KOVINA MILOŠEVIĆ-RAKOČEVIĆ

PRILOZI TEORIJI I PRAKSI BERNOULLIEVIH POLINOMA I BROJEVA

BEOGRAD
1963

KOVINA MILOŠEVIĆ-RAKOČEVIĆ

PRILOZI TEORIJI I PRAKSI BERNOULLIEVIH POLINOMA I BROJEVA

BEOGRAD
1963

ПОСЕБНА ИЗДАЊА МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА

КЊИГА 2

Уредник

Д. С. Митриновић

КОВИНА МИЛОШЕВИЋ-РАКОЧЕВИЋ

ПРИЛОЗИ ТЕОРИЈИ И ПРАКСИ БЕРНУЛИЈЕВИХ ПОЛИНОМА И БРОЈЕВА

Саопштено 28. јуна 1963. године на седници Одељења за анализу

Савезни фонд за научни рад финансирао је штампање ове књиге

SADRŽAJ

UVOD

U svom delu *Ars conjectandi*, Bale 1713, Jakov Bernoulli na elementaran način uveo je jedan beskonačan niz racionalnih brojeva, koji su danas poznati pod imenom: Bernoullievi brojevi. Ispitujući zbirove potencija prirodnog niza brojeva

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p,$$

J. Bernoulli došao je do rezultata da se ovi zbirovi mogu napisati u obliku polinoma

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \frac{1}{2}\binom{p}{1} A n^{p-1} + \frac{1}{4}\binom{p}{3} B n^{p-3} + \cdots$$

čiji koeficijenti sadrže niz racionalnih brojeva

$$A = \frac{1}{6},\ B = -\frac{1}{30},\ C = \frac{1}{42},\ D = -\frac{1}{30}, \ldots$$

Dvadeset godina docnije L. Euler [19], nezavisno od Bernoullia, rešavajući ovaj isti problem, ponovo je uveo niz racionalnih brojeva $A, B, C, D, \ldots$ U svom delu *Introductio in analusin infinitorum*, Lausanne 1748, on prvi uočava vezu između beskonačnih zbirova

$$s(2n) = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots = \alpha_n \pi^{2n}$$

i racionalnih koeficijenata α_n koji sadrže ovaj isti niz brojeva $A, B, C, D, \ldots$

Dvanaest godina docnije, Euler [38] dolazi do novih interesantnih rezultata. Naime, pokazuje da su ovi brojevi sadržani u koeficijentima potencijalnih redova koji predstavljaju funkcije

$$\operatorname{cotg} x,\ \operatorname{tg} x,\ \frac{1}{\sin x}.$$

Ovom prilikom Euler priznaje Bernoulliu prioritet i navedene racionalne brojeve naziva Bernoullievim brojevima. Docnije, zbog mnogobrojnih primena, ovi brojevi postaju predmet čestih istraživanja u radovima mnogobrojnih matematičara (Jacobi, Staudt, Raabe, Ettingshausen, Stern, Lucas, Nielsen, Nörlund, itd.).

Paralelno sa Bernoullievim brojevima istražuju se osobine i primene polinoma $S_p(n)$, koji se, takođe u čast njihovog tvorca, nazivaju Bernoullievim polinomima.

Današnja istraživanja Bernoullievih polinoma razvijaju se, uglavnom, u cilju njihove primene u problemima numeričke matematike ili pak u pravcu teorijskih razmatranja baziranih na računu konačnih diferencija i simboličnom računu.

Bernoullievi brojevi proučavaju se danas uglavnom:

1° Metodom kongruencija. Ovaj metod najčešće je koristio H. Vandiver u svojim mnogobrojnim radovima (počev od 1912. godine) kada je i postavio aritmetičku teoriju Bernoullievih brojeva.

2° Blissardovim ili simboličkim metodom koji datira iz 1840. godine a zasnovan je na osnovnoj simboličkoj relaciji

$$G(x+B+1)-G(x+B)=G'_x(x).$$

3° Kroneckerov metod ili eksplicitno izražavanje Bernoullievih brojeva. Ovaj metod naročito je zastupljen u radovima Vandivera.

Osim ovih metoda koristi se metod konačnih diferencija i metod potencijalnih redova koji se zasniva na razvijanju eksponencijalnih funkcija i funkcija koje su u vezi sa njima. Ovaj metod srećemo u mnogobrojnim radovima L. Carlitza.

Predmet moga rada bio je da, orijentišući se, uglavnom, na račun konačnih diferencija, odnosno, na simbolički račun, iznesem na jedan sistematski način glavne stavove i osobine ovih polinoma, i da njihovu generalizaciju izvedem radi primene na izračunavanje specijalnih konačnih suma.

Rad je podeljen na četiri glave.

U prvoj glavi ovoga rada navedeni su neophodni elementi računa konačnih diferencija, koji su u ovome radu korišćeni za ispitivanje i primenu Bernoullievih polinoma i brojeva. Definisane su operacije Δ, E, M, kao i njihove inverzne operacije. Zatim, iznete su osobine ovih operacija i njihove međusobne veze. Prikazana je veza između izvoda i konačne diferencije i navedene su neke važnije funkcije iz računa konačnih razlika, koje sam u ovom radu koristila. U vezi sa problemom o razlaganju konačne razlike funkcije po razlikama njenih izvoda pokazala sam da se koeficijenti [17]

$$(1)\qquad A_{n\rho}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\int\limits_{0}^{\lambda+\nu}(\lambda-\nu-t)^{n-1}\binom{t}{\rho}dt,$$

iz formule

$$(2)\qquad \Delta^n f(a+\lambda h)=h^n\sum_{\rho=0}^{r}A_{n\rho}\,\Delta^{\rho}f^{(n)}(a)+R_{nr},$$

koju je dobio Mikeladze [16], mogu izraziti u obliku

$$(3)\qquad A_{n\rho}=\frac{n!}{\rho!}\sum_{k=0}^{\rho}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{m=k}^{\rho}\frac{m!}{(m+n-k)!}S_{\rho}^{m}\,\sigma_{m+n-k}^{n},$$

gde su S_n^m i σ_m^n Stirlingovi brojevi prve i druge vrste. Prema ovome, izračunavanje koeficijenata $A_{n\rho}$ može biti učinjeno pomoću već poznatih tablica Stirlingovih brojeva.

U specijalnom slučaju za $\lambda = 0$ pokazala sam da je obrazac (2) sa koeficijentima

(4) $$A_{n\rho} = \frac{n!}{\rho!} \sum_{m=0}^{\rho} \frac{m!}{(m+n)!} S_\rho^m \sigma_{m+n}^n$$

neposredna posledica izvesnih relacija iz računa konačnih razlika. Koeficijenti $A_{n\rho}$ u ovom slučaju i za $n = 1$ svode se na Bernoullieve brojeve druge vrste, te se izračunavaju iz relacije

$$\sum_{m=0}^{\rho-1} (-1)^m \frac{A_{1m}}{\rho - m} = 0.$$

U ovoj glavi posmatrani su i operatori $\theta = x \frac{d}{dx}$ i $\psi = x \Delta$ koji se **definišu** u računu konačnih razlika. Generalisala sam operatore θ i ψ sa

(5) $$\theta_\alpha = \alpha + x D \quad \text{i} \quad \psi_\alpha = \alpha + x \Delta \quad (\alpha \text{ realan broj})$$

i dobila

(6) $$\theta_\alpha^n = \sum_{k=0}^{n} \sigma_n^k(\alpha) x^k D^k, \qquad \psi_\alpha^n = \sum_{k=0}^{n} \sigma_n^k(\alpha) (x + k - 1)_k \Delta^k,$$

gde su $\sigma_n^k(\alpha)$ brojevi koji se javljaju u izrazu

(7) $$(x + \alpha)^n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_n^k(\alpha) (x)_k ,$$

a za $\alpha = 0$ svode se na Stirlingove brojeve druge vrste.

Operator

(8) $$Z = (x + 1) + x D$$

koji je posmatrao M. d'Ocagne [66] uopštila sam operatorom

(9) $$Z_\alpha = (x + \alpha) + x D$$

i dobila izraz

(10) $$Z_\alpha^n = \sum_{k=0}^{n} D^k \Phi_{n+1}(x, \alpha) \frac{x^k D^k}{k!},$$

gde je

(11) $$\Phi_{n+1}(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{n+1} \sigma_{n+1}^k(\alpha) x^{k-1}.$$

Analogno operatoru (8) posmatrala sam operator

(12) $$Y = (x + 1) + x \Delta$$

i dobila

(13)
$$Y^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k P_n(x)}{k!} (x+k-1)_k \Delta^k,$$

gde je polinom

(14)
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} P_n^k x^k$$

određen rekurzivnom formulom

(15)
$$P_{n+1}(x) = x P_n(x+1) + P_n(x).$$

U drugoj glavi izložena je osnovna teorija Bernoullievih polinoma. Iznete su najvažnije definicije Bernoullievih polinoma, koje se najčešće upotrebljavaju, zatim osnovne osobine i relacije ovih polinoma. Posmatrala sam generalisanu Bernoullievu diferencnu jednačinu

(16)
$$f(x+1) - f(x) = \prod_{r=1}^{n-1} (a_r + x b_r),$$

gde su a_r i b_r makakve konstante, a x i n $(n > 3)$ dva cela pozitivna broja. Rešenje jednačine (16) dala sam u eksplicitnom obliku

(17)
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k^n x^{n-k}.$$

Koeficijente $A_k^n (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ definisala sam izrazom

(18)
$$A_k^n = \sum_{j=0}^{k} \frac{B_{k-j}}{k-j} \binom{n-j-1}{k-j-1} H_{n-1}^{n-j-1} \quad \left(\frac{B_{k-j}}{k-j} = 1 \text{ za } k = j\right),$$

gde su B_k Bernoullievi brojevi, a H_n^q izrazi definisani jednakošću

(19)
$$\prod_{r=1}^{n-1} (a_r + x b_r) = \sum_{q=0}^{n-1} H_{n-1}^q x^q.$$

Rešenju (17) dat je i oblik

(20)
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} H_{n-1}^{k-1} (k-1)! \, [B_k(x) - B_k(0)],$$

gde je $B_k(x)$ Bernoulliev polinom k-tog stepena.

Ispitala sam specijalne slučajeve jednačine (16) za partikularne vrednosti konstanata a_r i b_r:

1° Za $a_r = 0$ i $b_r = -1$ jednačina (16) postaje diferencna jednačina kojom su definisani Bernoullievi polinomi.

2° Za $a_r = -r$ i $b_r = 1$ rešenje jednačine (16) dobija oblik

(21)
$$f(x) = \sum_{r=1}^{n} S_n^r (r-1)! \, [B_r(x) - B_r(0)],$$

gde su S_n^r Stirlingovi brojevi prve vrste.

3° Za $a_r = -(a+br)$ i $b_r = 1$ rešenje jednačine (16) može se takođe izraziti eksplicitno, koristeći činjenicu da je

$$(22)\qquad R_n^r(a,\, b) = \begin{cases} H_{n-1}^{r-1} - a\, H_{n-1}^r & (r = 1,\, 2, \ldots, n-1) \\ H_{n-1}^{n-1} & (r = n), \end{cases}$$

gde su $R_n^r(a, b)$ brojevi koje je definisao D. S. Mitrinović (*videti*: [27], [28], [71]) i dao tablicu njihovih numeričkih vrednosti za $b = 1$, $a = p$, $p = 2\,(1)11$.

Za ovaj slučaj pokazala zam da se koeficijenti H_{n-1}^r, koji se javljaju u rešenju (17) tj. (18) mogu izraziti pomoću

$$(23)\qquad H_{n-1}^r = \frac{(-1)^{n-r-1}\, b^{n-r-1}\, D^r\, \Gamma\left(\frac{a}{b}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right) r!} \qquad (\Gamma\,(x) \text{ gama-funkcija}).$$

Za $a = 0$ i $b = 1$ pokazala sam da iz (23) sleduje

$$(24)\qquad H_{n-1}^r = S_n^{r+1} = \frac{1}{r+1}\,[D^{r+1}(x)_n]_{x=0},$$

što je u saglasnosti sa definicijom Stirlingovih brojeva prve vrste.

Zatim je prikazano razvijanje proizvoljnog polinoma u red Bernoullievih polinoma. Ovo sam primenila na razvijanje faktorijel-funkcije za dobijanje novih relacija između Bernoullievih i Stirlingovih brojeva prve vrste. Tako sam dobila relaciju

$$(25)\qquad S_n^k = \frac{n}{k} \sum_{s=0}^{n-k} \binom{k+s-1}{s} B_s\, S_{n-1}^{k+s-1}.$$

Eulerovi polinomi koji su u neposrednoj vezi sa Bernoullievim polinomima, tretirani su takođe pomoću generalisane diferencne jednačine

$$(26)\qquad f(x+1) + f(x) = \prod_{r=1}^{n} (a_r + x\, b_r),$$

čije je rešenje takođe dato u eksplicitnom obliku

$$(27)\qquad f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} H_n^k\, k!\, E_k(x),$$

gde je $E_k(x)$ Eulerov polinom stepena k.

Za specijalne vrednosti konstanata a_r i b_r, s obzirom da rešenje (27) sadrži koeficijente H_n^k kao i rešenje jednačine (16), diskusija se može izvesti u istom smislu kao na primerima generalisane Bernoullieve diferencne jednačine (16).

Bernoullievi brojevi, koji su obrađeni u trećoj glavi, definisani su na razne načine u matematičkoj literaturi. Zbog toga je u ovom radu obraćena naročita pažnja njihovoj definiciji. Iznete su najvažnije definicije koje su najčešće među sobom ekvivalentne. Zatim, navedene su osobine ovih brojeva, data je tablica 60 Bernoullievih brojeva, istorijat njihovih izračunavanja, kao i poslednji rezultati na njihovom izračunavanju. Izložena je najvažnija teorema iz teorije Bernoullievih brojeva, Staudt-Clausenova teorema, i pomenute ostale manje važne teoreme.

Prikazana je primena simboličkog računa za dobijanje relacija između Bernoullievih brojeva. Pokazala sam da se ovom metodom mogu jednostavno izvesti mnoge Ramanujanove [33] relacije, kao i neke nove relacije. Na primer, relacija između Bernoullievih i Stirlingovih brojeve prve vrste

$$\sum_{r=1}^{n-1} B_r S_{n-1}^r = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n}, \tag{28}$$

koja bi po analogiji odgovarala poznatoj relaciji

$$\sum_{r=1}^{n-1} r!\, b_r \sigma_n^r = \frac{1}{n+1}, \tag{29}$$

između Bernoullievih i Stirlingovih brojeva druge vrste.

U četvrtoj glavi dat je najpre istorijat problema određivanja zbirova potencija prirodnih brojeva, a zatim su primenjeni rezultati iz prve i druge glave.

Prikazala sam [26] jednu generalizaciju zbirova proizvoda realnih brojeva, koju je najpre posmatrao D. S. Mitrinović [25]. Naime, pokazala sam da su zbirovi

$$f(x) = \sum_{m=1}^{x} \prod_{r=1}^{n-1} [a_r + (m-1)\, b_r] \tag{30}$$

rešenje diferencne jednačine (16), te im se može dati oblik (17), odnosno (20). Zbirovi oblika

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + k\, d)^p, \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^p$$

su partikularni slučajevi zbirova (30).

Zbir

$$f(x) = \sum_{k=1}^{x} (-1)^{x-k} \prod_{r=1}^{n} [a_r + (k-1)\, b_r], \tag{31}$$

je rešenje diferencne jednačine (26) te mu se može dati oblik (27).

Posmatrala sam i jedan generalniji problem koji je postavio D. S. Mitrinović [58], i odredila zbir proizvoda odgovarajućih članova nizova

$$\varphi_1(k) = \prod_{r=1}^{p} (a_r + k\, \alpha_r), \quad \varphi_2(k) = \prod_{s=1}^{q} [b_s + (n-k)\, \beta_s], \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{32}$$

Traženi zbir

$$\varphi(n)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_1(k)\,\varphi_2(k)$$

ima oblik

(33) $$\varphi(n)=\sum_{r=0}^{q}(-1)^r g_r(n-1)\,\frac{D^r\varphi_2(n)}{r!},$$

gde je

(34) $$g_r(n-1)=\sum_{k=0}^{p}H_p^k(k+p)!\,[B_{k+r+1}(n)-B_{k+r+1}(0)].$$

Zatim je dat eksplicitan izraz za sukcesivne zbirove potencija prirodnih brojeva [59]. Naime, zbir

$$S_{p+1}(n,k)=\sum_{r=1}^{n}S_p(r,k),\qquad S_1(n,k)=\sum_{r=1}^{n}r^k,$$

obuhvaćen je takođe zbirom (30) kao partikularan slučaj.

Metod konačnih razlika koji se uspešno primenjuje na probleme konačnih zbirova upotrebila sam kod generalisanih zbirova oblika

(35) $$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\},$$

gde su m, ν prirodni i n, p, s realni brojevi. Zbirovi (35) predmet su D. S. Mitrinovićevog rada [61], gde su izračunati na jedan drugi način.

Dala sam opšti obrazac

(36) $$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+m}s^i\,m!\,(\nu+i-1)_i}{i!\,(n+\nu+i+1\,s)_{\nu+i,s}}\,P(i,m)$$

gde je

(37) $$P(i,m)=\sum_{j=m}^{i}\left(\frac{p}{s}\right)^j S_i^j\,\sigma_j^m.$$

Za slučaj $s=p$ obrazac (36) postaje

(38) $$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+ip)\right\}=\frac{(\nu+m-1)!}{p^\nu(\nu-1)!\left(\frac{n}{p}+m+\nu-1\right)_{\nu+m}}.$$

Služeći se istim metodom, izvela sam takođe obrazac

(39) $$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+k+ip)\right\}=\frac{(-1)^m p^\nu \nu!}{(\nu-m)!}\binom{\frac{n}{p}+\nu-1}{\nu-m}.$$

Ovaj isti postupak primenila sam na zbir

(40) $$S=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\binom{n}{i-1}(a_1+it_1)^{p_1}(a_2+it_2)^{p_2}\ldots(a_j+it_j)^{p_j}\quad(t\neq 0),$$

gde je $p_1+p_2+\cdots+p_j=\omega<n$ (p_i prirodni brojevi, a_i i t_i proizvoljne konstante), koji je posmatrao F. S. Nowlan [64]. Dokazala sam da je

(41) $$S=\begin{cases}0 & (\omega<n)\\ (-1)^n n!\,t_1^{p_1}t_2^{p_2}\ldots t_j^{p_j} & (\omega=n).\end{cases}$$

Na kraju proučavala sam generalisani geometrijski red

(42) $$F_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[a+(k-1)d]^n x^k\quad(n \text{ prirodan broj, } |x|<1),$$

i dala mu oblik

$$F_n(n)=\frac{x}{(1-x)^{n+1}}P_n(x),$$

gde je

(43) $$P_n(x)=\sum_{r=0}^{n}K_r^n(a,d)x^r,$$

i

(44) $$K_r^n(a,d)=\sum_{m=0}^{r}\binom{n+1}{m}[a+(r-m)d]^n.$$

Red (42) je generalizacija reda

(45) $$K_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^n x^k$$

koji su posmatrali R. Staley [67], M. C. Klamkin [68] i D. Zeitlin [69]. Dokazala sam da se primenom operatora θ i θ_α na zbir $\sum_{k=1}^{\infty}x^k$ dobija

(46) $$K_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}k!\,\sigma_n^k,\quad \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha+k)^n x^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\sigma_n^k(\alpha),$$

što znači da ove zbirove možemo direktno izraziti pomoću Stirlingovih brojeva druge vrste.

Ovom prilikom želim da izrazim svoju duboku zahvalnost profesoru dr *D. S. Mitrinoviću* na ukazanoj pomoći i korisnim savetima pri izradi ovoga rada.

GLAVA I

RAČUN KONAČNIH RAZLIKA

ELEMENTI RAČUNA KONAČNIH RAZLIKA

UVOD

Jedan od najvažnijih pojmova matematičke analize svakako je pojam funkcije. Za veličinu y kaže se da je funkcija nezavisno promenljive x, ako svakoj datoj vrednosti promenljive x odgovara tačno određena vrednost funkcije y.

Funkcije su uglavnom podeljene u dve klase. Prva klasa sadrži funkcije čija nezavisno promenljiva može uzimati svaku vrednost u izvesnom intervalu, to su funkcije *neprekidne* promenljive. One su glavni predmet proučavanja u matematičkoj analizi. Drugoj klasi pripadaju funkcije kod kojih promenljiva uzima samo konačan broj izolovanih vrednosti, na primer

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

dok su za ostale vrednosti intervala (x_0, x_n) ove funkcije potpuno neodređene. U ovom slučaju nezavisno promenljiva je *prekidna*. Na funkcije prekidne promenljive ne mogu se primeniti metode matematičke analize. Ovu prazninu popunjava *račun konačnih razlika* (diferencija), koji se prvenstveno bavi klasom funkcija prekidne promenljive, ali se njegove metode uspešno mogu koristiti i pri ispitivanju funkcija prekidne promenljive.

Kao prvo delo iz računa razlika uzima se Brook Taylorov udžbenik *Methodus Incrementorum* (London, 1717.). Međutim, osnivačem ovoga računa smatra se Jacob Stirling, koji je u svom delu *Methodus Differentialis* (London, 1730.) dao korisne metode uvodeći jedan niz brojeva, koji su kasnije nazvani Stirlingovim brojevima.

Dalji doprinos ovom računu sadržan je u Eulerovom delu *Institutiones Calculi Differentialis* (Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, 1755.). Ovde je prvi put uveden simbol Δ kao oznaka za operaciju diferencije, koji se i do danas zadržao.

Od značajnijih klasičnih udžbenika računa razlika pomenućemo George Booleov [1], A. A. Markoffov [2], D. Seliwanoffov [3], itd. Među novijim udžbenicima izdvojićemo N. Nörlundov [4], Milne-Thomsonov [5], Jordanov [6], i A. O. Гельфондов [7] udžbenik računa konačnih razlika.

Račun konačnih razlika našao je veliku primenu u mnogim oblastima matematike, specijalno u primenjenoj matematici. Njegove metode su često neophodne pri rešavanju mnogih problema matematičke statistike, teorije aproksimacija, numeričke integracije ili interpolacije. Međutim, njegov značaj je u toliko veći, što se metodama ovog računa, brže i jednostavnije, dolazi do mnogih relacija i stavova matematičke analize. O ovome ćemo se lako uveriti pri proučavanju Bernoullievih polinoma i brojeva.

1. OPERACIJE RAČUNA RAZLIKA

1.1. OPERACIJA Δ

Neka su nam poznate vrednosti funkcije $f(x)$ za vrednosti nezavisno promenljive

$$x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Pretpostavićemo da je

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

gde je h nezavisno od i, i uglavnom, zadržaćemo se samo pri ovoj pretpostavci, tj. da su vrednosti x_i ekvidistantne.

Definicija. Prva razlika funkcije $f(x)$ jednaka je priraštaju ove funkcije kada nezavisno promenljiva x priraste za vrednost h.

Prvu razliku obeležavaćemo sa $\underset{h}{\Delta}$, i stoga, prema definiciji imamo

$$\underset{h}{\Delta} f(x) = f(x+h) - f(x). \tag{1.1.1}$$

Ako je priraštaj h promenljive x jednak jedinici, tada formule, kao što ćemo kasnije videti, postaju prostije. U tom slučaju prvu razliku obeležavamo samo sa Δ. Može se pokazati, da je uvek moguće promenljivu x zameniti novom promenljivom ξ, čiji će priraštaj biti jednak jedinici.

(I) Doista, neka je priraštaj promenljive x vrednost $h\ (\neq 1)$. Uvešćemo smenu

$$x = a + h\,\xi, \tag{1.1.2}$$

odakle sleduje da je $\Delta\,\xi = 1$, odnosno, kad x priraste za h, tada će ξ prirasti za 1. Funkcija $f(x)$ smenom (1.1.2) postaje

$$f(a + \xi\, h) = F(\xi).$$

Prema tome, operisaćemo sa funkcijom $F(\xi)$, dakle i sa simbolom Δ, a u konačnom rezultatu stavićemo $\frac{x-a}{h}$ umesto ξ.

Definisaćemo i drugu razliku funkcije $f(\xi)$ ili razliku II reda. To je razlika prve razlike. Ako je obeležimo sa $\underset{h}{\Delta^2}$, tada, na osnovu ove definicije imamo

$$\underset{h}{\Delta}^2 f(x)=\underset{h}{\Delta}[\underset{h}{\Delta} f(x)]=\underset{h}{\Delta}[f(x+h)-f(x)]$$
$$=\underset{h}{\Delta} f(x+h)-\underset{h}{\Delta} f(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x).$$

Analogno definiše se i n-ta razlika funkcije $f(x)$, tj. razlika n-tog reda:

$$\underset{h}{\Delta}^n f(x)=\underset{h}{\Delta}[\underset{h}{\Delta}^{n-1} f(x)]=\underset{h}{\Delta}^{n-1} f(x+h)-\underset{h}{\Delta}^{n-1} f(x).$$

Može se pokazati da će izraz za n-tu razliku funkcije $f(x)$ biti oblika

$$\underset{h}{\Delta}^n f(x)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f[x+(n-j)h]. \tag{1.1.3}$$

Očigledno je da je za $n=1$ formula (1.1.3) tačna. Pretpostavimo sada da je tačna i za $n=k$, tj.

$$\underset{h}{\Delta}^k f(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}f[x+(k-j)h]. \tag{1.1.4}$$

Ako umesto x stavimo u (1.1.4) $x+h$ dobija se

$$\underset{h}{\Delta}^k f(x+h)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}f[x+h+(k-j)h].$$

Obrazujmo sada razliku

$$\underset{h}{\Delta}^{k+1} f(x)=\underset{h}{\Delta}^k f(x+h)-\underset{h}{\Delta}^k f(x)$$
$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}f[x+(k-j+1)h]-\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}f[x+(k-j)h]$$
$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}f[x+(k-j+1)h]+\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j\binom{k}{j-1}f[x+(k-j+1)h]$$
$$=\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\binom{k+1}{j}f[x+(k-j+1)h].$$

Vidimo da se izraz za $\underset{h}{\Delta}^{k+1} f(x)$ dobija iz formule (1.1.4), kada u njoj k zamenimo sa $k+1$. Ovim zaključujemo da je formula (1.1.4) tačna za sve vrednosti k (prirodan broj). Pokazaćemo u daljem izlaganju, da se do opšte formule (1.1.3) jednostavnije dolazi simboličkim računom, tj. računom operatora Δ.

1.2. OPERACIJA E

Pored operacije Δ u računu konačnih razlika definiše se *operacija* E ili operacija translacije[1], koja predstavlja vrednost funkcije $f(x)$ kada nezavisno promenljiva dobija priraštaj h. To se obeležava

$$\underset{h}{E} f(x)=f(x+h).$$

[1] Prema engleskom terminu: *operation of displacement*.

Iz istih razloga možemo i ovde, kao za operaciju Δ upotrebljavati samo simbol E, tj. uzimati da je $h=1$.

Operaciju translacije uvodi prvi put George Boole [1] i obeležava je sa D. Kod mnogih autora ona se različito obeležava. Tako, na primer De la Vallée Poussin [8] upotrebljava simbol ∇ (pseudodelta). Međutim, u novijoj literaturi [5], [6], [9], [10] oznaka E se sve češće sreće. Inače, upotrebljavaju se i ove oznake

$$f^n = f(x+nh), \quad \Theta f = f(x+nh), \text{ itd.}$$

Translacija drugog reda definiše se sa

$$\underset{h}{E^2} f(x) = \underset{h}{E}[\underset{h}{E} f(x)] = \underset{h}{E} f(x+h) = f(x+2h).$$

Uopšte je

$$\underset{h}{E^n} f(x) = \underset{h}{E}[\underset{h}{E^{n-1}} f(x)] = f(x+nh).$$

1.3. OPERACIJA M

Definiše se još jedna operacija na sledeći način

$$\underset{h}{M} f(x) = \frac{1}{2}[f(x)+f(x+h)].$$

Uopšte je

$$\underset{h}{M^n} f(x) = \underset{h}{M}[\underset{h}{M^{n-1}} f(x)] = \frac{1}{2}[\underset{h}{M^{n-1}} f(x) + \underset{h}{M^{n-1}} f(x+h)].$$

S obzirom da i ovde važi primedba (I) iz (I, 1.1) možemo uvek upotrebljavati simbol M umesto simbola $\underset{h}{M}$, podrazumevajući da je priraštaj nezavisno promenljive $h=1$.

Ovu operaciju uveo je prvi Sheppard [11] obeležavajući je sa μ. Označavana je na razne načine kod mnogih autora: Nörlund [4] je obeležava sa ∇, takođe i Milne-Thomson [5]. Thiele [12] i Steffensen [9] upotrebljavaju za ovu operaciju oznaku $\sqcap$.

Oznaka M usvaja se sve više u novijoj literaturi. Operacija M često se naziva *operacija sredine*[2].

1.4. OSOBINE OPERACIJA Δ, E, M

1.4.1. *Komutativni zakon.* Može se pokazati da operacije predstavljene simbolima Δ, E, M zadovoljavaju komutativni zakon

$$\begin{aligned}\Delta^n \Delta^m f(x) &= (\Delta\Delta\Delta\cdots n \text{ puta})\ (\Delta\Delta\Delta\cdots m \text{ puta}) f(x)\\ &= [\Delta\Delta\Delta\cdots(n+m) \text{ puta}]\ f(x)\\ &= \Delta^{n+m} f(x).\end{aligned}$$

Doista je

(1.4.1.1) $$\Delta^n \Delta^m f(x) = \Delta^m \Delta^n f(x) = \Delta^{n+m} f(x).$$

[2] Prema engleskom terminu: *operation of the mean.*

Na sličan način dokazuju se i ove jednakosti

(1.4.1.2) $$E^n E^m f(x) = E^m E^n f(x) = E^{n+m} f(x),$$

(1.4.1.3) $$M^n M^m f(x) = M^m M^n f(x) = M^{n+m} f(x).$$

1.4.2. *Asocijativni zakon*. Jednakosti

(1.4.2.1) $$(\Delta^n \Delta^m) \Delta^r f(x) = \Delta^n (\Delta^m \Delta^r) f(x),$$

(1.4.2.2) $$(E^n E^m) E^r f(x) = E^n (E^m E^r) f(x),$$

(1.4.2.3) $$(M^n M^m) M^r f(x) = M^n (M^m M^r) f(x),$$

koje izražavaju asocijativnu osobinu simbola Δ, E, M takođe su očigledne.

1.4.3. *Distributivni zakon*. Operacije Δ, E, M zadovoljavaju distributivni zakon, te se jednostavno dokazuje da je

(1.4.3.1) $$\Delta^n [f_1(x) + f_2(x) + \cdots] = \Delta^n f_1(x) + \Delta^n f_2(x) + \cdots$$

(1.4.3.2) $$E^n [f_1(x) + f_2(x) + \cdots] = E^n f_1(x) + E^n f_2(x) + \cdots$$

(1.4.3.3) $$M^n [f_1(x) + f_2(x) + \cdots] = M^n f_1(x) + M^n f_2(x) + \cdots.$$

Ako je C konstanta, jednakosti

$$\Delta [C f(x)] = C \Delta f(x),$$

$$E [C f(x)] = C E f(x),$$

$$M [C f(x)] = C M f(x),$$

takođe su očigledne.

Navešćemo još i komutativnost operatora Δ i E, kao M i E, koja se izražava jednakostima

$$\Delta^m E^n f(x) = E^n \Delta^m f(x),$$

$$M^m E^n (x) = E^n M^m f(x).$$

Na osnovu navedenih osobina zaključujemo da se u odnosu na operacije sabiranje i simboličko množenje, simboli Δ, E, M ponašaju kao algebarske veličine. Svaki polinom po Δ, E, M predstavljaće, dakle, jednu operaciju. Tako, na primer, imamo

$$(a_0 + a_1 \Delta + a_2 \Delta^2 + \cdots + a_n \Delta^n)(b_0 + b_1 \Delta + b_2 \Delta^2 + \cdots + b_m \Delta^m)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} a_\nu b_\mu \Delta^{\nu+\mu}.$$

2. SIMBOLIČKI RAČUN

2.1. RAZLIKE IZRAŽENE SUKCESIVNIM VREDNOSTIMA FUNKCIJE

Simboli Δ, E, M ponašaju se kao operatori, te stoga u mnogome olakšavaju rad ako se služimo računom operatora, odnosno simboličkim računom. Polazeći od definicija ovih operacija, možemo izvesti sledeće jednakosti

$$E=1+\Delta,\quad M=\frac{1}{2}(1+E),\ M=1+\frac{1}{2}\Delta,\quad M=E-\frac{1}{2}\Delta,\ \text{itd.}$$

Da bismo dokazali, na primer, prvu od navedenih jednakosti, primenimo operaciju $1+\Delta$ na funkciju $f(x)$. Tako dobijamo

$$(1+\Delta)f(x)=f(x)+\Delta f(x)=f(x)+f(x+h)-f(x)=Ef(x).$$

Dakle, doista je

$$E=1+\Delta. \tag{2.1.1}$$

Ostale jednakosti dokazuju se na sličan način.

Iz (2.1.1) dobijamo stepenovanje

$$\Delta^m=(E-1)^m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}E^{m-k}, \tag{2.1.2}$$

ili

$$\Delta^m f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}E^{m-k}f(x),$$

a to je poznata relacija (1.1.3).

2.2. RAZLIKE IZRAŽENE POMOĆU SREDINA FUNKCIJA

Polazeći od relacije

$$M=1+\frac{1}{2}\Delta,$$

imamo

$$\Delta^m=[2(M-1)]^m=2^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}M^{m-k},$$

tj.

$$\Delta^m f(x)=2^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}M^{m-k}f(x).$$

Na isti način, polazeći od relacije

$$M=E-\frac{1}{2}\Delta,$$

dobija se

$$\Delta^m=[2(E-M)]^m=2^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}E^{m-k}M^k,$$

tj.

$$\begin{aligned}\Delta^m f(x)&=2^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}E^{m-k}M^k f(x)\\&=2^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}M^k f(x+m-k).\end{aligned}$$

2.3. FUNKCIJE IZRAŽENE POMOĆU NJENIH RAZLIKA

Iz jednakosti

$$E = 1 + \Delta,$$

sleduje

$$E^m = (1+\Delta)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^k,$$

ili ako ovu operaciju primenimo na funkciju $f(x)$ sa priraštajem h, imamo

$$(2.3.1) \qquad f(x+mh) = f(x) + \binom{m}{1} \underset{h}{\Delta} f(x) + \cdots + \binom{m}{m} \underset{h}{\Delta^m} f(x).$$

Iz ove relacije za $h=1$ i $x=0$, dobija se poznata Newtonova formula

$$(2.3.2) \qquad f(m) = f(0) + \binom{m}{1} \Delta f(0) + \binom{m}{2} \Delta^2 f(0) + \cdots + \binom{m}{m} \Delta^m f(0).$$

Na isti način polazeći od relacije

$$E = 2M - 1,$$

dobija se

$$E^m = (2M-1)^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (2M)^{m-k}$$

tj.

$$f(x+m) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k 2^{m-k} \binom{m}{k} M^{m-k} f(x).$$

Istim postupkom, koristeći se simboličkim relacijama

$$M = \frac{1}{2}(1+E), \quad M = 1 + \frac{1}{2}\Delta,$$

dolazi se do sličnih jednakosti.

3. PROŠIRENA DEFINICIJA KONAČNIH RAZLIKA

3.1. RASTUĆE I OPADAJUĆE RAZLIKE[1]

Pored definicije

$$(3.1.1) \qquad \underset{h}{\Delta} f(x) = f(x+h) - f(x),$$

koja se još naziva rastuća razlika (diferencija), definiše se i tzv. opadajuća razlika:

$$\underset{h}{\Delta'} f(x) = f(x) - f(x-h).$$

[1] Prema engleskom terminu: *advancing differences* i *receding differences*.

Prema do sada izloženom, vidimo da je

$$\Delta' = \frac{\Delta}{E}, \text{ tj. } \Delta' = \Delta E^{-1}.$$

Doista je

$$\Delta E^{-1} f(x) = \Delta f(x-h) = f(x) - f(x-h).$$

Takođe ćemo dobiti

$$(\Delta')^n = \frac{\Delta^n}{E^n}.$$

Prema tome, opadajuće razlike izražavaju se pomoću rastućih, te se račun sa njima svodi uglavnom na račun konačnih razlika definisanih relacijom (3.1.1).

