Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Оптимизација портфолија заснована на вредности при ризику

Студент:
Катарина Халај 1014/16

Ментор:
др Бојана Милошевић

Београд, 2017.године

Предговор

Портфолио представља скуп вредносних папира које поседује или којима управља инвеститор. Инвеститор може бити појединачно физичко лице, финансијски стручњак, банка или нека друга финансијска институција. При трговању вредносним папирима власници портфолија су изложени мноштву ризика који потичу од промене девизних курсева, цене робе, акције, итд. Донесена одлука мора направити баланс између жељене добити и ризика који се том приликом намеће.

У теорији оптимизације портфолија, дисперзија представља веома популарну мера ризика. Хари Марковиц[1] је освојио Нобелову награду за представљање модела који је заснован на дисперзији као мери ризика (mean-variance модел). Замисао модела је пронаћи најбољу комбинацију очекиваних добити и ризика(дисперзије) за сваког инвеститора. [11]

Међутим коришћење дисперзије као мере ризика има своја ограничења. Наиме, она је симетрична мера која не узима у обзир правац кретања цена. У том случају би вредносни папири који доносе већу добит од очекиване били једнако ризични као они који доносе мању добит од очекиване, што није случај са којим се сусрећемо. Ови недостаци су превазиђени коришћењем вредности при ризику као мере ризика.

У овом раду представљамо основне појмове и теорију неопходну за конструкцију модела који се базирају на вредности при ризику као мери ризика (mean-VaR модели). Разматраћемо начине оптимизације портфолија и поредићемо их са резултатима добијеним у моделу заснованом на дисперзији као мери ризика. Упознаћемо се са параметарском и непараметарском методом оцењивања вредности при ризику на основу доступних података о кретањима цена акција. Поменућемо неколико мера сензитивности вредности при ризику, као и то како се оне могу имплементирати при креирању што ефикаснијег портфолија. На крају рада, приказани су кодови свих представљених резултата.

[1] Harry Max Markowitz (рођен 1927.), амерички економиста

Садржај

Ознаке

На почетку наводимо ознаке које ћемо користити у даљем раду.

MV модел - модел заснован на дисперзији као мери ризика (mean-variance модел);
MVAR[2] модел - модел заснован на вредности при ризику као мери ризика (mean-VaR model);
VaR_α - вредност при ризику на нивоу поверења α;
n - број вредносних папира у портфолију;
C_0 - капитал којим располажемо, у еврима;
C_{end} - капитал који поседујемо на крају посматраног периода;
R_p - укупна добит портфолија, у еврима;
μ_p - очекивана добит портфолија, у еврима;
σ_p^2 - дисперзија добити портфолија;
r_i - стопа добити i -тог вредносног папира;
μ_i - очекивана стопа добити i-тог вредносног папира;
ρ_{ij} - корелација између стопа добити i-тог и j-тог вредносног папира;
σ_{ij} - коваријација између стопа добити i-тог и j-тог вредносног папира;
Σ - коваријациона матрица вектора $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$;
θ_i - количина новца уложена у i-ти вредносни папир, у еврима;
k_α - дисперзијом стандардизовани квантил расподеле на нивоу α;
z_α - девијацијом стандардизовани квантил расподеле на нивоу α;
Ω - "дисперзиона" матрица.
$r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$
$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$
$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$
$\overline{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$

[2]Не треба мешати са маргиналним VaR-ом (MVaR).

Важе следеће једнакости:

1. $C_{end} = C_0 + R_p$,
2. $R_p = \sum_{i=0}^{n} r_i \theta_i = r^T \theta$,
3. $\mu_p = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \theta_i = \mu^T \theta = \theta^T \mu$,
4. $\sigma_p^2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \theta_i \theta_j \sigma_{ij} = \theta^T \Sigma \theta$.

Поглавље 1

Ефикасни портфолио заснован на вредности при ризику

Марковицов портфолио представља методу оптимизације која је заснована на стандардној девијацији као мери ризика. Уколико као меру ризика посматрамо $P(R_p \leq -C_0)$, добијамо један специјални случај оптимизације, којим ћемо се ми бавити. Најпре дефинишемо вредност при ризику (VaR) са нивоом поверења $1-\alpha$.

Дефиниција 1.1. *Вредност при ризику портфолија, са нивоом поверења $1-\alpha$, је она вредност VaR за коју важи следећа једнакост:*

$$P(R_p \leq -VaR) = \alpha$$

Како је $-R_p$ заправо губитак, на основу поменуте једнакости можемо да кажемо да је то максимална количина новца коју инвеститор може да изгуби са нивоом поверења $1-\alpha$. Што је вредност VaR већа на неком нивоу поверења, то је портфолио ризичнији, па зато инвеститори теже да имају што мању вредност VaR, како би се што мање излагали ризику. На основу поменутог, приметимо да у статистичком смислу, VaR представља одговарајући квантил расподеле губитака.

Подсетимо се неколико појмова:
Вероватноћа кратког пада *је вероватноћа да ће добит портфолија бити мања од унапред задате вредности.*
Телсеров критеријум *за унапред задату вероватноћу α и гранични капитал C_L максимизује очекивани капитал на крају посматраног периода под условом да је $P(C_{end} \leq C_L) \leq \alpha$. Како важи*

$E(C_{end}) = E(C_0 + R_p) = C_0 + \mu_p$, задатак се своди на налажење максимума μ_p под задатим условом.
Специјално, уколико узмемо да је $VaR = C_0$ и да је задана вероватноћа у Телсеровом критеријуму вероватноћа кратког пада α, онда се оптимизација помоћу VaR-а своди на Телсеров критеријум.
***Ефикасна граница** је крива која представља скуп свих ефикасних портфолија.*
***Ефикасни портфолио** дефинишемо као портфолио који максимизује очекивану добит, за задати ниво ризика или портфолио који минимизује ризик за задату очекивану добит.*

У нашем случају VaR је нова мера ризика, па при креирању ефикасне границе њу узимамо у обзир. Сада нам ефикасни скуп за задату фиксирану вредност VaR, даје највећу очекивану добит или за фиксирану очекивану добит даје најмању вредност VaR.

Испоставља се да се ефикасна граница поклапа са ефикасном границом у MV моделу уколико је расподела стопе добити елиптичка. То је претпоставка са којом ћемо радити. Битно је напоменути да је та претпоставка коректна, јер стварни подаци имају дебље репове од нормалне расподеле, тј. чешће се јављају неуобичајени случајеви што се елиптичком расподелом може много боље моделовати него нормалном.

Постоји више дефиниција елиптичких расподела. Ми наводимо неке од њих које се најчешће користе.

Дефиниција 1.2. *За n-димензионални вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ кажемо да има елиптичку расподелу уколико је његова функција густине:*

$$f_X(x) = c_n|\Omega|^{-\frac{1}{2}} g_n[\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Omega^{-1}(x-\mu)].$$

где је μ вектор колона, Ω позитивно дефинитна $(n \times n)$ матрица, а $g_n(\cdot)$ функција коју називамо генератор густине. Ознака $|\cdot|$ представља детерминанту одговарајуће матрице. Уколико генератор густине не зависи од n, што је често случај, онда пишемо само $g(\cdot)$. Функција $g_n(\cdot)$ је генератор густине уколико важи

$$\int_0^\infty x^{n/2-1} g_n(x)dx < \infty$$

Како знамо да укупна густина мора бити 1, можемо израчунати кон-

станту c_n

$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}}\Big[\int_0^\infty x^{n/2-1} g_n(x)dx\Big]^{-1}$$

где $\Gamma(\cdot)$ представља гама функцију. Пишемо $X \sim E_n(\mu, \Omega, g_n)$.

Дефиниција 1.3. *За расподелу кажемо да је елиптичка уколико има карактеристичну функцију следећег облика*

$$\phi_X(t) = E(e^{it^T X}) = e^{it^T\mu}\psi\Big(\frac{1}{2}t^T\Omega t\Big).$$

где је μ вектор колона, Ω позитивно дефинитна $(n \times n)$ матрица, а $\psi(t)$ функција коју називамо карактеристични генератор. У том случају пишемо $X \sim E_n(\mu, \Omega, \psi)$.

Поменута расподела има неколико интересантних својстава међу којима су и следећа:

1. Ако $\int_0^\infty g_1(x)dx < \infty$, онда постоји EX и важи $EX = \mu$;

2. Ако важи $|\psi'(0)| < \infty$, онда постоји коваријациона матрица вектора X и она је једнака $\Sigma = -\psi'(0)\Omega$. Ако изаберемо карактеристични генератор, такав да је $\psi'(0) = -1$, у том случају је $cov(X) = \Sigma = \Omega$. Матрицу Ω називамо дисперзиона матрица, као што смо већ поменули раније;

3. Уколико $X \sim E_n(\mu, \Omega, g_n)$, тада за неку $(m \times n)$ матрицу A и m-димензиони вектор колона B важи

$$AX + B \sim E_m(A\mu + b, A\Omega A^T, g_m). \tag{1.1}$$

   То значи да линеарна комбинација елиптичких расподела представља такође елиптичку расподелу.

Примери елиптичких расподела су: нормална фамилија, фамилија Студентових t-расподела, Лапласова и логистичка фамилија расподела. Свака од ових фамилија је јединиствено одређена генераторима густине, али нећемо се тиме бавити у овом тренутку. Матрица Ω је у линеарној вези са коваријационом матрицом Σ и то:

$$\Omega = \begin{cases} \Sigma, \text{ нормална расподела} \\ \frac{\nu}{\nu-2}\Sigma, \text{ Студентова t-расподела са } \nu \text{ степени слободе} \\ \frac{1}{2}\Sigma, \text{ Лапласова расподела} \\ \frac{3}{\pi^2}\Sigma, \text{ логистичка расподела} \end{cases}$$

па одатле добијамо,

$$\omega_k = \begin{cases} \sigma_k, \text{ нормална расподела} \\ \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}}\sigma_k, \text{ Студентова t-расподела са } \nu \text{ степени слободе} \\ \sqrt{\frac{1}{2}}\sigma_k, \text{ Лапласова расподела} \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma_k, \text{ логистичка расподела} \end{cases}$$

Вратимо се на задатак оптимизације. Као што је поменуто, претпоставка је да вектор стопа добити, $r = (r_1, \dots, r_n)^T$, има елиптичку расподелу $r \sim E_n(\mu, \Omega, \psi)$, где су μ очекивање, Ω дисперзиона матрица и ψ карактеристични генератор. Ако инвеститор има портолио који се састоји од ризичних вредносних папира са вектором улагања θ, онда је добит од портфолија $R_p = r^T\theta = \theta^T r$ и имаће елиптичку расподелу $E_1(\theta^T\mu, \theta^T\Omega\theta, \psi)$ на основу (1.1). Како је $\mu_p = \theta^T\mu$, а $\omega_p^2 = \theta^T\Omega\theta$, онда можемо краће писати $R_p \sim E_1(\mu_p, \omega_p^2, g_1)$.

Последица 1.4. *За R_p важи*

$$P(R_p \leq v) = \int_{-\infty}^{v} \frac{c_1}{\omega_p} g_1[\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_p}{\omega_p})^2]dx$$

што уз смену $z = \frac{x-\mu_p}{\omega_p}$ даје

$$P(R_p \leq v) = \int_{-\infty}^{\frac{v-\mu_p}{\omega_p}} c_1 g_1[\frac{1}{2}z^2]dz.$$

k_α представља квантил за који важи:

$$\int_{-\infty}^{k_\alpha} c_1 g_1[\frac{1}{2}z^2]dz = \alpha$$

и зависи искључиво од функције генератора густине $g(u)$ и од α. Надаље ћемо k_α називати дисперзијом стандардизовани квантил елиптичке расподеле, а вредност $z_\alpha \equiv \frac{k_\alpha \omega_p}{\sigma_p}$ девијацијом стандардизовани квантил или само стандардизовани квантил. У следећој таблици дате су неке вредности k_α за фиксиране вредности α.

	Нормална распоদлеа	*Студентова t-расподела($\nu = 1$)*	*Студентова t-расподела($\nu = 10$)*	*Лапласова расподела*	*Логистичка расподела*
$\alpha = 0.5$	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
$\alpha = 0.1$	*-1.28*	*-3.08*	*-1.37*	*-1.61*	*-2.2*
$\alpha = 0.01$	*-2.33*	*-31.82*	*-2.76*	*-3.91*	*-4.6*
$\alpha = 0.001$	*-3.09*	*-318.3*	*-4.14*	*-6.21*	*-6.91*
$\alpha = 0.0001$	*-3.72*	*-3183*	*-5.59*	*-8.52*	*-9.21*

Сада имамо да је:

$$P(R_p \leq -VaR_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow P(\frac{R_p - \mu_p}{\omega_p} \leq \frac{-VaR_\alpha - \mu_p}{\omega_p}) = \alpha$$
$$\frac{-VaR_\alpha - \mu_p}{\omega_p} = k_\alpha \Leftrightarrow VaR_\alpha = -\mu_p - k_\alpha \omega_p$$

Помоћу замене $z_\alpha \equiv \frac{k_\alpha \omega_p}{\sigma_p}$ добијамо следеће

$$P(R_p \leq -VaR_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow VaR_\alpha = -\mu_p - \sigma_p z_\alpha.$$

Сада вредност VaR_α имамо изражену у зависности од очекиване добити и стандардне девијације портфолија.

Ефикасна граница се састоји од портфолија који за дату очекивану добит минимизује вредност VaR или од портфолија који за дату вредност VaR-а одређује највећу очекивану вредност добити, што је приступ који ћемо користити у даљем раду.
Проблем је формулисан на следећи начин:

$$\max \left\{ \mu_p | \quad VaR_\alpha = -\mu_p - \sigma_p z_\alpha, \quad \mu_p = \theta^T \mu = \mu^T \theta, \quad \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta, \quad \overline{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

Трансформисаћемо услов $VaR_\alpha = -\mu_p - \sigma_p z_\alpha$ у њему еквивалентан:

$$(VaR_\alpha + \mu_p)^2 = (-z_\alpha \sigma_p)^2 \Leftrightarrow VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu_p + \mu_p^2 - z_\alpha^2 \sigma_p^2 = 0$$

Затим остале услове заменимо у тако добијени услов, након чега добијамо:

$$VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu^T \theta + \theta^T \mu \mu^T \theta - z_\alpha^2 \theta^T \Sigma \theta = 0$$
$$VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu^T \theta + \theta^T \Psi \theta = 0$$

где је $\Psi = \mu \mu^T - z_\alpha^2 \Sigma$.
Сада је почетни проблем трансформисан у њему еквивалентан проблем:

$$\max \left\{ \mu_p | \quad VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu^T \theta + \theta^T \Psi \theta = 0, \quad \overline{1}^T \theta = C_0 \right\}.$$

Матрица Ψ је симетрична, јер је

$$\Psi^T = (\mu \mu^T - z_\alpha^2 \Sigma)^T = (\mu \mu^T)^T - z_\alpha^2 \Sigma^T = \mu \mu^T - z_\alpha^2 \Sigma = \Psi.$$

Дефинишемо следеће константе:

$$\begin{aligned}\widehat{a} &= \mu^T\Psi^{-1}\mu,\\ \widehat{b} &= \mu^T\Psi^{-1}\overline{1} = \overline{1}^T\Psi^{-1}\mu,\\ \widehat{c} &= \overline{1}^T\Psi^{-1}\overline{1},\\ \widehat{d} &= \widehat{a}\widehat{c} - \widehat{b}^2.\end{aligned}$$

Изводимо везу тих константи са константама a, b, c и d где су те константе дефинисане при тражењу ефикасне границе, када је мера ризика дисперзија, и то на следећи начин:

$$\begin{aligned}a &= \mu^T\Sigma^{-1}\mu,\\ b &= \mu^T\Sigma^{-1}\overline{1} = \overline{1}^T\Psi^{-1}\mu,\\ c &= \overline{1}^T\Sigma^{-1}\overline{1},\\ d &= ac - b^2.\end{aligned}$$

Уколико је мера ризика дисперзија, циљ је да за дату очекивану добит минимизујемо ризик (који је у том случају дисперзија), тј. да нађемо минимум од

$$D(C_{end}) = D(C_0 + R_p) = D(R_p) = D(r^T\theta) = \theta^T\Sigma\theta.$$

Морају бити задовољени услови да је очекивана добит фиксирана и да једино можемо да инвестирамо капитал који имамо у том тренутку, па количине новца које улажемо у појединачне вредносне папире у збиру дају C_0. *Та два услова можемо записати као:*

$$\mu^T\theta = \mu_p \text{ и } \overline{1}^T\theta = C_0$$

па се проблем своди на

$$\min\{\theta^T\Sigma\theta | A^T\theta = B\}$$

где су матрице $A = \begin{pmatrix}\mu & \overline{1}\end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix}\mu_p\\ C_0\end{pmatrix}$.

