Milan A. Kovačević
Gradimir V. Milovanović
Radosav Ž. Đorđević

MATEMATIKA I

LINEARNA ALGEBRA
POLINOMI
ANALITIČKA GEOMETRIJA

Milan A. Kovačević
Gradimir V. Milovanović
Radosav Ž. Đorđević

MATEMATIKA I

LINEARNA ALGEBRA
POLINOMI
ANALITIČKA GEOMETRIJA

SVEN, Niš 2012.

Dr Milan A. Kovačević, red. prof. Elektronskog fakulteta u Nišu
Dr Gradimir V. Milovanović, dopisni član SANU
Dr Radosav Ž. Đorđević, red. prof. Elektronskog fakulteta u Nišu (u penziji)

MATEMATIKA I
(LINEARNA ALGEBRA, POLINOMI, ANALITIČKA GEOMETRIJA)

Izdavavač: SVEN, Niš
Urednik izdavavačke delatnosti: Vladan Stojković
Dizajn korica: dipl. ing. Marko M. Kovačević
Recenzenti: dr Igor Ž. Milovanović, red. prof. Elektronskog fakulteta u Nišu
dr Ljubiša M. Kocić, red. prof. Elektronskog fakulteta u Nišu

Odlukom Nastavno – naučnog veća Elektronskog fakulteta u Nišu, br. 07/05–009/12–003 od 28.06.2012. god. rukopis je odobren za štampu kao osnovni udžbenik na Elektronskom fakultetu u Nišu.

ISBN 978 – 86 – 7746 – 340 – 3

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

512.64(075.8)
512.622(075.8)
514.12(075.8)

КОВАЧЕВИЋ, Милан А., 1953-
Matematika I : linearna algebra, polinomi, analitička geometrija / Milan A. Kovačević, Gradimir V. Milovanović, Radosav Ž. Đorđević. - Niš : Sven, 2012 (Niš : Sven). - VIII, 302 str. : graf. prikazi, tabele ; 24 cm

Tiraž 300. - Bibliografija: str. 301-302.

ISBN 978-86-7746-340-3
1. Миловановић, Градимир В. [аутор] 2. Ђорђевић, Радосав Ж. [аутор]
а) Линеарна алгебра b) Полиноми c) Аналитичка геометрија
COBISS.SR-ID 192185868

Štampa: SVEN – Niš
Tiraž: 300 primeraka

PREDGOVOR

Ova knjiga predstavlja udžbenik iz predmeta *Matematika I* koji se studentima Elektronskog fakulteta u Nišu predaje u I semestru počev od školske 2004/2005. godine.

Knjiga je potpuno usklađena sa akreditovanim planom i programom studija na Elektronskom fakultetu u Nišu, a može se koristiti i na drugim elektrotehničkim i, uopšte, tehničkim fakultetima.

Najveći deo knjige je posvećen oblasti *linearne algebre* koja je, sama po sebi, dosta apstraktna matematička disciplina. Tu se studenti I godine prvi put susreću sa nekim opštim algebarskim strukturama čije su posebne (konkretne) oblike imali priliku da sretnu u prethodnom školovanju. Tu se, dakle, dolazi do nečeg „opšteg" iz čega se, opet, može dobiti niz „posebnih" („konkretnih") slučajeva. Taj postupak dobijanja „opšteg" na osnovu „posebnog", neka vrsta apstraktne generalizacije ili uopštavanja, je vrlo važan način razmišljanja koji će studente tehnike, i ne samo tehnike, pratiti tokom celog daljeg školovanja, pa i života. Zbog toga je ovaj kurs iz linearne algebre važan ne samo u strogo matematičkom okviru, nego i u okviru ovladavanja jednim novim načinom razmišljanja koji studenti treba što pre da usvoje kako bi sebi olakšali dalje studiranje i, uopšte, povećali svoje saznajne kapacitete. Jer, kada čovek zna „opšte" ne mora da pamti sve ono „posebno", već ga može lako dobiti konkretizovanjem „opšteg" u „posebnim uslovima".

Zbog svega rečenog, bilo bi dobro da studenti prihvate ovaj predmet kao vrstu izazovne igre putem koje, ne samo da stiču nova matematička znanja, nego dobijaju i jednu dodatnu važnu dimenziju u svom načinu razmišljanja. Ta uspešnost u prepoznavanju onog što je „opšte" u „posebnom", ta generalizacija pri razmišljanju i stalna kritičnost mišljenja (stalno preispitivanje zaključivanja) su, verovatno, one misaone karakteristike kojima svaki obrazovan čovek, intelektualac, ako hoćete, treba da stremi.

Sadržaj knjige je segmentiran u 7 celina (glava). Svaka glava je podeljena na poglavlja, a poglavlja na odeljke.

Knjiga započinje kratkim podsećanjem na elemente matematičke logike, skupove, relacije i preslikavanja u meri koja je neophodna za dalju dobru matematičku komunikaciju.

Potom se razmatraju neke apstraktne algebarske strukture sa jednom (grupoid, semigrupa, grupa, Abelova grupa) ili dve binarne operacije (prsten, telo, polje), a posebna pažnja je posvećena polju kompleksnih brojeva s obzirom na njegovu važnost za studente elektrotehnike.

Razmatranjem klasičnih vektora, kao i opracija između njih i sa skalarima, dolazi se (nekom vrstom generalizacije) do pojma linearnih (vektorskih) prostora. Posebno je analiziran prostor prosto–periodičnih oscilacija, značajan za studente elektrotehnike. Razmatrani su normirani i unitarni prostori, s tim u vezi i metrički prostori (koji su generalizacija pojma klasičnog trodimenzionalnog prostora u kome je bitno rastojanje–metrika između objekata), te Banachovi i Hilbertovi prostori.

Koncept matrica i matričnog računa uvodi se na prirodan način uz teoriju linearnih operatora. Detaljno je izložena teorija matrica i determinanata.

Sistemima linearnih jednačina je posvećena značajna pažnja. Dati su osnovni metodi za njihovo rešavanje, a razmatrani su i problemi u vezi sa egzistencijom tog rešenja.

Ukratko, ali u dovoljnoj meri za studente tehnike, izložena je teorija o algebarskim polinomima i rešavanju algebarskih jednačina. Razmatrana je i klasa Hurwitzovih polinoma koji igraju značajnu ulogu u teoriji stabilnosti automatskih sistema. Dati su osnovni rezultati u vezi rastavljanja prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke.

Izložen je osnovni koncept problema sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora.

Pri kraju knjige, ukratko je izložena analitička geometrija u trodimenzionalnom prostoru.

Posebno treba napomenuti da su na kraju svake glave dati naročito pažljivo izabrani i složeni zadaci u okviru poglavlja *Zadaci za vežbu* sa ciljem da korisnik ove knjige, njihovom izradom, prethodno izložena teorijska razmatranja u knjizi, pretvori u sopstveno funkcionalno znanje. Najveći deo tih zadataka su zadaci koji se prorađuju u okviru časova računskih vežbi iz predmeta *Matematika I* na Elektronskom fakultetu u Nišu. U tom izboru zadataka autori su imali veliku pomoć ponajviše od koleginice prof. dr Slađane Marinković, a potom i od koleginica prof. dr Lidije Rančić, as. dr Jovane Džunić i kolege as. mr Marjana Matejića, svi sa Katedre za matematiku Elektronskog fakulteta u Nišu, na čemu im autori i ovom prilikom zahvaljuju.

Niš, 10. maja 2012. godine.

Autori

Sadržaj

GLAVA I

OSNOVI ALGEBRE

I.1 ELEMENTI OPŠTE ALGEBRE

I.1.1 Elementi matematičke logike

Zbog konciznosti kojoj se teži u matematičkoj komunikaciji često se koristimo nekim pojmovima i oznakama matematičke logike.

Definicija I.1.1.1 Za rečenicu koja ima smisla i koja mora biti ili istinita ili neistinita i ima samo jedno od ta dva svojstva, kažemo da je *iskaz* ili *sud*.

Ovo je opisna, intuitivna, definicija iskaza (suda).

U matematici koristimo i naziv *teorema* ili *stav* za neke istinite iskaze.

Istinosna vrednost istinitog (tačnog) iskaza se označava sa $\top$ ili sa 1, a neistinitog (netačnog) sa $\perp$ ili 0.

Kada se od jednog ili više iskaza formiraju neki novi, složeniji iskazi, za njih kažemo da su nastali kao posledica *operacija* nad tim polaznim iskazom ili iskazima. Ovim se bavi poseban deo matematičke logike koji se naziva *iskazni račun* ili *iskazna algebra*.

Navodimo najčešće korišćene operacije nad iskazima:

(1) *Negacija* iskaza p, u oznaci $\neg p$, je istinit iskaz ako i samo ako je iskaz p neistinit.

(2) *Konjunkcija* iskaza p i q, u oznaci $p \wedge q$, je složen iskaz koji je istinit ako i samo ako su oba iskaza p i q istinita. Alternativno, za konjunkciju se koristi i termin *operacija i*, tako da se $p \wedge q$ čita kao: p *i* q.

(3) *Disjunkcija* iskaza p i q, u oznaci $p \vee q$, je složen iskaz koji je istinit ako je bar jedan od iskaza p i q istinit. Drugim rečima, $p \vee q$ je neistinit iskaz ako i samo ako su oba iskaza p i q neistinita. Za disjunkciju se koristi i termin *operacija ili*, tako da se $p \vee q$ čita i kao: p *ili* q.

(4) *Implikacija* $p \Rightarrow q$ je složen iskaz koji je neistinit ako i samo ako je p istinit a q neistinit iskaz. Implikacija $p \Rightarrow q$ se čita i na jedan od sledećih načina:

- iz p sleduje q,
- q je posledica iskaza p,
- ako p tada q,
- p je dovoljan uslov za q,
- q je potreban uslov za p.

(5) *Ekvivalencija* $p \Leftrightarrow q$ je složen iskaz koji je istinit ako i samo ako oba iskaza imaju istu istinitosnu vrednost. Ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$ se čita i kao:

- p je ekvivalentno sa q,
- p je ako i samo ako je q,
- p je potreban i dovoljan uslov za q.

(6) *Ekskluzivna disjunkcija* $p \underline{\vee} q$ je složen iskaz koji je istinit ako i samo ako iskazi p i q imaju različite istinitosne vrednosti. Dakle, ekskluzivna disjunkcija predstavlja negaciju ekvivalencije, tj. $\neg(p \Leftrightarrow q)$. Za ekskluzivnu disjunkciju se koristi i termin *operacija isključivo ili*, tako da se $p \underline{\vee} q$ čita i kao: *ili* p *ili* q.

U sledećoj tabeli, tzv. tablici istinitosti, dat je pregled vrednosti istinitosti za prethodno uvedene operacije:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \underline{\vee} q$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$

Istinosnu vrednost rečenice: *Broj* x *je manji od broja* y, nije moguće utvrditi s obzirom da nisu specificirane vrednosti za x i y. Međutim, ako uzmemo $x = 2$ i $y = 3$, rečenica daje istinit iskaz. Dakle, rečenice ovog tipa sadrže izvesne *promenljive*. Dajući konkretne vrednosti ovim promenljivama, rečenice postaju iskazi (istiniti ili neistiniti). Za takve rečenice kažemo da su *iskazne funkcije*, a za odnos između promenljivih koristi se termin *predikat*. Tako u prethodnom primeru predikat ... *je manji od* ... povezuje promenljive x i y. Prema tome, ako ovaj predikat označimo sa P, rečenica definiše iskaznu funkciju od dve promenljive $P(x,y)$. U opštem slučaju, iskazna funkcija može zavisiti od jedne ili više promenljivih.

Na kraju ovog kratkog pregleda osnovnih elemenata matematičke logike pomenimo još i tzv. *kvantifikatore* koji se primenjuju na promenljive u iskaznim funkcijama.

Postoje dva kvantifikatora:

(1) univerzalni kvantifikator: *svaki* (ili *za svaki*), sa oznakom $\forall$.

(2) egzistencijalni kvantifikator: *neki* (ili *postoji*), sa oznakom $\exists$.

Primena kvantifikatora na sve promenljive u iskaznoj funkciji, prevodi iskaznu funkciju u iskaz.

Primer 1. Iz prethodno pomenute iskazne funkcije $P(x,y)$ možemo formirati iskaz

$$(\forall y)\,(\exists x)\ P(x,y),$$

koji znači: *Za svaki broj y, postoji broj x takav da je x manji od y.* △

Napomena 1. Često kvantifikatore upotrebljavamo u jednom ograničenom smislu, tj. promenljive ograničavamo na elemente izvesnih skupova[1] X, Y, itd. Na primer, uzimamo $(\forall x \in X)$ ili $(\exists y \in Y)$, itd. U takvim slučajevima kažemo da radimo sa kvantifikatorima ograničenog opsega.

Primer 2. Neka je $P(x)$ data iskazna funkcija na skupu X. Iskaz

$$(\forall x \in X)\ P(x),$$

sa kvantifikatorom ograničenog opsega, može se protumačiti na sledeći način

$$(\forall x)\big(x \in X \Rightarrow P(x)\big). \qquad \triangle$$

Napomena 2. U cilju konciznijeg pisanja, često ćemo, kada ne može doći do zabune, u daljem izlaganju, umesto

$$(\forall x \in X)\,(\forall y \in Y)\ \ldots \qquad P(x,y,\ldots),$$

koristiti

$$P(x,y,\ldots) \qquad (x \in X,\ y \in Y,\ \ldots).$$

Konačnom upotrebom kvantifikatora i iskaznih funkcija, uz uvedene operacije nad iskazima, dobijamo složene iskaze.

[1] O skupovima, kao i o oznaci $\in$, videti u narednom odeljku

(3) *Disjunkcija* iskaza p i q, u oznaci $p \vee q$, je složen iskaz koji je istinit ako je bar jedan od iskaza p i q istinit. Drugim rečima, $p \vee q$ je neistinit iskaz ako i samo ako su oba iskaza p i q neistinita. Za disjunkciju se koristi i termin *operacija ili*, tako da se $p \vee q$ čita i kao: p *ili* q.

(4) *Implikacija* $p \Rightarrow q$ je složen iskaz koji je neistinit ako i samo ako je p istinit a q neistinit iskaz. Implikacija $p \Rightarrow q$ se čita i na jedan od sledećih načina:

- iz p sleduje q,
- q je posledica iskaza p,
- ako p tada q,
- p je dovoljan uslov za q,
- q je potreban uslov za p.

(5) *Ekvivalencija* $p \Leftrightarrow q$ je složen iskaz koji je istinit ako i samo ako oba iskaza imaju istu istinitosnu vrednost. Ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$ se čita i kao:

- p je ekvivalentno sa q,
- p je ako i samo ako je q,
- p je potreban i dovoljan uslov za q.

(6) *Ekskluzivna disjunkcija* $p \veebar q$ je složen iskaz koji je istinit ako i samo ako iskazi p i q imaju različite istinitosne vrednosti. Dakle, ekskluzivna disjunkcija predstavlja negaciju ekvivalencije, tj. $\neg(p \Leftrightarrow q)$. Za ekskluzivnu disjunkciju se koristi i termin *operacija isključivo ili*, tako da se $p \veebar q$ čita i kao: *ili* p *ili* q.

U sledećoj tabeli, tzv. tablici istinitosti, dat je pregled vrednosti istinitosti za prethodno uvedene operacije:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \veebar q$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$

Istinosnu vrednost rečenice: *Broj* x *je manji od broja* y, nije moguće utvrditi s obzirom da nisu specificirane vrednosti za x i y. Međutim, ako uzmemo $x = 2$ i $y = 3$, rečenica daje istinit iskaz. Dakle, rečenice ovog tipa sadrže izvesne *promenljive.* Dajući konkretne vrednosti ovim promenljivama, rečenice postaju iskazi (istiniti ili neistiniti). Za takve rečenice kažemo da su *iskazne funkcije*, a za odnos između promenljivih koristi se termin *predikat.* Tako u prethodnom primeru predikat ... *je manji od* ... povezuje promenljive x i y. Prema tome, ako ovaj predikat označimo sa P, rečenica definiše iskaznu funkciju od dve promenljive $P(x,y)$. U opštem slučaju, iskazna funkcija može zavisiti od jedne ili više promenljivih.

Na kraju ovog kratkog pregleda osnovnih elemenata matematičke logike pomenimo još i tzv. *kvantifikatore* koji se primenjuju na promenljive u iskaznim funkcijama.

Postoje dva kvantifikatora:

(1) univerzalni kvantifikator: *svaki* (ili *za svaki*), sa oznakom $\forall$.

(2) egzistencijalni kvantifikator: *neki* (ili *postoji*), sa oznakom $\exists$.

Primena kvantifikatora na sve promenljive u iskaznoj funkciji, prevodi iskaznu funkciju u iskaz.

Primer 1. Iz prethodno pomenute iskazne funkcije $P(x,y)$ možemo formirati iskaz

$$(\forall y)\,(\exists x)\ P(x,y),$$

koji znači: *Za svaki broj y, postoji broj x takav da je x manji od y.* $\triangle$

Napomena 1. Često kvantifikatore upotrebljavamo u jednom ograničenom smislu, tj. promenljive ograničavamo na elemente izvesnih skupova[1] X, Y, itd. Na primer, uzimamo $(\forall x \in X)$ ili $(\exists y \in Y)$, itd. U takvim slučajevima kažemo da radimo sa kvantifikatorima ograničenog opsega.

Primer 2. Neka je $P(x)$ data iskazna funkcija na skupu X. Iskaz

$$(\forall x \in X)\ P(x),$$

sa kvantifikatorom ograničenog opsega, može se protumačiti na sledeći način

$$(\forall x)\,\big(x \in X \Rightarrow P(x)\big). \qquad \triangle$$

Napomena 2. U cilju konciznijeg pisanja, često ćemo, kada ne može doći do zabune, u daljem izlaganju, umesto

$$(\forall x \in X)\,(\forall y \in Y)\ \dots \qquad P(x,y,\dots),$$

koristiti

$$P(x,y,\dots) \qquad (x \in X,\ y \in Y,\ \dots).$$

Konačnom upotrebom kvantifikatora i iskaznih funkcija, uz uvedene operacije nad iskazima, dobijamo složene iskaze.

[1] O skupovima, kao i o oznaci $\in$, videti u narednom odeljku

I.1.2 Skupovi

Skup (množina, mnoštvo) i njegovi *elementi* (članovi, tačke, objekti) su osnovni pojmovi u matematici i oni se ne definišu. O njima imamo intuitivno znanje.

Ako skup A sačinjavaju elementi $a, b, c, \ldots$, označavamo ga sa $A = \{a, b, c, \ldots\}$. Treba razlikovati a od $\{a\}$.

U najopštijem slučaju elemente skupa ne mora da karakteriše ništa drugo do pripadnost tome skupu. Ako, pak, elemente skupa A karakteriše nekakva osobina P, tada taj skup označavamo sa $A = \{x \mid P(x)\}$, što čitamo: skup A se sastoji od elemenata x sa osobinom $P(x)$

Činjenicu da je a element skupa A označavamo sa $a \in A$, a ako a nije element skupa A sa $a \notin A$.

Definicija I.1.2.1 Za dva skupa A i B se kaže da su jednaki i to pišemo $A = B$, ako skupovi A i B imaju iste elemente.

Dakle, skup ne zavisi od poretka kojim su dati njegovi elementi. Tako, na primer, skupovi $\{a, b, c\}$ i $\{b, c, a\}$ su jednaki.

Ako je n prirodan broj, skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je *konačan*. Skup je *beskonačan* ako broj njegovih elemenata nije konačan.

Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ je beskonačan. Za ovaj beskonačan skup kazemo da je prebrojiv. Uopšte, kažemo da je neki beskonačan skup S *prebrojiv* ako i samo ako se svi njegovi elementi mogu poređati u niz $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Drugim rečima, skup S je prebrojiv ako je svakom elementu skupa $\mathbb{N}$ moguće pridružiti određen element skupa S tako da različitim elementima iz $\mathbb{N}$ budu pridruženi različiti elementi iz S i da pri tome svaki element skupa S bude pridružen jednom elementu skupa $\mathbb{N}$.

Definicija I.1.2.2 Za skup B kažemo da je sadržan u skupu A, tj. da je B *deo* ili *podskup* skupa A, ako je svaki element skupa B takođe element skupa A (*inkluzija* između skupova).

Činjenicu da je B podskup od A označavamo sa $B \subset A$ ili $A \supset B$. Logičkim simbolima ovu činjenicu pišemo u obliku

$$B \subset A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Primetimo da $A \subset B$ ne isključuje mogućnost da je $A = B$. Ako je $A \subset B$ i $A \neq B$, kažemo da je A *pravi deo* od B ili da je inkluzija $A \subset B$

striktna. Istovremeno važenje obeju inkluzija $A \subset B$ i $B \subset A$ ekvivalentno je sa $A = B$, tj.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

Ako između dva skupa A i B ne važi $A \subset B$ niti $B \subset A$, kažemo da su oni *neuporedivi.*

Polazeći od jednog ili više skupova, mogu se na različite načine (*operacijama* nad skupovima) formirati novi skupovi.

Definicija I.1.2.3 *Unija* skupova A i B, u oznaci $A \cup B$, je skup svih elemenata koji se nalaze bar u jednom od skupova A i B.

Dakle,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Lako je pokazati da važi: $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$ (komutativnost), $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

Definicija I.1.2.4 *Presek* skupova A i B, u oznaci $A \cap B$, je skup svih elemenata koji pripadaju istovremeno i skupu A i skupu B.

Dakle,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Lako zaključujemo da važi: $A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$ (komutativnost), $A \supset A \cap B$, $B \supset A \cap B$.

Za dva skupa kažemo da su *disjunktni* ako nemaju zajedničkih elemenata.

Dakle, presek dva disjunktna skupa je po definiciji I.1.2.4 skup, ali taj skup, u ovom slučaju, ne sadrži elemente. Za takav skup bez elemenata kažemo da je *prazan* skup. Označavamo ga sa $\emptyset$.

Kada hoćemo da istaknemo činjenicu da neki skup nije prazan skup, zvaćemo ga *neprazan* skup.

Očigledno, za prazan skup važi: $\emptyset \subset A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Definicija I.1.2.5 *Razlika* skupova A i B, u oznaci $A \setminus B$, je skup svih elemenata iz A koji ne pripadaju B. (Pri tome ne mora biti $A \subset B$.) Specijalno, ako radimo sa skupovima koji su svi sadržani u nekom osnovnom skupu E, tada $E \setminus A$ $(A \subset E)$ zovemo *komplement* skupa A u odnosu na skup E i označavamo ga sa A'_E ili, kraće, sa A' ako je jasno o kom osnovnom skupu je reč.

Dakle,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\},$$

$$A' = A'_E = \{x \mid x \in E \land x \notin A\}.$$

Iz definicije neposredno sleduje:

$$A \cap A' = \emptyset, \ A \cup A' = E, \ (A')' = A, \ \emptyset' = E, \ E' = \emptyset.$$

Definicija I.1.2.6 *Simetrična razlika* skupova A i B, u oznaci $A \triangle B$, data je sa $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Definicija I.1.2.7 *Partitivni skup* (skup delova) $\mathbb{P}(A)$ je skup svih delova skupa A.

Dakle,

$$\mathbb{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Po definiciji I.1.2.7 je $A \in \mathbb{P}(A)$ i $\emptyset \in \mathbb{P}(A)$.

Sledeće tri teoreme navodimo bez dokaza.

Teorema I.1.2.1 *Važe jednakosti*

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Ove jednakosti zovemo, redom, osobina *asocijativnosti* za uniju i presek skupova. Naime, ta osobina ukazuje da redosled uniranja i presecanja skupova, koji nameću napisane zagrade, nije od značaja, pa se zagrade mogu izostaviti i piše se $A \cup B \cup C$ umesto $A \cup (B \cup C)$ ili $(A \cup B) \cup C$, tj. $A \cap B \cap C$ umesto $A \cap (B \cap C)$ ili $(A \cap B) \cap C$

Teorema I.1.2.2 *Važe jednakosti*

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Ove jednakosti predstavljaju osobinu *distributivnosti* unije u odnosu na presek i preseka u odnosu na uniju.

Primetimo da osobina obostrane distributivnosti nije uobičajena. Na primer, množenje brojeva je distributivno u odnosu na sabiranje brojeva, ali obrnuto ne važi.

Teorema I.1.2.3 (De Morganovi[2] obrasci) *Važe jednakosti*

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \tag{I.1.2.1}$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'. \tag{I.1.2.2}$$

Dokaz. Jednakost (I.1.2.1) će važiti ako pokažemo da je $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$ i, obratno, $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$. Prvo sleduje iz

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \notin A \land x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A' \land x \in B' \\ &\Rightarrow x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

a obrnuto tvrđenje, ako u ovom lancu logičkih zaključaka idemo u suprotnom smeru. Analogno se dokazuje (I.1.2.2). □

Videli smo da je unija skupova, skup koji je jednoznačno odrediv, dok obrnuti problem, u opštem slučaju, nije jednoznačno rešiv.

Definicija I.1.2.8 Za disjunktne podskupove skupa X, čija je unija čitav skup X, kažemo da čine *particiju* skupa X

Dakle, u opštem slučaju, jedan skup ima više particija.

Na kraju ovog odeljka navešćemo uobičajene oznake za neke standardne skupove brojeva:

- $\mathbb{N}$ – skup svih prirodnih brojeva,
- $\mathbb{N}_0$ – skup svih prirodnih brojeva zajedno sa nulom, tj. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- $\mathbb{Z}$ – skup svih celih brojeva,
- $\mathbb{Q}$ – skup svih racionalnih brojeva,
- $\mathbb{I}$ – skup svih iracionalnih brojeva,
- $\mathbb{R}$ – skup svih realnih brojeva,
- $\mathbb{R}^+$ – skup svih pozitivnih realnih brojeva,
- $\mathbb{R}_0^+$ – skup svih nenegativnih realnih brojeva, tj. $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

O oznakama nekih drugih skupova biće reči docnije.

[2] Augustus De Morgan (1806–1871), škotski matematičar i logičar.

I.1.3 Uređeni par

Pišući $\{a, b\}$ i $\{b, a\}$ označavali smo isti skup od dva elementa. Međutim, ako je bitan poredak dva elementa u paru, tada ćemo takav par zvati *uređeni par* i označavaćemo ga sa (a, b). Ovde a zovemo *prvom komponentom*, a b *drugom komponentom* uređenog para (a, b). Dakle, jasno je da ćemo smatrati da je (a, b) različito od (b, a), osim ako je $a = b$.

Parovi (a, b) i (c, d) jednaki su ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

Pojam uređenog para možemo uopštiti i govoriti o *uređenoj n–torki* $(a_1, \ldots, a_n)$, kod koje je, dakle, bitan poredak elementa, pa su dve n–torke jednake ako i samo ako su im odgovarajuće (po redosledu) komponente jednake.

I.1.4 Dekartov proizvod

Definicija I.1.4.1 *Dekartov*[3] *proizvod* dva skupa X i Y je skup Z čiji su elementi uređeni parovi sa prvom komponentom iz skupa X i drugom iz skupa Y, tj.

$$Z = X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Naravno, u opštem slučaju ne važi jednakost $X \times Y = Y \times X$, osim ako je $X = Y$.

Definicija Dekartovog proizvoda analogno se prenosi i na slučaj kada imamo više od dva skupa. Tako, Dekartov proizvod od n skupova $X_1, \ldots, X_n$ je dat sa

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n\}$$

Dekartovi proizvodi $X \times X$, $X \times X \times X$, $\ldots$ obelezavaju se redom sa $X^2, X^3, \ldots$

I.1.5 Relacija

Definicija I.1.5.1 Ako su X i Y neprazni skupovi, *binarna relacija* u skupu $X \times Y$ je bilo koji njegov podskup.

Primer 1. Neka je $X = \{1, 2, 3\}$, $\quad Y = \{1, 2\}$. Tada je

$$X \times Y = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}.$$

[3] René Descartes (Cartesius) (1596–1650), veliki francuski filozof i matematičar.

U posmatranom skupu $X \times Y$ relacije su, na primer,

$$\{(1,2),(3,1)\};$$
$$\{(1,1),(2,1),(3,1),(3,2)\}.$$

Isto tako binarne relecije u skupu $X \times Y$ su i njegovi podskupovi

$$\{(x,y) \mid x = y\} = \{(1,1),(2,2)\};$$
$$\{(x,y) \mid x < y\} = \{(1,2)\};$$
$$\{(x,y) \mid x - y \geq 1\} = \{(2,1),(3,1),(3,2)\};$$
$$\{(x,y) \mid x \geq y^2\} = \{(1,1),(2,1),(3,1)\};$$
$$\{(x,y) \mid y = x^3 + 4\} = \emptyset. \qquad \triangle$$

Definicija I.1.5.2 Neka je ρ binarna relacija u skupu $X \times Y$. Kažemo da je x u relaciji ρ sa y (u oznaci $x\,\rho\,y$) ako je $(x,y) \in \rho$.

Dakle, $(x,y) \in \rho \Leftrightarrow x\,\rho\,y$.

Slično je $(x,y) \notin \rho \Leftrightarrow x\,non\rho\,y$.

Ako je $Y = X$, tada za binarnu relaciju u skupu $X \times Y = X \times X = X^2$ kažemo jednostavno da je binarna relacija u skupu X.

Često binarnu relaciju ρ u skupu X definišemo tako što relaciju identifikujemo kroz postojanje osobine ρ kod uređenog para (x,y) elemenata iz X, tj.

$$\text{par } (x,y) \text{ ima osobinu } \rho \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in \rho \;\text{ ili }\; x\,\rho\,y,$$
$$\text{par } (x,y) \text{ nema osobinu } \rho \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \notin \rho \;\text{ ili }\; x\,non\rho\,y.$$

Primer 2. Dobro su nam poznate relacije $>, <, \leq, \geq$ u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$. $\triangle$

Definišimo sada osobine koje može, ali ne mora, imati neka relacija u skupu X.

Definicija I.1.5.3 Relacija ρ u skupu X je *refleksivna* ako za svako $x \in X$ važi da je $x\,\rho\,x$.

Definicija I.1.5.4 Relacija ρ u skupu X je *simetrična* ako za svako $x, y \in X$ za koje je $x\,\rho\,y$, sleduje da je i $y\,\rho\,x$.

Definicija I.1.5.5 Relacija ρ u skupu X je *antisimetrična* ako za svako $x, y \in X$ za koje je $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho\,x$, sleduje da je $x = y$.

Definicija I.1.5.6 Relacija ρ u skupu X je *tranzitivna* ako za svako $x, y, z \in X$ za koje je $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho\,z$, sleduje da je $x\,\rho\,z$.

I.1.6 Relacija ekvivalencije

Definicija I.1.6.1 Za Relaciju ρ u skupu X koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna kažemo da je *relacija ekvivalencije* u skupu X.

Primer 1. Jednakost je relacija ekvivalencije (na primer, u skupu $\mathbb{R}$) jer je ova relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna. $\triangle$

Primer 2. Na skupu $S = \{a, b, c, \ldots\}$ pravih $a, b, c, \ldots$ u Euklidovoj ravni posmatrajmo relaciju paralelnosti $\|$.

Naravno, svaka prava je paralelna sa samom sobom $((\forall a \in S) \quad a \parallel a)$, pa je relacija refleksivna.

Ako je jedna prava paralelna nekoj drugoj pravoj $(a \parallel b)$, tada je i ta druga paralelna prvoj $(b \parallel a)$, što znači da je paralelnost simetrična relacija.

Ako je jedna prava paralelna nekoj drugoj pravoj i ta druga paralelna trećoj pravoj $(a \parallel b \wedge b \parallel c)$, tada je i prva paralelna trećoj pravoj $(a \parallel c)$, pa paralelnost ima osobinu tranzitivnosti,

Dakle, relacija paralelnosti je relacija ekvivalencije u skupu S. $\triangle$

Primer 3. Na skupu $S = \{a, b, c, \ldots\}$ pravih $a, b, c, \ldots$ u Euklidovoj ravni posmatrajmo relaciju normalnosti $\perp$.

S obzirom da relacija $\perp$ od potrebnih triju osobina ima samo osobinu simetričnosti, ona nije relacija ekvivalencije. $\triangle$

Kada je relacija ρ relacija ekvivalencije, tada ćemo je označavati sa $\sim$.

Sa C_x označimo skup svih elemenata $z \in X$ koji su u relaciji $\sim$ sa elementom x, tj.

$$C_x = \{z \in X \mid z \sim x\}$$

Definicija I.1.6.2 Za skup $C_x \subset X$ kažemo da je *klasa ekvivalencije* skupa X koja odgovara elementu x.

Primetimo da C_x nije prazan skup jer mu pripada bar element x. Naravno, ako C_x sadrži više međusobno ekvivalentnih elemenata, moze se smatrati da je C_x klasa ekvivalencije koja odgovara svakom od tih elemenata.

Ako su C_x i C_y klase ekvivalencije koje odgovaraju elementima x i y, tada je moguća samo sledeća alternativa: ili se C_x i C_y poklapaju ili su disjunktne. Na taj način skup X podeljen je na međusobno disjunktne klase – klase ekvivalencije – tako da su svi elementi iste klase međusobno ekvivalentni, a elementi iz različitih klasa to nisu. Dakle, relacija $\sim$ u skupu X omogućava jedno razlaganje tog skupa na disjunktne podskupove (klase ekvivalencije).

Definicija I.1.6.3 Skup čiji su elementi klase ekvivalencije skupa X u odnosu na relaciju $\sim$ zovemo *skup–količnik* skupa X u odnosu na relaciju $\sim$, u oznaci $X/\sim$.

Primer 4. Za skupu $S = \{a, b, c, \ldots\}$ pravih $a, b, c, \ldots$ u Euklidovoj ravni u odnosu na relaciju paralelnosti pravih, za koju smo videli u primeru 2 da je relacija ekvivalencije, jedna klasa ekvivalencije je skup pravih iz ravni koje su sa jednim te istim pravcem, a skup–količnik je skup svih mogućih pravaca u ravni. $\triangle$

I.1.7 Relacija poretka

Definicija I.1.7.1 Za Relaciju ρ u skupu X koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna kažemo da je *relacija poretka (uređenja)* u skupu X, a za skup X kažemo da je *uređen* ili da ima *strukturu poretka.*

Relaciju poretka označavaćemo sa $\preccurlyeq$, a uređene skupove sa $(X, \preccurlyeq)$. Ako je $x \preccurlyeq y$ ili je pak $y \preccurlyeq x$, kažemo da su elementi x i y $(x, y \in X)$ *uporedivi.*

Relacija $\leq$ u skupu realnih brojeva je jedna relacija poretka.

Primer 1. X je skup celih pozitivnih brojeva i

$$x \preccurlyeq y \quad \text{ako je broj} \quad y \quad \text{deljiv sa} \quad x \qquad \triangle$$

Dakle, ovako definisana relacija se razlikuje od relacije ekvivalencije u samo jednoj osobini. Dok je relacija ekvivalencije bila simetrična, relacija poretka je antisimetrična, pa je kod nje sada važno koja je prva komponenta, a koja druga u relaciji, dok je to bilo nebitno kod relacije ekvivalencije. Otuda ova relacija kao da uspostavlja „poredak“ između dva elementa skupa X, naravno, ako su oni u relaciji, tj. ako su uporedivi. Ako su ma koja dva elementa uređenog skupa međusobno uporediva, kažemo da je skup $(X, \preccurlyeq)$ *totalno uređen.*

Skup prirodnih brojeva i skup realnih brojeva su totalno uređeni skupovi u odnosu na relaciju $\leq$. Skup iz primera 1 je (delimično) uređen skup u odnosu na uvedenu relaciju poretka.

Definicija I.1.7.2 Neka je A deo uređenog skupa $(X, \preccurlyeq)$. Element $\beta \in X$ je *majoranta* od A, ako je $x \preccurlyeq \beta$ za svako $x \in A$. Ako je uz to $\beta \in A$, β je *maksimum* skupa A, u oznaci $\beta = \max A$.

Simetrično se definiše *minoranta* i *minimum* skupa $A \subset X$.

Jasno je da A može imati samo jedan maksimum (minimum). Zaista, kada bi ih bilo dva, β_1 i β_2, imali bismo istovremeno $\beta_1 \preccurlyeq \beta_2$ i $\beta_2 \preccurlyeq \beta_1$, pa zaključujemo da je $\beta_1 = \beta_2$.

Dakle, mogli bismo reći, u žargonu, da je majoranta nekog skupa A svaki onaj element iz X koji je „veći ili jednak“ od svih elemenata tog skupa A.

Od svih tih majoranata „najinteresantnija“ je ona koja je „najmanja“ , jer ona „najoštrije omeđuje“ skup A „sa gornje strane“, pa je zovemo *gornja međa* ili *supremum* skupa A. Preciznije:

Definicija I.1.7.3 *Supremum* ili *gornja međa* skupa $A \subset X$, u oznaci $\sup A$, je minimum skupa majoranata od A, ukoliko ovaj postoji.

Simetrično se definiše *infimum* ili *donja međa* skupa A, kratko $\inf A$.

Supremum (infimum) može biti samo jedan.

Ako skup ima max (min), on je i njegov sup (inf), ali obrnuto, u opštem slučaju, ne važi.

Posmatrajmo sada skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ koji je relacijom $\leq$ uređen. Korišćenjem ove relacije i relacije $<$ uvešćemo neke pojmove vezane za skup realnih brojeva.

Definicija I.1.7.4 Skup $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, u oznaci (a, b) zovemo *interval*, a skup $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, u oznaci $[a, b]$ zovemo *segment.*

Definicija I.1.7.5 Skup $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, u oznaci $[a, b)$ kao i skup $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, u oznaci $(a, b]$, zovemo *polusegment* ili *poluinterval.*

Lako je proveriti da važi

$$\begin{aligned} a &= \inf(a,b) = \inf(a,b], & b &= \sup(a,b) = \sup[a,b), \\ a &= \min[a,b) = \min[a,b], & b &= \max(a,b] = \max[a,b]. \end{aligned}$$

I.1.8 Grafovi

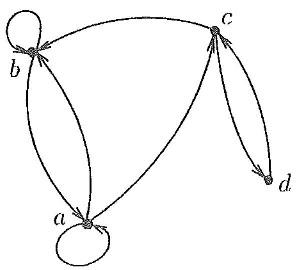
Definicija I.1.8.1 Neka je X neprazan skup i ρ binarna relacija u X. Uređeni par $\Gamma = (X, \rho)$ se naziva *graf.* Elementi skupa X su *čvorovi grafa*, a elementi skupa ρ *grane grafa*

Graf obično predstavljamo crtežom na kome su čvorovi grafa predstavljeni tačkama. Činjenicu da $(a, b) \in \rho$ označavamo linijom koja spaja tačke a i b i orjentišemo je strelicom u smeru od a ka b. Ta linija predstavlja granu grafa. Naravno, ako je $(a,a) \in \rho$ to simbolizujemo malim, takođe orjentisanim, lukom povučenim od tačke a do te iste tačke a i taj luk, tj. granu grafa, zovemo *petlja grafa*.

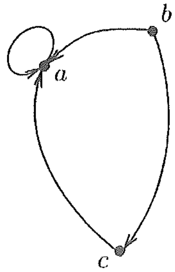
Primer 1. Ako je $X = \{a,b,c,d\}$ i ako je

$$\rho = \big\{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(a,c),(c,b),(c,d),(d,c)\big\},$$

tada graf $\Gamma = (X,\rho)$ izgleda kao na slici 1. Naravno, ako je relacija refleksivna, tada je na grafu oko svakog čvoora opisana petlja, što ovde nije slučaj. $\triangle$



Sl. 1



Sl. 2

Primer 2. Relacija $\rho = \{(a,a),(b,a),(b,c),(c,a)\}$ u skupu $X = \{a,b,c\}$ nije refleksivna, ali je tranzitivna, što se može lako uočiti na grafu $\Gamma = (X,\rho)$ koji je predstavljen na slici 2. Naime, s obzirom da postoje grane grafa Γ od čvora b ka čvoru c i od čvora c ka čvoru a, tada mora postojati i grana od čvora b ka čvoru a, što se može lepo videti na slici 2. $\triangle$

Primer 3. 1° Relacija

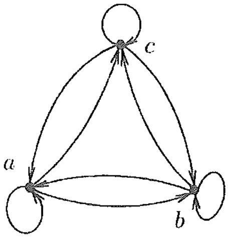
$$\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$$

je relacija ekvivalencije u skupu $X = \{a,b,c\}$ čiji je graf prikazan na slici 3.

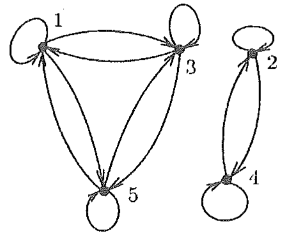
2° U skupu $\{1,2,3,4,5\}$ relacija

$$\rho = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),\\ (3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$

je relacija ekvivalencije, a njen graf je predstavljen na slici 4. Sa slike je lako uočiti da je skup–količnik $X/\rho = \{\{1,3,5\},\{2,4\}\}$. $\triangle$



Sl. 3



Sl. 4

Ako paru čvorova a, b odgovaraju dve grane (a, b) i (b, a) na crtežu se obično ne povlače dve linije između čvorova a i b, nego se, jednostavno, linija dvostrano orjentiše ili se uopšte ne orjentiše (strelice se na grani izostavljaju).

Definicija I.1.8.2 Graf $\Gamma = (X, \rho)$ je *simetričan* ili *neorjentisan* ako i samo ako je ρ simetrična relacija.

Definicija I.1.8.3 Graf $\Gamma = (X, \rho)$ je *antisimetričan* ili *orjentisan* ako i samo ako je ρ antisimetrična relacija.

I.1.9 Preslikavanje ili funkcija

Ako *svakom* elementu x skupa X odgovara na neki način određeni element y skupa Y, kažemo da je skup X preslikan u skup Y; x je *original* a y njegova *slika*. Ako sa f označimo ovo preslikavanje, za sliku y pišemo i $f(x)$. Simbolički:

$$x \mapsto f(x), \quad x \in X, \quad f(x) \in Y$$

ili kraće

$$f : X \mapsto Y.$$

Skup slika svih elemenata $x \in X$ obeležavamo sa $f(X)$. Očigledno je $f(X) \subset Y$.

Često, umesto o preslikavanju f skupa X u skup Y, govorimo o funkciji f čija je *oblast definisanosti* skup X, a *skup vrednosti* skup $f(X)$. Dakle, funkciju karakterišu tri elementa: oblast definisanosti, skup vrednosti i zakonitost koja uspostavlja vezu.

Uz termin funkcija koristimo i izraz *operator* ili *transformacija* (pogotovu ako je $X = Y$). Ako su X i Y brojevi govorimo o *numeričkoj funkciji*, a ako je samo Y skup brojeva, o *funkcioneli.* Najzad, ako je X skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, funkciju $f : \mathbb{N} \mapsto Y$ zovemo *niz* tačaka (u Y) i označavamo ga sa $f(n)$ ili sa f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ili, jednostavno, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Imajući u vidu prethodno rečeno, funkciju možemo i formalno definisati korišćenjem pojma relacije:

Definicija I.1.9.1 Za relaciju $f \subset X \times Y$ kažemo da je funkcija $f : X \mapsto Y$ ako

$$\begin{array}{lll} (1) & (\forall x \in X)(\exists y \in Y) \quad (x, y) \in f & (\textit{definisanost}), \\ (2) & (x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \;\Rightarrow\; y = z & (\textit{jednoznačonst}). \end{array}$$

Primer 1. Neka su $X = \{1, 2, 3\}$ i $Y = \{a, b\}$.

1° Relacija $\{(1, a), (2, b)\}$ nije funkcija jer nije definisana slika elementa $3 \in X$ (relacija nema osobinu definisanosti).

2° Relacija $\{(1, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ nije funkcija jer jedan original ($3 \in X$) ne može imati dve slike $a \in Y$ i $b \in Y$ (relacija nema osobinu jednoznačnosti).

3° Relacija $\{(1, a), (2, a), (3, a)\}$ je funkcija definisana na skupu X pomoću $x \mapsto f(x) = a$. Dakle, skup vrednosti funkcije f, sastoji se samo od jednog elementa, $f(X) = \{a\}$. $\triangle$

Navedimo dva jednostavna preslikavanja:

1° Neka je $c \in Y$. Preslikavanje $f : X \mapsto Y$, definisano pomoću $x \mapsto f(x) = c$ naziva se *konstantno* preslikavanje. Takođe, kaže se i da je funkcija f *konstanta.*

2° Neka je $Y = X$. Preslikavanje $f : X \mapsto X$, definisano pomoću $x \mapsto f(x) = x$ naziva se *identičko* preslikavanje skupa X.

Definicija I.1.9.2 Neka je funkcija f_1 definisana na skupu X_1, a funkcija f_2 na skupu X_2. Ako je $X_1 = X_2$ i

$$(\forall x \in X_1) \quad f_1(x) = f_2(x), \tag{I.1.9.1}$$

kažemo da su funkcije f_1 i f_2 *jednake.*

Ako je, međutim, $X_1 \subset X_2$ i ako važi (I.1.9.1), kažemo da je funkcija f_2 *ekstenzija* (*proširenje*) funkcije f_1 sa X_1 na X_2, odnosno da je funkcija f_1 *restrikcija* (*suženje*) funkcije f_2 sa X_2 na X_1.

Kod preslikavanja $f : X \mapsto Y$ razlikovaćemo sledeća dva moguća slučaja: $f(X) \subset Y$ i $f(X) = Y$. U prvom slučaju kažemo da je skup X preslikan *u* skup Y, a u drugom da je skup X preslikan *na* skup Y. Postoje dakle, sa tog stanovišta dve vrste preslikavanja: preslikavanje *u* skup i preslikavanje *na* skup. Za ovo drugo još se kaže da je *surjekcija* ili *surjektivno* preslikavanje.

Po definiciji, svako preslikavanje $f : X \mapsto Y$ je jednoznačno, tj.

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2.$$

Ako važi i obrnuto, tj.

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2),$$

kažemo da je f *injekcija* ili *injektivno* preslikavanje ili 1–1 preslikavanje.

Za svako preslikavanje koje je istovremeno surjekcija i injekcija kaže se da je *bijekcija* ili *biunivoko* (*obostrano jednoznačno*) preslikavanje.

Definicija I.1.9.3 Neka su data preslikavanja $f : X \mapsto Y$ i $g : Y \mapsto Z$. Tada preslikavanje $h : X \mapsto Z$ definisano sa

$$(\forall x \in X) \quad h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

zovemo *složena funkcija* ili *kompozicija preslikavanja* i obeležavamo ga sa $(g \circ f)$.

Kao što vidimo, složena funkcija h preslikava elemente x skupa X u elemente $y = f(x)$ skupa Y koje, zatim, funkcija g preslikava u elemente $z = g(y)$ skupa Z, tj. $x \xmapsto{f} y \xmapsto{g} z = x \xmapsto{h} z$. Dakle, na jedan posredan način, pomoću dva *međupreslikavanja* f i g, vrši se preslikavanje skupa X u, ili na, skup Z.

Naravno, jedno složeno preslikavanje se može realizovati i sa više međupreslikavanja.

Primetimo da, ako su sva međupreslikavanja jednog složenog preslikavanja biunivoka preslikavanja, tada je i složeno preslikavanje biunivoko.

Definicija I.1.9.4 Ako je $f : X \mapsto Y$ i ako postoji preslikavanje $f^{-1} : f(X) \mapsto X$, takvo da važi

$$\begin{array}{ll} (\forall x \in X) & (f^{-1} \circ f)(x) = x, \\ (\forall y \in f(X)) & (f \circ f^{-1})(y) = y, \end{array}$$

tada preslikavanje f^{-1} zovemo *inverzno preslikavanje* preslikavanja f.

Teorema I.1.9.1 *Ako je $f : X \mapsto Y$ biunivoko preslikavanje, tada postoji inverzno preslikavanje koje je biunivoko i jedinstveno.*

Dokaz. Na osnovu pretpostavke iz teoreme, preslikavanje $f : X \mapsto Y$ je biunivoko, tj. takvo da je to

(a) preslikavanje na skup Y i

(b) 1–1 preslikavanje.

Na osnovu (a) je $Y = f(X)$, pa za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ takvo da je $f(x) = y$, a na osnovu (b), x je jedinstven element iz X za koji je $f(x) = y$.

Dakle, svakom elementu $y \in Y$ pridružuje se na ovaj način jedinstven element $x \in X$ čime je uspostavljeno biunivoko preslikavanje $\bar{f} : Y \mapsto X$. Tada, imamo

$$\text{(I.1.9.2)} \qquad \begin{array}{ll} (\forall x \in X) & (\bar{f} \circ f)(x) = x, \\ (\forall y \in Y) & (f \circ \bar{f})(y) = y, \end{array}$$

pa je $\bar{f}$ inverzna funkcija funkcije f, tj $\bar{f} = f^{-1}$.

Da bismo još dokazali da je ovo inverzno preslikavanje i jedinstveno, pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji još jedno inverzno biunivoko preslikavanje $\tilde{f} : Y \mapsto X$ (koje, dakle, takođe zadovoljava uslove (I.1.9.2)).

Ako je $\tilde{f} \neq \bar{f}$, to mora postojati bar jedan element $y \in Y$ za koji je $\tilde{f}(y) \neq \bar{f}(y)$, odakle, zbog osobine (b), sleduje $f(\tilde{f}(y)) \neq f(\bar{f}(y)$, pa zaključujemo da je $y \neq y$, što je nemoguće. $\square$

Primetimo, na kraju, da je inverzno preslikavanje za f^{-1} samo preslikavanje f.

I.2 OSNOVNE ALGEBARSKE STRUKTURE

I.2.1 Binarna operacija, grupoid i njegove osobine

Neka je G neprazan skup. Neka je, dalje, svakom paru elementa $a, b \in G$, kao uređenom paru (a, b), pridružen tačno određeni element $c \in G$. Čini se kao da elementi a i b iz G, na određeni način, proizvode, određuju, treći element c, takođe iz G. Najzad, možemo reći da elementi a i b iz G stupaju u jednu *operaciju* kojom se dobija element c iz G.

Imajući u vidu prethodno rečeno, binarnu operaciju možemo formalno opisati pomoću preslikavanja $f : G \times G \mapsto G$, tako da je $c = f((a, b))$, a što ćemo zbog jednostavnijeg zapisa pisati $c = f(a, b)$. Dakle:

Definicija I.2.1.1 Preslikavanje $(a, b) \mapsto c = f(a, b) \quad (a, b, c \in G)$, u oznaci $a * b = c$, zovemo *binarna operacija.*

Kod ove definicije je bitno uočiti da polazeći od proizvoljnih elemenata iz G, rezultat binarne operacije $*$ je ponovo u G. Zato se kaže da je skup G *zatvoren s obzirom na operaciju* $*$ (elemenata iz G).

Nadalje ćemo sa $*$, ili na neki drugi način, na primer sa $\circ, \diamond, \star, \ldots$, označavati binarnu operaciju.

Definicija I.2.1.2 Skup G snabdeven operacijom $*$ naziva se *grupoid*. Označavaćemo ga sa $(G, *)$.

Definicija I.2.1.1 je, ustvari, uopštenje pojma operacije koji nam je dobro poznat na primerima sabiranja i množenja u skupu realnih brojeva, unije i preseka kod skupova, logičkog *i* i *ili* nad iskazima (sudovima), itd. Isto tako, te operacije su imale i neke osobine (svojstva), pa sada možemo i kod opšte binarne operacije govoriti o postojanju ili nepostojanju nekih osobina (svojstava) te operacije, ili preciznije, grupoida $(G, *)$.

Definicija I.2.1.3 Kažemo da je u grupoidu $(G, *)$ binarna operacija $*$ *asocijativna* ako za svako $a, b, c \in G$ važi

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Dakle, ako je operacija $*$ asocijativna, nije potrebno navoditi zagrade koje definišu prioritet operacije, s obzirom da je rezultat izraza $a * (b * c)$ i izraza $(a * b) * c$ isti, pa ga možemo pisati bez zagrada $a * b * c$.

Definicija I.2.1.4 Kažemo da je u grupoidu $(G, *)$ binarna operacija $*$ *komutativna* ako za svako $a, b \in G$ važi

$$a * b = b * a.$$

Definicija I.2.1.5 Ako u (G,$*$) postoji element $e \in G$, takav da je za svako $a \in G$

$$a * e = e * a = a,$$

kažemo da je $e \in G$ *neutralni* ili *jedinični* element.

Jedinični element skraćeno zovemo *jedinica*. Dakle, kada jedinica ulazi u operaciju sa bilo kojim elementom, ona je neutralna u tom smislu da ne deluje na promenu elementa sa kojim ulazi u operaciju – element ostaje nepromenjen. (Setimo se broja 1 koji je neutralni element kod množenja realnih brojeva.)

Teorema I.2.1.1 *Ako u $(G,*)$ postoji neutralni element, onda je on jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da u skupu G postoje dva neutralna elementa e_1 i e_2 ($e_1 \neq e_2$). Tada bi, s obzirom na definiciju neutralnog elementa, važilo: $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom $e_1 \neq e_2$. $\square$

Jednakost $b = c$, koja izražava identičnost dva elementa skupa G, povlači

$$(\forall a \in G) \quad a * b = a * c \quad \text{i} \quad b * a = c * a.$$

Međutim, ne možemo tvrditi da važi obrnuto, tj. da je

$$\begin{aligned} a * b = a * c \Rightarrow b = c, \\ b * a = c * a \Rightarrow b = c. \end{aligned} \tag{I.2.1.1}$$

Definicija I.2.1.6 Ako za neko $a \in G$ i svaki par $b, c \in G$ za koji važe jednakosti

$$\begin{aligned} a * b &= a * c, \\ b * a &= c * a, \end{aligned}$$

važe i implikacije (I.2.1.1), za element a kažemo da je *regularan* element za operaciju $*$.

Primer 1. Za operaciju množenja na skupu $\mathbb{R}$ realnih brojeva svi elementi osim 0 su regularni. $\triangle$

Teorema I.2.1.2 *Ako u $(G, *)$ postoji neutralni element, on je regularan.*

Dokaz. Neka je e neutralni element za operaciju $*$ u skupu G. Ako su $a, b \in G$ i ako važi da je $e*a = e*b$, tada, s obzirom da je $e*a = a$ i $e*b = b$, sleduje $a = b$.

Sličnim rasuđivanjem dobijamo $a * e = b * e \Rightarrow a = b$. $\square$

Definicija I.2.1.7 Ako u $(G, *)$ postoji neutralni element e i ako za $a \in G$ postoji element $a^{-1} \in G$, takav da je

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

kažemo da je a^{-1} *inverzni* ili *simetrični* element za $a \in G$, u odnosu na operaciju $*$.

Naravno, ako u $(G, *)$ postoji, za element a, inverzni element a^{-1}, tada je, na osnovu definicije I.2.1.7, za a^{-1} inverzni element a, tj. $(a^{-1})^{-1} = a$.

Teorema I.2.1.3 *Neka u $(G, *)$ postoji neutralni element e i neka je $*$ asocijativna operacija. Ako za element $a \in G$ postoji inverzni element $a^{-1} \in G$, tada je on jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka za $a \in G$ postoje dva međusobno različita inverzna elementa a_1^{-1} i a_2^{-1} iz G. Tada važi

$$a_1^{-1} = a_1^{-1} * e = a_1^{-1} * (a * a_2^{-1}) = (a_1^{-1} * a) * a_2^{-1} = e * a_2^{-1} = a_2^{-1},$$

što je u suprotnosti sa učinjenom pretpostavkom da je $a_1^{-1} \neq a_2^{-1}$. □

Teorema I.2.1.4 *Ako je u grupoidu $(G, *)$ operacija $*$ asocijativna i ako element $a \in G$ ima inverzni element $a^{-1} \in G$, tada je a regularan element za operaciju $*$.*

Dokaz. Da bi a bio regularan element u $(G, *)$, moraju da važe implikacije I.2.1.1. Kako je

$$\begin{aligned} a * b = a * c \quad &\Rightarrow \quad a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) \\ &\Rightarrow \quad (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \\ &\Rightarrow \quad e * b = e * c \\ &\Rightarrow \quad b = c, \end{aligned}$$

a sličnim postupanjem dobijamo i implikaciju $b * a = c * a \Rightarrow b = c$. □

Teorema I.2.1.5 *Neka je u grupoidu $(G, *)$ operacija $*$ asocijativna. Ako je a^{-1} inverzni element za a i b^{-1} inverzni element za b $(a, a^{-1}, b, b^{-1} \in G)$, tada i element $a * b$ ima inverzni element i važi jednakost*

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$$

Dokaz Tvrđenje teoreme proizlazi iz sledećih jednakosti:

$$\begin{aligned} (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b = b^{-1} * e * b = b^{-1} * b \quad &= \quad e, \\ (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} \quad &= \quad e. \end{aligned}$$ □

I.2.2 Polugrupa, grupa i Abelova grupa

Skup G snabdeven nekom binarnom operacijom $*$ smo nazvali grupoid i označili sa $(G, *)$. Za $(G, *)$ kažemo da je *algebarska struktura*. Ta je struktura utoliko bogatija ukoliko grupoid $(G, *)$ ima više svojstava (osobina). Neke takve strukture su posebno interesantne, pa ih onda zovemo posebnim imenima.

Definicija I.2.2.1 Za grupoid $(G, *)$ kod koga je operacija $*$ asocijativna kažemo da je *polugrupa* ili *semigrupa*.

Primer 1. Ako je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i $+$ operacija sabiranja, struktura $(\mathbb{N}, +)$ je polugrupa. $\triangle$

Definicija I.2.2.2 Ako u grupoidu $(G, *)$ postoji neutralni element, tada kažemo da je to *grupoid* $(G, *)$ *sa jedinicom.*

Primer 2. Struktura $(\mathbb{N}_0, +)$ je grupoid sa jedinicom ili, još preciznije, polugrupa sa jedinicom. Jedinica (ili neutralni element), kakve li igre reči, je u ovoj strukturi 0. $\triangle$

Definicija I.2.2.3 Za grupoid $(G, *)$ kažemo da je *grupa* ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° operacija $*$ je asocijativna;

2° u skupu G postoji neutralni element za operaciju $*$;

3° za svaki element iz G postoji u G njemu inverzni element u odnosu na operaciju $*$.

Definicija I.2.2.4 Za grupu $(G; *)$ kažemo da je *komutativna* ili *Abelova*, ako je operacija $*$ još i komutativna.

Grupa $(G, *)$ je *konačna* ako je skup G konačan, inače je *beskonačna*.

Primetimo da su, na osnovu teoreme I.2.1.4, svi elementi jedne grupe regularni za operaciju grupe.

Primer 3. Skup racionalnih brojeva, u odnosu na sabiranje, obrazuje beskonačnu Abelovu grupu. Ovde je jedinični element 0, a inverzni element racionalnog broja r je $-r$. $\triangle$

Primer 4. Prirodni brojevi ne obrazuju grupu u odnosu na množenje, jer ne postoje inverzni elementi. $\triangle$

I.2.3 Podgrupa

Neka je $(G, *)$ grupa i neka je $H \subset G$ takav da važe implikacije

(I.2.3.1) $$x, y \in H \Rightarrow x * y \in H,$$

(I.2.3.2) $$x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H.$$

U skupu H možemo definisati binarnu operaciju $\circ$ pomoću

(I.2.3.3) $$x \circ y = x * y \quad (x, y \in H)$$

jer je, na osnovu (I.2.3.1), $x*y \in H$. Dokazaćemo da $(H, \circ)$ ima strukturu grupe.

Naime,

1° Operacija je asocijativna, jer za svako $x, y, z \in H$

$$x \circ (y \circ z) = x * (y * z) = (x * y) * z = (x \circ y) \circ z.$$

2° Neka je e jedinični element grupe $(G, *)$. Element e prpada i skupu H jer, prema (I.2.3.2), za neko $x \in H$ postoji $x^{-1} \in H$, pa na osnovu (I.2.3.1) sleduje $e = x*x^{-1} \in H$. S obzirom da je za proizvoljno $x \in H$

$$x \circ e = x * e = x, \quad e \circ x = e * x = x,$$

zaključujemo da je e takođe jedinični element i za operaciju $\circ$.

3° Na osnovu (I.2.3.2), za svako $x \in H$ postoji inverzni element $x^{-1} \in H$ u odnosu na operaciju $*$, pa je

$$x \circ x^{-1} = x * x^{-1} = e, \quad x^{-1} \circ x = x^{-1} * x = e,$$

tj. x^{-1} je takođe i inverzni element za x u odnosu na operaciju $\circ$.

Prema tome, $(H, \circ)$ ima strukturu grupe.

Definicija I.2.3.1 Ako je $(G, *)$ grupa i $H \subset G$, pri čemu važi (I.2.3.1), (I.2.3.2), (I.2.3.3), grupa $(H, \circ)$ naziva se podgrupa date grupe $(G, *)$.

Uobičajeno je da se operacija $\circ$ identifikuje kao operacija $*$, pa ćemo nadalje, umesto $(H, \circ)$ pisati $(H, *)$.

Svaka grupa $(G, *)$ ima dve trivijalne podgrupe, a to su sama grupa $(G, *)$ i $(\{e\}, *)$.

I.2.4 Homomorfizam i izomorfizam grupa

Definicija I.2.4.1 Neka su $(G_1, *)$ i $(G_2, \circ)$ grupe. Ako postoji preslikavanje f skupa G_1 u (na) skup G_2 takvo da je

$$(\forall a, b \in G_1) \quad f(a * b) = f(a) \circ f(b),$$

kažemo da je f *homomorfizam* grupe $(G_1, *)$ u (na) grupu $(G_2, \circ)$. Ako je f preslikavanje na, za grupu $(G_2, \circ)$ kažemo da je *homomorfna slika* grupe $(G_1, *)$.

Primer 1. Posmatrajmo grupu $(\mathbb{Z}, +)$, gde je $\mathbb{Z}$ skup svih celih brojeva i $+$ obično sabiranje i grupu $(G, \cdot)$, pri čemu je $G = \{-1, 1\}$ i $\cdot$ obično množenje. Preslikavanje $f : \mathbb{Z} \mapsto G$ definisano sa

$$f(2m) = 1 \quad (m \in \mathbb{Z}), \qquad f(2m+1) = -1 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

je homomorfizam grupe $(\mathbb{Z}, +)$ na grupu $(G, \cdot)$. $\triangle$

Definicija I.2.4.2 Neka su $(G_1, *)$ i $(G_2, \circ)$ grupe. Ako postoji biunivoko preslikavanje f skupa G_1 na skup G_2 takvo da je

$$(\forall a, b \in G_1) \quad f(a * b) = f(a) \circ f(b),$$

kažemo da je f *izomorfizam* grupe $(G_1, *)$ na grupu $(G_2, \circ)$ i da su ove dve grupe *izomorfne.*

Razlika između homomorfizma i izomorfizma je u tome, što se kod izomorfizma traži da je preslikavanje obostrano jednoznačno (biunivoko), dok se kod homomorfizma taj uslov ne zahteva.

Primer 2. Neka je $\mathbb{R}$ skup svih realnih brojeva, $\mathbb{R}^+$ skup svih realnih pozitivnih brojeva, $+$ obično sabiranje i $\cdot$ obično množenje.

Funkcija $x \mapsto f(x) = \log(x)$ je jedan izomorfizam grupe $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ na grupu $(\mathbb{R}, +)$. Zaista, ovo preslikavanje je biunivoko i preslikava skup $\mathbb{R}^+$ na $\mathbb{R}$ i važi jednakost

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}^+) \quad \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b). \qquad \triangle$$

Teorema I.2.4.1 *Ako je preslikavanje f izomorfizam grupe $(G_1, *)$ na grupu $(G_2, \circ)$, tada je inverzno preslikavanje f^{-1} izomorfizam grupe $(G_2, \circ)$ na grupu $(G_1, *)$.*

Dokaz. Neka su x i y bilo koji elementi iz G_2. S obzirom da je f biunivoka koreskodencija između G_1 i G_2, postoje jedinstveni elementi $a, b \in G_1$ za koje važi $x = f(a)$ i $y = f(b)$. Nadalje imamo

$$f^{-1}(x \circ y) = f^{-1}\big(f(a) \circ f(b)\big) = f^{-1}\big(f(a * b)\big) = a * b = f^{-1}(x) * f^{-1}(y). \square$$

Primer 3. S obziro da je eksponencijalna funkcija inverzna logaritamskoj, na osnovu teoreme I.2.4.1 i primera 3, funkcija $x \mapsto f(x) = e^x$ je jedan izomorfizam grupe $(\mathbb{R}, +)$ na grupu $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Zaista, ovo preslikavanje je biunivoko i preslikava skup $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^+$ i važi jednakost

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y. \qquad \triangle$$

Razmotrimo u čemu je suštinski značaj izomorfizma.

Neka je f izomorfizam grupe $(G_1, *)$ na grupu $(G_2, \circ)$. Neka je, dalje, $c = a * b$ $(a, b, c \in G_1)$ i $x = f(a)$, $y = f(b)$, $z = f(c)$, $(x, y, z \in G_2)$. Zbog izomorfizma imamo $z = f(c) = f(a * b) = f(a) \circ f(b) = x \circ y$, pa je

$$c = a * b \quad \Leftrightarrow \quad z = x \circ y.$$

Dakle, ako hoćemo da odredimo rezultat operacije $*$ nad neka dva operanda a i b u grupi $(G_1, *)$, to možemo uraditi tako što ćemo naći rezultat operacije $\circ$ nad slikama operanada a i b, tj. nad x i y u $(G_2, \circ)$, a onda je original tog rezultata z, za preslikavanja f, naš traženi rezultat c. Naravno, moguć je i obrnut pristup (od grupe $(G_2, \circ)$ prema grupi $(G_1, *)$). Prema tome, kada imamo izomorfne grupe, možemo birati grupu u kojoj ćemo „raditi“ (tamo gde nam je to jednostavnije), jer su operandi i rezultati iz jedne i druge grupe povezani izomorfizmom.

Primetimo takođe, lako je to pokazati, da izomorfizam preslikava neutralni element grupe G_1 u neutralni element grupe G_2 i inverzni element a^{-1} od $a \in G_1$ prebacuje u inverzni element $f(a)^{-1}$ elementa $f(a) \in G_2$.

Dakle, izomorfne grupe imaju istu strukturu, samo su im elementi različiti.

Definicija I.2.4.3 Izomorfizam grupe $(G, *)$ na samu sebe naziva se *automorfizam* te frupe.

Primer 4. Preslikavanje $(\forall a \in \mathbb{R})$ $a \mapsto \beta a$, gde je $\beta(\neq 0)$ realna konstanta, je automorfizam grupe $(\mathbb{R}, +)$, jer data funkcija biunivoko preslikava $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ i važi

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \quad \beta(a + b) = \beta a + \beta b. \qquad \triangle$$

I.2.5 Algebarske strukture sa dve operacije

Neka je S neprazan skup i neka su u njemu definisane dve binarne operacije $*$ i $\circ$. Samim tim, $(S, *)$ i $(S, \circ)$ su izvesne algebarske strukture. Međutim, moguće je govoriti i o novoj strukturi koju čini skup S u odnosu na te dve operacije.

Pre nego što proučimo neke od ovih struktura, definisaćemo moguću interaktivnost između ovih dveju opearacija.

Definicija I.2.5.1 Neka su u jednom skupu S definisane dve binarne operacije $*$ i $\circ$. Ako važi

$$(\forall a, b, c \in S) \quad a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c), \qquad (b \circ c) * a = (b * a) \circ (c * a),$$

kažemo da je operacija $*$ *distributivna* u odnosu na $\circ$.

Primetimo da ako je operacija $*$ komutativna, tada je druga jednakost u definiciji I.2.5.1 neposredna posledica prve i ne mora se posebno proveravati.

Primer 1. Množenje realnih brojeva je distributivno u odnosu na sabiranje realnih brojeva. Obrnuto ne važi, tj. sabiranje nije distributivno u odnosu na množenje realnih brojeva. $\triangle$

Definicija I.2.5.2 Neka su u jednom skupu S definisane dve binarne operacije $\oplus$ i $\odot$. Ako su ispunjeni uslovi:

1° $(S, \oplus)$ je komutativna grupa,

2° operacija $\odot$ je asocijativna,

3° operacija $\odot$ je distributivna u odnosu na $\oplus$,

kažemo da skup S čini *prsten* u odnosu na operacije $\oplus$ i $\odot$, označavajući ga sa $(S, \oplus, \odot)$.

S obzirom na iskustva koja imamo sa običnim množenjem brojeva, to ćemo i operacije $\oplus$ i $\odot$ zvati, redom, sabiranje i množenje. Isto tako, neutralni element operacije $\oplus$ označavaćemo sa 0.

Definicija I.2.5.3 Ako je $(S \setminus \{0\}, \odot)$ grupa, za prsten $(S, \oplus, \odot)$ kažemo da je *telo*.

Definicija I.2.5.4 Ako je $(S \setminus \{0\}, \odot)$ Abelova grupa, za prsten $(S, \oplus, \odot)$ kažemo da je *polje*.

Primer 2. Ako je $\mathbb{Z}$ skup svih celih brojeva, a $+$ i $\cdot$ obično sabiranje i množenje, tada je $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ prsten. Zaista, ovde je $(Z, +)$ Abelova grupa, operacija $\cdot$ je asocijativna i, najzad, operacija množenja $\cdot$ je distributivna u odnosu na operaciju sabiranja $+$. Još preciznije, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je *komutativni prsten sa jedinicom* s obziorom da je operacija $\cdot$ komutativna i za nju postoji jedinični element $1 \in Z$. Ipak, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nema strukturu ni tela, ni polja, jer $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ nije grupa. $\triangle$

Primer 3. Skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$ i skup svih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, u odnosu na sabiranje i množenje brojeva, imaju strukturu polja. $\triangle$

Definicija I.2.5.5 Ako su $(S_1, +, \cdot)$ i $(S_2, \oplus, \odot)$ polja i ako je f obostrano jednoznačno preslikavanje skupa S_1 na skup S_2, za koje je

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b) \qquad \text{i} \qquad f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b) \qquad (a, b \in S_1),$$

kažemo da je f *izomorfizam* polja $(S_1, +, \cdot)$ na polje $(S_2, \oplus, \odot)$ i da su ova dva polja *izomorfna*.

Imajući u vidu teoremu I.2.4.1, lako je pokazati da važi:

Teorema I.2.5.1 *Ako je preslikavanje f izomorfizam polja $(S_1, +, \cdot)$ na polje $(S_2, \oplus, \odot)$, tada je inverzno preslikavanje f^{-1} izomorfizam polja $(S_2, \oplus, \odot)$ na polje $(S_1, +, \cdot)$.*

Dakle, kada imamo izomorfizam između algebarskih struktura (u našem slučaju radilo se, ranije, o grupama, a sada o poljima) vidimo da je to svojstvo para algebarskih struktura jer izomorfizam u jednom smeru, obezbeđuje postojanje izomorfizma u suprotnom smeru (f i f^{-1}). Zbog toga i kažemo jednostavno da su polja S_1 i S_2 izomorfna, umesto da je S_1 izomorfno sa S_2 ili da je S_2 izomorfno sa S_1. Naravno, kao i ranije, izomorfne algebarske strukture ćemo poistovećivati ako je algebarska struktura jedino što nas u njima interesuje.

I.2.6 Polje realnih brojeva

Već smo pomenuli da skup realnih brojeva, snabdeven operacijama sabiranja $+$ i množenja $\cdot$ brojeva, ima strukturu polja. Te operacije, tj. tu strukturu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, smo dobo proučili u prethodnim kursevima matematike. To polje ćemo, kada ne postoji mogućnost da dođe do zabune, označavati jednostavno sa $\mathbb{R}$, dok ćemo za elemente skupa $\mathbb{R}$ reći da su realni brojevi.

Uobičajeno je da se, uz pomoću već pomenutih operacija $+$ i $\cdot$, u skup $\mathbb{R}$ uvode još dve operacije: oduzimanje $-$ i deljenje $/$ realnih brojeva.

Naime, neka je $-y$ simetrični (inverzni) element za y u odnosu na operaciju sabiranja realnih brojeva. Tada se oduzimanje definiše kao $x - y = x + (-y)$. Broj $x - y$ naziva se razlika brojeva x i y.

Slično, ako y^{-1} inverzni (simetrični) element za $y (\neq 0)$ u odnosu na množenje realnih brojeva, deljenje se definiše kao $x/y = x \cdot y^{-1}$. Broj x/y naziva se količnik brojeva x i y. Umesto oznake x/y koriste se i oznake $\frac{x}{y}$ i $x : y$. Zato, umesto y^{-1} često pišemo $1/y$. Takođe, proizvod $x \cdot y$ označavamo jednostavno xy, izostavljajući oznaku operacije.

I.2.7 Kompleksni brojevi

(a) Polje kompleksnih brojeva

Do polja kompleksnih brojeva ćemo doći tako što ćemo u skup uređnih parova realnih brojeva

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

uvesti dve binarne operacije: $+$ i $\cdot$, koje ćemo zvati, redom, sabiranje i množenja uređenih parova. Ove oznake nas asociraju na oznake za obično sabiranje i obično množenje realnih brojeva. To, naravno, nije slučajno, jer, kao što ćemo videti, pokazaće se da su realni brojevi podskup skupa kompleksnih brojeva.

S obzirom da imamo neke dve operacije u skupu $\mathbb{R}^2$, a pominjemo nekakvo polje kompleksnih brojeva, to ćemo najpre pokazati da je struktura $(\mathbb{R}^2, +. \cdot)$ takva da je možemo zvati poljem.

No, krenimo redom.

Definicija I.2.7.1 Zbir dva uređena para (x_1, y_1) i (x_2, y_2) iz $\mathbb{R}^2$ određen je sa

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Definicija I.2.7.2 Proizvod dva uređena para (x_1, y_1) i (x_2, y_2) iz $\mathbb{R}^2$ određen je sa

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Iz definicije I.2.7.1 neposredno sleduje:

1° Operacija sabiranje uređenih parova je komutativna operacija jer za bilo koja dva uređena para (x_1, y_1) i (x_2, y_2) iz $\mathbb{R}^2$ je

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1)\\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1).\end{aligned}$$

2° Operacija sabiranje uređenih parova je asocijativna operacija jer za bilo koja tri para $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ iz $\mathbb{R}^2$ je

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + \big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)\\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)\\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)\\ &= \big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) + (x_3, y_3).\end{aligned}$$

3° Za operaciju sabiranje uređenih parova postoji u $\mathbb{R}^2$ neutralni element. To je par $(0,0)$ jer za svaki uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je

$$\begin{aligned}(x, y) + (0,0) &= (x + 0, y + 0)\\ &= (x, y).\end{aligned}$$

Napomenimo da zbog komutativnosti operacije + nije potrebno proveravati jednakost $(0,0) + (x,y) = (x,y)$.

Zbog jedinstvenosti neutralnog elementa (videti teoremu I.2.1.1) možemo biti sigurni da, osim nađenog para $(0,0)$, nema drugih neutralnih elemenata za operaciju sabiranje uređenih parova.

4° Ako je par $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ simetrični (inverzni) element za par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, u odnosu na operaciju sabiranje uređenih parova, tada mora da važi

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') = (0,0) &\Rightarrow (x + x', y + y') = (0,0)\\ &\Rightarrow x + x' = 0 \ \wedge \ y + y' = 0\\ &\Rightarrow x' = -x \ \wedge \ y' = -y.\end{aligned}$$

Dakle, na osnovu prethodnog, a imajući u vidu i osobinu komutativnosti, zaključujemo da svaki par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ima suprotni (ili inverzni) element $(-x, -y) \in \mathbb{R}^2$.

Prema tome, važi sledeće tvrđenje:

Teorema I.2.7.1 $(\mathbb{R}^2, +)$ *je komutativna grupa.*

Isto tako, iz definicije I.2.7.2 sleduje:

1° Operacija množenje uređenih parova je komutativna operacija jer je

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1) \\ &= (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1).\end{aligned}$$

2° Operacija množenje uređenih parova je asocijativna operacija jer je

$$\begin{aligned}&(x_1, y_1) \cdot \big((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)\big) = \\ &\quad= (x_1, y_1) \cdot (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2) \\ &\quad= \big(x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + y_2x_3), \\ &\qquad\qquad x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)\big) \\ &\quad= \big((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3, \\ &\qquad\qquad (x_1y_2 + y_1x_2)x_3 + (x_1x_2 - y_1y_2)y_3\big) \\ &\quad= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \cdot (x_3, y_3) \\ &\quad= \big((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)\big) \cdot (x_3, y_3).\end{aligned}$$

3° Ako za komutativnu operaciju množenje uređenih parova postoji neutralni element, on mora biti oblika $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$, jedinstven je (videti teoremu I.2.1.1) i takav da za svaki uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mora da važi:

$$\begin{aligned}(x, y) \cdot (e_1, e_2) = (x, y) &\Rightarrow (xe_1 - ye_2, xe_2 + ye_1) = (x, y) \\ &\Rightarrow xe_1 - ye_2 = x \quad \wedge \quad xe_2 + ye_1 = y \\ &\Rightarrow (e_1 = 1 \wedge e_2 = 0) \wedge (e_2 = 0 \wedge e_1 = 1) \\ &\Rightarrow e_1 = 1 \wedge e_2 = 0\end{aligned}$$

Dakle, uređeni par $(1, 0)$ je neutralni element za množenje uređenih parova $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4° Ako je par $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ inverzni (simetrični) element za par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, u odnosu na operaciju množenja uređenih parova, tada mora da važi

$$(x, y) \cdot (x', y') = (1, 0) \quad \Rightarrow \quad (xx' - yy', xy' + yx') = (1, 0),$$

pa iz uslova jednakosti odgovarajućih komponenti uređenih parova (i uz malo preuređivanje) dobijamo sistem od dve jednačine sa dve nepoznate $x', y' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} xx' - yy' &= 1, \\ yx' + xy' &= 0. \end{aligned}$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa x a drugu sa y i saberemo ih, a zatim prvu sa $-y$ a drugu sa x i saberemo ih, dobijamo, uz uslov $x^2 + y^2 \neq 0$, tj. $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \wedge \quad y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Dakle, za svaki uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sem za par $(0, 0)$, u odnosu na komutativnu operaciju množenje uređenih parova, postoji jedan i samo jedan inverzni element

$$(x', y') = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \in \mathbb{R}^2,$$

takav da je

$$(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0).$$

Prema tome, važi sledeće tvrđenje:

Teorema I.2.7.2 *Struktura* $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ *je komutativna grupa.*

Na osnovu definicija I.2.7.1 i I.2.7.2 možemo dokazati da je operacija množenje uređenih parova distributivna prema operaciji sabiranje uređenih parova. Zaista, imamo

$$\begin{aligned}
&(x_1, y_1) \cdot \big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) = \\
&\quad = (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&\quad = \big(x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)\big) \\
&\quad = \big((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)\big) \\
&\quad = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\
&\quad = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3),
\end{aligned}$$

a odavde, zbog komutativnosti operacije množenje uređenih parova, imamo

$$\big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) \cdot (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) + (x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1)$$

Na osnovu dokazanih teorema I.2.7.1 i I.2.7.2 i distributivnosti množenja prema sabiranju, zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema I.2.7.3 *Struktura* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *je polje.*

Nadalje pokušajmo da uprostimo sprovođenje uvedenih operacija nad parovima realnih brojeva.

