Dr GRADIMIR V. MILOVANOVIĆ

NUMERIČKA ANALIZA

II deo

345679

Naučna knjiga

NUMERIČKA ANALIZA
II DEO

Dr GRADIMIR V. MILOVANOVIĆ

NUMERIČKA ANALIZA
II deo

DRUGO IZDANJE

Naučna Knjiga

BEOGRAD, 1988.

Dr Gradimir V. Milovanović
NUMERIČKA ANALIZA, II deo

Izdavač
IRO „Naučna knjiga“
Beograd, Uzun-Mirkova 5

Recenzenti:

Dr Petar M. Vasić
Dr Dobrilo Tošić

Za izdavača:
Dr Blažo Perović

Urednik:
Nikola Dončev

Tehnički urednik:
Gordana Krstić

Korice:
Miloš Majstorović

Tiraž: 1000 primeraka

ISBN 86-23-20080-2

Štampa: GRO „Prosveta“ - Niš

Sadržaj

Predgovor

Ova knjiga predstavlja nastavak autorovog udžbenika NUMERIČKA ANALIZA, I deo, Naučna knjiga, Beograd, 1988. U odnosu na prvo izdanje, koje se pojavilo 1985. godine, u ovom izdanju učinjene su neznatne izmene u tekstu i ispravljene uočene štamparske greške. Knjiga je podeljena u dve glave, koje su označene kao šesta i sedma, s obzirom da prvi deo sadrži pet glava. Organizacija knjige je ista kao i organizacija prvog dela. Naime, glave su podeljene na poglavlja, a poglavlja na odeljke. Numeracija objekata (definicija, teorema, formula i sl.) u okviru jednog odeljka izvršena je pomoću tri broja od kojih prvi ukazuje na poglavlje, drugi na odeljak, a treći na redni broj tog objekta u posmatranom odeljku. Na taj način je uspostavljena jednoznačna numeracija objekata u okviru jedne glave. Poslednje poglavlje u svakoj glavi predstavlja spisak citirane i korišćene literature.

Šesta glava je posvećena problemu aproksimacije funkcije jedne promenljive. Značajno mesto u izlaganju zauzimaju interpolacioni procesi. Pored interpolacije algebarskim polinomima, razmatrane su i interpolacije pomoću trigonometrijskih polinoma, eksponencijalnih funkcija i splajnova. Posebno poglavlje je posvećeno problemu najboljih aproksimacija (srednje kvadratne aproksimacije, mini-max aproksimacije i sl.).

U sedmoj glavi se izlažu metodi numeričkog diferenciranja i numeričke integracije. Poseban tretman dat je savremenim metodima konstrukcije Gauss-Christoffelovih kvadratura za neklasične težinske funkcije. Takodje, dat je pregled nekih klasa modifikovanih Gaussovih kvadratura (na primer, Kronrodove šeme), kao i osnovi teorije Čebiševljevih kvadratura. Posebni odeljci su posvećeni metodima za konturnu integraciju analitičkih funkcija u kompleksnoj ravni i metodima za integraciju brzo oscilatornih funkcija.

Knjiga je prvenstveno namenjena studentima tehničkih i prirodno-matematičkih fakulteta, na kojima se predaje ova naučna disciplina. Autor se nada da će knjiga biti od koristi i svima onima koji u svojoj praksi koriste numeričke metode.

Svima onima koji su na neki način pomogli u toku izrade rukopisa, autor se najtoplije zahvaljuje.

U Nišu, 28.09.1988. Gradimir V. Milovanović

GLAVA 6

Interpolacija i aproksimacija

6.1. OPŠTI PROBLEM APROKSIMACIJE FUNKCIJA

U ovom poglavlju se izlažu osnovni principi teorije aproksimacija funkcije realne promenljive i pokazuju aproksimaciona svojstva algebarskih polinoma.

6.1.1. Uvod

Problemima zamene jedne funkcije f, definisane na izvesnom skupu X, drugom funkcijom ϕ bavi se posebna oblast numeričke matematike - teorija aproksimacija.

Neka je funkcija ϕ, koju nazivamo aproksimacionom funkcijom, takva da zavisi od n+1 parametara $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tj.

$$\phi(x) = \phi(x; a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Problem aproksimacije funkcije f, funkcijom ϕ svodi se na odredjivanje parametara $a_i = \bar{a}_i$ po nekom kriterijumu. U zavisnosti od izabranog kriterijuma razlikujemo razne vrste aproksimacija.

6.1.2. Tipovi aproksimacionih funkcija

Jedan od osnovnih problema u teoriji aproksimacija predstavlja izbor opšteg oblika za funkciju ϕ. U ovom odeljku navešćemo nekoliko standardnih oblika, koji se najčešće koriste u primenama. U principu sve aproksimacione funkcije mogu se podeliti na linearne i nelinearne aproksimacione funkcije.

Opšti oblik linearne aproksimacione funkcije je

(1.2.1) $$\phi(x) = a_o\phi_o(x) + a_1\phi_1(x) + \ldots + a_n\phi_n(x),$$

pri čemu sistem funkcija $\{\phi_k\}$ ispunjava odredjene osobine. Ovde se pojam linearne funkcije odnosi na linearnost po parametrima a_i $(i = 0,1,\ldots,n)$.

U specijalnom slučaju, kada je $\phi_k(x) = x^k$ $(k = 0,1,\ldots,n)$, tj.

$$\phi(x) = a_o + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$

govorimo o aproksimaciji algebarskim polinomima.

U slučaju, kada je $\{\phi_k\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$ govorimo o aproksimaciji trigonometrijskim polinomima (ili o trigonometrijskoj aproksimaciji).

Ako se uzme

$$\phi_k(x) = (x-x_k)_+^m = \begin{cases} (x-x_k)^m & (x \geqq x_k), \\ 0 & (x < x_k), \end{cases}$$

gde je m fiksiran prirodan broj, imamo tzv. aproksimaciju pomoću splajnova*.

Od nelinearnih aproksimacionih funkcija, navešćemo samo dve:

1^o Eksponencijalna aproksimaciona funkcija

$$\phi(x) = \phi(x;c_o,b_o,\ldots,c_r,b_r) = c_oe^{b_ox} + \ldots + c_re^{b_rx},$$

gde je $n+1 = 2(r+1)$, tj. $n = 2r+1$.

2^o Racionalna aproksimaciona funkcija

$$\phi(x) = \phi(x;b_o,\ldots,b_r,c_o,\ldots,c_s) = \frac{b_o+b_1x+\ldots+b_rx^r}{c_o+c_1x+\ldots+c_sx^s},$$

gde je $n = r+s+1$.

---

* *Na engleskom: spline. Na našem jeziku se ne može naći odgovarajući prevod, pa ćemo koristiti u daljem tekstu reč splajn. U ruskom i nemačkom jeziku, takodje, nije nadjen odgovarajući prevod.*

6.1.3. Kriterijumi za aproksimaciju

U ovoj glavi razmatraćemo najvažnije vrste aproksimacija koje se sreću u primenama. Tako ćemo razmotriti

1^{o} Interpolaciju,

2^{o} Srednje-kvadratnu aproksimaciju,

3^{o} Mini-max aproksimaciju.

Neka je funkcija f data na segmentu $[a,b]$ skupom parova (x_k, f_k) $(k=0,1,\ldots,n)$, gde je $f_k \equiv f(x_k)$. Ako je za aproksimaciju funkcije f funkcijom ϕ, kriterijum za izbor parametara $a_o, a_1, \ldots, a_n$ dat sistemom jednačina

$$\phi(x_k;\ a_o, a_1, \ldots, a_n) = f_k \qquad (k=0,1,\ldots,n), \tag{1.3.1}$$

imamo tzv. problem interpolacije funkcije. Funkciju ϕ, u ovom slučaju, nazivamo interpolacionom funkcijom, a tačke x_k $(k=0, 1,\ldots,n)$ interpolacionim čvorovima.

Problem interpolacije može biti znatno složeniji od pomenutog. Jedan opštiji problem se javlja kada su pored vrednosti funkcije f u interpolacionim čvorovima poznate i vrednosti njenih izvoda.

Interpolacionim problemima biće posvećeno poglavlje 6.2.

Aproksimacije 2^{o} i 3^{o} spadaju u grupu tzv. najboljih aproksimacija. Kod ovih aproksimacija kriterijum za odredjivanje parametara aproksimacione funkcije se svodi na minimizaciju norme greške $\delta_n(x) = f(x) - \phi(x)$ u izvesnom prostoru X. U zavisnosti od izabranog prostora X i norme u njemu, imaćemo razne vrste najboljih aproksimacija. Ove aproksimacije mogu biti diskretne ili kontinualne. Diskretne aproksimacije su one kod kojih se informacije o funkciji f uzimaju samo sa diskretnog skupa tačaka. U tom slučaju funkcija f se može tretirati kao element nekog konačno-dimenzionalnog prostora. U protivnom, ako je X beskonačno-dimenzionalan prostor, imamo tzv. kontinualnu aproksimaciju. Najčešće je to prostor $L^r(a,b)$ $(r \geq 1)$ sa uobičajenom normom

$$\|f\|_r = \left(\int_a^b |f(x)|^r dx\right)^{1/r}. \tag{1.3.2}$$

Minimizacijom norme $||f-\phi||_r$ po aproksimacionim parametrima a_i $(i=0,1,\ldots,n)$ dobijamo tzv. najbolju L^r aproksimaciju funkcije f na potprostoru $X_n \subset X$, koji je definisan kao lineal nad funkcijama $\phi_o,\phi_1,\ldots,\phi_n$, tj. $X_n = L(\phi_o,\phi_1,\ldots,\phi_n)$. Najbolju aproksimaciju označavamo sa $\phi^*(x)$. Od posebnog su interesa slučajevi, kada je $r=1$, $r=2$ i $r=+\infty$. Ovim problemima biće posvećeno poglavlje 6.3. Slučaj $r=2$ biće razmatran u odnosu na opštiju normu, kod koje je uključena težinska funkcija $p:[a,b]\to R^+$

$$||f||_2 = \left(\int_a^b p(x)f(x)^2dx\right)^{1/2}.$$

Slučaj $r=+\infty$ može se razmatrati kao granični slučaj u (1.3.2) kada $r\to+\infty$. Tada je

$$||f||_\infty = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|. \tag{1.3.3}$$

Norma (1.3.3) je, kao što vidimo, standardna norma prostora neprekidnih funkcija $C[a,b]$, koju nazivamo često uniformnom normom. Najbolja L^∞ aproksimacija ϕ^*, koja se dobija iz sledećeg minimizacionog problema

$$\min_{a_i}||f-\phi||_\infty = \min_{a_i}\left(\max_{a\leq x\leq b} |f(x)-\phi(x)|\right) = ||f-\phi^*||_\infty$$

zove se najbolja uniformna aproksimacija ili najbolja mini-max aproksimacija. Često se kaže samo mini-max aproksimacija. Konstrukcijom polinomske mini-max aproksimacije bavićemo se u odeljku 6.3.6. Potprostor X_n je, u tom slučaju, skup svih algebarskih polinoma ne višeg stepena od n, koji obično označavamo sa $\mathcal{P}_n$. Sa P_n^* $(\in\mathcal{P}_n)$ označavamo polinom najbolje mini-max aproksimacije za datu funkciju $f\in C[a,b]$. Polinom P_n^* zovemo jednostavno mini-max polinomom. Veličinu $E_n(f)$, definisanu pomoću

$$E_n(f) = \min_{P_n\in\mathcal{P}_n} ||f-P_n||_\infty = ||f-P_n^*||_\infty,$$

nazivamo veličinom najbolje aproksimacije. U mnogim ekstremalnim problemima teorije aproksimacija pojavljuje se veličina $E_n(f)$ (videti, na primer, [1], [13], [33]).

6.1.4. Weierstrassova i Bernsteinova teorema

Od svih tipova aproksimacionih funkcija najčešće se koriste algebarski polinomi, kako zbog jednostavnosti, tako i zbog dobrih svojstava. Naime, na konačnom segmentu $[a,b]$ algebarski polinomi su vrlo dobri aproksimacioni elementi, na šta ukazuje sledeća teorema:

Teorema 1.4.1. (Weierstrass). Ako $f \in C[a,b]$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n i polinom $P_n \in \mathcal{P}_n$ takav da je, za svako $x \in [a,b]$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon. \tag{1.4.1}$$

Ova teorema kazuje da se za svaku neprekidnu funkciju može naći polinom koji je proizvoljno "blizak" toj funkciji u smislu uniformne norme. Tvrdjenje teoreme ima samo egzistencijalni karakter i ne daje metod konstrukcije takvog polinoma P_n. Medjutim, ova teorema se može dobiti kao posledica Bernsteinove teoreme, koja ima i konstruktivni karakter. Pre nego što formulišemo i dokažemo Bernsteinovu teoremu, navešćemo neke pojmove.

Definicija 1.4.1. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana za $x \in [a,b]$ i neka je za svako δ $(\in [0,b-a])$

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x)-f(y)|. \tag{1.4.2}$$

Veličina $\omega(f;\delta)$ se naziva modul neprekidnosti funkcije f.

Ako funkcija f zadovoljava Lipschitzov uslov na $[a,b]$, tj. ako je

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \qquad (\forall x,y \in [a,b]),$$

gde je L pozitivna konstanta*, tada iz (1.4.2) sleduje

$$\omega(f;\delta) \leq L\delta.$$

Primetimo da za $f \in C[a,b]$ imamo

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0. \tag{1.4.3}$$

Naime, ako je f neprekidna funkcija na $[a,b]$, tada je ona i uniformno neprekidna, pa sleduje (1.4.3).

Ne umanjujući opštost u daljem razmatranju uzimamo $[a,b] = [0,1]$.

<u>Definicija 1.4.2.</u> Neka $f \in C[0,1]$ i neka je

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Polinom B_n $(\in \mathcal{P}_n)$, definisan pomoću

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f(\tfrac{k}{n}),$$

naziva se Bernsteinov polinom za funkciju f.

Dakle, Bernsteinov polinom se konstruiše u ekvidistantnim tačkama (čvorovima) $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 0,1,\ldots,n)$.

Da bismo dokazali izvesne jednakosti, podjimo od binomne formule

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k}\beta^k.$$

Diferenciranjem nalazimo

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\alpha+\beta)^n = n(\alpha+\beta)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^{k-1},$$

---

* *L se naziva Lipschitzova konstanta.*

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(\alpha+\beta)^n = n(n-1)(\alpha+\beta)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^{k-2}.$$

Stavljajući $\alpha = 1-x$ i $\beta = x$, na osnovu prethodnog dobijamo

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = 1,$$

$$B_n(x;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p_{n,k}(x) = x,$$

$$B_n(x^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k^2} p_{n,k}(x) = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n}.$$

Dokazaćemo sada Bernsteinovu teoremu.

Teorema 1.4.2. Ako $f \in C[0,1]$, tada za svako $x \in [0,1]$ i svako $n \in N$, važi nejednakost

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq \frac{9}{4}\omega(f; \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Dokaz. Neka su tačke x_k date pomoću

$$x_k = \frac{k}{n} \qquad (k \in I = \{0,1,\ldots,n\}).$$

Za dato $x \in [0,1]$ i δ, definišimo indeksne skupove

$$M = \{k \mid |x-x_k| \leq \delta\ (k \in I)\} \quad \text{i} \quad V = I\setminus M.$$

Tada, na osnovu prethodnog, imamo

$$f(x)-B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} (f(x)-f(x_k))p_{n,k}(x) = S_1(x) + S_2(x),$$

gde smo sa $S_1(x)$ i $S_2(x)$ definisali sume

$$S_1(x) = \sum_{k\in M} \cdots \quad \text{i} \quad S_2(x) = \sum_{k\in V} \cdots .$$

S obzirom na definiciju 1.4.1 imamo

$$|S_1(x)| \leq \omega(f;\delta)\sum_{k\in M} p_{n,k}(x) \leq \omega(f;\delta)\sum_{k\in I} p_{n,k}(x) = \omega(f;\delta).$$

Da bismo odredili granicu za $|S_2(x)|$, postupimo na sledeći način. Neka je p najveće celo od $\frac{|x-x_k|}{\delta}$, tj. $p=\left[\frac{|x-x_k|}{\delta}\right]$. Izmedju tačaka x i x_k umetnimo ekvidistantno p tačaka: $c_1, c_2, \ldots, c_p$, tako da je sada dužina svakog podintervala $|x-x_k|/(p+1)<\delta$. Kako je

$$f(x)-f(x_k)=(f(x)-f(c_1))+(f(c_1)-f(c_2))+\ldots+(f(c_{p-1})-f(c_p))$$
$$+(f(c_p)-f(x_k)),$$

imamo

$$|f(x)-f(x_k)| \leq (p+1)\omega(f;\delta) \leq \left(\frac{|x-x_k|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta).$$

Tada je

$$|S_2(x)| \leq \omega(f;\delta)\sum_{k\in V}\left(\frac{|x-x_k|}{\delta}+1\right)p_{n,k}(x)$$

$$= \omega(f;\delta)\left(\sum_{k\in V}\frac{|x-x_k|}{\delta}p_{n,k}(x)+\sum_{k\in V}p_{n,k}(x)\right)$$

$$\leq \omega(f;\delta)\left(\frac{1}{\delta^2}\sum_{k\in V}(x-x_k)^2 p_{n,k}(x)+\sum_{k\in V}p_{n,k}(x)\right).$$

Kako je

$$\sum_{k\in I}(x-x_k)^2 p_{n,k}(x) = x^2-2x\cdot x+\frac{n-1}{n}x^2+\frac{x}{n} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n},$$

na osnovu prethodnog, imamo

$$|S_2(x)| \leq \omega(f;\delta)\left(\frac{1}{\delta^2}\sum_{k\in I}(x-x_k)^2 p_{n,k}(x)+\sum_{k\in I}p_{n,k}(x)\right) \leq \omega(f;\delta)\left(\frac{1}{4n\delta^2}+1\right).$$

Dakle,

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leqq |S_1(x)| + |S_2(x)| \leqq \omega(f;\delta)\left(2 + \frac{1}{4n\delta^2}\right).$$

Ako stavimo $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ dobijamo tvrdjenje teoreme.

Ako je broj n izabran dovoljno veliki, tako da je $\omega(f;\frac{1}{\sqrt{n}}) \leqq \frac{4}{9}\varepsilon$, iz teoreme 1.4.2 dobijamo Weierstrassovu teoremu za funkciju $f \in C[0,1]$. Jedan polinom P_n u (1.4.1) je tada $B_n(f;x)$. Primetimo da se modul neprekidnosti može učiniti dovoljno malim, s obzirom na (1.4.3).

Posledica 1.4.1. Ako funkcija f zadovoljava Lipschitzov uslov na $[0,1]$ sa konstantom L, tada je za svako $x \in [0,1]$

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leqq \frac{9L}{4\sqrt{n}}.$$

Primedba 1.4.1. U radu [35], D.D. Stancu je dokazao da za $f \in C[0,1]$ važi jednakost

$$R_n(f;x) = f(x) - B_n(f;x) = -\frac{x(1-x)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(x)\left[x,\frac{k}{n},\frac{k+1}{n};f\right],$$

gde je $[x,y,z;f]$ oznaka za podeljenu razliku drugog reda (videti odeljak 6.2.3). Ako su podeljene razlike drugog reda funkcije f ograničene, tada važi nejednakost

$$|R_n(f,x)| \leqq \frac{x(1-x)}{n} M_2(f),$$

gde je $M_2(f)$ najmanja gornja granica apsolutne vrednosti podeljene razlike drugog reda funkcije f na $[0,1]$.

6.2. INTERPOLACIJA FUNKCIJA

Ovo poglavlje je posvećeno jednom od najvažnijih problema teorije aproksimacija – interpolaciji funkcija. Pored praktičnog značaja, interpolacija ima veliki teorijski značaj za konstrukciju numeričkih metoda za rešavanje mnogih problema (na primer, numeričko diferenciranje, numerička integracija i slično).

6.2.1. Čebiševljevi sistemi

Neka je funkcija f data svojim vrednostima $f_k \equiv f(x_k)$ u tačkama x_k ($x_k \in [a,b]$) ($k=0,1,\ldots,n$). Posmatrajmo linearni interpolacioni problem, tj. interpolaciju funkcijom (1.2.1). U tom slučaju sistem jednačina (1.3.1) se svodi na sistem linearnih jednačina po parametrima a_i $(i=0,1,\ldots,n)$

$$a_o\phi_o(x_k)+a_1\phi_1(x_k)+\ldots+a_n\phi_n(x_k) = f_k \qquad (k=0,1,\ldots,n),$$

tj.

$$\begin{bmatrix}\phi_o(x_o) & \phi_1(x_o) & \ldots & \phi_n(x_o)\\ \phi_o(x_1) & \phi_1(x_1) & & \phi_n(x_1)\\ \vdots & & & \\ \phi_o(x_n) & \phi_1(x_n) & & \phi_n(x_n)\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_o\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_o\\ f_1\\ \vdots\\ f_n\end{bmatrix}. \tag{2.1.1}$$

Da bi navedeni interpolacioni problem imao jedinstveno rešenje potrebno je da matrica sistema (2.1.1) bude regularna.

<u>Primer 2.1.1.</u> Neka je $\phi_o(x)=1$ i $\phi_1(x)=x^2$ i $X=[-1,1]$. Odgovarajuća matrica sistema (2.1.1), u ovom slučaju, je

$$\begin{bmatrix}1 & x_o^2\\ 1 & x_1^2\end{bmatrix}.$$

Interpolacioni problem

(a) ima jedinstveno rešenje ako je $|x_o| \neq |x_1|$;

(b) ima beskonačno mnogo rešenja ako je $x_o = -x_1$ i $f(x_o) = f(x_1)$;

(c) nema rešenje ako je $x_o = -x_1$ i $f(x_o) \neq f(x_1)$.

Neka su interpolacioni čvorovi takvi da je

$$a \leqq x_o < x_1 < \dots < x_n \leqq b.$$

Razmotrićemo uslove pod kojima je matrica sistema (2.1.1) regularna. Uslov da je sistem funkcija $\{\phi_k\}$ linearno nezavisan je potreban, ali ne i dovoljan, što pokazuje sledeći primer:

Primer 2.1.1. Sistem funkcija $\{1, \sin x\}$ je linearno nezavisan, ali je za $x_o + x_1 = \pi$,

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin x_o \\ 1 & \sin x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Iz osobina determinanata sleduje da sistemu funkcija $\{\phi_k\}$ treba nametnuti takve uslove, pod kojima ne postoji linearna kombinacija

$$a_o\phi_o(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$$

koja ima n+1 različitih nula na $[a,b]$. Sistemi funkcija sa ovom osobinom nazivaju se Čebiševljevi sistemi (skraćeno T-sistemi). O T-sistemima postoji izvanredna monografija [24].

Teorema 2.1.1. Ako su funkcije $\phi_k : [a,b] \to R$ $(k = 0,1,\dots,n)$ n+1 puta diferencijabilne i ako je za svako $k = 0,1,\dots,n$ Wronsky-eva determinanta W_k različita od nule, tj.

$$
W_k = \begin{vmatrix} \phi_o(x) & \phi_1(x) & \dots & \phi_k(x) \\ \phi_o'(x) & \phi_1'(x) & & \phi_k'(x) \\ \vdots & & & \\ \phi_o^{(k)}(x) & \phi_1^{(k)}(x) & & \phi_k^{(k)}(x) \end{vmatrix} \neq 0,
$$

sistem funkcija $\{\phi_k\}$ je Čebiševljev sistem.

6.2.2. Lagrangeova interpolacija

Neka je funkcija f data svojim vrednostima $f_k \equiv f(x_k)$ u tačkama $x_k (k=0,1,\dots,n)$. Ne umanjujući opštost pretpostavimo da je

(2.2.1) $$a \leqq x_o < x_1 < \dots < x_n \leqq b.$$

Ako tačke x_k uzmemo za interpolacione čvorove i stavimo $\phi_k(x) = x^k$ $(k=0,1,\dots,n)$ imamo problem interpolacije funkcije f algebarskim polinomom. Označimo ovaj polinom sa P_n, tj.

$$P_n(x) = \phi(x) = a_o + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Teorema 2.2.1. Polinom P_n je jedinstven i može se predstaviti u obliku

(2.2.2) $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x),$$

gde je

$$L_k(x) = \frac{(x-x_o)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_o)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Dokaz. S obzirom da je determinanta matrice sistema (2.1.1), u posmatranom slučaju, Vandermonde ova, tj.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_o & \dots & x_o^n \\ 1 & x_1 & & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j),$$

i s obzirom na pretpostavku (2.2.1), zaključujemo da je polinom P_n jedinstven. Dokaz jedinstvenosti smo mogli izvesti dokazujući da je sistem funkcija $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ Čebiševljev sistem. Zaista, na osnovu teoreme 2.1.1 to sleduje, jer je Wronskyeva determinanta $W_k = 0!1!2!\cdots k! \neq 0$ $(k=0,1,\dots,n)$.

Da bismo dokazali formulu (2.2.2) dovoljno je primetiti sledeće:

1^o Svi polinomi L_k su ne višeg stepena od n, tj. $\deg(L_k) \leq n$ za svako k,

2^o $L_k(x_i) = \delta_{ik}$ (δ_{ik} - Kronecker ova delta),

3^o $P_n(x_k) = f(x_k)$ za svako k,

4^o $\deg(P_n) \leq n$.

Formula (2.2.2) naziva se Lagrange ova interpolaciona formula, a polinom P_n Lagrange ov interpolacioni polinom.

Definisanjem polinoma ω pomoću

(2.2.3) $$\omega(x) = (x-x_o)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

polinomi L_k se mogu predstaviti u kondenzovanijem obliku

$$L_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} \qquad (k=0,1,\dots,n).$$

Primer 2.2.1. Za skup podataka

x_k	-1	0	2	3
$f(x_k)$	-1	2	10	35

$$P_3(x) = (-1)\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} + 2\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-2)(0-3)}$$

$$+ 10\frac{(x+1)(x-0)(x-3)}{(2+1)(2-0)(2-3)} + 35\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(3+1)(3-0)(3-2)},$$

tj. $P_3(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 2.$

Sledeća teorema daje ocenu greške kod Lagrange ove interpolacije.

Teorema 2.2.2. Neka $f \in C^{n+1}[a,b]$ i $x_i \in [a,b]$ $(i = 0,1,\ldots,n)$. Tada postoji $\xi \in (a,b)$ takvo da se greška Lagrange ovog interpolacionog polinoma može predstaviti u obliku

$$R_n(f;x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x). \tag{2.2.4}$$

Dokaz. Posmatrajmo pomoćnu funkciju F, definisanu sa

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - K_n\omega(x), \tag{2.2.5}$$

koja se anulira u tačkama $x_o, x_1, \ldots, x_n$. Neka je $\bar{x}$ proizvoljna tačka iz $[a,b]$ i takva da je $\bar{x} \neq x_i$ $(i = 0,1,\ldots,n)$. Odredićemo konstantu K_n u (2.2.5) tako da se $F(x)$ anulira i u tački $\bar{x}$. S obzirom da je $\bar{x} \neq x_i$ $(i = 0,1,\ldots,n)$, ovakva vrednost za K_n postoji. Naime,

$$K_n = \frac{f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})}{\omega(\bar{x})}$$

Kako funkcija F na $[a,b]$ ima bar (n+2) različite nule, to na osnovu Rolle ove teoreme sukcesivno zaključujemo da u (a,b)

$F'(x)$ ima bar (n+1) različitih nula,

$\vdots$

$F^{(n+1)}(x)$ ima bar jednu nulu.

Neka je $\xi \in (a,b)$ nula funkcije $F^{(n+1)}$. Tada iz (2.2.5) sleduje

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - K_n(n+1)! = 0,$$

odakle je $K_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

Na osnovu prethodnog zaključujemo da je

$$R_n(f;\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(\bar{x}).$$

Kako je $\bar{x}$ proizvoljna tačka iz $[a,b]$, dokaz teoreme je završen.

Primer 2.2.2. Neka je $x \mapsto P_5(x)$ Lagrange ov interpolacioni polinom formiran na osnovu vrednosti funkcije $x \mapsto \sin x$ u tačkama $x_k = \frac{\pi}{10} k$ $(k = 0,1,2,3,4,5)$. Tada je

$$\sin x - P_5(x) = \frac{-\sin\xi}{6!}\, x\left(x - \frac{\pi}{10}\right)\left(x - \frac{2\pi}{10}\right)\left(x - \frac{3\pi}{10}\right)\left(x - \frac{4\pi}{10}\right)\left(x - \frac{5\pi}{10}\right),$$

gde je $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$.

Neka je $M_k = \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(k)}(x)| \qquad (k \in N)$.

Teorema 2.2.3. Neka $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_k - x_{k-1} = h = \text{const}$ $(k = 1,\dots,n)$, $x_o = a$, $x_n = b$. Tada je

$$|R_n(f;x)| = |f(x) - P_n(x)| < \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M_{n+1}.$$

Dokaz. Ako stavimo $x = x_o + ph$ $(p \in [0,n])$ imamo

$$\omega(x) = p(p-1) \dots (p-n)h^{n+1}.$$

Kako funkcija $p \mapsto F_n(p) = |p(p-1)\dots(p-n)|$ na segmentu $[0,n]$ dostiže maksimalnu vrednost kada $p \in (0,1)$ (ili $p \in (n-1,n)$), važi

$$\max_{p\in[0,n]} F_n(p) < \max_{p\in(0,1)} |p(p-1)| \max_{p\in(0,1)} |(p-2)\ldots(p-n)| < \frac{1}{4}\, n!,$$

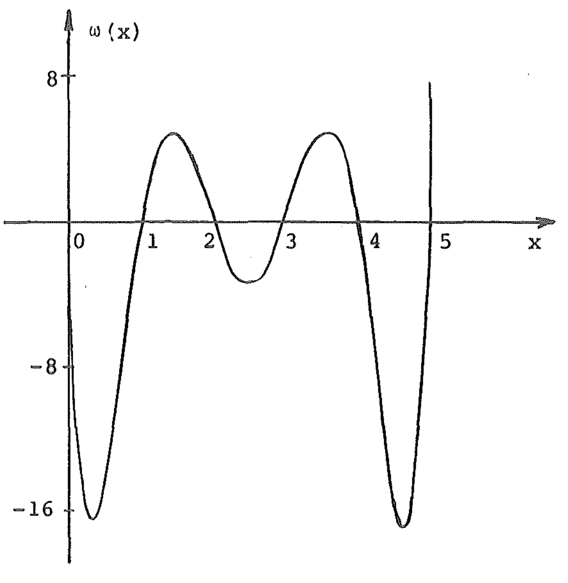
odakle neposredno sleduje tvrdjenje teoreme.

U specijalnom slučaju za $n=2$ i $n=3$, mogu se dobiti tačnije granice za grešku $R_n(f,x)$, nego što daje teorema 2.2.3, s obzirom da je

$$\max_{p\in[0,2]} F_2(p) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \text{i} \quad \max_{p\in[0,3]} F_3(p) = 1.$$

Dakle, imamo

$$|R_2(f;x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} h^3 M_3 \quad \text{i} \quad |R_3(f;x)| \leq \frac{h^4}{24} M_4.$$



Sl. 2.2.1

Nije teško primetiti da za funkciju $\omega(x)$, u slučaju ekvidistantnih čvorova, važi

$$\omega(\frac{n}{2}+x) = (-1)^{n+1}\omega(\frac{n}{2}-x).$$

Na sl. 2.2.1 prikazan je grafik funkcije $\omega(x)$ za $h=1$ i $n=5$.

Primer 2.2.3. Odredićemo sada sa kojom tačnošću se može izračunati vrednost $\ell og\, 11.5$ korišćenjem Lagrangeovog polinoma P_3 ako su poznate vrednosti

$$\ell og\, 10, \quad \ell og\, 11, \quad \ell og\, 12, \quad \ell og\, 13.$$

S obzirom da je $M_4 = \max\limits_{x\in[10,13]} |-\frac{6}{x^4}| = 6\cdot 10^{-4}$ imamo

$$|\ell og 11.5-P_3(11.5)| \leq \frac{M_4}{4!} |(11.5-10)(11.5-11)(11.5-12)(11.5-13)|$$

$$= 1.41\cdot 10^{-5}.$$

Inače, za proizvoljno $x \in (10,13)$ važi ocena

$$|\ell og\, x - P_3(x)| \leq \frac{1}{24}\cdot 6\cdot 10^{-4} = 2.5\cdot 10^{-5}$$

Uvodeći pretpostavku da je funkcija f regularna u nekoj oblasti G kompleksne ravni C može se naći jedna ocena greške (ostatka) kod Lagrangeove interpolacione formule.

Teorema 2.2.4. Neka je $f:G\to C$ regularna funkcija, $[a,b]\subset G\subset C$, $f(t)\in R$ za $t\in[a,b]$ i interval $I(x)$ definisan pomoću

$$I(x) = [\min(x_o,x),\ \max(x_n,x)],$$

pri čemu interpolacioni čvorovi zadovoljavaju uslov (2.2.1). Neka je, dalje, Γ zatvorena kriva u G, takva da $I(x)\subset \mathrm{int}\Gamma$, L dužina krive Γ,

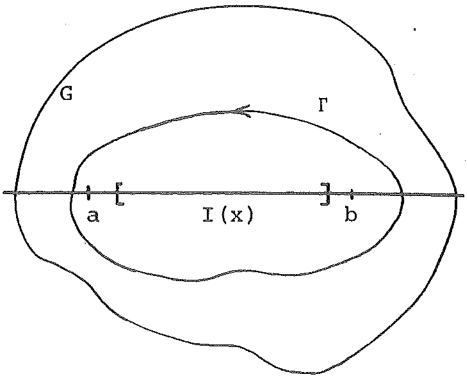
$$M = \max_{z\in\Gamma}|f(z)| \quad \text{i} \quad r(x) = \min_{\substack{t\in I(x)\\ z\in C}} |z-t|$$

Tada važi

(2.2.6) $$|R_n(f;x)| = |f(x)-P_n(x)| \leq \frac{LM}{2\pi r(x)^{n+2}} |\omega(x)|.$$

Dokaz. Neka $t \in I(x)$. Na osnovu Cauchy-eve integralne formule za regularne funkcije važi

$$f^{(n+1)}(t) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-t)^{n+2}} dz.$$



Sl. 2.2.2

Imajući u vidu uvedene pretpostavke (videti, takodje, sl. 2.2.2), zaključujemo da je

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r(x)^{n+2}} L .$$

Najzad, na osnovu (2.2.4) i poslednje nejednakosti dobijamo (2.2.6).

Razmotrimo sada problem optimalnog izbora interpolacionih čvorova kod interpolacije funkcija iz klase

$$CM = \{f \mid f \in C^{n+1}[-1,1] \wedge |f^{(n+1)}(x)| \leq M \ (\forall x \in [-1,1])\}.$$

Naime, odredićemo interpolacione čvorove $x_o, x_1, \ldots, x_n$ tako da veličina

(2.2.7) $$\sup_{f \in CM} \max_{x \in [-1,1]} |R_n(f;x)|$$

ima najmanju vrednost. Tada je, na osnovu (2.2.4),

(2.2.8) $$\max_{x \in [-1,1]} |R_n(f,x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{x \in [-1,1]} |\omega(x)|.$$

Primetimo da u poslednjoj nejednakosti nastupa jednakost ako je f polinom

$$f(x) = \frac{M}{(n+1)!}x^{n+1} + c_o x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n,$$

gde su c_i $(i = 0,1,\dots,n)$ proizvoljni realni koeficijenti.

S obzirom da desna strana u nejednakosti (2.2.8) ne zavisi od f, to je

$$\sup_{f\in CM} \max_{x\in[-1,1]} |R_n(f;x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} |\omega(x)|$$

Problem koji smo postavili, očigledno se svodi na odredjivanje polinoma

$$x \mapsto \omega(x) = (x-x_o)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

čije nule leže u $[-1,1]$ i za koji je $\max_{x\in[-1,1]} |\omega(x)|$ minimalan.

Rešenje poslednjeg problema dato je u odeljku 2.2.14 (teorema 2.14.1):

$$\omega(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} \cos[(n+1)\arccos x].$$

Dakle, interpolacioni čvorovi pri kojima veličina (2.2.7) ima najmanju vrednost su nule Čebiševljevog polinoma (n+1)-og stepena T_{n+1}, tj.

(2.2.9) $$x_k = \cos \frac{2k+1}{2(n+1)} \pi \qquad (k = 0,1,\dots,n)$$

Interpolacija kod koje su interpolacioni čvorovi uzeti kao u (2.2.9) naziva se Čebiševljevom interpolacijom.

Razmotrimo sada jedan interesantan slučaj koji se javlja u praksi. Naime, vrlo često kod konstrukcije interpolacionog polinoma $P_n(x)$, umesto sa tačnim ordinatama $f_k = f(x_k)$, prinudjeni smo da radimo sa nekim približnim vrednostima $\tilde{f}_k$ $(k = 0,1,\dots,n)$.

U tom slučaju dobićemo umesto $P_n(x)$, neki polinom $\tilde{P}_n(x)$, pri čemu važi

$$\tilde{P}_n(x) - P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\tilde{f}_k - f_k) L_k(x).$$

Ako je maksimalna apsolutna greška u ordinatama ε, tj. ako je $\max\limits_{0\leq k\leq n} |\tilde{f}_k - f_k| \leq \varepsilon$, na osnovu prethodnog imamo

$$(2.2.10) \qquad |\tilde{P}_n(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|.$$

Ove greške dolaze do izražaja ako je n dovoljno veliko. Ovakav zaključak sleduje na osnovu nejednakosti (G.Faber, S.N.Bernstein):

$$\max_{a\leq x\leq b} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)| \geq \frac{\log(n+1)}{8\sqrt{\pi}}.$$

Kada nije potreban opšti izraz za interpolacioni polinom, već samo vrednost za neko konkretno x, koristi se Aitkenova šema, koja se sastoji u sukcesivnoj primeni sledećih izraza:

$$A_k = f(x_k) \qquad (k = 0,1,\ldots,n);$$

$$A_{k-1,k} = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{vmatrix} A_{k-1} & x_{k-1} - x \\ A_k & x_k - x \end{vmatrix} \qquad (k = 1,\ldots,n);$$

$$\vdots$$

$$A_{0,1,\ldots,n} = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} A_{0,1,\ldots,n-1} & x_0 - x \\ A_{1,2,\ldots,n} & x_n - x \end{vmatrix}$$

pri čemu je

$$P_n(x) = A_{0,1,\ldots,n}.$$

Primer 2.2.4. Odredićemo približno f(27) na osnovu sledećih podataka

x	14	17	31	35
f(x)	68.7	64.0	44.0	39.1

primenom Aitkenove šeme.

Imamo redom

$$A_{0,1} = \frac{1}{17-14}\begin{vmatrix} 68.7 & 14-27 \\ 64.0 & 17-27 \end{vmatrix} = 48.33,$$

$$A_{1,2} = \frac{1}{31-17}\begin{vmatrix} 64.0 & 17-27 \\ 44.0 & 31-27 \end{vmatrix} = 49.72,$$

$$A_{2,3} = \frac{1}{35-31}\begin{vmatrix} 44.0 & 31-27 \\ 39.1 & 35-27 \end{vmatrix} = 48.90,$$

$$A_{0,1,2} = \frac{1}{31-14}\begin{vmatrix} 48.33 & 14-27 \\ 49.72 & 31-27 \end{vmatrix} = 49.39,$$

$$A_{1,2,3} = \frac{1}{35-17}\begin{vmatrix} 49.72 & 17-27 \\ 48.90 & 35-37 \end{vmatrix} = 49.26.$$

Najzad,

$$f(27) \approx P_3(27) = A_{0,1,2,3} = \frac{1}{35-14}\begin{vmatrix} 49.39 & 14-27 \\ 49.26 & 35-27 \end{vmatrix} = 49.31.$$

<u>Primer 2.2.5</u>. Na osnovu vrednosti funkcije $x \mapsto f(x) = e^x$ u tačkama $x_0 = 0.40$ i $x_1 = 0.42$, Aitkenovom šemom odredićemo vrednost ove funkcije za $x = 0.411$. Odgovarajuće vrednosti funkcije u datim tačkama uzećemo sa pet značajnih cifara, tj.

$$f_o = 1.4918 \quad \text{i} \quad f_1 = 1.5220.$$

Imamo

$$e^{0.411} \cong A_{0,1} = \frac{1}{0.42-0.40} \begin{vmatrix} 1.4918 & -0.011 \\ 1.5220 & 0.009 \end{vmatrix} \cong 1.5084.$$

U praksi se često javlja zadatak odredjivanja vrednosti argumenta na osnovu zadate vrednosti funkcije. Ovaj zadatak se rešava metodima inverzne interpolacije.

Ako je data funkcija monotona, zadatak inverzne interpolacije najjednostavnije se rešava medjusobnom zamenom vrednosti funkcije i argumenta, a zatim konstrukcijom interpolacionog polinoma.

Primer 2.2.6. Odredimo približno nulu funkcije f, čije su vrednosti date u primeru 2.2.1. Lagrange-ov interpolacioni polinom za funkciju $y \mapsto f^{-1}(y)$ je

$$P_3(y) = (-1)\frac{(y-2)(y-10)(y-35)}{(-1-2)(-1-10)(-1-35)} + 0\frac{(y+1)(y-10)(y-35)}{(2+1)(2-10)(2-35)}$$

$$+ 2\frac{(y+1)(y-2)(y-35)}{(10+1)(10-2)(10-35)} + 3\frac{(y+1)(y-2)(y-10)}{(35+1)(35-2)(35-10)},$$

odakle, za $y = 0$, dobijamo nulu funkcije f

$$x \simeq P_3(0) = -0.6508.$$

Primedba 2.2.1. U problemima inverzne interpolacije pogodno je koristiti se Aitkenovim metodom.

6.2.3. Newtonova interpolacija sa podeljenim razlikama

Za funkciju f datu svojim vrednostima $f_k \equiv f(x_k)$ u tačkama x_k $(k = 0,1,\ldots,n)$, definisaćemo najpre podeljene razlike.

Definicija 2.3.1. Količnik

$$\frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}$$

naziva se podeljena razlika prvog reda (funkcije f u tačkama x_o i x_1) i označava sa $[x_o, x_1; f]$.

Podeljena razlika reda r definiše se rekurzivno pomoću

$$[x_o, x_1, \ldots, x_r; f] = \frac{[x_1, \ldots, x_r, f] - [x_o, \ldots, x_{r-1}, f]}{x_r - x_o}, \tag{2.3.1}$$

pri čemu je $[x; f] \equiv f(x)$.

