda+\delta_{ki}}\right) \\
&\quad -E_{k,k+1}\left(\left(\sum_{j=1}^{k} m_{kj} - \sum_{j=1}^{k-1} m_{k-1,j}\right)\xi_\Lambda\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}E_{kk}(\xi_{\Lambda+\delta_{ki}}) \\
&\quad -\left(\sum_{j=1}^{k} m_{kj} - \sum_{j=1}^{k-1} m_{k-1,j}\right)E_{k,k+1}(\xi_\Lambda) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}\cdot \\
&\quad \left(\sum_{j=1}^{k} m_{kj} - \sum_{j=1}^{k-1} m_{k-1,j}+1\right)\xi_{\Lambda+\delta_{ki}} \\
&\quad +\left(\sum_{j=1}^{k} m_{kj} - \sum_{j=1}^{k-1} m_{k-1,j}\right)\cdot \\
&\quad \sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}\xi_{\Lambda+\delta_{ki}} \\
&= -\sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}\xi_{\Lambda+\delta_{ki}} \\
&= E_{k,k+1}(\xi_\Lambda)
\end{aligned}$$

Дакле, важи $[E_{kk}, E_{k,k+1}] = E_{k,k+1}$. Аналогно се покаже за $[E_{k+1,k+1}, E_{k+1,k}] = E_{k+1,k}$.

Покажимо $[E_{k,k+1}, E_{k+1,k}] = E_{kk} - E_{k+1,k+1}$. Аналогно се показује да важи једнакост $[E_{k+1,k}, E_{k,k+1}] = E_{k+1,k+1} - E_{kk}$.

$$
\begin{aligned}
[E_{k,k+1}, E_{k+1,k}]\xi_\Lambda &= E_{k,k+1}(E_{k+1,k}(\xi_\Lambda)) - E_{k+1,k}(E_{k,k+1}(\xi_\Lambda)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k-1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k-1,k-1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} E_{k,k+1}(\xi_{\Lambda-\delta_{ki}}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} \frac{(l_{kj}-l_{k+1,1})\cdots(l_{kj}-l_{k+1,k+1})}{(l_{kj}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{kj}-l_{kk})} E_{k+1,k}(\xi_{\Lambda+\delta_{kj}}) \\
&= -\sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k-1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k-1,k-1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots(l_{ki}-l_{kj})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} \cdot \\
&\quad \frac{(l_{kj}-l_{k+1,1})\cdots(l_{kj}-l_{k+1,k+1})}{(l_{kj}-l_{k1})\cdots(l_{kj}-l_{ki}+1)\cdots\wedge\cdots(l_{kj}-l_{kk})} \xi_{\Lambda-\delta_{ki}+\delta_{kj}} \\
&\quad -\sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k-1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k-1,k-1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} \cdot \\
&\quad \frac{(l_{ki}-1-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-1-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-1-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-1-l_{kk})} \xi_\Lambda \\
&\quad +\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \frac{(l_{kj}-l_{k+1,1})\cdots(l_{kj}-l_{k+1,k+1})}{(l_{kj}-l_{k1})\cdots(l_{kj}-l_{ki})\cdots\wedge\cdots(l_{kj}-l_{kk})} \cdot \\
&\quad \frac{(l_{ki}-l_{k-1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k-1,k-1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots(l_{ki}-l_{kj}-1)\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} \xi_{\Lambda-\delta_{ki}+\delta kj} \\
&\quad +\sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} \cdot \\
&\quad \frac{(l_{ki}+1-l_{k-1,1})\cdots(l_{ki}+1-l_{k-1,k-1})}{(l_{ki}+1-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}+1-l_{kk})} \xi_\Lambda \\
&= -\sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k-1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k-1,k-1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} \cdot \\
&\quad \frac{(l_{ki}-1-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-1-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-1-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-1-l_{kk})} \xi_\Lambda \\
&\quad +\sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} \cdot \\
&\quad \frac{(l_{ki}+1-l_{k-1,1})\cdots(l_{ki}+1-l_{k-1,k-1})}{(l_{ki}+1-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}+1-l_{kk})} \xi_\Lambda \\
&= \frac{A}{B}\xi_\Lambda,
\end{aligned}
$$

где је

$$B = \prod_{1\le i<j\le k} (l_{ki}-l_{kj})(l_{ki}-l_{kj}+1)(l_{ki}-l_{kj}-1).$$

Прво ћемо показати да $B|A$. Фиксирајмо $r, s \in [k], r \neq s$.