Формирањем Лагранжове функције

$$L(\theta, \lambda) = \theta^T\Sigma\theta - \lambda_0^T(A^T\theta - B)$$

а затим диференцирањем по θ *и* λ_0, *добијамо систем једначина*

$$\begin{aligned}2\Sigma\theta - A\lambda_0 &= 0\\ A^T\theta &= B,\end{aligned}$$

где је $\lambda_0 = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}$. *Из прве једначине добијамо да је*

$$\theta = \Sigma^{-1}A\lambda$$

где је $\lambda = \frac{1}{2}\lambda_0$. *Када* θ *уврстимо у другу једначину, имамо*

$$A^T\Sigma^{-1}A\lambda = B \Rightarrow \lambda = (A^T\Sigma^{-1}A)^{-1}B = H^{-1}B$$

где је $H = A^T\Sigma^{-1}A$.
Поставља се питање да ли је добијено решење заиста тачка минимума. Да бисмо то проверили, показаћемо да је квадратна форма одговарајућих парцијалних извода позитивно дефинитна.
Како је

$$\frac{\partial^2 L(\theta,\lambda)}{\partial\theta^2} = 2\Sigma^T = 2\Sigma > 0$$

и важи

$$\frac{\partial^2 L(\theta,\lambda)}{\partial\lambda\theta} = A^T A > 0$$

и

$$\frac{\partial^2 L(\theta,\lambda)}{\partial\lambda^2} = 0,$$

одговарајућа квадратна форма је

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(\theta,\lambda)}{\partial\theta^2} & \frac{\partial^2 L(\theta,\lambda)}{\partial\theta\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2 L(\theta,\lambda)}{\partial\theta\partial\lambda} & \frac{\partial^2 L(\theta,\lambda)}{\partial\theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Sigma & A^T A \\ A^T A & 0 \end{pmatrix}$$

па узимањем произвољног вектора колона $v = (C, D)^T$, *заиста се показује да је* vHv^T*»0, што управо значи да је добијена тачка, тачка минимума. Аналогно, уколико је производ наведених матрица мањи од нуле, добијено решење претставља максимум.*
Матрица H *симетрична* (2×2) *матрица, јер важи* $H^T = (A^T\Sigma^{-1}A)^T = A^T(\Sigma^{-1})^T A = A^T\Sigma^{-1}A = H$.
Сада је

$$D(R_p) = \theta^T\Sigma\theta = \theta^T\Sigma\Sigma^{-1}A\lambda = \theta^T A\lambda = (A^T\theta)^T H^{-1}B = B^T H^{-1}B.$$

Видели смо да је H *симетрична квадратна матрица димензије 2, па је можемо представити као*

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Дефинишемо $d = det(H) = ac - b^2$. *Како је са друге стране* $H = A^T\Sigma^{-1}A$ *видимо да је*

$$\begin{aligned} a &= \mu^T\Sigma^{-1}\mu, \\ b &= \mu^T\Sigma^{-1}\overline{1} = \overline{1}^T\Sigma^{-1}\mu, \\ c &= \overline{1}^T\Sigma^{-1}\overline{1}, \\ d &= ac - b^2. \end{aligned}$$

На крају добијемо

$$D(R_p) = \sigma_p^2 = \frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)$$

што нам даје израз за ефикасну границу у MV моделу. Наравно, само горња половина графика је ефикасна јер за исти ризик даје већу очекивану добит. Стандардну девијацију добијамо кореновањем:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}.$$

Такође, осим поменутих појмова посматраћемо и θ_{EF}, *што представља вектор удела вредносних папира у портфолију који припада ефикасној граници.*

$$\begin{aligned} \theta_{EF} = \Sigma^{-1}A\lambda = \Sigma^{-1}AH^{-1}B &= \frac{c\mu_p - bC_0}{d}\Sigma^{-1}\mu + \frac{aC_0 - b\mu_p}{d}\Sigma^{-1}\overline{1} \\ &= \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((a\overline{1} + b\mu)C_0 + (c\mu - b\overline{1})\mu_p). \end{aligned}$$

У MV моделу, наш задатак је био да за задату очекивану вредност добити μ_p, израчунамо одговарајућу минималну стандардну девијацију и уделе вредносних папира, користећи изведене формуле. У нашем MVAR моделу, ситуација се мало разликује, што ћемо видети у наредним корацима.

Поставља се питање како изгледа ефикасна граница MBAP модела.

За инверз коваријационе матрице важи да је:

$$\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1}\Psi\Psi^{-1} = \Sigma^{-1}(\mu\mu^T - z_\alpha^2\Sigma)\Psi^{-1} = \Sigma^{-1}\mu\mu^T\Psi^{-1} - z_\alpha^2\Psi^{-1}.$$

Заменом њене вредности у дефиницију за a, b и c добијамо систем чије су непознате $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ и $\widehat{c}$. Њиховим решавањем добијамо следеће везе које ће се користити за повезивање добијених резултата са претходним закључцима.

$$\begin{aligned}\widehat{a} &= \frac{a}{a - z_\alpha^2},\\ \widehat{b} &= \frac{b}{a - z_\alpha^2},\\ \widehat{c} &= \frac{cz_\alpha^2 - d}{z_\alpha^2(a - z_\alpha^2)},\\ \widehat{d} &= \frac{-d}{z_\alpha^2(a - z_\alpha^2)}.\end{aligned}$$

Ако се вратимо на проблем проналаска максимума, остаје нам још пар корака. Најпре формирамо Лагранжову функцију:

$$L(\mu_p, \lambda_1, \lambda_2) = \mu_p + \lambda_1(VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha\mu^T\theta + \theta^T\Psi\theta) + \lambda_2(\overline{1}^T\theta - C_0).$$

Знамо да је $\mu_p = \mu^T\theta$, па диференцирањем по θ, λ_1 и λ_2 добијамо следећи систем једначина:

$$\begin{aligned}\mu + 2\lambda_1 VaR_\alpha\mu + 2\lambda_1\Psi\theta + \lambda_2\overline{1} &= 0\\ VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha\mu^T\theta + \theta^T\Psi\theta &= 0\\ \overline{1}^T\theta &= C_0\end{aligned}$$

Решавањем добијеног система долазимо до траженог максимума. Коришћењем квадратних форми можемо показати да је добијена тачка заиста тачка максимума.
Из прве једначине система изразимо θ

$$\begin{aligned}\theta &= -\frac{1}{2\lambda_1}\Psi^{-1}(\mu + 2\lambda_1 VaR_\alpha\mu + \lambda_2\overline{1})\\ &= -\frac{1}{2\lambda_1}\Psi^{-1}\mu(1 + 2\lambda_1 VaR_\alpha) - \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}\Psi^{-1}\overline{1}\\ &= (\lambda_3 - VaR_\alpha)\Psi^{-1}\mu + \lambda_4\Psi^{-1}\overline{1},\end{aligned}$$

где је $\lambda_3 = -\frac{1}{2\lambda 1}$ и $\lambda_4 = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1}$.

Заменом тако добијене вредности θ у последњу једначину система добијамо вредност λ_4

$$
\begin{aligned}
(\lambda_3 - VaR_\alpha)\overline{1}^T\Psi^{-1}\mu + \lambda_4\overline{1}^T\Psi^{-1}\overline{1} &= C_0\\
(\lambda_3 - VaR_\alpha)\widehat{b} + \lambda_4\widehat{c} &= C_0\\
\Rightarrow \lambda_4 = \frac{C_0 + \widehat{b}VaR_\alpha - \lambda_3\widehat{b}}{\widehat{c}}&.
\end{aligned}
$$

Изразе за θ и λ_4 заменимо у последњу једначину и добијемо квадратну једначину по λ_3 чијим решавањем добијамо:

$$\lambda_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{\widehat{d}}(VaR_\alpha^2(\widehat{d}-\widehat{c}) - 2C_0\widehat{b}VaR_\alpha) - C_0^2} = \pm\sqrt{W}.$$

Пошто је $\theta = (\lambda_3 - VaR_\alpha)\Psi^{-1}\mu + \lambda_4\Psi^{-1}\overline{1}$ важи:

$$\theta = (\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha)\Psi^{-1}\mu + \frac{1}{\widehat{c}}(C_0 + \widehat{b}VaR_\alpha \mp \sqrt{W}\widehat{b})\Psi^{-1}\overline{1}.$$

Зато је израз за очекивану добит изражену као функцију од VaR следећи:

$$\mu_p = \mu^T\theta = (\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha)\widehat{a} + \frac{1}{\widehat{c}}(C_0 + \widehat{b}VaR_\alpha \mp \sqrt{W}\widehat{b})\widehat{b}.$$

Множењем обе стране са $\frac{\widehat{c}}{\widehat{c}}$ добијамо

$$
\begin{aligned}
\mu_p &= \frac{1}{\widehat{c}}((\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha)(\widehat{a}\widehat{c} - \widehat{b}^2) + C_0\widehat{b}) = \frac{1}{\widehat{c}}((\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha)\widehat{d} + C_0\widehat{b})\\
&= \frac{\widehat{d}}{\widehat{c}}(\pm\sqrt{W} - VaR\alpha + \frac{\widehat{b}}{\widehat{d}}C_0).
\end{aligned}
$$

Добили смо MVAR ефикасну границу. Циљ је да је упоредимо са MV ефикасном границом, па ћемо том приликом прво изразити VaR_α као функцију од μ_p. Уколико изразимо $\sqrt{W}$, а затим квадрирамо обе стране, добијамо квадратну функцију по VaR_α што нам даје:

$$VaR_\alpha = -\mu_p - \sqrt{\frac{1}{\widehat{d}}((\widehat{d}-\widehat{c})\mu_p^2 - 2\widehat{b}C_0\mu_p - \widehat{a}C_0^2)}.$$

Затим искористимо добијену везу са a, b, c и d и тада је:

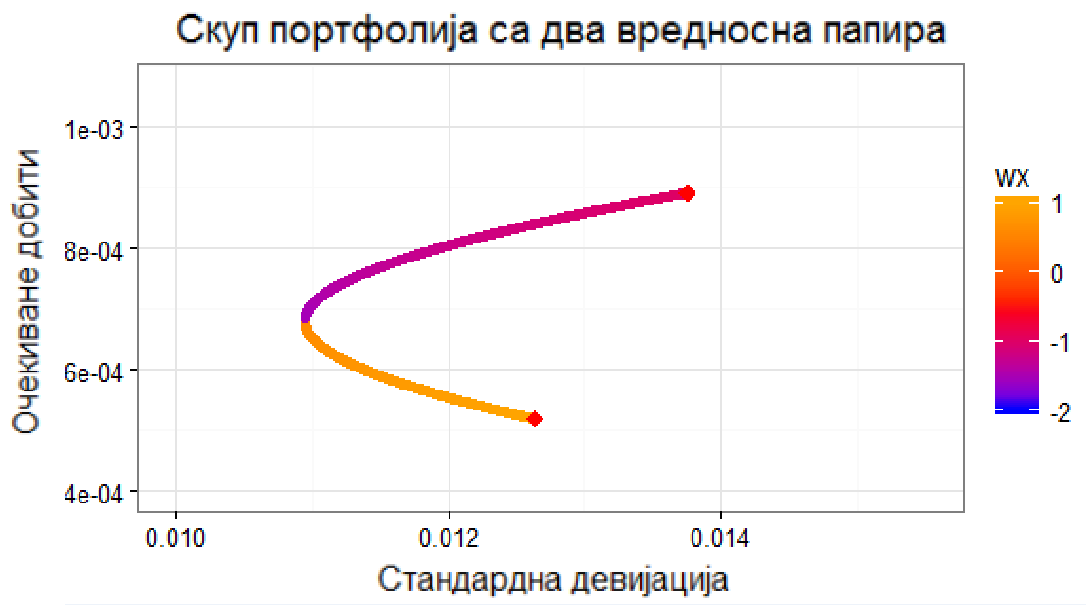
$$VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}.$$

Раније смо закључили да можемо изразити вредност при ризику као $VaR\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sigma_p$ па из последње две једнакости следи да је

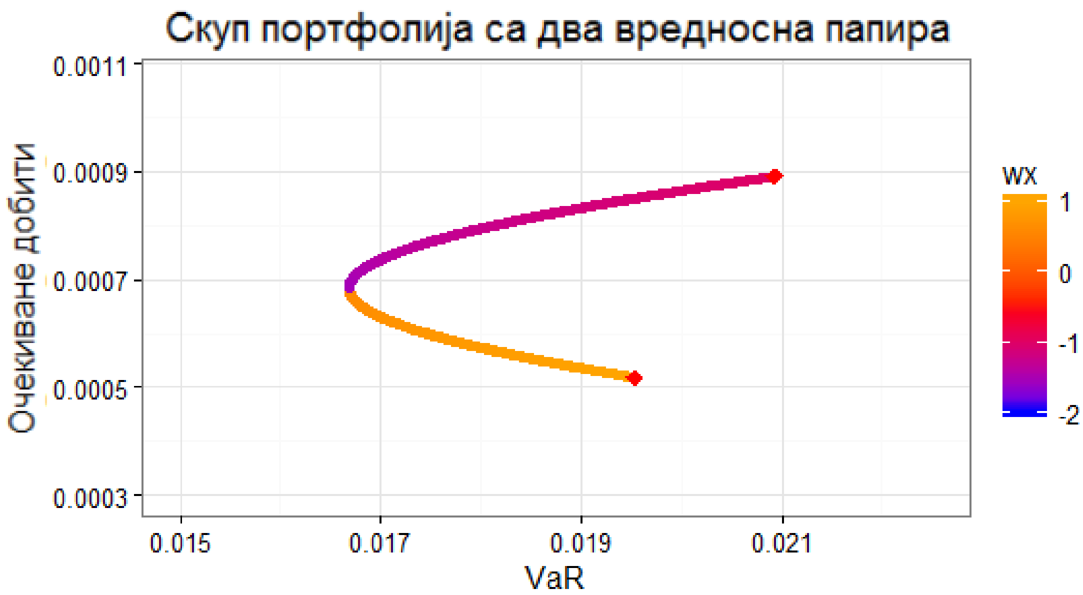
$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}$$

што препознајемо као MV ефикасну границу. На основу добијеног резултата можемо закључити да је минимизовање дисперзије исто као и минимизовање вредности VaR у случају када претпостављамо да добити имају елиптичку расподелу.