U tom cilju, elemente polja $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, tj. uređene parove (x, y) predstavićemo na način koji je pogodniji za rad sa njima. Naime, svaki se uređeni par (x, y), u skladu sa operacijom sabiranje uređenih parova, može napisati na sledeći način
$$(x, y) = (x, 0) + (0, y).$$
Međutim, kako je, za svako $y \in \mathbb{R}$,
$$(0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0),$$
možemo pisati
$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0),$$
tj.
$$(x, y) = (x, 0) + i(y, 0),$$
gde smo uveli oznaku $(0, 1) = i$ i izostavili znak za operaciju množenje uređenih parova.

Posmatrajmo sada skup uređenih parova oblika $(x, 0)$, tj. skup
$$\mathbb{R}_0^2 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$
Očigledno, $\mathbb{R}_0^2$ je podskup skupa $\mathbb{R}^2$. Nije teško proveriti da $(\mathbb{R}_0^2, +, \cdot)$, takođe, ima strukturu polja. Zaista, s obzirom da za svako $(x, 0)$ i $(y, 0)$ iz $\mathbb{R}_0^2$ imamo:
$$\begin{aligned} (x, 0) + (y, 0) &= (x + y, 0), \\ (x, 0) \cdot (y, 0) &= (xy, 0), \end{aligned}$$
zaključujemo da je skup $\mathbb{R}_0^2$ zatvoren u odnosu na množenje i sabiranje uređenih parova iz $\mathbb{R}_0^2$. Dalje, na osnovu onoga što smo imali za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, za svako $(x, 0)$ iz $\mathbb{R}_0^2$ je simetrični (inverzni) element $(-x, 0) \in \mathbb{R}_0^2$ za sabiranje, a $(1/x, 0) \in \mathbb{R}_0^2$ $(x \neq 0)$ je inverzni (simetrični) element za množenje uređenih parova iz $\mathbb{R}_0^2$. Samim tim, jasno je da je skup $\mathbb{R}_0^2$, kao podskup skupa $\mathbb{R}^2$, automatski povukao sve osobine operacija množenja i sabiranja uređenih parova u $\mathbb{R}^2$, pa dakle $(\mathbb{R}_0^2, +, \cdot)$ ima strukturu polja, a s obzirom da je $\mathbb{R}_0^2 \subset \mathbb{R}^2$ to je $(\mathbb{R}_0^2, +, \cdot)$ potpolje polja $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Iz prethodnog, lako uočavamo da se parovi oblika $(x, 0)$ algebarski isto ponašaju u odnosu na svoje operacije $+$ i $\cdot$ kao i realni brojevi u odnosu na svoje operacije $+$ i $\cdot$ (sad vidimo da nije slučajno što smo ove operacije u jednom i drugom skupu isto označili). Drugim rečima, precizno matematički rečeno, polje $(\mathbb{R}_0^2, +, \cdot)$ je izomorfno polju realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Naime, preslikavanje $f\colon \mathbb{R}_0^2 \to \mathbb{R}$, definisano sa $(x, 0) \mapsto f((x, 0)) = x$ je izomorfizam polja $(\mathbb{R}_0^2, +, \cdot)$ na polje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Zaista, f je bijekcija i, za svako $(x, 0), (y, 0) \in \mathbb{R}_0^2$, imamo

$$f\big((x,0) + (y,0)\big) = f\big((x+y,0)\big) = x + y = f\big((x,0)\big) + f\big((y,0)\big)$$

i

$$f\big((x,0) \cdot (y,0)\big) = f\big((xy,0)\big) = xy = f\big((x,0)\big) \cdot f\big((y,0)\big)$$

Stoga ćemo, imajući u vidu pomenuti izomorfizam, svesno praviti grešku pišući umesto $(x, 0)$ samo x, a u svakom trenutku možemo umesto x pisati $(x, 0)$, tj. $(x, 0) \leftrightarrow x$. To, zapravo, znači da ćemo poistovećivati uređeni par $(x, 0)$ i realan broj x.

Naravno, tada možemo pisati

$$(x, y) = (x, 0) + i(y, 0) = x + iy.$$

Navedena nekorektnost u pisanju omogućiće nam da operacije sa uređenim parovima obavljamo jednostavnije, a da, pri tome, formalno nekorektno pisanje ne može dovesti do pogrešnog zaključka.

Dakle, svaki uređeni par (x, y) je moguće predstaviti brojevima x i y i korišćenjem oznake i za uređeni par $(0, 1)$.

Bilo bi zgodno da onda i uređeni par (x, y) smatramo brojem. U tu svrhu uvedimo oznaku $z = (x, y)$. Umesto uređenog para (x, y) posmatraćemo z, kao broj, i zvaćemo ga *kompleksan broj*, a njegov oblik $z = x + iy$ zvaćemo *algebarski oblik* kompleksnog broja $z = (x, y)$. Tada i oznaka i nije više samo oznaka, već kompleksan broj kojim smo označili uređeni par $(0, 1)$. Taj broj nazivamo *imaginarna jedinica*. Uređeni par $(1, 0)$ zovemo *realna jedinica* i, saglasno izomorfizmu, označavamo sa 1. Takođe, par $(0, 0)$ nazivamo *nula* i označavamo sa 0. Skup svih kompleksnih brojeva ćemo označavati sa $\mathbb{C}$.

Interesantno je da je $i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, pa saglasno izomorfizmu imamo da je $i^2 = -1$.

S obzirom da operacije sabiranja i množenja, bilo u skupu uređenih parova realnih brojeva ili samih realnih brojeva (a operacije smo isto označili u jednom i drugom skupu), imaju osobine komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti, sada sa kompleksnim brojevima napisanim u algebarskom obliku vrlo lako sprovodimo ove operacije. Naime, ove operacije sa kompleksnim brojevima vršimo po pravilima algebre realnih brojeva, tj. kompleksni broj smatramo kao binom po i, samo što umesto i^2 stavljamo -1. Dakle, za proizvoljna dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ imamo

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

i

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

Naravno, dobijeni rezultati za $z_1 + z_2$ i $z_1 \cdot z_2$ su u skladu sa definicijama I.2.7.1 i I.2.7.2, pa je samim tim, s obzirom na teoremu I.2.7.3, jasno da važi sledeće tvrđenje:

Teorema I.2.7.4 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *je polje.*

To ćemo polje jednostavno označavati sa $\mathbb{C}$, a zvaćemo ga polje kompleksnih brojeva.

Primetimo da je polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ potpolje polja kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, s obzirom na izomorfizam po kome uzimamo da je $(x, 0) = x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Kako je svaki par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ imao, u odnosu na sabiranje, suprotni (ili inverzni) element $(-x, -y) \in \mathbb{R}^2$, to sada za kompleksni broj $z = x + iy$, kažemo da ima *suprotni broj* i označavamo ga sa $-z = -x - iy$.

Slično, kako je svaki uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sem par $(0, 0)$, u odnosu na operaciju množenje uređenih parova, imao inverzni element $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \in \mathbb{R}^2$, to sada za broj $z = x + iy \neq 0$ kažemo da ima *inverzan* ili *recipročan broj* i označavamo ga sa

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}\,.$$

Primetimo da oznaka $\frac{1}{z}$ nije samo formalna s obzirom da je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 - (iy)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}\,.$$

Imajući u vidu sabiranje i množenje kompleksnih brojeva, sada je moguće, kao i kod realnih brojeva, uvesti operacije: oduzimanje i deljenje kompleksnih brojeva. Tako, za kompleksne brojeve $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ imamo

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

i

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{-x_1y_2 + y_1x_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (z_2 \neq 0).$$

Primer 1. Ako je $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -1 + i$, važe jednakosti

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-1 + i) = (2 - 1) + i(-3 + 1) = 1 - 2i,$$

$$z_1z_2 = (2 - 3i)(-1 + i) = -2 + 2i + 3i - 3i^2 = -2 + 3 + 2i + 3i = 1 + 5i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{-1 + i} = \frac{2 - 3i}{-1 + i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - i} = \frac{-2 - 2i + 3i + 3i^2}{(-1)^2 - (-i)^2} = \frac{-5}{2} + \frac{1}{2}i. \qquad \triangle$$

(b) Realni i imaginarni deo kompleksnog broja

Videli smo, dakle, da se kompleksan broj z, određen uređenim parom (x, y), može predstaviti u algebarskom obliku

$$z = x + iy \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Realni broj x zovemo realni deo kompleksnog broja z, u oznaci Re z, a realni broj y zovemo imaginarni deo kompleksnog broja z i označavamo ga sa Im z.

Dakle,

$$z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

Kompleksni broj z je realan ako i samo ako je Im $z = 0$ (setimo se izomorfizma po kome uzimamo da je $(x, 0) = x$).

Ako je Re $z = 0$, kaže se da je broj z čisto imaginaran.

(c) Konjugovano kompleksni brojevi

Ako je $z = x + iy$ kompleksan broj, tada za kompleksan broj $\overline{z} = x - iy$ kažemo da je *konjugovan* broju z. Naravno, važi $\overline{\overline{z}} = z$. Isto tako je

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Nije teško proveriti sledeće tvrđenje:

Teorema I.2.7.5 *Važe jednakosti*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2,$$

$$\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2, \qquad \overline{z_1/z_2} = \overline{z}_1/\overline{z}_2 \quad (z_2 \neq 0).$$

Naravno, matematičkom indukcijom je moguće dokazati opštije tvrđenje:

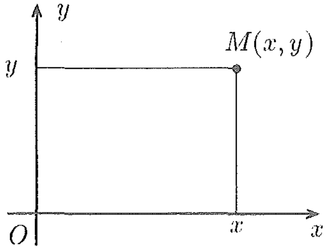
Teorema I.2.7.6 *Važe jednakosti*

$$\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k \qquad i \qquad \overline{\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z}_k .$$

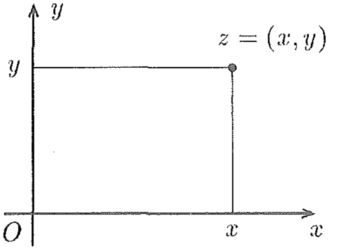
(d) Modul i argument kompleksnog broja

Kako je između skupa $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i tačaka jedne ravni, uvođenjem koordinatnog sistema, moguće uspostaviti obostrano jednoznačnu korespondenciju, to je moguće uspostaviti korespondenciju i između skupa svih kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ i skupa svih tačaka jedne ravni. Prema tome, svaki kompleksan broj z je moguće identifikovati sa jednom jedinom tačkom M u ravni (slike 1 i 2). Tu ravan zovemo *kompleksna ravan* ili z-*ravan*, x-osu zovemo *realna osa*, a y-osu *imaginarna osa*.

U slobodnijem izražavanju, za tačku M kompleksne ravni koja odgovara kompleksnom broju z govorićemo da je kompleksan broj z.



Sl. 1



Sl. 2

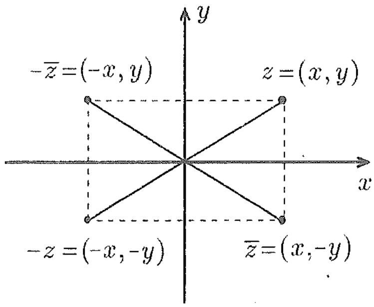
Definicija I.2.7.3 Broj $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ zovemo *modul* ili *moduo* kompleksnog broja $z = x + iy$.

Očigledno je $|\overline{z}| = |z|$, kao i $z\overline{z} = |z|^2$. Takođe, važe i nejednakosti:

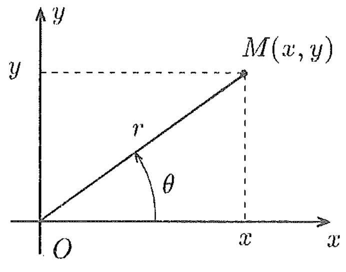
$$\operatorname{Re} z \leq |z| \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im} z \leq |z|.$$

Na slici 3 na strani 36, predstavljeni su kompleksni brojevi z, $\overline{z}$, $-z$ i $-\overline{z}$. Svi ovi brojevi imaju isti moduo. Dužina $r = \overline{OM}$ na slici 4 predstavlja moduo kompleksnog broja z. Za duž OM često kažemo da je poteg tačke M.

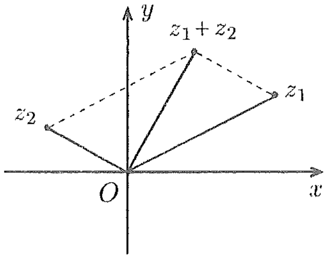
Geometrijske interpretacije sabiranja i oduzimanja dva kompleksna broja date su na slikama 5 i 6 na strani 36, respektivno.



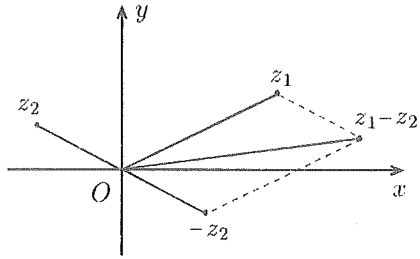
Sl. 3



Sl. 4



Sl. 5



Sl. 6

Teorema I.2.7.7 *Ako su z_1 i z_2 kompleksni brojevi, tada je*

1° $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

2° $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

3° $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$.

Dokaz. Za dokaz jednakosti 1° dovoljno je primetiti da je

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\overline{z}_1 \overline{z}_2) = (z_1 \overline{z}_1)(z_2 \overline{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

2° Kako je

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \\
&= z_1 \overline{z}_1 + z_1 \overline{z}_2 + z_2 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 \\
&= z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 + z_1 \overline{z}_2 + \overline{z_1 \overline{z}_2} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2)
\end{aligned}$$

i $\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \le |z_1\overline{z}_2| = |z_1||\overline{z}_2| = |z_1||z_2|$, zaključujemo da je

$$|z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

odakle sleduje nejednakost 2°.

3° Stavljajući $w_1 = z_1 - z_2$ i $w_2 = z_2$, nejednakost $|w_1 + w_2| \le |w_1| + |w_2|$ se svodi na $|z_1| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$, tj.

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|.$$

Kako su z_1 i z_2 proizvoljni kompleksni brojevi, zaključujemo da važi i nejednakost

$$|z_2| - |z_1| \le |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|.$$

Poslednje dve nejednakosti daju

$$-|z_1 - z_2| \le |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|,$$

tj. nejednakost 3°. □

Napomena 1. Stavljajući $-z_2$, umesto z_2, nejednakosti 2° i 3° svode se na

$$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad \text{i} \qquad \big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2|.$$

Napomena 2. Odgovarajućom geometrijskom interpretacijom, možemo videti da su nejednakosti 2° i 3° u prethodnoj teoremi, u stvari, poznate nejednakosti za stranice trougla.

Matematičkom indukcijom lako se dokazuju generalizacije nejednakosti 1° i 2° za slučaj n kompleksnih brojeva:

Teorema I.2.7.8 *Ako su z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ kompleksni brojevi, tada je*

$$\Big|\prod_{k=1}^{n} z_k\Big| = \prod_{k=1}^{n} |z_k| \qquad i \qquad \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Ugao θ koji zaklapa poteg OM sa pozitivnim delom realne ose Ox zovemo *argument* kompleksnog broja $z = x + iy$ (videti sliku 4).

Očigledno važe jednakosti

$$\text{(I.2.7.1)} \qquad x = |z|\cos\theta \qquad \text{i} \qquad y = |z|\sin\theta,$$

ali i jednakost

$$\text{(I.2.7.2)} \qquad \frac{y}{x} = \tan\theta \qquad (x \ne 0).$$

Definicija I.2.7.4 Svaki broj θ koji zadovoljava jednakosti (I.2.7.1) zove se *argument* broja z i obeležava se Arg z. Ako broj θ, pored jednakosti (I.2.7.1), zadovoljava i uslov $-\pi < \theta \leq \pi$ tada se zove *glavna vrednost argumenta* broja z i obeležava se arg z.

Argument broja 0 ne definiše se.

Zbog periodičnosti funkcija $\theta \mapsto \cos\theta$ i $\theta \mapsto \sin\theta$, važe i jednakosti

$$x = |z|\cos(\theta + 2k\pi) \quad \text{i} \quad y = |z|\sin(\theta + 2k\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

pa prema tome imamo

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Prirodno je da se glavna vrednost argumenta kompleksnog broja z određuje iz jednakosti (I.2.7.2), pri čemu se moraju imati u vidu jednakosti (I.2.7.1). Dakle, određivanje glavne vrednosti uslovljeno je položajem tačke z u kompleksnoj ravni, što, zapravo, znači vrednostima realnih brojeva x i y. U stvari, može se zaključiti da je

$$\theta = \arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & (x > 0), \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & (x < 0,\ y \geq 0), \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi & (x < 0,\ y < 0), \\ \pi/2 & (x = 0,\ y > 0), \\ -\pi/2 & (x = 0,\ y < 0). \end{cases}$$

Primer 2. Za kompleksne brojeve

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_4 = -1 + i\sqrt{3},$$

imamo

$$\arg z_1 = \pi/4, \quad \arg z_2 = -3\pi/4, \quad \arg z_3 = -\pi/3, \quad \arg z_4 = 2\pi/3. \qquad \triangle$$

Na osnovu prethodnog razmatranja, za kompleksan broj z čiji je moduo $|z| = r$ i čiji je argument $\arg z = \theta$, može se pisati

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Ovo je tzv. *trigonometrijski oblik* kompleksnog broja z.

Takođe, u upotrebi je i *eksponencijalni* ili *Eulerov*[4] *oblik* kompleksnog broja z

$$z = re^{i\theta},$$

gde je e osnova prirodnih logaritama. Pravo objašnjenje ovog oblika kompleksnog broja zahteva znanje iz kompleksnih funkcija.

Iz trigonometrijskog i eksponencijalnog oblika kompleksnog broja sleduje jednakost

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Napomenimo da je moduo kompleksnog broja $\cos\theta + i\sin\theta$ jednak jedinici, tj.

$$|\cos\theta + i\sin\theta| = 1.$$

Za ovaj broj kažemo da je *unimodularni* broj. Pored pomenute eksponencijalne notacije $e^{i\theta}$, za unimodularan broj se koristi i oznaka $\operatorname{cis}\theta$. Tako se svaki kompleksan broj z može predstaviti kao proizvod modula r i unimodularnog broja $\operatorname{cis}\theta$. Dakle, $z = r\operatorname{cis}\theta$.

Očigledno, za

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\operatorname{cis}\theta = re^{i\theta}$$

imamo

$$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = r\operatorname{cis}(-\theta) = re^{-i\theta}.$$

Ovo znači da je: $\operatorname{Arg}\overline{z} = -\operatorname{Arg} z$ i $|\overline{z}| = |z|$.

(e) Moivreova[5] formula

Kao što ćemo videti, za neka razmatranja trigonometrijski ili eksponencijalni oblik kompleksnog broja pogodniji je od njegovog algebarskog oblika.

Neka su kompleksni brojevi z_1 i z_2 određeni sa

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1e^{i\theta_1}, \\ z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2e^{i\theta_2}. \end{aligned} \tag{I.2.7.3}$$

[4] Léonhard Euler (1707–1783), veliki švajcarski matematičar.

[5] Abraham de Moivre (1667–1754), engleski matematičar.

Tada je

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\big)\\
&= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)\\
&= r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2),
\end{aligned}$$

ili

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

pa zaključujemo da važi

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \qquad (z_1 z_2 \neq 0).$$

Kako je

$$\begin{aligned}
(\text{I.2.7.4})\qquad (\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} &= \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}\\
&= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{(\cos\theta)^2 - (i\sin\theta)^2}\\
&= \cos\theta - i\sin\theta\\
&= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)
\end{aligned}$$

tada za količnik brojeva z_1 i z_2 ($\neq 0$) datih pomoću (I.2.7.3), imamo

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\operatorname{cis}\theta_1}{\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}(-\theta_2) = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2),$$

ili

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i\theta_1 - i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

što znači da je

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0),$$

$$\operatorname{Arg}\Big(\frac{z_1}{z_2}\Big) = \theta_1 - \theta_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \qquad (z_1 z_2 \neq 0).$$

Teorema I.2.7.9 (Moivreova formula) *Ako je* $z = \cos\theta + i\sin\theta$, *važi jednakost*

$$(\text{I.2.7.5})\qquad z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

za svako $n \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. Za $n = 1$, jednakost je tačna.

Pretpostavimo sada da je ona tačna i za $n = k \geq 1$. Tada je

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta.\end{aligned}$$

Ovim smo dokazali formulu (I.2.7.5) za $n \in \mathbb{N}$.

Posle stepenovanja jednakosti (I.2.7.4) sa $n \in \mathbb{N}$ i primenom, sada već dokazane formule (I.2.7.5) za $n \in \mathbb{N}$, dobijamo

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta),$$

pa prema tome Moivreova formula (I.2.7.5) važi ako je n ceo broj (pozitivan, negativan ili nula), gde smo stavili da je

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1 \qquad \square$$

(e) Trigonometrijsko rešenje binomne jednačine

Na kraju ovog odeljka razmotrićemo problem određivanja kompleksnog broja z, za koji je

$$z^n = a, \tag{I.2.7.6}$$

gde je a ($\neq 0$) dati kompleksan broj i $n \in \mathbb{N}$. Drugim rečima, razmotrićemo problem rešavanja binomne jednačine (I.2.7.6).

Naravno, za $n = 1$ postoji jedno jedino rešenje $z = a$. Za $n = 2$ i $a > 0$, poznato je, postoje dva rešenja: $z_0 = \sqrt{a}$ i $z_1 = -\sqrt{a}$.

Neka je kompleksan broj a dat u trigonometrijskom obliku

$$a = R(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Rešenja jednačine (I.2.7.6) potražimo, takođe, u trigonometrijskom obliku

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Tada imamo

$$r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

tj.

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

odakle zaključujemo da mora biti

$$r^n = R \quad \wedge \quad n\theta = \varphi + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Dakle,

$$r = \sqrt[n]{R} > 0 \qquad \wedge \qquad \theta = \theta_m = \frac{\varphi + 2m\pi}{n} \qquad (m \in \mathbb{Z}).$$

Prema tome, sva rešenja jednačine (I.2.7.6) data su pomoću

$$z_m = \sqrt[n]{R} \operatorname{cis} \frac{\varphi + 2m\pi}{n} \qquad (m \in \mathbb{Z}).$$

Lako je, međutim, videti da skup rešenja $\{z_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ ima samo n različitih tačaka, na primer,

$$\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}.$$

Zaista, ako $m \notin \{0, 1, \ldots, n-1\}$, tada se takvo m može predstaviti u obliku $m = pn + k$, gde je $p = [m/n]$, a k odgovarajući ostatak pri deljenju m sa n. U tom slučaju imamo

$$\theta_m = \frac{\varphi + 2m\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2p\pi = \theta_k + 2p\pi,$$

gde $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Kako je $\cos\theta_m = \cos\theta_k$ i $\sin\theta_m = \sin\theta_k$, zaključujemo da je, za svako $m \in \mathbb{Z}$, $z_m = z_k$, gde su $p = [m/n]$ i $k = m - pn$. Dakle,

$$z_k = \sqrt[n]{R} \operatorname{cis} \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Prema tome, važi sledeće tvrđenje:

Teorema I.2.7.10 *Ako je $a = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, sva rešenja binomne jednačine* I.2.7.6 *određena su pomoću*

$$z_k = \sqrt[n]{R}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{I.2.7.7}$$

Geometrijska interpretacija ovog rezultata pokazuje da su svi kompleksni brojevi z_k raspoređeni na krugu poluprečnika $\sqrt[n]{R}$ tako da predstavljaju temena pravilnog poligona od n strana. Slučaj $n = 8$ prikazan je na slici 7.

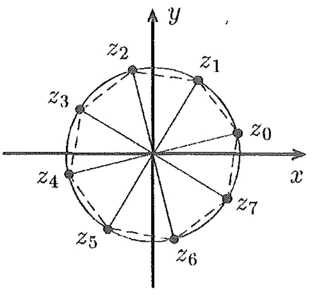
Ako sa ε_n označimo unimodularan broj sa argumentom $2\pi/n$, tj.

$$\varepsilon_n = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n} = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n},$$

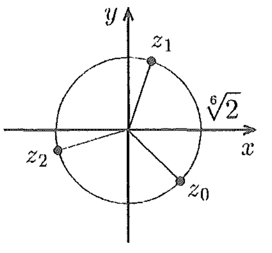
formule (I.2.7.7) mogu se iskazati u obliku

(I.2.7.8) $$z_0 = \sqrt[n]{R}\,\mathrm{cis}\,\frac{\varphi}{n}, \qquad z_k = z_0\varepsilon_n^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Geometrijski posmatrano, rotacijom z_0 za ugao $2\pi/n$ u pozitivnom smeru, dobija se z_1. Uopšte, rotacijom z_{k-1} za isti ugao $2\pi/n$ dobija se z_k.



Sl. 7



Sl. 8

Primer 3. Neka je $z^3 = -1 - i$.
Kako je $R = |-1-i| = \sqrt{2}$ i $\varphi = \arg(-1-i) = -3\pi/4$, imamo

$$z_k = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{cis}\Big(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\Big) \qquad (k = 0, 1, 2),$$

tj.

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[6]{2}\Big[\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big] = \frac{1-i}{\sqrt[3]{2}}, \\ z_1 &= \sqrt[6]{2}\Big[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\Big], \\ z_2 &= \sqrt[6]{2}\Big[\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\Big]. \end{aligned}$$

Ako stavimo $\varepsilon_3 = \mathrm{cis}\,(2\pi/3) = (-1+i\sqrt{3})/2$, na osnovu (I.2.7.8), imamo

$$z_1 = z_0\varepsilon_3 = \frac{\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt[3]{2}}, \qquad z_2 = z_1\varepsilon_3 = -\frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt[3]{2}}.$$

Koreni z_0, z_1, z_2 prikazani su na slici 8. Napomenimo da dobijeni argument $13\pi/12$ kod korena z_2 nije glavna vrednost argumenta. Naime, $\arg z_2 = -11\pi/12$. $\triangle$

I.2.8 Skalari i vektori

Veličine sa kojima se srećemo u matematici, prirodnim i tehničkim naukama, već nam je dobro poznato, mogu se podeliti na:

1° Veličine koje se karakterišu samo svojom brojnom vrednošću i njih zovemo *skalarne veličine* ili kraće *skalari.* (Na primer: površine geometrijskih figura, zapremina tela, temperatura, masa itd.)

2° Veličine koje se karakterišu ne samo svojom brojnom vrednošću, već i svojim *pravcem* i *smerom* i njih zovemo *vektorske veličine* ili *vektori.* (Na primer: sila, brzina, ubrzanje, električno polje itd.)

Iako nam je rad sa ovim veličinama, i jednim i drugim, relativno dobro poznat, mi ćemo se ovde fokusirati na rad sa vektorima i to iz dva razloga.

– Jedan razlog je da se podsetimo operacija sa vektorima, dakle, sabiranja dva vektora i množenja vektora skalarom, kao i svojstava ovih operacija.

– Drugi razlog je da u tom podsećanju pokušamo da uočimo ono što je suštinski bitno u građenju strukture koju čini skup vektora sa dve pomenute operacije, tako da možemo da izgradimo istu strukturu, ali sada sa nekim drugim skupom umesto skupa vektora i nekim drugim dvema operacijama, ali sa istim osobinama kao što ih imaju i one, pomenute dve, nad vektorima.

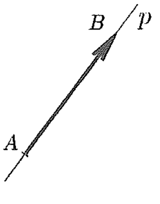
I.2.9 Vektori i operacije sa vektorima

Nezavisno od fizikalnog značenja, vektor geometrijski predstavljamo orjentisanim (usmerenim) odsečkom prave linije, tj. usmerenom duži.

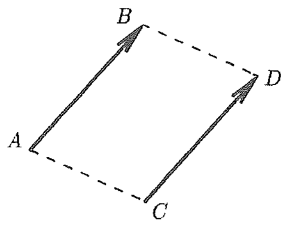
Koristićemo sledeće označavanje: E za skup svih tačaka prostora koji opažamo; R za proizvoljnu ravan u E; p za proizvoljnu pravu u E. Velikim slovima latinice A, B, C, M, O itd. označavaćemo proizvoljne tačka iz E.

Neka su A i B dve različite tačke iz E. One očigledno, na jedinstven način, određuju jednu duž ili odsečak $\overline{AB}$ kao skup tačaka koje se nalaze na pravoj između tačaka A i B. Ako pri tom definišemo jednu od tih tačaka kao početnu, a drugu kao krajnju, dobićemo tzv. orijentisanu duž. Ako je, recimo, A početna, a B krajnja tačka, duž je orijentisana od tačke A ka tački B. Za tako orijentisani odsečak kažemo da je *vektor*, koji deluje u tački A. Često se kaže da je to vektor vezan za tačku A. Ako je neophodno naglasiti početnu i krajnju tačku vektora, koristi se notacija $\overrightarrow{AB}$. U protivnom, dovoljno je za vektor koristiti notaciju $\vec{a}$ ili $\boldsymbol{a}$ (videti sliku 1).

Rastojanje između tačaka A i B naziva se *intenzitet* vektora ili *norma* vektora i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$ ili $|\vec{a}|$ ili $|\boldsymbol{a}|$. Ponekad se umesto $|\vec{a}|$ koristi



Sl. 1



Sl. 2

samo oznaka a. Za vektor čiji je intenzitet jednak jedinici kažemo da je *jedinični vektor* ili *ort* i označavamo ga obično sa indeksom nula, na primer, $\vec{a}_0$.

Prava p koja prolazi kroz tačke A i B određuje pravac vektora $\overrightarrow{AB}$. Za pravu p kažemo da je nosač vektora $\overrightarrow{AB}$.

Najzad, kažemo da vektor $\overrightarrow{AB}$ ima smer od A prema B.

Vektor čiji je intenzitet jednak nuli nazivamo *nula-vektor* i označavamo ga sa $\vec{o}$. To je, zapravo, vektor čija se početna i krajnja tačka poklapaju. Pravac i smer takvog vektora nisu određeni.

Posmatrajmo skup svih mogućih vektora $V = V(E) = \{\overrightarrow{AB} \mid A, B \in E\}$ i njegov podskup

(I.2.9.1) $$V_A = V_A(E) = \{\overrightarrow{AB} \mid B \in E\}.$$

Očigledno,

$$V = \bigcup_{A \in E} V_A.$$

U radu sa vektorima veoma je važno koje ćemo vektore tretirati kao jednake, što zavisi od uvedene relacije jednakosti u V.

Definicija I.2.9.1 Za dva vektora $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in V$ kažemo da su jednaki, tj.

(I.2.9.2) $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},$$

ako i samo ako postoji translacija takva da tačku A prevede u tačku C i istovremeno tačku B u tačku D.

Pomenuta translacija predstavlja tzv. *paralelni prenos* vektora $\overrightarrow{AB}$ u tačku C (slika 2). Ako se pritom tačka B poklopi sa tačkom D važiće jednakost (I.2.9.2). Jasno je, iz ove definicije, da jednaki vektori imaju i jednake intenzitete. Pri ovako uvedenoj definiciji jednakosti vektora, za vektore iz skupa V kažemo da su slobodni vektori[6].

S obzirom da uvedena relacija jednakosti poseduje osobine: refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost, zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema I.2.9.1 *Relacija jednakosti dva vektora iz V je relacija ekvivalencije.*

Uvedenom relacijom ekvivalencije, izvršena je particija skupa V na klase ekvivalencije, koje se veoma lako mogu opisati. Naime, posmatrajmo proizvoljan vektor $\overrightarrow{AB}$. Paralelnim prenosom ovog vektora u svaku tačku prostora E dobijamo skup vektora

$$W_{\overrightarrow{AB}} = \{\vec{a} \in V \mid \vec{a} = \overrightarrow{AB}\}, \tag{I.2.9.3}$$

koji predstavlja jednu klasu ekvivalencije. Dakle, svi vektori iz $W_{\overrightarrow{AB}}$ su međusobom jednaki, pri čemu u svakoj tački prostora deluje jedan i samo jedan od njih.

Imajući u vidu dobijene klase ekvivalencije, za naše dalje tretiranje vektora dovoljno je uzeti samo po jedan vektor iz svake klase ekvivalencije, takozvanog predstavnika klase, pri čemu se možemo opredeliti tako da svi oni deluju u istoj tački, tj. da imaju isti početak.

Dakle, ako uzmemo jednu proizvoljno fiksiranu tačku prostora, na primer $O \in E$, traženi skup vektora (predstavnika svake klase ekvivalencije) biće, saglasno notaciji (I.2.9.1),

$$V_O = V_O(E) = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in E\}. \tag{I.2.9.4}$$

Primetimo da nula-vektor $\vec{o} = \overrightarrow{OO}$ pripada ovom skupu.

Napomena 1. Neka su O i O' dve fiksirane tačke prostora E. Saglasno definiciji I.2.9.1 o jednakosti dva vektora, prostori $V_{O'}(E)$ i $V_O(E)$ mogu se tretirati kao ekvivalentni. Prostor $V_{O'}(E)$ nastaje iz prostora $V_O(E)$ translacijom.

---

[6] U našem daljem razmatranju isključivo ćemo raditi sa slobodnim vektorima. Međutim, često u primenama u fizici, mehanici i elektrotehnici, vektorske veličine su vezane za tačku ili pravu. U tom slučaju imamo tzv. vektore vezane za tačku ili vektore vezane za pravu. Na primer, kod vektora vezanih za tačku, za jednakost dva vektora, pored definicije I.2.9.1, zahteva se da oba vektora deluju u istoj tački. Naravno, kod vektora vezanih za pravu, dodatni zahtev, u definiciji jednakosti dva vektora, je da oba vektora imaju isti nosač.

Kao što smo videli, skup $W_{\overrightarrow{AB}}$, dat sa (I.2.9.3), predstavlja skup vektora koji su jednaki sa datim vektorom $\overrightarrow{AB}$. U mnogim razmatranjima od interesa su i drugi podskupovi od V, na primer, skup kolinearnih ili skup komplanarnih vektora.

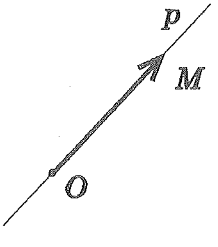
Za sve vektore čiji je nosač data prava p, ili prava koja je paralelna sa p, kažemo da su *kolinearni* vektori. Koristeći paralelni prenos vektora u tačku $O \in p$ i notaciju (I.2.9.1), skup kolinearnih vektora može se predstaviti u obliku

$$V_O(p) = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in p\}.$$

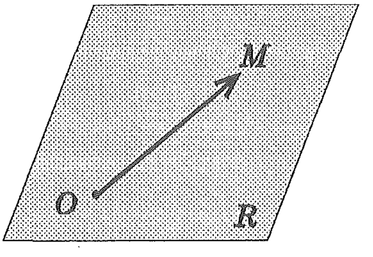
Slično, za sve vektore koji leže u datoj ravni R, ili u bilo kojoj ravni paralelnoj sa R, kažemo da su *komplanarni* vektori. U ovom slučaju to je skup

$$V_O(R) = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in R\}.$$

Na slikama 3 i 4 prikazani su proizvoljni elementi skupova $V_O(p)$ i $V_O(R)$.



Sl. 3



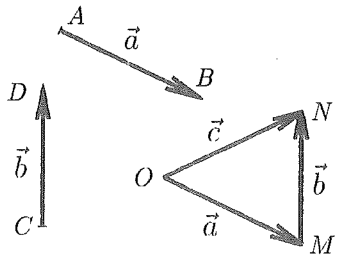
Sl. 4

Oslanjajući se na tzv. slaganje sila u mehanici, što se ogleda kroz delovanje rezultante za dve sile, moguće je uvesti sabiranje vektora.

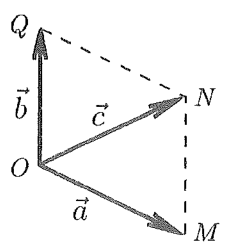
Neka su data dva vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ i neka se, paralelnim prenosom vektora $\vec{a}$ u tačku O, krajnja tačka B vektora $\vec{a}$ prevodi u tačku M. Tako dobijamo ekvivalentni vektor $\overrightarrow{OM}$. Sada, paralelnim prenosom vektora $\vec{b}$ u tačku M, dobijamo ekvivalentni vektor $\overrightarrow{MN}$, pri čemu je tačka D prevedena u tačku N (videti sliku 5 na strani 48). Za vektor $\vec{c} = \overrightarrow{ON}$ kažemo da je zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Drugim rečima, ako paralelnim prenosom vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dovedemo u tačku O tako da je $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{OQ} = \vec{b}$, a zatim nad njima konstruišemo paralelogram $OMNQ$ (slika 6), tada će vektor $\vec{c} = \overrightarrow{ON}$ predstavljati zbir $\vec{a} + \vec{b}$. Ovakav način sabiranja dva vektora poznat je kao pravilo paralelograma. Dakle, oba vektora se dovedu na isti početak i konstruiše se paralelogram nad njima kao susednim stranicama. Zbir vektora se, zatim, dobija kao dijagonala paralelograma usmerena od zajedničkog početka. Iz ovoga proizilazi da je sabiranje vektora komutativna operacija, tj. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



Sl. 5



Sl. 6

Na ovaj način, vektore prvo svodimo na vektore skupa V_O, koji je dat pomoću (I.2.9.4), a zatim dobijamo zbir koji je vektor iz istog skupa.

Teorema I.2.9.2 *Neka je + sabiranje vektora. Struktura $(V_O, +)$ je komutativna grupa.*

Dokaz. Pre svega treba uočiti da je operacija sabiranja vektora komutativna i asocijativna, tj. da je

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad (\vec{a}, \vec{b} \in V_O)$$

i

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \qquad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_O).$$

Za asocijativnost operacije videti sliku 7.

Kako je, za svako $\vec{a} \in V_O$,

$$\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a},$$

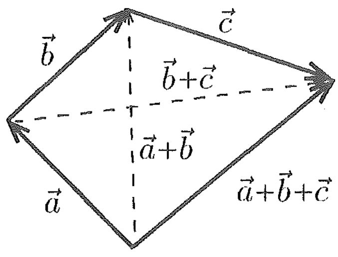
zaključujemo da je nula-vektor $\vec{o}$ neutralni element za sabiranje vektora.

Najzad, za svaki vektor $\vec{a} \in V_O$ postoji vektor $\vec{a}\,' \in V_O$ takav da je

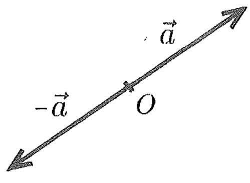
$$\vec{a} + \vec{a}\,' = \vec{a}\,' + \vec{a} = \vec{o} \tag{I.2.9.5}$$

Za vektor $\vec{a}\,'$ kažemo da je suprotni vektor vektoru $\vec{a}$ i označavamo ga sa $-\vec{a}$ (videti sliku 8). Ovaj vektor je, u stvari, inverzni element za $\vec{a}$.

Prema tome, $(V_O, +)$ je Abelova grupa. $\square$



Sl. 7



Sl. 8

Jednakost (I.2.9.5), napisana u obliku

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{o},$$

sugeriše uvođenje operacije oduzimanje vektora:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Dakle, razlika $\vec{a} - \vec{b}$ je vektor koji se dobija kao zbir vektora $\vec{a}$ i suprotnog vektora od $\vec{b}$ (slika 9 na strani 50).

Za zbir $\vec{a} + \vec{a}$ pišemo $2\vec{a}$. Naravno, za $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a} + \vec{a}$ pišemo $3\vec{a}$. U opštem slučaju, za n jednakih vektora, pišemo

$$\vec{a} + \vec{a} + \cdots + \vec{a} = n\vec{a}.$$

Vektor $n\vec{a}$ je kolinearan sa vektorom $\vec{a}$. Njegov pravac i smer se poklapaju sa pravcem i smerom vektora $\vec{a}$, dok mu je intenzitet n puta veći od intenziteta vektora $\vec{a}$.

Za $n = 0$ i $n = 1$ imamo

$$0\vec{a} = \vec{o} \qquad \text{i} \qquad 1\vec{a} = \vec{a}.$$

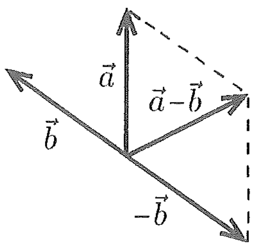
Formalno, za $n = -1$, dobijamo suprotni vektor vektoru $\vec{a}$, tj. imamo

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

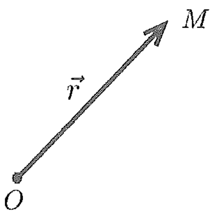
Na sličan način možemo uvesti, na primer, vektor $-m\vec{a}$, gde je $m \in \mathbb{N}$. To će biti vektor suprotan vektoru $m\vec{a}$, tj. imaće pravac vektora $\vec{a}$, smer suprotan ovom vektoru, dok će mu intenzitet biti m puta veći od intenziteta vektora $\vec{a}$.

Na osnovu prethodnog, možemo uvesti operaciju množenje vektora proizvoljnim realnim brojem λ, koji nazivamo skalar. Dakle, $\lambda\vec{a}$ je vektor čiji se intenzitet dobija množenjem intenziteta vektora $\vec{a}$ sa $|\lambda|$, pravac mu se poklapa sa pravcem vektora $\vec{a}$, a smer zavisi od znaka skalara λ. Naime, ako je $\lambda > 0$, smer se poklapa sa smerom vektora $\vec{a}$, dok je, za $\lambda < 0$, smer suprotan smeru vektora $\vec{a}$. Naravno, $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ su kolinearni vektori.

Navedena operacija množenja vektora skalarom može se tretirati kao preslikavanje skupa $\mathbb{R} \times V_O$ na skup V_O. Za razliku od operacije sabiranja vektora u V_O, koja je *interna* binarna opracija u V_O, jer se radi o preslikavanju skupa $V_O \times V_O$ na skup V_O, ovde je reč o jednoj *eksternoj* operaciji. Naravno, obe operacije daju rezultat iz V_O, pa kažemo da je skup V_O *zatvoren* s obzirom na operacije sabiranja i množenja skalarom (vektora).



Sl. 9



Sl. 10

Nije teško dokazati sledeći rezultat:

Teorema I.2.9.3 *Za množenje vektora skalarima imamo*

1° $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$,

2° $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$,

3° $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$,

4° $1\vec{a} = \vec{a}$,

za sve vektore $\vec{a}, \vec{b}$ *i sve skalare* λ, μ.

Očigledno, pri fiksiranoj tački $O \in E$, svakoj tački $M \in E$ odgovara jedan i samo jedan vektor $\overrightarrow{OM}$, koji je usmeren od tačke O prema tački M.

Definicija I.2.9.2 Za vektor $\overrightarrow{OM}$ kažemo da je radijus vektor ili vektor položaja tačke M u odnosu na tačku O.

Za radijus vektor $\overrightarrow{OM}$ koristimo oznaku r ili $\vec{r}$ (videti sliku 10).

Napomena 2. Preslikavanje $f\colon E \to V_O$, dato pomoću $M \mapsto \overrightarrow{OM}$, je biunivoko.

I.3 ZADACI ZA VEŽBU

1. Ako su p, q, r sudovi, pokazati da važe sledeće ekvivalencije

a) $\big(p \wedge (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$,

b) $\big(p \vee (q \wedge r)\big) \Leftrightarrow \big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big)$.

2. Proveriti De Morganove zakone:

a) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

3. Ako su A, B, C skupovi, proveriti jednakosti:

a) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$,

b) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

4. Data je relacija ρ na skupu $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sa

$$\begin{aligned} \rho \;=\; & \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1), \\ & (3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}. \end{aligned}$$

Dati graf relacije ρ i pokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

5. Na nepraznom skupu S data je relacija $\rho = S^2$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

6. Na skupu $X = \{z \mid z = ai,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$ definisana je relacija

$$z_1 \rho z_2 \Leftrightarrow z_1 z_2 < 0, \qquad z_1, z_2 \in X.$$

Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije. Odrediti klase ekvivalencije elemenata i i $-i$.

7. Ako su a i b celi brojevi, kažemo da je a *kongruentno* sa b u odnosu na modul m ($\in \mathbb{N}$), označavajući to sa $a \equiv b \pmod{m}$, ako je razlika $a-b$ deljiva sa m, tj ako postoji $k \in \mathbb{Z}$ tako da je $a = b + km$.

Pokazati da je kongruencija celih brojeva po modulu m jedna relacija ekvivalencije. Odrediti klase ekvivalencije.

8. Neka je $\mathbb{P}(S)$ partitivni skup nekog skupa S i

$$x\rho y \qquad \text{ako je} \qquad x \subset y; \ x, y \in \mathbb{P}(S).$$

Pokazati da je relacija ρ relacija (delimičnog) poretka.

Ako je $A \subset \mathbb{P}(S)$, odrediti njegovu minorantu, infimum, majorantu i supremum.

9. Dati su skupovi

$$A = \{z \mid z = ai, \ a \in \mathbb{R}\} \quad \text{i} \quad B = \{z \mid z = ai, \ a \in \mathbb{R}^+\}$$

i relacija ρ definisana sa

$$z_1 \rho z_2 \Leftrightarrow |z_1| \leq |z_2|.$$

Ispitati da li je relacija ρ relacija totalnog poretka

a) na skupu A;

b) na skupu B.

10. Dat je skup $A = \{a, b, c, d\}$ i funkcije

$$\begin{cases} f : A \to A \\ f : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} g : A \to A \\ g : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & a & d \end{pmatrix} \end{cases}.$$

a) Odrediti : $f(f(a))$, $f(f(b))$, $f(g(f(a)))$, $g(f(g(a)))$.

b) Odrediti kompoziciju funkcija f i g, kao i g i f.

c) Da li su f i g „1-1" i „na" preslikavanja?

11. Da li su

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 2x + 3 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = x^2 \end{cases}$$

„1-1" i „na" preslikavanja?

12. Naći funkciju $f(x)$ ako je $f(x-1) = x+1$ $(x \in \mathbb{R})$.

13. Neka je m fiksirani prirodan broj, neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je f funkcija definisana sa

$$n \mapsto f(n) = \begin{cases} m-n & (n < m), \\ m+n & (n \geq m). \end{cases}$$

a) Odrediti skup $f(\mathbb{N})$.

b) Ako je f obostrano jednoznačno preslikavanje, odrediti funkciju

$$f^{-1}\colon f(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Rezultat. a) $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}$, b) Inverzna funkcija f^{-1} postoji i određena je pomoću

$$n \mapsto f^{-1}(n) = \begin{cases} m-n & (n < m), \\ n-m & (n \geq 2m). \end{cases}$$

14. Neka je $(G, *)$ grupa i $a \in G$. Dokazati da je funkcija $f : G \to G$ definisana sa $f(x) = a * x$ bijekcija.

15. Ispitati algebarsku strukturu $(\mathbb{R}, *)$, gde je

$$x * y = x + y - xy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokazati da je $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ Abelova grupa.

16. Neka je $S = \{a, b, c\}$ skup u kome je definisana binarna operacija $*$ sa osobinama predstavljenim tzv. *Cayleyevom tablicom*:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Proveriti tvrđenje: $(S, *)$ je komutativna grupa.

17. Neka su $(G, *)$ i $(H, \circ)$ grupoidi i neka je $f : G \to H$ $(f(G) = H)$ sa osobinom

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b), \quad a, b \in G.$$

Dokazati tvrđenje: ako je $(G,*)$ grupa, tada je i $(H,\circ)$ grupa.

18. Neka je $(G,*)$ grupa i $g \in G$. Definišimo $f : G \to G$ pomoću $f(x) = g * x * g^{-1}$. Dokazati da je f automorfizam grupe G.

19. Ispitati sledeće strukture:

a) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$, gde je operacija $*$ definisana sa $a * b = 2ab$;

b) $(G,*)$, gde je $G = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q},\ b \neq 0\}$ i operacija $*$ je definisana sa

$$(a,b)*(c,d) = (ad - d + c, bd), \qquad (a,b),(c,d) \in G;$$

c) $(G,+,\cdot)$, gde je $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

20. U kompleksnoj ravni predstaviti tačke z ako je

a) $\begin{cases} |z+i| = 2, \\ \arg\,(z+i) = -\pi/3; \end{cases}$

b) $\mathrm{Re}(z+1) = -2$;

c) z treće teme jednakostraničnog trougla čija su dva temena $z_1 = 0$ i $z_2 = 2i$.

21. Ako je

$$z = \frac{\sqrt{3} - i}{-1 + i},$$

odrediti $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\arg\, z$, z^{12} i sve vrednosti $\sqrt[3]{z}$.

22. Ako je $f(n) = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$, dokazati da je

$$f(n+4) + f(n) = 0.$$

23. Naći sva rešenja jednačine

a) $z^2 + (5+2i)z + 5(1-i) = 0$, b) $z^4 + 8(1+2i)z^2 - 33 + 56i = 0$,

c) $z^3 + 4 + i\sqrt{48} = 0$, d) $z^4 = i(z-2i)^4$,

e) $z^2 + |z| = 0$, f) $22z^{12} = \bar{z}^{2012}$.

24. Neka $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zadovoljavaju sistem jednačina

$$z_1 + \bar{z}_2 = 6 + 3i, \qquad i\bar{z}_1 + \frac{z_2}{i} = 11 - 4i.$$

Odrediti $z_3 \in \mathbb{C}$ tako da tačke određene brojevima z_1, z_2, z_3 budu temena jednakostraničnog trougla.

25. Kompleksnim brojevima

$$z_1 = 2 + i, \qquad z_3 = -2 + 3i$$

određena su naspramna temena kvadrata u kompleksnoj ravni. Odrediti preostala dva temena.

26. Dokazati da je

$$\tan 5\theta = \frac{5\tan\theta - 10\tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10\tan^2\theta + 5\tan^4\theta},$$

27. Izračunati zbir

$$S_n = 1 + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + \frac{\sin 3x}{\sin^3 x} + \cdots + \frac{\sin nx}{\sin^n x}.$$

Uputstvo. Posmatrati uporedo i zbir

$$C_n = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} + \frac{\cos 3x}{\sin^3 x} + \cdots + \frac{\cos nx}{\sin^n x}.$$

28. Ostrvo sa blagom.[7] Neki mornar je našao stari pergament koji opisuje tačnu lokaciju gusarskog blaga na pustom ostrvu. Pergament je, pored ostalog, sadržavao i sledeće instrukcije:

Na ostrvu su vešala i samo dva drveta, palma i eukaliptus. Pođi od vešala i broj korake u pravoj liniji sve do eukaliptusa. Kad stigneš do eukaliptusa okreni se za 90° *nalevo i hodaj napred u pravoj liniji isti broj koraka. U tački gde staneš, zabodi štap u zemlju. Sada se vrati do vešala i hodaj u pravoj liniji, brojeći korake, od vešala do palme. Kada stigneš do palme, okreni se za* 90° *nadesno i idi isti broj koraka, pa stavi drugi štap u tačku gde se zaustaviš. Kopaj u tački tačno na središtu rastojanja između štapova i naći ćeš blago.*

[7]Problem iz knjige: *One, two, three,..., to infinity*, D. Gamova (1904–1968), prvi put publikovane 1947. godine (The Viking Press, New York), koji se elegantno može rešiti korišćenjem računa sa kompleksnim brojevima uz njihovu reprezentaciju u kompleksnoj ravni.

Mornar je odlučio da potraži blago, iznajmio brodić i otplovio do ostrva. Lako je našao palmu i eukaliptus, ali, nažalost, zub vremena je učinio svoje i vešala su nestala. Ne znajući položaj vešala, mornar nije video način za nalaženje blaga i, posle nekoliko uzaludnih kopanja, vratio se praznih ruku.

Da je mornar bio upoznat sa osnovnim operacijama i osobinama kompleksnih brojeva, kao i njihovim predstavljanjem u kompleksnoj ravni, mogao je naći blago. A, vi?

Uputstvo. Kao osnova za rešavanje ovog problema neka posluži sledeća geometrijska interpretacija specijalnog slučaja množenja kompleksnih brojeva. Naime, ako je z kompleksni broj predstavljen tačkom A u kompleksnoj ravni i tačku A rotiramo oko centra kompleksne ravni za 90° u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu, nova pozicija tačke A' će biti određena kompleksnim brojem $z' = ze^{i\frac{\pi}{2}} = iz$. Slično, ako tačku A rotiramo za 90° u smeru kretanja kazaljke na satu, njena nova pozicija A'' je određena kompleksnim brojem $z'' = ze^{-i\frac{\pi}{2}} = (-i)z$.

GLAVA II

LINEARNI PROSTORI

II.1 STRUKTURA LINEARNOG PROSTORA

II.1.1 Uvod

U odeljku I.2.9 smo razmatrali vektore iz skupa $V_O = V_O(E)$ i uveli smo dve operacije nad njima. Jedna je sabiranje $(+)$ dva vektora iz V_O, koja daje opet vektor iz V_O, pa za tu operaciju kažemo da je *unutrašnja* (*interna*) operacija u V_O. Druga operacija je množenje vektora skalarom, gde je jedan operand iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, dakle van skupa V_O, a drugi je vektor iz V_O, pri čemu je rezultat vektor iz V_O, pa kažemo da je ta operacija *spoljašnja* (*eksterna*). Obe operacije daju rezultat koji je iz V_O, pa kažemo da je skup V_O *zatvoren* s obzirom na operacije sabiranja i množenja skalarom (vektora).

Te operacije su imale i neka svojstva, pa smo pokazali da je $(V_O, +)$ Abelova grupa, dok je množenje vektora skalarom takvo da važe jednakosti

$$\text{(II.1.1.1)}\quad \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a},\ (\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a},\ \lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},\ 1\vec{a} = \vec{a},$$

za sve vektore $\vec{a}, \vec{b} \in V_O$ i sve skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Imajući u vidu celu ovu strukturu sa dve uvedene operacije nad *vektorima*, jednom internom i jednom eksternom, mogli bismo reći da je V_O *vektorski prostor* nad poljem $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

Uočavajući ono što je bitno u gradnji ove strukture, pokušajmo da sada definišemo opšti pojam *vektorskog prostora*. Dakle, za opštu definiciju vektorskog prostora moramo imati dva skupa:

1° skup X elemenata koje zovemo vektori (u prethodnom razmatranju to je bio skup V_O) i

2° skup K elemenata koje zovemo skalari (u prethodnom razmatranju to je bio skup $\mathbb{R}$).

Skup K mora imati strukturu polje, dakle moraju biti definisane operacije sabiranja i množenja sa posebnim svojstvima. Na skupu X moraju takođe biti definisane dve operacije: sabiranje vektora koje pretvara X u Abelovu grupu i množenje vektora skalarom koje zadovoljava uslove slične onim iz II.1.1.1.

II.1.2 Pojam linearnog (vektorskog) prostora

Dakle, opšti *vektorski* ili *linearni* prostor možemo formulisati sledećom definicijom:

Definicija II.1.2.1 Neka je X neprazan skup čije ćemo elemente $u, v, w, \ldots$ nazivati *vektorima* i neka je $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ polje čije ćemo elemente $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ nazivati *skalarima.* (Operaciju $\cdot$ ćemo izostavljati u pisanju.) Za skup X kažemo da je *vektorski* ili *linearni* prostor nad poljem K, ako je snabdeven sledećom algebarskom strukturom:

(1) U skupu X definisana je binarna operacija $+$ koju nazivamo *sabiranje*[1] vektora, u odnosu na koju skup X čini Abelovu grupu;

(2) Svakom vektoru u iz X i svakom skalaru λ iz $\mathbb{K}$ odgovara po jedan element u X – *proizvod*[2] vektora u i skalara λ, koji označavamo sa λu. Operaciju koja vektoru u i skalaru λ pridružuje vektor λu nazivamo *množenje skalarom* (vektora) pri čemu važe sledeći aksiomi:

1° $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$,

2° $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$,

3° $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$,

4° $1u = u$, gde je 1 jedinični (neutralni) element za operaciju $\cdot$ u $\mathbb{K}$.

Za sabiranje vektora i množenje vektora skalarom koristimo još i termine *unutrašnja* i *spoljašnja kompozicija* u linearnom (vektorskom) prostoru.

[1] Činjenicu da zbir dva vektora i označavamo na isti način kao i zbir skalara ne može da dovede do zabune, jer vektore označavamo latinskim a skalare grčkim slovima.

[2] Cinjenicu da proizvod skalara i vektora označavamo na isti način kao i proizvod skalara (kada izostavljamo znak $\cdot$ za operaciju množenja) ne može da dovede do zabune, jer vektore označavamo latinskim a skalare grčkim slovima.

Neutralni element u skupu X za sabiranje vektora (nula-vektor) označavamo sa θ, a neutralni element u skupu $\mathbb{K}$ za sabiranje skalara sa 0.

Za vektor $u \in X$ simetrični (inverzni) element u odnosu na sabiranje vektora označavaćemo sa $-u \in X$, a za skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ simetrični (inverzni) element u odnosu na sabiranje skalara označavaćemo sa $-\lambda \in \mathbb{K}$, a u odnosu na množenje skalara sa $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$.

Po konvenciji $u - v$ označava $u + (-v)$ za $u, v \in X$, kao i $\lambda - \mu$ što označava $\lambda + (-\mu)$ za $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Najčešće se kao polje $\mathbb{K}$ uzima polje realnih ili polje kompleksnih brojeva. U tim slučajevima kažemo da je reč o *realnom*, tj. *kompleksnom* vektorskom prostoru.

Na osnovu uvedenih aksioma definicijom II.1.2.1, u linearnom (vektorskom) prostoru važe ova pravila za rad:

Teorema II.1.2.1 *Ako je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, gde $u, v, w \in X$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, tada važi:*

(a) $u + v = u + w \quad \Rightarrow \quad v = w,$

(b) $u = v \quad \Leftrightarrow \quad u - v = \theta,$

(c) $0u = \theta,$

(d) $\lambda\theta = \theta,$

(e) $(-1)u = -u.$

Dokaz. Imajmo na umu da je, na osnovu definicije II.1.2.1, $(X, +)$ Abelova grupa i $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ polje.

(a) Tako imamo

$$\begin{aligned} u + v = u + w \quad &\Rightarrow \quad (-u) + (u + v) = (-u) + (u + w) \\ &\Rightarrow \quad ((-u) + u) + v = ((-u) + u) + w \\ &\Rightarrow \quad \theta + v = \theta + w \quad \Rightarrow \quad v = w. \end{aligned}$$

(b) Takođe,

$$u = v \quad \Rightarrow \quad u - v = u + (-v) = v + (-v) = \theta.$$

Na sličan način dokazuje se i obrnuto tvrđenje.

(c) Stavljajući $\lambda = 1$ i $\mu = 0$ u 2° a imajući u vidu 4° (u definiciji II.1.2.1), dobijamo

$$\begin{aligned} (1+0)u = 1u + 0u \quad &\Rightarrow \quad 1u = 1u + 0u \\ &\Rightarrow \quad u = u + 0u \\ &\Rightarrow \quad u = 0u + u, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je $0u$ neutralni element u odnosu na sabiranje vektora, tj. $0u = \theta$.

(d) Na osnovu 3° iz definicije II.1.2.1 je

$$\begin{aligned} \lambda u &= \lambda(u + \theta) \\ &= \lambda u + \lambda\theta \\ &= \lambda\theta + \lambda u, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je $\lambda\theta$ neutralni element u odnosu na sabiranje vektora, tj. $\lambda\theta = \theta$.

(e) Za $\lambda = 1$ i $\mu = -1$ u 2° iz definicije II.1.2.1, a imajući u vidu (c), imamo

$$\begin{aligned} (1 + (-1))u = 1u + (-1)u \quad &\Rightarrow \quad 0u = u + (-1)u \\ &\Rightarrow \quad \theta = u + (-1)u \\ &\Rightarrow \quad \theta = (-1)u + u, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je $(-1)u$ simetričan (inverzan) element za $u \in X$, u odnosu na sabiranje vektora, koji smo se dogovorili da ćemo označavati sa $-u$, pa je dakle $-u = (-1)u$. $\square$

Na osnovu svega, kratko možemo reći da je linearni ili vektorski prostor skup X u kome znamo da sabiramo njegove elemente (vektore) i da ih množimo skalarima (najčešće realnim, odnosno kompleksnim brojevima). Pri tome te operacije sabiranja i množenja zadovoljavju uobičajena pravila za sabiranje i množenje realnih brojeva i one nas ne izvode iz skupa X, tj. kažemo da je skup X zatvoren s obzirom na te dve operacije.

Primer 1. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ (kao vektora, tj. $X = \mathbb{R}$) obrazuje linearni prostor nad skupom realnih brojeva $\mathbb{R}$ (kao skalara, tj. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), ako pod unutrašnjom kompozicijom podrazumevamo sabiranje, a pod spoljašnjom množenje realnih brojeva. $\triangle$

Primer 2. Skup $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \ldots, n)\}$ obrazuje vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), ako unutrašnju i spoljašnju kompoziciju definišemo sa:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),\\ \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).\end{aligned}$$

U $\mathbb{R}^n$ je nula-vektor θ tačka $(0, 0, \ldots, 0)$. $\triangle$

Primer 3. Ako u skup neprekidnih funkcija $C[a, b]$ ($u, v \in C[a, b]$) nad poljem $\mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) uvedemo unutrašnju i spoljašnju kompoziciju sa

$$(u + v)(t) = u(t) + v(t), \qquad \text{odnosno} \qquad (\lambda u)(t) = \lambda u(t),$$

ovaj postaje vektorski prostor. Nula-vektor mu je funkcija identički jednaka nuli. $\triangle$

Primer 4. Neka su $1, t, t^2, \ldots, t^n$ stepeni broja $t \in \mathbb{R}$. Posmatrajmo skup $X = \mathcal{P}_n$ svih polinoma $t \mapsto P(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$ ($c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$) stepena ne višeg od n. Množenje polinoma P sa $\lambda \in \mathbb{R}$ i sabiranje dva polinoma P i Q definišimo na prirodan način, tj.

$$(\lambda P)(t) = \lambda c_0 + \lambda c_1 t + \cdots + \lambda c_n t^n = \lambda P(t),$$

$$(P + Q)(t) = P(t) + Q(t).$$

Ovim prirodnim operacijama skup $\mathcal{P}_n$ postaje vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Elementi toga prostora su polinomi, pa polinome ovde posmatramo kao jedinke, tj. tačke ili vektore prostora X. Nula-vektor ovog prostora je polinom koji je identički jednak nuli. $\triangle$

II.1.3 Linearna zavisnost vektora

Neka su $u_1, u_2, \ldots, u_n \in X$ i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$, gde je X linearni prostor nad poljem K, tada za vektor

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

kažemo da je *linarna kombinacija* vektora $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Definicija II.1.3.1 Kažemo da su vektori $u_1, u_2, \ldots, u_n \in X$ *lineano nezavisni*, ako iz

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \theta \tag{II.1.3.1}$$

sleduje $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \ldots\ , \lambda_n = 0$. Naprotiv, ako jednakost II.1.3.1 može biti zadovoljena i tako da bude $\lambda_k \neq 0$ bar za jedno $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tada kažemo da su vektori $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *linearno zavisni.*

Da bismo pobliže videli šta znači linearna zavisnost vektora, pretposatvimo da je $\lambda_1 \neq 0$ i

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \theta.$$

Tada, s obzirom da je $\lambda_1 \neq 0$ pa, dakle, postoji $\lambda_1^{-1} \in K$, imamo

$$u_1 = (-\lambda_1^{-1}\lambda_2)u_2 + \cdots + (-\lambda_1^{-1}\lambda_n)u_n,$$

tj. vektor u_1 je linearna kombinacija vektora $, u_2, \ldots, u_n$.

Primetimo da se među linearno nezavisnim vektorima ne može nalaziti nula-vektor jer bi u tom slučaju imali

$$1\theta + 0u_2 + \cdots + 0u_n = \theta.$$

pa bi vektori $\theta, u_2, \ldots, u_n$ bili linearno zavisni.

Definicija II.1.3.2 Za beskonačno mnogo vektora kažemo da su linearno nezavisni ako su vektori koji pripadaju bilo kojem konačnom podskupu tih vektora linearno nezavisni.

Broj linearno nezavisnih vektora u nekom vektorskom prostoru X očigledno može biti konačan ili beskonačan. Taj broj će, kako ćemo dalje videti, bitno uticati na karakteristike prostora.

Definicija II.1.3.3 Ako u vektorskom prostoru postoji n linearno nezavisnih vektora i ako je svaki skup od $n+1$ vektora linearno zavisan, kažemo da je prostor $n-$ *dimenzionalan*. Ukoliko u vektorskom prostoru postoji beskonačno mnogo linearno nezavisnih vektora, kažemo da je on *beskonačno-dimenzionalan.*

Primer 1. Vektori $t \mapsto 1, t, t^2, \ldots, t^n$, vektorakog prostora $\mathcal{P}_n$ iz primera 4 na strani 61, linearno su nezavisni. Da bismo to ustanovili posmatrajmo jednakost

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n = 0 \quad (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}).$$

Kako ovo mora biti ispunjeno za svako $t \in \mathbb{R}$, na osnovu poznatog stava algebre zaključujemo da mora da važi $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, tj. da je tvrđenje ispravno. $\triangle$

II.1.4 Algebarska (ili Hamelova) baza vektorskog prostora

Pretpostavimo da je prostor X n-dimenzionalan, što skraćeno pišemo $\dim X = n$. To znači, na osnovu definicije II.1.3.3, da ako skupu od n linearno nezavisnih vektora dodamo bilo koji vektor iz X, taj skup od $n+1$ vektora će biti linearno zavisan. Tada se, kako se to može lako zaključiti na osnovu razmatranja u članu II.1.3, taj novododati vektor može predstaviti kao linearna kombinacija onih, početnih, n linearno nezavisnih vektora. Dakle, bilo koji, a to znači svaki, vektor iz X se može predstaviti kao linearna kombinacija od tih n linearno nezavisnih vektora.

Slično razmatranje važi i u slučaju beskonačno dimenzionalnih prostora. Dakle, ti vektori koji određuju dimenzionalnost prostora su, na neki način, bitni za taj prostor jer se svaki element tog prostora može prikazati njihovom linearnom kombinacijom.

Da bismo ovu situaciju precizno i koncizno (matematički) opisali, uvešćemo još neke pojmove.

Definicija II.1.4.1 Neka je A podskup vektorskog prostora X nad poljem K. *Lineal* nad A, u oznaci $L(A)$, je skup svih linearnih kombinacija oblika

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n,$$

gde je $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ bilo koja konačna n-torka ($n \in \mathbb{N}$) vektora iz A i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ su proizvoljni skalari iz K.

Definicija II.1.4.2 Skup B linearno nezavisnih vektora prostora X obrazuje *Hamelovu* ili (*algebarsku*) bazu prostora X ako je $L(B) = X$.

Primer 1. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_n$, polinoma ne višeg stepena od n, iz primera 4 na strani 61, na osnovu razmatranja u primeru 1 na strani 62, videli smo da je skup vektora $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ linearno nezavisan. S obzirom da se njihovom linearnom kombinacijom može dobiti bilo koji polinom ne višeg stepena od n, tj. $L(B) = \mathcal{P}_n$, zaključujemo da je B jedna baza tog prostora. Kako ona sadrži $n+1$ elemenata, prostor $\mathcal{P}_n$ je dimenzije $n+1$. $\triangle$

Napomenimo da linearni prostor, u opštem slučaju, ima beskonačno mnogo različitih baza. Međutim, može se dokazati da se između bilo koje dve od njih može uspostaviti biunivoka korespodencija, što za slučaj konačno dimenzionalnog prostora znači da imaju jednak broj elemenata. Kod n-dimenzionalnog prostora baza sadrži tačno n vektora. Dakle, svaki skup od

m ($> n$) vektora u n-dimenzionalnom prostoru je linearno zavisan. S druge strane, svaki linearno nezavisan skup vektora je ili baza prostora ili je deo neke baze tog prostora.

Primer 2. Neka je $X = \mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva, a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ polje kompleksnih brojeva. Skup $\mathbb{C}$ je linearni prostor nad poljem $\mathbb{C}$ pri standardno uvedenim operacijama sabiranja i množenja kompleksnih brojeva:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}),$$

$$\lambda z = (\alpha, \beta) \cdot (x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x) \qquad (z \in \mathbb{C} \ \text{ i } \ \lambda \in \mathbb{C}).$$

Ovaj linearni prostor je jednodimenzionalni jer se za proizvoljne tačke z_1 i z_2 iz C ($z_1 \neq z_2$) mogu odrediti kompleksni skalari λ_1 i λ_2, tako da je

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = (0, 0),$$

što znači da su tačke z_1 i z_2 linearno zavisne. Takve vrednosti skalara su, na primer, $\lambda_1 = z_2$ i $\lambda_2 = -z_1$. Dakle, za bazu ovog prostora se može uzeti bilo koji kompleksni broj različit od $(0, 0)$.

Međutim, ako za polje $\mathbb{K}$ uzmemo polje realnih brojeva $\mathbb{R}$, tada je odgovarajući linearni prostor dvodimenzionalan. Uobičajena baza u tom prostoru sastoji se od realne i imaginarne jedinice, tj. $B = \{1, i\}$. Kao što je poznato, svaki vektor $z \in \mathbb{C}$, tj. svaki kompleksan broj $z = (x, y)$, može biti predstavljen u obliku

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy,$$

gde su x i y koordinate (realni i imaginarni deo kompleksnog broja). $\triangle$

Teorema II.1.4.1 *Svaki vektor linearnog prostora X može se na jedinstven način izraziti kao linearna kombinacija vektora algebarske baze tog prostora.*

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti za slučaj konačno dimenzionalnog prostora, a sličnim rezonovanjem se tvrđenje dokazuje i za slučaj beskonačno dimenzionalnih prostora.

Dakle, neka je $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Kako je $L(B) = X$, svaki vektor $u \in X$ može se predstaviti kao linearna kombinacija vektora baze B. Da bismo pokazali jedinstvenost ovog predstavljanja, pretpostavimo suprotno, tj. da postoje dve reprezentacije

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \quad \text{i} \quad u = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_n u_n,$$

gde $\lambda_i, \mu_i \in K$ $(i = 1, \ldots, n)$. Tada je

$$(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + (\lambda_2 - \mu_2)u_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)u_n = \theta,$$

odakle, zbog linearne nezavisnosti bazisnih vektora, sleduje

$$\lambda_1 = \mu_1, \ \lambda_2 = \mu_2, \ \ldots \ \lambda_n = \mu_n. \qquad \square$$

Dakle ako je poznata baza $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ nekog konačno dimenzionalnog prostora X nad poljem K, tada se svaki vektor tog prostora može na jedinstven način predstaviti sa

$$u = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ potpuno određeni skalari. Dakle ako znamo bazu B i skalare $x_1, x_2, \ldots, x_n$, vektor $u \in X$ je potpuno određen. Zato za bazu B kažemo da je *koordinatni sistem* tog prostora, a skalare $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zovemo *koordinate vektora* u i šematski ih prikazujemo *koordinatnom reprezentacijom*

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Često se, ako to ne dovodi do zabune, u i $\boldsymbol{x}$ poistovećuju.

Primer 3. Vektorskom prostoru $\mathcal{P}_2$ svih polinoma ne višeg stepena od dva, iz primera 4 na strani 61, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{u \mid u(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2, \quad c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

je trodimenzionalan (videti primer 1 na strani 63).

Naravno, umesto baze $B = \{1, t, t^2\}$ moguće je uzeti i neku drugu bazu, na primer $B' = \{1, t + 1, t^2 + t\}$. Tako, trinom

$$u(t) = 3 + 2t + 5t^2$$

u novoj bazi B' ima reprezentaciju

$$u(t) = 6 - 3(t + 1) + 5(t^2 + t).$$

Dakle, koordinatne reprezentacije ovog elementa u u bazama B i B' su, respektivno,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \triangle.$$

Primer 4. Kao jedna baza prostora n-torki realnih brojeva $\mathbb{R}^n$ nad poljem $\mathbb{R}$ iz primera 2 na strani 61, može se uzeti skup $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, gde su

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Zaista, s obzirom da je lako pokazati da su ovi vektori linearno nezavisni i da se svaki vektor $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ može predstaviti sa

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

tj. da je $L(B) = \mathbb{R}^n$, zaključujemo da je ovaj skup vektora iz B stvarno baza prostora $\mathbb{R}^n$.

Za ovu bazu kažemo i da je *prirodna* baza, jer vektor $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ima koordinatnu reprezentaciju u ovoj (prirodnoj) bazi datu sa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Dakle, vektor (tačka) u i njegova koordinatna reprezentacija $\mathbf{x}$ opisuju se pomoću istih skalara $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, pa zato često, poistovećujući u i $\mathbf{x}$, koristimo i notaciju $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. $\triangle$

II.1.5 Algebarska baza u vektorskom prostoru $V_O(E)$

Vratimo se opet vektorskom prostoru $V_O(E)$. Neka je u prostoru E data prava p i ravan R. Skupovi

$$V_O(p) = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in p\} \qquad \text{i} \qquad V_O(R) = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in R\},$$

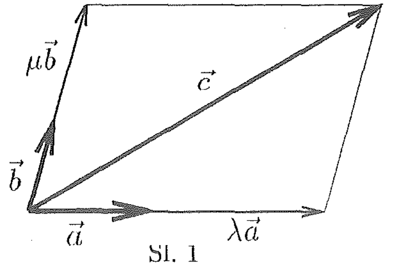
snabdeveni operacijom sabiranje vektora i operacijom množenje vektora skalarom, čine takođe vektorske prostore. Prvi od njih, vektorski prostor prave p pridružen tački O, naziva se *prostor kolinearnih vektora.* Za vektorski prostor $V_O(R)$ ravni R pridružen tački O kažemo da je *prostor komplanarnih vektora.*

Prostor $V_O(p)$ je jednodimenzionalan. Svaki vektor $\vec{a} \neq \vec{o}$ vektorskog prostora $V_O(p)$ je njegova baza. Zaista, proizvoljni vektor $\vec{b} \in V_O(p)$ može se jednoznačno predstaviti u obliku $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, što je, u stvari, karakterizacija kolinearnih vektora. Ako poslednju jednakost napišemo u obliku $\lambda\vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{o}$, zaključujemo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno zavisni. Dakle, dva vektora u prostoru $V_O(p)$ su linearno zavisna, pa je on jednodimenzionalan.

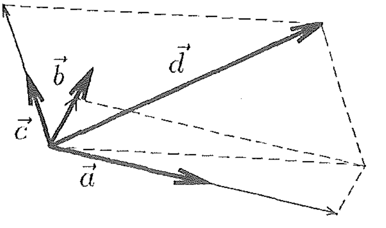
Prostor komplanarnih vektora $V_O(R)$ je dvodimenzionalan. Bilo koja dva linearno nezavisna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ prostora $V_O(R)$ čine njegovu bazu, tako da se proizvoljan vektor $\vec{c} \in V_O(R)$ može jednoznačno predstaviti u obliku (videti sliku 1)

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

Iz poslednje jednakosti, koja karakteriše komplanarne vektore, može se zaključiti da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno zavisni.



Sl. 1



Sl. 2

Prostor $V_O(E)$ je trodimenzionalan. Kao njegova baza može se uzeti bilo koji skup od tri linearno nezavisna vektora, na primer, $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Tada se svaki vektor $\vec{d} \in V_O(E)$ može jednoznačno predstaviti u obliku (videti sliku 2)

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}. \tag{II.1.5.1}$$

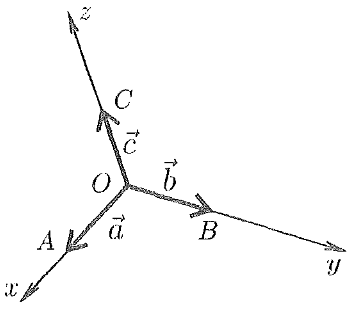
Četiri proizvoljna vektora u $V_O(E)$ su uvek linearno zavisna. Napomenimo da su vektori baze u $V_O(E)$ tri nekomplanarna vektora.

Posmatrajmo prostor $V_O(E)$ sa bazom $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Vektori baze B određuju jedan *koordinatni sistem* prostora $V_O(E)$. Tačku O nazivamo *koordinatni početak*. Neka su $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ i $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Bazisni vektori određuju tri ose, u oznaci x, y i z, respektivno (videti sliku 3 na strani 68). Na osnovu (II.1.5.1) vidimo da je vektor $\vec{d}$ potpuno određen skalarima, tj. koordinatama λ, μ, ν.