Napomenućemo još i to da se često posmatraju i tzv. centralne diferencije, definisane na ovaj način

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right),$$

kao i tzv. centralne sredine

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right)\right].$$

Međutim, s obzirom na očigledne relacije

$$\delta = \frac{\Delta}{E^{1/2}}, \quad \mu = \frac{M}{E^{1/2}},$$

račun sa ovim simbolima svodi se na račun sa poznatim simbolima Δ, E, M

3.2. DIVIDIRANE RAZLIKE[1]

Napomenuli smo na početku izlaganja (I, 1.1) da ćemo posmatrati funkcije koje su definisane za ekvidistantne vrednosti argumenta. Međutim, mnogo opštiji problem postavlja se ako su vrednosti nezavisno promenljive

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

proizvoljne. U tom slučaju definiše se pomoću jednakosti

$$\mathfrak{D} f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

tzv. *devidirana razlika* funkcije $f(x)$. Druga devidirana razlika biće

$$\mathfrak{D}^2 f(x_i) = \frac{\mathfrak{D} f(x_{i+1}) - \mathfrak{D} f(x_i)}{x_{i+2} - x_i},$$

i, uopšte, razlika m-tog reda je

$$\mathfrak{D}^m f(x_i) = \frac{\mathfrak{D}^{m-1} f(x_{i+1}) - \mathfrak{D}^{m-1} f(x_i)}{x_{i+m} - x_i}.$$

[1] Prema engleskom terminu: *divided differences*

Račun sa ovim diferencijama je prilično komplikovan. Može se pokazati da se m-ta diferencija izražava količnikom Vandermondeovih determinanata

$$(3.2.1)\qquad \mathfrak{D}^m f(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{m-1} f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^{m-1} f(x_1) \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 1 & x_m & x_m^2 & & x_m^{m-1} f(x_m) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x^2 & & x_1^m \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 1 & x_m & x_m^2 & & x_m^m \end{vmatrix}$$

Doista, kako je

$$\mathfrak{D} f(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0},$$

$$\mathfrak{D}^2 f(x_0)=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

i uopšte

$$\mathfrak{D}^m f(x_0)=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_m)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_m)}$$
$$+\dots+\frac{f(x_m)}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\cdots(x_m-x_{m-1})},$$

imaćemo, s obzirom na poznati rezultat

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{j>i}(a_j-a_i)$$

da je

$$\mathfrak{D}^m f(x_0)=\sum_{s=0}^{m} f(x_s)/(x_s-x_1)(x_s-x_2)\cdots(x_s-x_{s+1})\cdots(x_s-x_n)$$
$$=\sum_{s=0}^{n}\left[(-1)^{m-s} f(x_s)\prod_{j>i}(x_j-x_i)\right]\Big/\prod_{j>i}(x_j-x_i)$$

tj. dobićemo rezultat (3.2.1).

Newtonova, odnosno Lagrangeova interpolaciona formula bazira na ovim diferencijama, i daje vrednosti funkcije u nejednakim intervalima:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\,\mathfrak{D}f(x_0)+(x-x_0)(x-x_1)\,\mathfrak{D}^2 f(x_0)+\cdots$$
$$\cdots+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{m-1})\,\mathfrak{D}^m f(x_0)+R_m$$

gde je ostatak dat izrazom

$$R_m=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_m)}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\xi),$$

u kome je

$$\xi \in (x_0, x_1, \dots, x_m).$$

4. INVERZNE OPERACIJE

4.1. OPERACIJA Δ^{-1}

Kada je data funkcija $f(x)$, uvek je moguće odrediti njenu razliku iz jednakosti

(4.1.1) $$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = \varphi(x).$$

Postavlja se obrnuto pitanje: odrediti funkciju $f(x)$ čija je diferencija $\varphi(x)$ poznata. To se simbolički označava

(4.1.2) $$\Delta^{-1} \varphi(x) = f(x).$$

Dakle, simbol Δ^{-1} označava inverznu operaciju operacije Δ, kojom se određuje funkcija, ako je poznata njena prva razlika.

Potrebno je primetiti da ova operacija nije jednoznačna. Doista, ako je $\omega(x)$ proizvoljna funkcija čija je prva razlika jednaka nuli, tada je

$$\Delta [f(x) + \omega(x)] = \Delta f(x) + \Delta \omega(x) = \varphi(x),$$

pa je, prema tome

(4.1.3) $$\Delta^{-1} \varphi(x) = f(x) + \omega(x).$$

Kako je $\Delta \omega(x) = 0$, odnosno

(4.1.4) $$\omega(x+h) = \omega(x),$$

zaključujemo iz (4.1.4) da je $\omega(x)$ periodična funkcija sa periodom h. Ali, kako se radi o funkcijama prekidne promenljive, $\omega(x)$ biće konstanta. Relaciju (4.1.3) tada pišemo u obliku

(4.1.5) $$\Delta^{-1} \varphi(x) = f(x) + k \quad (k = \text{const}).$$

Na osnovu (4.1.3), odnosno (4.1.5), vidimo da operacije Δ i Δ^{-1} nisu komutativne, jer je

$$\Delta \Delta^{-1} \varphi(x) = \Delta f(x) + \Delta k = \Delta f(x),$$

dakle

$$\Delta \Delta^{-1} = 1,$$

dok je

$$\Delta^{-1} \Delta f(x) = \Delta^{-1} \varphi(x) = f(x) + k;$$

prema tome je

$$\Delta^{-1} \Delta \neq 1.$$

Operator Δ^{-1} je *desni* inverzni operator operatora Δ, ali nije i njegov levi inverzni operator.

Operacija D^{-1} ili $\int$ definisana je u matematičkoj analizi kao inverzna operacija diferenciranja i nazvana *neodređeni integral.* Kako u definiciji operacije Δ vidimo analogiju sa operacijom diferenciranje, njenu inverznu operaciju iz istog razloga zovemo *neodređeni zbir*, šta više i simbol Δ^{-1} zamenjujemo simbolom Σ.

Kao što je u analizi izračunavanje neodređenih integrala skopčano sa mnogo teškoća i nije uvek izvodljivo, tako je, analogno, određivanje zbira neke funkcije jedan od osnovnih i najtežih problema računa konačnih razlika.

4.1.1 *Osobine operacije* Δ^{-1}. Simbol Δ^{-1} je distributivan:

$$\Delta^{-1}(U+V+W+\cdots)=\Delta^{-1}U+\Delta^{-1}V+\Delta^{-1}W+\cdots$$

Ovo se može jednostavno dokazati ako gornju jednakost pomnožimo sleva sa Δ.

Isto tako, ako je C proizvoljna konstanta, nalazi se jednakost

$$\Delta^{-1}Cf(x)=C\Delta^{-1}f(x).$$

4.2. ANDREOVA METODA ODREĐIVANJA ZBIRA DATE FUNKCIJE

Problem određivanja zbira funkcije $\varphi(x)$ ekvivalentan je rešavanju jednačine konačnih razlika

$$f(x+h)-f(x)=\varphi(x). \tag{4.2.1}$$

Rešenje ove jednačine u opštem slučaju nemoguće je odrediti. Poznata su samo rešenja za specijalne oblike funkcije $\varphi(x)$. Tako na primer, ako je

$$\varphi(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

tada je rešenje jednačine (4.2.1) za $h=1$ Bernoulliev polinom n-tog stepena, tj.

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{n!}\binom{n}{k}x^{n-k},$$

gde su koeficijenti ovog polinoma B_k, Bernoullievi brojevi.

Postoje razni postupci za određivanje zbira date funkcije. Spomenućemo, uglavnom, najvažnije.

Koristeći se stavom (I) iz (I, 1.1) diferencnu jednačinu (4.2.1) možemo napisati u obliku

$$f(x+1)-f(x)=\varphi(x). \tag{4.2.2}$$

D. André [13] posmatrao je jednačinu (4.2.2) i sveo je na sistem jednačina

$$\begin{aligned} f(x)-f(x-1)&=\varphi(x-1)\\ f(x-1)-f(x-2)&=\varphi(x-2) \qquad (4.2.3)\\ &\ \vdots\\ f(a+1)-f(a)&=\varphi(a), \end{aligned}$$

gde su a i x celi brojevi, $f(a)$ proizvoljna konstanta. Iz ovih $x-a$ jednačina možemo odrediti $x-a$ nepoznatih

$$f(x), f(x-1), \ldots, f(a+1),$$

ali dovoljno je odrediti samo $f(x)$. Sabirajući redom izraze (4.2.3) dobija se

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=a}^{x-1} \varphi(k)=\Delta^{-1} \varphi(x). \tag{4.2.4}$$

Očigledno je da relacija (4.2.4) zadovoljava jednačinu (4.2.2). Doista, leva strana jednačine (4.2.2), kada u njoj zamenimo (4.2.4) postaje

$$f(a)+\sum_{k=a}^{x} \varphi(k)-f(a)-\sum_{k=a}^{x-1} \varphi(k)=\varphi(x).$$

Iz (4.2.4) vidimo da je operacija Δ^{-1} izražena pomoću jednog zbira i proizvoljne konstante $f(a)$. To je jedan od razloga što se operacija Δ^{-1} naziva neodređeni zbir.

Ova Andréova metoda određivanja zbira jedne funkcije ima veći teorijski nego praktični značaj. Primenjuje se samo kada x uzima celobrojne vrednosti.

4.3. ODREĐIVANJE ZBIRA DATE FUNKCIJE SIMBOLIČKIM RAČUNOM

Iz simboličke jednakosti

$$\Delta=E-1$$

sleduje

$$\Delta^{-1}=\frac{1}{\Delta}=-\frac{1}{1-E}=-(1+E+E^2+\cdots). \tag{4.3.1}$$

Ako su ispunjeni uslovi za konvergenciju reda

$$1+E+E^2+E^3+\cdots,$$

tada možemo primeniti simboličku relaciju (4.3.1) i dobijamo

$$\Delta^{-1} \varphi(x)=-\frac{1}{1-E} \varphi(x)=-\sum_{k=0}^{\infty} E^k \varphi(x),$$

ili

$$\Delta^{-1} \varphi(x)=-\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(x+k).$$

4.4. ODREĐIVANJE ZBIRA DATE FUNKCIJE INVERZIJOM

Ovaj način određivanja zbira funkcije sastoji se u inverziji formula dobijenih izračunavanjem konačnih razlika. Ako imamo, na primer

$$\Delta f(x)=C \varphi(x-a),$$

tada inverzijom zaključujemo

$$\Delta^{-1} \varphi(x) = \frac{1}{C} f(x+a) + k.$$

Ovim postupkom dobijamo sledeće formule:

$$\Delta^{-1} \frac{1}{2^x} = -\frac{1}{2^{x-1}} + k, \quad \underset{h}{\Delta^{-1}} a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + k,$$

$$\underset{h}{\Delta^{-1}} C = \frac{C}{h} x + k, \quad \underset{h}{\Delta^{-1}} \cos(ax+b) = \frac{\cos\left(ax + b - \frac{1}{2} ah - \frac{\pi}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2} ah} + k.$$

Ovi zbirovi odgovarali bi u analizi tabličnim integralima.

4.5. OPERACIJA E^{-1}

Inverzna operacija $\underset{h}{E^{-1}}$ ili $1/\underset{h}{E}$ definiše se na ovaj način:

(4.5.1) $$\underset{h}{E^{-1}} f(x) = f(x-h).$$

Prema ovoj definiciji je

$$1/\underset{h}{E^n} = \underset{h}{E^{-n}} f(x) = f(x-nh),$$

isto tako i

$$E^{-n} E^m = E^m E^{-n} = E^{m-n}.$$

Može se dokazati jednostavno i ova osobina operacije E

$$E^{-1} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \cdot \cdot] = E^{-1} f_1(x) \cdot E^{-1} f_2(x) \cdot E^{-1} f_3(x) \cdot \cdot \cdot$$

4.6. OPERACIJA M^{-1}

Ako relaciju

(4.6.1) $$\underset{h}{M} f(x) = \frac{1}{2} [f(x+h) + f(x)] = \varphi(x),$$

pomnožimo simbolički sa $\underset{h}{M^{-1}}$, dobićemo

(4.6.2) $$f(x) = \underset{h}{M^{-1}} \varphi(x).$$

Dakle, simbol $\underset{h}{M^{-1}}$ označava inverznu operaciju kojom određujemo funkciju kada je poznata njena srednja vrednost $\underset{h}{M}$.

I ovde možemo primetiti da operacija M^{-1} nije jednoznačna. Doista, ako je $\psi(x)$ takva proizvoljna funkcija, da je ispunjen uslov

(4.6.3) $$\underset{h}{M} \psi(x) = 0,$$

tada je

$$\underset{h}{M}[f(x)+\psi(x)]=\varphi(x),$$

ili

$$\underset{h}{M^{-1}}\varphi(x)=f(x)+\psi(x).$$

Iz relacije (4.6.3) zaključujemo da je $\psi(x)$ rešenje diferencne jednačine

$$\psi(x+h)+\psi(x)=0.$$

Tako, na primer, $\psi(x)$ može imati oblik

$$\psi(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{h}+b\right),$$

ili

$$\psi(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{h}+b\right)\omega(x),$$

gde je $\omega(x)$ proizvoljna periodična funkcija sa periodom h.

Operatori M i M^{-1} nisu komutativni, s obzirom da

$$MM^{-1}=1, \qquad M^{-1}M\neq 1.$$

Operator M^{-1} je *desni* inverzni operator operatora M, ali nije i njegov levi inverzni operator.

4.7. ODREĐIVANJE INVERZNE SREDINE DATE FUNKCIJE

Problem određivanja inverzne sredine ekvivalentan je problemu rešavanja diferencne jednačine

$$f(x+h)+f(x)=2\varphi(x). \tag{4.7.1}$$

Umesto jednačine (4.7.1) možemo posmatrati, prema stavu (I) iz (I, 1.1) jednačinu

$$f(x+1)+f(x)=2\varphi(x). \tag{4.7.2}$$

Postoje razne metode za rešavanje jednačine (4.7.2). Pomenućemo Andréovu koja se sastoji u sledećem:

Posmatrajmo sistem jednačina

$$\begin{aligned} f(x)+f(x-1)&=2\varphi(x-1),\\ f(x-1)+f(x-2)&=2\varphi(x-2),\\ &\vdots\\ f(a+1)+f(a)&=2\varphi(a), \end{aligned} \tag{4.7.3}$$

gde su x i a celi brojevi, $f(a)$ proizvoljna konstanta.

Pomnožimo prvu jednačinu sa $(-1)^2$, drugu sa $(-1)^3, \ldots$, n-tu jednačinu sa $(-1)^{r+1}$, zatim sabirajući sve tako dobijene izraze, imamo

$$f(x)=(-1)^{x+a} f(a)+2 \sum_{k=a}^{x-1}(-1)^{x+k+1} \varphi(k)=M^{-1} \varphi(x). \tag{4.7.4}$$

Da je relacija (4.7.4) rešenje diferencne jednačine (4.7.2), može se lako proveriti. Kako je prema (4.7.4)

$$f(x)=(-1)^{x+a} f(a)+2\ [\varphi(x-1)-\varphi(x-2)+\cdots+(-1)^{x+a+1} \varphi(a)],$$

a zatim

$$f(x+1)=(-1)^{x+a+1} f(a)+2\ [\varphi(x)-\varphi(x-1)+\cdots+(-1)^{x+a} \varphi(a)].$$

Sabiranjem ovih dveju jednačina nalazimo

$$f(x)+f(x+1)=2 \varphi(x).$$

Obrazac (4.7.4) ima prvenstveno teorijski značaj, ali se u izvesnim slučajevima može korisno upotrebiti za praktična izračunavanja.

Neka je, na primer, $\varphi(x)=C^x$ ($C=\text{const}$), i neka je proizvoljna konstanta a u ovom slučaju nula. Tada je

$$\sum_{k=0}^{x}(-1)^k C^x=\sum_{k=0}^{x}(-C)^k=\frac{1-(-C)^x}{C+1}.$$

Prema obrascu (4.7.4) imamo

$$M^{-1} C^x=(-1)^x k+\frac{2 C^x}{C+1}.$$

Postoji i simbolički metod rešavanja jednačine (4.7.2) koji se zasniva na jednakosti

$$M^{-1}=(1+\frac{1}{2} \Delta)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{2^m} \Delta^m.$$

Rešenje jednačine (4.7.2) u opštem slučaju nije poznato. Za specijalan oblik funkcije

$$\varphi(x)=\frac{x^n}{n!},$$

rešenje jednačine

$$f(x+1)+f(x)=\frac{2x^n}{n!}$$

je Eulerov polinom n-tog stepena

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m} \frac{\varepsilon_k\, x^{n-k}}{k!\,(n-k)},$$

gde su ε_k koeficijenti definisani simboličkom relacijom

$$(1+\varepsilon)^n+\varepsilon_n=0.$$

5. FUNKCIJE GENERATRISE

5.1. DEFINICIJA FUNKCIJE GENERATRISE

Jedan od vrlo važnih pojmova računa konačnih razlika kao i teorije verovatnoće je pojam funkcije generatrise. Prvi put je uvodi u teoriju verovatnoće Laplace [14], na sledeći način:

Neka su date vrednosti funkcije $f(x)$ za

$$x=a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots,\ b-1, b.$$

Funkcija $u(t)$ definiše se kao *funkcija generatrisa* funkcije $f(x)$, ako su koeficijenti pred t^x pri razvijanju funkcije $u(t)$ po stepenima od t, jednaki vrednostima funkcije $f(x)$ u intervalu (a, b). Pri tome je još potrebno da su ovi koeficijenti za svaku drugu celu vrednost x van intervala (a, b) jednaki nuli. To se obeležava

$$u(t)=\sum_{x=a}^{b} f(x)\, t^x, \tag{5.1.1}$$

ili simbolički

$$Gf(x)=u(t). \tag{5.1.2}$$

Ako je b beskonačno, tj. interval u kome je data funkcija $f(x)$ je (a, ∞), tada se funkcija generatrisa $u(t)$ posmatra samo za one vrednosti t za koje je red (5.1.1) konvergentan.

Na osnovu definicije funkcije generatrise imamo relacije koje su očigledne

$$G[f_1(x)+f_2(x)+\cdots]=Gf_1(x)+Gf_2(x)+\cdots$$

$$GCf(x)=CGf(x),\quad C=\text{const}.$$

5.2. ODREĐIVANJE FUNKCIJE GENERATRISE

I *način*. U infinitezimalnom računu poznat je veliki broj funkcija koje se mogu razviti u stepene redove. Svaku od ovih funkcija možemo smatrati funkcijom generatrisom. Tako, na primer

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{x=0}^{\infty} t^x, \qquad \text{prema tome } G1=\frac{1}{1-t} \tag{5.2.1}$$

$$e^t=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}t^x, \qquad G\frac{1}{x!}=e^t, \tag{5.2.2}$$

$$(1+t)^n=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}t^x, \qquad G\binom{n}{x}=(1+t)^n \tag{5.2.3}$$

$$t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)=\sum_{x=1}^{n} S_n^x t^x, \text{ te je} \tag{5.2.4}$$

$$G S_n^x=t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1),$$

gde su sa S_n^x obeleženi Stirlingovi brojevi prve vrste.

II *način*. Polazeći od funkcija generatrisa dobijenih na prvi način, možemo dobiti diferenciranjem, integriranjem i drugim operacijama nove funkcije generatrise. Prethodno je potrebno ispitati uslove konvergencije tako dobijenih redova.

Tako, na primer polazeći od formule (5.2.1) primećujemo da je red Σt^x uniformno konvergentan za svaku vrednost $|t| < 1$, stoga diferenciranjem dobijamo

$$\frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{x=0}^{\infty} x t^x \quad \text{ili} \quad Gx = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Na sličan način, posle k uzastopnih diferenciranja, imamo

$$\frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^x \quad \text{ili} \quad G\binom{x}{k} = \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}}, \quad \text{itd.} \tag{5.2.5}$$

III *način*. U nekim slučajevima moguće je dobiti funkciju generatrisu direktnim sumiranjem

$$u(t) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) t^x.$$

Na primer, ako je $f(x) = a^x$, tada je

$$u(t) = \sum_{x=0}^{\infty} (at)^x = \frac{1}{1-at}.$$

Sumiranje se može izvršiti direktno, ako je moguće funkciju $f(x)$ izraziti pomoću određenog integrala, čija je podintegralna funkcija oblika $[\varphi(v)]^x$, dakle

$$f(x) = C \int_a^b [\varphi(v)]^x \, dv.$$

Tada ćemo imati

$$u(t) = C \int_a^b \sum_{x=0}^{\infty} [t\varphi(v)]^x \, dv = C \int_a^b \frac{dv}{1 - t\varphi(v)}.$$

Na taj način dobijamo $u(t)$ u obliku određenog integrala, čija se vrednost eventualno može izračunati.

Ako je tada poznata funkcija generatrisa funkcije $f(x)$, dakle

$$Gf(x) = u(t) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) t^x, \tag{5.2.6}$$

može se odrediti funkcija generatrisa funkcije $f(x+1)$, odnosno funkcije $f(x+h)$. Doista iz relacije (5.2.6) dobija se

$$\frac{u(t)-f(0)}{t}=\frac{1}{t}\sum_{x=0}^{\infty}[f(x)t^x-f(0)]=\sum_{x=1}^{\infty}f(x)t^{x-1},$$

ili

(5.2.7) $$\frac{u(t)-f(0)}{t}=\sum_{x=0}^{\infty}f(x+1)t^x=Gf(x+1).$$

Prema tome funkcija generatrisa je

$$G\Delta f(x)=\frac{1}{t}(1-t)u(t)-f(0).$$

Na sličan način dobijamo

$$Gf(x+n)=\frac{1}{t^n}[u(t)-f(0)-tf(1)-\cdots-t^{n-1}f(n-1)].$$

5.3. ODREĐIVANJE NEODREĐENOG ZBIRA POMOĆU FUNKCIJE GENERATRISE

Videli smo (I, 4) da je neodređeni zbir funkcije $\varphi(x)$ rešenje diferencne jednačine I reda

(5.3.1) $$f(x+1)-f(x)=\varphi(x),$$

gde je $\varphi(x)$ data funkcija.

Pored pomenutih metoda (I, 4.2; 4.3; 4.4) postoji još jedna, tzv. metoda funkcije generatrise, koju je dao Laplace. Ova se metoda, kao i Andréova, primenjuje samo kad je x ceo broj.

Prema relaciji (5.2.8) imamo

(5.3.2) $$Gf(x+1)=\frac{u(t)-f(0)}{t}.$$

Sa $R(t)$ obeležićemo funkciju generatrisu date funkcije $\varphi(x)$.

Kako je

$$G[f(x+1)-f(x)]=G\varphi(x),$$

sleduje

$$Gf(x+1)-Gf(x)=G\varphi(x),$$

ili prema (5.3.2)

$$\frac{u(t)-f(0)}{t}-u(t)=R(t),$$

te je

$$u(t)=\frac{tR(t)-f(0)}{1-t},$$

gde je $f(0)$ proizvoljna konstanta. Ako pretpostavimo da je $R(t)$ poznato, vidimo da je traženi neodređeni zbir $f(x)$, odnosno rešenje jednačine (5.3.1), jednak koeficijentu pred t^x u razvoju funkcije $u(t)$ po stepenima od t.

6. VAŽNIJE FUNKCIJE U RAČUNU RAZLIKA

6.1. FAKTORIJEL

U infinitezimalnom računu jedna od najelementarnijih funkcija je potencijalna funkcija x^n, čiji je izvod vrlo jednostavan, naime $Dx^n = nx^{n-1}$. Međutim, u računu razlika, funkcija čija je razlika tako jednostavna proizvod je ekvidistantih faktora, na primer

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

i naziva se *faktorijel reda n*, a obeležava se sa $(x)_n$. Tako je $(x)_n = n(x)_{n-1}$.

Funkcija

$$x(x-h)(x-2h)\cdots(x-\overline{n-1}\,h)$$

naziva se generalisanim faktorijelom reda n i obeležava[1] $(x)_{n,h}$.

Ako se funkcija $(x)_n$ razvije u Maclaurinov, red, dobija se

$$(x)_n = \sum_{m=1}^{n} x^m \frac{1}{m!}\Big[D^m(x)_n\Big]_{x=0}.$$

Označivši sa S_n^m koeficijente u zagradi, faktorijel reda n može se napisati u obliku

$$(x)_n = S_n^1 x + S_n^2 x^2 + \cdots + S_n^n x^n. \tag{6.1.1}$$

J. Stirling [15] ispitujući ove funkcije, a specijalno koeficijente S_n^m prvi je uvideo njihovu važnost, stoga su kasnije nazvani Stirlingovim brojevima prve vrste.

Razvijajući funkciju x^n u Newtonov red (I, 2.3.2), dobija se

$$x^n = \sum_{m=1}^{n} (x)_m \left[\frac{\Delta^m x^n}{m!}\right]_{x=0}. \tag{6.1.2}$$

Koeficijenti u zagradi obeležavaju se sa σ_n^m i nazivaju Stirlingovim brojevima druge vrste. Iz (6.1.2) zaključujemo da se funkcija x^n može razviti u red faktorijela.

Stirlingovi brojevi zauzimaju centralno mesto u računu razlika. Zajedno sa Eulerovim i Bernoullievim brojevima predstavljaju, zbog svoje velike primene, predmet mnogobrojnih istraživanja[2].

---

[1] Način obeležavanja ovih funkcija nije kod svih autora isti. Srećemo, na primer, oznaku $x^{[n]}$ (De la Vallée Poussin), $[x]^n$ (Whittaker and Robinson), $x^{(n)}$ (Steffensen), $[x]^{(n)}$ (Andoyer), $x^{(nh)}$ (Milne-Thomson), $(x)_{n,h}$ (Jordan), itd.;

[2] Za brojeve S_n^m dokazuje se da su rešenja diferencne jednačine

$$S_{n+1}^m = S_n^{m-1} - nS_n^m.$$

Videti o ovome:

D. S. Mitrinović, *O Stirlingovim brojevima prve vrste i Stirlingovim polinomima.* Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, № 23, 1959, Serija: Matematika i fizika, Beograd.

Za recipročni faktorijel, koji se obeležava

$$(x)_{-m,\,h}=\frac{1}{(x+mh)_{m,\,h}},$$

može se pokazati da je

$$\Delta_h^m (x)_{-n,h}=h^m(-n)_m(x)_{-n-m,h}.$$

6.2. BINOMNI KOEFICIJENTI

Jedna od najelementarnijih funkcija koja zadovoljava relaciju

$$\Delta f_n(x)=f_{n-1}(x)$$

je binomni koeficijenat, definisan sa

$$\binom{x}{n}=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{1.\,2.\,3\cdots n}, \tag{6.2.1}$$

gde su x i n celi brojevi. Ova se definicija proširuje i za slučaj kada je x makakav broj, a n ceo pozitivan broj. Međutim, relacijom

$$\binom{x}{n}=\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(x-n+1)},$$

gde je

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

oznaka za Gamma-funkciju, definicija binomnog koeficijenta proširuje se za svaku realnu ili kompleksnu vrednost brojeva x i n.

Binomni koeficijenti generališu se na sledeći način

$$\binom{x}{n}_h=\frac{x(x-h)(x-2h)\cdots(x-nh+h)}{1.\,2.\,3\cdots n},$$

te se jednostavno dokazuje niz relacija:

$$\Delta_h^m\binom{x}{n}_h=h^m\binom{x}{n-m}_h,$$

$$\Delta^m\binom{x}{n}=\binom{x}{n-m},$$

$$\Delta^m\binom{-x}{n}=(-1)^m\binom{-x-m}{n-m},$$

$$\Delta^m\frac{1}{\binom{x}{n}}=n!\,(-n)_m\,(x-n)_{-n-m}.$$

7. VEZA IZMEĐU KONAČNE RAZLIKE I IZVODA

7.1. LAGRANGEOVA FORMULA

Ako razvijemo funkciju $f(x+h)$ u Taylorov red imamo

(7.1.1) $$f(x+h)=f(x)+hDf(x)+\frac{h^2}{2!}D^2f(x)+\cdots$$

Simbolički to se može napisati

(7.1.2) $$\underset{h}{E}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k D^k}{k!}=e^{hD}.$$

Iz relacije

$$\underset{h}{E}=1+\underset{h}{\Delta}$$

i iz (7.1.2) sleduje

$$\underset{h}{\Delta}=e^{hD}-1.$$

Ovu vezu između prve razlike i izvoda dao je Lagrange. Ako razvijemo desnu stranu u red po stepenima od hD i pomnožimo tako dobijeni red samim sobom, primenjujući Cauchyevo pravilo za množenje redova, dobićemo drugu razliku $\underset{h}{\Delta}^2$ izraženu pomoću izvoda D, D^2, $D^3,\ldots$ Na sličan način dobijamo $\underset{h}{\Delta}^3$ izraženu pomoću D, D^2, $D^3,\ldots$

Polazeći od simboličke relacije

$$e^{hD}=1+\underset{h}{\Delta},$$

možemo pisati

$$hD=ln(1+\underset{h}{\Delta}),$$

odnosno

(7.1 3) $$hD=\underset{h}{\Delta}-\frac{1}{2}\underset{h}{\Delta}^2+\frac{1}{3}\underset{h}{\Delta}^3-\frac{1}{4}\underset{h}{\Delta}^4+\ldots$$

Relacijom (7.1.3) izražen je prvi izvod pomoću razlika višeg reda. Primenjujući Cauchyevo pravilo za množenje redova, dobićemo D^2, D^3, $D^4,\ldots$ izražene pomoću $\underset{h}{\Delta}$, $\underset{h}{\Delta}^2$, $\underset{h}{\Delta}^3,\ldots$ Tako, na primer, imamo za $h=1$

$$D^2=\Delta^2-\Delta^3+\frac{11}{12}\Delta^4-\frac{5}{6}\Delta^5+\cdots$$

$$D^3=\Delta^3-\frac{3}{2}\Delta^4+\frac{7}{4}\Delta^5-\cdots$$

$$\vdots$$

7.2. LEIBNIZOVA FORMULA ZA n-TU RAZLIKU PROIZVODA DVEJU FUNKCIJA

Iz relacije

$$\Delta=E-1$$

dobijamo

(7.2.1) $$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E^{n-k}.$$

Ako sada operaciju (7.2.1) primenimo na proizvod dveju funkcija u, v, imamo

(7.2.2) $$\Delta^n (uv) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E^{n-k}\, u\, E^{n-k}\, v.$$

Posle zamene

$$E^{n-k} u = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \Delta^i u,$$

dolazi se do

$$\Delta^n (uv) = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i u \sum_{k=0}^{n-i} (-1) \binom{n}{k}\binom{n-k}{i} E^{n-k}\, v.$$

S obzirom da je

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k},$$

imaćemo

$$\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} E^{n-k-i}\, v = \Delta^{n-i} v,$$

ili definitivno

(7.2.3) $$\Delta^n (uv) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i u\, \Delta^{n-i} E^i v.$$

Uporedivši formulu (7.2.3) sa poznatom Leibnizovom formulom za n-ti proizvod dveju funkcija

$$D^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^i u\, D^{n-i} v,$$

uočavamo izvesnu analogiju, stoga se ona i naziva Leibnizova formula za n-tu razliku.

7.3. RAZLAGANJE KONAČNE RAZLIKE FUNKCIJE PO RAZLIKAMA NJENIH IZVODA

Š. E. Mikeladze [16] služeći se jednom svojom interpolacionom formulom, pokazao je da se konačna razlika funkcije može izraziti pomoću razlika njenih izvoda, u obliku

(7.3.1) $$\Delta^n f(a+\lambda h) = h^n \sum_{\rho=0}^{n} A_{n\rho} \Delta^\rho f^{(n)}(a) + R_{nr},$$

gde su koeficijenti $A_{n\rho}$ dati izrazom

(7.3.2) $$A_{n\rho} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \int_0^{\lambda+\nu} (\lambda-\nu-t)^{n-1} \binom{t}{\rho}\, dt,$$

i gde je λ ceo pozitivan ili negativan broj. Koeficijenti $A_{n\rho}$ izračunati su za $\lambda=0$, $n=1,2,3,4$; $\rho=1,2,3,4,\ldots,7$.

Može se dokazati [17] da se koeficijenti $A_{n\rho}$ svode na izraz

$$A_{n\rho}=\frac{n!}{\rho!}\sum_{k=0}^{\rho}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{m=k}^{\rho}\frac{m!}{(m+n-k)!}\,S_\rho^m\,\sigma_{m+n-k}^m,$$

gde su S_n^m i σ_m^n redom Stirlingovi brojevi prve i druge vrste, definisani obrascima (6.1.1) i (6.1.2), tako da se izračunavanje koeficijenta $A_{n\rho}$ svodi uglavnom na izračunavanje već dovoljno proučavanih brojeva S_n^m i σ_m^n.

Specijalno za $\lambda=0$, formula (7.3.1) sa koeficijentima

$$A_{n\rho}=\frac{n!}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}\frac{m!}{(m+n)!}\,S_\rho^m\sigma_{m+n}^n$$

je neposredna posledica dobro poznatih relacija računa razlika.

Najpre je prema (6.1.1),

$$\binom{t}{\rho}=\frac{1}{\rho!}\sum_{m=0}^{n}S_\rho^m t^m, \tag{7.3.3}$$

pa se integracijom dobija

$$\int_0^x (x-t)^{n-1}\binom{t}{\rho}dt=\frac{1}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}S_\rho^m\int_0^x(x-t)^{n-1}t^m dt$$

$$=\frac{1}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}S_\rho^m x^{m+n}\int_0^1(1-t)^{n-1}t^m dt.$$

Odavde, s obzirom da je

$$\int_0^1(1-t)^{n-1}t^m dt=\frac{m!\,(n-1)!}{(m+n)!},$$

neposredno sleduje

$$\int_0^x(x-t)^{n-1}\binom{t}{\rho}dt=\frac{(n-1)!}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}S_\rho^m\frac{m!}{(m+n)!}x^{m+n}.$$

Stavljajući $x=\lambda+\nu$ dobijamo

$$A_{n\rho}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\frac{(n-1)!}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}S_\rho^m\frac{m}{(m+n}(\lambda+\nu)^{m+n}$$

ili

$$A_{n\rho}=\frac{1}{\rho!}\sum_{m=0}^{\rho}\frac{m!}{(m+n)!}S_\rho^m\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}(\lambda+\nu)^{m+n}. \tag{7.3.4}$$

Prema binomnom obrascu i relaciji (6.1.2) koja se zapisuje u obliku

$$\Delta^n t^m \Big|_{t=0} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \nu^m = n!\, \sigma_m^n, \tag{7.3.5}$$

nalazimo

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} (\lambda+\nu)^{m+n} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} \lambda^k \nu^{m+n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} \lambda^k \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \nu^{m+n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} \lambda^k n!\, \sigma_{m+n-k}^n .$$

Kako je, prema (7.3.5), $\sigma_{m+n-k}^n = 0$ za $k > m$ biće

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} (\lambda+\nu)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+n}{k} \lambda^k n!\, \sigma_{m+n-k}^n .$$

Prema tome, obrazac (7.3.4) postaje

$$A_{n\rho} = \frac{1}{\rho!} \sum_{m=0}^{\rho} \frac{m!\, n!}{(m+n)!} S_\rho^m \sum_{k=0}^{m} \binom{m+n}{k} \lambda^k \sigma_{m+n-k}^n ,$$

odnosno

$$A_{n\rho} = \frac{n!}{\rho!} \sum_{k=0}^{\rho} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{m=k}^{\rho} \frac{m!}{(m+n-k)!} S_\rho^m \sigma_{m+n-k}^n .$$

Specijalan slučaj obrasca (7.3.1), kada je $\lambda = 0$, dobijamo iz Newtonovog reda. Iz relacije (2.3.1) dobijamo

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{x-a}{m}_h \frac{\Delta_h^m f(a)}{h^m}, \tag{7.3.6}$$

odakle je

$$\Delta_h^s f(x) = \sum_{m=s}^{\infty} \binom{x-a}{m-s}_h h^{s-m} \Delta_h^m f(a). \tag{7.3.7}$$

Razvijajući funkciju $f(x)$ u Taylorov red, nalazimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n \frac{D^n f(a)}{n!}, \tag{7.3.8}$$

ili, s obzirom na relaciju (7.3.5)

$$\left[\Delta_h^m (x-a)^n\right]_{x=a} = m!\, h^n \sigma_n^m ;$$

prema tome, relacija (7.3.8) postaje

$$\Delta_h^m f(a) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{m!}{n!} h^n f^{(n)}(a)\, \sigma_n^m ,$$

tj.

$$\Delta_h^m f(a) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+n)!} h^{m+n} f^{(m+n)}(a)\, \sigma_{m+n}^{n}.$$

S druge strane, kako je

$$f^{(m)}(a) = \sum_{\rho=m}^{\infty} \frac{m!\, \Delta_h^{\rho} f^{(n)}(a)}{h^m \rho!} S_{\rho}^{m},$$

tj.

$$f^{(m+n)}(a) = \sum_{\rho=m}^{\infty} \frac{m!\, \Delta_h^{\rho} f^{(n)}(a)}{h^m \rho!} S_{\rho}^{m}$$

imamo definitivno

$$\Delta^n f(a) = h^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!\, n!}{(m+n)!} \sigma_{m+n}^{n} \sum_{\rho=m}^{\infty} \frac{\Delta^{\rho} f^{(n)}(a)}{\rho!} S_{\rho}^{m}$$

ili

$$\Delta^n f(a) = h^n \sum_{\rho=0}^{\infty} A_{n\rho}\, \Delta^{\rho} f^{(n)}(a),$$

gde je

(7.3.9) $$A_{n\rho} = \frac{n!}{\rho!} \sum_{m=0}^{\rho} \frac{m!}{(m+n)!} S_{\rho}^{m} \sigma_{m+n}^{n}.$$

Za slučaj $n=1$ koeficijenti $A_{n\rho}$ postaju

$$A_{1\rho} = \frac{1}{\rho!} \sum_{m=1}^{\rho} \frac{1}{m+1} S_{\rho}^{m}$$

dakle, svode se na Bernoullieve brojeve druge vrste b_{ρ} [6, 147] definisane rekurzivnom relacijom

(7.3.10) $$\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{b_m}{n-m} = 0.$$

Prema tome, iz relacije (7.3.9), gde je $A_{1m} = b_m$ dobijamo sukcesivno vrednosti koeficijenata $A_{1\rho}$ $(\rho = 1, 2, 3, \ldots)$.