На сликама 1.1 и 1.2 приказане су ефикасне границе за оба поменута модела када се портфолио састоји из два вредносна папира. Оне су приказање љубичастом бојом.



Слика 1.1: **Ефикасна граница MV модела**

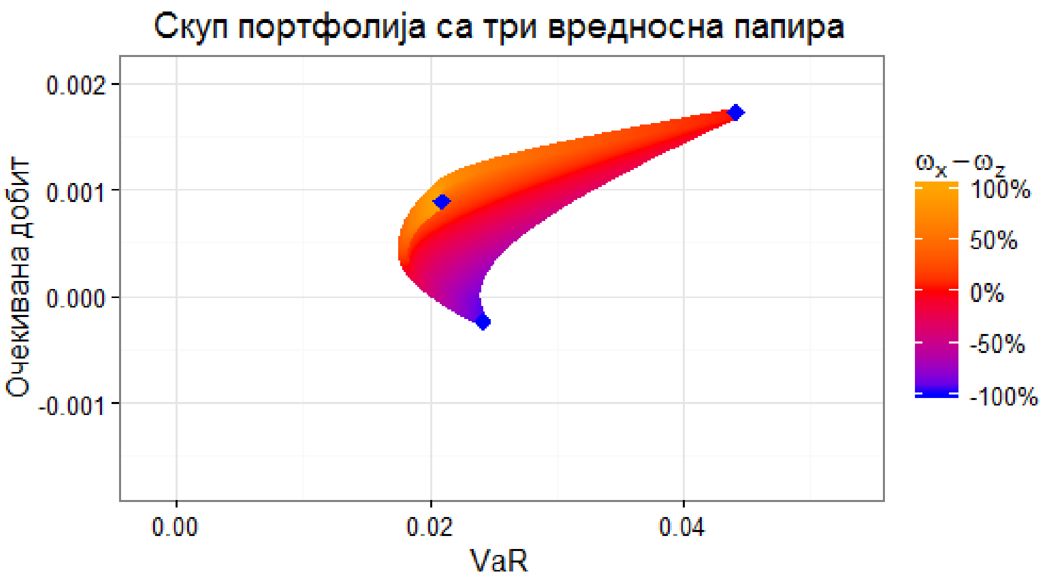


Слика 1.2: **Ефикасна граница MVAR модела**

На слици 1.3 можемо видети изглед портфолија сачињеног од три вредносна папира.

Како ефикасна граница остаје иста као у MV моделу, удели вредносних папира у портфолију остају непромењени и износе

$$\theta_{EF} = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((a\overline{1} + b\mu)C_0 + (c\mu - b\overline{1})\mu_p).$$



Слика 1.3: **Скуп портфолија MVAR модела који садрже три вредносна папира**

Поглавље 2

Оцењивање вредности VaR

У овом поглављу размотрићемо једну параметарску и једну непараметарску (историјску) методу оцењивања вредности VaR. Прва метода, као што јој и само име каже, претпоставља теоријску расподелу добити, док код друге, ту расподелу одређујемо емпиријски.

Осим поменутих, постоји и Монте Карло метода, о којој можемо прочитати у [7] и [8], али и многе друге.

2.1 Параметарски метод

Параметарски метод је такође познат и као метод дисперзије и коваријације. Једноставношћу своје имплементације заузео је место најпопуларнијег начина за оцењивање вредности при ризику.

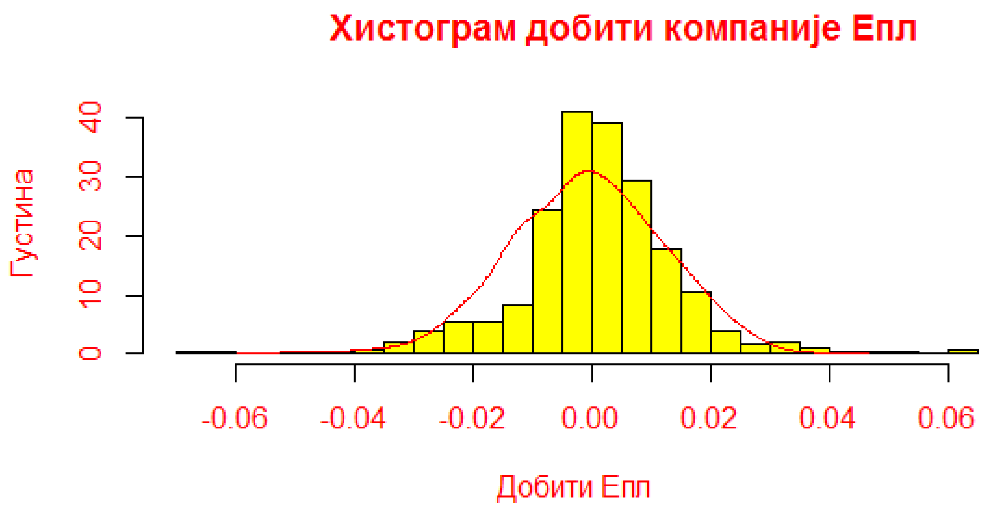
Претпоставимо да поседујемо податке о кретању цена вредносних папира од којих желимо да направимо наш портфолио. Уколико те податке представимо као временску серију, поставља се питање, коју дужину временске серије разматрати. Свака банка (тржишно подручје) засебно доноси одлуку о томе, а потребно је обезбедити да карактеристике VaR-a добијене на основу коришћене дужине временске серије буду задовољавајуће.

У параметарском моделу, вредност VaR рачунамо претпостављајући теоријску расподелу добити вредносних папира. Претпостављамо елиптичку расподелу добити. Најчешће се претпоставља нормална расподела. [2]

На следећој слици је приказана расподела добити компаније Епл (Apple) помоћу хистограма и њена апроксимација густином одговарајуће нормалне расподеле. Расподеле финансијских промена цена имају неколико типичних својстава које можемо уочити на хистограму:

- висок врх расподеле;

- постојање дебелих репова.



2.1.1 Примена параметарског метода на портфолио сачињен од једног вредносног папира

Посматрајмо портфолио који се састоји од једног вредносног папира. Наш задатак је оцењивање вредности VaR на основу података које поседујемо.

Потребно је претпоставити расподелу добити, која се најбоље слаже са подацима. Како смо ми поменули у претходном поглављу, добити финансијских временских серија се најбоље апроксимирају елиптичким расподелама, те ћемо размотрити како се понаша овај модел у том случају.

У претходном поглављу смо видели да стандардизацијом случајне променљиве R_p која представаља расподелу добити порфолија, добијамо следећи израз за вредност VaR

$$VaR_\alpha = -\mu_p - k_\alpha \omega_p$$

где све поменуте термине посматрамо у односу на елиптичку расподелу. Коришћењем израза $z_\alpha = \frac{k_\alpha \omega_p}{\sigma_p}$ добијамо

$$VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sigma_p$$

где је μ_p очекивана добит портфолија, z_α стандардизовани квантил за ниво поверења α, а σ_p стандардна девијација портфолија.

Вредност VaR можемо представити и као максималну количину новца коју је могуће изгубити при задатом нивоу поверења α, па у том случају добијену вредност VaR множимо количином уложеног новца у посматрани вредносни папир

$$VaR_\alpha = (-\mu_p - z_\alpha \sigma_p)S,$$

где је S количина уложеног новца.

Можемо претпоставити да је $\mu = 0$, јер су промене вредности портфолија у кратком временском интервалу[1] јако близу нуле, па у том случају добијамо

$$VaR_\alpha = -z_\alpha \sigma_p S,$$

Пример 1. *Посматрамо акцију компаније Епл, чије су нам цене доступне у периоду од 09.09.2015. до 01.09.2017.године (500 радних дана). На основу њих израчунавамо добити.*
Добит акције i-тог дана представља количник промене цене акције између $i+1$-ог и i-тог дана и цене акције i-тог дана, тј.

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i}$$

где S_i представља цену акције на крају i-тог дана. Потребно је претпоставити теоријску расподелу добити. Добити компаније Епл се добро уклапају у логистичку расподелу, која припада фамилији елиптичких расподела. Ово ће бити детаљније размотрено у примеру 4. Како посматрамо дневне цене акција, можемо претпоставити да је параметар μ једнак нули. Заиста, оцењено очекивање добити портфолија је $\widehat{\mu} = 0,00089$, па је ова претпоставка коректна. Оцењена стандардна девијација портфолија је $\widehat{\sigma}$ =0.0137. Једнодневни VaR са нивоом поверења од 99% за акцију ове компаније, при улогу од 3 милиона евра

[1] разматрамо случај дневног VaR-a

је

$$VaR_{\alpha} = -z_{0.01}\sigma S = -k_{0.01}\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma S = 4.60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot 0.0137 \cdot 3000000$$
$$= 104534$$

Закључујемо да инвеститор који поседује дату акцију у 99% случајева неће изгубити више од 104 534 евра.

2.1.2 Примена параметарског метода на портфолио који садржи више вредносних папира

Портфолио који поседује више вредносних папира се чешће среће у пракси, али се умногоме разликује од случаја разматраног у претходном поглављу.

Оцењивање вредности VaR је нешто компликованије, јер како имамо више вредносних папира, треба оценити стандардну девијацију сваког од њих, а свакако не треба занемарити и узајамну корелисаност. Формула за VaR је иста као у претходном случају, с тим што σ сада представља стандардну девијацију портфолија, не само једног вредносног папира, а рачунамо је као

$$\sigma_P = \sqrt{\omega \Sigma \omega^T} \tag{2.1}$$

где је $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ вектор удела вредносних папира у портфолију, а

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D(R_1) & cor(R_1, R_2) & ... & cor(R_1, R_n) \\ cor(R_2, R_1) & D(R_2) & ... & cor(R_2, R_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ cor(R_n, R_1) & cor(R_n, R_2) & ... & D(R_n) \end{pmatrix}$$

коваријациона матрица, где R_i као што смо и раније помињали, представљају добити. Можемо представити стандардну девијацију портфолија и у следећем облику

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

који је добијен расписивањем формуле (2.1).
Одговарајућу вредност VaR рачунамо као у једнодимензионом случају.

Пример 2. *Посматрајмо портфолио који се састоји од акција 4 компаније: Циско Системс (Cysco Systems), Епл (Apple), Микрон Технолоџи (Micron Tehnology) и Форд Моторс Компани (Ford Motors Company). Инвестиције у акције ових компанија су редом 4, 3, 1, 2 милиона еура. Добити* R_i *рачунамо као и раније*

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i}$$

где S_i *представља цену акције* i*-тог дана. Стандардне девијације добити компанија рачунамо као и у претходном примеру и добијамо следеће вредности*

Компанија	Стандардна девијација(у %)
Циско Системс	0.012625539
Епл	0.013740279
Микрон Технолоџи	0.028893953
Форд Моторс	0.015082412

Матрица корелације изгледа овако

	Циско	Епл	Микрон	Форд
Циско	1.0000000	0.3864787	0.3653883	0.4159211
Епл	0.3864787	1.0000000	0.2921270	0.2836269
Микрон	0.3653883	0.2921270	1.0000000	0.3417556
Форд	0.4159211	0.2836269	0.3417556	1.0000000

и коваријациона матрица Σ

	Циско	Епл	Микрон	Форд
Циско	0.000159404	0.000067045	0.000133294	0.000079201
Епл	0.000067045	0.000188795	0.000115978	0.000058777
Микрон	0.000133294	0.000115978	0.000834861	0.000148934
Форд	0.000079201	0.000058777	0.000148934	0.000227479

Множењем вектора удела

$$\omega = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

са коваријационом матрицом, а затим са транспонованим вектором удела, добијамо дисперзију портфолија $0,0119$*, а затим и стандардну девијацију* 0.1092*. Тражену вредност VaR са нивоом поверења 99% израчунавамо множењем стандардне девијације са квантилом логистичке расподеле, а морамо помножити резултат и са 10 000 000 због ранијег одабира вектора удела. Добијена вредност је 277 035 евра.*

Регуларност корелационе матрице

Током примене ове методе, посебну пажњу треба обратити на коректност добијених резултата. Навешћемо неопходне услове за регуларност корелационих матрица. Постојање негативних сопствених вредност може нам бити индикатор постојања корелационих матрицак које нису регуларне. Корелациона матрица мора бити семи-дефинитна, тј. мора важити

$$\omega C \omega^T \geqslant 0$$

где је ω вектор удела вредносних папира, а C матрица корелација. Овај израз смо користили као меру дисперзије портфолија у параметарској методи. Уколико је корелациона матрица регуларна, она неће давати негативне вредности дисперзије.

Покушаћемо илустративно да представимо поменути проблем. Стандардну девијацију портфолија можемо представити у следећем облику

$$\sigma_p = \sqrt{\sum \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} \geqslant 0$$

У случају када имамо портфолио са три вредносна папира, претходни израз се своди на

$$\omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \omega_3^2\sigma_3^2 + 2(\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \omega_1\omega_3\sigma_1\sigma_3\rho_{13} + \omega_2\omega_3\sigma_2\sigma_3\rho_{23}) \geqslant 0$$

Уколико претпоставимо да су удели једнаки 1, као и стандардне девијације, добијамо

$$2(\rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{23}) \geqslant -3$$

Уколико је $\rho_{12} = \rho_{13} = -1$, добијамо да мора важити $\rho_{23} \geqslant 0.5$. У том случају, није могуће и коректно да добијемо вредност $\rho_{23} < 0.5$.

Да бисмо обезбедили коректност корелационе матрице, потребно је да подаци о променама цена са којима радимо задовољавају следеће услове:

- нема недостајућих података;
- једнак број опсервација(посматраних дана) за сваки вредносни папир;
- корелације рачунамо за промене цена које су се десиле у истом временском периоду.

Уколико неки од наведених услова није задовољен, то нам указује да су корелације узете са различитих извора, оцењене на основу других података или су измишљене како би одражавале сопствено мишљење менаџера.

"Како решити наведени проблем, уколико се појави?"

Уколико је неко од горе наведених правила прекршено, потребно је "средити" корелациону матрицу уклањањем негативних сопствених вредности. Пратимо низ следећих корака:

- негативне сопствене вредности замењујемо нулом;
- рачунамо нову корелациону матрицу, коју ћемо користити уместо старе;
- генеришемо сопствене вредности и векторе на основу новодобијене корелационе матрице.

Нова корелациона матрица може бити израчуната на следећи начин, након постављања негативних сопствених вредности на нулу

$$C = E\lambda E^T$$

где је C нова корелациона матрица, E матрица сопствених вектора, а λ матрица на чијој се дијагонали налазе сопствене вредности, а остали елементи су нула. Сума елемената на дијагонали нове корелационе матрице мора бити 1. Уколико то није случај, она мора бити нормализована

$$C' = \frac{1}{\sqrt{D}} C \frac{1}{\sqrt{D}}$$

где је C' нова нормализована корелациона матрица, а D дијагонална матрица, са елементима $\frac{1}{D_i}$ на дијагонали, где је D_i i-ти дијагонални елемент матрице C.
У нашем примеру, добијене сопствене вредности су позитивне

```
> eigen(cor(dobiti))$values
[1] 2.0467880 0.7304878 0.6679637 0.5547605
```

Можемо закључити да су и наведени услови задовољени, те није потребно вршити корекцију матрице корелације.