Relacija (2.3.1) omogućava konstrukciju tablice podeljenih razlika

$$\begin{array}{llllll}
x_o & f_o & & & & \\
 & & [x_o, x_1; f] & & & \\
x_1 & f_1 & & [x_o, x_1, x_2; f] & & \\
 & & [x_1, x_2; f] & & [x_o, x_1, x_2, x_3; f] & \\
x_2 & f_2 & & [x_1, x_2, x_3; f] & & \\
 & & [x_2, x_3; f] & & & \\
x_3 & f_3 & & & & \\
\vdots & \vdots & & & &
\end{array}$$

Može se pokazati da podeljena razlika reda r ima osobinu linearnosti, tj. da je

$$[x_o, x_1, \ldots, x_r; c_1 f + c_2 g] = c_1 [x_o, \ldots, x_r; f] + c_2 [x_o, \ldots, x_r; g],$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

Kako je, na osnovu definicije 2.3.1,

$$[x_o, x_1; f] = \frac{f(x_o)}{x_o - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_o},$$

indukcijom se lako pokazuje da važi formula

$$[x_o,x_1,\ldots,x_r;f] = \sum_{i=0}^{r} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)},$$

gde je $\omega(x) = (x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_r)$.

Matematičkom indukcijom se takodje može dokazati sledeći rezultat:

Teorema 2.3.1. Neka $f \in C^n[a,b]$ i neka je ispunjen uslov (2.2.1). Tada, za svako $r \leq n$, važi formula

$$[x_o,x_1,\ldots,x_r;f] = \int_o^1 \int_o^{t_1} \ldots \int_o^{t_{r-1}} f^{(r)}\Big(x_o + \sum_{i=1}^{r} (x_i-x_{i-1})t_i\Big)dt_1dt_2\ldots dt_r$$

Primedba 2.3.1. Primenjujući teoremu o srednjoj vrednosti integrala, iz poslednje jednakosti sleduje

$$[x_o,x_1,\ldots,x_r;f] = f^{(r)}(\xi) \int_o^1 \int_o^{t_1} \ldots \int_o^{t_{r-1}} dt_1dt_2\ldots dt_r$$

$$= \frac{1}{r!} f^{(r)}(\xi) \qquad (a < \xi < b).$$

Uzimajući u poslednjoj jednakosti da $x_i \to x_o$ $(i=1,\ldots,r)$ zaključujemo da

(2.3.2) $$[x_o,x_1,\ldots,x_r;f] \to \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_o).$$

Izrazićemo sada vrednost funkcije $f(x_r)$ $(r \leq n)$ pomoću podeljenih razlika $[x_o,\ldots,x_i;f]$ $(i=0,1,\ldots,r)$.

Za $r=1$, na osnovu definicije 2.3.1. imamo

$$f(x_1) = f(x_o) + (x_1-x_o)\ [x_o,x_1;f].$$

Slično je, za $r=2$,

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(x_1) + (x_2-x_1)\ [x_1,x_2;f] \\ &= (f(x_o)+(x_1-x_o)[x_o,x_1;f])+(x_2-x_1)([x_o,x_1;f] + \\ &+ (x_2-x_o)[x_o,x_1,x_2;f]), \end{aligned}$$

tj. , $f(x_2) = f(x_o)+(x_2-x_o)[x_o,x_1;f]+(x_2-x_o)(x_2-x_1)[x_o,x_1,x_2;f]$.

U opštem slučaju važi

(2.3.3)
$$f(x_r) = f(x_o)+(x_r-x_o)[x_o,x_1;f]+(x_r-x_o)(x_r-x_1)[x_o,x_1,x_2;f]$$
$$+\dots+(x_r-x_o)(x_r-x_1)\dots(x_r-x_{r-1})[x_o,x_1,\dots,x_r;f].$$

Korišćenjem podeljenih razlika može se konstruisati interpolacioni polinom za skup podataka $(x_k,f(x_k))$ $(k=0,\dots,n)$. Naime, ovaj polinom ima oblik

$$P_n(x) = f(x_o)+(x-x_o)[x_o,x_1;f]+(x-x_o)(x-x_1)[x_o,x_1,x_2;f]$$
$$+\dots+(x-x_o)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})[x_o,x_1,\dots,x_n;f]$$

i naziva se Newtonov interpolacioni polinom.

Da bismo dokazali poslednju formulu dovoljno je primetiti da je $\deg(P_n(x)) \leq n$ i da je $P_n(x_r) = f(x_r)$ $(r = 0,1,\dots,n)$. Poslednje tvrdjenje sleduje iz (2.3.3).

S obzirom na jedinstvenost algebarskog interpolacionog polinoma zaključujemo da je Newtonov interpolacioni polinom ekvivalentan sa Lagrangeovim. Primetimo da konstrukcija Newtonovog interpolacionog polinoma zahteva prethodno formiranje tablice podeljenih razlika, što nije bio slučaj kod Lagrange ove interpolacije. S druge strane, kada hoćemo da smanjimo grešku u interpolaciji uvodjenjem novog interpolacionog čvora, Newton ov polinom je znatno pogodniji od Lagrange ovog , jer ne zahteva ponavljanje celog računskog postupka. Naime, kod Newtonove interpolacije imamo

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x-x_o)(x-x_1)\dots(x-x_n)[x_o,x_1,\dots,x_{n+1};f].$$

<u>Teorema 2.3.2.</u> Ako funkcija f ima konačne vrednosti u tačkama $x_o,x_1,\dots,x_n,x$, važi formula

(2.3.4)
$$R_n(x;f) = f(x)-P_n(x) = \omega(x)[x_o,x_1,\dots,x_n,x;f],$$

gde je $\omega(x) = (x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

Dokaz. Stavimo $r=n+1$ i $x_r=x$. Tada iz (2.3.3) sleduje

$$f(x)=P_n(x)+(x-x_o)\ldots(x-x_n)[x_o,x_1,\ldots,x_n,x;f],$$

čime je dokaz završen.

Primedba 2.3.2. Kako je na osnovu primedbe 2.3.1

$$[x_o,x_1,\ldots,x_n,x;f] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad (a<\xi<b),$$

ostatak (2.3.4) se može svesti na Lagrangeov oblik.

Primedba 2.3.3. Ako u Newtonovom interpolacionom polinomu P_n uzmemo da $x_i \to x_o$ $(i=1,\ldots,n)$, na osnovu (2.3.2) zaključujemo da se on svodi na Taylorov polinom.

Primer 2.3.1. Na osnovu vrednosti funkcije $x \mapsto \text{ch}\, x$

k	0	1	2	3
x_k	0.0	0.2	0.5	1.0
$f(x_k)$	1.0000000	1.0200668	1.1276260	1.5430806

imamo sledeću tablicu podeljenih razlika

k	$[x_k,x_{k+1};f]$	$[x_k,x_{k+1},x_{k+2};f]$	$[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3};f]$
0	0.1003338		
1	0.3585307	0.5163938	0.0740795
2	0.8309093	0.5904733	
3			

odakle je Newtonov interpolacioni polinom

$$P_3(x) = 1. + 0.1003338x + 0.5163938x(x-0.2) + 0.0740795x(x-0.2)(x-0.5).$$

Na primer, za $x = 0.3$, imamo

$$\operatorname{ch} 0.3 \cong P_3(0.3) = 1.0451474.$$

Dobijeni rezultat je tačan na prve tri decimale.

6.2.4. Račun konačnih razlika

U ranijem izlaganju (videti odeljak 1.3.1) koristili smo se operatorom konačne razlike, definisanog na skupu funkcija sa

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \qquad (h = \text{const} > 0), \tag{2.4.1}$$

a na skupu nizova pomoću

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k.$$

Ako se eksplicitno želi istaći korak h u definiciji (2.4.1), tada se u oznaci operatora u indeksu piše h, tj. Δ_h.

U odeljku 1.3.1 takodje smo videli kako se definiše iterirani operator, tj. stepen operatora Δ. Naime,

$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x) \qquad (k \in N),$$

$$\Delta^o f(x) = f(x).$$

Na osnovu ove definicije, matematičkom indukcijom, lako se dokazuju formule

$$\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f(x+(k-i)h), \tag{2.4.2}$$

$$f(x+kh) = \sum_{i=o}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i f(x). \tag{2.4.3}$$

Pored operatora Δ, u numeričkoj analizi, uvodi se još nekoliko standardnih operatora, koji se nazivaju operatori konačne razlike ili diferencni operatori. Sa ovim operatorima sprovodi se formalni račun zasnovan na pravilima algebre i analize, i kao takav se često pokazuje kao elegantno sredstvo za formiranje raznih aproksimacionih formula. Ovaj račun naziva se račun konačnih razlika.

Na skupu neprekidnih funkcija definisaćemo operatore:

1° $Ef(x) = f(x+h)$ (operator pomeranja),

2° $\Delta f(x) = f(x+h)-f(x)$ (operator prednje razlike),

3° $\nabla f(x) = f(x)-f(x-h)$ (operator zadnje razlike),

4° $\delta f(x) = f(x+\frac{h}{2})-f(x-\frac{h}{2})$ (operator centralne razlike),

5° $\mu f(x) = \frac{1}{2}(f(x+\frac{h}{2})+f(x-\frac{h}{2}))$ (operator usrednjavanja),

6° $1f(x) = f(x)$ (identički operator),

7° $Jf(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$ (operator integracije).

Na skupu diferencijabilnih funkcija definišimo i operator

8° $Df(x) = f'(x)$ (operator diferenciranja).

Reći ćemo da su dva operatora A i B jednaka ako je $Af(x) = Bf(x)$ za svaku funkciju f za koju su operatori A i B definisani.

Jedan od osnovnih problema koji se nameće je nalaženje veza izmedju pojedinih operatora. Pre nego što predjemo na rešavanje ovog problema, ukazaćemo na neke opšte osobine.

Sa L označimo skup prethodno definisanih operatora, tj.

$$L = \{E, \Delta, \nabla, \delta, \mu, 1, D, J\}.$$

a) Svaki operator $A \in L$ je linearan, tj. važi

$$A(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 Af(x) + \lambda_2 Ag(x),$$

za svako realno λ_1 i λ_2 i svako f i g iz domena definisanosti operatora A.

b) Za $A, B \in L$, važi komutativnost $AB = BA$, tj.

$$A(Bf(x)) = B(Af(x)).$$

c) Ako operator $A \in L$ ima inverzni operator A^{-1}, tada je

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1.$$

Primer 2.4.1. Dokažimo osobinu b), na primer, za operatore Δ i E. Imamo

$$\Delta(Ef(x)) = \Delta(f(x+h)) = f(x+2h) - f(x+h) = Ef(x+h) - Ef(x)$$

$$= E(f(x+h) - f(x)) = E(\Delta f(x)).$$

Primer 2.4.2. Neka je $g(x) = Ef(x) = f(x+h)$. Tada je $f(x) = g(x-h)$, tj. $f(x) = E^{-1}g(x)$. Dakle, operator E^{-1} je pomerajući unazad.

Ako definišemo zbir operatora $C = A + B$ pomoću

$$Cf(x) = (A+B)f(x) = Af(x) + Bf(x),$$

važe pravila

$$A + B = B + A,$$

$$A(B+C) = AB + AC,$$

$$(A+B) + C = A + (B+C).$$

Kako je $E^k f(x) = E(E^{k-1}f(x)) = f(x+kh)$ $(k \in N)$, tj. kako iterirani operator E^k primenjen na $f(x)$ daje $f(x+kh)$, logično se nameće definisanje stepena operatora za proizvoljni izložilac sledećom jednakošću

$$E^p f(x) = f(x + ph) \qquad (p \in R).$$

Predjimo sada na utvrdjivanje formalnih veza izmedju pojedinih operatora.

11. $\quad E^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{8}\delta^2 + \ldots .$

6.2.5. Newtonove interpolacione formule

Primenom računa konačnih razlika mogu se izvesti različite interpolacione formule u ekvidistantnim čvorovima. U ovom odeljku daćemo samo Newtonove interpolacione formule.

Neka je funkcija f data na $[a,b]$ parovima vrednosti (x_k, f_k), gde je $f_k = f(x_k)$ i $x_k = x_o + kh \quad (k = 0,1,\ldots,n)$.

Za dati skup podataka može se formirati tablica konačnih razlika. Na sl. 2.5.1 data je tablica formirana primenom operatora Δ.

$$
\begin{array}{cccccc}
x_o & f_o & & & & \\
 & & \Delta f_o & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_o & & \\
 & & \Delta f_1 & & \Delta^3 f_o & \\
x_2 & f_2 & & \Delta^2 f_1 & & \Delta^4 f_o \\
 & & \Delta f_2 & & \Delta^3 f_1 & \\
x_3 & f_3 & & \Delta^2 f_2 & & \\
 & & \Delta f_3 & & & \\
x_4 & f_4 & & & & \\
\vdots & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Sl. 2.5.1

Neka je $x = x_o + ph \quad (0 \leqq p \leqq n)$, tj. $p = \frac{x - x_o}{h}$. Kako je

$$E^p = (1 + \Delta)^p = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p}{k} \Delta^k ,$$

imamo

$$E^p f_o = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p}{k} \Delta^k f_o = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \Delta^k f_o + R_n \; (f;x),$$

tj.

$$(2.5.1) \qquad f(x_o+ph) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \Delta^k f_o + R_n(f;x),$$

gde je ostatak $R_n \equiv R_n(f;x)$, s obzirom na jedinstvenost interpolacionog polinoma, isti kao kod Lagrange ove interpolacione formule, tj.

$$R_n(f;x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} p(p-1)\ldots(p-n) f^{(n+1)}(\xi),$$

gde je ξ tačka iz intervala (x_o, x_n).

Polinom

$$(2.5.2) \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \Delta^k f_o \qquad (ph = x-x_o),$$

dobijen na ovaj način, naziva se prvi Newton ov interpolacioni polinom. Primetimo da se ovaj polinom može definisati i rekurzivno pomoću

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + \binom{p}{k} \Delta^k f_o \qquad (k=1,\ldots,n),$$

polazeći od $P_o(x) = f_o$.

Polinom (2.5.2) se može predstaviti i u razvijenom obliku

$$P_n(x) = f_o + p\Delta f_o + \frac{p(p-1)}{2!} \Delta^2 f_o + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!} \Delta^n f_o,$$

tj.

$$P_n(x) = f_o + \frac{\Delta f_o}{h}(x-x_o) + \frac{\Delta^2 f_o}{2!h^2}(x-x_o)(x-x_1) + \ldots$$

$$+ \frac{\Delta^n f_o}{n!h^n}(x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Prvi Newton ov interpolacioni polinom se koristi u slučajevima kada se interpolacija izvodi na početku intervala, tj.

u okolini tačke x_o. Ako se koristi za približno izračunavanje vrednosti funkcije f za $x<x_o$, kažemo da se radi o ekstrapolaciji funkcije.

Formirajmo sada tablicu konačnih razlika, koristeći se operatorom ∇ (sl. 2.5.2).

$$
\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & & & & \\
x_{n-4} & f_{n-4} & & & & \\
 & & \nabla f_{n-3} & & & \\
x_{n-3} & f_{n-3} & & \nabla^2 f_{n-2} & & \\
 & & \nabla f_{n-2} & & \nabla^3 f_{n-1} & \\
x_{n-2} & f_{n-2} & & \nabla^2 f_{n-1} & & \nabla^4 f_n \\
 & & \nabla f_{n-1} & & \nabla^3 f_n & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \nabla^2 f_n & & \\
 & & \nabla f_n & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array}
$$

Sl. 2.5.2

Neka je $x = x_n + ph$ $(0 \leqq -p \leqq n)$, tj. $p = \frac{x-x_n}{h}$. Kako je

$$E^p = (1-\nabla)^{-p} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{-p}{k} \nabla^k$$

dobijamo

$$f(x_n + ph) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{-p}{k} \nabla^k f_n$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+k-1)}{k!} \nabla^k f_n .$$

Za $f(x_n + ph)$ često se koristi oznaka f_{n+p}.

Koristeći se razlikama zaključno sa redom n, na osnovu poslednje jednakosti dobijamo drugu Newtonovu interpolacionu formulu

$$P_n(x) = f_n + p\nabla f_n + \frac{p(p+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \ldots + \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!} \nabla^n f_n ,$$

tj.

$$P_n(x) = f_n + \frac{\nabla f_n}{h}(x-x_n) + \frac{\nabla^2 f_n}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \ldots$$

$$+ \frac{\nabla^n f_n}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1),$$

pri čemu se ostatak može izraziti u obliku

$$R_n(f;x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\, p(p+1)\ldots(p+n) f^{(n+1)}(\xi) \qquad (\xi \in [x_o, x_n]).$$

Primer 2.5.1. Nadjimo prvi i drugi Newtonov interpolacioni polinom za skup podataka $\{(x_k, f_k)\} = \{(-1,-3),(0,-5),(1,1),(2,21)\}$.

Na osnovu tablice, formirane pomoću operatora Δ,

x_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
-1	-3			
		-2		
0	-5		8	
		6		6
1	1		14	
		20		
2	21			

nalazimo prvi Newtonov interpolacioni polinom

$$P_3(x) = -3 + (-2)(x+1) + \frac{8}{2}(x+1)(x-0) + \frac{6}{3!}(x+1)(x-0)(x-1)$$

$$= x^3 + 4x^2 + x - 5.$$

Primetimo da su zaokruženi elementi u tablici korišćeni za konstrukciju ovog polinoma.

S obzirom da je

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1} = \Delta f_{k-1}, \quad \nabla^2 f_k = \Delta^2 E^{-2} f_k = \Delta^2 f_{k-2}, \quad \nabla^3 f_k = \Delta^3 f_{k-3},$$

zaključujemo da nije potrebno formirati tablicu pomoću operatora ∇, jer je identična sa prethodno dobijenom tablicom, u kojoj treba samo izvršiti pomeranje indeksa. Drugi Newtonov interpolacioni polinom ima oblik

$$P_3(x) = 21+20(x-2)+\frac{14}{2}(x-2)(x-1)+\frac{6}{3!}(x-2)(x-1)(x-0).$$

Na kraju proučimo kako se slučajna greška u vrednosti funkcije u nekom od interpolacionih čvorova manifestuje u tablici konačnih razlika. Neka je, na primer, umesto vrednosti f_k uzeta vrednost $f_k+\varepsilon$. Tablica dobijena primenom operatora Δ data je na sl. 2.5.3.

x_{k-4}	f_{k-4}				
		Δf_{k-4}			
x_{k-3}	f_{k-3}		$\Delta^2 f_{k-4}$		
		Δf_{k-3}		$\Delta^3 f_{k-4}$	
x_{k-2}	f_{k-2}		$\Delta^2 f_{k-3}$		$\Delta^4 f_{k-4}+\varepsilon$
		Δf_{k-2}		$\Delta^3 f_{k-3}+\varepsilon$	
x_{k-1}	f_{k-1}		$\Delta^2 f_{k-2}+\varepsilon$		$\Delta^4 f_{k-3}-4\varepsilon$
		$\Delta f_{k-1}+\varepsilon$		$\Delta^3 f_{k-2}-3\varepsilon$	
x_k	$f_k+\varepsilon$		$\Delta^2 f_{k-1}-2\varepsilon$		$\Delta^4 f_{k-2}+6\varepsilon$
		$\Delta f_k-\varepsilon$		$\Delta^3 f_{k-1}+3\varepsilon$	
x_{k+1}	f_{k+1}		$\Delta^2 f_k+\varepsilon$		$\Delta^4 f_{k-1}-4\varepsilon$
		Δf_{k+1}		$\Delta^3 f_k-\varepsilon$	
x_{k+2}	f_{k+2}		$\Delta^2 f_{k+1}$		$\Delta^4 f_k+\varepsilon$
		Δf_{k+2}		$\Delta^3 f_{k+1}$	
x_{k+3}	f_{k+3}		$\Delta^2 f_{k+2}$		
		Δf_{k+3}			
x_{k+4}	f_{k+4}				

Sl. 2.5.3

Na osnovu ove tablice, možemo zaključiti da greška koja se pojavila u vrednosti f_k čini pogrešnim razlike

$$\Delta f_{k-1}, \quad \Delta f_k .$$

$$\Delta^2 f_{k-2},\quad \Delta^2 f_{k-1},\quad \Delta^2 f_k,$$

$$\Delta^3 f_{k-3},\quad \Delta^3 f_{k-2},\quad \Delta^3 f_{k-1},\quad \Delta^3 f_k,\ \text{itd.}$$

Štaviše, greška u razlici $\Delta^m f_{k-m+i}$ $(i=0,1,\ldots,m)$ je $\binom{m}{i}(-1)^i\varepsilon$.

Znajući ovaj zakon rasprostiranja greške u tablici konačnih razlika, moguće je, u nekim slučajevima, naći izvor greške i otkloniti ga (videti [15]).

Sa numeričkog stanovišta Newtonovi interpolacioni polinomi nisu naročito pogodni, pa se u praksi koriste uglavnom interpolacioni polinomi sa centralnim razlikama.

6.2.6. Interpolacione formule sa centralnim razlikama

U ovom odeljku razmotrićemo jednu opštu klasu interpolacionih formula, koja kao partikularne slučajeve sadrži Newtonove interpolacione formule.

Neka je funkcija f tabelirana na skupu tačaka

$$G_m = \{x_o-mh,\ldots,x_o-2h,\ x_o-h,\ x_o,x_o+h,x_o+2h,\ldots,x_o+mh\},$$

gde je m fiksiran prirodan broj i $h=\text{const}>0$. Sa f_k označimo vrednost funkcije u tački $x_k = x_o + kh$ $(k=0,\ \pm1,\ldots,\ \pm m)$.

Tablicu koja sadrži sve moguće razlike (diference) funkcije f na skupu G_m nazivaćemo centralnom tablicom razlika (diferenci). Tako na skupu G_3 imamo sledeće centralne tablice:

1^o Centralnu tablicu prednjih razlika (sl. 2.6.1),

2^o Centralnu tablicu centralnih razlika (sl. 2.6.2).

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_{-3} & f_{-3} & & & & & & \\
 & & \Delta f_{-3} & & & & & \\
x_{-2} & f_{-2} & & \Delta^2 f_{-3} & & & & \\
 & & \Delta f_{-2} & & \Delta^3 f_{-3} & & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \Delta^2 f_{-2} & & \Delta^4 f_{-3} & & \\
 & & \Delta f_{-1} & & \Delta^3 f_{-2} & & \Delta^5 f_{-3} & \\
x_0 & f_0 & & \Delta^2 f_{-1} & & \Delta^4 f_{-2} & & \Delta^6 f_{-3} \\
 & & \Delta f_0 & & \Delta^3 f_{-1} & & \Delta^5 f_{-2} & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \Delta^4 f_{-1} & & \\
 & & \Delta f_1 & & \Delta^3 f_0 & & & \\
x_2 & f_2 & & \Delta^2 f_1 & & & & \\
 & & \Delta f_2 & & & & & \\
x_3 & f_3 & & & & & &
\end{array}
$$

Sl. 2.6.1

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_{-3} & f_{-3} & & & & & & \\
 & & \delta f_{-5/2} & & & & & \\
x_{-2} & f_{-2} & & \delta^2 f_{-2} & & & & \\
 & & \delta f_{-3/2} & & \delta^3 f_{-3/2} & & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \delta^2 f_{-1} & & \delta^4 f_{-1} & & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{-1/2} & & \delta^5 f_{-1/2} & \\
x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 & & \delta^4 f_0 & & \delta^6 f_0 \\
 & & \delta f_{1/2} & & \delta^3 f_{1/2} & & \delta^5 f_{1/2} & \\
x_1 & f_1 & & \delta^2 f_1 & & \delta^4 f_1 & & \\
 & & \delta f_{3/2} & & \delta^3 f_{3/2} & & & \\
x_2 & f_2 & & \delta^2 f_2 & & & & \\
 & & \delta f_{5/2} & & & & & \\
x_3 & f_3 & & & & & &
\end{array}
$$

Sl. 2.6.2

Imajući u vidu jednakosti

$$\Delta^r f_k = \nabla^r E^r f_k = \nabla^r f_{k+r}\,, \quad \Delta^r f_k = \delta^r E^{r/2} f_k = \delta^r f_{k+r/2} \quad (r=1,2,\ldots),$$

vidimo da se iz tablice prednjih razlika lako dolazi do tablice zadnjih razlika, ili tablice centralnih razlika, prostim pomeranjem indeksa.

Ako uvedemo smenu $x=x_0+ph$ i stavimo $f_p = f(x)$, prva Newtonova interpolaciona formula (2.5.1) se može predstaviti kao

(2.6.1) $$f_p = f_o + \binom{p}{1}\Delta f_o + \binom{p}{2}\Delta^2 f_o + \binom{p}{3}\Delta^3 f_o + \ldots,$$

a pomoću operatora centralne razlike u obliku

$$f_p = f_o + \binom{p}{1}\delta f_{1/2} + \binom{p}{2}\delta^2 f_1 + \binom{p}{3}\delta^3 f_{3/2} + \ldots$$

Posmatrajmo opšti član $\binom{p}{q}\Delta^q f_o$ u formuli (2.6.1). Medjusobnim množenjem jednakosti

$$\binom{p}{q} = \binom{p+1}{q+1} - \binom{p}{q+1} \quad \text{i} \quad \Delta^q f_{k+1} - \Delta^q f_k = \Delta^{q+1} f_k,$$

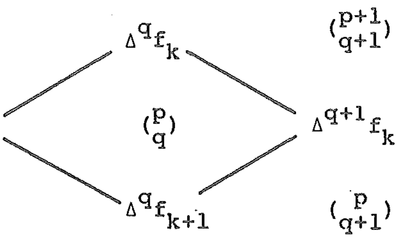
dobijamo

$$\binom{p}{q}\Delta^q f_{k+1} - \binom{p}{q}\Delta^q f_k = \binom{p+1}{q+1}\Delta^{q+1} f_k - \binom{p}{q+1}\Delta^{q+1} f_k,$$

tj.

(2.6.2) $$\binom{p}{q}\Delta^q f_{k+1} + \binom{p}{q+1}\Delta^{q+1} f_k = \binom{p}{q}\Delta^q f_k + \binom{p+1}{q+1}\Delta^{q+1} f_k.$$

Poslednjoj jednakosti može se pridružiti dijagram



koji se naziva romboidni dijagram. Smisao ovog pridruživanja je da se kretanjem od krajnjeg levog do krajnjeg desnog temena romba po bilo kojoj grani (gornjoj ili donjoj), uz usputno "težinsko" sabiranje veličina na koje nailazimo, dobija isti rezultat. Član koji uzimamo u zbir formiramo na sledeći način:

Ako krećući se po grani romboidnog dijagrama naidjemo na diferencu dolazeći po uzlaznoj (silaznoj) putanji, tada tu diferencu množimo binomnim koeficijentom koji se nalazi ispod (iznad) te putanje. Tako putanji

$$\begin{array}{cccc} & \Delta^q f_k & & \binom{p+1}{q+1} \\ \diagup & & \diagdown & \\ & \binom{p}{q} & & \Delta^{q+1} f_k \end{array}$$

odgovara zbir $\binom{p}{q}\Delta^q f_k + \binom{p+1}{q+1}\Delta^{q+1} f_k$.

Od opisanih rombova moguće je sastaviti romboidnu mrežu (sl. 2.6.3).

Osim uzlaznih i silaznih putanja mogu se formirati i horizontalne putanje, na primer,

$$1,\ \Delta f_o,\ \binom{p}{2},\ \Delta^3 f_{-1}, \ldots$$

Ako se krećemo po takvoj putanji član koji se uzima u zbir jednak je proizvodu odgovarajućeg člana na koji se naidje na putanji i aritmetičke sredine članova iznad i ispod njega. Tako za prethodno navedenu putanju imamo zbir

$$\frac{1}{2}(f_o + f_1) + \frac{1}{2}\left[\binom{p}{1} + \binom{p-1}{1}\right]\Delta f_o + \frac{1}{2}\binom{p}{2}(\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_o) + \ldots .$$

Svakoj putanji u romboidnoj mreži odgovara jedna interpolaciona formula. Prvoj Newtonovoj formuli odgovara putanja

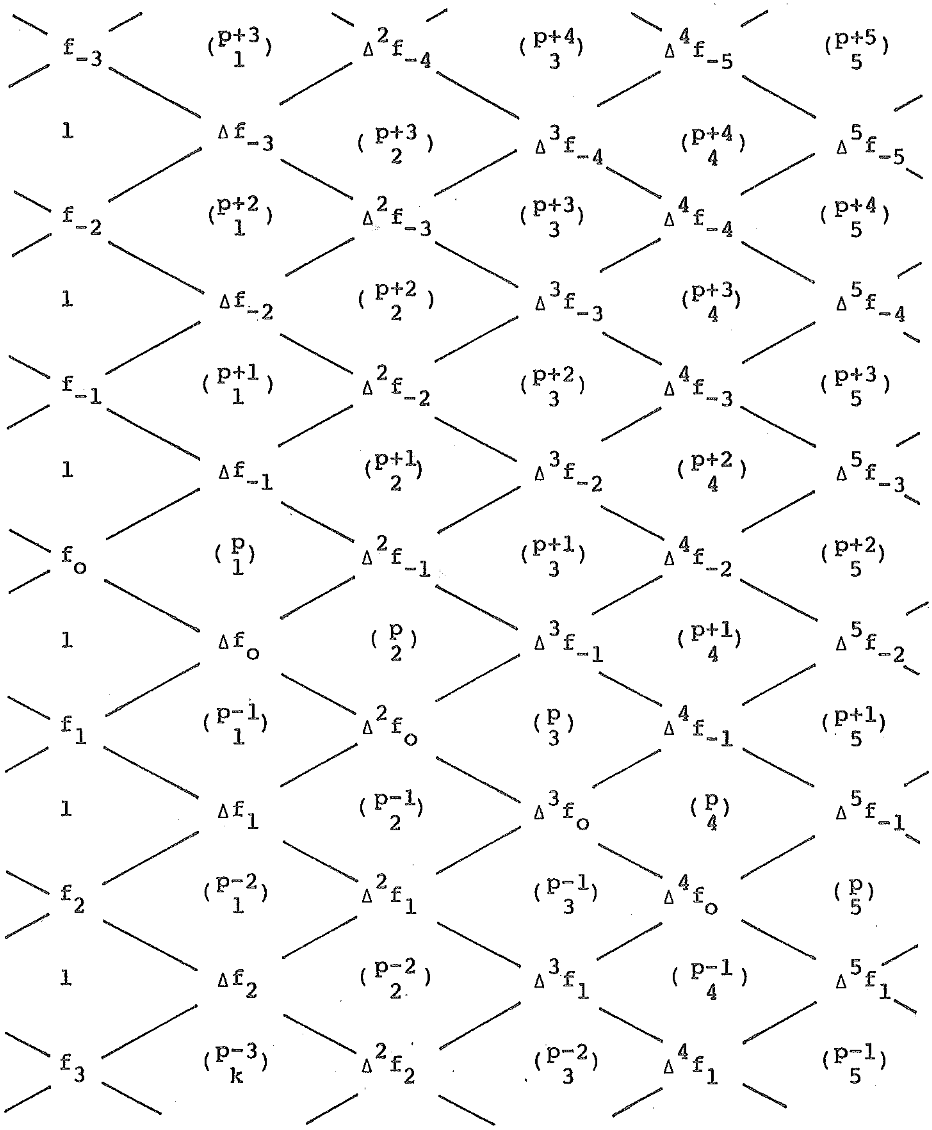
$$f_o,\ \Delta f_o,\ \Delta^2 f_o,\ \Delta^3 f_o, \ldots . \tag{2.6.3}$$

Sa numeričkog stanovišta, za interpolaciju funkcije u tački x, pogodne su interpolacione formule koje koriste informaciju o vrednostima funkcije u interpolacionim čvorovima koji se nalaze, kako ispred, tako i iza vrednosti x, što nije bio slučaj sa Newtonovim formulama.

U daljem tekstu dajemo pregled važnijih interpolacionih formula:

1^o Prva Newtonova interpolaciona formula odgovara putanji (2.6.3) i data je pomoću (2.6.1).

2^o Druga Newtonova interpolaciona formula odgovara putanji



Sl. 2.6.3

$$f_o,\ \Delta f_{-1},\ \Delta^2 f_{-2},\ \Delta^3 f_{-3},\ldots$$

i data je pomoću

$$f_p = f_o + \binom{p}{1}\Delta f_{-1} + \binom{p+1}{2}\Delta^2 f_{-2} + \binom{p+2}{3}\Delta^3 f_{-3} + \ldots ,$$

Primetimo da je ovde drugi Newtonov polinom konstruisan u tački x_o, a ne u x_n kao u odeljku 6.2.5.

3° Prva Gaussova interpolaciona formula odgovara putanji

$$f_o,\ \Delta f_o,\ \Delta^2 f_{-1},\ \Delta^3 f_{-1}\ \ \Delta^4 f_{-2},\dots$$

i data je pomoću

$$f_p = f_o + \binom{p}{1}\Delta f_o + \binom{p}{2}\Delta^2 f_{-1} + \binom{p+1}{3}\Delta^3 f_{-1} + \binom{p+1}{4}\Delta^4 f_{-2} + \dots\ .$$

4° Druga Gaussova interpolaciona formula odgovara putanji

$$f_o,\ \Delta f_{-1},\ \Delta^2 f_{-1},\ \Delta^3 f_{-2},\ \Delta^4 f_{-2},\dots$$

i može se predstaviti u obliku

$$f_p = f_o + \binom{p}{1}\Delta f_{-1} + \binom{p+1}{2}\Delta^2 f_{-1} + \binom{p+1}{3}\Delta^3 f_{-2} + \binom{p+2}{4}\Delta^4 f_{-2} + \dots\ .$$

5° Stirlingova interpolaciona formula odgovara putanji

$$f_o,\ \binom{p}{1},\ \Delta^2 f_{-1},\ \binom{p+1}{3},\ \Delta^4 f_{-2},\dots$$

i shodno ranije datim pravilima može se predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} f_p = {} & f_o + \frac{1}{2}(\Delta f_{-1} + \Delta f_o)\binom{p}{1} + \frac{1}{2}\left(\binom{p+1}{2} + \binom{p}{2}\right)\Delta^2 f_{-1} \\ & + \frac{1}{2}(\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1})\binom{p+1}{3} + \left(\binom{p+2}{4} + \binom{p+1}{4}\right)\Delta^4 f_{-2} + \dots\ . \end{aligned}$$

Primetimo da se Stirlingova formula dobija kao aritmetička sredina prve i druge Gaussove interpolacione formule.

6° Besselova interpolaciona formula odgovara horizontalnoj putanji

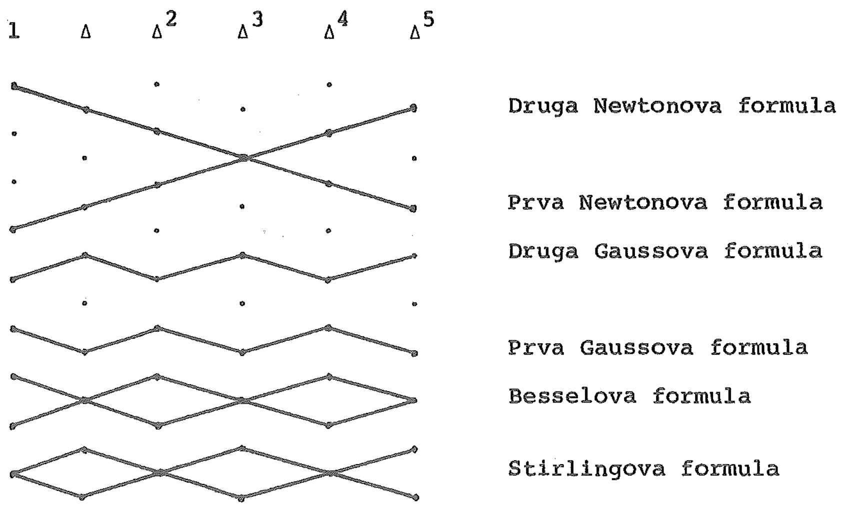
$$1,\ \Delta f_o,\ \binom{p}{2},\ \Delta^3 f_{-1},\ \binom{p+1}{4},\ldots$$

i ima oblik

$$f_p = \frac{1}{2}(f_o+f_1) + \frac{1}{2}\left(\binom{p}{1} + \binom{p-1}{1}\right)\Delta f_o + \frac{1}{2}(\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_o)\binom{p}{2}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\binom{p+1}{3} + \binom{p}{3}\right)\Delta^3 f_{-1} + \frac{1}{2}(\Delta^4 f_{-2} + \Delta^4 f_{-1})\binom{p+1}{4} + \ldots .$$

Na sl. 2.6.4 navedene su putanje ovih interpolacionih formula.



Sl. 2.6.4

Za interpolaciju funkcija najčešće se koristi Stirlingova i Besselova formula. Stirlingova formula se koristi kada je $|p| \leq 0.25$, a Besselova kada je $0.25 \leq |p| \leq 0.75$.

6.2.7. Konvergencija interpolacionih procesa

U ovom odeljku ćemo izneti neke rezultate koji se odnose na konvergenciju interpolacionog polinoma P_n ka funkciji f na segmentu $[a,b]$, kada $n\to+\infty$.

Definicija 2.7.1. Kažemo da je na segmentu $[a,b]$ zadat interpolacioni proces ako je data beskonačna trougaona matrica čvorova

$$
\text{(2.7.1)} \qquad X = \begin{bmatrix} x_0^{(0)} & & & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}
$$

takva da se u svakoj njenoj vrsti nalaze različite tačke segmenta $[a,b]$, tj. da je

$$
a \leqq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqq b.
$$

Uzimajući jednu vrstu iz matrice X, za svako $f\in C[a,b]$ moguće je formirati, na primer, Lagrangeov interpolacioni polinom stepena ne višeg od n,

$$
\text{(2.7.2)} \qquad P_n(x) = P_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^{(n)})L_{n,k}(x),
$$

gde su

$$
L_{n,k}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k^{(n)})\omega_n'(x_k^{(n)})}, \quad \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k^{(n)}).
$$

Definicija 2.7.2. Interpolacioni proces, dat pomoću (2.7.1), konvergira ka funkciji f u tački $x\in[a,b]$, ako je $\lim_{n\to+\infty} P_n(f;x) = f(x)$. Konvergencija je ravnomerna ako $P_n(f;x)$ konvergira ravnomerno ka $f(x)$ na $[a,b]$.

G.Faber je dokazao sledeći rezultat:

Teorema 2.7.1. Za svaki interpolacioni proces na $[a,b]$ postoji neprekidna funkcija f za koju $P_n(x)$ ne konvergira ravnomerno ka $f(x)$.

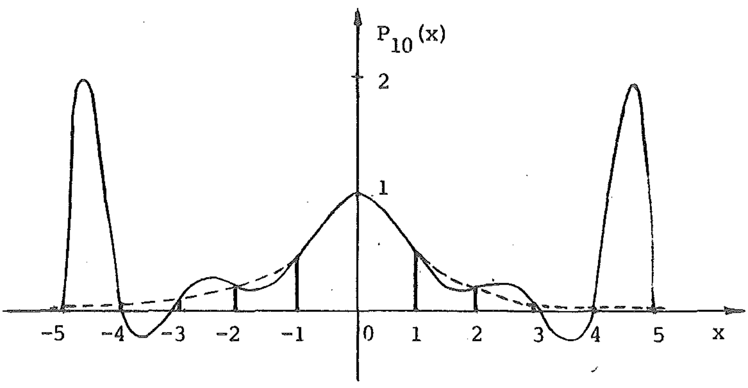
Rezultat se može formulisati i u smislu da ne postoji trougaona matrica čvorova X takva da odgovarajući interpolacioni proces konvergira ravnomerno za svaku neprekidnu funkciju. Medjutim, može se pokazati da se za svaku neprekidnu funkciju na $[a,b]$ može naći trougaona matrica čvorova X takva da odgovarajući interpolacioni proces ravnomerno konvergira. Ovo je rezultat Marcinkiewicza.

Na jedan karakterističan primer, koji je u vezi sa teoremom 2.7.1, ukazao je Runge. Naime, ako je na $[a,b] = [-5,5]$ dat interpolacioni proces sa ekvidistantnim čvorovima

$$x_k^{(n)} = -5 + \frac{10}{n} k \qquad (k = 0,1,\ldots,n),$$

može se pokazati da za $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ imamo

$$\max_{-5 \le x \le 5} |f(x) - P_n(x)| \to +\infty \qquad (n \to +\infty).$$



Sl. 2.7.1

Na sl. 2.7.1 prikazan je interpolacioni polinom za $n = 10$.

Postavlja se pitanje za kakvu će klasu funkcija svaki interpolacioni proces biti konvergentan. Odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 2.7.2. Ako je f cela funkcija, tj. ako je regularna u celoj kompleksnoj ravni C i $f(t) \in R$ za $t \in [a,b]$, tada svaki interpolacioni proces ravnomerno konvergira, tj.

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \to 0 \qquad (n \to +\infty). \tag{2.7.3}$$

Dokaz. Pokažimo najpre da za svako $q > 0$ egzistira neko $c \geq 0$, tako da je za svako $n \in N$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \leq cq^{n+1}. \tag{2.7.4}$$

Jasno je da će konvergencija (2.7.3) biti prisutna, na osnovu (2.7.4), ako izaberemo $q < 1$.

Da bismo dokazali (2.7.4) iskoristićemo tvrdjenje teoreme 2.2.4, pri čemu je sada $G = C$, jer je funkcija f cela. U tom slučaju za proizvoljno izabrano $q > 0$, možemo izabrati konturu Γ tako da je

$$\frac{b-a}{q} \leq r,$$

gde je r rastojanje intervala $[a,b]$ od krive Γ, tj.

$$r = d([a,b], \Gamma) = \min_{\substack{t \in [a,b] \\ z \in \Gamma}} |t - z|.$$

Tada, na osnovu (2.2.6), imamo

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{LM}{2\pi r^{n+2}} |\omega_n(x)|, \tag{2.7.5}$$

gde je L dužina krive Γ i $M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$. Kako je $|\omega_n(x)| \leq (b-a)^{n+1}$ za svako $x \in [a,b]$, na osnovu (2.7.5), zaključujemo da je

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{LM}{2\pi r} \left(\frac{b-a}{r}\right)^{n+1} \leq \frac{LM}{2\pi r} q^{n+1},$$

što znači da (2.7.4) važi ako za c uzmemo $c=\frac{LM}{2\pi r}$. Ovim je dokaz teoreme završen.

U vezi sa konvergencijom interpolacionih procesa su Lebesgueova funkcija i Lebesgueova konstanta. Pomoću svake vrste matrice (2.7.1) može da se definiše operator $P_n : C[a,b] \to C[a,b]$, pomoću $P_n f = P_n(f;x)$. Dakle, svakoj neprekidnoj funkciji na $[a,b]$, ovaj operator pridružuje interpolacioni polinom $P_n(x)=P_n(f;x)$, koji je, takodje, element prostora $C[a,b]$.