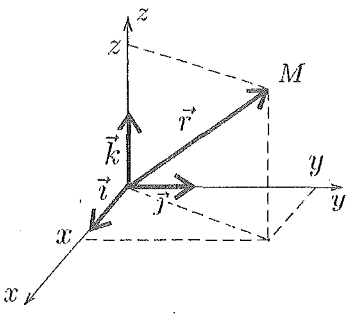
Ako su vektori baze izabrani tako da su im pravci uzajamno upravni, a intenziteti jednaki jedinici, tada kažemo da je zadat pravougli koordinatni sistem. U tom slučaju, bazisne jedinične vektore označavamo redom sa $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$. Uočimo proizvoljnu tačku $M \in E$ i radijus vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Tada se vektor $\overrightarrow{OM}$ može predstaviti pomoću

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \tag{II.1.5.2}$$

gde su koordinate x, y i z jednoznačno određene vektorom $\overrightarrow{OM}$, tj. tačkom M (videti sliku 4). Za koordinate x, y i z kažemo da su redom *apscisa*, *ordinata* i *aplikata* tačke M. S druge strane, svakoj uređenoj trojki realnih brojeva (x, y, z) jednoznačno se može pridružiti vektor $\overrightarrow{OM}$, tj. tačka M, tako da važi (II.1.5.2). Dakle, preslikavanje $g\colon E \to \mathbb{R}^3$, dato pomoću (II.1.5.2), je biunivoko. Istu činjenicu smo konstatovali i za preslikavanje $f\colon E \to V_O(E)$, dato pomoću $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ (videti napomenu 2 na strani 51). Imajući sve ovo u vidu, često identifikujemo tačku M sa uređenom trojkom (x, y, z), pišući $M = (x, y, z)$ ili, pak, $\vec{r} = (x, y, z)$.



Sl. 3



Sl. 4

S obzirom na ovo, a imajući u vidu da se unutrašnja i spoljašnja kompozicija u prostoru $V_O(E)$, kada su vektori izraženi pomoću

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad \text{i} \qquad \vec{r}\,' = \overrightarrow{OM'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k},$$

svode na

$$\vec{r} + \vec{r}\,' = (x + x')\vec{\imath} + (y + y')\vec{\jmath} + (z + z')\vec{k}, \qquad \lambda\vec{r} = (\lambda x)\vec{\imath} + (\lambda y)\vec{\jmath} + (\lambda z)\vec{k},$$

tada nije teško zaključiti da skup $\mathbb{R}^3$, snabdeven unutrašnjom i spoljašnjom kompozicijom

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z'), \qquad \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z),$$

za svako (x, y, z), $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$, čini vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Tu činjenicu smo, inače, već ranije konstatovali u primeru 2 na strani 61.

II.1.6 Potprostor i direktna suma potprostora

Definicija II.1.6.1 Neka je X vektorski prostor nad poljem K. Skup $Y \subset X$ je *vektorski potprostor* od X ako je on sam za sebe vektorski prostor nad istim poljem K u odnosu na kompozicije iz X.

$\{\theta\}$ i X primeri su potprostora svakog prostora X, pa se zato zovu *trivijalni potprostori.*

Jasno je da ako je skup Y zatvoren u odnosu na sabiranje njegovih elemenata i njihovo množenja skalarima iz polja K, tada će on biti automatski vektorski prostor sam za sebe jer će ove operacije imati potrebne osobine u Y pošto ih imaju u X $(Y \subset X)$. Još preciznije:

Teorema II.1.6.1 *Skup $Y \subset X$ je vektorski potprostor od X tada i samo tada ako iz*

$$u, v \in Y \quad \Rightarrow \quad \lambda u + \mu v \in Y \quad (\forall \lambda, \mu \in K). \tag{II.1.6.1}$$

Dokaz. Ako je Y vektorski potprostor, tada očigledno važi (II.1.6.1). Obrnuto, ako važi (II.1.6.1), tada za $\lambda = \mu = 1$ odnosno $\mu = 0$ specijalno sledi da je $u + v \in Y$ i $\lambda u \in Y$, što znači da je Y sam za sebe vektorski prostor (jer su osobine operacija u Y iste kao onih u X s obzirom da je $Y \subset X$).

Primer 1. Neka su u prostoru E data prava p i ravan R koje sadrže tačku O. Prostori $V_O(p)$ i $V_O(R)$ su potprostori vektorskog prostora $V_O(E)$. $\triangle$

Primetimo da je lineal nad podskupom A vektorskog prostora X, $L(A)$ $(A \subset X)$, vektorski potprostor od X. Naime, ako su $u, v \in L(A)$ tada je

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \qquad v = \sum_{j=1}^{p} \mu_j v_j \qquad (u_i, v_j \in A;\ \lambda_i, \mu_j \in K).$$

No tada je

$$\lambda u + \mu v = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \lambda_i) u_i + \sum_{j=1}^{p} (\mu \mu_j) v_j \qquad (\lambda, \mu \in K)$$

kao linearna kombinacija elemenata iz A, element od $L(A)$, tj. $L(A)$ je potprostor od X.

Neka je $\{Y_i\}_{i\in I}$ proizvoljna kolekcija vektorskih potprostora od X i stavimo $Y = \bigcap_{i\in I} Y_i$. Primenjujući dva puta teoremu II.1.6.1, iz

$$\begin{aligned} u, v \in Y \quad &\Rightarrow \quad u, v \in Y_i \quad (\forall i \in I) \\ &\Rightarrow \quad \lambda u + \mu v \in Y_i \quad (\forall i \in I \quad \text{i} \quad \forall \lambda, \mu \in K) \\ &\Rightarrow \quad \lambda u + \mu v \in Y \quad (\forall \lambda, \mu \in K), \end{aligned}$$

zaključujemo da je i Y jedan vektorski potprostor od X. Prema tome, ako je A proizvoljan skup u X, tada postoji najmanji vektorski potprostor od X koji sadrži skup A; to je presek svih onih vektorskih potprostora od X u kojima leži A.

Videli smo da je $L(A)$ vektorski potprostor od X. $L(A)$, kao skup svih linearnih kombinacija od A, očigledno sadrži A. S obzirom da svaki vektorski potprostor od X koji sadrži A mora sadržati i sve linearne kombinacije elemenata iz A, zaključujemo da je $L(A)$ najmanji vektorski potprostor od X koji sadrži A.

Prethodnim razmatanjem smo, ustvari, dokazali sledeće tvrđenje:

Teorema II.1.6.2 *Ako je A podskup vektorskog prostora X, tada je lineal nad A, u oznaci $L(A)$, najmanji vektorski potprostor od X koji sadrži A.*

Lako je dokazati sledeću teoremu koju dajemo bez dokaza.

Teorema II.1.6.3 *Neka su Y_1 i Y_2 dva potprostora od X. Suma vektorskih potprostora $Y_1 + Y_2$, gde je*

$$Y_1 + Y_2 = \{w \mid w = u + v, \quad u \in Y_1,\ v \in Y_2\},$$

je takođe vektorski potprostor od X.

Za nas su posebno interesantne sume vektorskih potprostora koji su disjunktni. S obzirom da nula vektor θ mora sadržati svaki potprostor, za potprostore Y_1 i Y_2 vektorskog prostora X kažemo da su *disjunktni* ako važi $Y_1 \cap Y_2 = \{\theta\}$.

Definicija II.1.6.2 Sumu vektorskih potprostora prostora X, $Y_1 + Y_2$, se naziva *direktna suma* i označava sa $Y_1 \dot{+} Y_2$, ako su Y_1 i Y_2 disjunktni potprostori od X.

Teorema II.1.6.4 *Svakim elementom $w \in Y_1 \dot{+} Y_2$ jednoznačno su određeni elementi $u \in Y_1$ i $v \in Y_2$ tako da je $w = u + v$.*

Dokaz. Zbog $Y_1\dot{+}Y_2 = Y_1+Y_2$ svaki vektor $w \in Y_1\dot{+}Y_2$ ima reprezentaciju pomenutog oblika. Kada bi postojala još jedna takva reprezentacija, na primer $w = u' + v'$ $(u' \in Y_1, v' \in Y_2)$, iz $u + v = u' + v'$ sledilo bi da vektor $z = u - u' = v' - v$ leži kako u Y_1 tako i u Y_2, tj. $z \in Y_1 \cap Y_2$. Kako su potprostori Y_1 i Y_2 disjunktni, to je $u - u' = \theta$ i $v - v' = \theta$. □

Definicija II.1.6.3 Ako je $Y_1\dot{+}Y_2 = X$, tada kažemo da su Y_1 i Y_2 *komplementarni vektorski potprostori od X.*

Primer 2. Neka su $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ linearno nezavisni vektori u $V_O(E)$, a $V_O(R) = L(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ i $V_O(p) = L(\vec{e_3})$. Tada je $V_O(R)$ vektorski potprostor ravni R određene sa $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$, a $V_O(p)$ vektorski potprostor prave p određene sa $\vec{e_3}$. Iz geometrijskih razloga sledi da je $V_O(E)$ direktna suma potprostora $V_O(R)$ i $V_O(p)$ pa su, dakle, ovi potprostori komplementarni.

Zgodno je da na ovom primeru uočimo da jednim potprostorom, u našem slučaju neka to bude $V_O(R)$, nije jednoznačno određen drugi, njemu komplementaran, potprostor, u našem slučaju to je bilo koji prostor $V_O(p)$ za svako p, tj. svaki vektor $\vec{e}$ koji nije u ravni R a koji određuje pravu p. △

Jedan od glavnih problema teorije vektorskih prostora i funkcija na njima jeste u tome da su u datoj situaciji na zgodan način celi prostor X prikaže kao direktna suma svojih potprostora. Time se proučavanje problema u celom prostoru svodi na proučavanje sličnih problema u „manjim" prostorima. Tako se, na primer, izvesni problemi u prostoru $V_O(E)$ svode na slične probleme u $V_O(R)$ i $V_O(p)$, tj. na probleme u ravni i na pravoj.

Neka je X linearan prostor dimenzije n sa bazom $B = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$. Ako definišemo jednodimenzionalne potprostore Y_k kao lineale nad $B_k = \{u_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, tj.

$$Y_1 = L(B_1), \quad Y_2 = L(B_2), \quad \ldots, \quad Y_n = L(B_n),$$

tada je, očigledno, $X = Y_1\dot{+}Y_2\dot{+}\ldots\dot{+}Y_n$.

Naravno, prostor X se može razložiti na direktnu sumu potprostora i na druge načine, uzimanjem potprostora različitih dimenzija. U vezi s tim, navodimo sledeću teoremu koju nije teško dokazati.

Teorema II.1.6.5 *Neka su $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ potprostori konačno dimenzionalnog prostora X. Jednakost*

$$X = Y_1\dot{+}Y_2\dot{+}\ldots\dot{+}Y_m$$

važi ako i samo ako je

$$\dim X = \dim Y_1 + \dim Y_2 + \cdots + \dim Y_m.$$

Dakle, ako su $B_1, B_2, \ldots, B_m$ baze potprostora $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, respektivno, tada unija ovih baza predstavlja bazu prostora X.

II.2 Izomorfizam linearnih prostor

Posmatrajmo skup svih linearnih prostora X nad istim poljem $\mathbb{K}$. Svaki od posmatranih linearnih prostora sadrži konkretne elemente – vektore tog prostora, čija priroda nam ne mora biti bitna, već su nam daleko značajnije uvedene operacije nad tim elementima (unutrašnja i spoljašnja kompozicija), kao i svojstva tih operacija koja su nezavisna od prirode elemenata. U vezi s tim, važan je pojam izomorfnih prostora.

II.2.1 Definicije i teoreme

Definicija II.2.1.1 Za dva vektorska prostora X i X' nad istim poljem $\mathbb{K}$, kažemo da su *izomorfni prostori* ako postoji biunivoko preslikavanje $f\colon X \to X'$ takvo da je za svako $u, v \in X$ i svako $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad f(\lambda u) = \lambda f(u). \tag{II.2.1.1}$$

Za funkciju f kažemo da je izomorfizam prostora X na prostor X'.

Napomenimo da se za prvo svojstvo funkcije f u (II.2.1.1) kaže da je *aditivnost*, a da se njena druga osobina u (II.2.1.1) naziva *homogenost.*

Lako se može dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema II.2.1.1 *Ako je preslikavanje f izomorfizam prostora X na prostor X', tada je inverzno preslikavanje f^{-1} izomorfizam prostora X' na prostor X.*

Neka je $u' = f(u)$ $(u \in X,\ u' \in X')$. Ako sa θ i θ' označimo nula-vektore u prostorima X i X' respektivno, tada, na osnovu (II.2.1.1), imamo

$$f(\theta) = f(0u) = 0f(u) = 0u' = \theta'\,. \tag{II.2.1.2}$$

Dakle, nula-vektor prostora X preslikava se u nula-vektor prostora X'. Još važnije svojstvo izomorfnih prostora odnosi se na preslikavanje skupa linearno nezavisnih vektora.

Teorema II.2.1.2 *Neka je $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ skup linearno nezavisnih vektora u X i neka je $f\colon X \to X'$ izomorfizam prostora X na prostor X'. Tada je $A' = f(A) = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ skup linearno nezavisnih vektora u prostoru X'.*

Dokaz. Posmatrajmo linearnu kombinaciju vektora iz skupa A', koja je jednaka θ'. Tada, s obzirom na (II.2.1.1) i (II.2.1.2), imamo

$$\theta' = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n) = f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = f(\theta),$$

odakle sleduje

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \theta.$$

Kako su vektori $u_1, \ldots, u_n$ linearno nezavisni, iz poslednje jednakosti zaključujemo da svi skalari λ_k $(k = 1, \ldots, n)$ moraju biti jednaki nuli. □

Teorema II.2.1.3 *Dva konačno-dimenzionalna prostora X i X', nad istim poljem $\mathbb{K}$, imaju jednake dimenzije ako i samo ako su izomorfna.*

Dokaz. Na osnovu prethodne dve teoreme može se zaključiti da izomorfni vektorski prostori imaju jednake dimenzije.

Pretpostavimo sada obrnuto, tj. da je $\dim X = \dim X'$, i dokažimo da su X i X' izomorfni. U prostorima X i X' izaberimo proizvoljne bazise $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$, respektivno, i definišimo preslikavanje $f\colon X \to X'$ pomoću

$$f(u) = \lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_n u'_n, \tag{II.2.1.3}$$

gde je

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n. \tag{II.2.1.4}$$

Preslikavanje f je biunivoko jer su razlaganja (II.2.1.3) i (II.2.1.4) jedinstvena (videti teoremu II.1.4.1). Da bismo dokazali da su prostori X i X' izomorfni, izaberimo dva proizvoljna vektora $u, v \in X$ i proizvoljni skalar $\lambda \in \mathbb{K}$. Neka su koordinatne reprezentacije vektora u i v date sa

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n, \qquad v = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f\big((\lambda_1 + \mu_1)u_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)u_n\big) \\ &= (\lambda_1 + \mu_1)u'_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)u'_n \\ &= (\lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_n u'_n) + (\mu_1 u'_1 + \cdots + \mu_n u'_n) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f\big((\lambda\lambda_1)u_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n)u_n\big) = (\lambda\lambda_1)u_1' + \cdots + (\lambda\lambda_n)u_n' \\ &= \lambda(\lambda_1 u_1' + \cdots + \lambda_n u_n') = \lambda f(u) . \qquad \square \end{aligned}$$

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da je za proizvoljan n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, sa algebarske tačke gledišta, dovoljno poznavati vektorski prostor $\mathbb{K}^n$ (za prostor $\mathbb{R}^n$ videti primer 2 na strani 61). Za vektorski prostor $\mathbb{K}^n$ često kažemo da je *koordinatni* ili *aritmetički* prostor.

Definicija II.2.1.2 Ako je preslikavanje f izomorfizam vektorskog prostora $(X, +, \cdot)$ na vektorski prostor $(X, +, \cdot)$, za preslikavanje f kažemo da je *automorfizam prostora* $(X, +, \cdot)$.

II.2.2 Linearni prostor prosto-periodičnih oscilacija

Za zadati fiksni pozitivan broj ω, posmatrajmo skup funkcija $t \mapsto u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, definisanih na $\mathbb{R}$, gde je $A \geq 0$ i $-\pi < \varphi \leq \pi$, tj.

$$X_\omega = \Big\{ u \;\Big|\; u(t) = A\cos(\omega t + \varphi),\ A \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi \Big\}.$$

Takve funkcije su periodične sa periodom $T = 2\pi/\omega$ i u fizici i tehnici su poznate kao *prosto-periodične oscilacije*. Pri tome, za nenegativni parametar A kaže se da je *amplituda*, dok se za φ kaže da je *početna faza*. Ako je amplituda A jedanka nuli, odgovarajuća funkcija se svodi na nulu i tu funkciju ćemo označavati sa $u_0 = u_0(t) = 0$. Razumljivo, zbog periodičnosti, dovoljno je ove funkcije posmatrati kada proizvod $\omega t \in [-\pi, \pi]$.

Neka su $u_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ i $u_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ dve bilo koje funkcije iz X_ω. Ako u X_ω, na uobičajeni način, uvedemo operaciju sabiranja, tada je

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2)(t) &= u_1(t) + u_2(t) \\ &= A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t - (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t. \end{aligned}$$

Pretpostavimo, sada, da postoje takve realne vrednosti A i φ za koje je

$$\text{(II.2.2.1)} \quad A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 = A\cos\varphi, \quad A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 = A\sin\varphi.$$

Ako bi još važilo i da je $A \geq 0$ i $-\pi < \varphi \leq \pi$, tada bi skup X_ω bio zatvoren u odnosu na uvedenu operaciju sabiranja, i imali bismo

$$u(t) = (u_1 + u_2)(t) = A\cos\omega t\cos\varphi - A\sin\omega t\sin\varphi = A\cos(\omega t + \varphi),$$

Problem određivanja realnih vrednosti A i φ za koje važe jednakosti (II.2.2.1) je potpuno analogan određivanju modula i glavne vrednosti argumenta kompleksnog broja

$$z = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2) + i(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2),$$

koji je, inače, zbir kompleksnih brojeva $z_1 = A_1e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = A_2e^{i\varphi_2}$. Dakle, postoji moduo zbira $z = z_1 + z_2$ i on je, evidentno, jednak $A \geq 0$, dok je φ glavna vrednost njegovog argumenta $(-\pi < \varphi \leq \pi)$. Dakle,

$$z = z_1 + z_2 = A(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Ae^{i\varphi}.$$

Na osnovu prethodnog zaključujemo da zbir $u \in X_\omega$.

Očigledno je da je uvedena operacija sabiranja komutativna i asocijativna. Neutralni element je $u_0 = 0$, dok je za $u = A\cos(\omega t + \varphi)$ simetrični element $u' = -u = A\cos(\omega t + \varphi')$, pri čemu je početna faza

(II.2.2.2) $$\varphi' = \begin{cases} \varphi + \pi, & -\pi < \varphi \leq 0, \\ \varphi - \pi, & 0 < \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

Prema tome, važi sledeće tvrđenje:

Teorema II.2.2.1 $(X_\omega, +)$ *ima strukturu Abelove grupe.*

Primer 1. Neka su

$$u_1 = \cos(\omega t - \pi/6) \quad \text{i} \quad u_2 = \sqrt{3}\,\cos(\omega t + 2\pi/3),$$

tj. $A_1 = 1$, $\varphi_1 = -\pi/6$, $A_2 = \sqrt{3}$, $\varphi_2 = 2\pi/3$.

Kvadriranjem jednakosti (II.2.2.1), a zatim sabiranjem, nalazimo

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1 + 3 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\,\cos(-\pi/6 - 2\pi/3) = 1,$$

pa, s obzirom da tražimo da je $A \geq 0$, uzimamo $A = 1$. Sada, na osnovu (II.2.2.1), imamo

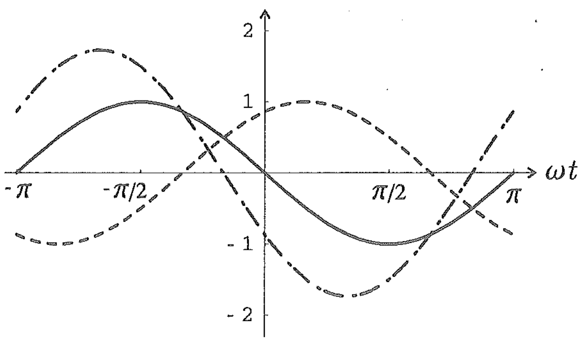
$$\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 = 0, \qquad \sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 = 1,$$

pa je φ, iz intervala $(-\pi, \pi]$, dato sa $\varphi = \pi/2$, tj.

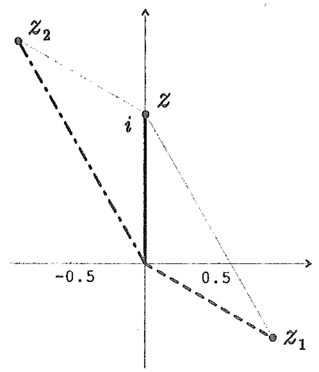
$$u(t) = (u_1 + u_2)(t) = \cos(\omega t + \pi/2) \quad (= -\sin\omega t).$$

Grafici funkcija u_1 (isprekidana linija), u_2 (linija tipa tačka–crta) i zbira u (puna linija), kada $\omega t \in [-\pi, \pi]$, prikazani su na slici 1.

S druge strane, odgovarajući kompleksni brojevi $z_1 = e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ i $z_2 = \sqrt{3}\,e^{i2\pi/3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ prikazani su na slici 2. Njihov zbir je $z = z_1 + z_2 = i$, tj. $z = e^{i\pi/2}$. Dakle, moduo je $A = 1$, a glavna vrednost argumenta je $\varphi = \pi/2$.



Sl. 1



Sl. 2

Primetimo da je znatno lakše obaviti operaciju sabiranja u skupu kompleksnih brojeva, nego sabrati dve prosto-periodične oscilacije. $\triangle$

Ako uvedemo množenje prosto-periodične oscilacije $u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$, pomoću

$$(\lambda u)(t) = \lambda u(t) = \begin{cases} \lambda A\cos(\omega t + \varphi), & \lambda \geq 0, \\ -\lambda A\cos(\omega t + \varphi'), & \lambda < 0, \end{cases}$$

gde je φ' određeno sa (II.2.2.2), možemo lako zaključiti da, za svako $u, v \in X_\omega$ i svako $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, uz to što $(\lambda u)(t) \in X_\omega$ važe i sledeće jednakosti:

$$\lambda(\mu\, u(t)) = (\lambda\mu)u(t), \qquad (\lambda + \mu)u(t) = \lambda u(t) + \mu u(t),$$
$$\lambda(u(t) + v(t)) = \lambda u(t) + \lambda v(t), \qquad 1u(t) = u(t).$$

Dakle, na osnovu prethodnog zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema II.2.2.2 *Skup prosto-periodičnih oscilacija X_ω snabdeven operacijom sabiranja $+$ i operacijom množenja realnim skalarom čini vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$.*

U primeru 2 na strani 64 naveli smo da je $\mathbb{C}$ linearni dvodimenzionalni prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Teorema II.2.2.3 *Linearni prostori X_ω i $\mathbb{C}$ (nad istim poljem skalara $\mathbb{R}$) su izomorfni.*

Dokaz. Neka je $u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad (A \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi)$ proizvoljan element prostora X_ω. Uočimo preslikavanje $f\colon X_\omega \to \mathbb{C}$, definisano pomoću

$$f(A\cos(\omega t + \varphi)) = Ae^{i\varphi},$$

koje je očigledno biunivoko.

Neka su $u_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ i $u_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ dva proizvoljna elementa prostora X_ω, čije su slike $z_1 = A_1e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = A_2e^{i\varphi_2}$, respektivno. Kako je $u(t) = u_1(t) + u_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ a $z = z_1 + z_2 = Ae^{i\varphi}$, imamo

$$\begin{aligned} f(u_1(t) + u_2(t)) &= f(u(t)) \\ &= z \\ &= z_1 + z_2 \\ &= f(u_1(t)) + f(u_2(t)), \end{aligned}$$

što znači da je f aditivna funkcija (prvi uslov u (II.2.1.1)).

Neka je sada $u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad (A \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi)$ proizvoljan element prostora X_ω, φ' definisano sa (II.2.2.2) i neka je λ proizvoljan realan broj.

Za $\lambda \geq 0$ imamo

$$f(\lambda u(t)) = f(\lambda A\cos(\omega t + \varphi)) = \lambda Ae^{i\varphi} = \lambda f(A\cos(\omega t + \varphi)) = \lambda f(u(t)),$$

a za $\lambda < 0$,

$$\begin{aligned} f(\lambda u(t)) = (\lambda A\cos(\omega t + \varphi)) &= f(-\lambda A\cos(\omega t + \varphi')) \\ &= -\lambda Ae^{i\varphi'} \\ &= \lambda Ae^{i\varphi} \\ &= \lambda f(A\cos(\omega t + \varphi)) \\ &= \lambda f(u(t)). \end{aligned}$$

Dakle, i drugi uslov u (II.2.1.1) je zadovoljen.

Ovim smo dokazali da je f izomorfizam prostora X_ω na prostor $\mathbb{C}$, tj. da su ovi prostori izomofni. □

Zahvaljujući izomorfizmu prostora X_ω i prostora $\mathbb{C}$, analiza linearnih sistema sa prosto-periodičnim oscilacijama se značajno pojednostavljuje. Naime, sva izračunavanja koja treba sprovesti nad prosto-periodičnim oscilacijama u prostoru X_ω se mogu sprovesti nad odgovarajućim kompleksnim brojevima u prostoru $\mathbb{C}$, a zatim je potrebno samo interpretirati rezultate u prostoru X_ω. Tipičan primer se pojavljuje u elektrotehnici kod analize linearnih električnih kola sa naizmeničnom strujom.

Na kraju, primetimo da je, s obzirom na pokazani izomorfizam i teoremu II.2.1.3, i ovaj vektorski prostor X_ω, kao i vektorski prostor kompleksnih brojeva nad poljem $\mathbb{R}$, dvodimenzionalan. Dakle, bilo koje dve linearno nezavisne ne-nula prosto-periodične oscilacije[3] mogu se uzeti za bazu linearnog prostora X_ω.

II.3 Normirani prostor i unitarni prostor

II.3.1 Normirani prostor

U dosadašnjim razmatranjima linearni prostor X je bio definisan kao Abelova grupa nad poljem $\mathbb{K}$. Prema tome skup X je imao samo algebarsku strukturu. Baš zbog te činjenice osnovni pojmovi geometrije trodimenzionalnog prostora, kao što su rastojanje, ugao, upravnost (normalnost), itd., nisu do sada našli svoje mesto u opštoj teoriji linearnih prostora. Uvođenjem pojma *norme* u linearni prostor mi algebarskoj strukturi prostora X dodajemo topološku strukturu koja je zasnovana na pojmu *rastojanja* i tako dolazimo do pojma složenije matematičke strukture, koja omogućava da se u mnogim problemima klasične analize, na izgled raznorodnim, nađu zajedničke crte i ovi podvedu pod iste opšte principe.

Definicija II.3.1.1 Linearni prostor X nad poljem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ ili $\mathbb{R}$) je *normiran* ako postoji nenegativna funkcija $u \mapsto \|u\|$, definisana za svako $u \in X$, takva da je

(1) $\|\theta\| = 0$ i $\|u\| > 0$ za $u \neq \theta$ (definisanost),

(2) $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ (homogenost),

[3] Ne-nula prosto-periodične oscilacije sa početnim fazama φ_1 i φ_2 su linearno zavisne (kolinearne) ako su te faze jednake ($\varphi_1 = \varphi_2$) ili ako se razlikuju za π, tj. ako je $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \pi$ (videti (II.2.2.2)).

(3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (relacija trougla),

gde su $u, v \in X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$. Za ovakvu funkciju $u \mapsto \|u\|$ kažemo da je *norma* ili *dužina vektora u*.

Dakle, norma ili dužina vektora je nenegativan broj $\|u\|$ koji se pridružuje vektoru $u \in X$, pri čemu to „pridruživanje" mora imati osobine date definicijom II.3.1.1. Pokazaćemo da ta funkcija $u \mapsto \|u\|$ ima sva svojstva dužine klasičnog vektora, tj. udaljenosti dveju tačaka prostora, odnosno apsolutne vredenosti realnog broja.

Primer 1. U primeru 1 na strani 60 smo videli da je skup R linearni prostor nad poljem R. Ovaj prostor se može normirati ako uvedemo normu elementa $\lambda \in \mathbb{R}$ sa $\|\lambda\| = |\lambda|$, što možemo tvrditi s obzirom da su nam dobro poznata svojstva (1), (2) i (3) iz definicije II.3.1.1, za apsolutnu vrednost realnog broja.

Imajući ovo u vidu, moglo bi se reći, da je funkcija $u \mapsto \|u\|$ proširenje, na elemente opšteg linearnog prostora, funkcije $\lambda \mapsto |\lambda|$ koja broju $\lambda \in R$ pridružuje njegovu apsolutnu vrednost. $\triangle$

Primer 2. Linearni prostor polinoma $\mathcal{P}_n$ na segmentu $[a, b]$ može postati normiran ako za svako $u \in \mathcal{P}_n$ uvedemo normu, na primer, pomoću

$$\|u\| = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)|.$$

Za ovu normu kažemo da je uniformna norma. $\triangle$

Primer 3. Vektorski prostor $V_O(E)$ je normiran jer se za svaki vektor $\vec{r}$ može uvesti norma vektora kao intenzitet tog vektora, tj. $\|\vec{r}\| = |\vec{r}| = r$, pri čemu je lako proveriti da su ispunjeni svi uslovi iz definicije II.3.1.1.

Ako bismo definisali pravougli koordinatni sistem sa bazom $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, tada se intenzitet vektora $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ može izraziti u obliku

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad \triangle \tag{II.3.1.1}$$

Neka su M_1 i M_2 proizvoljne tačke u prostoru tačaka E, određene svojim vektorima položaja $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ i $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$. Tada je $\overrightarrow{M_2M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, pa je rastojanje između tačaka M_1 i M_2 jednako intenzitetu (dužini) vektora $\overrightarrow{M_2M_1}$, tj. $|\overrightarrow{M_2M_1}|$ ili $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, s obzirom da je $|\overrightarrow{M_2M_1}| = |\overrightarrow{M_1M_2}|$. Dakle, ako to rastojanje između tačaka M_1 i M_2, odnosno vrhova vektora $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, označimo sa $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, tada imamo

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|.$$

Ako u dobijenoj jednakosti vektore $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ iz prostora $V_O(E)$ zamenimo sa vektorima u i v iz nekog normiranog prostora X, dobijamo ovakvu formulu

$$d(u,v) = \|u - v\| \qquad (u, v \in X) \tag{II.3.1.2}$$

koja bi, imajući u vidu uspostavljenu analogiju, trebalo da predstavlja „meru rastojanja“ između vektora $u, v \in X$.

Lako je proveriti da funkcija definisana sa (II.3.1.2) ima sledeća svojstva:

(1) $d(u,v) \geq 0$ za sve $u, v \in X$,

(2) $d(u,v) = 0$ onda i samo onda, ako je $u = v$,

(3) $d(u,v) = d(v,u)$ za sve $u, v \in X$,

(4) $d(u,v) = d(u,w) + d(w,v)$ za sve $u, v, w \in X$.

Skup X, u kojem je zadata funkcija d koja svakom paru $u, v \in X$ pridružuje nenegativan realan broj $d(u,v)$ s navedenim svojstvima (koja, inače, ima i klasično rastojanje između tačaka u prostoru) zove se *metrički prostor*, a funkcija d se zove *metrika* ili *rastojanje* u tom prostoru X. Dakle, normirani prostor je istovremeno i metrički prostor (u odnosu na metriku koja je inducirana normom, tj. u odnosu na metriku datu formulom (II.3.1.2)).

Primetimo da je za postojanje metričkog prostora dovoljno da imamo neprazan skup X i metriku d, tj. da skup X ne mora biti linearan prostor, a da može da bude metrički prostor (ako postoji funkcija d sa pobrojanim svojstvima). Drugim rečima, pojam metričkog prostora je širi nego pojam normiranog prostora.

Sada, $\|u\|$ vektora u iz normiranog prostora X možemo shvatiti i kao rastojanje tog vektora u od nula vektora $\theta \in X$, s obzirom da važi

$$\|u\| = \|u - \theta\| = d(u, \theta).$$

Primer 4. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ se može na različite načine normirati uvođenjem neke od normi elementa $x = (x_1, \dots, x_n)$ pomoću

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < +\infty) \tag{II.3.1.3}$$

i

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Od svih normi (II.3.1.3), najčešće se koriste norme za $p = 1$ i $p = 2$, tj. norme

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \text{i} \qquad \|x\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Norma za $p = 2$ poznata je kao euklidska norma i često se označava sa $\|x\|_E$. Specijalno, u prostoru $\mathbb{R}^3$ euklidska norma vektora svodi se na (II.3.1.1) Primetimo da je rastojanje (koje proizilazi iz euklidske norme) između vektora $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\boldsymbol{v} = (x_2, y_2, z_2)$, gde $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, dato sa

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_E = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

što nam je dobro poznata formula za rastojanje dve tačke u trodimenzionalnom prostoru sa koordinatama (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2).

Napomenimo da se u slučaju $n = 1$, tj. u slučaju vektorskog prostora $\mathbb{R}$, sve ponuđene norme svode na normu datu u primeru 1 na strani 79. $\triangle$

Postojanjem norme u linearnom prostoru, on automatski postaje i metrički prostor, a to nam omogućuje da razmatramo različite pojmove i probleme koji su u vezi sa pojmom „rastojanja", pa tako i probleme konvergencije nizova tačaka u X.

Neka je X normirani prostor i neka je u_k $(k = 1, 2, \ldots)$ jedan niz tačaka u X. Nizove ćemo kratko označavati sa $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Definicija II.3.1.2 Niz $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ u normiranom prostoru X *konvergira* ka tački $u \in X$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj k_0 tako da

$$k \geq k_0 \qquad \Rightarrow \qquad d(u_k, u) = \|u_k - u\| \leq \varepsilon.$$

Za u kažemo da je granična vrednost niza $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i pišemo $u_k \to u$ $(k \to \infty)$ ili $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = u$.

Definicija II.3.1.3 Niz $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ u normiranom prostoru X je *Cauchyev*[4] *niz* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj k_0 tako da

$$m > k \geq k_0 \qquad \Rightarrow \qquad d(u_m, u_k) = \|u_m - u_k\| \leq \varepsilon.$$

Definicija II.3.1.4 Metrički prostor je *kompletan prostor* ako u njemu svaki Cauchyev niz konvergira.

[4] Augustin Luis Cauchy (1789–1857), veliki francuski matematičar.

Definicija II.3.1.5 Za kompletan normirani prostor kažemo da je Banachov[5] *prostor*.

Dakle, Banachov prostor je jedna složena struktura koja u algebarskom pogledu ima strukturu linearnog prostora, a u topološkom jednu, na specijalan način uvedenu, metričku strukturu u odnosu na koju je svaki Cauchyv niz u tom prostoru konvergentan.

II.3.2 Unitarni prostor

Uvođenjem pojma *skalarnog proizvoda* u opšti linearni prostor X u mogućnosti smo da govorimo o uglu između elemenata (vektora) linearnog prostora X, pa tako i o njihovoj međusobnoj upravnosti (normalnosti)–*ortogonalnosti*, što je do sada bila privilegija klasičnih vektora iz prostora $V_O(E)$. Uz to, skalarnim proizvodom se u prostor X, na jedan specijalan način, uvodi norma, pa prema tome i metrika (rastojanje) i svi oni pojmovi koji su u vezi sa rastojanjem.

Definicija II.3.2.1 Vektorski prostor X nad poljem $\mathbb{K}$ realnih ili kompleksnih brojeva naziva se *prostor sa skalarnim proizvodom* ili *unitarni prostor* ako postoji funkcija $(\cdot,\cdot)\colon X^2 \to \mathbb{K}$ koja za svako $u, v, w \in X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ zadovoljava sledeće uslove:

(1) $(u,u) \geq 0$,

(2) $(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = \theta$,

(3) $(u+v,w) = (u,w) + (v,w)$,

(4) $(\lambda u, v) = \lambda(u,v)$,

(5) $(u,v) = \overline{(v,u)}$.

Funkcija (u,v) se naziva *skalarni proizvod.*

Teorema II.3.2.1 *Za skalarni proizvod važi:*

1° $(u,\lambda v) = \bar{\lambda}(u,v)$,

2° $(u, v_1 + v_2) = (u,v_1) + (u,v_2)$,

[5] Stefan Banach (1892–1945), poznati poljski matematičar.

3° $|(u,v)|^2 \leq (u,u)(v,v)$.

Dokaz. Tvrđenja 1° i 2° se jednostavno dokazuju.

Da bismo dokazali tvrđenje 3°, koje je poznato kao Bunjakowsky[6]–Cauchy–Schwarzova[7] nejednakost, uzmimo tačku $w = u + t(u,v)v$, gde je t realno i $u, v \in X$. Kako je, na osnovu (1) iz definicije II.3.2.1,

$$(w,w) = (u + t(u,v)v, u + t(u,v)v) \geq 0,$$

korišćenjem osobina (3)–(5) iz definicije II.3.2.1 i osobina 1° i 2° zaključujemo da je

$$(u,u) + 2|(u,v)|^2 t + |(u,v)|^2 (v,v) t^2 \geq 0,$$

odakle sleduje da diskriminanta D dobijenog kvadratnog polinoma po t sa realnim koeficijentima mora biti manja ili jednaka nuli, tj.

$$\frac{D}{4} = |(u,v)|^4 - |(u,v)|^2 (u,u)(v,v) \leq 0.$$

Iz poslednje nejednakosti, za $(u,v) \neq 0$, sleduje nejednakost 3°.

Za $(u,v) = 0$, nejednakost 3° je trivijalno ispunjena. □

Unitaran vektorski prostor može se normirati uvođenjem norme pomoću

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}, \tag{II.3.2.1}$$

s obzirom da funkcija $u \mapsto \sqrt{(u,u)}$ ispunjava sve uslove iz definicije II.3.1.1.

Zaista, s obzirom na (1) i (2) definicije II.3.2.1, imamo

$$\|u\| \geq 0 \qquad \text{i} \qquad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta,$$

a na osnovu (1) definicije II.3.2.1 i 1° teoreme II.3.2.1 je

$$\|\lambda u\| = \sqrt{(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(u,u)} = \sqrt{|\lambda|^2 (u,u)} = |\lambda|\sqrt{(u,u)} = |\lambda|\|u\|.$$

Najzad, ako koristimo uvedenu oznaku (II.3.2.1), nejednakost iz 3° teoreme II.3.2.1 uzima oblik

$$|(u,v)| \leq \|u\|\|v\| \tag{II.3.2.2}$$

[6]Viktor Jakovlevič Bunjakowsky (1804–1889), ruski matematičar.

[7]Karl Herman Amandus Schwarz (1843–1921), nemački matematičar.

pa imamo

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2=(u+v,u+v) &= (u,u)+(v,v)+(u,v)+(v,u)\\ &= \|u\|^2+\|v\|^2+(u,v)+\overline{(u,v)}\\ &= \|u\|^2+\|v\|^2+2\,\mathrm{Re}\,(u,v)\\ &\le \|u\|^2+\|v\|^2+2\,|(u,v)|\\ &\le \|u\|^2+\|v\|^2+2\,\|u\|\,\|v\|\\ &\le (\|u\|+\|v\|)^2,\end{aligned}$$

tj.

$$\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|.$$

Dakle, stvarno $\sqrt{(u,u)}$ ima sve osobine norme, tj. važi $\|u\|=\sqrt{(u,u)}$. Za tako uvedenu normu kažemo da izvire iz skalarnog proizvoda.

Ako umesto kompleksnog vektorskog prostora ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) imamo realni vektorski prostor ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$), tada se osobina (5) u definiciji II.3.2.1 skalarnog proizvoda $(\cdot,\cdot)\colon X^2\to\mathbb{R}$, svodi na osobinu simetrije

(5′) $(u,v)=(v,u)$.

U tom slučaju za prostor X kažemo da je Euklidov ili euklidski prostor.

Posmatrajmo sada proizvoljni euklidski prostor. Nejednakost (II.3.2.2) svodi se na

$$-1\le\frac{(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|}\le 1,\qquad (u,v\ne\theta)$$

što daje ideju da se uvede jedan geometrijski pojam u opšti unitaran–euklidski prostor, ugao između dva vektora u i v, pomoću

$$\cos\varphi=\frac{(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|}. \tag{II.3.2.3}$$

Definicija II.3.2.2 Unitaran vektorski prostor sa normom (II.3.2.1) naziva se *pred-Hilbertov*[8] *prostor.* Ukoliko je ovaj prostor kompletan naziva se *Hilbertov.*

Dakle, na osnovu prethodnog, možemo reći da je Hilbertov prostor jedan specijalan Banachov prostor, pa sve što smo u prethodnim odeljcima rekli o Banachovom prostoru važi i za Hilbertov prostor. Međutim, struktura Hilbertovog prostora je bogatija (zbog postojanja skalarnog proizvoda) od

[8] David Hilbert (1862–1943), veliki nemački matematičar.

Banachovog prostora, te je u Hilbertovom prostoru moguće uvesti pojmove koji nemaju analogona u Banachovom prostoru. Takođe, do mnogih pojmova, koji postoje i u Banachovom prostoru, može se u Hilbertovom prostoru doći na specifičan i, često, jednostavniji način.

II.3.3 Primeri prostora sa skalarnim proizvodom

Iako je unitarni prostor (prostor sa skalarnim proizvodom) apstraktno definisan, primeri koji slede pokazuju da niz konkretnih prostora zadovoljava sve zahteve unitarnog prostora, te da je skalarni proizvod upravo generalizacija skalarnog proizvoda klasičnih vektora u trodimenzionalnom prostoru.

U primerima koji slede moramo dati vektorski prostor X i funkciju koja uređenom paru $u, v \in X$ pridružuje skalar $(u, v) \in \mathbb{K}$. Nakon toga treba verifikovati da tako definisana funkcija zadovoljava sve zahteve (aksiome) 1–5 skalarnog proizvoda iz definicije II.3.2.1. Tada vektorski prostor X i tako definisana funkcija (u, v) zajedno čine unitaran prostor koji i dalje označavamo sa X.

Primer 1. Neka je $X = V_O(E)$ trodimenzionalni vektorski prostor.

Pretpostavimo da je u prostoru $V_O(E)$ zadata baza $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$. Neka su dalje

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$$

dva proizvoljna vektora u $V_O(E)$.

Pokažimo da je funkcija $(\cdot, \cdot)\colon V_O(E)^2 \to \mathbb{R}$, definisana pomoću

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \tag{II.3.3.1}$$

skalarni proizvod.

Direktno ćemo proveriti osobine (1)–(4) iz definicije II.3.2.1 Kako je $V_O(E)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, potrebno je da važi uslov (5'), tj. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$, što je očigledno tačno na osnovu (II.3.3.1).

Kako je $(\vec{a}, \vec{a}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, zaključujemo da je $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$, pri čemu je $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ ako i samo ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, tj. $\vec{a} = \vec{o}$. Takođe, za tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}\,(= c_1\vec{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{k})$, imamo

$$\begin{aligned}
(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\
&= (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}).
\end{aligned}$$

Najzad, za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ i svako $\vec{a}, \vec{b} \in V_O(E)$ važi jednakost

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{a}, \vec{b}) &= (\lambda a_1)b_1 + (\lambda a_2)b_2 + (\lambda a_3)b_3 \\ &= \lambda(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}).\end{aligned}$$

Umesto oznake $(\vec{a}, \vec{b})$, za skalarni proizvod (II.3.3.1) uobičajeno se koristi oznaka $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ili još jednostavnije $\vec{a}\vec{b}$.

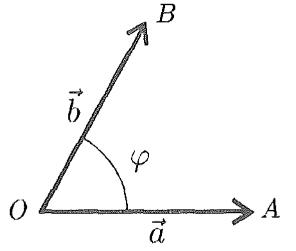
Norma koja izvire iz skalarnog proizvoda (II.3.3.1) je euklidska norma, definisana pomoću (II.3.1.1). Dakle, ovde imamo

$$\|\vec{a}\|^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2 = a^2,$$

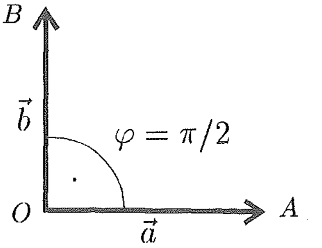
tj.

$$\|\vec{a}\| = |\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Korišćenjem geometrijske interpretacije vektora, moguće je skalarni proizvod dva vektora uvesti i na jedan drugačiji način. Neka vektori $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ zaklapaju ugao φ (videti sliku 1).



Sl. 1



Sl. 2

Primenom kosinusne teoreme na trougao OAB dobijamo

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\varphi,$$

tj.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \tag{II.3.3.2}$$

jer je $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$.

S druge strane imamo

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{b}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{b}),$$

tj.

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a},\vec{b}). \tag{II.3.3.3}$$

Poređenjem (II.3.3.2) i (II.3.3.3) dobijamo jednakost

$$(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \tag{II.3.3.4}$$

koja se obično uzima za definiciju skalarnog proizvoda dva vektora s obzirom da je njegova forma nezavisna od izabrane baze u prostoru $V_O(E)$. Nije teško pokazati da su definicione formule (II.3.3.1) i (II.3.3.4) ekvivalentne.

Na osnovu (II.3.3.4), zaključujemo da je skalarni proizvod dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ skalar, čija se vrednost nalazi između $-ab$ i $+ab$. Očigledno, iz uslova $\vec{a}\vec{b}=0$ sleduje da je

$$\vec{a}=\vec{o} \ \vee \ \vec{b}=\vec{o} \ \vee \ \varphi=\pi/2.$$

Dakle, skalarni proizvod dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak je nuli ako je bar jedan od vektora jednak nula-vektoru ili ako su vektori *ortogonalni*, tj. ako je $\varphi=\pi/2$. Na slici 2, na strani 86, prikazani vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su ortogonalni.

Kako su naši bazisne vektori $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ ortogonalni i jedinični, imamo

$$\begin{array}{lll}
\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}=1, & \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=0, & \vec{\imath}\cdot\vec{k}=0,\\
\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}=0, & \vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}=1, & \vec{\jmath}\cdot\vec{k}=0,\\
\vec{k}\cdot\vec{\imath}=0, & \vec{k}\cdot\vec{\jmath}=0, & \vec{k}\cdot\vec{k}=1.
\end{array}$$

Za takvu bazu $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ kažemo da je *ortogonalna baza*. Štaviše, koristi se termin *ortonormirana baza*, ukazujući time da su u pitanju bazisni vektori sa normama (u našem slučaju, intenzitetima) jednakim jedinici.

Ako formiramo skalarne proizvode vektora

$$\vec{a}=a_1\vec{\imath}+a_2\vec{\jmath}+a_3\vec{k},$$

redom, sa bazisnim vektorima $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$, dobijamo

$$\vec{a}\vec{\imath}=a_1, \quad \vec{a}\vec{\jmath}=a_2, \quad \vec{a}\vec{k}=a_3.$$

S druge strane, na osnovu (II.3.3.4), imamo

$$\vec{a}\vec{\imath}=a\cos\alpha, \quad \vec{a}\vec{\jmath}=a\cos\beta, \quad \vec{a}\vec{k}=a\cos\gamma,$$

gde su α, β, γ uglovi koje vektor $\vec{a}$ zaklapa redom sa vektorima $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Dakle, vektor $\vec{a}$ se može predstaviti u obliku

$$\vec{a} = a(\cos\alpha\vec{\imath} + \cos\beta\vec{\jmath} + \cos\gamma\vec{k}). \tag{II.3.3.5}$$

Kako je $|\vec{a}| = a$, zaključujemo da je

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Kosinusi uglova α, β, γ mogu se odrediti pomoću

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{a}.$$

U opštem slučaju, korišćenjem skalarnog proizvoda dva vektora moguće je odrediti ugao φ koji oni zaklapaju. Tako imamo

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}},$$

što dodatno opravdava ranije datu formulu (II.3.2.3) i njen geometrijski smisao u opštem unitarno–euklidskom prostoru.

Specijalno, neka su u prostoru $V_O(E)$ dati vektori $\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$. Kako je njihov skalarni proizvod

$$\vec{a}\vec{b} = (2\vec{\imath} + \vec{k})(4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}) = 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 5,$$

a intenziteti

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \text{i} \quad b = |\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{26},$$

zaključujemo da je $\varphi = \arccos(\sqrt{5/26})$. $\triangle$

Primer 2. Lako je proveriti da vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ postaje euklidski ako se skalarni proizvod uvede pomoću

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \tag{II.3.3.6}$$

gde su $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Za vektore baze $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, date u primeru 4 na strani 66, možemo reći da su među sobom ortogonalni s obzirom da je $(e_i, e_k) = 0$ $(i \neq k)$, pa na osnovu (II.3.2.3) zaključujemo da je „ugao“ između vektora e_i i e_k $(i \neq k)$ jednak $\pi/2$.

Norma koja izvire iz skalarnog proizvoda, u ovom slučaju

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

je, u stvari, euklidska norma $\|x\|_E$ (videti primer 4 na strani 80).

Lako je videti da za vektore ortogonalne baze $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ važi, $\|e_i\| = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, pa je dakle $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, u stvari, ortonormirana baza u $\mathbb{R}^n$.

Na osnovu (II.3.2.3), ugao između vektora x i y određen je sa

$$\cos\varphi = \frac{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}}.$$

Slično, ako razmatramo kompleksan vektorski prostor $\mathbb{C}^n$, skalarni proizvod je moguće uvesti pomoću

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k.$$

Primetimo da se koordinate vektora y pojavljuju kao konjugovane vrednosti.

Bunjakowsky–Cauchy–Schwarzova nejednakost u $\mathbb{C}^n$ ima oblik

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{1/2}. \qquad \triangle$$

Primer 3. Neka je $C[a,b]$ linearni prostor realnih neprekidnih funkcija na segmentu $[a,b]$ iz primera 3 na strani 61. Za dve funkcije $u, v \in C[a,b]$ generalizacija formule (II.3.3.6) daje

$$(u,v) = \int_a^b u(t)v(t)\,dt$$

Iz osobina integrala sledi da su zadovoljeni zahtevi (1), (3), (4), (5'), a uslov (2) iz definicije II.3.2.1 proizilazi iz činjenice da

$$(u,u) = \int_a^b |u(t)|^2\,dt = 0$$

i neprekidnost funkcije $u(t)$, povlače $u(t) = 0$ za svako $t \in [a,b]$, tj. $u = 0$.
$\triangle$

II.3.4 Konstrukcija ortogonalne baze

U prethodnom odeljku pominjali smo ortogonalnu i ortonormiranu bazu u euklidskim prostorima $V_O(E)$ i $\mathbb{R}^n$ i pojam ortogonalnosti je proizilazio iz formule (II.3.2.3) za euklidske prostore.

Međutim, može se definisati i ortogonalnost dva vektora u bilo kakvom unitarnom prostoru X (ne samo euklidskom) sa skalarnim proizvodom $(\cdot, \cdot)$.

Definicija II.3.4.1 Vektori u i v iz X su *ortogonalni* ako je $(u, v) = 0$.

Ortogonalnost vektora u i v označavamo sa $u \perp v$. Vodeći računa o definiciji norme, lako je pokazati da iz $u \perp v$ sleduje

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

(uopšteno Pitagorino pravilo).

Definicija II.3.4.2 Skup vektora $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ u unitarnom prostoru X je ortogonalan ako je $(u_i, u_k) = 0$, za svako $i \neq k$. Ukoliko je i $\|u_k\| = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, kažemo da je skup U *ortonormiran.*

Neka je $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ proizvoljan skup ortogonalnih nenula vektora. Pokažimo, najpre, da je ovaj skup linearno nezavisan.

Ako pođemo od jednakosti

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \theta$$

i obrazujemo skalarni proizvod sa proizvoljnim vektorom u_k $(1 \leq k \leq n)$, dobijamo

$$\lambda_1 (u_1, u_k) + \lambda_2 (u_2, u_k) + \cdots + \lambda_n (u_n, u_k) = (\theta, u_k) = 0,$$

što se, zbog ortogonalnosti, svodi na $\lambda_k (u_k, u_k) = 0$. Kako je $(u_k, u_k) = \|u_k\|^2 \neq 0$ i k proizvoljno, sleduje $\lambda_k = 0$, što znači da je posmatrani skup vektora linearno nezavisan.

Jedan ortonormiran skup $B^* = \{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$ predstavlja bazu u X ako se svaki vektor $u \in X$, na jedinstven način, može da predstavi linearnom kombinacijom

$$u = x_1 u_1^* + x_2 u_2^* + \cdots + x_n u_n^* . \tag{II.3.4.1}$$

Očigledno, ovo je moguće ako je $\dim X = n$. Za takvu bazu kažemo da je *ortonormirana*. Ukoliko imamo ortogonalnu bazu $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, tada se vektori ortonormirane baze $B^* = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*\}$ jednostavno dobijaju pomoću

$$u_k^* = \frac{u_k}{\|u_k\|} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Skalare $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj. koordinate vektora u u ortonormiranoj bazi B^*, možemo dobiti formiranjem skalarnog proizvoda (u, u_k^*). Tada iz (II.3.4.1) sleduje

$$x_k = (u, u_k^*) \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Napomenimo, takođe, da se skalarni proizvod dva vektora u i v predstavljenih u obliku (II.3.4.1)

$$u = x_1 u_1^* + x_2 u_2^* + \cdots + x_n u_n^*, \qquad v = y_1 u_1^* + y_2 u_2^* + \cdots + y_n u_n^*,$$

svodi na

$$(u, v) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \cdots + x_n \bar{y}_n \, .$$

Naravno,

$$(u, u) = \|u\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

Zbog jednostavnosti u primenama, ortogonalna baza ima prednosti nad algebarskom bazom u unitarnom prostoru. Zato je od interesa proučiti postupak za konstrukciju ortogonalne baze.

Neka je dat skup linearno nezavisnih vektora $\{v_1, v_2, \dots\}$ u unitarnom prostoru X. Postupak kojim se ovom skupu vektora može pridružiti ortogonalni sistem vektora $\{u_1, u_2, \dots\}$, tako da se lineali nad ovim skupovima poklapaju, poznat je kao *Gram* [9]*–Schmidtov* [10] *postupak ortogonalizacije* i on se može iskazati na sledeći način:

Uzmimo najpre $u_1 = v_1$, a zatim u_2 predstavimo u obliku

$$u_2 = v_2 + \lambda_{21} u_1 \, ,$$

gde je λ_{21} nepoznati parametar koji određujemo iz uslova da je vektor u_2 ortogonalan sa u_1. Tada je

$$(u_2, u_1) = (v_2, u_1) + \lambda_{21}(u_1, u_1) = 0,$$

[9] Jorgen Pedersen Gram (1850–1916), danski matematičar.
[10] Erhard Schmidt (1876–1959), nemački matematičar.

odakle sleduje

$$\lambda_{21} = -\frac{(v_2, u_1)}{(u_1, u_1)}$$

i

$$u_2 = v_2 - \frac{(v_2, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 .$$

Pretpostavimo sada da smo konstruisali skup vektora $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$. Vektor u_k predstavimo u obliku

$$u_k = v_k + \lambda_{k1} u_1 + \lambda_{k2} u_2 + \cdots + \lambda_{k,k-1} u_{k-1} .$$

Tada nepoznate parametre λ_{ki} $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ određujemo iz uslova ortogonalnosti vektora u_k sa svim prethodno konstruisanim vektorima u_1, u_2, ..., u_{k-1}. Dakle,

$$(u_k, u_i) = (v_k, u_i) + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{kj} (u_j, u_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1) .$$

Kako iz ovih jednakosti sleduje

$$\lambda_{ki} = -\frac{(v_k, u_i)}{(u_i, u_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1) ,$$

imamo

$$\text{(II.3.4.2)} \qquad u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(v_k, u_i)}{(u_i, u_i)} u_i \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Dakle, u opštem slučaju, vektori ortogonalnog sistema $\{u_1, u_2, \ldots\}$ mogu se konstruisati uzimanjem $u_1 = v_1$ i dalje pomoću formule (II.3.4.2). Odgovarajući ortonomirani sistem vektora je $\{u_1^*, u_2^*, \ldots\}$, gde su

$$u_k^* = \frac{u_k}{\|u_k\|} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije transformiše skup linearno nezavisnih vektora $\{v_1, v_2, \ldots\}$ u ortogonalan, a samim tim i linearno nezavisan skup vektora $\{u_1, u_2, \ldots\}$, tako da se lineali nad ovim skupovima poklapaju.

Primer 1. Neka su u prostoru $V_O(E)$ dati vektori

$$\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{k}, \quad \vec{b} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}, \quad \vec{c} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}.$$

Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije odredićemo ortogonalnu bazu $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Stavimo, najpre, $\vec{u} = \vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{k}$.

Kako je $\vec{u}\vec{u} = 4+0+1 = 5$ i $\vec{b}\vec{u} = 8+0-3 = 5$, imamo $\lambda_{21} = -5/5 = -1$, pa je

$$\vec{v} = \vec{b} + \lambda_{21}\vec{u} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k} - (2\vec{\imath} + \vec{k}) = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}.$$

Kako je, dalje, $\vec{u}\vec{v} = 4 + 1 + 16 = 21$, $\vec{c}\vec{u} = -2 + 0 + 2 = 0$ i $\vec{c}\vec{v} = -2 + 2 - 8 = -8$, dobijamo $\lambda_{31} = -0/5 = 0$ i $\lambda_{32} = -(-8)/21 = 8/21$. Tada je

$$\vec{w} = \vec{c} + \lambda_{31}\vec{u} + \lambda_{32}\vec{v} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} + \frac{8}{21}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}),$$

tj.

$$\vec{w} = \frac{5}{21}(-\vec{\imath} + 10\vec{\jmath} + 2\vec{k}).$$

Odgovarajuća ortonormirana baza je

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{\imath} + \vec{k}), \frac{1}{\sqrt{21}}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}), \frac{1}{\sqrt{105}}(-\vec{\imath} + 10\vec{\jmath} + 2\vec{k})\right\}. \qquad \triangle$$

II.3.5 Ortogonalni potprostori

Sem ortogonalnih vektora u prostoru X, moguće je razmatrati i tzv. *ortogonalne skupove vektora*. Za dva skupa vektora Y_1 i Y_2 ($Y_1, Y_2 \subset X$) kažemo da su ortogonalna ako je svaki vektor $u \in Y_1$ ortogonalan sa svakim vektorom $v \in Y_2$. Ovu činjenicu označavamo sa $Y_1 \perp Y_2$. Ako skup Y_1 sadrži samo jedan vektor, na primer $Y_1 = \{u\}$, tada se može govoriti o ortogonalnosti vektora u na skup Y_2. Dakle, $u \perp Y_2$ ako je vektor u ortogonalan sa svakim vektorom skupa Y_2. Nije teško dokazati sledeći rezultat:

Teorema II.3.5.1 *Da bi vektor $u \in X$ bio ortogonalan na potprostor Y ($Y \subset X$) potrebno je i dovoljno da je on ortogonalan sa svim vektorima proizvoljne baze potprostora Y.*

Dokaz. Neka je $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ proizvoljna baza potprostora Y. Ako je $u \perp Y$, tada je u ortogonalan sa svim vektorima iz Y, pa i sa vektorima baze.

Obrnuto, pretpostavimo da je $(u, v_k) = 0$ za $k = 1, 2, \ldots, m$ i neka je v proizvoljan vektor iz Y. Tada se v može, na jedinstven način, predstaviti pomoću linearne kombinacije bazisnih vektora

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m,$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned}(u,v) &= (u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m) \\ &= \bar{\lambda}_1 (u, v_1) + \bar{\lambda}_2 (u, v_2) + \cdots + \bar{\lambda}_m (u, v_m) = 0.\end{aligned}$$

Dakle, $u \perp Y$. □

Na osnovu prethodnog, zaključujemo da su dva potprostora Y_1 i Y_2 ortogonalna ako i samo ako su im proizvoljne baze ortogonalne.

Definicija II.3.5.1 Za sumu različitih potprostora Y_1, Y_2, ..., Y_m kažemo da je *ortogonalna* ako su svaka dva potprostora među sobom ortogonalna. Takvu sumu označavamo sa

$$Y = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_m \,. \tag{II.3.5.1}$$

Teorema II.3.5.2 *Ortogonalna suma Y nenula potprostora Y_1, Y_2, ..., Y_m je uvek direktna suma.*

Dokaz. Ako u svakom od potprostora Y_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ izaberemo ortonormiranu bazu B_k, onda se svaki vektor iz ortogonalne sume (II.3.5.1) može na jedinstveni način izraziti kao linearna kombinacija vektora iz unije bazisa, tj. iz skupa $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$. Skup vektora B je baza u Y jer su, zbog ortogonalnosti, svi vektori iz B linearno nezavisni. □

Pretpostavimo da je prostor X ortogonalna suma svojih potprostora Y_1, Y_2, ..., Y_m, tj. da je

$$X = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_m \,.$$

Kako se vektori $u, v \in X$, na jedinstven način, mogu predstaviti u obliku

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_m, \qquad v = v_1 + v_2 + \cdots + v_m \,,$$

gde je $u_k, v_k \in Y_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, skalarni proizvod (u, v) može se izraziti jednostavno kao

$$(u,v) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2) + \cdots + (u_m, v_m) \,.$$

Na kraju ovog odeljka razmotrićemo slučaj dva potprostora koji su komplementarni (videti definiciju II.1.6.3 na strani 71).

Definicija II.3.5.2 Neka je Y ($\neq \{\theta\}$) potprostor unitarnog prostora X. Za skup svih vektora $u \in X$ koji su ortogonalni na Y, tj.

$$Y^{\perp} = \{u \in X \mid u \perp Y\},$$

kažemo da je *ortogonalni komplement potprostora* Y.

Teorema II.3.5.3 *Ortogonalni komplement $Y^{\perp}$ potprostora Y je, takođe, potprostor.*

Dokaz. Ako $u, v \in Y^{\perp}$, tada je $u \perp Y$ i $v \perp Y$. Takođe, $\alpha u + \beta v \perp Y$ za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, što znači $\alpha u + \beta v \in Y^{\perp}$. $\square$

Teorema II.3.5.4 *Neka je Y potprostor unitarnog prostora X. Tada važi jednakost*

$$X = Y \oplus Y^{\perp}.$$

Dokaz. U potprostorima Y i $Y^{\perp}$ izaberimo ortogonalne baze B_1 i B_2, respektivno. Tada je skup vektora $B = B_1 \cup B_2$, zbog ortogonalnosti, linearno nezavisan. Potrebno je dokazati da je skup vektora B baza prostora X.

Pretpostavimo suprotno, tj. da B nije baza, a zatim dopunimo ovaj skup ortogonalnim vektorima do baze. Označimo sa e ($\in X$) jedan od tih dopunskih vektora. Tada iz činjenice da je $e \perp B_1$ sleduje $e \perp Y$, tj. $e \in Y^{\perp}$. Isto tako, iz $e \perp B_2$ sleduje $e \perp Y^{\perp}$. Dakle, vektor e istovremeno pripada $Y^{\perp}$ i ortogonalan je na $Y^{\perp}$, što je moguće jedino ako je $e = \theta$. Kako nula-vektor ne može biti bazisni vektor, zaključujemo da je skup B baza. $\square$

II.4 ZADACI ZA VEŽBU

1. Koji od sledećih skupova vektora čine bazu u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$?

a) $(1,0,2), \quad (0,1,0), \quad (4,8,-3)$;

b) $(3,3,0), \quad (0,3,0), \quad (3,0,3)$;

c) $(7,2,2), \quad (-3,2,5), \quad (1,2,4)$;

d) $(2,0,3), \quad (-1,2,-1), \quad (1,6,3)$.

2. Date skupove vektora dopuniti do baze u vektorskom prostoru polinoma stepena ≤ 3.

a) $P_1(t) = 3 + 2t + 3t^2 - 2t^3, \quad P_2(t) = t - t^3$;

b) $P_1(t) = 1, \quad P_2(t) = 3t^2, \quad P_3(t) = t + t^2 - t^3$.

3. Vektori vektorskog prostora X dati su svojim koordinatnim reprezentacijama u nekoj bazi sa

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Dokazati da vektori dati koordinatnim reprezentacijama x_1, x_2, x_3 i sami formiraju bazu, a zatim nać i koordinate vektora datog sa x u toj novoj bazi.

4. Da li sledeći skup vektora P predstavlja linearan potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$; ako jeste, odrediti mu jednu bazu i dimenziju.

a) $P = \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1, x_3 \in R\}$,

b) $P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ \land \ x_1, x_2, x_3 \in R\}$,

c) $P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1 \ \land \ x_1, x_2, x_3 \in R\}$,

d) $P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_3 \ \land \ x_1, x_2, x_3 \in R\}$.

5. Neka su $u, v, w \in X$, gde je X unitarni prostor (prostor sa skalarnim proizvodom). Ako je

$$(u, v) = 1 + i, \quad (u, w) = i,$$

odrediti

$$(v, u), \quad (u, v + 2w), \quad (u, iw).$$

6. Odrediti dimenziju i jednu bazu potprostora X unitarnog prostora R^3, gde je

$$X = \{(m, 0, m) \mid m \in R\}.$$

U skupu X naći sve jedinične vektore (vektore čija je norma koja izvire iz skalarnog proizvoda jednaka jedinici) i odrediti ugao između njih.

7. Dokazati da su vektori

$$u_1 = (1,1,0,0), \ u_2 = (0,0,1,1), \ u_3 = (2,1,0,0), \ u_4 = (0,0,0,3),$$

unitarnog prostora $\mathbb{R}^4$, linearno nezavisni. Polazeći od ovog skupa vektora $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, primenom Gramm-Schmidtovog postupka ortogonalizacije, odrediti skup ortogonalnih vektora $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

GLAVA III

LINEARNI OPERATORI, MATRICE I DETERMINANTE

III.1 LINEARNI OPERATORI

III.1.1 Pojam linearnog operatora

Neka su X i Y linearni prostori nad istim poljem skalara $\mathbb{K}$. Radi jednostavnijeg pisanja, označavaćemo nula-vektor i unutrašnju i spoljašnju kompoziciju na isti način (θ, $+$) u oba prostora.

Preslikavanje $\mathcal{A}$ prostora X u prostor Y označavamo sa $u \mapsto g = \mathcal{A}(u)$ ili jednostavno sa

$$u \mapsto g = \mathcal{A}u \tag{III.1.1.1}$$

kad god je to moguće. Umesto termina preslikavanje ili funkcija, odsad ćemo koristiti naziv *operator*.

Prostor X se naziva *oblast definisanosti operatora* $\mathcal{A}$. Element g iz (III.1.1.1) naziva se slika elementa u, a sam element u original. Skup svih slika, tj. $\{\mathcal{A}u \mid u \in X\}$, naziva se oblast vrednosti operatora $\mathcal{A}$ i označava se sa $\mathcal{A}(X)$. U slučaju, kada svakom elementu $g \in \mathcal{A}(X)$ odgovara samo jedan original, za operator se kaže da je *obostrano jednoznačan*, tj. da je preslikavanje $\mathcal{A}$ bijekcija prostora X na $\mathcal{A}(X)$.

U daljem razmatranju interesuju nas samo tzv. *linearni operatori*, koji imaju značajnu ulogu u opštoj teoriji operatora. Posebno su interesantni linearni operatori na konačno-dimenzionalnim prostorima jer su oni u uskoj vezi sa nekakvim posebnim šemama brojeva koje zovemo matricama kao i sa teorijom koja je iz toga nastala.

Pre nego što definišemo linearni operator, definisaćemo aditivni operator i homogeni operator.

Definicija III.1.1.1 Operator $\mathcal{A}\colon X \to Y$ je *aditivan* ako je

$$\mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v$$

za svako $u, v \in X$.

Teorema III.1.1.1 *Ako je $\mathcal{A}\colon X \to Y$ aditivni operator, tada je $\mathcal{A}\theta = \theta$ i $\mathcal{A}(-u) = -\mathcal{A}(u) \quad (u \in X)$.*

Dokaz. Iz

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}(u+\theta) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}\theta$$

sleduje da je $\mathcal{A}\theta$ nula-vektor u Y, koji ćemo, shodno gore uvedenoj konvenciji, opet označiti sa θ, tj. $\mathcal{A}\theta = \theta$.

Isto tako, iz

$$\theta = \mathcal{A}\theta = \mathcal{A}(u + (-u)) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}(-u)$$

sleduje

$$\mathcal{A}(-u) = -\mathcal{A}u,$$

tj. slika simetričnog elementa od u poklapa se sa simetričnim elementom slike od u. $\square$

Definicija III.1.1.2 Operator $\mathcal{A}\colon X \to Y$ je *homogen* ako je

$$\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda \mathcal{A}u$$

za svako $u \in X$ i svako $\lambda \in \mathbb{K}$.

Primetimo da na osnovu homogenosti operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ i rezultata teoreme II.1.2.1 na strani 59, takođe imamo

$$\mathcal{A}\theta = \mathcal{A}(0u) = 0\mathcal{A}u = \theta$$

i

$$\mathcal{A}(-u) = \mathcal{A}((-1)u) = (-1)\mathcal{A}u = -\mathcal{A}u,$$

što su i rezultati teoreme III.1.1.1 za aditivni operator $\mathcal{A}$.

Definicija III.1.1.3 Operator $\mathcal{A}\colon X \to Y$ je *linearan* ako je istovremeno aditivan i homogen, tj. ako za svako $u, v \in X$ i svako $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ imamo da je

$$\mathcal{A}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathcal{A}u + \mu \mathcal{A}v.$$

Definišimo dva specijalna linearna operatora: *nula operator* i *identički operator*.

Definicija III.1.1.4 *Za operator $\mathcal{O}\colon X \to Y$, za koji je $\mathcal{O}u = \theta$ za svako $u \in X$, kažemo da je nula-operator.*

Definicija III.1.1.5 *Za operator $\mathcal{I}\colon X \to X$, za koji je $\mathcal{I}u = u$ za svako $u \in X$, kažemo da je identički operator.*

Primer 1. Neka je α fiksirani skalar iz polja $\mathbb{K}$ i neka je operator $\mathcal{A}\colon X \to X$ definisan pomoću $\mathcal{A}u = \alpha u$ za svako $u \in X$. Operator $\mathcal{A}$ je linearan jer je

$$\mathcal{A}(\lambda u + \mu v) = \alpha(\lambda u + \mu v) = (\alpha\lambda)u + (\alpha\mu)v = (\lambda\alpha)u + (\mu\alpha)v,$$

tj.

$$\mathcal{A}(\lambda u + \mu v) = \lambda(\alpha u) + \mu(\alpha v) = \lambda \mathcal{A}u + \mu \mathcal{A}v.$$

Ovako definisan operator $\mathcal{A}$ naziva se *skalarni operator.* U specijalnom slučaju, kada je $\alpha = 0$, operator $\mathcal{A}$ se svodi na tzv. *nula-operator* $\mathcal{O}$, dok se za $\alpha = 1$ operator $\mathcal{A}$ svodi na identički (jedinični) operator $\mathcal{I}$.

Primetimo da ovaj nula-operator $\mathcal{O}$ preslikava svako $u \in X$ na neutralni element $\theta \in X$. $\triangle$

III.1.2 Rang linearnog operatora

Neka su, nadalje, X i Y konačno dimenzionalni linearni prostori nad istim poljem skalara $\mathbb{K}$.

Za linearni operator $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ skup $\mathcal{A}(X)$ zove se *oblast vrednosti* tog operatoar i označava se sa $R_{\mathcal{A}}$, tj. $R_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(X)$. Nije teško utvrditi da je $R_{\mathcal{A}}$ potprostor prostora Y.

Zaista, za vektore g i h iz $R_{\mathcal{A}}$ postoje vektori u i v iz X sa svojstvom da je $g = \mathcal{A}u$ i $h = \mathcal{A}v$. No tada za svako $\alpha, \beta \in K$ imamo

$$\alpha g + \beta h = \alpha \mathcal{A}u + \beta \mathcal{A}v = \mathcal{A}(\alpha u + \beta v),$$

što pokazuje da linearna kombinacija vektora iz $R_{\mathcal{A}}$ ponovo leži u $R_{\mathcal{A}}$, tj. $R_{\mathcal{A}}$ jeste potprostor u Y.

Slično, skup svih $u \in X$ za koje je $\mathcal{A}u = \theta$ obrazuje potprostor u X. Taj potprostor se zove *nula-potprostor* ili *jezgro* operatora $\mathcal{A}$ i označava se sa $N_{\mathcal{A}}$ ili $\ker \mathcal{A}$, tj

$$N_{\mathcal{A}} = \ker \mathcal{A} = \{u \in X \mid \mathcal{A}u = \theta\}.$$

Potprostori $R_{\mathcal{A}}$ i $N_{\mathcal{A}}$ prvi su potpuno određeni i važni pratioci svakog linearnog operatora. Zbog toga mnoga pitanja u vezi operatora $\mathcal{A}$ zavise u prvom redu od tih dvaju potprostora.

Definicija III.1.2.1 Dimenzija potprostora $R_{\mathcal{A}}$ zove se *rang* operatora $\mathcal{A}$, u oznaci $r_{\mathcal{A}}$ ili $\operatorname{rang} \mathcal{A}$, a dimenzija potprostora $N_{\mathcal{A}}$ *defekt* operatora $\mathcal{A}$ i označava se sa $n_{\mathcal{A}}$ ili $\operatorname{def} \mathcal{A}$.

Veza između ranga i defekta data je sledećom teoremom:

Teorema III.1.2.1 *Neka je* $\dim X = n$ *i* $\mathcal{A}\colon X \to Y$ *linerani operator. Tada je*

$$\operatorname{rang} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = n. \tag{III.1.2.1}$$

Dokaz. Da bismo teoremu dokazali uzmimo bazu $e_1, e_2, \ldots, e_k$ u $N_{\mathcal{A}}$ i dopunimo je s vektorima $e_{k+1}, \ldots, e_n$ do baze u X. Svaki vektor $u \in X$ može se predstaviti u obliku $u = u_0 + u_M$, gde je $u_0 \in N_{\mathcal{A}}$, a u_M je linearna kombinacija vektora $e_{k+1}, \ldots, e_n$. No tada je $\mathcal{A}u = \mathcal{A}(u_0 + u_M) = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_M = \mathcal{A}u_M$. Odavde se vidi da operator $\mathcal{A}$ preslikava potprostor $M_{\mathcal{A}} = L\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ na $R_{\mathcal{A}}$. Pri tome su vektori $\mathcal{A}e_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n$ linearno nezavisni. Zaista,

$$\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \mathcal{A} e_j = \theta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j = \theta,$$

što po definiciji potprostora $N_{\mathcal{A}}$ znači da je $\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j \in N_{\mathcal{A}}$. No ovo je moguće samo ako je $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Prema tome, vektori

$$\mathcal{A}e_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n$$

su linearno nezavisni i čine jednu bazu potprostora $R_{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A}e_1 = \cdots = \mathcal{A}e_k = \theta$). Dakle, $\dim R_{\mathcal{A}} = n - k = n - \dim N_{\mathcal{A}}$, što smo i trebali dokazati. □

Iz dokaza prethodne teoreme se vidi da vektori $e_{k+1}, \ldots, e_n$ čine bazu potprostora $M_{\mathcal{A}}$ u X, koji je komplement potprostora $N_{\mathcal{A}}$. Jasno je da taj komplementaran potprostor nije jednoznačno određen potprostorom $N_{\mathcal{A}}$. No čim se uzme baza u $N_{\mathcal{A}}$ i ta baza dopuni do baze u X, dobija se mogućnost konstrukcije potpuno određenog komplementarnog potprostora, za koji smo pokazali da ga operator $\mathcal{A}$ preslikava na $R_{\mathcal{A}}$, tj. *operator $\mathcal{A}$ svaki komplement potprostora $N_{\mathcal{A}}$ preslikava na $R_{\mathcal{A}}$.*

Napomenimo još da je to preslikavanje $\mathcal{A} : M_{\mathcal{A}} \mapsto R_{\mathcal{A}}$ biunivoko. Drugim rečima, proizvoljan vektor $g \in R_{\mathcal{A}}$ je slika jednog i samo jednog vektora iz $M_{\mathcal{A}}$. Naime, ako pretpostavimo postojanje dva vektora $u_M \in M_{\mathcal{A}}$ i $u'_M \in M_{\mathcal{A}}$, za koje je

$$g = \mathcal{A}u_M = \mathcal{A}u'_M,$$

tada imamo

$$\mathcal{A}(u_M - u'_M) = \theta,$$

tj. $u_M - u'_M \in N_{\mathcal{A}}$.

S druge strane, $u_M - u'_M \in M_{\mathcal{A}}$ jer je $M_{\mathcal{A}}$ potprostor. Kako je, međutim, $N_{\mathcal{A}} \cap M_{\mathcal{A}} = \{\theta\}$, zaključujemo da mora biti $u_M = u'_M$.

Prema tome, linearni operator $\mathcal{A}$ predstavlja biunivoko preslikavanje vektora iz potprostora $M_{\mathcal{A}}$ na $R_{\mathcal{A}}$, tj. $\mathcal{A}$ je izomorfizam ovih potprostora pa i zbog toga važi da je $\dim M_{\mathcal{A}} = \dim R_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{A}}$ (videti teoremu II.2.1.3), tj. da je $\mathcal{A}e_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n$ jedna baza prostora $R_{\mathcal{A}}$ (videti teoremu II.2.1.2).

Na osnovu (III.1.2.1) imamo

$$\operatorname{rang} \mathcal{A} = \dim R_{\mathcal{A}} = \dim M_{\mathcal{A}} \leq \dim X = n,$$

što znači da dimenzija oblasti vrednosti operatora ne može biti veća od dimenzije oblasti definisanosti operatora.