2.2 Историјска метода оцењивања вредности VaR

Историјска симулација или историјски VaR представља непараметарску методу која служи за оцењивање вредности VaR. Добити компанија посматрамо као временске серије. Претпостављамо да подаци о кретању цена акција из недавне прошлости добро описују кретања цена у будућности. Наш задатак је да вредност VaR проценимо на основу добити које су нам познате.

Расподела добити одређује се емпиријски на основу познатих података. Добијена расподела, служи за процену вредности VaR за задати ниво поверења α.

Историјска симулација нуди боље решење од параметарске методе, јер обухвата и случај када расподела добити има дебеле репове, тј. случај када се позитивни и негативни веома високи приноси дешавају чешће него код нормалне расподеле. Како не претпостављамо расподелу добити, ова метода омогућава примену на сваки портфолио, под условом да су нам доступни сви неопходни подаци о њему.

Наиме, метода о којој говоримо има и своје недостатке. Један од главних је чињеница да се сваком посматраном тренутку додељује иста тежина. То би значило да добит у сваком тренутку има једнак утицај на процену вредности VaR. Посматрајмо нпр. историјску симулацију у којој су нам дате добити за n најскоријих тренутака у прошлости. Нека је $R_{i,t-j}$ добит i-тог вредносног папира у тренутку $t-j$ где t представља садашњи тренутак, а j колико се пута померамо у прошлост (уколико имамо дате дневне добити, тренутак $t-2$ би значио да посматрамо 2 дана пре садашњег тренутка). Наравно j може узимати вредности само од 1 до n. То значи да ће добит $R_{i,t-j}$ утицати на добит у садашњем тренутку, у тренутку $t+1$ итд. све до тренутка $t+n$. Сваком тренутку, током кога се $R_{i,t-j}$ налази у одабраном временском раздобљу се приписује једнак утицај на процену вредности VaR. Када $R_{i,t-j}$ престане да се налази у посматраном временском распону, утицај постаје занемарљив (вредност му је 0). Одавде се логично намећу проблеми који прате овај метод. Зашто би добит у тренутку $t-i$ имала једнак утицај као и добит у садашњем тренутку t, а добит само дан старија $t-i-1$ никакав утицај? Такође се јавља и проблем познатији као *ефекат духа*, који представља појаву да велики губици који су се јавили у неком давном тренутку у прошлости, због дугог периода посматрања утичу сваки пут на вредност VaR-a, а онда у једном тренутку само нестану, када испадну из опсега посматрања.

Поменути начин додељивања тежина одговара претпоставци да су добити независно и једнако расподељене, што ограничава примену овог метода за податке који имају изражене скокове, јер се они обично не јављају у неком уравнотеженом облику, него имају стадијуме када су фреквентнији и стадијуме када су мање фреквентни.

Претпоставимо да желимо да израчунамо дневни VaR са нивоом значајности α, уколимо имамо податке за n дана. Све представљене цене биће изражене у еврима.

Подаци које имамо, представљају последњих n дана пре вршења испитивања. Они пружају $n-1$ сценарија који могу да се десе од данас до сутра. Нека нам је први дан о коме имамо податке дан 0, други дан 1,... Сценарио 1 представља промену вредности свих промењивих онако како су се оне мењале од дана 0 до дана 1, сценарио 2 од дана 1 до дана 2,... За сваки сценарио рачунамо добити акција у еврима, а то дефинише расподелу дневних губитака (добици су негативни губици) за наш портфолио. Квантил(перцентил) реда α може да се оцени као губитак чија је позиција у сортираном низу губитака $\frac{n}{100}\cdot\alpha$, а то управо представља и оцену вредности VaR. У $(1-\alpha)\%$ случајева губитак ће бити већи него процењена вредност VaR, уколико последњих n дана добро представљају промене које ће се десити у садашњем тренутку.

Дефинишимо S_i као цену акције дана i и претпоставимо да је данас дан n(последњи дан о коме имамо податке). I-ти сценарио историјске симулације претпоставља да ће цена акције сутра бити

$$\text{вредност } i\text{-тог сценарија} = S_n\frac{S_i}{S_{i-1}}$$

На основу добијених сценарија, рачунамо вредности портолија за сваки од њих. Они нам генеришу губитке при сваком сценарију, а квантил реда α ће бити тражена оцена вредности VaR. Илуструјмо методу на следећем примеру.

Пример 3. *Претпоставимо да инвеститор поседује, 02. септембра 2017.године, портфолио вредан 10 милиона евра који се састоји из акција четири компаније: Циско Системс (Cysco Systems), Епл (Apple), Микрон Технолоџи (Micron Tehnology) и Форд Моторс Компани (Ford*

Motors Company). Инвестиције у сваку од акција посматраних компанија можемо видети у следећој табели

Компанија	Вредност портфолија (у милионима евра)
Циско Системс	4
Епл	3
Микрон Технолоџи	1
Форд Моторс	2
Укупно	10

Део података које посматрамо можемо видети у следећој табели

Дан	Датум	Циско	Епл	Микрон	Форд
0	09.09.2015.	25.940	110.150	16.959	13.530
1	10.09.2015.	26.260	112.570	17.200	13.730
2	11.09.2015.	26.020	114.209	16.799	13.710
...	...	...	...	...	...
499	31.8.2017	32.210	164.000	31.970	11.030
500	01.09.2017.	32.300	164.050	32.600	11.350

На основу посматраних података одређујемо могуће сценарије за данашњи дан (02.09.2017.). Сценарио i претпоставља да се промена цене између првог и другог септембра текуће године понаша као промена цене између $i-1$*-ог и* i*-тог дана за* $1 \leq i \leq 500$.
Посматрајмо цена акције компаније Циско при сценарију 1. 10.09.2015.године она је износила 26.260 евра, а 09.09.2015. године 25.940. Добијамо да је цена акције компаније Циско при првом сценарију

$$32.300 \cdot \frac{26.260}{25.940} = 32.698$$

Аналогно рачунамо вредност акција осталих компанија, као и преостале сценарије. Вредност портфолија при првом сценарију, ако су цене акција компанија 01.09.2017. године 32.30, 164.05, 32.60, 13.35 редом, је

$$4 \cdot \frac{32.698}{32.30} + 3 \cdot \frac{167.654}{164.05} + \frac{33.061}{32.60} + 2 \cdot \frac{11.518}{13.35} = 10.158969$$

То значи да портфолио има добитак од 158969 еура при сценарију 1. Аналогно рачунамо вредности при осталим сценаријима.

Сценарио	*Циско*	*Епл*	*Микрон*	*Форд*	*Вредност портфолија*	*Губитак*
1	*32.6984*	*167.6542*	*33.0613*	*11.5177*	*10 158 969.5*	*-158969.5464*
2	*32.0048*	*166.4399*	*31.8418*	*11.3334*	*9 980 979.4*	*19020.6475*
3	*31.9028*	*165.6300*	*32.4059*	*11.4079*	*9983 960.6*	*16039.3963*
...	...	...	...	...	...	...
499	*32.5221*	*164.7028*	*32.9713*	*11.4434*	*10 067 288.1*	*-67288.1943*
500	*32.3902*	*164.1000*	*33.2424*	*11.6793*	*10 089 820.8*	*-89820.8338*

На слици 2.1 можемо уочити хистограм губитака (добици су представљени као негативни добици)[2]*.*

Слика 2.1: Хистограм губитака

Губитке за 500 сценарија рангирамо и део резултата представљамо следећом табелом

[2] Губитке делимо са 1000 због прегледнијег приказа

Сценарио	*Губитак (у еврима)*
200	*476648.741*
47	*360363.1516*
89	*355038.0566*
87	*348528,156*
96	*328073,4809*
...	...
119	*-352574.117*
98	*-375872.767*

Једнодневни 99% VaR можемо оценити петим најгорим губитком, а то је сценарио број 96 са износом 328 073 еура.

Одређивање вредности VaR наредних дана можемо рачунати применом истог принципа, при чему користимо податке добијене овом методом. Например за одређивање вредности VaR за датум 03.09.2017. користићемо податке из прошлости које већ поседујемо, али и симулиране податке за дан 02.09.2017. пошто немамо стварне податке овог дана.

У пракси су портфолији финансијских институција знатно компликованији од разматраног. Састоје се од хиљада или десетина хиљада вредносних папира, као што су форвард уговори, опције или други деривати. Такође, портфолио се вероватно мења из дана у дан. Ако трговање банке доводи до ризичног порфолија, VaR се повећава, ако води до мање ризичног порфолија, VaR се смањује. VaR се обрачунава за било који дан, под претпоставком да ће портфио остати непромењен током следећег радног дана.

У раду смо користили стандардне оцене волатилности и корелације, а о различитим начинима њиховог оцењивања можемо прочитати опширније у [3].

2.3 Упоређивање параметарског и непараметарског приступа

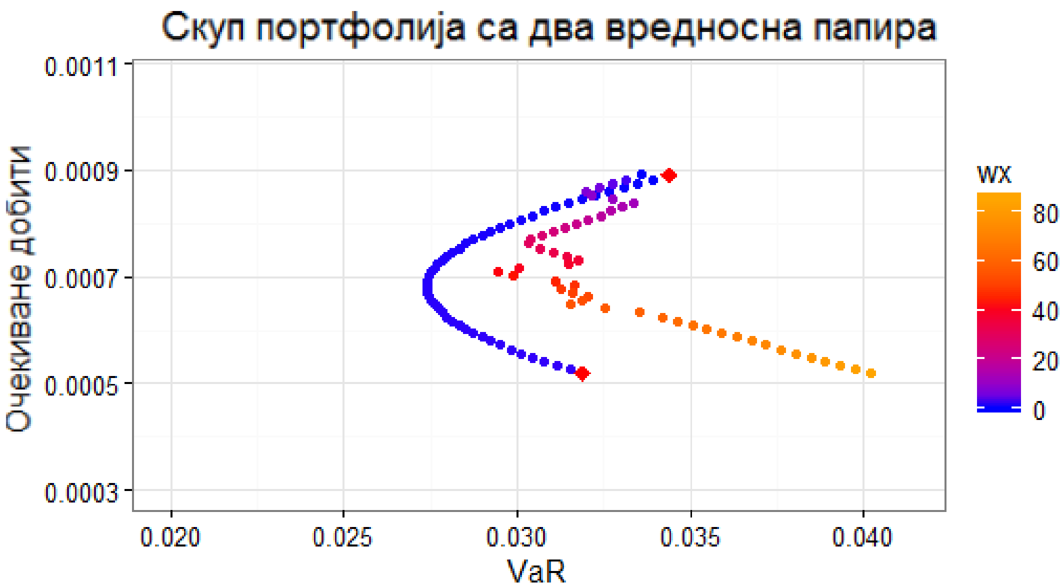
Након увођења параметарског и непараметарског приступа оцењивања вредности VaR постављa се питање да ли различити начини оцењивања VaR-а могу проузроковати идентичну ефикасну границу. У ту сврху, упоредимо параметарски и непараметарски приступ. [6]

Када размотримо који вредносни папири ће чинити портфолио, потребно је прорачунати добити на основу цена вредносних папира у посматраним временским тренуцима. Расподелу добити потребно је уклопити у неку од познатих (елиптичких) расподела. Након тога, VaR портфолија нам је одређен са

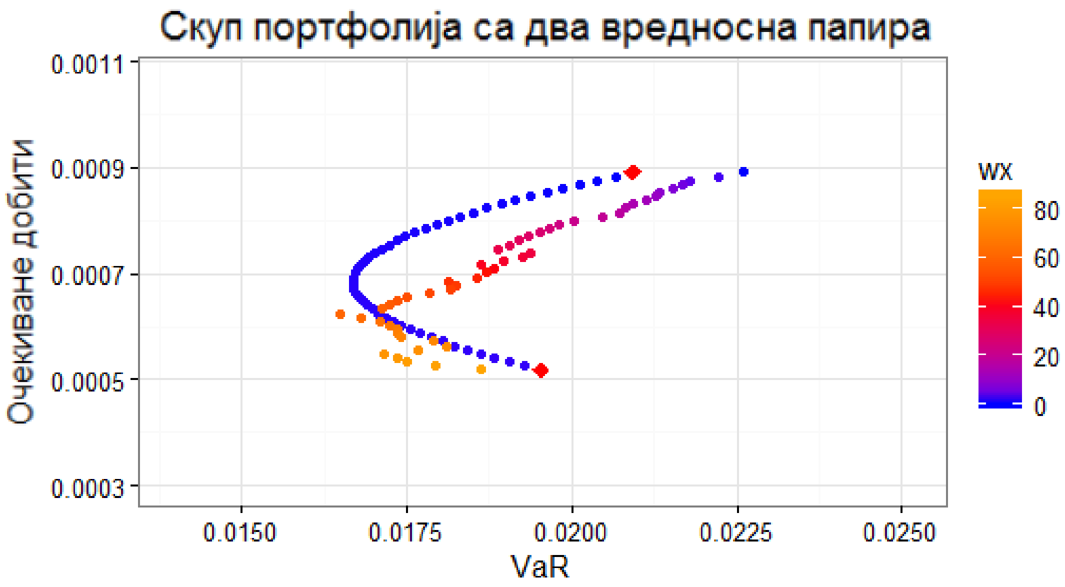
$$VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sigma_p$$

где су μ_p, z_α и σ_p очекивана добит портфолија, стандардизовани квантил одговарајуће расподеле и стандардна девијација портфолија редом. Након параметарског одређивања VaR-а, оценићемо га историјском методом за исте очекиване добити. Коришћењем различитих удела вредносних папира, добијамо скуп портфолија који у оба случаја чини ефикасну границу.

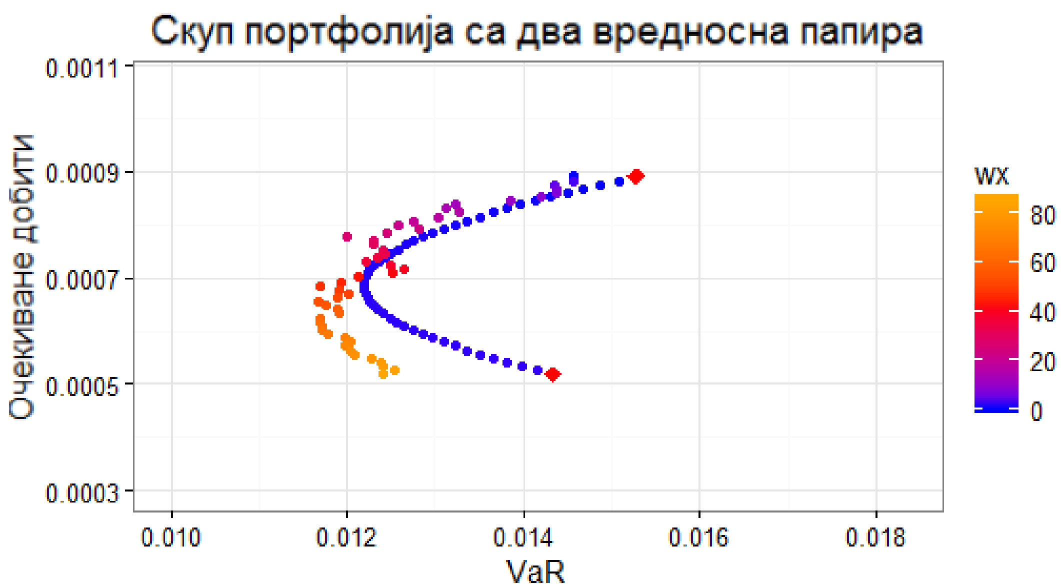
Посматрали смо портфолио сачињен од акција компанија Циско Систем (Cysco Systems) и Епл (Apple) и добили следеће резултате. Плаве тачке приказају портфолије добијене параметарском методом, а шарене оне које су добијене историјском симулацијом.