Operator P_n je linearan, jer je aditivan $P_n(f+g) = P_n f + P_n g$ i homogen $P_n(cf) = cP_n f$. Ako je f polinom ne višeg stepena od n, tada je $P_n f = f$.

U prostoru $C[a,b]$ možemo definisati i jednu funkcionelu pomoću interpolacionog polinoma, uzimanjem jedne fiksne tačke $x \in [a,b]$. Tu funkcionelu ćemo označavati sa $P_n(\cdot,x)$.

Definicija 2.7.3. Funkciju $\lambda_n : [a,b] \to R_+$, definisanu tako da je njena vrednost u tački x jednaka normi funkcionele $P_n(\cdot,x)$, tj.

$$\lambda_n(x) = \|P_n(\cdot,x)\| \qquad (x \in [a,b]),$$

nazivamo Lebesqueovom funkcijom.

Definicija 2.7.4. Normu operatora $P_n : C[a,b] \to C[a,b]$, definisanog pomoću $P_n f = P_n(f;x)$, nazivamo konstantom Lebesguea i označavamo sa λ_n.

Na osnovu prethodnih definicija neposredno zaključujemo da za svako $f \in C[a,b]$ važe nejednakosti

$$\begin{aligned} &|P_n(f;x)| \leq \lambda_n(x)\,\|f\| \qquad (x \in [a,b]),\\ (2.7.6)\qquad &\|P_n f\| \leq \lambda_n \|f\|, \end{aligned}$$

gde je $\|f\| = \max\limits_{a\leq x\leq b} |f(x)|$.

Korišćenjem interpolacionih čvorova $x_k^{(n)}$ $(k=0,1,\ldots,n)$ lako se mogu naći eksplicitni izrazi za $\lambda_n(x)$ i λ_n:

$$(2.7.7)\qquad \lambda_n(x)=\sum_{k=0}^{n}|L_{n,k}(x)|=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{\omega_n(x)}{(x-x_k^{(n)})\omega_n'(x_k^{(n)})}\right|,$$

$$(2.7.8)\qquad \lambda_n=\max_{a\le x\le b}\lambda_n(x).$$

Zaista, ako podjemo od Lagrangeove interpolacione formule (2.7.2) dobijamo

$$|P_n(f;x)|\le\|f\|\sum_{k=0}^{n}|L_{n,k}(x)|,$$

$$(2.7.9)\qquad \|P_n(\cdot;x)\|\le\sum_{k=0}^{n}|L_{n,k}(x)|,$$

gde je x fiksirana tačka iz $[a,b]$. Definišimo sada neprekidnu funkciju $t\mapsto\bar f(t)$, takvu da je $\bar f(x_k^{(n)})=\operatorname{sgn}L_{n,k}(x)$ $(k=0,1,\dots,n)$, da je linearna na $[x_{k-1}^{(n)},\,x_k^{(n)}]$ $(k=1,\dots,n)$ i da je konstantna na $[a,\,x_0^{(n)}]$ i $[x_n^{(n)},b]$. Tada je $\|\bar f\|=1$ i

$$(2.7.10)\qquad P_n(\bar f;x)=\sum_{k=0}^{n}(\operatorname{sgn}L_{n,k}(x))L_{n,k}(x)=\sum_{k=0}^{n}|L_{n,k}(x)|,$$

pa iz (2.7.6) za $f=\bar f$, sleduje

$$\lambda_n(x)=\|P_n(\cdot,x)\|\ge\sum_{k=0}^{n}|L_{n,k}(x)|,$$

što zajedno sa (2.7.9) daje (2.7.7).

Primetimo da je funkcija $\lambda_n(x)$ neprekidna. Sa $\bar x$ označimo onu tačku iz $[a,b]$ za koju je $\max_{a\le x\le b}\lambda_n(x)=\lambda_n(\bar x)$ i u (2.7.10) stavimo takvo $\bar x$. Tada imamo

$$(2.7.11)\qquad \lambda_n=\|P_n\|\ge\|P_n\bar f\|\ge P_n(\bar f;\bar x)=\lambda_n(\bar x)=\max_{a\le x\le b}\lambda_n(x),$$

pri čemu smo koristili i drugu nejednakost u (2.7.6) za $f=\bar f$ ($\|\bar f\|=1$).

S druge strane, na osnovu prve nejednakosti u (2.7.6), imamo

$$\|P_n f\| = \max_{a\le x\le b} |P_n(f,x)| \le \max_{a\le x\le b} \lambda_n(x)\cdot \|f\|,$$

odakle zaključujemo da za normu operatora P_n važi ocena

$$\lambda_n = \|P_n\| \le \max_{a\le x\le b} \lambda_n(x). \tag{2.7.12}$$

Iz nejednakosti (2.7.11) i (2.7.12) sleduje (2.7.8).

Primer 2.7.1. Lebesgueova funkcija kod Čebiševljeve interpolacije na $[-1,1]$ je

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{T_{n+1}(x)}{(x-x_k^{(n)})T'_{n+1}(x_k^{(n)})} \right|,$$

gde je T_{n+1} Čebiševljev polinom, a $x_k^{(n)}$ njegove nule odredjene sa (2.2.9). Ako stavimo $x=\cos\theta$ i $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$ $(k=0,1,\dots,n)$, imamo

$$\lambda_n(x) = \frac{|\cos(n+1)\theta|}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k} \right|$$

tj.

$$\lambda_n(x) = \frac{|\cos(n+1)\theta|}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \left| \operatorname{ctg}\frac{\theta+\theta_k}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_k}{2} \right|. \tag{2.7.13}$$

Može se pokazati (videti, na primer, [33 , str. 94-96]) da se maksimum u (2.7.13) postiže za $\theta = 0$, tj. $x=1$, tako da imamo

$$\lambda_n = \lambda_n(1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ctg}\frac{\theta_k}{2}.$$

Jedna ocena za Lebesgueovu konstantu λ_n može da se da u obliku

$$\lambda_n < \frac{2}{\pi}\log n + 4.$$

Za dokaz ove nejednakosti u kojoj se konstanta 4 može poboljšati, treba razmotriti jednakost

$$\pi\lambda_n = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} h(\Theta_k) + \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\Theta_k},$$

gde je $h(\Theta) = \mathrm{ctg}(\Theta/2) - 2/\Theta$. Kako je $h(\Theta) < 0$ na $(0,\pi)$ imamo

$$\lambda_n \leqq \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} < \frac{2}{\pi}\log n + 4.$$

Primedba 2.7.1. Nejednakost (2.2.10) se može iskazati u obliku

$$|\tilde{P}_n(f,x) - P_n(f,x)| \leqq \lambda_n(x)\varepsilon.$$

Kao što smo prethodno napomenuli Lebusgueova funkcija i konstanta su u uskoj vezi sa konvergencijom interpolacionih procesa. Da bismo sagledali ovu vezu, paralelno posmatrajmo niz polinoma najbolje aproksimacije $\{P_n^*\}_{n\in N_o}$ i odgovarajuću veličinu najbolje aproksimacije

$$E_n(f) = \min_{p\in \mathcal{P}_n} ||f-p|| = ||f-P_n^*||,$$

gde je $||\cdot||$ norma u $C[a,b]$, tj. $||f|| = \max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|$ i $\mathcal{P}_n$ skup svih algebarskih polinoma ne višeg stepena od n. S obzirom da $P_n^* \in \mathcal{P}_n$, polinom najbolje aproksimacije P_n^* je nepokretna tačka za prethodno uvedeni operator $P_n: C[a,b] \to C[a,b]$, jer je $P_n(P_n^*;x) = P_n^*(x)$.

Teorema 2.7.3. Neka $f \in C[a,b]$. Ako je u nekoj tački $x = \bar{x}$ $(\in[a,b])$ ispunjen uslov

(2.7.14) $$E_n(f)\lambda_n(\bar{x}) \to 0 \qquad (n\to+\infty),$$

tada je u toj tački interpolacioni proces za funkciju f konvergentan. Ako sem toga

(2.7.15) $$E_n(f)\lambda_n \to 0 \qquad (n\to+\infty),$$

interpolacioni proces ravnomerno konvergira.

Dokaz. Primetimo, najpre, da $E_n(f) \to 0$, kada $n\to+\infty$. Kako je

$$
\begin{aligned}
|f(\bar{x})-P_n(f;\bar{x})| &= |f(\bar{x}) - P_n^*(\bar{x}) + P_n^*(\bar{x}) - P_n(f;\bar{x})| \\
&\leqq |f(\bar{x}) - P_n^*(\bar{x})| + |P_n(f;\bar{x}) - P_n^*(\bar{x})| \\
&= |f(\bar{x}) - P_n^*(\bar{x})| + |P_n(f;\bar{x}) - P_n(P_n^*,\bar{x})| \\
&= |f(\bar{x}) - P_n^*(\bar{x})| + |P_n(f-P_n^*;\bar{x})| \\
&\leqq \|f-P_n^*\| + \lambda_n(\bar{x})\| f-P_n^*) \| \\
&= (1+\lambda_n(\bar{x}))E_n(f) ,
\end{aligned}
$$

na osnovu (2.7.14) zaključujemo da $P_n(f;\bar{x}) \to f(\bar{x})$, kada $n\to+\infty$.

Kako je

$$|f(x) - P_n(f;x)| \leqq (1+\lambda_n)E_n(f),$$

iz uslova (2.7.15) sleduje ravnomerna konvergencija interpolacionog procesa.

6.2.8. Hermiteova interpolacija

U ovom odeljku obradićemo jedan opštiji interpolacioni problem. Naime, neka su za funkciju $f:[a,b] \to R$ u interpolacionim čvorovima x_i $(i=0,1,\ldots,m)$ poznate sledeće vrednosti:

$$f(x_i),\; f'(x_i),\ldots,f^{(k_i-1)}(x_i) \qquad (i=0,1,\ldots,m).$$

Neka je broj podataka o funkciji f jednak n+1, tj. $n+1 = k_o + k_1 + \ldots + k_m$. Broj k_i se naziva višestrukost interpolacionog čvora x_i.

Posmatraćemo sada samo interpolaciju algebarskim polinomima, koja je poznata kao Hermiteova interpolacija. S obzirom na broj datih podataka o funkciji f, Hermiteov interpolacioni polinom, u opštem slučaju, biće

$$H_n(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n .$$

Koeficijente a_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ odredjujemo rešavanjem sistema linearnih jednačina

$$(2.8.1)\qquad H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \qquad (i = 0,1,\ldots,m;\ j = 0,1,\ldots,k_i-1).$$

Teorema 2.8.1. Sistem jednačina (2.8.1) ima jedinstveno rešenje.

Dokaz. Za dokaz ovog tvrdjenja dovoljno je pokazati da homogeni sistem jednačina

$$H_n^{(j)}(x_i) = 0 \qquad (i = 0,1,\ldots,m;\ j = 0,1,\ldots,k_i-1)$$

ima samo trivijalno rešenje $a_i = 0$ $(i = 0,1,\ldots,n)$, tj. $H_n(x) \equiv 0$.

U posmatranom slučaju, iz sistema sleduje da je x_i nula polinoma H_n višestrukosti najmanje k_i, što znači da zbir višestrukosti svih nula polinoma H_n nije manji od $n+1$ $(=k_o+k_1+\ldots+k_m)$. Kako je, medjutim, H_n polinom stepena n, zaključujemo da on mora biti identički jednak nuli, čime je dokaz završen.

S obzirom da rešavanje sistema linearnih jednačina (2.8.11) može biti vrlo komplikovano, to se za konstrukciju Hermiteovog interpolacionog polinoma najčešće koristi jedan metod zasnovan na primeni Lagrangeove interpolacije, koji uključuje uslove (2.8.1). Naime, polinom H_n tražimo u obliku

$$(2.8.2)\qquad H_n(x) = P_m(x) + (x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_m)H_k(x),$$

gde je P_m Lagrangeov interpolacioni polinom dobijen samo na osnovu datih podataka o vrednosti funkcije f u interpolacionim čvorovima, tj. na osnovu parova $(x_i, f(x_i))$ $(i = 0,1,\ldots,m)$, a H_k za sada nepoznati polinom čiji je stepen takav da je $k+m+1 = n$. Primetimo da ovakva reprezentacija polinoma H_n zahteva odredjivanje polinoma H_k. S obzirom da smo iskoristili informacije o vrednosti funkcije (za odredjivanje P_m), na raspolaganju su nam vrednosti izvoda funkcije. Imajući u vidu interpolacioni zahtev (2.8.1), to diferenciranjem (2.8.2) dobijamo potrebne uslove za odredjivanje polinoma H_k koji su opet tipa (2.8.1), samo sada za polinom H_k. Ovo znači da se metod konstrukcije Hermiteovog polinoma može da zasnuje rekurzivno.

Na osnovu prethodne teoreme polinom koji se na ovaj način dobija predstavlja Hermiteov interpolacioni polinom.

Ilustrovaćemo ovaj metod na jednom primeru.

Primer 2.8.1. Nadjimo Hermiteov interpolacioni polinom za funkciju f čije su vrednosti date u tabeli

x	0	1	2
f(x)	-1	1	9
f'(x)	-1	3	
f''(x)	10		

Kako je dato šest podataka, interpolacioni polinom, u opštem slučaju, biće petog stepena. Potražimo ga u obliku

$$(2.8.3) \qquad H_5(x) = P_2(x) + x(x-1)(x-2)H_2(x),$$

gde je P_2 Lagrangeov interpolacioni polinom formiran na osnovu vrednosti funkcije f u tačkama $x=0$, $x=1$, $x=2$, tj.

$$P_2(x) = (-1)\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 1\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 3\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

$$= 3x^2 - x - 1,$$

a H_2 za sada nepoznat polinom ne višeg stepena od dva. Diferenciranjem (2.8.3) dobijamo

$$H_5'(x) = 6x-1 + (3x^2-6x+2)H_2(x)+x(x-1)(x-2)H_2'(x),$$

odakle, s obzirom na $H_5'(0) = f'(0) = -1$ i $H_5'(1) = f'(1) = 3$, sleduje $H_2(0) = 0$ i $H_2(1) = 2$.

Kako je, dalje,

$$H_5''(x) = 6 + 6(x-1)H_2(x) + (6x^2-12x+4)H_2'(x) + x(x-1)(x-2)H_2''(x)$$

i $H_5''(0) = f''(0) = 10$ dobijamo $H_2'(0) = 1$.

Primenimo sada isti postupak na odredjivanje polinoma H_2 na osnovu podataka

$$H_2(0) = 0, \quad H_2(1) = 2, \quad H_2'(0) = 1.$$

Dakle, imamo

$$H_2(x) = P_1(x) + x(x-1)a \qquad (a = H_o(x)),$$

gde je

$$P_1(x) = 0\,\frac{x-1}{0-1} + 2\,\frac{x-0}{1-0} = 2x.$$

Ako stavimo $x = 0$, iz jednakosti $H_1'(x) = 2+(2x-1)a$ nalazimo da je $a = 1$. Tada je $H_2(x) = x^2 + x$. Prema tome

$$H_5(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1.$$

Sledeća teorema daje ocenu greške kod Hermiteove interpolacije.

Teorema 2.8.2. Neka $f \in C^{n+1}[a,b]$ i $x_i \in [a,b]$ $(i = 0,1,\ldots,m)$. Tada postoji $\xi \in (a,b)$ takvo da je

$$R_n(f;x) = f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\Omega_n(x), \tag{2.8.4}$$

gde je

$$\Omega_n(x) = (x-x_o)^{k_o}(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_m)^{k_m}.$$

Dokaz. Slično kao u dokazu teoreme 2.2.2, uvedimo pomoćnu funkciju F sa

$$F(x) = f(x) - H_n(x) - K_n \Omega_n(x).$$

Neka je $\bar{x}$ proizvoljna tačka iz $[a,b]$ i takva da se ne poklapa ni sa jednim od interpolacionih čvorova x_i $(i=0,1,\ldots,m)$.

Pomoćna funkcija F ima nule u tačkama $x_o, x_1, \ldots, x_m$, čiji je red višestrukosti najmanje $k_o, k_1, \ldots, k_m$ respektivno. Konstantu K_n odredićemo iz uslova da funkcija F ima nulu i u tački $\bar{x}$. Ovakva konstanta egzistira, s obzirom da je $\Omega_n(\bar{x}) \neq 0$, i iznosi

$$K_n = \frac{f(\bar{x}) - H_n(\bar{x})}{\Omega_n(\bar{x})}. \tag{2.8.5}$$

Na osnovu Rolleove teoreme, izvod F' ima bar $m+1$ nula koje se nalaze izmedju nula funkcije F. S druge strane, funkcija F' ima nule i u tačkama x_o, $x_1, \ldots, x_m$, čiji je red višestrukosti najmanje k_o-1, $k_1-1, \ldots,$ k_m-1 respektivno. Dakle, broj nula funkcije F' na $[a,b]$ je najmanje $n+1$ $(=(k_o-1)+(k_1-1)+\ldots+(k_m-1)+m+1)$, pri čemu se višestruka nula uzima onoliko puta koliki je njen red višestrukosti.

Kako je $H_n^{(n+1)}(x) = 0$ i $\Omega_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, iz $F^{(n+1)}(\xi)=0$ sleduje

$$K_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

što zajedno sa (2.8.5) daje

$$f(\bar{x}) = H_n(\bar{x}) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Omega_n(\bar{x}).$$

S obzirom da je $\bar{x}$ proizvoljna tačka iz $[a,b]$, dokaz teoreme je završen.

Za $k_o = k_1 = \ldots = k_m = 2$ $(n+1 = 2m+2)$, (2.8.4) se svodi na

$$R_n(f;x) = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \omega(x)^2$$

gde je ω definisano pomoću (2.2.3). U ovom slučaju Hermiteov interpolacioni polinom može se izraziti eksplicitno pomoću

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^{m} U_i(x)f(x_i) + \sum_{i=0}^{m} V_i(x)f'(x_i),$$

gde su

$$U_i(x) = \big(1-2L_i'(x_i)(x-x_i)\big)L_i(x)^2,$$

$$V_i(x) = (x-x_i)L_i(x)^2,$$

$$L_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}.$$

Polinom H_n se može predstaviti i u obliku

$$H_n(x) = P_o(x)+(x-x_o)^{k_o} P_1(x)+(x-x_o)^{k_o}(x-x_1)^{k_1} P_2(x) \tag{2.8.6}$$

$$+\ldots+(x-x_o)^{k_o}(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_{m-1})^{k_{m-1}} P_m(x),$$

gde je

$$P_i(x) = a_{io}+a_{i1}(x-x_i)+\ldots+a_{i,k_i-1}(x-x_i)^{k_i-1}.$$

Na osnovu (2.8.1) i (2.8.6) može se zaključiti da je

$$P_o(x) = f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)+\ldots+\frac{f^{(k_o-1)}(x_o)}{(k_o-1)!}(x-x_o)^{k_o-1}.$$

Pretpostavimo sada da su poznati polinomi $P_o,\ldots,P_{i-1}$. Tada se koeficijenti polinoma P_i mogu naći jedan za drugim sukcesivnim izračunavanjem izvoda polinoma $Q_i(x)$ u tački $x=x_i$, gde je

$$Q_i(x) = \frac{H_n(x)-P_o(x)-\sum_{j=1}^{i-1}(x-x_o)^{k_o}\ldots(x-x_{j-1})^{k_{j-1}}P_j(x)}{(x-x_o)^{k_o}\ \ldots\ (x-x_{i-1})^{k_{i-1}}}$$

Na osnovu (2.8.6) nije teško zaključiti da je

$$Q_i(x) = P_i(x) + (x-x_i)^{k_i}P_{i+1}(x)+\ldots+(x-x_i)^{k_i}\ldots(x-x_{m-1})^{k_{m-1}}P_m(x).$$

Primer 2.8.2. Odredićemo Hermiteov interpolacioni polinom za funkciju f sa sledećim podacima

x	x_o	x_1
$f(x)$	f_o	f_1
$f'(x)$	m_o	m_1
$f''(x)$	M_o	M_1

Na osnovu prethodnog imamo

$$H(x) = H_5(x) = P_o(x) + (x-x_o)^3 P_1(x), \tag{2.8.7}$$

gde su

$$P_o(x) = f_o + m_o(x-x_o) + \frac{M_o}{2}(x-x_o)^2$$

i

$$P_1(x) = a_{10} + a_{11}(x-x_1) + a_{12}(x-x_1)^2.$$

Nadalje,

$$Q_1(x) = \frac{H(x)-P_o(x)}{(x-x_o)^3}, \quad Q_1'(x) = \frac{H'(x)-P_o'(x)}{(x-x_o)^3} - 3\,\frac{H(x)-P_o(x)}{(x-x_o)^4},$$

$$Q_1''(x) = \frac{H''(x)-P_o''(x)}{(x-x_o)^3} - 6\,\frac{H'(x)-P_o'(x)}{(x-x_o)^4} + 12\,\frac{H(x)-P_o(x)}{(x-x_o)^5}.$$

Tada, stavljajući $x = x_1$, nalazimo koeficijente polinoma P_1:

$$a_{10} = Q_1(x_1) = \frac{1}{h^3}\left(f_1 - f_o - m_o h - \frac{M_o}{2}h^2\right),$$

$$a_{11} = Q_1'(x_1) = \frac{1}{h^4}\left(-3(f_1-f_o) + (m_1+2m_o)h + \frac{M_o}{2}h^2\right),$$

$$a_{12} = \frac{1}{2} Q_1''(x_1) = \frac{1}{h^5} (6(f_1 - f_o) - 3(m_1 + m_o)h + \frac{M_1 - M_o}{2} h^2),$$

gde smo stavili $h = x_1 - x_o$.

Dakle, u opštem slučaju, polinom H, dat pomoću (2.8.7), je petog stepena. Medjutim, polinom H je ne višeg stepena od trećeg ako je $a_{11} = a_{12} = 0$, tj. ako su ispunjeni uslovi

$$(2.8.8)\qquad \begin{aligned} m_1 + 2m_o + \frac{1}{2} M_o h &= \frac{3}{h} (f_1 - f_o), \\ m_1 + m_o - \frac{1}{6} (M_1 - M_o)h &= \frac{2}{h}(f_1 - f_o). \end{aligned}$$

Tada je

$$H(x) = f_o + m_o(x - x_o) + \frac{M_o}{2} (x - x_o)^2 + a_{10}(x - x_o)^3.$$

Napomenimo da jednakosti (2.8.8) igraju važnu ulogu kod konstrukcije kubnih splajnova (videti odeljak 6.2.12).

6.2.9. Trigonometrijska interpolacija

Kao što je rečeno u odeljku 6.1.2, trigonometrijsku aproksimaciju imamo ako za bazisne funkcije ϕ_k uzmemo trigonometrijski bazis $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \ldots\}$. Uzmimo da je broj bazisnih funkcija $n+1 = 2m+1$. Tada je aproksimaciona funkcija trigonometrijski polinom m-tog reda

$$(2.9.1)\qquad \phi(x) = T_m(x) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gde smo aproksimacione parametre označili sa $\frac{1}{2} a_o$, a_k, b_k $(k = 1, \ldots, m)$. U ovom odeljku proučićemo problem trigonometrijske interpolacije sa sistemom interpolacionih čvorova datih na $[0, 2\pi)$

$$(2.9.2)\qquad 0 \leq x_o < x_1 < \ldots < x_{2m} < 2\pi.$$

Neka su $f_j \equiv f(x_j)$ $(j = 0,1,\ldots,2m)$ vrednosti funkcije koju želimo interpolirati pomoću (2.9.1).

Odabrani sistem funkcija je Čebiševljev, što se može dokazati direktnim odredjivanjem determinante sistema jednačina (2.1.1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos m x_0 & \sin m x_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & & \cos m x_1 & \sin m x_1 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & \cos x_{2m} & \sin x_{2m} & & \cos m x_{2m} & \sin m x_{2m} \end{vmatrix}$$

Korišćenjem formula

$$\cos k x = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin k x = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

gde je $i = \sqrt{-1}$, elementi ove determinante mogu se izraziti u eksponencijalnom obliku. Za odredjivanje vrednosti determinante Δ primenimo sada sledeći postupak:

1° Iz kolona izvučemo zajedničke faktore $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2i}$;

2° Elementima druge, četvrte,...,(2m)-te kolone dodajmo odgovarajuće elemente treće, pete,...,(2m+1)-ve kolone respektivno;

3° Iz druge, četvrte,...,(2m)-te kolone izvučemo zajednički faktor 2;

4° Od elemenata treće, pete,...,(2m+1)-ve kolone oduzmimo odgovarajuće elemente druge, četvrte,...,(2m)-te kolone respektivno;

5° Iz treće, pete,...,(2m+1)-ve kolone izvučemo zajednički faktor (-1);

6° Iz svake vrste izvučemo odgovarajući faktor $\exp(-imx_j)$ $(j = 0,1,\ldots,2m)$;

7° Odgovarajućom permutacijom kolona dobijamo Vandermonde-ovu determinantu. Broj potrebnih transpozicija je jednak $m(m+1)$, što je uvek paran broj. Zaista, za uredjenje niza $(0, 1, -1, \ldots, m, -m)$ u rastući niz je potrebno

$$2m + (2m-2) + \ldots + 2 = 2\,\frac{m(m+1)}{2} = m(m+1)$$

transpozicija.

Prema tome, imamo

$$\Delta = \frac{(-1)^m}{2^m i^m}\, e^{-im(x_o+\ldots+x_{2m})} \begin{vmatrix} 1 & z_o & z_o^2 & \ldots & z_o^{2m} \\ 1 & z_1 & z_1^2 & & z_1^{2m} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z_{2m} & z_{2m}^2 & & z_{2m}^{2m} \end{vmatrix}$$

gde smo stavili $z_j = \exp(i\,x_j)$ $(j = 0,1,\ldots,2m)$. Na dalje,

$$\Delta = \frac{(-1)^{m/2}}{2^m}\, e^{-im(x_o+\ldots+x_{2m})} \prod_{2m\geq k>j\geq 0} (z_k - z_j).$$

Kako je $z_k - z_j = 2i\exp\left(i\,\frac{x_j+x_k}{2}\right)\sin\frac{x_k-x_j}{2}$ i

$$\prod_{2m\geq k>j\geq 0} \alpha_{kj} = \prod_{k=1}^{2m}\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{kj}$$

na osnovu prethodnog imamo

$$\Delta = 2^{2m^2} \prod_{k=1}^{2m} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \sin\frac{x_k-x_j}{2}\right).$$

S obzirom da interpolacioni čvorovi zadovoljavaju (2.9.2), zaključujemo da je $\Delta \neq 0$ što znači da je posmatrani sistem funkcija Čebiševljev sistem i da odgovarajući interpolacioni problem ima jedinstveno rešenje.

Slično kao kod Lagrangeove interpolacije stavimo

$$\omega_k(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{2m} \sin\frac{x-x_j}{2}.$$

Primetimo da je $\omega_k(x_j) = 0$ $(j \neq k)$ i $\omega_k(x_k) \neq 0$.

Trigonometrijski interpolacioni polinom (2.9.1) može se izraziti u obliku

(2.9.3) $$T_m(x) = \sum_{k=0}^{2m} f_k \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)},$$

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{2m} f_k \left(\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{2m} \frac{\sin\frac{x-x_j}{2}}{\sin\frac{x_k-x_j}{2}} \right).$$

Primer 2.9.1. Na osnovu podataka

x_k	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/2$
f_k	7	3	2	4	2

konstruisaćemo trigonometrijski interpolacioni polinom $T_2(x)$, s obzirom da je $m = (5-1)/2 = 2$.

Kako je

$$\omega_k(x) = \frac{\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\,\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\,\sin\frac{x-\frac{2\pi}{3}}{2}\,\sin\frac{x-\frac{3\pi}{2}}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2}}$$

na osnovu (2.9.3), posle sredjivanja, dobijamo

$$T_2(x) = 5 - \cos x + 3\cos 2x.$$

Inače, numeričke vrednosti koeficijenata $\alpha_k = \dfrac{f_k}{\omega_k(x_k)}$ su redom

$\alpha_o = 32.33161507$, $\alpha_1 = -48.$, $\alpha_2 = 42.22333494$,

$\alpha_3 = -36.95041723$, $\alpha_4 = 3.031499056$.

Razmotrimo sada jedan veoma važan slučaj kada su čvorovi dati ekvidistantno na $[0,2\pi)$, tj. kada je $x_k = \frac{2\pi}{n} k$ $(k = 0,1,\dots,n-1)$. Sa unapred zadatim vrednostima f_k, u opštem slučaju kompleksnim, postavimo problem interpolacije pomoću trigonometrijskog polinoma

$$\phi(x) = c_o + c_1 e^{xi} + c_2 e^{2xi} + \dots + c_{n-1} e^{(n-1)xi}, \tag{2.9.4}$$

gde je $i = \sqrt{-1}$ i c_k $(k = 0,1,\dots,n-1)$ kompleksne konstante koje treba odrediti iz interpolacionog uslova

$$\phi(x_k) = f_k \qquad (k = 0,1,\dots,n-1). \tag{2.9.5}$$

Ako za svako $k \in Z$ definišemo f_k pomoću

$$f_k = f_{k+\ell n},$$

gde je ℓ ceo broj takav da je $0 \leq k+\ell n \leq n-1$ (periodično produženje funkcije f), tada zbog periodičnosti funkcije e^{ix} zaključujemo da je

$$\phi(x_k) = f_k, \quad x_k = \frac{2\pi}{n} k \qquad (k \in Z).$$

Ako stavimo

$$w = e^{ix}, \quad w_k = e^{ix_k} = \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right), \quad P(w) = \phi(x),$$

(2.9.4) se svodi na

$$P(w) = c_o + c_1 w + c_2 w^2 + \dots + c_{n-1} w^{n-1},$$

a interpolacioni uslov (2.9.5) na

$$P(w_k) = f_k \qquad (k = 0,1,\dots,n-1).$$

Primetimo da je $w_k^m = w_m^k = \exp(\frac{2km\pi}{n}i)$ $(k, m \in Z)$. Takodje, za svako $m \in Z$, w_m je koren binomne jednačine

$$w^n - 1 = (w-1)(w^{n-1} + w^{n-2} + \ldots + w + 1) = 0.$$

Kako je $w_m = 1$ za svako $m \in L = \{\ell \mid \ell = np,\ p \in Z\}$ i $w_m \neq 1$ za svako $m \in Z\setminus L$, zaključujemo da je

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_m^k = \begin{cases} 0 & (m \in Z\setminus L), \\ n & (m \in L). \end{cases} \tag{2.9.6}$$

U kompleksnom n-dimenzionalnom vektorskom prostoru C^n definišimo skalarni proizvod dva vektora $\vec{f} = [f_o f_1 \ldots f_{n-1}]^T$ i $\vec{g} = [g_o g_1 \ldots g_{n-1}]^T$ pomoću (videti odeljak 2.1.3)

$$(\vec{f}, \vec{g}) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \bar{g}_k = \vec{g}^* \vec{f},$$

gde $\vec{g}^*$ označava vektor koji se dobija tronsponovanjem vektora $\vec{g}$ i konjugovanjem njegovih komponenata. Primetimo da su u odnosu na ovaj skalarni proizvod vektori

$$\vec{v}_p = [w_o^p\ w_1^p\ \ldots\ w_{n-1}^p]^T \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ortogonalni, tj. da je

$$(\vec{v}_p, \vec{v}_q) = 0 \quad (p \neq q), \qquad (\vec{v}_p, \vec{v}_p) = n \quad (p = q). \tag{2.9.7}$$

Kako je

$$(\vec{v}_p, \vec{v}_q) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k^p \bar{w}_k^q = \sum_{k=0}^{n-1} w_p^k w_{-q}^k = \sum_{k=0}^{n-1} w_{p-q}^k,$$

na osnovu (2.9.6) zaključujemo da, zaista, važi (2.9.7).

Teorema 2.9.1. Pod interpolacionim uslovom (2.9.5) koeficijenti polinoma (2.9.4) se mogu predstaviti u obliku

$$c_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k w_k^{-j} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \exp\left(-\frac{2kj\pi}{n}i\right).$$

Dokaz. Kako je $f_k = \phi(x_k) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j w_j^k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j w_k^j$ imamo

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_o \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum c_j w_o^j \\ \sum c_j w_1^j \\ \vdots \\ \sum c_j w_{n-1}^j \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \begin{bmatrix} w_o^j \\ w_1^j \\ \vdots \\ w_{n-1}^j \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \vec{v}_j,$$

pa je, s obzirom na ortogonalnost (2.9.7),

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k w_k^{-j} = \frac{1}{n}(\vec{f},\vec{v}_j) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j \vec{v}_j, \vec{v}_j\right) = c_j.$$

Jedna interesantna osobina "odsečka" interpolacionog polinoma (2.9.4)

$$\phi_r(x) = c_o + c_1 e^{xi} + \ldots + c_r e^{rxi} \qquad (0 \leqq r \leqq n-1)$$

može se iskazati na sledeći način:

Teorema 2.9.2. U skupu trigonometrijskih polinoma oblika

$$\psi_r(x) = d_0 + d_1 e^{xi} + \ldots + d_r e^{rxi} \qquad (r \leqq n-1),$$

suma

$$S(\psi_r) = \sum_{k=0}^{n-1} |f_k - \psi_r(x_k)|^2$$

dostiže minimum za $\psi_r(x) = \phi_r(x)$.

Definišimo sada veličine a_j i b_j $(j \in Z)$ pomoću

(2.9.8) $$a_j = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos\frac{2kj\pi}{n}, \quad b_j = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin\frac{2kj\pi}{n}.$$

Na osnovu teoreme 2.9.1 zaključujemo da je

$$c_{n-j} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k w_k^{-(n-j)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k w_k^{j}.$$

Takodje, važi

$$c_j = \frac{1}{2}(a_j - ib_j), \qquad c_{n-j} = \frac{1}{2}(a_j + ib_j), \quad c_o = \frac{1}{2}a_o,$$

$$c_j w_k^j + c_{n-j} w_k^{n-j} = a_j \cos jx_k + b_j \sin j x_k \qquad (j = 1,\dots,n-1).$$

Prema tome, ako za dati skup podataka (x_k, f_k) $(k = 0, 1, \dots, n-1)$, sa $x_k = \frac{2\pi}{n}k$, odredimo koeficijente a_j i b_j $(j = 0, 1, \dots)$ pomoću (2.9.8), dobijamo interpolacioni trigonometrijski polinom:

(2.9.9) $$\phi(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{ako je } n = 2m+1,$$

ili

(2.9.10) $$\phi(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{k=1}^{m-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \frac{1}{2}a_m \cos mx,$$

ako je $n = 2m$.

Primedba 2.9.1. Ako imamo interpolaciju periodične funkcije sa periodom T (umesto 2π), tada uzimamo $x_k = \frac{T}{n}k$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ i

$$\phi(x) = c_o + c_1 e^{\omega x i} + c_2 e^{2\omega x i} + \dots + c_{n-1} e^{(n-1)\omega x i},$$

gde je $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

6.2.10. Algoritmi za izračunavanje trigonometrijskih suma

U prethodnom odeljku pojavila se potreba za izračunavanjem suma oblika (2.9.8), koje se pojavljuju kod odredjivanja vrednosti interpolacionih trigonometrijskih polinoma (2.9.9) i (2.9.10). Takodje, sume ovog oblika

$$C = C(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos kx\,, \quad S = S(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k \sin kx \tag{2.10.1}$$

pojavljuju se u mnogim problemima nauke i tehnike (na primer, Fourierova analiza i sl.). U ovom odeljku daćemo algoritam Goertzel-Reinscha, kao i Cooley-Tukeyov algoritam, kada je $n=2^m$.

a) Goertzel-Reinschov algoritam. Osnovna ideja ovog algoritma za izračunavanje suma oblika (2.10.1) potiče od Goertzela ([16]).

Za $x \neq m\pi$ $(m \in Z)$, definišimo konačan niz $\{U_j\}$ pomoću

$$\begin{aligned} U_j &= \frac{1}{\sin x} \sum_{k=j}^{n-1} f_k \sin(k-j+1)x \qquad (j=0,1,\ldots,n-1), \\ U_n &= U_{n+1} = 0. \end{aligned} \tag{2.10.2}$$

Pokažimo, najpre, da važi rekurentna relacija

$$U_j = f_j + 2\cos x\, U_{j+1} - U_{j+2} \qquad (j=n-1,\ldots,1,0). \tag{2.10.3}$$

Polazeći od desne strane u (2.10.3) i korišćenjem (2.10.2) nalazimo redom

$$\begin{aligned} D &= f_j + 2\cos x\, U_{j+1} - U_{j+2} \\ &= f_j + \frac{1}{\sin x}\left\{ \sum_{k=j+1}^{n-1} f_k \sin(k-j)x - \sum_{k=j+2}^{n-1} f_k \sin(k-j-1)x \right\} \\ &= f_j + \frac{1}{\sin x} \sum_{k=j+1}^{n-1} f_k \{2\cos x \sin(k-j)x - \sin(k-j-1)x\} \\ &= f_j + \frac{1}{\sin x} \sum_{k=j+1}^{n-1} f_k \sin(k-j+1)x = \frac{1}{\sin x} \sum_{k=j}^{n-1} f_k \sin(k-j+1)x, \end{aligned}$$

tj. $D = U_j$.

Na osnovu (2.10.2) za $j=0$ i $j=1$ nalazimo

$$U_0 = \frac{1}{\sin x} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin(k+1)x = C(x) + \frac{\cos x}{\sin x} S(x)$$

i

$$U_1 = \frac{1}{\sin x} \sum_{k=1}^{n-1} f_k \sin kx = \frac{1}{\sin x} S(x),$$

odakle su

$$C(x) = U_0 - \cos x\, U_1 \quad \text{i} \quad S(x) = \sin x\, U_1 .$$

Korišćenjem U_2, vrednost za $C(x)$ se može predstaviti i u obliku

$$C(x) = f_0 + \cos x\, U_1 - U_2.$$

Goerzelov algoritam se može iskazati na sledeći način:

1° $U_{n+1}:=0$, $U_n:=0$, $p:=\cos x$, $q:=2\cdot p$;

2° Za $i=n-1,\ldots,1$ nalazimo

$$U_i := f_i + q\cdot U_{i+1} - U_{i+2} ;$$

3° $C:=f_0 + p\cdot U_1 - U_2$, $S:= \sin x\cdot U_1$.

Ovaj algoritam zahteva n+2 množenja, po n sabiranja i oduzimanja i po jedno izračunavanje funkcija cosx i sinx. Jedina mana ovog algoritma je što je za male vrednosti x ($|x|\ll 1$) algoritam nestabilan. Stabilnu modifikaciju ovog algoritma dao je Reinsch (videti [37, str. 64-65]), razlikujući pritom dva slučaja:

Slučaj $\cos x > 0$. Kako je

$$\begin{aligned}\Delta U_k &= U_{k+1} - U_k = U_{k+1} - (f_k + 2\cos x\, U_{k+1} - U_{k+2})\\ &= (U_{k+2} - U_{k+1}) + 2(1-\cos x)U_{k+1} - f_k\\ &= \Delta U_{k+1} + aU_{k+1} - f_k,\end{aligned}$$

gde je $a = 4\sin^2(x/2)$, prethodno dati algoritam se može modifikovati na sledeći način:

1° $a:= 4\sin^2(x/2)$, $U_{n+1}:=0$, $\Delta U_n:=0$;

2° Za $k=n-1,\ldots,1,0$ nalazimo

$$U_{k+1} := U_{k+2} - \Delta U_{k+1},$$

$$\Delta U_k := \Delta U_{k+1} + a\cdot U_{k+1} - f_k ;$$

3° $C:= (a/2)\cdot U_1 - \Delta U_0$, $S:= \sin x\cdot U_1$.

Slučaj $\cos x < 0$. Stavimo sada umesto diference ΔU_k zbir $\Sigma U_k = U_{k+1} + U_k$. Primetimo da je operator $\Sigma = E + 1$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\Sigma U_k &= U_{k+1} + f_k + 2\cos x\, U_{k+1} - U_{k+2}\\ &= -(U_{k+2} + U_{k+1}) + 2(1+\cos x)U_{k+1} + f_k\\ &= -\Sigma U_{k+1} + bU_{k+1} + f_k,\end{aligned}$$

gde je $b = 4\cos^2(x/2)$. Modifikovani algoritam, u ovom slučaju, se može iskazati u obliku:

1° $b := 4\cdot\cos^2(x/2)$, $U_{n+1} := 0$, $\Sigma U_n := 0$;

2° Za $k = n-1,\ldots,1,0$ nalazimo

$$U_{k+1} := \Sigma U_k - U_k,$$
$$\Sigma U_k := f_k + b\cdot U_{k+1} - \Sigma U_{k+1};$$

3° $C := \Sigma U_0 - (b/2)\cdot U_1$, $S := \sin x\cdot U_1$.

Navedene modifikacije osnovnog algoritma poznate su kao Goertzel-Reinschov algoritam.

b) Cooley-Tukeyov algoritam. Kao što smo videli u prethodnom odeljku (teorema 2.9.1), koeficijenti polinoma (2.9.4) se mogu predstaviti u obliku

$$c_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k w_k^{-j} \qquad (j = 0,1,\ldots,n-1), \tag{2.10.4}$$

gde je $w_k = \exp(\frac{2k\pi}{n}i)$. S druge strane, na osnovu (2.9.4) i (2.9.5), imamo

$$f_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j w_k^j \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1). \tag{2.10.5}$$

Par formula (2.10.4) - (2.10.5) definiše diskretnu Fourierovu transformaciju (DFT). Nizovi $\{f_k\}$ i $\{c_j\}$ su, u opštem slučaju, kompleksni.

U slučaju kada je $n = 2^m$ ($m \in N$) Cooley-Tukeyov algoritam veoma efikasno izračunava DFT i tada se ona popularno naziva brza Fourierova transformacija* (BFT) (videti [10], [11]).

* *Na engleskom: Fast Fourier transform (FFT).*

Za razliku od klasičnog načina izračunavanja suma (2.10.4), tj. (2.10.5), gde je potreban broj operacija reda $O(n^2)$, kod BFT potreban broj operacija je reda $O(n \log_2 n)$. S obzirom da su sume (2.10.4) i (2.10.5) iste po strukturi, to se isti algoritam primenjuje za njihovo izračunavanje. Ne ulazeći dublje u teoriju BFT, izložićemo ukratko osnovnu ideju.