Tako možemo, s obzirom na (7.3.9) i (7.3.10) formirati tablicu koeficijenata $A_{n\rho}$.

ρ \ n	1	2	3	4
0	1	1	1	1
1	1/2	1	3/2	2
2	−1/12	1/12	1/2	7/6
3	1/24	0	0	1/6
4	−19/720	−1/240	−1/240	−1/720
5	3/160	1/240	−1/480	0
6	−863/60480	−221/60480	1/945	1/3024
7	275/24192	19/6048	−11/20160	−1/3024

8. O NEKIM OPERATORIMA RAČUNA KONAČNIH RAZLIKA

8.1. OPERATOR θ

U matematičkoj analizi često se sreće operator θ definisan relacijom

$$\theta = x\frac{d}{dx} = x\,D.$$

Ako se ovaj operator primeni više puta, dobija se

$$\theta^2 = x\,D\,(x\,D) = x\,D + x^2 D^2,$$

$$\theta^3 = x\,D\,(\theta^2) = x\,D + 3x^2 D^2 + x^3 D^3,$$

i uopšte

$$\theta^n = C_1 x\,D + C_2 x^2 D^2 + \cdots + C_n x^n D^n, \tag{8.1.1}$$

gde su konstante C_i nezavisne od funkcije na koju se primenjuje operator θ. Za određivanje ovih konstanata može se postupiti na sledeći način [6, 195]:

Neka je $f(x) = x^\lambda$, tada je

$$\theta\, x^\lambda = \lambda\, x^\lambda\,; \quad \theta^n x^\lambda = \lambda^n x^\lambda\,; \quad D^\nu x^\lambda = (\lambda)_\nu\, x^{\lambda-\nu}.$$

Zamenom ovih vrednosti u (8.1.1), dobija se

$$\lambda^n = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu\,(\lambda)_\nu.$$

S obzirom na relaciju

$$x^n = \sigma_n^1\, x + \sigma_n^2\,(x)_2 + \cdots + \sigma_n^m\,(x)_m + \cdots + \sigma_n^n\,(x)_n,$$

kojom se definišu Stirlingovi brojevi druge vrste, očigledno je da je

$$C_\nu = \sigma_n^\nu,$$

te je oblik operatora (8.1.1)

$$\theta^n = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_n^\nu\, x^\nu D^\nu.$$

Operator θ ima široku primenu u izračunavanju nekih klasa konačnih zbirova. I. J. Schwatt [65, 81-104] primenom ovog operatora izračunao je veliki broj konačnih suma, kao na primer

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^p, \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p, \quad \sum_{k=1}^{n} k^p, \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^p$$

o čemu će biti reči u glavi IV ovoga rada.

8.2. OPERATOR ψ

U računu konačnih razlika definiše se operator ψ, analogno operatoru θ, pomoću jednakosti

$$\psi = x\,\Delta.$$

Ako se ovaj operator primeni više puta, dobija se redom

$$\psi^2 = x\Delta(x\Delta) = x\Delta + (x+1)_2\Delta^2,$$

(8.2.1) $$\psi^3 = x\Delta\psi^2 = x\Delta + 3(x+1)_2\Delta^2 + (x+2)_3\Delta^3,$$

$$\vdots$$

$$\psi^n = C_1 x D + C_2(x+1)_2\Delta^2 + \cdots + C_n(x+n-1)_n\Delta^n,$$

gde su C_i konstante nezavisne od funkcija na koju se primenjuje operator ψ. Da bismo odredili ove konstante, izaberimo funkciju $f(x)$ na sledeći način [6, 199]:

Neka je

$$f(x) = (x+\lambda-1)_\lambda,$$

tada je

$$\Delta^\nu f(x) = (\lambda)_\nu (x+\lambda-1)_{\lambda-\nu},$$

i

$$\psi f(x) = x\Delta f(x) = \lambda(x+\lambda-1); \quad \psi^n f(x) = \lambda^n(x+\lambda-1)_\lambda.$$

Zamenom ovih vrednosti u (8.2.1) nalazi se

$$\lambda^n = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(\lambda)_\nu.$$

Na isti način, kao u prethodnom paragrafu, zaključujemo da je

$$C_\nu = \sigma_n^\nu,$$

te je oblik operatora (8.2.1)

$$\psi^n = \sum_{\nu=1}^{n} (x+\nu-1)_\nu \sigma_n^\nu \Delta^\nu.$$

8.3. GENERALISANI OPERATORI

8.3.1. M. d'Ocagne [66] posmatrao je operator Z definisan relacijom

$$Z = (x+1) + xD,$$

koji, primenjen nekoliko puta, daje

$$Z^2 = (x+1)Z + xDZ = (x^2+3x+1) + (2x+3)xD + x^2D^2,$$

$$Z^3 = (x^3+6x^2+7x+1) + (3x^2+12x+7)xD + (3x+6)x^2D^2 + x^3D^3,$$

i uopšte

(8.3.1.1) $$Z^n = \Phi_{n+1}(x) + \frac{D\Phi_{n+1}(x)}{1!}xD + \frac{D^2\Phi_{n+1}(x)}{2!}x^2D^2 + \cdots + \frac{D^n\Phi_{n+1}(x)}{n!}x^nD^n,$$

gde je

$$\Phi_{n+1}(x) = \sigma_{n+1}^1 + \sigma_{n+1}^2 x + \sigma_{n+1}^3 x^2 + \cdots + \sigma_{n+1}^{n+1} x^n.$$

Relacija (8.3.1.1) može se jednostavno dokazati principom matematičke indukcije.

Neka je

$$Z^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k \Phi_{n+1}(x)}{k!} x^k D^k.$$

S obzirom da je

$$Z^{n+1} = (x+1) Z^n + x D Z^n,$$

nalazimo

$$Z^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k \Phi_{n+1}(x)}{k!} x^k (x+1) D^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{k+1} \Phi_{n+1}(x)}{k!} x^{k+1} D^k$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k \Phi_{n+1}(x)}{(k-1)!} x^k D^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k \Phi_{n+1}(x)}{k!} x^{k+1} D^{k+1},$$

ili

$$Z^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{D^k \Phi_{n+1}(x)}{k!} x^k (x+k+1) D^k \right.$$

(8.3.1.2)

$$\left. + \frac{D^{k+1} \Phi_{n+1}(x)}{k!} x^{k+1} D^k \right] + \sum_{k=1}^{n+1} k \frac{D^{k-1} \Phi_{n+1}(x)}{k!} x^k D^k.$$

Polinomi $\Phi_{n+1}(x)$ zadovoljavaju relaciju

$$\Phi_{n+2}(x) = (x+1) \Phi_{n+1}(x) + x D \Phi_{n+1}(x),$$

koja ako se k-puta diferencira, postaje

(8.3.1.3) $D^k \Phi_{n+2}(x) = k D^{k-1} \Phi_{n+1}(x) + (x+k+1) D^k \Phi_n(x) + x D^{k+1} \Phi_n(x).$

S obzirom na relaciju (8.3.1.3), izraz (8.3.1.2) postaje

$$Z^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{D^k \Phi_{n+2}(x)}{k!} x^k D^k,$$

čime je dokazana relacija (8.3.1.1).

8.3.2. Analogno operatoru Z, posmatraćemo u računu konačnih razlika operator

(8.3.2.1) $$Y = (x+1) + x \Delta,$$

koji, primenjen nekoliko puta daje

$$Y^2 = (x+1) Y + x \Delta Y$$

$$Y^2 = (x^2 + 3x + 1) + (2x + 4) x \Delta + x (x+1) \Delta^2,$$

$$Y^3 = (x^3 + 6x^2 + 8x + 1) + (3x^2 + 15x + 15) x \Delta + (3x + 9) x (x+1) \Delta^2$$
$$+ x (x+1)(x+2) \Delta^3,$$

$$Y^4 = (x^4 + 10x^3 + 29x^2 + 24x + 1) + (4x^3 + 36x^2 + 92x + 64) x \Delta$$
$$+ (6x^2 + 42x + 66) x (x+1) \Delta^2 + (4x + 16) x (x+1)(x+2) \Delta^3$$
$$+ x (x+1)(x+2)(x+3) \Delta^4,$$

i uopšte

(8.3.2.2) $Y^n = P_n(x) + \frac{\Delta P_n(x)}{1!} x\Delta + \frac{\Delta^2 P_n(x)}{2!}(x+1)_2\Delta^2 + \cdots + \frac{\Delta^n P_n(x)}{n!}(x+n-1)_n\Delta^n,$

gde je $P_n(x)$ polinom stepena n, određen diferencnom jednačinom

(8.3.2.3) $$P_{n+1}(x) = x\,P_n(x+1) + P_n(x).$$

Ako polinomu $P_n(x)$ damo oblik

(8.3.2.4) $$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} P_n^m x^m,$$

koeficijente P_k^m, koji su nezavisni od funkcije na koju primenjujemo operator Y, određujemo iz rekurzivne formule

(8.3.2.5) $$P_{n+1}^{m+1} - P_n^{m+1} = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{m+k}{k} P_n^{m+k},$$

pri čemu je

$$P_0^0 = P_r^0 = 1; \quad P_r^r = 1; \quad P_k^{k-1} = \sigma_{k+1}^k.$$

Relacija (8.3.2.2) može se jednostavno dokazati principom matematičke indukcije. Neka je

$$Y^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k P_n(x)}{k!}(x+k-1)_k\Delta^k.$$

S obzirom na (8.3.2.1) imamo

$$Y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k P_n(x)}{k!}(x+1)(x+k-1)_k\Delta^k + x\Delta \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k P_n(x)}{k!}(x+k-1)_k\Delta^k.$$

Kako je

$$\Delta[\Delta^k P_n(x)(x+k-1)_k\Delta^k] = \Delta^{k+1} P_n(x)(x+k)_k(\Delta^{k+1}+\Delta^k)$$
$$+ \Delta^k P_n(x)[k(x+k-1)_{k-1}\Delta^k + (x+k)_k\Delta^{k+1}],$$

nalazimo

(8.3.2.6) $$Y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^{k+1}P_n(x) + \Delta^k P_n(x)}{k!} x(x+k)_k(\Delta^{k+1}+\Delta^k)$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k P_n(x)}{k!}(x+k-1)_k\Delta^k.$$

S obzirom da je

$$\Delta^{k+1} P_n(x) = \Delta^k P_n(x+1) - \Delta^k P_n(x),$$

relacija (8.3.2.6) postaje

(8.3.2.7) $$Y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{1}{k!}[\Delta^k P_n(x+1)\,x(x+k)_k(\Delta^{k+1}+\Delta^k)] \right.$$
$$\left. + \frac{1}{k!}[\Delta^k P_n(x)(x+k-1)_k\Delta^k] \right\}.$$

Ako operator Δ primenimo k puta na relaciju (8.3.2.3), dobijamo

(8.3.2.8) $$\Delta^k P_{n+1}(x) = \Delta^k P_n(x) + k\,\Delta^{k-1} P_n(x+1) + (x+k)\,\Delta^k P_n(x+1).$$

Relaciju (8.3.2.7) možemo napisati u obliku

$$Y^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\left[k\,\frac{\Delta^{k-1}P_n(x+1)}{k!}(x+k-1)_k\,\Delta^k + (x+k)\frac{\Delta^k P_n(x+1)}{k!}(x+k-1)_k\,\Delta^k\right.$$
$$\left. + \frac{\Delta^k P_n(x)}{k!}(x+k-1)_k\,\Delta^k\right] + x\,P_n(x+1) + P_n(x),$$

tj. s obzirom na (8.3.2.3) i (8.3.2.8), u obliku

$$Y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{\Delta^k P_{n+1}(x)}{k!}(x+k-1)_k\,\Delta^k.$$

Ovim je relacija (8.3.2.2) dokazana.

Prvih nekoliko koeficijenata P_n^m navodimo u sledećoj tablici:

$n \backslash m$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	3	1		
3	1	8	6	1	
4	1	24	29	10	1

8.3.3. Operator

$$\theta_\alpha = \alpha + x\,D, \quad (\alpha \text{ realan broj})$$

primenjen jednom i dva puta daje

$$\theta_\alpha^2 = \alpha\,\theta_\alpha + x\,D\,\theta_\alpha = \alpha^2 + (2\alpha+1)\,x\,D + x^2 D^2,$$

$$\theta_\alpha^3 = \alpha^3 + (3\alpha^2 + 3\alpha + 1)\,x\,D + (3\alpha+3)\,x^2 D^2 + x^3 D^3,$$

i uopšte

(8.3.3.1) $$\theta_\alpha^n = \sigma_n^0(\alpha) + \sigma_n^1(\alpha)\,x\,D + \sigma_n^2(\alpha)\,x^2 D^2 + \cdots + \sigma_n^n(\alpha)\,x^n D^n,$$

gde su $\sigma_n^\nu(\alpha)$ generalisani Stirlingovi brojevi druge vrste, definisani rekurzivnom formulom

(8.3.3.2) $$\sigma_n^\nu(\alpha) = (\nu+\alpha)\,\sigma_{n-1}^\nu(\alpha) + \sigma_{n+1}^{\nu-1}(\alpha).$$

Očigledno je, da je $\theta_0^n = \theta^n$, za $\alpha = 0$ i $\sigma_n^\nu(0) = \sigma_n^\nu$, te je operatorom θ_α^n obuhvaćen kao specijalan slučaj operator θ, posmatran u paragrafu 8.1.

Brojeve $\sigma_n^\nu(\alpha)$ posmatrao je M. d'Ocagne [66] u drugom cilju. Oni se mogu odrediti eksplicitnim izrazom [22, 26—30]:

$$\sigma_n^\nu(\alpha) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i\binom{\nu}{i}(\alpha+i)^n,$$

a javljaju se u izrazu

$$(x+\alpha)^n = \sigma_n^1(\alpha)\, x + \sigma_n^2(\alpha)(x)_2 + \cdots + \sigma_n^n(\alpha)(x)_n.$$

8.3.4. Analogno operatoru θ_α, možemo posmatrati operator

$$\psi_\alpha = \alpha + x\Delta,$$

koji, ako se primeni jednom i dva puta, daje

$$\psi_\alpha^2 = \alpha\,\psi_\alpha + x\Delta\,\psi_\alpha = \alpha^2 + (2\alpha+1)\,x\Delta + x(x+1)\,\Delta^2,$$

$$\psi_\alpha^3 = \alpha^3 + (3\alpha^2+3\alpha+1)\,x\Delta + (3\alpha+3)\,x(x+1)\,\Delta^2 + x(x+1)(x+2)\,\Delta^3,$$

i uopšte

(8.3.4.1) $$\psi_\alpha^n = \sigma_n^0(\alpha) + \sigma_n^1(\alpha)\,x\Delta + \sigma_n^2(\alpha)(x+1)_2\Delta^2 + \cdots + \sigma_n^n(\alpha)(x+n-1)_n\Delta^n,$$

gde su $\sigma_n^\nu(\alpha)$ koeficijenti identični onima koji se javljaju kod operatora θ_α^n.

Očigledno je da je $\psi_0^n = \psi^n$ za $\alpha = 0$, te je obrazac (8.3.4.1) obuhvatio operator ψ iz (8.2) kao specijalan slučaj.

Relaciju (8.3.3.1), kao i (8.3.4.1), možemo jednostavno dokazati principom matematičke indukcije.

8.3.5. Posmatrajmo sada operator

$$Z_\alpha = (x+\alpha) + xD,$$

koji posle nekoliko uzastopnih primena, daje

$$Z_\alpha^2 = (x+\alpha)\,Z_\alpha + xD\,Z_\alpha = [x^2 + (2\alpha+1)\,x + \alpha^2] + (3x+2\alpha+1)\,xD + x^2D^2$$

$$Z_\alpha^3 = [x^3 + (3\alpha+3)\,x^2 + (3\alpha^2+3\alpha+1)\,x + \alpha^3] + [3x^2 + (6\alpha+6)\,x + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1]\,xD + [3x+3\alpha+3]\,x^2D^2 + x^3D^3,$$

i uopšte

(8.3.5.1) $$Z_\alpha^n = \Phi_{n+1}(x,\alpha) + \frac{D\,\Phi_{n+1}(x,\alpha)}{1!}\,xD + \frac{D^2\,\Phi_{n+1}(x,\alpha)}{2!}\,x^2D^2 + \cdots + \frac{D^n\,\Phi_{n+1}(x,\alpha)}{n!}\,x^nD^n,$$

gde je

$$\Phi_{n+1}(x,\alpha) = \sigma_{n+1}^1(\alpha) + \sigma_{n+1}^2(\alpha)\,x + \sigma_{n+1}^3(\alpha)\,x^2 + \cdots + \sigma_{n+1}^{n+1}x^n.$$

Očigledno je da je $Z_0^n = Z^n$ za $\alpha = 0$, te je operator iz (8.3.1) sadržan u (8.3.5.1), kao specijalan slučaj.

GLAVA II

BERNOULLIEVI POLINOMI

1. DEFINICIJA BERNOULLIEVIH POLINOMA

1.1. DEFINICIJA BERNOULLIEVIH POLINOMA POMOĆU DIFERENCNE JEDNAČINE

Bernoulliev polinom n-tog stepena po x koji se obeležava sa $B_n(x)$, definiše se kao polinom koji zadovoljava diferencnu jednačinu I reda

$$B_n(x+1)-B_n(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{1.1.1}$$

ili, to je polinom čija je razlika jednaka nekom stepenu od x, dakle

$$\Delta B_n(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{1.1.2}$$

Rešenje jednačine (1.1.1) možemo napisati u obliku

$$B_n(x)=\Delta^{-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+k,$$

gde je k proizvoljna konstantna. S obzirom da ovo rešenje sadrži proizvoljnu konstantu, vidimo da jednačina (1.1.1) nije dovoljna za jednoznačno određivanje polinoma $B_n(x)$. Stoga napišimo polinom $B_n(x)$ na ovaj način

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}, \tag{1.1.3}$$

gde su a_k konstante koje će se docnije odrediti.

Diferencirajući levu i desnu stanu izraza (1.1.2) dobija se

$$D\Delta B_n(x)=\frac{x^{n-2}}{(n-2)!},$$

ili, prema definiciji (1.1.1)

$$D\Delta B_n(x)=\Delta B_{n-1}(x).$$

Kako su operatori D i Δ komutativni, možemo pisati

$$\Delta D B_n(x)=\Delta B_{n-1}(x),$$

ili, ako izvršimo operaciju Δ^{-1},

$$D\,B_n(x) = B_{n-1}(x). \tag{1.1.4}$$

Relacijom

$$Df_n(x) = f_{n-1}(x),$$

gde je $f_n(x)$ proizvoljna funkcija od x, definisan je *harmonijski niz* funkcija

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

Prema tome, na osnovu relacija (1.1.1) i (1.1.4) dobija se potpuna definicija Bernoullievih polinoma:

Bernoullievi polinomi

$$B_0(x),\ B_1(x),\ B_2(x),\ \ldots,\ B_n(x), \ldots$$

obrazuju harmonijski niz čiji članovi zadovoljavaju linearnu diferencnu jednačinu I reda

$$B_n(x+1) - B_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ako $B_n(x)$ napišemo u obliku

$$B_n(x) = a_0 \frac{x^n}{n!} + a_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + a_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

prema (1.1.4) imamo

$$D\,B_n(x) = B_{n-1}(x) = a_0 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + a_1 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + a_{n-2} x + a_{n-1},$$

odakle zaključujemo da su koeficijenti Bernoullievih polinoma nezavisni od stepena polinoma.

Relacija (1.1.1) za $n=1$ postaje $\Delta B_1(x) = 1$, ili prema (1.1.3)

$$a_0(x+1) + a_1 - (a_0 x + a_1) = 1 \Rightarrow a_0 = 1.$$

U slučaju kada je $n > 1$, prema (1.1.1) za $x=0$ imamo $\Delta B_n(0) = 0$, a iz (1.1.3)

$$\Delta B_n(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} [\Delta x^{n-k}]_{x=0},$$

ili, s obzirom da je

$$\Delta [x^{n-k}]_{x=0} = [(x+1)^{n-k} - x^{n-k}]_{x=0} = 1,$$

imamo

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} = 0. \tag{1.1.5}$$

Pomoću ove relacije, polazeći od $a_0 = 1$, možemo odrediti redom sve koeficijente a_k. Tako, na primer, iz relacija

$$\frac{a_0}{2!}+\frac{a_1}{1!}=0,$$

$$\frac{a_0}{3!}+\frac{a_1}{2!}+\frac{a_2}{1!}=0,$$

$$\frac{a_0}{4!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{1!}=0,$$

$$\frac{a_0}{5!}+\frac{a_1}{4!}+\frac{a_2}{3!}+\frac{a_3}{2!}+\frac{a_4}{1!}=0,$$

koje se dobijaju iz (1.1.5) za $n=1, 2, 3, 4$, nalazimo

$$a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{12},\ a_3=0,\ a_4=-\frac{1}{720}.$$

Prema tome

(1.1.6)
$$B_1(x)=x-\frac{1}{2},$$

$$B_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12},$$

$$B_3(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x,$$

$$B_4(x)=\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{720}.$$

Ako stavimo

(1.1.7)
$$a_k=\frac{B_k}{k!},$$

relacija (1.1.3) postaje

(1.1.8)
$$B_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}.$$

Koeficijenti B_k nazivaju se Bernoullievi brojevi.

Relacija (1.1.8) može se napisati u obliku simboličke formule

(1.1.9)
$$B_n(x)=\frac{1}{n!}(x+B)^n,$$

u kojoj posle razvijanja B^k treba zameniti sa B_k. Prema (1.1.4) vidimo da se simbolička formula (1.1.9) može diferencirati kao stepen.

Kako je $\Delta B_n(0)=0$ za $n>1$, relacija (1.1.9) daje simboličku formulu

(1.1.10)
$$(1+B)^n-B_n=0,$$

kojom su definisani Bernoullievi brojevi. Za $n=0, 1, 2, 3$, dobijamo prema (1.1.7) ili direktno iz simboličke formule

(1.1.11)
$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ \text{itd.}$$

1.2. DEFINICIJA BERNOULLIEVIH POLINOMA POMOĆU HARMONIJSKIH INTEGRALA [18]

Bernoullievi polinomi $B_n(x)$ su uzastopni harmonijski integrali funkcije x, dakle određeni su uslovima

(1.2.1) $$B_1(x)=x-\frac{1}{2}$$

(1.2.2) $$D\,B_{n+1}(x)=B_n(x) \quad (n=1,2,\ldots),$$

(1.2.3) $$B_{n+1}(1)-B_{n+1}(0)=\int_0^1 B_n(t)\,dt=0 \quad (n=1,2,\ldots).$$

Pokazaćemo da je definicija 1.1 ekvivalentna definiciji 1.2. Pre svega, uslov (1.2.1) sadržan je u prvoj relaciji (1.1.6). Očigledno je, zatim, da je relacija (1.1.4) identična uslovu (1.2.2). Ostaje samo da pokažemo da je uslov (1.2.3) ekvivalentan relaciji (1.1.1). Prema (1.1.4) nalazimo

$$\int B_n(x)\,dx=B_{n+1}(x)+C$$

ili

$$\int_0^1 B_n(x)\,dx=B_{n+1}(1)-B_{n+1}(0),$$

a to je, prema (1.1.1),

$$B_{n+1}(1)-B_{n+1}(0)=0 \quad (n>0).$$

Dakle, doista su definicije 1.1 i 1.2 ekvivalentne.

1.3. DEFINICIJA BERNOULLIEVIH POLINOMA POMOĆU FUNKCIJE GENERATRISE

Bernoullievi polinomi često se definišu pomoću funkcije generatrise, naime kao koeficijenti pred t^k u razvoju funkcije

$$\frac{t}{e^t-1}\,e^{xt}$$

u Maclaurinov red. To se obeležava

(1.3.1) $$\frac{t}{e^t-1}\,e^{xt}=\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\,t^k,$$

ili simbolički

$$G\,B_k(x)=\frac{t}{e^t-1}\,e^{xt}.$$

Definicija 1.3 ekvivalentna je definiciji 1.1, odnosno 1.2. U tu svrhu dovoljno je pokazati da su koeficijenti $B_k(x)$ uzastopni harmonijski integrali funkcije x, tj. da Bernoullievi polinomi definisani relacijom (1.3.1) ispunjavaju uslove (1.2.1), (1.2.2) i (1.2.3).

Da je uslov (1.2.1) ispunjen, vidimo neposredno iz (1.3.1), tj.

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2}.$$

Ako diferenciramo po x levu i desnu stranu jednakosti (1.3.1), nalazimo

(1.3.2) $$\frac{t}{e^t-1}\, t\, e^{xt} = \sum_{k=1}^{\infty} D\, B_k(x)\, t^k,$$

odnosno

(1.3.3) $$\frac{t\, e^{xt}}{e^t-1} = \sum_{k=1}^{\infty} D B_k(x) t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} D\, B_{k+1}(x)\, t^k.$$

Upoređivanjem (1.3.1) sa (1.3.3) dobijamo

$$D\, B_{k+1}(x) = B_k(x).$$

Najzad, do uslova (1.2.3) dolazimo kada u (1.3.1) stavimo $x=0$ i $x=1$, naime

$$\frac{t}{e^t-1} - 1 + \frac{1}{2} t = \sum_{k=2}^{\infty} B_k(0)\, t^k$$

$$\frac{t\, e^t}{e^t-1} - 1 - \frac{1}{2} t = \sum_{k=2}^{\infty} B_k(1)\, t^k.$$

Kako je

$$\frac{t}{e^t-1} - 1 + \frac{1}{2} t = \frac{t\, e^t}{e^t-1} - 1 - \frac{1}{2} t,$$

imamo

$$B_k(1) - B_k(0) = 0.$$

Isto tako, iz relacije (1.3.1) možemo izvesti uslov (1.1.1). Zaista, prema (1.3.1), imamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} [B_k(x+1) - B_k(x)]\, t^k = \frac{t}{e^t-1} [e^{(x+1)t} - e^{xt}] = t\, e^{xt} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} t^m,$$

odakle se upoređivanjem koeficijenata pred t^m dobija uslov (1.1.1).

1.4. DEFINICIJA BERNOULLIEVIH POLINOMA POMOĆU ZBIRA POTENCIJA PRIRODNIH BROJEVA

Kao što smo već napomenuli, Bernoullievi polinomi i brojevi prvo su privukli pažnju matematičara pri izračunavanju zbira potencija prirodnog niza brojeva

$$S_n(x) = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + x^n.$$

Stoga se oni često definišu pomoću

(1.4.1) $$S_n(x) = n!\, [B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(0)].$$

Međutim, može se pokazati da je ova definicija ekvivalentna definiciji 1.1. Doista, polazeći od jednakosti (1.1.4)

$$D\, B_{n+1}(x) = B_n(x),$$

dobija se

$$\int_x^{x+1} B_n(z)\,dz = B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x).$$

Relacija (1.4.2), s obzirom na (1.1.1), postaje

$$\int_x^{x+1} B_n(z)\,dz = \frac{x^n}{n!},$$

ako da stavljajući u njoj redom $x = 0, 1, 2, 3, \cdots$ dobijamo

$$S_n(x) = n!\,[B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(0)].$$

1.5. OSTALE DEFINICIJE BERNOULLIEVIH POLINOMA

Osim definicija 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, kod raznih autora nailazimo na različite definicije, ali sve su uglavnom ekvivalentne ovima.

Navešćemo nekoliko primera definicija:

1.5.1. Seliwanoff [19] uvodi sledeću definiciju Bernoullievih polinoma

$$\Delta B_n(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} \quad (x \text{ ceo broj}).$$

1.5.2. Nörlund [4] definiše ove polinome pomoću dve jednakosti

$$\Delta B_n(x) = n\,x^{n-1},$$

$$D\,B_n(x) = n\,B_{n-1}(x),$$

tako da dobija

$$\sum_{k=0}^{x} k^{n-1} = \frac{1}{n}[B_n(x) - B_n],$$

gde je B_n n-ti Bernoulliev broj.

1.5.3. Saalschütz [20] daje definiciju

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{x} k^{n-1} \quad (x \text{ ceo broj}).$$

1.5.4. Nailazimo takođe na definiciju

$$B_n(x) = -n! \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2\pi i k)^{-n} e^{2\pi i k x} \quad (0 < x < 1).$$

U daljem izlaganju pri proučavanju Bernoullievih polinoma služićemo se uglavnom definicijom 1.1, ali često ćemo koristiti i njoj ekvivalentnu definiciju 1.3.

2. ELEMENTARNO ISPITIVANJE BERNOULLIEVIH POLINOMA

2.1. OSOBINA SIMETRIJE BERNOULLIEVIH POLINOMA

Prema definiciji

(2.1.1) $$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$$

za $n > 1$ imamo

$$B_n(0) = a_n.$$

Za $x = 1$ dobija se, prema (2.1.1) i (1.1.5),

$$B_n(1) = a_n.$$

Prema tome, za $n > 1$ i $n = 0$, je

(2.1.2) $$B_n(0) = B_n(1) = \frac{1}{n!} B_n,$$

dok je za $n = 1$

$$B_1(0) = -B_1(1) = B_1.$$

Iz jednakosti

$$\Delta B_{2n}(x) = B_{2n}(x+1) - B_{2n}(x) = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

zamenjujući x sa $-x$, dobijamo

$$B_{2n}(1-x) - B_{2n}(-x) = -\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Kako je izraz na levoj strani ove relacije jednak $-\Delta B_{2n}(1-x)$, imamo

$$\Delta B_{2n}(1-x) = \Delta B_{2n}(x),$$

odnosno

$$B_{2n}(1-x) - B_{2n}(1) = B_{2n}(x) - B_{2n}(0),$$

ili, prema (2.1.2),

(2.1.3) $$B_{2n}(1-x) = B_{2n}(x).$$

Stavimo li zatim $x = \frac{1}{2} + z$, dobijamo

(2.1.4) $$B_{2n}\left(\frac{1}{2} + z\right) = B_{2n}\left(\frac{1}{2} - z\right).$$

Iz poslednje relacije vidimo da se mogu odrediti vrednosti Bernoullievih polinoma parnog stepena u intervalu $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, kada su one poznate u intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Jednačina (2.1.4) geometrijski znači da je u intervalu $(0, 1)$ kriva $y = B_{2n}(x)$ simetrična prema pravoj $x = \frac{1}{2}$.

Diferencirajući jednačinu (2.1.4), dolazimo do jednakosti

(2.1.5) $$B_{2n-1}\left(\frac{1}{2} + z\right) = -B_{2n-1}\left(\frac{1}{2} - z\right),$$

odakle zaključujemo da su Bernoullievi polinomi neparnog stepena simetrični prema tački $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Stavljajući u (2.1.5) $z=\frac{1}{2}$ dobijamo

$$B_{2n-1}(1)=-B_{2n-1}(0).$$

Uporedivši ovo sa izrazom (2.1.2), zaključujemo da je

$$B_{2n-1}(0)=B_{2n-1}(1)=0, \quad \text{tj.} \quad B_{2n-1}=B_{2n-1}(0)=0.$$

Ovo je jednostavan dokaz da su Bernoullievi brojevi sa neparnim indeksom jednaki nuli.

Ako se u relaciji

$$B_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\, x^{n-k},$$

zameni x sa $-x$, dobija se

$$B_n(-x)=\frac{(-1)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}B_k\, x^{n-k}.$$

Prema tome je

$$B_n(-x)-(-1)^n B_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}[(-1)^k-1]\binom{n}{k}B_k\, x^{n-k}.$$

Ako je k paran broj, tada je $(-1)^k-1=0$, te na desnoj strani otpadaju svi članovi sa parnim indeksom k; ako je pak k neparan broj, onda su svi $B_k=0$ osim $B_1=-\frac{1}{2}$. Stoga, na desnoj strani ostaje samo sabirak za $k=1$, pa je

$$B_n(-x)=(-1)^n B_n(x)-\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}. \tag{2.1.6}$$

Na taj način mogu se uvek izračunati vrednosti Bernoullievih polinoma za $x<0$, kada su poznate za $x>0$.

Iz jednakosti

$$B_n(1+x)=B_n(x)+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \tag{2.1.7}$$

zaključujemo da se mogu takođe izračunati vrednosti Bernoullievih polinoma u intervalu $(1, 2)$ ako su one poznate u intervalu $(0, 1)$; zatim mogu se iz vrednosti u intervalu $(1, 2)$ izračunati njegove vrednosti u intervalu $(2, 3)$, itd.

Na osnovu svega ovoga vidimo da je dovoljno ispitati Bernoullieve polinome u intervalu $(0, 1)$.

Ako u (2.1.7) stavimo $-x$ umesto x, nalazimo

$$B_n(1-x)=B_n(-x)+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1},$$

pa, s obzirom na (2.1.6) dolazimo do poznate Jacobieve funkcionalne jednačine

$$B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x),$$

iz koje za $n=2m$ i $n=2m-1$ sleduje jednačina (2.1.3) odnosno (2.1.4).

2.2. NULE BERNOULLIEVIH POLINOMA

Iz relacija, koje smo u prethodnom paragrafu dokazali

$$B_{2n-1}\left(\frac{1}{2}+z\right)=-B_{2n-1}\left(\frac{1}{2}-z\right)$$

$$B_{2n-1}(1)=B_{2n-1}(0)=0,$$

vidimo da polinom $B_{2n+1}(x)$ ima, za $n>1$, tri nule $x=0, \frac{1}{2}, 1$.

Pokazaćemo da su one jedine nule Bernoullievih polinoma neparnog stepena u intervalu $0\leqslant x\leqslant 1$.

Pretpostavićemo da je tačno suprotno, tj. da u intervalu $0\leqslant x\leqslant 1$ imamo najmanje četiri nula polinoma $B_{2n+1}(x)$. Kada bi ovo doista postojalo, prema Rolleovoj teoremi, polinom $DB_{2n+1}(x)$ imao bi najmanje tri nule u unutrašnjosti tog intervala, a $D^2B_{2n+1}(x)$ najmanje dve. Ali kako je

$$D^2 B_{2n+1}(x)=B_{2n-1}(x),$$

zaključujemo da kada bi polinom $B_{2n+1}(x)$ imao četiri nule u intervalu $0<x<1$, polinom $B_{2n-1}(x)$ takođe bi imao najmanje četiri nule u istom intervalu. Na isti način, iz relacije

$$D^2 B_{2n-1}(x)=B_{2n-3}(x),$$

zaključili bismo da $B_{2n-3}(x)$ mora imati najmanje četiri nule u intervalu $[0, 1]$, itd. . . . ; za $B_3(x)$ tvrdili bismo takođe da ima najmanje četiri nule, međutim, to je nemoguće, s obzirom da je $B_3(x)$ polinom trećeg stepena. Prema tome, naša pretpostavka nije tačna, iz čega sleduje da $B_{2n+1}(x)$ u intervalu $0\leqslant x\leqslant 1$ može imati samo tri nule, i to su $x=0, 1/2, 1$.

Pošto je

$$D\,B_{2n}(x)=B_{2n-1}(x),$$

a znajući da $B_{2n-1}(x)$ nema nula u intervalu $0<x<1/2$, izvodimo zaključak da $B_{2n}(x)$ ne može imati više od jedne nule u intervalu $0\leqslant x\leqslant 1/2$. Ali kako je

$$D\,B_{2n+1}(x)=B_{2n}(x),$$

a ranije smo videli da je

$$B_{2n+1}(0)=B_{2n+1}(1/2)=0,$$

tada i $B_{2n}(x)$ ima najmanje jednu nulu u intervalu $0<x<1/2$. S obzirom da smo pokazali da on ne može imati više od jedne nule, zaključujemo da ima samo jednu u intervalu $[0, 1/2]$. Kao posledica simetričnosti je činjenica da $B_{2n}(x)$ ima drugu nulu u intervalu $[1/2, 1]$.

Dakle, Bernoulliev polinom parnog stepena ima dve nule x_1 i x_2 u intervalu $[0, 1]$ i to $0<x_1<1/2$ i $1/2<x_2<1$.

2.3. EKSTREMUMI BERNOULLIEVIH POLINOMA

Za $n > 1$ videli smo da se polinom $B_{2n-1}(x)$ anulira za vrednosti $x = 0,\ 1/2,\ 1$. Međutim, kako je

$$D\,B_{2n}(x) = B_{2n-1}(x),$$

zaključujemo da $B_{2n}(x)$ ima ekstremum za $x = 0,\ 1/2,\ 1$.

Iz istih razloga zaključujemo, s obzirom na relaciju

$$D\,B_{2n+1}(x) = B_{2n}(x),$$

da za $n > 0$ Bernoulliev polinom neparnog indeksa $B_{2n+1}(x)$ ima dva ekstremuma: jedan u intervalu $0 < x < 1/2$, i drugi u intervalu $1/2 < x < 1$.