Слика 2.2: Ниво значајности $\alpha = 0.01$



Слика 2.3: Ниво значајности $\alpha = 0.05$



Слика 2.4: Ниво значајности $\alpha = 0.1$

Можемо приметити да разлике између ефикасне границе(горње половине представљених графика) добијене параметарском методом и историјском симулацијом постају значајније како се очекивана добит портфолија смањује. Са друге стране, занимљиво је да ове границе конвергирају идентичној граници како расту очекивана добит и VaR. Такође, можемо закључити да са повећањем нивоа значајности, посматране две групе портфолија имају сличне перформансе. О анализи података ван узорка, можемо прочитати више у [6], [9] и [12].

Представљени модел претпоставља савршено тржиште где не постоји ограничење броја вредносних папира у портфолију, инвеститори немају наклоност ка неком вредносном папиру и нема различитих типова вредносних папира у портфолију. Сва наведена ограничења се често срећу у пракси. Модел можемо проширити постављањем бројних ограничења, која срећемо у свакодневном животу, како би добијени резултати боље одражавали практичну оптимизацију портфолија. Више о типовима ограничења и њиховом представљању можемо прочитати у [10].

Поглавље 3

Оптималан портфолио

Као у MV моделу, и у MVAR моделу постоје различити оптимални портфолији. Поменућемо неке од њих. Инвеститор може например инвестирати у портфолио који минимизује VaR или у тангентни портфолио који максимизује количник $\frac{m}{VaR}$, где m представља очекиване добити. Такође можемо говорити и о оптималном Телсеровом портфолију који за задату вредност VaR-a максимизује очекивану добит. Размотримо сада сваки од наведених портфолија. [4]

3.1 Портфолио који минимизује VaR

Подсетимо се формуле за VaR_α

$$VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}$$

Сада желимо да минимизујемо VaR. То можемо учинити изједначавањем првог извода ове функције по промењивој μ_p са нулом. Слично као у претходним поглављима, може се показати да је добијена тачка заиста тачка минимума.

$$\frac{dVar_\alpha}{d\mu_p} = -1 - \frac{z_\alpha(c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} = 0$$

$$\frac{z_\alpha(c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} = -1$$

$$
\begin{aligned}
z_\alpha(bC_0 - c\mu_p) &= d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)} \\
\frac{z_\alpha^2(c^2\mu_p^2 - 2bC_0c\mu_p + b^2C_0^2)}{d^2} &= \frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) \\
z_\alpha^2c^2\mu_p^2 - 2bC_0c\mu_p z_\alpha^2 + z_\alpha^2b^2C_0^2 &= dc\mu_p^2 - 2bC_0d\mu_p + adC_0^2
\end{aligned}
$$

$$\mu_p^2(z_\alpha^2c^2 - dc) + \mu_p(2bC_0d - 2bcC_0z_\alpha^2) + z_\alpha^2b^2C_0^2 - adC_0^2 = 0$$

$$\mu_p = \tfrac{2bC_0(cz_\alpha^2 - d) \pm \sqrt{(1)}}{2(z_\alpha^2c^2 - dc)}$$

Израчунајмо израз (1):

$$
\begin{aligned}
(1) &= 4b^2C_0^2d^2 + 4b^2c^2C_0^2z_\alpha^4 - 8b^2C_0^2cdz_\alpha^2 - 4z_\alpha^4c^2b^2C_0^2 + 4adC_0^2c^2z_\alpha^2 + 4cdz_\alpha^2b^2C_0^2 \\
&\quad - 4ad^2cC_0^2 \\
&= 4d^2C_0^2(b^2 - ac) + 4adC_0^2c^2z_\alpha^2 - 4b^2C_0^2cdz_\alpha^2 \\
&= -4d^3C_0^2 + 4C_0^2z_\alpha^2cd(ac - b^2) \\
&= -4d^3C_0^2 + 4C_0^2z_\alpha^2cd^2.
\end{aligned}
$$

Користили смо да је $d = ac - b^2$. Сада добијамо

$$
\begin{aligned}
\mu_p &= \frac{bC_0(cz_\alpha^2 - d) + C_0d\sqrt{z_\alpha^2c - d}}{z_\alpha^2c^2 - dc} \\
&= \frac{bC_0(cz_\alpha^2 - d)}{c(z_\alpha^2c - d)} + \frac{C_0d\sqrt{z_\alpha^2c - d}}{c(z_\alpha^2c - d)} \\
&= (\frac{b}{c} + \frac{d}{c\sqrt{z_\alpha^2c - d)}})C_0
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mu_{mvr} = (\frac{b}{c} + \frac{d}{c\sqrt{z_\alpha^2c - d)}})C_0}.$$

Рачунамо одговарајућу вредност за VaR

$$
\begin{aligned}
VaR_{mvr} &= -\mu_{mvr} - z_\alpha\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{mvr}^2 - 2bC_0\mu_{mvr} + aC_0^2)} \\
&= -\frac{b}{c}C_0 - \frac{dC_0}{c\sqrt{z_\alpha^2c - d}} - z_\alpha\sqrt{(2)},
\end{aligned}
$$

$$\mu_{mvr}^2 = \tfrac{b^2C_0^2}{c^2} + \tfrac{d^2C_0^2}{c^2(z_\alpha^2c - d)} + 2\tfrac{bdC_0^2}{c^2\sqrt{z_\alpha^2c - d}}$$

при чему је

$$\begin{aligned}
(2) &= \frac{1}{d}(\frac{b^2C_0^2}{c} + \frac{d^2C_0^2}{c(z_\alpha^2c-d)} + 2\frac{bdC_0^2}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}} - 2bC_0^2(\frac{b}{c} + \frac{d}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}}) + aC_0^2) \\
&= \frac{1}{d}(-\frac{b^2C_0^2}{c} + \frac{d^2C_0^2}{c(z_\alpha^2c-d)} + aC_0^2) \\
&= \frac{1}{d}\frac{-b^2C_0^2z_\alpha^2c + b^2dC_0^2 + ac^2C_0^2z_\alpha^2 - acdC_0^2 + d^2C_0^2}{c(z_\alpha^2c-d)} \\
&= \frac{1}{d}\frac{z_\alpha^2C_0^2c(ac-b^2) + dC_0^2(b^2-ac) + d^2C_0^2}{c(z_\alpha^2c-d)} \\
&= \frac{1}{d}\frac{z_\alpha^2C_0^2cd - d^2C_0^2 + d^2C_0^2}{c(z_\alpha^2c-d)} \\
&= \frac{z_\alpha^2C_0^2}{z_\alpha^2c-d}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VaR_{mvr} &= -\tfrac{b}{c}C_0 - \tfrac{dC_0}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}} + z_\alpha\tfrac{z_\alpha C_0}{\sqrt{z_\alpha^2c-d}} \\
&= -\tfrac{b}{c}C_0 - \tfrac{dC_0 - z_\alpha^2cC_0}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}} \\
&= -\tfrac{b}{c}C_0 + \tfrac{C_0(z_\alpha^2c-d)}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}}.
\end{aligned}$$

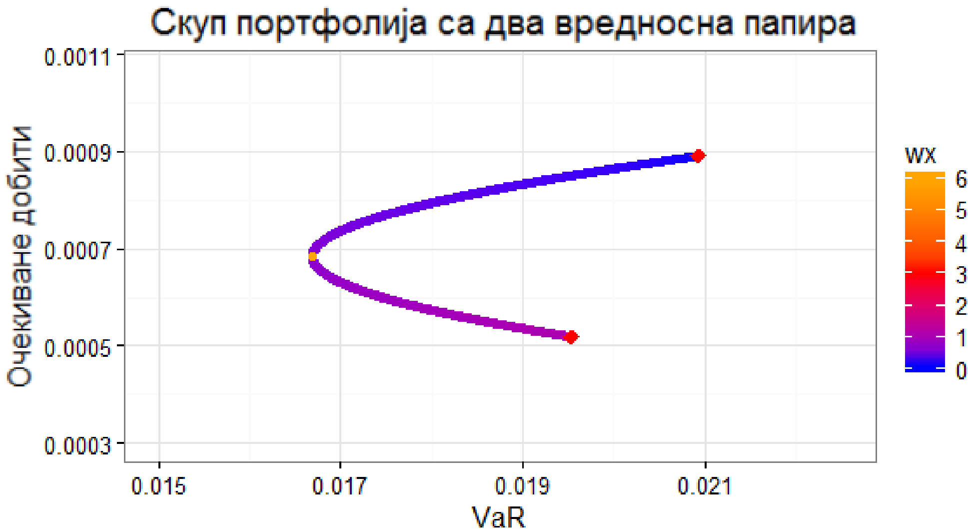
Дакле, добили смо да је

$$\boxed{VaR_{mvr} = C_0(-\frac{b}{c} + + \frac{\sqrt{z_\alpha^2c-d}}{c})}$$

као и

$$\boxed{\sigma_{mvr} = -\frac{z_\alpha C_0}{\sqrt{z_\alpha^2c-d}}}.$$

Добијени портфолио представљен је на слици 3.1 тачком жуте боје која се налази на ефикасној граници портфолија. Приметимо да он заиста минимизује вредност VaR.



Слика 3.1: Минимум VaR портфолио

3.2 Тангентни VaR портфолио

Тангентни VaR портфолио је пресечна тачка линије која пролази кроз координатни почетак, а тангента је на ефикасну границу и саме ефикасне границе. Он представља портфолио са максималним количником $\frac{m}{VaR}$, где m представља очекиване добити.

Код овог портфолија нагиб тангентне линије мора бити једнак нагибу ефикасне границе, па на тај начин добијамо

$$\frac{\triangle VaR_{tvr}}{\triangle \mu_{tvr}} = \frac{dVaR_\alpha}{d\mu_p}\Big|_{\mu_p=\mu_{tvr}}$$

$$\frac{-\mu_{tvr} - z_\alpha\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tvr}^2 - 2bC_0\mu_{tvr} + aC_0^2)} - 0}{\mu_{tvr} - 0} = -1 - \frac{z_\alpha(c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}}\Big|_{\mu_p=\mu_{tvr}}$$

$$-\mu_{tvr}d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tvr}^2 - 2bC_0\mu_{tvr} + aC_0^2)} - z_\alpha d\frac{1}{d}(c\mu_{tvr}^2 - 2bC_0\mu_{tvr} + aC_0^2)$$
$$= -\mu_{tvr}d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tvr}^2 - 2bC_0\mu_{tvr} + aC_0^2)} - \mu_{tvr}z_\alpha(c\mu_{tvr} - bC_0)$$

$$\begin{aligned} z_\alpha(c\mu_{tvr}^2 - 2bC_0\mu_{tvr} + aC_0^2) &= \mu_{tvr}^2 cz_\alpha - bC_0z_\alpha\mu_{tvr} \\ bC_0z_\alpha\mu_{tvr} - aC_0^2z_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mu_{tvr} = \frac{aC_0^2z_\alpha}{bC_0z_\alpha} = \frac{aC_0}{b}}$$

Приметимо да добијамо исти резултат као за тангентни портфолио у MV моделу, што је једна занимљива чињеница.
Добијени резултат има смисла на основу следећег

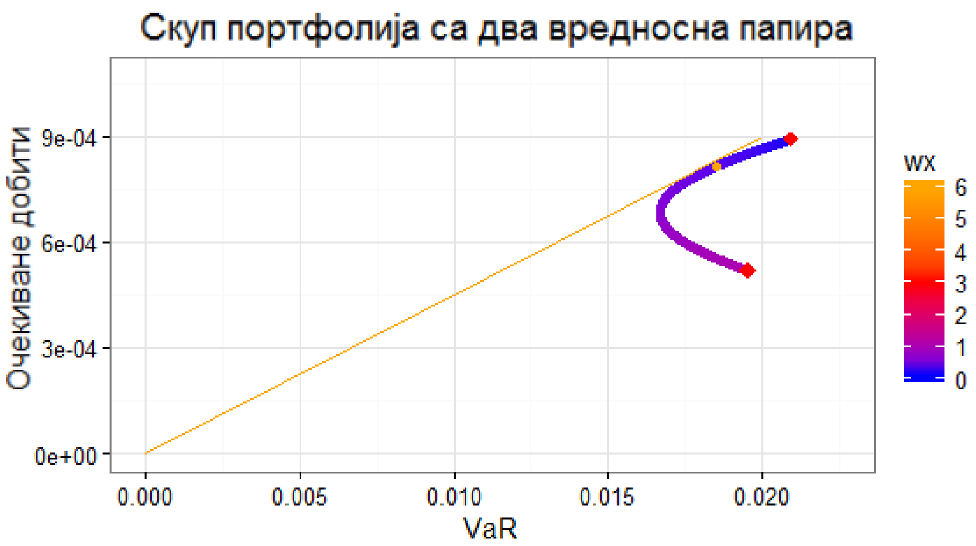
$$max\tfrac{\mu_p}{VaR_\alpha} = max\tfrac{\mu_p}{-\mu_p - z_\alpha\sigma_p} = min\tfrac{-\mu_p - z_\alpha\sigma_p}{\mu_p} = min\tfrac{-z_\alpha\sigma_p}{\mu_p} = max\tfrac{\mu_p}{\sigma_p}.$$

Одговарајућа вредност за VaR је

$$\begin{aligned} VaR_{tg} &= -\mu_{tg} - z_\alpha\sigma_{tg} \\ &= -\frac{aC_0}{b} - z_\alpha\sqrt{\frac{1}{d}(c\frac{a^2C_0^2}{b^2} - 2bC_0\frac{aC_0}{b} + aC_0^2)} \\ &= -\frac{aC_0}{b} - z_\alpha\sqrt{\frac{a^2C_0^2c}{db^2} - \frac{2abC_0^2}{bd} + \frac{aC_0^2}{d})} \\ &= -\frac{aC_0}{b} - z_\alpha\sqrt{\frac{a^2C_0^2c - 2ab^2C_0^2 + ab^2C_0^2}{db^2}} \\ &= -\frac{aC_0}{b} - z_\alpha\sqrt{\frac{a^2C_0^2c - ab^2C_0^2}{db^2}} \\ &= -\frac{aC_0}{b} - z_\alpha\sqrt{\frac{aC_0^2(ac - b^2)}{db^2}} \\ &= -\frac{aC_0}{b} - z_\alpha\sqrt{\frac{aC_0^2d}{db^2}} \\ &= -\frac{aC_0}{b} - z_\alpha C_0\sqrt{\frac{a}{b^2}} \\ &= -C_0(\frac{a}{b} + z_\alpha\frac{\sqrt{a}}{b}) \\ &= -C_0\frac{1}{b}(a + z_\alpha\sqrt{a}). \end{aligned}$$

$$\boxed{VaR_{tg} = -C_0 \frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)}$$
$$\boxed{\sigma_{tg} = \frac{\sqrt{a}}{b} C_0}$$

На следећој слици можемо видети како изгледа поменути портфолио



Слика 3.2: Тангентни VaR портфолио

Удели тангентног портфолија θ_{tg} остају исти као у MV моделу.