1° $l_{kr} - l_{ks}|A$:
Посматрамо сабирке за r и s, укупно их је четири и они су следећег облика:

$$-P_r A_s^r A_s^+ A_s^- A_r^+ P + D_r A_s^r A_s^+ A_s^- A_r^- P - P_s A_r^s A_r^+ A_r^- A_s^+ P + D_s A_r^s A_r^+ A_r^- A_s^- P,$$

где користимо следеће ознаке:

$$\begin{array}{rcl}
P_i & = & (l_{ki} - l_{k-1,1}) \cdots (l_{ki} - l_{k-1,k-1})(l_{ki} - 1 - l_{k+1,1}) \cdots (l_{ki} - 1 - l_{k+1,k+1}), \\
D_i & = & (l_{ki} - l_{k+1,1}) \cdots (l_{ki} - l_{k+1,k+1})(l_{ki} + 1 - l_{k-1,1}) \cdots (l_{ki} + 1 - l_{k-1,k-1}), \\
A_i^+ & = & (l_{ki} - l_{k1} - 1) \cdots \wedge \cdots (l_{ki} - l_{kk} - 1), \\
A_i^- & = & (l_{ki} - l_{k1} + 1) \cdots \wedge \cdots (l_{ki} - l_{kk} + 1), \\
A_i^j & = & (l_{ki} - k_{k1}) \cdots \wedge \cdots (\widehat{l_{ki} - l_{kj}}) \cdots (l_{ki} - l_{kk}) \\
P & & \text{заједнички члан.}
\end{array}$$

Када заменимо $l_{kr} = l_{ks}$, добијамо да је $P_r A_s^r A_s^+ A_s^- A_r^+ P = -P_s A_r^s A_r^+ A_r^- A_s^+ P$ и $D_r A_s^r A_s^+ A_s^- A_r^- P = -D_s A_r^s A_r^+ A_r^- A_s^- P$, одакле следи да $l_{kr} - l_{ks}|t_{rs}$. Остали сабирци у A садрже члан $l_{kr} - l_{ks}$, због свођења на заједнички делилац, па добијамо да $l_{kr} - l_{ks}|A$.

2° $l_{kr} - l_{ks} - 1|A$:
Овде посматрамо

$$-P_r A_s^{r-} A_s^{r+} A_r^+ A_s^r Q + D_r A_s^{r+} A_s^{r-} A_r^- A_s^r Q - P_s A_r^{s-} A_r^{s+} A_s^+ A_r^s Q + D_s A_r^{s+} A_r^{s-} A_s^- A_r^s Q,$$

где смо, поред већ коришћених ознака, имали и

$$\begin{array}{rcl}
A_i^{j+} & = & (l_{ki} - l_{k1} - 1) \cdots \wedge \cdots (l_{ki} \widehat{- lkj} - 1) \cdots (l_{ki} - l_{kk} - 1), \\
A_i^{j-} & = & (l_{ki} - l_{k1} + 1) \cdots \wedge \cdots (l_{ki} \widehat{- lkj} + 1) \cdots (l_{ki} - l_{kk} + 1), \\
Q & & \text{заједнички члан.}
\end{array}$$

Када заменимо $l_{kr} = l_{ks} + 1$, добијамо $-P_r A_s^{r-} A_s^{r+} A_r^+ A_s^r Q = D_s A_r^{s+} A_r^{s-} A_s^- A_r^s Q$ и $D_r A_s^{r+} A_s^{r-} A_r^- A_s^r Q = P_s A_r^{s-} A_r^{s+} A_s^+ A_r^s Q$, одакле следи да $l_{kr} - l_{ks} - 1|A$.