Pretpostavimo da je $n=2^m$ i posmatrajmo (2.10.5) u obliku

$$f_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j W^{kj} \qquad (k=0,1,\ldots,n-1), \tag{2.10.6}$$

gde je $W=\exp(2\pi i/n)$. Predstavimo sada eksponente k i j u binarnom sistemu. Tako imamo

$$k = (k_{m-1}\ldots k_0)_2 = k_{m-1}2^{m-1} + \ldots + k_0 2^0$$

$$j = (j_{m-1}\ldots j_0)_2 = j_{m-1}2^{m-1} + \ldots + j_0 2^0$$

gde su k_p, j_p $(p=0,1,\ldots,m-1)$ cifre binarnog brojnog sistema 0 ili 1. Neka su, dalje, $f_k = f(k_{m-1},\ldots,k_0)$ i $c_j = c(j_{m-1},\ldots,j_0)$. Tada se (2.10.6) može predstaviti u obliku

$$f_k = f(k_{m-1},\ldots,k_0) = \sum_{j_0=0}^{1} \cdots \sum_{j_{m-1}=0}^{1} c(j_{m-1},\ldots,j_0) W^{jk}$$

Razvijanjem eksponenta od W, i imajući u vidu $\exp(2\pi i)=1$, poslednja jednakost postaje

$$f_k = \sum_{j_0=0}^{1} \cdots \sum_{j_{m-2}=0}^{1} \left[\sum_{j_{m-1}=0}^{1} c(j_{m-1},\ldots,j_0) W^{k_0 j_{m-1} 2^{m-1}} \right] W^{k(j_{m-2}2^{m-2}+\ldots+j_0)}$$

Primetimo da je unutrašnja suma funkcija od $j_{m-2},\ldots,j_0,k_0$ i da se može predstaviti u obliku $c_1(k_0,j_{m-2},\ldots,j_0)$. Nastavljajući ovakav postupak, u p-tom koraku dobijamo funkciju

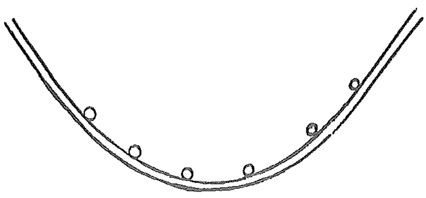
$$c_p(k_0,\ldots,k_{p-1},j_{m-p-1},\ldots,j_0)$$

$$= \sum_{j_{m-p}=0}^{1} c_{p-1}(k_0,\ldots,k_{p-2},j_{m-p},\ldots,j_0) W^{(k_{p-1}2^{p-1}+\ldots+k_0) j_{m-p} 2^{m-p}}$$

Najzad, poslednji korak daje, $f_k=f(k_{m-1},\ldots,k_0) = c_m(k_0,\ldots,k_{m-1})$.

6.2.11. Splajn funkcije i interpolacija pomoću splajnova

Fizička naprava koju koriste crtači za crtanje glatkih krivih (posebno u brodogradnji, avionskoj industriji i sl.) naziva se na engleskom jeziku *splajn*, a piše se *spline*. Ova naprava je, ustvari, duža elastična drvena letvica (šipka) koja se može saviti tako da prodje kroz nekoliko zahtevanih tačaka čvorova (videti sl. 2.11.1). Ako se pretpostavi da je splajn uniformno elastičan, tada se može reći da je njegova potencijalna energija, kada je savijen, proporcionalna integralu po njegovoj dužini (krivolinijski integral po luku) od kvadrata krivine K. Dakle, ako splajn leži duž ravne krive $y = S(x)$, $a \le x \le b$, njegova potencijalna energija je proporcionalna integralu



Sl. 2.11.1

$$(2.11.1) \qquad \int_L K(x)^2 ds = \int_a^b \frac{S''(x)^2}{(1+S'(x)^2)^{5/2}} dx$$

i oblik koji on zauzima je takav da minimizira (2.11.1) pod nametnutim ograničenjima.

Na sličan način definiše se i *matematički splajn*, s tim što se odbacuje član $S'(x)^2$ u (2.11.1), što je blisko prethodnom slučaju, kada je $S'(x)^2 \ll 1$. Dakle, sada treba minimizirati integral

$$(2.11.2) \qquad \int_a^b S''(x)^2 \, dx.$$

Splajn se, medjutim, može još opštije definisati uvodjenjem glatkosti višeg reda, tj. korišćenjem višeg izvoda od drugog u (2.11.2).

Prvi rezultati u vezi splajn-funkcija sreću se u radovima čiji su autori Quade i Collatz [31] (1938), Courant [12]

(1943) i Schoenberg [34] (1946). U radu Schoenberga prvi put se eksplicitno uvodi splajn-funkcija i naziva tim imenom. U skoro svim jezicima ovaj termin je usvojen. Buran razvoj splajn-funkcija i korišćenje njenih aproksimacionih svojstava započinje šezdesetih godina. Splajnovi nalaze ogromnu primenu u numeričkoj matematici - kod interpolacije, numeričkog diferenciranja, numeričke integracije, rešavanja diferencijalnih jednačina itd. Splajnovi su se, takodje, pokazali kao rešenja mnogih klasičnih ekstremalnih problema u teoriji aproksimacija. Mi ćemo se u ovom i narednim odeljcima zadržati na problemu interpolacije pomoću splajnova, posebno tzv. kubnih splajnova. Pokazaćemo i jedno ekstremalno svojstvo tzv. prirodnog kubnog splajna. Naime, on u odredjenoj klasi funkcija minimizira integral (2.11.2).

Neka je na segmentu $[a,b]$ data mreža čvorova

$$\Delta_n: \; a=x_o<x_1<\dots<x_n=b. \tag{2.11.3}$$

Sa $\mathcal{P}_m$ označimo skup algebarskih polinoma ne višeg stepena od m.

<u>Definicija 2.11.1.</u> Funkcija

$$S_m(x)=S_{m,k}(x,\Delta_n)$$

se naziva polinomski splajn stepena m i defekta k ($1\le k\le m$) sa čvorovima (2.11.3), ako zadovoljava uslove

1^o $S_m\in\mathcal{P}_m$ na svakom podsegmentu $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\dots,n)$;

2^o $S_m\in C^{m-k}[a,b]$;

Tačke x_i se zovu čvorovi splajna.

Mi ćemo u daljem radu razmatrati samo polinomske splajnove defekta 1, pa ćemo za $S_m(x)=S_{m,1}(x)$ reći jednostavno da je to splajn stepena m. Posebno ćemo se zadržati na jednoj važnoj vrsti splajnova, tzv. interpolacionih kubnih splajnova, kod kojih je $m=3$. U tom cilju čvorovima mreže Δ_n pridružujemo realne brojeve f_o, $f_1,\dots,$ f_n.

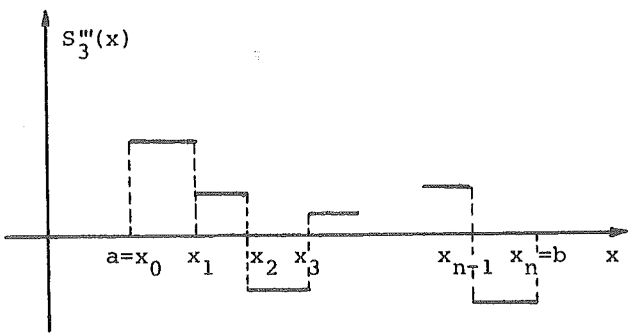
Definicija 2.11.2. Funkcija $S_3(x) = S_3(x;f)$ se naziva interpolacioni kubni splajn za funkciju f na mreži $\Delta_n (n \geq 2)$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1^o $S_3(x;f) \in \mathcal{P}_3$ ako $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$;

2^o $S_3(x;f) \in C^2[a,b]$;

3^o $S_3(x_i;f) = f_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,\ldots,n)$.

Primetimo da se uslov 3^o ne pojavljuje u definiciji 2.11.1. Splajn uveden poslednjom definicijom zvaćemo jednostavno kubni splajn, izostavljajući reč interpolacioni. Napomenimo još jednom da kubni splajn interpolira funkciju f u čvorovima mreže (uslov 3^o), da je neprekidan na $[a,b]$ zajedno sa svojim izvodima $S_3'(x)$ i $S_3''(x)$ (uslov 2^o) i da je na svakom od podsegmenata izmedju susednih čvorova definisan polinomom ne višeg stepena od trećeg. Na osnovu ovoga zaključujemo da je treći izvod kubnog splajna prekidan i da je deo po deo konstanta (videti sl. 2.11.2).



Sl. 2.11.2

Kao što ćemo videti u sledećem odeljku, kubni splajn ima dva slobodna parametra, koji se obično odredjuju na osnovu izvesnih dopunskih konturnih uslova. Tipični dopunski uslovi su:

(2.11.4) $$S_3'(a) = S_3'(b), \quad S_3''(a) = S_3''(b);$$

(2.11.5) $\quad S_3'(a) = a_n, \qquad S_3'(b) = b_n;$

(2.11.6) $\quad S_3''(a) = A_n, \qquad S_3''(b) = B_n;$

(2.11.7) $\quad S_3'''(x_1-0)=S_3'''(x_1+0), \; S_3'''(x_{n-1}-0)=S_3'''(x_{n-1}+0),$

gde su a_n, b_n, A_n, B_n zadati realni brojevi.

Uslovi (2.11.4) definišu tzv. periodični splajn. Ovi uslovi se koriste ako je, na primer, funkcija f koju interpoliramo periodična sa periodom b-a.

Ako je, na primer, funkcija f diferencijabilna i mi poznajemo vrednosti izvoda u krajnjim tačkama a i b, tada se koriste dopunski uslovi (2.11.5), sa $a_n = f'(a)$ i $b_n = f'(b)$, ili dopunski uslovi (2.11.6), sa $A_n = f''(a)$ i $B_n = f''(b)$. Ako je $A_n=B_n=0$, što je čest slučaj kod modela iz mehanike, odgovarajući splajn se naziva prirodni kubni splajn.

Uslovi (2.11.7) su najsloženiji, ali oni obezbedjuju neprekidnost trećeg izvoda splajna u tačkama $x=x_1$ i $x=x_{n-1}$.

6.2.12. Konstrukcija kubnog splajna

Neka na mreži Δ_n, datoj promoću (2.11.3), imamo

$$S_3(x_i) = f_i, \quad S_3'(x_i) = m_i, \quad S_3''(x_i) = M_i \quad (i=0,1,\ldots,n).$$

Neka je dalje $h_i = x_i - x_{i-1}$. Na osnovu podataka u tačkama x_{i-1} i x_i konstruišimo Hermiteov interpolacioni polinom i nametnimo takve uslove da njegov stepen ne bude viši od trećeg, kako bi on na podsegmentu $[x_{i-1}, x_i]$ predstavljao kubni splajn.
Ovaj problem je rešen kroz primer 2.8.2. Tako za $x \in [x_{i-1}, x_i]$ možemo uzeti

(2.12.1)
$$S_3(x) = f_{i-1}+m_{i-1}(x-x_{i-1}) + \frac{M_{i-1}}{2}(x-x_{i-1})^2 + \frac{1}{h_i^3}\left(f_i-f_{i-1}-m_{i-1}h_i - \frac{M_{i-1}}{2}h_i^2\right)(x-x_{i-1})^3,$$

pri čemu, na osnovu (2.8.8) mora važiti

$$
(2.12.2)\qquad
\begin{aligned}
m_i + 2m_{i-1} + \frac{1}{2} M_{i-1} h_i &= \frac{3}{h_i} (f_i - f_{i-1}),\\
m_i + m_{i-1} - \frac{1}{6}(M_i - M_{i-1}) h_i &= \frac{2}{h_i}(f_i - f_{i-1}).
\end{aligned}
$$

Slično, za podsegment $[x_i, x_{i+1}]$ imamo

$$
(2.12.3)\qquad
\begin{aligned}
m_{i+1} + 2m_i + \frac{1}{2} M_i h_{i+1} &= \frac{3}{h_{i+1}}(f_{i+1} - f_i),\\
m_{i+1} + m_i - \frac{1}{6}(M_{i+1} - M_i) h_{i+1} &= \frac{2}{h_{i+1}}(f_{i+1} - f_i).
\end{aligned}
$$

Iz sistema jednačina (2.12.2)-(2.12.3) možemo eliminisati m_{i-1}, m_i, m_{i+1} (ili M_{i-1}, M_i, M_{i+1}). Tako dobijamo

$$
\begin{aligned}
\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1}) M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i},\\
&= (h_i + h_{i+1}) [x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f],
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} M_{i+1} = 6 [x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f]
$$

gde je sa $[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f]$ označena podeljena razlika drugog reda funkcije f u tačkama x_{i-1}, x_i, x_{i+1} (videti odeljak 6.2.3).

Poslednja jednačina se može napisati za sve unutrašnje čvorove, tj. za $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ako stavimo

$$
\alpha_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \beta_i = 1 - \alpha_i, \quad d_i = 6\ [x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f]
$$

na osnovu prethodnog imamo sledeći sistem linearnih jednačina

$$
(2.12.4)\qquad \alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i \qquad (i = 1, \ldots, n-1).
$$

Dobijeni sistem od n-1 jednačina sadrži n+1 nepoznatih: $M_o, M_1, \ldots, M_n$. Dakle, za potpuno odredjivanje splajna potrebno je zadati još dva dopunska uslova, o kojima je bilo reči u prethodnom odeljku.

Slično, eliminacijom M_{i-1}, M_i, M_{i+1} iz sistema jednačina (2.12.2)-(2.12.3) dobijamo

$$\alpha_i m_{i-1} + 2m_i + \beta_i m_{i+1} = d_i \qquad (i = 1,\ldots,n-1). \tag{2.12.5}$$

(i) Pretpostavimo sada da su dopunski konturni uslovi dati pomoću (2.11.6), tj. da su $M_o = A_n$ i $M_n = B_n$.

Tada sistem (2.12.4) u matričnom obliku izgleda

$$\begin{bmatrix} 2 & \beta_1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{n-2} & 2 & \beta_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \alpha_1 A_n \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \beta_{n-1} B_n \end{bmatrix}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo veličine $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. Sada, na osnovu (2.12.2), nalazimo

$$m_{i-1} = \frac{1}{h_i}(f_i - f_{i-1}) - \frac{1}{6}(M_i + 2M_{i-1})h_i,$$

$$m_i = \frac{1}{h_i}(f_i - f_{i-1}) + \frac{1}{6}(2M_i + M_{i-1})h_i.$$

Najzad, zamenom u (2.12.1) dobijamo

$$S_3(x) = f_{i-1} + (x - x_{i-1})\left(\frac{1}{h_i}(f_i - f_{i-1}) - \frac{1}{6}(M_i + 2M_{i-1})h_i\right)$$
$$+ \frac{M_{i-1}}{2}(x - x_{i-1})^2 + \frac{1}{6h_i}(M_i - M_{i-1})(x - x_{i-1})^3,$$

što se može predstaviti i u simetričnom obliku

$$S_3(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x - x_{i-1})^3 + \frac{M_{i-1}}{6h_i}(x_i - x)^3$$
$$+ \left(f_i - \frac{h_i^2 M_i}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \left(f_{i-1} - \frac{h_i^2 M_{i-1}}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i}, \tag{2.12.6}$$

gde $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Slično, korišćenje sistema (2.12.5), sa istim dopunskim konturnim uslovima (2.11.6), dovodi nas do nešto komplikovanijeg sistema od n+1 jednačina

(2.12.7)
$$\begin{cases} 2m_o + m_1 = \frac{3}{h_1}(f_1 - f_o) - \frac{1}{2} h_1 A_n, \\ \beta_i m_{i-1} + 2m_i + \alpha_i m_{i+1} = d_i \qquad (i = 1, \dots, n-1), \\ m_{n-1} + 2m_n = \frac{3}{h_n}(f_n - f_{n-1}) + \frac{1}{2} h_n B_n. \end{cases}$$

Tada ekvivalentni izraz za splajn postaje

(2.12.8)
$$\begin{aligned} S_3(x) = {} & \frac{m_{i-1}}{h_i^2}(x_i - x)^2 (x - x_{i-1}) - \frac{m_i}{h_i^2}(x_i - x)(x - x_{i-1})^2 \\ & + \frac{f_{i-1}}{h_i^3}(x_i - x)^2 \big(2(x - x_{i+1}) + h_i\big) \\ & + \frac{f_i}{h_i^3}(x - x_{i-1})^2 \big(2(x_i - x) + h_i\big). \end{aligned}$$

Ako definišemo veličine

(2.12.9)
$$\sigma_k = \frac{M_k - M_{k-1}}{h_k}, \quad \lambda_k = \frac{1}{6}(\sigma_{k+1} - \sigma_k),$$

kubni splajn se može iskazati u sažetom obliku jednom formulom za svako $x \in [a,b]$

(2.12.10)
$$\begin{aligned} S_3(x) = {} & f_o + m_o(x - x_o) + \frac{M_o}{2}(x - x_o)^2 + \frac{\sigma_1}{6}(x - x_o)^3 \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (x - x_k)_+^3, \end{aligned}$$

gde je

$$m_o = \frac{1}{h_1}(f_1 - f_o) - \frac{1}{6}(M_1 + 2M_o)h_1,$$

a funkcija $(x-x_k)_+^3$ definisana pomoću

$$(x-x_k)_+^3 = \begin{cases} 0, & x < x_k, \\ (x-x_k)^3, & x \geqq x_k. \end{cases}$$

(ii) Ako su dopunski konturni uslovi dati pomoću (2.11.5), tj. $m_o = a_n$ i $m_n = b_n$, pogodno je koristiti sistem jednačina (2.12.5), koji u matričnom obliku izgleda

$$(2.12.11) \quad \begin{bmatrix} 2 & \alpha_1 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 2 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-2} & 2 & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \beta_1 a_n \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \alpha_{n-1} b_n \end{bmatrix}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo veličine $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$, a zatim iz prve jednačine u (2.12.2) veličinu M_{i-1}, koja se pojavljuje u (2.12.1).

Moguće je, medjutim, koristiti i sistem (2.12.4). Tada će odgovarajući sistem po $M_o, \ldots, M_n$ biti

$$\begin{cases} 2M_o + M_1 = \dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{f_1 - f_o}{h_1} - a_n\right), \\ \alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \\ M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h_n}\left(b_n - \dfrac{f_n - f_{n-1}}{h_n}\right). \end{cases}$$

(iii) U slučaju periodičnih uslova (2.11.4), imamo sistem jednačina

$$\begin{cases} \alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ M_o = M_n, \; M_{n+1} = M_1, \; h_{n+1} = h_1, \end{cases}$$

ili, što je ekvivalentno,

$$
(2.12.12) \qquad \begin{cases} \beta_i m_{i-1} + 2m_i + \alpha_i m_{i+1} = c_i \qquad (i=1,2,\dots,n), \\ m_o = m_n,\ m_{n+1} = m_1,\ h_{n+1} = h_1, \end{cases}
$$

gde je

$$
(2.12.13) \qquad c_i = 3\beta_i [x_{i-1}, x_i; f] + 3\alpha_i [x_i, x_{i+1}; f] \quad (i=1,\dots,n-1).
$$

(iv) Granični uslovi (2.11.7) su najkomplikovaniji. Može se pokazati da je odgovarajući sistem jednačina dat pomoću

$$
\begin{cases} (2+\dfrac{h_1}{h_2})M_1 + \dfrac{h_2-h_1}{h_2} M_2 = d_1, \\ \alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i \qquad (i=2,\dots,n-2), \\ \dfrac{h_{n-1}-h_n}{h_{n-1}} M_{n-2} + (2+\dfrac{h_n}{h_{n-1}})M_{n-1} = d_{n-1}, \end{cases}
$$

dok su

$$
\begin{cases} M_o = (1+\dfrac{h_1}{h_2})M_1 - \dfrac{h_1}{h_2} M_2, \\ M_n = (1+\dfrac{h_n}{h_{n-1}})M_{n-1} - \dfrac{h_n}{h_{n-1}} M_{n-2}. \end{cases}
$$

Nešto komplikovaniji sistem biće ukoliko se odredjuju veličine m_i:

$$
(2.12.14) \qquad \begin{cases} (1+p)m_1 + pm_2 = \beta_1 \dfrac{f_1-f_0}{h_1} + \alpha_1(3+2p)\dfrac{f_2-f_1}{h_2}, \\ \beta_i m_{i-1} + 2m_i + \alpha_i m_{i+1} = c_i \qquad (i=2,\dots,n-2), \\ qm_{n-2} + (1+q)m_{n-1} = \beta_{n-1}(3+2q)\dfrac{f_{n-1}-f_{n-2}}{h_{n-1}} + \alpha_{n-1}\dfrac{f_n-f_{n-1}}{h_n} \end{cases}
$$

i

$$\begin{cases} m_o = p^2 m_2 + (p^2-1)m_1 + 2\left(\dfrac{f_1-f_o}{h_1} - p^2\,\dfrac{f_2-f_1}{h_2}\right), \\[2ex] m_n = q^2 m_{n-2} + (q^2-1)m_{n-1} + 2\left(\dfrac{f_n-f_{n-1}}{h_n} + q^2\,\dfrac{f_{n-2}-f_{n-1}}{h_{n-1}}\right), \end{cases}$$

gde su $p = h_1/h_2$ i $q = h_n/h_{n-1}$.

U svim slučajevima važe opšti izrazi za kubni splajn dati pomoću (2.12.6), (2.12.8), (2.12.10).

Primer 2.12.1. Konstruisaćemo interpolacioni kubni splajn za funkciju $x \mapsto f(x) = \sin\pi x$ na $[0,1]$ uzimajući ekvidistantne čvorove $x_k = 0.25k$ $(k = 0,1,2,3,4)$.

Ovde imamo ekvidistantnu mrežu čvorova sa korakom $h=1/4$. Vrednosti funkcije f u čvorovima mreže su

$$f_o = f(0) = 0,\quad f_1 = f(1/4) = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad f_2 = f(1/2) = 1,$$

$$f_3 = f(3/4) = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad f_4 = f(1) = 0.$$

Kako je $f''(0) = f''(1) = 0$, za odredjivanje splajna S_3 koristićemo dopunske konturne uslove $S_3''(0) = S_3''(1) = 0$, tj. $M_o = M_4 = 0$. Dakle, konstruisaćemo prirodni kubni splajn za funkciju f.

Sada imamo

$$d_i = 6[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f] = \frac{6}{2h}([x_i, x_{i+1}; f] - [x_{i-1}, x_i; f]),$$

tj.

$$d_i = \frac{3}{h^2}((f_{i+1}-f_i)-(f_i-f_{i-1})) = \frac{3}{h^2}\,\Delta^2 f_{i-1},$$

odakle, s obzirom na vrednosti f_k, nalazimo

$$d_1 = 48\Delta^2 f_o = 48(1-\sqrt{2}),\quad d_2 = 48\Delta^2 f_1 = 48(\sqrt{2}-2),$$

$$d_3 = 48\Delta^2 f_2 = 48(1-\sqrt{2}).$$

Kako je $h_i = h = 1/4$, imamo $\alpha_i = \beta_i = 1/2$, pa sistem za odredjivanje nepoznatih M_i $(i = 1,2,3)$ postaje

$$\begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = 48 \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Rešavanjem nalazimo $M_1 = M_3 = \frac{48}{7}(6-5\sqrt{2})$ i $M_2 = \frac{48}{7}(6\sqrt{2}-10)$.

Na osnovu (2.12.9) imamo

$$\sigma_1 = 4M_1, \quad \sigma_2 = 4(M_2-M_1), \quad \sigma_3 = 4(M_3-M_2), \quad \sigma_4 = -4M_3,$$

i

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}(M_2-2M_1), \quad \lambda_2 = \frac{2}{3}(M_3-2M_2+M_1), \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}(-2M_3+M_2),$$

tj.

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{64}{7}(8\sqrt{2}-11) \cong 2.868192,$$

$$\lambda_2 = \frac{64}{7}(16-11\sqrt{2}) \cong 4.056236.$$

Saglasno (2.12.10) imamo za $0 \le x \le 1$

$$S_3(x) \cong 3.1344447x - 4.89631x^3 + \lambda_1(x-0.25)^3_+ +$$
$$+ \lambda_2(x-0.5)^3_+ + \lambda_3(x-0.75)^3_+.$$

U tabeli 2.12.1 date su vrednosti za $S_3(x)$ i odgovarajuća greška $e(x) = \sin\pi x - S_3(x)$, uzimajući x sa korakom 0.05. Nije teško zaključiti da je $S_3(1-x) = S_3(x)$, pa je dovoljno tabelu sačiniti samo za x sa segmenta $[0, 0.5]$.

Vrednosti za $S_3(x)$ zaokrugljene su na četiri decimale. U poslednjoj koloni tabele broj u zagradi označava decimalni eksponent, na primer $3.2(-4) = 3.2 \cdot 10^{-4}$.

Tabela 2.12.1

x	$S_3(x)=S_3(1-x)$	$e(x)$
0.00	0.0000	0.
0.05	0.1561	3.2(-4)
0.10	0.3085	4.7(-4)
0.15	0.4536	3.5(-4)
0.20	0.5877	6.6(-5)
0.25	0.7071	0.
0.30	0.8085	5.3(-4)
0.35	0.8900	1.0(-3)
0.40	0.9501	9.6(-4)
0.45	0.9873	4.2(-4)
0.50	1.0000	0.

Iz tabele vidimo da je maksimalna greška kod ove aproksimacije približno 10^{-3}.

6.2.13. Ekstremalna i aproksimativna svojstva kubnog splajna

Neka je data mreža čvorova Δ_n pomoću (2.11.3) i neka su čvorovima pridruženi realni fiksni brojevi $f_o,f_1,\ldots,f_n$. Sa F označimo klasu dvaput neprekidno-diferencijabilnih funkcija na $[a,b]$, čije su vrednosti u čvorovima mreže x_i jednake datim vrednostima f_i, a njihovi drugi izvodi u krajnjim tačkama segmenta jednaki nuli. Naime,

$$F = \{g \mid g \in C^2[a,b],\ g(x_i)=f_i\ (i=0,1,\ldots,n),\ g''(a)=g''(b)=0\}.$$

Primetimo da prirodni kubni splajn S_3 pripada ovoj klasi funkcija i interpolira svaku funkciju iz F.

Za funkcije iz klase F često se definiše norma pomoću

$$\|g\| = \left(\int_a^b |g''(x)|^2 dx\right)^{1/2} \tag{2.13.1}$$

Sledeću ekstremalnu osobinu prirodnog kubnog splajna dokazao je J.C.Holliday [21].

<u>Teorema 2.13.1</u>. U klasi F, prirodni kubni splajn S_3 minimizira normu (2.13.1), tj.

$$\|S_3\| \leq \|g\| \qquad \text{za svako } g \in F. \tag{2.13.2}$$

<u>Dokaz</u>. Primetimo najpre da je

$$0 \leq \|g-S_3\|^2 = \int_a^b g''(x)^2 dx - 2\int_a^b g''(x)S_3''(x)dx + \int_a^b S_3''(x)^2 dx$$

$$= \|g\|^2 - \|S_3\|^2 - 2\int_a^b (g''(x)-S_3''(x))S_3''(x)dx.$$

Da bismo dokazali nejednakosti (2.13.2) dovoljno je dokazati da je integral na desnoj strani u poslednjoj formuli jednak nuli. Njegovom dekompozicijom dobijamo

$$I(a,b) = \int_a^b (g''(x)-S_3''(x))S_3''(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g''(x)-S_3''(x))S_3''(x)dx.$$

Sada, stavljanjem $u = S_3''(x)$ i $dv = (g''(x)-S_3''(x))dx$ i primenom parcijalne integracije na integral sa desne strane u poslednjoj jednakosti, dobijamo

$$I(x_{i-1},x_i) = S_3''(x)(g'(x)-S_3'(x))\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g'(x)-S_3'(x))S_3'''(x)dx.$$

Kako je $S_3'''(x) = C = \text{const}$, kada $x \in (x_{i-1},x_i)$, i $g(x_i) = f_i$, zaključujemo da je integral na desnoj strani u prethodnoj formuli jednak nuli, tako da je sada

$$I(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[S_3''(x)(g'(x)-S_3'(x))\right]_{x_{i-1}}^{x_i},$$

tj.

$$I(a,b) = S_3''(b)(g'(b)-S_3'(b))-S_3''(a)(g'(a)-S_3'(a)).$$

Najzad, zbog $S_3''(a)=S_3''(b)=0$, zaključujemo da je $I(a,b)=0$, čime je teorema dokazana.

Ukazaćemo sada na neka aproksimativna svojstva i konvergenciju kubnog splajna.

Najpre stavimo

$$u_i = u_i(x) = \frac{1}{h_i^2}(x_i-x)^2(x-x_{i-1}),$$

$$v_i = v_i(x) = \frac{1}{h_i^2}(x_i-x)(x-x_{i-1})^2,$$

$$w_i = w_i(x) = \frac{1}{h_i^2}\left(x-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\left((x_i-x)^2+4(x_i-x)(x-x_{i-1})+(x-x_{i-1})^2\right).$$

Tada korišćenjem (2.12.8) greška $R(x)=f(x)-S_3(x,f)$ za $x_{i-1}\leq x\leq x_i$ se može predstaviti u obliku

$$R(x) = m_i v_i - m_{i-1}u_i + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{h_i}w_i\right)(f(x)-f(x_{i-1}))$$
$$+ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{h_i}w_i\right)(f(x)-f(x_i)).$$

Za mrežu čvorova (2.11.3) definišimo veličinu

$$\|\Delta_n\| = \max_{1\leq i\leq n}|x_i-x_{i-1}|.$$

Ako $x\in[x_{i-1}, x_i]$ primetimo da je

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{h_i}w_i\right| + \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{h_i}w_i\right| = 1.$$

Na osnovu prethodnog i korišćenjem definicije modula neprekidnosti dobijamo sledeću ocenu

$$|R(x)| \leqq \max(|m_i|, |m_{i-1}|)(u_i+v_i) + \omega(f; \|\Delta_n\|).$$

Kako je $u_i + v_i = \frac{1}{h_i^2}(x_i - x)(x - x_{i-1}) \leqq \frac{1}{4} h_i$ imamo

(2.13.3) $$|R(x)| \leqq \frac{1}{4} h_i \max(|m_i|, |m_{i-1}|) + \omega(f; \|\Delta_n\|).$$

Slično se mogu dokazati i sledeće nejednakosti za izvode

(2.13.4) $$|R'(x)| \leqq \max(|m_i - f'(x_i)|, |m_{i-1} - f'(x_{i-1})|) + 2\omega(f; \|\Delta_n\|)$$

i

(2.13.5) $$|R''(x)| \leqq \max(|f''(x_i) - M_i|, |f''(x_{i-1}) - M_{i-1}|) + \omega(f''; \|\Delta_n\|).$$

Pretpostavimo sada da je mreža Δ_n data pomoću jedne vrste matrice X iz definicije 2.7.1, tj. da je

(2.13.6) $$\Delta_n: \ a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = b.$$

Kratkoće radi mi ćemo izostavljati gornji indeks.

<u>Teorema 2.13.2.</u> Neka $f \in C[a,b]$ i neka je $S_3(x;f)$ interpolacioni kubni splajn na mreži (2.13.6), koji zadovoljava jedan od uslova (2.11.5)-2.11.7), ili uslov (2.11.4) ukoliko je f još i periodična sa periodom b-a. Tada, za svako $x \in [a,b]$, važi

(2.13.7) $$|f(x) - S_3(x;f)| \leqq \frac{3}{4} D_n \|\Delta_n\| + q_n + \omega(f, \|\Delta_n\|),$$

gde je $D_n = \max\limits_{1 \leqq k \leqq n} |[x_{k-1}, x_k; f]|$, a q_n, u zavisnosti od dopunskih konturnih uslova, ima oblik:

1° Za periodične uslove (2.11.4), $q_n = 0$;

2° Za uslove (2.11.5), $q_n = \frac{1}{4} \max(|a_n|, |b_n|) \cdot \|\Delta_n\|$;

3° Za uslove (2.11.6), $q_n = \frac{1}{4} \max(h_1 |A_n|, h_n |B_n|) \cdot \|\Delta_n\|$;

4° Za uslove (2.11.7),

$$q_n = \begin{cases} 7\max(1,p^3,q^3) & (a \leqq x \leqq x_1 \lor x_{n-1} \leqq x \leqq b), \\ \max(3,2p+1)D_n & (x_1 \leqq x \leqq x_{n-1}), \end{cases}$$

gde su $p = h_1/h_2$ i $q = h_n/h_{n-1}$.

Dokaz. S obzirom na nejednakost (2.13.3), za dokaz ove teoreme dovoljno je oceniti veličinu $\max\limits_i |m_i|$, koja ustvari predstavlja normu $\|\vec{m}\|_\infty$, gde je $\vec{m}$ vektor rešenja jednog od sistema jednačina (2.12.12), (2.12.11), (2.12.7), (2.12.14), što redom odgovara dopunskim kontrunim uslovima (2.11.4) - (2.11.7).

Na primer, kod periodičnih uslova (2.11.4), sistem (2.12.12), po $m_1,\dots,m_n$ ($m_0 = m_n$, $m_{n+1} = m_1$), ima matricu i vektor slobodnih članova oblika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 2 & \alpha_2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \beta_{n-1} & 2 & \alpha_{n-1} \\ \alpha_n & 0 & 0 & & 0 & \beta_n & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

gde su c_i dati pomoću (2.12.13).

Na osnovu teoreme 1.6.8, iz odeljka 4.1.6, važi $\|\vec{m}\|_\infty \leqq \frac{1}{a}\|\vec{c}\|_\infty$, ako je

$$\min_{1 \leqq i \leqq n} \{|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\} = a > 0.$$

Evidentno, u ovom slučaju imamo $a = 1$. Dalje imamo

$$\|\vec{c}\|_\infty = \max_i |c_i| = 3\max_i |\beta_i[x_{i-1},x_i;f] + \alpha_i[x_i,x_{i+1};f]|,$$

tj.

$$\|\vec{c}\|_\infty \leqq 3(\beta_i + \alpha_i)\max_i |[x_{i-1},x_i;f]| = 3D_n.$$

Dakle, $\|\vec{m}\|_\infty \leq 3D_n$. Sada, iz (2.13.3) sleduje

$$|f(x) - S_3(x,f)| \leq \frac{3}{4} D_n\|\Delta_n\| + \omega(f;\ \|\Delta_n\|), \tag{2.13.8}$$

što predstavlja (2.13.7) sa $q_n = 0$ (slučaj 1°). Primetimo da iz (2.13.8) sleduje konvergencija kubnog splajna ka neprekidnoj funkciji f, kada $n \to +\infty$ i $\|\Delta_n\| \to 0$.

Slično se dokaz sprovodi i za ostale dopunske konturne uslove.

6.2.14. Pronyeva interpolacija

Neka je funkcija f data na skupu ekvidistantnih tačaka parovima vrednosti $\{(x_k, f_k)\}_{k=0,1,\ldots,2n-1}$. Kako je $x_k - x_{k-1} = h = \text{const}$ $(k=1,\ldots,2n-1)$, smenom $x = x_0 + kh$, dati skup podataka možemo zameniti skupom $\{(k, f_k)\}_{k=0,1,\ldots,2n-1}$.

Postavimo interpolacioni problem

$$\phi(k) = f_k \qquad (k = 0,1,\ldots,2n-1), \tag{2.14.1}$$

sa aproksimacionom funkcijom oblika

$$\phi(k) = C_1\phi_1(k) + C_2\phi_2(k) + \ldots + C_n\phi_n(k),$$

gde je ϕ rešenje linearne diferencne jednačine reda n sa konstantnim koeficijentima

$$\phi(k+n) + a_n\phi(k+n-1) + \ldots + a_2\phi(k+1) + a_1\phi(k) = 0. \tag{2.14.2}$$

S obzirom na (2.14.1), iz (2.14.2), za $k = 0,1,\ldots,2n-1$, sleduje sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} f_0a_1 + f_1a_2 + \ldots + f_{n-1}a_n &= -f_n, \\ f_1a_1 + f_2a_2 + \ldots + f_n a_n &= -f_{n+1}, \\ &\vdots \\ f_{n-1}a_1 + f_na_2 + \ldots + f_{2n-2}a_n &= -f_{2n-1}. \end{aligned} \tag{2.14.3}$$

Dakle, korišćenjem interpolacionog uslova (2.14.1), i zahvaljujući ekvidistantnosti podataka, uspeli smo da dodjemo do sistema jednačina za odredjivanje koeficijenata diferencne jednačine (2.14.2).

Ako je determinanta

$$\begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{n-1} \\ f_1 & f_2 & & f_n \\ \vdots & & & \\ f_{n-1} & f_n & & f_{2n-2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

rešenje sistema (2.14.3) je jedinstveno.

Odredjivanjem korena $r_1, r_2, \dots, r_n$ karakteristične jednačine

$$r^n + a_n r^{n-1} + \dots + a_2 r + a_1 = 0,$$

nalazimo partikularna rešenja diferencne jednačine (2.14.2), ϕ_1, $\phi_2, \dots, \phi_n$ (videti odeljak 1.3.1 u I delu). Ovim se postavljeni interpolacioni problem svodi na linearni problem. Naime, konstante $C_1, C_2, \dots, C_n$ se mogu odrediti, na primer, iz sistema linearnih jednačina

(2.14.4) $$C_1\phi_1(k) + C_2\phi_2(k) + \dots + C_n\phi_n(k) = f_k \quad (k=0,1,\dots,n-1).$$

Najzad, imajući u vidu smenu $x = x_0 + kh$, dobijamo interpolacionu funkciju

$$\Psi(x) = \phi\left(\frac{x-x_0}{h}\right) = C_1\phi_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + C_2\phi_2\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + \dots + C_n\phi_n\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

kojom je interpoliran skup podataka $\{(x_k, f_k)\}_{k=0,1,\dots,2n-1}$. Ovakva interpolacija nosi naziv Pronyeva (eksponencijalna) interpolacija ([30]). Problemi vezani za egzistenciju interpolacione funkcije izlaze iz okvira ove knjige. Jedan interesantan prilaz u odredjivanju funkcije ϕ dao je P.B. Madić u [29].

Primer 2.8.1. Za skup podataka

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
f_k	8	2	4	0	-3	-5	-7.75	-10.375

imamo $2n-1 = 7$, tj. $n=4$, i korak $h = 0.5$. Sistem linearnih jednačina (2.14.3) za odredjivanje koeficijenata diferencne jednačine postaje

$$\begin{aligned}
8a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 0a_4 &= 3,\\
2a_1 + 4a_2 + 0a_3 - 3a_4 &= 5,\\
4a_1 + 0a_2 - 2a_3 - 5a_4 &= 7.75,\\
0a_1 - 3a_2 - 5a_3 - 7.75a_4 &= 10.375,
\end{aligned}$$

odakle je $a_1 = a_3 = 0.25$, $a_2 = 0$, $a_4 = -1.5$. Kako se karakteristična jednačina

$$r^4 - 1.5r^3 + 0.25r^2 + 0.24 = 0$$

može predstaviti u obliku

$$(r-1)^2(r^2 + 0.5r + 0.25) = 0,$$

imamo $r_1 = r_2 = 1$, $r_{3,4} = (-1 \pm i\sqrt{3})/4$, pa je

$$\phi(k) = C_1 + C_2 k + 2^{-k}(C_3 \cos\frac{2\pi k}{3} + C_4 \sin\frac{2\pi k}{3}).$$

Najzad, iz (2.14.4) sleduje

$$C_1 = \frac{376}{49},\quad C_2 = -\frac{18}{7},\quad C_3 = \frac{16}{49},\quad C_4 = -\frac{592}{49\sqrt{3}}$$

pa je tražena interpolaciona funkcija data sa

$$\Psi(x) = \phi(2x) = \frac{4}{49}\left(94 - 63x + 4^{1-x}(\cos\frac{4\pi x}{3} - \frac{37}{\sqrt{3}}\sin\frac{4\pi x}{3})\right).$$

Primedba 2.14.1. Interesantno je da ovaj tip aproksimacije - Prony-eva interpolacija - nije dovoljno našao mesta u primenama.

6.3. PROBLEM NAJBOLJIH APROKSIMACIJA

Ovo poglavlje je posvećeno aproksimacijama koje se najviše pojavljuju u primenama u raznim oblastima nauke i tehnike. Tu se, pre svega, obradjuju srednje-kvadratne aproksimacije koje su najjednostavnije za primenu. Razmatra se i slučaj srednje-kvadratne aproksimacije sa ograničenjem. Pored kontinualne aproksimacije data je i diskretna srednje-kvadratna aproksimacija, ili metod najmanjih kvadrata, kako se popularno naziva. Posebna pažnja je posvećena odredjivanju parametara u tzv. empirijskim formulama, što je veoma važno u nekim eksperimentalnim naukama. U posebnom odeljku je izložena srednje-kvadratna aproksimacija polinomske funkcije sa Čebiševljevom težinom, poznata kao ekonomizacija stepenih redova.

U poslednjem odeljku se izlaže mini-max aproksimacija neprekidne funkcije na $[a,b]$ polinomskom aproksimacionom funkcijom. Za odgovarajući diskretni analogon ukazano je kako se može rešiti metodom linearnog programiranja.

6.3.1. Osnovni pojmovi

Neka je funkcija $f:[a,b] \to R$ data skupom parova vrednosti (x_j, f_j) $(j=0,1,\ldots,m)$, gde je $f_j \equiv f(x_j)$. Razmotrićemo problem aproksimacije funkcije f linearnom aproksimacionom funkcijom (videti odeljak 6.1.2)

$$\phi(x) \equiv \phi(x;a_0,\ldots,a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x),$$

pri čemu je $m > n$*. Postupajući kao kod interpolacije, u ovom slučaju, dolazimo do tzv. preodredjenog sistema jednačina

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x_j) = f_j \qquad (j=0,1,\ldots,m), \tag{3.1.1}$$

koji, u opštem slučaju, nema rešenje, tj. sve jednačine sistema (3.1.1) ne mogu biti istovremeno zadovoljene.

Ako definišemo δ_n pomoću

$$\delta_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x), \tag{3.1.2}$$

moguće je tražiti "rešenje" sistema (3.1.1) takvo da je

$$\|\delta_n^*\|_r = \min_{a_i} \|\delta_n\|_r, \tag{3.1.3}$$

gde je

---

*) *Za $m = n$ imamo interpolaciju.*

$$\|\delta_n\|_r = \left(\sum_{j=0}^{m} |\delta_n(x_j)|^r\right)^{1/r} \qquad (r \geqq 1).$$

Jednakost (3.1.3) daje kriterijum za odredjivanje parametara $a_o, a_1, \ldots, a_n$ u aproksimacionoj funkciji ϕ. Veličinu $\|\delta_n^*\|_r$, koja uvek egzistira, nazivamo veličinom najbolje aproksimacije u ℓ^r. Optimalne vrednosti parametara $a_i = \bar{a}_i$ $(i = 0,1,\ldots n)$ u smislu (3.1.3) daju najbolju ℓ^r aproksimacionu funkciju

$$\phi^*(x) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \phi_i(x).$$

Najčešće se, u praksi, uzima:

1° $r = 1$, $\|\delta_n\|_1 = \sum_{j=0}^{m} |\delta_n(x_j)|$ (najbolja ℓ^1 aproksimacija),

2° $r = 2$, $\|\delta_n\|_2 = \left(\sum_{j=0}^{m} \delta_n(x_j)^2\right)^{1/2}$ (srednje-kvadratna aproksimacija),

3° $r = +\infty$, $\|\delta_n\|_\infty = \max\limits_{0 \leqq j \leqq m} |\delta_n(x_j)|$ (Čebiševljeva mini-max aproksimacija).