3.3 Телсеров портфолио

Телсеров портфолио је портфолио који максимизује очекивану добит уколико задамо ограничење за VaR. Можемо га представити на следећи начин

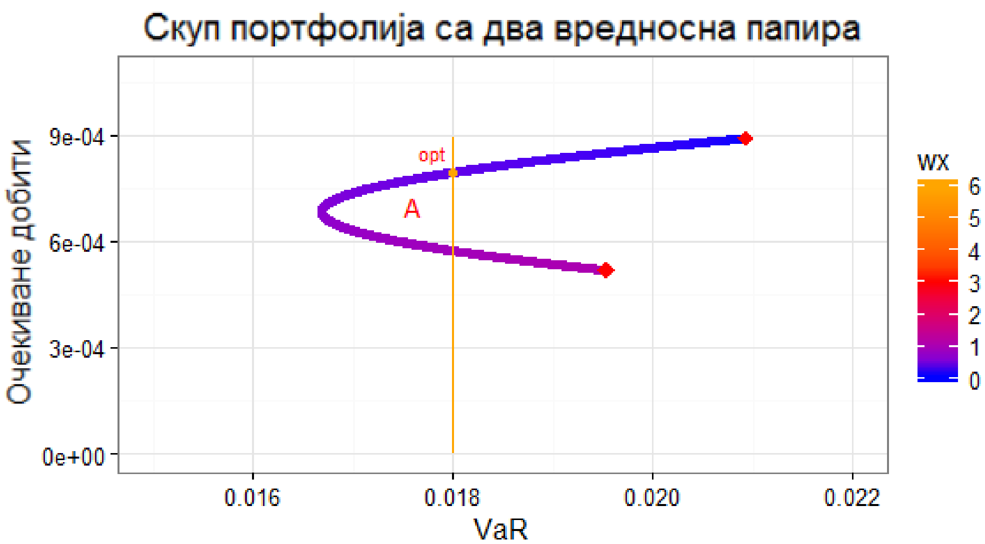
$$max\{\mu_p | VaR_\alpha \leq VaR_c, \bar{1}^T\theta = C_0, \mu_p = \mu^T\theta\}$$

где је VaR_c максимална вредност коју VaR може узети.
Уколико претпоставимо да су добити елиптички расподељене, први услов постаје

$$\begin{aligned} VaR_\alpha \leq VaR_c &\Leftrightarrow VaR_c \geq -\mu_p - z_\alpha\sigma_p \\ &\Leftrightarrow \mu_p \geq -VaR_c - z_\alpha\sigma_p \end{aligned}$$

Телсеров портфолио сада можемо представити као

$$max\{\mu_p | \mu_p \geq -VaR_c - z_\alpha\sigma_p, \bar{1}^T\theta = C_0, \mu_p = \mu^T\theta, \sigma_p^2 = \theta^T\Sigma\theta\}$$



Слика 3.3: Оптималан Телсеров портфолио

Оптимални портфолио лежи у области A, при чему га можемо наћи максимизирањем очекиване добит и то је тачка *opt*. График приказује зашто је згодније радити са MVAR моделом уместо са MV. Тада ограничење за VaR постаје вертикална линија, а много је лакше радити у том случају. Оптималну тачку рачунамо тако што поставимо ограничење да је $VaR_\alpha = VaR_c$, што даје следеће резултате.

$$VaR_c = -\mu_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)},$$

$$\mu_p + VaR_c = -z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}.$$

Квадрирањем претходног израза добијамо

$$\frac{\mu_p^2 + VaR_c^2 + 2\mu_p VaR_c}{z_\alpha^2} = \frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2).$$

Одатле следи да је

$$d\mu_p^2 + dVaR_c^2 + 2d\mu_p VaR_c = z_\alpha^2 c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p z_\alpha^2 + z_\alpha^2 aC_0^2.$$

Решавањем квадратне једначине

$$(d - z_\alpha^2 c)\mu_p^2 + (2dVaR_c + 2bC_0 z_\alpha^2)\mu_p + dVaR_c^2 - z_\alpha^2 aC_0^2 = 0$$

добијамо

$$\mu_p = \frac{-2dVaR_c - 2bC_0 z_\alpha^2 \pm \sqrt{(3)}}{2d - 2z_\alpha^2 c}$$

Рачунамо вредност израза (3):

$$\begin{aligned}(3) =&4d^2VaR_c^2 + 4b^2C_0^2z_\alpha^4 + 8dbC_0VaR_cz_\alpha^2 - 4d^2VaR_c^2 + 4dz_\alpha^2aC_0^2\\ &+4z_\alpha^2cdVaR_c^2 - 4z_\alpha^4acC_0^2\\ =&4C_0^2z_\alpha^4(b^2 - ac) + 4dz_\alpha^2aC_0^2 + 8dbC_0VaR_cz_\alpha^2 + 4z_\alpha^2cdVaR_c^2\\ =&4C_0^2z_\alpha^2d(a - z_\alpha^2) + 8dbC_0VaR_cz_\alpha^2 + 4z_\alpha^2cdVaR_c^2,\end{aligned}$$

и добијамо да је

$$\mu_p = \frac{-dVaR_c - bC_0z_\alpha^2 - z_\alpha\sqrt{d(C_0^2(a - z_\alpha^2) + 2bC_0VaR_c + cVaR_c^2)}}{d - z_\alpha^2 c}$$

$$\boxed{\mu_{opt} = \frac{dVaR_c + bC_0z_\alpha^2 + z_\alpha\sqrt{d(C_0^2(a - z_\alpha^2) + 2bC_0VaR_c + cVaR_c^2)}}{z_\alpha^2 c - d}}.$$

Сада је

$$\begin{aligned}\sigma_{opt} =& \frac{-VaR_c - \mu_{opt}}{z_\alpha}\\ =& \frac{-VaR_c - \frac{dVaR_c + bC_0 z_\alpha^2 + z_\alpha\sqrt{d(C_0^2(a-z_\alpha^2)+2bC_0VaR_c+cVaR_c^2)}}{z_\alpha^2 c - d}}{z_\alpha}\\ =& \frac{-VaR_c z_\alpha^2 c + dVaR_c - dVaR_c - bC_0 z_\alpha^2 + z_\alpha\sqrt{d(C_0^2(a-z_\alpha^2)+2bC_0VaR_c+cVaR_c^2)}}{z_\alpha(z_\alpha^2 c - d)}.\end{aligned}$$

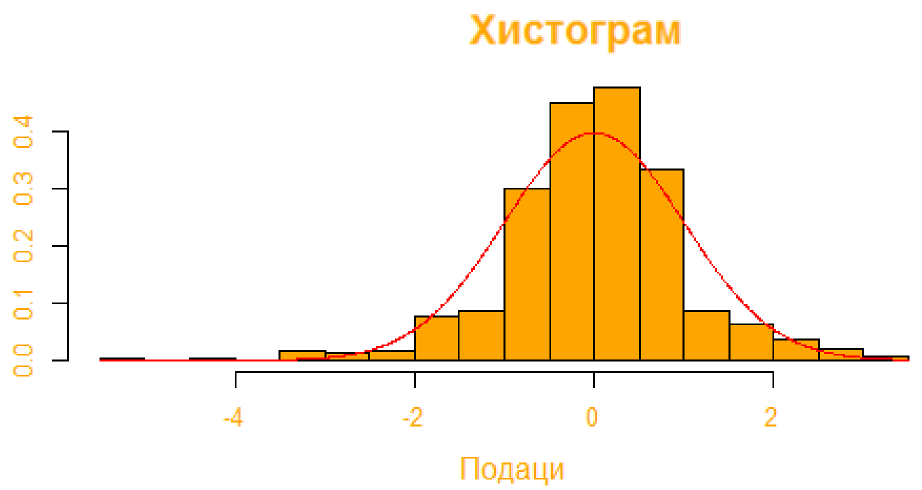
Сређивањем претходног израза добијамо да је стандардно одступање оптималног портфолија

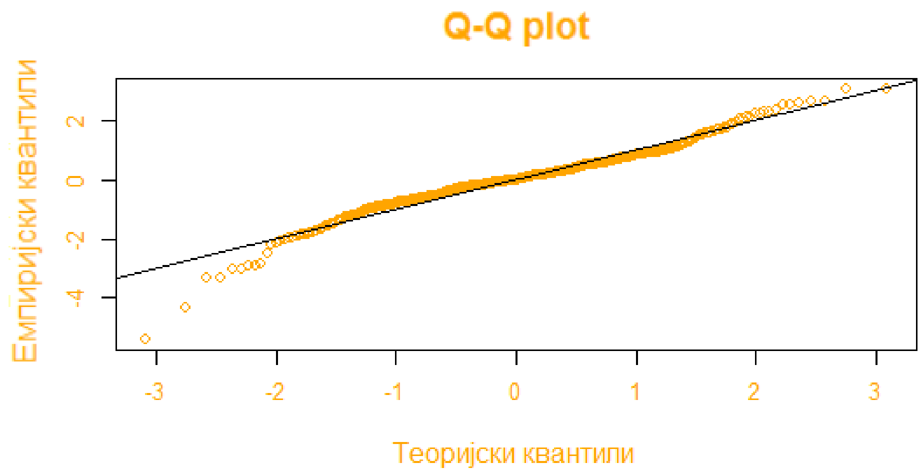
$$\boxed{\sigma_{opt} = \frac{VaR_c z_\alpha c + bC_0 z_\alpha - \sqrt{d(C_0^2(a-z_\alpha^2)+2bC_0VaR_c+cVaR_c^2)}}{d - z_\alpha^2 c}}.$$

Уделе θ_{opt} можемо наћи користећи чињеницу да оптимални портфолио лежи на ефикасној граници, па као и у случају Марковицевог портфолија, имамо

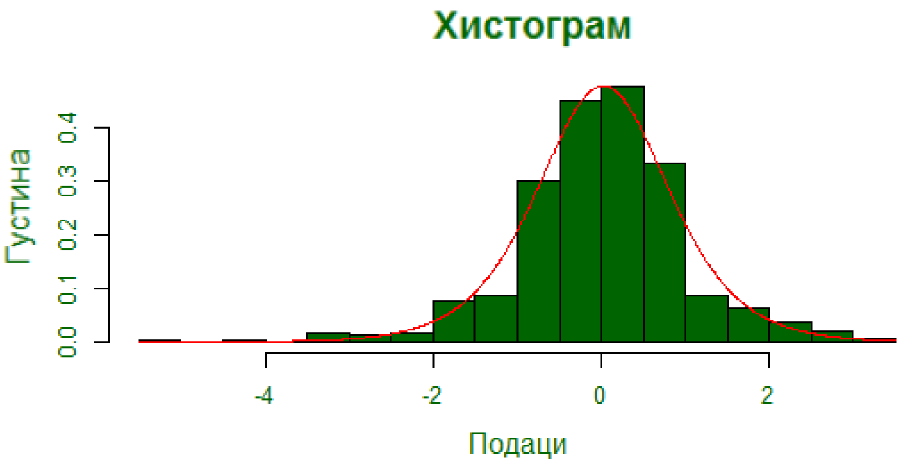
$$\boxed{\theta_{opt} = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((c\mu - b\bar{1})\mu_{opt} + (a\bar{1} - b\mu)C_0)}.$$

Пример 4. *Као и у претходним примерима, посматраћемо акције четири компаније: Циско Системс (Cysco Systems), Епл (Apple), Микрон Технолоџи (Micron Technology) и Форд Моторс Компани (Ford Motors Company). Подаци које поседујемо су цене акција на крају наведеног дана.*
Потребно је да уклопимо добити акција ових компанија у неку од елиптичких расподела.
При уклапању података у нормалну расподелу, добијамо следеће

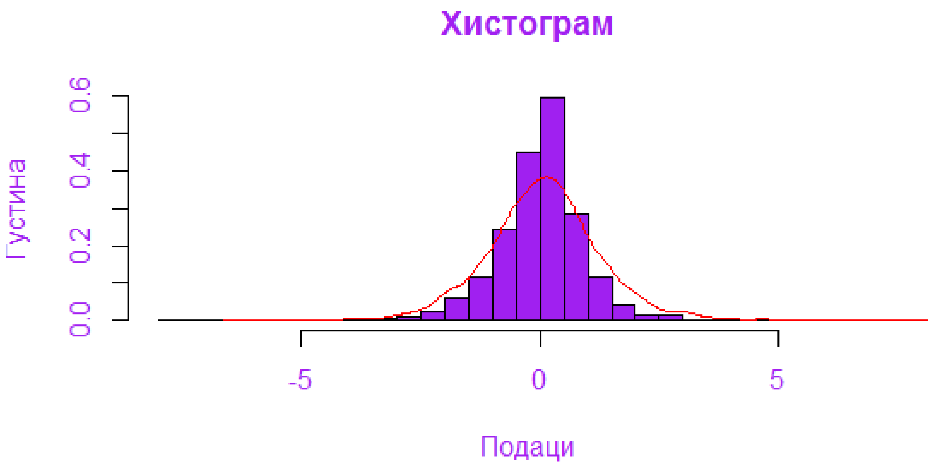


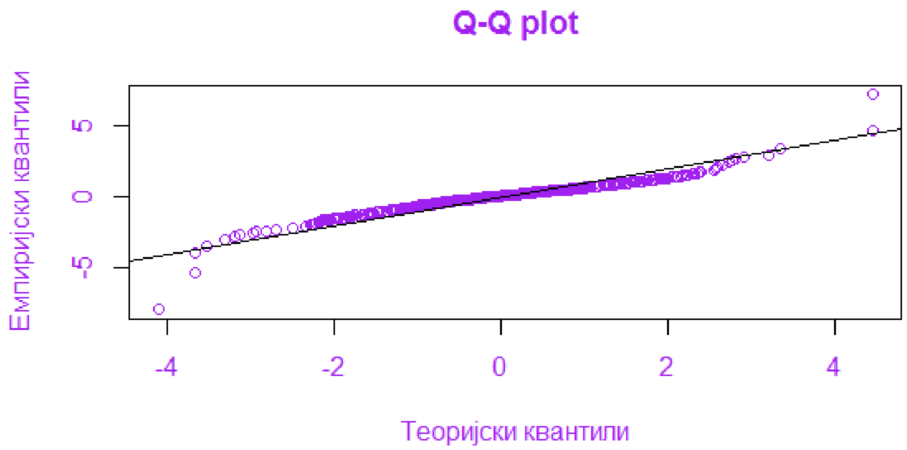


Покушаћемо сада податке да уклопимо у логистичку расподелу. Том приликом добијамо



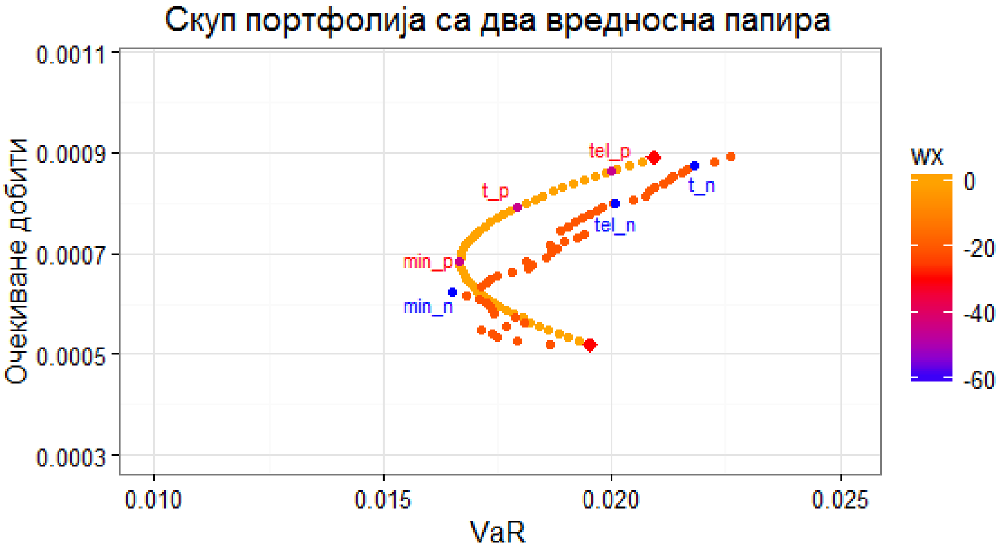
На крају покушајмо да уклопимо расподелу добити у Студентову t-расподелу





Узимајући у обзир тестове нормалности и представљене графике, определили смо се за логистичку расподелу. Дакле, при креирању оптималних портфолија, претпостављаћемо логистичку расподелу добити. Све слике које су раније представљане, реалистично су приказане на основу претпоставке о логистичкој расподели добити и података које поседујемо. На крају рада, налазе се кодови који разјашњавају коришћени поступак. Напоменимо да је на сликама приказано уклапање акције компаније Форд Моторс Компани у поменуте расподеле, али добијамо исте резултате и посматрањем акција осталих компаније, те је на основу тога и изабрана логистичка расподела као расподела која најбоље апроксимира расподелу добити.