2.4. GRAFICI BERNOULLIEVIH POLINOMA

U 1.1. dobili smo prva četiri Bernoullieva polinoma

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

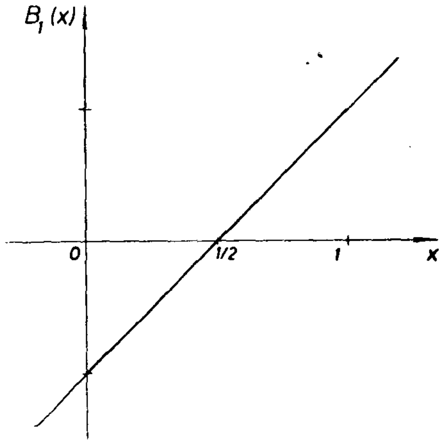
$$B_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$B_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x$$

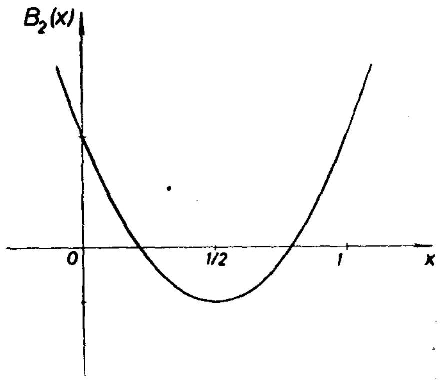
$$B_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}.$$

Grafici ovih polinoma dati su redom na sl. 1, 2, 3, 4.

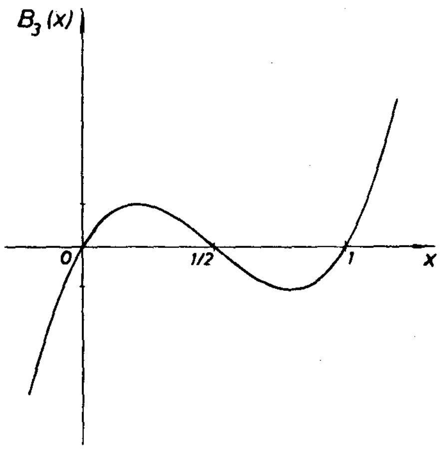
Na osnovu opštih razmatranja možemo zaključiti da kriva $y = B_n(x)$, gde je $n \geqslant 2$ ima tok shematski prikazan na sl. 5, 6, 7, 8, prema tome da li n podeljeno sa 4 daje ostatak 3, 2, 1, 0.



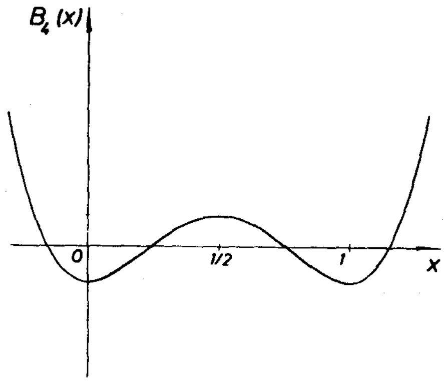
Sl. 1



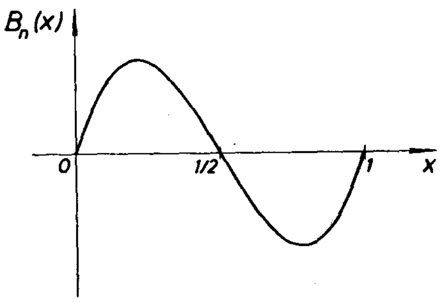
Sl. 2



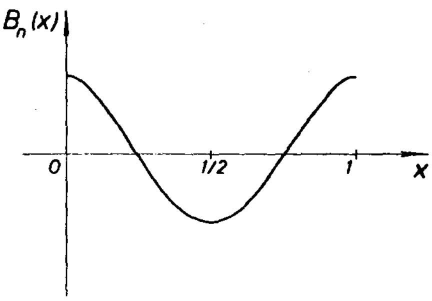
Sl. 3



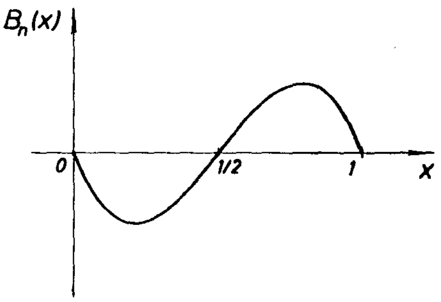
Sl. 4



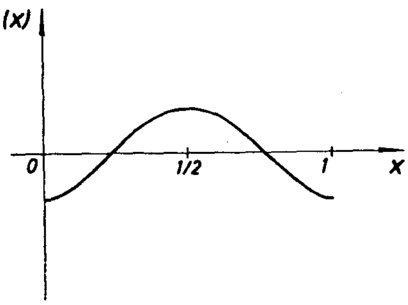
Sl. 5



Sl. 6



Sl. 7



Sl. 8

3. RELACIJE IZMEĐU BERNOULLIEVIH POLINOMA

3.1. OSNOVNA REKURZIVNA RELACIJA

Prema Taylorovom obrascu dobijamo

$$B_n(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k B_n(x)$$

ili s obzirom da je

$$D^k B_n(x) = B_{n-k}(x)$$

imamo

(3.1.1) $$B_n(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B_{n-k}(x).$$

Kako je

$$B_n(1+x) - B_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

relacija (3.1.1) postaje

(3.1.2) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} B_{n-k}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

tj.

$$B_{n-1}(x) + \frac{1}{2!} B_{n-2}(x) + \cdots + \frac{1}{n!} B_0(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Relacija (3.1.2) omogućava da se postupno izračunaju Bernoullievi polinomi $B_0(x), B_1(x), \ldots, B_n(x)$.

3.2. SIMBOLIČKE RELACIJE

Koristeći se simboličkim računom, mnoge relacije između Bernoullievih polinoma dobijaju se na vrlo jednostavan način.

Tako, na primer, prema Taylorovoj formuli, za polinom $f(x)$ važi

$$\begin{aligned} f(x+B+1) &- f(x+B) \\ &= f'(x) + [(B+1)^2 - B^2]\frac{f''(x)}{1\cdot 2} + [(B+1)^3 - B^3]\frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots \end{aligned}$$

ili prema simboličkoj formuli

$$(B+1)^n - B_n = 0,$$

kojom su definisani Bernoullievi brojevi, nalazimo

(3.2.1) $$f(x+B+1) - f(x+B) = f'(x).$$

Međutim, prema formuli

$$B_n(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} B_{n-k}(x),$$

dobijaju se dve simboličke relacije, tj.

$$B_n(x) = \frac{1}{n!}(x+B)^n,$$

$$B_n(x+h)=\frac{1}{n!}(x+B+h)^n.$$

Prema tome, možemo pisati

$$f(x+B+h)=f[x+(B+h)]=f[x+\bar{B}(h)],$$

gde je

$$\bar{B}_n(h)=n!\,B_n(h).$$

Primenjujući Taylorovu formulu, dobijamo

(3.2.2) $$f[x+B(h)]=\sum_{k=0}^{n} B_k(h)\,D^k f(x).$$

Relacija (3.2.2) je jedna od najvažnijih u primeni Bernoullievih polinoma u računu razlika. Iz nje se može dobiti niz rekurentnih relacija između Bernoullievih polinoma.

Tako, na primer, ako stavimo

$$f(x)=B_{m+1}(x),$$

dolazimo do

$$B_{m+1}[x+\bar{B}(h)]=\sum_{k=0}^{m+1} B_k(h)\,B_{m+1-k}(x).$$

Simbolički način pisanja relacije (3.2.1) u obliku

$$f[\bar{B}(x)+1]-f[\bar{B}(x)]=f'(x),$$

takođe omogućava da dobijemo mnoštvo rekurzivnih formula za Bernoullieve polinome. Tako, na primer, ako je

$$f(x)=\frac{x^n}{n!},$$

imamo vrlo važnu rekurzivnu formulu

$$[\bar{B}(x)+1]^n-[\bar{B}(x)]^n=n\,x^{n-1}.$$

3.3. RAABEOVA ILI MULTIPLIKACIONA TEOREMA BERNOULLIEVIH POLINOMA

Stav. Kada je $p\,(>0)$ ceo broj, uvek postoji relacija

(3.3.1) $$B_n(x)=p^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} B_n\left(\frac{x+k}{p}\right).$$

Dokaz ovog stava je jednostavan. Obeležimo li sa $F_n(x)$ članove desne strane jednačine (3.3.1), tada imamo

$$D\,F_n(x)=F_{n-1}(x).$$

S druge strane, nalazimo

$$F_n(x+1)-F_n(x)=p^{n-1}\left[B_n\left(\frac{x}{p}+1\right)-B_n\left(\frac{x}{p}\right)\right]=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Prema tome, na osnovu definicije (II, 1.1) zaključujemo da je

$$F_n(x) = B_n(x).$$

Ovim je dokazana Raabeova relacija [21].

Raabeova relacija često se sreće u literaturi pod nazivom *multiplikaciona teorema* Bernoullievih polinoma [4, 19], i piše se u obliku

$$B_n(p\,x) = p^{n-1} \sum_{h=0}^{p-1} B_n\left(x + \frac{k}{p}\right), \tag{3.3.2}$$

koji se dobija iz (3.3.1) zamenivši x sa $x\,p$. Iz poslednje relacije vidimo da se vrednosti Bernoullievih polinoma $B_n(p\,x)$ mogu izraziti poznavajući njihove vrednosti u p ekvidistantnih tačaka

$$x, x + \frac{1}{p}, \; x + \frac{2}{p}, \cdots, x + \frac{p-1}{p},$$

koje su dobijene deobom intervala $(x, x+1)$ na p jednakih delova. Relacija (3.3.2) dokazuje se i na sledeći način [4, 19]:

Diferencna jednačina

$$f\left(x + \frac{1}{p}\right) - f(x) = \frac{x^{n-1}}{p\,(n-1)!},$$

ima dva rešenja

$$p^{-n} B_n(p\,x) \quad \text{i} \quad \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} B_n\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

Prema tome, između ovih rešenja postoji veza

$$\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} B_n\left(x + \frac{k}{p}\right) = p^{-n} B_n(p\,x) + C,$$

tj.

$$\sum_{k=0}^{p-1} B_n\left(x + \frac{k}{p}\right) = p^{1-n} B_n(p\,x) + p\,C, \tag{3.3.3}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Integraleći relaciju (3.3.3) u intervalu $\left(x, \; x + \frac{1}{p}\right)$, dobija se

$$C = \int_x^{x+1} B_n(t)\,dt - p^{1-n} \int_x^{x+1/p} B_n(p\,t)\,dt = 0.$$

Stoga je doista

$$B_n(x\,p) = p^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} B_n\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

Za $x = 0$ iz (3.3.1) dobija se

$$\sum_{k=0}^{p-1} B_n\left(\frac{k}{p}\right) = \frac{1}{p^{n-1}} \frac{B_n}{n!}$$

ili

$$\sum_{k=1}^{p-1} B_n\left(\frac{k}{p}\right) = -\left(1 - \frac{1}{p^{n-1}}\right) \frac{B_n}{n!}. \tag{3.3.4}$$

Iz (3.3.4) i relacije simetričnosti (2.1.3) dobijaju se za $p=2, 3, 4, 6$, brojne vrednosti

(3.3.5)
$$B_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)\frac{B_n}{n!}$$
$$B_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)=B_{2n}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{2n-1}}-1\right)\frac{B_{2n}}{2n!}$$
$$B_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)=B_{2n}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2^{2n}}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}-1\right)\frac{B_{2n}}{2n!}$$
$$B_{2n}\left(\frac{1}{6}\right)=B_{2n}\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)\frac{B_{2n}}{2n!}.$$

S obzirom da su svi Bernoullievi brojevi neparnog indeksa jednaki nuli, iz prve jednačine (3.3.5) ponovo zaključujemo da za $n=2m+1$ važi

$$B_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

N. Nielsen [22] dokazuje u vezi sa Raabcovom teoremom sledeći važan stav:

Bernoulliev polinom $B_n(x)$ je jedinstveni polinom koji zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$F(x)=p^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1}F\left(\frac{x+k}{p}\right) \quad (p \text{ ceo pozitivan broj} >1). \tag{3.3.6}$$

Pošto smo već utvrdili da je niz funkcija $F(x)$ harmonijski, poslužićemo se sledećom teoremom iz teorije harmonijskih nizova.

Ako su $f_n(x)$ i $g_n(x)$ dva makakva harmonijska niza, tada je jednakost

$$g_n(x)=a_0 f_n(x)+a_1 f_{n-1}(x)+\cdots+a_n f_n(x),$$

ispunjena za makakvo n. Koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ su nezavisni od x.

Prema tome i za $F(x)$ možemo tvrditi da je

$$F(x)=a_0 B_n(x)+a_1 B_{n-1}(x)+\cdots+a_n B_0(x). \tag{3.3.7}$$

S obzirom na (3.3.1) i (3.3.6) imamo

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k p^k B_{n-k}(x),$$

a prema (3.3.7)

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k}(x).$$

Upoređivanjem ova dva izraza dobija se

$$a_k p^k=a_k \Rightarrow a_k=0 \quad (k\neq 0).$$

Iz svega ovoga sleduje

$$F(x) = k\, B_n(x) \quad (k \text{ proizvoljna konstanta}).$$

Doista, rešenje funkcionalne jednačine (3.3.6) može biti samo Bernoulliev polinom $B_n(x)$, odnosno $k\, B_n(x)$.

3.4. OSTALE RELACIJE IZMEĐU BERNOULLIEVIH POLINOMA

Polazeći od definicije 1.2 Bernoullievih polinoma, naime

(3.4.1)
$$\frac{t\, e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\, t^k,$$

ili, što je isto

$$D^k \left.\frac{t\, e^{xt}}{e^t - 1}\right|_{t=0} = \frac{B_k(x)}{k!},$$

može se takođe dobiti mnoštvo relacija između Bernoullievih polinoma [23] i [24].

Tako, na primer, kvadrirajući (3.4.1), imamo

$$\frac{e^{2xt}}{(e^t-1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{k-2} \sum_{j=0}^{k} B_j(x)\, B_{k-j}(x) \binom{k}{j}.$$

Polazeći od identiteta

$$D_t \frac{e^{(2x-1)t}}{e^t - 1} = \frac{e^{(2x-1)t}(2x-1)}{e^t-1} - \frac{e^{2xt}}{(e^t-1)^2},$$

a s obzirom na relaciju

(3.4.2)
$$\frac{e^{(2x-1)t}}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(2x-1)\, t^{k-1},$$

nalazimo

$$\frac{e^{(2x-1)t}(2x-1)}{e^t-1} - \frac{e^{2xt}}{(e^t-1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)\, B_k(2x-1) t^{k-2},$$

ili

(3.4.3)
$$\frac{e^{(2x-1)t}(2x-1)}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{k-2} \left[(k-1)\, B_k(2x-1) + \sum_{j=0}^{k} B_j(x)\, B_{k-j}(x) \binom{k}{j}\right].$$

Diferencirajući (3.4.2) po x, prema (1.1.4) dobijamo

(3.4.4)
$$\frac{e^{(2x-1)t}(2x-1)}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (2x-1)\, B_{k-1}(2x-1)\, t^{k-2}.$$

Izjednačavanjem (3.4.3) sa (3.4.4) dobijamo

$$\sum_{j=0}^{k} B_j(x)\, B_{k-j}(x) \binom{k}{j} = (2x-1)\, B_{k-1}(2x-1) - (k-1)\, B_k(2x-1).$$

Kako je

$$B_k(2x) - B_k(2x-1) = \frac{(2x-1)^{k-1}}{(k-1)!},$$

tj.

$$(2x-1)\, B_{k-1}(2x-1) = (2x-1)\, B_{k-1}(2x) - \frac{(2x-1)^k}{(k-2)!},$$

dolazimo do sledeće rekurzivne relacije između Bernoullievih polinoma

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{B_j(x)}{j!} \frac{B_{k-j}(x)}{(k-j)!} = 2B_1(x) \frac{B_{k-1}(2x)}{k!} - \frac{B_k(2x)}{k!}(k-1),$$

koja za $x = 0$ daje

$$(k+1)B_k + \sum_{j=2}^{k-2} \binom{k}{j} B_j B_{k-j} = 0.$$

Ovakav postupak omogućava najrazličitija kombinovanja i dobijanja niza rekurentnih relacija.

4. GENERALISANA BERNOULLIEVA DIFERENCNA JEDNAČINA [26]

4.1. GENERALISANA DIFERENCNA JEDNAČINA

Posmatrajmo diferencnu jednačinu

(4.1.1) $$f(x+1) - f(x) = \prod_{r=1}^{n-1} (a_r + x b_r),$$

gde su a_r i b_r makakve konstante, x i n $(n > 3)$ dva cela pozitivna broja.
Polinom $f(x)$ napišimo u obliku

(4.1.2) $$f(x) = A_0^n x^n + A_1^n x^{n-1} + A_2^n x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}^n x + A_n^n.$$

Problem određivanja nepoznatih koeficijenata A_i^n polinoma (4.1.2) ekvivalentan je (I, 4.1) iznalaženju zbira konačnog reda

(4.1.3) $$\sum_{m=1}^{x} \prod_{r=1}^{n-1} [a_r + (m-1) b_r],$$

koji je posmatrao D. S. Mitrinović [25].
Obeležićemo sa

(4.1.4) $$\prod_{r=1}^{n-1} (a_r + x b_r) = \sum_{q=0}^{n-1} H_{n-1}^q x^q$$

izraze koji se nalaze na desnoj strani relacije (4.1.1). Identitet (4.1.1) daje relaciju

$$\sum_{q=0}^{n} A_q^n (x+1)^{n-q} - \sum_{q=0}^{n} A_q^n x^{n-q} = \sum_{q=0}^{n-1} H_{n-1}^q x^q,$$

tj.

$$\sum_{q=0}^{n} A_q^n \left[\sum_{k=0}^{n-q} \binom{n-q}{k} x^{n-q-k} \right] - \sum_{q=0}^{n} A_q^n x^{n-k} = \sum_{q=0}^{n-1} H_{n-1}^q x^q,$$

ili

$$\sum_{q=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-q-1} \binom{n-k}{n-q-k} A_q^n x^q = \sum_{q=0}^{n-1} H_{n-1}^q x^q,$$

odakle dobijamo

(4.1.5) $$\sum_{k=0}^{n-q-1} \binom{n-k}{n-k-q} A_k^n = H_{n-1}^q.$$

Relacija (4.1.5) može se napisati u obliku sistema linearnih jednačina po A_i^n $(i=0, 1, 2, \ldots, n-1)$, koji glasi

(4.1.6)
$$\begin{aligned}
&\binom{n}{1} A_o^n = H_{n-1}^{n-1}\\
&\binom{n}{2} A_o^n + \binom{n-1}{1} A_1^n = H_{n-1}^{n-2}\\
&\binom{n}{3} A_0^n + \binom{n-1}{2} A_1^n + \binom{n-2}{1} A_2^n = H_{n-1}^{n-3}\\
&\vdots\\
&\binom{n}{k} A_0^n + \binom{n-1}{k-1} A_1^n + \binom{n-2}{k-2} A_2^n + \cdots + \binom{n-k+1}{1} A_{k-1}^n = H_{n-1}^{n-k}\\
&\vdots\\
&A_0^n + A_1^n + A_2^n + \cdots + A_{n-1}^n = H_{n-1}^0.
\end{aligned}$$

Iz (4.1.4) sleduje

$$\prod_{r=1}^{n} a_r = H_{n-1}^0;$$

s druge strane iz (4.1.2) izlazi

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k^n + A_n^n$$

pa je, prema poslednjoj relaciji iz sistema (4.1.6), $A_n^n = 0$.

Dakle, polinom $f(x)$ deljiv je sa x. Determinanta sistema (4.1.6) ima vrednost n! $(\neq 0)$, što znači, da posmatrani sistem ima jedinstveno rešenje.

Postupnim rešavanjem sistema (4.1.6) dobijamo

(4.1.7)
$$\begin{aligned}
A_0^n &= \frac{1}{n} H_{n-1}^{n-1}\\
A_1^n &= -\frac{1}{2} H_{n-1}^{n-1} + \frac{1}{n-1} H_{n-1}^{n-2}\\
A_2^n &= \frac{1}{12} H_{n-1}^{n-1}\binom{n-1}{1} - \frac{1}{2} H_{n-1}^{n-2} + \frac{1}{n-2} H_{n-1}^{n-3}\\
A_3^n &= \frac{1}{12} H_{n-1}^{n-2} + \frac{1}{2} H_{n-1}^{n-3} + \frac{1}{n-3} H_{n-1}^{n-4}\\
A_4^n &= -\frac{1}{120}\binom{n-1}{3} H_{n-1}^{n-1} + \frac{1}{12}\binom{n-3}{1} H_{n-1}^{n-3} - \frac{1}{2} H_{n-1}^{n-4} + \frac{1}{n-4} H_{n-1}^{n-5}\\
A_5^n &= -\frac{1}{120}\binom{n-2}{3} H_{n-1}^{n-2} + \frac{1}{12}\binom{n-4}{1} H_{n-1}^{n-4} - \frac{1}{2} H_{n-1}^{n-5} + \frac{1}{n-5} H_{n-1}^{n-6}.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Koeficijenti A_i^n $(i=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ su linearne kombinacije izraza H_{n-1}^k, te sistem (4.1.7) možemo napisati u obliku

$$
(4.1.8)\qquad
\begin{aligned}
A_0^n &= C_1 \binom{n-1}{-1} H_{n-1}^{n-1}\\
A_1^n &= C_2 \binom{n-1}{0} H_{n-1}^{n-1} + C_1 \binom{n-2}{-1} H_{n-1}^{n-2}\\
A_2^n &= C_3 \binom{n-1}{1} H_{n-1}^{n-1} + C_2 \binom{n-2}{0} H_{n-1}^{n-2} + C_1 \binom{n-3}{-1} H_{n-1}^{n-3}\\
&\ \vdots\\
A_k^n &= C_{k+1} \binom{n-1}{k-1} H_{n-1}^{n-1} + C_k \binom{n-2}{k-2} H_{n-1}^{n-2} + \cdots + C_1 \binom{n-k-1}{-1} H_{n-1}^{n-k-1}\\
&\ \vdots\\
A_{n-1}^n &= C_n \binom{n-1}{n-2} H_{n-1}^{n-1} + C_{n-1} \binom{n-2}{n-3} H_{n-1}^{n-2} + \cdots + C_1 \binom{0}{-1} H_{n-1}^{0},
\end{aligned}
$$

gde smo radi simetričnosti u pisanju upotrebili oznaku $\binom{s}{-1} = \frac{1}{s+1}$.

Prema tome, koeficijenat A_k^n izrazićemo sa

$$A_k^n = \sum_{j=0}^{k} C_{k+1-j} \binom{n-j-1}{k-j-1} H_{n-1}^{n-j-1},$$

te dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} C_{j+1} \binom{n-k-1}{j-1} H_{n-1}^{n-k-1}.$$

S obzirom na

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k^n = H_{n-1}^0$$

dobija se

$$(4.1.9)\qquad \sum_{j=0}^{n-k-1} C_{j+1} \binom{n-k-1}{j-1} = 0,$$

za svako $k \neq n-1$, dok je za $k = n-1$, $C_1 \binom{0}{-1} = 1$, dakle $C_1 = 1$.

Koeficijente C_{k+1} $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ određujemo iz sistema linearnih jednačina (4.1.9), koji je oblika

$$(4.1.10)\qquad \sum_{j=0}^{n-1} C_{j+1} \binom{n-1}{j-1} = 0.$$

Međutim, ako sistem (4.1.10) uporedimo sa sistemom

$$(4.1.11)\qquad \sum_{j=0}^{n-1} B_j \binom{n}{j} = 0,$$

kojim su definisani Bernoullievi brojevi, možemo zaključiti da su koeficijenti C_{j+1} vezani sa Bernoullievim brojevima na sledeći način:

(4.1.12) $$C_{j+1}=\frac{B_j}{j} \quad (j=1, 2, \ldots, n-1).$$

Doista, ako u (4.1.10) zamenimo izraz (4.1.12) dobijamo

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_j}{j}\binom{n-1}{j-1}+n=0$$

ili

$$\sum_{j=1}^{n-1} B_1\binom{n}{j}+1=0.$$

S obzirom da je $B_0=1$, nalazimo relaciju (4.1.11).

Prema tome, rešenje diferencne jednačine (4.1.1) je polinom

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1} A_k^n x^{n-k},$$

čiji su koeficijenti A_k^n $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ definisani izrazom

$$A_k^n=\sum_{j=0}^{k} \frac{B_{k-j}}{k-j}\binom{n-j-1}{k-j-1} H_{n-1}^{n-j-1},$$

pri čemu je

$$\frac{B_{k-j}}{k-j}=1 \quad (k=j).$$

Polinom $f(x)$ možemo napisati i na sledeći način

(4.1.13) $$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1} H_{n-1}^{n-k-1}\left\{\sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{B_j}{j}\binom{n-k-1}{j-1} x^{n-k-j}\right\}.$$

Posmatraćemo polinom u zagradi koji ćemo obeležiti sa

(4.1.14) $$g_{n-k}(x)=\sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{B_j}{j}\binom{n-k-1}{j-1} x^{n-k-j}.$$

Ako relaciju (4.1.14) pomnožimo sa $(n-k)$, dobijamo

(4.1.15) $$(n-k)\, g_{n-k}(x)=\sum_{r=0}^{n-k-1}\binom{n-k}{r} B_r x^{n-k-r}.$$

Uporedivši izraz (4.1.15) sa relacijom

$$B_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} B_r x^{n-r},$$

kojom su definisani Bernoullievi polinomi, nalazimo

(4.1.16) $$g_{n-k}(x)=(n-k-1)!\, B_{n-k}(x)-\frac{B_{n-k}}{n-k},$$

gde B_{n-k} označava $(n-k)$-ti Bernoulliev broj.

S obzirom da je

$$B_{n-k}(0)=\frac{B_{n-k}}{(n-k)!},$$

(4.1.16) postaje

(4.1.17) $$g_{n-k}(x)=(n-k-1)!\,[B_{n-k}(x)-B_{n-k}(0)].$$

Prema tome, polinom $f(x)$ iz (4.1.13) postaje

(4.1.18) $$f(x)=\sum_{k=1}^{n} H_{n-1}^{k-1}(k-1)!\,[B_k(x)-B_k(0)].$$

Može se dokazati da je polinom (4.1.18) rešenje diferencne jednačine (4.1.1). Doista je

$$f(x+1)-f(x)=\sum_{k=1}^{n} H_{n-1}^{k-1}(k-1)!\,[B_k(x+1)-B_k(x)],$$

ili, s obzirom na relaciju (1.1.1)

$$f(x+1)-f(x)=\sum_{k=1}^{n} H_{n-1}^{k-1}x^{k-1}.$$

4.2. SPECIJALNI SLUČAJEVI GENERALISANE BERNOULLIEVE DIFERENCNE JEDNAČINE

4.2.1. Kada je $a_r=0$ i $b_r=1$, $(r=1, 2, \ldots, n-1)$, diferencna jednačina (4.1.1) postaje

(4.2.1.1) $$f(x+1)-f(x)=x^{n-1}.$$

Polinomi H_{n-1}^{r} u tom slučaju glase

$$H_{n-1}^{q}=\begin{cases}0 & (q\neq n-1)\\ 1 & (q=n-1).\end{cases}$$

Rešenje jednačine (4.2.1.1), prema opštem obrascu (4.1.18), dato je izrazom

$$f(x)=(n-1)!\,[B_n(x)-B_n(0)].$$

S druge strane, rešenje jednačine (4.2.1.1) može se napisati pomoću konačnog zbira

$$f(x)=S_{n-1}(x-1)=1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\cdots+(x-1)^{n-1},$$

čija je vrednost, s obzirom na definiciju (II, 1.4)

$$S_{n-1}(x-1)=(n-1)!\,[B_n(x)-B_n(0)].$$

Prema tome generalisana diferencna jednačina obuhvata kao poseban slučaj diferencnu jednačinu kojom se definišu zbirovi potencija prirodnih brojeva.

4.2.2. Za slučaj kada je $a_r=-r$, $b_r=1$ $(r=1, 2, \ldots, n-1)$ diferencna jednačina (4.1.1) postaje

(4.2.2.1) $$f(x+1)-f(x)=\prod_{r=1}^{n-1}(x-r).$$

Polinomi H_{n-1}^r u ovom slučaju mogu se izračunati na sledeći način:

Relacijom

$$(4.2.2.2)\qquad \prod_{r=0}^{n-1}(x-r)=\sum_{r=1}^{n} S_n^r x^r,$$

kao što smo ranije videli definisani su Stirlingovi brojevi prve vrste. S obzirom da se relacija (4.2.2.2) može napisati u obliku

$$(4.2.2.3)\qquad \prod_{r=1}^{n-1}(x-r)=\sum_{r=0}^{n-1} S_n^{r+1} x^r$$

uporedivši (4.2.2.3) sa indentitetom

$$\prod_{r=1}^{n-1}(x-r)=\sum_{r=0}^{n-1} H_{n-1}^r x^r,$$

dobijamo vezu između Stirlingovih brojeva i koeficijenata H_{n-1}^r za slučaj (4.2.2.1), tj.

$$(4.2.2.4)\qquad H_{n-1}^r=S_n^{r+1}\qquad (r=1,2,\ldots,n-1).$$

Rešenje jednačine (4.2.2.1) je oblika

$$f(x)=\sum_{r=1}^{n} S_n^r (r-1)!\,[B_r(x)-B_r(0)].$$

4.2.3. Neka je

$$(4.2.3.1)\qquad a_r=-(a+br),\quad b_r=1\quad (r=1,2,\ldots,n-1).$$

Diferencna jednačina (4.1.1) u ovom slučaju postaje

$$(4.2.3.2)\qquad f(x+1)-f(x)=\prod_{r=1}^{n-1}[x-(a+br)],$$

a koeficijenti H_{n-1}^r definišu se relacijom

$$(4.2.3.3)\qquad \prod_{r=1}^{n-1}[x-(a+br)]=\sum_{r=0}^{n-1} H_{n-1}^r x^r.$$

D. S. Mitrinović [27], posmatrao je brojeve $R_n^r(a,b)$ definisane jednakošću

$$(4.2.3.4)\qquad \prod_{r=0}^{n-1}[x-(a+br)]=\sum_{r=0}^{n} R_n^r(a,b)\,x^r.$$

Ako (4.2.3.3) napišemo u obliku

$$\prod_{r=0}^{n-1}[x-(a+br)]=\sum_{r=0}^{n-1} H_{n-1}^r x^{r+1}-\sum_{r=0}^{n-1} aH_{n-1}^r x^r,$$

dobijamo vezu između koeficijenata $R_n^r(a,b)$ i H_{n-1}^r u obliku

$$(4.2.3.5) \qquad R_n^r(a,b)=\begin{cases} H_{n-1}^{r-1}-a\,H_{n-1}^r & (r=1,\,2,\,\ldots,n-1)\\ H_{n-1}^{n-1} & (r=n),\end{cases}$$

s obzirom da je $H_{n-1}^n=0$.

Za brojeve $R_n^r(a,b)$ važi relacija [28, 2]

$$R_n^r(a,b)=\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\,a^k\,b^{n-r-k}\binom{r+k}{k}S_n^{r+k},$$

gde su S_n^r Stirlingovi brojevi prve vrste.

S obzirom na (4.2.3.5) koeficijenti H_{n-1}^r takođe se mogu rekurzivno izraziti pomoću Stirlingovih brojeva prve vrste, tj.

$$(4.2.3.6) \qquad H_{n-1}^{r-1}-a\,H_{n-1}^r=\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\,a^k\,b^{n-r-k}\binom{r+k}{k}S_n^{r+k}.$$

Brojevi $R_n^r(a,b)$, za specijalne vrednosti $b=1$, $a=p$ (p prirodan broj) izračunate su [28] za $p=2\,(1)\,11$. Koristeći se tablicom njihovih vrednosti, u mogućnosti smo da formiramo niz partikularnih rešenja diferencne jednačine

$$f(x+1)-f(x)=\prod_{r=1}^{n-1}(x-p-r).$$

Koeficijentima H_{n-1}^r daćemo i drugi oblik ako identitet

$$\prod_{r=1}^{n-1}[x-(a+b\,r)]=\sum_{r=0}^{n-1}S_n^{r+1}\,b^{n-r-1}\,(x-a)^r,$$

koji se postupno dobija posmatrajući izraz

$$\prod_{r=1}^{n-1}(x-r)=\sum_{r=0}^{n-1}S_n^{r+1}\,x^r,$$

uporedimo sa identitetom (4.2.3.3). Tako dobijamo

$$\sum_{r=0}^{n-1}H_{n-1}^r\,x^r=\sum_{r=0}^{n-1}S_n^{r+1}\,b^{n-r-1}\,(x-a)^r,$$

ili

$$(4.2.3.7) \qquad H_{n-1}^r=\sum_{k=1}^{n-r}(-1)^{k-1}\,S_n^{k+r}\,b^{n-r-k}\,a^{k-1}\binom{r+k-1}{k-1},$$

čime izražavamo koeficijente H_{n-1}^r direktno pomoću Stirlingovih brojeva prve vrste.

Za $a=0$, $b=1$ iz relacije (4.2.3.6) dobijamo

$$H_{n-1}^r=S_n^{r+1},$$

što je u saglasnosti sa (4.2.2.4).

4.2.4. Posmatraćemo sada proizvod

$$(1+a_1 x)(1+a_2 x)(1+a_3 x)\cdots(1+a_n x)=T_n^0+T_n^1 x+T_n^2 x^2+\cdots+T_n^n x^n,$$

gde su $a_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ proizvoljni realni brojevi.

Koeficijenti T_n^k vezani su rekurentnom relacijom

$$T_n^k=T_{n-1}^k+a_n T_{n-1}^{k-1} \tag{4.2.4.1}$$

pomoću koje izračunavamo redom koeficijente T_n^k. Na ovaj način dobijamo

$$T_n^n=T_{n-1}^n+a_n T_{n-1}^{n-1},$$

i kako je $T_{n-1}^n=0$, imamo

$$T_n^n=a_n a_{n-1} a_{n-2}\ldots a_1.$$

Sa oznakom

$$\prod a_n=a_n a_{n-1} a_{n-2}\ldots a_1, \tag{4.2.4.2}$$

imamo

$$T_n^n=\prod a_n. \tag{4.2.4.3}$$

Iz (4.2.4.1) dobijamo dalje

$$T_n^{n-1}=\prod a_{n-1}+a_n\prod a_{n-2}+a_n a_{n-1}\prod a_{n-3}+\cdots+a_n a_{n-1}\ldots a_2,$$

što se može napisati u obliku

$$T_n^{n-1}=\prod a_n\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{1}{a_1}\right).$$

Ako izraz u zagradi obeležimo sa

$$E a_{n+1}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}, \tag{4.2.4.4}$$

imamo

$$T_n^{n-1}=\prod a_n E a_{n+1}.$$

Na sličan način dalje nalazimo

$$T_n^{n-2}=\prod a_{n-1} E a_n+a_n\prod a_{n-2} E a_{n-1}+\cdots+a_n a_{n-1}\ldots a_3,$$

tj.

$$T_n^{n-2}=\prod a_n\left(\frac{E a_n}{a_n}+\frac{E a_{n-1}}{a_{n-1}}+\frac{E a_{n-2}}{a_{n-2}}+\cdots+\frac{E a_2}{a_2}\right).$$

Izraz u zagradi, analogno oznaci (4.2.4.3), obeležićemo sa

$$E^2 a_{n+1}=\frac{E a_n}{a_n}+\frac{E a_{n-1}}{a_{n-1}}+\frac{E a_{n-2}}{a_{n-2}}+\cdots+\frac{E a_2}{a_2},$$

te je

$$T_n^{n-2}=\prod a_n E^2 a_{n+1}.$$

Na sličan način možemo pokazati da je

$$T_n^{n-3}=\prod a_n\left(\frac{E^2 a_n}{a_n}+\frac{E^2 a_{n-1}}{a_{n-1}}+\frac{E^2 a_{n-2}}{a_{n-2}}+\cdots+\frac{E^2 a_3}{a_3}\right),$$

i uopšte

(4.2.4.5) $$T_n^{n-r} = \prod a_n E^r a_{n+1},$$

gde je

(4.2.4.6) $$E^r a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{E^{r-1} a_{n-i}}{a_{n-i}},$$

pri čemu je

$$E^r a_k = 0 \quad \text{za } k \leqslant r.$$

Pretpostavimo sada da brojevi a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ obrazuju aritimetičku progresiju, tj. neka je

(4.2.4.7) $$a_i = a_1 + (i-1)\, d,$$

pa posmatrajmo proizvod

$$(1 + a_1 x)(1 + \overline{a_1 + d}\, x)(1 + \overline{a_1 + 2d}\, x) \cdots [1 + (a + \overline{n-2}\, d)\, x]$$
$$= T^0_{n-1} + T^1_{n-1} x + T^2_{n-1} x^2 + \cdots + T^{n-1}_{n-1} x^{n-1},$$

ili

$$(x + a_1)(x + a_1 + d)(x + a_1 + 2d) \cdots (x + a_1 + \overline{n-2}\, d)$$
$$= T^0_{n-1} x^{n-1} + T^1_{n-1} x^{n-2} + T^2_{n-2} x^{n-3} + \cdots + T^{n-1}_{n-1}.$$

Koeficijenti H^r_{n-1} iz jednakosti

(4.2.4.8) $$\prod_{r=1}^{n-1} [x - (a + b r)] = \sum_{r=0}^{n-1} H^r_{n-1} x^r,$$

za vrednosti $a_1 = -(a + b r)$, $d = -b$, vezani su sa koeficijentima T^r_{n-1} sledećom relacijom

(4.2.4.9) $$H^r_{n-1} = T^{n-r-1}_{n-1} \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Dokazaćemo da se za koeficijente H^r_{n-1} može dobiti jedan eksplicitan oblik različit od izraza (4.2.3.6), odnosno (4.2.3.7).