III.1.3 Linearni prostor $L(X, Y)$

Skup svih linearnih operatora koji preslikavaju prostor X u prostor Y (nad istim poljem $\mathbb{K}$), označićemo sa $L(X, Y)$. Taj se skup na prirodan način može pretvoriti u linearni (vektorski) prostor. Time linearni operatori postaju jedinke, elementi, odnosno vektori izvesnih vektorskih prostora. Struktura u skupu $L(X, Y)$ određena je činjenicom da su elementi tog skupa operatori, tj. funkcije.

Tako, iz definicije operatora sleduje da su dva operatora $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(X, Y)$ jednaka ako i samo ako je $\mathcal{A}u = \mathcal{B}u$ za svako $u \in X$. U tom slučaju pišemo $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Definicija III.1.3.1 *Zbir operatora* $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, u oznaci $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, je operator $\mathcal{C}$ određen pomoću

$$\mathcal{C}u = (\mathcal{A}+\mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \qquad (\forall u \in X).$$

Lako je videti da je ovako definisan operator $\mathcal{C} = \mathcal{A}+\mathcal{B}$ element skupa $L(X,Y)$. Štaviše, važi sledeće tvrđenje (dajemo ga bez dokaza):

Teorema III.1.3.1 *Za svako* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \in L(X,Y)$ *imamo:*

(1) $\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = (\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}$,

(2) $\mathcal{A}+\mathcal{O} = \mathcal{O}+\mathcal{A} = \mathcal{A}$,

(3) *Za svaki operator* $\mathcal{A} \in L(X,Y)$ *postoji jedinstven njemu suprotan operator* $-\mathcal{A} \in L(X,Y)$ *takav da je*

$$\mathcal{A}+(-\mathcal{A}) = (-\mathcal{A})+\mathcal{A} = \mathcal{O},$$

(4) $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$.

Dakle, struktura $(L(X,Y),+)$ je Abelova grupa. Neutralni element je nula-operator $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}u = \theta \ \ (\forall u \in X)$).

Definicija III.1.3.2 *Proizvod operatora* $\mathcal{A}$ *i skalara* λ iz polja $\mathbb{K}$ je operator $\mathcal{C}$ određen pomoću

$$\mathcal{C}u = (\lambda\mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u) \qquad (\forall u \in X).$$

Jasno je da $\lambda\mathcal{A} \in L(X,Y)$. Takođe, bez dokaza navodimo i sledeće tvrđenje:

Teorema III.1.3.2 *Za svako* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in L(X,Y)$ *i svako* λ, $\mu \in \mathbb{K}$ *važi*

(1) $\lambda(\mu\mathcal{A}) = (\lambda\mu)\mathcal{A}$,

(2) $(\lambda+\mu)\mathcal{A} = \lambda\mathcal{A}+\mu\mathcal{A}$,

(3) $\lambda(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \lambda\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$,

(4) $1\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Na osnovu teorema III.1.3.1 i III.1.3.2 zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema III.1.3.3 *Skup $L(X, Y)$, snabdeven operacijom sabiranja kao unutrašnjom kompozicijom i množenjem operatora skalarom kao spoljašnjom kompozicijom, obrazuje linearni prostor nad poljem skalara $\mathbb{K}$.*

Dakle, polazeći od vektorskih prostora X i Y, dolazimo do novog vektorskog prostora $L(X, Y)$. Kasnije ćemo pokazati da je prostor $L(X, Y)$ konačno dimenzionalan, ako su X i Y konačno dimenzionalni, te da je $\dim L(X, Y) = \dim X \, \dim Y$!

III.1.4 Proizvod operatora, regularan i inverzni operator

Definicija III.1.4.1 *Proizvod operatora* $\mathcal{A}\colon Y \to Z$ i $\mathcal{B}\colon X \to Y$ je operator $\mathcal{C} = \mathcal{AB}\colon X \to Z$, definisan pomoću

$$\mathcal{C}u = (\mathcal{AB})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u) \qquad (\forall u \in X).$$

Lako je pokazati da je proizvod linearnih operatora (ako je definisan) ponovo linearan operator. Jasno je, takođe, da komutativnost u opštem slučaju ne važi (štaviše, ako postoji $\mathcal{AB}$ uopšte ne mora postojati $\mathcal{BA}$).

Osobine asocijativnosti proizvoda operatora i distributivnosti proizvoda prema zbiru operatora su sačuvane, kadgod imaju smisla navedeni proizvodi, o čemu svedoči sledeća teorema.

Teorema III.1.4.1 *Neka su X, Y, Z, W linearni prostori nad poljem $\mathbb{K}$. Tada važi:*

(1) $\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$ *za svako* $\mathcal{A} \in L(Z, W)$, $\mathcal{B} \in L(Y, Z)$, $\mathcal{C} \in L(X, Y)$,

(2) $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$ *za svako* $\mathcal{A} \in L(Y, Z)$, $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in L(X, Y)$,

(3) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$ *za svako* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(Y, Z)$, $\mathcal{C} \in L(X, Y)$.

Dokaz. Dokaz asocijativnosti množenja sleduje iz činjenice da za svako $u \in X$ imamo:

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{A}(\mathcal{BC})\big)u &= \mathcal{A}(\mathcal{BC}u) = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\mathcal{C}u)\big), \\ \big((\mathcal{AB})\mathcal{C}\big)u &= \mathcal{AB}(\mathcal{C}u) = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\mathcal{C}u)\big). \end{aligned}$$

Za dokaz distributivnosti množenja operatora prema sabiranju operatora pođimo, opet, od proizvoljnog vektora $u \in X$. Tada imamo redom

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C})\big)u &= \mathcal{A}\big((\mathcal{B} + \mathcal{C})u\big) = \mathcal{A}(\mathcal{B}u + \mathcal{C}u) = \mathcal{A}(\mathcal{B}u) + \mathcal{A}(\mathcal{C}u) \\ &= (\mathcal{AB})u + (\mathcal{AC})u = (\mathcal{AB} + \mathcal{AC})u, \end{aligned}$$

odakle sleduje jednakost (2).

Dokaz poslednje jednakosti izvodi se na sličan način. □

Ako za svako $u \in X \Rightarrow \mathcal{A}u \in X$, tada se može definisati iterirani operator $\mathcal{A}^n$ (n-ti stepen operatora $\mathcal{A}$) kao

$$\mathcal{A}^n = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

pri čemu je $\mathcal{A}^0 = \mathcal{I}$ identički operator.

Za operatore $\mathcal{A}^n$ i $\mathcal{A}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}_0$), s obzirom na asocijativnost proizvoda, važi jednakost

$$\mathcal{A}^n \mathcal{A}^m = \mathcal{A}^{n+m}.$$

Za skup linearnih operatora koji preslikavaju X u X, u oznaci $L(X, X)$, na osnovu prethodnog (videti teoreme III.1.3.1 i III.1.4.1) zaključujemo da važi sledeći rezultat:

Teorema III.1.4.2 *$(L(X,X), +, \cdot)$, gde je $+$ sabiranje operatora, a $\cdot$ množenje operatora, ima algebarsku strukturu prstena sa jedinicom.*

U skupu linearnih operatora koji preslikavaju X u X, za koje obično kažemo da deluju u X, moguće je odrediti neki podskup operatora koji ima strukturu grupe u odnosu na operaciju množenja operatora. Da bi se odredio takav podskup potrebno je uvesti pojam regularnog operatora.

Definicija III.1.4.2 Za linearni operator $\mathcal{A}\colon X \to X$ kažemo da je *regularan* ili da je *nesingularan* ako se njegovo jezgro sastoji samo od nula-vektora θ.

Za operator koji nije regularan kažemo da je *singularan* ili da je *neregularan* operator.

Primer 1. Skalarni operator $\mathcal{A}$, uveden u primeru 1 na strani 99 je regularan operator za svako $\alpha \neq 0$. Na primer, identički (jedinični) operator $\mathcal{I}$ je regularan ($\alpha = 1$), ali je nula-operator $\mathcal{O}$ singularan ($\alpha = 0$). △

Regularni operatori poseduju više interesantnih osobina:

1° Defekt regularnog operatora $\mathcal{A}\colon X \to X$ jednak je nuli, odakle je

$$\operatorname{rang} \mathcal{A} = \dim X\,;$$

2° $R_{\mathcal{A}} = X$;

3° Za svako $g \in X$ postoji jedinstveno $u \in X$ takvo da je $\mathcal{A}u = g$ (jedinstvenost originala);

4° Proizvod konačnog broja regularnih operatora je regularan operator.

Osobina 3° je izuzetno važna. Da bismo je dokazali pretpostavimo da za neko $g \in X$ postoje dva vektora u, $u' \in X$ takva da je

$$\mathcal{A}u = g \qquad \text{i} \qquad \mathcal{A}u' = g.$$

Tada je $\mathcal{A}(u - u') = \theta$. Kako se, s druge strane, jezgro regularnog operatora $\mathcal{A}$ sastoji samo od nula-vektora, zaključujemo da je $u - u' = \theta$, tj. $u = u'$. Napomenimo da se često za definiciju regularnog operatora uzima osobina 3°.

Osobine 2° i 3° kazuju da je regularan operator $\mathcal{A}$ bijekcija prostora X na X.

Ranije smo videli da za proizvod operatora generalno važi asocijativni zakon, što znači da i na podskupu regularnih operatora koji preslikavaju X na X ovaj zakon važi.

Vidimo, takođe, da važi

$$(\forall \mathcal{A}\colon X \to X) \qquad \mathcal{A}\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathcal{A} = \mathcal{A},$$

gde je $\mathcal{I}$ identički operator u X, za koji smo već videli da je regularan operator.

Da bi skup svih regularnih operatora koji deluju u X činio grupu u odnosu na množenje operatora, dovoljno je još pokazati da za svaki regularan operator $\mathcal{A}$ postoji regularan operator $\mathcal{A}^{-1}$, takav da je

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}.$$

Saglasno osobinama 2° i 3° da svakom vektoru $g \in X$ odgovara jedan i samo jedan vektor $u \in X$, a imajući u vidu da su operatori u suštini funkcije, može se za svaki regularan operator $\mathcal{A}$ definisati inverzan operator $\mathcal{A}^{-1}$.

Definicija III.1.4.3 Neka je $\mathcal{A}\colon X \to X$ regularan operator. Za preslikavanje $\mathcal{A}^{-1}$, za koje važi

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}u) = u \qquad (\forall u \in X),$$

kažemo da je *inverzan* operator od $\mathcal{A}$.

Teorema III.1.4.3 *Neka je $\mathcal{A}\colon X \to X$ regularan linearni operator. Tada je inverzan operator $\mathcal{A}^{-1}$, takođe, regularan linearni operator.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{A}u_1 = g_1$ i $\mathcal{A}u_2 = g_2$, tj. $\mathcal{A}^{-1}g_1 = u_1$ i $\mathcal{A}^{-1}g_2 = u_2$, i neka su c_1 i c_2 proizvoljni skalari iz polja $\mathbb{K}$. S obzirom da je $\mathcal{A}$ linearan operator, imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1}(c_1g_1 + c_2g_2) &= \mathcal{A}^{-1}(c_1\mathcal{A}u_1 + c_2\mathcal{A}u_2) \\ &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(c_1u_1 + c_2u_2) \\ &= c_1u_1 + c_2u_2 \\ &= c_1\mathcal{A}^{-1}g_1 + c_2\mathcal{A}^{-1}g_2. \end{aligned}$$

Dokažimo da je i $\mathcal{A}^{-1}$ regularan operator.
Za svako $g \in \ker \mathcal{A}^{-1}$ imamo

$$\mathcal{A}^{-1}g = \theta.$$

Primenom operatora $\mathcal{A}$ na levu i desnu stranu poslednje jednakosti dobijamo

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}g) = \mathcal{A}\theta,$$

tj. $g = \theta$, jer je $\mathcal{A}\theta = \theta$. Dakle, jezgro operatora $\mathcal{A}^{-1}$ sastoji se samo od nula-vektora, tj. operator $\mathcal{A}^{-1}$ je regularan operator. □

Dakle, skup svih regularnih operatora čini grupu u odnosu na množenje operatora. Ova grupa nije komutativna. Međutim, moguće je izabrati jedan podskup S_k regularnih operatora tako da $(S_k, \cdot)$ ima strukturu komutativne grupe.

III.2 MATRICE

III.2.1 Pojam matrice

U mnogim problemima nauke i tehnike veoma je čest slučaj da se pojavljuju izvesne „veličine" opisane konačnim ili beskonačnim nizom brojeva, na primer,

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \qquad \text{ili} \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

ili pak nekom pravougaonom šemom brojeva, na primer,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{matrix}$$

u kojoj se pojavljuje m vrsta i n kolona. Napomenimo da, ponekad, broj vrsta i kolona ne mora biti konačan. Jasno je da svaki niz može biti tretiran kao pravougaona šema sa jednom vrstom ($m = 1$). Obično, brojevi a_i, ili a_{ij}, pripadaju nekom brojnom polju $\mathbb{K}$. U našim razmatranjima uvek ćemo pretpostavljati da je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. U opštem slučaju, kao elementi pravougaone šeme mogu se pojavljivati i drugačije „veličine".

Definicija III.2.1.1 Za pravougaonu šemu brojeva $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$), predstavljenu u obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{III.2.1.1}$$

kažemo da je *matrica* tipa $m \times n$ nad poljem $\mathbb{K}$, a za brojeve a_{ij} kažemo da su elementi matrice A.

U zavisnosti od toga da li je polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, za matrice kažemo da su *realne* ili *kompleksne matrice*.

Umesto oznake (III.2.1.1) u upotrebi su i označavanja

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Elementi matrice A sa istim prvim indeksom čine jednu vrstu matrice. Na primer, elementi

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{in}$$

čine i-tu vrstu matrice A. Slično, elementi sa istim drugim indeksom čine jednu kolonu matrice. Prema tome, prvi indeks određuje pripadnost vrsti, a drugi indeks pripadnost koloni matrice. Element a_{ij} pripada i-toj vrsti i j-toj koloni matrice A, tj. on se nalazi u preseku i-te vrste i j-te kolone matrice, pa se za njega kaže da se nalazi na mestu (i, j) u matrici A. Kod označavanja elementa matrice a_{ij}, indekse i i j obično ne odvajamo zapetom, tj. ne pišemo $a_{i,j}$, sem u slučajevima kada je to neophodno radi identifikacije. Na primer, $a_{2i-1,j+1}$ je element koji se nalazi na mestu $(2i - 1, j + 1)$ u datoj matrici A.

Umesto oznake (III.2.1.1) često se koristi kraći zapis

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,,$$

pri čemu a_{ij} predstavlja opšti element matrice A, koja ima m vrsta i n kolona. Dakle, prvi indeks i uzima redom vrednosti iz skupa $\{1, 2, \dots, m\}$, a drugi indeks j iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$.

Ako su dve matrice istog tipa, za elemente na mestu (i, j) kažemo da su *odgovarajući elementi*. Na primer, za matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ elementi a_{ij} i b_{ij} su odgovarajući.

Definicija III.2.1.2 Za dve matrice A i B kažemo da su *jednake matrice* ako su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki.

To znači da su matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ jednake ako i samo ako je $m = p$, $n = q$ i $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$.

Napomenimo da je jednakost matrica, uvedena definicijom III.2.1.2, jedna relacija ekvivalencije u skupu matrica.

Definicija III.2.1.3 Matricu tipa $m \times n$ čiji su svi elementi jednaki nuli nazivamo *nula-matrica* i označavamo sa O_{mn}.

U slučajevima kada ne može doći do zabune, nula-matricu označavaćemo jednostavno sa O.

Matricu tipa $1 \times n$ nazivamo *matrica-vrsta* i tada pri pisanju elemenata izostavljamo prvi indeks. Na primer, matrica-vrsta je

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Slično, matricu tipa $n \times 1$ nazivamo *matrica-kolona*. U ovom slučaju, koristi se i termin *vektor-kolona*, ili prosto *vektor*, i pri tom se označava sa

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

U ovom slučaju za elemente $a_1, a_2, \dots, a_n$ kažemo da su *koordinate* ili *komponente vektora* $\boldsymbol{a}$. Često za i-tu koordinatu vektora $\boldsymbol{a}$ koristimo oznaku $a_i = \{\boldsymbol{a}\}_i$.

Ako su svi elementi vektora jednaki nuli, govorićemo da je to *nula-vektor* i označavaćemo ga sa $\boldsymbol{o}_n$, ili jednostavno sa $\boldsymbol{o}$, kada ne može doći do zabune.

Definicija III.2.1.4 Za matricu tipa

$$A = [a_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{III.2.1.2}$$

kažemo da je *kvadratna matrica* reda n nad poljem $\mathbb{K}$.

Umesto oznake $[a_{ij}]_{n\times n}$, korišćene u (III.2.1.2), za kvadratne matrice reda n često se koristi oznaka $[a_{ij}]_1^n$, koja ukazuje da oba indeksa (i i j) uzimaju redom vrednosti od 1 do n.

Svi elementi kvadratne matrice A, kod kojih su oba indeksa jednaka, tj. elementi a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}, obrazuju *glavnu dijagonalu matrice A*. Slično, elementi a_{1n}, $a_{2,n-1}$, ..., a_{n1} obrazuju *sporednu dijagonalu matrice A*.

Kvadratnu matricu D, formiranu samo od dijagonalnih elemenata matrice A, tj. od elemenata na glavnoj dijagonali, označavaćemo sa $\operatorname{diag} A$. Dakle,

$$D = \operatorname{diag} A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ili

$$D = \operatorname{diag} A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Svi elementi van glavne dijagonale matrice $D = \operatorname{diag} A$ su jednaki nuli. Dakle, u opštem slučaju, ako su elementi kvadratne matrice $D = [d_{ij}]_1^n$ takvi da je $d_{ij} = 0$ za svako $i \neq j$, a bar jedan element na glavnoj dijagonali različit od nule, za matricu D kažemo da je *dijagonalna*.

Definicija III.2.1.5 Dijagonalna matrica reda n čiji su svi elementi na dijagonali jednaki jedinici naziva se *jedinična matrica* i označava se sa I_n.

Prema tome važi jednakost $I_n = \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1)$.

U slučajevima kada je jasno koga je reda, jediničnu matricu I_n označavamo samo sa I.

Uvođenjem *Kroneckerove*[1] *delte*, pomoću

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

[1] Leopold Kronecker (1823–1891), nemački matematičar.

jedinična matrica I_n može se predstaviti kao

$$I_n = [\delta_{ij}]_1^n.$$

Na kraju, uvedimo i pojam tzv. trougaone matrice:

Definicija III.2.1.6 Ako za kvadratnu matricu $R = [r_{ij}]_1^n$ važi

$$i > j \quad \Rightarrow \quad r_{ij} = 0,$$

kažemo da je R *gornja trougaona matrica.*

Ako za kvadratnu matricu $L = [l_{ij}]_1^n$ važi

$$i < j \quad \Rightarrow \quad l_{ij} = 0,$$

kažemo da je L *donja trougaona matrica.*

Dakle, gornja i donja trougaona matrica reda n imaju sledeće oblike:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Primetimo da su svi elementi ispod glavne dijagonale u matrici R, kao i svi elementi iznad glavne dijagonale u matrici L, jednaki nuli.

Naravno, matrice ne bi imale takav značaj kakav imaju u nizu problema savremene nauke i tehnike, naročito pri konstrukciji odgovarajućih linearnih matematičkih modela koji imaju izvesna algebarska svojstva, da se nad matricama ne mogu sprovoditi različite operacije, gotovo kao nad brojevima. Možemo reći da one, u izvesnom smislu, uopštavaju brojeve. Štaviše, razvijena je čitava teorija matrica i ona predstavlja jednu važnu oblast savremene matematike, i teorijske i primenjene. Popularnosti matrica i odgovarajućeg „matričnog računa" doprinela je ne samo potreba za takvim sistemima kojima se veoma koncizno opisuju relativno obimni fizički sistemi, nego i činjenica da se na računskim mašinama (računarima) mogu izvoditi računske operacije koje su definisane među matricama i koje se izvode u deliću sekunde, a za koje bi nam inače trebale godine (nije preterivanje) za njihovo izvođenje bez računara.

Linearni operatori i algebra nad njima su u uskoj vezi sa matricama i operacijama koje se uvode nad njima, iako se teorija matrica može tretirati i potpuno nezavisno od vektorskih prostora i operatora.

Mi ćemo, ovde, taj „matrični račun" uvesti uz pomoć operacija sa linearnim operatorima i korišćenjem veza koje postoje između operatora i matrica.

III.2.2 Matrica linearnog operatora na konačno-dimenzionalnim prostorima

Neka su X i Y konačno-dimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, i neka je u prostoru X zadata baza $B_e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Neka je, dalje, $\mathcal{A}\colon X \to Y$ linearan operator.

U prostoru X uočimo proizvoljan vektor u. Tada se on može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora baze B_e, tj.

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n. \tag{III.2.2.1}$$

Primenom operatora $\mathcal{A}$ na (III.2.2.1) dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= \mathcal{A}(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) \\ &= \mathcal{A}(x_1 e_1) + \mathcal{A}(x_2 e_2) + \cdots + \mathcal{A}(x_n e_n) \\ &= x_1 \mathcal{A}e_1 + x_2 \mathcal{A}e_2 + \cdots + x_n \mathcal{A}e_n. \end{aligned}$$

Lako je uočiti da je linearan operator $\mathcal{A}$ potpuno određen ako su poznate slike bazisnih vektora $v_j = \mathcal{A}e_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. Tada je, naime,

$$\mathcal{A}u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n.$$

U prostoru Y uočimo bazu

$$B_f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$$

i razložimo vektore $\mathcal{A}e_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ po vektorima baze B_f. Tada imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_1 &= a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \cdots + a_{m1} f_m, \\ \mathcal{A}e_2 &= a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \cdots + a_{m2} f_m, \\ &\;\vdots \\ \mathcal{A}e_n &= a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \cdots + a_{mn} f_m. \end{aligned} \tag{III.2.2.2}$$

Na osnovu (III.2.2.2) formirajmo matricu

$$A = A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definicija III.2.2.1 Za A_{fe} kažemo da je *matrica operatora* $\mathcal{A}\colon X \to Y$ u odnosu na baze B_e i B_f, tim redom.

Napomenimo da broj vrsta u matrici operatora odgovara dimenziji prostora Y, a broj kolona dimenziji prostora X. Kolone matrice A su, u stvari, koordinate vektora $\mathcal{A}e_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ u odnosu na izabranu bazu B_f. Dakle, da bismo odredili element a_{ij} potrebno je primeniti operator $\mathcal{A}$ na vektor e_j, i u slici $\mathcal{A}e_j$ uzeti i-tu koordinatu [2], što ćemo označiti sa

$$a_{ij} = \{\mathcal{A}e_j\}_i. \tag{III.2.2.3}$$

Posmatrajmo sada vektore $u \in X$ i $v \in Y$, čije su koordinatne reprezentacije, u bazama B_e i B_f, date redom sa

$$\begin{aligned} u &= x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n, \\ v &= y_1f_1 + y_2f_2 + \cdots + y_mf_m. \end{aligned}$$

Neka je

$$v = \mathcal{A}u, \tag{III.2.2.4}$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{m} y_if_i = \mathcal{A}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_je_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{A}e_j.$$

Korišćenjem (III.2.2.2) imamo

$$\sum_{i=1}^{m} y_if_i = \sum_{j=1}^{n} x_j\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}f_i\Big),$$

odakle, promenom redosleda sumiranja na desnoj strani, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{m} y_if_i = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big)f_i.$$

Kako je sistem vektora B_f linearno nezavisan, dobijamo vezu između koordinata vektora u i v

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

tj.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{aligned} \tag{III.2.2.5}$$

[2] Matrica operatora je nad istim poljem skalara $\mathbb{K}$ kao i prostori X i Y.

Dakle, kod preslikavanja vektora u u vektor v pomoću linearnog operatora $\mathcal{A}$, pri fiksiranim bazama u prostorima X i Y, veze između koordinata ovih vektora date su sistemom jednačina (III.2.2.5). Koeficijenti ovog sistema jednačina su očigledno elementi matrice operatora. Prema tome, pri fiksiranim bazama u X i Y, postoji uzajamno jednoznačna korespondencija između operatorske jednačine (III.2.2.4) i sistema jednačina (III.2.2.5). Drugim rečima, operatorski pristup i matrični pristup[3] su potpuno ravnopravni i dovoljno je tretirati samo jedan od njih. Naime, uvek se iz (III.2.2.4) može preći na (III.2.2.5) i, obrnuto, iz sistema jednačina (III.2.2.5) na oblik (III.2.2.4). Po pravilu, matrični pristup je jednostavniji za rad.

Promenom bazisa u prostorima X i Y doći će do promene matrice operatora. Ovaj problem biće tretiran kasnije.

Razmotićemo sada nekoliko primera u kojima dajemo konstrukciju matrica nekih operatora.

Primer 1. Kod nula-operatora $\mathcal{O}\colon X \to Y$ imamo

$$(\forall i, j) \qquad a_{ij} = \{\mathcal{O}e_j\}_i = \{\theta\}_i = 0.$$

Dakle, ako je $\dim X = n$ i $\dim Y = m$, matrica nula-operatora $\mathcal{O}$ je nula-matrica tipa $m \times n$. $\triangle$

Primer 2. Kod identičkog operatora $\mathcal{I}\colon X \to X$ imamo

$$a_{ij} = \{\mathcal{I}e_j\}_i = \{e_j\}_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j, \\ 0, & \text{ako je } i \neq j, \end{cases}$$

što znači da je matrica ovog operatora jedinična matrica I, čiji red odgovara dimenziji prostora X. $\triangle$

Primer 3. U primeru 4 na strani 61 i primeru 1 na strani 63 razmatrali smo vektorski prostor svih polinoma stepena ne višeg od n, u oznaci $\mathcal{P}_n$. Dimenzija prostora $\mathcal{P}_n$ je $n+1$. Prirodna baza ovog prostora je $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$. Definišimo sada linearni operator $\mathcal{D}\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$ pomoću slika bazisnih elemenata

$$\mathcal{D}t^k = kt^{k-1} \qquad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Ovo je, u stvari, operator diferenciranja, koji jedan polinom iz prostora $\mathcal{P}_n$ (dimenzije $n+1$) preslikava na neki polinom u prostoru $\mathcal{P}_{n-1}$ (dimenzije n). Naš zadatak je da odredimo matricu $D = [d_{ij}]_{n\times(n+1)}$ ovog operatora.

[3] Koristi koordinatne reprezentacije vektora i matricu operatora.

Kako je $e_j = t^{j-1}$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ i

$$\mathcal{D}e_j = (j-1)t^{j-2} = (j-1)e_{j-1},$$

imamo, za $i = 1, \ldots, n$,

$$d_{ij} = \{\mathcal{D}e_j\}_i = \{(j-1)e_{j-1}\}_i = \begin{cases} i, & \text{ako je } j-1 = i, \\ 0, & \text{ako je } j-1 \neq i. \end{cases}$$

Uzimajući i u prostoru $\mathcal{P}_{n-1}$ prirodnu bazu, za matricu operatora $\mathcal{D}$ dobijamo

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & n \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

III.2.3 Operacije sa matricama

U odeljcima III.1.3 i III.1.4 uveli smo operacije sa linearnim operatorima tako da možemo odrediti:

1° zbir dva operatora;
2° proizvod operatora skalarom;
3° proizvod dva operatora.

U prethodnom odeljku pokazali smo da je, pri fiksiranim bazisima u prostorima X i Y, linearni operator $\mathcal{A}$ jednoznačno određen svojom matricom $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, gde su $m = \dim Y$, $n = \dim X$, a elementi matrice dati sa (III.2.2.3).

Imajući u vidu ove činjenice, moguće je uvesti i odgovarajuće operacije sa matricama, uspostavljajući na taj način dva ekvivalentna pristupa u tretiranju problema: operatorski i matrični pristup.

1° Razmotrimo najpre *sabiranje dve matrice* A i B. Ideja za uvođenje zbira $C = A + B$ sastoji se u tome da matrice A i B budu, u stvari, matrice dva linearna operatora $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ i da zbir C bude matrica operatora $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Kako je zbir operatora uveden za operatore u prostoru $L(X, Y)$, to proizilazi da matrice A i B moraju biti istog tipa, recimo $m \times n$, gde su $m = \dim Y$ i $n = \dim X$.

Dakle, neka su $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times n}$. Na osnovu (III.2.2.3) i definicije III.1.3.1 za elemente matrice $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ imamo

$$c_{ij} = \{\mathcal{C}e_j\}_i = \{\mathcal{A}e_j + \mathcal{B}e_j\}_i,$$

tj.

$$c_{ij} = \{\mathcal{A}e_j\}_i + \{\mathcal{B}e_j\}_i = a_{ij} + b_{ij}.$$

Ovo sugeriše sledeću definiciju za sabiranje matrica:

Definicija III.2.3.1 *Zbir matrica* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ je matrica $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, gde je

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \qquad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n).$$

Primer 1. Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

2° Razmotrimo sada *proizvod matrice skalarom*. Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrica operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$. Sa $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ označimo matricu operatora $\mathcal{C} = \lambda\mathcal{A}$. Tada, na osnovu (III.2.2.3) i definicije III.1.3.2, imamo

$$c_{ij} = \{\mathcal{C}e_j\}_i = \{\lambda\mathcal{A}e_j\}_i = \lambda\{\mathcal{A}e_j\}_i = \lambda a_{ij}.$$

Definicija III.2.3.2 *Proizvod matrice* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *i skalara* λ je matrica $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, gde je

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}. \qquad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n).$$

Primer 2. Za matricu A iz prethodnog primera imamo

$$3A = \begin{bmatrix} 9 & -15 & 9 \\ 0 & 12 & -21 \end{bmatrix}, \qquad -A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 0A = O. \qquad \triangle$$

Za matricu $(-1)A = -A$ kažemo da je *suprotna matrica* matrici A. Zbir A i $-A$ daje nula matricu. Korišćenjem suprotne matrice može se uvesti *oduzimanje matrica* istog tipa na sledeći način:

Definicija III.2.3.3 *Razlika matrica* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ je matrica $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, gde je

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \qquad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n).$$

Dakle, važi

$$A - B = A + (-B).$$

3° Razmotrimo sada najsloženiji slučaj – *proizvod dve matrice* A i B, koji treba da odgovara proizvodu operatora $\mathcal{A}\colon Y \to Z$ i $\mathcal{B}\colon X \to Y$. Neka su prostori X, Y, Z sa dimenzijama n, m, p i bazama

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \qquad \{f_1, f_2, \dots, f_m\}, \qquad \{g_1, g_2, \dots, g_p\},$$

respektivno, i neka je proizvod $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}\colon X \to Z$ dat definicijom III.1.4.1.

Najpre treba ustanoviti dimenzije odgovarajućih matrica A, B, C. Na osnovu definicije III.2.2.1, ove matrice su redom tipa $p \times m$, $m \times n$, $p \times n$. Dakle, imamo:

$$A = [a_{ij}]_{p\times m}, \qquad B = [b_{ij}]_{m\times n}, \qquad C = [c_{ij}]_{p\times n}.$$

U skladu sa (2.3.3) za elemente matrice C imamo

$$c_{ij} = \{\mathcal{C}e_j\}_i = \{\mathcal{A}(\mathcal{B}e_j)\}_i.$$

Na osnovu (III.2.2.2), za operatore $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ imamo

$$\mathcal{A}f_k = \sum_{\nu=1}^{p} a_{\nu k} g_\nu \qquad (k = 1, 2, \dots, m)$$

i

$$\mathcal{B}e_j = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} f_k \qquad (j = 1, 2, \dots, n),$$

odakle sleduje

$$c_{ij} = \left\{\mathcal{A}\sum_{k=1}^{m} b_{kj} f_k\right\}_i = \left\{\sum_{k=1}^{m} b_{kj}\mathcal{A}f_k\right\}_i,$$

tj.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\{\mathcal{A}f_k\}_i .$$

Najzad, kako je $\{\mathcal{A}f_k\}_i = a_{ik}$, dobijamo

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} .$$

Ovaj rezultat sugeriše sledeću definiciju za množenje matrica:

Definicija III.2.3.4 *Proizvod matrica* $A = [a_{ij}]_{p\times m}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ je matrica $C = [c_{ij}]_{p\times n}$, čiji su elementi dati sa

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \qquad (i = 1,2,\dots,p;\ j = 1,2,\dots,n). \tag{III.2.3.1}$$

Dakle, možemo zaključiti:

1° Proizvod matrica $C = AB$ defininisan je samo ako je broj kolona u matrici A jednak broju vrsta u matrici B;

2° Broj vrsta u matrici C jednak je broju vrsta u matrici A;

3° Broj kolona u matrici C jednak je broju kolona u matrici B,

što je predstavljeno i na sledećoj šemi:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{p\times m} & \cdot & \boxed{m\times n} & \Longrightarrow & \boxed{p\times n} \\ A & \cdot & B & = & C \end{array}$$

Ako izdvojimo iz matrice A elemente i-te vrste i formiramo vektor-vrstu

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{bmatrix},$$

a iz matrice B elemente j-te kolone i formiramo vektor-kolonu

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix},$$

tada se, na osnovu formule (III.2.3.1), računanje elementa c_{ij}, na preseku i-te vrste i j-te kolone matrice C, može šematski prikazati kao „proizvod" i-te vrste matrice A i j-te kolone matrice B

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}.$$

Primer 3. Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Proizvod AB je matrica tipa 2×3. Dakle,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -7 \\ 4 & 12 & -8 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Ako uvedemo vektore $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ kao koordinatne reprezentacije vektora $u \in X$ i $v \in Y$ u bazama B_e i B_f, respektivno (videti prethodni odeljak),

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

sistem jednačina (III.2.2.5) može se, vrlo koncizno, predstaviti u matričnom obliku

(III.2.3.2) $$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x},$$

gde je $A = A_{fe}$ matrica operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$. Formula (III.2.3.2) je analogon operatorskoj formuli (III.2.2.4).

Osobine koje važe za operacije kod operatora važe i za odgovarajuće operacije sa matricama. Tako, na primer, osobina asocijativnosti važi i kod sabiranja i kod množenja matrica. Dakle, jednakosti

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{i} \quad A(BC) = (AB)C$$

važe, naravno, pod uslovom da naznačene operacije imaju smisla.

Operacija sabiranja je komutativna, tj. $A + B = B + A$. Međutim, množenje dve matrice nije komutativno. Pre svega, ako postoji proizvod AB, ne mora postojati proizvod BA. Čak i u slučajevima kada postoje AB i BA (na primer, kada su matrice istog reda), u opštem slučaju je

$$AB \neq BA.$$

Da bismo se uverili u to, posmatrajmo jednostavan primer

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O, \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $AB \neq BA$. Iz ovog primera se može izvući još jedan važan zaključak:

$$AB = O \not\Rightarrow A = O \lor B = O.$$

Imajući ovako definisane operacije sa matricama, skup matrica se može posmatrati kao neka algebarska struktura. Tako, na primer, sledeći rezultat predstavlja analogon teoremi III.1.3.1 :

Teorema III.2.3.1 *Neka je $M_{m,n}$ skup svih matrica tipa $m \times n$. Struktura $(M_{m,n}, +)$ je Abelova grupa.*

Slično se, kao analogon teoremi III.1.3.3, može formulisati sledeće tvrđenje:

Teorema III.2.3.2 *Skup matrica $M_{m,n}$, snabdeven operacijom sabiranja matrica i operacijom množenja matrice skalarom, obrazuje vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbb{K}$.*

Postavlja se pitanje šta se može uzeti kao baza u ovom prostoru, kao i to kolika je dimenzija ovog prostora. Nije teško uočiti da se kao baza u prostoru $M_{m,n}$ može, na primer, uzeti skup matrica

$$\left\{E^{pq} \mid E^{pq} = \left[e_{ij}^{pq}\right]_{m\times n},\ p = 1,\ldots,m;\ q = 1,\ldots,n\right\},$$

čiji su elementi, korišćenjem Kroneckerove delte, dati pomoću $e_{ij}^{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$. Očigledno, $\dim M_{m,n} = mn$. Kako je prostor $M_{m,n}$ analogon prostoru $L(X,Y)$, tj. ovi prostori su izomorfni, to je i $\dim L(X,Y) = mn$, gde su $n = \dim X$ i $m = \dim Y$.

Najzad, kao analogon teoremi III.1.4.2 imamo sledeći rezultat:

Teorema III.2.3.3 *Neka je M_n skup svih kvadratnih matrica reda n, snabdeven operacijom sabiranja + i operacijom množenja matrica, u oznaci $\cdot$. Tada je struktura $(M_n, +, \cdot)$ prsten sa jedinicom.*

Primetimo da je ta jedinica u stvari jedinična matrica $I \in M_n$ kao neutralni element za množenje matrica iz M_n. Dakle, lako je proveriti da za nju važi

$$AI = IA = A \qquad (\forall A \in M_n).$$

Naravno, to se i moglo očekivati s obzirom da je identički operator $\mathcal{I} \in L(X,X)$, čija je matrica upravo $I \in M_n$ (videti primer 2 na strani 113), neutralni element za množenje operatora iz $L(X,X)$.

III.2.4 Transponovana matrica

Definicija III.2.4.1 *Transponovana matrica* matrice

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

je matrica

$$A^T = [a_{ji}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix},$$

(i-ta vrsta u A je i-ta kolona u A^T, j-ta kolona u A je j-ta vrsta u A^T).

Primer 1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, njena transponovana matrica je

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Primer 2. Transponovanjem vektora

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

dobija se matrica-vrsta

$$\boldsymbol{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Primer 3. Skalarni proizvod vektora $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$, gde su

$$\boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{y}^T = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix},$$

može se predstaviti u obliku (videti primer 2 na strani 88 i primer 4 na strani 66)

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}.$$

Ako se radi o kompleksnim vektorima, tada je

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k = \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{x},$$

gde $\boldsymbol{y}^*$ označava vektor koji se dobija transponovanjem vektora $\boldsymbol{y}$ i konjugovanjem njegovih koordinata. $\triangle$

Za operaciju transponovanje važe osobine iskazane sledećim teoremama:

Teorema III.2.4.1 1° $(A^T)^T = A$; 2° $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ $(\lambda \in \mathbb{C})$.

Teorema III.2.4.2 *Ako su A i B matrice istog tipa tada je*

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

Teorema III.2.4.3 *Za matrice A i B, za koje je definisan proizvod AB, definisan je i proizvod $B^T A^T$ i važi jednakost*

$$(AB)^T = B^T A^T. \tag{III.2.4.1}$$

Dokaz. Neka su $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n \times p}$. Tada je element na mestu (i, j) u matrici $AB = C = [c_{ij}]_{m \times p}$ jednak

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (1 \le i \le m;\ 1 \le j \le p).$$

Element c_{ij} nalazi se u j-toj vrsti i i-toj koloni matrice $(AB)^T$, koja je tipa $p \times m$.

S druge strane, proizvod matrica B^T i A^T, tj.

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & & b_{n2} \\ \vdots & & & \\ b_{1p} & b_{2p} & & b_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix},$$

takođe je tipa $p \times m$, pri čemu na mestu (j, i) imamo element

$$b_{1j}a_{i1} + \cdots + b_{nj}a_{in} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

što je, u stvari, element c_{ij}. $\square$

Matematičkom indukcijom može se dokazati sledeći opštiji rezultat:

Teorema III.2.4.4 *Za m matrica $A_1, \ldots, A_m$, za koje je definisan proizvod $A_1 \cdots A_m$, važi jednakost*

$$(A_1 \cdots A_m)^T = A_m^T \cdots A_1^T.$$

Ako su elementi matrice a_{ij} kompleksni brojevi, tada se može definisati tzv. *konjugovano-transponovana matrica*, u oznaci A^*, pomoću

$$A^* = [\bar{a}_{ji}]_{n \times m} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \ldots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & & & \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & & \bar{a}_{mn} \end{bmatrix}.$$

Primer 4. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 2i \\ -3 & 7+2i \\ -1 & 2+i \end{bmatrix},$$

konjugovano-transponovana matrica je

$$A^* = \begin{bmatrix} 1+i & -3 & -1 \\ -2i & 7-2i & 2-i \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Teoreme III.2.4.1 – III.2.4.4 ostaju u važnosti ako se transponovanje zameni sa konjugovanim-transponovanjem (i na desnoj strani jednakosti 2° teoreme III.2.4.1, umesto λ, tada stoji $\bar{\lambda}$). Na primer, analogon jednakosti (III.2.4.1) je $(AB)^* = B^*A^*$. Naravno, kod matrica nad poljem $\mathbb{R}$ važi $A^* = A^T$.

Primer 5. Neka je u prostoru matrica $M_{2,2}$ zadata baza (videti teoremu III.2.3.2)

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}.$$

Odredićemo: (a) matricu operatora transponovanja $\mathcal{T}\colon M_{2,2} \to M_{2,2}$; (b) matricu operatora $\mathcal{F}\colon M_{2,2} \to M_{2,2}$, definisanog pomoću

$$\mathcal{F}X = AX + XB,$$

gde su $A, B \in M_{2,2}$ konstantne matrice.

(a) Kako su

$$\mathcal{T}E^{11} = E^{11}, \quad \mathcal{T}E^{12} = E^{21}, \quad \mathcal{T}E^{21} = E^{12}, \quad \mathcal{T}E^{22} = E^{22},$$

na osnovu (III.2.2.3), za matricu operatora transponovanja u datoj bazi B, dobijamo

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Neka su

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Kako su

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}E^{11} &= AE^{11} + E^{11}B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathcal{F}E^{12} &= AE^{12} + E^{12}B = \begin{bmatrix} b_{21} & a_{11}+b_{22} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{F}E^{21} &= AE^{21} + E^{21}B = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22}+b_{11} & b_{12} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{F}E^{22} &= AE^{22} + E^{22}B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}E^{11} &= (a_{11}+b_{11})E^{11} + b_{12}E^{12} + a_{21}E^{21}, \\
\mathcal{F}E^{12} &= b_{21}E^{11} + (a_{11}+b_{22})E^{12} + a_{21}E^{22}, \\
\mathcal{F}E^{21} &= a_{12}E^{11} + (a_{22}+b_{11})E^{21} + b_{12}E^{22}, \\
\mathcal{F}E^{22} &= a_{12}E^{12} + b_{21}E^{21} + (a_{22}+b_{22})E^{22},
\end{aligned}$$

za matricu operatora $\mathcal{F}$ u bazi B dobijamo

$$F = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & b_{21} & a_{12} & 0 \\ b_{12} & a_{11}+b_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22}+b_{11} & b_{21} \\ 0 & a_{21} & b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

III.2.5 Stepenovanje kvadratne matrice

Definicija III.2.5.1 Neka je A kvadratna matrica. *Stepen matrice* A definiše se pomoću

$$A^0 = I, \qquad A^n = A\,A^{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Jednostavno se dokazuje sledeće tvrđenje:

Teorema III.2.5.1 *Ako su k i m nenegativni celi brojevi, važe formule*

$$A^k A^m = A^{k+m}, \qquad (A^k)^m = A^{km}.$$

S obzirom na stepenovanje, moguće je uvesti neke specijalne klase kvadratnih matrica:

Definicija III.2.5.2 Ako je $A^m = O$ za neko $m \in \mathbb{N}$, tada za matricu A kažemo da je *nilpotentna.* Najmanji broj $k \in \mathbb{N}$ za koji je $A^k = O$ naziva se *stepen nilpotentnosti.*

Definicija III.2.5.3 Ako je $A^2 = A$ za matricu A kažemo da je *idempotentna.*

Definicija III.2.5.4 *Ako je $A^2 = I$ za matricu A kažemo da je involutivna.*

Primer 1. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tada je

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 3 \cdot 2 \cdot 2^1 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}, \\ A^3 &= A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 36 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 3 \cdot 3 \cdot 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Može se naslutiti da je

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}. \tag{III.2.5.1}$$

Da bismo dokazali (III.2.5.1) koristićemo metod indukcije.

Tvrđenje je tačno za $n = 1$.

Pretpostavimo da formula (III.2.5.1) važi za $n = k$, tj. da je

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^k & 3k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Tada imamo

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^k & 3k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix},$$

tj.

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3(k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Napomena 1. Kada su svi elementi na glavnoj dijagonali matrice A međusobno jednaki, za nalaženje stepena A^n može se koristiti binomna formula. Metod je posebno efikasan ako je matrica A trougaona. Za matricu A iz primera 1 imamo

$$A^n = (2I + B)^n = 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} B + \binom{n}{2} 2^{n-2} B^2 + \cdots + \binom{n}{n} B^n,$$

gde je $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Kako je $B^2 = O$, dobijamo

$$A^n = 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} B = \begin{bmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je matrica B nilpotentna sa stepenom nilpotentnosti dva. $\triangle$

Napomena 2. U opštem slučaju, binomna formula

$$(C + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^{n-k} B^k$$

važi samo ako su matrice C i B komutativne.

Primer 2. Neka je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Tada redom imamo

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}, \\
A^3 &= A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 14 & 27 \end{bmatrix}, \\
A^4 &= A \cdot A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 14 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 40 & 81 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Može se naslutiti da je

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ a_{21}(n) & 3^n \end{bmatrix},$$

pri čemu je teško identifikovati izraz za $a_{21}(n)$. △

Napomena 3. Pokazaćemo kako se za proizvoljnu kvadratnu matricu drugog reda[4] $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ može naći n-ti stepen

(III.2.5.2) $$A^n = \begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je

(III.2.5.3) $$a_{11}(0) = a_{22}(0) = 1, \qquad a_{12}(0) = a_{21}(0) = 0$$

i neka je

(III.2.5.4) $$a_{11}(1) = a, \quad a_{12}(1) = b, \quad a_{21}(1) = c, \quad a_{22}(1) = d.$$

Kako je $A^{n+1} = A \cdot A^n$, na osnovu (III.2.5.2) imamo

$$\begin{bmatrix} a_{11}(n+1) & a_{12}(n+1) \\ a_{21}(n+1) & a_{22}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{bmatrix},$$

odakle sleduje

$$\begin{aligned} a_{11}(n+1) &= aa_{11}(n) + ba_{21}(n), \quad & a_{21}(n+1) &= ca_{11}(n) + da_{21}(n), \\ a_{12}(n+1) &= aa_{12}(n) + ba_{22}(n), \quad & a_{22}(n+1) &= ca_{12}(n) + da_{22}(n). \end{aligned}$$

Ovaj sistem jednačina, uz uslove (III.2.5.3) i (III.2.5.4), definiše elemente matrice A^n. Kako su prve dve jednačine sistema, evidentno, nezavisne od poslednje dve jednačine, to ćemo ih posebno razmatrati.

Sabiranjem prve dve jednačine, uz prethodno množenje prve jednačine sa d, a druge sa $-b$, dobijamo

(III.2.5.5) $$da_{11}(n+1) - ba_{21}(n+1) = (ad - bc)a_{11}(n).$$

[4] Metod je opšti i važi za matrice proizvoljnog reda, ali se komplikuje sa porastom reda matrice.

S druge strane, povećavanjem indeksa n za jedinicu u prvoj jednačini, nalazimo

(III.2.5.6) $$a_{11}(n+2) = aa_{11}(n+1) + ba_{21}(n+1).$$

Najzad, eliminacijom $a_{21}(n+1)$ iz (III.2.5.5) i (III.2.5.6), dobijamo

$$a_{11}(n+2) - (a+d)a_{11}(n+1) + (ad-bc)a_{11}(n) = 0.$$

Dakle, dobili smo tzv. diferencnu jednačinu oblika[5]

(III.2.5.7) $$z(n+2) - 2\alpha z(n+1) + \beta z(n) = 0,$$

gde su $2\alpha = a+d$ i $\beta = ad-bc$.

Nije teško videti da ćemo i za ostale elemente matrice A^n imati istu jednačinu (III.2.5.7). Naravno, rešenja će se razlikovati s obzirom na početne uslove (III.2.5.3) i (III.2.5.4).

Pokazaćemo sada kako se na jedan formalan način može naći rešenje jednačine (III.2.5.7).

Pretpostavimo rešenje jednačine (III.2.5.7) u obliku $n \mapsto z(n) = \lambda^n$. Tada imamo da je

$$\lambda^{n+2} - 2\alpha\lambda^{n+1} + \beta\lambda^n = 0.$$

Kako trivijalno rešenje $\lambda = 0$ nije od interesa, zaključujemo da će λ^n biti rešenje jednačine (III.2.5.7) ako je

(III.2.5.8) $$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \beta = 0.$$

Za kvadratnu jednačinu (III.2.5.8) kažemo da je *karakteristična jednačina diferencne jednačine* (III.2.5.7).

Neka su λ_1 i λ_2 koreni karakteristične jednačine (III.2.5.8). Razlikovaćemo dva slučaja:

SLUČAJ $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ovaj slučaj se pojavljuje kada je $\alpha^2 \neq \beta$. Tada su λ_1^n i λ_2^n rešenja jednačine (III.2.5.7). Takođe je i njihova linearna kombinacija,

(III.2.5.9) $$z(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

rešenje jednačine (III.2.5.7), pri čemu su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Može se pokazati da rešenje (III.2.5.9) sadrži sva rešenja naše jednačine (III.2.5.7) kada je $\alpha^2 \neq \beta$. Zato se rešenje (III.2.5.9) naziva *opšte*

---

[5] Jednačine ovog oblika nazivaju se *diferencne jednačine*. Ovde se radi o tzv. *homogenoj linearnoj diferencnoj jednačini drugog reda sa konstantnim koeficijentima*.

rešenje diferencne jednačine (III.2.5.7). Napomenimo da je za nalaženje opšteg rešenja dovoljno poznavati dva linearno nezavisna rešenja jednačine (III.2.5.7), što su, u našem slučaju, upravo rešenja λ_1^n i λ_2^n. Linearna kombinacija dva takva rešenja daje opšte rešenje jednačine (III.2.5.7).

Koreni karakteristične jednačine (III.2.5.8) mogu biti i konjugovano-kompleksni brojevi, na primer, $\lambda_1 = \varrho e^{i\theta}$ i $\lambda_2 = \varrho e^{-i\theta}$. Tada je

$$\begin{aligned} z(n) &= C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = \varrho^n\big(C_1 e^{in\theta} + C_2 e^{-in\theta}\big) \\ &= \varrho^n\big((C_1 + C_2)\cos n\theta + i(C_1 - C_2)\sin n\theta\big), \end{aligned}$$

tj.

$$z(n) = \varrho^n\big(D_1 \cos n\theta + D_2 \sin n\theta\big),$$

gde su D_1 i D_2 proizvoljne konstante.

Slučaj $\lambda_1 = \lambda_2$. Ovaj slučaj nastupa kada je $\alpha^2 = \beta$. Pored rešenja λ_1^n, koje je evidentno, moguće je pokazati da je i $n\lambda_1^n$ rešenje diferencne jednačine (III.2.5.7). Zaista, zamenom $z(n) = n\lambda_1^n$, leva strana u (III.2.5.7), u oznaci $L[z(n)]$, postaje

$$\begin{aligned} L[n\lambda_1^n] &= (n+2)\lambda_1^{n+2} - 2\alpha(n+1)\lambda_1^{n+1} + \beta n\lambda_1^n \\ &= nL[\lambda_1^n] + 2\lambda_1^{n+1}(\lambda_1 - \alpha). \end{aligned}$$

Kako je $L[\lambda_1^n] = 0$ i $\lambda_1 = \alpha$, zaključujemo da je $L[n\lambda_1^n] = 0$.

Dakle, u ovom slučaju, opšte rešenje je

$$z(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n = \lambda_1^n(C_1 + C_2 n),$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Korišćenjem opšteg rešenja jednačine (III.2.5.7) i definisanih početnih uslova (III.2.5.3) i (III.2.5.4), nalazimo elemente matrice A^n. $\triangle$

Primer 3. Za matricu A iz primera 2 karakteristična jednačina iz (III.2.5.7) postaje

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -1$. Opšte rešenje odgovarajuće diferencne jednačine

$$z(n+2) - 2z(n+1) - 3z(n) = 0$$

je dato sa

$$z(n) = C_1 3^n + C_2(-1)^n, \tag{III.2.5.10}$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Da bismo, na primer, odredili $a_{21}(n)$, primetimo najpre da je $a_{21}(0) = 0$ i $a_{21}(1) = 2$. Stavljajući redom $n = 0$ i $n = 1$ u (III.2.5.10), za $z(n) = a_{21}(n)$, dobijamo

$$C_1 + C_2 = a_{21}(0) = 0 \qquad \text{i} \qquad 3C_1 - C_2 = a_{21}(1) = 2,$$

odakle sleduje $C_1 = 1/2$, $C_2 = -1/2$.

Prema tome,

$$a_{21}(n) = \frac{1}{2}\big(3^n - (-1)^n\big).$$

Slično se mogu naći i ostali elementi matrice A^n. Tako imamo da je

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ \frac{1}{2}\big(3^n - (-1)^n\big) & 3^n \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

III.3 DETERMINANTE

Iako su determinante istorijski nastale pre matrica, one se danas definišu kao funkcije nad matricama. U toj definiciji, iz koje proizilaze mnoge osobine determinanata, figurišu i permutacije, a to su elementi matematičke discipline koju zovemo kombinatorika.

Zbog toga ćemo ovo poglavlju započeti razmatranjem osnovnih rezultata vezanih za permutacije, u meri koja nam je neophodna za kasnije proučavanje determinanata i njihovih svojstava.

III.3.1 Permutacije

Neka je $S_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ konačan skup i p obostrano jednoznačno preslikavanje skupa S_n na skup S_n.

Simbolički to preslikavanje $p\colon S_n \to S_n$ može se predstaviti u obliku

$$p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{III.3.1.1}$$

koji omogućava da se uoči slika a_{i_k} svakog elementa a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Zapravo vidi se da je $a_{i_k} = p(a_k)$, gde su a_{i_1}, a_{i_2}, …, a_{i_n} različiti elementi skupa S_n.

Definicija III.3.1.1 Svako obostrano jednoznačno preslikavanje skupa S_n na skup S_n zovemo *permutacija* elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skupa S_n.

Pokazaćemo da broj takvih preslikavanja, tj. broj permutacija, zavisi od broja elemenata skupa S_n. Označimo, zbog toga, taj broj sa $P(n)$.

Očigledno, ako je $S_1 = \{a_1\}$, tada je preslikavanje $a_1 \mapsto p_1(a_1) = a_1$, tj. identično preslikavanje, jedino obostrano jednoznačno preslikavanje skupa S_1 na skup S_1. Dakle, $P(1) = 1$.

Za skup $S_2 = \{a_1, a_2\}$, pored identičkog preslikavanja

$$x \mapsto p_1(x) = x \quad (x = a_1, a_2)$$

i preslikavanje p_2, određeno sa

$$a_1 \mapsto p_2(a_1) = a_2 \quad \text{i} \quad a_2 \mapsto p_2(a_2) = a_1,$$

je biunivoko preslikavanje skupa S_2 na skup S_2. U skladu sa prethodno uvedenom notacijom (III.3.1.1) imamo

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad p_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Prema tome, $P(2) = 2$.

Za skup $S_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ nije teško utvrditi da postoji šest obostrano jednoznačnih preslikavanja skupa S_3 na skup S_3:

$$\begin{array}{llll}
p_1: & a_1 \mapsto p_1(a_1) = a_1, & a_2 \mapsto p_1(a_2) = a_2, & a_3 \mapsto p_1(a_3) = a_3; \\
p_2: & a_1 \mapsto p_2(a_1) = a_1, & a_2 \mapsto p_2(a_2) = a_3, & a_3 \mapsto p_2(a_3) = a_2; \\
p_3: & a_1 \mapsto p_3(a_1) = a_2, & a_2 \mapsto p_3(a_2) = a_1, & a_3 \mapsto p_3(a_3) = a_3; \\
p_4: & a_1 \mapsto p_4(a_1) = a_2, & a_2 \mapsto p_4(a_2) = a_3, & a_3 \mapsto p_4(a_3) = a_1; \\
p_5: & a_1 \mapsto p_5(a_1) = a_3, & a_2 \mapsto p_5(a_2) = a_1, & a_3 \mapsto p_5(a_3) = a_2; \\
p_6: & a_1 \mapsto p_6(a_1) = a_3, & a_2 \mapsto p_6(a_2) = a_2, & a_3 \mapsto p_6(a_3) = a_1,
\end{array}$$

tj. preslikavanja:

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix},$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \quad p_5 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad p_6 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

To znači da je $P(3) = 6$.

Kako je $P(1) = 1 = 1!$, $P(2) = 2 = 2!$ i $P(3) = 6 = 3!$, intuitivno se može pretpostaviti da je $P(n) = n!$. Matematičkom indukcijom dokazaćemo da je ova pretpostavka tačna.

Pre formulisanja odgovarajuće teoreme, napomenimo da ćemo, nadalje, svaku permutaciju identifikovati sa zapisom

$$a_{i_1}\, a_{i_2}\, \ldots\, a_{i_n},$$

što, u stvari, predstavlja drugi red u notaciji (III.3.1.1).

Teorema III.3.1.1 *Broj permutacija skupa od n elemenata je $P(n) = n!$.*

Dokaz. Kao što smo videli, tvrđenje je tačno za $n = 1, 2, 3$. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neko $n = k \geq 1$, tj. pretpostavimo da je $P(k) = k!$.

Da bismo odredili $P(k+1)$, posmatrajmo skup S_{k+1}, tj. skup elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$. Kako je broj permutacija elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_k$ prema induktivnoj hipotezi jednak $P(k) = k!$, broj permutacija elemenata skupa S_{k+1} dobićemo na sledeći način:

Za svaku permutaciju elemenata skupa S_k odredićemo one permutacije elemenata skupa S_{k+1} za koje je element a_{k+1} na poslednjem mestu u redosledu. Na primer, za permutaciju $a_1a_2a_3\ldots a_k$ imamo $a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}$; za permutaciju $a_1a_3a_2a_4\ldots a_k$ permutaciju $a_1a_3a_2a_4\ldots a_ka_{k+1}$. Takvih permutacija elemenata skupa S_{k+1} ima onoliko koliko ima permutacija elemenata skupa S_k, što znači $k!$.

Zatim ćemo, za svaku permutaciju elemenata skupa S_k, odrediti one permutacije elemenata skupa S_{k+1} za koje je element a_{k+1} na pretposlednjem, k-tom mestu. Naravno, i takvih permutacija skupa S_{k+1} ima $k!$ i sve su one nove, tj. različite od prethodnih $k!$ permutacija.

Produžujući ovaj postupak određivanja novih $k!$ permutacija elemenata skupa S_{k+1} za svako novo mesto elementa a_{k+1} u redosledu, dobijamo da je broj permutacija elemenata skupa S_{k+1} određen sa

$$P(k+1) = P(k)(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!\,.$$

Dakle, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $P(n) = n!\,.$ $\square$

Prema tome, ako sa P_n označimo skup svih permutacija od n elemenata, tada imamo

$$P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_{n!}\},$$

gde smo sa p_ν označili permutaciju čiji je indeks ν, a taj indeks može biti redni broj nastale permutacije u nekom definisanom postupku dobijanja (ispisivanja) permutacija.

Permutaciju $a_1\, a_2\, \ldots\, a_n$ zvaćemo *osnovna permutacija* ili *polazna permutacija*, a naznačeni poredak elemenata *normalan*. Naravno, u svakoj drugoj permutaciji taj normalni redosled je narušen. Ako jedna permutacija nastaje iz neke druge tako što dva elementa zamene svoja mesta, kažemo da je ta permutacija nastala *transpozicijom* tih elemenata.

Posmatrajmo sada proizvoljnu permutaciju

$$a_{i_1} \ldots a_{i_k} \ldots a_{i_m} \ldots a_{i_n} \qquad (1 \leq i_j \leq n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

od elemenata $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$.

Ako je $i_k < i_m$ kažemo da elementi a_{i_k} i a_{i_m} zauzimaju *normalan* položaj.

Ako je $i_k > i_m$ kažemo da elementi a_{i_k} i a_{i_m} obrazuju *inverziju*.

Broj inverzija u posmatranoj permutaciji određujemo na sledeći način:

Uporedimo po veličini i_1 sa brojevima $i_2, i_3, \ldots, i_n$; zatim i_2 sa brojevima $i_3, i_4, \ldots, i_n$; i najzad i_{n-1} sa i_n.

Definicija III.3.1.2 Neka je j ukupan broj svih inverzija u nekoj permutaciji. Ako je j parno, za permutaciju kažemo da je *parna* ili da je *parne klase*. Ako je j neparno, permutacija je *neparna* ili je *neparne klase*.

Osnovna permutacija nema nijednu inverziju i ona se uvršćje u permutacije parne klase.

Primer 1. Neka je $S_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Odredićemo broj inverzija u permutaciji $a_4 a_1 a_2 a_5 a_3$.

Kako inverzije obrazuju sledeći parovi elemenata:

$$(a_4, a_1), \quad (a_4, a_2), \quad (a_4, a_3), \quad (a_5, a_3),$$

zaključujemo da je broj inverzija u permutaciji $a_4 a_1 a_2 a_5 a_3$ jednak četiri. Dakle, ova permutacija je parne klase. $\triangle$

Teorema III.3.1.2 *Permutacije koje nastaju jedna iz druge transpozicijom dva elementa pripadaju različitim klasama parnosti.*

Dokaz. Ako su elementi čijom transpozicijom nastaje nova permutacija susedni elementi, tada se broj inverzija u ovim permutacijama razlikuje za jedinicu. U tom slučaju se posmatrane permutacije zaista razlikuju u parnosti, tj. pripadaju različitim klasama.

Pretpostavimo sada da se između elemenata čijom je transpozicijom nastala nova permutacija nalazi s elemenata. Nova permutacija je, u stvari, nastala tako što je jedan od tih elemenata izvršio s uzastopnih transpozicija sa susednim elementima, a drugi $s+1$ transpoziciju sa sebi susednim elementima. Prema tome, izvršeno je ukupno $2s+1$ transpozicija susednih elemenata, što znači da je broj inverzija promenjen za neparan broj.

Dakle, i u ovom slučaju ove dve permutacije pripadaju različitim klasama parnosti. □

Primer 2. Ako u parnoj permutaciji $a_4a_1a_2a_5a_3$ iz primera 1, izvršimo transpoziciju elemenata a_1 i a_3, dobijamo permutaciju $a_4a_3a_2a_5a_1$.

U ovoj permutaciji imamo inverzije

$$(a_4,a_3),\quad (a_4,a_2),\quad (a_4,a_1),\quad (a_3,a_2),\quad (a_3,a_1),\quad (a_2,a_1),\quad (a_5,a_1).$$

Prema tome, nova permutacija je promenila klasu, tj. postala je neparna, što je u skladu sa dokazanom teoremom. △

III.3.2 Definicija determinate

Neka je M_n skup svih kvadratnih matrica reda n nad poljem $\mathbb{C}$. Definisaćemo i izučiti jedno preslikavanje, u oznaci det, skupa M_n u skup $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\det : M_n \to \mathbb{C}$ definisaćemo postupno, najpre za $n=1$, $n=2$ i $n=3$.

Slučaj $n=1$. Neka je $A=[a_{11}]$ kvadratna matrica reda jedan. Preslikaćemo ovu matricu u kompleksan broj a_{11}, pišući

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Slučaj $n=2$. Matricu drugog reda $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ preslikaćemo u kompleksan broj $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, simbolizujući to sa

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Slučaj $n=3$. Kvadratnoj matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

pridružićemo kompleksan broj $\det A$, određen sa

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\qquad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

Kao što možemo primetiti, u svim slučajevima, u definiciji $\det A$ imamo $n!$ sabiraka i to svaki sa po n faktora, koji predstavljaju elemente matrice. Na primer, pri $n = 3$ imamo $3! = 6$ sabiraka i to svaki sa po tri faktora.

Primetimo, dalje, da svaki sabirak sadrži jedan i samo jedan element iz svake vrste i svake kolone matrice. Prvi indeksi elemenata u svakom sabirku poređani su na istovetan način u tzv. normalnom redosledu. Na primer,

$$\begin{aligned} &\text{za } n = 1: && (1); \\ &\text{za } n = 2: && (1, 2); \\ &\text{za } n = 3: && (1, 2, 3). \end{aligned}$$

Drugi indeksi elemenata u svakom sabirku čine po jednu permutaciju osnovnog skupa. Tako imamo,

$$\begin{aligned} &\text{za } n = 1: && (1); \\ &\text{za } n = 2: && (1, 2),\ (2, 1); \\ &\text{za } n = 3: && (1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1). \end{aligned}$$

Najzad, primetimo da su neki sabirci kompleksnog broja $\det A$ sa pozitivnim, a neki sa negativnim predznakom. Isto tako, može se uočiti da sabirci kod kojih drugi indeksi elemenata obrazuju permutaciju parne (neparne) klase imaju pozitivan (negativan) predznak, tj. predznak sabirka je $(-1)^j$, gde je j broj inverzija u permutaciji drugih indeksa elemenata u sabirku.

Primer 1. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5. \qquad \triangle$$

Primer 2. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix},$$

imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned} \det A = \quad & 3 \cdot 0 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 \cdot (-5) - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) \\ & + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-5) - 1 \cdot 0 \cdot 1 = 62. \qquad \triangle \end{aligned}$$

Proširujući prethodni koncept moguće je definisati preslikavanje $\det A$ za matrice proizvoljnog reda.

Neka je matrica $A \in M_n$ data sa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Preslikavanje $A \mapsto \det A$ definisaćemo pomoću

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

gde se sumiranje izvodi preko svih permutacija $p_\nu = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, dok je j broj inverzija u permutaciji p_ν .

Definicija III.3.2.1 Broj $D = \det A$ zovemo *determinanta matrice A.*

Determinanta D ima red, koji je jednak redu kvadratne matrice A. Simbolički je predstavljamo slično matrici, navodeći elemente matrice između dve vertikalne crte, pri čemu su elementi, vrste, kolone, dijagonale, ... matrice A sada elementi, vrste, kolone, dijagonale, ... determinante $\det A$.

Analizom zbira

$$\text{(III.3.2.1)} \qquad \sum(-1)^j a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

zaključujemo sledeće:

1° Broj sabiraka u (III.3.2.1) je $n!$ jer je to ukupan broj permutacija skupa indeksa $\{1,2,\ldots,n\}$;

2° Svaki sabirak u (III.3.2.1) predstavlja proizvod od n elemenata matrice A, pri čemu se iz svake vrste i svake kolone matrice A pojavljuje jedan i samo jedan element;

3° Sabircima sa parnim (neparnim) permutacijama $p_\nu = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ odgovara pozitivan (negativan) predznak;

4° Svaki element matrice A javlja se kao činilac u $(n-1)!$ sabiraka.

Napomenimo, ovde, da se kao prvi indeksi elemenata u svim sabircima u (III.3.2.1) ne mora uzeti osnovna permutacija $p_1 = (1,2,\ldots,n)$. Naime, može se fiksirati bilo koja permutacija, na primer $p_\mu = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Ako je njen broj inverzija jednak i, tada se zbir (III.3.2.1) može izraziti u obliku

$$\text{(III.3.2.2)} \qquad \sum(-1)^{i+j} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

gde se sumiranje opet izvodi preko svih permutacija $p_\nu = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ i gde je j broj inverzija u permutaciji p_ν .

Dakle, u zbiru (III.3.2.2) permutacija $p_\mu = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ je fiksna. Poznavajući osobine permutacija, nije teško uočiti da su zbirovi (III.3.2.1) i (III.3.2.2) identični. Naime, preuređenjem elemenata u svakom sabirku (uzetog bez predznaka)

$$\text{(III.3.2.3)} \qquad a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

u smislu da prvi indeksi elemenata budu redom $1,2,\ldots,n$, tj. da se od permutacije p_μ dođe do permutacije p_1, očigledno se ništa neće promeniti u vrednosti sabirka (III.3.2.3), ali će drugi indeksi elemenata u sabirku obrazovati novu permutaciju $p_{\nu'} = (j_1', j_2', \ldots, j_n')$ koja sada ima j' inverzija. Dakle, permutacija $p_{\nu'} = (j_1', j_2', \ldots, j_n')$ je diktirana transpozicijama elemenata zbog uređenja prvog indeksa. Kako je, na osnovu osobina permutacija, ovaj broj transpozicija određen brojem inverzija i permutacije p_μ, to je $(-1)^{i+j} = (-1)^{j'}$. Dakle, (III.3.2.2) postaje

$$\sum(-1)^{j'} a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'},$$

što je ekvivalentno sa (III.3.2.1).

Primer 3. Neka je $n = 3$. Izaberimo permutaciju $P_3 = (2,3,1)$, čiji je broj inverzija $i = 2$. Na osnovu (III.3.2.2) imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 \big(a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{33}a_{12} - a_{22}a_{31}a_{13} \\ + a_{22}a_{33}a_{11} + a_{23}a_{31}a_{12} - a_{23}a_{32}a_{11} \big).$$

Preuređenjem svakog sabirka tako da prvi indeksi budu uređeni po veličini, dobijamo

$$\det A = a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

što je ekvivalentno sa ranije uvedenom definicijom (videti slučaj $n = 3$). $\triangle$

Na osnovu prethodnog može se zaključiti da zbir (III.3.2.2) predstavlja $\det A$ i u slučaju kada fiksiramo permutaciju $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, a sumiranje sprovedemo preko svih permutacija $P_\mu = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Prema tome, važi opšti rezultat:

Teorema III.3.2.1 *Neka je matrica $A \in M_n$ data sa*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Tada se $\det A$ *može izraziti u obliku*

$$\det A = \sum (-1)^{i+j} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

gde je i broj inverzija u permutaciji $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, a j broj inverzija u permutaciji $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ i gde se sumiranje izvodi preko svih permutacija prvih (drugih) indeksa elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, dok su drugi (prvi) indeksi elemenata fiksirani.

III.3.3 Osobine determinanata

U ovom odeljku izučićemo neke osobine determinanata.

Teorema III.3.3.1 $\det A^T = \det A$.

Dokaz. Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Kako je $A^T = [a_{ji}]_{n\times n}$, po definiciji, imamo

$$\det A^T = \sum (-1)^j a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n},$$

odakle, na osnovu teoreme III.3.2.1, sleduje $\det A^T = \det A$. □

Na osnovu teoreme III.3.3.1, zaključujemo da sve osobine determinanata koje se odnose na njene vrste, važe i ako se u tim iskazima reč vrsta zameni rečju kolona. Prema tome, u iskazima koji tretiraju osobine determinanata važi dualizam: vrsta – kolona. Zbog toga ćemo, u daljem tekstu, sve osobine determinanata dokazivati u formulacijama koje se odnose na vrste, znajući da se te iste osobine mogu formulisati i dokazati i za kolone.

Teorema III.3.3.2 *Ako se svi elementi jedne vrste matrice A pomnože nekim brojem λ i dobijenu matricu obeležimo sa B, tada je* $\det B = \lambda \det A$.

(Alternativno bi se ovo tvrđenje moglo i ovako definisati: *Determinanta se množi brojem tako što se svaki element jedne i samo jedne njene vrste pomnoži tim brojem.*)

Dokaz. Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ i neka je matrica B dobijena iz matrice A množenjem njene i-te vrste skalarom λ. Tada, na osnovu definicije determinante, imamo

$$\begin{aligned} \det B &= \sum (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (\lambda a_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \lambda \sum (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= \lambda \det A. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema III.3.3.3 *Neka su elementi i-te vrste matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ dati u obliku zbira*

$$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij} \qquad (i \ \textit{fiksno};\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ako su A' i A'' matrice koje se dobijaju iz A tako što se u i-toj vrsti elementi a_{ij} zamene sa a'_{ij} i a''_{ij}, respektivno, tada je

$$\det A = \det A' + \det A''.$$

Dokaz. Na osnovu definicije determinante, imamo

$$\begin{aligned}\det A &= \sum(-1)^j a_{1j_1}\cdots(a'_{ij_i}+a''_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\ &= \sum(-1)^j a_{1j_1}\cdots a'_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum(-1)^j a_{1j_1}\cdots a''_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\ &= \det A'+\det A''. \qquad \square\end{aligned}$$

Teorema III.3.3.4 *Ako su elementi jedne vrste matrice A jednaki nuli, tada je* $\det A = 0$.

Dokaz. Tvrđenje teoreme sleduje na osnovu zaključka navedenog pod 2° u analizi zbira (III.3.2.1). $\square$

Teorema III.3.3.5 *Ako su u matrici A elementi jedne vrste jednaki odgovarajućim elementima neke druge vrste, tada je* $\det A = 0$.

Dokaz. Neka su i-ta i k-ta vrsta u matrici A jednake, tj. neka je

$$a_{ip} = a_{kp} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n). \tag{III.3.3.1}$$

Uočimo proizvoljan sabirak determinante $\det A$

$$(-1)^j a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}. \tag{III.3.3.2}$$

Takođe, uočimo sabirak koji se razlikuje od ovog samo po jednoj transpoziciji indeksa $j_i \leftrightarrow j_k$. Takav sabirak je

$$-(-1)^j a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}. \tag{III.3.3.3}$$

Njegov predznak je suprotan predznaku sabirka (III.3.3.2) s obzirom da je transpozicijom promenjena parnost u permutaciji indeksa.

S obzirom na (III.3.3.1), sabirak (III.3.3.3) se svodi na

$$-(-1)^j a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n},$$

što u zbiru sa (III.3.3.2) daje nulu. Za ovakva dva sabirka reći ćemo da su odgovarajuća.

Kako za svaki uočeni sabirak postoji njemu odgovarajući sabirak u prethodnom smislu, zaključujemo da je $\det A = 0$. $\square$

Sledeće tvrđenje je posledica teorema III.3.3.2 i III.3.3.5.

Teorema III.3.3.6 *Ako su u matrici A elementi jedne vrste proporcionalni odgovarajućim elementima neke druge vrste, tada je* $\det A = 0$.

Takođe, na osnovu teorema III.3.3.2, III.3.3.3 i III.3.3.6 važi sledeći rezultat:

Teorema III.3.3.7 *Determinanta matrice ne menja vrednost ako se elementima jedne vrste dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste, prethodno pomnoženi istim skalarom.*

Na osnovu teorema III.3.3.4 i III.3.3.7 sleduje tvrđenje:

Teorema III.3.3.8 *Ako je u matrici A jedna vrsta linearna kombinacija ostalih vrsta, tada je* $\det A = 0$.

Teorema III.3.3.9 *Ako odgovarajući elementi dve vrste matrice A promene svoja mesta i dobijenu matricu obeležimo sa B, tada važi jednakost*

$$\det B = -\det A. \tag{III.3.3.4}$$

Dokaz. Neka odgovarajući elementi u i-toj i k-toj vrsti matrice A promene mesta. Tada je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Da bismo dokazali (III.3.3.4), koristićemo se teoremom III.3.3.7.

Pođimo od $\det A$. Njena vrednost se ne menja ako elementima i-te vrste dodamo odgovarajuće elemente k-te vrste. Tako imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} + a_{k1} & a_{i2} + a_{k2} & & a_{in} + a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ako, sada, elementima k-te vrste dodamo odgovarajuće elemente novoformirane i-te vrste, prethodno pomnožene faktorom -1, dobijamo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & & & \\ -a_{i1} & -a_{i2} & & -a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Najzad, dodavanjem k-te vrste i-toj vrsti i izvlačenjem faktora -1 iz k-te vrste, dobijamo

$$\det A = -\det B. \qquad \square$$

Teorema III.3.3.10 *Neka su date kvadratne matrice* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *i* $B = [b_{ij}]_{n\times n}$. *Tada je*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B). \tag{III.3.3.5}$$

Dokaz. Neka je $C = AB = [c_{ij}]_{n\times n}$, gde je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad (i,j = 1,2.\ldots,n).$$

Pođimo od

$$\det C = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & & & \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} & & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \end{vmatrix}.$$

Imajući u vidu teoremu III.3.3.3, a kako su elementi prve vrste zbirovi od po n sabiraka, $\det C$ može se predstaviti kao zbir od n determinanata koje sve imaju iste vrste, od druge do n-te, a u prvoj vrsti su sabirci odgovarajućih suma, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1}b_{j_11} & a_{1j_1}b_{j_12} & \dots & a_{1j_1}b_{j_1n} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & & & \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} & & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \end{vmatrix} \qquad (1 \leq j_1 \leq n).$$

Svaka od ovih determinanata u drugoj vrsti ima članove koji su zbirovi od po n sabitraka, pa se svaka takva deteminanta može predstaviti kao zbir od n determinanata (slično prethodnom). Prema tome, $\det C$ se može predstaviti kao zbir od n^2 determinanata. Produžujući ovo rezonovanje, zaključujemo da se $\det C$ može predstaviti kao zbir od n^n determinanata oblika

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{1j_1}b_{j_11} & a_{1j_1}b_{j_12} & \dots & a_{1j_1}b_{j_1n} \\ a_{2j_2}b_{j_21} & a_{2j_2}b_{j_22} & & a_{2j_2}b_{j_2n} \\ \vdots & & & \\ a_{nj_n}b_{j_n1} & a_{nj_n}b_{j_n2} & & a_{nj_n}b_{j_nn} \end{vmatrix} = Q_k \begin{vmatrix} b_{j_11} & b_{j_12} & \dots & b_{j_1n} \\ b_{j_21} & b_{j_22} & & b_{j_2n} \\ \vdots & & & \\ b_{j_n1} & b_{j_n2} & & b_{j_nn} \end{vmatrix},$$

gde je $Q_k = a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

Ako su neki od brojeva $j_1, j_2, \dots, j_n$ jednaki, tada je determinanta na desnoj strani poslednje jednakosti jednaka nuli, s obzirom da ima bar dve jednake vrste. Ako su, međutim, svi brojevi $j_1, j_2, \dots, j_n$ među sobom različiti, preuređenjem vrsta determinante tako da u m-toj vrsti elementi umesto indeksa j_m imaju indekse m, tj. indeksi vrsta posle njihove razmene (transpozicije) čine osnovnu permutaciju $(1, 2, \dots, n)$, imamo da je

$$D_k = a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}(-1)^j(\det B),$$

gde je j broj inverzija u permutaciji $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Prema tome,

$$\det C = \sum D_k = \sum (-1)^j a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}(\det B) = (\det A)(\det B). \qquad \square$$

Kako je determinanta matrice jednaka determinanti njene transponovane matrice, na osnovu (III.3.3.5) zaključujemo da je

$$\det C = \det(AB) = \det(AB^T) = \det(A^TB) = \det(A^TB^T),$$

što znači da kao matricu $C = [c_{ij}]_1^n$ možemo uzeti bilo koju od sledeće četiri matrice: AB, AB^T, A^TB, A^TB^T. Drugim rečima, proizvod dve determinante može se predstaviti kao determinanta $|c_{ij}|_1^n$, uzimajući za elemente c_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ bilo koji od sledeća četiri izraza:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{kj}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{jk}.$$

III.3.4 Razlaganje determinante

Već smo videli da se izračunavanje deteminanta drugog reda $(n = 2)$ sprovodi po formuli

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

tj. tako što se proizvod elemenata determinante na silaznoj dijagonali uzme sa + predznakom, a na uzlaznoj dijagonali sa − predznakom.