3° $l_{kr} - l_{ks} + 1|A$:
Важи слично, као у претходном случају.

Добили смо да $B|A$, тј. $h = \dfrac{A}{B}$ је полином. B је степена $3k-3$, док је A степена $3k-2$ јер се чланови степена $3k-1$ пократе. Дакле, h је линеаран, са целобројним коефицијентима, тј.

$$h = \sum_{i=1}^{k+1} a_i l_{k+1,i} + \sum_{i=1}^{k} b_i l_{ki} + \sum_{i=1}^{k-1} c_i l_{k-1,i} + d$$

Треба да одредимо коефицијенте. То можемо помоћу асимптотске анализе израза. Исписаћемо поступак за $b_i = 2$, при чему напомињемо да се истом методом показује да $a_i = c_i = -1$ и $d = 0$.

Хоћемо да одредимо коефицијент уз l_{kr}, где је r фиксирано. Узмимо да $l_{kr} \to +\infty$, $l_{ki} \to 0$, $i \neq r$ и $l_{k-1,j} = l_{k+1,j} = 0$. Тада је

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l_{kr}}\frac{A}{B} &\approx -\frac{l_{kr}^{k-1}(l_{kr}-1)^{k+1}}{l_{kr}^{k}(l_{kr}-1)^{k-1}} + \frac{l_{kr}^{k+1}(l_{kr}+1)^{k-1}}{l_{kr}^{k}(l_{kr}+1)^{k-1}} \\
&= \frac{(-(l_{kr}-1)^2 + l_{kr}^2)(l_{kr}-1)^{k-1}(l_{kr}+1)^{k-1}}{l_{kr}(l_{kr}-1)^{k-1}(l_{kr}+1)^{k-1}} \\
&= 2 - \frac{1}{l_{kr}}.
\end{aligned}$$

Како је h линеаран, одавде добијамо да је $b_{ki} = 2$, за све $i \in [k]$.

Добили смо да важи

$$\begin{aligned}
[E_{k,k+1}, E_{k+1,k}]\xi_\Lambda &= \left(-\sum_{i=1}^{k+1} l_{k+1,i} + 2\sum_{i=1}^{k} l_{ki} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{k-1,i}\right)\xi_\Lambda \\
&= \left(-\sum_{i=1}^{k+1} m_{k+1,i} + 2\sum_{i=1}^{k} m_{ki} - \sum_{i=1}^{k-1} m_{k-1,i}\right)\xi_\Lambda,
\end{aligned}$$

тј. да баш важи тражена једнакост

$$[E_{k,k+1}, E_{k+1,k}] = E_{kk} - E_{k+1,k+1}.$$

Остаје нам трећа једнакост у релацији (1), $[E_{i_1,k_1}, E_{i_2,k_2}] = 0$, кад је $i_1 \neq k_2$ и $i_2 \neq k_1$. За описана дејства, имамо наредне случајеве:

- $[E_{kk}, E_{ll}] = 0$, где је $k \neq l$;
- $[E_{kk}, E_{l,l+1}] = 0, [E_{kk}, E_{l+1,l}] = 0$ где је $k \neq l, l+1$;
- $[E_{k,k+1}, E_{l,l+1}] = 0, [E_{k+1,k}, E_{l+1,l}] = 0$, где је $k \neq l+1$ и $l \neq k+1$;
- $[E_{k,k+1}, E_{l+1,l}] = 0$, где је $k \neq l$.