На следећој слици приказали смо оптималне портфолије који се састоје из два вредносна папира добијене параметарском и непараметарском методом, при нивоу значајности $\alpha = 0.05$.



Слика 3.4: Ниво значајности $\alpha = 0.05$

Оптималне портфолије у непараметарском методу одређујемо на исти начин као у параметарском. Минимум VaR портфолио је онај који минимизира VaR, тангентни онај који има максималну вредност $\frac{m}{VaR}$, где m представља очекиване добити, а Телсеров онај који за задато ограничење за вредност VaR даје максималну очекивану добит.

Поглавље 4

Декомпозиција VaR вредности портфолија

Уместо посматрања вредности VaR портфолија, у неким случајевима је боље испитати допринос појединачних компоненти портфолија на укупну вредност VaR-а. На тај начин добијамо удео појединачних вредности VaR у односу на укупну вредност, као и промену вредности VaR-а при додавању новог вредносног папира у портфолио. [1]

4.1 Маргинални VaR

Када нам је дат укупни VaR портфолија као број, недостаје нам информација како можемо мењати уделе вредносних папира у портфолију, а да VaR портфолија буде што мањи. Да бисмо приступили тој инфомацији, потребно је да знамо колико сваки појединачни вредносни папир доприноси укупној вредности VaR портфолија. Маргинални($marginal$) VaR мери колико се VaR портфолија мења при додавању нове количине новца посматраном вредносном папиру. Дефинишемо га као

$$MVaR_i = \frac{\partial(VaR)}{\partial\Theta_i}$$

где је Θ_i износ у доларима који инвестирамо у i- ти вредносни папир ($\Theta_i = \theta_i\Theta$).
Маргинални удео вредносног папира i у односу на дисперзију портфолија, при додатном улагању од једне јединице (1 евро, 1 долар,...) у поменути вредносни папир, се мери диференцирањем дисперзије портфолија у односу на удео вредносног папира i. Уколико је дисперзија портфолија

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta_i\theta_j\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \theta_1^2\sigma_{11}^2 + \theta_1 w_2\sigma_{12} + \theta_1\theta_3\sigma_{13} + ... + \theta_1\theta_N\sigma_{1N} \\ +\theta_2\theta_1\sigma_{21} + \theta_2^2\sigma_2 + \theta_2\theta_3\sigma_{23} + ... + \theta_2\theta_N\sigma_{2N} \\ \vdots \\ +\theta_i\theta_1\sigma_{i1} + \theta_i\theta_2\sigma_{i2} + ... + \theta_i^2\sigma_i + ... + \theta_i\theta_N\sigma_{iN} \\ \vdots \\ +\theta_N\theta_1\sigma_{N1} + \theta_N\theta_2\sigma_{N2} + \theta_N\theta_3\sigma_{N3} + ... + \theta_N^2\sigma_N \end{pmatrix}$$

тада је тражени извод

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_p^2}{\theta_i} &= \theta_1\sigma_{1i} + \theta_2\sigma_{2i} + ... + \theta_1\sigma_{i1} + +\theta_2\sigma_{i2} + \theta_3\sigma_{i3} + ... + \theta_N\sigma_{iN} + ... + \theta_N\sigma_{Ni} \\ &= 2\theta_1\sigma_{1i} + 2\theta_2\sigma_{2i} + ... + 2\theta_N\sigma_{Ni} \\ &= 2\theta_i\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1, i\neq j}^{N} \theta_j\sigma_{ij} = 2\sum_{j=1}^{N}\theta_j\sigma_{ij} = 2\sigma_{ip} \end{aligned} \tag{6.1}$$

где је σ_{ip} коваријација добити између портфолија и вредносног папира i. Како је $\frac{\partial\sigma_p^2}{\theta_i} = 2\sigma_p\frac{\partial\sigma_p}{\theta_i}$, наведена једнакост (6.1) се своди на

$$\frac{\partial\sigma_p}{\theta_i} = \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p}$$

Одавде видимо да је маргинални VaR вредносног папира i при додатном улогу од 1 евра у тај вредносни папир управо

$$\begin{aligned} MVaR_i &= \frac{\partial(z_\alpha\sigma_p\Theta)}{\partial(\theta_i\Theta)} \\ &= z_\alpha(\frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p}) \end{aligned}$$

Уколико је посматрани портфолио тржишни, добијамо следећу везу између MVaR-а и VaR-а портфолија

$$MVaR_i = z_\alpha\beta_i\sigma_p = VaR_p\frac{\beta_i}{\Theta} \tag{4.1}$$

Када инвестирори желе да смање VaR портфолија, идеја је да смањују удео оног вредносног папира у портфолију који има велику вредност MVaR, зато што ова компонента доводи до великог ризика. Вредност MVaR се користи за идентификовање најбољег кандидата који нам може помоћи при смањењу ризика.

4.2 Додатни VaR

Додатни(*incremental*) VaR мери промену у VaR-у портфолија при додавању новог вредносног папира. Он мери потенцијални утицај новог вредносног папира на VaR портфолија. Он се разликује од MVaR-a у томе што MVaR мери какав утицај на VaR има додавање 1 долара неком вредносном папиру, док IVaR мери какав утицај на VaR има додавање новог вредносног папира у портфолио. Такође, уколико додајемо или одузимамо постојећим вредносним папирима већу количину новца, поново говоримо о IVaR-у. Нека имамо портфолио који се састоји од 100 вредносних папира. Инвеститор разматра да промени 3 акције одједном, тако што ће додатно уложити у њих 100, 150 и 80 долара редом. Њега ће интересовати како ће то утицати на вредност VaR-a. У овом случају је у питању IVaR. Уколико, међутим, инвеститора интересује колико ће се VaR променити уколико додамо 1 евро неком вредносном папиру, у том случају говоримо од MVaR-у.

Како бисмо одредили вредност IVaR-a потребно је израчунати VaR пре и после промене и њихова разлика је управо IVaR. Нека је a вектор који представља промене у портфолију. Тада IVaR дефинишемо као

$$IVaR_a = VaR_{p+a} - VaR_p$$

где је VaR_{p+a} вредност при ризику портфолија након промене. Јорион (2001) је показао да је $IVaR$ апроксимативно једнак

$$IVaR_a \approx \sum_{i=1}^{L} MVaR_i \cdot a_i \tag{4.2}$$

где је L број вредносних папира код којих долази до промене, а a_i промену износа који се улаже у i-ти вредносни папир. Уколико је вредност a_i велика, могуће је да наведена апроксимација не даје добре резултате.

4.3 Појединачни VaR

Појединачни(*component*) VaR представља разложени део VaR-а који добијемо уколико укључимо само један вредносни папир у портфолио. Сума свих $PVaR$-ова представља баш VaR. Стога, $PVaR$ мери допринос појединачног вредносног папира укупној вредности VaR. $PVaR$

мери колико ће се VaR променити уколико одстранимо неки вредносни папир из портфолија. Како је

$$VaR_p = \sum_{i=1}^{N} PVaR_i$$

на основу (4.1) имамо

$$\begin{aligned} VaR_p &= \sum_{i=1}^{N} \theta_i(\beta_i VaR_p) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \theta_i[\Theta \cdot MVaR_i] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \Theta_i \cdot MVaR_i \end{aligned}$$

где $\Theta_i = \theta_i\Theta$ представља количину новца уложену у i-ти вредносни папир. Тада је $PVaR_i$

$$PVaR_i = \theta_i\beta_i VaR_p \text{ или } PVaR_i = \Theta_i \cdot MVaR_i$$

Сада $MVaR_i$ можемо рачунати и као

$$MVaR_i = \frac{PVaR_i}{\Theta_i}. \tag{4.3}$$

Пример 5. *Прикажимо како наведене врсте VaR-а утичу на портфолио који садржи акције две компаније: Cysco и Apple. У следећој табели приказани су подаци о портфолију*

	Cysco	*Apple*	*Портфолио*
Ст. девијација	*0.0126*	*0.0137*	*0.0095*
Уложен новац (у милионима евра)	*4*	*3*	*7*
Тежине уложеног новца	*0.43*	*0.57*	*1.00*
VaR	*117603.2458*	*95990.0472*	*22192.0838*

Корелациоја између ова два вредносна папира је 0,386478732, што је израчунато у R-у. Да бисмо добили вредности појединачних VaR-ова, потребно је да одредимо вредности β_i. *Како је* $\sigma_{ip} = \sum_{j=1}^{N} \omega_j\sigma_{ij}$, *добијамо*

$$\beta_1 = \frac{\sigma_{1p}}{\sigma_p^2} = \frac{\sum_{j=1}^{2} \omega_j\sigma_{1j}}{\sigma_p^2} = 0,7548$$

На исти начин добијамо и вредност $\beta_2 = 1,1850$.
На основу (4.3) *добијамо вредности* $PVaR$
$PVaR_1 = \omega_1\beta_1 VaR_p = 0.43 \cdot 0.7548 \cdot 22192.0838 = 7202.7700$
$\underline{PVaR_2} = \omega_2\beta_2 VaR_p = 0.57 \cdot 1.1850 \cdot 22192.0838 = \underline{14989.3138}$
VaR_p *22192.0838*
Колико износе маргинални VaR-ови сваког вредносног папира?
На основу једначине (4.3), *маргиналне VaR вредности компанија Cysco и Apple су:*

$$MVaR_1 = \frac{7202.7700}{4000000} = 0.001800693$$
$$MVaR_2 = \frac{14989.3138}{3000000} = 0.004996438$$

Добијени резултати нам указују на то колико се повећава VaR портфолија уколико уложимо 1 евро у дати вредносни папир. Уколико је улагање у вредносни папир компаније Cysco, VaR портфолија ће се повећати за 0,001800693 еура, а уколико је пак улагање у вредносни папир компаније Apple, VaR ће се повећати за 0,004996438 евра. На основу ових информација, видимо да више утичемо на вредност VaR уколико смањимо улагања у други вредносни папир, него у први.
Уколико уложимо додатних 50 000 евра у први вредносни папир, а са друге стране смањимо улагања у други вредносни папир за исту количину новца, говоримо о додатном VaR-у.
Из једначине (4.2), *тражена вредност је апроксимативно једнака*

$$IVaR(a) \approx 0.001800693 \cdot 50000 + 0.004996438 \cdot (-50000) = -159.7655$$

Уколико се улагања у вредносне папире промене на наведени начин, VaR вредност портфолија ће опасти за -159.7655 евра. Приметимо да уколико уложимо обрнуто, смањимо улагања у први вредносни папир за 50000, а повећамо улагања у други такође за 50000 евра, вредност VaR ће се повећати за наведену вредност.

Поглавље 5

Кодови

Уклапање у одговарајућу расподелу

```
attach(dobiti)
library(fitdistrplus)
r1<-(Dobit.C-mean(Dobit.C))/sd(Dobit.C)
r2<-(Dobit.A-mean(Dobit.A))/sd(Dobit.A)
r3<-(Dobit.M-mean(Dobit.M))/sd(Dobit.M)
r4<-(Dobit.F-mean(Dobit.F))/sd(Dobit.F)

fit.logis<-fitdist(r4,'logis')
plot(fit.logis,breaks = 30)
fit.norm<-fitdist(r4,'norm')
plot(fit.norm,breaks = 30)
stud<-rt(500,df=6)
qqplot(stud,r4,xlab = "Teorijski kvantili",ylab=" mpirijski
    kvantili")
abline(0,1)
hist(r4,freq = FALSE,xlab="Podaci",main="Histogram")
lines(density(test),col='red')
>shapiro.test(Dobit.F)
Shapiro-Wilk normality test

data:  Dobit.F
W = 0.9582, p-value = 1.043e-10
>jarque.bera.test(Dobit.F)
Jarque Bera Test

data:  Dobit.F
X-squared = 217.2941, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

Скуп портфолија у mean-variance моделу

```
library(data.table)
```

```
library(scales)
library(ggplot2)
attach(dobiti)

#dobiti kompanija Cysco i Apple
r_x <- mean(Dobit.C)
r_y <- mean(Dobit.A)

#koristimo standardnu devijaciju kao meru rizika
sd_x <- sd(Dobit.C)
sd_y <- sd(Dobit.A)

#kovarijacija
cov_xy <- cov(Dobit.C, Dobit.A)

#udeli portfolija
x_weights <- seq(from = 0, to = 1, length.out = 1000)
two_assets <- data.table(wx = x_weights,
                         wy = 1 - x_weights)

#nivo poverenja
alpha<-0.05
#kvantil odgovarajuce raspodele
k<-qlogis(alpha)
#standardizovani kvantil
z<-k*sqrt(3)/pi

#ocekivane dobiti i standardne devijacije za 1000 mogucih portfolija
two_assets[, ':=' (r_p = wx * r_x + wy * r_y,
                   sd_p=sqrt(wx^2 * sd_x^2 +
                               wy^2 * sd_y^2 +
                               2 * wx * (1 - wx) * cov_xy))]

ggplot() +
  geom_point(data = two_assets, aes(x = sd_p, y = r_p,
                                           color = wx)) +
  geom_point(data = data.table(sd = c(sd_x, sd_y),
                              mean = c(r_x, r_y)),
  aes(x = sd, y = mean), color = "red", size = 3,
                                    shape = 18) +
  theme_bw() + ggtitle("Skup portfolija sa
                                 dva vrednosna papira") +
  xlab("Standardna devijacija") + ylab("O ekivane dobiti") +
  scale_y_continuous(limits = c(0.0003,
                              max(two_assets$r_p) * 1.2)) +
  scale_x_continuous( limits = c(0.01, 0.015)) +
  scale_color_gradientn(colors = c("blue", "red", "orange"))
```

Скуп портфолија у mean-VaR моделу