Slično, umesto po definicionoj formuli, determinantu trećeg reda $(n = 3)$ možemo izračunati korišćenjem tzv. *Sarrusovog*[6] *pravila* koje se sastoji u proširenju determinante, dopisivanjem prve dve kolone, i uzimanju svih proizvoda po silaznim dijagonalama sa pozitivnim predznakom i svih proizvoda po uzlaznim dijagonalama sa negativnim predznakom. Dakle,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad = \big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\big)$$
$$-\big(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\big).$$

Situacija se komplikuje pri izračunavanju determinanata višeg reda.

Međutim, mi ćemo ovde pokazati kako je moguće determinantu n-tog reda izračunati pomoću n determinanata reda $n-1$. Time smo u mogućnosti da problem izračunavanja determinate višeg reda svedemo na problem višestrukog izračunavanja determinanata trećeg ili drugog reda. Pored ovoga, dobijene formule imaju i širi, teorijski, značaj.

Da bismo došli do ovih formula, krenimo najpre od izračunavanja determinante trećeg reda i postupimo tako što ćemo izdvojiti iz svih sabiraka

[6] Pierre Frédérique Sarrus (1798–1861), francuski matematičar.

elemente samo jedne vrste, ili samo jedne kolone. Izaberimo, na primer, prvu vrstu. Tako imamo

$$\begin{aligned} D &= \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

Ako izraze u zagradama protumačimo kao determinante drugog reda, imamo

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

tj.

$$D = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13}, \tag{III.3.4.1}$$

gde smo sa D_{ij} označili determinante, koje se dobijaju iz determinante D izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone. U našem slučaju imamo da je $i = 1$. Za determinantu D_{ij} kažemo da je *minor* ili *subdeterminanta* elementa a_{ij} date determinante. Za formulu (III.3.4.1) kažemo da je *razlaganje* ili *razvoj determinante* po elementima prve vrste.

Moguće je dati razvoj determinante D i po elementima bilo koje vrste, tj. bilo koje kolone. Tako imamo razvoje

$$\begin{aligned} D &= -a_{21}D_{21} + a_{22}D_{22} - a_{23}D_{23} \\ &= a_{31}D_{31} - a_{32}D_{32} + a_{33}D_{33} \\ &= a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + a_{31}D_{31} \\ &= -a_{12}D_{12} + a_{22}D_{22} - a_{32}D_{32} \\ &= a_{13}D_{13} - a_{23}D_{23} + a_{33}D_{33}. \end{aligned}$$

Na osnovu dobijenih razlaganja determinante trećeg reda, zaključujemo da uz neke elemente u razvoju stoji predznak $+$, a uz neke predznak $-$. Primetimo da uz element a_{ij} uvek stoji $(-1)^{i+j}$. Dakle, ovaj predznak je isključivo određen pozicijom elementa a_{ij} u determinanti, pa se zato i naziva predznak mesta (i, j).

Slično, može se razmatrati i slučaj determinante n-tog reda. Razvijajući takvu determinantu po elementima bilo koje vrste, tj. bilo koje kolone, dobijamo linearnu kombinaciju od n determinanata $(n-1)$-og reda.

Definicija III.3.4.1 Ako se u determinanti n-tog reda

$$
\text{(III.3.4.2)} \qquad D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

izostave elementi i-te vrste i j-te kolone $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, za dobijenu determinantu $(n-1)$-og reda, u oznaci D_{ij}, kažemo da je minor ili subdeterminanta elementa a_{ij}.

Za proizvod predznaka mesta (i, j) i minora elementa a_{ij}, u oznaci A_{ij}, kažemo da je *kofaktor elementa* a_{ij}.

Dakle,

$$
A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n).
$$

Da bismo razvili determinantu (III.3.4.2), na primer, po elementima prve vrste, pođimo od definicione formule

$$
\text{(III.3.4.3)} \qquad D = \det A = \sum (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},
$$

gde se sumiranje izvodi preko svih permutacija $P_\nu = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, dok je j broj inverzija u permutaciji P_ν.

Da bismo odredili koeficijent uz a_{11} u izrazu (III.3.4.3), posmatrajmo sve one permutacije P_ν koje počinju sa 1, tj. one kod kojih je $j_1 = 1$. Tada je koeficijent uz a_{11}, upravo, zbir

$$
\text{(III.3.4.4)} \qquad \sum (-1)^k a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}.
$$

Sumiranje se izvodi preko svih permutacija $(j_2, j_3, \dots, j_n)$ osnovnog skupa $\{2, 3, \dots, n\}$, a k je odgovarajući broj inverzija u permutaciji $(j_2, j_3, \dots, j_n)$. Naravno, po definiciji determinante, zbir (III.3.4.4) predstavlja determinantu

$$
D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Dakle, koeficijent uz element a_{11} je minor $D_{11} = (-1)^{1+1} D_{11} = A_{11}$.

Odredimo sada koeficijent uz element a_{12}. Taj slučaj se svodi na prethodni. Naime, permutacijom prve i druge kolone u (III.3.4.2) (ovde izraz permutacija kolona koristimo u smislu uzajamne razmene mesta tih kolona), dolazimo do determinante koja je po znaku suprotna determinanti D. Dakle,

$$
\text{(III.3.4.5)} \qquad D = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Na osnovu prethodnog, izostavljanjem prve vrste i prve kolone u determinanti na desnoj strani u (III.3.4.5), dobijamo koeficijent uz a_{12} u razvoju ove determinante, što je, u stvari, minor

$$
D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Dakle, koeficijent uz a_{12} u razvoju determinate III.3.4.2 je

$$
-D_{12} = (-1)^{1+2} D_{12} = A_{12}.
$$

U opštem slučaju, za određivanje koeficijenta uz element a_{1k} potrebno je k-tu kolonu u determinanti D redom permutovati sa $(k-1)$-om, $(k-2)$-gom, ..., i, najzad, sa prvom kolonom, dovodeći na taj način element a_{1k} na poziciju $(1,1)$. Kako se, pri ovome, čini $k-1$ permutacija kolona, to je, saglasno prethodnom, koeficijent uz a_{1k} u razvoju determinante D jednak $(-1)^{k-1} D_{1k} = (-1)^{1+k} D_{1k}$.

Prema tome, determinantu D možemo razviti na sledeći način

$$
D = a_{11} D_{11} - a_{12} D_{12} + \cdots + (-1)^{1+k} a_{1k} D_{1k} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} D_{1n},
$$

ili, korišćenjem kofaktora,

$$
D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1n} A_{1n}.
$$

Naravno, kao i u slučaju determinante trećeg reda, moguće je opštu determinantu n-tog reda razložiti po elementima bilo koje vrste, tj. bilo koje kolone. Tako, u stvari, imamo *Laplaceove*[7] *formule*, date sledećom teoremom:

---

[7] Pierre Simon de Laplace (1749–1827), veliki francuski matematičar.

Teorema III.3.4.1 *Determinanta D, određena sa* (III.3.4.2), *može se pomoću kofaktora njenih elemenata razložiti na sledeće načine:*

$$\text{(III.3.4.6)} \qquad D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\text{(III.3.4.7)} \qquad D = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

U vezi sa Laplaceovim formulama moguće je postaviti jedan opštiji problem. Naime, ako u razvoju (III.3.4.6) umesto kofaktora A_{ik}, koji odgovaraju elementima i-te vrste, uzmemo recimo kofaktore A_{jk}, koji odgovaraju elementima j-te vrste, šta će biti sa ovim zbirom? Slično pitanje može se postaviti i za formulu (III.3.4.7). Odgovor na ova pitanja daje sledeća teorema:

Teorema III.3.4.2 *Za svako $i, j = 1, \ldots, n$ važe identiteti:*

$$\text{(III.3.4.8)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij},$$

$$\text{(III.3.4.9)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij},$$

gde je δ_{ij} Kroneckerova delta.

Dokaz. Dokazaćemo samo formulu (III.3.4.8). Formula (III.3.4.9) dokazuje se analogno.

Za $j = i$ formula (III.3.4.8) postaje (III.3.4.6).

Pretpostavimo sada da je $j \neq i$. Ako determinantu D razvijemo po elementima j-te vrste, imamo

$$\text{(III.3.4.10)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk} = D.$$

Ako u determinanti D stavimo $a_{jk} = a_{ik}$ $(k = 1, \ldots, n)$, imamo da je $D = 0$ (jer su u posmatranoj determinanti dve vrste identične), tako da (III.3.4.10) implicira

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \qquad (i \neq j).$$

Ovim je dokazan identitet (III.3.4.8). □

Primer 1. Pri rešavanju mnogih problema javlja se potreba za izračunavanjem determinante

$$V_n \equiv V_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{vmatrix}, \qquad x_i \neq x_j \ (i \neq j),$$

koja je poznata kao *Vandermondeova*[8] *determinanta*. Red ove determinante je $n+1$. Pokazaćemo sada da je

$$V_n = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i), \tag{III.3.4.11}$$

gde se množenje obavlja po svim indeksima i, j, za koje je $0 \le i < j \le n$.

Ako elementima $(k+1)$-ve kolone determinante V_n dodamo odgovarajuće elemente k-te kolone, prethodno pomnožene sa $-x_0$, redom za $k = n, n-1, \ldots, 1$, dobijamo

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0 x_2 & & x_2^n - x_0 x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Razvijajući V_n po elementima prve vrste, determinanta se svodi na sledeću determinantu n-tog reda

$$V_n = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & \ldots & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} \\ x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)x_2 & & (x_2 - x_0)x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_n & & (x_n - x_0)x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

odakle, izvlačenjem zajedničkih faktora iz prve, druge, ..., n-te vrste, dobijamo

$$V_n = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

[8] Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796), francuski matematičar.

tj.

$$V_n(x_0,x_1,\ldots,x_n) = (x_1-x_0)(x_2-x_0)\cdots(x_n-x_0)V_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Ovim smo dobili rekurzivnu formulu, čijom primenom nalazimo redom

$$\begin{aligned} V_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)V_{n-2}(x_2,\ldots,x_n), \\ &\vdots \\ V_1(x_{n-1},x_n) &= (x_n-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Iz dobijenih jednakosti neposredno sleduje (III.3.4.11). △

Primer 2. Neka je

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \qquad (k \geq 0),$$

gde su x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dati brojevi.

Odredićemo determinantu n-tog reda

$$D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & & s_n \\ \vdots & & & \\ s_{n-1} & s_n & & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Neka je $V_{n-1} \equiv V_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Vandermondeova determinanta n-tog reda razmatrana u prethodnom primeru. Na osnovu teoreme III.3.3.10 i komentara koji sledi ovu teoremu, imamo

$$V_{n-1}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

tj.

$$V_{n-1}^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & & s_n \\ \vdots & & & \\ s_{n-1} & s_n & & s_{2n-2} \end{vmatrix} = D.$$

Najzad, korišćenjem rezultata iz prethodnog primera i teoreme III.3.3.1 dobijamo

$$D = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2. \qquad \triangle$$

III.4 INVERZNE MATRICE

III.4.1 Adjungovana i inverzna matrica

Neka M_n označava skup svih kvadratnih matrica reda n.

Definicija III.4.1.1 Neka je A_{ij} kofaktor elementa a_{ij} matrice

$$A = [a_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Tada se matrica

$$\operatorname{adj} A = \operatorname{adj}\,[a_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

naziva *adjungovana matrica* matrice A.

Primetimo da se kofaktori, kao elementi matrice $\operatorname{adj} A$, pojavljuju u tzv. transponovanom obliku, tj. A_{ij} se nalazi u j-toj vrsti i i-toj koloni, dakle, na poziciji koja odgovara elementu a_{ij} u transponovanoj matrici A^T.

Teorema III.4.1.1 *Za matrice A i $\operatorname{adj} A$ važi jednakost*

$$A\cdot(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)\cdot A = (\det A)\, I\,. \tag{III.4.1.1}$$

Dokaz. Neka je $C = [c_{ij}]_{n\times n} = A\cdot(\operatorname{adj} A)$. Tada se elementi matrice C

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk},$$

na osnovu (III.3.4.8), mogu izraziti u obliku $c_{ij} = (\det A)\delta_{ij}$, gde je δ_{ij} Kroneckerova delta. Dakle, $C = (\det A)I$. Slično se, korišćenjem (III.3.4.9), dokazuje da je $(\operatorname{adj} A)A = (\det A)I$. □

Teorema III.4.1.2 *Za matricu $A \in M_n$ važi jednakost*

$$\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}. \tag{III.4.1.2}$$

Dokaz. Primenom teoreme III.3.3.10 na (III.4.1.1) dobijamo

$$(\det A)\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^n.$$

Ako je $\det A \neq 0$, na osnovu prethodne jednakosti, dobijamo (III.4.1.2).

Može se pokazati da ova formula ostaje u važnosti i u slučaju kada je $\det A = 0$. □

Za determinantu adjungovane matrice koristi se i termin *adjungovana determinanta.*

Definicija III.4.1.2 Neka $A \in M_n$. Za matricu $X \in M_n$ kažemo da je *inverzna matrica* matrice A ako je

(III.4.1.3) $$AX = XA = I.$$

Kada postoji matrica X koja zadovoljava (III.4.1.3), primenom teoreme III.3.3.10, zaključujemo da mora biti $(\det A)(\det X) = \det I = 1$, tj. da se potreban uslov za egzistenciju inverzne matrice svodi na uslov $\det A \neq 0$. Naravno, tada je $\det X = 1/\det A$. Jednostavno se pokazuje da je ovaj uslov, $\det A \neq 0$, istovremeno i dovoljan uslov za egzistenciju inverzne matrice X, za koju ćemo, nadalje, koristiti oznaku A^{-1}.

Teorema III.4.1.3 *Ako i samo ako je* $\det A \neq 0$, *tada kvadratna matrica* A *ima inverznu matricu* A^{-1}, *ona je jedinstvena i može se predstaviti u obliku*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, adj\, A\,.$$

Dokaz. Videli smo da je uslov $\det A \neq 0$ potreban. Pretpostavimo sada da je $\det A \neq 0$. Deljenjem jednakosti (III.4.1.1) sa $\det A$, dobijamo

$$A\left(\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A\right) = \left(\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A\right)A = I\,,$$

odakle, poređenjem sa (III.4.1.3), zaključujemo da je matrica

$$X = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$$

inverzna matrica za A.

Za dokaz jedinstvenosti inverzne matrice možemo se pozvati na teoremu I.2.1.3 koja je data na strani 20 ili, pak, da pretpostavimo da postoje dve inverzne matrice X i Y, takve da je

$$AX = XA = I \qquad \text{i} \qquad AY = YA = I.$$

S obzirom da je proizvod matrica asocijativan, imamo

$$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y. \qquad \square$$

Primer 1. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\det A = -1 \neq 0$, zaključujemo da postoji inverzna matrica A^{-1}.

Odredićemo najpre adjungovanu matricu $\operatorname{adj} A$, pri čemu je pogodno poći od transponovane matrice

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Naime, umesto da izračunavamo kofaktore elemenata u matrici A, na mesto kojih ih upisujemo, pa tako dobijenu matricu transponujemo, možemo prvo da transponujemo matricu A pa da na mesto njenih elemenata upisujemo odgovarajuće kofaktore.

Tada redom (po vrstama matrice $\operatorname{adj} A$) nalazimo

$$A_{11} = D_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -32, \qquad A_{21} = -D_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{31} = D_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{12} = -D_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{22} = D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{32} = -D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = D_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -25, \qquad A_{23} = -D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{33} = D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 1.$$

Prema tome,

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -32 & -14 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Najzad, dobijamo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Definicija III.4.1.3 Ako za matricu $A \in M_n$ postoji inverzna matrica kažemo da je matrica A *regularna* ili *nesingularna matrica.*

U protivnom, za matricu A kažemo da je *singularna* ili *neregularna.*

Napomena 1. Ako je A matrica operatora $\mathcal{A}\colon X \to X$ ($\dim X = n$) u odnosu na neku fiksiranu bazu B, tada je matrica inverznog operatora $\mathcal{A}^{-1}$, ukoliko postoji, upravo, matrica A^{-1}. Kao što je poznato samo regularni operatori imaju inverzni operator. Dakle, matrice regularnih operatora su regularne matrice.

Primer 2. Neka je $M_n(x, \alpha)$ skup kvadratnih matrica n-tog reda oblika

$$A = A(x, \alpha) = \begin{bmatrix} x+\alpha & x & x & \dots & x \\ x & x+\alpha & x & & x \\ x & x & x+\alpha & & x \\ \vdots & & & & \\ x & x & x & & x+\alpha \end{bmatrix}.$$

Za određivanje determinante matrice A postupimo na sledeći način:

1° Elementima druge, treće, ..., n-te vrste determinante, redom dodajemo odgovarajuće elemente prve vrste, prethodno pomnožene sa -1. Tada dobijamo

$$\det A = \begin{vmatrix} x+\alpha & x & x & \dots & x \\ -\alpha & \alpha & 0 & & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha & & 0 \\ \vdots & & & & \\ -\alpha & 0 & 0 & & \alpha \end{vmatrix}.$$

2° Elementima prve kolone dodajmo redom odgovarajuće elemente druge, treće, ..., n-te kolone determinante. Tako dobijamo trougaonu determinantu

$$\det A = \begin{vmatrix} nx+\alpha & x & x & \dots & x \\ 0 & \alpha & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^{n-1}(nx+\alpha).$$

Dakle, matrica A je regularna ako je $\alpha \neq 0$ i $nx + \alpha \neq 0$. U tom slučaju, inverzna matrica postoji. Pokazaćemo da je A^{-1} istog oblika kao i matrica A, tj. da je $A(x, \alpha)^{-1} = A(y, \beta)$, gde su y i β parametri koje ćemo odrediti u funkciji parametara x i α.

Ako sa U označimo matricu n-tog reda, čiji su svi elementi jednaki jedinici, tada se matrica A može jednostavno izraziti u obliku $A = xU + \alpha I$.

Pretpostavimo da je $A^{-1} = yU + \beta I$. Tada imamo

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= (xU + \alpha I)(yU + \beta I) \\ &= xyU^2 + \alpha yU + \beta xU + \alpha\beta I \\ &= (nxy + \alpha y + \beta x)U + \alpha\beta I \end{aligned}$$

jer je $U^2 = nU$.

Kako je $AA^{-1} = I$, na osnovu prethodnog, mora biti

$$nxy + \alpha y + \beta x = 0 \qquad \text{i} \qquad \alpha\beta = 1,$$

odakle sleduje

$$y = -\frac{x}{\alpha(nx + \alpha)} \qquad \text{i} \qquad \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Dakle, $A(x, \alpha)^{-1} = A(y, \beta)$. $\triangle$

Teorema III.4.1.4 *Za regularnu matricu A važi*

(III.4.1.4) $$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}.$$

Dokaz. Kako je A regularna matrica, to je i A^T, takođe, regularna matrica. Transponovanjem jednakosti $AA^{-1} = I$, tj.

$$\left(AA^{-1}\right)^T = I^T,$$

dobijamo (videti (III.2.4.1) na strani 121)

$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = I,$$

odakle sleduje (III.4.1.4). $\square$

Kao specijalan slučaj teoreme I.2.1.5 (strana 20) imamo sledeći rezultat:

Teorema III.4.1.5 *Za regularne matrice A i B važi jednakost*

(III.4.1.5) $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Dokaz. Kako je

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

i

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,$$

zaključujemo da jednakost (III.4.1.5) važi. □

Matematičkom indukcijom može se dokazati da važi sledeće tvrđenje:

Teorema III.4.1.6 *Za regularne matrice $A_1, \ldots, A_m$ važi jednakost*

$$(A_1 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Za regularne matrice može se definisati stepen matrice A^k i za negativno celo k. Naime, ako je k prirodan broj, možemo uzeti da je

$$A^{-k} = (A^{-1})^k,$$

a, s obzirom na prethodnu teoremu, takođe važi

$$A^{-k} = (A^k)^{-1}.$$

III.4.2 Blok matrice i operacije sa njima

Definicija III.4.2.1 Ako se matrica A tipa $m \times n$ mrežom horizontalnih i vertikalnih pravih razloži na više matrica, kaže se da je *matrica razbijena na blokove.*

Blokovi matrice A su matrice A_{ij} tipa $m_i \times n_j$, gde su

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = m \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{q} n_j = n.$$

Operacije sa matricama razbijenim na blokove su formalno iste sa operacijama kod običnih matrica. Naime, važe sledeći rezultati:

Teorema III.4.2.1 *Neka su matrice A i B razbijene na blokove, tj. neka je*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2q} \\ \vdots & & & \\ A_{p1} & A_{p2} & & A_{pq} \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & & B_{2q} \\ \vdots & & & \\ B_{p1} & B_{p2} & & B_{pq} \end{bmatrix},$$

gde su A_{ij} i B_{ij} matrice istog tipa. Tada je

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1q} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & & \lambda A_{2q} \\ \vdots & & & \\ \lambda A_{p1} & \lambda A_{p2} & & \lambda A_{pq} \end{bmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$$

i

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1q} + B_{1q} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & & A_{2q} + B_{2q} \\ \vdots & & & \\ A_{p1} + B_{p1} & A_{p2} + B_{p2} & & A_{pq} + B_{pq} \end{bmatrix}.$$

Teorema III.4.2.2 *Neka su*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2q} \\ \vdots & & & \\ A_{p1} & A_{p2} & & A_{pq} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & & B_{2s} \\ \vdots & & & \\ B_{q1} & B_{q2} & & B_{qs} \end{bmatrix},$$

i neka su blokovi takvi da je broj kolona bloka A_{ij} jednak broju vrsta bloka B_{jk} $(i = 1, \dots, p;\ j = 1, \dots, q;\ k = 1, \dots, s)$. Tada je

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1s} \\ C_{21} & C_{22} & & C_{2s} \\ \vdots & & & \\ C_{p1} & C_{p2} & & C_{ps} \end{bmatrix},$$

gde je $C_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{q} A_{ij}B_{jk}$ $(i = 1, \dots, p;\ k = 1, \dots, s)$.

Primer 1. Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ako stavimo

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix},$$

mamo

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ O & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$A_{22}B_{22} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dobijamo

$$AB = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \qquad \triangle$$

Neposrednim množenjem može se dokazati sledeći rezultat:

Teorema III.4.2.3 *Neka je*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

regularna matrica, gde su A_{11} i A_{22} kvadratne matrice. Ako je matrica A_{22} regularna, tada je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

gde su

$$X_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \qquad X_{12} = -X_{11}A_{12}A_{22}^{-1},$$
$$X_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}X_{11}, \qquad X_{22} = A_{22}^{-1}(I - A_{21}X_{12}).$$

Primer 2. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

odredićemo A^{-1}. Neka su

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu teoreme III.4.2.3, imamo redom:

$$\begin{aligned} X_{11} &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}, \\ X_{12} &= -X_{11}A_{12}A_{22}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 & 20 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}, \\ X_{21} &= -A_{22}^{-1}A_{21}X_{11} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \\ X_{22} &= A_{22}^{-1}(I - A_{21}X_{12}) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & -7 & 20 \\ -7 & -3 & 5 & -10 \\ \hline 9 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right]. \qquad \triangle$$

Neka je A kvadratna matrica reda n podeljena na blokove na sledeći način

$$\text{(III.4.2.1)} \qquad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2p} \\ \vdots & & & \\ A_{p1} & A_{p2} & & A_{pp} \end{bmatrix} \qquad (p \geq 2),$$

tako da su dijagonalni blokovi $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{pp}$ kvadratne matrice.

Definicija III.4.2.2 Za matricu A, datu sa (III.4.2.1), u kojoj su svi vandijagonalni blokovi $A_{ij} = O$ $(i \neq j)$, kažemo da je *kvazidijagonalna matrica* i označavamo je sa

$$\text{(III.4.2.2)} \qquad A = A_{11} \dotplus A_{22} \dotplus \cdots \dotplus A_{pp}.$$

Dijagonalni blokovi matrice A, koji se pojavljuju u formuli (III.4.2.2), često se označavaju izostavljanjem drugog indeksa. Tako, formula (III.4.2.2) postaje

$$A = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \cdots \dotplus A_p. \tag{III.4.2.3}$$

Primer 3. Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je kvazidijagonalna i može se predstaviti u obliku

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dotplus [2] \dotplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Na kraju ovog odeljka navešćemo dve teoreme koje se odnose na operacije sa kvazidijagonalnim matricama.

Teorema III.4.2.4 *Ako je λ skalar i k prirodan broj, za kvazidijagonalnu matricu A, oblika*

$$A = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \cdots \dotplus A_p,$$

gde su matrice A_i $(i = 1, \ldots, p)$ istoga reda, važe jednakosti

$$\begin{aligned} \lambda A &= \lambda A_1 \dotplus \lambda A_2 \dotplus \cdots \dotplus \lambda A_p, \\ A^T &= A_1^T \dotplus A_2^T \dotplus \cdots \dotplus A_p^T, \\ A^k &= A_1^k \dotplus A_2^k \dotplus \cdots \dotplus A_p^k. \end{aligned}$$

Teorema III.4.2.5 *Za kvazidijagonalne matrice*

$$A = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \cdots \dotplus A_p \qquad i \qquad B = B_1 \dotplus B_2 \dotplus \cdots \dotplus B_p,$$

gde su matrice A_i i B_i $(i = 1, \ldots, p)$ istoga reda, važe jednakosti

$$A + B = (A_1 + B_1) \dotplus (A_2 + B_2) \dotplus \cdots \dotplus (A_p + B_p)$$

i

$$AB = A_1 B_1 \dotplus A_2 B_2 \dotplus \cdots \dotplus A_p B_p.$$

III.4.3 Neke specijalne klase matrica

U ovom odeljku navodimo nekoliko važnih klasa kvadratnih matrica.

Definicija III.4.3.1 Matrica A je *realna* ako su joj svi elementi realni brojevi.

Definicija III.4.3.2 Matrica A je *pozitivna* ako su joj svi elementi pozitivni brojevi.

Analogno se definišu: *negativne, nenegativne* i *nepozitivne* matrice.

Definicija III.4.3.3 Kvadratna matrica A je *simetrična* ako je $A^T = A$.

Definicija III.4.3.4 Kvadratna matrica A je *koso-simetrična* ako je $A^T = -A$.

Kod simetričnih matrica imamo da je $a_{ij} = a_{ji}$, a kod koso-simetričnih $a_{ij} = -a_{ji}$. Iz poslednje jednakosti sleduje da su kod koso-simetričnih matrica elementi na glavnoj dijagonali jednaki nuli, tj. da je $a_{ii} = 0$.

Definicija III.4.3.5 Ako za kvadratnu matricu A važi $A^T A = I$, gde je I jedinična matrica, matrica A se naziva *ortogonalna matrica.*

Za kvadratne matrice nad poljem $\mathbb{C}$ mogu se uvesti klase hermitskih i koso-hermitskih matrica pomoću sledećih definicija:

Definicija III.4.3.6 Kvadratna matrica A je *hermitska* ako je $A^* = A$.

Definicija III.4.3.7 Kvadratna matrica A je *koso-hermitska* ako je $A^* = -A$.

Definicija III.4.3.8 Ako za kvadratnu matricu A važi $A^* A = I$, gde je I jedinična matrica, matrica A se naziva *unitarna matrica.*

Neka je V_n skup svih kompleksnih vektora[9] $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$. Korišćenjem skalarnog proizvoda dva vektora

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \quad \text{i} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T,$$

[9] Može se uzeti da je $V_n = \mathbb{C}^n$.

definisanog pomoću

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k,$$

uslov za hermitsku matricu ($A = A^*$) može se predstaviti u ekvivalentnom obliku

$$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_n) \qquad (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}).$$

Slično, uslov za koso-hermitsku matricu ($A = -A^*$) može se predstaviti u obliku

$$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_n) \qquad (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = 0.$$

III.5 ZADACI ZA VEŽBU

1. Neka su operatori $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadati sa $\mathcal{A}(x, y, z) = (3x, 2y - x, x - z)$, $\mathcal{B}(x, y, z) = (x + 2y, x + y - z, x)$. Odrediti matrice operatora $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ u prirodnoj bazi.

2. Neka je operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_1$ definisan sa $\mathcal{A}(a, b, c) = (2a + b)x + (b - c)$.

a) Dokazati da je $\mathcal{A}$ linearan operator.

b) Odrediti matricu operatora $\mathcal{A}$ u bazama $\big\{(0, 1, 2), (0, 3, 0), (1, 1, 0)\big\}$ i $\big\{2x + 1, x\big\}$.

c) Odrediti rang i defekt operatora $\mathcal{A}$.

3. Neka je operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to M_2$ definisan sa

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & x + y \\ y + z & z \end{bmatrix}.$$

a) Dokazati da je $\mathcal{A}$ linearan operator.

b) Odrediti matricu operatora $\mathcal{A}$ u bazama $\{e_1, e_2, e_3\}$ i $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, gde su

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (1, 1, 0), \qquad e_3 = (1, 1, 1)$$

i

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Odrediti rang i defekt operatora $\mathcal{A}$.

4. Neka je operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadat matricom

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

u bazama $\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ i $\{(1,1),(1,-1)\}$. Odrediti matricu operatora $\mathcal{A}$ u prirodnoj bazi, kao i $\mathcal{A}(2,-2,2)$.

5. Neka je $\mathcal{M}_{2,2}$ vektorski prostor kvadratnih matrica reda dva i $\mathcal{A} : \mathcal{M}_{2,2} \to \mathcal{M}_{2,2}$, operator definisan sa:

$$\mathcal{A}X = \frac{1}{2}\left(X + X^T\right).$$

a) Dokazati da je operator $\mathcal{A}$ linearan.

b) Odrediti matricu operatora $\mathcal{A}$ u odnosu na bazu

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) Odrediti rang i defekt operatora $\mathcal{A}$.

6. Neka su date matrice A i B,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ispitati da li postoje matrice:

$$AB, \quad BA, \quad a^{-1}, \quad (AB)^{-1}, \quad 2A, \quad 2A + B,$$

i, ako postoje, odrediti ih.

7. Neka je M skup svih kvadratnih matrica oblika

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ako je operacija $\cdot$ množenje matrica, ispitati strukturu $(M, \cdot)$.

8. Neka je M_a kvadratna matrica reda n oblika

$$M_a = \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & & a \\ \vdots & & & \\ a & a & & a \end{bmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Ako je $\mathcal{M} = \{M_a \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$, ispitati strukturu $(\mathcal{M}, \cdot)$, gde je $\cdot$ množenje matrica.

9. Ako je $\mathcal{M}$ skup svih matrica oblika

$$M(a,\alpha) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (a > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}),$$

ispitati strukturu $(\mathcal{M}, \cdot)$. Koje osobine ima preslikavanje $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$, definisano pomoću

$$f\big(M(a,\alpha)\big) = ae^{i\alpha}.$$

10. Odrediti sve kvadratne matrice A, reda dva, za koje je $A^2 = A$.

Rezultat. Tražene matrice su

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gde je $\alpha \in \mathbb{R}$.

11. Odrediti sve kvadratne matrice A, reda dva, čiji je kvadrat jedinična matrica.

Rezultat. Tražene matrice su:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad (a^2 + bc = 1).$$

12. Odrediti sve matrice M koje komutuju sa matricom $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, a zatim pokazati da skup svih tih matrica čini komutativni prsten u odnosu na sabiranje i množenje matrica.

Rezultat. $M = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{bmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{C}).$

13. Odrediti sve matrice M koje su komutativne sa matricom

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

a zatim odrediti matrice M^n, gde je n prirodan broj.

14. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (a \in \mathbb{C}).$$

a) Odrediti $(A + I)^3$.

b) Izračunati A^n $(n \in \mathbb{N})$.

15. Ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, odrediti A^n $(n \in \mathbb{N})$.

16. Date su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ako je n prirodan broj, odrediti matrice A^n i B^n.

Rezultat.

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 - 2^{2n+1} & 2^{2n+1} - 2 \\ 5 - 5 \cdot 2^{2n} & 5 \cdot 2^{2n} - 2 \end{bmatrix}.$$

17. Neka su matrice A i B zadate sa $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$.

a) Dokazati da su A i B slične matrice.

b) Odrediti matrice A^{100} i B^{100}.

18. Neka je data matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odrediti vrednost izraza $A^{2008} - A^3$.

19. Ako je $z = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$ odrediti vrednost determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z & 1 & z \\ 1 & z^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

20. Proveriti rezultate:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^3(x+3);$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 3-x^2 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 5 \\ -7 & -7 & 6 & x^2-3 \end{vmatrix} = 23(x^2-4)(x^2-9).$$

21. Izračunati vrednost determinante n-tog reda D_n

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 5 \end{vmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

22. U zavisnosti od realnog parametra a odrediti vrednost determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+1 \end{vmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

23. Odrediti vrednost determinante n-tog reda

$$D_n = \begin{vmatrix} 2x & x+1 & 0 & \dots & 0 \\ x-1 & 2x & x+1 & & 0 \\ 0 & x-1 & 2x & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 2x \end{vmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

24. Odrediti $x \in \mathbb{R}$ tako da matrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & x & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & x \end{bmatrix}$$

bude regularna, a zatim za $x = -5$ odrediti A^{-1}.

25. Rešiti matričnu jednačinu $AX = B$, ako su date matrice

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

26. Neka je $(X_\omega, +, \cdot)$ linearni prostor prosto-periodičnih oscilacija nad poljem $\mathbb{R}$ i neka je $\mathcal{D}$ operator definisan pomoću

$$\mathcal{D}\big(A\cos(\omega t + \varphi)\big) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi).$$

a) Dokazati da je $\mathcal{D}$ automorfizam prostora $(X_\omega, +, \cdot)$.

b) Odrediti matricu opearatora $\mathcal{D}$ u bazi $B = \{\cos\omega t, -\sin\omega t\}$.

c) Ako je f izomorfizam prostora $(X_\omega, +, \cdot)$ i $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, odrediti $f(B)$.

d) Dokazati da je preslikavanje $\mathcal{D}_\mathbb{C} = f\mathcal{D}f^{-1}$ automorfizam prostora $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

e) Odrediti matricu operatora $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ u bazi $B_\mathbb{C} = \{1, i\}$, a zatim odrediti $f^{-1}(B_\mathbb{C})$.

GLAVA IV

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

IV.1 METODI REŠAVANJA

IV.1.1 Cramerove formule

Posmatrajmo sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih (x_1, x_2, $\ldots$, x_n)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
&\ \vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}
\tag{IV.1.1.1}
$$

Ako je $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, za sistem jednačina (IV.1.1.1) se kaže da je *homogen sistem.*

Definicija IV.1.1.1 Za uređenu n-torku brojeva $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ kažemo da je *rešenje sistema jednačina* (IV.1.1.1) ako se svaka jednačina ovog sistema za $x_k = \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ svodi na identitet (tj. kolokvijalno rečeno, svaka jednačina je zadovoljena).

Naravno, postavlja se pitanje egzistencije tog rešenaja, a onda i njegove jedinstvenosti ukoliko uopšte ono postoji.

Primetimo da homogeni sistem jednačina uvek ima tzv. *trivijalno rešenje* $\xi_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Sistem jednačina (IV.1.1.1) može se predstaviti matrično u obliku

$$Ax = \boldsymbol{b}, \tag{IV.1.1.2}$$

gde su A, $\boldsymbol{b}$, x, redom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{IV.1.1.3}$$

U upotrebi je sledeća terminologija: matrica A je *matrica sistema jednačina*, $\boldsymbol{b}$ je *vektor slobodnih članova*, a x je *vektor nepoznatih* ili *vektor rešenja*.

Pod pretpostavkom da je

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{IV.1.1.4}$$

pokazaćemo da postoji rešenje sistema jednačina (IV.1.1.1), da je ono jedinstveno, a pokazaćemo i kako se ono može odrediti.

Kako je, u ovom slučaju, matrica A regularna, množenjem matričnog oblika sistema jednačina (IV.1.1.2) inverznom matricom A^{-1} sa leve strane, dobijamo

$$x = A^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{IV.1.1.5}$$

Da je ovo i jedinstveno rešenje sistema jednačina (IV.1.1.2) lako se je uveriti. Naime, ako pretpostavimo da postoji i vektor $\boldsymbol{y} \neq x$ koji je takođe rešenje datog sistema jedanačina, tj. $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, tada bismo imali da je

$$A\boldsymbol{y} = Ax,$$

odakle, množenjem sa inverznom matricom A^{-1} sa leve strane, dolazimo do kontradikcije da je $\boldsymbol{y} = x$.

Odredimo sada elemente vektora rešenja iz (IV.1.1.5). To možemo uraditi direktno na osnovu (IV.1.1.5) (videti napomenu 1 na strani 169), a ložemo i na jedan prirodniji način. Naime, ako u determinanti

$$D \cdot x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k}x_k & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2,k-1} & a_{2k}x_k & a_{2,k+1} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{n,k-1} & a_{nk}x_k & a_{n,k+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

lemenmtima k-te kolone dodamo odgovarajué elemente svih ostalih kolona ošto ih redom pomnožimo sa $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$, dobijamo, uzimajući u obzir da su zadovoljene jednačine (IV.1.1.1),

(IV.1.1.6) $$D \cdot x_k = D_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

gde je

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

S obzirom da je po našoj početnoj pretpostavci $D \neq 0$, na osnovu (IV.1.1.6) imamo da je

(IV.1.1.7) $$x_k = \frac{D_k}{D} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Formule (IV.1.1.7) su poznate kao *Cramerove*[1] *formule*. Interesantno je primetiti da je ove formule izveo Leibnitz[2] još 1678. godine, a Cramer ih je našao tek 1750. godine.

Napomena 1. Primetimo da smo do Cramerovih formula mogli doći i direktno na osnovu (IV.1.1.5), odakle imamo

$$\boldsymbol{x} = \Big(\frac{1}{D}\operatorname{adj} A\Big)\boldsymbol{b} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

pa su odgovarajući elementi vektora $\boldsymbol{x}$

(IV.1.1.8) $$x_k = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

---

[1] Gabriel Cramer (1704–1752); švajcarski matematičar.

[2] Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716), veliki nemački matematičar.

Kako se suma na desnoj strani u (IV.1.1.8) može interpretirati kao razvoj determinante D_k po elementima k-te kolone, dolazimo do Cramerovih formula (IV.1.1.7).

Dakle, na osnovu prethodnog razmatranja, zaključujemo da ako je $D = \det A \neq 0$, sistem jednačina (IV.1.1.1) ima jedinstveno rešenje dato Cramerovim formulama (IV.1.1.7).

U slučaju kada je $D = 0$, a bar jedna od determinanata D_k različita od nule, imajući u vidu formule (IV.1.1.6) koje su izvedene na osnovu pretpostavke da su jednačine (IV.1.1.1) zadovoljene, zaključujemo da to nije slučaj, tj. sistem jednačina (IV.1.1.1) je *nemoguć* (*protivurečan*). Međutim, ako je $D = 0$ i $D_k = 0$, za svako $k = 1, 2, \ldots, n$, na osnovu prethodnog razmatranja ne možemo ništa konkretno zaključiti o rešivosti datog sistema jednačina. Taj slučaj biće razmatran kasnije.

Na osnovu Cramerovih formula može se izvesti zaključak da homogeni sistem jednačina, za koji je $D \neq 0$, ima samo trivijalno rešenje $x_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Primer 1. Neka je dat sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 8x_1 - x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Kako je

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

sistem ima jedinstveno rešenje

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{18}{18} = 1,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{36}{18} = 2,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{-18}{18} = -1. \qquad \triangle$$

Napomena 2. Cramerove formule imaju više teorijski, nego praktični značaj. One zahtevaju izračunavanje $n+1$ determinanata n-tog reda. Ako bismo vrednost determinante n-tog reda izračunavali po definiciji, potrebno je izvršiti $S_n = n! - 1$ sabiranja (ili oduzimanja) i $M_n = (n-1)n!$ množenja, što ukupno iznosi $P_n = S_n + M_n \approx n \cdot n!$. Pod pretpostavkom da je za obavljanje jedne računske operacije na računaru potrebna $1\,\mu s$, to bi za izračunavanje vrednosti jedne determinante tridesetog reda bilo potrebno oko

$$\frac{30 \cdot 30! \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{3600 \cdot 24 \cdot 365} \approx 2.5 \cdot 10^{20} \text{ godina.}$$

Uopšteno govoreći ovakav postupak je praktično neprimenljiv već za determinante reda $n > 4$.

IV.1.2 Gaussov metod eliminacije

Neka je dat sistem linearnih jednačina

$$\text{(IV.1.2.1)} \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rešenje. Sistem se može predstaviti matrično u obliku

$$\text{(IV.1.2.2)} \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

gde su A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ dati pomoću (IV.1.1.3).

Osnovni metod za rešavanje sistema linearnih jednačina je *Gaussov*[3] *metod eliminacije*, koji ima više varijanata. U suštini, Gaussov metod se zasniva na redukciji sistema (IV.1.2.2), primenom tzv. *elementarnih transformacija*, na trougaoni sistem jednačina

$$\text{(IV.1.2.3)} \qquad R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c},$$

gde su

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

[3] Carl Friedrich Gauss (1777–1855), veliki nemački matematičar.

Te elementarne transformacije moraju biti takve da sistem jednačina (IV.1.2.3) ima ista rešenja kao i polazni sistem (IV.1.2.2). Za takve sisteme jednačina kažemo da su *ekvivalentni sistemi.*

Sistem jednačina (IV.1.2.3) rešava se sukcesivno polazeći od poslednje jednačine. Naime,

$$x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}, \qquad x_i = \frac{1}{r_{ii}}\left(c_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik}x_k\right) \qquad (i = n-1, \ldots, 1).$$

Napomenimo da su koeficijenti $r_{ii} \neq 0$ jer po pretpostavci sistem (IV.1.2.2), tj. (IV.1.2.3), ima jedinstveno rešenje.

Pokazaćemo sada kako se sistem (IV.1.2.1) može redukovati na ekvivalentan sistem sa trougaonom matricom.

Pod pretpostavkom da je $a_{11} \neq 0$, izračunavamo najpre tzv. eliminacione faktore

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \qquad (i = 2, \ldots, n),$$

a zatim, množenjem prve jednačine u sistemu (IV.1.2.1) sa m_{i1} i oduzimanjem od i-te jednačine, dobijamo sistem od $n-1$ jednačina

$$\begin{aligned} a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}, \\ &\vdots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}, \end{aligned} \tag{IV.1.2.4}$$

gde su

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \quad b_i^{(2)} = b_i - m_{i1}b_1 \quad (i, j = 2, \ldots, n).$$

Pod pretpostavkom da je $a_{22}^{(2)} \neq 0$, primenjujući isti postupak na sistem jednačina (IV.1.2.4), sa $m_{i2} = a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$ $(i = 3, \ldots, n)$, dobijamo sistem od $n-2$ jednačine

$$\begin{aligned} a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)}, \\ &\vdots \\ a_{n3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(3)}x_n &= b_n^{(3)}, \end{aligned}$$

gde su

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)}, \quad b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)} \quad (i, j = 3, \ldots, n).$$

Nastavljajući ovaj postupak, posle $n-1$ koraka, dolazimo do jednačine

$$a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^{(n)}.$$

Najzad, ako iz svakog od dobijenih sistema uzmemo njegovu prvu jednačinu, dobijamo trougaoni sistem jednačina

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)}, \\
a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)}, \\
a_{33}^{(3)} x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)} x_n &= b_3^{(3)}, \\
&\vdots \\
a_{nn}^{(n)} x_n &= b_n^{(n)},
\end{aligned}$$

pri čemu smo, radi jednoobraznosti, stavili $a_{ij} \equiv a_{ij}^{(1)}$, $b_i \equiv b_i^{(1)}$.

Ovim smo sistem (IV.1.2.2) sveli na trougaoni oblik (IV.1.2.3).

Navedena trougaona redukcija ili, kako se često kaže, *Gaussova eliminacija* ili *Gaussov algoritam*, svodi se na izračunavanje koeficijenata

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)},$$

za $i, j = k+1, \ldots, n$ i $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Primetimo da su elementi matrice R i vektora $\mathbf{c}$ dati sa

$$r_{ij} = a_{ij}^{(i)}, \quad c_i = b_i^{(i)} \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = i, \ldots, n).$$

Da bi navedena trougaona redukcija egzistirala, potrebno je obezbediti uslov $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Elementi $a_{kk}^{(k)}$ su poznati kao *glavni elementi* ili *stožerski elementi*. Pod pretpostavkom da je matrica A sistema (IV.1.2.2) regularna, uslove $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ moguće je obezbediti permutacijom jednačina u sistemu.

Primer 1. Primenimo Gaussov metod eliminacije na sistem jednačina koji je posmatran u primeru 1. na strani 170.

Kako su $m_{21} = 1/2$ i $m_{31} = 2$, posle prvog eliminacionog koraka dobijamo

$$\begin{aligned}
3x_2 + \frac{3}{2} x_3 &= \frac{9}{2}, \\
3x_2 + 3\,x_3 &= 3.
\end{aligned}$$

S obzirom da je $m_{32} = 1$, posle drugog eliminacionog koraka imamo

$$\frac{3}{2}x_3 = -\frac{3}{2}.$$

Dakle, dobili smo trougaoni sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - \quad x_3 &= 1, \\ 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2}, \\ \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Najzad, polazeći od treće jednačine, dobijamo rešenja

$$\begin{aligned} x_3 &= -1, \\ x_2 &= \frac{1}{3}\Big(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\cdot(-1)\Big) = 2, \\ x_1 &= \frac{1}{4}\big(1 + 2\cdot 2 + (-1)\big) = 1. \qquad \triangle \end{aligned}$$

Primetimo da trougaona redukcija obezbeđuje jednostavno izračunavanje determinante sistema. Naime, važi

$$\det A = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{nn}^{(n)},$$

uz eventualnu promenu znaka ako je izvršen neparan broj permutacija jednačina sistema (tj. vrsta matrice sistema).

Napomena 1. Za rešavanje sistema od n jednačina sa n nepoznatih, ukupan broj računskih operacija u Gaussovom metodu iznosi

$$N(n) = \frac{1}{6}\big(4n^3 + 9n^2 - 7n\big).$$

Za dovoljno veliko n imamo $N(n) \approx 2n^3/3$. Na primer, za rešavanje sistema od $n = 30$ jednačina (ili izračunavanje vrednosti determinante 30-tog reda) potrebno je $0.018\,s$ ako se jedna računska operacija obavlja za $1\,\mu s$, a videli smo ranije (videti napomenu 2 na strani 171) da je za izračunavanje jedne determinante 30-tog reda na osnovu definicije, a sa istim vremenom za obavljanje jedne operacije, bilo potrebno $\approx 2.5 \cdot 10^{20}$ godina.

Sa numeričkog stanovišta (imajući u vidu kumuliranje grešaka zaokrugljivanja koje su neminovne u postupku izračunavanja na računskoj mašini, a u želji da se kumulirana greška učini što manjom) u toku eliminacionog procesa treba vršiti permutacije jednačina u cilju dobijanja maksimalnog po modulu glavnog elementa u svakom eliminacionom koraku. Ovakva modifikacija Gaussovog metoda se zove Gaussov metod sa izborom glavnog elementa i taj metod se najčešće nalazi u korisničkim softverskim paketima za numeričko rešavanje sistema linearnih jednačina. O drugim detaljima Gaussovog metoda, kao i o drugim metodima za rešavanje sistema jednačina, može se naći u knjizi: G. V. MILOVANOVIĆ, *Numerička analiza, I deo* (treće izdanje), Naučna knjiga, Beograd, 1991.

Gaussov metod može biti primenjen i na rešavanje sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{IV.1.2.5}$$

kod koga je broj jednačina veći od broja nepoznatih, tj. $m > n$. U tom slučaju, primenom Gaussovog metoda dobijamo ekvivalentni sistem jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}, \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)}, \\ &\ \vdots \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}, \\ &\ \vdots \\ a_{mn}^{(n)}x_n &= b_m^{(n)}. \end{aligned} \tag{IV.1.2.6}$$

Dakle, sistem (IV.1.2.5) imaće rešenje ako se iz poslednjih $m - n + 1$ jednačina u sistemu (IV.1.2.6) dobija ista vrednost za x_n, tj. ako je

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} = \cdots = \frac{b_m^{(n)}}{a_{mn}^{(n)}}.$$

Napomena 2. Gaussov metod eliminacije može se veoma uspešno primeniti i na inverziju matrica. (Primetimo da bi za direktno određivanje inverzne matrice neke regularne kvadratne matrice reda n bilo potrebno izračunati vrednost jedne determinante reda n i n^2 determinanata reda $n-1$.)

Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ regularna matrica i neka je

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$$

njena inverzna matrica. Vektori $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ su redom prva, druga, ..., n-ta kolona matrice X. Definišimo vektore $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ pomoću

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

S obzirom na jednakost

$$AX = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \dots & A\boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix},$$

problem određivanja inverzne matrice može se svesti na rešavanje n sistema linearnih jednačina

$$A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{IV.1.2.7}$$

Za rešavanje sistema (IV.1.2.7) pogodno je koristiti Gaussov metod eliminacije, s obzirom da se matrica A pojavljuje kao matrica svih sistema, pa njenu trougaonu redukciju treba izvršiti samo jednom. Pri ovome, sve transformacije koje su potrebne za trougaonu redukciju matrice A treba primeniti i na jediničnu matricu $I = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$. Na taj način matrica A transformiše se u trougaonu matricu R, a matrica I u matricu $C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}$. Najzad, ostaje da se reše trougaoni sistemi jednačina $R\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{c}_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Prema tome, primena Gaussovog metoda može se iskazati kao transformacija matrice $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ u matricu $\begin{bmatrix} R & C \end{bmatrix}$.

IV.2 EKVIVALENTNI SISTEMI VEKTORA I MATRICA

IV.2.1 Ekvivalentni sistemi vektora

Neka su u linearnom prostoru X nad poljem K data dva konačna skupa (sistema) vektora $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ i $U' = \{u'_1, u'_2, \ldots\}$ takvi da se lineali nad njima poklapaju, tj.

$$L(U) = L(U') = Y. \tag{IV.2.1.1}$$

Očigledno, svaki vektor iz Y ($\subset X$) može biti predstavljen kao linearna kombinacija vektora iz sistema U ili vektora iz sistema U'.

Definicija IV.2.1.1 Za dva sistema vektora U i U' kažemo da su među sobom *ekvivalentni sistemi* ako svaki vektor iz sistema U može da se izrazi kao linearna kombinacija vektora iz sistema U' i obrnuto.

Na osnovu prethodnog, sistemi U i U' su ekvivalentni ako i samo ako važi (IV.2.1.1). Lako je proveriti da je ekvivalentnost sistema po definiciji IV.2.1.1 stvarno jedna relacija ekvivalencije u skupu sistema vektora.

Neka je S skup svih sistema vektora u prostoru X. S obzirom na uvedenu relaciju ekvivalencije, skup S se može razbiti na klase ekvivalencije. Ako su U i U' dva proizvoljna sistema vektora iz jedne klase ekvivalencije, tada se, videli smo, lineali nad U i U' poklapaju. Interesantno pitanje koje se može postaviti odnosi se na broj vektora u ekvivalentnim sistemima. U vezi s tim, bitnu ulogu igra linearna nezavisnost vektora u sistemu.

Teorema IV.2.1.1 *Neka je $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ sistem linearno nezavisnih vektora. Ako se svaki vektor iz U može izraziti kao linearna kombinacija vektora iz sistema $U' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$, tada je $m \le n$.*

Dokaz. Pre svega uočimo da u sistemu U ne postoji nula-vektor i pretpostavimo, suprotno tvrđenju teoreme, da je $m > n$. Takođe, radi preglednijeg označavanja stavimo $U' \equiv U^{(1)}$.

Pridružimo sistemu $U^{(1)}$ vektor u_1 i posmatrajmo novi sistem vektora

$$\{u_1, u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}, \tag{IV.2.1.2}$$

koji je ekvivalentan sistemu $U^{(1)}$.

Kako se, prema uslovu teoreme, vektor u_1 može izraziti kao linearna kombinacija vektora is sistema $U^{(1)}$, tj. kako je

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{1i} u_i',$$

zaključujemo da je sistem vektora (IV.2.1.2) linearno zavisan. Ovo, pak, znači da se, prenumeracijom, neki od vektora sistema $U^{(1)}$, na primer vektor u_1', može izraziti kao linearna kombinacija preostalih n vektora iz sistema (IV.2.1.2). Ako sada isključimo ovaj vektor iz (IV.2.1.2), dobijamo novi sistem vektora

$$U^{(2)} = \{u_1, u_2', \ldots, u_n'\}. \tag{IV.2.1.3}$$

Jasno je da se, sada, svaki vektor sistema U može da izrazi kao linearna kombinacija sistema $U^{(2)}$, što znači da se, u uslovu teoreme, $U^{(1)}$ može zameniti sa $U^{(2)}$.

Nastavljajući ovakav postupak izmene sistema $U^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, uvođenjem novih vektora iz sistema U, proizilazi da se vektorima iz U mogu zameniti svi vektori polaznog sistema $U' = U^{(1)}$, svodeći ga tako na sistem

$$U^{(n+1)} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Međutim, ovo bi značilo da se svaki vektor iz U može izraziti kao linearna kombinacija vektora iz jednog njegovog podsistema $U^{(n+1)}$ $(\subset U)$, što protivureči činjenici da je U sistem linearno nezavisnih vektora. Dakle, ne može biti $m > n$. $\square$

Posmatrajmo sada dva ekvivalentna sistema linearno nezavisnih vektora. Na osnovu prethodne teoreme svaki od ovih sistema sadrži ne više vektora od drugog, što znači da se ekvivalentni sistemi linearno nezavisnih vektora sastoje od istog broja vektora.

S druge strane, ako imamo sistem U linearno zavisnih vektora, pri čemu svi vektori nisu istovremeno jednaki nula-vektoru, tada u U postoji ekvivalentni podsistem linearno nezavisnih vektora. Za ovaj podsistem kažemo da je *baza sistema vektora* U. Naravno, svaki sistem vektora može imati više baza, ali se sve one sastoje od istog broja vektora. Sve baze ekvivalentnih sistema su istovremeno ekvivalentni sistemi.

Definicija IV.2.1.2 Broj vektora baze jednog sistema U naziva se *rang sistema* U i označava se sa $\operatorname{rang} U$.

Drugim rečima, $\operatorname{rang} U$ je maksimalan broj linearno nezavisnih vektora sistema U.

Primer 1. Neka je u prostoru $\mathbb{R}^4$ dat sistem vektora $U = \{u_1, \ldots, u_4\}$, gde su

$$u_1 = (4, -2, -3, -1),\ u_2 = (-7, 3, 5, 3),\ u_3 = (1, 1, 0, -4),\ u_4 = (-2, 0, 1, 3).$$

Kako su, na primer, u_3 i u_4 linearno nezavisni vektori i $u_1 = -2u_3 - 3u_4$, $u_2 = 3u_3 + 5u_4$, zaključujemo da je $\operatorname{rang} U = 2$. Sistem U je ekvivalentan sa njegovim podsistemom $B = \{u_3, u_4\}$, koji predstavlja bazu. Naravno, ovo nije jedina baza sistema U. Na primer, baza je i sistem vektora $\{u_1, u_2\}$. Jedan praktičan način za određivanje ranga sistema vektora biće dat kasnije. $\triangle$

IV.2.2 Zavisnost matrice operatora od baze – ekvivalentne i slične matrice

U odeljku III.2.2 uveli smo matricu linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ na konačno-dimenzionalnim prostorima i, pri tom, naglasili da matrica operatora zavisi od izabranih baza u prostorima X i Y. U ovom odeljku proučićemo tu zavisnost.

Razmotrićemo najpre promenu koordinata proizvoljnog vektora u prostoru X dimenzije n pri promeni baze $B_e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ u bazu $B_{e'} = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$.

Najpre, definišimo linearni operator $\mathcal{P}\colon X \to X$ sa svojstvom da je

$$\mathcal{P}e_j = e'_j \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Ovako definisani operator $\mathcal{P}$ je regularan. Zaista, s obzirom da se svaki element $u \in X$ može predstaviti pomoću baze B_e sa $u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n \in K)$, to, jedno za drugim, imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}u = \theta \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{P}(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = \theta \\
&\Rightarrow \quad x_1\mathcal{P}e_1 + x_2\mathcal{P}e_2 + \cdots + x_n\mathcal{P}e_n = \theta \\
&\Rightarrow \quad x_1e'_1 + x_2e'_2 + \cdots + x_ne'_n = \theta \\
&\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \\
&\Rightarrow \quad u = \theta,
\end{aligned}$$

pa je, dakle, operator $\mathcal{P}$ stvarno regularan.

Kako se novi bazisni vektori e'_j $(j = 1, \ldots, n)$ mogu razviti po vektorima baze B_e, imamo

(IV.2.2.1)
$$\begin{aligned} \mathcal{P}e_1 = e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \cdots + p_{n1}e_n, \\ \mathcal{P}e_2 = e'_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \cdots + p_{n2}e_n, \\ &\vdots \\ \mathcal{P}e_n = e'_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \cdots + p_{nn}e_n, \end{aligned}$$

pa je matrica P prethodno definisanog operatora $\mathcal{P}$ u odnosu na par baza B_e i B_f prostora X, pri čemu je druga baza identična sa prvom, tj. $B_f = B_e$, data sa

(IV.2.2.2)
$$P = P_{e\,e} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{bmatrix},$$

a koju sada zovemo *matrica transformacije koordinata* pri prelasku sa baze B_e na bazu $B_{e'}$ s obzirom na jednakosti IV.2.2.1. Primetimo da je ova matrica regularna (kao matrica regularnog operatora).

Uočimo sada proizvoljan vektor $u \in X$ i razložimo ga po vektorima jedne i druge baze. Tada imamo

(IV.2.2.3)
$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j.$$

Kako je $e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \quad (j = 1, \ldots, n)$, (IV.2.2.3) postaje

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i.$$

Odavde je

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i = \theta,$$

tj.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Prema tome, ako su odgovarajuće koordinatne reprezentacije vektora $u \in X$ u bazama B_e i $B_{e'}$ date sa

$$x = [x_1 \dots x_n]^T \qquad \text{i} \qquad x' = [x'_1 \dots x'_n]^T,$$

imamo odgovarajuću matričnu formulu

$$x = Px', \tag{IV.2.2.4}$$

gde je matrica P data sa (IV.2.2.2). Odavde, s obzirom da je matrica P regularna, sleduje

$$x' = P^{-1}x \tag{IV.2.2.5}$$

što izražava koordinate vektora $u \in X$ u novoj bazi pomoću koordinata tog vektora u staroj bazi. Ta veza se ostvaruje pomoću inverzne matrice operatora koji staru bazu prevodi u novu. Ako, dakle, operator $\mathcal{P}$ bazu B_e prevodi u bazu $B_{e'}$, onda matrica $P^{-1} = P_{e\,e}^{-1}$ koordinate vektora u u staroj bazi B_e prevodi u koordinate toga vektora u novoj bazi $B_{e'}$.

Slično, u prostoru Y dimenzije m uočimo dve baze $B_f = \{f_1, \dots, f_m\}$ i $B_{f'} = \{f'_1, \dots, f'_m\}$. Neka je odgovarajuća matrica transformacije koordinata $Q = [q_{ij}]_{m\times m}$. Tada se transformacija koordinata vektora $v \in Y$, pri prelasku sa baze B_f na bazu $B_{f'}$, saglasno formuli (IV.2.2.5), može predstaviti u obliku

$$y' = Q^{-1}y, \tag{IV.2.2.6}$$

gde su

$$y = [y_1 \dots y_m]^T \qquad \text{i} \qquad y' = [y'_1 \dots y'_m]^T.$$

Razmotrimo sada promenu matrice operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ pri promeni bazisa.

Saglasno definiciji III.2.2.1, sa $A = A_{fe}$ označimo matricu operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ u odnosu na baze B_e i B_f. Ako promenimo baze u prostorima X i Y tako da su one $B_{e'}$ i $B_{f'}$, tada odgovarajuću matricu istog operatora $\mathcal{A}$ označimo sa $A' = A_{f'e'}$.

Teorema IV.2.2.1 *Neka su date baze B_e i $B_{e'}$ u prostoru X i baze B_f i $B_{f'}$ u prostoru Y. Ako su P i Q odgovarajuće matrice transformacija koordinata pri prelasku sa baze B_e na $B_{e'}$ i sa baze B_f na bazu $B_{f'}$, tada za matrice operatora $A = A_{fe}$ i $A' = A_{f'e'}$ važi jednakost*

$$A' = Q^{-1}AP. \tag{IV.2.2.7}$$

*Dokaz.*Posmatrajmo parove baza (B_e, B_f) i $(B_{e'}, B_{f'})$. Tada za matrični analogon jednakosti $v = \mathcal{A}u$ ($u \in X$, $v \in Y$) imamo dve jednakosti

$$y = A_{fe}x = Ax, \tag{IV.2.2.8}$$

$$y' = A_{f'e'}x' = A'x'. \tag{IV.2.2.9}$$

Na osnovu jednakosti (IV.2.2.6), (IV.2.2.8) i (IV.2.2.4) dobijamo

$$y' = Q^{-1}y = Q^{-1}Ax = Q^{-1}APx',$$

odakle, poređenjem sa (IV.2.2.9), dobijamo (IV.2.2.7). □

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da jednom linearnom operatoru $\mathcal{A}\colon X \to Y$ odgovara skup njegovih matrica $A = A_{fe}$, definisanih preko svih mogućih parova baza (B_e, B_f) u prostorima X i Y. Sve te matrice, kako smo videli, nisu potpuno nezavisne, već su međusobno povezane. Preciznije rečeno, one su u relaciji ekvivalencije koja je data sledećom definicijom.

Definicija IV.2.2.1 Neka je $M_{m,n}$ prostor matrica tipa $m \times n$ i neka je $M_n = M_{n,n}$. Za dve matrice $A, B \in M_{m,n}$ kažemo da su *ekvivalentne*, u oznaci $A \cong B$, ako postoje regularne kvadratne matrice $S \in M_m$ i $T \in M_n$ takve da je

$$B = SAT. \tag{IV.2.2.10}$$

Nije teško uočiti da je ekvivalentnost matrica stvarno jedna relacija ekvivalencije. Zaista, relacija $\cong$ je refleksivna, tj. $A \cong A$, jer jednakost $A = SAT$ važi, na primer, ako su S i T jedinične matrice reda m i n respektivno. Za dokaz osobine simetričnosti primetimo da iz $A \cong B$, tj. iz činjenice da postoje regularne matrice S i T takve da je $B = SAT$, sleduje $A = S^{-1}BT^{-1}$, što znači da je $B \cong A$. Najzad, iz $A \cong B$ i $B \cong C$, tj. iz $B = S'AT'$ i $C = S''BT''$, gde su S', T', S'', T'' regularne matrice, sleduje $C = S''S'AT''T' = SAT$, tj. $A \cong C$, gde su $S = S''S'$ i $T = T''T$ regularne matrice, što znači da je relacija $\cong$ tranzitivna. Skup $M_{m,n}$ se, prema tome, može razbiti na klase ekvivalentnih matrica.

Dakle, na osnovu (IV.2.2.7) zaključujemo da su matrice A i A', koje odgovaraju istom linearnom operatoru $\mathcal{A}\colon X \to Y$, ekvivalentne. Drugim rečima, matrice koje odgovaraju operatoru $\mathcal{A}\colon X \to Y$ uzete u različitim parovima baza (B_e, B_f) u prostorima X i Y, pripadaju jednoj klasi ekvivalencije matrica u odnosu na relaciju ekvivalencije datu definicijom IV.2.2.1.

Naravno, odmah se postavlja pitanje: da li u toj klasi ekvivalencije ima i takvih matrica koje nisu matrice tog operatora $\mathcal{A}$ u nekom paru baza (B_e, B_f)? Odgovor na ovo pitanje je odrečan, o čemu govori sledeća teorema koju navodimo bez dokaza.

Teorema IV.2.2.2 *Svakoj klasi ekvivalentnih matrica u odnosu na definiciju* IV.2.2.1, *se može pridružiti bar jedan linearni operator* $\mathcal{A}\colon X \to Y$ $(\dim X = n,\ \dim Y = m)$ *takav da ta klasa ekvivalentnih matrica predstavlja skup matrica tog operatora u svim mogućim parovima baza* (B_e, B_f) *(u prostorima* X *i* Y*).*

Prema tome, svakom linearnom operatoru $\mathcal{A}\colon X \to Y$ odgovara neka klasa ekvivalentnih matrica, pa je proučavanje tog linearnog operatora moguće sprovesti preko proučavanja klase među sobom ekvivalentnih matrica. Svojstva takve klase su, dakle, svojstva samog operatora. Naravno, s tim u vezi, odmah se može postaviti pitanje za koji par baza (B_e, B_f) matrica operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ ima najjednostavniju strukturu, što „bližu" nekoj vrsti dijagonalne forme, jer je dijagonalna matrica po svojim svostvima „blizu" broju? Šta više, ta matrica mora imati takvu formu da se iz nje mogu izvući sva svojstva operatora $\mathcal{A}$, tj. sva svojstva klase ekvivalentnih matrica. Odgovor na ovo pitanje biće dat kasnije.

Na kraju ovog odeljka pomenimo i slučaj kada operator $\mathcal{A}$ deluje u prostoru X, tj. kada je $Y = X$. Tada operatoru $\mathcal{A}\colon X \to X$ odgovara kvadratna matrica $A \in M_n$. U tom slučaju, transformacione matrice P i Q se poklapaju i umesto ekvivalentnosti može se uvesti pojam sličnosti matrica:

Definicija IV.2.2.2 Za dve kvadratne matrice $A, B \in M_n$ kažemo da su *slične matrice*, u oznaci $A \simeq B$, ako postoji regularna kvadratna matrica $P \in M_n$ takva da je

$$B = P^{-1}AP. \qquad \text{(IV.2.2.11)}$$

Za matricu P kažemo da je *matrica transformacije sličnosti.*

Relacija sličnost matrica je jedna relacija ekvivalencije u skupu matrica M_n. U klasi sličnih matrica, problem konstrukcije matrice najjednostavnije strukture je znatno teži nego u klasi ekvivalentnih matrica.

IV.2.3 Rang matrice

Neka je data matrica $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m,n}$. Izaberimo p vrsta i q kolona ove matrice, sa indeksima $i_1, i_2, \ldots, i_p$ i $j_1, j_2, \ldots, j_q$ respektivno, pri čemu je

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le m, \qquad 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_q \le n.$$

Definicija IV.2.3.1 Za matricu tipa $p \times q$ datu pomoću

$$A^{j_1,j_2,\ldots,j_q}_{i_1,i_2,\ldots,i_p} = \begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_q} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & & a_{i_2j_q} \\ \vdots & & & \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & & a_{i_pj_q} \end{bmatrix}$$

kažemo da je *submatrica matrice* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Nije teško videti da za jednu matricu tipa $m\times n$ postoji ukupno $\binom{m}{p}\binom{n}{q}$ submatrica tipa $p \times q$. U daljem razmatranju za nas će biti od interesa samo kvadratne submatrice. Shodno prethodnom, za posmatranu matricu tipa $m \times n$ postoji ukupno $\binom{m}{p}\binom{n}{p}$ submatrica reda p, gde je $p \le \min(m, n)$.

Definicija IV.2.3.2 Matrica A ima *rang* r (što označavamo $r = \operatorname{rang} A$) ako među njenim kvadratnim submatricama reda r postoji bar jedna koja je regularna, dok su sve kvadratne submatrice višeg reda od r, ukoliko postoje, singularne. Rang nula matrice je 0.

Za determinante kvadratnih submatrica kažemo da su minori. Svaki minor reda r $(= \operatorname{rang} A)$, koji je različit od nule, naziva se *bazisni minor*, a vrste i kolone matrice A na kojima je on definisan nazivaju se *bazisne vrste* i *bazisne kolone*. Napomenimo da može da postoji više bazisnih minora.

Na osnovu prethodnog, svaka regularna matrica $A \in M_n$ ima rang n, dok za proizvoljnu matricu $A \in M_{m,n}$ važi nejednakost $\operatorname{rang} A \le \min(m, n)$.

Primer 1. Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rang ove matrice ne može biti veći od tri jer je $\min(m,n) = \min(3,4) = 3$. Ukupan broj submatrica trećeg reda jednak je $\binom{3}{3}\binom{4}{3} = 4$ i to su:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinante svih ovih submatrica su jednake nuli jer, dodavanjem elemenata treće vrste odgovarajućim elementima prve vrste, prva vrsta u svim ovim determinantama postaje identična drugoj vrsti. Dakle, sve submatrice trećeg reda su singularne.

Kako je minor drugog reda $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, zaključujemo da je on bazisan i da je $\operatorname{rang} A = 2$. Kao bazisne vrste i kolone, koje odgovaraju ovom bazisnom minoru, pojavljuju se prva i druga vrsta i prva i druga kolona matrice A. Naravno, postoje i drugi bazisni minori drugog reda. $\triangle$

Iz osobina determinanata neposredno sleduje:

Teorema IV.2.3.1 *Za proizvoljnu matricu A važi* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$.

Dokaz. Transponovanjem kvadratnih submatrica matrice A dobijamo sve kvadratne submatrice za A^T. Kako se transponovanjem matrice ne menja njena determinanata (videti teoremu III.3.3.1), zaključujemo da tvrđenje teoreme važi. $\square$

IV.2.4 Broj linearno nezavisnih vrsta i kolona matrice

Neka je data matrica $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m,n}$ kompleksnih elemenata i neka $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in M_{m,1} = V_m$ označavaju kolone te matrice, tj.

$$\text{(IV.2.4.1)} \qquad \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Teorema IV.2.4.1 *Ako matrica $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ima rang r, postoji r linearno nezavisnih kolona matrice A i to su bazisne kolone. Sve ostale kolone su linearna kombinacija tih r bazisnih kolona.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je minor reda r u gornjem levom uglu matrice A različit od nule. Taj minor je izdvojen crticama u (IV.2.4.2)

$$
\text{(IV.2.4.2)} \qquad A = \left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & & & & & & \\
a_{r1} & a_{r2} & & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\
\hline
a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\
\vdots & & & & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & & a_{mr} & a_{m,r+1} & \dots & a_{mn}
\end{array}\right].
$$

U opštem slučaju minor reda r koji je različit od nule (bazisni minor) ne mora se nalaziti u gornjem levom uglu, ali se on može premestiti tamo pomoću pogodnog niza transpozicija vrsta i kolona matrice A. Pri tome se ne menja $\operatorname{rang} A$ (o čemu će biti reči kasnije, teorema IV.2.6.1), niti se menjaju, jasno je, svojstva linearne zavisnosti ili nezavisnosti koje postoje između kolona te matrice.

Dokažimo da su bazisne kolone $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ linearno nezavisne. Dakle, treba pokazati da jednakost

$$
\text{(IV.2.4.3)} \qquad \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}),
$$

gde je vektor $\boldsymbol{o} \in V_m$ sa svim koordinatama jednakim nuli, važi samo ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$.

Zaista, jednakost (IV.2.4.3) je ekvivalentna sistemu jednačina

$$
\text{(IV.2.4.4)} \qquad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).
$$

S obzirom da podsistem

$$
\sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).
$$

ima determinantu različitu od nule, na osnovu Cramerovih formula zaključujemo da ovaj podsistem, a time i sistem (IV.2.4.4) ima samo trivijalno rešenje $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$.

Dokažimo, sada, da postoje kompleksni brojevi $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ takvi da se bilo koja druga kolona $\boldsymbol{a}_k$ $(k > r)$ može predstaviti u obliku

$$
\text{(IV.2.4.5)} \qquad \boldsymbol{a}_k = \mu_1\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_r\boldsymbol{a}_r.
$$

Jednakost (IV.2.4.5) je ekvivalentna sistemu jednačina

$$\text{(IV.2.4.6)} \qquad \sum_{j=1}^{r} \mu_j a_{ij} = a_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Posmatrajmo podsistem

$$\text{(IV.2.4.7)} \qquad \sum_{j=1}^{r} \mu_j a_{ij} = a_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Kako je determinanta ovog podsistema različita od nule (Cramerov slučaj) postoje jednoznačno određeni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ takvi da su za $\mu_j = \alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ jednačine (IV.2.4.7) zadovoljene.

Ako brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ zadovoljavaju i poslednjih $m - r$ jednačina sistema (IV.2.4.6), onda važi (IV.2.4.5).

Zato pretpostavimo da neka od tih $m - r$ jednačina, neka je to s-ta jednačina, nije zadovoljena ako se μ_j zameni sa α_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$, tj. neka je

$$\text{(IV.2.4.8)} \qquad \sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_{ij} = a_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad \sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_{sj} \neq a_{sk}.$$

Posmatrajmo onda sledeći minor reda $r + 1$ matrice A

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2r} & a_{2k} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{s1} & a_{s2} & & a_{sr} & a_{sk} \end{vmatrix}.$$

On je jednak nuli jer je rang $A = r$. Ako prvu kolonu ovog minora pomnožimo sa α_1, drugu sa $\alpha_2, \ldots$, r-tu sa α_r i njihov zbir oduzmemo od poslednje kolone, na osnovu (IV.2.4.8) dobijamo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2r} & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rr} & 0 \\ a_{s1} & a_{s2} & & a_{sr} & a_{sk} - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_{sj} \end{vmatrix} = 0.$$

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je minor reda r u gornjem levom uglu matrice A različit od nule. Taj minor je izdvojen crticama u (IV.2.4.2)

$$
\text{(IV.2.4.2)} \qquad A = \left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & a_{2r} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & & & & & \\
a_{r1} & a_{r2} & & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\
\hline
a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\
\vdots & & & & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & & a_{mr} & a_{m,r+1} & \cdots & a_{mn}
\end{array}\right].
$$

U opštem slučaju minor reda r koji je različit od nule (bazisni minor) ne mora se nalaziti u gornjem levom uglu, ali se on može premestiti tamo pomoću pogodnog niza transpozicija vrsta i kolona matrice A. Pri tome se ne menja $\operatorname{rang} A$ (o čemu će biti reči kasnije, teorema IV.2.6.1), niti se menjaju, jasno je, svojstva linearne zavisnosti ili nezavisnosti koje postoje između kolona te matrice.

Dokažimo da su bazisne kolone $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ linearno nezavisne. Dakle, treba pokazati da jednakost

$$
\text{(IV.2.4.3)} \qquad \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}),
$$

gde je vektor $\boldsymbol{o} \in V_m$ sa svim koordinatama jednakim nuli, važi samo ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$.

Zaista, jednakost (IV.2.4.3) je ekvivalentna sistemu jednačina

$$
\text{(IV.2.4.4)} \qquad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).
$$

S obzirom da podsistem

$$
\sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r).
$$

ima determinantu različitu od nule, na osnovu Cramerovih formula zaključujemo da ovaj podsistem, a time i sistem (IV.2.4.4) ima samo trivijalno rešenje $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$.

Dokažimo, sada, da postoje kompleksni brojevi $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ takvi da se bilo koja druga kolona $\boldsymbol{a}_k$ $(k > r)$ može predstaviti u obliku

$$
\text{(IV.2.4.5)} \qquad \boldsymbol{a}_k = \mu_1\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_r\boldsymbol{a}_r.
$$

Jednakost (IV.2.4.5) je ekvivalentna sistemu jednačina

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j a_{ij} = a_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{IV.2.4.6}$$

Posmatrajmo podsistem

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j a_{ij} = a_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{IV.2.4.7}$$

Kako je determinanta ovog podsistema različita od nule (Cramerov slučaj) postoje jednoznačno određeni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ takvi da su za $\mu_j = \alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ jednačine (IV.2.4.7) zadovoljene.

Ako brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ zadovoljavaju i poslednjih $m - r$ jednačina sistema (IV.2.4.6), onda važi (IV.2.4.5).

Zato pretpostavimo da neka od tih $m - r$ jednačina, neka je to s-ta jednačina, nije zadovoljena ako se μ_j zameni sa α_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$, tj. neka je

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_{ij} = a_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad \sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_{sj} \neq a_{sk}. \tag{IV.2.4.8}$$

Posmatrajmo onda sledeći minor reda $r + 1$ matrice A

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2r} & a_{2k} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{s1} & a_{s2} & & a_{sr} & a_{sk} \end{vmatrix}.$$

On je jednak nuli jer je rang $A = r$. Ako prvu kolonu ovog minora pomnožimo sa α_1, drugu sa $\alpha_2, \ldots$, r-tu sa α_r i njihov zbir oduzmemo od poslednje kolone, na osnovu (IV.2.4.8) dobijamo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2r} & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rr} & 0 \\ a_{s1} & a_{s2} & & a_{sr} & a_{sk} - \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j a_{sj} \end{vmatrix} = 0.$$

Razvijajući ovu determinantu po elementima poslednje kolone, imamo

$$\Big(a_{sk} - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_{sj}\Big) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2r} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rr} \end{vmatrix} = 0,$$

što je u suprotnosti sa (IV.2.4.8) i pretpostavkom da je minor reda r u gornjem levom uglu matrice A različit od nule.