Analogno prethodnom, može se razmatrati problem najbolje aproksimacije funkcije f u prostoru $L^r(a,b)$. Ovde je (videti odeljak 6.1.3)

$$\|\delta_n\|_r = \left(\int_a^b |\delta_n(x)|^r dx\right)^{1/r} \qquad (1 \leqq r < +\infty)$$

i

$$\|\delta_n\|_\infty = \max_{a \leqq x \leqq b} |\delta_n(x)|.$$

Uvodjenjem težinske funkcije $p:(a,b) \to R^+$ može se razmatrati opštiji slučaj srednje-kvadratnih aproksimacija, pri čemu su odgovarajuće norme za diskretan i kontinualan slučaj date sa

(3.1.4) $$\|\delta_n\|_2 = \|\delta_n\|_{2,p} = \left(\sum_{j=0}^{m} p(x_j)\delta_n(x_j)^2\right)^{1/2}$$

i

(3.1.5) $$\|\delta_n\|_2 = \|\delta_n\|_{2,p} = \left(\int_a^b p(x)\delta_n(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

respektivno.

Primer 3.1.1. Funkciju $x \mapsto f(x) = x^{1/3}$ aproksimirajmo funkcijom $x \mapsto \phi(x) = a_o + a_1 x$ u prostoru

1^o $L^1(0,1)$, 2^o $L^2(0,1)$, 3^o $L^\infty(0,1)$.

Ovde je $\delta_1(x) = x^{1/3} - a_o - a_1 x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$.

1^o Najbolju $L^1(0,1)$ aproksimaciju dobijamo minimizacijom norme

$$\|\delta_1\|_1 = \int_0^1 |x^{1/3} - a_o - a_1 x|\, dx.$$

Kako je $\dfrac{\partial\delta_1}{\partial a_o} = -1$ i $\dfrac{\partial\delta_1}{\partial a_1} = -x$, optimalne vrednosti parametara a_o i a_1 odredjujemo iz sistema jednačina

(3.1.6) $$\int_0^1 \operatorname{sgn}\delta_1(x)\,dx = 0, \qquad \int_0^1 x \operatorname{sgn}\delta_1(x)\,dx = 0.$$

S obzirom da se može uzeti da δ_1 menja znak na $[0,1]$ u tačkama x_1 i x_2 (videti sl. 3.1.1), to se sistem jednačina (3.1.6) svodi na sistem

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2^2 - x_1^2 = \frac{1}{2},$$

odakle sleduje $x_1 = \frac{1}{4}$ i $x_2 = \frac{3}{4}$.

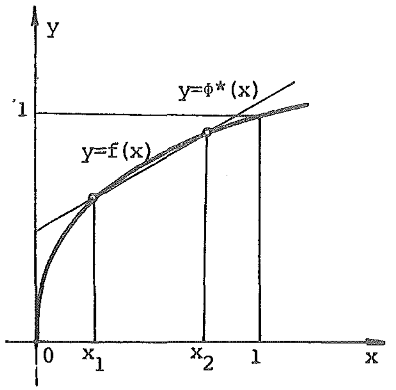
Dakle, problem odredjivanja najbolje $L^1(0,1)$ aproksimacije se svodi na interpolacioni problem, tj. na odredjivanje interpolacionog polinoma ϕ^* koji zadovoljava uslove

$$\phi^*(1/4) = f(1/4) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \qquad \phi^*(3/4) = f(3/4) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

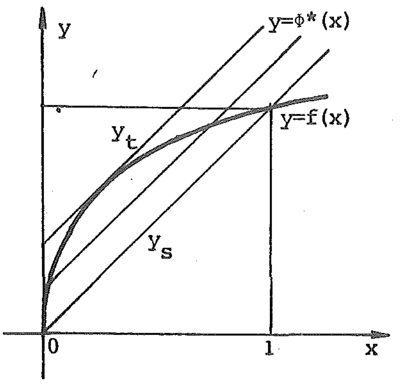
Prema tome, imamo

$$\phi^*(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}(\sqrt[3]{3} - 1)x + \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}(3 - \sqrt[3]{3})$$

$$\cong 0.55720x + 0.49066.$$



Sl. 3.1.1



Sl. 3.1.2

2^o Neka je

$$I(a_o, a_1) = \|\delta_1\|_2^2 = \int_o^1 (x^{1/3} - a_o - a_1 x)^2 dx.$$

Tada iz uslova

$$\frac{\partial I}{\partial a_o} = -2 \int_o^1 (x^{1/3} - a_o - a_1 x)\,dx = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = -2 \int_o^1 x(x^{1/3} - a_o - a_1 x)\,dx = 0,$$

sleduje

$$a_o + \frac{1}{2} a_1 = \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2} a_o + \frac{1}{3} a_1 = \frac{3}{7},$$

tj. $a_o = \bar{a}_o = \frac{3}{7}$, $a_1 = \bar{a}_1 = \frac{9}{14}$. Dakle, najbolja srednje-kvadratna aproksimacija je data sa

$$\phi^*(x) = \frac{3}{7} + \frac{9}{14} x \cong 0.42857 + 0.64286x.$$

3^o Za odredjivanje najbolje mini-max aproksimacije iskoristićemo sledeći prost geometrijski postupak. Kroz krajnje tačke krive $y = f(x) = x^{1/3}$ $(0 \leq x \leq 1)$ postavimo sečicu, a zatim tangentu krive koja je paralelna sa ovom sečicom (videti sl. 3.1.2). Odgovarajuće jednačine ovih pravih su redom

$$y = y_s = x \qquad \text{i} \qquad y = y_t = x + \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Nije teško zaključiti da je tražena najbolja mini-max aproksimacija data sa

$$\phi^*(x) = \frac{1}{2}(y_s + y_t) = x + \frac{\sqrt{3}}{9} \cong x + 0.19245,$$

pri čemu je veličina najbolje aproksimacije $\|\delta_1^*\|_\infty = \frac{\sqrt{3}}{9}$. Primetimo da je

$$-\delta_1(0) = \delta_1(\sqrt{3}/9) = -\delta_1(1) = \|\delta_1^*\|_\infty.$$

6.3.2. Srednje-kvadratna aproksimacija

U ovom odeljku razmatraćemo problem srednje-kvadratne aproksimacije funkcije $f:[a,b] \to R$ pomoću linearne aproksimacione funkcije

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x),$$

gde je $\{\phi_i\}$ sistem linearno nezavisnih funkcija iz prostora $L^2(a,b)$, u kome je skalarni proizvod uveden pomoću

$$(f,g)=\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \qquad (f,g\in L^2(a,b)),$$

gde je $p:(a,b)\to R^+$ data težinska funkcija.

Koristeći se oznakama i rezultatima iz prethodnog odeljka, za dobijanje najbolje srednje-kvadratne aproksimacije za f, zaključujemo da je potrebno minimizirati normu (3.1.5) po parametrima a_i $(i=0,1,\ldots,n)$.

Ako stavimo $I(a_o,a_1,\ldots,a_n)=\|\delta_n\|^2=(\delta_n,\delta_n)$, tada iz

$$\frac{\partial I}{\partial a_j}=2\int_a^b p(x)(f(x)-\sum_{i=0}^{n} a_i\phi_i(x))(-\phi_j(x))dx=0 \quad (j=0,1,\ldots,n)$$

sleduje sistem jednačina za odredjivanje aproksimacionih parametara

$$\sum_{i=0}^{n}(\phi_i,\phi_j)a_i=(f,\phi_j) \qquad (j=0,1,\ldots,n).$$

Ovaj sistem se može predstaviti i u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} (\phi_o,\phi_o) & (\phi_1,\phi_o) & \ldots & (\phi_n,\phi_o) \\ (\phi_o,\phi_1) & (\phi_1,\phi_1) & & (\phi_n,\phi_1) \\ \vdots & & & \\ (\phi_o,\phi_n) & (\phi_1,\phi_n) & & (\phi_n,\phi_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\phi_o) \\ (f,\phi_1) \\ \vdots \\ (f,\phi_n) \end{bmatrix}.$$

Matrica ovog sistema je poznata kao Gramova matrica. Može se pokazati da je ova matrica regularna ako je sistem funkcija $\{\phi_i\}$ linearno nezavisan, što znači da u tom slučaju postoji jedinstveno rešenje datog aproksimacionog problema.

Sistem jednačina (3.2.1) se može jednostavno rešiti ako je sistem funkcija $\{\phi_i\}$ ortogonalan. Naime, tada matrica ovog sistema postaje dijagonalna pa su rešenja sistema data sa

(3.2.2) $$a_i=\bar{a}_i=\frac{(f,\phi_i)}{(\phi_i,\phi_i)} \qquad (i=0,1,\ldots,n).$$

Pokažimo sada da pri ovako izabranim parametrima a_i $(i=0,1,\ldots,n)$ funkcija I, zaista dostiže minimum. Naime, kako je

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a_j \partial a_k} = 2(\phi_k,\phi_j) = 2\|\phi_k\|^2 \delta_{kj},$$

gde je δ_{kj} Kroneckerova delta, imamo

$$d^2 I = 2\sum_{i=0}^{n} \|\phi_k\|^2 da_k^2 > 0,$$

što dokazuje pomenuto tvrdjenje.

Dakle, najbolja srednje-kvadratna aproksimacija funkcije f na potprostoru $X_n = L(\phi_o,\phi_1,\ldots,\phi_n)$, gde je $\{\phi_i\}$ ortogonalan sistem funkcija, data je sa

$$\phi^*(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(f,\phi_i)}{\|\phi_i\|^2}\phi_i(x). \tag{3.2.3}$$

Jedna važna klasa srednje -kvadratnih aproksimacija je aproksimacija algebarskim polinomima. U tom slučaju ortogonalnu bazu potprostora X_n konstruišemo Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije, polazeći, na primer, od prirodne baze $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ (videti odeljak 2.1.4) ili pak korišćenjem opštih metoda izloženih u odeljcima 2.2.5, 2.2.6 i 2.2.7. Opšta teorija ortogonalnih polinoma izložena je u poglavlju 2.2.

Primer 3.2.1. Za funkciju $x \mapsto f(x) = |x|$ na segmentu $[-1,1]$ odredimo u skupu polinoma ne višeg stepena od trećeg najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju sa težinskom funkcijom $x \mapsto p(x) = (1-x^2)^{3/2}$.

Sistem ortogonalnih polinoma sa ovom težinskom funkcijom konstruisan je u primeru 1.4.2 (odeljak 2.1.4), pri čemu je

$$\phi_o(x) = 1,\quad \phi_1(x) = x,\quad \phi_2(x) = x^2 - \frac{1}{6},\quad \phi_3(x) = x^3 - \frac{3}{8}x$$

i

$$\|\phi_o\| = \sqrt{\frac{3\pi}{8}},\quad \|\phi_1\| = \frac{\sqrt{\pi}}{4},\quad \|\phi_2\| = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5\pi}{6}},\quad \|\phi_3\| = \frac{\sqrt{3\pi}}{32}.$$

Kako je

$$(f,\phi_o)=\frac{2}{5},\ (f,\phi_1)=0,\ (f,\phi_2)=\frac{1}{21},\ (f,\phi_3)=0,$$

na osnovu (3.2.2) dobijamo

$$a_o=\frac{16}{15\pi},\ a_1=0,\ a_2=\frac{128}{35\pi},\ a_3=0,$$

što znači da je tražena aproksimacija data sa

$$\phi^*(x)=\frac{16}{15\pi}+\frac{128}{35\pi}\,(x^2-\frac{1}{6})\cong 0.14551309+1.1641047x^2.$$

Primetimo da je ova funkcija, takodje, najbolja aproksimacija i u skupu polinoma ne višeg stepena od dva.

S obzirom da ćemo na dalje raditi samo sa ortogonalnim polinomima kao bazisnim funkcijama, to ćemo umesto oznake ϕ_k koristiti oznaku Q_k.

Teorema3.2.1. Za veličinu najbolje srednje-kvadratne aproksimacije važi jednakost

(3.2.4) $$\|f-\phi^*\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}\bar{a}_i^2\|Q_i\|^2,$$

gde su koeficijenti $\bar{a}_i$ odredjeni pomoću (3.2.2), tj. pomoću

(3.2.5) $$\bar{a}_i=\frac{(f,Q_i)}{\|Q_i\|^2}\qquad(i=0,1,\ldots,n).$$

Dokaz. Najpre, primetimo da je

(3.2.6) $$\|f-\phi^*\|^2=(f-\phi^*,f-\phi^*)=(f,f)-2(f,\phi^*)+(\phi^*,\phi^*).$$

Na osnovu (3.2.3), uz korišćenje ortogonalnosti polinoma Q_i, nalazimo da je

$$(\phi^*,\phi^*)=\sum_{i=0}^{n}\bar{a}_i^2(Q_i,Q_i)\quad \text{i}\quad (f,\phi^*)=\sum_{i=0}^{n}\bar{a}_i(f,Q_i).$$

Najzad, zamenom ovih vrednosti u (3.2.6), i imajući pritom u vidu (3.2.5), dobijamo (3.2.4).

Primedba 3.2.1. Kako je norma nenegativna, iz (3.2.4) sleduje nejednakost

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i^2 \|Q_i\|^2 \leq \|f\|^2, \tag{3.2.7}$$

koja je poznata kao Besselova nejednakost.

Primetimo da je ova nejednakost tačna za svako n. Za dato n, sa ϕ_n^* označimo najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju, datu pomoću (3.2.3), tj.

$$\phi_n^*(x) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i Q_i(x),$$

gde su koeficijenti $\bar{a}_i$ dati pomoću (3.2.5). Neka je, dalje,

$$I_n = \|f - \phi_n^*\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i^2 \|Q_i\|^2 .$$

Primetimo da je

$$\phi_n^*(x) = \phi_{n-1}^*(x) + \bar{a}_n Q_n(x)$$

i

$$I_n = I_{n-1} - \bar{a}_n^2 \|Q_n\|^2 .$$

Prema tome, najbolja srednje-kvadratna aproksimacija u klasi $\mathcal{P}_n$ se jednostavno konstruiše ako je poznata odgovarajuća aproksimacija u klasi $\mathcal{P}_{n-1}$.

Iz poslednje jednakosti zaključujemo da je niz $\{I_n\}$ nerastući, tj. da je $I_n \leq I_{n-1}$.

Razmotrimo sada slučaj kada $n \to +\infty$. Na osnovu Besselove nejednakosti može se zaključiti da niz $\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i^2 \|Q_i\|^2$ konvergira, odakle sleduje $\lim_{n \to +\infty} \bar{a}_n = 0$. Razvoj

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \bar{a}_i Q_i(x) \tag{3.2.8}$$

nazivamo Fourierov razvoj funkcije f po ortogonalnim polinomima Q_i.

Sledeća teorema se odnosi na slabu konvergenciju (konvergenciju po normi) srednje-kvadratne aproksimacije neprekidnih funkcija.

Teorema 3.2.2. Neka $f \in C[a,b]$. Tada je

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \| f - \phi_n^* \|^2 = 0$$

i

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \bar{a}_i^2 \|Q_i\|^2 = \|f\|^2 \text{ (Parsevalova jednakost).}$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\lim_{n \to +\infty} I_n = \delta > 0$ i izaberimo $\varepsilon > 0$, takvo da je

$$\varepsilon^2 = \delta/(2C_0) \qquad \left(C_0 = \int_a^b p(x)\,dx > 0\right).$$

Na osnovu Weierstrassove teoreme 1.4.1 postoji polinom P_m takav da je $|f(x) - P_m(x)| \leqq \varepsilon$, za svako $x \in [a,b]$. Tada imamo

$$\|f - P_m\|^2 = \int_a^b p(x)(f(x) - P_m(x))^2 dx \leqq \varepsilon^2 C_0 = \frac{\delta}{2}.$$

S druge strane, za najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju u klasi polinoma $\mathcal{P}_m$ važi

$$I_m = \|f - \phi_m^*\|^2 \leqq \|f - P_m\|^2.$$

Kako je niz I_m nerastući, na osnovu prethodnog zaključujemo da je

$$\delta \leqq I_m \leqq \frac{\delta}{2},$$

što je kontradikcija. Dakle, mora biti $\delta = 0$. Imajući u vidu (3.2.4) zaključujemo da važi Parsevalova jednakost.

Na osnovu teoreme 3.2.2 ne može se ništa zaključiti o uniformnoj konvergenciji $\phi_n^*(x)$ ka $f(x)$ na $[a,b]$. Zaista, ako stavimo $R_n(x) = f(x) - \phi_n^*(x)$, imamo

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{Q_i(x)}{\|Q_i\|^2}(f, Q_i) = f(x) - \int_a^b p(t) f(t) K_n(x,t)\,dt,$$

gde smo stavili

$$K_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{Q_i(x)Q_i(t)}{\|Q_i\|^2}.$$

Primetimo da je, zbog ortogonalnosti niza $\{Q_i\}$, $\int_a^b p(t)K_n(x,t)dt = 1$. Tada se greška može izraziti u obliku

$$R_n(x) = \int_a^b p(t)(f(x) - f(t))K_n(x,t)dt,$$

odakle vidimo da od prirode jezgra $K_n(x,t)$ i funkcije $f(x)$ zavisi da li ćemo imati uniformnu konvergenciju $\phi_n^*(x)$ ka $f(x)$ na $[a,b]$, tj. da li će $R_n(x) \to 0$, kada $n \to +\infty$, za svako $x \in [a,b]$. Tako, pod izvesnim uslovima za f, može se utvrditi uniformna konvergencija ka $f(x)$. Na primer, ako je težinska funkcija $p(x)=1$, važi sledeća teorema:

Teorema 3.2.3. Ako $f \in C^2[-1,1]$, tada za svako $x \in [-1,1]$ i svako $\varepsilon > 0$ postoji dovoljno veliko n da je

$$|R_n(x)| = |f(x) - \phi_n^*(x)| \leq \varepsilon/\sqrt{n}.$$

Slično se za srednje-kvadratne aproksimacije sa Čebiševljevom težinom $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ može pokazati da je $|R_n(x)| = O(1/n)$ za svako $x \in [-1,1]$.

Primer 3.2.2. U skupu polinoma ne višeg stepena od prvog, najbolja srednje-kvadratna aproksimacija za funkciju $x \mapsto \sin x$ na segmentu $[0, \pi/2]$ sa težinom $p(x) = 1$ je

$$\phi^*(x) = \frac{1}{\pi^2}(8\pi - 24) + \frac{1}{\pi^3}(96 - 24\pi)x.$$

Ukoliko se za težinsku funkciju uzme $p(x) = x$ dobija se

$$\phi^*(x) = \frac{1}{\pi^3}(384 - 120\pi) + \frac{1}{\pi^4}(384\pi - 1152).$$

6.3.3. Srednje-kvadratna aproksimacija sa ograničenjima

U ovom odeljku razmatraćemo srednje-kvadratne aproksimacije sa Gegenbauerovom težinskom funkcijom $x \mapsto p(x) = (1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ na $[-1,1]$ za realne funkcije koje pripadaju izvesnim klasama funkcija, na primer,

$$FP = \{ f \mid f(-x) = f(x),\ f(1) = 0,\ f \in L^2[-1,1] \}$$

i

$$FN = \{ f \mid f(-x) = -f(x),\ f(1) = 0,\ f \in L^2[-1,1] \},$$

pri čemu se aproksimacionim funkcijama nameću ograničenja takva da i one pripadaju istim klasama funkcija. Ovakve aproksimacije sa ograničenjima se često zahtevaju u primenama.

Primetimo, najpre, da je FP klasa parnih, a FN klasa neparnih funkcija, čije su vrednosti jednake nuli u tačkama x=1 i x=-1.

Mada je moguće razmatrati i opštiji slučaj aproksimacije sa drugim težinskim funkcijama i sa nizom drugih ograničenja, u ovom odeljku, kao što je već rečeno, razmatraćemo samo slučaj kada je p(x) Gegenbauerova težinska funkcija, i kada su ograničenja nad aproksimacionom funkcijom samo takva da pripada istoj klasi funkcija kao i funkcija f.

Dakle, skalarni proizvod je

$$(3.3.1) \qquad (f,g) = \int_{-1}^{1} p(x)f(x)g(x)dx \qquad (p(x)=(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}},\ \lambda > -\tfrac{1}{2}).$$

Neka je dalje $\mathcal{P}_m$ skup svih algebarskih polinoma ne višeg stepena od m i takav da polinomi pripadaju skupu FP ako je m parno, a skupu FN ako je m neparno.

Za funkciju $f \in FP$ (ili FN) odredićemo sada srednje-kvadratnu aproksimaciju u klasi $\mathcal{P}_{2n}$ (ili $\mathcal{P}_{2n+1}$) u odnosu na normu indukovanu skalarnim proizvodom (3.3.1). Tako imamo da su aproksimacije ϕ_{2n} i ϕ_{2n+1} redom rešenja sledeća dva minimizaciona problema:

$$(3.3.2) \qquad \min_{\phi \in \mathcal{P}_{2n}} \|f - \phi\|, \quad \text{kada } f \in FP,$$

i

$$(3.3.3) \qquad \min_{\phi \in \mathcal{P}_{2n+1}} \|f - \phi\|, \quad \text{kada } f \in FN.$$

U opštem slučaju, kada f nije ni parna ni neparna funkcija, ali zadovoljava uslov $f(-1) = f(1) = 0$, srednje-kvadratna aproksimacija ψ_m (u klasi polinoma stepena ne višeg od m), koja zadovoljava uslove $\psi_m(-1) = \psi_m(1) = 0$, jednostavno se dobija kao

$$\psi_m(x) = \phi_{2n}(x) + \phi_{2n+1}(x), \quad \text{kada je } m=2n+1,$$

$$\psi_m(x) = \phi_{2n}(x) + \phi_{2n-1}(x), \quad \text{kada je } m=2n,$$

gde su ϕ_{2n} i $\phi_{2n\mp 1}$ rešenja problema (3.3.2) i (3.3.3), što sleduje iz reprezentacije

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x)-f(-x)).$$

Izložićemo sada neke od rezultata do kojih su došli Milovanović i Wrigge ([27]).

Teorema 3.3.1. Ako $f \in FP$, tada je srednje-kvadratna aproksimacija u klasi $\mathcal{P}_{2n}$ data sa

$$\phi_{2n}(x) = \Lambda(\lambda)\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}(\lambda)(1-x^2)^k, \qquad \Lambda(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})},$$

gde su

$$a_{n,k}(\lambda) = \frac{(-1)^k}{(\lambda+\frac{1}{2})_{k+1}}\sum_{m=0}^{n}\frac{2m+\lambda}{\lambda}(f,C_{2m}^{\lambda})\alpha_{m,k}^{(n)}(\lambda) \qquad (\lambda\neq 0),$$

i

$$\alpha_{n,k}^{(n)}(\lambda) = \begin{cases} -\binom{n}{k}(n+\lambda+1)_k(\lambda+\frac{1}{2}), & m<k,\\[2mm] \binom{m}{k}(m+\lambda)_k(\lambda+k+\frac{1}{2}) - \binom{n}{k}(n+\lambda+1)_k(\lambda+\frac{1}{2}), & m\geq k.\end{cases}$$

Kada je $\lambda=0$ imamo

$$a_{n,k}(0) = \frac{(-1)^k}{(\frac{1}{2})_{k+1}}\sum_{m=0}^{n}\theta_m(f,T_{2m})\alpha_{m,k}^{(n)}(0),$$

gde je $\theta_0=1$ i $\theta_m=2$ za $m\geq 1$.

Primedba 3.3.1. Aproksimacija sa ograničenjem $\phi_{2n}(x)$ se može predstaviti u obliku

$$\phi_{2n}(x) = \hat{\phi}_{2n}(x) - \hat{\phi}_{2n}(1)\frac{S_0(x)}{S_0(1)} \qquad \left(S_0(x)=\Lambda(\lambda)C_{2n}^{\lambda+1}(x)\right), \tag{3.3.4}$$

gde je $\hat{\phi}_{2n}$ odgovarajuća srednje-kvadratna aproksimacija bez ograničenja (videti (3.2.3))

$$\hat{\phi}_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(f,C_{2k}^{\lambda})}{h_{2k}}C_{2k}^{\lambda}(x). \tag{3.3.5}$$

Ovde je h_{2k} kvadrat norme Gegenbauerovog polinoma $C_{2k}^{\lambda}(x)$, tj.

$h_{2k} = \|C_{2k}^{\lambda}\|^2 = \dfrac{\lambda}{(2k+\lambda)\Lambda(\lambda)}C_{2k}^{\lambda}(1)$ ($\Lambda(\lambda)$ je definisano u teoremi).

Dokaz teoreme 3.3.1. Neka $f \in FP$ i neka je $\lambda \neq 0$. U cilju nalaženja minimuma veličine $\|f-\phi_{2n}\|$ pod ograničenjem $\phi_{2n}(1)=0$, predstavimo ϕ_{2n} kao linearnu kombinaciju Gegenbauerovih polinoma $C_{2k}^{\lambda}(x)$ i razmotrimo pomoćnu funkciju $D=D(d_0,d_1,\dots,d_n)$, definisanu pomoću

$$D=\int_{-1}^{1}\Big(f(x)-\sum_{k=0}^{n} d_k C_{2k}^{\lambda}(x)\Big)^2 p(x)\,dx+\mu\sum_{k=0}^{n} d_k C_{2k}^{\lambda}(1),$$

gde je μ Lagrangeov multiplikator, čiju vrednost treba odrediti. Drugim rečima, imamo tipičan zadatak uslovnog ekstremuma. Tada iz

$$\frac{\partial D}{\partial d_i}=-2(f,C_{2i}^{\lambda})+2h_{2i}d_i+C_{2i}^{\lambda}(1)=0 \quad (i=0,1,\dots,n)$$

sleduje

$$d_i=\frac{1}{h_{2i}}\Big((f,C_{2i}^{\lambda})-\frac{1}{2}\mu C_{2i}^{\lambda}(1)\Big) \quad (i=0,1,\dots,n), \tag{3.3.6}$$

gde je h_{2i} kvadrat norme polinoma $C_{2i}^{\lambda}(x)$.

Na osnovu ograničenja $\phi_{2n}(1)=0$ nalazimo da je

$$\frac{1}{2}\mu=\sum_{k=0}^{n}\frac{(f,C_{2k}^{\lambda})}{h_{2k}}C_{2k}^{\lambda}(1)\Big/\sum_{k=0}^{n}\frac{(C_{2k}^{\lambda}(1))^2}{h_{2k}}.$$

Korišćenjem Christoffel-Darbouxovog identiteta, ili pak rekurentne relacije

$$C_{2k+2}^{\lambda+1}(x)=C_{2k}^{\lambda+1}(x)+\frac{2k+2+\lambda}{\lambda}C_{2k+2}^{\lambda}(x),$$

može se dokazati identitet

$$S_0(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_{2k}^{\lambda}(x)C_{2k}^{\lambda}(1)}{h_{2k}}=\Lambda(\lambda)C_{2n}^{\lambda+1}(x), \tag{3.3.7}$$

na osnovu koga imamo da je

$$\frac{1}{2}\mu=\frac{\tilde{\phi}_{2n}(1)}{S_0(1)}, \tag{3.3.8}$$

gde je $\tilde{\phi}_{2n}$ dato sa (3.3.5). Sada, primetimo da formula (3.3.4) sleduje iz (3.3.5), (3.3.6) i (3.3.8).

Korišćenjem reprezentacije Gegenbauerovih polinoma pomoću hipergeometrijske funkcije (videti odeljak 2.2.13, I deo knjige) dobijamo

$$\tilde{\phi}_{2n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(f,C_{2m}^{\lambda})}{h_{2m}} C_{2m}(1)\ {}_2F_1(-m,m+\lambda;\lambda+\tfrac{1}{2};1-x^2)$$

i

$$S_0(x) = S_0(1)\ {}_2F_1(-n,n+\lambda+1;\lambda+\tfrac{3}{2};1-x^2),$$

tj.

$$\tilde{\phi}_{2n}(x) = \Lambda(\lambda)\sum_{m=0}^{n} \frac{2m+\lambda}{\lambda}(f,C_{2m}^{\lambda}) \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m+\lambda)_k}{(\lambda+\frac{1}{2})_k}(1-x^2)^k$$

$$= \Lambda(\lambda)\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(1-x^2)^k}{(\lambda+\frac{1}{2})_k} \sum_{m=k}^{n} \frac{2m+\lambda}{\lambda}(f,C_{2m}^{\lambda})\binom{m}{k}(m+\lambda)_k$$

i

$$\frac{S_0(x)}{S_0(1)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+\lambda+1)_k}{(\lambda+\frac{3}{2})_k}(1-x^2)^k.$$

Na osnovu prethodnog i formule (3.3.4) dobijamo tvrdjenje teoreme za $\lambda \neq 0$. Primetimo da je $a_{n,0}(\lambda) = 0$. Slučaj $\lambda = 0$ jednostavno se pokazuje prelaskom na graničnu vrednost kada $\lambda \to 0$.

Zadržaćemo se sada na poredjenju aproksimacija sa ograničenjem i bez ograničenja. Pre svega, primetimo da je $\phi_{2n}(x_k) = \tilde{\phi}_{2n}(x_k)$, gde je x_k proizvoljna nula polinoma $C_{2n}^{\lambda+1}$. Pod pretpostavkom da $f \in FP$, definišimo

$$D^* = \min_{\phi\in\mathcal{P}_{2n}} \|f-\phi\|^2 = \|f-\phi_{2n}\|^2 \quad \text{i} \quad \tilde{D}^* = \min_{\phi\in\pi_{2n}} \|f-\phi\|^2 = \|f-\tilde{\phi}_{2n}\|^2,$$

gde je π_{2n} skup svih realnih polinoma stepena ne višeg od $2n$. Primetimo da je $\mathcal{P}_{2n}$ podskup od π_{2n}. Korišćenjem standardnih izračunavanja i ograničenja $\phi_{2n}(1)=0$, dobijamo

$$D^* = (f-\phi_{2n}, f-\phi_{2n}) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} d_k^2 h_{2k} \geq 0,$$

gde je d_k dato sa (3.3.6) i (3.3.8). Primetimo takodje da važi sledeća jednakost:

$$\sum_{k=0}^{n} d_k^2 h_{2k} = \sum_{k=0}^{n} d_k (f, C_{2k}^{\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{((f, C_{2k}^{\lambda}))^2}{h_{2k}} - \frac{\mu}{2} \cdot \frac{C_{2k}^{\lambda}(1)(f, C_{2k}^{\lambda})}{h_{2k}} \right).$$

Korišćenjem identiteta (3.3.7) i vrednosti za μ iz (3.3.8), dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n} d_k^2 h_{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{((f, C_{2k}^{\lambda}))^2}{h_{2k}} - \frac{\mu^2}{4} S_0(1).$$

Takodje, na osnovu (3.2.4) imamo

$$\tilde{D}^* = (f - \tilde{\phi}_{2n}, f - \tilde{\phi}_{2n}) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{((f, C_{2k}^{\lambda}))^2}{h_{2k}} .$$

Najzad, nalazimo

$$D^* - \tilde{D}^* = \frac{\mu^2}{4} S_0(1) = \frac{((f, S_0))^2}{S_0(1)} = \frac{(\tilde{\phi}_{2n}(1))^2}{\Lambda(\lambda) C_{2n}^{\lambda+1}(1)} . \tag{3.3.9}$$

Primetimo da jednakost $\tilde{\phi}_{2n}(1) = (f, S_0)$ dobijamo na osnovu identiteta (3.3.7). Jednakost (3.3.9) pokazuje da je razlika $D^* - \tilde{D}^*$ proporcionalna kvadratu greške $\tilde{\phi}_{2n}(1) - f(1) = \tilde{\phi}_{2n}(1)$.

Za klasu neparnih funkcija slično se može dokazati:

Teorema 3.3.2. Ako $f \in FN$, tada je srednje-kvadratna aproksimacija u klasi $\mathcal{P}_{2n+1}$ data sa

$$\phi_{2n+1}(x) = \Lambda(\lambda) x \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}(\lambda)(1-x^2)^k,$$

gde su

$$b_{n,k}(\lambda) = \frac{(-1)^k}{(\lambda+\frac{1}{2})_{k+1}} \sum_{m=0}^{n} \frac{2m+\lambda+1}{\lambda} (f, C_{2m+1}^{\lambda}) \beta_{m,k}^{(n)}(\lambda) \qquad (\lambda \neq 0),$$

i

$$\beta_{n,k}^{(n)}(\lambda) = \begin{cases} -\binom{n}{k}(n+\lambda+2)_k(\lambda+\frac{1}{2}), & m < k, \\ \binom{m}{k}(m+\lambda+1)_k(\lambda+k+\frac{1}{2}) - \binom{n}{k}(n+\lambda+2)_k(\lambda+\frac{1}{2}), & m \geq k. \end{cases}$$

Kada je $\lambda=0$ imamo

$$b_{n,k}(0) = \frac{2(-1)^k}{(\frac{1}{2})_{k+1}} \sum_{m=0}^{n} (f, T_{2m+1}) \beta_{m,k}^{(n)}(0).$$

Iz prethodnih teorema, zamenom x sa 1-2x, može se dobiti aproksimacija koja je razmatrana u radu [41]. Naime, u tom radu

Wrigge i Fransén su razmatrali slučaj kada je $\lambda = q + \frac{1}{2}$ ($q \in N_0$) na jedan veoma komplikovan način, ne nalazeći pritom eksplicitni izraz za aproksimacionu funkciju u opštem slučaju.

6.3.4. Ekonomizacija stepenih redova

Kao što je napomenuto u odeljku 1.3.2, za izračunavanje vrednosti funkcija vrlo često se koriste polinomski razvoji. Na primer, ako funkcija f na segmentu $[-1,1]$ ima razvoj

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$

tada se za izračunavanje vrednosti ove funkcije na segmentu $[-1,1]$ može, sa odredjenom tačnošću, koristiti polinom

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n. \tag{3.4.1}$$

Postupak ekonomizacije stepenih redova, koji potiče od Lanczosa, sastoji se u snižavanju stepena polinoma (3.4.1) uz neznatno povećanje greške, a izvodi se vrlo jednostavno uz korišćenje ortogonalnih polinoma. Najčešće se koriste Čebiševljevi i Legendreovi polinomi.

Razmotrićemo ekonomizaciju pomoću Čebiševljevih polinoma T_k $(k=0,1,\ldots)$. Kako su (videti odeljak 2.2.13)

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,\ T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1,\ T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x,$$

itd., mogućno je izraziti algebarske stepene x^k $(k=0,1,\ldots)$ pomoću Čebiševljevog bazisa na sledeći način:

$$1 = T_0,\ x = T_1,\ x^2 = \frac{1}{2}(T_0 + T_2),\ x^3 = \frac{1}{4}(3T_1 + T_3),$$

$$x^4 = \frac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4),\ x^5 = \frac{1}{16}(10T_1 + 5T_3 + T_5),$$

$$x^6 = \frac{1}{32}(10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6),\ x^7 = \frac{1}{64}(35T_1 + 21T_3 + 7T_5 + T_7),$$

itd. U opštem slučaju važi

$$x^k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{\binom{k}{i}}{1 + \delta_{k,2i}} T_{k-2i}(x).$$

Pomoću ovih formula, polinom (3.4.1) se može predstaviti u obliku

(3.4.2) $$P_n(x) = c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + \ldots + c_nT_n(x).$$

Označimo sa $\mathcal{P}_m$ skup svih algebarskih polinoma ne višeg stepena od m. Uzimajući samo prvih m+1 (m < n) članova u razvoju (3.4.2) dobijamo polinom

(3.4.3) $$Q_m(x) = c_oT_0(x) + c_1T_1(x) + \ldots + c_mT_m(x),$$

koji predstavlja aproksimaciju za P_n u skupu $\mathcal{P}_m$.

S obzirom da Čebiševljevi polinomi zadovoljavaju nejednakost $|T_k(x)| \leqq 1$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$, za grešku aproksimacije važi

$$|P_n(x) - Q_m(x)| \leqq |c_{m+1}| + \ldots + |c_n| \quad (-1 \leqq x \leqq 1).$$

Navedeni postupak aproksimacije naziva se Lanczosova ekonomizacija. Sledeća teorema daje odgovor na pitanje o kakvoj se aproksimaciji radi.

Teorema 3.4.1. Polinom Q_m, odredjen sa (3.4.3) predstavlja u skupu $\mathcal{P}_m$ najbolju srednje-kvadratnu aproksimaciju sa Čebiševljevom težinskom funkcijom $p(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ za polinom P_n na segmentu $[-1,1]$.

Dokaz. Ako stavimo

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} f(x)g(x)dx,$$

na osnovu (3.4.2), vidimo da za koeficijente u razvoju (3.4.3) važi

$$(P_n,T_k) = c_k(T_k,T_k) \quad (k=0,1,\ldots,m),$$

odakle, uporedjivanjem sa (3.2.5), sleduje tvrdjenje teoreme.

Na osnovu dokazane teoreme zaključujemo da je

$$\min_{p\in\mathcal{P}_m} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (P_n(x) - p(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (P_n(x)-Q_m(x))^2 dx.$$

U daljem tekstu navodimo dva primera.

Primer 3.4.1. Postupkom ekonomizacije aproksimirajmo $x \mapsto x^6$ $(|x| \leqq 1)$ pomoću polinoma ne višeg stepena od dva.

Kako je $x^6 = \frac{1}{32}(10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6)$, odsecanjem poslednja dva člana dobijamo polinom $Q_2(x) = \frac{10}{32} + \frac{15}{32}(2x^2 - 1) = \frac{15}{16}x^2 - \frac{5}{32}$, pri čemu je apsolutna greška manja od $\frac{7}{32}$, tj. važi $|x^6 - Q_2(x)| \leq \frac{7}{32}$ kada $x \in [-1,1]$.

Na osnovu razvoja po Legendreovim polinomima (srednje-kvadratna aproksimacija sa težinom $p(x) = 1$), dobija se sledeća aproksimacija

$$x^6 \simeq \frac{1}{7}P_0(x) + \frac{10}{21}P_2(x) = \frac{5}{7}x^2 - \frac{2}{21} \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

sa apsolutnom greškom ne većom od 8/21. Primetimo da je u ovom slučaju učinjena veća greška, jer je $8/21 > 7/32$. U primeru 3.6.2 (odeljak 6.3.6) videćemo da postoji polinom drugog stepena za koji je ova greška još manja, tačnije rečeno, najmanja.

Primer 3.4.2. Posmatrajmo aproksimaciju funkcije $x \mapsto e^x$ Taylorovim polinomom petog stepena, tj.

$$e^x \simeq P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 .$$

Za grešku grešku ove aproksimacije, na segmentu $[-1,1]$, važi ocena

$$|E_5(x)| = |e^x - P_5(x)| = \frac{e^{\theta x}|x|^6}{720} < \frac{e}{720} < 0.0038,$$

s obzirom da $\theta \in (0,1)$. Razvojem polinoma P_5 po Čebiševljevim polinomima dobijamo

$$P_5(x) = \frac{81}{64}T_0(x) + \frac{217}{192}T_1(x) + \frac{13}{48}T_2(x) + \frac{17}{384}T_3(x) + \frac{1}{192}T_4(x) + \frac{1}{1920}T_5(x)$$

odakle, odsecanjem poslednja dva člana, sleduje

$$Q_3(x) = \frac{1}{384}(382 + 383x + 208x^2 + 68x^3),$$

pri čemu za ukupnu grešku aproksimacije važi

$$|e^x - Q_3(x)| < \frac{e}{720} + \frac{1}{192} + \frac{1}{1920} \simeq 0.0095 \qquad (-1 \leq x \leq 1).$$

Ako bismo funkciju $x \mapsto e^x$ na segmentu $[-1,1]$ direktno aproksimirali srednje-kvadratnom aproksimacijom sa Čebiševljevom težinom $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, polinomom trećeg stepena, dobili bismo

$$e^x \simeq 1.266066T_0 + 1.130318T_1 + 0.271495T_2 + 0.044337T_3,$$

tj.

$$e^x \simeq 0.994571 + 0.997307x + 0.542990x^2 + 0.177348x^3 .$$

Naime, koeficijenti u ovom razvoju su dati pomoću

$$a_k = \frac{(e^x, T_k)}{(T_k, T_k)} = \frac{1}{\|T_k\|^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} e^x T_k(x)\,dx = \frac{1}{\|T_k\|^2} \int_0^{\pi} e^{\cos\theta} \cos k\theta\, d\theta ,$$

tj.

$$a_0 = I_0(1), \quad a_k = 2I_k(1) \quad (k=1,2,3),$$

gde su I_k modifikovane Besselove funkcije prve vrste (videti, na primer [28]).

6.3.5. Diskretna srednje-kvadratna aproksimacija

U prethodnim odeljcima proučavali smo problem najbolje aproksimacije funkcija u prostoru $L^2(a,b)$. Sada ćemo razmatrati jedan partikularni slučaj problema, sa kojim smo započeli uvodni odeljak 6.3.1. Naime, neka je funkcija $f:[a,b] \to R$ data na skupu parova vrednosti $\{(x_j, f_j)\}_{j=0,1,\ldots,m}$, gde je $f_j \equiv f(x_j)$. Razmotrićemo problem najbolje aproksimacije ove funkcije linearnom aproksimacionom funkcijom

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x) \quad (n < m) \tag{3.5.1}$$

u smislu minimizacije norme (3.1.4), gde je $p:[a,b] \to R_+$ data težinska funkcija i δ_n definisano pomoću (3.1.2).

Ako uvedemo matričnu notaciju

$$X = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & & \phi_n(x_1) \\ \vdots & & & \\ \phi_0(x_m) & \phi_1(x_m) & & \phi_n(x_m) \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

$$P = \mathrm{diag}(p(x_0), p(x_1), \ldots, p(x_m)), \quad \vec{v} = \vec{f} - X\vec{a},$$

kvadrat norme, definisane pomoću (3.1.4), se može predstaviti u obliku

$$(3.5.2)\qquad F=\|\delta_n\|^2=\|\delta_n\|_2^2=\sum_{j=0}^{m}p(x_j)\delta_n(x_j)^2=\vec{v}^T P\,\vec{v}\,.$$

Za nalaženje najbolje diskretne srednje-kvadratne aproksimacije (3.5.1) potrebno je minimizirati veličinu F, definisanu pomoću (3.5.2). Tako, na osnovu

$$\frac{\partial F}{\partial a_i}=2\sum_{j=0}^{m}p(x_j)\delta_n(x_j)\frac{\partial\delta_n(x_j)}{\partial a_i}=0\qquad(i=0,1,\ldots,n)$$

dobijamo tzv. normalni sistem jednačina

$$(3.5.3)\qquad \sum_{j=0}^{m}p(x_j)\delta_n(x_j)\phi_i(x_j)=0\qquad(i=0,1,\ldots n)$$

za odredjivanje parametara a_i $(i=0,1,\ldots,n)$. Shodno uvedenim oznakama, poslednji sistem jednačina se može predstaviti u matričnom obliku

$$X^T P\,\vec{v}=\vec{0},$$

tj.

$$(3.5.4)\qquad X^T P X\,\vec{a}=X^T P\,\vec{f}\,.$$

Primetimo da se normalni sistem jednačina (3.5.3), tj. (3.5.4), dobija iz preodredjenog sistema jednačina (3.1.1), predstavljenog u matričnom obliku

$$X\vec{a}=\vec{f},$$

jednostavnim množenjem matricom $X^T P$ sa leve strane.