U tu svrhu posmatrajmo funkciju $F_r(x)$ definisanu na sledeći način

$$F_r(x) = \frac{D^r \Gamma(x)}{\Gamma(x)} \quad (\Gamma(x) \text{ gama-funkcija}).$$

Kako je $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

imamo

$$D^r \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^r dt$$
$$= -e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^r \Big|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} \{(x+1) t^{x-2} (\ln t)^r + r (\ln t)^{r-1} t^{x-2}\}\, dt,$$

tj.

$$D^r\,\Gamma(x)=(x-1)\,D^r\,\Gamma(x-1)+r\,D^{r-1}\,\Gamma(x-1),$$

ili

(4.2.5.0)
$$F_r(x)=F_r(x-1)+\frac{r}{x-1}\,F_{r-1}(x-1).$$

Postupno, iz relacije (4.2.5.0) dobijamo

(4.2.5.1)
$$F_r(x)=F_r(x-n)+r\sum_{k=0}^{n-1}\frac{F_{r-1}(x+k-n)}{x+k-n}\qquad (n \text{ ceo broj}).$$

Za slučaj (4.2.4.7) obrasci (4.2.4.2), (4.2.4.5) i (4.2.4.6) uprošćavaju se te imamo

$$\prod a_n=\frac{d^n\,\Gamma\left(\frac{a_1}{d}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1}{d}\right)}.$$

Izraz $E^r a_{n+1}$ obeležićemo sa $\frac{1}{d^r}E^r\left(\frac{a_1}{d}+n\right)$, te s obzirom na (4.2.4.6) dobijamo

$$E^r\left(\frac{a_1}{d}+n\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{E^{r-1}\left(\frac{a_1}{d}+n-i-1\right)}{\frac{a_1}{d}+n-i-1}$$

tj.

(4.2.5.2)
$$E^r\left(\frac{a_1}{d}+n\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{E^{r-1}\left(\frac{a_1}{d}+k\right)}{\frac{a_1}{d}+k}.$$

Izraz (4.2.5.1), posle smene $x=\frac{a_1}{d}+n$, postaje

(4.2.5.3)
$$F_r\left(\frac{a_1}{d}+n\right)=F_r\left(\frac{a_1}{d}\right)+r\sum_{k=0}^{n-1}\frac{F_{r-1}\left(\frac{a_1}{d}+k\right)}{\frac{a_1}{d}+k}.$$

Kako je $F_r\left(\frac{a_1}{d}\right)=0$, funkcije $E^r(x)$ i $F_r(x)$ vezane su relacijom

$$E^r\left(\frac{a_1}{d}+n\right)=\frac{1}{r!}\,F_r\left(\frac{a_1}{d}+n\right),$$

tako da (4.2.4.5) postaje

$$T_n^{n-r} = \frac{d^{n-r}\,\Gamma\left(\frac{a_1}{d}+n\right) F_r\left(\frac{a_1}{d}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1}{d}\right) r!}, \tag{4.2.5.4}$$

i za slučaj (4.2.4.9), tj. kada je $a_1 = -(a+b)$, $d = -b$, imamo

$$H_{n-1}^r = T_{n-1}^{n-r-1} = \frac{(-1)^{n-r-1}\, b^{n-r-1}\,\Gamma\left(\frac{a}{b}+n\right) F_r\left(\frac{a}{b}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right) r!} \tag{4.2.5.5}$$

ili

$$H_{n-1}^r = \frac{(-1)^{n-r-1}\, b^{n-r-1}\, D^r\,\Gamma\left(\frac{a}{b}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right) r!}. \tag{4.2.5.6}$$

S obzirom na relaciju (4.2.5.6) rešenje jednačine

$$f(x+1)-f(x) = \prod_{r=1}^{n-1} [x-(a+b\,r)]$$

može se napisati u obliku

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\, b^{n-k+1}\, D^{k-1}\,\Gamma\left(\frac{a}{b}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right)} [B_k(x)-B_k(0)]. \tag{4.2.5.7}$$

Za $a=0$ i $b=1$ nalazimo

$$H_{n-1}^r = \frac{(-1)^{n-r-1}}{r!} D^r\,\Gamma(n), \tag{4.2.5.8}$$

što se još može napisati u obliku

$$H_{n-1}^r = \frac{(-1)^{n-r-1}}{r!} [D^r (x)_{n-1}]_{x=n-1}. \tag{4.2.5.9}$$

Može se dokazati da je relacija (4.2.5.9) istovetna sa

$$S_n^{r+1} = \frac{1}{(r+1)!} [D^{r+1} (x)_n]_{x=0}, \tag{4.2.6.0}$$

kojom se definišu Stirlingovi brojevi prve vrste, tj.

$$H_{n-1}^r = S_n^{r+1},$$

što je u saglasnosti sa (4.2.2.5) iz prethodnog paragrafa.

Doista, pođimo od

$$f(x)=(x)_n=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)=\sum_{m=1}^{n} S_n^m x^m \tag{4.2.6.1}$$

i napišimo Taylorov razvoj za polinom $f(x)$

$$f(x+n)=f(n)+x\,Df(n)+\frac{x^2}{2!}D^2f(n)+\cdots+\frac{x^n}{n!}D^nf(n). \tag{4.2.6.2}$$

Ako x zamenimo sa $-x$ i stavimo

$$f(-x+n)=(-x+n)_n=(-1)^n(x-1)_n,$$

prema relaciji (4.2.6.2) dobijamo

$$(-1)^n(x-1)_n=(x)_n-x\,D(x)_n\Big|_{x=n}+\frac{x^2}{2!}D^2(x)_n\Big|_{x=n}+\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}D^n(x)\Big|_{x=n},$$

ili

$$(-1)^n(x)_{n+1}=x(x)_n-x^2D(x)_n\Big|_{x=n}+\frac{x^3}{2!}D^2(x)_n\Big|_{x=n}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}D^n(x)_n\Big|_{x=n}. \tag{4.2.6.3}$$

Uporedivši izraz (4.2.6.1) sa (4.2.6.3) dobijamo

$$S_{n+1}^r=(-1)^{n+r-1}\frac{[D^{r-1}(x)_n]_{x=n}}{(r-1)!},$$

odnosno

$$S_n^{r+1}=(-1)^{n+r-1}\frac{[D^r(x)_{n-1}]_{x=n-1}}{r!},$$

što je u saglasnosti sa (4.2.5.9).

5. BERNOULLIEVI REDOVI

5.1. RAZVIJANJE PROIZVOLJNOG POLINOMA U RED BERNOULLIEVIH POLINOMA

Poznato je da ako su

$$B_0(x),\ B_1(x),\ \ldots,\ B_n(x),$$

polinomi stepena $0, 1, 2, \ldots, n$, uvek je moguće, na jedan jedini način, razviti makoji polinom $f(x)$ stepena n u red

$$f(x)=\sum_{k=}^{n} C_k B_k(x), \tag{5.1.1}$$

gde su C_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ konstante koje treba odrediti.

Ako su $B_k(x)$ Bernoullievi polinomi, koeficijenti C_k određuju se na sledeći način.

Integraleći (5.1.1) u intervalu (0,1), svi članovi na desnoj strani otpašće, s obzirom da je

$$B_n(1)-B_n(0)=0\,,$$

osim C_0 jer je $B_0(x)=1$. Stoga je $C_0=\int_0^1 f(x)\,dx$.

S obzirom na relaciju

$$D^m B_n(x)=B_{n-m}(x),$$

imamo

$$D^m f(x)=C_m+C_{m+1}B_1(x)+C_{m+2}B_2(x)+\cdots+C_n B_{n-m}(x).$$

Integraleći ovaj izraz u intervalu (0,1), nalazimo

$$C_m=D^{m-1}f(1)-D^{m-1}f(0)=\Delta\, D^{m-1}f(0).$$

Prema tome, ako je poznat određeni integral polinoma $f(x)$ u intervalu (0,1) i vrednosti njegovih izvoda za $x=0$ i $x=1$, tada je red (5.1.1) određen.

5.2. RAABEOVA RELACIJA

Primenićemo prethodni stav na polinom

$$f(x)=p^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} B_n\left(\frac{x+k}{p}\right)\quad (n>1).$$

Da bismo odredili C_0, stavimo $x=pz$, tako da je

$$C_0=\int_0^1 f(x)\,dx=p^n\sum_{k=0}^{p-1}\int_0^{1/p} B_n\left(z+\frac{k}{p}\right)dz,$$

ili

$$C_0=p^n[B_{n+1}(1)-B_{n+1}(0)]=0.$$

Kako je

$$C_m=\Delta\, D^{m-1}f(0),$$

dobija se

$$C_m=\left[\Delta\, p^{n-m}\sum_{k=0}^{p-1} B_{n-m+1}\left(\frac{x+k}{p}\right)\right]_{x=0}$$

$$=p^{n-m}\sum_{k=0}^{p-1}\left[B_{n-m+1}\left(\frac{1+k}{p}\right)-B_{n-m+1}\left(\frac{k}{p}\right)\right],$$

odakle sleduje

$$C_m=p^{n-m}[B_{n-m+1}(1)-B_{n-m+1}(0)].$$

Ako je $m \neq n$, tada je $C_m = 0$, a za $m = n$ je

$$C_n = B_1(1) - B(0) = 1.$$

Na taj način dobijamo

$$f(x) = B_n(x).$$

Stavivši zatim, $x = pz$, dolazimo do Raabeove relacije (II, 3.3)

$$B_n(pz) = p^{n-1} \sum_{k=0}^{p} B_n\left(z + \frac{k}{p}\right).$$

5.3. RAZVIJANJE STIRLINGOVIH POLINOMA U RED BERNOULLIEVIH POLINOMA

Stavimo

$$f(x) = \prod_{r=0}^{n-1} (x - r).$$

S obzirom, na relaciju

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} S_n^r x^r,$$

gde su S_n^r $(n > 0)$ Stirlingovi brojevi prve vrste, dobijamo

$$C_0 = \int_0^1 \sum_{r=0}^{n} S_n^r x^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r+1} S_n^r.$$

Kako je

$$D^{m-1} f(x) = \sum_{r=m-1}^{n} (r)_{m-1} S_n^r x^{r-m},$$

nalazimo

$$C_m = \Delta D^{m-1} f(0) = \sum_{r=m}^{n} (r)_{m-1} S_n^r,$$

ili prema (5.1.1)

$$\sum_{r=0}^{n} S_n^r x^r = \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=k}^{n} B_k(x) (r)_{k-1} S_n^r. \tag{5.3.1}$$

Relacija (5.3.1) može se napisati u obliku

$$\sum_{r=0}^{n} S_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k \sum_{s=0}^{n-k} \binom{k+s}{s} B_s \sum_{r=k+s}^{k} \binom{r+1}{k+s} S_n^r \frac{1}{r+1},$$

tako da je

$$S_n^k = \sum_{s=0}^{n-k} \binom{k+s}{s} B_s \sum_{r=k+s}^{n} \binom{r+1}{k+s} S_n^r \frac{1}{r+1},$$

ili

$$S_n^k=\sum_{s=0}^{n-k}\binom{k+s}{s}\frac{B_s}{k+s}\left\{\sum_{r=k+s-1}^{n}\binom{r}{k+s-1}S_n^r-S_n^{k+s-1}\right\}.$$

S obzirom da je [6,185]

$$\sum_{r=k+s-1}^{n}\binom{r}{k+s-1}S_n^r=S_{n-1}^{k+s-1}+S_{n-1}^{k+s-2},$$

$$S_n^{k+s-1}-S_{n-1}^{k+s-2}=-(n-1)\,S_{n-1}^{k+s-1}$$

dobijamo rekurentnu relaciju između Bernoullievih i Stirlingovih brojeva prve vrste

$$S_n^k=\frac{n}{k}\sum_{s=0}^{n-k}\binom{k+s-1}{s}B_s\,S_{n-1}^{k+s-1}.$$

Interesantno je primetiti analogiju između ove relacije i poznate rekurzivne formule [6,186]

$$S_n^k=\sum_{s=0}^{n-k}(-1)^s\binom{k+s-1}{s}S_{n-1}^{k+s-1}.$$

5.4. RAZVIJANJE BERNOULLIEVIH POLINOMA U FOURIEROVE REDOVE

Bernoullieve polinome $B_n(x)$ razvićemo u Fourierov red. Na osnovu poznatih obrazaca

(5.4.1) $$y=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos 2k\pi x+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin 2k\pi x,$$

(5.4.2) $$a_k=2\int_0^1 y\cos 2k\pi x\,dx,\qquad b_k=2\int_0^1 y\sin 2k\pi x\,dx,$$

dobijamo sledeće rezultate

$$a_0=2\int_0^1 B_{2n}(x)\,dx=B_{2n+1}(1)-B_{2n+1}(0)=0$$

$$a_k=2\left[\frac{\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^2}B_{2n-1}(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^2}B_{2n-2}(x)\,dx,$$

ili, posle $2p$ parcijalnih integracija,

$$a_k=2(-1)^p\int_0^1\frac{\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^{2p}}B_{2n-2p}(x)\,dx,$$

odakle je, za $p=n-1$,

$$a_k=\frac{2(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}.$$

Određivanje koeficijenata b_k može se izvršiti istim postupkom, ali je mnogo jednostavnije pokazati da je $b_k=0$, koristeći se poznatom relacijom

$$B_{2n}(1-x)=B_{2n}(x). \tag{5.4.3}$$

Kako je

$$\cos 2k\pi(1-x)=\cos 2k\pi x,$$

$$\sin 2k\pi(1-x)=-\sin 2k\pi x,$$

da bi relacija (5.4.3) postojala, koeficijenti pred $\sin 2k\pi x$ u izrazu (5.4.1) moraju biti jednaki nuli, tj. $b_k=0$.

Prema tome, Bernoulliev polinom $B_{2n}(x)$ razvijen u Fourierov red glasi

$$B_{2n}(x)=2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^{2n}}. \tag{5.4.4}$$

Da bismo dobili izraz za $B_{2n-1}(x)$, diferenciraćemo (5.4.4), te dobijamo

$$B_{2n-1}(x)=2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{(2k\pi)^{2n-1}}.$$

5.5. PRIMENA TRIGONOMETRIJSKIH REDOVA

5.5.1. Ako u (5.4.4) stavimo $x=0$, dobijamo

$$B_{2n}(0)=\sum a_k=\frac{2(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2k}},$$

tj.

$$B_{2n}=\frac{2(-1)^{n-1}(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}. \tag{5.5.1}$$

Iz relacije (5.5.1) izvodimo važan zaključak, koji ćemo u teoriji Bernoullievih brojeva još jednom potvrditi, naime, da brojevi B_{2n}, koji su različiti od nule, naizmenično menjaju znak.

Pomoću (5.5.1) mogu se izračunati zbirovi recipročnih potencijskih redova, tj.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}=\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}\left|B_{2n}\right|.$$

5.5.2. Ako u (5.4.4) stavimo $x=\frac{1}{2}$, dobijamo

$$B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k=\frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{2n}}. \tag{5.5.2}$$

Pošto smo u (II, 4.3) odredili

$$B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2^{2n-1}}-1\right)\frac{B_{2n}}{(2n)!},$$

posle smene u (5.5.2) nalazimo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{2n}}=\frac{(2^{2n-1}-1)\,\pi^{2n}}{(2n)!}\,|B_{2n}|\,.$$

Tako smo u mogućnosti da odredimo zbirove sledećih naizmeničnih redova

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12};\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^4}=\frac{7\pi^4}{720},\ \ldots .$$

6. EULEROVI POLINOMI I BROJEVI

6.1. DEFINICIJA EULEROVIH POLINOMA I BROJEVA

U neposrednoj vezi sa Bernoullievim polinomima stoje Eulerovi polinomi, koji se u račun razlika uvode na sledeći način.

Eulerov polinom $E_n(x)$ stepena n je polinom koji zadovoljava diferencnu jednačinu

(6.1.1) $$E_n(x+1)+E_n(x)=2\frac{x^n}{n!},$$

tj.

(6.1.2) $$M\,E_n(x)=\frac{x^n}{n!}.$$

Prema (6.1.2) nalazi se

$$D\,M\,E_n(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

tj.

$$D\,M\,E_n(x)=M\,E_{n-1}(x)\,.$$

Ako izvršimo inverznu operaciju M^{-1}, dobijamo

(6.1.3) $$D\,E_n(x)=E_{n-1}(x).$$

Eulerov polinom možemo napisati u obliku

(6.1.4) $$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}e_k\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\,.$$

Tada, na osnovu (6.1.3) zaključujemo i ovde, slično kao i kod Bernoullievih polinoma, da su koeficijenti e_i nezavisni od stepena polinoma $E_n(x)$. Da bismo odredili ove koeficijente, poći ćemo od relacije (6.1.1), odnosno (6.1.2), prema kojoj je $ME_0(x)=1$, pa je stoga $E_0(x)=1$ i $e_0=1$.

Ako je $n>0$, tada dobijamo, s obzirom na (6.1.1)

$$M\,E_n(0)=0.$$

Izvršićemo, zatim, operaciju M na obema stranama relacije (6.1.4) imajući pri tome u vidu, da je

$$[M\,x^i]_{x=0}=\frac{1}{2}\,.$$

Tako, za $x=0$, dobijamo

(6.1.5) $$e_n + \sum_{i=0}^{n} \frac{e_i}{(n-i)!} = 0.$$

Polazeći zatim od $e_0 = 1$, možemo postupno odrediti sve koeficijente e_i. Na primer, za $n=1, 2, 3$, imamo

$$e_0 + 2e_1 = 0 \qquad \Rightarrow e_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{e_0}{2!} + \frac{e_1}{1!} + 2e_2 = 0 \qquad \Rightarrow e_2 = 0$$

$$\frac{e_0}{3!} + \frac{e_1}{2!} + \frac{e_2}{1!} + 2e_3 = 0 \qquad \Rightarrow e_3 = \frac{1}{24}$$

$$\vdots$$

Odredivši koeficijente e_i, dobijamo Eulerove polinome

$$E_0(x) = 1$$

$$E_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$E_2(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x}{2}$$

$$E_3(x) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{1}{24}$$

$$E_4(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^3}{2.3!} + \frac{x}{24},$$

$$\vdots$$

Mesto koeficijenata e_i mogu se posmatrati brojevi ε_i, koji su sa ovim povezani relacijom

$$n!\, e_n = \varepsilon_n .$$

U tom slučaju izraz (6.1.5) postaje

$$(1+\varepsilon)^a + \varepsilon_n = 0,$$

u kome posle stepenovanja treba ε^k zameniti sa ε_k.

Međutim, mnogo se češće upotrebljavaju brojevi

(6.1.6) $$T_n = 2^n\, n!\, e_n,$$

koji su, prema tome, definisani simbolički sa

$$T(2+)^n + T_n = 0.$$

To su tzv. *tangentni brojevi* ili *tangentni koeficijenti*, koji se javljaju u razvoju funkcije th x, odnosno tg z (z kompleksan broj) u potencijalni red. Tako je

(6.1.7) $$\operatorname{th} x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} T_{2m+1} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

s obzirom na to da su svi $T_{2m} = 0$.

Na osnovu (6.1.6) Eulerovi polinomi mogu se izraziti simboličkom relacijom

(6.1.8) $$E_n(x) = \frac{(2x+T)^n}{2^n n!}.$$

Eulerovi brojevi E_n definišu se sa

$$E_n = 2^n n! \, E_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

Za njih se dokazuje da su celi brojevi Brojevi E_{2n} menjaju naizmenično znak, dok su brojevi $E_{2n+1} = 0$. Oni se često nazivaju i *sekantni brojevi*, s obzirom da se javljaju u razvoju funkcije sech x, odnosno sec z (z kompleksan broj) u potencijalni red. Tako je

$$\operatorname{sech} x = \sum_{m=0}^{\infty} |E_{2m}| \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Veza između Eulerovih i tangentnih brojeva dobija se stavljajući $x = \frac{1}{2}$ u (6.1.7). Tako se nalazi

$$E_n = (1+T)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T_i.$$

6.2. RAZVIJANJE EULEROVIH POLINOMA U RED BERNOULLIEVIH POLINOMA

Prema obrascima iz (5.1) vidimo da je

$$C_0 = \int_0^1 E_n(x)\,dx = -2\,e_{n+1},$$

zatim

$$C_1 = [\Delta E_n(x)]_{x=0} = -2 e_n,$$

$$C_m = [\Delta D^{m-1} E_n(x)]_{x=0} = E_{n-m+1}(1) - E_{n-m+1}(0),$$

$$C_m = -2 e_{n-m+1}.$$

Prema tome Eulerov polinom razvijen u red Bernoullievih polinoma biće

$$E_n(x) = -2 \sum_{m=0}^{n} e_{n-m+1} B_m(x).$$

To je istovremeno i veza između Eulerovih i Bernoullievih polinoma. Polazeći od relacije

$$\Delta = 2(M-1),$$

imamo

$$\Delta E_n(x) = 2\left[\frac{x^n}{n!} - E_n(x)\right].$$

Kako je

$$\Delta^{-1}\frac{x^n}{n!} = B_{n+1}(x) + k,$$

dobija se

$$\Delta^{-1} E_n(x) = B_{n+1}(x) - \frac{1}{2} E_n(x) + k.$$

Vidimo da se neodređeni zbir Eulerovih polinoma izračunava pomoću Bernoullievih polinoma.

6.3. GENERALISANA EULEROVA DIFERENCNA JEDNAČINA

Posmatrajmo diferencnu jednačinu

$$f(x+1) + f(x) = \prod_{r=1}^{n} (a_r + x b_r), \tag{6.3.1}$$

gde su a_r i b_r makakve konstante, x i n ($\geqslant 2$) dva prirodna broja.

Polinom $f(x)$ stepena n napišimo u obliku

$$f(x) = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} + C_2^n x^{n-2} + \cdots + C_{n-1}^n x + C_n^n. \tag{6.3.2}$$

Problem određivanja nepoznatih koeficijenata polinoma (6.3.2) ekvivalentan je (I, 4.1) iznalaženju zbira naizmeničnog reda

$$f(x) = \sum_{k=1}^{x} (-1)^{x-k} \prod_{r=1}^{n} [a_r + (k-1) b_r]. \tag{6.3.3}$$

Obeležićemo kao u (II, 4)

$$\prod_{r=1}^{n} (a_r + x b_r) = \sum_{q=0}^{n} H_n^q x^q, \tag{6.3.4}$$

izraze koji se nalaze na desnoj strani relacije (6.3.1).

Indentitet (6.3.1) daje

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^n (x+1)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} H_n^k x^k,$$

tj.

$$\sum_{m=0}^{n-k-1} C_m^n \binom{n-m}{k} + 2C_{n-k}^n = H_n^k. \tag{6.3.5}$$

Relacija (6.3.5) predstavlja sistem linearnih jednačina

$$
(6.3.6)\quad
\begin{aligned}
&2C_0^n = H_n^n\\
&\binom{n}{1}C_0^n + 2C_1^n = H_n^{n-1}\\
&\binom{n}{2}C_0^n + \binom{n-1}{1}C_1^n + 2C_2^n = H_n^{n-2}\\
&\vdots\\
&\binom{n}{k}C_0^n + \binom{n-1}{k-1}C_1^n + \cdots + 2C_n^n = H_n^{n-k}\\
&\vdots\\
&C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + 2C_n^n = H_n^0
\end{aligned}
$$

odakle dobijamo

$$
C_k^n = \sum_{j=0}^{k} K_j \binom{n-k+j}{j} H_n^{n-k+j},
$$

gde su K_j $(j=0,1,2,\ldots,k)$ konstante koje treba odrediti.

Prema poslednjoj relaciji iz sistema (6.3.6) dobijamo uslov

$$
(6.3.7)\qquad \sum_{r=0}^{n} K_r \binom{n}{r} + K_n = 0
$$

gde je $K_0 = \frac{1}{2}$.

Relaciji (6.3.7) može se dati sledeći oblik

$$
(1+K)^n + K_n = 0,
$$

iz koje postupno, s obzirom na početni uslov, izračunavamo redom koeficijente K_r. Međutim, ako stavimo $\overline{K}_0 = 2K_0$, tj. $\overline{K}_r = 2K_r$, relacija iz koje ćemo izračunavati koeficijente $\overline{K}_r$ glasi

$$
(6.3.8)\qquad \sum_{r=0}^{n} \frac{\overline{K}_r}{2}\binom{n}{r} + \frac{\overline{K}_n}{2} = 0,
$$

sa početnim uslovom $\overline{K}_0 = 1$.

Relacija (6.3.8) može da se napiše u obliku

$$
\sum_{r=0}^{n} \overline{K}_r \binom{n}{r} + \overline{K}_n = 0,
$$

odakle zaključujemo da su koeficijenti $\overline{K}_n$ povezani sa tangetnim koeficijentima relacijom

$$
T_n = 2^n \overline{K}_n, \quad \text{odnosno} \quad T_n = 2^{n+1} K_n,
$$

prema tome, rešenje jednačine (6.3.1) možemo pisati u obliku

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{j=0}^{k} \frac{T_j}{2^{j+1}} \binom{n-k+j}{j} H_j^{n-k+j} \right\} x^{n-k},
$$

ili

(6.3.9)
$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}H_k^n\left\{\sum_{r=0}\frac{T_r}{2^r}\binom{k}{r}x^{k-r}\right\}.$$

S obzirom da se Eulerovi polinomi definišu simboličkom relacijom

$$E_n(x)=\frac{(2x+T)^n}{2^n\,n!},$$

vidimo da se (6.3.9) može izraziti pomoću Eulerovih polinoma, dakle

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}H_n^k\,k!\,E_r(x).$$

Diferencna jednačina (6.3.1) za slučaj $a_r=0$, $b_r=1$, svodi se na

$$f(x+1)+f(x)=x^n,$$

čije je rešenje, s obzirom da je

$$H_n^k=0\quad(k\neq n)\quad\text{i}\quad H_n^n=1,$$

predstavlja Eulerov polinom

$$f(x)=\frac{1}{2}n!\,E_n(x).$$

Eulerova diferencna jednačina

$$E_n(x+1)+E_n(x)=2\frac{x^n}{n!}$$

je partikularan slučaj jednačine (6.3.1).

Za specijalne vrednosti konstanata a_r i b_r diskusija bi se mogla izvesti u istom smislu kao i na primerima generalisane Bernoullieve diferencne jednačine.

7. GENERALIZACIJA BERNOULLIEVIH POLINOMA I BROJEVA

Generalizacija Bernoullievih polinoma vrši se na razne načine, kao što je bio slučaj i sa njihovom definicijom. Kod Milne-Thomsona generalisani Bernoulliev polinom stepena k reda n, definiše se sa

$$\frac{t^n e^{xt}}{(e^t-1)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k^{(n)}(x)\,t^k,$$

ili simboličkom formulom

$$G\,B_k^{(n)}(x)=\frac{t^n e^{xt}}{(e^t-1)^n}.$$

Za $n=1$ dobija se Bernoulliev polinom I reda,

$$G\,B_k(x)=\frac{te^{xt}}{e^t-1}.$$

Bernoullievi brojevi n-tog reda $B_k^{(n)}$ definišu se izrazom

$$B_k^{(n)}=B_k^{(n)}(0)/k!,$$

pri čemu je $B_0^{(0)}=1$ i $B_k^{(0)}=0$ $(k\neq 0)$. Odavde za $n=1$ dobija se poznata definicija Bernoullievih brojeva I reda.

Mnogobrojne formule za interpolaciju, numeričku integraciju i numeričko diferenciranje, izražavaju se pomoću generalisanih Bernoullievih polinoma-stoga, sa gledišta primenjene matematike, njihovo proučavanje predstavlja izve, stan interes.

Nörlund [29] uopštava definiciju Bernoullievih brojeva I reda (II, 1.1) za Bernoullieve brojeve n-tog reda, koje obeležava sa $B_k^{(n)}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ili u kratko sa $B_k^{(n)}$, gde su $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nezavisno promenljive. On, dakle, uvod rekurentne relacije

$$\sum_{s=1}^{k}\binom{k}{s}u_n^s B_{k-s}^{(n)}(u_1, u_2, \ldots, u_n)=u_n\; kB_{k-1}^{(n-1)}[u_1, u_2, \ldots, u_n]$$

ili simbolički

$$(B^{(n)}+u_n)^k-(B^{(n)})^k=u_n\,k\,B_{k-1}^{(n-1)}.$$

Generalisane Bernoullieve polinome reda n, stepena k, obeležavajući ih sa $B_k^{(n)}(x/u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ili ukratko sa $B_k^{(n)}(x)$, Nörlund definiše na sledećii način:

Bernoulliev polinom stepena k reda I zadovoljava diferencnu jednačinu[1]

$$\underset{u_1}{\Delta}\, B_k^{(1)}=kx^{k-1}$$

i uslov

$$B_k^{(1)}(0/u_1)=B_k^{(1)}[u_1].$$

$B_k^{(2)}(x/u_1, u_2)$ je polinom koji zadovoljava jednačinu

$$\underset{u_2}{\Delta}\, B_k^{(2)}(x)=k\,B_{k-1}^{(1)}(x)$$

i uslov

$$B_k^{(2)}(0/u_1, u_2)=B_k^{(2)}[u_1, u_2],$$

i uopšte $B_k^{(n)}(x/u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je polinom koji zadovoljava jednačinu

$$\underset{u_n}{\Delta}\, B_k^{(n)}(x)=k\,B_{k-1}^{(n-1)}(x)$$

i uslov

$$B_k^{(n)}(0/u_1, u_2, \ldots, u_n)=B_k^{(n)}[u_1, u_2, \ldots, u_n],$$

pri čemu je

$$B_k^{(0)}(x)=x^k.$$

---

[1] Operaciju $\underset{u}{\Delta}$ Nörlund definiše izrazom

$$\underset{u}{\Delta} f(x)=\frac{f(x+u)-f(x)}{u}.$$

GLAVA III

BERNOULLIEVI BROJEVI

1. DEFINICIJA BERNOULLIEVIH BROJEVA

1.1. DEFINICIJA BERNOULLIEVIH BROJEVA POMOĆU SIMBOLIČKE FORMULE

Pri proučavanju Bernoullievih polinoma videli smo da su koeficijenti ovih polinoma

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$$

racionalni brojevi definisani rekurentnom relacijom

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} = 0.$$

Formulom $a_k = B_k/k!$ povezani su koeficijenti Bernoullievih polinoma sa brojevima B_k, koji su nazvani Bernoullievim brojevima i definisani, kao što smo već videli (II, 1.1) simboličkom formulom

(1.1.1) $$(1+B)^n - B_n = 0 \quad (n > 1)$$

pri čemu je $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$.

Ovu definiciju Bernoullievih brojeva pomoću simboličke formule uveli su prvi put Blissard i Lucas [30]. Ona u mnogome olakšava rad i omogućava da se dođe na jednostavan način do važnih zaključaka.

Za $n = 2, 3, 4, 5$ iz (1.1.1) dobijamo postupno

$$2B_1 + 1 = 0.$$

$$3B_2 + 3B_1 + 1 = 0,$$

$$4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1 = 0,$$

$$5B_4 + 10B_3 + 10B_2 + 5B_1 + 1 = 0,$$

i određujemo

(1.1.2) $$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0.$$

Videli smo (II, 3.2) da se s obzirom na obrazac (1.1.1), može napisati simbolička formula

(1.1.3) $$g(x+B+1) - g(x+B) = g'(x),$$

gde je $g(x)$ makakav polinom.

Ako u relaciju (1.1.3) stavimo $x=-1$, i $g(x)=x^n$, dobijamo drugu simboličku formulu

$$B^n-(B-1)^n=(-1)^{n-1}n,$$

koja sabrana sa

$$(B+1)^n-B^n=0,$$

daje, za $n>1$,

$$(B+1)^n-(B-1)^n=(-1)^{n-1}n. \tag{1.1.4}$$

Za $n=2k$ iz (1.1.4) imamo

$$(B+1)^{2k}-(B-1)^{2k}=-2k,$$

ili

$$\binom{2k}{0}B_{2k}+\binom{2k}{1}B_{2k-1}+\binom{2k}{2}B_{2k-2}+\cdots+\binom{2k}{2k-1}B_1+1$$

$$-\binom{2k}{0}B_{2k}+\binom{2k}{1}B_{2k-1}-\binom{2k}{2}B_{2k-2}+\cdots+\binom{2k}{2k-1}B_1-1=-2k,$$

tj.

$$\binom{2k}{1}B_{2k-1}+\binom{2k}{3}B_{2k-3}+\cdots+\binom{2k}{2k-3}B_3+\binom{2k}{2k-1}B_1=-k.$$

Kako je

$$\binom{2k}{2k-1}B_1=-k,$$

najzad imamo rekurzivnu relaciju

$$\binom{2k}{1}B_{2k-1}+\binom{2k}{3}B_{2k-3}+\cdots+\binom{2k}{2k-3}B_3=0. \tag{1.1.5}$$

Stavljajući ovde $k=2, 3, 4$, dobijamo

$$4B_3=0,$$

$$6B_5+20B_3=0,$$

$$8B_7+56B_5+56B_3=0,$$

odakle sleduje

$$B_3=0,\quad B_5=0,\quad B_7=0, \text{ itd.}$$

Očigledno je, prema relaciji (1.1.5), da su svi Bernoullievi brojevi neparnog indeksa jednaki nuli, dakle

$$B_{2k-1}=0 \quad (k>1).$$

Ovu činjenicu konstatovali smo takođe u (II, 2.1.)

Za $n=2k+1$ iz simboličke relacije (1.1.4) dobijamo

$$(B+1)^{2k+1}-(B-1)^{2k+1}=2k+1,$$

ili

$$\binom{2k+1}{2}B_2+\binom{2k+1}{4}B_4+\binom{2k+1}{6}B_6+\cdots+\binom{2k+1}{2k}B_{2k}=k-\frac{1}{2}. \tag{1.1.6}$$

Iz (1.1.6) možemo direktno izračunavati Bernoullieve brojeve parnog indeksa.

Navešćemo docnije jednu interesantnu osobinu brojeva B_{2n}, naime, da im se znak naizmenično menja, što smo već iz primera (1.1.2) mogli naslutiti.

Kod mnogih autora [20], [31], [32], [33], Bernoullievi brojevi posmatraju se kao pozitivni brojevi B_k i odgovaraju napred posmatranim brojevima B_{2k}.

1.2. DEFINICIJA BERNOULLIEVIH BROJEVA POMOĆU FUNKCIJE GENERATRISE

Kao što smo ranije napomenuli, Bernoullievi brojevi se uspešno primenjuju u mnogim oblastima matematike, ali je nesumnjivo njihova najvažnija primena pri razvijanju funkcija u potencijalne redove. Otuda i proizilazi činjenica da je definiciji Bernoullievih brojeva pored simboličkog oblika dat i drugi oblik, ekvivalentan ovom, ali pogodniji za teorijska razmatranja.

Posmatrajmo najpre funkciju

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1},$$

koja je definisana za svako x osim za $x=0$. Kako je $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, dodajemo definiciju $f(0)=1$.

Ako e^x razvijemo u Maclaurinov red, imamo

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}=1:\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots\right)=\frac{1}{g(x)},$$

gde je funkcija

$$g(x)=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots$$

analitička za svako x.

Prema poznatoj teoremi da se recipročna vrednost zbira konvergentnog celog reda

$$F(x)=\sum a_n x^n \quad (a_0\neq 0)$$

može u izvesnom intervalu $(-r, r)$ razviti u ceo konvergentan red ako je

$$0<\frac{F(x)}{F(0)}<2,$$

zaključujemo da se i funkcija $f(x)$ može razviti u ceo red u intervalu $(-1, 1)$, pošto je tada

$$0<\frac{e^x-1}{x}<2;$$

dakle

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots$$

Razvijanje ove funkcije javlja se u raznim problemima; zbog toga su koeficijenti proučavani i došlo se do zaključka da, u stvari, oni predstavljaju Bernoullieve brojeve B_k, sa čijom smo se definicijom upoznali u prethodnom paragrafu.

Zbog toga je bilo prirodno da se njihovoj definiciji da i ovaj drugi oblik pomoću funkcije generatrise, tj.

(1.2.1)
$$G\frac{B_k}{k!}=\frac{x}{e^x-1},$$

pošto se brojevi $\frac{B_k}{k!}$ javljaju kao koeficijenti pred x^k u razvoju funkcije $\frac{x}{e^x-1}$.