Prema tome, pretpostavka da neka od poslednjih $m-r$ jednačina sistema (IV.2.4.6) nije zadovoljena kada se μ_j zameni sa α_j, nije tačna. □

Teorema IV.2.4.2 *Ako matrica A ima rang r, postoji r linearno nezavisnih vrsta matrice A i to su bazisne vrste. Sve ostale vrste su linearne kombinacije tih r bazisnih vrsta.*

Dokaz. Ovo tvrđenje se dobija ako se teorema IV.2.4.1 primeni na transponovanu matricu, tj. na A^T (videti teoremu IV.2.3.1). □

Teorema IV.2.4.3 *Determinanta kvadratne matrice $A \in M_n$ jednaka je nuli ako i samo ako su kolone (vrste) njene matrice linearno zavisne.*

Dokaz. Uslov je potreban, jer iz pretpostavke da je $\det A = 0$ sleduje $\operatorname{rang} A < n$. Prema tome, bar jedna kolona (vrsta) matrice je linearna kombinacija ostalih kolona (vrsta).

Uslov je dovoljan, jer ako su vrste (kolone) ove matrice linearno zavisne, determinanta je jednaka nuli (videti teoremu III.3.3.8). □

Dakle, na osnovu teorema IV.2.4.1 i IV.2.4.2, ako matrica $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m,n}$ ima rang r, tada je maksimalan broj linearno nezavisnih kolona (vrsta) matrice A takođe jednak r. Videli smo da su te linearno nezavisne kolone (vrste) ustvari bazisne kolone (vrste), što, takođe, možemo zaključiti i ako teoremu IV.2.4.3 primenimo na bazisni minor matrice A.

Napomena 1. Kada smo prethodno koristili termin *bazisne kolone* matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m,n}$, pod tim smo podrazumevali kolone koje su unutar bazisnog minora matrice A. Međutim, na osnovu prethodnog razmatranja (videti teoremu IV.2.4.1), taj termin se može koristiti i u smislu toga da te *bazisne kolone* čine algebarsku bazu jednog linearnog prostora $k(A) \subset V_m$, *prostora kolona matrice* A, koji se formira kao lineal nad kolonama (IV.2.4.1) matrice A , tj.

$$k(A) = \Big\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{a}_j \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C})\Big\}.$$

Primetimo da, na osnovu teoreme IV.2.4.1, važi

$$\operatorname{rang}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} = \operatorname{rang} A = r.$$

Ono što smo u napomeni rekli o *bazisnim kolonama*, slično se može interpretirati i za *bazisne vrste*.

IV.2.5 Jednakost ranga matrice operatora i ranga operatora

Teorema IV.2.5.1 *Rang bilo koje matrice linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ jednak je rangu operatora $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka je $B_e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza u X, $B_f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baza u Y i $\mathcal{A}\colon X \to Y$ linearni operator čiji je rang r. Tada sve moguće linearne kombinacije vektore $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n$ čine potprostor $R_{\mathcal{A}}$, tj.

$$L\{\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n\} = R_{\mathcal{A}} \subset Y.$$

S obzirom da je rang operatora $\mathcal{A}$ jednak dimenziji potprostora $R_{\mathcal{A}}$, tj $r = \dim R_{\mathcal{A}}$, to je onda i broj linearno nezavisnih vektora niza $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n$ takođe jednak r. U matričnoj reprezentaciji operatoru $\mathcal{A}$ odgovara matrica $A_{fe} = [a_{ij}]_{m\times n}$, a vektoru $\mathcal{A}e_j = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{mj}f_m$ odgovara j-ta kolona $\boldsymbol{a}_j = [a_{1j}\ a_{2j}\ \ldots a_{mj}]^T$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ te matrice . Odavde sleduje, da je rang operatora $\mathcal{A}$ jednak broju linearno nezavisnih kolona matrice A_{fe}, a to je, na osnovu teoreme IV.2.4.1, rang matrice A_{fe}, tj. $\operatorname{rang}\mathcal{A} = \operatorname{rang} A_{fe} = r$.

S obzirom da prethodno razmatranje važi za bilo koji izabrani par baza (B_e, B_f) u prostorima X i Y, pa samim tim i za bilo koju matricu A_{fe} operatora $\mathcal{A}$, tvrđenje teoreme je dokazano. □

Videli smo ranije (teorema IV.2.2.2) da linearnom operatoru $\mathcal{A}\colon X \to Y$ odgovara klasa ekvivalentnih matrica koju čine matrice tog operatora u svim mogućim parovima baza (B_e, B_f) (u prostorima X i Y) i obrnuto. Sada, na osnovu teoreme IV.2.5.1, znamo da sve te matrice, tj. ekvivalentne matrice u smislu definicije IV.2.2.1, imaju isti rang i on je jednak rangu operatora $\mathcal{A}$.

Pokušajmo sada da u toj klasi ekvivalentnih matrica odredimo onu matricu koja je sa najjednostavnijom strukturom. Dakle, treba da izaberemo par baza $(B_{e'}, B_{f'})$ za koje matrica operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ ima najjednostavniju strukturu, što „bližu“ nekoj vrsti dijagonalne forme.

Kao i u dokazu teoreme III.1.2.1, razložimo X na direktnu sumu $X = N_{\mathcal{A}} \dot{+} M_{\mathcal{A}}$, gde je $N_{\mathcal{A}}$ jezgro operatora $\mathcal{A}$ i $M_{\mathcal{A}}$ bilo koji njemu komplementaran potprostor. Potprostori $M_{\mathcal{A}}$ i $R_{\mathcal{A}}$ su izomorfni (videti komentar iza dokaza teoreme III.1.2.1), pri čemu je $\mathcal{A}$ jedan izomorfizam.

Dakle, imamo da je $\dim M_{\mathcal{A}} = \dim R_{\mathcal{A}} = \operatorname{rang} \mathcal{A} = r$.

Uočimo jednu bazu u $M_{\mathcal{A}}$: $\{e'_1, \dots, e'_r\}$. Kako je $\{\mathcal{A}e'_1, \dots, \mathcal{A}e'_r\}$ sistem linearno nezavisnih vektora (videti dokaz teoreme III.1.2.1), to on predstavlja bazu u $R_{\mathcal{A}}$. Označimo redom vektore ove baze sa $f'_1, \dots, f'_r$, tj.

$$\mathcal{A}e'_j = f'_j \qquad (j = 1, \dots, r). \tag{IV.2.5.1}$$

S druge strane, na osnovu formule (III.1.2.1), za potprostor $N_{\mathcal{A}}$ važi

$$\dim N_{\mathcal{A}} = \operatorname{def} \mathcal{A} = n - \operatorname{rang} \mathcal{A} = n - r.$$

Izaberimo bazu potprostora $N_{\mathcal{A}}$ koja se sastoji od $n - r$ linearno nezavisnih vektorau i označimo ih redom sa $e'_{r+1}, \dots, e'_n$.

Očigledno, $B'_e = \{e'_1, \dots, e'_r, e'_{r+1}, \dots, e'_n\}$ je jedna baza u X. Primetimo da je

$$\mathcal{A}e'_j = \theta \qquad (j = r+1, \dots, n). \tag{IV.2.5.2}$$

Najzad, bazu potprostora $R_{\mathcal{A}}$ dopunimo linearno nezavisnim vektorima $f'_{r+1}, \dots, f'_m$ do baze prostora Y, tako da je $B'_f = \{f'_1, \dots, f'_r, f'_{r+1}, \dots, f'_m\}$.

Odredimo sada matricu $E_r = A_{f'e'} = [a_{ij}]_{m \times n}$ operatora $\mathcal{A}$ u prethodno odabranim bazama $B_{e'}$ i $B_{f'}$. Korišćenjem standardne formule (III.2.2.3), na osnovu (IV.2.5.1) i (IV.2.5.2), za svako $i = 1, \dots, m$, imamo

$$a_{ij} = \{\mathcal{A}e'_j\}_i = \begin{cases} \delta_{ij} & (j = 1, \dots, r), \\ 0 & (j = r+1, \dots, n), \end{cases}$$

gde je δ_{ij} Kroneckerova delta. Prema tome, matrica $E_r = A_{f'e'} = [a_{ij}]_{m \times n}$ operatora $\mathcal{A}$, izražena kao blok matrica, ima oblik

$$E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & O_{r,n-r} \\ \hline O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{array}\right], \tag{IV.2.5.3}$$

gde je I_r jedinična matrica reda r. Ostala tri bloka u matrici E_r su nula matrice odgovarajućih tipova. Očigledno, matrica E_r ima rang r.

Dakle, u klasi ekvivalentnih matrica koja odgovara linearnom operatoru $\mathcal{A}\colon X \to Y$ ranga r, matrica E_r ima najjednostavniju strukturu, pa za nju kazemo da je *Hermitova kanonička forma* matrice operatora $\mathcal{A}$.

Razmotrimo sada kako se, polazeći od nekog proizvoljnog para baza B_e i B_f u prostorima X i Y može konstruisati par baza $B_{e'}$ i $B_{f'}$, u prostorima X i Y, za koji se matrica operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ svodi na matricu E_r.

Neka je, dakle, $B_e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ proizvoljna baza u prostoru X. Sa r označimo broj linearno nezavisnih vektora u skupu $\{\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n\}$. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je taj skup vektora $\{\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_r\}$[4], a zatim izrazimo preostale vektore $\{\mathcal{A}e_{r+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n\}$ kao linearne kombinacije ovih vektora:

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{k=1}^{r} c_{jk}\mathcal{A}e_k \qquad (j = r+1, \ldots, n). \tag{IV.2.5.4}$$

Tada se u X može definisati nova baza $B_{e'} = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} e'_j &= e_j && (j = 1, \ldots, r),\\ e'_j &= e_j - \sum_{k=1}^{r} c_{jk}e_k && (j = r+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Na osnovu (IV.2.5.4), imamo

$$\mathcal{A}e'_j = \mathcal{A}\Big(e_j - \sum_{k=1}^{r} c_{jk}e_k\Big) = \theta \qquad (j = r+1, \ldots, n).$$

Stavimo, dalje,

$$\mathcal{A}e'_j = \mathcal{A}e_j = f'_j \qquad (j = 1, \ldots, r),$$

gde su $\{f'_1, \ldots, f'_r\}$, po pretpostavci, linearno nezavisni vektori. Dopunimo ovaj skup vektora do baze u Y vektorima $f'_{r+1}, \ldots, f'_m$. Dakle, sada imamo novu bazu i u prostoru Y

$$B_{f'} = \{f'_1, \ldots, f'_r, f'_{r+1}, \ldots, f'_m\}.$$

Kako smo videli u prethodnom razmatranju, matrica operatora $\mathcal{A}$ za novi par baza $(B_{e'}, B_{f'})$ je, upravo, matrica E_r.

Teorema IV.2.5.2 *Neka su $A, B \in M_{m,n}$. Tada je*

$$A \cong B \iff \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B.$$

[4] Ovo se, jasno, može ostvariti prenumeracijom bazisnih vektora.

Dokaz. Ako je $A \cong B$ onda su matrice A i B (videti teoremu IV.2.2.2) matrice istog operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ samo u različitim parovima baza (B_e, B_f) iz prostora X i Y respektivno. Tada, na osnovu teoreme IV.2.5.1, matrice A i B imaju isti rang kao i operator $\mathcal{A}$, tj. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Obrnuto. Neka je sada $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = r$.

Matrica $A \in M_{m,n}$ u bazama B_e i B_f, u prostorima X i Y respektivno, jednoznačno određuje neki linearni operator $\mathcal{A}\colon X \to Y$, čiji je rang, na osnovu teoreme IV.2.5.1, takođe jednak r. Međutim, u prostorima X i Y moguće je, kao što smo videli, izabrati nove baze $B_{e'}$ i $B_{f'}$, tako da matrica operatora $\mathcal{A}$ ima oblik E_r (videti (IV.2.5.3)). Prema tome, matrice A i E_r su ekvivalentne jer odgovaraju istom operatoru $\mathcal{A}$.

Na isti način razmišljajući o matrici $B \in M_{m,n}$ koja takođe ima rang r, zaključujemo da su matrice B i E_r ekvivalentne.

Na osnovu ovoga, za matrice A i B istog ranga važi implikacija

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = r \;\Rightarrow\; \big(A \cong E_r \land B \cong E_r\big).$$

Najzad, kako je $\cong$ relacija ekvivalencije, korišćenjem njenih osobina simetričnosti i tranzitivnosti, iz prethodnog dobijamo

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B \;\Rightarrow\; A \cong B. \qquad \square$$

IV.2.6 Praktično određivanje ranga matrice

Neka je data matrica $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m,n}$. Pred nama je problem konkretnog određivanja ranga r i konkretnog određivanja r linearno nezavisnih vrsta i r linearno nezavisnih kolona te matrice A.

Definicija IV.2.6.1 Pod *elementarnim transformacijama* jedne matrice podrazumevamo sledeće radnje:

1° transpozicija (uzajamna zamena mesta) dve vrste (kolone);

2° dodavanje elementima jedne vrste (kolone), odgovarajućih elemenata neke druge vrste (kolone), pošto se prethodno ovi poslednji pomnože jednim proizvoljnim skalarom;

3° množenje elemenata jedne vrste (kolone) nekim skalarom različitim od nule.

Napomena 1. Primetimo da ako se nekom elementarnom transformacijom matrica A transformiše u matricu B, tada postoji odgovarajuća, obrnuta, elementarna transformacija kojom se može matrica B transformisati u matricu A.

Teorema IV.2.6.1 *Primenom neke od elementarnih transormacije rang transformisane matrice ostaje nepromenjen, tj. rang transformisane matrice je isti kao i rang početne matrice.*

Dokaz. Ograničimo se samo na elementarne transformacije na vrstama jer je dokaz potpuno analogan za transformacije na kolonama.

1° Neka je A proizvoljna matrica ranga r i neka je B matrica koja se dobija iz A transpozicijom dve vrste.

Posmatrajmo minor reda r matrice A koji je različit od nule (a takav postoji jer je rang matrice jednak r). Isti taj minor ili možda taj minor sa izmenjenim redosledom vrsta je takođe i minor matrice B. Kako se izmenom redosleda vrsta može samo izmeniti znak determinane, zaključujemo da matrica B ima minor reda r različit od nule.

Uočimo, sada, proizvoljni minor reda $q > r$ (ako postoji). Isti taj minor, ili taj minor sa promenjenim redosledom vrsta, takođe je minor matrice A, te je zato jednak nuli. Dakle, rang B je takođe jednak r.

2° Pretpostavimo da se B dobija iz A tako što se j-toj vrsti doda i-ta vrsta pomnožena sa λ.

Neka je $\operatorname{rang} A = r$ i uočimo proizvoljni minor reda $q > r$ matrice B (ako postoji).

Ako taj minor nema elemenata iz j-te vrste matrice B, on je jednak odgovarajućem minoru matrice A, tj. jednak je nuli jer je $r = \operatorname{rang} A$.

Ako taj minor obuhvata elemente iz j-te vrste matrice B, on se može napisati u obliku (videti osobine determinanata date teoremama III.3.3.2 i III.3.3.3)

$$M = M_1 + \lambda M_2,$$

gde je M_1 odgovarajući minor matrice A. Ako M sadrži i elemente iz i-te vrste matrice B, tada M_2 ima dve iste vrste, te je $M_2 = 0$. Kako je i $M_1 = 0$ jer je $r = \operatorname{rang} A$, zaključujemo da je i $M = 0$. Ako M ne obuhvata elemente iz i-te vrste matrice B, tada je M_2 takođe (s tačnošću do redosleda vrsta) minor matrice A, pa je opet $M_1 = M_2 = 0$. Time smo dokazali da su svi minori reda $q > r$ matrice B (ako postoje) jednaki nuli, odakle sleduje da je $\operatorname{rang} A \leq r$, tj.

$$\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} B.$$

Obrnuto, matrica A se dobija iz matrice B na taj način što se j-toj vrsti doda i-ta vrsta matrice B prethodno pomnožena sa $-\lambda$. To je opet elementarna transformacija tipa 2°, pa možemo primeniti izvedenu nejednakost. Tako zaključujemo da je

$$\operatorname{rang} B \leq \operatorname{rang} A.$$

Iz dveju prethodno dobijenih nejednakosti sleduje $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

3° Najzad, pretpostavimo da se B dobija iz A množenjem i-te vrste sa konstantom $c \neq 0$.

Svaki minor matrice B jednak je odgovarajućem minoru matrice A ako ne sadrži elemente iz i-te vrste, a u suprotnom je jednak proizvodu odgovarajućeg minora matrice A i konstante $c(\neq 0)$. Prema tome par minora, jedan matrice B i odgovarajući minor matrice A, su istovremeno jednaki nuli ili su istovremeno različiti od nule. Prema tome, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$. □

Dakle, na osnovu teorema IV.2.6.1 i IV.2.5.2 posle konačnog broja elementarnih transformacija dobijamo matricu koja ima isti rang kao i početna matrica, tj. te matrice su ekvivalentne.

Primetimo da su u Gaussovom algoritmu korišćene upravo elementarne transformacije nad vrstama matrice sistema jednačina, uključujući i vektor slobodnih članova, sa strategijom redukcije matrice sistema jednačina na trougaoni oblik.

Za praktično određivanje ranga matrice $A \in M_{m,n}$ veoma je pogodno korišćenje elementarnih transformacija slično kao u Gaussovom algoritmu, pri čemu se ovde izvršavaju elementarne transformacije i nad vrstama i nad kolonama matrice A, sa strategijom dovođenja matrice na Hermitovu kanoničku formu (IV.2.5.3).

Ukoliko matrica A nije nula matrica ($\operatorname{rang} O_{m,n} = 0$), uvek je moguće, razmenom vrsta ili kolona (transformacija 1°), dovesti na poziciju $(1,1)$ element matrice različit od nule, koji ćemo kao i u Gaussovom algoritmu zvati glavni element. Taj element se može svesti na jedinicu ako se nad prvom vrstom (kolonom) izvrši elementarna transformacija 3° – množenje prve vrste (kolone) recipročnom vrednošću glavnog elementa. Zatim se, na isti način kao u Gaussovom algoritmu, anuliraju elementi u prvoj koloni koji se nalaze ispod „dijagonale“ . Slično, primenom transformacije 2° nad kolonama, anuliraju se svi elementi u prvoj vrsti desno od „dijagonale“ , dodavanjem elemenata prve kolone odgovarajućim elementima ostalih kolona, uz prethodno množenje pogodnim skalarima. Ovim postupkom, dobijamo matricu

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O_{1,n-1} \\ \hline O_{m-1,1} & A_1 \end{array}\right],$$

koja je ekvivalentna matrici A.

Primenom istog postupka na matrični blok A_1, tipa $(m-1)\times(n-1)$, dobijamo

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & O_{2,n-2} \\ \hline O_{m-2,2} & A_2 \end{array}\right].$$

Nastavljajući ovaj algoritam dolazimo do ekvivalentne matrice E_r date sa (IV.2.5.3), iz koje se jednostavno identifikuje rang date matrice A.

Na taj način elementarne operacije matricu A prevode u matricu E_r. Jasno je da prvih r vrsta i prvih r kolona matrice E_r su linearno nezavisne, a to je slučaj i sa prvih r vrsta i prvih r kolona matrice A (jer su zahvaćene bazisnim minorom reda r u gornjem levom uglu matrice A) ako nije bilo nikakvih transpozicija vrsta i kolona u toku realizacije definisanog algoritma. Ako je pak takvih transpozicija bilo, onda samo treba voditi računa koje su to početne vrste (kolone) matrice A transpozicijom, transformišući se u toku prevođenja matrice A u matricu E_r, došle na neko od prvih r mesta vrsta (kolona) matrice E_r, pa su, dakle, te početne vrste i te početne kolone matrice A linearno nezavisne i čine bazu prostora kolona (vrsta) matrice A.

(Ovo što je u prethodnom pasusu rečeno, možemo i ovako, alternativno, iskazati: Ako elementarne operacije koje prevode matricu A u matricu E_r obrnemo, tada od E_r možemo dobiti A. Pri tome prvih r vrsta i prvih r kolona matrice E_r prelaze u r linearno nezavisnih vrsta i r linearno nezavisnih kolona matrice A, tj. u r bazisnih vrsta i r bazisnih kolona matrice A. Te kolone (vrste) čine bazu prostora kolona (vrsta) matrice A.)

Primer 1. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je element na poziciji $(1,1)$ jednak nuli, izvršićemo najpre razmenu, na primer, prve i treće vrste, dobijajući tako ekvivalentnu matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

U cilju anuliranja elemenata u prvoj koloni ispod „dijagonale“, dodaćemo elemente prve vrste odgovarajućim elementima druge i četvrte vrste, uz prethodno množenje sa -4 i -2 respektivno. Tako dobijamo matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 12 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Da bismo anulirali i elemente u prvoj vrsti, sem, naravno, elementa na poziciji $(1,1)$, dodaćemo elemente prve kolone odgovarajućim elementima treće, četvrte i pete kolone, uz prethodno množenje sa 2, -1 i -2. Tada se prethodna matrica svodi na matricu

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 12 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & -4 \end{bmatrix},$$

koja je ekvivalentna polaznoj matrici A.

Množenjem druge vrste u matrici $A^{(1)}$ sa $-1/2$ dobijamo ekvivalentnu matricu kod koje je element na poziciji $(2,2)$ jednak jedinici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ponavljajući isti postupak na anuliranje elemenata u drugoj koloni i drugoj vrsti (ispod i desno od „dijagonale“) dobijamo ekvivalentnu matricu

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 9/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 13 & -9/2 & -15/2 \end{bmatrix}.$$

Množenjem treće kolone sa $-1/13$ dobijamo jedinicu na poziciji $(3,3)$. Anuliranjem elemenata treće kolone i treće vrste (ispod i desno od „dijagonale“) dobijamo matricu E_3, tj.

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_3.$$

Dakle, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} E_3 = 3$.

S obzirom da su prva, druga i treća vrsta bazisne vrste matrice E_3, to su i treća, druga i prva vrsta matrice A bazisne vrste matrice A (setimo se da zbog izvršena razmena mesta prve i treće vrste matrice A, imamo da je prva vrsta matrice E_3 transformisana treća vrsta matrice A i treća vrsta matrice E_3 transformisana prva vrsta matrice A). Dakle, u svakom slučaju, prve tri vrste matrice A su bazisne i njihovom linearnom kombinacijom se mogu dobiti sve ostale vrste (u našem slučaju, četvrta vrsta) matrice A. (Zaista, četvrta vrsta matrice A se može dobiti ako se elementi prve vrste pomnože sa -1, druge vrste sa 1 i treće vrste sa -2 i međusobno saberu ovako pomnoženi odgovarajući elementi ovih vrsta.)

Slično, s obzirom da su prva, druga i treća kolona bazisne kolone matrice E_3, a kako nismo razmeštali kolone matrice A to su i prva, druga i treća kolona bazisne kolone matrice A, pa se, dakle, preostale kolone matrice A (četvrta i peta) mogu dobiti linearnom kombinacijom prve tri. $\triangle$

Naravno, nije uvek neophodno da u cilju određivanja ranga date matrice A vršimo njeno svođenje elementarnim transformacijama na ekvivalentnu matricu E_r. To može biti i neki drugi oblik ekvivalentne matrice (do koga dolazimo sa manjim brojem transformacija), samo je važno da iz njega lako možemo da odredimo rang te ekvivalentne matrice.

Primer 2. Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ima trapezoidalnu formu. Lako je zaključiti da su njene prve tri vrste bazisne, tj. njen rang je 3. $\triangle$

Korišćenjem teoreme IV.2.4.2 moguće je problem nalaženja baze datog sistema vektora $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, u linearnom prostoru X dimenzije n, svesti na problem nalaženja bazisnih vrsta jedne matrice tipa $m \times n$.

Očigledno, ako je U skup linearno nezavisnih vektora, tada on sam predstavlja jednu bazu. Međutim, u opštem slučaju, dati skup vektora U ne mora biti linearno nezavisan. U cilju rešavanja postavljenog problema, izaberimo u X bilo koju bazu $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, a zatim razložimo vektore skupa U po vektorima baze B. Tako dobijamo

$$
\text{(IV.2.6.1)} \qquad
\begin{aligned}
u_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n, \\
u_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n, \\
&\ \vdots \\
u_m &= a_{m1}e_1 + a_{m2}e_2 + \cdots + a_{mn}e_n.
\end{aligned}
$$

Na osnovu (IV.2.6.1) formirajmo matricu A tako da koordinate vektora $u_1, u_2, \ldots, u_m$ budu vrste u toj matrici. Dakle,

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}.
$$

Kako, u ovom slučaju, vrste matrice A predstavljaju koordinatne reprezentacije vektora iz datog skupa U, problem određivanja baze skupa vektora U svodi se na nalaženje baze vektora vrsta matrice A.

Primer 3. Neka je, kao u primeru 1 na strani 179, u prostoru $\mathbb{R}^4$ dat sistem vektora $U = \{u_1, \ldots, u_4\}$, gde su

$$
u_1 = (4, -2, -3, -1),\ u_2 = (-7, 3, 5, 3),\ u_3 = (1, 1, 0, -4),\ u_4 = (-2, 0, 1, 3).
$$

Ako izaberemo prirodnu bazu u prostoru $\mathbb{R}^4$, tada odgovarajuća matrica koordinata ovih vektora postaje

$$
A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 & -1 \\ -7 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.
$$

Primenićemo sada elementarne transformacije nad vrstama matrice A, slično kao u Gaussovom algoritmu, sa strategijom svođenja matrice na trapezoidalnu formu.

Najpre, razmenimo prvu i treću vrstu, dovodeći element 1 na poziciju $(1,1)$, a zatim anulirajmo elemente u prvoj koloni ispod dijagonale, dodavanjem elemenata prve vrste odgovarajućim elementima druge, treće i četvrte vrste, uz prethodno množennje sa 7, -4 i 2, respektivno:

$$
A \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ -7 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 5 & -25 \\ 0 & -6 & -3 & 15 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}.
$$

Sada, množenjem druge vrste sa $1/10$, element na poziciji $(2,2)$ postaje jednak jedinici. Najzad, dodavanjem elemenata druge vrste odgovarajućim elementima treće i četvrte vrste, uz prethodno množenje sa 6 i -2, respektivno, dobijamo

$$A \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $\operatorname{rang} A = 2$, a prva (inače treća transformisana vrsta matrice A) i druga vrsta su bazisne vrste poslednje dobijene ekvivalentne matrice. S obzirom na učinjenu transpoziciju u ovakvom postupku svođenja na trapezoidalnu formu, zaključujemo da su treća i druga vrsta matrice A njene bazisne vrste.

Dakle, zaključujemo da je maksimalan broj linearno nezavisnih vektora iz sistema U jednak 2, tj. $\operatorname{rang} U = 2$, a za bazu sistema U može se uzeti skup vektora $B = \{u_2, u_3\}$.

Primetimo da ovo nije i jedina baza sistema U. Naime, s obzirom da je $\operatorname{rang} A = 2$, bazisni minor matrice A je drugog reda. Nadalje, vidimo da minori nastali od elemenata u preseku prve dve kolone matrice A i bilo koje dve vrste matrice A su bazisni minori (to je lako proveriti u ovom jednostavnom slučaju direktnim izračunavanjem pomenutih minora – svi su različiti od nule). To znači da su bazisne vrste matrice A bilo koje dve njene vrste, pa shodno tome i bilo koja dva vektora uzeta iz skupa U čine bazu sistema U. (Tako smo u pomenutom primeru 1 sa strane 179 koristili bazu $B = \{u_3, u_4\}$ pomoću koje je $u_1 = -2u_3 - 3u_4$ i $u_2 = 3u_3 + 5u_4$.) $\triangle$

U prostoru X sa skalarnim proizvodom $(\cdot,\cdot)$ moguće je, bez razlaganja po bazisnim vektorima, ustanoviti da li je neki sistem vektora $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ linearno zavisan ili linearno nezavisan.

Definicija IV.2.6.2 Za determinantu

$$G(U) = \begin{vmatrix} (u_1,u_1) & (u_1,u_2) & \cdots & (u_1,u_m) \\ (u_2,u_1) & (u_2,u_2) & & (u_2,u_m) \\ \vdots & & & \\ (u_m,u_1) & (u_m,u_2) & & (u_m,u_m) \end{vmatrix}$$

kažemo da je *Gramova determinanta* sistema vektora $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$.

Teorema IV.2.6.2 *Sistem vektora* $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ *je linearno zavisan ako i samo ako je* $G(U) = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo, najpre, da je sistem vektora $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ linearno zavisan, tj. da postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, koji istovremeno nisu jednaki nuli, a da je pri tome

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m = \theta \,. \tag{IV.2.6.2}$$

Skalarnim množenjem (IV.2.6.2) sa u_j, za svako $j = 1, 2, \dots, m$, dobijamo

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m,\ u_j) = 0\,,$$

tj.

$$\lambda_1(u_1, u_j) + \lambda_2(u_2, u_j) + \cdots + \lambda_m(u_m, u_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, m),$$

odakle zaključujemo da su vrste u determinanti zavisne, pa je $G(U) = 0$.

Pretpostavimo sada obrnuto, tj. da je $G(U) = 0$. Tada je rang odgovarajuće matrice manji od m, što znači da su njene vrste linearno zavisne, tj. postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ takvi da istovremeno nisu svi jednaki nuli i da je

$$\lambda_1(u_1, u_j) + \lambda_2(u_2, u_j) + \cdots + \lambda_m(u_m, u_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, m),$$

tj. da za svako $j = 1, 2, \dots, m$ važi jednakost

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m,\ u_j) = 0.$$

Množenjem poslednje jednakosti sa λ_j dobijamo[5]

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m,\ \lambda_j u_j) = 0\,.$$

Najzad, sabiranjem ovih jednakosti za $j = 1, 2, \dots, m$, nalazimo da je

$$\|\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m\|^2 = 0\,,$$

tj. da je

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m = \theta\,,$$

što znači da su vektori sistema U linearno zavisni. □

[5] U slučaju kompleksnog prostora treba množiti sa $\bar{\lambda}_j$.

IV.2.7 Kronecker-Capellieva teorema

Prethodno su razmatrani neki metodi za rešavanje sistema linearnih jednačina. Sada je, korišćenjem pojma ranga matrice, moguće dati potrebne i dovoljne uslove pod kojima jedan sistem linearnih jednačina sa pravougaonom matricom ima rešenje.

Posmatrajmo sistem jednačina

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}
\tag{IV.2.7.1}
$$

sa matricom sistema A i vektorom slobodnih članova $\boldsymbol{b}$:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{bmatrix}.
$$

Definicija IV.2.7.1 Za sistem jednačina (IV.2.7.1) kažemo da je *saglasan* ili da je *rešiv* ako postoji bar jedna uređena n-torka $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ za koju se svaka jednačina sistema (IV.2.7.1) za $x_k = \xi_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ svodi na identitet. Ta uređena n-torka $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ zove se *rešenje sistema linearnih jednačina* (IV.2.7.1).

Formirajmo matricu B, tipa $m \times (n+1)$, dodajući vektor slobodnih članova $\boldsymbol{b}$ matrici sistema A kao $(n+1)$-vu kolonu, tj.

$$
B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2\\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right].
$$

Za matricu B kažemo da je *proširena matrica sistema* (IV.2.7.1).

Teorema IV.2.7.1 (Kronecker-Capellieva[6] teorema) *Sistem jednačina* (IV.2.7.1) *je saglasan ako i samo ako je*

$$
\mathit{rang}\, A = \mathit{rang}\, B.
$$

[6] Alfred Capelli (1855–1910), italijanski matematičar.

Dokaz. Sa $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ označimo vektore-kolona matrice A. Kako se rang matrice poklapa sa rangom sistema vektora-kolona (videti napomenu 1 na strani 188), to je, prema tvrđenju teoreme, sistem jednačina (IV.2.7.1) saglasan ako i samo ako je

$$\text{(IV.2.7.2)} \qquad \operatorname{rang}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} = \operatorname{rang}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}\}.$$

Pretpostavimo, najpre, da je sistem jednačina (IV.2.7.1) saglasan, tj. da postoje brojevi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ takvi da je

$$\xi_1\boldsymbol{a}_1 + \xi_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \xi_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}.$$

Dakle, vektor-kolona $\boldsymbol{b}$ je linearna kombinacija vektora $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Ovo znači da je bilo koja baza sistema vektora-kolona matrice A, tj. baza prostora kolona, istovremeno i baza za sistem vektora $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}\}$. Prema tome, posmatrani sistemi vektora su ekvivalentni i važi (IV.2.7.2), tj. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Obrnuto, neka je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$, tj. neka važi (IV.2.7.2). Za sistem vektora $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ izaberimo bazu koju čine neki ili svi[7] njegovi vektori. Pod uslovom (IV.2.7.2), ona će, takođe, biti i baza za prošireni sistem vektora $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}\}$, što znači da se $\boldsymbol{b}$ može izraziti kao linearna kombinacija vektora baze. Samim tim, $\boldsymbol{b}$ se može izraziti i kao linearna kombinacija svih vektora-kolona $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_n$. Dakle, sistem jednačina (IV.2.7.1) je saglasan. □

Neka je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$. Tada među vrstama matrice A, tj. matrice B, postoji tačno r linearno nezavisnih vrsta, što znači da postoji $m - r$ jednačina koje možemo odbaciti ako je $r < m$ (te jednačine se mogu dobiti linearnom kombinacijom onih r linearno nezavisnih, pa u sebi ne nose nikakvu novu „informaciju“ o nepoznatim). Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je jedan bazisni minor matrice A definisan pomoću prvih r vrsta i prvih r kolona[8] matrice A. Ako je $r < m$, odbacivanjem poslednjih $m - r$ jednačina (iz već objašnjenih razloga) dobijamo sistem

$$\text{(IV.2.7.3)} \qquad \begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1,n}x_n,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2,n}x_n,\\ &\vdots\\ &a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{r,n}x_n, \end{aligned}$$

[7] Ovo će biti slučaj kada se radi o sistemu linearno nezavisnih vektora.

[8] Ovo se, inače, može postići razmenom vrsta i kolona u matrici A.

pretpostavljajući pri tome da je $r < n$. Za promenljive $x_{r+1}, \ldots, x_n$, koje se nalaze na desnoj strani u sistemu jednačina (IV.2.7.3), kažemo da su *slobodne* ili *nezavisne promenljive* jer kakve god vrednosti im dodelili, iz odgovarajućeg sistema jednačina (IV.2.7.3) nalazimo jedinstveno rešenje, tj. vrednosti za nepoznate $x_1, \ldots, x_r$ (setimo se Cramerovih formula), pa ih zato zovemo *bazisne* ili *zavisne promenljive.* Naravno, ako je $r = n$, u sistemu jednačina ne postoje slobodne promenljive.

Prema tome, ako saglasan sistem jednačina sa n nepoznatih ima rang matrice sistema $r < n$, tada se bazisne promenljive $x_1, \ldots, x_r$ mogu, primenom Cramerovih formula, jednoznačno izraziti pomoću slobodnih promenljivih $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Dakle, u ovom slučaju, slobodne promenljive se biraju proizvoljno, pa sistem jednačina ima beskonačno mnogo rešenja.

Ako je, pak, $r = n$, saglasan sistem jednačina sa n nepoznatih ima jedinstveno rešenje.

Dakle, saglasan sistem linearnih jednačina ima ili beskonačno mnogo ili, pak, samo jedno jedino rešenje.

Teorema IV.2.7.2 *Da bi saglasan sistem linearnih jednačina imao jedinstveno rešenje potrebno je i dovoljno da rang matrice sistema bude jednak broju nepoznatih.*

Dokaz. Ako je $r = \operatorname{rang} A = n$, na osnovu prethodnog, sistem jednačina ima jedinstveno rešenje dato Cramerovim formulama.

Obrnuto, ako sistem (IV.2.7.3) ima jedinstveno rešenje, tada on ne može imati slobodne promenljive, što znači da mora biti $r = n$. $\square$

Kod homogenog sistema jednačina ($b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$) očigledno je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$, tako da je ovaj sistem saglasan. Zaista, homogeni sistem uvek ima tzv. trivijalno rešenje $\xi_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Može se postaviti pitanje pod kojim uslovima homogeni sistem jednačina ima i netrivijalno rešenje.

Teorema IV.2.7.3 *Da bi homogeni sistem linearnih jednačina imao netrivijalno rešenje potrebno je i dovoljno da rang matrice sistema bude manji od broja nepoznatih.*

Dokaz. Na osnovu teoreme IV.2.7.2, homogeni sistem jednačina ima jedinstveno (dakle, trivijalno) rešenje ako i samo ako je $r = \operatorname{rang} A = n$. Suprotno, za postojanje netrivijalnog rešenja homogenog sistema jednačina potrebno je i dovoljno da je $r < n$. $\square$

Ako je matrica A kvadratna, tj. ako je broj promenljivih jednak broju jednačina u homogenom sistemu, tada se potreban i dovoljan uslov za netrivijalno rešenje homogenog sistema svodi na $\det A = 0$ (što znači da je rang $A < n$). Ako je, međutim, $\det A \neq 0$ (tj. rang $A = n$), homogeni sistem ima samo trivijalno rešenje.

Primer 1. Neka je dat sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
(3+2\lambda)\,x_1 + (1+3\lambda)\,x_2 + \lambda x_3 + (\lambda-1)x_4 &= 3,\\
3\lambda\,x_1 + (3+2\lambda)\,x_2 + \lambda x_3 + (\lambda-1)x_4 &= 1,\\
3\lambda\,x_1 + 3\lambda\,x_2 + 3x_3 + (\lambda-1)x_4 &= 1,\\
3\lambda\,x_1 + 3\lambda\,x_2 + \lambda x_3 + (\lambda-1)x_4 &= 1,
\end{aligned}$$

gde je λ proizvoljan realan parametar.

Pođimo od proširene matrice sistema

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 3+2\lambda & 1+3\lambda & \lambda & \lambda-1 & 3\\ 3\lambda & 3+2\lambda & \lambda & \lambda-1 & 1\\ 3\lambda & 3\lambda & 3 & \lambda-1 & 1\\ 3\lambda & 3\lambda & \lambda & \lambda-1 & 1 \end{array}\right].$$

Dodavanjem elemenata treće vrste odgovarajućim elementima prve, druge i četvrte vrste, uz prethodno množenje sa -1, dobijamo ekvivalentnu matricu

$$B_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 3-\lambda & 1 & \lambda-3 & 0 & 2\\ 0 & 3-\lambda & \lambda-3 & 0 & 0\\ 3\lambda & 3\lambda & 3 & \lambda-1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sada, dodavanjem elemenata četvrte vrste odgovarajućim elementima prve i druge vrste, uz prethodno množenje sa -1, dobijamo matricu

$$B_2 = \left[\begin{array}{cccc|c} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 3\lambda & 3\lambda & 3 & \lambda-1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

S obzirom na vrednost parametra λ, razlikovaćemo tri slučaja:

SLUČAJ $\lambda = 1$. Matrica B_2 se svodi na

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Množenjem prve i druge vrste sa $1/2$ i četvrte vrste sa $-1/2$, a zatim dodavanjem elemenata prve vrste odgovarajućim elementima treće vrste, uz prethodno množenje sa -3, redom imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3/2 & 3 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Razmenom treće i četvrte vrste, a zatim dodavanjem elemenata druge i treće vrste odgovarajućim elementima četvrte vrste, uz prethodno množenje sa $-3/2$ i -3, respektivno, redom dobijamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3/2 & 3 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{bmatrix}.$$

Iz poslednje matrice zaključujemo da je rang matrice A datog sistema jednačina jednak 3, a rang odgovarajuće proširene matrice jednak 4, što znači da sistem nije saglasan [9].

SLUČAJ $\lambda = 3$. Sada se matrica B_2 svodi na

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 9 & 9 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Množenjem treće vrste sa $1/9$, a zatim sukcesivnom razmenom prve i treće, pa druge i treće vrste, redom dobijamo ekvivalentne matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1/3 & 2/9 & | & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/3 & 2/9 & | & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

odakle zaključujemo da je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2$. Na osnovu Kronecker-Capellieve teoreme, sistem jednačina je saglasan. U stvari, on je ekvivalentan sistemu jednačina

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{9}x_4 = \frac{1}{9}, \qquad x_2 = 2,$$

[9] Često se kaže da je *sistem protivurečan* ili *nemoguć*.

odakle nalazimo sva rešenja:

$$x_1 = -\frac{17}{9} - \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{9}\beta, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = \beta,$$

gde skalari α i β uzimaju proizvoljne vrednosti. Napomenimo da su, u ovom slučaju, x_3 i x_4 slobodne promenljive.

SLUČAJ $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq 3$. Množenjem prve, druge i četvrte vrste matrice B_2 sa p, p i $-p$, respektivno, gde je $p = 1/(3-\lambda)$, matrica B_2 se transformiše u ekvivalentnu matricu

$$B_3 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{3-\lambda} & 0 & 0 & \frac{2}{3-\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\lambda & 3\lambda & 3 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Razmenom treće i četvrte vrste, a zatim dodavanjem elemenata prve, druge i treće vrste odgovarajućim elementima četvrte vrste, uz prethodno množenje pogodnim skalarima, dobijamo

$$B_3 \cong \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{3-\lambda} & 0 & 0 & \frac{2}{3-\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & \frac{3-7\lambda}{3-\lambda} \end{array}\right].$$

Najzad, množenjem četvrte vrste sa $1/(\lambda-1)$, matrica B_3 se transformiše na ekvivalentnu matricu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{3-\lambda} & 0 & 0 & \frac{2}{3-\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3-7\lambda}{(3-\lambda)(\lambda-1)} \end{array}\right],$$

odakle zaključujemo da je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 4$, što znači da sistem jednačina ima jedinstveno rešenje dato sa:

$$x_1 = \frac{2}{3-\lambda}, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{3-7\lambda}{(3-\lambda)(\lambda-1)}. \qquad \triangle$$

IV.3 ZADACI ZA VEŽBU

1. Različitim metodima (Cramer, Gauss, ...) rešiti sisteme jednačina

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} 3x+2y-\ z &= 1,\\ x+\ y+2z &= 2,\\ 2x+2y+5z &= 3, \end{aligned} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} 2x-\ y+\ z &= 8,\\ x-3y-5z &= 6,\\ 3x+\ y-7z &= -4. \end{aligned}$$

Rezultat. a) $x=-8$, $y=12$, $z=-1$, b) $x=2$, $y=-3$, $z=1$.

2. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x-\ y+\ z-3u+\ v &= 0,\\ 2x-\ y+2z-\ u+\ v &= 3,\\ x+3y+\ z-2u-\ v &= -1,\\ 3x-2y-\ z+\ u+2v &= 12,\\ x+\ y-\ z-2u+\ v &= 5. \end{aligned}$$

Rezultat. $x=2$, $y=1$, $z=-1$, $u=1$, $v=3$.

3. U zavisnosti od realnog parametra λ diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} 2x-\ y\qquad &= \lambda,\\ x-\qquad 2z &= 3,\\ \lambda x-4y\qquad &= 32. \end{aligned} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} x+\ y+\ \ z &= 1,\\ \lambda x+\lambda y+\ 2z &= 2,\\ x+\lambda y+2\lambda z &= 3. \end{aligned}$$

4. U zavisnosti od parametra $a\in\mathbb{R}$ diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x+(2-a)y+(a-2)z &= 0,\\ x+\qquad y-\qquad z &= 1,\\ x+\qquad ay+\qquad az &= 2. \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} (a-1)x+(1-a)y+z &= 0,\\ -x+\qquad y+z &= 1,\\ (1+a)x+(a+1)y+z &= 2. \end{aligned}$$

5. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x+4y+3z &= 3,\\ -x+\ y+az &= 1,\\ 3x+ay-\ z &= a-1. \end{aligned} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} x+\ y+\ \ z &= 1,\\ x+ay+\ \ z &= a^2,\\ x+\ y+a^2z &= a. \end{aligned}$$

6. U zavisnosti od realnih parametara a i b diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x + 2y - 2z &= -3,\\ 3x - 12z &= b,\\ -6x + ay &= 0. \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} x + ay &= 0,\\ ay + bz &= 0,\\ x + abz &= b. \end{aligned}$$

7. U zavisnosti od realnog parametra k diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x + y + z &= 2\\ x + y + kz &= 1\\ x + ky + z &= 1\\ kx + y + z &= 4. \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0,\\ x + (k+6)y &= 6,\\ 2x - ky - z &= 14,\\ kx - 8y + 3(k+2)z &= -12. \end{aligned}$$

8. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x + y + az &= 1,\\ x + ay + az &= a,\\ ax + y + a^2z &= 1,\\ ax + ay + z &= 1. \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} ax + (2a-1)y + (a+2)z &= 0,\\ (a-1)y + (a-3)z &= 0,\\ ax + (3a-2)y + (3a-2)z &= 0,\\ 2ax + (3a-1)y + (a+7)z &= 0. \end{aligned}$$

9. U zavisnosti od realnih parametara a i b diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 2x + y - 5z + u &= 8,\\ x - 3y - 6u &= 9,\\ x + 4y + az + bu &= b. \end{aligned}$$

10. Ispitati za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ homogeni sistem linearnih jednačina ima netrivijalna rešenja i odrediti ih:

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x + y - z &= 0,\\ ax + 4y + z &= 0,\\ 5x + (a+1)y - 4z &= 0. \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} 3x + (a-6)y + (3-2a)z &= 0,\\ -x + 2y + az &= 0,\\ 4x - 3y - (3a-7)z &= 0. \end{aligned}$$

GLAVA V

ALGEBARSKI POLINOMI I RACIONALNE FUNKCIJE

V.1 ALGEBARSKI POLINOMI

V.1.1 Prsten polinoma

Neka je $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ polje koje ćemo označavati prosto sa $\mathbb{K}$ i neka su 0 i 1 neutralni elementi u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$, respektivno[1]. Umesto $a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{K})$ pisaćemo jednostavno ab. Neka je, dalje, operacija stepenovanja uvedena na uobičajeni način pomoću

$$(\forall x \in \mathbb{K}) \qquad x^0 = 1, \quad x^k = xx^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Definicija V.1.1.1 Ako $x \in \mathbb{K}$ i $a_k \in \mathbb{K}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, formalni izraz

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{V.1.1.1}$$

naziva se *algebarski polinom po x nad poljem* $\mathbb{K}$. Za elemente a_k kažemo da su *koeficijenti polinoma* $P(x)$. Ako je koeficijent $a_n \neq 0$, za polinom $P(x)$ kažemo da je *stepena* n i to označavamo sa $\operatorname{dg} P(x) = n$. Za koeficijent $a_n \neq 0$ kažemo da je *vodeći* ili *najstariji koeficijent* polinoma $P(x)$.

[1] Dobar deo materijala za ovu glavu preuzet je iz monografije: G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1994.

Dakle, stepen polinoma $P(x)$ je najviši stepen od x koji se pojavljuje u izrazu za $P(x)$ sa nenula koeficijentima.

Definicija V.1.1.2 Za polinom

$$O(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^{n-1} + 0x^n$$

kažemo da je *nula polinom* i označavamo ga prosto sa 0.

Stepen nula polinoma $O(x)$ ($\equiv 0$) se ne definiše.

Polinomi stepena nula se nazivaju konstante i to su elementi polja $\mathbb{K}$. Element $x \in \mathbb{K}$ može se interpretirati kao polinom prvog stepena definisan sa $P(x) = x$. Za element x koristi se termin *neodređena*. Za polinom $P(x)$ definisan sa (V.1.1.1) kaže se da je *polinom po neodređenoj* x.

Definicija V.1.1.3 Za polinom čiji je vodeći koeficijent jednak jedinici kažemo da je *moničan*.

Dakle, monični polinom ima oblik

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Skup svih polinoma nad poljem $\mathbb{K}$ označavamo sa $\mathbb{K}[x]$. Od interesa je često uočiti skup svih onih polinoma čiji stepen nije veći od n. Taj podskup ćemo označavati sa $\mathcal{P}_n[x]$ (videti primer 4 na strani 61). Proizvoljni polinom iz $\mathcal{P}_n[x]$ ima oblik

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_k \in \mathbb{K}),$$

pri čemu ako je $\operatorname{dg} P(x) = m < n$ imamo da je $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$.

U skup $\mathbb{K}[x]$ možemo uvesti relaciju *jednakost* kao i operacije: *sabiranje* i *množenje* polinoma na sledeći način:

Definicija V.1.1.4 Polinomi

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad \text{i} \quad Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$$

su *jednaki* ako i samo ako je $a_k = b_k$ za svako $k \geq 0$, tj. kada su njihovi koeficijenti jednaki.

Definicija V.1.1.5 Za dva polinoma

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad \text{i} \quad Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$$

zbir i *proizvod* su redom

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_rx^r$$

i

$$(PQ)(x) = P(x)Q(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_sx^s,$$

gde su

$$c_k = a_k + b_k \qquad \big(0 \le k \le r = \max(n, m)\big)$$

i

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i} \qquad (0 \le k \le s = n + m).$$

Dakle, ako $P(x) \in \mathcal{P}_n[x]$ i $Q(x) \in \mathcal{P}_m[x]$, tada $(P + Q)(x) \in \mathcal{P}_r[x]$ i $(PQ)(x) \in \mathcal{P}_s[x]$, gde su $r = \max(n, m)$ i $s = n + m$. Napomenimo da za nenula polinome $P(x)$ i $Q(x)$ važi

$$\operatorname{dg}(PQ)(x) = \operatorname{dg} P(x) + \operatorname{dg} Q(x).$$

Takođe, ako $P(x), Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ and $P(x) + Q(x) \not\equiv 0$, tada je

$$\operatorname{dg}(P + Q)(x) \le \max\big\{\operatorname{dg} P(x), \operatorname{dg} Q(x)\big\}.$$

Primer 1. Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i

$$P(x) = 2 - 3x + 5x^2 \quad \text{i} \quad Q(x) = 2x - x^2 + 2x^3.$$

Tada je

$$S(x) = (P + Q)(x) = 2 - x + 4x^2 + 2x^3$$

i

$$R(x) = (PQ)(x) = 4x - 8x^2 + 17x^3 - 11x^4 + 10x^5.$$

Dakle, $\operatorname{dg} S(x) = 3$ i $\operatorname{dg} R(x) = 5$.

Ako je, međutim, $P(x) = 2 - 3x + x^2 - 2x^3$, tada je $(P + Q)(x) = 2 - x$, što znači da je zbir ova dva polinoma polinom prvog stepena. $\triangle$

Kao specijalan slučaj proizvoda polinoma imamo proizvod polinoma $P(x)$ skalarom α $(\in \mathbb{K})$, koji se može tretirati kao polinom nultog stepena. Dakle,

$$\alpha P(x) = \alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \cdots + (\alpha a_n)x^n.$$

Nije teško dokazati sledeći rezultat:

Teorema V.1.1.1 *Skup* $\mathbb{K}[x]$ *snabdeven sabiranjem i množenjem polinoma čini komutativni prsten sa jedinicom.*

U odnosu na operaciju sabiranja, inverzni element od elementa $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \ \big(\in \mathbb{K}[x]\big)$ je $\sum_{k=0}^{m} (-b_k) x^k$, koji ćemo označavati sa $-Q(x)$. Tada možemo definisati *oduzimanje* polinoma pomoću

$$(P - Q)(x) = P(x) + \big(-Q(x)\big).$$

Napomenimo da za polinome u skupu $\mathbb{K}[x]$ ne postoji operacija deljenja, tj. operacija inverzna operaciji množenja (videti sledeći odeljak).

Polinomi se, takođe, mogu razmatrati nad strukturama koje su jednostavnije od polja, na primer, nad prstenom sa jedinicom. Razmotrimo sada jedan takav slučaj.

Saglasno teoremi III.2.3.3 (strana 119), skup M_m svih kvadratnih matrica reda m nad poljem skalara $\mathbb{K}$ (realnih ili kompleksnih brojeva), snabdeven operacijama sabiranje i množenje matrica, predstavlja prsten sa jedinicom I (jedinična matrica reda m). Ako $X \in M_m$ i $A_k \in M_m$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, tada za

$$P(X) = A_0 + A_1 X + \cdots + A_n X^n = \sum_{k=0}^{n} A_k X^k \tag{V.1.1.2}$$

kažemo da je *polinom nad* M_m ili prosto *matrični polinom*. U slučaju kada su matrični koeficijenti A_k dati kao $A_k = a_k I$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, gde su a_k skalari iz polja $\mathbb{K}$, a I jedinična matrica reda m, tada se matrični polinom (V.1.1.2) svodi na

$$P(X) = a_0 I + a_1 X + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Na kraju ovog odeljka ukažimo na važnu činjenicu da se polinom može tretirati i kao funkcija. Naime, na osnovu (V.1.1.1) može se definisati preslikavanje $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, pomoću

$$t \mapsto P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

i uočiti homomorfizam $P(x) \mapsto P(t)$. Preslikavanje P nazivamo *polinomska funkcija*. Napomenimo da je ovde x neodređena, a t promenljiva. Ne ulazeći dublje u algebarsko tretiranje ovog problema[2] napomenimo da se može dokazati sledeći važan rezultat:

Teorema V.1.1.2 *Homomorfizam $P(x) \mapsto P(t)$ je izomorfizam ako i samo ako je polje $\mathbb{K}$ beskonačno.*

Dakle, za beskonačna polja jednostavno nećemo praviti razliku između polinoma i polinomske funkcije, a za neodređenu x koristićemo i termin promenljiva. Takva beskonačna polja su, na primer, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Međutim, u konačnim poljima iz jednakosti polinomskih funkcija ne sleduje jednakost polinoma.

Kada ne može doći do zabune, umesto termina polinomska funkcija $t \mapsto P(t)$ koristićemo jednostavno termin polinom P. Skup svih polinomskih funkcija (polinoma) ne višeg stepena od n označavaćemo sa $\mathcal{P}_n$.

V.1.2 Deljivost polinoma

Dokazaćemo, najpre, jednu veoma važnu osobinu polinoma.

Teorema V.1.2.1 *Za svaki polinom $P(x)$ i svaki nenula polinom $Q(x)$, postoje jedinstveni polinomi $S(x)$ i $R(x)$ takvi da važi jednakost*

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x), \tag{V.1.2.1}$$

pri čemu je $R(x)$ nula polinom ili $\operatorname{dg} R(x) < \operatorname{dg} Q(x)$.

Dokaz. Pretpostavimo da $P(x)$ i $Q(x)$ imaju stepene n i m, respektivno, i da su

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad \text{i} \quad Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m.$$

Ako je $n < m$ ili $P(x) = 0$, tada (V.1.2.1) važi sa $S(x) \equiv 0$ i $R(x) = P(x)$. Pretpostavimo zato da je $n \geq m$.

Posmatrajmo polinom

$$P_1(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m}Q(x),$$

[2] Za detalje videti, na primer, knjigu: N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W. H. Freeman and Company, New York, 1985.

čiji je stepen, očigledno, manji od n. Sa n_1 označimo taj stepen, a sa $a_{n_1}^{(1)}$ najstariji koeficijent polinoma $P_1(x)$. Ako je $n_1 \geq m$ stavimo dalje

$$P_2(x) = P_1(x) - \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}\, x^{n_1-m} Q(x),$$

i sa n_2 i $a_{n_2}^{(2)}$ označimo stepen i najstariji koeficijent ovog polinoma, respektivno. Proces nastavljamo ako je $n_2 \geq m$.

Jasno je da stepeni polinoma $P_1(x), P_2(x), \ldots$ opadaju i da posle konačnog broja koraka dobijamo jednakost

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) - \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m}\, x^{n_{k-1}-m} Q(x),$$

u kojoj je $P_k(x)$ nula polinom ili takav da mu je stepen n_k manji od m. U tom slučaju proces prekidamo, a $P_k(x)$ se, korišćenjem prethodnih jednakosti, može predstaviti u obliku $P_k(x) = P(x) - S(x)Q(x)$, gde smo stavili

$$S(x) = \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}\, x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m}\, x^{n_{k-1}-m}.$$

Dakle, ovaj polinom $S(x)$ i $R(x) = P_k(x)$ zadovoljavaju jednakost (V.1.2.1), pri čemu je $R(x)$ nula polinom ili je njegov stepen manji od stepena polinoma $Q(x)$.

Za dokaz jedinstvenosti polinoma $S(x)$ i $R(x)$, pretpostavimo da postoje i polinomi $\hat{S}(x)$ i $\hat{R}(x)$, koji zadovoljavaju jednakost

$$P(x) = \hat{S}(x)Q(x) + \hat{R}(x),$$

pri čemu je $\hat{R}(x) \equiv 0$ ili $\operatorname{dg} \hat{R}(x) < \operatorname{dg} Q(x)$. Tada je

$$\big(S(x) - \hat{S}(x)\big)Q(x) = \hat{R}(x) - R(x), \tag{V.1.2.2}$$

pri čemu je polinom na desnoj strani ove jednakosti nula polinom ili je, pak njegov stepen manji od stepena polinoma $Q(x)$. S druge strane, ako je $S(x) - \hat{S}(x) \not\equiv 0$, tada polinom na levoj strani u jednakosti (V.1.2.2) je ne manjeg stepena od stepena polinoma $Q(x)$. Prema tome, jednakost (V.1.2.2) je moguća samo ako je

$$\hat{S}(x) = S(x), \qquad \hat{R}(x) = R(x). \qquad \square$$

Kao što je rečeno u prethodnom odeljku, za polinome u skupu $\mathbb{K}[x]$ ne postoji operacija deljenja, inverzna operaciji množenja. Može se, međutim, saglasno osobini iz prethodne teoreme, definisati *deljenje* polinoma polinomom sa *ostatkom*.

Definicija V.1.2.1 Za polinom $S(x)$ koji zadovoljava (V.1.2.1) kažemo da je *količnik* pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$ ($\not\equiv 0$), a za odgovarajući polinom $R(x)$ da je *ostatak* pri tom deljenju.

Ako je ostatak nula polinom, kažemo da je $P(x)$ deljivo sa $Q(x)$ i polinom $Q(x)$ zovemo *delilac* polinoma $P(x)$.

Činjenicu da je $Q(x)$ delilac polinoma $P(x)$ simbolizujemo sa $Q(x)|P(x)$. Neke osobine deljivosti polinoma navodimo u sledećoj teoremi.

Teorema V.1.2.2 *Za proizvoljne polinome $P(x), Q(x), U(x)$ važe tvrđenja:*

(a) $P(x)|P(x)$;

(b) Ako $Q(x)|P(x)$ i $P(x)|Q(x)$, tada je $P(x) = \alpha Q(x)$ za neko $\alpha \in \mathbb{K}$;

(c) Ako $U(x)|Q(x)$ i $Q(x)|P(x)$ tada $U(x)|P(x)$;

(d) Ako $U(x)|P(x)$ i $U(x)|Q(x)$, tada $U(x)|\alpha P(x) + \beta Q(x)$ za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

V.1.3 Najveći zajednički delilac

Definicija V.1.3.1 Polinom $D(x)$ je *zajednički delilac* za polinome $P(x)$ i $Q(x)$ ako $D(x)|P(x)$ i $D(x)|Q(x)$.

Definicija V.1.3.2 Polinom $D(x)$ je *najveći zajednički delilac* za polinome $P(x)$ i $Q(x)$, tj. $D(x) = \mathrm{NZD}(P(x), Q(x))$, ako je zajednički delilac za ove polinome i ako je deljiv sa svim ostalim zajedničkim deliocima ovih polinoma.

Primetimo da ako je $D(x) = \mathrm{NZD}(P(x), Q(x))$, tada je i polinom $\alpha D(x)$ ($\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$) takođe najveći zajednički delilac polinoma $P(x)$ i $Q(x)$.

Teorema V.1.3.1 *Za svaka dva polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ postoji najveći zajednički delilac $D(x)$ i on je jedinstven do na multiplikativnu konstantu.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathrm{dg}\, P(x) \geq \mathrm{dg}\, Q(x)$. Sa $S_1(x)$ i $R_1(x)$ označimo redom količnik i ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $Q(x)$. Ako je $R_1(x) \equiv 0$ tada je $Q(x)$ najveći zajednički delilac polinoma $P(x)$ i $Q(x)$. Međutim, ako $R_1(x)$ nije nula polinom, tada delimo polinom $Q(x)$ sa $R_1(x)$, i odgovarajući količnik i ostatak pri deljenju označavamo sa $S_2(x)$ i $R_2(x)$, respektivno. Ako je $R_2(x) \equiv 0$ tada je $R_1(x)$ najveći zajednički delilac za polinome $P(x)$ i $Q(x)$. Zaista, iz

$$
\text{(V.1.3.1)} \qquad \begin{aligned} P(x) &= S_1(x)Q(x) + R_1(x), \\ Q(x) &= S_2(x)R_1(x) + R_2(x), \end{aligned}
$$

sleduje $P(x) = (S_1(x)S_2(x) + 1)R_1(x)$ i $Q(x) = S_2(x)R_1(x)$, tj. $R_1(x)|P(x)$ i $R_1(x)|Q(x)$. Da bismo dokazali da je $R_1(x)$ najveći zajednički delilac za $P(x)$ i $Q(x)$ dovoljno je pretpostaviti da ovi polinomi imaju zajednički delilac $D(x)$ i primetiti da iz (V.1.3.1) sleduje $D(x)|R_1(x)$.

Međutim, ukoliko $R_2(x)$ nije nula polinom, prethodni postupak se nastavlja, saglasno sledećim jednakostima,

$$
\text{(V.1.3.2)} \qquad \begin{aligned} R_1(x) &= S_3(x)R_2(x) + R_3(x), \\ R_2(x) &= S_4(x)R_3(x) + R_4(x), \\ &\vdots \\ R_{k-1}(x) &= S_{k+1}(x)R_k(x) + R_{k+1}(x), \end{aligned}
$$

sve do ispunjenja uslova $R_{k+1}(x) \equiv 0$. Tada je $R_k(x) = \text{NZD}(P(x), Q(x))$. Ovo zaključujemo sličnim rezonovanjem kao u slučaju $k = 1$. $\square$

Napomena 1. U dokazu ove teoreme korišćen je Euklidov algoritam, pri čemu su za određivanje najvećeg zajedničkog delioca (NZD) dva polinoma bitni samo ostaci $R_\nu(x)$, a ne i količnici $S_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Imajući na umu jedinstvenost NZD do na multiplikativnu konstantu moguće je u svakom koraku Euklidovog algoritma množiti ostatke $R_\nu(x)$ pogodnim konstantama različitim od nule u cilju dobijanja jednostavnijih izraza pri deljenju.

Definicija V.1.3.3 Ako je najveći zajednički delilac za polinome $P(x)$ i $Q(x)$ konstanta, za te polinome kažemo da su *uzajamno prosti*.

Primer 1. Za polinome u $\mathbb{R}[x]$,

$$
P(x) = 2x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x - 8, \qquad Q(x) = x^3 + x^2 + 4,
$$

odredićemo NZD. Kako je

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(2x^4 & +4x^3 & +\ x^2 & -\ 2x & -\ 8) & :\ (x^3+x^2+4) = 2x+2 \\
2x^4 & +2x^3 & & +\ 8x & & \\
\hline
 & 2x^3 & +\ x^2 & -10x & -\ 8 & \\
 & 2x^3 & +2x^2 & & +\ 8 & \\
\hline
 & & -\ x^2 & -10x & -16 &
\end{array}
$$

imamo

$$P(x) = (2x+2)Q(x) - (x^2+10x+16).$$

Uzmimo da je $R_1(x) = x^2 + 10x + 16$ (pomnoženo sa -1) i podelimo $Q(x)$ sa $R_1(x)$. Dakle,

$$\begin{array}{rrrr} (x^3 & + \quad x^2 & & + \quad 4) \\ x^3 & + \ 10x^2 & + \ 16x & \\ \hline & - \ 9x^2 & - \ 16x & + \ 4 \\ & - \ 9x^2 & - \ 90x & -144 \\ \hline & & 74x & +148 \end{array} : (x^2+10x+16) = x-9$$

tj.

$$Q(x) = (x-9)R_1(x) + 74x + 148.$$

Uzmimo $R_2(x) = x + 2$ (pomnoženo sa $1/74$) i podelimo $R_1(x)$ sa $R_2(x)$. Kako je $R_1(x) = (x+8)R_2(x)$, zaključujemo da je

$$\mathrm{NZD}(P(x), Q(x)) = R_2(x) = x + 2. \qquad \triangle$$

V.1.4 Bézoutov stav

Neka je $a \in \mathbb{K}$ i $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Tada je

$$P(a) = a_0 + a_1 a + \cdots + a_n a^n$$

jedan element u polju $\mathbb{K}$. Za $P(a)$ kažemo da je *vrednost* polinoma u tački $x = a$.

Teorema V.1.4.1 (Bézoutov[3] stav) *Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x - a$ jednak je vrednosti polinoma $P(a)$.*

Dokaz. Kako je $Q(x) = x - a$ polinom prvog stepena, na osnovu teoreme V.1.2.1, postoji jedinstveni polinom $S(x)$ i konstanta R (polinom stepena nula) tako da je

$$P(x) = S(x)(x-a) + R. \tag{V.1.4.1}$$

Stavljajući $x = a$ u (V.1.4.1) dobijamo $R = P(a)$. $\square$

[3] Etienne Bézout (1730–1783), francuski matematičar.

Za element $a \in \mathbb{K}$ kažemo da je *nula* polinoma $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ ako je $P(a) = 0$. U tom slučaju, za polinom prvog stepena $x - a$ kažemo da je *linearni faktor* polinoma $P(x)$ s obzirom da na osnovu (V.1.4.1) imamo

$$P(x) = S(x)(x - a),$$

tj. $P(x)$ je deljiv polinomom (prvog stepena) $x - a$.

Korišćenjem prethodne teoreme, svaki polinom $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ stepena n možemo na jedinstven način predstaviti (razložiti) po stepenima od $x - a$, tj.

$$P(x) = A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + \cdots + A_n(x - a)^n, \tag{V.1.4.2}$$

gde su A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ elementi polja $\mathbb{K}$. Zaista, na osnovu (V.1.4.1) imamo

$$P(x) = A_0 + P_1(x)(x - a), \tag{V.1.4.3}$$

gde smo stavili $A_0 = R = P(a)$ i $P_1(x) = S(x)$. Ako je $P_1(x)$ polinom nultog stepena traženi razvoj (V.1.4.2) je dobijen. U protivnom slučaju, delimo polinom $P_1(x)$ sa $x - a$, dobijajući pritom da je

$$P_1(x) = A_1 + P_2(x)(x - a), \tag{V.1.4.4}$$

gde je $A_1 = P_1(a)$. Na ovaj način, kombinujući (V.1.4.3) i (V.1.4.4), dobijamo

$$P(x) = A_0 + A_1(x - a) + P_2(x)(x - a)^2.$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo razvoj (V.1.4.2).

Neka je, nadalje, do kraja ovog odeljka $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definicija V.1.4.1 Ako je $a \in \mathbb{K}$ i $P(x) = A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + \cdots + A_n(x - a)^n$ proizvoljan polinom iz $\mathbb{K}[x]$, tada za polinom

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - a) + \cdots + nA_n(x - a)^{n-1} \in \mathbb{K}[x]$$

kažemo da je (*prvi*) *izvod* polinoma $P(x)$. Za preslikavanje $P(x) \mapsto P'(x)$ kažemo da je *diferenciranje* u prstenu $\mathbb{K}[x]$.

Viši izvodi $P^{(k)}(x)$ definišu se rekurzivno, tj.

$$P^{(0)}(x) \equiv P(x), \; P^{(k)}(x) = (P^{(k-1)}(x))' \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Napomenimo da je $\operatorname{dg} P'(x) = \operatorname{dg} P(x) - 1$, pri čemu je $P(x)$ polinom koji nije konstanta. Takođe, za svako $k > n = \operatorname{dg} P(x)$ imamo da je $P^{(k)}(x)$ nula polinom.

Na osnovu prethodnog, lako ju ustanoviti da važi

$$P(a) = A_0, \; P'(a) = 1!A_1, \; P''(a) = 2!A_2, \; \ldots, \; P^{(n)}(a) = n!A_n,$$

tj.

$$A_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{V.1.4.5}$$

Tako dobijamo Taylorovo razlaganje

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

pri čemu smo imali $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

V.1.5 Hornerova šema

Jedan elementaran, ali važan problem je izračunavanje vrednosti polinoma za dato $x = a$. Predstavimo polinom po opadajućim stepenima

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n. \tag{V.1.5.1}$$

Ako bismo izračunavali vrednost polinoma $P(a)$, na osnovu (V.1.5.1), bilo bi potrebno $2n - 1$ množenja ($n - 1$ množenja u formiranju stepena a^k $(k = 2, \ldots, n)$ i n množenja stepena a i odgovarajućih koeficijenata polinoma) i n sabiranja. Međutim, ukoliko $P(x)$ predstavimo u obliku

$$P(x) = (\cdots((a_0 x + a_1)x + a_2)x + \cdots + a_{n-1})x + a_n \tag{V.1.5.2}$$

potrebno je samo n množenja i n sabiranja.

Ta „ušteda" od $n - 1$ množenja nije beznačajna, naročito u situaciji kada je stepen polinoma n relativno veliki i kada treba, u nekom računskom postupku – algoritmu, više (stotina, pa i hiljada) puta izračunavati vrednost nekog polinoma.

Sa $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ označimo koeficijente polinoma $S(x)$ u (V.1.4.1) i stavimo $b_n = R$. Tada imamo

$$\begin{aligned} &a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\ &= (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{k-1}x^{n-k} + b_kx^{n-(k+1)} + \cdots + b_{n-1})(x-a) + b_n \end{aligned}$$

odakle, upoređivanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene na levoj i desnoj strani prethodne jednakosti, dobijamo

$$a_0 = b_0, \qquad a_k = b_k - b_{k-1}a \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Na osnovu ovih jednakosti može se formirati rekurzivni postupak za izračunavanje vrednosti polinoma za $x = a$:

$$\text{(V.1.5.3)} \qquad b_0 = a_0, \qquad b_k = b_{k-1}a + a_k \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

koji posle n koraka (pa, dakle, posle n množenja i n sabiranja) daje vrednost polinoma, tj. $P(a) = b_n$. Primetimo da su koeficijenti b_k, u stvari, vrednosti u odgovarajućim zagradama u (V.1.5.2) izračunate za $x = a$.

Izloženi postupak (V.1.5.3) poznat je kao *Hornerova*[4] *šema* s obzirom da se ove formule mogu pregledno interpretirati kroz sledeću šemu:

a	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
		b_0a	b_1a	b_2a		$b_{n-2}a$	$b_{n-1}a$
	b_0	b_1	b_2	b_3		b_{n-1}	$b_n = P(a)$

Prvu vrstu, dakle, započinjemo sa vrednošću $x = a$ za koju izračunavamo vrednost polinoma, a zatim pišemo koeficijente polinoma (V.1.5.1), počev od najstarijeg koeficijenta. U trećoj vrsti pišemo koeficijente b_k, koje izračunavamo sabiranjem odgovarajućih elemenata prve i druge vrste, pri čemu je $b_0 = a_0$. Elemente druge vrste formiramo množenjem vrednosti a sa prethodnim elementom iz treće vrste. Elementi treće vrste su, dakle, koeficijenti polinoma $S(x)$ i ostatak pri deljenju $R = P(a)$.

Nastavljajući postupak deljenja dobijenog količnika $S(x)$ sa $x - a$ moguće je dobiti razlaganje (V.1.4.2). Koeficijenti u tom razlaganju A_k su, upravo, ostaci pri ovim deljenjima. Na taj način, Hornerovom šemom i korišćenjem (V.1.4.5), mogu se odrediti svi izvodi polinoma $P(x)$ u tački $x = a$,

$$\text{(V.1.5.4)} \qquad P^{(k)}(a) = k!A_k, \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Primer 1. Neka je $P(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12 \in \mathbb{R}[x]$. Primenom Hornerove šeme odredićemo vrednost $P(2)$:

---

[4] William George Horner (1773–1827), engleski matematičar.

2	4	-4	13	-16	-12
		8	8	42	52
	4	4	21	26	40

Dakle, $P(2) = 40$. Količnik pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x - 2$ je polinom $S(x) = 4x^3 + 4x^2 + 21x + 26$, a ostatak deljenja je $R = P(2) = 40$. Navedena šema se može uprostiti izostavljanjem druge vrste (čije elemente i dalje izračunavamo, samo ih ne pišemo nego odmah dodajemo odgovarajućem elementu prve vrste i dobijamo odgovarajući element treće vrste). Tako, na primer, za $a = -1/2$ imamo uprošćenu Hornerovu šemu

$-1/2$	4	-4	13	-16	-12
	4	-6	16	-24	0

odakle zaključujemo da je $a = -1/2$ nula polinoma $P(x)$.

Primenimo sada postupak sukcesivnog deljenja u cilju dobijanja razlaganja polinoma $P(x)$ po stepenima od $x-2$ i izračunavanja izvoda polinoma u tački $x = 2$.

Postupak je prikazan u sledećoj tabeli:

2	4	-4	13	-16	-12
	4	4	21	26	40
	4	12	45	116	
	4	20	85		
	4	28			
	4				

Prema tome,

$$P(x) = 40 + 116(x-2) + 85(x-2)^2 + 28(x-2)^3 + 4(x-2)^4,$$

a kako je, s druge strane, (videti kraj odeljka V.1.4)

$$P(x) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{P^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4,$$

to imamo redom $P'(2) = A_1 = 116$, $P''(2) = 2A_2 = 170$, $P'''(2) = 6A_3 = 168$, $P^{(4)}(2) = 24A_4 = 96$. $\triangle$

V.1.6 Osnovni stav algebre i faktorizacija polinoma

U daljem izlaganju posmatraćemo polinome na tzv. *algebarski zatvorenim* poljima.

Definicija V.1.6.1 Za polje $\mathbb{K}$ kažemo da je algebarski zatvoreno ako svaki polinom $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, različit od konstante, ima bar jednu nulu u $\mathbb{K}$.

Da sva polja nisu algebarski zatvorena ukazuje sledeći primer.

Primer 1. Posmatrajmo polinom $P(x) = 1 + x^2$ nad poljem $\mathbb{K}$. Ako je $\mathbb{K}$ polje racionalnih brojeva ili polje realnih brojeva, $P(x)$ nema ni jednu nulu u $\mathbb{K}$. Međutim, na polju $\mathbb{C}$ ovaj polinom ima dve nule $x = i$ i $x = -i$. $\triangle$

Sledeća teorema o algebarskoj zatvorenosti polja kompleksnih brojeva tradicionalno se naziva *osnovna teorema algebre*:

Teorema V.1.6.1 (Osnovna teorema algebre) *Svaki polinom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ stepena $n \geq 1$ ima bar jednu nulu.*

Postoji više različitih dokaza ove teoreme. Jedan kratak dokaz se može dati metodima *Kompleksne analize.* Korišćenje elementarnog matematičkog aparata zahteva komplikovan dokaz pa ćemo ga ovde zbog toga izostaviti.

Teorema V.1.6.1 se često formuliše i u obliku:

Teorema V.1.6.2 *Svaki polinom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ stepena $n \geq 1$ je proizvod n linearnih faktora.*

Očigledno iz teoreme V.1.6.2 sleduje teorema V.1.6.1. Obrnuto, ako je x_1 nula polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ koja postoji na osnovu teoreme V.1.6.1, tada je, na osnovu teoreme V.1.4.1, $P(x)$ deljiv linearnim faktorom $x - x_1$, tj. važi

$$P(x) = (x - x_1)P_1(x),$$

gde je $P_1(x)$ polinom stepena $n - 1$. Ako je $n \geq 2$, tada ponovo primenom teoreme V.1.6.1, zaključujemo da $P_1(x)$ ima bar jednu nulu, recimo x_2, tako da je

$$P_1(x) = (x - x_2)P_2(x), \qquad \operatorname{dg} P_2(x) = n - 2.$$

Dakle,

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_2(x).$$

Nastavljajući ovakav postupak dolazimo do faktorizacije

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)P_n(x),$$

gde je $\operatorname{dg} P_n(x) = 0$, tj. $P_n(x)$ se svodi na najstariji koeficijent polinoma $P(x)$.

Dakle, polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{V.1.6.1}$$

sa kompleksnim koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i $a_n \neq 0$ ima n kompleksnih nula x_1, x_2, ..., x_n, i važi

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n). \tag{V.1.6.2}$$

Među kompleksnim brojevima x_1, x_2, ..., x_n može biti i jednakih. U sledećoj definiciji uvodimo pojam *višestruke nule* polinoma $P(x)$.

Definicija V.1.6.2 Za nulu x_1 polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ kažemo da je višestruka reda k ($\in \mathbb{N}$) ako postoji polinom $Q(x)$ takav da je

$$P(x) = (x - x_1)^k Q(x), \qquad Q(x_1) \neq 0. \tag{V.1.6.3}$$

Ako je $k = 1$ kažemo da je nula x_1 prosta ili jednostruka.

Teorema V.1.6.3 *Ako je $x = x_1$ višestruka nula reda $k > 1$ polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, tada je ona nula reda $k - 1$ izvodnog polinoma $P'(x) \in \mathbb{C}[x]$.*

Dokaz. Pretpostavljajući da je $x = x_1$ višestruka nula reda $k > 1$ polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, na osnovu prethodne definicije postoji polinom $Q(x)$ takav da važi (V.1.6.3). Tada je[5]

$$P'(x) = k(x - x_1)^{k-1}Q(x) + (x - x_1)^k Q'(x) = (x - x_1)^{k-1}Q_1(x),$$

gde je $Q_1(x) = kQ(x) + (x - x_1)Q'(x)$. Kako je $Q_1(x_1) = kQ(x_1) \neq 0$, zaključujemo da je $x = x_1$ višestruka nula reda $k - 1$ izvodnog polinoma $P'(x)$. $\square$

Teorema V.1.6.4 *Kompleksan broj x_1 je višestruka nula reda k polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ ako i samo ako je*

$$P(x_1) = P'(x_1) = \cdots = P^{(k-1)}(x_1) = 0, \quad P^{(k)}(x_1) \neq 0. \tag{V.1.6.4}$$

[5] Ne pravimo razliku između polinoma i polinomske funkcije i koristimo pravila za diferenciranje funkcija.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x = x_1$ višestruka nula reda k polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. Tada, sukcesivnom primenom prethodne teoreme na $P(x)$, $P'(x)$, ..., $P^{(k-1)}(x)$, dobijamo (V.1.6.4).