Први случај је јасан. У другом, посматрајмо $[E_{kk}, E_{l,l+1}]$, где је $k \neq l, l+1$. Ту имамо два подслучаја, када је $k \leq l-1$ и $k \geq l+2$. Распишимо други подслучај, за произвољни вектор ξ_Λ.

$$\begin{aligned}
[E_{kk}, E_{l,l+1}]\xi_\Lambda &= E_{kk}(E_{l,l+1}(\xi_\Lambda)) - E_{l,l+1}(E_{kk}(\xi_\Lambda)) \\
&= -\sum_{i=1}^{l} \frac{(l_{li}-l_{l+1,1})\cdots(l_{li}-l_{l+1,l+1})}{(l_{li}-l_{l1})\cdots\wedge\cdots(l_{li}-l_{ll})} E_{kk}(\xi_{\Lambda+\delta_{li}}) \\
&\quad -\left(\sum_{j=1}^{k} m_{kj} - \sum_{j=1}^{k-1} m_{k-1,j}\right) E_{l,l+1}(\xi_\Lambda) \\
&= -\sum_{i=1}^{l} \frac{(l_{li}-l_{l+1,1})\cdots(l_{li}-l_{l+1,l+1})}{(l_{li}-l_{l1})\cdots\wedge\cdots(l_{li}-l_{ll})} \cdot \\
&\quad \left(\sum_{j=1}^{k} m_{kj} + 1 - \sum_{j=1}^{k-1} m_{k-1,j} - 1\right) \xi_{\Lambda+\delta_{li}} \\
&\quad + \left(\sum_{j=1}^{k} m_{kj} - \sum_{j=1}^{k-1} m_{k-1,j}\right) \cdot \\
&\quad \sum_{i=1}^{l} \frac{(l_{li}-l_{l+1,1})\cdots(l_{li}-l_{l+1,l+1})}{(l_{li}-l_{l1})\cdots\wedge\cdots(l_{li}-l_{ll})} \xi_{\Lambda+\delta_{li}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Аналогно за први подслучај, као и $[E_{kk}, E_{l+1,l}] = 0$, где $k \neq l, l+1$. Посматрајмо сад $[E_{k,k+1}, E_{l,l+1}]$ из трећег случаја. Ту имамо два подслучаја: $k = l$ и $k \neq l$. У првом подслучају очигледно важи једнакост. Распишимо други подслучај.

$$\begin{aligned}
[E_{k,k+1}, E_{l,l+1}]\xi_\Lambda &= E_{k,k+1}(E_{l,l+1}(\xi_\Lambda)) - E_{l,l+1}(E_{k,k+1}(\xi_\Lambda)) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \frac{(l_{li}-l_{l+1,1})\cdots(l_{li}-l_{l+1,l+1})}{(l_{li}-l_{l1})\cdots\wedge\cdots(l_{li}-l_{ll})} \cdot \\
&\quad \sum_{j=1}^{k} \frac{(l_{kj}-l_{k+1,1})\cdots(l_{kj}-l_{k+1,k+1})}{(l_{kj}-l_{kk})\cdots\wedge\cdots(l_{kj}-l_{kk})} \xi_{\Lambda+\delta_{li}+\delta_{kj}} \\
&\quad -\sum_{j=1}^{k} \frac{(l_{kj}-l_{k+1,1})\cdots(l_{kj}-l_{k+1,k+1})}{(l_{kj}-l_{kk})\cdots\wedge\cdots(l_{kj}-l_{kk})} \cdot \\
&\quad \sum_{i=1}^{l} \frac{(l_{li}-l_{l+1,1})\cdots(l_{li}-l_{l+1,l+1})}{(l_{li}-l_{l1})\cdots\wedge\cdots(l_{li}-l_{ll})} \xi_{\Lambda+\delta_{kj}+\delta_{li}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Због тога што $k \neq l, k \neq l+1, k \neq l-1$, имамо да E_{kk} и E_{ll} не мењају, редом, коефицијенте l_{li} и l_{kj}. Одатле следи претходни низ једнакости и чињеница да је $[E_{k,k+1}, E_{l,l+1}] = 0$. Слично претходним се показује и последњи случај, само што ту има три подслучаја: $k = l+1$, $k+1 = l$ и $k+1 \neq l, k \neq l+1$.