Simboličku relaciju (1.2.1) možemo napisati i na ovaj način

(1.2.2)
$$\frac{x}{e^x-1}=B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{B_k}{k!}x^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k.$$

Može se dokazati da se iz definicije Bernoullievih brojeva (1.2.1) dobija definicija (1.1.1) i obrnuto.

Doista, ako je

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{(n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!},$$

dolazimo do jednakosti

(1.2.3)
$$\sum\frac{B_n}{n!}x^n\sum\frac{x^n}{(n+1)!}=1.$$

Množenjem ovih dvaju redova i upoređivanjem koeficijenata dobijamo $B_0=1$

$$\frac{B_n}{n!\,1!}+\frac{B_{n-1}}{(n-1)!\,2!}+\cdots+\frac{B_1}{1!\,n!}+\frac{B_0}{0!\,(n+1)!}=0.$$

Ako pomnožimo ovu jednačinu sa $(n+1)!$ i dodamo levoj i desnoj stran B_{n+1}, imamo

$$B_{n+1}+\binom{n+1}{1}B_n+\binom{n+1}{2}B_{n-1}+\cdots+\binom{n+1}{n}B_1+\binom{n+1}{n+1}B_0=B_{n+1},$$

što se simbolički može napisati u obliku

$$(1+B)^{n+1}=B_{n+1}.$$

Dakle, dobili smo relaciju (1.1.1).

Ovo možemo mnogo jednostavnije izvesti služeći se simboličkim računom [34]. Ako u osnovnu simboličku relaciju (II, 3.2.1)

$$g(x+B+1)-g(x+B)=g'(x),$$

koja se zasniva na definiciji Bernoullievih brojeva (1.1.1), stavimo

$$x=0,\quad g(z)=e^{zx},$$

imamo

$$e^{(B+1)x}-e^{Bx}=x,$$

tj.

$$e^{Bx}(e^{x}-1)=x.$$

Dakle, doista, dobijamo simboličku formulu

$$e^{Bx}=\frac{x}{e^{x}-1},$$

odnosno drugu definiciju Bernoullievih brojeva, koja napisana u razvijenom obliku postaje relacija (1.2.2).

Ako u (1.2.2) stavimo $B_1=1/2$, dobijamo

$$\frac{x}{e^{x}-1}-1+\frac{1}{2}x=\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\frac{B_4}{4!}x^4+\cdots \tag{1.2.4}$$

Pokazaćemo da je izraz na desnoj strani relacije (1.2.4) parna funkcija. Doista, stavimo li $-x$ umesto x, imamo

$$\frac{-x}{e^{-x}-1}-1-\frac{1}{2}x=\frac{x\,e^{x}}{e^{x}-1}-1-\frac{1}{2}x=\frac{x}{e^{x}-1}-1+\frac{1}{2}x.$$

Prema tome, i izraz na levoj strani relacije (1.2.4) treba da je parna funkcija, otuda dolazimo do već poznate činjenice $B_{2k+1}=0$, pa se red (1.2.2) može napisati u obliku

$$\frac{x}{e^{x}-1}=1+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_4}{4!}x^4+\cdots \tag{1.2.5}$$

1.3. DEFINICIJA BERNOULLIEVIH BROJEVA POMOĆU RIEMANNOVE ZETA-FUNKCIJE

Kod mnogih autora [35], Bernoullievi brojevi, uvode se relacijom

$$B_{2k}=(-1)^{k-1}\frac{(2\,k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\zeta(2\,k)\quad (k=1,2,3,\ldots) \tag{1.3.1}$$

gde je

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad (s>1)$$

Riemannova zeta-funkcija.

Poznato je [36] da se funkcija $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ za $|x|<\pi$ može razviti u red

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\frac{1}{x}+\frac{2s_2}{\pi^2}x-\frac{2s_4}{\pi^4}x^3+\frac{2s_6}{\pi^6}x^5-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{2s_{2k}}{\pi^{2k}}x^{2k-1}+\cdots, \tag{1.3.2}$$

gde je uvedena oznaka

$$s_n=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots\quad (n \text{ ceo paran broj}).$$

Ako u (1.3.2) zamenimo x sa $\dfrac{x}{2}$ i oduzmemo levoj i desnoj strani jedinicu, posle izvršenih transformacija imamo

$$(1.3.3)\quad \frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{2s_2}{(2\pi)^2}x^2-\frac{2s_4}{(2\pi)^4}x^4+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{2s_{2k}}{(2\pi)^{2k}}x^{2k}+\cdots$$

Uporedivši izraz (1.3.3) sa (1.2.5), imamo

$$(-1)^{k-1}\frac{2s_{2k}}{(2\pi)^{2k}}=\frac{B_{2k}}{(2k)!},$$

odnosno relaciju (1.3.1).

Docnije ćemo videti da se na relaciji (1.3.1) zasniva jedna od najvažnijih primena Bernoullievih brojeva, naime, izračunavanje zbirova

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s},\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^s}\quad (s=2n).$$

2. OSOBINE BERNOULLIEVIH BROJEVA

2.1. ZNAK BERNOULLIEVIH BROJEVA

Već smo na više načina (II, 2.1; III, 1.2) pokazali da su svi Bernoullievi brojevi neparnog indeksa jednaki nuli. To je možda razlog što mnogi autori pod Bernoullievim brojevima podrazumevaju Bernoullieve brojeve parnog indeksa i definišu ih relacijom (III, 1.3).

Međutim, Bernoullievi brojevi parnog indeksa nisu nule i čine alternativni red. To ćemo pokazati na sledeći način:

Ako pretpostavimo da je $a_{2n}>0$ (II, 1.1), tada je

$$(2.1.1)\quad B_{2n}(0)=a_{2n}>0.$$

Kako smo ranije utvrdili (II, 2.2) da jednačina $B_{2n}(x)=0$ u razmaku $0<x<\frac{1}{2}$, u kome nema ekstremuma, ima jedan koren, zbog (2.1.1) zaključujemo

$$D\,B_{2n}(x)=B_{2n-1}(x)<0.$$

Ali ako je x malo, znak $a_{2n-2}x$ isti je kao i znak $B_{2n-1}(x)$, pa zaključujemo da je $a_{2n-2}<0$. Pretpostavimo li da je $a_{2n}<0$, istim rezonovanjem dobijamo da je tada $a_{2n-2}>0$. Prema tome, uvek je $a_{2n}a_{2n-2}<0$. Kako je $B_{2n}=(2n)!\,a_{2n}$, zaključujemo da doista Bernoullievi brojevi parnog indeksa čine alternativni red.

2.2. PRIRODA I BROJ BERNOULLIEVIH BROJEVA

2.2.1. Bernoullievi brojevi su racionalni brojevi. Ovo se vidi, na primer, iz samog načina njihovog obrazovanja, jer su svi izvodi funkcije generatrise (II, 1.2)

$$\frac{t}{e^t-1}$$

za $t=0$, racionalni brojevi. Isto tako, relacija

$$(1+B)^n-B_n=0$$

koja predstavlja sistem linearnih jednačina, daje za rešenja uvek racionalne brojeve.

2.2.2. Bernoullievi brojevi čine neograničen skup.

2.3. ASIMPTOTSKO PONAŠANJE BERNOULLIEVIH BROJEVA

Iz relacije

$$B_{2k}=(-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\zeta(2k),$$

primenjujući na $(2n)!$ Stirlingovu formulu

$$n!=n^n e^{-n+\frac{\nu}{8n}}\sqrt{2\pi n},$$

dobijamo

$$B_{2k}=(-1)^{k-1}4\pi\sqrt{e}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k+1/2}e^{\nu/16k}\zeta(2k).$$

Prema tome je

$$\lim_{k\to\infty}|B_{2k}|\left(\frac{\pi e}{k}\right)^{2k+1/2}=4\pi e,$$

tj.

(2.3.1) $$B_{2k}\sim(-1)^{k-1}4\pi\sqrt{e}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k+1/2}\quad(k\to+\infty).$$

Relacija (2.3.1) pokazuje da Bernoullievi brojevi po svojoj apsolutnoj vrednosti beskonačno monotono rastu i to neobično brzo, čim k pređe πe, tj.počevši od B_{18}.

3. IZRAČUNAVANJE BERNOULLIEVIH BROJEVA

3.1. TABLICA BERNOULLIEVIH BROJEVA[1]

Prvih pet brojeva izračunao je J. Bernoulli [37] i dobio za njih sledeće vrednosti

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=-\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66}.$$

Docnije Euler [38] izračunava prvih petnaest Bernoullievih brojeva ali tom prilikom ne daje tačnu vrednost za broj B_{13}.

Rothe [39] najpre određuje B_{16}, B_{17}, B_{18} a kroz nekoliko godina, zajedno sa Ohmom [39] i ostale Bernoullieve brojeve do B_{31}. Adams [40] daje tablicu svih Bernoullievih brojeva do B_{62}; Serebrenikov [41] proširuje tu tablicu do B_{90}, zatim do B_{92}. 1936. godine Lehmer [42] nastavlja izračunavanje Bernoullievih brojeva do B_{110}. Na ovome se, za sada, izračunavanje ovih važnih brojeva zaustavilo.

Pored pravih vrednosti Bernoullievih brojeva, izračunavaju se i njihove približne vrednosti. H. T. Davis [43] izračunao je približne vrednosti Bernoullievih brojeva sa 9 decimala do B_{250}; on je takođe dao i logaritme istih brojeva sa tačnošću do 10 decimala.

Izračunavanje Bernoullievih brojeva vrši se obično pomoću raznih rekurentnih relacija. Takva je na primer Ramanujanova relacija (III, 5.18), koja može vrlo korisno da posluži za efektivno izračunavanje ovih brojeva.

[1] Podaci su uzeti prema knjizi: Fletcher, Miller, Rosenhead and Comrie *An Index of Mathematical Tables*, London, 1962.

Ali, pored ovog načina, postoji i čitav niz drugih metoda, koje se zasnivaju, kao što ćemo kasnije videti, na izvesnim osobinama Bernoullievih brojeva.

Na kraju ove glave priložili smo tablicu Bernoullievih brojeva prema Jordanu [6,234].

4. OSNOVNE TEOREME O BERNOULLIEVIM BROJEVIMA

4.1. STAUDT-CLAUSENOVA TEOREMA

Staudt [44] i Clausen [45] skoro istovremeno otkrili su jednu veoma interesantnu osobinu Bernoullievih brojeva, kasnije poznatu u literaturi pod imenom Staudt-Clausenova teorema. Od njenog prvog formulisanja pa do danas dokazivana je na razne načine u radovima mnogih matematičara (Sechläfli, Lucas, Saalschütz, Schwering, Radicke, Nielsen, itd.) a takođe korišćena je od mnogih autora pri efektivnom izračunavanju Bernoullievih brojeva.

Iznećemo [46] jedan od pristupačnijih načina dokazivanja ove teoreme koji se uglavnom zasniva na poznavanju izvesnih stavova iz računa sa kongruencijama a vodi svoje porekle iz Staudtovih radova.

Staudt-Clausenova teorema formulisana je na ovaj način:

Neka je B_n n-ti Bernoulliev broj definisan simboličkom relacijom

$$(B+1)^n - B_n = 0,$$

u kojoj, posle razvijanja, treba B^k zameniti sa B_k. Broj B_n uvek se može napisati u obliku

$$B_n = A - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \cdots \frac{1}{\lambda_\nu}, \tag{4.1.1}$$

gde su: A ceo broj; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ prosti brojevi koji su za jedinicu veći od delilaca broja n.

Obeležićemo sa $S_n(a)$ zbir

$$0^n + 1^n + 2^n + \cdots + (a-1)^n.$$

Neka brojevi $0, 1, 2, \ldots, a-1$, čine kompletan sistem ostataka za moduo a. Za neki drugi sistem ostataka $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_a$ za isti moduo prema definiciji, imaćemo

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv 0 \pmod a \\ r_2 &\equiv 1 \pmod a \\ r_3 &\equiv 2 \pmod a \\ &\vdots \\ r_a &\equiv a-1 \pmod a. \end{aligned}$$

Stepenujući i sabirajući redom sve ove kongruencije, dobija se

$$S_n(a) \equiv r_1^n + r_2^n + r_3^n + \cdots + r_a^n \pmod a.$$

U računu sa kongruencijama dokazuje se da brojevi $a s_i + r_j$ $(i=1, 2, \ldots, b;\ j=1, 2, \ldots, a)$ čine kompletan sistem ostataka za moduo ab, ako su a i b relativno prosti brojevi, i ako

$$s_1, s_2, \ldots, s_b; \quad r_1, r_2, \ldots, r_a;$$

predstavljaju kompletne sisteme ostataka za moduo b, odnosno za moduo a. Tada je

$$S_n(ab) \equiv \sum_{i,j} (a s_i + r_j)^n \pmod{ab}$$

ili, kako je

$$a s_i + r_j \equiv r_j \pmod{a}; \text{ tj. } a s_i + r_j \equiv a s_i \pmod{a},$$

imaćemo

$$S_n(ab) \equiv b S_n(a) + a S_n(b) \pmod{a}. \tag{4.1.2}$$

Na sličan način dobili bismo relaciju

$$S_n(ab) \equiv b S_n(a) + a S_n(b) \pmod{b}. \tag{4.1.3}$$

Relacije (4.1.2) i (4.1.3) daju zajedno relaciju

$$S_n(ab) \equiv b S_n(a) + a S_n(b) \pmod{ab},$$

ili

$$\frac{S_n(ab)}{ab} - \frac{S_n(a)}{a} - \frac{S_n(b)}{b} = k \quad (k \text{ ceo broj}).$$

Ako su a, b, c tri relativno prosta broja, očigledno je, na osnovu ovoga što smo pokazali, da će izraz

$$\frac{S_n(abc)}{abc} - \frac{S_n(ab)}{ab} - \frac{S_n(b)}{b},$$

tj.

$$\frac{S_n(abc)}{abc} - \frac{S_n(a)}{a} - \frac{S_n(b)}{b} - \frac{S_n(c)}{c}$$

biti uvek ceo broj.

Može se dokazati da je uopšte

$$\frac{S_n(abc\ldots k)}{abc\ldots k} - \frac{S_n(a)}{a} - \frac{S_n(b)}{b} - \cdots - \frac{S_n(k)}{k}, \tag{4.1.4}$$

uvek ceo broj, ako su $a, b, c, \ldots, k$ relativno prosti brojevi.

Poznato je da svaki složeni broj m možemo napisati u obliku

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_s^{\alpha_s},$$

gde su brojevi

$$a = p_1^{\alpha_1},\ b = p_2^{\alpha_2},\ c = p_3^{\alpha_3}, \ldots,\ k = p_s^{\alpha_s}$$

(relativno prosti. Prema relaciji (4.1.4) izraz

$$\frac{S_n(m)}{m} - \frac{S_n\left(p_1^{\alpha_1}\right)}{p_1^{\alpha_1}} - \frac{S_n\left(p_2^{\alpha_2}\right)}{p_2^{\alpha_2}} - \cdots - \frac{S_n\left(p_s^{\alpha_s}\right)}{p_s^{\alpha_s}} \tag{4.1.5}$$

je uvek ceo broj. Ovo se može uprostiti ako primenimo izvesne stavove iz teorije kongruencija. Naime, ako su

$$r_0,\ r_1,\ r_2, \ldots,\ r_{p-1}$$

$$s_0,\ s_1,\ s_2, \ldots,\ s_{p^{\alpha-1}-1},$$

kompletni sistemi ostataka za moduo p i $p^{\alpha-1}$, tada brojevi

$$p^{\alpha-1} r_i + s_j \quad \begin{pmatrix} i=0, 1, 2, \ldots, p-1 \\ j=0, 1, 2, \ldots, p^{\alpha-1}-1 \end{pmatrix}$$

čine kompletan sistem ostataka za moduo p. Prema tome

(4.1.6) $$S_n(p^\alpha) \equiv \sum_{i,j} (s_j + p^{\alpha-1} r_i)^n \pmod{p^\alpha}.$$

Međutim, prema binomnom obrascu je

$$(s_j + p^{\alpha-1} r_i)^n = s_j^n + \binom{n}{1} s_j^{n-1} r_i p^{\alpha-1} + \binom{n}{2} s_j^{n-2} r_i^2 p^{2\alpha-2} + \cdots,$$

i za slučaj kada je $\alpha > 1$ svi članovi na desnoj strani počevši od trećeg deljivi su sa p. Stoga je

$$(s_j + p^{\alpha-1} r_i)^n \equiv s_j + n s_j^{n-1} r_i p^{\alpha-1} \pmod{p^\alpha}.$$

Sumirajući ovaj izraz po i ako se j smatra konstantnim, dobijamo

$$\sum_i (s_j + p^{\alpha-1} r_i)^n \equiv p s_j^n + n s_j^{n-1} \frac{p(p-1)}{2} p^{\alpha-1} \pmod{p^\alpha}.$$

Ako je p neparan broj, i drugi član na desnoj strani ove relacije biće deljiv sa p^α, pa je tada

$$\sum_i (s_j + p^{\alpha-1} r_i)^n \equiv p s_j^n \pmod{p^\alpha}.$$

Sumirajući ove kongruencije po promenljivom indeksu j, imaćemo

$$\sum_{i,j} (s_j + p^{\alpha-1} r_i)^n \equiv p \sum_j s_j^n \pmod{p^\alpha},$$

ili, s obzirom na relaciju (4.1.6)

$$S_n(p^\alpha) \equiv p\, S_n(p^{\alpha-1}) \pmod{p^\alpha},$$

tj. izraz

(4.1.7) $$\frac{S_n(p^\alpha)}{p^\alpha} - \frac{S_n(p^{\alpha-1})}{p^{\alpha-1}}$$

uvek je ceo broj. Na sličan način dobija se da je

$$\frac{S_n(p^{\alpha-1})}{p^{\alpha-1}} - \frac{S_n(p^{\alpha-2})}{p^{\alpha-2}}$$

ceo broj. Sabirajući relacije koje ćemo dobiti iz (4.1.7) ako α zamenjujemo sa $\alpha-1, \alpha-2, \alpha-3, \ldots, 1$, dolazimo do zaključka da je

$$\frac{S_n(p^\alpha)}{p^\alpha}-\frac{S_n(p)}{p}$$

uvek ceo broj. Prema tome, relacija (5.1.5) postaje

$$\frac{S_n(m)}{m}-\frac{S_n(p_1)}{p_1}-\frac{S_n(p_2)}{p_2}-\cdots-\frac{S_n(p_s)}{p_s}=\text{ceo broj.}$$

Pokazaćemo sada da je

$$S_n(p)\equiv -1 \pmod p, \text{ odnosno } S_n(p)\equiv 0 \pmod p,$$

prema tome, da li je n deljivo ili ne sa $p-1$.

Relaciju $S_n(p)\equiv -1 \pmod p$ dokazujemo služeći se Fermatovom teoremom, po kojoj je

$$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p,$$

ako a ne deli p. Prema tome, možemo pisati

$$1^n\equiv 1, 2^n\equiv 1, \ldots, (p-1)^n\equiv 1 \pmod p$$

te sabravši ove kongruencije dobijamo relaciju

$$S_n(p)\equiv p-1 \pmod p, \text{ tj. } S_n(p)\equiv -1 \pmod p.$$

Ako pođemo sada od identiteta

$$(x+1)^a-x^a=\binom{a}{1}x^{a-1}+\binom{a}{2}x^{a-2}+\cdots+\binom{a}{a-1}x+1,$$

u kome ćemo stavljati redom $x=0, 1, 2, \ldots, p-1$, dobićemo sabirajući tako formirane jednačine

$$p^a-p=\binom{a}{1}S_{a-1}(p)+\binom{a}{2}S_{a-2}(p)+\cdots+\binom{a}{a-1}S_1(p),$$

tj.

$$\binom{a}{1}S_{a-1}(p)+\binom{a}{2}S_{a-2}(p)+\cdots+\binom{a}{a-1}S_1(p)\equiv 0 \pmod p.$$

Odavde za $a=2, 3, \ldots, p-1$, imamo

$$2S_1(p)\equiv 0,$$

$$3S_2(p)+3S_1(p)\equiv 0,$$

$$4S_3(p)+6S_2(p)+4S_1(p)\equiv 0 \pmod p.$$

Prema tome, dobija se

$$S_1(p)\equiv 0, S_2(p)\equiv 0, \ldots, S_{p-2}(p)\equiv 0 \pmod p.$$

Ovim smo dokazali da postoji $S_n(p)\equiv 0 \pmod p$, za slučaj kada n nije deljivo sa $p-1$ i kada je $n<p-1$.

Ako je $n > p-1$ i nije deljivo sa $p-1$, imamo $n=(p-1)b+r$, $(0 < r < p-1)$. Prema Fermatovoj teoremi

$$C^{p-1} \equiv 1 \pmod p \quad (C=1, 2, \ldots, p-1),$$

ili

$$C^{b(p-1)} \equiv 1 \pmod p, \text{ tj. } C^{r+b(p-1)} \equiv C^n \equiv C^r \pmod p,$$

zato možemo pisati

$$S_n(p) \equiv S_r(p) \pmod p,$$

tj.

$$S_n(p) \equiv 0 \pmod p.$$

Ovim smo dokazali da je relacija

$$S_n(p) \equiv 0 \pmod p \tag{4.1.8}$$

ispunjena za svako n koje ne deli p.

Videli smo ranije da je

$$\frac{S_{2n}(m)}{m} - \frac{S_{2n}(p_1)}{p_1} - \frac{S_{2n}(p_2)}{p_2} - \frac{S_{2n}(p_3)}{p_3} - \cdots - \frac{S_{2n}(p_s)}{p_s}$$

ceo broj ako su $p_1, p_2, \ldots, p_s$ prosti delioci broja m.

S obzirom na relaciju (4.1.8), broj $S_{2n}(p)/p$ je ceo ako $2n$ ne deli $p-1$, ili je $[S_{2n}(p)+1]/p$ ceo broj ako $2n$ deli $p-1$. Označivši sada sa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ sve različite proste brojeve koji dele m i to takve da su

$$\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \lambda_3 - 1, \ldots,$$

delioci broja $2n$, imaćemo da je

$$\frac{S_{2n}(m)}{m} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \cdots \tag{4.1.9}$$

uvek ceo broj.

Bernoullievi brojevi povezani su sa zbirovima potencija prirodnih brojeva relacijom (III, 1.4.1)

$$S_n(p) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k \, p^{n+1-k},$$

koja se, s obzirom da je $B_{2k+1}=0$, $k \neq 0$, može napisati u razvijenom obliku

$$S_n(p) = \frac{1}{n+1} B_0 \, p^{n+1} + B_1 p^n + \frac{n}{2} B_2 \, p^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 \, p^{n-3} + \cdots + B_n p.$$

Za $n = 2k$, ova relacija postaje

$$S_{2k}(p) = \frac{1}{2k+1} B_0 \, p^{2k+1} + B_1 \, p^{2k} + \frac{2k}{2} B_2 \, p^{2k-1} + \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 \, p^{2k-3} + \cdots + B_{2k} \, p.$$

Izabraćemo p tako da bude deljivo sa imeniteljima brojeva

$$B_0, B_1, B_2, B_4, \ldots, B_{2k-2},$$

a takođe i sa brojevima

$$2, 3, 4, \ldots, 2k+1.$$

Očigledno je da će tada razlika

$$\frac{S_{2k}(p)}{p} - B_{2k}$$

biti ceo broj. Pored toga p je deljivo sa svima prostim brojevima $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$, koji su takvi da su

$$\frac{2k}{\lambda_1 - 1}, \frac{2k}{\lambda_2 - 1}, \frac{2k}{\lambda_3 - 1}, \ldots$$

celi brojevi. Stoga je, prema (4.1.9)

$$\frac{S_{2k}(p)}{p} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \cdots$$

ceo broj, tj.

$$B_{2k} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \cdots$$

biće ceo broj. Ovim je dokazana Staudt-Clausenova relacija.

Kao primer posmatrajmo broj B_{16} čija je vrednost — 3617/510. Napišemo sve činioce broja 16, to su 1, 2, 4, 8, 16. Prosti brojevi koji su za jedinicu veći od ovih su: 2, 3, 5, 17. Doista je

$$B_{16} = -6 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{17}.$$

Isto tako, imamo za brojeve

$$B_{22} = \frac{854513}{138} = 6193 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23},$$

$$B_{26} = \frac{8553103}{6} = 1425518 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \text{ itd.}$$

Ako se Bernoulliev broj B_n napiše u obliku $a_n/2b_n$, vidimo da je imenitelj b_n potpuno definisana numerička funkcija, tj. predstavlja proizvod neparnih prostih brojeva koji su za jedinicu veći od činioca broja n, uključujući tu i sam broj n. Međutim, nemoguće je dati njen opšti oblik s obzirom da nam je još uvek nepoznata množina prostih brojeva. Što se tiče brojitelja a_n, njegovo određivanje je još komplikovanije, kao što je slučaj i sa celim brojem A koji se javlja u Staudt-Clausenovoj relaciji.

4.2. SYLVESTEROVA TEOREMA

Ako je p proizvoljan ceo broj, tada je izraz

$$\frac{p^{2n}(p^{2n}-1)B_n}{2n} \tag{4.2.1}$$

uvek ceo broj.

Ovo je poznata Sylvesterova teorema [47] koja se odnosi na Bernoullieve brojeve. Ma da je Lipschitz [48] dokazao ovu teoremu posle Sylvestera, šta više i priznao Sylvesterov prioritet [49], ona se ipak u literaturi vrlo često označava kao Lipschitzov stav. Dokazuje se na sledeći način:

Iz (1.3.3) i (1.3.5) dobijamo

$$\frac{x}{2}\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}=1+\frac{B_2}{2}x^2+\frac{B_4}{4!}x^4+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots \tag{4.2.2}$$

Stavimo li

$$F(x)=\frac{x}{2}\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}$$

dobijamo

$$\frac{F(px)}{x}-\frac{F(x)}{x}=\frac{d}{dx}\ln\frac{e^{px/2}+e^{-px/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}=\frac{d}{dx}\ln\frac{e^{px}-1}{e^x-1}-\frac{p-1}{2}.$$

Prema (4.2.2) je

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{e^{px}-1}{e^x-1}-\frac{p-1}{2}=(p^2-1)\frac{B_2}{2!}x+(p^4-1)\frac{B_4}{4!}x^3+\cdots \tag{4.2.3}$$

$$+(p^{2k}-1)\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{2k+1}+\cdots$$

Ako izraz na desnoj strani relacije (4.2.3) razvijemo u Taylorov red u okolini početka, $(2k-1)$ član ima oblik

$$\frac{G(p)}{(2k-1)!\,p^{2k}}x^{2k-1},$$

gde $G(p)$ označava jedan određeni ceo broj, ako je p ceo broj. Prema tome, imamo

$$\frac{p^{2k}(p^{2k}-1)B_{2k}}{2k}=G(p).$$

Ovim je Sylvesterova teorema dokazana.

Lipschitz je dao jedno uopštenje ove teoreme. Naime, dokazao je da, ako su a i b dva relativno prosta broja, izraz $\dfrac{(a^{2n}-1)(b^{2n}-1)B_n}{2n}$ uvek je ceo broj.

Pomenuta Sylvesterova teorema igra veoma važnu ulogu u teoriji brojeva. Ona spada u one značajne stavove o kojima je Bachmann rekao: "... bisher auf rein arithmetische Weise nicht gewonnen werden konnten."

4.3. JEDAN EKSPLICITAN IZRAZ ZA BERNOULLIEVE BROJEVE

Funkciju generatrisu

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{m=0}^{\infty}a_m t^m\quad\left(a_m=\frac{B_m}{m!}\right)$$

možemo napisati na sledeći način

$$\frac{1}{1+\left(\frac{e^t-1}{t}-1\right)}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(\frac{e^t-1}{t}-1\right)^i$$

tj.

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^i\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{(k+1)!}\right].$$

Rezultat množenja ovih i redova je

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i t^m}{(k_1+1)!\,(k_2+1)!\ldots(k_i+1)!},$$

gde $k_1, k_2, \ldots, k_i$, uzimaju svaki prirodan broj sa ponavljanjem i permutovanjem, tako da je

$$k_1+k_2+\cdots+k_i=m, \quad k_i>0.$$

Odavde zaključujemo da je

$$\frac{B_m}{m!}=\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^i}{(k_1+1)\,(k_2+1)!\ldots(k_i+1)!}. \tag{4.3.1}$$

Neka je, na primer, $m=4$. Tada za $i=1$ imamo $k_1=4$ i odgovarajući sabirak iz (4.3.1) je $-\frac{1}{120}$. Za $i=2$, biće $k_1=1$, $k_2=3$, ili $k_1=3$, $k_2=1$, ili $k_1=2$, $k_2=2$. Odgovarajući sabirci su $\frac{2}{48}$ i $\frac{1}{36}$. Za $i=3$, imamo $k_1=1$, $k_2=1$, $k_3=2$; ili $k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=1$; ili $k_1=1$, $k_2=2$, $k_3=1$, odgovarajući sabirak je $\frac{1}{16}$. Konačno nalazimo

$$\frac{B_4}{24}=-\frac{1}{120}+\frac{2}{48}+\frac{1}{36}-\frac{3}{24}+\frac{1}{16}=-\frac{1}{720} \Rightarrow B_4=-\frac{1}{30}.$$

5. RELACIJE IZMEĐU BERNOULLIEVIH BROJEVA

5.1. DOBIJANJE RELACIJA IZMEĐU BERNOULLIEVIH BROJEVA POMOĆU TRIGONOMETRIJSKIH RELACIJA

Služeći se izvesnim trigonometrijskim obrascima Ramanujan [33] vrlo jednostavno izvodi čitav niz rekurzivnih formula između Bernoullievih brojeva.

Tako, na primer, ako se pođe od identiteta

$$\sin x \cdot \operatorname{cotg} x=\cos x$$

i u njemu zameni

(5.1.1) $$x \operatorname{cotg} x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} x^{2m},$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

dobija se, izjednačavanjem koeficijenata pred x^{2m} sledeća relacija

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{B_{2n-2k}}{(2n-2k)!} \frac{2^{2n-2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{(2n)!},$$

tj.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{B_{2n-2k}}{2^{2k+1}} \binom{2n+1}{2k+1} = \frac{2n+1}{2^{2n+1}}.$$

Stavimo li $2n+1=m$, dobijamo rekurzivnu formulu

(5.1.2) $$\binom{m}{1}\frac{B_{m-1}}{2} - \binom{m}{3}\frac{B_{m-3}}{2^3} + \binom{m}{5}\frac{B_{m-5}}{2^5} + \cdots + \frac{(-1)^{1/2\,(n-1)}}{2^n} B_0 + \frac{m}{2^m} (-1)^{1/2\,(m-1)} = 0.$$

Na potpuno sličan način, pomoću trigonometrijskih relacija

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Bigg/ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!},$$

$$= \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x} = \left[2 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}\right] \Bigg/ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

dolazi se do drugih dveju relacija

(5.1.3) $$\binom{m}{2} B_{m-2} - \binom{m}{4} B_{m-4} + \binom{m}{6} B_{m-6} - \cdots + (-1)^{1/2(m-2)} B_0 + \frac{m}{2} (-1)^{1/2(m-1)} = 0$$

gde je $m=2n$, i

(5.1.4) $$\binom{m}{1} B_{2m-1} - \binom{m}{3} B_{m-3} + \binom{m}{5} B_{m-5} - \cdots + (-1)^{1/2(m-1)} B_0 + \frac{m}{2} (-1)^{1/2(m-1)} = 0$$

gde je $m=2n+1$.

Formule (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4) mogu da posluže za izračunavanje Bernoullievih brojeva. Međutim, ukoliko je indeks m veći, izračunavanje

Bernoullievih brojeva zahteva i veći broj računskih operacija. Stoga, Ramanujan istovremeno daje i niz relacija kod kojih je broj ovih operacija manji, te se Bernoullievi brojevi velikih indeksa mogu brže izračunati.

Tako, na primer, polazeći od identiteta

$$(x \operatorname{cotg} x)^2 = -x^2\left(1+\frac{d \operatorname{cotg} x}{dx}\right)$$

dobija se, zamenivši izraz (5.1.1) i izjednačivši koeficijente pred x^n, sledeća relacija

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\,\frac{B_{2n-2k}}{(2n-2k)!}=\frac{B_{2n}}{(2n)!}\,(2n+1). \tag{5.1.5}$$

Sličan rezultat dobiji se ako se pođe od identiteta

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx}=1+\operatorname{tg}^2 x.$$

Koristeći se istim postupkom, Ramanujan, dolazi do mnogobrojnih rekurentnih relacija između Bernoullievih brojeva. Tako, na primer, polazeći od identiteta

$$-\frac{1}{2}\,x\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+\operatorname{cotgh}\frac{x}{2}\right)=-\frac{x}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+i\operatorname{cotg}\frac{ix}{2}\right)$$

dobija relaciju

$$\binom{n}{2}\frac{B_{n-2}}{2}-\binom{n}{6}\frac{B_{n-6}}{2^3}+\binom{n}{10}\frac{B_{n-10}}{2^5}-\cdots=0, \tag{5.1.6}$$

ili polazeći od identiteta

$$4\sin x\sin x\varepsilon\sin x\varepsilon^2=-(\sin 2x+\sin 2x\varepsilon+\sin 2x\varepsilon^2)\quad(\varepsilon=\sqrt[3]{1})$$

dobija relaciju

$$\binom{n}{3}B_{n-3}-\binom{n}{9}B_{n-9}+\binom{n}{15}B_{n-15}-\cdots=0. \tag{5.1.7}$$

Na sličan način, on dolazi do važne rekurentne veze

$$\frac{1}{3}(n+2)B_n=\binom{n}{6}B_{n-6}B_6+\binom{n}{12}B_{n-12}B_{12}+\binom{n}{18}B_{n-18}B_{18}+\cdots \tag{5.1.8}$$

pomoću koje se mogu izračunavati vrednosti Bernoullievih brojeva kada je njihov indeks veliki. Tako, na primer, da bismo izračunali B_{24} potrebno je samo znati B_{18}, B_{12} i B_6, dok se iz ranije navedenih rekurentnih formula zahtevalo poznavanje mnogo većeg broja Bernoullievih brojeva indeksa manjeg od 24.

5.2. SIMBOLIČKE RELACIJE IZMEĐU BERNOULLIEVIH BROJEVA

Osnovna simbolička relacija

$$g(x+B+1)-g(x+B)=g'(x) \tag{5.2.1}$$

omogućuje da se formiraju mnogobrojne relacije između Bernoullievih brojeva različitog indeksa.

Tako, na primer, ako funkcija $g(x)$ dobije jedan od sledećih oblika

$$g(x)=(2x+1)^p, \qquad (p>0 \text{ ceo broj})$$

$$g(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+p),$$

$$g(x)=(x-1)x(x+1)\cdots(x+p-1),$$

dobijaju se za $x=0$ simboličke relacije

$$(2B+1)^p-(2B-1)^p=2p(-1)^{p-1},$$

$$(B+1)(B+2)\cdots(B+p)=\frac{p!}{p+1},$$

$$B(B+1)(B+2)\cdots(B+p-1)=-\frac{(p-1)!}{p+1}.$$

Stavimo li zatim

$$g(x)=(x-1)^p x^q \qquad (p, q \text{ prirodni brojevi})$$

relacija (5.2.1) daje za $x=0$

(5.2.2) $$B^p(B+1)^q-B^q(B-1)^p=0.$$

Ovo je poznata Sternova [50] relacija, koja je korisna pri izračunavanju Bernoullievih brojeva, zato što ne sadrži sve Bernoullieve brojeve, već samo one čiji je indeks m takav da je $q \leqslant m \leqslant p+q$, za $q<p$.

Na sličan način iz (5.2.1) dobija se za

$$g(x)=x^p(x+1)^q(x+2)^r(x+3)^s \quad (p, q, r, s \text{ prirodni brojevi})$$

i ako se x zameni redom sa -1, -2, -3, simbolička relacija,

$$B^p(B+1)^q(B+2)^r(B+3)^s=B^s(B-1)^r(B-2)^q(B-3)^p,$$

koja se takođe koristi pri efektivnom izračunavanju Bernoullievih brojeva.

Cesàro [51] daje niz rekurzivnih relacija, dobijenih za specijalne oblike funkcije $g(x)$. Svoja mnogobrojna istraživanja u vezi sa Bernoullievim brojevima zasnovao je uglavnom na simboličkom računu.

Možemo pokazati da se mnoge Ramanujanove relacije iz predhodnog paragrafa mogu dobiti takođe primenom navedenog postupka.