Obrnuto, ako pretpostavimo da važi (V.1.6.4), tada se Taylorovo razlaganje polinoma u tački $x = x_1$ (videti kraj odeljka V.1.4)

$$P(x) = P(x_1) + \frac{P'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \frac{P''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n$$

svodi na

$$P(x) = (x - x_1)^k \left[\frac{P^{(k)}(x_1)}{k!} + \frac{P^{(k+1)}(x_1)}{(k+1)!}(x - x_1) \cdots + \frac{P^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^{n-k}\right],$$

tj. $P(x) = (x - x_1)^k Q(x)$, gde je $Q(x_1) = P^{(k)}(x_1)/k! \neq 0$, što znači da je x_1 višestruka nula reda k polinoma $P(x)$. □

Primer 2. Da bismo dokazali da je polinom

$$P(x) = 2x^{n+1} - n(n+1)a^{n-1}x^2 + 2(n^2 - 1)a^n x - n(n-1)a^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

deljiv sa $(x - a)^3$ dovoljno je proveriti da li su ispunjeni uslovi $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$. Kako je

$$\begin{aligned} P'(x) &= 2(n+1)x^n - 2n(n+1)a^{n-1}x + 2(n^2 - 1)a^n, \\ P''(x) &= 2n(n+1)x^{n-1} - 2n(n+1)a^{n-1}, \end{aligned}$$

nalazimo redom

$$\begin{aligned} P(a) &= 2a^{n+1} - n(n+1)a^{n-1}a^2 + 2(n^2 - 1)a^n a - n(n-1)a^{n+1} = 0, \\ P'(a) &= 2(n+1)a^n - 2n(n+1)a^{n-1}a + 2(n^2 - 1)a^n = 0, \\ P''(a) &= 2n(n+1)a^{n-1} - 2n(n+1)a^{n-1} = 0. \qquad \triangle \end{aligned}$$

Kao direktnu posledicu teoreme V.1.6.2 imamo sledeći rezultat:

Teorema V.1.6.5 *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ međusobom različite nule polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ stepena n sa redom višestrukosti $k_1, k_2, \ldots, k_m$, respektivno. Tada važi faktorizacija, tj. kanoničko razlaganje polinoma*

(V.1.6.5) $$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m},$$

gde je $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, a a_n je najstariji koeficijent polinoma $P(x)$.

Teorema V.1.6.6 *Kanoničko razlaganje* (V.1.6.5) je jedinstveno.

Dokaz. Pretpostavimo da, pored kanoničkog razlaganja (V.1.6.5), postoji drugo kanoničko razlaganje

$$P(x) = a_n(x-y_1)^{l_1}(x-y_2)^{l_2}\cdots(x-x_r)^{l_r},$$

gde je $l_1 + l_2 + \cdots + l_r = n$. Tada mora važiti jednakost

$$(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m} = (x-y_1)^{l_1}(x-y_2)^{l_2}\cdots(x-y_r)^{l_r}. \tag{V.1.6.6}$$

Nije teško videti da se skupovi nula

$$X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \quad \text{i} \quad Y_r = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$$

moraju poklapati. Naime, ako to nije slučaj, jednakost nije moguća za svako $x \in \mathbb{C}$. Na primer, ako $x_1 \notin Y_r$, tada za $x = x_1$ leva strana u (V.1.6.6) postaje nula, dok je pri tome desna strana različita od nule. Prema tome, ako postoje dva kanonička razlaganja onda bi jednakost (V.1.6.6) eventualno bila moguća samo kada je $X_m = Y_r$, tj. kada je

$$(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m} = (x-x_1)^{l_1}(x-x_2)^{l_2}\cdots(x-x_m)^{l_m}.$$

Pretpostavimo sada da je, na primer, $k_1 \neq l_1$ i neka je $k_1 > l_1$. Deobom prethodne jednakosti sa faktorom $(x-x_1)^{l_1}$ dobijamo

$$(x-x_1)^{k_1-l_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m} = (x-x_2)^{l_2}\cdots(x-x_m)^{l_m},$$

odakle, stavljajući $x = x_1$, zaključujemo da mora biti $k_1 = l_1$ jer bi u protivnom slučaju leva strana bila nula, a desna različita od nule. Na ovaj način dokazujemo da mora biti $k_i = l_i$ za svako $i = 1, \ldots, m$, što znači da je kanoničko razlaganje (V.1.6.5) jedinstveno. □

Napomena 1. Na kraju ovog odeljka ukažimo na mogućnost da se polinom sa višestrukim nulama, čije je kanoničko razlaganje dato sa (V.1.6.5), može redukovati na polinom sa samo prostim nulama x_1, x_2, …, x_m. Pretpostavimo da je $D(x)$ najveći zajednički delilac za polinome $P(x)$ i $P'(x)$, tj. $D(x) = \text{NZD}(P(x), P'(x))$. Ukoliko je $D(x)$ konstanta, polinomi $P(x)$ i $P'(x)$ su uzajamno prosti, što znači da oni nemaju zajedničkih faktora, tj. polinom $P(x)$ ima samo proste nule. Međutim, ukoliko je $\operatorname{dg} D(x) \geq 1$, polinom $P(x)$ ima višestruke nule jer su tada faktori polinoma $D(x)$, upravo, zajednički faktori polinoma $P(x)$ i $P'(x)$. Zato deljenje polinoma $P(x)$ sa

$D(x)$ daje kao količnik polinom koji ima iste nule kao i polinom $P(x)$, ali su one sve proste. Dakle, taj polinom ima faktorizaciju

$$\frac{P(x)}{D(x)} = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m),$$

gde je c neka konstanta.

V.1.7 Vièteove formule

Posmatrajmo polinom $P(x)$ sa kompleksnim koeficijentima stepena n

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

predstavljen u obliku

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

gde su x_1, x_2, ..., x_n nule polinoma $P(x)$.

Iz identiteta

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{n-k} x^{n-k} &+ \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \end{aligned}$$

dobijamo tzv. *Vièteove*[6] *formule*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ &\vdots \\ x_1 x_2 \cdots x_k + \cdots + x_{n-k+1} x_{n-k+2} \cdots x_n &= (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \\ &\vdots \\ x_1 x_2 \cdots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

[6] François Viète (1540–1603), poznati francuski matematičar.

Označimo leve strane u prethodnim jednakostima redom sa σ_1, σ_2, ..., σ_n. Ove veličine se, inače, nazivaju *elementarne simetrične funkcije*. Nije teško zaključiti da važi

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} &+ a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \\ &= a_n(x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n). \end{aligned}$$

V.1.8 Nule realnih polinoma

Neka je

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{V.1.8.1}$$

gde su koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi i $a_n \neq 0$. Za takav polinom koristićemo termin *realni polinom*. On ima n nula, što realnih, što kompleksnih. Ako ima kompleksnih nula, pokazaćemo da se one javljaju kao parovi konjugovano-kompleksnih brojeva.

Teorema V.1.8.1 *Ako je x_ν kompleksna nula reda k_ν realnog polinoma $P(x)$, tada je i $\bar{x}_\nu$ takođe njegova kompleksna nula istog reda.*

Dokaz. Na osnovu (V.1.8.1) imamo

$$\overline{P(x)} = a_n \bar{x}^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{x} + a_0 = P(\bar{x}).$$

S druge strane, na osnovu faktorizacije (V.1.6.5), tj.

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\cdots(x - x_m)^{k_m} \qquad \big(k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n\big),$$

zaključujemo da je

$$\overline{P(x)} = P(\bar{x}) = a_n(\bar{x} - x_1)^{k_1}(\bar{x} - x_2)^{k_2}\cdots(\bar{x} - x_m)^{k_m},$$

tj.

$$P(x) = a_n(x - \bar{x}_1)^{k_1}(x - \bar{x}_2)^{k_2}\cdots(x - \bar{x}_m)^{k_m},$$

odakle neposredno sleduje tvrđenje teoreme. □

Dakle, na osnovu prthodnog, možemo zaključiti da realni polinom može imati realne nule i/ili parove konjugovano-kompleksnih nula. Pretpostavimo da polinom $P(x)$ ima realne nule $x_1, \ldots, x_m$, reda višestrukosti $k_1, \ldots, k_m$, respektivno, i parove konjugovano-kompleksnih nula $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_l \pm i\beta_l$, reda višestrukosti $s_1, \dots, s_l$, takođe respektivno. Naravno, mora biti

$$\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu + 2\sum_{\nu=1}^{l} s_\nu = \operatorname{dg} P(x).$$

Kako je

$$(x-\alpha_\nu - i\beta_\nu)(x-\alpha_\nu + i\beta_\nu) = (x-\alpha_\nu)^2 + \beta_\nu^2 = x^2 + p_\nu x + q_\nu \quad (p_\nu, q_\nu \in \mathbb{R}),$$

parovima konjugovano-kompleksnih nula odgovaraju kvadratni faktori

$$x^2 + p_\nu x + q_\nu \qquad \bigl(p_\nu = -2\alpha_\nu,\ q_\nu = \alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2\bigr)$$

odgovarajuće višestrukosti s_ν.

Prema tome, realni polinom $P(x)$ se može faktorisati u obliku

$$\text{(V.1.8.2)} \qquad P(x) = a_n \prod_{\nu=1}^{m} (x - x_\nu)^{k_\nu} \prod_{\nu=1}^{l} (x^2 + p_\nu x + q_\nu)^{s_\nu},$$

gde je a_n najstariji koeficijent polinoma $P(x)$.

Primer 1. Neka je $P(x) = x^6 - 2x^3 + 1$. Kako je

$$P(x) = (x^3 - 1)^2 = \bigl((x-1)(x^2+x+1)\bigr)^2,$$

faktorizacija (V.1.8.2) postaje $P(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)^2$, što znači da polinom ima dvostruku realnu nulu $x = 1$ i par konjugovano-kompleksnih nula $x = \bigl(-1 \pm i\sqrt{3}\bigr)/2$, čiji je red višestrukosti, takođe, dva. $\triangle$

Primer 2. Odredimo nule polinoma $P(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12$ ako znamo da je jedna njegova nula $-2i$.

Kako je ovo realni prolinom, on mora imati i konjugovanu nulu $2i$. Polinom $P(x)$ je, dakle, deljiv faktorom $(x+2i)(x-2i) = x^2 + 4$. Kako je

$$(4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12) : (x^2+4) = 4x^2 - 4x - 3 = 4\Bigl(x + \frac{1}{2}\Bigr)\Bigl(x - \frac{3}{2}\Bigr),$$

faktorizovani oblik polinoma $P(x)$ je

$$P(x) = 4\Bigl(x + \frac{1}{2}\Bigr)\Bigl(x - \frac{3}{2}\Bigr)(x^2 + 4).$$

Njegove nule su redom $x_1 = -1/2$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = -2i$, $x_4 = 2i$. $\triangle$

Razmotrimo sada potrebne uslove da jedan realni polinom sa celobrojnim koeficijentima ima racionalne nule.

Teorema V.1.8.2 *Neka je $P(x)$ realni polinom sa celobrojnim koeficijenima,*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (a_k \in a_{,j,}b_{j,} \ a_0 a_n \neq 0).$$

Ako je $x_1 = p/q$ nula ovog polinoma, gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi, tada a_0 deljivo sa p i a_n deljivo sa q, tj. važe relacije $p|a_0$ i $q|a_n$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x_1 = p/q \in \mathbb{Q}$ nula polinoma $P(x)$, tj. da je

$$P(x_1) = a_n\Big(\frac{p}{q}\Big)^n + a_{n-1}\Big(\frac{p}{q}\Big)^{n-1} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Ako ovu jednakost pomnožimo sa q^{n-1} dobijamo da je

$$a_n\frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0,$$

odakle zaključujemo da $q|a_n$ jer su p i q uzajamno prosti brojevi. Slično, množenjem poslednje jednakosti sa q/p dobijamo

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_0\frac{q^n}{p} = 0,$$

odakle zaključujemo da $p|a_0$. $\square$

Primer 3. Na polinom iz primera 2 možemo primeniti prethodnu teoremu. Faktori broja $12\,(= -a_0)$ su: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Pozitivni faktori broja $4\,(= a_4)$ su: 1, 2, 4. Na osnovu teoreme V.1.8.2, racionalne nule polinoma (ukoliko postoje) pripadaju sledećem skupu:

$$\Big\{\pm1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm2,\ \pm3,\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{3}{4},\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12\Big\}.$$

To su, kao što smo videli u primeru 2, $x_1 = -1/2$ i $x_2 = 3/2$. $\triangle$

U matematičkoj analizi je poznata Rolleova teorema koja se ovde može iskazati na sledeći način:

Teorema V.1.8.3 *Između dve uzastopne realne nule x_1 i x_2 $(x_1 < x_2)$ realnog polinoma $P(x)$ nalazi se bar jedna nula izvodnog polinoma $P'(x)$.*

Takođe, za realne polinome važe sledeći rezultati koji su posledice Rolleove teoreme:

Teorema V.1.8.4 *Između dve uzastopne realne nule x_1' i x_2' ($x_1' < x_2'$) realnog izvodnog polinoma $P'(x)$ nalazi se najviše jedna nula polinoma $P(x)$.*

Teorema V.1.8.5 *Ako su sve nule realnog polinoma $P(x)$ realne, tada su i sve nule izvodnog polinoma $P'(x)$ realne i nule izvodnog polinoma $P'(x)$ razdvajaju nule polinoma $P(x)$.*

Teorema V.1.8.6 *Realni polinom $P(x)$ ne može imati više od $k+1$ realnih nula ako izvodni polinom $P'(x)$ ima k realnih nula.*

V.2 ALGEBARSKE JEDNAČINE

V.2.1 Rešavanje algebarskih jednačina

Jedan od glavnih problema algebre je nalaženje *rešenja* algebarskih jednačina.

Definicija V.2.1.1 Ako je $P(x)$ polinom stepena n, pod *algebarskom jednačinom n-tog stepena* podrazumevamo jednačinu

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{V.2.1.1}$$

Koren ili rešenje jednačine (V.2.1.1) je svaka nula polinoma $P(x)$.

Očigledno je da rešenje jednačine (V.2.1.1) zavisi od koeficijenata a_0, a_1, ..., a_n. Dakle, ako je $x = a$ rešenje ove jednačine, tada je a funkcija koeficijenata, tj. $a = F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Pretpostavimo da je funkcija F obrazovana konačnom primenom operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i korenovanja nad koeficijentima a_0, a_1, ..., a_n. Rešiti jednačinu (V.2.1.1) pomoću *radikala* znači odrediti sve takve funkcije F za koje je $F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ rešenje jednačine (V.2.1.1).

Za rešenje opšte kubne jednačine zaslužni su italijanski algebristi Scipione del Ferro, Niccolò Tartaglia i Gerolamo Cardano iz šesnaestog veka[7]. U tom periodu dobijeno je i rešenje za opštu algebarsku jednačinu četvrtog stepena.

[7] Njihov rad je veoma značajan za istoriju algebre. Scipione del Ferro (1465–1526) nikad nije publikovao svoje rešenje, već ga je samo saopštio nekim svojim prijateljima. Gerolamo Cardano (1501–1576) je bio čuveni lekar, astrolog, filozof i matematičar, koji je živeo u Milanu. Niccolò Tartaglia (1500–1557) je, takođe, italijanski matematičar, čija je godina rođenja, prema raspoloživim izvorima, nesiguran podatak.

Svi napori tokom sledeća dva veka bili su usmereni na rešavanje opštih algebarskih jednačina stepena većeg od četiri, ali bezuspešno. Jedan od važnih doprinosa Gaussa u teoriji algebarskih jednačina je, svakako, kompletno rešenje binomne jednačine[8]

$$x^n - 1 = 0, \tag{V.2.1.2}$$

pomoću radikala. Rešavanje binomne jednačine razmatrali smo ranije (strana 41). Prisetimo se samo da su koreni ove jednačine kompleksni brojevi raspoređeni na jediničnom krugu tako da predstavljaju temena pravilnog poligona od n strana koji je upisan u ovaj krug. Dakle, binomna jednačina (V.2.1.2), ili kako se drugačije kaže *n-ti koren iz jedinice*, ima n rešenja koja odgovaraju tzv. *granama* n-tog korena, kojih ima tačno n.

Za jednačinu (V.2.1.1) kažemo da je *opšta algebarska jednačina* ako su njeni koeficijenti a_0, a_1, ..., a_n opšti brojevi. Ukoliko su, međutim, svi koeficijenti dati kao fiksne numeričke konstante, tada za jednačinu kažemo da je *numerička algebarska jednačina*. Ruffini[9], Abel, Galois[10], i drugi, dokazali su da se opšta algebarska jednačina stepena $n \geq 5$ ne može rešiti pomoću radikala. Rešenje je, dakle, moguće samo za jednačine stepena $n \leq 4$. U narednim odeljcima dajemo rešenja za kvadratne jednačine ($n = 2$), kubne jednačine ($n = 3$) i jednačine četvrtog stepena ($n = 4$).

S druge strane, numeričke algebarske jednačine mogu se rešiti sa proizvoljnom tačnošću raznim iterativnim metodima[11].

Na kraju ovog odeljka napomenimo da je Galois dao kompletan odgovor na pitanje pod kojim se uslovima neka algebarska jednačina može rešiti pomoću radikala.

---

[8] Ova jednačina je usko povezana sa konstrukcijom pravilnog poligona od n strana koji je upisan u dati krug. Starogrčki mistik, matematičar i prirodnjak Pitagora (569?–500? pre naše ere) znao je da konstruiše pravilne poligone sa 3, 4, 5 i 6 stranica. Njihove konstrukcije se mogu naći i četvrtoj knjizi *Euklidovi elementi*. Gauss je bio još na Univerzitetu (1796) kada je otkrio da pravilan poligon sa 17 stranica može biti upisan u dati krug korišćenjem samo lenjira i šestara. Kasnije, on je dokazao da pravilan n-tougao može biti konstruisan samo pomoću lenjira i šestara ako i samo ako je ispunjen bilo koji od sledećih uslova: (1) n je prost broj oblika $2^{2^k} + 1$, ili je proizvod različitih prostih brojeva ovog oblika; (2) n je neki stepen od 2; (3) n je proizvod brojeva koji zadovoljavaju uslove (1) i (2). Na osnovu ovoga, pokazano je da mogu biti konstruisani pravilni poligoni sa 257 i 65537 stranica. Godine 1801. pojavilo se značajno Gaussovo delo *Aritmetička ispitivanja*.

[9] Paolo Ruffini (1765–1822), italijanski matematičar.

[10] Evariste Galois (1811–1832), francuski matematičar.

[11] Ovi metodi se proučavaju u okviru kursa *Numerička matematika*.

V.2.2 Kvadratna jednačina

Neka su x_1 i x_2 koreni kompleksne kvadratne jednačine

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{V.2.2.1}$$

reprezentovani pomoću kompleksnih brojeva α i β,

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad x_2 = \alpha - \beta. \tag{V.2.2.2}$$

Tada je

$$2\alpha = -a_1, \qquad \alpha^2 - \beta^2 = a_0. \tag{V.2.2.3}$$

Iz (V.2.2.3) dobijamo $\alpha = -a_1/2$ kao i linearnu jednačinu za β^2 iz koje $\pm\beta$ može biti određeno. Dakle,

$$x_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0}, \qquad x_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0}. \tag{V.2.2.4}$$

Napomena 1. Grana kvadratnog korena u (V.2.2.4) može biti izbrana proizvoljno. Izbor grane utiče samo na redosled rešenja x_1 i x_2. Slična primedba važi i za jednačine trećeg i četvrtog stepena.

V.2.3 Kubna jednačina

Posmatrajmo kompleksnu jednačinu trećeg stepena, ili tzv. kubnu jednačinu,

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \tag{V.2.3.1}$$

Njeni koreni x_1, x_2 i x_3 se mogu predstaviti kompleksnim brojevima α, β i γ u obliku

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha + q_0\beta + q_0\gamma, \\ x_2 &= \alpha + q_1\beta + q_2\gamma, \\ x_3 &= \alpha + q_2\beta + q_1\gamma, \end{aligned} \tag{V.2.3.2}$$

gde su q_k, $k = 0, 1, 2$, dati sa

$$q_0 = 1, \quad q_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad q_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Tada, na osnovu Vièteovih formula

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -a_2, \\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= a_1, \\
x_1x_2x_3 &= -a_0,
\end{aligned}
\tag{V.2.3.3}
$$

imamo

$$
\begin{aligned}
3\alpha &= -a_2, \\
3\alpha^2 - 3\beta\gamma &= a_1, \\
\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma &= -a_0.
\end{aligned}
\tag{V.2.3.4}
$$

Iz jednačina (V.2.3.4) možemo naći sumu $3^3(\beta^3 + \gamma^3)$ i proizvod $3^6(\beta^3\gamma^3)$, pomoću kojih se može formirati kvadratna jednačina

$$
(3v)^6 + (2a_2^3 - 9a_1a_2 + 27a_0)(3v)^3 + (a_2^2 - 3a_1)^3 = 0,
\tag{V.2.3.5}
$$

čija rešenja su $(3\beta)^3$ i $(3\gamma)^3$.

Ako stavimo

$$
Q = a_2^2 - 3a_1, \qquad R = -2a_2^3 + 9a_1a_2 - 27a_0,
\tag{V.2.3.6}
$$

iz kvadratne jednačine (V.2.3.5) sleduje

$$
(3\beta)^3 = \frac{R + \sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}, \qquad (3\gamma)^3 = \frac{R - \sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}.
\tag{V.2.3.7}
$$

Dakle,

$$
\alpha = -\frac{a_2}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{R + \sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}}, \quad \gamma = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{R - \sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}}.
\tag{V.2.3.8}
$$

Grana kubnog korena u drugoj jednačini u (V.2.3.8) može biti izabrana proizvoljno, ali u trećoj jednačini ona mora biti izabrana tako da je $\beta\gamma = Q/9$. Poslednji zahtev proizilazi iz druge jednačine u (V.2.3.4).

Napomena 1. U knjizi: D. S. MITRINOVIĆ[12] i D. Ž. ĐOKOVIĆ[13], *Polinomi i matrice*, Naučna knjiga, Beograd, 1966 (str. 121–126) izložen je Cardanoov metod za rešavanje kubne jednačine.

[12] Dragoslav S. Mitrinović (1908–1995), poznati jugoslovenski matematičar.

[13] Dragomir Ž. Đoković (1938–), poznati jugoslovenski matematičar koji živi i radi u Kanadi.

V.2.4 Jednačina četvrtog stepena

Neka su koreni x_1, x_2, x_3 i x_4 kompleksne jednačine četvrtog stepena

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{V.2.4.1}$$

reprezentovani pomoću

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\ x_2 &= \alpha + \beta - \gamma - \delta, \\ x_3 &= \alpha - \beta + \gamma - \delta, \\ x_4 &= \alpha - \beta - \gamma + \delta, \end{aligned} \tag{V.2.4.2}$$

gde su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kompleksni brojevi. Tada imamo

$$\begin{aligned} 4\alpha &= -a_3, \\ 6\alpha^2 - 2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) &= \ \ a_2, \\ 4\alpha^3 - 4\alpha(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 8\beta\gamma\delta &= -a_1, \\ \alpha^4 + (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^2 - 2\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) & \\ -4(\beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2) + 8\alpha\beta\gamma\delta &= \ \ a_0. \end{aligned} \tag{V.2.4.3}$$

Na osnovu (V.2.4.3) dobijamo

$$4^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2), \qquad 4^4(\beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2), \qquad 4^6\beta^2\gamma^2\delta^2,$$

koji su, u stvari, koeficijenti kubne jednačine

$$\begin{aligned} (16v^2)^3 & -(3a_3^2 - 8a_2)(16v^2)^2 \\ +(3a_3^4 & -16a_2a_3^2 + 16a_1a_3 + 16a_2^2 - 64a_0)(16v^2) \\ & \qquad -(a_3^3 - 4a_2a_3 + 8a_1)^2 = 0. \end{aligned} \tag{V.2.4.4}$$

Njena rešenja su $(4\beta)^2, (4\gamma)^2$ i $(4\delta)^2$. Dakle, jednačine (V.2.4.3) definišu vrednost za α, $\alpha = -a_3/4$, i impliciraju jednačinu trećeg stepena (V.2.4.4) za određivanje β^2, γ^2 i δ^2.

Ako stavimo

$$\begin{aligned} P &= a_3^3 - 4a_2a_3 + 8a_1, \\ Q &= 12a_0 + a_2^2 - 3a_1a_3, \\ R &= 27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2a_2^3 - 72a_0a_2 + 27a_1^2 \end{aligned} \tag{V.2.4.5}$$

i

(V.2.4.6)
$$\begin{aligned}\alpha_0 &= a_3^2 - \frac{8}{3}a_2,\\ \beta_0 &= \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{R+\sqrt{R^2-4Q^3}}{2}},\\ \gamma_0 &= \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{R-\sqrt{R^2-4Q^3}}{2}},\end{aligned}$$

tada su

(V.2.4.7)
$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{a_3}{4},\\ \beta &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha_0+\beta_0+\gamma_0},\\ \gamma &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha_0+q_1\beta_0+q_2\gamma_0},\\ \delta &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha_0+q_2\beta_0+q_1\gamma_0},\end{aligned}$$

gde su q_1 i q_2 dva ne-realna kubna korena iz jedinice, čiji redosled nije bitan.

Bilo koji izbor grane kubnog korena u (V.2.4.6) za koji je

(V.2.4.8)
$$\beta_0\gamma_0 = \frac{16Q}{9}$$

je dozvoljen. Slično je moguć proizvoljan izbor znaka kvadratnog korena u (V.2.4.7) za koji je

(V.2.4.9)
$$\beta\gamma\delta = -\frac{P}{64}.$$

Ograničenje (V.2.4.9) za izbor znaka veličina β, γ i δ u (V.2.4.7) proizilazi iz prve tri jednačine u (V.2.4.3).

Može se, takođe, dokazati sledeća karakterizacija:

Teorema V.2.4.1 *Neka je*

(V.2.4.10)
$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

realna jednačina četvrtog stepena i neka su

$$\begin{aligned}Q &= 12a_0 + a_2^2 - 3a_1a_3,\\ R &= 27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2a_2^3 - 72a_0a_2 + 27a_1^2,\end{aligned}$$

i

$$T = 3a_3^2 - 8a_2 + 8\text{Re}\left(\sqrt[3]{\frac{R+\sqrt{R^2-4Q^3}}{2}}\right). \tag{V.2.4.11}$$

Ako korene računamo sa njihovim višestrukostima, imamo da

(1) *ako je* $R^2 - 4Q^3 > 0$ *tada su dva i samo dva korena posmatrane jednačine* (V.2.4.10) *realna*;

(2) *ako je* $R^2 - 4Q^3 = 0$ *tada su dva korena jednačine* (V.2.4.10) *realna, dok su preostala dva korena realna, ako i samo ako je* $T \geq 0$ *za sva tri moguća izbora kubnog korena u* (V.2.4.11);

(3) *ako je* $R^2 - 4Q^3 < 0$ *tada su* (a) *četiri korena jednačine* (V.2.4.10) *realna ako i samo ako je* $T \geq 0$ *za sva tri moguća izbora kubnog korena u* (V.2.4.11); *i* (b) *Nijedan koren jednačine* (V.2.4.10) *nije realan ako i samo ako je* $T < 0$ *za najmanje jedan od moguća tri izbora kubnog korena u* (V.2.4.11).

Isto tako važe i sledeća dva tvrđenja:

Teorema V.2.4.2 1° *Kubna jednačina* (V.2.3.1) *ima dva jednaka korena ako i samo ako je* $R^2 - 4Q^3 = 0$ *i ima tri jednaka korena ako i samo ako je* $R = Q = 0$, *gde su*

$$R = -2a_3^3 + 9a_2a_3 - 27a_1, \qquad Q = a_3^2 - 3a_2\,;$$

2° *Jednačina četvrtog stepena* (V.2.4.1) *ima dva jednaka korena ako i samo ako je* $R^2 - 4Q^3 = 0$ *i ima tri jednaka korena ako i samo ako je* $R = Q = 0$, *gde su*

$$\begin{aligned} R &= 27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2a_2^3 - 72a_0a_2 + 27a_1^2, \\ Q &= 12a_0 + a_2^2 - 3a_1a_3. \end{aligned}$$

Ove teoreme se mogu neposredno dokazati korišćenjem algebrskih rešenja koja su prethodno data.

Teorema V.2.4.3 1° *Jednačina četvrtog stepena* (V.2.4.1) *ima dva para jednakih korena ako i samo ako su ispunjeni uslovi*

$$R^2 - 4Q^3 = 0 \qquad i \qquad 32R = 27\alpha_0^3.$$

2° *Jednačina* (V.2.4.1) *ima četiri jednaka korena ako i samo ako je* $R = Q = \alpha_0 = 0$.

V.3 HURWITZOVI POLINOMI

V.3.1 Definicija Hurwitzovih polinoma

U mnogim problemima koji se odnose na stabilnost sistema (elektronskih, mehaničkih, itd.) pojavljuju se polinomi čije sve nule imaju negativan realni deo. U ovom poglavlju razmatraćemo takvu klasu polinoma i dati potrebne i dovoljne uslove da jedan polinom pripada ovakvoj klasi. Jedno algoritamsko rešenje ovog problema iz 1877. godine, koje je nedovoljno poznato u literaturi, potiče od Routha[14]. Elegantno rešenje ovog problema u determinantnom obliku dao je Hurwitz[15] 1895. godine i zato se polinomi iz ove klase nazivaju *Hurwitzovi polinomi* ili kraće H-*polinomi*.

Dakle, realan ili kompleksan polinom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0) \tag{V.3.1.1}$$

je H-polinom ako sve njegove nule x_k $(k = 1, \ldots, n)$ imaju osobinu $\operatorname{Re} x_k < 0$.

Teorema V.3.1.1 *Ako je realni polinom* (V.3.1.1) H-*polinom, tada su svi njegovi koeficijenti istog znaka (svi koeficijenti su veći od nule ili su svi manji od nule – nema jednakih nuli).*

Dokaz. Pretpostavimo da H-polinom (V.3.1.1) ima konjugovano kompleksne nule

$$x_k = -\alpha_k + i\beta_k, \quad x_{2m-k+1} = \bar{x_k}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

i realne nule

$$x_{2m+k} = -\gamma_k, \qquad k = 1, \ldots, n-2m,$$

gde su $\alpha_k, \gamma_k > 0$. Tada se on može faktorisati u obliku

$$P(x) = a_n \prod_{k=1}^{m} (x + \alpha_k - i\beta_k)(x + \alpha_k + i\beta_k) \prod_{k=1}^{n-2m} (x + \gamma_k),$$

tj.

$$P(x) = a_n \prod_{k=1}^{m} (x^2 + 2\alpha_k x + \alpha_k^2 + \beta_k^2) \prod_{k=1}^{n-2m} (x + \gamma_k).$$

---

[14] Edward John Routh, *Stability of given state of motion*, London, 1877. Bliže biografske podatke o Routhu ne posedujemo.

[15] Adolf Hurwitz (1859–1919), nemački matematičar.

Kako svi kvadratni i linearni faktori imaju pozitivne koeficijente, zaključujemo da polinom P ima sve koeficijente a_k $(k = 0, \ldots, n)$ različite od nule i oni su istog znaka kao što je znak koeficijenta a_n. □

Napomena 1. Obrnuto tvrđenje vazi za $n = 1$ i $n = 2$, tj. polinomi $a_0 + a_1 x$ i $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, sa $a_0, a_1, a_2 > 0$ ili $a_0, a_1, a_2 < 0$, su H-polinomi. Ovakvo tvrđenje ne važi za $n \geq 3$. Na primer, $1 + x + x^2 + x^3$ nije H-polinom. Njegove nule se mogu odrediti iz faktorizacije

$$1 + x + x^2 + x^3 = (x + 1)(x^2 + 1).$$

V.3.2 Schurov metod

Posmatrajmo proizvoljan kompleksni polinom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0). \tag{V.3.2.1}$$

Sa $P^*(x)$ označimo polinom koji se dobija iz (V.3.2.1) zamenom koeficijenata sa odgovarajućim konjugovanim vrednostima i promeni znaka koeficijentima uz neparni stepen od x, tj.

$$P^*(x) = \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2 - \cdots + (-1)^n \bar{a}_n x^n. \tag{V.3.2.2}$$

Primetimo da iz $P(x) = U(x)V(x)$ sleduje $P^*(x) = U^*(x)V^*(x)$. Takođe, $(P^*)^*(x) = P(x)$.

Pretpostavimo da su $x_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k = 1, \ldots, n$ nule polinoma $P^*(x)$. Tada imamo faktorizacije

$$P(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k), \tag{V.3.2.3}$$

$$P^*(x) = \bar{a}_n \prod_{k=1}^{n} (-x - \bar{x}_k) = (-1)^n \bar{a}_n \prod_{k=1}^{n} (x + \bar{x}_k). \tag{V.3.2.4}$$

Dokazaćemo sada jedan pomoćni rezultat:

Teorema V.3.2.1 *Ako je $P(x)$ H-polinom, tj.* $\operatorname{Re} x_k = \alpha_k < 0$, $k = 1, \ldots, n$, *tada važe nejednakosti*

$$\begin{array}{lll} |P(x)| > |P^*(x)| & \geq 0 & \textit{za } \operatorname{Re} x > 0, \\ |P^*(x)| > |P(x)| & \geq 0 & \textit{za } \operatorname{Re} x < 0, \\ |P(x)| = |P^*(x)| & > 0 & \textit{za } \operatorname{Re} x = 0, \end{array}$$

Dokaz. Za dokaz ovih nejednakosti dovoljno je za proizvoljno k $(1 \leq k \leq n)$ uočiti razliku

$$\begin{aligned} D &= |x+\bar{x}_k|^2 - |x-x_k|^2 \\ &= (x+\bar{x}_k)(\bar{x}+x_k) - (x-x_k)(\bar{x}-\bar{x}_k) \\ &= (x+\bar{x})(x_k+\bar{x}_k) \\ &= 4\alpha_k \mathrm{Re}\, x. \end{aligned}$$

S obzirom da je $\mathrm{Re}\, x_k = \alpha_k < 0$, zaključujemo da važi

$$\begin{array}{lcll} |x-x_k| & > & |x+\bar{x}_k| & \text{za } \mathrm{Re}\, x > 0, \\ |x-x_k| & < & |x+\bar{x}_k| & \text{za } \mathrm{Re}\, x < 0, \\ |x-x_k| & = & |x+\bar{x}_k| & \text{za } \mathrm{Re}\, x = 0, \end{array}$$

što zajedno sa (V.3.2.3) i (V.3.2.4) daje tvrđenje teoreme. □

Nejednakosti u teoremi V.3.2.1 nazivaju se *Schurove*[16] *nejednakosti.* Korišćenjem tih nejedakosti možemo dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema V.3.2.2 *Ako su a i b proizvoljne kompleksne konstante takve da je $|a| > |b|$, tada je $P(x)$ H-polinom ako i samo ako je*

(V.3.2.5) $$Q(x) = aP(x) - bP^*(x),$$

H-*polinom.*

Dokaz. Ako polinom $P(x)$ ima samo nule sa negativnim realnim delom, tj. ako je on H-polinom, tada na osnovu prethodne teoreme, za $\mathrm{Re}\, x \geq 0$ imamo $|P(x)| \geq |P^*(x)|$. Štaviše, za $|a| > |b|$ imamo

$$|aP(x)| > |bP^*(x)| \qquad (\mathrm{Re}\, x \geq 0),$$

što znači da je $Q(x) \neq 0$ za svako x za koje je $\mathrm{Re}\, x \geq 0$, tj. $Q(x)$ je H-polinom.

Obrnuto, neka $Q(x)$ ima samo nule sa negativnim realnim delom. Tada, na osnovu

$$Q(x) = aP(x) - bP^*(x), \qquad Q^*(x) = \bar{a}P^*(x) - \bar{b}P(x),$$

[16] Issai Schur (1875–1941), nemački matematičar.

dobijamo

$$P(x) = \frac{\bar{a}}{|a|^2 - |b|^2} Q(x) + \frac{b}{|a|^2 - |b|^2} Q^*(x). \tag{V.3.2.6}$$

Kako je koeficijent uz $Q(x)$ u (V.3.2.6) veći po modulu od koeficijenta uz $Q^*(x)$, na osnovu prvog dela tvrđenja, zaključujemo da je $P(x)$ H-polinom. □

Neka je ξ proizvoljan kompleksan broj sa negativnim realnim delom. Ako je $P(x)$ H-polinom, na osnovu Schurovih relacija imamo da je

$$|P^*(\xi)| > |P(\xi)|. \tag{V.3.2.7}$$

Ako stavimo $a = P^*(\xi)$ i $b = P(\xi)$, na osnovu prethodne teoreme i (V.3.2.5) zaključujemo da je polinom

$$Q_\xi(x) = P^*(\xi)P(x) - P(\xi)P^*(x) \tag{V.3.2.8}$$

H-polinom. Važi i obrnuto, ako je $Q_\xi(x)$ iz (V.3.2.8) H-polinom i (V.3.2.7) važi za $\operatorname{Re}\xi < 0$, tada je $P(x)$ H-polinom.

Ako imamo u vidu da je $x = \xi$ nula polinoma $Q_\xi(x)$, prethodno rečenim smo dokazali da važi sledeće tvrđenje:

Teorema V.3.2.3 *Neka je ξ proizvoljan kompleksan broj takav da je $\operatorname{Re}\xi < 0$. Polinom $P(x)$ ($\operatorname{dg} P(x) \geq 2$) je H-polinom samo ako je*

$$S_\xi(x) = \frac{P^*(\xi)P(x) - P(\xi)P^*(x)}{x - \xi} \tag{V.3.2.9}$$

H-polinom i $|P^*(\xi)| > |P(\xi)|$.

Poslednja teorema daje rekurzivni postupak, poznat kao *Schurov metod*, za ispitivanje da li je jedan polinom Hurwitzov ili nije. Naime, problem za polinom stepena n se svodi na odgovarajući problem za polinom stepena $n-1$ uz proveru jedne nejednakosti. Obično se uzima $\xi = -1$.

V.3.3 Primena Schurovog metoda na polinome sa realnim koeficijentima

Prethodno izloženi Schurov metod se može uprostiti ako je polinom

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad (a_0 > 0). \tag{V.3.3.1}$$

sa realnim koeficijentima.

Da bi takav polinom mogao da bude H-polinom, svi njegovi koeficijenti moraju da budu istog znaka (videti teoremu V.3.1.1), pa s obzirom da smo uzeli da je $a_0 > 0$, to su $a_k > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Za takav polinom važi

$$|P^*(-1)| > |P(-1)|, \qquad \text{tj.} \qquad \big(P^*(-1)\big)^2 > \big(P(-1)\big)^2.$$

Zaista, kako je

$$P^*(-1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

i

$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$$

važi nejednakost

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \geq (a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n)^2.$$

Prema tome, na osnovu teoreme V.3.2.3 gde smo uzeli $\xi = -1$, polinom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $\quad (a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots, n)$ je H-polinom ako i samo ako je

$$S(x) = \frac{P^*(-1)P(x) - P(-1)P^*(x)}{x+1} \tag{V.3.3.2}$$

H-polinom.

Primer 1. Posmatrajmo polinom trećeg stepena

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (a_k > 0,\ k = 0, 1, 2, 3).$$

Polinom iz (V.3.3.2), za ovaj slučaj, ima oblik

$$S(x) = \frac{2}{x+1}\big((a_1 + a_3)(a_0 + a_2 x^2) + (a_1 x + a_3 x^3)\big),$$

odakle se dobija

$$\frac{1}{2}S(x) = a_0(a_1 + a_3) + (a_1 a_2 - a_0 a_3)x + a_3(a_0 + a_2)x^2.$$

Potreban i dovoljan uslov da je dobijeni polinom drugog stepena H-polinom, je da su mu svi koeficijenti istog znaka (videti napomenu 1 na strani 238). S obzirom da je $a_k > 0$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, to je zadovoljeno za

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Dakle, na osnovu prethodnog, realni polinom trećeg stepena

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (a_0 > 0) \tag{V.3.3.3}$$

je H-polinom ako i samo ako je $a_k > 0$ $(k = 1, 2, 3)$ i $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

Ovom tvrđenju se može dati i ovakva forma. Polinom (V.3.3.3) je H-polinom ako i samo ako je

$$D_1^{(3)} = a_1 > 0, \qquad D_2^{(3)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$D_3^{(3)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 D_2^{(3)} > 0. \qquad \triangle$$

Primer 2. 1° Koeficijenti polinoma $2 + x + x^2 + x^3$ su $a_0 = 2$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, pa su odgovarajuće determinante redom jednake:

$$D_1^{(3)} = 1 > 0, \qquad D_2^{(3)} = -1 < 0, \qquad D_3^{(3)} = -1 < 0.$$

Ovo znači da dati polinom nije H-polinom.

2° Za polinom $1 + x + 2x^2 + x^3$ odgovarajuće determinate su

$$D_1^{(3)} = 1 > 0, \qquad D_2^{(3)} = 1 > 0, \qquad D_3^{(3)} = 1 > 0,$$

odakle zaključujemo da se radi o H-polinomu. $\triangle$

Uopšte, kada se radi o realnim polinomima stepena n, važi sledeće tvrđenje koje navodimo bez dokaza.

Teorema V.3.3.1 *Polinom $P(x)$ dat pomoću* (V.3.3.1) *je* H-*polinom ako i samo ako je*

$$D_k^{(n)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & & a_k \end{vmatrix} > 0,$$

za $k = 1, 2, \ldots, n$, gde treba staviti $a_j = 0$ za $j > n$.

Primer 3. Na osnovu teoreme V.3.3.1, polinom četvrtog stepena sa realnim koeficijentima

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \qquad (a_0 > 0)$$

je H-polinom ako i samo ako su ispunjeni uslovi

$$D_1^{(4)} = a_1 > 0, \qquad D_2^{(4)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$D_3^{(4)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 > 0,$$

$$D_4^{(4)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 D_3^{(4)} > 0. \qquad \triangle$$

V.4 RACIONALNE FUNKCIJE

V.4.1 Racionalna funkcija

Neka su $P(x)$ i $Q(x)$ algebarski polinomi takvi da je $\operatorname{dg} P(x) = n$ i $\operatorname{dg} Q(x) = m$, tj.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \qquad \text{i} \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{m-k} \qquad (a_0, b_0 \neq 0).$$

Definicija V.4.1.1 Funkcija $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ naziva se *racionalna funkcija* reda $[n/m]$.

Definicija V.4.1.2 Ako su polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ relativno prosti, tj. nemaju zajednički faktor stepena $r \geq 1$, tada se za racionalnu funkciju $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ kaže da je *nesvodljiva racionalna funkcija*.

Definicija V.4.1.3 Ako je stepen polinoma $P(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$, tj. ako je $\operatorname{dg} P(x) < \operatorname{dg} Q(x)$, racionalna funkcija $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ naziva se *prava racionalna funkcija*.

U protivnom slučaju radi se o *nepravoj racionalnoj funkciji*.

Svaka neprava racionalna funkcija uvek se može prestaviti kao zbir jednog polinoma i jedne prave racionalne funkcije, što se postiže deljenjem polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$.

Primer 1. Posmatrajmo racionalnu funkciju

$$R(x) = \frac{x^6 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 7}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

Deljenjem brojioca imeniocem dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrrl}
(x^6 & +3x^4 & +x^3 & -\ 5x^2 & +4x & -7) & : (x^4 + 5x^2 + 4) = x^2 - 2 \\
x^6 & +5x^4 & & +\ 4x^2 & & & \\
\hline
 & -2x^4 & +x^3 & -\ 9x^2 & +4x & -7 & \\
 & -2x^4 & & -10x^2 & & -8 & \\
\hline
 & & x^3 & +\ \ x^2 & +4x & +1 &
\end{array}$$

tj.

$$R(x) = x^2 - 2 + \frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}. \qquad \triangle$$

U našem daljem razmatranju ograničićemo se samo na realne racionalne funkcije, tj. na slučaj kada su $P(x)$ i $Q(x)$ realni polinomi. Najpre ćemo se upoznati sa tzv. prostim ili parcijalnim razlomcima, kao i sa odgovarajućim rastavljanjem ili razlaganjem nesvodljive prave racionalne funkcije.

Definicija V.4.1.4 Funkcije

$$x \mapsto \frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{i} \quad x \mapsto \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

gde su A, M, N, a, p, q realne konstante i $p^2 - 4q < 0$, nazivaju se *prosti* ili *parcijalni razlomci*.

V.4.2 Rastavljanje prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke

U mnogim primenama veoma je važno rastavljanje prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke. To je, na primer, slučaj kod integracije racionalnih funkcija.

Neka je $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ nesvodljiva prava racionalna funkcija. Rastavljanje takve funkcije na parcijalne razlomke oslanja se na sledeće dve leme.

Lema V.4.2.1 *Neka je a realan koren reda višestrukosti r polinoma $Q(x)$, tj. neka je*

$$Q(x) = (x-a)^r Q_1(x) \qquad (\operatorname{dg} Q_1(x) = \operatorname{dg} Q(x) - r). \tag{V.4.2.1}$$

Tada postoji jedinstveno rastavljanje prave racionalne funkcije u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{r-1}Q_1(x)}, \tag{V.4.2.2}$$

gde je A_r realna konstanta, a drugi član na desnoj strani jednakosti (V.4.2.2) *je, takođe, prava racionalna funkcija.*

Dokaz. Pretpostavimo da važi (V.4.2.2). Tada imamo

$$P(x) \equiv A_r Q_1(x) + (x-a)P_1(x), \tag{V.4.2.3}$$

odakle zaključujemo da je $A_r = P(a)/Q_1(a)$. Konstanta A_r egzistira jedinstveno jer je $Q_1(a) \neq 0$. Zamenom ove vrednosti za A_r u (V.4.2.3) dobijamo

$$P_1(x) = \frac{P(x) - A_r Q_1(x)}{x-a}.$$

Očigledno je

$$\operatorname{dg} P_1(x) \leq \max(\operatorname{dg} P(x), \operatorname{dg} Q_1(x)) - 1 \leq \operatorname{dg} Q(x) - 2.$$

Kako je stepen polinoma $(x-a)^{r-1}Q_1(x)$, koji se pojavljuje na desnoj strani u (V.4.2.2), jednak $\operatorname{dg} Q(x) - 1$, zaključujemo da je ovaj član, takođe, prava racionalna funkcija. □

Lema V.4.2.2 *Neka je $x^2 + px + q$ ($p, q \in \mathbb{R}$; $p^2 < 4q$) faktor višestrukosti s ($s \in \mathbb{N}$) polinoma $Q(x)$, tj. neka je*

$$Q(x) = (x^2+px+q)^s Q_1(x) \qquad (\operatorname{dg} Q_1(x) = \operatorname{dg} Q(x) - 2s). \tag{V.4.2.4}$$

Tada postoji jedinstveno rastavljanje prave racionalne funkcije u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_s x + N_s}{(x^2+px+q)^s} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}Q_1(x)}, \tag{V.4.2.5}$$

gde su M_s i N_s realne konstante, a drugi član na desnoj strani u (V.4.2.5) *je, takođe, prava racionalna funkcija.*

Dokaz. Koreni kvadratnog trinoma $x^2 + px + q$ su konjugovano-kompleksni brojevi jer je $p^2 < 4q$. Označimo ih sa $\alpha \pm i\beta$. Slično, kao i u dokazu prethodne leme, pretpostavimo da egzistira (V.4.2.5). Tada imamo

$$P(x) \equiv (M_s x + N_s)Q_1(x) + (x^2 + px + q)P_1(x). \tag{V.4.2.6}$$

Stavljajući $x = a = \alpha + i\beta$ i $x = \bar{a} = \alpha - i\beta$ dobijamo

$$P(a) = (M_s a + N_s)Q_1(a), \qquad P(\bar{a}) = (M_s \bar{a} + N_s)Q_1(\bar{a}),$$

tj.

$$M_s a + N_s = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = w, \quad M_s \bar{a} + N_s = \frac{P(\bar{a})}{Q_1(\bar{a})} = \overline{\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right)} = \overline{w}. \tag{V.4.2.7}$$

Napomenimo da su $Q_1(a)$ i $Q_1(\bar{a})$ različiti od nule.

Rešavanjem sistema jednačina (V.4.2.7) nalazimo jedinstvena realna rešenja

$$M_s = \frac{\operatorname{Im}(w)}{\operatorname{Im}(a)} \quad \text{i} \quad N_s = \frac{\operatorname{Im}(a\overline{w})}{\operatorname{Im}(a)},$$

jer je $\operatorname{Im}(a) = \beta \neq 0$.

Potrebno je još dokazati da je drugi član na desnoj strani u (V.4.2.5) prava racionalna funkcija. Stavljanjem nađenih vrednosti za M_s i N_s u (V.4.2.6) dobijamo

$$P_1(x) = \frac{P(x) - (M_s x + N_s)Q_1(x)}{x^2 + px + q},$$

i tada, jednostavno kao u prethodnoj lemi, dokazujemo da je

$$\operatorname{dg} P_1(x) < \operatorname{dg} Q(x) - 2. \qquad \square$$

Ako lemu V.4.2.1 primenimo r puta, zaključujemo da se prava racionalna funkcija $x \mapsto R(x)$ može predstaviti u obliku

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-a)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + R_1(x),$$

gde je $x \mapsto R_1(x)$, takođe, prava racionalna funkcija čiji je imenilac polinom $Q_1(x)$, definisan pomoću (V.4.2.1).

Slično, primenom leme V.4.2.2 s-puta, dobijamo

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + R_2(x),$$

gde je $x \mapsto R_2(x)$ prava racionalna funkcija čiji je imenilac polinom $Q_1(x)$ određen pomoću (V.4.2.4).

Pretpostavimo sada da polinom $Q(x)$ ima realne nule $a_1, \ldots, a_m$, reda višestrukosti $r_1, \ldots, r_m$, respektivno, i parove konjugovano-kompleksnih nula $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_l \pm i\beta_l$, reda višestrukosti $s_1, \ldots, s_l$, takođe respektivno. Naravno, mora biti

$$\sum_{k=1}^{m} r_k + 2\sum_{k=1}^{l} s_k = \operatorname{dg} Q(x).$$

Parovima konjugovano-kompleksnih nula odgovaraju kvadratni faktori $x^2 + p_k x + q_k$ ($p_k = -2\alpha_k$, $q_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2$) odgovarajuće višestrukosti s_k.

Polinom $Q(x)$ se može faktorisati u obliku

$$Q(x) = A \prod_{k=1}^{m} (x - a_k)^{r_k} \prod_{k=1}^{l} (x^2 + p_k x + q_k)^{s_k}, \tag{V.4.2.8}$$

gde je A najstariji koeficijent polinoma $Q(x)$. Ne umanjujući opštost može se uzeti $A = 1$.

Na osnovu prethodnog izlaganja, prava racionalna funkcija se može rastaviti na parcijalne razlomke čiji oblik zavisi od oblika faktora u (V.4.2.8). Naime, faktoru $(x - a)^r$ odgovara oblik

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x - a)^r},$$

a faktoru $(x^2 + px + q)^s$ oblik

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s}.$$

Tako imamo sledeći rezultat:

Teorema V.4.2.1 *Neka je $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ nesvodljiva prava racionalna funkcija, pri čemu se polinom $Q(x)$ može faktorisati kao u* (V.4.2.8). *Tada je*

$$R(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{r_k} \frac{A_{kn}}{(x - a_k)^n} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=1}^{s_k} \frac{M_{kn} x + N_{kn}}{(x^2 + p_k x + q_k)^n}, \tag{V.4.2.9}$$

gde se nepoznati koeficijenti A_{kn}, M_{kn}, N_{kn}, mogu odrediti metodom neodređenih koeficijenata.

Primer 1. Na osnovu (V.4.2.9), racionalna funkcija

$$R(x) = \frac{8x^3 + 21x - 11}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$$

može se predstaviti u obliku

$$R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+x+1} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+x+1)^2}. \tag{V.4.2.10}$$

Nepoznate koeficijente A_k, M_k, N_k $(k = 1, 2)$ određujemo iz identiteta

$$\begin{aligned} A_1(x-1)(x^2+x+1)^2 & +A_2(x^2+x+1)^2 \\ +(M_1x+N_1)(x-1)^2(x^2+x+1) & +(M_2x+N_2)(x-1)^2 \\ & \equiv 8x^3+21x-11, \end{aligned}$$

tj. iz

$$\begin{aligned} (A_1+M_1)x^5 + (A_1+A_2-M_1+N_1)x^4 \\ +(A_1+2A_2-N_1+M_2)x^3 + (-A_1+3A_2-M_1-2M_2+N_2)x^2 \\ +(-A_1+2A_2+M_1-N_1+M_2-2N_2)x + (-A_1+A_2+N_1+N_2) \\ \equiv 8x^3+21x-11\ , \end{aligned}$$

Dakle, traženi koeficijenti su rešenja sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} A_1 \qquad + M_1 \qquad\qquad\qquad &= 0, \\ A_1 + A_2 - M_1 + N_1 \qquad\qquad &= 0, \\ A_1 + 2A_2 \qquad - N_1 + M_2 \qquad &= 8, \\ -A_1 + 3A_2 - M_1 \qquad - 2M_2 + N_2 &= 0, \\ -A_1 + 2A_2 + M_1 - N_1 + M_2 - 2N_2 &= 21, \\ -A_1 + A_2 \qquad + N_1 \qquad + N_2 &= -11, \end{aligned}$$

odakle nalazimo

$$A_1 = 1,\ A_2 = 2,\ M_1 = -1,\ N_1 = -4,\ M_2 = -1,\ N_2 = -8.$$

Važi, dakle, rastavljanje

$$R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{x+4}{x^2+x+1} - \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}. \qquad \triangle$$

Napomena 1. Koeficijenti A_1 i A_2 u (V.4.2.10) mogu se odrediti tzv. metodom ostataka.[17]

Ako $R(x)$ pomnožimo sa $(x-1)^2$, a zatim pustimo da $x \to 1$, dobijamo

$$A_2 = \lim_{x\to 1}(x-1)^2 R(x) = \lim_{x\to 1} \frac{8x^3+21x-11}{(x^2+x+1)^2} = 2.$$

Koeficijent A_1 dobija se, na nešto komplikovaniji način, kao

$$A_1 = \lim_{x\to 1} \frac{d}{dx}\left\{(x-1)^2 R(x)\right\} = \lim_{x\to 1} \frac{d}{dx}\left\{\frac{8x^3+21x-11}{(x^2+x+1)^2}\right\},$$

odakle je

$$A_1 = \lim_{x\to 1} \frac{(24x^2+21)(x^2+x+1)-2(2x+1)(8x^3+21x-11)}{(x^2+x+1)^3} = 1\,.$$

U opštem slučaju, metod ostataka je pogodan za određivanje koeficijenata A_{kn} u razlaganju (V.4.2.9), pri čemu je

$$A_{k,r_k-i} = \frac{1}{i!}\lim_{x\to a_k} \frac{d^i}{dx^i}\left\{(x-a_k)^{r_k} R(x)\right\}$$

za $k=1,2,\ldots,m;\ i=0,1,\ldots,r_k-1$.

Primer 2. Na osnovu (V.4.2.9), racionalna funkcija

$$R(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

ima razlaganje

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_{11}}{x+1} \\ &+ \frac{A_{21}}{x+2} + \frac{A_{22}}{(x+2)^2} \\ &+ \frac{A_{31}}{x+3} + \frac{A_{32}}{(x+3)^2} + \frac{A_{33}}{(x+3)^3}. \end{aligned}$$

[17] Ovaj metod se proučava u *Kompleksnoj analizi.*

Primenom metoda ostataka dobijamo

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{8},\\
A_{22} &= \lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+1)(x+3)^3} = -1,\\
A_{21} &= \lim_{x\to -2} \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{(x+1)(x+3)^3}\right\} = \lim_{x\to -2} \frac{-4x-6}{(x+1)^2(x+3)^4} = 2,\\
A_{33} &= \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = -\frac{1}{2},\\
A_{32} &= \lim_{x\to -3} \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right\} = \lim_{x\to -3} \frac{-3x-4}{(x+1)^2(x+2)^3} = -\frac{5}{4},\\
A_{31} &= \frac{1}{2!}\lim_{x\to -3} \frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right\} = \frac{1}{2}\lim_{x\to -3} \frac{12x^2+32x+22}{(x+1)^3(x+2)^4} = -\frac{17}{8}.
\end{aligned}
$$

Dakle, imamo

$$
\begin{aligned}
R(x) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+1} &+ \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}\\
&- \frac{17}{8}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+3)^3}. \qquad \triangle
\end{aligned}
$$

V.5 ZADACI ZA VEŽBU

1. Odrediti realne parametre a i b tako da je polinom $x^4 + 3x^2 + ax + b$ deljiv polinomom $x^2 - 2ax + 2$.

2. Odrediti najveći zajednički delilac za polinome

$$
(1) \qquad \begin{aligned} P(x) &= x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1,\\ Q(x) &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2, \end{aligned}
$$

i

$$
(2) \qquad \begin{aligned} P(x) &= x^5 + x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 2,\\ Q(x) &= x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 2. \end{aligned}
$$

Rezultat. (1) $x^2 + x + 1$, (2) $x^3 + 2x + 2$.

3. Odrediti polinom $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ koji ima nulu $x = i\sqrt{2}$, a pri deljenju sa $(x-2)$ daje ostatak -6.

4. Naći ostale nule polinoma $P(x) = x^3 + a^2x + 10a^3$ $(a \in \mathbb{R})$ ako se zna da je jedna nula $a(1+2i)$, a da se pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $(x-a)$ dobija ostatak -12.

5. Ako je ostatak deljenja polinoma $P(x)$ stepena $n \geq 2$ binomom $x - 3$ jednak 4, a ostatak deljenja binomom $x-2$ jednak 2, odrediti ostatak deljenja polinoma $P(x)$ polinomom $(x-2)(x-3)$.

6. Dat je polinom $P(x) = 3x^4 + px^3 + qx^2 + 4x - 2$ $(p, q \in \mathbb{R})$.

a) Odrediti p i q tako da je $x_1 = 1 + i$ jedna nula polinoma $P(x)$;

b) Odrediti ostale nule polinoma $P(x)$.

7. Odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ tako da je polinom $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 15$ deljiv sa $(x+2)(x-3)$, a zatim razviti $P(x)$ po stepenima binoma $(x-2)$.

8. Odrediti polinom $P(x)$ stepena $n = 7$, ako se zna da je

$$P(1) = P(1/2) = P(1/3) = P(1/4) = 0,$$

$$P'(1) = 1, \quad P'(1/2) = P'(1/3) = P'(1/4) = 0.$$

Rezultat. $P(x) = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2.$

9. Odrediti polinom $P(x)$ četvrtog stepena sa realnim koeficijentima koji ima dvostruku realnu nulu -2, kompleksnu nulu $1-2i$ i za koji važi $P(-3) = 20$.

10. Odrediti $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da za nule x_1 i x_2 polinoma $P(x) = x^3 - x^2 + \lambda x + 6$ važi $x_1x_2 = 2$. Naći sve nule polinoma $P(x)$.

11. Odrediti polinom $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ čije su nule $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $x_2 + x_3$, gde su x_1, x_2 i x_3 nule polinoma $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 3$.

12. Odrediti realni parametar λ tako da je jedan koren jednačine $x^3 - 7x + \lambda = 0$ dva puta veći od drugog.

13. Odrediti vrednost realnog parametra λ u jednačini $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ ako je zbir dva korena ove jednačine jednak 1.

14. Ako su α, β, γ rešenja jednačine

$$z^3 + pz^2 + qz + 1 = 0,$$

izračunati determinantu

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

15. Naći sve nule polinoma

$$P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 21x + 6.$$

16. Za koje vrednosti realnog parametara a je polinom

$$P(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + x + 1$$

Hurwitzov?

17. Za koje vrednosti realnih parametara a i b je polinom

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + x + b$$

Hurwitzov?

GLAVA VI

SPEKTRALNA TEORIJA OPERATORA I MATRICA

VI.1 PROBLEM SOPSTVENIH VREDNOSTI

VI.1.1 Sopstveni vektori i sopstvene vrednosti

Neka je X konačno-dimenzionalni linearni prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i neka je $\mathcal{A}\colon X \to X$ linearan operator koji vektoru $u \in X$ pridružuje vektor $v = \mathcal{A}u$ koji, takođe, pripada prostoru X. Od interesa je proučiti slučaj kada su vektori u i v kolinearni.

Definicija VI.1.1.1 Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ i nenula vektor $u \in X$ se nazivaju *sopstvena vrednost* i *sopstveni vektor* za operator $\mathcal{A}\colon X \to X$, respektivno, ako je $\mathcal{A}u = \lambda u$.

Pored termina sopstvena vrednost i sopstveni vektor koriste se i termini: *karakteristična* (*svojstvena*) *vrednost* i *karakteristični* (*svojstveni*) *vektor*. Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore za dati operator $\mathcal{A}$ znači rešiti tzv. *problem sopstvenih vrednosti* za operator $\mathcal{A}$.

Na osnovu prethodne definicije možemo zaključiti sledeće:

1° Ako je $u\,(\neq \theta)$ sopstveni vektor operatora $\mathcal{A}$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ, tada za svako $\alpha \neq 0$ $(\alpha \in \mathbb{K})$ vektor αu je, takođe, sopstveni vektor koji odgovara istoj sopstvenoj vrednosti λ.

2° Ako su u i v sopstveni vektori operatora $\mathcal{A}$ koji odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti λ, tada je $u+v$, takođe, sopstveni vektor koji odgovara istoj sopstvenoj vrednosti λ.

3° Skup svih sopstvenih vektora koji odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti λ ne obrazuje linearni potprostor prostora X jer nula vektor θ ne pripada ovom skupu. Ako, međutim, proširimo ovaj skup sa nula vektorom, tada on postaje potprostor, koji se naziva *sopstveni* potprostor operatora $\mathcal{A}$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Ovaj potprostor označavaćemo sa U_λ.

Primer 1. Posmatrajmo skalarni operator $\mathcal{A}\colon X \to X$ definisan pomoću $\mathcal{A}u = \alpha u$ $(u \in X)$, gde je α fiksirani skalar iz polja $\mathbb{K}$. Ovaj linearni operator ima samo jednu sopstvenu vrednost $\lambda = \alpha$ i jedan sopstveni potprostor koji se poklapa sa X. Napomenimo da su nula-operator $\mathcal{O}$ i identički operator $\mathcal{I}$ specijalni slučajevi posmatranog operatora $\mathcal{A}$, za $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$, respektivno. $\triangle$

Primer 2. Posmatrajmo tzv. *projekcioni operator* ili *projektor* $\mathcal{P}\colon X \to X$, za koji važi $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Kako je

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}u) = \mathcal{P}^2u = \mathcal{P}u = 1\cdot\mathcal{P}u, \quad \mathcal{P}((\mathcal{I}-\mathcal{P})u) = (\mathcal{P}-\mathcal{P}^2)u = \theta = 0\cdot(\mathcal{I}-\mathcal{P})u,$$

zaključujemo da projekcioni operator $\mathcal{P}$ ima bar dve različite sopstvene vrednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 0$. Odgovarajuće sopstvene potprostore čine skupovi vrednosti operatora $\mathcal{P}$ i operatora $\mathcal{I} - \mathcal{P}$, tj. $R_{\mathcal{P}}$ i $R_{\mathcal{I}-\mathcal{P}}$. $\triangle$

Primer 3. Neka je u prostoru $V_O(R)$ (datom na strani 66) definisan operator rotacije $\mathcal{R}$, koji vektor $\vec{r} = r(\vec{\imath}\cos\alpha + \vec{\jmath}\sin\alpha)$ preslikava na vektor

$$\vec{s} = \mathcal{R}\vec{r} = r\left[\vec{\imath}\cos\left(\alpha + \tfrac{\pi}{2}\right) + \vec{\jmath}\sin\left(\alpha + \tfrac{\pi}{2}\right)\right] = r\left[-\vec{\imath}\sin\alpha + \vec{\jmath}\cos\alpha\right].$$

Kako vektori $\vec{r}$ i $\mathcal{R}\vec{r}$ ne mogu biti kolinearni, zaključujemo da operator rotacije nema sopstvene vektore. $\triangle$

Neka je $\mathcal{A}\colon X \to X$ linearan operator i $a_0, a_1, \ldots, a_n$ skalari iz polja $\mathbb{K}$. Posmatrajmo linearni operator $\mathcal{B}\colon X \to X$, definisan pomoću tzv. operatorskog polinoma

$$\mathcal{B} = P(\mathcal{A}) = a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{A} + \cdots + a_n\mathcal{A}^n. \tag{VI.1.1.1}$$

Kako za dva polinoma $P(\lambda), Q(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ važi $P(\lambda)Q(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda)$, ovo svojstvo se jednostavno prenosi i na operatorski slučaj. Dakle, imamo

$$P(\mathcal{A})Q(\mathcal{A}) = Q(\mathcal{A})P(\mathcal{A}).$$

Ova osobina biće često korišćena u daljem razmatranju.

Teorema VI.1.1.1 *Ako je λ sopstvena vrednost i u sopstveni vektor operatora $\mathcal{A}$: $X \to X$, tada je u, takođe, sopstveni vektor operatora $\mathcal{B} = P(\mathcal{A})$, koji odgovara sopstvenoj vrednosti $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$.*

Dokaz. Kako je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= \lambda u, \\ \mathcal{A}^2u &= \mathcal{A}(\mathcal{A}u) = \mathcal{A}(\lambda u) = \lambda\mathcal{A}u = \lambda^2 u, \\ \mathcal{A}^3u &= \mathcal{A}(\mathcal{A}^2u) = \mathcal{A}(\lambda^2 u) = \lambda^2\mathcal{A}u = \lambda^3 u, \end{aligned}$$

može se zaključiti da je

$$\mathcal{A}^k u = \lambda^k u,$$

tj. da je u sopstveni vektor i za iterirani operator $\mathcal{A}^k$, koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ^k. Najzad, na osnovu

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A})u &= \big(a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{A} + \cdots + a_n\mathcal{A}^n\big)u \\ &= a_0\mathcal{I}u + a_1\mathcal{A}u + \cdots + a_n\mathcal{A}^n u \\ &= a_0 u + a_1\lambda u + \cdots + a_n\lambda^n u \\ &= \big(a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n\big)u, \end{aligned}$$

zaključujemo da je tvrđenje teoreme tačno. $\square$

Teorema VI.1.1.2 *Neka su u_1, u_2, ..., u_m sopstveni vektori operatora $\mathcal{A}$, koji odgovaraju među sobom različitim sopstvenim vrednostima λ_1, λ_2, ..., λ_m. Tada je $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ sistem linearno nezavisnih vektora.*

Dokaz. Tvrđenje je, očigledno, tačno za $m = 1$ jer sopstveni vektor ne može biti nula-vektor. Pretpostavimo sada da je tvrđenje tačno za bilo koji sistem od $m - 1$ sopstvenih vektora, a da nije tačno za sistem U. Dakle, pretpostavimo da je U sistem linearno zavisnih vektora, što znači da postoje skalari α_1, α_2, ..., α_m takvi da je

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = \theta, \tag{VI.1.1.2}$$

a da pri tome svi skalari nisu istovremeno jednaki nuli. Na primer, neka je $\alpha_1 \neq 0$. Kako je $\mathcal{A}u_k = \lambda_k u_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, primenom operatora $\mathcal{A}$ na (VI.1.1.2) dobijamo

$$\alpha_1\lambda_1 u_1 + \alpha_2\lambda_2 u_2 + \cdots + \alpha_m\lambda_m u_m = \theta. \tag{VI.1.1.3}$$

S druge strane, množenjem (VI.1.1.2) sa $-\lambda_m$ i sabiranjem sa (VI.1.1.3), dobijamo

$$\text{(VI.1.1.4)} \quad \alpha_1(\lambda_1-\lambda_m)u_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_m)u_2+\cdots+\alpha_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)u_{m-1}=\theta.$$

Kako je, po pretpostavci, svaki sistem od $m-1$ sopstvenih vektora linearno nezavisan, zaključujemo da svi koeficijenti u (VI.1.1.4) moraju biti jednaki nuli, pa i $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_m)=0$. Ovo, međutim, protivureči činjenici da je $\lambda_1 \neq \lambda_m$ i pretpostavci da je $\alpha_1 \neq 0$. Dakle, sistem vektora U je linearno nezavisan. □

Sledeći rezultat je neposredna posledica prethodne teoreme:

Teorema VI.1.1.3 *Neka je X n-dimenzionalni linearni prostor. Linearni operator $\mathcal{A}\colon X \to X$ ne može imati više od n među sobom različitih sopstvenih vrednosti.*

Definicija VI.1.1.2 Za linearni operator $\mathcal{A}$, koji deluje u n-dimenzionalnom linearnom prostoru X i ima n linearno nezavisnih sopstvenih vektora, kažemo da je *operator proste strukture*.

Neka su $u_1, u_2, \ldots, u_n$ linearno nezavisni sopstveni vektori operatora proste strukture $\mathcal{A}\colon X \to X$, koji odgovaraju sopstvenim vrednostima λ_1, λ_2, ..., λ_n. Na osnovu prethodnog, takav sistem vektora $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ može se uzeti za bazu n-dimenzionalnog prostora X. Kako je

$$\mathcal{A}u_j = \lambda_j u_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

zaključujemo da matrica operatora proste strukture u ovoj bazi ima dijagonalni oblik (videti odeljak III.2.2)

$$\text{(VI.1.1.5)} \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Važi i obrnuto, tj. ako je matrica operatora $\mathcal{A}$ u nekoj izabranoj bazi $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dijagonalna, tada je taj operator proste strukture, pri čemu su bazisni vektori $u_1, u_2, \ldots, u_n$, u stvari, njegovi sopstveni vektori, a dijagonalni elementi matrice su sopstvene vrednosti tog operatora. Napomenimo da pritom sve sopstvene vrednosti ne moraju biti među sobom različite.

Prema tome, za operatore proste strukture problem konstrukcije baze u kojoj matrica operatora ima najprostiji mogući oblik je veoma jednostavan. Baza se, dakle, sastoji od sopstvenih vektora, a matrica operatora je dijagonalna sa sopstvenim vrednostima na glavnoj dijagonali. Drugim rečima, matrica operatora proste strukture uvek je slična nekoj dijagonalnoj matrici (za sličnost matrica videti definiciju IV.2.2.2 na strani 183).

Napomenimo da klasa operatora proste strukture ne iscrpljuje skup svih linearnih operatora $L(X, X)$. Naime, poseban je problem da se za proizvoljan linearni operator na konačno dimenzionalnom prostoru X konstruiše takva baza u prostoru X u kojoj matrica tog operatora ima najprostiji mogući oblik, tzv. *Jordanov*[1] *kanonički oblik*.

VI.1.2 Karakteristični polinom

Kao što smo videli u prethodnom odeljku, može se desiti slučaj da jedan linearni operator nema sopstvene vektore. Ovaj odeljak posvećujemo problemu egzistencije sopstvenih vektora putem karakterizacije ovog problema pomoću algebarske jednačine.

Neka je X n-dimenzionalan linearni prostor nad poljem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) i $\mathcal{A}\colon X \to X$ linearan operator. U prostoru X izaberimo proizvoljnu bazu $B_e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Tada jednačini

(VI.1.2.1) $$\mathcal{A}u = \lambda u,$$

koja definiše problem sopstvenih vrednosti za operator $\mathcal{A}$, možemo pridružiti odgovarajuću matričnu jednačinu

(VI.1.2.2) $$Ax = \lambda x,$$

gde je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrica operatora $\mathcal{A}$ u bazi B_e i $x = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T$ koordinatna reprezentacija vektora

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$$

Matrični analogon problema (VI.1.2.1) je, dakle, definisan homogenim sistemom linearnih jednačina (VI.1.2.2), tj.

(VI.1.2.3) $$(A - \lambda I)x = o,$$

čija nas netrivijalna rešenja x interesuju. Takva rešenja predstavljaju koordinatne reprezentacije sopstvenih vektora operatora $\mathcal{A}$ u bazi B_e. Takođe, za

[1] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), francuski matematičar.

njih kažemo da su *sopstveni vektori matrice* A. Odgovarajuće vrednosti λ za koje postoje ova netrivijalna rešenja predstavljaju odgovarajuće *sopstvene vrednosti matrice* A, tj. operatora $\mathcal{A}$.

Kao što je poznato (videti odeljak IV.2.7) sistem jednačina (VI.1.2.3) ima netrivijalna rešenja ako je njegova determinanta jednaka nuli. Dakle, imamo

$$\text{(VI.1.2.4)} \qquad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Razvijanjem determinante u (VI.1.2.4) dobijamo polinom stepena n po λ, čiji je vodeći koeficijent $(-1)^n$. Koeficijenti tog polinoma ne zavise od λ i određeni su pomoću elemenata matrice A.

Napomenimo ovde da ti koeficijenti ne zavise od izbora baze u X, već samo od osobina operatora $\mathcal{A}$. Zaista, uzimajući drugi bazis, na primer $B_{e'} = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, različit od B, odgovarajuća matrica operatora postaje A', koja je slična sa matricom A (videti definiciju IV.2.2.2 na strani 183). Dakle, $A' = P^{-1}AP$, gde je P matrica transformacije sličnosti. Kako je $\det(P^{-1}) = 1/\det(P)$ imamo redom

$$\begin{aligned} \det(A'-\lambda I) &= \det\left(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP\right) \\ &= \det\left(P^{-1}(A-\lambda I)P\right) \\ &= \det\left(P^{-1}\right)\det(A-\lambda I)\det(P) \\ &= \det(A-\lambda I). \end{aligned}$$

Prema tome, polinom $\lambda \mapsto \det(A-\lambda I)$ ne zavisi od izabrane baze u prostoru X već samo od karakteristika operatora $\mathcal{A}$.

Definicija VI.1.2.1 Za $\lambda \mapsto P(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ kažemo da je *karakteristični polinom* operatora $\mathcal{A}$ (ili matrice A). Za moničan polinom

$$\text{(VI.1.2.5)} \qquad H(\lambda) = (-1)^n P(\lambda) = \lambda^n - f_1\lambda^{n-1} - f_2\lambda^{n-2} - \dots - f_n,$$

gde su f_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ funkcije elemenata matrice A, kažemo da je *normalizovani karakteristični polinom* operatora $\mathcal{A}$ (ili matrice A).

Na osnovu prethodnog, slične matrice imaju isti karakteristični polinom.

Jedan od metoda za određivanje koeficijenata karakterističnog polinoma zasniva se na transformaciji matrice A na tzv. *Frobeniusov*[2] *oblik*

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{VI.1.2.6}$$

pri čemu su matrice A i F slične. S obzirom da slične matrice imaju identične karakteristične polinome, jednostavno se, na osnovu (VI.1.2.6), dobija karakteristični polinom matrice A.

Naime, prva vrsta matrice F određuje koeficijente karakterističnog polinoma s obzirom da, ako $\det(F - \lambda I)$ razvijemo po elementima prve kolone, dobijamo

$$P(\lambda) = \det(F - \lambda I) = (f_1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1} - f_2(-\lambda)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} f_n,$$

tj.

$$P(\lambda) = (-1)^n \big(\lambda^n - f_1\lambda^{n-1} - f_2\lambda^{n-2} - \cdots - f_n\big).$$

Na osnovu prethodnog možemo zaključiti da potreban i dovoljan uslov da $\lambda \in \mathbb{K}$ bude sopstvena vrednost matrice A, tj. operatora $\mathcal{A}$, je da takvo λ bude rešenje tzv. *karakteristične jednačine* operatora $\mathcal{A}$ (ili matrice A)

$$\lambda^n - f_1\lambda^{n-1} - f_2\lambda^{n-2} - \cdots - f_n = 0, \tag{VI.1.2.7}$$

tj. bude nula karakterističnog polinoma.

Napomenimo da, u opštem slučaju, algebarska jednačina (VI.1.2.7), sa koeficijentima iz polja $\mathbb{K}$, ne mora uvek imati rešenje u polju $\mathbb{K}$, što pokazuje sledeći primer.

Primer 1. Za operator rotacije $\mathcal{R}$ koji deluje u realnom prostoru $V_O(R)$ (videti primer 3 na strani 254), u bazi $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ imamo

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H(\lambda) = P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Karakteristična jednačina $\lambda^2 + 1 = 0$ nema korene na polju realnih brojeva, što je u skladu sa ranijim zaključkom u primeru 3. $\triangle$

[2] Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917), nemački matematičar.

Primer 2. Neka operator $\mathcal{A}$ deluje u dvodimenzionalnom prostoru nad poljem $\mathbb{R}$ i neka je njegova matrica u nekoj bazi data sa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu karakteristične jednačine

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

dobijamo sopstvene vrednosti operatora: $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 3$.

Da bismo odredili sopstvene vektore koji odgovaraju ovim sopstvenim vrednostima, posmatrajmo odgovarajući homogeni sistem jednačina dat u (VI.1.2.3), tj.

$$\text{(VI.1.2.8)} \qquad (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \quad 2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0.$$

Za $\lambda = \lambda_1 = -1$, (VI.1.2.8) se svodi na jednu jednačinu $2x_1 + 2x_2 = 0$, odakle sleduje $x_2 = -x_1$. Uzimajući $x_1 = 1$ nalazimo $x_2 = -1$, pa je odgovarajući sopstveni vektor

$$\boldsymbol{x}_1 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

gde je C_1 proizvoljna realna konstanta različita od nule.