Dijagonalna matrica P, koja se naziva težinskom matricom, ima smisao takav da se vrednostima funkcije f_j sa većom tačnošću dodeljuju veće težine $p_j\equiv p(x_j)$. Ovo je posebno važno kod aproksimacije eksperimentalnih podataka, koji su prilikom merenja dobijeni sa različitom tačnošću. Na primer, ako su merenja izvedena sa različitim disperzijama čiji je odnos poznat, to se težine p_j biraju obrnuto proporcionalno disperzijama, tj. tako da je

$$p_0:p_1:\ \ldots\ :p_m=\frac{1}{\sigma_0^2}:\frac{1}{\sigma_1^2}:\ \ldots\ :\frac{1}{\sigma_m^2}\,.$$

Ako su, pak, merenja izvedena sa istom tačnošću, ali je pri svakoj vrednosti argumenta x_j izvedena serija od m_j merenja, i za f_j uzeta aritmetička sredina dobijenih rezultata u seriji, to se za težine uzima broj merenja u seriji, tj. $p_j = m_j$ $(j=0,1,\ldots,m)$. Najčešće se, medjutim uzima da su sve težine jednake, tj. da je P jedinična matrica reda m+1. U tom slučaju (3.5.4) se svodi na

$$X^T X \vec{a} = X^T \vec{f}. \tag{3.5.5}$$

Vektor traženih koeficijenata $\vec{a}$ odredjujemo iz (3.5.4), odnosno (3.5.5). Na primer, iz (3.5.5) sleduje

$$\vec{a} = (X^T X)^{-1} X^T \vec{f}.$$

U slučaju da je sistem bazisnih funkcija izabran kao $\phi_i(x) = x^i$ $(i=0,1,\ldots,n)$ imamo

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_m & x_m^2 & & x_m^n \end{bmatrix}.$$

Posmatrani slučaj diskretne srednje-kvadratne aproksimacije vrlo često se naziva metod najmanjih kvadrata. Posebno je interesantan slučaj kada je n=1, tj. kada je aproksimaciona funkcija oblika $\phi(x) = a_0 + a_1 x$. Tada sistem jednačina (3.5.4) postaje

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix},$$

gde su

$$s_{11} = \sum_{j=0}^{m} p_j, \quad s_{12} = s_{21} = \sum_{j=0}^{m} p_j x_j, \quad s_{22} = \sum_{j=0}^{m} p_j x_j^2,$$

$$b_0 = \sum_{j=0}^{m} p_j f_j, \quad b_1 = \sum_{j=0}^{m} p_j x_j f_j.$$

Traženi aproksimacioni parametri su tada

$$a_0 = \frac{1}{D}(s_{22} b_0 - s_{12} b_1), \quad a_1 = \frac{1}{D}(s_{11} b_1 - s_{21} b_0),$$

gde je $D = s_{11} s_{22} - s_{12}^2$.

Primer 3.5.1. Metodom najmanjih kvadrata nadjimo parametre a_0 i a_1 u aproksimacionoj funkciji $\phi(x) = a_0 + a_1 x$ za sledeći skup parova

$$\{(1.1,\ 2.5),\ (1.9,\ 3.2),\ (4.2,\ 4.5),\ (6.1,\ 6.0)\}.$$

Uzmimo da je težinska matrica P jednaka jediničnoj matrici. Ovde možemo direktno iskoristiti prethodne formule. Medjutim, ne zavisno od toga, krenimo od preodredjenog sistema jednačina

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.1 \\ 1 & 1.9 \\ 1 & 4.2 \\ 1 & 6.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3.2 \\ 4.5 \\ 6.0 \end{bmatrix}.$$

Množenjem matricom $X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.1 & 1.9 & 4.2 & 6.1 \end{bmatrix}$ sa leve strane dolazimo do normalno sistema jednačina

$$\begin{bmatrix} 4 & 13.3 \\ 13.3 & 59.67 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.2 \\ 64.33 \end{bmatrix}$$

odakle je

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{61.79} \begin{bmatrix} 59.67 & -13.3 \\ -13.3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16.2 \\ 64.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7974591 \\ 0.6774559 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $\phi(x) \simeq 1.797 + 0.677x$.

U slučaju kada je $n > 1$, metod najmanjih kvadrata postaje komplikovan, s obzirom da se tada teže rešava dobijeni sistem linearnih jednačina. Ovaj sistem bi se mogao jednostavno rešiti ako je, na primer, njegova matrica dijagonalna, što će biti slučaj kada je $\{\phi_k\}$ ortogonalan sistem polinoma. Naravno, ovde se radi o diskretnim ortogonalnim polinomima koji su tretirani u odeljku 2.2.15, I deo knjige. Dakle, treba uzeti $\phi_k(x) = Q_k^{(N)}(x)$ $(k=0,1,\ldots,N)$, gde je $N-1=m$ i skalarni proizvod definisan pomoću

$$(f,g) = [f,g]_N = \sum_{i=0}^{N-1} p_i f(x_i) g(x_i).$$

Kao što je poznato, niz ortogonalnih polinoma je moguće dobiti Stieltjesovom procedurom, tj. moguće je odrediti koeficijente $\beta_k^{(N)}$ i $\gamma_k^{(N)}$ u rekurentnoj relaciji (2.15.5)(odeljak 2.2.15).

Slično izvodjenju kontinualne srednje-kvadratne aproksimacije dobijamo aproksimacionu funkciju u obliku

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i Q_i^{(N)}(x),$$

gde su aproksimacioni parametri dati sa

$$a_k = \frac{[f, Q_k^{(N)}]_N}{\|Q_k^{(N)}\|^2} \qquad (k=0,1,\ldots,n) \tag{3.5.6}$$

Posebno, kada su tačke x_i ekvidistantne (što ne umanjujući opštost može da se uzme $x_i = i$ $(i=0,1,\ldots,N-1)$) i težine jednake medjusobno (na primer, $p_i = 1/N$), imamo slučaj tzv. diskretnih Čebiševljevih polinoma, kod kojih su koeficijenti tročlane rekurentne relacije eksplicitno poznati (videti odeljak 2.2.15). Srednje-kvadratne aproksimacije se u tom slučaju jednostavno nalaze.

Primer 3.5.2. U skupu polinoma ne višeg stepena od trećeg nadjimo srednje-kvadratnu aproksimaciju za funkciju $t \mapsto \sin \pi t$ na $[-1,1]$ korišćenjem njenih vrednosti u tačkama $t_0=-1$, $t_1=-0.5$, $t_2=0$, $t_3=0.5$ i $t_4=1$. Kako su vrednosti argumenta ekvidistantne, pri odredjivanju aproksimacije možemo koristiti diskretne Čebiševljeve polinome, uz prethodno uvodjenje smene $x=2(t+1)$. Tada se tačke t_i preslikavaju na tačke $x_i=i$ $(i=0,1,2,3,4)$. Odgovarajuće vrednosti funkcije su redom $f_0=0$, $f_1=-1$, $f_2=0$, $f_3=1$, $f_4=0$. Tada imamo da je

$$s_k = [f, Q_k^{(5)}]_5 = \frac{1}{5}(Q_k^{(5)}(3) - Q_k^{(5)}(1)), \tag{3.5.7}$$

gde su ortogonalni polinomi $Q_k^{(5)}(x)$ (videti primer 2.15.1, odeljak 2.2.15) dati pomoću

$$Q_0^{(5)}(x) = 1,\quad Q_1^{(5)}(x) = x-2,\quad Q_2^{(5)}(x) = x^2 - 4x + 2,$$

$$Q_3^{(5)}(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{43}{5}x - \frac{6}{5}, \quad \text{itd.}$$

Kako je $\|Q_k^{(5)}\|^2 = \gamma_0^{(5)}\gamma_1^{(5)}\cdots\gamma_k^{(5)}$, gde su koeficijenti rekurentne relacije $\gamma_0^{(5)}=1$, $\gamma_1^{(5)}=2$, $\gamma_2^{(5)}=7/5$, $\gamma_3^{(5)}=36/35$, korišćenjem (3.5.7) i (3.5.6) dobijamo sledeće rezultate:

$$\|Q_0^{(5)}\|^2 = 1,\quad \|Q_1^{(5)}\|^2 = 2,\quad \|Q_2^{(5)}\|^2 = 14/5,\quad \|Q_3^{(5)}\|^2 = 72/25;$$

$$s_0 = 0,\quad s_1 = 2/5,\quad s_2 = 0,\quad s_3 = -24/25;$$

$$a_0 = 0,\quad a_1 = 1/5,\quad a_2 = 0,\quad a_3 = -1/3.$$

Prema tome, tražena aproksimacija je

$$\phi(x) = \frac{1}{5}(x-2) - \frac{1}{3}(x^3-6x^2+\frac{43}{5}x - \frac{6}{5}),$$

što vraćanjem na staru promenljivu t daje

$$\sin\pi t \approx \psi(t) = \phi(2t+2) = \frac{8}{3}(t-t^3).$$

U mnogim oblastima nauke i tehnike gde se radi sa eksperimentalnim podacima, često se javlja problem odredjivanja parametara u tzv. empirijskim formulama koje izražavaju funkcionalnu zavisnost izmedju dve ili više veličina. Na primer, neka je funkcionalna zavisnost data pomoću

$$y = f(x;\, a_0,a_1,\ldots,a_n),$$

gde su a_i $(i=0,1,\ldots,n)$ parametri koje treba odrediti na osnovu tablice vrednosti funkcije dobijene merenjem:

x	x_0	x_1	...	x_m
y	y_0	y_1	...	y_m

Naravno, dobijeni eksperimentalni podaci su opterećeni slučajnim greškama merenja ili, kako se popularno kaže, prisustvom "šuma" u eksperimentu. Odredjivanje parametara a_i $(i=0,1,\ldots,n)$ je sa stanovišta teorije aproksimacija mogućno samo ako je $m \geq n$. Jasno je da u slučaju $m=n$ imamo interpolaciju, koja je u opštem slučaju nelinearna, što zavisi od oblika funkcije f. Dakle, ovde imamo tipičan aproksimacioni problem, gde je f aproksimaciona funkcija. Zbog prisustva pomenutog "šuma" u podacima, odredjivanje aproksimacionih parametara sa većom tačnošću (i pouzdanošću) zahteva veću količinu informacija o funkcionalnoj zavisnosti f, tj. veći broj podataka u prethodnoj tabeli. Najčešće se odredjivanje parametra sprovodi metodom najmanjih kvadrata, tj. minimizacijom veličine F definisane pomoću

$$(3.5.8) \qquad F = \sum_{j=0}^{m} (y_j - f(x_j;a_0,a_1,\ldots,a_n))^2,$$

ili pomoću

$$F = \sum_{j=0}^{m} p_j (y_j - f(x_j; a_0, a_1, \ldots, a_n))^2,$$

gde su uključene težine p_j, o čijem izboru je bilo reči ranije.

Ako je funkcionalna veza od više promenljivih, na primer,

$$z = f(x, y; a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

za određivanje aproksimacionih parametara se minimizira veličina

$$F = \sum_{j=0}^{m} p_j (z_j - f(x_j, y_j; a_0, a_1, \ldots, a_n))^2.$$

Ako je f linearna aproksimaciona funkcija (po parametrima $a_0, a_1, \ldots, a_n$), tj. oblika (3.5.1), problem se rešava na način kako je to već ranije izloženo. Medjutim, ako je f nelinearna aproksimaciona funkcija, tada je odgovarajući normalni sistem jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \quad (i=0,1,\ldots,n) \tag{3.5.9}$$

nelinearan. Za njegovo rešavanje se tada zahteva primena nekog metoda, poput metoda Newton-Kantoroviča (videti odeljak 5.2.2, I deo knjige), čime se postupak odredjivanja aproksimacionih parametara dosta komplikuje. U cilju lakšeg i bržeg odredjivanja parametara postoje neki uprošćeni metodi transformacije ovakvih problema na linearne aproksimacione probleme. Naime, osnovna ideja je da se uvodjenjem izvesnih smena

$$X = g(x), \quad Y = h(y) \tag{3.5.10}$$

nelinearni problem svede na linearni.

Na primer, neka je $y = f(x; a_0, a_1) = a_0 e^{a_1 x}$. Tada, logaritmovanjem i uvodjenjem smena

$$X = x, \quad Y = \log y, \quad b_0 = \log a_0, \quad b_1 = a_1,$$

problem se svodi na linearan, jer je sada $Y = b_0 + b_1 X$. Dakle, minimizacijom veličine ($p_j = 1$)

$$G = G(b_0, b_1) = \sum_{j=0}^{m} (Y_j - b_0 - b_1 X_j)^2, \tag{3.5.11}$$

gde su $X_j = x_j$ i $Y_j = \log y_j$ $(j=0,1,\ldots,n)$, odredjujemo parametre b_0

i b_1, a zatim

$$a_0 = e^{b_0} \quad \text{i} \quad a_1 = b_1.$$

Ovakav postupak, medjutim, ne dovodi do istih parametara koji se dobijaju minimizacijom funkcije

$$F = F(a_0, a_1) = \sum_{j=0}^{m} (y_j - a_0 e^{a_1 x_j})^2 .$$

Štaviše, dobijene vrednosti mogu i znatno da odstupaju. Ova činjenica nastupa zato što se rešava problem različit od postavljenog, imajući u vidu nelinearnu transformaciju koju smo izvršili ($Y=\log y$). Medjutim, za mnoge potrebe ovako dobijeni parametri su zadovoljavajući.

Navešćemo sada još neke tipične funkcionalne zavisnosti gde je moguća jednostavna transformacija promenljivih:

1° $y=a_0 x^{a_1}$, $X=\log x$, $Y=\log y$, $b_0=\log a_0$, $b_1=a_1$;

2° $y=\dfrac{1}{a_0+a_1 x}$, $X=x$, $Y=\dfrac{1}{y}$, $b_0=a_0$, $b_1=a_1$;

3° $y=\dfrac{x}{a_0+a_1 x}$, $X=\dfrac{1}{x}$, $Y=\dfrac{1}{y}$, $b_0=a_0$, $b_1=a_1$;

4° $y=\dfrac{1}{a_0+a_1 e^{-x}}$, $X=e^{-x}$, $Y=\dfrac{1}{y}$, $b_0=a_0$, $b_1=a_1$.

Primer 3.5.3. Neka su rezultati merenja veličina x i y dati u tabeli

x	4.48	4.98	5.60	6.11	6.62	7.42
y	4.15	1.95	1.31	1.03	0.74	0.63

i neka je $y=\dfrac{1}{a_0+a_1 x}$ (oblik 2°). Tada uvodjenjem smene $X=x$, $Y=1/y$, nalazimo metodom najmanjih kvadrata aproksimacionu funkciju $\phi(X) \simeq 0.468X-1.843$, odakle je

$$y \simeq \frac{1}{0.468x-1.843} .$$

Na osnovu prethodnog može se zaključiti da u zavisnosti od f treba odabrati pogodne smene (3.5.10) koje bi omogućile da se

$$y = f(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

svede na linearan oblik, na primer, polinomskog tipa

$$Y = b_o + b_1 X + \ldots + b_n X^n. \tag{3.5.12}$$

Jasno je da funkcije g i h moraju imati inverzne funkcije, tako da je (3.5.12), u stvari, ekvivalentno sa

$$h^{-1}(Y) = f(g^{-1}(X); a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

pri čemu parametri b_i zavise od parametara a_i na relativno jednostavan način.

Pokazaćemo sada kako se upotrebom težina mogu dobiti tačnije vrednosti parametara a_i, nego što ih daje minimizacija funkcije

$$G = \sum_{j=0}^{m} (Y_j - b_0 - b_1 X_j - \ldots - b_n X_j^n)^2. \tag{3.5.13}$$

Naime, podjimo od formule (3.5.8) napisane u obliku

$$F = \sum_{j=0}^{m} (h^{-1}(Y_j) - h^{-1}(b_0 + b_1 X_j + \ldots + b_n X_j^n))^2 \tag{3.5.14}$$

i pretpostavimo da je funkcija h diferencijabilna i strogo monotona. Tada za izvod inverzne funkcije važi

$$\frac{dh^{-1}(Y)}{dY} = \frac{1}{h'(y)}.$$

Primenom Lagrangeove teoreme o srednjoj vrednosti, (3.5.14) se svodi na

$$F = \sum_{j=0}^{m} p_j (Y_j - b_0 - b_1 X_j - \ldots - b_n X_j^n)^2, \tag{3.5.15}$$

gde je $p_j = \left(\frac{dh^{-1}(\eta_j)}{dY}\right)^2$ i η_j tačka izmedju Y_j i $\bar{Y}_j (= b_0 + b_1 X_j + \ldots + b_n X_j^n)$ $(j=0,1,\ldots,m)$. Pretpostavljajući da su odstupanja Y_j od $\bar{Y}_j$ mala, može se približno uzeti $\eta_j = Y_j$, tj.

$$p_j = \left(\frac{dh^{-1}(Y_j)}{dY}\right)^2 = \left(\frac{1}{h'(y_j)}\right)^2.$$

Prema tome, tačniji parametri će se dobiti ako se umesto (3.5.13), minimizira (3.5.15), sa prethodno dobijenim težinama. Tako u slučaju eksponencijalne funkcije $y=a_0e^{a_1x}$, umesto minimizacije (3.5.11), treba minimizirati veličinu

$$\sum_{j=0}^{m} y_j^2(Y_j - b_0 - b_1X_j)^2,$$

jer je $h(y)=\log y$, tj. $h'(y_j)=1/y_j$. Naravno, ni u ovom slučaju se ne dobijaju apsolutno tačni rezultati, koji odgovaraju rešenju normalnog (nelinearnog) sistema jednačina (3.5.9).

Korišćenjem ovako dobijenih vrednosti parametara $\tilde{a}_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$ možemo konstruisati iterativni proces koji će konvergirati ka tačnim vrednostima parametara $\bar{a}_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$. Ako sa $a^{(k)} = (a_0^{(k)},a_1^{(k)},\ldots,a_n^{(k)})$ označimo tačku približnih vrednosti parametara u k-toj iteraciji, i startujemo sa $a_i^{(k)}:=\tilde{a}_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$, iterativni proces će biti oblika

$$a_i^{(k+1)} = a_i^{(k)} + \alpha_i^{(k)} \qquad (i=0,1,\ldots,n),$$

gde korekcije $\alpha_i^{(k)}$ odredjujemo minimizacijom funkcije

$$F_k(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \sum_{j=0}^{m} (z_j - \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{(j)}\alpha_\nu)^2.$$

Funkciju F_k definišemo kao sumu kvadrata grešaka linearizovane funkcije. Linearizaciju sprovodimo razvojem funkcije $f(x_j;\bar{a})$, gde je $\bar{a}=(\bar{a}_0,\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)$, u okolini tačke $a^{(k)}$, uz zadržavanje samo linearnih članova, tj.

$$f(x_j;\bar{a}) \approx f(x_j;a^{(k)}) + \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{(j)}(\bar{a}_\nu - a_\nu^{(k)}),$$

gde je $A_\nu^{(j)}$ parcijalni izvod od $f(x_j;\bar{a})$ po a_ν u tački $a^{(k)}$. U definiciji F_k nije teško primetiti da je $z_j = y_j - f(x_j;a^{(k)})$ $(j=0,1,\ldots,n)$.

6.3.6. Čebiševljeva mini-max aproksimacija

U ovom odeljku daćemo osnovne rezultate koji se odnose na mini-max aproksimaciju funkcije $f\in C[a,b]$ algebarskim polinomima. Dobar deo tih rezultata može biti prenet i na opštije tipove aproksimacionih funkcija.

Sa $\mathcal{P}_n$ označavaćemo skup svih algebarskih polinoma ne višeg stepena od n. Pred nama se postavlja problem odredjivanja polinoma $P_n = P_n^* (\in \mathcal{P}_n)$, koji minimizira normu $\|f-P_n\|_\infty$ (videti odeljak 6.1.3). Dakle, treba rešiti sledeći minimizacioni problem

$$E_n(f) = \min_{P_n\in\mathcal{P}_n} \left(\max_{a\le x\le b} |f(x)-P_n(x)|\right) = \max_{a\le x\le b} |f(x)-P_n^*(x)|.$$

$E_n(f)$ je veličina najbolje aproksimacije.

Algebarski polinomi su veoma dobri aproksimacioni elementi na konačnom segmentu $[a,b]$ (videti Weierstrassovu i Bernsteinovu teoremu, odeljak 6.1.4) i zato se vrlo često koriste u mini-max aproksimacijama, ali i u aproksimacijama uopšte. Weierstrassova teorema daje egzistenciju polinoma dovoljno visokog stepena koji proizvoljno malo odstupa od neprekidne funkcije na $[a,b]$. Sledeća teorema, medjutim, daje kriterijum na osnovu koga se može tvrditi da li je neki polinom najbolja mini-max aproksimacija date neprekidne funkcije na $[a,b]$ u klasi algebarskih polinoma $\mathcal{P}_n$.

<u>Teorema 3.6.1.</u> Polinom P_n^* je najbolja mini-max aproksimacija za $f\in C[a,b]$ u skupu $\mathcal{P}_n$ ako i samo ako na $[a,b]$ postoje $n+2$ tačke $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ $(x_0<x_1<\ldots<x_{n+1})$, takve da je

$$\delta_n^*(x_k) = -\delta_n^*(x_{k+1}) = \pm\|\delta_n^*\|_\infty = \pm E_n(f), \tag{3.6.1}$$

pri čemu je $\delta_n^*(x) = f(x) - P_n^*(x)$.

Dokaz egzistencije i jedinstvenosti polinoma P_n^* može se naći, na primer u [38]. Koristeći se Weierstrassovom teoremom 1.4.1, može se dokazati da $E_n(f)\to 0$, kada $n\to+\infty$.

Ako za neki polinom n-tog stepena postoje $n+2$ tačke sa svojstvom (3.6.1), kažemo da ima Čebiševljevu alternansu za f. Ako je $\varepsilon_k = (-1)^{k+1}$, svojstvo (3.6.1) se može izraziti u obliku

(3.6.2) $\quad \delta_n^*(x_0) + \varepsilon_k \delta_n^*(x_k) = 0 \quad (k=1,\ldots,n+1).$

Primer 3.6.1. Neka je $x \mapsto f(x) = x^{n+1}$ $(|x| \leq 1)$ i neka je

$$\delta_n(x) = x^{n+1} - P_n(x),$$

gde je $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Kako iz uslova $T_{n+1}(x) = \cos[(n+1)\arccos x] = \pm 1$, sleduje $x_k = -\cos\frac{k\pi}{n+1}$ $(k=0,1,\ldots,n+1)$, pri čemu je $-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = 1$, zaključujemo da na $[-1,1]$ postoje $n+2$ tačke u kojima je $T_{n+1}(x_k) = (-1)^{n+k+1}$ $(k=0,1,\ldots,n+1)$.

Ako stavimo $\delta_n^*(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$, vidimo da je $|\delta_n^*(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ $(|x| \leq 1)$ i da $\delta_n^*(x_k) = \frac{1}{2^n}(-1)^{n+k+1}$ zadovoljava (3.6.2).

Na osnovu prethodnog i teoreme 3.6.1 zaključujemo da se najbolji mini-max polinom P_n^* za funkciju $x \mapsto f(x) = x^{n+1}$ $(|x| \leq 1)$ može dobiti iz jednakosti

$$x^{n+1} - P_n^*(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x).$$

Dakle,

$$P_n^*(x) = x^{n+1} - \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x).$$

U specijalnom slučaju, za $n=1,2,3$ imamo

$$x^2 \sim P_1^*(x) = \frac{1}{2}, \quad x^3 \sim P_2^*(x) = \frac{3}{4}x, \quad x^4 \sim P_3^*(x) = x^2 - \frac{1}{8}.$$

Primetimo da se kod aproksimacije funkcije $x \mapsto x^{n+1}$ $(|x| \leq 1)$ u skupu $\mathcal{P}_n$, mini-max aproksimacijom i srednje-kvadratnom aproksimacijom sa težinom $(1-x^2)^{-1/2}$, dobijaju isti aproksimacioni polinomi.

Primer 3.6.2. U skupu $\mathcal{P}_2$ odredimo najbolju mini-max aproksimaciju za $x \mapsto f(x) = x^6$ $(|x| \leq 1)$. Za odredjivanje koeficijenata polinoma najbolje mini-max aproksimacije $P_2^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, potrebno je naći $n+2=4$ tačke x_0, x_1, x_2, x_3, takve da je

$$\delta_2^*(x_0) = -\delta_2^*(x_1) = \delta_2^*(x_2) = -\delta_2^*(x_3) = \pm\Delta, \tag{3.6.3}$$

gde su $\delta_2^*(x)=x^6-P_2^*(x)$ i $\Delta=E_2(f) = \max\limits_{|x|\le 1} |\delta_2^*(x)|$.

Zbog simetrije problema može se uzeti $a_1=0$, a za tačke x_k $(k=0,1,2,3)$, na primer, $x_0=-t$, $x_1=0$, $x_2=t$, $x_3=1$, gde je t $(0<t<1)$ tačka u kojoj δ_2^* dostiže ekstremnu vrednost. Dakle, t je pozitivan koren jednačine $6t^5-2a_2t=0$.

Kako je, na osnovu (3.6.3),

$$a_0 = t^6 - (a_0+a_2t^2) = a_0+a_2-1,$$

lako nalazimo $a_2=1$ i $a_0=-\frac{\sqrt{3}}{9}$. Prema tome, najbolja mini-max aproksimacija za $x\mapsto x^6$ $(|x|\le 1)$ u skupu $\mathcal{P}_2$ je

$$P_2^*(x) = x^2 - \frac{\sqrt{3}}{9},$$

pri čemu je veličina najbolje aproksimacije (maksimalno odstupanje) $\Delta = \|\delta_2^*\|_\infty E_2(f) = \frac{\sqrt{3}}{9} \approx 0.19245$.

Primer 3.6.3. Istim postupkom kao u prethodnom primeru, nalazi se najbolji mini-max polinom u skupu $\mathcal{P}_2$ za funkciju $x\mapsto f(x)=|x|$ $(|x|\le 1)$, $P_2^*(x)=1/8+x^2$, pri čemu je $\Delta=\|f-P_2^*\|_\infty=1/8$.

Oslanjajući se na teoremu 3.6.1 konstruišu se algoritmi za odredjivanje najbolje mini-max aproksimacije date funkcije. Jedan od najprikladnijih algoritama je Remesov algoritam. Jedna varijanta Remesovog algoritma se može iskazati na sledeći način:

1° Izabere se skup od $n+2$ sukcesivne tačke $x_0,x_1,\dots,x_{n+1}$ sa segmenta $[a,b]$ i odrede se koeficijenti polinoma P_n i veličina E tako da je

$$f(x_k) - P_n(x_k) = (-1)^k E \quad (k=0,1,\dots,n+1). \tag{3.6.4}$$

2° Na $[a,b]$ se odredi skup od $n+2$ tačke $\hat{x}_0,\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{n+1}$ u kojima $\delta_n(x)=f(x)-P_n(x)$ ima sukcesivne lokalne ekstremume sa alternativnim znacima, uključujući u ovaj skup tačku u kojoj veličina $|\delta_n(x)|$ ima najveću vrednost na $[a,b]$.

3° Za unapred zadatu tačnost ε proveravaju se uslovi $|\hat{x}_k-x_k|<\varepsilon$ $(k=0,1,\dots,n+1)$. Ukoliko bar jedan od ovih uslova nije zadovoljen, uzima se $x_k:=\hat{x}_k$ $(k=0,1,\ldots,n+1)$ i prelazi na 1^o. U slučaju da su pomenuti uslovi ispunjeni, algoritam se završava i polinom P_n se uzima kao najbolja mini-max aproksimacija P_n^*.

S obzirom da se teorema 3.6.1 (o Čebiševljevoj alternansi) može formulisati i za neke opštije tipove aproksimacionih funkcija, kakve su, na primer, linearna aproksimaciona funkcija i racionalna aproksimaciona funkcija, Remesov algoritam se može primeniti i u tim slučajevima. Primetimo da u slučaju kada imamo nelinearnu aproksimacionu funkciju, sistem jednačina (3.6.4) postaje nelinearan i obično se tada rešava metodom Newton-Kantoroviča. Pri ovome se po metodu Newton-Kantoroviča, u cilju skraćivanja numeričkog rada, najčešće izvodi samo nekoliko prvih koraka.

Vrlo često se za nalaženje mini-max aproksimacije, problem zamenjuje odgovarajućim diskretnim mini-max problemom. Naime, segment $[a,b]$ se zamenjuje diskretnim skupom tačaka $I_m=\{x_0,x_1,\ldots,x_m\}$, gde je $m>>n$. Neka je aproksimaciona funkcija linearna, tj.

$$\phi(x) = a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+\ldots+a_n\phi_n(x).$$

Mini-max problem

$$\min_{a_i}\Big(\max_{0\leq k\leq m}\Big|f(x_k)-\sum_{i=0}^{n}a_i\phi_i(x_k)\Big|\Big) = \max_{0\leq k\leq m}\Big|f(x_k)-\sum_{i=0}^{n}\bar{a}_i\phi_i(x_k)\Big|$$

može se zameniti ekvivalentnim problemom:

Naći min w

pod ograničenjima

$$\left.\begin{aligned} w+\sum_{i=0}^{n}a_i\phi_i(x_k) &\geqq f(x_k)\\ w-\sum_{i=0}^{n}a_i\phi_i(x_k) &\geqq -f(x_k)\end{aligned}\right\}\quad (k=0,1,\ldots,m).$$

Dobijeni problem linearnog programiranja, može se rešiti primenom simplex metoda na dualni problem ([4]):

$$\text{Naći } \max\Big(\sum_{k=0}^{m}(s_k-t_k)f(x_k)\Big)$$

pod ograničenjima

$$\sum_{k=0}^{m} (s_k + t_k) \leq 1,$$

$$\sum_{k=0}^{m} (s_k - t_k)\phi_i(x_k)=0 \qquad (i=0,1,\ldots,n),$$

$$s_k \geq 0, \quad t_k \geq 0 \qquad (k=0,1,\ldots,m).$$

O nekim algoritamskim modifikacijama za rešavanje poslednjeg problema može se naći u [5], dok se o aproksimaciji pomoću racionalnih funkcija može se naći u radu [3].

6.4. LITERATURA

1. N.I.Ahiezer: Lekcii po teorii apprksimacii. Gostehizdat, Moskva, 1947.
2. J.H.Ahlberg, E.N.Nilson, J.L.Walsch: The theory of splines and their applications. Academic Press, New York, 1967.
3. I.Barrodale: *Best rational approximation and strict quasi-convexity.* SIAM J. Numer. Anal. 10(1973),8-12.
4. I.Barrodale: *Basic approximation theory.* In: Numerical solution of integral equations (L.M.Delves & J.Walsh, eds.), 54-62, Clarendon Press, Oxford, 1974.
5. I.Barrodale & C.Phillips: *Solution of an over-determined system of linear equation in Chebyshev norm.* Preprint, Dept. of Computational and Statistical Science. University of Liverpoll,1973.
6. K.Böhmer: Spline-Funktionen. B.G. Teubner, Stuttgart, 1974.
7. H.Brass: *Approximation durch Teilsummen von Orthogonalpolynomreihen.* In: Numerical Methods of Approximation Theory (L.Collatz, G.Meinarus, H.Werner, Eds.), 69-83, ISNM 52, Birkhäuser, Basel, 1980.
8. H.Brass: *Error estimates for least squares approximation by polynomials.* J. Approx. Theory 41(1984), 345-349.
9. L.Collatz und W.Krabs: Approximationstheorie. Tschebyscheffsche Approximation with Anwendungen. B.G. Teubner, Stuttgart, 1973.
10. J.W.Cooley, P.A.W.Lewis. P.D.Welch: *Historical notes on the fast Fourier transform.* Proc. IEEE 55(1967), 1675-1677.
11. J.W.Cooley & J.W.Tukey: *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series.* Math. Comp. 19(1965), 297-301.
12. R.Courant: *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations.* Bull. Amer. Math. Soc. 49(1943), 1-23.
13. I.K.Daugavet: Vvedenie v teoriju priblíženija funkcií. Izd.

Leningradskogo Universiteta, Leningrad, 1977.

14. P.J.Davis: Interpolation and approximation. Blaisdell Publ. Company, New York, 1963.

15. B.P.Demidovič & I.A.Maron: Computational Mathematics. Mir Publishers, Moscow, 1973.

16. G.Goertzel: *An algorithm for the evaluation of finite trigonometric series*. Amer. Math. Monthly 65(1958).

17. R.P.Feinerman & D.J.Newman: Polynomial approximation. The Williams & Wilkins Company, Baltimore, 1974.

18. L.Fox & I.B.Parker: Chebyshev polynomials in numerical analysis. Oxford University Press, 1972.

19. D.C.Handscomb: *Spline functions*. In: Methods of Numerical approximation (D.C.Handscomb, ed.), 163-197, Pergamon Press, Oxford, 1966.

20. F.B.Hildebrand: Introduction to numerical analysis. McGraw - Hill, New York, 1974.

21. J.C.Holliday: *Smoothest curve approximation*.Math. Tables Aids Comput. (sada Math. Comp.) 11(1957), 233-243.

22. E.Isaacson & H.B.Keller: Analysis of numerical methods. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

23. D.W.Kammler: *Prony's method for completely monotonic functions*.J. Math. Anal. Appl. 57(1977), 560-570.

24. S.Karlin & W.J.Studden: Tchebysheff systems with applications in analysis and statistics. Interscience Publishers, New York, 1966.

25. M.Lal & E.Moore: *An iterative technique for fitting exponentials*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 10(1976), 979-990.

26. G.V.Milovanović i M.A.Kovačević: Zbirka rešenih zadataka iz numeričke analize. Naučna knjiga, Beograd, 1985.

27. G.V.Milovanović & S.Wrigge: *Least squares approximation with constraints*. Math. Comp. 46(1986), 551-565.

28. D.S.Mitrinović: Uvod u specijalne funkcije. Gradjevinska knjiga, Beograd, 1975.

29. D.Mitrović: Algebarska metoda za analizu i sintezu sistema automatskog upravljanja. Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1966.

30. R.De Prony: *Essai expérimentale et analytique* ... . J.Ec. Polytech. Paris. 1(2)(1795), 24-76.

31. W.Quade und L.Collatz: *Zur Interpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen*. S.-B. Preuss. Akad. Wiss.Phys.-Mat. Kl. 30 (1938), 383-429.

32. E.Ja.Remez: Osnovy čislennyh metodov Čebyševskogo približenija. Naukova Dumka, Kiev, 1969.

33. T.J.Rivlin: An introduction to the approximation of functions. Dover Publications, Inc., New York, 1981.

34. I.J.Schoenberg; *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Quart. Appl. Math. 4(1946), 45-99; 112-141.

35. D.D.Stancu; *The remainder of certain linear approximation formulas in two variables*, J. SIAM Numer. Anal. Ser. B. 1(1964), 137-163.

36. S.B.Stečkin i Ju.N.Subbotin: Splainy v vyčislitel'noĭ matematike. Nauka, Moskva, 1976.

37. J.Stoer: Einführung in die Numerische Mathematik I. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

38. J.Todd; Introduction to the constructive theory of functions. New York, 1963.

39. D.Dj.Tošić: Uvod u numeričku analizu. Naučna knjiga, Beograd, 1978.

40. P.L.Van Roy & F.Schurer; A bibliography on spline functions. Technol. Univ., Eindhoven, 1971.

41. S.Wrigge & A.Fransén; *A general method of approximation. Part I.* Math. Comp. 38(1982), 567-588.

42. D.M.Young & R.T.Gregory: A survey of numerical mathematics, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Massachusetts, 1973.

GLAVA 7

Numeričko diferenciranje i numerička integracija

7.1. NUMERIČKO DIFERENCIRANJE

U ovom poglavlju razmatramo problem numeričkog diferenciranja realnih funkcija definisanih na $[a,b]$.

7.1.1. Osnovni pojmovi

Potreba za numeričkim diferenciranjem javlja se u sledećim slučajevima: (a) Kada su vrednosti funkcije poznate samo na diskretnom skupu tačaka iz $[a,b]$, tj. kada je funkcija f data tabelarno; (b) Kada je analitički izraz za f dosta komplikovan.

Numeričko diferenciranje se uglavnom zasniva na aproksimaciji funkcije f funkcijom ϕ na $[a,b]$, a zatim se ϕ diferencira odredjeni broj puta. Dakle, na osnovu $f(x) \sim \phi(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$, imamo

$$f^{(k)}(x) \sim \phi^{(k)}(x) \qquad (a \leqq x \leqq b;\ k=1,2,\ldots).$$

Za funkciju ϕ se najčešće uzimaju algebarski interpolacioni polinomi, s obzirom da se oni jednostavno diferenciraju.

Neka je ϕ interpolacioni polinom n-tog stepena, tj.

$$\phi(x) = P_n(x).$$

Ako je poznata greška $R_n(f;x)$ u jednakosti

$$f(x) = P_n(x) + R_n(f;x) \qquad (a \leqq x \leqq b), \tag{1.1.1}$$

moguće je oceniti grešku i u formuli za diferenciranje. Naime, iz (1.1.1) sleduje

$$f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + R_n^{(k)}(f;x) \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Za red izvoda ima smisla uzeti samo $k < n$.

Nije teško uočiti da numeričko diferenciranje ima manju tačnost od interpolacije. Tako na primer, dok je kod interpolacije greška u čvorovima jednaka nuli, kod numeričkog diferenciranja to nije slučaj.

7.1.2. Formule za numeričko diferenciranje

Neka su poznate vrednosti funkcije f na skupu ekvidistantnih tačaka $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subset [a,b]$, sa korakom h. Dakle, neka je

$$f_k = f(x_k) = f(x_0 + kh) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

Na skupu $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}\}$ $(0 \leqq i \leqq m-n)$ konstruišimo prvi Newtonov interpolacioni polinom

$$P_n(x) = f_i + p\Delta f_i + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 f_i + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}\Delta^n f_i,$$

tj.

(1.2.1) $$P_n(x) = f_i + p\Delta f_i + \frac{p^2-p}{2}\Delta^2 f_i + \frac{p^3-3p^2+2p}{6}\Delta^3 f_i + \ldots + \frac{p^n - \frac{1}{2}n(n-1)p^{n-1} + \ldots}{n!}\Delta^n f_i,$$

gde je $p = (x-x_i)/h$.

S obzirom da je $P_n'(x) = \frac{1}{h}\cdot\frac{dP_n(x)}{dp}$, diferenciranjem jednakosti (1.2.1) dobijamo

(1.2.2) $$P_n'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_i + \frac{2p-1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{3p^2-6p+2}{6}\Delta^3 f_i + \ldots\right).$$

Daljim diferenciranjem (1.2.2), dobijamo redom P_n'', P_n''', itd. Na primer,

(1.2.3) $$P_n''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_i + (p-1)\Delta^3 f_i + \ldots\right).$$

Umesto prvog Newtonovog interpolacionog polinoma mogu se koristiti i ostali interpolacioni polinomi. Na primer, diferenciranjem Stirlingovog polinoma

$$P_n(x) = f_i + \binom{p}{1}\delta\mu f_i + \frac{p}{2}\binom{p}{1}\delta^2 f_i + \binom{p+1}{3}\delta^3\mu f_i + \frac{p}{4}\binom{p+1}{3}\delta^4 f_i + \ldots,$$

gde je $x = x_i + ph$, dobijamo

$$P_n'(x) = \frac{1}{h}\left(\delta\mu f_i + p\delta^2 f_i + \frac{3p^2-1}{6}\delta^3\mu f_i + \frac{2p^3-p}{12}\delta^4 f_i + \dots\right),$$

$$P_n''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 f_i + p\delta^3\mu f_i + \frac{6p^2-1}{12}\delta^4 f_i + \dots\right)$$

$$P_n'''(x) = \frac{1}{h^3}\left(\delta^3\mu f_i + p\delta^4 f_i + \dots\right), \text{ itd.}$$

Za $x=x_i$, tj. $p=0$, formule (1.2.2) i (1.2.3) se svode na

$$P_n'(x_i) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3}\Delta^3 f_i - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n f_i\right)$$

i

$$P_n''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i + \frac{11}{12}\Delta^4 f_i - \dots\right).$$

Slično, iz formula dobijenih na osnovu Stirlingove formule sleduje

$$P_n'(x_i) = \frac{1}{h}\left(\delta\mu f_i - \frac{1}{6}\delta^3\mu f_i + \dots\right),$$

$$P_n''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 f_i - \frac{1}{12}\delta^4 f_i + \dots\right), \text{ itd.}$$

Do formula za izvod funkcije u interpolacionim čvorovima može se doći i formalno primenom operatorskog računa.

Kako je $e^{hD} = E = 1 + \Delta$, imamo

$$D = \frac{1}{h}\log(1+\Delta) = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \dots\right)$$

i

$$D^k = \frac{1}{h^k}\{\log(1+\Delta)\}^k.$$

Za dobijanje razvoja operatora D^k po stepenima od Δ, koristićemo se Stirlingovim brojevima prve vrste, koji se definišu na sledeći način:

<u>Definicija 1.2.1.</u> Koeficijenti $S_n^{(k)}$ u razvoju

$$\frac{(\log(1+x))^k}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{S_n^{(k)}}{n!} x^n,$$

koji važi za dovoljno malo x, nazivaju se Stirlingovim brojevima prve vrste.

Umesto prethodne definicije može se uzeti i sledeća njoj ekvivalentna definicija.

Definicija 1.2.2. Koeficijenti $S_n^{(k)}$ u razvoju uopštenog stepena po algebarskim stepenima, tj.

$$x^{(n)} = x(x-1)\ldots(x-n+1) = \sum_{k=1}^{n} S_n^{(k)} x^k,$$

nazivaju se Stirlingovim brojevima prve vrste.