Након овога, индуктивно дефинишемо начин на који E_{ik} дејствује. Нека је $i < k$. Ако је дејство $E_{i,k-1}$ дефинисано, E_{ik} треба да задовољава прву релацију из (1), па тако и дефинишемо. Ако је ξ_Λ произвољан вектор, онда је

$$E_{ik}\xi_\Lambda := [E_{i,k-1}, E_{k-1,k}]\xi_\Lambda.$$

Дефиниција је добра у случају $k - i = 1$, што смо претходно показали. Аналогно дефинишемо како дејстувује E_{ik} када је $i > k$.

Сада ћемо показати да важе једнакости у релацијама (1) за $E_{i_1k_1}, E_{i_2k_2}$. Доказујемо индукцијом по $S = |i_1 - k_1| + |i_2 - k_2|$. Имамо

$$[E_{ii}, E_{kk}] = 0,$$

па важи база индукције. Нека релације (1) важе за све i_1, k_1, i_2, k_2, такве да је $S < K$, где је $K > 0$ фиксирано. Покажимо да оне важи и случају кад је $S = K+1$. Претпоставимо да је $i_2 \leq k_2$. Аналогно се доказује када је $i_2 \geq k_2$, односно $i_1 \geq k_1$, због антисиметричности Лијевих заграда.

1° $k_1 = i_2$ и $i_1 \neq k_2 + 1$:
Ради прегледности, означимо $k_1 = i_2$ са i, i_1 са k и k_2 са l. Треба да покажемо $[E_{ik}, E_{k,l+1}] = E_{i,l+1}$. Ако је $k = l$, то следи из дефиниције E_{rs}. Нека је $k < l$. Тада имамо да је $|i-k|+|l-(l+1))| \leq |i-k|+|k-l|$, па можемо да применимо индуктивну хипотезу. Помоћу Јакобијевог идентитета добијамо,

$$\begin{aligned}
[E_{ik}, E_{k,l+1}] &= [E_{ik}, [E_{kl}, E_{l,l+1}]] \\
&= -[E_{kl}, [E_{l,l+1}, E_{ik}]] - [E_{l,l+1}, [E_{ik}, E_{kl}]] \\
&= \begin{cases} 0 - [E_{l,l+1}, E_{il}], & i \neq l \\ 0 - [E_{l,l+1}, E_{ll} - E_{kk}], & i = l \end{cases} \\
&= \begin{cases} E_{i,l+1}, & i \neq l \\ [E_{ll}, E_{l,l+1}], & i = l \end{cases} \\
&= \begin{cases} E_{i,l+1}, & i \neq l \\ E_{l,l+1}, & i = l \end{cases},
\end{aligned}$$

што смо и хтели да докажемо.

2^{o} $k_1 = i_2$ и $i_1 = k_2 + 1$:

Опет, означимо због прегледности $k_1 = i_2$ са i, а $i_1 = k_2$ са k. Треба да покажемо $[E_{i+1,k}, E_{k,i+1}] = E_{i+1,i+1} - E_{kk}$. Случај $k = i+1$ је тривијалан, а раније је показано да ово важи кад је $k = i$. Нека је $k < i$. Пошто је $|i-(i+1)| + |i+1-k| < |i+1-k| + |i+1-k|$ и $|i+1-k| + |k-i| < |i+1-k| + |k-(i+1)|$, важи индуктивна хипотеза, па имамо

$$\begin{aligned}
[E_{i+1,k}, E_{k,i+1}] &= [E_{i+1,k}, [E_{ki}, E_{i,i+1}]] \\
&= -[E_{ki}, [E_{i,i+1}, E_{i+1,k}]] - [E_{i,i+1}, [E_{i+1,k}, E_{ki}]] \\
&= -[E_{ki}, E_{ik}] - [E_{i,i+1}, E_{i+1,i}] \\
&= -E_{kk} + E_{ii} - E_{ii} + E_{i+1,i+1} \\
&= E_{i+1,i+1} - E_{kk},
\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