Ako stavimo $g(x)=x^n$, dobijamo za $x=0$ i $x=-1$ relacije

(5.2.3) $$(B+1)^n-B_n=0$$
$$(B-1)^n-B_n=(-1)^n n$$

ili

(5.2.4) $$(B+1)^n+(B-1)^n-2B_n=(-1)^n n.$$

U razvijenom obliku relacija (5.2.4) glasi

$$\sum_{k=0}^{n} B_k\left[\binom{n}{k}+(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\right]-2B_n=(-1)^n n,$$

ili, s obzirom da je $B_{2n+1}=0$ $(n>0)$ dobijamo Ramanujanovu relaciju (5.1.3)

$$\binom{2m}{2}B_{2m-2}+\binom{2m}{4}B_{2m-4}+\cdots+\binom{2m}{2m-4}B_4+\binom{2m}{2m-2}B_2+B_0=m.$$

Ako relacije (5.2.3) oduzmemo, dobijamo

$$(B+1)^n-(B-1)^n=(-1)^{n-1}n,$$

odakle, za $n=2m+1$, sleduje

$$\binom{2m+1}{1}B_{2m}+\binom{2m+1}{3}B_{2m-2}+\cdots+\binom{2m+1}{2m-1}B_2+B_0=\frac{2m+1}{2},$$

a to je Ramanujanova relacija (5.1.4).

Iz (5.2.1) za $g(x)=x^n$, $x=0$ i $x=1$, sleduju dve simboličke relacije

$$(B+1)^n-B_n=0$$

$$(B+2)^n-(B+1)^n=n,$$

koje sabiranjem daju

$$(B+2)^n-B_n=n,$$

ili u razvijenom obliku

(5.2.5) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\,2^{n-k}-B_n=n.$$

Za $n=2m+1$ ova jednakost postaje

$$\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}B_k 2^{-k}=\frac{2m+1}{2^{2m+1}},$$

a to je Ramanujanova relacija (5.1.2).

Ramanujanovu relaciju (5.1.5) dobijamo ako pođemo od simboličkih relacija

(5.2.6)
$$(2B+1)^n=(B+B)^n+nB^{n-1}$$
$$(2B+1)^n=\frac{(-1)^n+1}{2(n+1)},$$

koje se dobijaju iz (5.2.1) za $g(x)=\frac{(1-2x)^{n+1}}{n+1}$ i $x=-B$. Iz (5.2.6) sleduje

$$(B+B)^n+nB^{n-1}=\frac{(-1)^{n+1}-1}{2(n+1)}$$

ili

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k B_{n-k}+nB_{n-1}=\frac{(-1)^{n+1}-1}{2(n+1)},$$

odakle za $n=2m$ imamo

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}B_{2m-2k}B_{2k}=-\frac{1}{2m+1}.$$

Simboličkim metodom možemo uspostaviti i vezu između Stirlingovih i Bernoullievih brojeva prve vrste.

Ako je

$$g(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

tada za $x=0$, iz (5.2.1) sleduje

$$\sum_{r=1}^{n-1}B_r S_{n-1}^{r}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n}. \tag{5.2.7}$$

Relacija (5.2.7) po analogiji odgovarala bi poznatoj relaciji

$$\sum_{r=1}^{n} r!\, b_r\, \sigma_n^r=\frac{1}{n+1},$$

gde su b_r i σ_n^r, Bernoullievi i Stirlingovi brojevi druge vrste.

6. TABLICA BERNOULLIEVIH BROJEVA

$B_1=-1/2$	$B_{22}=854513/138$
$B_2=1/6$	$B_{24}=-236364091/2730$
$B_4=-1/30$	$B_{26}=8553103/6$
$B_6=1/42$	$B_{28}=-23749461029/870$
$B_8=-1/30$	$B_{30}=8615841276005/14322$
$B_{10}=5/66$	$B_{32}=-7709321041217/510$
$B_{12}=-691/2730$	$B_{34}=2577687858367/6$
$B_{14}=7/6$	$B_{36}=-26315271553053477373/1919190$
$B_{16}=-3617/510$	$B_{38}=2929993913841559/6$
$B_{18}=43867/798$	$B_{40}=-261082718496449122051/13530$
$B_{20}=-174611/330$	$B_{42}=1520097643918070802691/1806$

$B_{44}=-27833269579301024235023/690$

$B_{46}=596451111593912163277961/282$

$B_{48}=-5609403368997817686249127547/46410$

$B_{50}=495057205241079648212477525/66$

$B_{52}=-801165718135489957347924991853/1590$

$B_{54}=29149963634884862242141812381 2691/798$

$B_{56}=-2749392929313226753685415739663229/870$

$B_{58}=84483613348880041862046775994036021/354$

$B_{60}=-1215233140483755572040304994079820246041491/56786730$

GLAVA IV

PRIMENA BERNOULLIEVIH BROJEVA

1. ZBIR POTENCIJA PRIRODNOG NIZA BROJEVA
2. GENERALIZACIJA KONAČNIH ZBIROVA PROIZVODA REALNIH BROJEVA
3. SUKCESIVNI ZBIROVI POTENCIJA PRIRODNIH BROJEVA
4. ZBIROVI RECIPROČNIH POTENCIJA
5. METOD KONAČNIH RAZLIKA ZA IZRAČUNAVANJE KONAČNIH ZBIROVA
6. GENERALISANI KONAČNI ZBIROVI RECIPROČNIH PROIZVODA
7. GENERALISANI GEOMETRIJSKI RED

1. ZBIR POTENCIJA PRIRODNOG NIZA BROJEVA

1.1. ISTORIJAT

Određivanje zbira potencija

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p,$$

gde su n i p celi pozitivni brojevi, problem na izgled elementaran, interesovao je matematičare još od davnina. Stari Grci su već znali za formule

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = [S_1(n)]^2,$$

koje su Arhimedu poslužile pri određivanju zapremine piramide i površine segmenta parabole i spirale.

Ove formule srećemo i u rukopisima indijskih matematičara, dokazane na vrlo originalan način:

Posmatrajući tablicu množenja prirodnih brojeva, sastavljenu od n vrsta i n kolona, indijski matematičari su primetili da je zbir članova u prvoj koloni

$$S_1 = \frac{(n+1)n}{2},$$

1	2	3	4	5	$\cdots n$
2	4	6	8	10	
3	6	9	12	15	
4	8	12	16	20	
5	10	15	20	25	
$\vdots$					
n					

zatim, da je u drugoj koloni zbir članova $2S_1$, i uopšte, da je pS_1 zbir članova u p-toj koloni. Prema tome, zbir svih brojeva u tablici je

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)S_1 = (S_1)^2.$$

Osim toga, dali su i drugi način za određivanje zbira svih brojeva u ovoj tablici. Posmatrajući grupu brojeva obrazovanu od p prvih članova p-te kolone i $p-1$ članova p-te vrste, uočili su da je zbir ove grupe

$$2p(1 + 2 + 3 + \cdots + p) - p^2 = p^2(p+1) - p^2 = p^3.$$

Zatim, dajući broju p redom vrednosti $1, 2, \ldots, n$, dokazali su da je zbir kubova n prvih prirodnih brojeva jednak zbiru svih elemenata u „tablici množenja“, a prema tome jednak je kvadratu zbira S_1.

Ovaj način dokazivanja da je $S_3 = (S_1)^2$ nalazimo, na primer, u radovima čuvenog indijskog matematičara Alkarchi (oko 1010. godine).

Ako se primeni navedeni postupak na tablicu obrazovanu od kvadrata elemenata „tablice množenja“, dakle ako se obrazuje ovakva tablica, odmah se može utvrditi da je zbir svih elemenata ove tablice jednak zbiru S_2. Na drugi način, nalazi se da je zbir članova u grupi p

1	2^2	3^2	4^2	$5^2 \ldots n^2$	
2^2	4^2	6^2	8^2	10^2	
3^2	6^2	9^2	12^2	15^2	
4^2	8^2	12^2	16^2	20^2	
5^2	10^2	15^2	20^2	25^2	
.					
.					
.					
n^2					

$$2p^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + p^2) - p^4,$$

odnosno

$$\frac{p^3(p+1)(2p+1)}{3} - p^4 = \frac{2p^5 + p^3}{3}.$$

Tako se posle sabiranja svih grupa dobija

$$2S_5 + S_3 = 3(S_2)^2.$$

Primenjujući navedeni postupak na tablicu obrazovanu od kubova elemenata „tablice množenja“, dobija se jednakost

$$S_7 + S_5 = 2(S_3)^2,$$

koja je bila poznata i Jacobiu.

Kod Arabljana nalazimo formulu

$$S_4(p) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{30}(3p^2 + 3p - 1),$$

koju je Fermat napisao u obliku

$$5S_4(p) = (4p+2)(S_1)^2 - S_2.$$

Međutim, još pre Fermata, zbir potencija četvrtog stepena prirodnog niza brojeva izračunao je lekar Djamchid ben Mas'oud. U jednom rukopisu iz British Museuma (1589.) Mas'oud ovako objašnjava dobijeni rezultat

$$S_4 = \left(\frac{S_1 - 1}{5} + S_1\right) S_2$$

„Ako želimo da odredimo zbir bikvadrata, mi ćemo oduzeti jedinicu od zbira prirodnih brojeva i uzeti od toga jednu petinu; zatim ćemo dodati zbir prirodnih brojeva i pomnožiti sve to zbirom kvadrata istih brojeva.“

Međutim, Fermat, čuveni majstor brojeva, između ostalog, prvi je dao opšti metod za određivanje zbira $S_p(n)$. U svom pismu matematičaru Robervalu (1636.) između ostalog piše:

“Il faut, étant donné un nombre, in progressione naturali, trouver la somme non seulement de tous les carrés et cubes, ce que les auteurs qui ont écrit ont déjà fait, mais encore la somme des carré-carrés, des carré-cubes, etc, ce qui personne que je sache n'a encore trouvé et pourtant cette connaissance est belle et de grand usage, et n'est pas des plus aisées, j'en suis venu à bout avec beaucoup de peine."

Fermatov metod sastojao se u razvijanju polinoma na algebarski zbir faktorijela i zahtevao je samo poznavanje algebarskog deljenja.

Jakob Bernoulli [37] koristeći se osobinama figurativnih brojeva na jednostavan način izračunava prvi put zbirove $S_1(n)$, $S_2(n), \ldots, S_{10}(n)$ i dobija sledeće formule[1]

$$S(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$S(n^2) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$S(n^3) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$S(n^4) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$S(n^5) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$S(n^6) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$S(n^7) = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

$$S(n^8) = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$S(n^9) = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$S(n^{10}) = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n.$$

Međutim u istom delu on dalje piše:

„Wer aber diese Reihen in Bezug auf ihre Gesetzmässigkeit genauer betrachtet, kann auch ohne umständliche Rechnung die Tafel fortsetzen. Bezeichnent c den ganzzahligen Exponenten irgend einer Potenz, so ist

$$S(n^c) = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{1}{2}\binom{c}{1}An^{c-1} + \frac{1}{4}\binom{c}{3}Bn^{c-3} + \frac{1}{6}\binom{c}{5}Cn^{c-5} + \frac{1}{8}\binom{c}{7}Dn^{c-7} + \cdots \tag{1.1.1}$$

wobei die Exponenten der Potenzen von n regelmässig fort um 2 abnehmen bis herab zu n oder n^2. Die Buchstaben $A, B, C, D, \ldots$, bezeichnen der

[1] Bernoulli obeležava zbirove $S_p(n)$ sa $S(n^p)$.

Reiche nach die Koefficienten von n in den Ausdrücken für $S(n^2)$, $S(n^4)$, $S(n^6)$, $S(n^8), \ldots$ nämlich

$$A=1/6, \quad B=-1/30, \quad C=1/42, \quad D=-1/30, \ldots$$

Uviđajući još tada važnost ove formule, koju je samo indukcijom naslutio, J. Bernoulli, dalje kaže:

„Hieraus sicht man, wie unnütz die Mühe gewesen ist, welche Ismaël Bullialdus auf die Abfassung seiner sehr umfangreichen Arithmetica Infinitorum verwendet hat; denn er hat darin nichts weiter geleistet, als dass er nur die Potenzsummen für $c=1$, bis $c=6$ einer Teil dessen, was wir auf einer einzegen Seite erreicht haben — mit ungeheurer Mühe berechnet hat."

Kasnije Euler proširuje tablicu Bernoullievih zbirova do $S_{16}(p)$. Šta više, on je izračunao koeficijente u relaciji (1.1.1) sve do potencije p^{c-29} i nazvao koeficijente A, B, C, $D, \ldots$ Bernoullievim brojevima.

Prvi elementaran dokaz formule (1.1.1) dao je Andreas von Ettingshausen [54] služeći se metodama računa razlika. Ali ovaj prvi dokaz ostaje nezapažen. Cauchy [55] ponovo dokazuje formulu (1.1.1) i daje niz interesantnih njenih primena. F. Arndt [56] prvi uočava važnu diferencnu jednačinu

$$S_n(p)-S_n(p-1)=p^n$$

i primenjuje je za rekurzivno određivanje zbirova $S_n(p)$. Interesantan je način koji je dao Abel [57] za izračunavanje ovih zbirova. Postupak je sledeći: Ako je

$$f_p=1^p x+2^p x^2+3^p x^3+\cdots+(n-1)^p x^{n-1},$$

tada je

$$x f_p'=f_{p+1}. \tag{1.1.2}$$

Za $p=0$ je

$$f_0=x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{x-x^n}{1-x}.$$

Tako se, s obzirom na relaciju (1.1.2) dolazi do formula

$$f_1=x D\frac{x-x^n}{1-x}$$

$$f_2=x D\left(x D\frac{x-x^n}{1-x}\right)$$

$$f_3=x D\left[x D\left(x D\frac{x-x^n}{1-x}\right)\right].$$

$$\vdots$$

Za $x=1$ izrazi $f_1, f_2, f_3, \ldots$ javljaju se u neodređenom obliku. Primenom L'Hospitalovog pravila dobijaju se zbirovi kvadrata, kubova, itd.

Međutim, uvođenjem simboličkog računa, odnosno računa diferencija, zbir potencija prirodnog niza brojeva može se jednostavno izračunati.

Tako, na primer, ako u osnovnoj simboličkoj relaciji

$$g(x+B+1)-g(x+B)=g'(x)$$

stavimo redom $x=0, 1, 2, \ldots, n-1$, pa saberemo sve tako dobijene simboličke relacije, imamo

$$g'(0)+g'(1)+\cdots+g'(n)=g(n+B)-g(B).$$

Stavimo li zatim

$$g(x)=\frac{x^{p+1}}{p+1},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} S_p(\mathrm{n}) &= 1^p+2^p+3^p+\cdots+(n-1)^p+n^p \\ &= \frac{(n+1+B)^{p+1}-B^{p+1}}{p+1}, \end{aligned}$$

ili

$$S_p(n)=\frac{1}{p+1}\left[(p+1)!\,B_{p+1}(n+1)-B_{p+1}\right], \tag{1.1.3}$$

gde je $B_{p+1}(n)$ Bernoulliev polinom stepena $p+1$. Prema tome, (1.1.3) može se još napisati u obliku

$$S_p(n)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_k\,n^{p+1-k}.$$

Vidimo da se u eksplicitnom obliku za zbir potencija prirodnog niza brojeva javljaju Bernoullievi brojevi. Iz izloženoga je jasno zašto su svi raniji pokušaji da se nađe eksplicitan oblik ovih zbirova bili bezuspešni. Tek proučavanjem Bernoullievih brojeva došlo se do rešenja ovog od uvek interesantnog problema.

U knjizi *Table of Powers Giving Integral Powers of Integers* koju je izdao *British Association Mathematical Tables*, 1940., izračunati su zbirovi $S_p(n)$ od $p=1$ do $p=50$ Za sada to je poslednji rezultat na izračunavanju ovih zbirova.

U našoj literaturi nalazimo ove zbirove u knjizi D. S. Mitrinović i D. Mihailović, *Linearna algebra, analitička geometrija, polinomi*, Beograd, 1962, u kojoj su izračunati od $p=1$ do $p=31$.

2. GENERALIZACIJA KONAČNIH ZBIROVA PROIZVODA REALNIH BROJEVA

2.1. Naveli smo (II, 4) da je rešenje generalisane difirencne jednačine

$$f(x+1)-f(x)=\prod_{r=1}^{n-1}(a_r+x\,b_r)$$

ekvivalentno problemu određivanja konačnog zbira

$$f(x)=\sum_{m=1}^{x}\prod_{r=1}^{n-1}[a_r+(m-1)\,b_r], \tag{2.1.1}$$

gde su a_r i b_r makakve konstante, x i n $(n>3)$ celi pozitivni brojevi.

S obzirom na rezultate iz glave (II, 4.) ovoga rada, možemo pisati

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k^n x^{n-k}, \tag{2.1.2}$$

gde su koeficijenti A_k^n $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ definisani izrazom

$$A_k^n = \sum_{j=0}^{k} \frac{B_{k-j}}{k-j} \binom{n-j-1}{k-j-1} H_{n-1}^{n-j-1}, \tag{2.1.3}$$

pri čemu je

$$\frac{B_{k-j}}{k-j} = 1 \text{ za } k=1.$$

Polinomu (2.1.2) možemo dati drugi oblik, tj.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} H_{n-1}^{k-1} (k-1)! \, [B_k(x) - B_k(0)], \tag{2.1.4}$$

gde je $B_k(x)$ Bernoulliev polinom stepena k.

Koeficijenti H_{n-1}^q, o kojima je bilo reči u (II, 4) određuju se iz relacije

$$\prod_{r=1}^{n-1} (a_r + x\, b_r) = \sum_{q=0}^{n-1} H_{n-1}^q x^q, \tag{2.1.5}$$

ili se u specijalnim slučajevima (II, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4) eksplicitno izražavaju pomoću Stirlingovih brojeva prve vrste, odnosno viših izvoda gamma funkcije (II, 4.2.4).

Način koji je D. Mitrinović [25] dao za njihovo formiranje sastoji u sledećem:

Formiraju se kombinacije bez ponavljanja klase q $(q=0, 1, 2, \ldots, p)$ od p elemenata

$$b_1, b_2, \ldots, b_p,$$

i kombinacije klase $p-q$ od p elemenata

$$a_1, a_2, \ldots, a_p.$$

Kombinacija i od jednih i od drugih elemenata biće podjednak broj, jer je

$$\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q}.$$

Zatim se posmatraju dve takve kombinacije, jedna od elemenata b_r, druga od elemenata a_r, tako da se u njima svaki od indeksa $1, 2, 3, \ldots, p$ pojavljuje samo jedanput. Za takve dve kombinacije kaže se da su korespodentne.

Koeficijenat H_p^q jednak je zbiru proizvoda korespodentnih kombinacija.

Jednostavno je dokazati da s obzirom na (II, 4.2.4) koeficijenti H_{p-1}^q $(q=0, 1, 2, \ldots, p-1)$ zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$H_n^q = a_n H_{n-1}^q + b_n H_{n-1}^{q-1}, \tag{2.1.6}$$

pomoću koje, polazeći od $H^0_{n-1}=\prod_{k=0}^{n-1} a_k$, možemo redom izračunati koeficijente H^q_{n-1}.

Za slučaj $a_n=-(p+n)$ ($p=$ konstanta), $b_n=1$, jednačina (2.1.6), kao što smo već pokazali u (II, 4.2.3) svodi se na diferencnu jednačinu

$$H^q_n=H^{q-1}_{n-1}-(p+n)\,H^q_{n-1},$$

čija rešenja za $p=2\,(1)\,11$ nalazimo u pomenutom Mitrinovićevom radu [28], [71].

S obzirom na iznete rezultate možemo formirati čitav niz konačnih zbirova koji će biti sadržani u (2.1.1).

2.2. Zbir

(2.2.1) $$\sum_{k=0}^{n-1}(a+k\,d)^p$$

javlja se kao partikularan slučaj zbira (2.1.1), kada u njemu stavimo $n=p+1$, zatim

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{n-1}=a,$$

$$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_{n-1}=d$$

i

$$H^k_p=\binom{p}{k}a^{p-k}d^k,$$

tako da prema obrascu (2.1.4) zbir (2.2.1) dobija oblik

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^{p-k}d^k\,[B_{k+1}(n)-B_{k+1}(0)]\,\mathrm{k}!,$$

tj. svodi se na poznatu relaciju

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+k\,d)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^{p-k}d^k\,S_k(n-1),$$

gde je

$$S_k(n)=\sum_{t=1}^{n-1}t^k.$$

2.3. Za zbirove oblika

(2.3.1) $$\sum_{k=1}^{x}(-1)^{x-k}\prod_{r=1}^{n}[a_r+(k-1)\,b_r],$$

gde su a_r i b_r makakve konstante, x i n ($n>2$) dva cela pozitivna broja, pokazali smo (II, 7.3) da su rešenja diferencne jednačine

$$f(x+1)+f(x)=\prod_{r=1}^{n}[a_r+x\,b_r],$$

tj. da se svodi na izraz

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}H^k_n\,k!\,E_k(x),$$

gde je $E_k(x)$ Eulerov polinom k-tog stepena, a H_n^q izrazi definisani relacijom

$$\prod_{r=1}^{n}(a_r+x\,b_r)=\sum_{q=0}^{n}H_n^q\,x^q.$$

U specijalnom slučaju kada je $a_r=a$, $b_r=d$, zbir (2.3.1) ima vrednost

$$\sum_{k=1}^{x}(-1)^k\prod_{r=1}^{n}(a+\overline{k-1}\,d)=\frac{(-1)^x}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}d^k E_k(x),$$

dok za slučaj $a_r=0$, $b_r=1$, imamo

$$\sum_{k=1}^{x}(-1)^k(k-1)^n=\frac{(-1)^x}{2}\,n!\,E_n(x).$$

Ostali specijalni slučajevi, s obzirom na izbor koeficijenata a_r i b_r, mogu se jednostavno odrediti prema diskusiji koju smo izveli u (II, 4.2) u vezi sa koeficijentima H_n^q.

2.4. D. S. Mitrinović [58] postavio je sledeći problem:

Posmatrajmo aritmetičke progresije

$$a_r,\ a_r+\alpha_r,\ \ldots,\ a_r+(n-1)\,\alpha_r \qquad (r=1,2,\ldots,p);$$

$$b_s+(n-1)\,\beta_s,\ b_s+(n-2)\,\beta_s,\ \ldots,\ b_s \qquad (s=1,2,\ldots,q),$$

i formirajmo sledeće proizvode

(2.4.1) $$\prod_{r=1}^{p}a_r,\ \prod_{r=1}^{p}(a_r+\alpha_r),\ \ldots,\ \prod_{r=1}^{p}[a_r+(n-1)\,\alpha_r];$$

(2.4.2) $$\prod_{s=1}^{q}[b_s+(n-1)\,\beta_s],\ \prod_{s=1}^{q}[b_s+(n-2)\,\beta_s],\ \ldots,\ \prod_{s=1}^{q}b_s.$$

Naći zbir proizvoda odgovarajućih članova nizova (2.4.1) i (2.4.2).

Dokazaćemo da se ovaj problem svodi na problem iz prethodnog paragrafa (2.2.1). Uvedimo oznake

(2.4.3) $$\varphi_1(n)=\prod_{r=1}^{p}(a_r+n\,\alpha_r)=\sum_{k=0}^{p}H_n^k\,x^k,$$

(2.4.4) $$\varphi_2(n)=\prod_{s=1}^{q}(b_s+n\,\beta_s)=\sum_{k=0}^{q}N_q^k\,x^k.$$

Traženi zbir je tada

(2.4.5) $$f(n)=\varphi_1(0)\,\varphi_2(n)+\varphi_1(1)\,\varphi_2(n-1)+\cdots+\varphi_1(n)\,\varphi_2(0),$$

tj.

(2.4.6) $$f(n)=\sum_{r=0}^{q}N_q^r\sum_{k=0}^{n}(n-k)^r\,\varphi_1(k).$$

U razvijenom obliku (2.4.6) možemo napisati

$$
\begin{aligned}
f(n) = & N_q^0 \varphi_1(n) + g_0(n-1)\ (N_q^0 + N_q^1 n + N_q^2 n^2 + \cdots + N_q^q n^q) \\
& - g_1(n-1)(N_q^1 + 2N_q^2 n + 3N_q^3 n^2 + \cdots + q N_q^q n^{q-1}) \\
& + g_2(n-1)(N_q^2 + \binom{3}{2} N_q^3 n + \binom{4}{2} N_q^4 n^2 + \cdots + \binom{q}{2} N_q^q n^{q-2}) \\
& \vdots \\
& (-1)^q g_q(n-1) N_q^q,
\end{aligned}
$$

gde smo uveli oznaku

$$
(2.4.7) \qquad g_r(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k^r \varphi_1(k).
$$

S obzirom da je polinom $g_r(n)$ rešenje diferencne jednačine

$$
g_r(n) - g_r(n-1) = n^r \prod_{r=1}^{p} (a_r + n\alpha_r) = \sum_{k=0}^{p} H_p^k n^{k+r},
$$

možemo mu prema (II, 4.1) dati oblik

$$
g_r(n) = \sum_{k=0}^{p} H_p^k (k+r)!\, [B_{k+r+1}(n+1) - B_{k+r+1}(0)].
$$

Prema tome, traženi zbir je

$$
f(n) = \sum_{r=0}^{p} (-1)^r g_r(n-1) \frac{\varphi_2^{(r)}(n)}{r!},
$$

gde je

$$
\varphi_2^{(r)}(n) = D^r \varphi_2(n),
$$

i

$$
g_r(n-1) = \sum_{k=0}^{p} H_p^k (k+r)!\, [B_{k+r+1}(n) - B_{k+r+1}(0)],
$$

$B_n(x)$ označava Bernoulliev polinom.

3. SUKCESIVNI ZBIROVI POTENCIJA PRIRODNIH BROJEVA

3. 1. E. Lucas [30] posmatrao je zbirove

$$
(3.1.1) \qquad S_{p+1,n}(x) = S_{p,n}(1) + S_{p,n}(2) + \cdots + S_{p,n}(x),
$$

gde je

$$
S_{1,n}(x) = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + x^n \quad (n, p, x \text{ prirodni brojevi})
$$

i nazvao ih je „sommations succésives des puissances". Iz relacije (3.1.1), za $p = 1$ dobija se izraz

$$
S_{2,n}(x) = S_{1,n}(1) + S_{1,n}(2) + \ldots + S_{1,n}(x),
$$

koji, napisan u razvijenom obliku, glasi

$$\begin{aligned}&1^n\\&+1^n+2^n\\&+1^n+2^n+3^n\\&+\cdots\\&+1^n+2^n+3^n+\cdots+x^n.\end{aligned}$$

Zbir članova u p-toj koloni je $(x-p+1)p^n$ ili $(x+1)p^n-p^{n+1}$. Ako sada u ovaj poslednji izraz stavljamo redom $p=1,2,3,\ldots$ dobijamo za zbir $S_{2,n}(x)$ formulu

$$S_{2,n}(x)=(x+1)\,S_{1,n}-S_{1,n+1},$$

koja se simbolički zapisuje

$$S_{2,n}(x)=S_{1,n}(x+1-S_{0,1}),$$

gde je

$$S_{1,n}\cdot S_{0,1}=S_{1,n+1}.$$

Induktivnim putem dobija se opšta formula

$$S_{p+1,n}(x)=\frac{1}{p!}S_{1,n}(x+1-S_{0,1})(x+2-S_{0,1})\cdots(x+p-S_{0,1}), \tag{3.1.2}$$

za koju se može pretpostaviti da je tačna za $x=k$, tj.

$$S_{p+1,n}(k)=\frac{1}{p!}S_{1,n}(k+1-S_{0,1})(k+2-S_{0,1})\cdots(k+p-S_{0,1}).$$

Ako se zatim u formuli (3.1.2) stavi $x=k+1$, dobija se na levoj strani

$$S_{p+1,n}(k)+S_{p,n}(k+1),$$

a na desnoj

$$\frac{1}{p!}S_{1,n}(k+2-S_{0,1})(k+3-S_{0,1})\cdots(k+p-1-S_{0,1})$$

ili

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p!}S_{1,n}(k+1-S_{0,1})(k+2-S_{0,1})\cdots(k+p-S_{0,1})\\&+\frac{1}{(p-1)!}S_{1,n}(k+2-S_{0,1})(k+3-S_{0,1})\cdots(k+p-S_{0,1}).\end{aligned}$$

Prema tome imamo formulu

$$S_{p,n}(k+1)=\frac{1}{(p-1)!}S_{1,n}(k+2-S_{0,1})(k+3-S_{0,1})\cdots(k+p-S_{0,1}),$$

koja sleduje iz (3.1.2) kada se x zameni sa $k+1$, a p sa $p-1$.

Istovremeno Lucas daje i vrednosti zbira $S_{2,n}$ za $n=1, 2, 3, 4,$ tj.

$$S_{2,1}=\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$$

$$S_{2,2}=\frac{1}{12}x(x+1)^2(x+2)$$

$$S_{2,3}=\frac{1}{60}x(x+1)(x+2)(x^2+6x+3)$$

$$S_{2,4}=\frac{1}{60}x(x+1)^2(x+2)(2x^2+4x-1).$$

3.2. Dokazaćemo [59] da se zbir (3.1.1) može eksplicitno izraziti u obliku polinoma čiji se koeficijenti izražavaju pomoću Bernoullievih brojeva. Zbir (3.1.1) napisaćemo u obliku

(3.2.1) $$S_{p+1}(n,k)=S_p(1,k)+S_p(2,k)+\cdots+S_p(n,k),$$

gde je

$$S_1(n,k)=\sum_{r=1}^{n} r^k.$$

Traženi oblik polinoma može se odrediti ako se pođe od relacije

(3.2.2) $$S_p(n,k)=\sum_{r=1}^{n}\binom{n+p-r-1}{p-1}r^k$$

koja je tačna za $p=1, 2, 3, \ldots$. Pretpostavićemo sada da je ona tačna i za $p=m,$ tj.

(3.2.3) $$S_m(n,k)=\sum_{r=1}^{n}\binom{n+m-r-1}{m-1}r^k.$$

Koristeći se relacijom

$$S_{m+1}(n,k)=S_m(1,k)+S_m(2,k)+\cdots+S_m(n,k),$$

i relacijom (3.2.3) dokazaćemo da je formula (3.2.2) ispunjena i za $p=m+1$. Dakle

$$\begin{aligned}S_{m+1}(n,k)=&\binom{m-1}{m-1}1^k\\ &+\binom{m}{m-1}1^k+\binom{m-1}{m-1}2^k\\ &\vdots\\ &+\binom{n+m-2}{m-1}1^k+\binom{n+m-3}{m-1}2^k+\cdots+\binom{m-1}{m-1}n^k,\end{aligned}$$

i s obzirom na relaciju

$$\binom{m+n-1}{m}=\binom{n+m-2}{m-1}+\binom{n+m-1}{m-1}+\cdots+\binom{m-1}{m-1},$$

dobijamo

$$S_{m+1}(n,k)=\sum_{r=1}^{n}\binom{n+m-r}{m}r^k.$$

Izraz $(p+1)!\,S_p(n,k)$ predstavlja zbir članova odgovarajućih članova $p+k-1$ aritmetičkih progresija. Stoga se on može napisati u obliku formule (2.1.1) kada izvršimo smenu

$$n-1=k+p-1$$

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_k=1,\ a_{k+1}=n+p-2,\ldots,a_{k+p-1}=n$$

$$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_k=1,\ b_{k+1}=b_{k+2}=\cdots=b_{p+k-1}=-1.$$

Tako dobijamo formulu

$$(3.2.4)\qquad (p-1)!\,S_p(n,k)=\sum_{q=1}^{p+k} n^{p+k-q+1}\sum_{j=0}^{q-1}\frac{B_{q-j-1}}{q-j-1}\binom{p+k-j-1}{q-j-2}H_{p+k-1}^{p+k-j-1}$$

iz koje vidimo da je polinom $S_p(n,k)$ stepena $p+k$ po n.

Izraz (3.2.4), s obzirom na relaciju (2.1.4) možemo napisati na sledeći način

$$(3.2.5)\qquad (p-1)!\,S_p(n,k)=\sum_{q=1}^{p+k} H_{p+k-1}^{q-1}\,(q-1)!\,[B_q(n)-B_q(0)].$$

Iz (3.2.5) takođe zaključujemo da je polinom $S_p(n,k)$ stepena $p+k$ po n.

Koeficijente H_{p+k-1}^q određujemo za ovaj specijalan slučaj iz relacije

$$R_{p-1}^q\binom{k}{0}n^k-R_{p-1}^{q-1}\binom{k}{1}n^{k-1}+\cdots+(-1)^q\binom{k}{q}n^{k-q}R_{p-1}^0=H_{p+k-1}^q,$$

gde su brojevi

$$R_{p-1}^q=R_{p-1}^q(-1,-1)$$

definisani sa (II, 4.2.3)

$$\prod_{r=0}^{n-1}[x-(a+br)]=\sum_{r=0}^{n}R_n^r(a,b)\,x^r.$$

4. ZBIROVI RECIPROČNIH POTENCIJA

Kao što smo već ranije izneli (III, 1.3), Bernoullievi brojevi javljaju se u beskonačnim zbirovima recipročnih potencija. Tako je

$$s_{2k}=1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\cdots=\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_{2k},$$

odnosno

$$s_{2k}=\frac{(2\pi)^{2k}}{2\,(2k)!}\,|B_{2k}|\qquad (k \text{ prirodan broj}).$$

Tako, za $k=1,2,3,$ imamo

$$s_2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$s_4=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90},$$

$$s_6=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}.$$

Isto tako, beskonačan zbir

$$\sigma_{2k} = 1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \cdots,$$

može se izračunati sledećim izrazom

$$\sigma_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} |B_{2k}|,$$

s obzirom da je

$$s_{2k} = \sigma_{2k} + \frac{s_{2k}}{2^{2k}}, \quad \sigma_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) s_{2k}.$$

Na taj način dobijamo

$$\sigma_2 = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sigma_4 = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sigma_6 = \frac{\pi_6}{960}.$$

Isto tako, videli smo (II, 5.5.1) da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2n}} = \frac{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}{(2n)!} |B_{2n}|.$$

Prema tome, izračunavanje navedenih redova zahteva poznavanje Bernoullievih brojeva. Određivanje zbira s_m kada je m makakav broj za sada predstavlja nerešen problem.

5. METOD KONAČNIH RAZLIKA ZA IZRAČUNAVANJE KONAČNIH ZBIROVA

Metod konačnih razlika možemo uspešno primeniti za izračunavanje specijalnih konačnih zbirova.

5.1. U (I, 2.1) pokazali smo da se simboličkim računom može jednostavno dobiti zbirni obrazac

(5.1.1) $$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f[x + (n-k)h],$$

koji za $h = 1$ i $x = 0$ postaje

(5.1.2) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(k) = (-1)^n \Delta^n f(0).$$

U slučajevima kada su poznate n-te razlike funkcija, možemo, primenom obrasca (5.1.1), odnosno (5.1.2), dobiti konačne zbirove izvesnih klasa funkcija. Tako, na primer, neka je

1° $$f(x) = \frac{1}{ax+b}.$$

Tada je

$$\Delta^n f(x) = \frac{1}{a} \Delta^n \frac{1}{\left(x + \frac{b}{a} - 1\right) + 1} = \frac{1}{a} \Delta^n \left(x + \frac{b-a}{a}\right)_{-1}.$$

Kako je

$$\Delta^n \left(x+\frac{b-a}{a}\right)_{-1} = \frac{(-1)^n n!}{\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x+1+\frac{b}{a}\right)\cdots\left(x+n+\frac{b}{a}\right)},$$

imamo definitivno

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{a k+b} = \frac{(-1)^n n!\, a^n}{b\,(a+b)\,(2\,a+b)\cdots(n\,a+b)}. \tag{5.1.3}$$

Kao specijalan slučaj obrasca (5.1.3) javljaju se zbirovi

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} = \frac{n!\, 2^n}{(2n+1)!!}$$

$$\vdots$$

2^0 Za slučaj kada je $f(x)=(x)_{-m}$, tj.

$$f(x)=\frac{1}{(x+m)_m},$$

možemo pokazati, primenom istog postupka, da je

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k+m)_m} = \frac{1}{(m+n)\,(m-1)!}.$$

3^0 Isto tako, za slučaj $f(x)=\binom{x+a}{m}$, dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k+a}{m} = (-1)^n \binom{a}{m-n},$$

odakle je, za $a=0$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ (-1)^n & (m=n). \end{cases}$$

5.2. Drugi sumacioni obrazac (I, 2.1)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-k) = \Delta^n f(x-n), \tag{5.2.1}$$

koji je samo posledica obrasca (5.1.1) omogućava izračunavanje specijalnih konačnih zbirova, takođe u slučajevima kada su nam poznate n-te razlike funkcija.

Tako, na primer, imamo

$$f(x)=\binom{x}{m}.$$

tada je

$$\Delta^n f(x)=\binom{x}{m-n} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{a-k}{m}=\binom{a-n}{m-n}.$$

5.3. Sumacioni obrazac (I, 2.3)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)=2^n M^n f(0), \tag{5.3.1}$$

omogućava da odredimo konačne zbirove ukoliko su poznate sredine funkcija.
Tako, na primer, imamo

$$f(x)=\binom{a}{b+x} \Rightarrow M^n f(x)=\frac{1}{2^n}\binom{a+n}{b+x+n},$$

te dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{a}{b+k}=\binom{a+n}{b+n},$$

ili

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{a}{a-b-k}=\binom{a+n}{a-b}.$$

S obzirom da je

$$M^n \cos ax=\left(\cos\frac{a}{2}\right)^n \cos\left(ax+\frac{na}{2}\right),$$

dobijamo obrazac

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos ak=2^n\left(\cos\frac{a}{2}\right)^n\cos\frac{na}{2}.$$

5.4. Obrazac

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(x-k)=2^n M^n f(x-n),$$

koji je posledica obrasca (5.3.1), daje kao ilustraciju Cauchyevu formulu, ako zamenimo $f(x)=\binom{m}{x}$, pa s obzirom da je

$$M^n\binom{m}{x}=\frac{1}{2^m}\binom{n+m}{x+n}$$

nalazimo

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{a-n}{b-k}=\binom{a}{b}.$$

Iz navedenih primera vidi se da je težište sumiranja izvesnih konačnih zbirova uglavnom u poznavanju diferencija, odnosno sredina reda n.