Primer 1.2.1. Dokazaćemo da za Stirlingove brojeve $S_n^{(k)}$ važi rekurentna relacija

$$S_{n+1}^{(k)} = S_n^{(k-1)} - nS_n^{(k)} \qquad (k=2,3,\ldots). \tag{1.2.4}$$

Kako je $x^{(n+1)} = x^{(n)}(x-n)$, zaista, iz

$$\sum_{k=1}^{n+1} S_{n+1}^{(k)} x^k = (x-n)\sum_{k=1}^{n} S_n^{(k)} x^k = -nS_n^{(1)}\,x + \sum_{k=2}^{n}(S_n^{(k-1)} - nS_n^{(k)})x^k + S_n^{(n)} x^{n+1}$$

sleduje (1.2.4), kao i jednakosti

$$S_{n+1}^{(1)} = -nS_n^{(1)} \qquad \text{i} \qquad S_{n+1}^{(n+1)} = S_n^{(n)} .$$

U sledećoj tabeli dati su Stirlingovi brojevi prve vrste $S_n^{(k)}$ za $n \leq 7$.

Tabela 1.2.1

n \ k	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	-1	1					
3	2	-3	1				
4	-6	11	-6	1			
5	24	-50	35	-10	1		
6	-120	274	-225	85	-15	1	
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1

Na osnovu definicije 1.2.1 imamo

$$D^k = \frac{1}{h^k}\left\{ \frac{S_k^{(k)}}{1}\Delta^k + \frac{S_{k+1}^{(k)}}{k+1}\Delta^{k+1} + \frac{S_{k+2}^{(k)}}{(k+1)(k+2)}\Delta^{k+2} + \ldots \right\},$$

tj.

$$D^k = \frac{1}{h^k}\{\Delta^k - \frac{k}{2}\Delta^{k+1} + \frac{k(3k+5)}{24}\Delta^{k+2} - \frac{k(k+2)(k+3)}{48}\Delta^{k+3} + \ldots\}.$$

Dakle, formula za k-ti izvod u tački x_i može se predstaviti u obliku

$$f^{(k)}(x_i) = D^k f_i = \frac{1}{h^k}(\Delta^k f_i - \frac{k}{2}\Delta^{k+1} f_i + \frac{k(3k+5)}{24}\Delta^{k+2} f_i - \ldots).$$

Na primer, za k=1, imamo

$$(1.2.5)\qquad f'(x_i) = \frac{1}{h}(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3}\Delta^3 f_i - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n f_i) + R_n'(f;x_i).$$

Ako $f \in C^{n+1}[a,b]$, greška u poslednjoj formuli može se predstaviti u obliku

$$(1.2.6)\qquad R_n'(f;x_i) = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n f^{(n+1)}(\xi_n) \qquad (x_i < \xi_n < x_{n+i}).$$

Primetimo da je kod interpolacionog polinoma $R_n(f;x_i) = 0$.

Primer 1.2.2. Na osnovu vrednosti funkcije $x \mapsto f(x) = x^3 - 2x - 5$ u tačkama $x_i = i$ $(i=0,1,2,3,4)$ odredićemo prva tri izvoda ove funkcije u tački x=0.

Formirajmo najpre tablicu Δ razlika, uzimajući h=1:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0	−5				
		−1			
1	−6		6		
		5		6	
2	−1		12		0
		17		6	
3	16		18		
		35			
4	51				

Tada je

$$f'(0) = \Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 = -2,$$

$$f''(0) = \Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 f_0 = 0, \quad f'''(0) = \Delta^3 f_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 f_0 = 6.$$

Na osnovu (1.2.5) i (1.2.6), za n=1,2,3 dobijamo respektivno

$$f'(x_i) = \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i) - \frac{h}{2} f''(\xi_1),$$

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h}(-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_2),$$

$$f'(x_i) = \frac{1}{6h}(-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}) - \frac{h^3}{4}f^{IV}(\xi_3),$$

gde je ξ_n, u izrazima za ostatak u prethodnim formulama, takvo da $\xi_n \in (x_i, x_{i+n})$ $(n=1,2,3)$.

Korišćenjem operatora zadnje razlike ∇, slično formuli (1.2.5), dobijamo

$$f'(x_i) = \frac{1}{h}(\nabla f_i + \frac{1}{2}\nabla^2 f_i + \frac{1}{3}\nabla^3 f_i + \ldots + \frac{1}{n}\nabla^n f_i) + R_n'(f;x).$$

Pod uslovom da $f \in C^{n+1}[a,b]$, ostatak se može predstaviti u obliku

$$R_n'(f;x) = \frac{1}{n+1} h^n f^{(n+1)}(\eta_n) \quad (x_{i-n} < \eta_n < x_i).$$

Odgovarajuće formule za n=1,2,3 su

$$f'(x_i) = \frac{1}{h}(f_i - f_{i-1}) + \frac{h}{2}f''(\eta_1),$$

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h}(3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}) + \frac{h^2}{3}f'''(\eta_2),$$

$$f'(x_i) = \frac{1}{6h}(11f_i - 18f_{i-1} + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}) + \frac{h^3}{4}f^{IV}(\eta_3).$$

Prethodne formule za prvi izvod u čvoru x_i su evidentno nesimetrične. One se uspešno primenjuju kada se odredjuje izvod na krajevima intervala $[a,b]$. Tipična primena ovih formula je kod aproksimacije diferencijalnih konturnih uslova u konturnim problemima kod diferencijalnih jednačina.

Za čvorove unutar segmenta $[a,b]$ bolje je koristiti simetrične formule za diferenciranje, tj. one koje se dobijaju primenom operatora centralne razlike.

Predjimo sada na konstrukciju ovakvih formula. Kako je

$$D = \frac{2}{h}\operatorname{arsh}\frac{\delta}{2} = \frac{2}{h}\log\left[\frac{1}{2}\delta + (1 + \frac{1}{4}\delta^2)^{1/2}\right],$$

tj.

$$(1.2.7)\quad D = \frac{1}{h}\left(\delta - \frac{1^2}{2^2 3!}\delta^3 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^4 5!}\delta^5 - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^6 7!}\delta^7 + \ldots\right),$$

odredjivanje Df_i primenom poslednje formule, nije moguće ako ne raspolažemo sa vrednostima funkcije u središnim tačkama izmedju interpolacionih čvorova, s obzirom da je

$$\delta^{2j+1} f_i = \delta^{2j}(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}).$$

Medjutim, formula (1.2.7) može se uspešno primeniti na odredjivanje $Df_{i+\frac{1}{2}}$, s obzirom da je

$$\delta^{2j+1} f_{i+\frac{1}{2}} = \delta^{2j}(f_{i+1} - f_i).$$

Da bismo odredili Df_i samo na osnovu vrednosti funkcije u interpolacionim čvorovima, formulu (1.2.7) treba modifikovati. Naime, kako je $\mu = (1+\frac{1}{4}\delta^2)^{\frac{1}{2}}$, imamo

$$D = \frac{2\mu}{h}(1+\frac{1}{4}\delta^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arsh}\frac{\delta}{2},$$

tj.

$$\text{(1.2.8)} \qquad D = \frac{\mu}{h}\left(\delta - \frac{1^2}{3!}\delta^3 + \frac{1^2\cdot 2^2}{5!}\delta^5 - \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{7!}\delta^7 + \ldots\right).$$

Na osnovu poslednje formule dobija se niz formula za odredjivanje Df_i. Navešćemo samo prve dve:

1° $\quad Df_i = \frac{1}{h}\mu\delta f_i + r_1(f) = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1}) + r_1(f),$

gde je $r_1(f) = -\frac{1}{6}h^2 f'''(\zeta_1) \quad (x_{i-1} < \zeta_1 < x_{i+1})$;

2° $\quad Df_i = \frac{1}{h}(\mu\delta f_i - \frac{1}{6}\mu\delta^3 f_i) + r_2(f)$

$$= \frac{1}{h}(-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}) + r_2(f),$$

gde je $r_2(f) = \frac{1}{30}h^4 f^{V}(\zeta_2) \quad (x_{i-2} < \zeta_2 < x_{i+2})$.

Izrazi za ostatak su izvedeni pod uslovom da je f tri, odnosno pet, puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Na primer, za dokaz ostatka u formuli 1° pretpostavimo da $f \in C^3[a,b]$. Tada korišćenjem Taylorove formule nalazimo

$$r_1(f) = f'(x_i) - \frac{1}{2h}(f(x_i+h) - f(x_i-h))$$

$$= -\frac{h^2}{2\cdot 3!}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)),$$

gde $\xi_1 \in (x_i, x_{i+1})$ i $\xi_2 \in (x_{i-1}, x_i)$. Kako je f''' neprekidna funkcija, to zaključujemo da postoji $\zeta_1 \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ takvo da je $f'''(\zeta_1)$ jednako aritmetičkoj sredini od $f'''(\xi_1)$ i $f'''(\xi_2)$, što znači da se

$r_1(f)$ može izraziti u obliku kakav je dat u 1^o.

Uzimajući umesto h, korak h/2, dvotačkasta simetrična formula za prvi izvod se može predstaviti u obliku

$$Df(x) \approx d_0(h) = \frac{1}{h}\left(f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right), \tag{1.2.9}$$

gde smo stavili $x=x_i$.

Do formule (1.2.9) se može doći metodom neodredjenih koeficijenata, polazeći od opšteg oblika dvotačkaste formule

$$d(h) = \frac{1}{h}(a_1 f(x+b_1h)+a_2 f(x+b_2h)),$$

gde su a_i, b_i $(i=1,2)$ za sada neodredjeni parametri. Pretpostavimo samo da je ovo pravilo normalizovano, tj. da je $|b_1-b_2|=1$. Odredićemo sada nepoznate parametre tako da ova formula bude maksimalnog reda, tj. da je ostatak reda $O(h^r)$, gde je r maksimalno moguće.

Korišćenjem Taylorove formule dobijamo

$$f'(x)-d(h) = -\frac{1}{h}(a_1+a_2)f(x)+(1-a_1b_1-a_2b_2)f'(x)$$

$$-\frac{h}{2}(a_1b_1^2+a_2b_2^2)f''(x) - \frac{h^2}{3!}(a_1b_1^3+a_2b_2^3)f'''(x)+O(h^3).$$

Iz uslova da se prva tri koeficijenta u dobijenom razvoju anuliraju i korišćenjem normalizacionog uslova nalazimo da je

$$a_1=-a_2, \quad b_1-b_2=1, \quad b_1=-b_2, \quad 2a_1b_1=1,$$

tj.

$$a_1=-a_2=1 \quad \text{i} \quad b_1=-b_2=1/2.$$

Primetimo da se sa ovakvim vrednostima minimizira koeficijent uz treći izvod funkcije f. Dakle, u klasi dvotačkastih formula za prvi izvod, "najbolja" je formula (1.2.9).

Isti problem, uz korišćenje tri tačke, razmatrali su J.M. Ash i R.L. Jones [5]. Naime, polazeći od

$$d(h) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{3} a_i f(x+b_ih)$$

i interpretirajući pojam "najbolja formula" na više načina, autori su dobili sledeće formule

1° $$d_1(h) = \frac{1}{6h}\Big\{(3-2\sqrt{3})f(x+(\frac{1}{\sqrt{3}}+1)h)+4\sqrt{3}f(x+\frac{1}{\sqrt{3}}h) - (3+2\sqrt{3})f(x+(\frac{1}{\sqrt{3}}-1)h)\Big\};$$

2° $$d_2(h) = \frac{1}{3h}\{f(x+h)+\omega^2 f(x+\omega h)+\omega f(x+\omega^2 h)\},$$

gde su $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2$ i $\omega^2=(-1-i\sqrt{3})/2$ (treći koren iz jedinice);

3° $$d_3(h) = \frac{1}{120h}\{32f(x+3h)-27f(x-2h)-5f(x+6h)\}.$$

Primetimo da su ove formule nesimetrične. Štaviše, formula $d_2(h)$ koristi vrednosti funkcije za kompleksne argumente. Uslov normalizacije je uveden pomoću

$$\min\{|b_1-b_2|,\ |b_1-b_3|,\ |b_2-b_3|\} = 1.$$

Sve tri formule su trećeg reda. Greška odsecanja se može iskazati u obliku

$$E_T = \frac{|c_4|f_4}{4!}h^3,$$

gde su $c_4 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i^4$, $f_4 = \sup_{y\in U(x)} |f^{IV}(y)|$, $U(x)$ okolina tačke x.

Za izračunavanje viših izvoda koristi se formula (1.2.7) za izvode parnog reda i formula (1.2.8) za izvode neparnog reda. Tako dobijamo

$$D^2 = \frac{1}{h^2}(\delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \frac{1}{90}\delta^6 - \frac{1}{560}\delta^8 + \frac{1}{3150}\delta^{10} - \dots),$$

$$D^3 = \frac{\mu}{h^3}(\delta^3 - \frac{1}{4}\delta^5 + \frac{7}{120}\delta^7 - \dots),$$

$$D^4 = \frac{1}{h^4}(\delta^4 - \frac{1}{6}\delta^6 + \frac{7}{240}\delta^8 - \dots),$$

$$D^5 = \frac{\mu}{h^5}(\delta^5 - \frac{1}{3}\delta^7 + \dots), \text{ itd.}$$

Na kraju dajemo najprostiju formulu za aproksimaciju drugog izvoda koja se u praksi najčešće koristi. Ovu formulu dobijamo uzimajući samo prvi član u razvoju za D^2, tj.

$$D^2 f_i = \frac{1}{h^2}\delta^2 f_i + r(f) = \frac{1}{h^2}(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})+r(f).$$

Pod pretpostavkom da $f \in C^4[a,b]$ jednostavno se može dokazati da postoji $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ takvo da se ostatak može predstaviti u obliku

$$r(f) = -\frac{h^2}{12} f^{IV}(\xi).$$

Korišćenjem numeričkih kvadratura mogu se dobiti formule za numeričko diferenciranje analitičkih funkcija (videti Lyness i Moler [47], Lyness [45], Tošić [86], Gautschi i Milovanović [28]).

7.2. NUMERIČKA INTEGRACIJA

Ovo poglavlje je posvećeno konstrukciji i analizi metoda za numeričku integraciju Poseban tretman je dat Gauss-Christoffelovim kvadraturama.

7.2.1. Uvodne napomene

Numerička integracija funkcija sastoji se u približnom izračunavanju odredjenih integrala na osnovu niza vrednosti podintegralne funkcije po odredjenoj formuli.

Formule za numeričko izračunavanje jednostrukih integrala nazivaju se kvadraturne formule. Slično, formule za dvostruke integrale nazivaju se kubaturne formule. U našem izlaganju zadržaćemo se samo na kvadraturnim formulama.

Potreba za numeričkom integracijom javlja se u velikom broju slučajeva. Naime, Newton-Leibnitzova formula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{2.1.1}$$

gde je F primitivna funkcija za funkciju f, ne može se uvek uspešno primeniti*. Navešćemo neke od tih slučajeva:

1° Funkcija F se ne može predstaviti pomoću konačnog broja elementarnih funkcija (na primer, kada je $f(x)=e^{-x^2}$).

2° Primena formule (2.1.1) često dovodi do vrlo složenog izraza, čak i kod izračunavanja integrala jednostavnijih funkcija; na primer

* *Ako nije drugačije naglašeno smatraćemo da je funkcija f neprekidna na [a,b].*

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^3} = \log \sqrt[3]{|a+1|} - \frac{1}{6}\log(a^2-a+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{3}}{2-a}.$$

3^o Kod integracije funkcija, čije su vrednosti poznate samo na diskretnom skupu tačaka (dobijene, na primer, eksperimentalno), nije moguće primeniti formulu (2.1.1).

Veliki broj kvadraturnih formula ima oblik

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{2.1.2}$$

gde su x_k tzv. čvorovi, a A_k težinski koeficijenti. Ako pretpostavimo da je f element izvesnog prostora X (na primer, $X=C[a,b]$ ili $X=C^m[a,b]$), tada numeričku integraciju možemo tretirati kao aproksimaciju funkcionele $I:X\to R$, pomoću funkcionele $K_n:X\to R$, gde su

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \quad \text{i} \quad K_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k).$$

Funkcionelu R_n definisanu pomoću

$$R_n(f) = I(f) - K_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

nazivamo ostatkom kvadraturne formule (2.1.2) i ona predstavlja grešku koja se čini pri zameni integrala konačnom sumom.

Čvorovi x_k su, u opštem slučaju, kompleksni brojevi. Medjutim, kod većine kvadraturnih formula čvorovi x_k su takvi da svi pripadaju $[a,b]$, tj. da je

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b. \tag{2.1.3}$$

Uslov (2.1.3) je prirodan, jer se tada vrednost funkcionele K_n odredjuje na osnovu vrednosti funkcije f na diskretnom skupu tačaka $\{x_1,\dots,x_n\}\subset[a,b]$. Ako je $x_1=a$ i $x_n=b$, za formulu (2.1.2) kažemo da je zatvorenog tipa, dok u ostalim slučajevima kažemo da je otvorenog tipa.

Od interesa su i kvadraturne formule oblika

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{2.1.4}$$

gde je $p: (a,b) \to R_+$ data težinska funkcija.

U daljem tekstu ako nije drugačije naglašeno smatraćemo da je $X=C[a,b]$.

7.2.2. Klase formula i stepen tačnosti

U prostoru funkcija X uočimo m linearno nezavisnih elemenata $u_1,u_2,\dots,u_m$. Sa $X_m(\subset X)$ označimo lineal nad ovim elementima.

Problem konstrukcije kvadraturnih formula sastoji se u odredjivanju parametara x_k i A_k $(k=1,\dots,n)$, pri čemu su uobičajena dva pristupa:

(a) Čvorovi x_k se unapred fiksiraju, a parametri A_k se odredjuju iz tzv. uslova "maksimalne tačnosti", s obzirom na izabrani potprostor X_m. Naime, parametre A_k (ukoliko je to moguće) odredjujemo iz uslova

$$R_n(f) = 0 \qquad (\forall f \in X_n). \tag{2.2.1}$$

S obzirom da je R_n linearna funkcionela, uslov (2.2.1) je ispunjen ako je $R_n(u_i)=0$ $(i=1,2,\dots,n)$, tj. ako je

$$\sum_{k=1}^{n} u_i(x_k)A_k = I(u_i) \qquad (i=1,2,\dots,n), \tag{2.2.2}$$

gde je funkcionela I, u opštem slučaju,

$$I(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx .$$

Integrali $I(u_i)$ se nazivaju momentima težinske funkcije p u odnosu na bazis $B=\{u_1,\dots,u_n\}$. Jasno je da sistem (2.2.2) ima jedinstveno rešenje ako je B Čebiševljev sistem.

(b) Parametri A_k i x_k $(k=1,\dots,n)$ odredjuju se iz uslova "maksimalne moguće tačnosti", tj. iz uslova

$$R_n(f) = 0 \qquad (\forall f \in X_{2n}), \tag{2.2.3}$$

ili, što je ekvivalentno, iz $R_n(u_i)=0$ $(i=1,2,\dots,2n)$. Dakle, A_k i x_k su rešenja nelinearnog sistema od $2n$ jednačina

$$\sum_{k=1}^{n} u_i(x_k)A_k = I(u_i) \qquad (i=1,2,\dots,2n). \tag{2.2.4}$$

Za kvadrature dobijene na ovaj način reći ćemo da su Gauss-Christoffelovog tipa.

Daleko najčešće se u primenama koriste kvadrature koje poseduju algebarski stepen tačnosti, tj. kod kojih je izabran sistem funkcija $u_i=x^{i-1}$ $(i=1,2,\ldots)$. U tom slučaju potprostor X_m biće skup svih algebarskih polinoma ne višeg stepena od $m-1$. Označimo ga sa $\mathcal{P}_{m-1}$. Prema tome, kvadraturna formula (2.1.4) ima algebarski stepen tačnosti $p=m-1$, ako je $R_n(f)=0$ za svako $f\in\mathcal{P}_{m-1}$ (tj. $R_n(x^{i-1})=0$, $i=1,\ldots,m$), a bar za jedno $f\in\mathcal{P}_m$, $R_n(f)\neq 0$ (tj. $R_n(x^m)\neq 0$).

Na osnovu prethodnog algebarski stepen tačnosti kvadraturnih formula dobijenih pristupom (a) je ne manji od $n-1$, dok je kod kvadraturnih formula Gauss-Christoffelovog tipa (pristup (b)) maksimalno moguć $p=2n-1$ (videti (2.2.3)), gde je $X_{2n}=\mathcal{P}_{2n-1}$).

Primer 2.2.1. Neka je

$$I(f)=\int_{-1}^{1} f(x)dx \quad i \quad K_3(f)=\sum_{k=1}^{3} A_k f(x_k).$$

Za u_i uzmimo algebarske polinome x^{i-1} $(i=1,2,\ldots)$.

(a) Izaberimo čvorove ekvidistantno, tj. $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Tada sistem (2.2.2) postaje

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 2,\\ -A_1 \qquad\;\; + A_3 &= 0,\\ A_1 \qquad\;\; + A_3 &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

odakle sleduje $A_1=A_3=\frac{1}{3}$, $A_2=\frac{4}{3}$. Dakle, dobijena kvadraturna formula ima oblik

$$I(f)\approx K_3(f)=\frac{1}{3}(f(-1)+4f(0)+f(1)).$$

Ova formula je dobro poznata iz standardnih kurseva matematičke analize i naziva se Simpsonova formula. Za segment $[0,2h]$ ova formula glasi

$$\int_0^{2h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2),$$

gde je $f_k\equiv f(kh)$ $(k=0,1,2)$.

(b) Odredjivanje čvorova i težinskih koeficijenata iz uslova maksimalne moguće tačnosti, tj. iz sistema jednačina (dobijenog na osnovu (2.2.4))

$$
\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 &= 2,\\
A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 &= 0,\\
A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 &= \frac{2}{3},\\
A_1x_1^3 + A_2x_2^3 + A_3x_3^3 &= 0,\\
A_1x_1^4 + A_2x_2^4 + A_3x_3^4 &= \frac{2}{5},\\
A_1x_1^5 + A_2x_2^5 + A_3x_3^5 &= 0
\end{aligned}
$$

može biti veoma komplikovano. Korišćenjem izvesnih simetrija u sistemu nalazimo

$$x_1=-\sqrt{3/5},\quad x_2=0,\quad x_3=\sqrt{3/5},$$

$$A_1=A_3=5/9,\quad A_2=8/9,$$

što znači da smo dobili kvadraturnu formulu

$$I(f) \simeq K_3(f) = \frac{1}{9}(5f(-\sqrt{\tfrac{3}{5}})+8f(0)+5f(\sqrt{\tfrac{3}{5}})),$$

koja je poznata u literaturi kao trotačkasta Gauss-Legendreova formula. Ova formula ima algebarski stepen tačnosti $p=5$.

Za kvadraturne formule sa algebarskom bazom kažemo da su interpolacionog tipa, jer se umesto rešavanja sistema jednačina (2.2.2) ili (2.2.4) (sa prethodno odredjenim x_k na neki drugi način), težinski koeficijenti A_k mogu, korišćenjem Lagrangeove interpolacione formule, izraziti u eksplicitnom obliku

$$A_k = \frac{1}{\omega'(x_k)}\int_a^b \frac{p(x)\omega(x)}{x-x_k}\,dx \qquad (k=1,\ldots,n), \tag{2.2.5}$$

gde je $\omega(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

Zaista ako su vrednosti funkcije f u datim tačkama $x_1,\ldots,x_n$ $(\in[a,b])$ redom $f_1,\ldots,f_n$, tj.

$$f_k \equiv f(x_k) \qquad (k=1,\ldots,n),$$

odgovarajući Lagrangeov interpolacioni polinom je tada ne višeg stepena od $n-1$ i ima oblik

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)},$$

gde je $\omega(x)$ dato prethodno.

Tada zamenom funkcije interpolacionim polinomom i interpolacijom dobijamo

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)P_{n-1}(x)dx + R_n(f),$$

tj.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f_k + R_n(f), \tag{2.2.6}$$

gde je A_k dato sa (2.2.5).

Kako je za $f(x)=x^k$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$, $f(x)=P_{n-1}(x)$, imamo

$$R_n(x^k) \equiv 0 \qquad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

odakle zaključujemo da je formula (2.2.6) tačna za svako $f\in \mathcal{P}_{n-1}$, bez obzira na izbor interpolacionih čvorova.

Ako se za B izabere, na primer, trigonometrijski bazis $\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ldots\}$ dobićemo tzv. trigonometrijske kvadrature, kod kojih je interesantan tzv. trigonometrijski stepen tačnosti. Takodje, za B se mogu birati: eksponencijalne funkcije, racionalne funkcije, splajn funkcije i sl.

U daljem izlaganju tretiraćemo samo interpolacione kvadrature sa algebarskom bazom.

Kod kvadraturnih formula zatvorenog tipa obično numeracija čvorova počinje od nule, tako da imamo kvadraturu oblika

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_{n+1}(f). \tag{2.2.7}$$

Indeks n+1 u ostatku označava da se integral približno izračunava na osnovu vrednosti podintegralne funkcije u n+1 tačaka. Ako je formula (2.2.7) interpolacionog tipa, tada se koeficijenti A_k odredjuju pomoću (2.2.5) za $k=0,1,\ldots,n$, pri čemu je $\omega(x)=(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_n)$. Algebarski stepen tačnosti je u ovom slučaju ne manji od $p=n$.

7.2.3. Newton–Cotesove formule

U ovom odeljku izvešćemo kvadraturne formule zatvorenog tipa u kojima su interpolacioni čvorovi $x_k = x_0 + kh$ $(k=0,1,\ldots,n)$ uzeti ekvidistantno sa korakom $h=(b-a)/n$.

Dakle, formule su oblika (2.2.7). Razmotrićemo najprostiji slučaj kada je $p(x)=1$.

Ako uvedemo smenu $x-x_0=ph$, imamo

$$\begin{aligned}(2.3.1)\qquad \omega(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\\ &= h^{n+1}p(p-1)\ldots(p-n)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(2.3.2)\qquad \omega'(x_k) &= (x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)\\ &= h^n(-1)^{n-k}k!(n-k)!\,.\end{aligned}$$

Uvodjenjem oznake za uopšteni stepen $x^{(s)}=x(x-1)\ldots(x-s+1)$, na osnovu (2.3.1), (2.3.2) i rezultata iz prethodnog odeljka, dobijamo

$$A_k = \int_0^n \frac{(-1)^{n-k}p^{(n+1)}h}{(p-k)k!(n-k)!}\,dp \qquad (k=0,1,\ldots,n),$$

tj.

$$A_k = (b-a)H_k \qquad (k=0,1,\ldots,n),$$

gde smo stavili

$$(2.3.3)\qquad H_k \equiv H_k(n) = \frac{(-1)^{n-k}}{n!n}\binom{n}{k}\int_0^n \frac{p^{(n+1)}}{p-k}\,dp \qquad (k=0,1,\ldots,n).$$

Koeficijenti H_k su u literaturi (videti na primer [49] i [15]) poznati kao Newton-Cotesovi koeficijenti, a odgovarajuće formule

$$(2.3.4)\qquad \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x)dx \simeq (b-a)\sum_{k=0}^{n} H_k f\!\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) \qquad (n\in N)$$

kao Newton-Cotesove formule.

<u>Primedba 2.3.1.</u> Za koeficijente H_k važe jednakosti

$$H_k = H_{n-k} \quad \text{i} \quad \sum_{k=0}^{n} H_k = 1.$$

Razmotrićemo sada dva partikularna slučaja.

a) Neka je $n=1$. Tada je, na osnovu (2.3.3), $H_0=H_1=\frac{1}{2}$ pa je odgovarajuća Newton-Cotesova formula

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + R_2(f). \tag{2.3.5}$$

Ova formula je poznata kao trapezna formula ili trapezno pravilo.

<u>Teorema 2.3.1.</u> Ako $f \in C^2[a,b]$, za ostatak $R_2(f)$, u formuli (2.3.5), važi

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi_1) \quad (a < \xi_1 < b). \tag{2.3.6}$$

<u>Dokaz</u>. Definišimo funkciju $F:[0,b-a]\to R$, pomoću

$$F(h) = \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{h}{2}(f(a) + f(a+h)).$$

Diferenciranjem ove funkcije sukcesivno dva puta dobijamo

$$F'(h) = \frac{1}{2}(f(a+h) - f(a)) - \frac{h}{2} f'(a+h)$$

i

$$F''(h) = -\frac{h}{2} f''(a+h). \tag{2.3.7}$$

Kako je $F(0)=0$ i $F'(0)=0$, integracijom jednačine (2.3.7) dobijamo

$$F(h) = -\frac{1}{2}\int_0^h t(h-t)f''(a+t)dt.$$

S obzirom da $f \in C^2[a,b]$, primenom teoreme o srednjoj vrednosti odredjenog integrala, poslednja jednakost se svodi na

$$F(h) = -\frac{1}{2}f''(a+\theta h)\int_0^h t(h-t)dt = -\frac{h^3}{12} f''(a+\theta h), \tag{2.3.8}$$

gde je $0<\theta<1$. Najzad, ako stavimo $h=b-a$, iz (2.3.8) sleduje

$$R_2(f) = F(b-a) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi_1) \quad (a < \xi_1 < b),$$

čime je dokaz završen.

Promenom uslova za f moguće je dobiti i druge ocene za $R_2(f)$. Navešćemo bez dokaza neke od tih rezultata ([38], [57], [60], [94]).

Teorema 2.3.2. Ako funkcija zadovoljava Lipschitzov uslov, tj.

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y| \quad (\forall x,y \in [a,b]),$$

tada je

$$|R_2(f)| \leq \frac{M(b-a)^2}{4} - \frac{1}{4M}(f(b)-f(a))^2.$$

Teorema 2.3.3. Ako funkcija f zadovoljava uslove $|f'(x)-f'(y)| \leq M|x-y|$ $(\forall x,y \in [a,b])$ i $f'(a)=f'(b)=0$, tada je

$$|R_2(f)| \leq \frac{M(b-a)^3}{24} - \frac{1}{2M}\cdot\frac{(f(b)-f(a))^2}{b-a}.$$

b) Pretpostavimo sada da je n=2. Tada na osnovu (2.3.3) i (2.3.4), dobijamo kvadraturnu formulu

$$(2.3.9) \qquad \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)+R_3(f),$$

koja je poznata kao Simpsonova formula ili pravilo (videti primer 2.2.1).

Teorema 2.3.4. Ako $f \in C^4[a,b]$, za ostatak $R_3(f)$, u formuli (2.3.9), važi

$$(2.3.10) \qquad R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\xi_2) \qquad (a<\xi_2<b).$$

Dokaz. Slično, kao u dokazu teoreme 2.3.1, definišimo funkciju $F:[-\alpha,\alpha]\to R$, pomoću

$$F(h) = \int_{c-h}^{c+h} f(x)dx - \frac{h}{3}(f(c-h)+4f(c)+f(c+h)),$$

gde su $c=\frac{a+b}{2}$ i $\alpha=\frac{b-a}{2}$.

Uzastopnim diferenciranjem funkcije F tri puta dobijamo

$$F'(h) = \frac{2}{3}(f(c-h)-2f(c)+f(c+h)) - \frac{h}{3}(f'(c+h)-f'(c-h)),$$

$$F''(h) = -\frac{1}{3}(f'(c+h)-f'(c-h)) - \frac{h}{3}(f''(c+h)+f''(c-h)),$$

$$F'''(h) = -\frac{h}{3}(f'''(c+h) - f'''(c-h)).$$

Kako je $F(0)=0$, $F'(0)=0$, $F''(0)=0$, rešenje poslednje jednačine možemo predstaviti u obliku

$$F(h) = \int_0^h \frac{1}{2}(h-t)^2(-\frac{t}{3})(f'''(c+t) - f'''(c-t))dt,$$

odakle, korišćenjem Lagrangeove teoreme, dobijamo

$$F(h) = -\frac{1}{3}\int_0^h t^2(h-t)^2 f^{IV}(c+\theta(t)t)dt \qquad (|\theta(t)| < 1).$$

Najzad, primenom teoreme o srednjoj vrednosti odredjenih integrala ($f \in C^4[a,b]$) i stavljanjem $h = \alpha = \frac{b-a}{2}$, iz poslednje jednakosti sleduje (2.3.10), čime je dokaz završen.

Na osnovu prethodnih razmatranja zaključujemo da je trapezna formula tačna za svako $f \in \mathcal{P}_1$, a da je Simpsonova formula tačna za svako $f \in \mathcal{P}_3$.

U daljem izlaganju daćemo pregled Newton-Cotesovih formula za $n \leqq 8$ (videti [1], [14], [37]). Pri ovome koristimo oznake $h=(b-a)/n$, $f_k=f(x_k)$ $(k=0,1,\ldots,n)$.

1) n=1 (trapezno pravilo)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0+f_1) - \frac{h^3}{12}f''(\xi_1);$$

2) n=2 (Simpsonovo pravilo)

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2) - \frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi_2);$$

3) n=3 (Simpsonovo pravilo $\frac{3}{8}$)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{IV}(\xi_3);$$

4) n=4 (Booleovo pravilo)

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4) - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi_4);$$

5) n=5

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx = \frac{5h}{288}(19f_0+75f_1+50f_2+50f_3+75f_4+19f_5) - \frac{275h^7}{12096} f^{(6)}(\xi_5);$$

6) n=6

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx = \frac{h}{140}(41f_0+216f_1+27f_2+272f_3+27f_4+216f_5+41f_6) - \frac{9h^9}{1400} f^{(8)}(\xi_6);$$

7) n=7

$$\int_{x_0}^{x_7} f(x)dx = \frac{7h}{17280}(751f_0+3577f_1+1323f_2+2989f_3+2989f_4 + 1323f_5+3577f_6+751f_7) - \frac{8183h^9}{518400} f^{(8)}(\xi_7);$$

8) n=8

$$\int_{x_0}^{x_8} f(x)dx = \frac{4h}{14175}(989f_0+5888f_1-928f_2+10496f_3-4540f_4+10496f_5 - 928f_6+5888f_7+989f_8) - \frac{2368h^{11}}{467775} f^{(10)}(\xi_8),$$

gde $\xi_k \in (x_0,x_k)$ $(k=1,\ldots,8)$.

U opštem slučaju ostatak $R_{n+1}(f)$ ima oblik (videti, na primer, [7], [14], [15])

$$R_{n+1}(f) = C_n h^m f^{(m-1)}(\xi_n) \qquad (x_0 < \xi_n < x_n), \tag{2.3.11}$$

gde je $m = 2[\frac{n}{2}] + 3$. Jednakost (2.3.11) ima smisla ukoliko funkcija $f \in C^{m-1}[a,b]$.

<u>Primedba 2.3.2.</u> Za koeficijente $H_k(n)$ u Newton-Cotesovoj formuli za segment $[0,1]$, važe asimptotske formule (videti [14], [93])

$$H_k(n) = \frac{(-1)^{k-1}}{n\log^2 n}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n-k}\Big)\Big(1 + O\big(\frac{1}{\log n}\big)\Big) \qquad (1 \le k \le n-1),$$

$$H_0(n) = H_n(n) = \frac{1}{n\log n}\Big(1 + O\big(\frac{1}{\log n}\big)\Big).$$

Na osnovu prethodnog uočavamo da se formule znatno komplikuju ukoliko je n veće. U praktičnim računanjima obično se koristi Simpsonova formula (n=2), s obzirom da je relativno jednostavna, a da pri tome daje dosta zadovoljavajuću tačnost ukoliko je h dovoljno malo. Uslov da h bude dovoljno malo može se obezbediti podelom segmenta [a,b] na niz podsegmenata, o čemu će biti reči u narednom odeljku.

Primer 2.3.1. Primenimo Newton-Cotesove formule za n=1,...,6 na približno izračunavanje integrala

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \tag{2.3.12}$$

čija je tačna vrednost $\log 2 = 0.69314818...$. Dobijene vrednosti sredjene su u narednoj tabeli.

n	Približna vrednost za I
1	0.75
2	0.6944444
3	0.69375
4	0.6931745
5	0.6931629
6	0.693148

Primedba 2.3.3. Ako Newton-Cotesovu formulu za n=6 predstavimo u obliku

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx = \frac{3h}{420}\{(42-1)f_0+(210+6)f_1+(42-15)f_1+(252+20)f_3$$
$$+ (42-15)f_4+(210+6)f_5+(42-1)f_6\} + R_7(f),$$

dobijamo tzv. Weddleovo pravilo

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx = \frac{3h}{10}(f_0+5f_1+f_2+6f_3+f_4+5f_5+f_6) + \bar{R}_7(f), \tag{2.3.13}$$

gde je

$$\bar{R}_7(f) = -\frac{h}{140}\,\Delta^6 f_0 + R_7(f),$$

tj.

$$\bar{R}_7(f)=-\frac{h^7}{1400}\left(10f^{(6)}(\eta_6)+9h^2f^{(8)}(\xi_6)\right) \quad (\xi_6,\eta_6\in(x_0,x_6)).$$

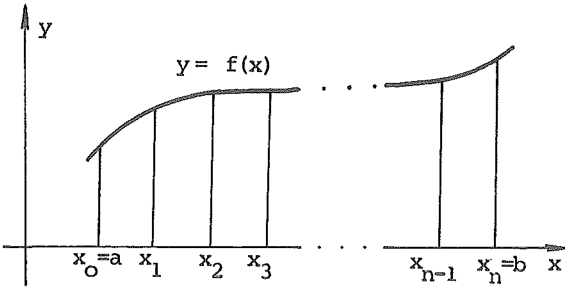
Primer 2.3.2. Primenom formule (2.3.13), na integral (2.3.12), dobijamo $I=0.6931493$, s obzirom da je

$$f_0=1.0000000,\quad f_1=0.8571428,\quad f_2=0.7500000,$$
$$f_3=0.6666667,\quad f_4=0.6000000,\quad f_5=0.5454545,$$
$$f_6=0.5000000.$$

7.2.4. Uopštene kvadraturne formule

Kao što je napomenuto u prethodnom odeljku, da bismo tačnije izračunali vrednost integrala potrebno je podeliti segment $[a,b]$ na niz podsegmenata, a zatim na svakom od njih primeniti neku od kvadraturnih formula. Na taj način dobijamo uopštene ili kompozitne formule. U ovom odeljku razmotrićemo uopštene formule dobijene na bazi trapezne i Simpsonove formule, kao i neke uopštene kvadraturne formule otvorenog tipa.

Podelimo segment $[a,b]$ na niz podsegmenata $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\ldots,n)$ tako da je $x_i=a+ih\,(i=0,1,\ldots,n)$ i $h=(b-a)/n$.



Sl. 2.4.1

Primenom trapezne formule na svaki od podsegmenata dobijamo

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h}{2}(f_{i-1}+f_i)-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)\right),$$

tj.

$$(2.4.1) \qquad \int_a^b f(x)dx = T_n - \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i),$$

gde su $T_n \equiv T_n(f;h) = h(\frac{1}{2}f_o + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n)$ i $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ $(i=1,\dots,n)$.

<u>Teorema 2.4.1.</u> Ako $f \in C^2[a,b]$ važi jednakost

$$(2.4.2) \qquad \int_a^b f(x)dx - T_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi) \qquad (a < \xi < b).$$

<u>Dokaz.</u> Kako uslov $f \in C^2[a,b]$ obezbedjuje egzistenciju takvog $\xi (a < \xi < b)$ da je

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = f''(\xi),$$

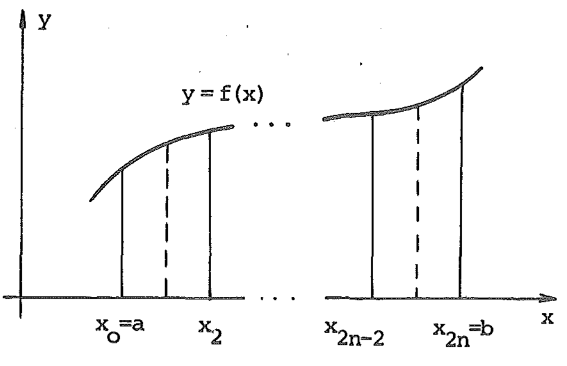
iz (2.4.1) neposredno sleduje jednakost (2.4.2).

Kvadraturna formula

$$\int_a^b f(x)dx \simeq T_n(f;h) \qquad (h = \frac{b-a}{n})$$

naziva se uopštena trapezna formula.

Pretpostavimo sada da je $h = \frac{b-a}{2n}$, tj. $x_i = a+ih$ $(i=0,1,\dots,2n)$ (videti sl.2.4.2), a zatim na podsegmente $[x_0,x_2],\dots,[x_{2n-2},x_{2n}]$ primenimo Simpsonovu formulu. Na taj način dobijamo uopštenu Simpsonovu formulu



Sl. 2.4.2

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n(f;h) \qquad (h = \frac{b-a}{2n}),$$

gde je

$$S_n \equiv S_n(f;h) = \frac{h}{3}\{f_o + 4(f_1 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + \dots + f_{2n-2}) + f_{2n}\}.$$

Teorema 2.4.2. Ako $f \in C^4[a,b]$ važi jednakost

$$\int_a^b f(x)dx - S_n = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{IV}(\xi) \qquad (a < \xi < b).$$

Dokaz je sličan dokazu teoreme 2.4.1.

Daćemo sada jednu uopštenu kvadraturnu formulu otvorenog tipa koja se naziva pravilo srednje tačke, a koja se dobija primenom elementarne formule

$$\int_c^{c+h} f(x)dx \approx hf(c + \frac{h}{2}).$$

Neka je

$$M_n \equiv M_n(f;h) = h(f_{1/2} + f_{3/2} + \dots + f_{(2n-1)/2}),$$

gde su $f_{(2k-1)/2} = f(a + \frac{2k-1}{2}h)$ $(k=1,\dots,n)$ i $h = \frac{b-a}{n}$.

Teorema 2.4.3. Ako $f \in C^2[a,b]$ važi

$$\int_a^b f(x)dx - M_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) \qquad (a < \xi < b).$$

Iz teorema 2.4.1 i 2.4.3 sleduje

Posledica 2.4.1. Ako $f \in C^2[a,b]$ i $f''(x) \geqq 0$ na $[a,b]$, tada je

$$M_n \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq T_n.$$

Sledeća teorema se može izvesti kao specijalan slučaj jednog opštijeg rezultata dobijenog u radu [56].

Teorema 2.4.4. Neka je f dva puta diferencijabilna funkcija na $[a,b]$ sa ograničenim drugim izvodom, tj. $|f''(x)| \leqq A$ $(\forall x \in [a,b])$. Tada je

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}(T_n + M_n) \right| \leq \frac{A}{48n^2} \qquad (h = \frac{b-a}{n}).$$

Primer 2.4.1. Primenom uopštene trapezne i uopštene Simpsonove formule izračunaćemo integral

$$\int_{1.0}^{1.2} \sqrt{x}\, dx,$$

čija je tačna vrednost $\frac{2}{3}\big((1.2)^{3/2} - 1\big) = 0.2096894...$, ili, zaokruglјena na šest značajnih cifara, 0.209689. Kod izračunavanja koristićemo se tablicom vrednosti funkcije $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20
f(x)	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544

Imamo

$$T_4 = 0.05\{\frac{1}{2}\cdot 1.00000 + (1.02470 + 1.04881 + 1.07238) + \frac{1}{2}\cdot 1.09544\} = 0.2096805$$

i

$$S_2 = \frac{0.05}{3}\{1.00000 + 4(1.02470 + 1.07278) + 2\cdot 1.04881 + 1.09544\} = 0.2096896,$$

ili, zaokrugljivanjem na šest značajnih cifara,

$$T_4 = 0.209680 \quad \text{i} \quad S_2 = 0.209690,$$

pri čemu su odgovarajuće greške $9\cdot 10^{-6}$ i $1\cdot 10^{-6}$.