3^{o} $k_1 \neq i_2$ и $i_1 \neq k_2 + 1$:

Претпоставимо прво да је $i_2 = k_2 + 1$. Ако је $i_1 = k_1$, онда једнакост очигледно важи. Без умањења општости, претпоставимо да је $i_1 < k_1$. Случај $i_1 + 1 = k_1$ је обрађен раније. Можемо додатно да претпоставимо $k_1 - i_1 \geq 2$. Тада из Јакобијевог идентитета и индуктивне хипотезе добијамо:

$$\begin{aligned}
[E_{i_1k_1}, E_{i_2i_2}] &= -[E_{i_2i_2}, [E_{i_1,i_1+1}, E_{i_1+1,k_1}]] \\
&= [E_{i_1,i_1+1}, [E_{i_1+1,k_1}, E_{i_2i_2}]] + [E_{i_1+1,k_1}, [E_{i_2i_2}, E_{i_1,i_1+1}]] \\
&= \begin{cases} 0, & i_2 \neq i_1 + 1 \\ -[E_{i_1i_2}, E_{i_2k_1}] - [E_{i_2,k_1}, E_{i_1,i_2}], & i_2 = i_1 + 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & i_2 \neq i_1 + 1 \\ 0, & i_2 = i_1 + 1 \end{cases},
\end{aligned}$$

чиме смо показали да једнакост важи када је $i_2 = k_2 + 1$. Нека је сада $i_2 \leq k_2$. Узмимо прво да је $i_1 = k_1$. Тада

$$\begin{aligned}
[E_{i_1i_1}, E_{i_2k_2+1}] &= [E_{i_1i_1}, [E_{i_2k_2}, E_{k_2,k_2+1}]] \\
&= -[E_{i_2k_2}, [E_{k_2,k_2+1}, E_{i_1i_1}]] - [E_{k_2,k_2+1}, [E_{i_1i_1}, E_{i_2k_2}]] \\
&= \begin{cases} 0, & i_1 \neq k_2 \\ [E_{i_2k_2}, E_{k_2,k_2+1}] + [E_{k_2,k_2+1}, E_{i_2k_2}], & i_1 = k_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & i_1 \neq k_2 \\ 0, & i_1 = k_2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Дакле, остаје нам да докажемо последњу релацију када је $i_2 \leq k_2$ и $i_1 < k_1$. То се, после сличног коришћења Јакобијевог идентита, на крају сведе на доказивање једнакости

$$[E_{k,k+1}, E_{k,k+2}] = 0,$$
$$[E_{k,k+2}, E_{k+1,k+3}] = 0,$$

што се показује директном провером. Расписаћемо само прву једнакост. Прво треба да запишемо како дејствује $E_{k,k+2}$.