5.5. Primenićemo obrazac (5.1.2)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(k)=(-1)^n\Delta^n f(0)$$

na slučaj kada je

$$f(k)=a_0+a_1 k+a_2 k^2+\cdots+a_p k^p \quad (p<n).$$

Tada je

$$\Delta^n f(0)=\begin{cases} n!\, a_n & (p=n),\\ 0 & (p\neq n).\end{cases}$$

Prema tome

$$(5.5.1)\qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(x)=\begin{cases}0 & (p<n),\\ (-1)^n n!\, a_n & (p=n).\end{cases}$$

Zbir

$$(5.5.2)\qquad \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\binom{n}{i-1}(a_1+i t_1)^{p_1}(a_2+i t_2)^{p_2}\cdots(a_j+i t_j)^{p_j}\quad (t\neq 0)$$

gde je $p_1+p_2+\cdots+p_j=\omega<n$ (p_i pozitivni celi brojevi, a_i i t_i proizvoljne konstante), koji je posmatrao F. S. Nowlan [60] obuhvaćen je obrascem (5.5.1). Stoga je njegova vrednost za $\omega<n$ jednaka nuli, a za $\omega=n$ njegova je vrednost

$$(-1)^n n!\, t_1^{p_1} t_2^{p_2}\cdots t_j^{p_j}.$$

6. GENERALISANI KONAČNI ZBIROVI RECIPROČNIH PROIZVODA

Zbirovi oblika

$$(6.1.1)\qquad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is),$$

gde su m, ν prirodni brojevi a n, p, s realni, predmet su Mitrinovićevog rada [61], u kome su izračunati na način koji je različit od ovoga koji ćemo sada izložiti.

Metod konačnih razlika može se primeniti i za izračunavanje zbirova (6.1.1), kao što smo pokazali u radu [62].

Primenićemo opšti zbirni obrazac (I, 2.1)

$$\underset{h}{\Delta^m} f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+m}\binom{m}{k}\underset{h}{E^k} f(x),$$

tj. za $x=0$

$$(6.1.2)\qquad (-1)^m\underset{h}{\Delta^m} f(0)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f(kh),$$

za izračunavanje specijalnog zbira

$$(6.1.3) \qquad \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+k+i).$$

Stavimo li $h=1$ i

$$f(k) = 1 \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+k+i) = (n+k-1)_{\nu},$$

prema (6.1.2) imamo

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+k+i) = (-1)^m \Delta^m (n-1)_{-\nu}.$$

Kako je

$$(6.1.4) \qquad \underset{h}{\Delta^m} (x)_{r,h} = h^m (r)_m (x)_{r-m,h}$$

gde je r ceo broj, dobijamo

$$\Delta^m (n-1)_{-\nu} = (-\nu)_m (n-1)_{-\nu-m},$$

ili, s obzirom da je

$$(-\nu)_m = \frac{(-1)^m (\nu+m-1)!}{(\nu-1)!},$$

$$(n-1)_{-\nu-m} = \frac{1}{(m+n+\nu-1)_{\nu+m}},$$

dolazimo do obrasca za zbir (6.1.3)

$$(6.1.5) \qquad \sum_{k=0}^{m} \left[(-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+k+i) \right] = \frac{(m+\nu-1)!}{(\nu-1)!\,(m+n+\nu-1)_{\nu+m}}.$$

Pomoću zbira (6.1.5) jednostavno se izračunava i zbir

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} [n+p\,(k+i)] = \sum_{k=0}^{m} \left[(-1)^k \binom{m}{k} \Big/ p^{\nu} \prod_{i=0}^{\nu-1} \left(\frac{n}{p} + k + i \right) \right]$$
$$= \frac{1}{p^{\nu}} \frac{(m+\nu-1)!}{(\nu-1)! \left(m + \dfrac{n}{p} + \nu - 1 \right)_{\nu+m}},$$

koji odgovara obrascu (16) iz [61, 7].

6.2. Ovaj postupak primenićemo i na opštiji zbir

$$\sum_{k=0}^{m} \left[(-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+kp+is) \right].$$

Ako stavimo

$$1 \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+kp+is) = (n+kp-s)_{-\nu,s},$$

i zatim

$$f(x) = (x+n-s)_{-\nu, s},$$

imamo

$$f(x+kp) = (x+n+kp-s)_{-\nu, s},$$

pa je

$$f(0) = (n-s)_{-\nu, s}, \quad f(kp) = (n+kp-s)_{-\nu, s}.$$

Prema obrascu (6.1.2) nalazimo

$$(-1)^m \underset{p}{\Delta^m} f(0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(kp),$$

stoga je

(6.2.1) $$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+kp+is) = (-1)^m \underset{p}{\Delta^m} (n-s)_{-\nu, s}.$$

Izračunavanje izraza $\underset{p}{\Delta^m}(n-s)_{-\nu, s}$ svodi se na problem da se razlike funkcije iz sistema sa priraštajem p izraze razlikama te iste funkcije iz sistema sa priraštajem s.

U tu svrhu posmatraćemo sledeći Newtonov red za funkciju $f(x)$

(6.2.2) $$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x}{i}_s \frac{\underset{s}{\Delta^i} f(0)}{s^i},$$

gde je $\binom{x}{i}_s$ generalisani binomni koeficijent (I, 6.2), čija je vrednost

$$\binom{x}{i}_s = \frac{1}{i!} (x)_{i, s}.$$

Izvršićemo sada operaciju $\underset{p}{\Delta^m}$ na red (6.2.2), te za $x=0$ dobijamo

$$\underset{p}{\Delta^m} f(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\underset{p}{\Delta^m} \binom{x}{i}_s \right]_{x=0} \frac{\underset{s}{\Delta^i} f(0)}{s^i}.$$

Poznato je [6, 220—240] da je

$$\left[\underset{p}{\Delta^m} \binom{x}{i}_s \right]_{x=0} = \frac{m!\, s^i}{i!} P(i, m),$$

gde su izrazi $P(i, m)$ vezani rekurentnom relacijom

$$P(i+1, m) = \left(m \frac{p}{s} - i \right) P(i, m) + \frac{p}{s} P(i, m-1).$$

Za izraz $P(i, m)$ pokazuje se da je

$$P(i, m) = \sum_{j=m}^{i} \left(\frac{p}{s} \right)^j S_i^j \, \sigma_j^m,$$

gde su S_i^j i σ_j^m Stirlingovi brojevi prve odnosno druge vrste. Na osnovu toga dobijamo

$$\underset{s}{\Delta^m} f(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m!}{i!} P(i,m) \underset{s}{\Delta^i} f(0). \tag{6.2.3}$$

Za slučaj $f(0) = (n-s)_{-\nu,s}$, s obzirom da je

$$\underset{s}{\Delta^i} (n-s)_{-\nu,s} = s^i(-\nu)_i (n-s)_{-\nu-i,s},$$

imamo

$$\underset{p}{\Delta^m} (n-s)_{-\nu,s} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i m! (\nu+i-1)}{[n+(\nu+i+1)s]_{\nu+i,s}} P(i,m).$$

Zamenivši ovaj izraz u obrazac (6.2.1), dobijamo

$$\sum_{k=0}^{m} \left[(-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+kp+is)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+m} s^i m! (\nu+i-1)_i}{i! [n+(\nu+i+1)s]_{\nu+i,s}} P(i,m).$$

Za slučaj $s=p$ imamo

$$P(i,m) = \sum_{j=m}^{i} S_i^j \sigma_j^m = \begin{cases} 0 & (i \neq m), \\ 1 & (i=m), \end{cases}$$

te prema tome, dobijamo opšti obrazac

$$\sum_{k=0}^{m} \left[(-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+kp+pi)\right] = \frac{(\nu+m-1)!}{p^\nu (\nu-1)! \left(\frac{n}{p}+m+\nu-1\right)_{\nu+m}}$$

koji odgovara obrascu (16) iz [61, 7].

6.3. Ako je funkcija $f(x)$ polinom stepena r, obrazac (6.2.3) postaje

$$\underset{p}{\Delta^m} f(0) = \sum_{i=0}^{r} \frac{m!}{i!} P(i,m) \underset{s}{\Delta^i} f(0),$$

gde je

$$P(i,m) = \sum_{j=m}^{i} \left(\frac{p}{s}\right)^j S_i^j \sigma_j^m .$$

Tako, na primer, možemo izračunati zbir

$$\sum_{k=0}^{m} \left[(-1)^k \binom{m}{k} \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+kp+is)\right].$$

Za taj slučaj

$$f(0) = (n+\overline{\nu-1}\,s)_{\nu,s}; \qquad f(kp) = (n+kp+\overline{\nu-1}\,s)_{\nu,s},$$

pa je

$$\underset{p}{\Delta^m} (n+\overline{v-1\, s})_{v,s} = \sum_{i=0}^{v} \frac{m!}{i!} P(i,m) \underset{s}{\Delta^i} (n+\overline{v-1\, s})_{v,s}.$$

Zatim, s obzirom na obrazac (6.1.4), imamo

$$\underset{s}{\Delta^i} (n+\overline{v-1\, s})_{v,s} = s^i (v)_i (n+\overline{v-1\, s})_{v-i,s}$$

te dobijamo opšti obrazac

$$\sum_{k=0}^{m} \left[(-1)^k \binom{m}{k} \prod_{i=0}^{v-1} (n+kp+is) \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{v} \frac{(-1)^m m!\, s^i}{i!} (v)_i (n+\overline{v-1\, s})_{v-i,s} P(i,m)$$

$$= (-1)^m m! \sum_{i=0}^{m} s^i \binom{v}{i} (n+\overline{v-1\, s})_{v-i,s} P(i,m).$$

Za slučaj $p=s$ imamo obrazac

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \prod_{i=0}^{v-1} (n+\overline{k+i}\, p) = (-1)^m \frac{p^v v!}{(v-m)!} \left(\frac{n}{p}+v-1\right)_{v-m}.$$

7. GENERALISANI GEOMETRIJSKI RED

7.1. Posmatraćemo red [63]

(7.1.1) $$F_n(x) = \sum_{k=}^{\infty} [a+(k-1)d]^n x^k \quad (|x|<1).$$

gde je n prirodan broj.

Ako diferenciramo (7.1.1), dobijamo

$$F'_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k[a+(k-1)d]^n x^{k-1},$$

odnosno

(7.1.2) $$x\, d\, F'_n(x) + (a-d) F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a+(k-1)d]^{n+1} x^k.$$

Prema tome, dobili smo rekurzivnu formulu za izračunavanje reda (7.1.1)

(7.1.3) $$F_{n+1}(x) = x\, d\, F'_n(x) + (a-d) F_n(x).$$

Kako je

$$F_0(x) = \frac{x}{1-x},$$

dobija se, korišćenjem formule (7.1.3)

$$F_1(x)=\frac{x}{(1-x)^2}\,[a+(d-a)\,x],$$

$$F_2(x)=\frac{x}{(1-x)^3}\,[(d-a)^2\,x^2+(d^2+2a\,d-2a^2)\,x+2ad-d^2],$$

$$F_3(x)=\frac{x}{(1-x)^4}\,\{(d-a)^3x^3+[(a+d)^3-4\,a^3]x^2+[(a+2d)^3-4\,(a+d)^3+6a^3]x+$$
$$+(a+3d)^3-4\,(a+2d)^3+6\,(a+d)^3-4a^3\},$$

$$\vdots$$

tako da uopšte možemo staviti

$$F_n(x)=\frac{x}{(1-x)^{n+1}}\,P_n(x), \tag{7.1.4}$$

gde je $P_n(x)$ polinom stepena n.

Iz (7.1.3), s obzirom na (7.1.4) i na relaciju

$$F_n'(x)=\frac{1}{(1-x)^{n+2}}\,[(n\,x+1)\,P_n(x)+x\,(1-x)\,P_n'(x)],$$

dobijamo

$$P_{n+1}(x)=[(n\,d+d-a)\,x+a\,P_n(x)+x\,d\,(1-x)\,P_n'(x)]. \tag{7.1.5}$$

Ovom rekurzivnom formulom možemo postupno izračunati polinome $P_n(x)$.

Stavićemo sada

$$P_n(x)=\sum_{r=0}^{n} K_r^n(a,d)\,x^r,$$

tako da je

$$P_n'(x)=\sum_{r=1}^{n} r\,K_r^n(a,d)\,x^{r-1},$$

pa, s obzirom da je

$$P_{n+1}(x)=\sum_{r=0}^{n+1} K_r^{n+1}(a,d)\,x^r,$$

zamenom u (7.1.5) dobijamo

$$\sum_{r=0}^{n+1} K_r^{n+1}(a,d)\,x^r=\sum_{r=0}^{n} K_r^n(a,d)\,(nd+d-a)\,x^{r+1}+\sum_{r=0}^{n} a\,K_r^n(a,d)\,x^r$$
$$+\sum_{r=1}^{n} r\,d\,K_r^n(a,d)\,x^r-\sum_{r=1}^{n} r\,d\,K_r^n(a,d)\,x^{r+1}.$$

Izjednačavanjem koeficijenata pred x^{r-1} dolazimo do

$$K_r^n(a,d)=[(n-r+1)\,d-a]\,K_{r-1}^{n-1}(a,d)+(a+d\,r)\,K_r^{n-1}(a,d). \tag{7.1.6}$$

Iz (7.1.6) sleduje

$$(7.1.7)\qquad K_r^n(a,d)=\sum_{i=1}^{n-r}(a+rd)^{i-1}\,[(n-r+2-i)\,d-a]\,K_{r-1}^{n-i}(a,d).$$

Za $r=0$ iz (7.1.6) dobijamo

$$K_0^n(a,d)=[(n+1)\,d-a]\,K_{-1}^n(a,d)+K_1^{n-1}(a,d),$$

pa kako je $K_{-1}^n(a,d)=0$, imamo

$$K_0^n(a,d)=a\,K_0^{n-1}(a,d)=\cdots=a^n K_0^0(a,d)=a^n.$$

S obzirom na početni uslov $K_0^n(a,d)=a^n$ i na relaciju (7.1.7) dobijamo postupno

$$\begin{aligned}
K_0^n(a,d)&=a^n,\\
K_1^n(a,d)&=(a+d)^n-\binom{n+1}{1}a^n,\\
K_2^n(a,d)&=(a+2d)^n-\binom{n+1}{1}(a+d)^n+\binom{n+1}{2}a^n,\\
&\ \ \vdots\\
K_r^n(a,d)&=(a+rd)^n-\binom{n+1}{1}[a+(r-1)\,d]^n+\cdots+(-1)^r\binom{n+1}{r}a^n,
\end{aligned}$$

tj.

$$(7.1.8)\qquad K_r^n(a,d)=\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}[a+(r-m)\,d]^n.$$

Prema tome obrazac (7.1.4) postaje

$$(7.1.9)\qquad F_n(x)=\frac{x}{(1-x)^{n+1}}\sum_{r=0}^{n}\left[\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}[a+(r-m)\,d]^n\right]x^r.$$

Obrazac (7.1.8) možemo dokazati pokazavši da $K_r^n(a,d)$ zadovoljava rekurzivnu relaciju (7.1.7). Tako imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}[a+(r-m)\,d]^n&=\\
&=[(n-r+1)\,d-a]\sum_{m=0}^{r-1}(-1)^m\binom{n}{m}[a+(r-m-1)\,d]^{n-1}\\
&\quad+(a+dr)\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n}{m}[a+(r-m)\,d]^{n-1}\\
&=(a+dr)\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}[a+(r-m)\,d]^{n-1}\\
&\quad-m\,d\sum_{m=1}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}[a+(r-m)\,d]^{n-1}\\
&=\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}[a+(r-m)\,d]^n,
\end{aligned}$$

čime je, s obzirom na početni uslov $K_0^n(a,d)=a^n$ obrazac (7.1.8) dokazan.

7. 2. Dokazaćemo sada da se koeficijenti polinoma $P_n(x)$, kojim smo izrazili generalisani geometrijski red (7.1.1) javljaju pri razvijanju stepena $(a-xd)^n$ u specijalni binomni red.

Prema L. Carlitzovim rezultatima [64], poznato je da ako je $f(x)$ proizvoljan polinom stepena $\leqslant n$, tada je

$$f(x)=(-1)^n\sum_{r=0}^{n} C_r\binom{x+k-1}{n}, \tag{7.2.1}$$

gde su koeficijenti C_r definisani sa

$$C_r=\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}f(m-r). \tag{7.2.2}$$

Stavljajući $f(x)=(a-xd)^n$, dobijamo

$$(a-xd)^n=(-1)^n\sum_{r=0}^{n} C'_r\binom{x+k-1}{n},$$

gde je

$$C'_r=\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}[a+(r-m)d]^n.$$

Koeficijenti C'_r identični su koeficijentima $K_r^n(a,d)$, te prema tome imamo

$$(a-xd)^n=(-1)^n\sum_{r=0}^{n} K_r^n(a,d)\binom{x+k-1}{n}. \tag{7.2.3}$$

Kod Nielsena [22, 28] nalazimo izraz

$$\beta_r^n(\alpha)=\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\binom{n+1}{m}(\alpha+r-m)^n,$$

koji je sa koeficijentima $K_r^n(a,d)$ vezan relacijom

$$K_r^n(a,d)=d^n\beta_r^n\left(\frac{a}{d}\right).$$

S obzirom na poznatu relaciju između brojeva $\beta_r^n(\alpha)$ i Bernoullievih brojeva [22, 238], možemo Bernoullieve brojeve izraziti koeficijentima $K_r^n(a,d)$, tj.

$$\frac{2d^n(2^{2n}-1)B_n}{2n}=\sum_{m=0}^{2n}\left[\binom{a/d+m}{2n}-\binom{a/d+m-1/2}{2n}\right]K_m^{2n-1}(a,d).$$

7.3. Red (7.1.1) je generalizacija geometrijskog reda

$$F_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x^k=\frac{x}{1-x}$$

a red

$$K_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^n x^k, \tag{7.3.1}$$

koji su posmatrali R. Staley [67], M. C. Klamkin [68] i D. Zeitlin [69], takođe je specijalan slučaj reda (7.1.1), gde je $a=d=1$.

R. Staley [67] došao je do sledećeg rezultata

$$(7.3.2)\qquad K_n(x)=(1-x)^{-n-1}\sum_{r=1}^{n}\left[\sum_{m=1}^{r}(-1)^{m+1}\binom{n+1}{m-1}(r-m+1)^n\right]x^r.$$

Obrazac (7.3.2) sadržan je u obrascu (7.1.9), iz koga se dobija za $a=1$, $d=1$.

M. S. Klamkin [68] pokazao je da se red (7.3.1) može napisati u obliku

$$(7.3.3)\qquad K_n(x)=(1-x)^{-n-1}\sum_{r=0}^{n}x^{r+1}(1-x)^{n-r}\Delta^r 1^n.$$

Da bi zbir $K_n(x)$ izrazio pomoću generalisanih Bernoullievih brojeva, odnosno, Stirlingovih brojeva prve vrste, M. C. Klamkin navodi relacije

$$(7.3.4)\qquad \Delta^r 0^n+\Delta^{r+1}0^n=\Delta^r 1^n,$$

$$(7.3.5)\qquad \Delta^r 0^n=\frac{n!}{(n-r)!}B_{n-r}^{(-r)},$$

$$(7.3.6)\qquad S_n^m=\binom{n-1}{m-1}B_{n-m}^{(n)}.$$

Međutim, H. W. Gould [70] primećuje u vezi sa ovim radom, da postoje znatne teškoće pri prelasku sa relacije (7.3.5) na (7.3.6), i sugerira da bi se s obzirom na jednakosti

$$(7.3.7)\qquad S_n^k=(-1)^{n-k}S_1(n-1,n-k),$$

$$(7.3.8)\qquad \sigma_n^k=S_2(k,n-k)=\frac{1}{k!}\Delta^k 0^n,$$

relacija (7.3.3) mogla izraziti pomoću Stirlingovih brojeva druge vrste. Naime jednakost

$$B_{n-k}^{-k}=\frac{S_{-k}^{-n}}{\binom{-k-1}{-n-1}},$$

koja sleduje iz (7.3.6), dobija smisao koristeći (7.3.7), kao i jednakosti

$$S_1(-n-1,k)=S_2(n,k);\quad S_2(-n-1,k)=S_1(n,k).$$

Na taj način dobija se

$$S_{-k}^{-n}(-1)^{n-k}S_1(-k-1,-k+n)=(-1)^{n-k}S_2(k,n-k)=(-1)^{n-k}\Delta^k 0^n.$$

U vezi sa ovim navešćemo jedan postupak kojim se zbir (7.3.1) može direktno izraziti pomoću Stirlingovih brojeva druge vrste. Ovakav postupak koristio je i I. J. Schwatt [65] za izračunavanje sličnih zbirova.

Primenimo operator Θ^n (I, 8.1, 8.3) na zbir $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$. Tako dobijamo

$$\Theta^n\sum_{k=1}^{\infty}x^k=\left(x\frac{d}{dx}\right)^n\sum_{k=1}^{\infty}x^k=\sum_{k=1}^{\infty}k^n x^k.$$

S druge strane, prema (I, 8.1.2) je

$$\Theta^n = \sum_{m=1}^{n} \sigma_n^m x^m D^m,$$

te je

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = \sum_{m=1}^{n} \sigma_n^m x^m D^m \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \sum_{m=1}^{n} \sigma_n^m x^m D^m \frac{x}{1-x}.$$

Tako dobijamo

$$K_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} m!\, \sigma_n^m,$$

ili

(7.3.9) $$K_n(x) = (1-x)^{n-1} \sum_{m=1}^{n} x^m (1-x)^{n-m} \Delta^m 0^n,$$

gde je $\Delta^m 0^n = m!\, \sigma_n^m$.

Stavimo li

$$\sum_{m=1}^{n} x^m (1-x)^{n-m} m!\, \sigma_n^m = \sum_{k=1}^{n} A_k x^n,$$

nalazimo za koeficijente A_k izraz

$$A_k = \sum_{r=1}^{k} \binom{n-r}{n-k} (-1)^{k-r} r!\, \sigma_n^r.$$

Koristeći obrazac (7.3.4), možemo jednostavno dokazati da je izraz (7.3.9) identičan izrazu (7.3.3).

Primenimo li, zatim, operator $\Theta_\alpha = \alpha + x \dfrac{d}{dx}$ na zbir $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$, dobijamo

$$\Theta^n \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + k)^n x^k.$$

Primenom obrasca (I, 8.5.1)

$$\Theta_\alpha^n = \sum_{m=0}^{n} \sigma_n^m(\alpha)\, x^m D^m$$

nalazimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + k)^n x^k = (1-x)^{-n-1} \sum_{m=0}^{n} \sigma_n^m(\alpha)\, x^m (1-x)^{n-m}.$$

Ovo je takođe jedna generalizacija reda (7.3.1), a dobija se iz opštijeg reda (7.1.1) za $a = \alpha + 1$ i $d = 1$.

Koeficijenti $\sigma_n^m(\alpha)$ dati su (I, 8.5.3) eksplicitno izrazom

$$\sigma_n^m(\alpha) = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (\alpha + i)^n,$$

tj.

$$\sigma_n^m(\alpha) = \frac{\Delta^m \alpha^n}{m!}.$$

LITERATURA

[1] G. Boole: *A Treatise on the Calculus of Finite Differences*, Cambridge 1860; 3 th edition Dover Publication, 1960.

[2] A. A. Markoff: *Differenzenrechnung*, Leipzig 1896.

[3] D. Seliwanoff: *Lehrbuch der Differenzenrechnung*, Leipzig 1904.

[4] N. E. Nörlund: *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, New York 1954.

[5] L. M. Milne-Thomson: *The Calculus of Finite Differences*, London 1951.

[6] Ch. Jordan: *Calculus of Finite Differences*, New York 1950.

[7] А. О. Гельфонд: *Исчисление конечных разностей*, Москва 1959.

[8] Ch. De la Vallée Poussin: *Cours d'Analyse Infinitésimale*, Paris 1932.

[9] J. F. Steffensen: *Interpolation*, New York 1950.

[10] A. Henry: *Le calcul des différences finies*, Paris 1932.

[11] W. F. Sheppard: *Encyclopaedia Britannica*, Vol. VIII, 1910, p. 223.

[12] T. N. Thiele: *Interpolationsrechnung*, Leipzig 1909.

[13] D. André: *Terme générale d'une série quelconque, déterminée à la façon des séries recurrentes*, Thèse, Paris 1877.

[14] P. S. Laplace: *Théorie analytique des probabilités*, Paris 1812.

[15] L. Stirling: *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, London 1730.

[16] Ш. Е. Микеладзе: *Разложение конечной разности от функции по разностям от ее производной*, Доклады Академии Наук СССР, 92, № 3, 1953, стр. 479-482.

[17] K. Milošević: *Razlaganje konačne razlike funkcije po razlikama njenih izvoda*, Bilten DMF, NRM, 6, 1955, str. 1-8.

[18] J. Karamata: *Teorija i praksa Stieljetsova integrala*, Beograd 1949.

[19] L. Euler: *Methodus generalis summandi progressiones*, Comment. acad. sc. Petropolitanae, t. 6, 1738.

[20] L. Saalschütz: *Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Sekanten-Koeffizienten und ihre wichtigeren Anwendungen*, Berlin 1893.

[21] J. L. Raabe: *Die Jacob Bernoullische Function*, Zürich 1848.

[22] N. Nielsen: *Traité élémentaire de nombres de Bernoulli*, Paris 1923.

[23] O. Schlömilch: *Compendium der höheren Analysis*, Braunschweig 1895.

[24] W. Maier: *Euler-Bernoullische Reichen*, Mathematische Zeitschrift, 30, 1929, S. 53-78.

[25] D. S. Mitrinović: *O Stirlingovim brojevima*, Godišen zbornik na Fil. fak. Skopje, 1, 1948, str. 45—95.

[26] K. Milošević: *O zbiru jednog reda sa konačnim brojem članova*, Posebna izdanja 3, Filoz. fak. Skopje, 1950.

[27] D. S. Mitrinović et R. S. Mitrinović: *Sur une classe de nombres se rattachant aux nombres de Stirling*, Publikacije Elektrot. fak., Beograd, Serija: Mat. i fiz., № 60 (1961).

[28] D. S. Mitrinović et R. S. Mitrinović: *Tableaux d'une classe de nombres reliés au nombres de Stirling*, Publikacije Elektrot. fak., Beograd, Serija: Mat. i fiz., № 77 (1962).

[29] N. Nörlund: *Memoire sur les polynomes de Bernoulli*, Acta Mathematica, 43, 1920, p. 121—196.

[30] E. Lucas: *Théorie des nombres*, Paris, 1891, p. 238.

[31] P. Bachman: *Niedere Zahlentheorie*, Berlin 1910.

[32] Hagen: *Synopsis.*

[33] S. Ramanujan: *Some properties of Bernoulli's numbers*, Journal of the Indian Mathematical Society, 3, 1911, p. 219—234.

[34] E. Cesàro: *Principes du calcul symbolique*, Mathesis, 3, 1883, p. 10—17.

[35] A. Berger: *Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres*, Upsal 1880.

[36] A. Buhl: *Nouveaux élements d'analyse*, Paris 1948, p. 85—89.

[37] J. Bernoulli: *Ars conjectandi*, Basel 1713.

[38] L. Euler: *Institutiones calculi differentialis*, Petrograd 1755, p. 420.

[39] A. Rothe: *Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen*, Leipzig 1800; Journal de Crelle, 20, 1840, S. 11—12.

[40] J. S. Adams: *On the calculation of Berroulli's numbers up to B_{62} by means of Standt's theorem*, Rep. British Ass. 1877, p. 8—14.

[41] S. Z. Serebrennikoff: *Tables des premiers quatre vingt dix nombres de Bernoulli*, Mem. Acad. sc. Petersbourg 1905, № 10, p. 1—8, 1906, № 4

[42] D. H. Lehmer: *An extension of the table of Bernoulli numbers*, Duke Math. Journal, 1936, 2, p. 460—464.

[43] H. T. Davis: *Tables of the higher mathematical functions*, Bloomington 1935, p. 240.

[44] K. G. C. von Staudt: *Beweis eines Lehresatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 21, 1840, S. 372—374.

[45] Th. Clausen: *Theorem*, Astronomische Nachrichten, 17, 1840, S. 351—352.

[46] J. V. Uspensky, M. A. Heaslet: *Elementary Number Theory*, New York 1939.

[47] J. J. Sylvester: *On the integral of the general equation in differences*, Philos. mag. 24, 1862, p. 436—441.

[48] R. Lipschitz: *Beiträge zu der Kenntnis der Bernoullischen Zahlen*, Journal de Crelle, 96, 1884, p. 1—16.

[49] R. Lipschitz: *Sur la représentation asymptotique de la valeur numérique ou de la partie entière des nombres de Bernoulli*, Bulletin de Darboux, 10, 1886, p. 135—144.

[50] M. A. Stern: Journal de Crelle, 84, p. 216, 1872.

[51] E. Cesàro: Nouvelle correspodance mathématique, 6, 1880, p. 429.

[52] *Table of Powers Giving Integral Powers of Integers*, British Association Mathematical Tables, London 1940.

[53] Fletcher, Miller, Rosenhead, Comrie: *An Index of Mathematical Tables*, London 1962.

[54] A. V. Ettingshausen: *Vorlesungen über die höhere Mathematik*, Wien 1827, I, S. 285.

[55] A. L. Cauchy: Résumes analytiques, Turin 1833, p. 71.

[56] F. Arndt: Archiv de Grunert, 10, 1847, p. 342—344.

[57] N. H. Abel: Oeuvres complétes, II, p. 4, Kristiania 1839.

[58] D. S. Mitrinović: Note № 2837, The Mathematical Gazete, 1959.

[59] K. Milošević: *O jednom Pizaovom problemu*, Bilten DMF NRM, 2, 1951, str. 25—29.

[60] F. S. Nowlan: *The evaluation of summation with binomial coefficients*, Mathematical Magazine, 34, 1961, p. 161—163.

[61] D. S. Mitrinović: *Sur quelques formules sommatoires*, Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathém. et physique, №. 7, 1956.

[62] K. Milošević: *Sur quelques sommes finies*, Bulletin de la Soc. des math. et phys. de la R. P. de Serbie, 8, 3—4, 111—116, Beograd 1956.

[63] K. Milošević: *O jednom generalisanom geometrijskom redu*, Bilten DMF NRM, 7, 1956, str. 1—7.

64] L. Carlitz: *Note on a paper of Shanks*, Amer. Math. Monthly, 59, 1952 p. 239—241.

[65] I. J. Schwatt: *An introduction to the operations with series*, New York 1924.

[66] M. d'Ocagne: *Sur une classe de nombres remarquables*, Amer. J. math. 9, 1887, p. 353—380.

[67] R. Staley: *A generalization of the geometric series*, American Math. Monthly 56, 1949, p. 325—327.

[68] M. S. Klamkin: *On a generalization of the geometric series*, American Math. Monthly, 64, 1957, p. 91—93.

[69] D. Zeitlin: *Two methods for the evaluation of* $\sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k$, American Math. Monthly, 68, 1961, p. 986—989.

[70] H. W. Gould: *Note on a paper of Klamkin concerning Stirling numbers*, American Math. Monthly, 68, 1961, p. 477—479.

[71] D. S. Mitrinović et R. S. Mitrinović: *Tableaux d'une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling*, II, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Beograd, Serija: Mat. i fiz., № 107, 1963.

Résumé

CONTRIBUTION À LA THÉORIE ET À L'APPLICATION DES POLYNÔMES ET DES NOMBRES DE BERNOULLI

Kovina Milošević-Rakočević

Dans ce travail l'auteur, faisant usage en principe du calcul aux différences finies, a exposé de façon systématique les théorèmes généraux et les proprietés générales des polynômes et des nombres de Bernoulli, ainsi que leur généralisation en vue de leur application au calcul de sommes finies spéciales.

Le travail est divisé en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre on a rappelé les éléments indispensables du calcul aux différences finies qui ont été utilisés au cours de ce travail.

On a traité, ensuite, le problème de la décomposition d'une différence finie d'une fonction, suivant les différences de ses derivées. A ce propos l'on a demontré que l'on peut donner une nouvelle forme à la formule de Mikeladze [16]

$$\Delta^n f(a+\lambda h) = h^n \sum_{\rho=0}^{n} A_{n\rho} f^{(n)}(a) + R_{nr},$$

étant donné que les coefficients $A_{n\rho}$ s'expriment au moyen des nombres de Stirling de I et II espèces, ainsi que des nombres de Bernoulli de II espèce (I, 7.3).

Dans le premier chapitre on a donne, aussi, la généralisation des operateurs

$$\Theta = xD, \qquad \psi = x\Delta$$

sous la forme

$$\Theta_\alpha = \alpha + xD, \qquad \psi_\alpha = \alpha + x\Delta,$$

d'où on a obtenu

$$\Theta_\alpha^n = \sum_{k=0}^{n} \sigma_n^k(\alpha) x^k D^k, \qquad \psi_\alpha^n = \sum_{k=0}^{n} \sigma_n^k(\alpha)(x+k-1)_k \Delta^k.$$

Les nombres $\sigma_n^k(\sigma)$ sont définis par la relation

$$(x+\alpha)^n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_n^k(\alpha)(x)_k.$$

Par l'application de ces opérateurs on a effectué dans le quatrième chapitre, la sommation de la série géométrique généralisée.

Dans le même chapitre, par analogie avec l'opérateur $Z=(x+1)+xD$, utilisé dans l'analyse, on a défini un nouvel opérateur $Y=(x+1)+x\Delta$ et l'on a donné l'algèbre qu'exige cet operateur. (I, 8.3).

On a montré, ensuite, que

$$Y^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta^k P_n(x)}{k!}(x+k-1)_k\Delta^k,$$

où le polynôme $P_n(x)$ est défini par la relation suivante

$$P_{n+1}(x)=xP_n(x+1)+P_n(x).$$

Dans le deuxième chapitre on a considéré l'équation aux différences finies de Bernoulli généralisée

$$f(x+1)-f(x)=\prod_{r=1}^{n-1}(a_r+xb_r)$$

(a_r, b_r constantes quelconques, n ($n\geqslant 3$) nombres naturels), et l'on a donné sa solution sous forme explicite (II, 4).

En relation avec ce qui a été exposé, l'on a déterminé la forme explicite des coefficients H_n^q definis par l'identité

$$\prod_{r=1}^{n}(a_r+b_rx)=\sum_{q=0}^{n}H_n^q x^q,$$

et on a donné les expressions des coefficients H_n^q pour les valeurs particulieres des constantes a_r et b_r.

On est arrivé ensuite à de nouvelles relations entre les nombres de Bernoulli et les nombres de Stirling (II, 5.3).

Dans le deuxième chapitre on a traité encore les polynômes d'Euler sur la base de l'équation aux différences finies

$$f(x+1)+f(x)=\prod_{r=1}^{n}(a_r+xb_r),$$

et l'on a donné la solution de cette équation sous la forme explicite (II, 6.3).

Dans le troisième chapitre on a donné l'application du calcul symbolique à la formation des relations entre les nombres de Bernoulli. Par la même mèthode on a déduit les relations connues de Ramanujan, ainsi que les nouvelles relations entre les nombres de Bernoulli et de Stirling de I espèce (III, 5.2).

Dans le quatrième chapitre on a appliqué les résultats des chapitres I et II et l'on y a apporté quelques formules sommatoires.

Séparément on été sommées les expressions (IV, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4)

$$\sum_{m=1}^{x}\prod_{r=1}^{n-1}[a_r+(m-1)b_r],\quad \sum_{m=1}^{x}(-1)^{x-m}\prod_{r=1}^{n}[a_r+(m-1)b_r],$$

$$\sum_{k=0}^{x}\left(\prod_{r=1}^{p}(a_r+k\alpha_r)\cdot\prod_{s=1}^{q}[b_s+(x-k)\beta_s]\right).$$

On a appliqué aussi la méthode du calcul aux différences finies pour effectuer la sommation de l'expression

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\middle|\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\},$$

ainsi que

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\},$$

où m, ν désignent des nombres naturels et n, p, s des nombres réels.

Enfin, par application de l'opérateur Θ_α on a étudié la série

$$K_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^n x^k .$$

On a démontré que la série géométrique généralisée suivante

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[a+(k-1)d]^n x^k \quad (n \text{ nombre naturel, } |x|<1),$$

a pour somme

$$F_n(x)=(1-x)^{-n-1}\sum_{r=0}^{n}K_r^n(a,d)\,x^{r+1},$$

où $K_r^n(a,\alpha)$ sont des nombres qui peuvent être exprimés au moyen des nombres de Bernoulli de première espèce (IV, 7.)