```
library(data.table)
library(scales)
library(ggplot2)
attach(dobiti)

#dobiti kompanija Cysco i Apple
r_x <- mean(Dobit.C)
r_y <- mean(Dobit.A)

#racunamo standardnu devijaciju i var
sd_x <- sd(Dobit.C)
sd_y <- sd(Dobit.A)

#nivo poverenja
alpha<-0.05
#kvantil odgovarajuce raspodele
k<-qlogis(alpha)
#standardizovani kvantil
z<-k*sqrt(3)/pi

#var koristimo kao meru rizika
var_x=-r_x-z*sd_x
var_y=-r_y-z*sd_y

#kovarijanse
cov_xy <- cov(Dobit.C, Dobit.A)

#kreiramo udele portfolija
x_weights <- seq(0, 1, length.out = 1000)

two_assets <- data.table(wx = x_weights,
                         wy = 1 - x_weights)

#racunamo ocekivane dobiti i var za 1000 mogucih portfolija
two_assets[, ':=' (r_p = wx * r_x + wy * r_y,
                   var_p=-(wx * r_x + wy * r_y)-
                        z*(sqrt(wx^2 * sd_x^2 +
                                wy^2 * sd_y^2 +
                   2 * wx * (1 - wx) * cov_xy)))]
two_assets


ggplot() +
  geom_point(data = two_assets, aes(x = var_p, y = r_p,
                                    color = wx)) +
  geom_point(data = data.table(var = c(var_x, var_y),
                               mean = c(r_x, r_y)),
             aes(x = var, y = mean), color = "red",
```

```
                                    size = 3, shape = 18) +

  theme_bw() + ggtitle("Skup portfolija
                               sa dva vrednosna papira") +
  xlab("VaR") + ylab("O ekivane dobiti") +
  scale_y_continuous(limits = c(0.0003,
                               max(two_assets$r_p) *1.2)) +
  scale_x_continuous( limits = c(0.01,
                             max(two_assets$var_p) *1.2)) +
  scale_color_gradientn(colors = c("blue", "red", "orange"))
```

Скуп портфолија сачињених од три вредносна папира

```
library(data.table)
library(scales)
library(ggplot2)
attach(dobiti)

#dobiti kompanija Cysco, Micron i Ford
r_x <- mean(Dobit.A)
r_y <- mean(Dobit.M)
r_z <- mean(Dobit.F)

#standardne devijacije
sd_x <- sd(Dobit.A)
sd_y <- sd(Dobit.M)
sd_z <- sd(Dobit.F)

#vrednost pri riziku
var_x=-er_x-z*sd_x
var_y=-er_y-z*sd_y
var_z=-er_z-z*sd_z

#kovarijanse
cov_xy <- cov(Dobit.A, Dobit.M)
cov_xz <- cov(Dobit.A, Dobit.F)
cov_yz <- cov(Dobit.M, Dobit.F)

#udeli portfolija
x_weights <- seq(0, 1, length.out = 1000)

three_assets <- data.table(wx = rep(x_weights,
                           each = length(x_weights)),
                wy = rep(x_weights, length(x_weights)))
three_assets[, wz := 1 - wx - wy]

#nivo poverenja
```

```
alpha<-0.05
#kvantil odgovarajuce raspodele
k<-qlogis(alpha)
#standardizovani kvantil
z<-k*sqrt(3)/pi

#dobiti i var za 1000 mogucih portfolija
three_assets[, ':=' (r_p = wx * r_x +
                          wy * r_y + wz * r_z,
                     var_p = -(wx * r_x +
                          wy * r_y + wz * r_z)
                       -z*sqrt(wx^2 * sd_x^2 +
                              wy^2 * sd_y^2 +
                              wz^2 * sd_z^2 +
                      2 * wx * wy * cov_xy +
                      2 * wx * wz * cov_xz +
                      2 * wy * wz * cov_yz))]

#izuzimacemo slucajeve kada imamo negativne tezine (kratka prodaja)
three_assets <- three_assets[wx >= 0 & wy >= 0 & wz >= 0]
three_assets

ggplot() +
  geom_point(data = three_assets, aes(x = var_p,
                    y = r_p, color = wx - wz)) +
  geom_point(data = data.table(var =
    c(var_x, var_y, var_z), mean = c(r_x, r_y, r_z)),
  aes(x = var, y = mean), color = "blue",
                                size = 3, shape = 18) +
  theme_bw() + ggtitle("Skup portfolija
                           sa tri vrednosna papira") +
  xlab("VaR") + ylab("O ekivana dobit") +
  scale_y_continuous(limits = c(-max(three_assets$r_p),
                        max(three_assets$r_p) * 1.2)) +
  scale_x_continuous( limits = c(-max(three_assets$r_p),
                     max(three_assets$var_p) * 1.2)) +
  scale_color_gradientn(colors = c("blue", "red", "orange"),
  name = expression(omega[x] - omega[z]), labels = percent)
```

Минимум VaR портфолио

```
attach(dobiti)
library(data.table)
library(scales)
library(ggplot2)

#dobiti kompanija Cysco i Apple
r_x <- mean(Dobit.C)
r_y <- mean(Dobit.A)
```

```
mi<-c(r_x,r_y)
#racunamo standardnu devijaciju i var
sd_x <- sd(Dobit.C)
sd_y <- sd(Dobit.A)

#nivo poverenja
alpha<-0.05
#kvantil odgovarajuce raspodele
k<-qlogis(alpha)
#standardizovani kvantil
z<-k*sqrt(3)/pi

#var koristimo kao meru rizika
var_x=-r_x-z*sd_x
var_y=-r_y-z*sd_y

#kovarijanse
cov_xy <- cov(Dobit.C, Dobit.A)
#matrica sigma
covariance<-matrix(c(sd(Dobit.C)^2,cov(Dobit.A,Dobit.C),
                                          cov(Dobit.A,Dobit.C),
                                        sd(Dobit.A)^2 ),ncol=2)

#parametri a,b,c,d
a<-t(mi)%*%solve(covariance,diag(2))%*%mi
b<-t(mi)%*%solve(covariance,diag(2))%*%c(1,1)
c<-c(1,1)%*%solve(covariance,diag(2))%*%c(1,1)
d<-a*c-b*b

#pretpostavljamo da je ulaganje 1 evro
#odredjujemo minimum var portfolio
C0=1
mi<-(b/c+d/(c*sqrt(c*z*z-d)))*C0
var<-(-b/c+sqrt(c*z*z-d)/c)*C0
theta<-1/as.vector(c*sqrt(c*z*z-d))*
        solve(covariance,diag(2))%*%
        ((sqrt(c*z*z-d)-b)*c(1,1)+
               as.vector(c)*mi)*C0

#kreiramo udele portfolija
x_weights <- seq(0, 1, length.out = 1000)

two_assets <- data.table(wx = x_weights,
                         wy = 1 - x_weights)

#racunamo ocekivane dobiti i var za 1000 mogucih portfolija
two_assets[, ':=' (r_p = wx * r_x + wy * r_y,
                   var_p=-(wx * r_x + wy * r_y)-
                       z*(sqrt(wx^2 * sd_x^2 +
```

```
                              wy^2 * sd_y^2 +
                   2 * wx * (1 - wx) * cov_xy)))]
two_assets
ggplot() +
  geom_point(data = two_assets,
             aes(x = var_p, y = r_p, color = wx)) +
  geom_point(data = two_assets,
                aes(x = var, y = mi, color = wx)) +
  geom_point(data = data.table(var =
              c(var_x, var_y), mean = c(r_x, r_y)),
             aes(x = var, y = mean),
             color = "red", size = 3, shape = 18) +

  theme_bw() + ggtitle("Skup portfolija
                        sa dva vrednosna papira") +
  xlab("VaR") + ylab("O ekivane dobiti") +
  scale_y_continuous(limits = c(0.0003,
                        max(two_assets$r_p) *1.2)) +
  scale_x_continuous( limits = c(0.01,
                      max(two_assets$var_p) *1.2)) +
  scale_color_gradientn(colors = c("blue", "red", "orange"))
```

За представљање тангентног VaR и Телсеровог портфолија само је потребно променити тачке на ефикасној граници које представљају добијене портфолије, те ћемо само навести формиле помоћу којих их рачунамо. На график их додајемо применом функције *geom_point*, аналогно претходном примеру.

Тангентни VaR портфолио

```
mi_t<-a/b
VaR<--sqrt(a)/b*(sqrt(a)+z)

```

Телсеров VaR портфолио

```
#postavljamo ogranicenje za VaR
VaR< -0.0185
mi_t<-(b*z*z*C0+d*VaR-z*
  sqrt(d*((a-z*z)*C0*C0+
  2*b*VaR*C0+c*VaR*VaR)))/
  as.numeric(c*z*z-d)
theta_t<-solve(covariance,diag(4))%*%
       (as.vector(c*mi-b*c(1,1,1,1))*
                  mi_t+(a*c(1,1,1,1)-
              b*mi)*C0)/as.numeric(d)

```

Пример 1

```
apple<-Dobit.A
```

```
investment<-3000000
std<-sd(apple)
k_alfa<-qlogis(0.01)
var<--k_alfa*sqrt(3)/pi*std*investment
```

Пример 2

```
attach(dobiti)
cysco<-Dobit.C
apple<-Dobit.A
micron<-Dobit.M
ford<-Dobit.F
#Standardne devijacije
sd(cysco)
sd(apple)
sd(micron)
sd(ford)
#Matrica korelacija
cor(dobiti)
#Matrica kovarijacija
cov(dobiti)
#vektor udela
omega<-c(0.4,0.3,0.1,0.2)
#standardna devijacija
sigma<-sqrt(t(omega)%*%cov(dobiti)%*%omega)
k_alfa<-qlogis(0.01)
var<--k_alfa*sqrt(3)/pi*sigma*10000000
```

Пример 3

```
attach(cene)
price<-matrix(c(Cene$Cysco,Cene$Apple,+
                  cene5$Micron,cene5$Ford),ncol=4)
scenario<-matrix(rep(0,4*length(Cene$Cysco)),ncol=4)
value_p<-rep(0,length(Cene$Cysco))
loss<-rep(0,length(Cene$Cysco))
for(i in 1: 4){
  for(j in 1:(length(Cene$Cysco)-1)){
  scenario[j,i]<-price[length(Cene$Cysco),i]
    *(price[j+1,i]/price[j,i])
  }}
scenario
value_p<-4*scenario[,1]/
  price[length(Cene$Cysco),1]+
  3*scenario[,2]/price[length(Cene$Cysco),2]+
  scenario[,3]/price[length(Cene$Cysco),3]+
  2*scenario[,4]/price[length(Cene$Cysco),4]
loss<-10000000-value_p*1000000
var<-sort(loss)[length(loss)-5]
```

Поглавље 6

Закључак

У овом раду приказан је модел заснован на вредности при ризику као мери ризика. Описали смо изглед ефикасне границе овог модела, упоредили га са Марковицевим моделом заснованим на дисперзији и описали зашто је модел који ми посматрамо погоднији.

Приступили смо параметарском и непараметарском одређивању VaR-а. Ове методе могу бити изузетно значајне власницима портфолија, који желе да имају информацију који је максималан губитак који они могу остварити за задати ниво поверења. Након тога, желели смо да упоредимо параметарски и непараметарски приступ и дошли смо до закључка да се ефикасне границе све више разликују са смањењем очекиване добити портфолија, а да са повећањем нивоа значајности, очекиване добити и VaR-а оне постају све сличније.

Након тога, прешли смо на задатак оптимизације портфолија. Приказана су три могућа начина:

- минимизирање вредности при ризику(минимум VaR портфолио);
- максимизирање вредности $\frac{mean}{VaR}$(тангентни портфолио);
- максимизирање очекиване добити при задатом ограничењу за VaR.

На крају смо приказали неколико мера сензитивности вредности VaR које су се показале изузетно значајне при формирању портфолија са што мањом вредношћу VaR.

Током обрађивања тема које су присутне у овом раду, дошли смо до још неких занимљивих идеја. Осим непараметарске оцене VaR-а помоћу историјских симулација, могли би пронаћи друге непараметарске оцене VaR-а које би га боље описивале. Једна од идеја би могла бити оцена VaR-а коришћењем језгара.

Са друге стране, једноставна оптимизација портфолија заснована на параметарском моделу, коју смо вршили у овом раду се знатно компликује уколико вредност VaR непараметарски оценимо. У том случају потребно је изучити генеричке алгоритме који нам могу помоћи у решавању овог проблема.

Литература

[1] J. C. Fransis, D. Kim, Modern portfolio theory, Foundations, Analysis, and New Developments, 2013.
John Wiley & Sons, New Jersey

[2] P. Best, Implementing Value at Risk, 1998.
John Wiley & Sons, England

[3] J. C. Hull, Options, futures and other derivatives(9^{th} edition), 2015.
Pearson Education, University of Toronto

[4] M. Engels, Portfolio optimization: Beyond Markowitz, 2004.

[5] С. Јанковић, Б. Милошевић, Елементи финансијске математике, 2017.
Математички факултет у Београду

[6] Ch. Y. Tsao, Quantitative Finance, Portfolio selection based on the meanVaR efficient frontier, 2010.
Department of Industrial and Business Management, Chang Gung University

[7] N. D. Pearson, Risk budgeting, Portfolio Problem Solving with Value-at-Risk, 2002.
John Wiley & Sons, Canada

[8] M. Choudhry, An introduction to value at risk(5^{th} edition), 2013.
John Wiley & Sons, United Kingdom

[9] A. A. P. Santos, The Out-of-sample Performance of Robust Portfolio Optimization, 2010.
Department of Statistics, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid

[10] K. T. Lwin, R. Qu, B. L. MacCarthy, Mean-VaR Portfolio Optimization: A Nonparametric Approach, 2017.

Faculty of Science and Technology, Anglia Ruskin University, Chelmsford, UK

[11] H. Markowitz, Portfolio Selection, Vol. 7, No. 1, 1952.
The Journal of Finance

[12] H. Yao, Y. Li, K. Benson, A smooth non-parametric estimation framework for safety-first portfolio optimization, 2014.
Guangdong University of Foreign Studies, China

Биографија

Катарина Халај је рођена 17.11.1993. године у Београду. Основну школу "Десанка Максимовић" је завршила у Земуну 2008. године као носилац дипломе "Вук Караџић", а Девету гимназију "Михаило Петровић Алас" у Београду 2012. године. Основне академске студије на Математичком факултету, Универзитета у Београду је уписала 2012. године. Дипломирала је 2016. године на смеру Статистика, актуарска и финансијска математика са просечном оценом 9.21. Исте године уписује мастер студије на Математичком факултету, на модулу математика, а такође на смеру Статистика, актуарска и финансијска математика. Програмски језици које користи су JAVA, C/C++, Matlab, R/R Studio и SPSS. У периоду од јуна до септембра 2016. године радила је у Секретаријату за послове одбране, ванредних ситуација, комуникације и координацију односа са грађанима као практикант на позицији статистичар. Од маја 2017. године запослена је као сарадник у настави на катедри за вероватноћу и статистику на Саобраћајном факултету у Београду.