$$\begin{aligned}
E_{k,k+2}\xi_\Lambda &= E_{k,k+1}(E_{k+1,k+2}(\xi_\Lambda)) - E_{k+1,k+2}(E_{k,k+1}(\xi_\Lambda)) \\
&= -E_{k,k+1}\left(\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(l_{k+1,j}-l_{k+2,1})\cdots(l_{k+1,j}-l_{k+2,k+2})}{(l_{k+1,j}-l_{k+1,1})\cdots\wedge\cdots(l_{k+1,j}-l_{k+1,k+1})}\xi_{\Lambda+\delta_{k+1,j}}\right) \\
&\quad +E_{k+1,k+2}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}\xi_{\Lambda+\delta_{ki}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=1}^{k} \frac{(l_{k+1,j}-l_{k+2,1})\cdots(l_{k+1,j}-l_{k+2,k+2})}{(l_{k+1,j}-l_{k+1,1})\cdots\wedge\cdots(l_{k+1,j}-l_{k+1,k+1})}\cdot \\
&\quad \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,j}-1)\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}\xi_{\Lambda+\delta_{ki}+\delta_{k+1,j}} \\
&\quad -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,j})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}\cdot \\
&\quad \frac{(l_{k+1,j}-l_{k+2,1})\cdots(l_{k+1,j}-l_{k+2,k+2})}{(l_{k+1,j}-l_{k+1,1})\cdots\wedge\cdots(l_{k+1,j}-l_{k+1,k+1})}\xi_{\Lambda+\delta_{ki}+\delta_{k+1,j}} \\
&= -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(\widehat{l_{ki}-l_{k+1,j}})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}\cdot \\
&\quad \frac{(l_{k+1,j}-l_{k+2,1})\cdots(l_{k+1,j}-l_{k+2,k+2})}{(l_{k+1,j}-l_{k+1,1})\cdots\wedge\cdots(l_{k+1,j}-l_{k+1,k+1})}\xi_{\Lambda+\delta_{ki}+\delta_{k+1,j}}
\end{aligned}$$

Уведимо ознаке

$$\begin{aligned}
L_j &= \frac{(l_{k+1,j}-l_{k+2,1})\cdots(l_{k+1,j}-l_{k+2,k+2})}{(l_{k+1,j}-l_{k+1,1})\cdots\wedge\cdots(l_{k+1,j}-l_{k+1,k+1})} \\
\xi_\Lambda^{irj} &= \xi_{\Lambda+\delta_{ki}+\delta_{kr}+\delta_{k+1,j}} \\
\xi_\Lambda^{ij} &= \xi_{\Lambda+2\delta_{ki}+\delta_{k+1,j}}
\end{aligned}$$

и покажимо тражени идентитет.

Расписујемо $[E_{k,k+1}, E_{k,k+2}]\xi_\Lambda$:

$$\begin{aligned}
& E_{k,k+1}(E_{k,k+2}(\xi_\Lambda)) - E_{k,k+2}(E_{k,k+1}(\xi_\Lambda)) \\
= \; & -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(\widehat{l_{ki}-l_{k+1,j}})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} \cdot \\
& L_j E_{k,k+1}(\xi_{\Lambda+\delta_{ki}+\delta_{k+1,j}}) \\
& + \sum_{r=1}^{k} \frac{(l_{kr}-l_{k+1,1})\cdots(l_{kr}-l_{k+1,k+1})}{(l_{kr}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{kr}-l_{kk})} E_{k,k+2}(\xi_{\Lambda+\delta_{kr}}) \\
= \; & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(\widehat{l_{ki}-l_{k+1,j}})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} L_j \cdot \\
& \frac{(l_{kr}-l_{k+1,1})\cdots(l_{kr}-l_{k+1,j}-1)\cdots(l_{kr}-l_{k+1,k+1})}{(l_{kr}-l_{k1})\cdots(l_{kr}-l_{ki}-1)\cdots\wedge\cdots(l_{kr}-l_{kk})}\xi_\Lambda^{irj} \\
& -\sum_{r=1}^{k}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{k}\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(l_{kr}-l_{k+1,1})\cdots(l_{kr}-l_{k+1,j})\cdots(l_{kr}-l_{k+1,k+1})}{(l_{kr}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{kr}-l_{kk})} \cdot \\
& \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(\widehat{l_{ki}-l_{k+1,j}})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots(l_{ki}-l_{kr}-1)\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} L_j\xi_\Lambda^{irj} \\
& +\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(\widehat{l_{ki}-l_{k+1,j}})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} L_j \cdot \\
& \frac{(l_{ki}+1-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}+1-l_{k+1,j}-1)\cdots(l_{ki}+1-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}+1-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}+1-l_{kk})}\xi_\Lambda^{ij} \\
& -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,j})\cdots(l_{ki}+1-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} \cdot \\
& \frac{(l_{ki}+1-l_{k+1,1})\cdots(\widehat{l_{ki}+1-l_{k+1,j}})\cdots(l_{ki}+1-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}+1-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}+1-l_{kk})} L_j\xi_\Lambda^{ij} \\
= \; & \sum_{j=1}^{k+1} L_j \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(\widehat{l_{ki}-l_{k+1,j}})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} \cdot \\
& \frac{(l_{kr}-l_{k+1,1})\cdots(l_{kr}-l_{k+1,j}-1)\cdots(l_{kr}-l_{k+1,k+1})}{(l_{kr}-l_{k1})\cdots(l_{kr}-l_{ki}-1)\cdots\wedge\cdots(l_{kr}-l_{kk})}\xi_\Lambda^{irj} \\
& -\sum_{j=1}^{k+1} L_j \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,j})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})} \cdot \\
& \frac{(l_{kr}-l_{k+1,1})\cdots(\widehat{l_{kr}-l_{k+1,j}})\cdots(l_{kr}-l_{k+1,k+1})}{(l_{kr}-l_{k1})\cdots(l_{kr}-l_{ki}-1)\cdots\wedge\cdots(l_{kr}-l_{kk})}\xi_\Lambda^{irj}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k+1} L_j \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{k} \frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(\widehat{l_{ki}-l_{k+1,j}})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}\cdot \\
&\quad \frac{(l_{kr}-l_{k+1,1})\cdots(\widehat{l_{kr}-l_{k+1,j}}-1)\cdots(l_{kr}-l_{k+1,k+1})}{(l_{kr}-l_{k1})\cdots(\widehat{l_{kr}-l_{ki}}-1)\cdots\wedge\cdots(l_{kr}-l_{kk})}\xi_\Lambda^{irj} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