Za $\lambda = \lambda_2 = 3$, (VI.1.2.8) se, takođe, svodi na jednu jednačinu $-2x_1 + 2x_2 = 0$, tj. na $x_1 = x_2$. Dakle, možemo uzeti da je $x_1 = x_2 = 1$. Odgovarajući sopstveni vektor je

$$\boldsymbol{x}_2 = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

gde je C_2 proizvoljna realna konstanta različita od nule. $\triangle$

Samo u algebarski zatvorenom polju $\mathbb{K}$ (videti definiciju V.1.6.1) svaki polinom sa koeficijentima iz $\mathbb{K}$ ima bar jednu nulu u ovom polju, što znači da svaki linearni operator $\mathcal{A}$ koji deluje u linearnom prostoru X nad algebarski zatvorenim poljem $\mathbb{K}$ ima bar jedan sopstveni vektor. Kao što je poznato, takvo polje je, na primer, polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

U daljem tekstu razmatraćemo linearne operatore koji deluju u kompleksnom linearnom prostoru ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). U tom slučaju, karakteristični polinom ima faktorizaciju

$$\text{(VI.1.2.9)} \qquad P(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r},$$

gde su λ_1, λ_2, ..., λ_r među sobom različite sopstvene vrednosti, čija je višestrukost redom n_1, n_2, ..., n_r i pri čemu je $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

VI.1.3 Dijagonalizacija matrice operatora proste strukture

Neka je $\mathcal{A}$ linearni operator proste strukture koji deluje u n-dimenzionalnom kompleksnom linearnom prostoru X i neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrica tog operatora u proizvoljnoj bazi $B_e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Saglasno definiciji VI.1.1.2, operator $\mathcal{A}$ ima n linearno nezavisnih sopstvenih vektora u_1, u_2, ..., u_n. Neka su $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ njihove koordinatne reprezentacije u bazi B_e, tj.

$$u_k = x_{1k}e_1 + x_{2k}e_2 + \cdots + x_{nk}e_n, \qquad \boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ako je A matrica operatora $\mathcal{A}$ u bazi B_e, tada se na osnovu onoga što je rečeno na kraju prethodnog odeljka i u odeljku IV.2.2, može zaključiti da se, pri prelasku sa baze B_e na bazu sastavljenu od sopstvenih vektora $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, matrica A transformiše na dijagonalni matricu D oblika (VI.1.1.5), pri čemu je transformaciona matrica P data pomoću

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{bmatrix},$$

pa je, dakle, $D = P^{-1}AP$. Tada kažemo da smo matricu A dijagonalizirali pomoću matrice P.

Da je to stvarno tako, možemo se uveriti i sledećim direktnim razmatranjem. Naime, kako je

$$P^{-1}P = P^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1}\boldsymbol{x}_1 & P^{-1}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & P^{-1}\boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} = I,$$

imamo

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}\begin{bmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \ldots & A\boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \\ &= P^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1\boldsymbol{x}_1 & \lambda_2\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \lambda_n\boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 P^{-1}\boldsymbol{x}_1 & \lambda_2 P^{-1}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \lambda_n P^{-1}\boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

tj.

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

gde su λ_1, λ_2, ..., λ_n sopstvene vrednosti operatora proste strukture. (Kao što je ranije napomenuto sve sopstvene vrednosti ne moraju biti među sobom različite.)

Primer 1. Operator $\mathcal{A}$ iz primera 2 na strani 260 sa matricom u nekoj bazi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

je proste strukture jer ima dva linearno nezavisna sopstvena vektora.

Uzimajući za bazu sopstvene vektore (na primer, sa $C_1 = C_2 = 1$) dobijamo dijagonalnu matricu operatora u toj bazi

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Transformaciona matrica P, sastavljena na osnovu koordinatnih reprezentacija sopstvenih vektora, je

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zaista, imamo

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = D. \qquad \triangle$$

Primer 2. Neka je data matrica operatora sa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za odgovarajući karakteristični polinom dobijamo

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda),$$

odakle zaključujemo da su sopstvene vrednosti operatora (tj. matrice A) date sa: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Kao i u primeru 2 na strani 260 određujemo sada sopstvene vektore iz sledećeg homogenog sistema jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcl} (3-\lambda)x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ -2x_1 & + & (4-\lambda)x_2 & - & 2x_3 & = & 0, \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & \lambda x_3 & = & 0, \end{array} \tag{VI.1.3.1}$$

uzimajući za λ dobijene sopstvene vrednosti.

Tako za dvostruku sopstvenu vrednost $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$, sve tri jednačine iz prethodnog sistema svode se na istu jednačinu

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$

odakle zaključujemo da imamo dve slobodne promenljive, na primer x_1 i x_2, a da je promenljiva x_3 tada određena sa $x_3 = x_2 - x_1$. Prema tome, ako uzmemo recimo $x_1 = x_2 = 1$, dobijamo $x_3 = 0$. Slično, za $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, dobijamo $x_3 = 1$. Na ovaj način nalazimo dva linearno nezavisna sopstvena vektora, čije su koordinatne reprezentacije redom

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za $\lambda = \lambda_3 = 3$, sistem (VI.1.3.1) se svodi na dve jednačine

$$-x_2 + x_3 = 0, \qquad -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$$

odakle, uzimajući da je x_1 slobodna promenljiva, dobijamo

$$x_2 = x_3 = -2x_1.$$

Tako, ako stavimo $x_1 = -1$, imamo $x_2 = x_3 = 2$. Prema tome, sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda_3 = 3$ ima reprezentaciju

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da imamo tri linearno nezavisna sopstvena vektora, operator koji razmatramo je proste strukture, što znači da se njegova matrica može svesti na dijagonalni oblik. Saglasno prethodnom, transformaciona matrica P i njena inverzna matrica su redom

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \qquad \triangle \tag{VI.1.3.2}$$

Napomena 1. Kod matrica operatora proste strukture veoma je jednostavno određivanje stepena matrice A^k ($k \in \mathbb{N}$), s obzirom na jednakost

$$(P^{-1}AP)^k = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP)}_{k \text{ puta}} = P^{-1}A^kP = D^k,$$

odakle sleduje

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1},$$

gde su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti operatora proste strukture i P transformaciona matrica.

Primer 3. Na osnovu (VI.1.3.2) imamo da je

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 3^k & 2^k - 3^k & 3^k - 2^k \\ 2(2^k - 3^k) & 2 \cdot 3^k - 2^k & 2(2^k - 3^k) \\ 2(2^k - 3^k) & 2(3^k - 2^k) & 3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k \end{bmatrix},$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. $\triangle$

VI.1.4 Cayley-Hamiltonova teorema

Teorema VI.1.4.1 *Neka je $P(\lambda)$ karakteristični polinom linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X \to X$. Tada je $P(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ – nula-operator).*

Drugim rečima, ako je A matrica operatora $\mathcal{A}$: $X \to X$, tada je $P(A) = O$, tj. matrica A zadovoljava svoju karakterističnu jednačinu. Ovaj rezultat je poznat kao *Cayley-Hamiltonova*[3] *teorema.*

Dokaz teoreme VI.1.4.1. Neka je

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \big[\lambda^n - f_1 \lambda^{n-1} - f_2 \lambda^{n-2} - \cdots - f_n\big]$$

karakteristični polinom operatora $\mathcal{A}$, tj. matrice A.

Primetimo najpre da se svi elementi matrice $B = \operatorname{adj}(A - \lambda I) = \big[b_{ij}\big]_{n\times n}$ mogu predstaviti u obliku polinoma ne višeg stepena od $n-1$, tj. kao

$$\text{(VI.1.4.1)} \qquad b_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{ij}^{(k)} \lambda^k \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

gde koeficijenti $b_{ij}^{(k)}$ ne zavise od λ. Zaista, elementi b_{ij} se mogu predstaviti u obliku (VI.1.4.1) jer kao kofaktori elemenata matrice $A - \lambda I$ predstavljaju determinante reda $n-1$.

Sada se matrica B može predstaviti u obliku

$$\text{(VI.1.4.2)} \qquad B = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \lambda^k = B_0 + B_1 \lambda + \cdots + B_{n-1} \lambda^{n-1},$$

gde je $B_k = \big[b_{ij}^{(k)}\big]_{n\times n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Kako je, na osnovu teoreme III.4.1.1 na strani 150,

$$F = (A - \lambda I)B = \det(A - \lambda I)I = P(\lambda)I,$$

korišćenjem karakterističnog polinoma imamo

$$F = (-1)^n \big[\lambda^n - f_1 \lambda^{n-1} - f_2 \lambda^{n-2} - \cdots - f_n\big] I,$$

tj.

$$F = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} f_{n-k} \lambda^k I \qquad (f_0 = -1).$$

S druge strane, na osnovu (VI.1.4.2) zaključujemo da je

$$F = (A - \lambda I)B = AB_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \big(AB_k - B_{k-1}\big)\lambda^k - B_{n-1}\lambda^n.$$

[3] William Rowan Hamilton (1805–1865), irski matematičar i astronom.

Upoređivanjem dobijenih izraza za F nalazimo:

$$\begin{aligned} AB_0 &= (-1)^{n+1} f_n I, \\ AB_k - B_{k-1} &= (-1)^{n+1} f_{n-k} I \qquad (1 \le k \le n-1), \\ -B_{n-1} &= (-1)^{n+1} f_0 I = (-1)^{n+2} I, \end{aligned}$$

čijim množenjem redom sa I, A^k $(1 \le k \le n-1)$, A^n, a zatim sabiranjem tako dobijenih jednakosti, dobijamo

$$\text{(VI.1.4.3)} \qquad (-1)^n(-f_n I - f_{n-1}A - f_{n-2}A^2 - \cdots - f_1 A^{n-1} + A^n) = O,$$

tj. $P(A) = O$. □

Na osnovu (VI.1.4.3) stepeni matrice A^k za $k \ge n$ mogu se izraziti kao linearne kombinacije matrica $I, A, \ldots, A^{n-1}$. Tako imamo

$$\text{(VI.1.4.4)} \qquad A^n = f_1 A^{n-1} + f_2 A^{n-2} + \cdots + f_{n-1} A + f_n I.$$

Množenjem sa A dobijamo

$$A^{n+1} = f_1 A^n + f_2 A^{n-1} + \cdots + f_{n-1} A^2 + f_n A,$$

odakle, korišćenjem (VI.1.4.4), nalazimo

$$A^{n+1} = (f_1^2 + f_2) A^{n-1} + (f_1 f_2 + f_3) A^{n-2} + \cdots + (f_1 f_{n-1} + f_n) A + f_1 f_n I.$$

Ponavljanjem ovog postupka moguće je dobiti matrice $A^{n+2}, A^{n+3}, \ldots$ kao linearne kombinacije matrica $I, A, \ldots, A^{n-1}$.

S druge strane, ako je matrica A regularna, tada, množenjem (VI.1.4.3) sa A^{-1}, dobijamo

$$A^{-1} = \frac{1}{f_n}\left[A^{n-1} - f_1 A^{n-2} - \cdots - f_{n-2} A - f_{n-1} I\right],$$

gde je $f_n = (-1)^{n+1} P(0) = (-1)^{n+1} \det A \ne 0$.

VI.1.5 Minimalni polinom

Neka je $f(\lambda)$ proizvoljan algebarski polinom i A matrica operatora $\mathcal{A}$ koji deluje u n-dimenzionalnom linearnom prostoru X. Jasno je da postoji beskonačno mnogo polinoma za koje je $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, tj. $f(A) = O$. Jedan takav polinom je, na primer, karakteristični polinom $P(\lambda)$, razmatran u prethodnim odeljcima. Može se postaviti pitanje određivanja polinoma najnižeg mogućeg stepena sa ovakvom osobinom.

Definicija VI.1.5.1 Monični polinom $M(\lambda)$ najnižeg mogućeg stepena za koji je $M(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ naziva se *minimalni polinom operatora* $\mathcal{A}$. (Koristi se i termin *minimalni polinom matrice* A jer je $M(A) = O$.)

Teorema VI.1.5.1 *Svaki operator $\mathcal{A}\colon X \to X$ ima samo jedan minimalan polinom.*

Dokaz. Neka je $H(\lambda)$ normalizovani karakteristični polinom operatora $\mathcal{A}$. Postojanje bar jednog minimalnog polinoma obezbeđeno je činjenicom da je $H(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

Da bismo dokazali jedinstvenost minimalnog polinoma pretpostavimo da postoje dva različita minimalna polinoma $M(\lambda)$ i $\widetilde{M}(\lambda)$ za operator $\mathcal{A}$ ($\operatorname{dg} M(\lambda) = \operatorname{dg} \widetilde{M}(\lambda) = m$). Tada je $r(\lambda) = M(\lambda) - \widetilde{M}(\lambda)$ polinom nižeg stepena od m i za njega važi $r(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Ovo protivureči činjenici da su $M(\lambda)$ i $\widetilde{M}(\lambda)$ minimalni polinomi za operator $\mathcal{A}$. $\square$

Teorema VI.1.5.2 *Svaki polinom $f(\lambda)$ za koji je $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, gde je $\mathcal{A}\colon X \to X$ linearni operator, deljiv je minimalnim polinomom $M(\lambda)$ operatora $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Ako pretpostavimo, suprotno tvrđenju teoreme, da polinom $f(\lambda)$ nije deljiv minimalnim polinomom $M(\lambda)$, tada je

$$f(\lambda) = M(\lambda)p(\lambda) + q(\lambda),$$

gde je $q(\lambda) \not\equiv 0$ polinomi po λ nižeg stepena od stepena polinoma $M(\lambda)$, a $p(\lambda)$ odgovarajući polinom. Ako ovde stavimo $\lambda = \mathcal{A}$, dobijamo

$$q(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) - M(\mathcal{A})p(\mathcal{A}).$$

Kako je $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ (pretpostavka u stavu) i $M(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ (po definiciji minimalnog polinoma), biće $q(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, što protivreči uslovu da je $M(\lambda)$ minimalan polinom, čime dolazimo do kontradikcije. $\square$

Posledica 1. *Minimalni polinom operatora $\mathcal{A}$ je faktor njegovog karakterističnog polinoma.*

Teorema VI.1.5.3 *Svaka nula karakterističnog polinoma operatora $\mathcal{A}$ je i nula njegovog minimalnog polinoma.*

Dokaz. Neka je $P(\lambda)$ karakteristični polinom operatora $\mathcal{A}$, $M(\lambda)$ njegov minimalni polinom i neka je λ_i nula karakterističnog polinoma $P(\lambda)$. Na osnovu Bézoutovog stava (videti teoremu V.1.4.1 na strani 217) imamo da je

$$M(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \lambda_i) + M(\lambda_i),$$

gde je $q(\lambda)$ odgovarajući polinom. Neka je, dalje, u_i sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ_i. Tada je

$$M(\mathcal{A})u_i = q(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I})u_i + M(\lambda_i)u_i,$$

gde je $\mathcal{I}$ identički operator. Kako je

$$M(\mathcal{A})u_i = \mathcal{O}u_i = \theta \qquad \text{i} \qquad \mathcal{A}u_i = \lambda_i u_i,$$

imamo

$$M(\lambda_i)u_i = \theta \qquad \Rightarrow \qquad M(\lambda_i) = 0. \qquad \square$$

Posledica 2. *Nule minimalnog i karakterističnog polinoma se poklapaju i mogu se razlikovati samo svojim redom.*

Dakle, minimalni polinom treba tražiti samo među polinomima koji su faktori karakterističnog polinoma i imaju iste nule kao i karakteristični polinom.

Primer 1. Za matricu iz primera 2 na strani 262 normalizovani karakteristični polinom je $H(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$.

Videli smo da minimalni i karakteristični polinom moraju imati iste skupove nula, a da se mogu, eventualno, razlikovati samo redovi višestrukosti tih nula u jednom i drugom polinomu. S obzirom na to, za naš minimalni polinom bili bi kandidati polinom $(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ kao i sam normalizovani karakteristični polinom $H(\lambda)$.

Kako je

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix},$$

i $(A-2I)(A-3I) = O$, zaključujemo da je minimalni polinom $M(\lambda)$ određen sa

$$M(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6. \qquad \triangle$$

VI.2 ZADACI ZA VEŽBU

1. Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Naći sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrica A i $f(A)$ gde su

$$\text{a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = x^2 - 3x + 1;$$

$$\text{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = x^5 - x^3 + 2.$$

3. Naći sopstvene vrednosti matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Odrediti sopstvene vektore matrice A u slučaju kada je

a) $a \neq 0$, b) $a = 0$.

4. Neka je operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definisan sa $\mathcal{A}(a, b, c, d) = (d, c, b, a)$.

a) Odrediti matricu A operatora $\mathcal{A}$ u prirodnoj bazi.

b) Odrediti sopstvene vrednosti matrice A.

c) Ispitati da li je $\mathcal{A}$ operator proste strukture.

5. Odrediti sopstvene vrednostii sopstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

a zatim odrediti regularnu matricu P i dijagonalnu matricu D tako da važi $D = P^{-1}AP$.

6. Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

a zatim naći A^n $(n \in \mathbb{N})$.

7. Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{bmatrix},$$

a zatim odrediti matrice M^n $(n \in \mathbb{N})$ i M^{-1}.

Rezultat. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\boldsymbol{x}_1 = [-a \;\; 1 \;\; 0]^T$, $\boldsymbol{x}_2 = [-a^2 \;\; 0 \;\; 1]^T$, $\boldsymbol{x}_3 = [a^2 \;\; a \;\; 1]^T$,

$$M^n = -\frac{(-1)^n}{3a^2}\begin{bmatrix} -2a^2 & a^3 & a^4 \\ a & -2a^2 & a^3 \\ 1 & a & -2a^2 \end{bmatrix} + \frac{2^n}{3a^2}\begin{bmatrix} a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix},$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2a^2}\begin{bmatrix} -a^2 & a^3 & a^4 \\ a & -a^2 & a^3 \\ 1 & a & -a^2 \end{bmatrix}.$$

8. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Korišćenjem Cayley-Hamiltonove teoreme odrediti $A^6 - 25A^2 + 112A$.

9. Neka je $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

Odrediti sopstvene vrednosti, sopstvene vektore i minimalni polinom matrice A.

10. Odrediti minimalni polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rezultat. $M(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

GLAVA VII

ELEMENTI ANALITIČKE GEOMETRIJE

VII.1 VEKTORSKA ALGEBRA

VII.1.1 Pravougli koordinatni sistem

U ovom poglavlju posebnu pažnju posvećujemo izomorfnim prostorima $V_O(E)$ i $\mathbb{R}^3$, koje smo razmatrali u odeljcima I.2.9, II.1.5, II.3.1, II.3.3. Tom prilikom, uveli smo pravougli koordinatni sistem sa bazisnim jediničnim ortogonalnim vektorima $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, tako da se svaki vektor $\vec{r} \in V_O(E)$ opisuje pomoću tri koordinate: x, y, z kao

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,.$$

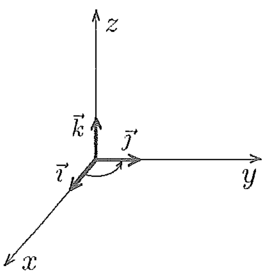
Na taj način smo uspostavili biunivoku korespondenciju između ovih prostora, uključujući, naravno, i sam prostor E. Sledeća šema ukazuje na tu korespondenciju.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ V_O(E) \arrow[rr, leftrightarrow] & & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \vec{r} \arrow[rr, leftrightarrow] & & (x,y,z) \end{tikzcd}$$

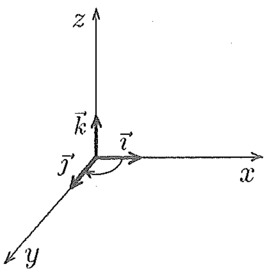
Kao što je navedeno u odeljku II.1.5, tačke ovih prostora obično poistovećujemo pišući $M = (x, y, z)$ ili, pak, $\vec{r} = (x, y, z)$.

Za pravougli koordinatni sistem koristimo i termin *Dekartov pravougli koordinatni sistem* ili *Dekartov ortogonalni trijedar*. Jedinični vektori $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ i $\vec{k}$, postavljeni u tački O definišu tri *koordinatne* (*Dekartove*) *ose*: x-osu, y-osu i z-osu, respektivno. Pravougli koordinatni sistem označavamo sa $Oxyz$.

U dosadašnjem izlaganju, međusobni položaj bazisnih (koordinatnih) vektora nije bio bitan. Za naš dalji rad, međutim, neophodno je precizirati ovaj položaj. U upotrebi su dva pravougla koordinatna sistema: *desni* (*engleski*) i *levi* (*francuski*) (slike 1 i 2). Kod desnog sistema ili tzv. *trijedra desne orijentacije* rotacija vektora $\vec{\imath}$ prema vektoru $\vec{\jmath}$ oko z-ose najkraćim putem, posmatrano sa kraja vektora $\vec{k}$, izvodi se u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku. Suprotno, kod levog sistema ili tzv. *trijedra leve orijentacije* pomenuta rotacija vektora izvodi se u smeru kretanja kazaljke na časovniku.



Sl. 1



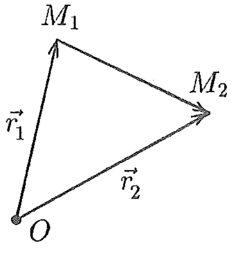
Sl. 2

Trijedar desne orijentacije se može opisati i kao onaj kod koga bi rotacijom desne zavojnice, postavljene duž z-ose, rotirajući je tako kao kada bi vektor $\vec{\imath}$ trebali da dovedemo do poklapanja sa vektorom $\vec{\jmath}$, najkraćim putem, došlo do pravolinijskog kretanja (usled zašrafljivanja) zavojnice (šrafa) u smeru vektora $\vec{k}$. U našem daljem razmatranju uvek ćemo koristiti trijedar desne orijentacije.

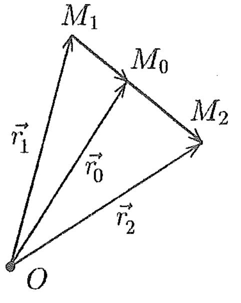
VII.1.2 Dva jednostavna problema

U odeljcima II.3.1 i II.3.3 definisali smo normu ili intenzitet vektora i skalarni proizvod dva vektora. Ovde ćemo ukazati na dva jednostavna problema:

1. Rastojanje dve tačke u prostoru. Neka su date tačke M_1 i M_2, kojima odgovaraju radijus vektori $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, respektivno (slika 3).



Sl. 3



Sl. 4

Kako je $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, rastojanje tačaka M_1 i M_2 može se odrediti kao

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|,$$

tj.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

2. Deoba duži u datoj razmeri. Neka je data duž $\overline{M_1M_2}$ sa radijus vektorima $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tačaka M_1 i M_2 i neka je potrebno odrediti radijus vektor $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tačke M_0 koja deli duž u datoj razmeri, tj. tako da je

$$\text{(VII.1.2.1)} \qquad \frac{\overline{M_1M_0}}{\overline{M_0M_2}} = \lambda \qquad (\lambda > 0).$$

Kako je (videti sliku 4)

$$\overrightarrow{M_1M_0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1, \qquad \overrightarrow{M_0M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0,$$

iz kolinearnosti ovih vektora i jednakosti (VII.1.2.1) sleduje

$$\vec{r}_0 - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_0),$$

odakle dobijamo

$$\text{(VII.1.2.2)} \qquad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1 + \lambda},$$

tj.

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{VII.1.2.3}$$

U specijalnom slučaju, kada je $\lambda = 1$, imamo deobu duži na jednake delove. Tada se (VII.1.2.2) i (VII.1.2.3) svode redom na

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

i

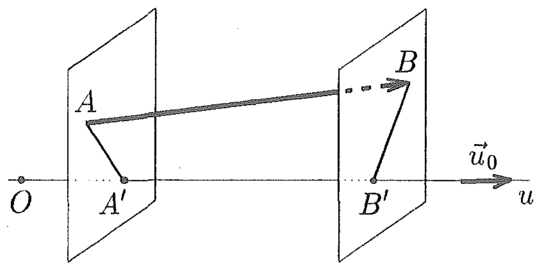
$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

VII.1.3 Projekcija vektora na osu

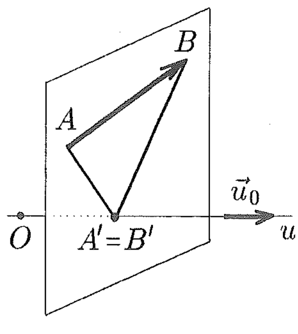
Neka je dat vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i osa u orijentisana jediničnim vektorom $\vec{u}_0$. Kroz tačke A i B postavimo ravni koje su normalne na u-osu (slika 1). Preseci ovih ravni sa osom određuju tačke A' i B'. Vektor $\overrightarrow{A'B'}$ može se izraziti pomoću jediničnog vektora $\vec{u}_0$

$$\overrightarrow{A'B'} = p\,\vec{u}_0 = a\cos\varphi\,\vec{u}_0\,, \tag{VII.1.3.1}$$

gde je $a = |\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$ i φ ugao koji zaklapaju vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{u}_0$.



Sl. 1



Sl. 2

Definicija VII.1.3.1 Za veličinu $p = |\vec{a}|\cos\varphi$ iz (VII.1.3.1) kažemo da je *projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu u* i označavamo je sa

$$p = \mathrm{Pr}_u\,\overrightarrow{AB}\,.$$

Umesto Pr_u koriste se i oznake gde umesto ose u stoje vektori koji karakterišu orjentisanost prave u, tj. $\mathrm{Pr}_{\vec{u}_0}$ ili $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}$, gde je $\vec{u} = \lambda\vec{u}_0$ $(\lambda > 0)$.

Iz jednakosti $\mathrm{Pr}_u \vec{a} = a\cos\varphi$ zaključujemo da važi

$$-a \leq \mathrm{Pr}_u \vec{a} \leq a\,.$$

Ako vektor $\vec{a}$ leži u ravni koja je normalna na osu u, tada je $\mathrm{Pr}_u \vec{a} = 0$ (slika 2). Očigledno da je $\mathrm{Pr}_u \vec{a} > 0$ ako je ugao φ oštar, dok je u slučaju tupog ugla projekcija negativna.

Nije teško zaključiti da je preslikavanje $\vec{a} \mapsto \mathrm{Pr}_u \vec{a}$ linearno, tj. da važi sledeći rezultat:

Teorema VII.1.3.1 *Za proizvoljne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i proizvoljni skalar λ važi jednakost*

$$\mathrm{Pr}_u(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{Pr}_u \vec{a} + \mathrm{Pr}_u \vec{b}\,, \qquad \mathrm{Pr}_u(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\mathrm{Pr}_u \vec{a}\,.$$

U odeljku II.3.3 definisali smo i razmatrali skalarni proizvod dva vektora iz prostora $V_O(E)$. Korišćenjem projekcije vektora na osu, skalarni proizvod

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

može se predstaviti u obliku

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,\mathrm{Pr}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\,\mathrm{Pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}.$$

Na kraju ovog odeljka naglasimo da su koordinate vektora

$$\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k},$$

upravo, projekcije vektora $\vec{a}$ na koordinatne ose, tj.

$$a_1 = \mathrm{Pr}_x\,\vec{a}, \quad a_2 = \mathrm{Pr}_y\,\vec{a}, \quad a_3 = \mathrm{Pr}_z\,\vec{a}.$$

VII.1.4 Vektorski proizvod dva vektora

U odeljku II.3.3 definisali smo skalarni proizvod dva vektora iz $V = V_O(E)$. Mogućno je, međutim, definisati i proizvod dva vektora tako da je rezultat vektor. Drugim rečima, uređenom paru $(\vec{a}, \vec{b}) \in V^2$ treba dodeliti treći vektor $\vec{c} \in V$.

Neka su dati vektori $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$.

Definicija VII.1.4.1 *Vektorski proizvod* vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \times \vec{b}$, je vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}\,, \tag{VII.1.4.1}$$

što se može predstaviti i u obliku determinante trećeg reda

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{VII.1.4.2}$$

Iz osobina determinanata, a na osnovu (VII.1.4.2) sleduje:

Teorema VII.1.4.1 *Za proizvoljne vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i svaki skalar λ važe jednakosti*

1° $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,

2° $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$,

3° $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,

4° $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,

5° $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Iz osobina 2° i 5° sleduje da je vektorski proizvod dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ jednak nula-vektoru. Važi i obrnuto. Očigledno je da se kolinearnost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u skalarnom obliku, može iskazati na način

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda\,.$$

Za bazisne (koordinatne) vektore $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ imamo

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{o}, \qquad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{o}, \qquad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}.$$

Na osnovu definicije 1.3.1 imamo

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} = \vec{k}\,.$$

Slično se može pokazati da su $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ i $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$. Dakle, imamo

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}.$$

Teorema VII.1.4.2 *Neka je φ $(0 \le \varphi \le \pi)$ ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada se intenzitet vektorskog proizvoda $\vec{a} \times \vec{b}$ može izraziti u obliku*

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\varphi . \tag{VII.1.4.3}$$

Dokaz. Na osnovu (VII.1.4.1) imamo

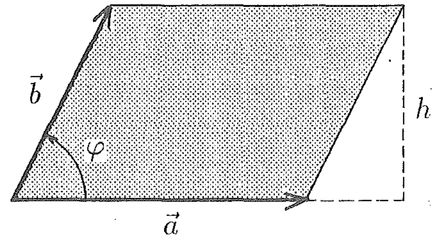
$$\begin{aligned}
|\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) \\
&\qquad -2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2,
\end{aligned}$$

tj.

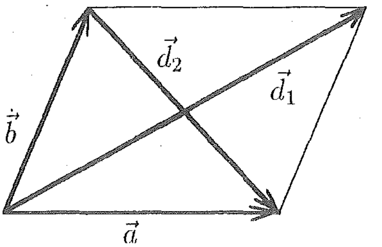
$$\begin{aligned}
|\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \cos^2\varphi \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2\varphi . \qquad \square
\end{aligned}$$

Jednakost (VII.1.4.3) pokazuje da je intenzitet vektorskog proizvoda $\vec{a} \times \vec{b}$ jednak brojno površini paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Zaista, sa sl. 1 vidimo da je visina paralelograma $h = |\vec{b}| \sin\varphi$, pa je odgovarajuća površina

$$P = |\vec{a}|h = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\varphi .$$



Sl. 1



Sl. 2

Prethodno smo već ustanovili da je vektorski proizvod dva kolinearna vektora jednak nula-vektoru i obrnuto. Sada je to, na sonovu teoreme VII.1.4.2 i geometrijski jasno, s obzirom da jedino kolinearni vektori formiraju paralelogram visine nula, a time i površine jednake nuli.

Primer 1. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ proizvoljni nekolinearni vektori. Za vektorski proizvod vektora $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-\vec{b}$ imamo

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{a})+(\vec{b}\times\vec{a})-(\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{b}\times\vec{b})=-2(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Interpretirajući vektore $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-\vec{b}$ kao vektore dijagonala paralelograma, konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (sl. 2 na strani 277), imamo da je

$$\vec{d_1}\times\vec{d_2}=-2\,\vec{a}\times\vec{b},$$

odakle sleduje

$$|\vec{d_1}\times\vec{d_2}|=2|\vec{a}\times\vec{b}|,$$

tj. površina paralelograma čije su stranice dijagonale $\vec{d_1}$ i $\vec{d_2}$ nekog drugog paralelograma jednaka je dvostrukoj površini tog drugog paralelograma. △

Da bismo ustanovili pravac i smer vektorskog proizvoda $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ u odnosu na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, primetimo, najpre, da je skalarni proizvod vektora $\vec{c}$ i $\vec{a}$ jednak nuli. Zaista, s obzirom na definiciju skalarnog proizvoda vektora i osobina determinanata, imamo

$$\vec{c}\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0.$$

Kako se na sličan način može pokazati da je, takođe, $\vec{c}\vec{b}=0$, zaključujemo da je vektor $\vec{c}$ ortogonalan i na vektor $\vec{a}$ i na vektor $\vec{b}$. Dakle, geometrijski posmatrano, pravac vektorskog proizvoda $\vec{a}\times\vec{b}$ je upravan na ravan u kojoj leže vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Najzad, ostaje otvoreno pitanje smera vektorskog proizvoda. Od dva moguća smera, pravi smer je onaj koji obezbeđuje da vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ čine trijedar desne orijentacije. Da je ovo zaista tako, zaključujemo polazeći od činjenice da je $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, a znamo da bazisni vektori $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, čine trijedar desne orijentacije.

Na osnovu prethodnog, moguće je vektorski proizvod ekvivalentno definisati i na sledeći način:

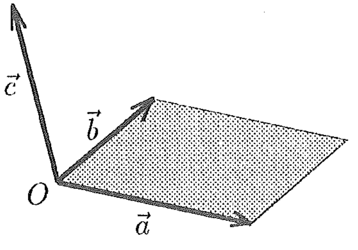
Definicija VII.1.4.2 Vektorski proizvod $\vec{a}\times\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ takav da važi:

1° intenzitet vektora $\vec{c}$ je brojno jednak površini paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$;

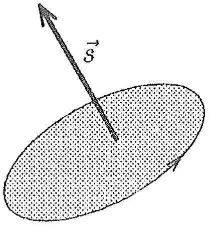
2° pravac vektora $\vec{c}$ je normalan na ravan ovog paralelograma;

3° vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i njihov vektorski proizvod $\vec{c}$ obrazuju trijedar desne orijentacije.

Na slici 3 prikazan je vektorski proizvod $\vec{c}$ kao vektor koji je normalan na ravan paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i sa njima obrazuje trijedar desne orijentacije.



Sl. 3



Sl. 4

U opštem slučaju, svakoj ravnoj figuri može se korespondirati tzv. *vektor površine*. U tom cilju, potrebno je najpre utvrditi smer obilaženja po konturi ravne figure (slika 4). Vektor površine je tada onaj vektor koji je normalan na ravan figure i s čijeg kraja se usvojeni smer obilaženja konture vidi kao suprotan smeru kretanja kazaljke na časovniku[1]. Za ovako definisani smer vektora površine kažemo da je saglasan orijentaciji konture.

Vektorski proizvod $\vec{a} \times \vec{b}$ je, prema tome, vektor površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, pri čemu se za smer obilaženja po konturi paralelograma uzima smer prvog vektora $\vec{a}$ u vektorskom proizvodu.

Definicija VII.1.4.3 *Vektor površine ravne figure* je vektor čiji je:

1° intenzitet brojno jednak veličini površine ravne figure;

2° pravac normalan na ravan figure;

3° smer saglasan orijentaciji konture ravne figure.

Primer 2. Odredićemo površinu trougla čija su temena u nekolinearnim tačkama M_k, sa radijus vektorima $\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ (slika 5).

[1] U fizici i elektrotehnici se ovo interpretira kao *pravilo desne zavojnice*. Naime, okretanjem desne zavojnice u smeru obilaženja po konturi, njeno pravolinijsko kretanje je u smeru vektora površine.

Kako je površina trougla $\triangle M_1M_2M_3$, u oznaci $P_\triangle$, jednaka polovini površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{M_1M_2}$ i $\overrightarrow{M_1M_3}$ i kako je

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad \text{i} \qquad \overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1,$$

imamo

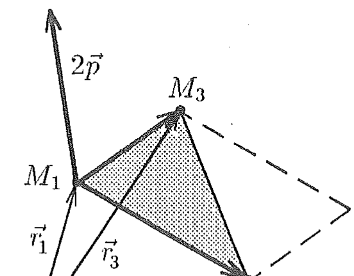
$$P_\triangle = |\vec{p}| = \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \mid = \frac{1}{2} \mid (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \mid .$$

Korišćenjem koordinatnih reprezentacija vektora i jednakosti (VII.1.4.2), dobijamo

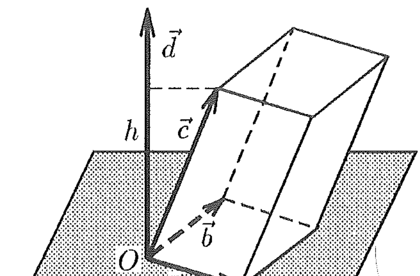
$$P_\triangle = \frac{1}{2} \mid \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} \mid ,$$

tj.

$$P_\triangle = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 \right)^{1/2}.$$



Sl. 5



Sl. 6

Ako su sve tri tačke, na primer, u ravni Oxy, tada je $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, pa se prethodna formula svodi na

$$\begin{aligned} P_\triangle &= \frac{1}{2} \mid (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \mid \\ &= \frac{1}{2} \mid x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \mid . \qquad \triangle \end{aligned}$$

VII.1.5 Mešoviti proizvod tri vektora

Definicija VII.1.5.1 Skalarni proizvod vektorskog proizvoda $\vec{a}\times\vec{b}$ i vektora $\vec{c}$, u oznaci $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$, naziva se *mešoviti proizvod vektora* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Neka su dati vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Konstruišimo paralelopiped nad ovim vektorima i stavimo $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ (slika 6 na strani 280).

Kako je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\vec{d}\vec{c}=d\,\mathrm{Pr}_{\vec{d}}\vec{c}$$

i $d=|\vec{d}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$ površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. površina osnove prethodno konstruisanog paralelopipeda, i kako je, u našem slučaju, $\mathrm{Pr}_{\vec{d}}\vec{c}=h>0$ visina paralelopipeda koja odgovara ovoj osnovi, zaključujemo da

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=dh$$

predstavlja zapreminu V paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Moguća je, međutim, i takva situacija da je $Pr_{\vec{d}}\vec{c}<0$. Tada je mešoviti proizvod vektora jednak $-V$.

U svakom slučaju, mešoviti proizvod tri vektora po apsolutnoj vrednosti jednak je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad ovim vektorima

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}|=V\,.$$

Ako su redom $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$, tada se mešoviti proizvod može izraziti u obliku

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})=\begin{vmatrix}c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}, \tag{VII.1.5.1}$$

s obzirom da je

$$\vec{i}\vec{c}=c_1,\qquad \vec{j}\vec{c}=c_2,\qquad \vec{k}\vec{c}=c_3\,.$$

Ako u determinanti na desnoj strani jednakosti (VII.1.5.1) zamenimo, najpre, prvu i drugu, a zatim drugu i treću vrstu, vrednost determinante se neće promeniti[2]. Na taj način, (VII.1.5.1) svodi se na

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}. \tag{VII.1.5.2}$$

[2] Pri ovakvoj transpoziciji vrsta, samo je znak determinante dva puta bio promenjen.

Interpretirajući dobijenu determinantu u (VII.1.5.2) kao mešoviti proizvod, na osnovu (VII.1.5.1), zaključujemo da je $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=(\vec{c}\times\vec{a})\vec{b}$. Dakle, pri ovakvoj permutaciji vektora, koju nazivamo ciklička permutacija, vrednost mešovitog proizvoda se ne menja. Tako, u stvari, imamo

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=(\vec{c}\times\vec{a})\vec{b}=(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}. \tag{VII.1.5.3}$$

Međutim, ako permutujemo samo dva vektora, iz osobine determinanata sleduje da mešoviti proizvod menja znak. Dakle, imamo

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})\vec{c}=-(\vec{c}\times\vec{b})\vec{a}.$$

S obzirom da, na osnovu osobine skalarnog proizvoda, za poslednji član u (VII.1.5.3) važi $(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$, to na osnovu (VII.1.5.3) imamo $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$, što kazuje da, u mešovitom proizvodu, skalarni i vektorski proizvod mogu uzajamno da promene mesta.

Polazeći od (VII.1.5.2), a imajući u vidu osobine determinanata, jednostavno se dokazuje sledeće tvrđenje:

Teorema VII.1.5.1 *Za proizvoljne vektore $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ i proizvoljni skalar λ, važe jednakosti*

1° $\lambda\big((\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}\big)=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=(\lambda\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=(\vec{a}\times\lambda\vec{b})\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\lambda\vec{c}$,

2° $(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\vec{d}$,

3° $\big((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\big)\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{c})\vec{d}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{d}$,

4° $\big(\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})\big)\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{d}+(\vec{a}\times\vec{c})\vec{d}$.

Iz osobina determinanata sleduje da je mešoviti proizvod tri vektora jednak nuli ako i samo ako postoji linearna zavisnost među vrstama determinante. Poslednji uslov se svodi na linearnu zavisnost vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, tj. na njihovu komplanarnost. Prema tome, komplanarnost vektora izražena pomoću (videti odeljak II.1.5) $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ (λ, μ skalari) može se iskazati i pomoću mešovitog proizvoda

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=0\,.$$

Ovo se, takođe, može zaključiti i iz geometrijske interpretacije mešovitog proizvoda. Zaista, zapremina paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jednaka je nuli ako i samo ako su vektori komplanarni.

√II.1.6 Dvostruki proizvod tri vektora

)efinicija VII.1.6.1 Za vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i vektorskog proiz-
'oda $\vec{b} \times \vec{c}$, u oznaci $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, kažemo da je *dvostruki proizvod vektora* $\vec{a}$,
', $\vec{c}$.

Za dvostruki proizvod tri vektora koristi se i termin *dvostruki vektorski* *)roizvod.*

Na osnovu osobine vektorskog proizvoda nije teško zaključiti da su vek-
ori $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ komplanarni, što znači da je dvostruki vektorski proizvod moguće izraziti kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$, tj.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}, \tag{VII.1.6.1}$$

gde su λ i μ neki skalari.

Preciznije, važi sledeći rezultat:

Teorema VII.1.6.1 *Za tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ važi*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c},$$

što se može predstaviti i u obliku determinante

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} \end{vmatrix},$$

gde su $\vec{a}\vec{c}$ i $\vec{a}\vec{b}$ skalarni proizvodi vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$, i $\vec{a}$ i $\vec{b}$, respektivno.

Dokaz. Neka su redom $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ i neka je $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c} = d_1\vec{i} + d_2\vec{j} + d_3\vec{k}$.

Kako je

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

imamo

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_2d_3 - a_3d_2)\vec{i} + (a_3d_1 - a_1d_3)\vec{j} + (a_1d_2 - a_2d_1)\vec{k}.$$

Odredićemo, najpre, prvu koordinatu dvostrukog vektorskog proizvoda.

Kako je

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

imamo

$$\begin{aligned} a_2d_3 - a_3d_2 &= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ &= b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3), \end{aligned}$$

odakle, dodavanjem i oduzimanjem člana $a_1b_1c_1$, dobijamo

$$\begin{aligned} a_2d_3 - a_3d_2 &= b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= b_1(\vec{a}\vec{c}) - c_1(\vec{a}\vec{b}). \end{aligned}$$

Na osnovu dobijene jednakosti i jednakosti (VII.1.6.1) naslućujemo da je $\lambda = \vec{a}\vec{c}$ i $\mu = -(\vec{a}\vec{b})$, što se i tvrdilo teoremom. Da je to stvarno tačno možemo se uveriti tako što, na sličan način kao u prethodnom postupku, nalazimo

$$\begin{aligned} a_3d_1 - a_1d_3 &= b_2(\vec{a}\vec{c}) - c_2(\vec{a}\vec{b}), \\ a_1d_2 - a_2d_1 &= b_3(\vec{a}\vec{c}) - c_3(\vec{a}\vec{b}). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}. \qquad \square$$

VII.2 RAVAN I PRAVA

VII.2.1 Razni oblici jednačine ravni

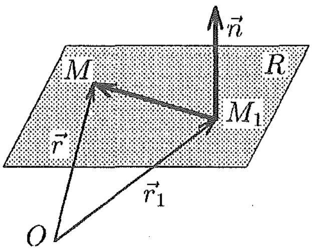
Neka je u prostoru $V_O(E)$ definisan pravougli koordinatni sistem. Koordinate tačaka koje leže u nekoj ravni ne mogu biti proizvoljne, već moraju zadovoljavati izvesne uslove date tzv. *jednačinom ravni.*

Pretpostavimo da ravan R prolazi kroz tačku M_1 i da je normalna na dati vektor $\vec{n}$ (slika 1 na strani 285). Odredićemo jednačinu skupa svih tačaka M koje leže u ravni R. Neka su radijus vektori tačaka M_1 i M redom $\vec{r}_1$ i $\vec{r}$. Kako vektor $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$ leži u ravni R to je on normalan na dati vektor $\vec{n}$, pa je njihov skalarni proizvod jednak nuli, tj.

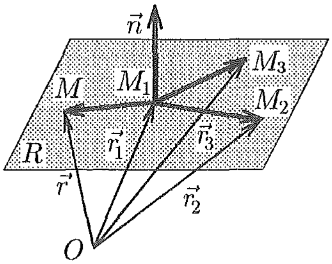
(VII.2.1.1) $$(\vec{r} - \vec{r}_1)\vec{n} = 0\,.$$

Očigledno, važi i obrnuto, tj. ako radijus vektor $\vec{r}$ proizvoljne tačke $M \in E$ zadovoljava jednačinu (2.1.1), tada tačka M pripada ravni R.

Ovim smo dobili jednačinu ravni koja prolazi kroz datu tačku M_1 i koja je normalana na dati vektor $\vec{n}$. Za vektor $\vec{n}$ kažemo da je *vektor normale.*



Sl. 1



Sl. 2

Ako stavimo $\vec{r}_1\vec{n} = -D$, (VII.2.1.1) se svodi na tzv. *opšti oblik* jednačine ravni

$$\vec{r}\vec{n} + D = 0\,. \tag{VII.2.1.2}$$

Ako uzmemo da su koordinate vektora normale redom A, B, C, tj. $\vec{n} = (A, B, C)$, odgovarajući skalarni opšti oblik jednačine ravni je

$$Ax + By + Cz + D = 0\,,$$

što se dobija iz (VII.2.1.2) stavljanjem $\vec{r} = (x, y, z)$. Takođe, za $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ iz (VII.2.1.1) dobijamo odgovarajući skalarni analogon

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0\,.$$

Kako je ravan potpuno određena pomoću tri nekolinearne tačke M_k, sa koordinatama x_k, y_k, z_k $(k = 1, 2, 3)$, korišćenjem (VII.2.1.1) moguće je naći jednačinu te ravni R ako se prethodno odredi vektor normale $\vec{n}$. Kako vektori

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad \text{i} \qquad \overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$$

leže u ravni R (slika 2), za vektor normale se može uzeti njihov vektorski proizvod. Dakle,

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\,,$$

pa je odgovarajuća jednačina ravni data mešovitim vektorskim proizvodom

(VII.2.1.3) $$(\vec{r}-\vec{r}_1)\big[(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\times(\vec{r}_3-\vec{r}_1)\big]=0\,.$$

Interpretirajući mešoviti vektorski proizvod u (VII.2.1.3) kao determinantu trećeg reda, dolazimo do skalarne jednačine

(VII.2.1.4) $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\,.$$

Ako tačke M_k $(k=1,2,3)$ odaberemo na koordinatnim osama, tj. uzmemo $\vec{r}_1=a\vec{i}$, $\vec{r}_2=b\vec{j}$, $\vec{r}_3=c\vec{k}$, na osnovu (VII.2.1.3) dobijamo

$$(\vec{r}-a\vec{i})\big[(b\vec{j}-a\vec{i})\times(c\vec{k}-a\vec{i})\big]=0\,,$$

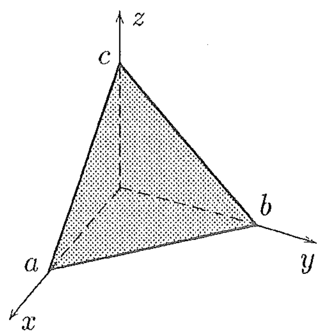
tj.

$$(\vec{r}-a\vec{i})(bc\vec{i}+ac\vec{j}+ab\vec{k})=0\,.$$

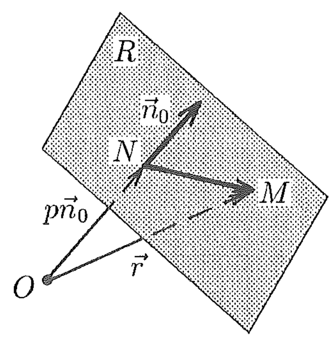
Iz ove jednačine, ili direktno iz (VII.2.1.4), sleduje tzv. *segmentni oblik* jednačine ravni

(VII.2.1.5) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\,,$$

gde su a,b,c odgovarajući odsečci na koordinatnim osama (slika 3).



Sl. 3



Sl. 4

Do segmentnog oblika možemo doći i iz opšteg oblika (VII.2.1.2) deljenjem sa $-D\neq 0$. Tako dobijamo

(VII.2.1.6) $$\vec{r}\cdot\frac{\vec{n}}{-D}=1.$$

Ako stavimo $A/(-D) = 1/a$, $B/(-D) = 1/b$, $C/(-D) = 1/c$, imamo

$$\frac{\vec{n}}{-D} = \frac{1}{a}\vec{i} + \frac{1}{b}\vec{j} + \frac{1}{c}\vec{k},$$

pa se (VII.2.1.6) svodi na (VII.2.1.5). Napomenimo da slučaj $D = 0$ odgovara ravni koja prolazi kroz koordinatni početak.

Od interesa je proučiti i tzv. *normalni oblik* jednačine ravni. Neka je p odstojanje pola O od ravni R, tj. $\overline{ON} = p > 0$, i neka je $\vec{n}_0$ jedinični vektor normale za ravan R (slika 4 na strani 286). Kako je

$$\overrightarrow{ON} = p\vec{n}_0 \qquad \text{i} \qquad |\vec{n}_0| = 1,$$

imamo

$$(\vec{r} - p\vec{n}_0)\vec{n}_0 = 0,$$

tj. dobijamo normalni oblik jednačine ravni

(VII.2.1.7) $$\vec{r}\vec{n}_0 - p = 0\,.$$

S obzirom da svaki vektor može da se izrazi pomoću kosinusa uglova α, β, γ, koje ovaj vektor zaklapa redom sa vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (videti (II.3.3.5)), to za jedinični vektor $\vec{n}_0$ imamo

$$\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Kako je $\vec{r} = (x, y, z)$, iz (VII.2.1.7) sleduje odgovarajući skalarni oblik

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Normalni oblik jednačine ravni možemo dobiti i iz opšteg oblika datog u (VII.2.1.2), koji podelimo sa $n = |\vec{n}|$ ili sa $-n$, pri čemu u jednačini

$$\vec{r}\cdot\frac{\vec{n}}{\pm n} + \frac{D}{\pm n} = 0$$

treba izabrati znak + ili − tako da je

$$\frac{D}{\pm n} = -p < 0\,.$$

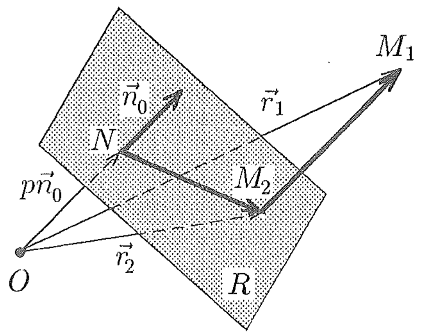
Odgovarajući skalarni analogon ima oblik

(VII.2.1.8) $$\frac{Ax + By + Cy + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0\,,$$

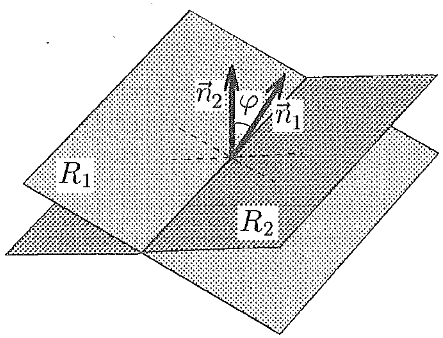
gde je

$$\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -p < 0\,.$$

Normalni oblik jednačine ravni je veoma pogodan za određivanje odstojanja neke tačke M_1 od date ravni R, tj. za nalaženje intenziteta vektora $d = |\overrightarrow{M_2M_1}|$, gde je M_2 ortogonalna projekcija tačke M_1 na ravan R (slika 5).



Sl. 5



Sl. 6

Kako tačka M_2 pripada ravni R, njen radijus vektor $\vec{r}_2$ zadovoljava jednačinu (VII.2.1.7), tj. važi

(VII.2.1.9) $$\vec{r}_2\vec{n}_0 - p = 0.$$

Vektor $\overrightarrow{M_2M_1}$ je kolinearan sa $\vec{n}_0$, tako da se može izraziti u obliku $\overrightarrow{M_2M_1} = \lambda\vec{n}_0$. Kako je $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \lambda\vec{n}_0$, na osnovu (VII.2.1.9) dobijamo

$$(\vec{r}_1 - \lambda\vec{n}_0)\vec{n}_0 - p = 0,$$

tj.

$$\lambda = \vec{r}_1\vec{n}_0 - p\,.$$

Dakle, traženo odstojanje je

$$d = |\lambda| = |\vec{r}_1\vec{n}_0 - p|\,.$$

Ako je $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, iz skalarnog oblika (VII.2.1.8) sleduje

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cy_1 + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right|\,.$$

Na kraju ovog odeljka razmotrimo slučaj dve ravni

(VII.2.1.10) $\quad (R_1) \quad \vec{r}\vec{n}_1 + D_1 = 0, \qquad (R_2) \quad \vec{r}\vec{n}_2 + D_2 = 0.$

Ravni R_1 i R_2 su paralelne ili se poklapaju ako su im vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ kolinearni, tj. ako je $\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$, gde je λ skalar. Ovaj uslov *paralelnosti* može biti izražen i u obliku

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{o}.$$

Kada se ravni R_1 i R_2 seku (slika 6 na strani 288), ugao φ između ovih ravni je, u stvari, ugao između vektora narmala $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$. Dakle,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{n_1 n_2} \qquad (n_1 = |\vec{n}_1|,\ n_2 = |\vec{n}_2|).$$

Uslov ortogonalnosti ravni R_1 i R_2 može se izraziti u obliku

$$\vec{n}_1\vec{n}_2 = 0\,.$$

Ako su ravni date skalarnim jednačinama

(VII.2.1.11) $\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,,$

tada se uslov ortogonalnosti svodi na

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

a uslov paralelnosti na

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}\,.$$

VII.2.2 Razni oblici jednačina prave

Neka su date ravni R_1 i R_2 kao u (VII.2.1.10) i neka je $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{o}$, tj. neka se ravni seku. Tada njihov presek određuje pravu p, koja se može predstaviti skupom jednačina

(VII.2.2.1) $\qquad \vec{r}\vec{n}_1 + D_1 = 0, \qquad \vec{r}\vec{n}_2 + D_2 = 0.$

Za jednačine (VII.2.2.1) kažemo da predstavljaju *opšti vektorski oblik* jednačina prave u prostoru. Odgovarajuće skalarne jednačine su date sa (VII.2.1.11).

Skup svih ravni koje prolaze kroz presek ravni R_1 i R_2 naziva se *pramen ravni*. Svaka ravan koja pripada ovom pramenu može se definisati jednačinom

$$\vec{r}\vec{n}_1 + D_1 + \lambda(\vec{r}\vec{n}_2 + D_2) = 0,$$

tj.

$$\vec{r}(\vec{n}_1 + \lambda\vec{n}_2) + (D_1 + \lambda D_2) = 0, \tag{VII.2.2.2}$$

i dobija se iz (VII.2.2.2) za neku konkretnu vrednost λ.

Da je to stvarno tako sleduje iz toga što je (VII.2.2.2) jednačina neke ravni, s jedne strane, i s druge strane, ako je jedna proizvoljna tačka na liniji preseka ravni iz (VII.2.2.1) tada će vektor položaja $\vec{r}$ te tačke zadovoljavati jednačine (VII.2.2.1), a isto tako i jednačinu (VII.2.2.2).

(Primetimo da se ravan R_1 može dobiti iz (VII.2.2.2) za $\lambda = 0$, dok se ravan R_2 može dobiti iz (VII.2.2.2) deljenjem sa $\lambda \neq 0$, a zatim prelaženjem na graničnu vrednost kada $\lambda \to +\infty$ (ili $-\infty$).)

Dakle, na osnovu prethodno rečenog, prava p se može definisati i pomoću dve proizvoljne ravni pramena (VII.2.2.2).

Prava p se daleko češće zadaje pomoću tačke M kroz koju ona prolazi i vektora $\vec{a}$ kome je paralelna.

Neka je M proizvoljna tačka prave p i neka su $\vec{r}$ i $\vec{r}_1$ radijus vektori tačaka M i M_1, respektivno (slika 1). Kako su vektori $\vec{a}$ i $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$ kolinearni, imamo da je $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda\vec{a}$, gde je λ skalar. Dakle,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} \tag{VII.2.2.3}$$

predstavlja *vektorsku jednačinu prave kroz datu tačku*. Za $\vec{a}$ kažemo da je *vektor pravca* prave p.

Kako se uslov kolinearnosti može izraziti i pomoću vektorskog proizvoda, imamo

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \times \vec{a} = \vec{o},$$

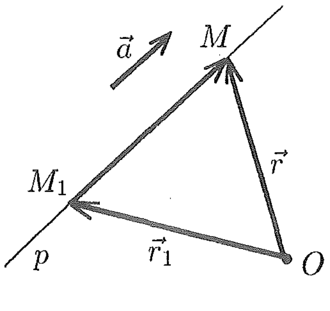
tj.

$$\vec{r} \times \vec{a} = \vec{b}, \tag{VII.2.2.4}$$

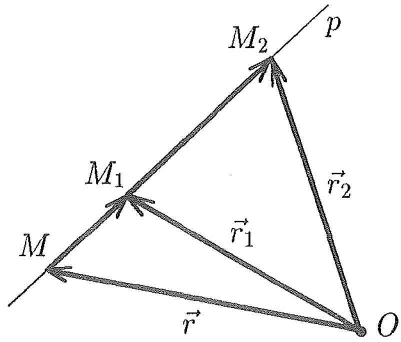
gde smo stavili $\vec{r}_1 \times \vec{a} = \vec{b}$.

Ako uzmemo $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, iz (VII.2.2.3) sleduju tzv. *parametarske jednačine prave*:

$$x = x_1 + \lambda a_1, \quad y = y_1 + \lambda a_2, \quad z = z_1 + \lambda a_3\,. \tag{VII.2.2.5}$$



Sl. 1



Sl. 2

Eliminacijom parametra λ iz (VII.2.2.5) dobijamo tzv. *simetrični oblik* jednačina prave:

$$\text{(VII.2.2.6)} \qquad \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}.$$

Simetrični oblik (VII.2.2.6) može se izraziti i u obliku

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma},$$

gde su α, β, γ uglovi koje zaklapa vektor $\vec{a}$ sa koordinatnim vektorima $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, respektivno.

Prava p je potpuno određena dvema tačkama M_1 i M_2. Neka su radijus vektori ovih tačaka redom $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ (slika 2 na strani 291). Kako se vektor $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ može uzeti kao vektor pravca prave p, na osnovu (VII.2.2.3), dobijamo vektorsku jednačinu

$$\text{(VII.2.2.7)} \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

tj.

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{o},$$

odakle sleduje

$$\vec{r} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 .$$

Odgovarajući parametarski oblik jednačine prave kroz dve date tačke je

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \quad z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1),$$

a simetrični oblik jednačina prave kroz dve tačke je

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Primer 1. Simetrični oblik jednačina prave koja prolazi kroz date tačke $(1,-1,3)$ i $(5,-4,3)$ je

$$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y+1}{-4+1}=\frac{z-3}{3-3},$$

tj.

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-3}{0}.$$

Vektor $4\vec{i}-3\vec{j}$ je vektor pravca ove prave. Odgovarajuće parametarske jednačine prave su:

$$x=1+4\lambda,\quad y=-1-3\lambda,\quad z=3,$$

gde je λ proizvoljan skalar.

Primetimo da sve tačke na pravoj imaju z-koordinatu jednaku 3, pa je, dakle, prava paralelna Oxy ravni i od nje udaljena tri merne jedinice. To se i moglo očekivati s obzirom da su date tačke kroz koje prava prolazi na istoj visini, $z=3$, u odnosu na ravan Oxy. △

Sada ćemo razmotriti problem svođenja jednog vektorskog oblika jednačina prave na drugi. To su, u stvari, oblici (VII.2.2.1), (VII.2.2.3) i (VII.2.2.4).

1. (VII.2.2.3) $\Rightarrow$ (VII.2.2.4). Ovo je pokazano ranije, gde je $\vec{b}=\vec{r}_1\times\vec{a}$.

2. (VII.2.2.4) $\Rightarrow$ (VII.2.2.3). Ako (VII.2.2.4) pomnožimo vektorski sa $\vec{a}$, imamo

$$\vec{a}\times(\vec{r}\times\vec{a})=\vec{a}\times\vec{b},$$

odakle, razvijanjem dvostrukog vektorskog proizvoda, dobijamo

$$(\vec{a}\vec{a})\vec{r}-(\vec{a}\vec{r})\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b},$$

tj.

$$\vec{r}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}|^2}+\frac{\vec{a}\vec{r}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}, \tag{VII.2.2.8}$$

što predstavlja oblik (VII.2.2.3) sa

$$\vec{r}_1 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2}, \qquad \lambda = \frac{\vec{a}\vec{r}}{|\vec{a}|^2}.$$

3. (VII.2.2.1) $\Rightarrow$ (VII.2.2.4). Množenjem druge jednačine u (VII.2.2.1) sa $\vec{n}_1$ i prve sa $-\vec{n}_2$, a zatim sabiranjem tako dobijenih jednačina, imamo

$$(\vec{r}\vec{n}_2)\vec{n}_1 - (\vec{r}\vec{n}_1)\vec{n}_2 = D_1\vec{n}_2 - D_2\vec{n}_1.$$

Korišćenjem dvostrukog vektorskog proizvoda, poslednja jednačina postaje

$$\text{(VII.2.2.9)} \qquad \vec{r} \times (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = D_1\vec{n}_2 - D_2\vec{n}_1,$$

što predstavlja oblik (VII.2.2.4), pri čemu je

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2, \qquad \vec{b} = D_1\vec{n}_2 - D_2\vec{n}_1.$$

4. (VII.2.2.3) $\Rightarrow$ (VII.2.2.1). Množenjem (VII.2.2.3) bilo kojim vektorima $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ ($\vec{n}_1 \neq \vec{n}_2$) koji su ortogonalni na $\vec{a}$, dobijamo

$$\vec{r}\vec{n}_1 = \vec{r}_1\vec{n}_1 + \lambda\vec{a}\vec{n}_1 \qquad \text{i} \qquad \vec{r}\vec{n}_2 = \vec{r}_1\vec{n}_2 + \lambda\vec{a}\vec{n}_2,$$

tj.

$$\vec{r}\vec{n}_1 + D_1 = 0 \qquad \text{i} \qquad \vec{r}\vec{n}_2 + D_2 = 0,$$

gde smo stavili $D_1 = -\vec{r}_1\vec{n}_1$ i $D_2 = -\vec{r}_1\vec{n}_2$. Napomenimo da ova reprezentacija nije jedinstvena i da se obično za $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ uzimaju neka dva od ova tri vektora: $(a_2, -a_1, 0)$, $(a_3, 0, -a_1)$, $(0, a_3, -a_2)$, gde je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Primer 2. Neka su date dve ravni

$$\text{(VII.2.2.10)} \qquad x + 2y - z + 1 = 0, \qquad x - y + z + 3 = 0.$$

Ove ravni se seku jer je

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 2, -1) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -3) \neq \vec{o}.$$

Njihov presek određuje pravu p čiji je vektor pravca

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, -2, -3).$$

Kako je

$$\vec{b} = D_1\vec{n}_2 - D_2\vec{n}_1 = (1,-1,1) - 3(1,2,-1) = (-2,-7,4),$$

na osnovu (VII.2.2.9), jednačina

$$\vec{r} \times (\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}) = -2\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k}$$

predstavlja pravu p.

Kako je $|\vec{a}| = \sqrt{14}$ i

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -29\vec{i} + 2\vec{j} - 11\vec{k},$$

na osnovu (VII.2.2.8), dobijamo

$$\vec{r} = \frac{1}{14}(-29\vec{i} + 2\vec{j} - 11\vec{k}) + \lambda(\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}).$$

Odgovarajući simetrični oblik jednačina prave je

$$\text{(VII.2.2.11)} \qquad \frac{x + 29/14}{1} = \frac{y - 1/7}{-2} = \frac{z + 11/14}{-3}.$$

Do simetričnog oblika jednačina prave mogli smo doći jednostavnije uzimajući proizvoljnu tačku prave p. Ako, na primer, stavimo $z = 0$, iz (VII.2.2.10) sleduje $x = -7/3$ i $y = 2/3$, što znači da tačka $(-7/3, 2/3, 0)$ leži na pravoj p, čiji je simetrični oblik

$$\text{(VII.2.2.12)} \qquad \frac{x + 7/3}{1} = \frac{y - 2/3}{-2} = \frac{z}{-3}.$$

Može se pokazati da su jednačine (VII.2.2.11) i (VII.2.2.12) ekvivalentne. Zaista, odgovarajuće parametarske jednačine

$$x = -\frac{29}{14} + \lambda, \qquad y = \frac{1}{7} - 2\lambda, \qquad z = -\frac{11}{14} - 3\lambda$$

i

$$x = -\frac{7}{3} + \mu, \qquad y = \frac{2}{3} - 2\mu, \qquad z = -3\mu$$

su ekvivalentne jer se za $\mu = \lambda + 11/42$ svode jedne na druge. $\triangle$

Razmotrimo sada slučaj dve prave

$$\text{(VII.2.2.13)} \qquad (p_1) \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}, \qquad\qquad (p_2) \quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \mu\vec{b}.$$

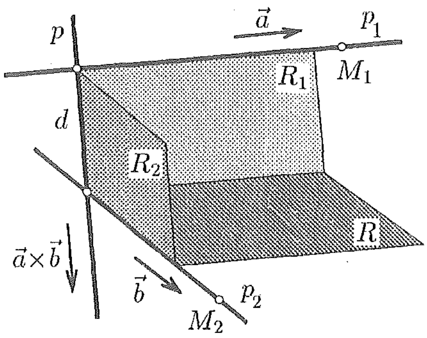
Za ugao φ koji zaklapaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da je ugao između ove dve prave. Dakle,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab} \qquad (a = |\vec{a}|,\ b = |\vec{b}|).$$

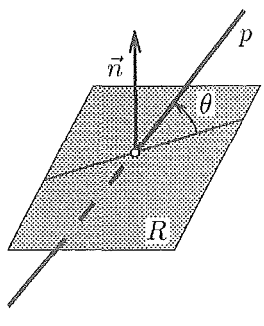
Uslov normalnosti pravih može se iskazati pomoću $\vec{a}\vec{b} = 0$, dok se uslov paralelnosti iskazuje kolinearnošću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ili pomoću $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.

Primer 3. Neka su jednačinama (VII.2.2.13) date dve mimoilazne prave p_1 i p_2. Odredićemo najkraće rastojanje između ovih pravih. Štaviše, odredićemo jednačine zajedničke normale, tj. jednačine prave p koja prolazi kroz najkraće rastojanje pravih p_1 i p_2. Vektor pravca prave p je, očigledno, vektor $\vec{a} \times \vec{b}$.

Postavimo, najpre, ravan R koja prolazi kroz pravu p_2 i paralelna je pravoj p_1, a zatim konstruišimo dve ravni R_1 i R_2 koje su normalne na R i prolaze kroz prave p_1 i p_2, respektivno (slika 3).



Sl. 3



Sl. 4

Vektor normale ravni R je, u stvari, vektor pravca prave p, pa je jednačina ravni R data sa

(VII.2.2.14) $$(\vec{r} - \vec{r}_2)(\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

Kako je ravan R_1 normalna na ravan R i prolazi kroz pravu p_1, to se za njen vektor normale može uzeti vektor $\vec{n}_1 = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$. Slično, za vektor normale ravni R_2 može se uzeti $\vec{n}_2 = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$. Imajući u vidu da ove ravni prolaze kroz prave p_1 i p_2, tj. kroz tačke M_1 i M_2 sa radijus vektorima $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, respektivno, jednostavno dobijamo njihove vektorske jednačine:

$$(R_1) \quad (\vec{r} - \vec{r}_1)[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}] = 0, \qquad (R_2) \quad (\vec{r} - \vec{r}_2)[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}] = 0.$$

Ovaj skup jednačina predstavlja jednačine zajedničke normale p pravih p_1 i p_2. Jasno je da je prava p normalna na ravan R i da seče obe prave p_1 i p_2. Rastojanje između presečnih tačaka je, u stvari, najkraće rastojanje između mimoilaznih pravih. Ono se, međutim, može odrediti i kao odstojanje bilo koje tačke prave p_1 od ravni R jer je prava p_1 paralelna sa njom, a prava p_2 leži u njoj. Prema tome, ako uzmemo, na primer, tačku M_1 i normalni oblik jednačine ravni iz (VII.2.2.14), dobijamo najkraće rastojanje

$$d = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}. \qquad \triangle \tag{VII.2.2.15}$$

Na osnovu (VII.2.2.15) zaključujemo da se uslov preseka dve prave može iskazati u obliku

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{a} \times \vec{b}) = 0. \tag{VII.2.2.16}$$

Do ovog uslova može se doći i jednostavnije. Naime, ako se prave p_1 i p_2 seku, to su onda vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ komplanarni, pa je njihov mešoviti proizvod jednak nuli.

Uslov (VII.2.2.16) se može predstaviti i u skalarnom obliku

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

gde smo uzeli da su vektori pravaca pravih p_1 i p_2 redom $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, kao i $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

VII.2.3 Uzajamni odnos prave i ravni

Posmatrajmo pravu p i ravan R čije su jednačine

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}, \qquad \vec{r}\vec{n} + D = 0. \tag{VII.2.3.1}$$

Ako je $\vec{a}\vec{n} = 0$, prava p je paralelna ravni R ili leži u njoj.

Ako je $\vec{a} = \lambda\vec{n}$, tj. ako je $\vec{a} \times \vec{n} = \vec{o}$, prava je normalna na ravan R.

U opštem slučaju, kada je $\vec{a}\vec{n} \neq 0$, prava seče ravan. Za ugao θ koji zaklapa prava p sa svojom projekcijom u ravni R kažemo da je ugao između prave i ravni. To je, u stvari, ugao koji je komplementaran uglu između vektora pravca prave p i vektora normale ravni R (slika 4 na strani 295). Dakle,

$$\sin\theta = \cos(\pi/2 - \theta) = \frac{\vec{a}\vec{n}}{an} \qquad (a = |\vec{a}|,\ n = |\vec{n}|).$$

Kako radijus vektor tačke preseka prave i ravni mora zadovoljavati obe jednačine u (VII.2.3.1), imamo

$$(\vec{r}_1 + \lambda\vec{a})\vec{n} + D = 0,$$

tj.

$$\lambda = -\frac{\vec{r}_1\vec{n} + D}{\vec{a}\vec{n}}.$$

Dakle, radijus vektor tačke preseka je

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \frac{\vec{r}_1\vec{n} + D}{\vec{a}\vec{n}}\,\vec{a}.$$

Primer 1. Neka su date prava p i ravan R pomoću

$$(p)\quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}, \qquad (R)\quad x + 5y - z - 10 = 0.$$

Ovde je $\vec{a} = (1, 2, 3)$ i $\vec{n} = (1, 5, -1)$.

Kako su parametarske jednačine prave p

(VII.2.3.2) $$x = 1 + \lambda, \quad y = 2 + 2\lambda, \quad z = 3 + 3\lambda,$$

stavljajući ove vrednosti koordinata tačke na pravoj u jednačinu ravni dobijamo

$$1 + \lambda + 5(2 + 2\lambda) - (3 + 3\lambda) - 10 = 0,$$

tj. $\lambda = 1/4$. Sada, zamenom ove vrednosti u (VII.2.3.2), nalazimo

$$x = \frac{5}{4}, \qquad y = \frac{5}{2}, \qquad z = \frac{15}{4}.$$

Dakle, presek prave p i ravni R je u tački $(5/4, 5/2, 15/4)$.

Kako je $a = |\vec{a}| = \sqrt{14}$, $n = |\vec{n}| = \sqrt{27}$ i $\vec{a}\vec{n} = 8$, za ugao θ između prave i ravni važi

$$\sin\theta = \frac{\vec{a}\vec{n}}{an} = \frac{4\sqrt{42}}{63}. \qquad \triangle$$

Primer 2. Neka je data ravan R pomoću $x + 2y - z - 5 = 0$ i tačka M_1 sa koordinatama $(1, 2, 3)$. Odredićemo pravu p koja je normalna na ravan R

i prolazi kroz tačku M_1. Za vektor pravca takve prave može se uzeti vektor normale ravni R, tj. $\vec{a} = \vec{n} = (1, 2, -1)$. Dakle, simetrični oblik jednačina prave p je

$$\frac{x-1}{1} = \frac{x-2}{2} = \frac{x-3}{-1}.$$

Prema tome, presek prave p i ravni R je u tački $(3/2, 3, 5/2)$. $\triangle$

VII.3 ZADACI ZA VEŽBU

1. Odrediti ravan (α) koja prolazi kroz tačku $M(1, -2, 3)$ i upravna je na ravnima

$$(\beta) \qquad 2x + y - z - 2 = 0 \qquad \text{i} \qquad (\gamma) \qquad x - y - z - 3 = 0.$$

2. Odrediti pravu p koja prolazi kroz tačku $M(2, 2, -2)$ i seče prave

$$(q): \begin{cases} y + 3z - 5 = 0, \\ x + 2z - 7 = 0 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad (r): \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

3. Date su ravni R_1 i R_2 i prava p jednačinama

$$(R_1): x = 0, \qquad (R_2): y = 2, \qquad (p): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Ako su P_1 i P_2 tačke prodora prave p kroz ravni R_1 i R_2, odrediti tačku $P_3 \in R_1 \cap R_2$ tako da površina trougla $P_1P_2P_3$ bude minimalna.

4. Naći presečnu tačku i ugao između prave

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+5}{-3/2}$$

i ravni $2x + y - z - 4 = 0$.

5. Odrediti jednačinu prave p koja sadrži tačku $M(1, -1, 1)$ i normalna je na pravu

$$q: \begin{cases} x = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Odrediti ugao koji prava p zaklapa sa z-osom.

6. Naći jednačinu ravni koja sadrži pravu

$$p:\begin{cases} 4x-y+3z-1=0,\\ x+5y-z+2=0,\end{cases}$$

i normalna je na ravan $2x-y+5z-3=0$.

7. Naću ugao između ravni koja sadrži tačke $M_1(0,0,0)$, $M_2(2,-2,0)$, $M_3(2,2,2)$ i Oxy ravni.

8. Date su prave

$$p_1:\begin{cases} x-y-z-7=0,\\ 3x-4y-11=0,\end{cases} \quad \text{i} \quad p_2:\begin{cases} x+2y-z-1=0,\\ x+y+1=0.\end{cases}$$

Dokazati da se prave p_1 i p_2 seku i odrediti jednačinu ravni koja ih sadrži.

9. Napisati jednačinu ravni α koja sadrži tačku $M(1,2,3)$ i:

a) paralelna je ravni Oxz;

b) paralelna je ravni $5x+2y+z=1$;

c) sadrži pravu

$$p:\begin{cases} x-z=3,\\ y+2z=1.\end{cases}$$

10. Na pravoj

$$p:\begin{cases} x-y+z+2=0,\\ x-y-z+1=0,\end{cases}$$

odrediti tačke A i B koje su od tačke $C(1,3/2,1/2)$ na rastojanju $\sqrt{2}$. Izračunati površinu $\triangle ABC$.

11. Odrediti tačku B koja je simetrična tački $A(69,0,0)$ u odnosu na pravu

$$p:\begin{cases} x+3y-2z+1=0,\\ 2x-y+z-3=0.\end{cases}$$

12. Data je prava

$$p:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1}$$

i tačka $O(1,1,1)$. Naći jednačinu prave p' simetričnu pravoj p u odnosu na tačku O.

13. U Descartesovom koordinatnom sistemu, date su prave p_1 i p_2 jednačinama

$$(p_1):\begin{cases} x-y-z+8=0, \\ 5x+y+z+10=0 \end{cases} \quad \text{i} \quad (p_2):\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ 2x+y-3z+9=0. \end{cases}$$

Ako je M tačka njihovog preseka i M_1, M_2, M_3 njene projekcije na koordinatne ose, odrediti zapreminu tetraedra $OM_1M_2M_3$ i površinu trougla $M_1M_2M_3$.

LITERATURA

[1] S. ALJANČIĆ: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* Građevinska knjiga, Beograd 1968.

[2] J. DIEUDONNÉ: *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, New York 1969.

[3] Ф. Р. ГАНТМАХЕР: *Теория матриц.* Наука, Москва 1988.

[4] Х. Д. ИКРАМОВ: *Задачник по линейной алгебре.* Наука, Москва 1975.

[5] J. D. KEČKIĆ: *Algebra I, Elementi linearne algebre i teorije polinoma.* Privredni pregled, Beograd 1973.

[6] Đ. KUREPA: *Viša algebra, I.* Građevinska knjiga, Beograd 1979.

[7] Đ. KUREPA: *Viša algebra, II.* Građevinska knjiga, Beograd 1979.

[8] S. KUREPA: *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene.* Tehnička knjiga, Zagreb 1967.

[9] S. KUREPA: *Uvod u matematiku, Skupovi – strukture – brojevi.* Tehnička knjiga, Zagreb 1975.

[10] S. KUREPA: *Uvod u linearnu algebru.* Školska knjiga, Zagreb 1990.

[11] P. LANKASTER: *Theory of Matrices.* Academic Press, New York – London 1969.

[12] P. M. MILIČIĆ: *Matematika I, Linearna algebra i analitička geometrija – realna analiza i numerička analiza.* Naučna knjiga, Beograd 1982.

[13] G. V. MILOVANOVIĆ: *Numerička analiza, I deo.* Naučna knjiga, Beograd 1991.