што је и требало показати.

Овиме смо завршили доказ, добили смо да се репрезентација слаже са комутатором. □

Из теорије Лијевих група и алгебри је познато да нам је довољно да знамо једну од репрезентација $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ и $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$, да бисмо знали ону другу. Претходни став нам даје везу између Гелфанд-Цетлинових низова и репрезентације $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$, коју смо већ повезали са Јанговим таблоима, односно Косткиним и Литлвуд-Ричардсоновим бројевима. Гелфанд-Цетлинови низови нам даље омогућују да то повежемо са геометријским комбинаторним објектима који се зову Гелфанд-Цетлинови политопи.

Закључак

Косткини и Литлвуд-Ричардсонови бројеви су значајни за разне математичке области, од теорије репрезентација до алгебарске геометрије. Они су веома тешки за рачун, што је показао Нарајанан у раду *On the complexity of computing Kostka numbers and Littlewood-Richardson coefficients*, који је објављен 2006. године, у часопису Journal of Algebraic Combinatorics. Иако је показано да је њихово ордеђивање тешко, олакшавајућа околност у раду са њима је што можемо да их посматрамо са комбинаторног, алгебарског, геометријског и тополошког становишта. У овом раду је описана алгебарска и комбинаторна природа Косткиних и Литлвуд-Ричардсонових бројева, тј. како се они појављују у теорији симетричних функција и теорији репрезентација.

Литература

[1] Горан Ђанковић, *Теорија бројева*, Математички факултет, Београд, 2013.

[2] William Fulton, Joe Harris, *Representation Theory*, Springer, New York, 2004.

[3] Serge Lang, *Algebra*, Springer, New York, 2002.

[4] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[5] Ian G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University Press, New York, 1995.

[6] William Fulton, *Young Tableaux, With Applications to Representation Theory and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[7] Israel Gelfand, Michael Tsetlin, *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices*, Doklady Akad. Nauk SSSR, 1950.

[8] Alexander Molev, *Gelfand-Tsetlin bases for classical Lie algebras*, University of Sydney, 2006.

[9] Helene Barcelo, Arun Ram, *Combinatorial Representation Theory*, MSRI Publications, Volume 38, 1999.