Ispitajmo sada kako utiču greške zaokrugljivanja u vrednostima f_k na rezultat koji se dobija primenom uopštene trapezne i uopštene Simpsonove formule. Neka $\bar{f}_k$ označava zaokrugljenu vrednost od f_k, tj. neka je odgovarajuća greška zaokrugljivanja $e_k = \bar{f}_k - f_k$. Sem toga, neka je $|e_k| \leq E$. Kako je

$$T_n(\bar{f};h) = T_n(f;h) + T_n(e;h) \qquad (e(x) = \bar{f}(x) - f(x)),$$

imamo

$$|T_n(e;h)| \leq h\Big(\frac{1}{2}|e_0| + \sum_{k=1}^{n-1} |e_k| + \frac{1}{2}|e_n|\Big) \leq nhE = (b-a)E.$$

Ista granica za grešku se dobija i kod Simpsonove formule. Naime, imamo

$$|S_n(e;f)| \leq \frac{h}{3}\{|e_0|+4(|e_1|+\ldots+|e_{2n-1}|)$$

$$+ 2(|e_2|+\ldots+|e_{2n-2}|) + |e_{2n}|\}$$

$$\leq \frac{h}{3}\{1+4n+2(n-1)+1\}E = (b-a)E.$$

Kako su vrednosti funkcije f, u primeru 2.4.1, zaokrugljene na šest značajnih cifara, tj. njihove apsolutne greške ne prelaze $5\cdot 10^{-6}$, za grešku kod izračunavanja sume T_4 važi ocena

$$|T_4(e;0.05)| \leq (1.2-1)\cdot 5\cdot 10^{-6} = 10^{-6}.$$

Ista je granica i za $|S_2(e;0.05)|$.

Na kraju napomenimo da za veličine T_n, M_n, S_n važi jednakost

$$S_n(f;h) = \frac{1}{3}\big(T_n(f;2h) + 2M_n(f;2h)\big),$$

gde je $h = \frac{b-a}{2n}$.

7.2.5. Metodi za ocenu ostatka u kvadraturnim formulama

Kod numeričke integracije, kao što smo videli, javlja se greška ili ostatak kvadraturne formule $R_n(f)$, tj.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f).$$

Naravno, kod izračunavanja sume $\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ javlja i greška zaokrugljivanja, koja zavisi od tačnosti računara.

U ranijem izlaganju, dali smo ocenu ostatka $R_n(f)$ u nekim elementarnim kvadraturnim formulama. U opštem slučaju, veličina $R_n(f)$ zavisi od izbora kvadraturne formule i od osobina funkcije f.

U ovom odeljku, daćemo dva metoda za ocenu ostatka kvadraturnih formula. Prvi metod se odnosi na klasu neprekidno-diferencijabilnih funkcija, a drugi na jednu klasu analitičkih funkcija.

Primetimo, najpre, da je funkcionela L definisana na izvesnoj klasi funkcija X, pomoću

$$Lf = R_n(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),$$

linearna funkcionela na X.

Teorema 2.5.1 (Peano). Neka je $R_n(f) \equiv 0$ za svako $f \in \mathcal{P}_m$. Tada je, za svako $f \in C^{m+1}[a,b]$,

$$R_n(f) = \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t)dt, \tag{2.5.1}$$

gde je $K_m(t) = \frac{1}{m!} L u$ i funkcija $x \mapsto u(x)$ definisana pomoću

$$u(x) = (x-t)_+^m = \begin{cases} (x-t)^m & (x \geq t) \\ 0 & (x < t). \end{cases}$$

Dokaz. S obzirom da se ostatak E_m u Taylorovoj formuli

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x-a)^m+E_m$$

može predstaviti u obliku

$$E_m = \frac{1}{m!}\int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t)dt = \frac{1}{m!}\int_a^b (x-t)_+^m f^{(m+1)}(t)dt,$$

primenom linearne funkcionele L na f, dobijamo

$$L f = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)L((x-a)^i) + \frac{1}{m!} L\left(\int_a^b (x-t)_+^m f^{(m+1)}(t)dt\right).$$

Kako je, medjutim, $L f = 0$ $(\forall f \in \mathcal{P}_m)$ poslednja jednakost se svodi na

$$R_n(f) = \frac{1}{m!}\int_a^b (L u) f^{(m+1)}(t)dt,$$

gde smo stavili $u(x)=(x-t)_+^m$.

Ovim je dokaz završen.

Primedba 2.5.1. Funkcija $t \mapsto K_m(t)$ se naziva Peanovo jezgro za funkcionelu L. Primetimo, takodje, da je

$$m!K_m(t) = \int_a^b p(x)(x-t)_+^m\, dx - \sum_{x_k>t} A_k(x_k-t)^m.$$

U slučaju kada je $p(x) \equiv 1$, poslednja jednakost se svodi na

$$m!K_m(t) = \frac{(b-t)^{m+1}}{m+1} - \sum_{x_k>t} A_k(x_k-t)^m.$$

Posledica 2.5.1. Ako jezgro K_m ne menja znak na $[a,b]$, važi

$$R_n(f) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} R_n(x^{m+1}) \qquad (a < \xi < b). \tag{2.5.2}$$

Dokaz. Ako u (2.5.1) stavimo $f(x)=x^{m+1}$, dobijamo

$$R_n(f) = (m+1)!\int_a^b K_m(t)dt.$$

S druge strane, na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti odredjenih integrala, jednakost (2.5.1) može se predstaviti u obliku

$$R_n(f) = f^{(m+1)}(\xi)\int_a^b K_m(t)dt \qquad (a < \xi < b),$$

s obzirom da $f \in C^{m+1}[a,b]$.

Kombinujući poslednje dve jednakosti, dobijamo (2.5.2).

Primer 2.5.1. Odredimo ostatak u trapeznoj formuli. Ovde je $n=2$, $m=1$ i

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Primenom Peanoove teoreme, imamo

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \int_a^b (x-t)_+dx - \frac{b-a}{2}((a-t)_+ + (b-t)_+), \\ &= \frac{1}{2}(a-t)(b-t). \end{aligned}$$

Kako je $K(t) \leq 0$ $(t \in [a,b])$, možemo koristiti tvrdjenje posledice 2.5.1, pa je

$$R_2(f) = \frac{1}{2}f''(\xi)R_2(x^2) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \qquad (a < \xi < b).$$

Neka je, sada, X Hilbertov prostor regularnih funkcija $z \mapsto f(z)$ u disku $|z|<1$ i neprekidnih na $\Gamma = \{z \mid |z|=1\}$, za skalarnim proizvodom

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} f(z)\overline{g(z)}\, ds \qquad (f,g \in X),$$

gde je ds element luka krive Γ.

Primedba 2.5.2. Sistem funkcija $\{1,z,z^2,\ldots\}$ u prostoru X je ortonormiran, tj.

$$(z^m,z^n) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} z^m \bar{z}^n\, ds = \begin{cases} 1 & (m=n), \\ 0 & (m \neq n), \end{cases}$$

što se lako proverava neposrednim izračunavanjem.

Ako je $-1 < a < b < 1$ i $f \in X$, daćemo ocenu ostatka

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k).$$

Jednostavnosti radi, pretpostavićemo da $-1 < x_k < 1$ $(k=1,\ldots,n)$.

Kako je, na osnovu Cauchyeve formule,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{1-z\bar{\xi}}\, ds \qquad (d\xi = i\xi ds),$$

imamo

$$Lf = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} f(\xi) L\Big(\frac{1}{1-z\bar{\xi}}\Big) ds, \tag{2.5.3}$$

gde je $Lf=R_n(f)$. Primenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti na (2.5.3) dobijamo

$$|Lf|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} |f(\xi)|^2 ds \oint_{\Gamma} \Big|L\Big(\frac{1}{1-z\bar{\xi}}\Big)\Big|^2 ds \,. \tag{2.5.4}$$

Kako je $\|f\|^2 = (f,f) = \dfrac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} |f(\xi)|^2 ds$,

$$Q = L\Big(\frac{1}{1-z\bar{\xi}}\Big) = \sum_{p=0}^{+\infty} L(z^p)\bar{\xi}^p$$

i

$$\sigma^2 = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} |Q|^2 ds = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} Q\bar{Q}\, ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} |L(z^p)|^2,$$

pri čemu je iskorišćena osobina ortonormiranosti niza

$\{1,z,z^2,\ldots\}$, (2.5.4) se svodi na

$$|Lf|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|^2(2\pi)^2\sigma^2,$$

tj.

$$|R_n(f)| \leq (2\pi)^{1/2}\sigma\,\|f\|. \tag{2.5.5}$$

Ako pretpostavimo da kvadraturna formula ima algebarski stepen tačnosti m, tada se izraz za σ^2 svodi na

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=m+1}^{+\infty}|L(z^p)|^2.$$

Za normu $\|f\|$ najčešće se koristi gruba ocena $\|f\| \leq \max_{|z|=1}|f(z)|$ i tada iz (2.5.5) sleduje

$$|R_n(f)| \leq (2\pi)^{1/2}\sigma \max_{|z|=1}|f(z)|.$$

U radovima [32], [33], [34], Hämmerlin je odredio granice za σ u nekim standardnim kvadraturnim formulama. Tako, na primer, ako je $[a,b] = [-1/2,1/2]$, on je dokazao nejednakosti

$(2\pi)^{1/2}\sigma < 0.189h^2$ (za uopštenu trapeznu formulu),

$(2\pi)^{1/2}\sigma < 0.253h^4$ (za uopštenu Simpsonovu formulu).

7.2.6. Neki metodi za povećanje tačnosti kvadraturnih formula

Ostatak u kvadraturnoj formuli

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_{n+1}(f), \tag{2.6.1}$$

po pravilu, se može učiniti proizvoljno malim, ukoliko se uzme dovoljno veliko n. Medjutim, po svaku cenu n ne treba povećavati, s obzirom da se pri numeričkom radu javljaju greške o kojima je bilo reči u poglavlju 1.2. Izložićemo sada jednu ideju za povećavanje tačnosti formule (2.6.1), pri fiksiranom n, koja se sastoji u sukcesivnom izdvajanju tzv. glavnog dela ostatka.

Posmatrajmo uopštenu trapeznu formulu (videti odeljak 7.2.4

$$\int_{x_o=a}^{x_n=b} f(x)dx = T_n(f;h) + R_{n+1}(f),$$

gde je $T_n(f;h) = h(\frac{1}{2}f_0+f_1+\ldots+f_{n-1}+\frac{1}{2}f_n)$ i $f_i = f(x_i) = f(x_0+ih)$ $(i=0,1,\ldots,n)$. Ako $f\in C^2[a,b]$, ostatak se može, kao što je poznato, predstaviti u obliku

$$R_{n+1}(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi) \qquad (a<\xi<b).$$

Pod uslovom da je funkcija f dovoljan broj puta diferencijabilna, ideja o sukcesivnom izdvajanju glavnog dela ostatka, može se sprovesti razvijanjem ostatka $R_{n+1}(f)$ u red po koraku h. Dodajući članove ovog reda sumi $T_n(f;h)$ dobijamo niz kvadraturnih formula, čija se tačnost povećava sa brojem dodatih članova.

Definicija 2.6.1. Koeficijenti B_k $(k=0,1,\ldots)$ u razvoju

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_k}{k!}x^k \qquad (|x|<2\pi) \tag{2.6.2}$$

nazivaju se Bernoullievi brojevi.

Na osnovu (2.6.2), tj. jednakosti

$$x = (x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots)(B_0+B_1x+\frac{1}{2!}B_2x^2+\ldots),$$

zaključujemo da je $B_{2i+1}=0$ $(i=1,2,\ldots)$ i

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},$$

$$B_8=-\frac{1}{30},\quad B_{10}=\frac{5}{66},\quad B_{12}=-\frac{691}{2730},\quad B_{14}=\frac{7}{6},\quad \text{itd.}$$

Izrazićemo najpre operator Δ^{-1} pomoću operatora diferenciranja. Kako je $e^{hD}=1+\Delta$, imamo

$$\Delta^{-1} = (e^{hD}-1)^{-1} = \frac{D^{-1}}{h}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_k}{k!}(hD)^k,$$

tj.

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{h}D^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}hD - \frac{1}{720}(hD)^3 + \ldots .$$

Kako je, dalje,

$$f_n-f_0 = \sum_{i=0}^{n-1}(f_{i+1}-f_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\Delta f_i = \Delta\Big(\sum_{i=0}^{n-1}f_i\Big),$$

$$\Delta^{-1}(f_n-f_0) = \sum_{i=0}^{n-1}f_i,$$

$$D^{-1}(f_n-f_0) = D^{-1}\Delta\Big(\sum_{i=0}^{n-1} f_i\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} Jf_i = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx,$$

primenom operatora Δ^{-1} na $f_n - f_0$, dobijamo Euler-Maclaurinovu sumacionu formulu

$$\text{(2.6.3)} \qquad \sum_{i=0}^{n-1} f_i = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - \frac{1}{2}(f_n-f_0)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{B_{2k}h^{2k-1}}{(2k)!}(f_n^{(2k-1)}-f_0^{(2k-1)}) + E_m(f),$$

gde je

$$E_m(f) = n\frac{B_{2m+2}h^{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \qquad (x_0 < \xi < x_n).$$

Formula (2.6.3) se može predstaviti u obliku

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = T_n(f;h) - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}h^{2k}}{(2k)!}(f_n^{(2k-1)}-f_0^{(2k-1)})-hE_m(f),$$

tj.

$$\text{(2.6.4)} \qquad \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = T_n(f;h) - \frac{h^2}{12}(f_n' - f_0') + \frac{h^4}{720}(f_n''' - f_0''') -$$

$$- \frac{B_{2m}h^{2m}}{(2m)!}(f_n^{(2m-1)} - f_0^{(2m-1)})-hE_m(f).$$

Primer 2.6.1. Za m=1, formula (2.6.4) se svodi na

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = T_n(f;h) - \frac{h^2}{12}(f_n' - f_0') + \frac{nh^5}{720} f^{IV}(\xi) \quad (x_0 < \xi < x_n).$$

Poslednju formulu primenimo na izračunavanje vrednosti integrala iz primera 2.4.1 sa h=0.05, tj. n=4.

Kako je $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ i $T_4 = 0.209680$, imamo

$$\int_{1.0}^{1.2} \sqrt{x}\, dx \approx 0.209680 - \frac{0.05^2}{12}\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1.2}} - 1\Big) = 0.209689.$$

Euler-Maclaurinova formula ima primenu i kod izračunavanja zbira $S = f_0+f_1+\ldots+f_n$.

Primer 2.6.2. Izračunaćemo zbir

$$S = \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{15^3} + \dots + \frac{1}{15^3}$$

uzimajući u formuli (2.6.3) $f(x)=1/x^3$, $h=2$, $n=20$, $x_0=11$, $x_{20}=51$, $m=3$.

Kako je $f'(x)=-3/x^4$, $f'''(x)=-60/x^6$, $f^V(x)=-2520/x^8$, imamo

$$S \simeq \frac{1}{2}\int_{11}^{51}\frac{dx}{x^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{11^3}+\frac{1}{51^3}\right) + \frac{2}{12}\left(-\frac{3}{51^4}+\frac{3}{11^4}\right)$$

$$-\frac{8}{720}\left(-\frac{60}{51^6}+\frac{60}{11^6}\right) + \frac{32}{42\cdot 6!}\left(-\frac{2520}{51^8}+\frac{2520}{11^8}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{100}(0.1969999 + 0.0379427 + 0.0034077 + 0.0000376$$

$$+ 0.0000012) = 0.2383891\cdot 10^{-2},$$

tj. $S \cong 0.002383891$.

Pored formule (2.6.3) postoje i druge sumacione formule. Na primer, formula

$$(2.6.5)\quad \sum_{i=0}^{n-1} f_{i+(1/2)} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{(1-2^{1-2k})B_{2k}h^{2k-1}}{(2k)!}(f_n^{(2k-1)} - f_0^{(2k-1)}) + E_m',$$

gde je

$$E_m' = E_m'(f) = -n\,\frac{(1-2^{-1-2m})B_{2m+2}h^{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \quad (x_0<\xi<x_n),$$

koja se naziva druga Euler-Maclaurinova formula, generališe tzv. pravilo srednje tačke (videti odeljak 7.2.4).

Navedene Euler-Maclaurinove formule mogu se modifikovati na taj način što bi se izvodi funkcije f u tačkama x_0 i x_n zamenili odgovarajućim diferencnim formulama.

Na primer, ako izvode u tački x_0 zamenimo pomoću formula sa operatorom prednje razlike, tj.

$$h^k f_0^{(k)} = \Delta^k f_0 - \frac{k}{2}\Delta^{k+1} f_0 + \frac{k(3k+5)}{24}\Delta^{k+2} f_0 - \dots ,$$

a izvode u tački x_n pomoću formula sa operatorom zadnje razlike, tj.

$$h^k f_n^{(k)} = \nabla^k f_n + \frac{k}{2} \nabla^{k+1} f_n + \frac{k(3k+5)}{24} \nabla^{k+2} f_n + \dots ,$$

iz (2.6.4) sleduje Gregorieva formula

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \sim T_n(f;h) - h \sum_{k=1}^{+\infty} G_k (\nabla^k f_n + (-1)^k \Delta^k f_0),$$

gde su

$$G_1 = \frac{1}{12}, \quad G_2 = \frac{1}{24}, \quad G_3 = \frac{19}{720}, \quad G_4 = \frac{3}{160}, \quad G_5 = \frac{864}{60480}, \text{ itd.}$$

<u>Primedba 2.6.1.</u> Koeficijenti G_k mogu se odrediti iz relacije

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1-k} G_k = \frac{n}{2(n+1)(n+2)} .$$

7.2.7. Richardsonova ekstrapolacija i Rombergova integracija

Posmatrajmo kvadraturnu formulu

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_k A_k f(x_k) + R(f), \tag{2.7.1}$$

u kojoj su tačke $x_k (\in [a,b])$ uzete ekvidistantno sa korakom h. Sa $I(h)$ označimo približnu vrednost integrala I koja se dobija primenom ove kvadraturne formule. Pretpostavimo, dalje, da je ostatak reda $r (r \in N)$, tj. da je oblika

$$R(f) = Ch^r + O(h^{r+1}), \tag{2.7.2}$$

gde C ne zavisi od h.

Očigledno je da $I(h) \to I$, kada $h \to 0$. Ako za h uzmemo dve vrednosti h_1 i $h_2 (h_2 < h_1)$ i sa njima odredimo približne vrednosti integrala I (primenom formule (2.7.1)), sledećim postupkom, po pravilu, se može dobiti tačnija vrednost ovog integrala nego što su vrednosti $I(h_1)$ i $I(h_2)$. Naime, iz (2.7.1) i (2.7.2) sleduje

$$I - I(h_1) = Ch_1^r + O(h_1^{r+1})$$

i

$$I - I(h_2) = Ch_2^r + O(h_2^{r+1}).$$

Zanemarivanjem veličina $O(h_1^{r+1})$ i $O(h_2^{r+1})$ u poslednjim jednakostima i eliminacijom parametra C dobijamo formulu

$$(2.7.3)\qquad I \cong \frac{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^r I(h_2)-I(h_1)}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^r - 1} = I(h_2) + \frac{I(h_2)-I(h_1)}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^r - 1},$$

koja je poznata kao Richardsonova ekstrapolacija*. U praktičnim računanjima najčešće se uzima $h_2=h_1/2$ i u tom slučaju formula (2.7.3) se svodi na

$$(2.7.4)\qquad I \cong \frac{2^r I(h_2) - I(h_1)}{2^r - 1}.$$

Primedba 2.7.1. Ako se kao formula (2.7.1) uzme uopštena trapezna formula ili pravilo srednje tačke imamo $r=2$, dok je kod uopštene Simpsonove formule $r=4$.

Primenom ideje koju daje Richardsonova ekstrapolacija, na Euler-Maclaurinovu sumacionu formulu može se doći do jednog rekurzivnog metoda za numeričku integraciju, koji je poznat kao Rombergova integracija ([75]). Kompletna teorija u vezi sa ovim metodom data je u radu [6].

Neka je (2.7.1) uopštena trapezna formula. Tada za $f\in C^{2m+2}[a,b]$, na osnovu Euler-Maclaurinove sumacione formule važi

$$(2.7.5)\qquad R(f) = C_1h^2 + C_2h^4 + C_3h^6 + \dots + C_mh^{2m}$$

$$- (b-a)\frac{B_{2m+2}h^{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \qquad (\xi\in(a,b)),$$

gde su B_{2k} Bernoullievi brojevi i

$$C_k = -\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right) \qquad (k=1,\dots,m).$$

Ako stavimo $h=h_k=(b-a)/2^k$ i odgovarajuću trapeznu aproksimaciju $T_n(f;h)$ $(n=2^k)$ označimo sa $T_k^{(0)}$, tada primena Richardsonove eks-

---

* *Ovde se, u stvari, prognozira vrednost $I(0)$ na osnovu vrednosti $I(h_1)$ i $I(h_2)$.*

trapolacije na $T_k^{(0)}$ i $T_{k+1}^{(0)}$, saglasno (2.7.4), daje

$$I \cong \frac{2^2 T_{k+1}^{(0)} - T_k^{(0)}}{2^2 - 1} .$$

Desnu stranu poslednje približne jednakosti označimo sa $T_k^{(1)}$. Odredićemo sada grešku u aproksimaciji $I \approx I_k^{(1)}$.

Kako je

$$I - T_k^{(1)} = I - \frac{1}{3}(4T_{k+1}^{(0)} - T_k^{(0)}) = \frac{4}{3}(I - T_{k+1}^{(0)}) - \frac{1}{3}(I - T_k^{(0)}),$$

na osnovu (2.7.5) imamo

$$I - T_k^{(1)} = \frac{4}{3}\left(C_1\left(\frac{h_k}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{h_k}{2}\right)^4 + \ldots\right) - \frac{1}{3}(C_1 h_k^2 + C_2 h_k^4 + \ldots),$$

tj.

$$I - T_k^{(1)} = -\frac{1}{4} C_2 h_k^4 + O(h_k^6).$$

Dakle, greška je reda h_k^4, kada $h_k \to 0$.

Pod uslovom da je funkcija f dovoljan broj puta diferencijabilna, navedeni postupak sugeriše konstrukciju iterativnog procesa za odredjivanje vrednosti integrala I u obliku

$$T_k^{(m)} = \frac{h_k^2 T_{k+1}^{(m-1)} - h_{k+m}^2 T_k^{(m-1)}}{h_k^2 - h_{k+m}^2} \qquad (m=1,2,\ldots),$$

tj.

$$T_k^{(m)} = \frac{4^m T_{k+1}^{(m-1)} - T_k^{(m-1)}}{4^m - 1} \qquad (m=1,2,\ldots), \tag{2.7.6}$$

s obzirom da je $h_k = (b-a)/2^k$.

Za grešku u aproksimaciji $T_k^{(m)}$ važi ocena

$$I - T_k^{(m)} = (-1)^{m+1} \frac{h_k^{2m+2} B_{2m+2} f^{(2m+2)}(\xi)}{2^{m(m+1)}(2m+2)!} \qquad (a < \xi < b).$$

Na osnovu (2.7.6) može se konstruisati tzv. T-tabela

$$
\begin{array}{llll}
T_0^{(0)} & T_0^{(1)} & T_0^{(2)} & T_0^{(3)} \\
T_1^{(0)} & T_1^{(1)} & T_1^{(2)} & \vdots \\
T_2^{(0)} & T_2^{(1)} & \vdots & \\
T_3^{(0)} & \vdots & & \\
\vdots & & &
\end{array}
$$

uzimajući $k=0,1,\ldots$ i $m=1,2,\ldots$. U prvoj koloni ove tabele nalaze se redom približne vrednosti integrala I dobijene primenom trapezne formule sa $h_k=(b-a)/2^k$ $(k=0,1,\ldots)$. Druga kolona ove tabele dobija se na osnovu prve, korišćenjem formule (2.7.6), treća na osnovu druge, itd.

Iterativni proces, definisan sa (2.7.6) predstavlja standardni Rombergov metod za numeričku integraciju. Može se dokazati da nizovi $\{T_k^{(m)}\}_{k\in N_0}$ i $\{T_k^{(m)}\}_{m\in N_0}$ (po kolonama i vrstama u T-tabeli) konvergiraju ka I. Kod praktične primene Rombergove integracije, iterativni proces (2.7.6) se najčešće prekida kada je $|T_0^{(m)}-T_1^{(m-1)}|\leqq\varepsilon$, gde je ε unapred data dozvoljena greška, i tada se uzima $I\approx T_0^{(m)}$.

Primer 2.7.1. Primenom Rombergove integracije približno ćemo izračunati integral $\int_0^1 e^{-x^2}dx$. Pri računanju koristićemo se približnim vrednostima podintegralne funkcije u tačkama $x_i=i/8$ $(i=0,1,\ldots,8)$

$$
\begin{array}{lll}
f_0=1.000000, & f_1=0.984497, & f_2=0.939413,\\
f_3=0.868815, & f_4=0.778801, & f_5=0.676634,\\
f_6=0.569783, & f_7=0.465044, & f_8=0.367880.
\end{array}
$$

Uvedimo, pretnodno oznaku $A_k=T_k^{(0)}/h_k$ $(k=0,1,\ldots)$.

Primenom trapezne formule sa $h_k=1/2^k$ $(k=0,1,2,3)$ imamo redom

$$
\begin{array}{ll}
A_0=\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_8=0.683940, & T_0^{(0)}=h_0A_0=0.683940;\\
A_1=A_0+f_4=1.462741, & T_1^{(0)}=h_1A_1=0.7313705;
\end{array}
$$

$$A_2=A_1+f_2+f_6 = 2.971937, \qquad T_2^{(0)}=h_2A_2 = 0.7429842,$$

$$A_3=A_2+f_1+f_3+f_5+f_7=5.966927, \qquad T_3^{(0)}=h_3A_3 = 0.7458658,$$

a zatim primenom formule (2.7.6) na ove rezultate dobijamo T-tabelu

0.683940	0.7471806	0.7468337	0.7468241
0.7313705	0.7468554	0.7468243	
0.7429842	0.7468263		
0.7458658			

Dakle, dati integral je približno jednak 0.746824.

Rombergov metod, koji je prezentiran, sastoji se u sukcesivnom polovljenju intervala integracije, s obzirom da je $h_k=(b-a)/n_k$ i $n_k=2^k$ $(k=0,1,\ldots)$. Ovaj metod se može modifikovati u tom smislu da se za $\{n_k\}_{k\in N_0}$ odabere neki drugi podniz prirodnih brojeva, ali takav da je $n_{k+1}/n_k > c > 1$. Na primer, u radu [6], za $\{n_k\}$ je korišćen niz $\{1,2,3,6,9,18,27,54,\ldots\}$. Tada je

$$T_k^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{3^m T_{k+1}^{(m-1)} - T_k^{(m-1)}}{3^m - 1} & (m \text{ parno}), \\[2ex] \dfrac{4\; 3^m T_{k+1}^{(m-1)} - 4T_k^{(m-1)}}{4\cdot 3^m - 3} & (m \text{ neparno, } k \text{ parno}), \\[2ex] \dfrac{3^{m+1} T_{k+1}^{(m-1)} - 4T_k^{(m-1)}}{3^{m+1} - 4} & (m \text{ neparno, } k \text{ neparno}). \end{cases}$$

Pretpostavimo sada da formula (2.7.1) predstavlja pravilo srednje tačke, tj.

$$I = \int_a^b f(x)dx = M_n(f;h) + R(f),$$

gde je $M_n(f;n) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{2i+1}{2}h)$ i $h = \frac{b-a}{n}$.

Ako $f\in C^{2m+2}[a,b]$, na osnovu druge Euler-Maclaurinove sumacione formule (2.6.5), ostatak $R(f)$ se može predstaviti u obliku

$$R(f) = -\frac{1}{2}C_1h^2 - \frac{7}{8}C_2h^4 - \frac{31}{32}C_3h^6 - \ldots - \left(1-\frac{2}{4^m}\right)C_mh^{2m}$$

$$+ (b-a)\left(1-\frac{2}{4^{m+1}}\right)\frac{B_{2m+2}h^{2m+2}}{(2m+2)!}f^{(2m+2)}(\xi) \qquad (a<\xi<b),$$

gde su koeficijenti C_k $(k=1,\ldots,m)$ isti kao u formuli (2.7.5).

Ako stavimo $n=2^k$, tj. $h=h_k=(b-a)/2^k$ i aproksimaciju $M_n(f;h)$ označimo sa $M_k^{(0)}$, koristeći se istim postupkom kao kod uopštene trapezne formule, možemo konstruisati iterativni proces

$$M_k^{(m)} = \frac{4^m M_{k-1}^{(m-1)} - M_k^{(m-1)}}{4^m - 1} \qquad (m=1,2,\ldots). \tag{2.7.7}$$

Uzimajući $k=0,1,\ldots$ i $m=1,2,\ldots$ na osnovu (2.7.7) možemo formirati tzv. M-tabelu

$$\begin{array}{lllll}
M_0^{(0)} & M_0^{(1)} & M_0^{(2)} & M_0^{(3)} & \\
M_1^{(0)} & M_1^{(1)} & M_1^{(2)} & \vdots & \\
M_2^{(0)} & M_2^{(1)} & \vdots & & \\
M_3^{(0)} & \vdots & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Primetimo da elementi T i M-tabele stoje u odredjenoj vezi. Naime, ako pretpostavimo da smo izračunali $T_{k-1}^{(0)}$ i $M_{k-1}^{(0)}$, tada se sledeći element u prvoj koloni T-tabele može odrediti pomoću

$$T_k^{(0)} = \frac{1}{2}\left(T_{k-1}^{(0)} + M_{k-1}^{(0)}\right).$$

Naravno, važi i opštija jednakost

$$T_k^{(m)} = \frac{1}{2}\left(T_{k-1}^{(m)} + M_{k-1}^{(m)}\right).$$

Korišćenjem poslednje jednakosti, (2.7.6) postaje

$$T_k^{(m)} = M_k^{(m-1)} + \frac{(2\cdot 4^{m-1}-1)\left(T_k^{(m-1)} - M_k^{(m-1)}\right)}{4^m - 1} \qquad (m=1,2,\ldots).$$

M-tabela sama za sebe nema neki praktični značaj, medjutim, ona se može uspešno koristiti za konstrukciju T-tabele, zahvaljujući napred navedenim jednakostima.

7.2.8. Gauss–Christoffelove kvadraturne formule

Centralno mesto u numeričkoj integraciji zauzimaju kvadraturne formule interpolacionog tipa sa maksimalnim algebarskim stepenom tačnosti, poznate kao Gaussove ili, preciznije, kao Gauss-Christoffelove kvadrature. Klasična konstrukcija ovih formula je zasnovana na pristupu (b), datom u odeljku 7.2.2, tj. na rešavanju sistema nelinearnih jednačina (2.2.4).

Posmatrajmo opšti slučaj integracije sa težinskom funkcijom, tj. Gauss-Christoffelove kvadrature oblika

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{2.8.1}$$

čiji je algebarski stepen tačnosti $p=2n-1$. Dakle, $R_n(f) \equiv 0$ za svako $f \in \mathcal{P}_{2n-1}$.

Prve ideje o ovakvim kvadraturama potiču od Newtona (1676). Cotes je nezavisno od Newtona, takodje, koristio slične ideje. Oslanjajući se na radove Newtona i Cotesa i svoj rad o hipergeometrijskim razvojima iz 1812. godine, C.F. Gauss ([18]) je 1814. razvio famozni metod za integraciju, koji značajno poboljšava dotad poznate Newton-Cotesove formule. Gauss je razmatrao slučaj $p(x)=1$ i numerički odredio parametre za $n \leq 7$. Gaussove rezultate je pojednostavio (po formi) C.G.J. Jacobi (1826). U toku 19. veka Gaussove kvadrature su detaljnije razradjivali i dalje razvijali F. G. Mehler (1864), E.B.Christoffel (1858) i drugi. Dobijene rezultate su sistematizovali i uobličili u teoriju Christoffel (1877), Radau (1880) i Heine (1881).

Ovaj metod integracije danas se obično naziva Gauss-Christoffelov metod. U novije vreme (1966) pojavila se knjiga Strouda i Secresta ([82]) u kojoj je dat jedan opširan pregled ovih formula, uključujući i veliki broj numeričkih tabela. Novi značajan progres u konstrukciji Gauss-Christoffelovih formula učinjen je u poslednjih 10-15 godina. Ovde treba pomenuti značajne rezultate do kojih su došli W.Gautschi ([19]-[24]), G.H.Golub i J.H.Welsch ([30]), R.A.Sack i A.F.Donovan ([76]), J.C.Wheeler ([96]) i drugi.

Takodje, u literaturi su razmatrane i trigonometrijske, eksponencijalne, racionalne, splajn i druge kvadrature Gaussovog tipa (na primer, Crout (1929/30), Newbery (1969), Tureckiĭ (1959, 1960), Haris i Evans (1977/78) i drugi. Detaljne informacije se mogu naći u radu W. Gautschia [23]).

Gauss-Christoffelove kvadrature se mogu razmatrati i za opštije integrale oblika

$$I(f) = \int_R f(x)d\lambda(x),$$

gde je $d\lambda(x)$ nenegativna mera na realnoj pravoj R sa kompaktnim ili beskonačnim nosačem i za koju egzistira prvih 2n momenata

$$c_k = \int_R x^k d\lambda(x) \qquad (k=0,1,\ldots,2n-1).$$

Slučaj (2.8.1) se dobija kada je $d\lambda(x)=p(x)dx$ $(x\in(a,b))$.

Teorija Gauss-Christoffelovih kvadratura je u uskoj vezi sa teorijom ortogonalnih polinoma (poglavlje 2.2, I deo knjige). Tačnije rečeno, glavno polje primene ortogonalnih polinoma su Gaussove kvadrature. Štaviše, konstruktivna teorija ortogonalnih polinoma je proistekla iz konstrukcije Gauss-Christoffelovih kvadratura za neklasične težinske funkcije.

Neka je $\{Q_k\}_{k\in N_o}$ ortogonalan niz polinoma na (a,b) u odnosu na težinsku funkciju $x\mapsto p(x)$.

Teorema 2.8.1. Interpolaciona kvadraturna formula (2.8.1) ima algebarski stepen tačnosti $2n-1$, ako i samo ako su x_k $(k=1,\ldots,n)$ nule polinoma $x\mapsto Q_n(x)$.

Dokaz. Neka su $x_k (k=1,\ldots,n)$ nule polinoma Q_n, koje su, kao što je poznato, realne, proste i leže u (a,b). Neka je, dalje, f proizvoljan polinom iz $\mathcal{P}_{2n-1}$. Kako se ovaj polinom može predstaviti u obliku

$$f(x) = Q_n(x)u_{n-1}(x) + v_{n-1}(x), \tag{2.8.2}$$

gde su u_{n-1} i v_{n-1} polinomi iz $\mathcal{P}_{n-1}$, imamo

$$\int_a^b p(x)f(x)dx=\int_a^b p(x)Q_n(x)u_{n-1}(x)dx+\int_a^b p(x)v_{n-1}(x)dx, \tag{2.8.3}$$

tj.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)v_{n-1}(x)dx,$$

s obzirom da je prvi integral na desnoj strani u jednakosti (2.8.3) jednak nuli zbog ortogonalnosti niza $\{Q_k\}_{k\in N_o}$.

Primena kvadraturne formule (2.8.1) na desnu stranu poslednje jednakosti daje

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k v_{n-1}(x_k) + R_n(v_{n-1}).$$

Kako je, na osnovu (2.8.2), $f(x_k)=v_{n-1}(x_k)$ $(k=1,\ldots,n)$ i kako je $R_n(v_{n-1}) \equiv 0$ (jer je formula interpolacionog tipa), zaključujemo da kvadraturna formula (2.8.1) ima algebarski stepen tačnosti $2n-1$.

Dokažimo sada obrnuto tvrdjenje. Neka kvadraturna formula (2.8.1) ima algebarski stepen tačnosti $2n-1$. Pomoću $x_1,\ldots,x_n$ konstruišimo polinom $\tilde{Q}_n$, takav da je

$$\tilde{Q}_n(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

i posmatrajmo integral

$$I_m = \int_a^b p(x)x^m \tilde{Q}_n(x)dx \qquad (m=0,1,\ldots,n-1).$$

Kako je $x\mapsto x^m \tilde{Q}_n(x)$ polinom iz $\mathcal{P}_{n+m}$ $(\subset \mathcal{P}_{2n-1})$, imamo

$$I_m = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k^m \tilde{Q}_n(x_k) = 0 \qquad (m=0,1,\ldots,n-1),$$

odakle zaključujemo da niz polinoma $\{\tilde{Q}_n\}_{n\in N_o}$ mora biti ortogonalan na (a,b) sa težinskom funkcijom $x\mapsto p(x)$. S obzirom na jedinstvenost ovih polinoma (do na multiplikativnu konstantu), imamo $\tilde{Q}_n(x)=c_nQ_n(x)$.

Ovim je dokaz teoreme završen.

Predjimo sada na odredjivanje težinskih koeficijenata A_k, koji su poznati kao Christoffelovi brojevi.

Na osnovu prethodne teoreme, za interpolacione čvorove x_k $(k=1,\ldots,n)$ kod Gauss-Christoffelovih kvadraturnih formula treba uzeti nule polinoma Q_n. Dakle, u ovom slučaju, imamo

$$\omega(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n) = \frac{Q_n(x)}{a_n},$$

gde je a_n koeficijent uz najviši stepen u polinomu $Q_n(=a_nx^n+\ldots)$ i

$$A_k = \int_a^b \frac{p(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}\,dx = \frac{1}{Q_n'(x_k)}\int_a^b \frac{p(x)Q_n(x)}{x-x_k}\,dx \quad (k=1,\ldots,n).$$

Teorema 2.8.2. Težinski koeficijenti Gauss-Christoffelove kvadraturne formule mogu se eksplicitno izraziti pomoću

(2.8.4) $$A_k = \frac{\alpha_n}{\gamma_n}\cdot\frac{\|Q_n\|^2}{Q_{n-1}(x_k)Q_n'(x_k)} \quad (k=1,\ldots,n),$$

gde su x_k $(k=1,\ldots,n)$ nule polinoma Q_n, a α_n i γ_n konstante koje se javljaju u rekurentnoj relaciji

(2.8.5) $$Q_{n+1}(x)=(\alpha_nx+\beta_n)Q_n(x)-\gamma_nQ_{n-1}(x) \quad (n\in N).$$

Dokaz. Polazeći od Christoffel-Darbouxovog identiteta za ortogonalne polinome (odeljak 2.2.2)

(2.8.6) $$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\|Q_i\|^2}Q_i(x)Q_i(t) = \frac{1}{\alpha_n\|Q_n\|^2}\cdot\frac{Q_{n+1}(x)Q_n(t)-Q_n(x)Q_{n+1}(t)}{x-t},$$

gde je α_n konstanta u rekurentnoj relaciji (2.8.5), možemo odrediti težinske koeficijente $A_k(k=1,\ldots,n)$. Naime, ako u (2.8.6) stavimo $t=x_k$ ($\Rightarrow$ $Q_n(t)=0$), a zatim dobijenu jednakost pomnožimo sa $p(x)$ i integralimo od a do b, dobijamo

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\|Q_i\|^2}Q_i(x_k)\int_a^b p(x)Q_i(x)\,dx = \frac{-Q_{n+1}(x_k)}{\alpha_n\|Q_n\|^2}\int_a^b \frac{p(x)Q_n(x)}{x-x_k}\,dx,$$

tj.

(2.8.7) $$A_k = -\frac{\alpha_n\|Q_n\|^2}{Q_n'(x_k)Q_{n+1}(x_k)} \quad (k=1,\ldots,n),$$

pri čemu je iskorišćena osobina ortogonalnosti niza $\{Q_i\}_{i\in N_o}$.

Najzad, ako u (2.8.5) stavimo $x=x_k$, dobijamo

$$Q_{n+1}(x_k) = -\gamma_nQ_{n-1}(x_k),$$

što zajedno sa (2.8.7) daje (2.8.4).

Jedno važno svojstvo Gauss-Christoffelovih kvadratura je da su svi težinski koeficijenti A_k pozitivni. Da bismo dokazali ovo, pustimo da $x \to t$ u (2.8.6), a zatim stavimo $t=x_k$. Zamenom dobijenog rezultata u (2.8.7) nalazimo da je

$$A_k = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} (Q_i^2(x_k)/\|Q_i\|)^2\Big)^{-1} > 0 \qquad (k=1,\ldots,n).$$

Primedba 2.8.1. Kako je $x \mapsto f_k(x) = \left(\frac{Q_n(x)}{x-x_k}\right)^2$ polinom stepena $2n-2$, to je $R_n(f_k)=0$, tj.

$$A_k Q_n'(x_k)^2 = \int_a^b p(x) f_k(x)\,dx > 0,$$

odakle, takodje, zaključujemo da su koeficijenti A_k $(k=1,\ldots,n)$ pozitivni.

Predjimo sada na odredjivanje ostatka $R_n(f)$ u Gauss-Christoffelovoj kvadraturnoj formuli.

Teorema 2.8.3. Neka su x_k i A_k $(k=1,\ldots,n)$ kao u prethodnoj teoremi i neka $f \in C^{2n}[a,b]$. Tada za ostatak $R_n(f)$ važi formula

$$R_n(f) = \frac{\|Q_n\|^2}{(2n)!\,a_n^2} f^{(2n)}(\xi) \qquad (a<\xi<b), \tag{2.8.8}$$

gde je a_n koeficijent uz najviši stepen u polinomu Q_n.

Dokaz. Posmatrajmo Hermiteov interpolacioni polinom H_{2n-1} konstruisan na skupu podataka $f(x_k), f'(x_k)$ $(k=1,\ldots,n)$. Kako je greška kod ovog polinoma (videti odeljak 6.2.8)

$$r_{2n-1}(f;x) = f(x)-H_{2n-1}(x) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\,\omega(x)^2 \qquad (a<\eta<b),$$

gde je $\omega(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ i kako $H_{2n-1} \in \mathcal{P}_{2n-1}$, imamo

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)f(x)\,dx &= \int_a^b p(x)H_{2n-1}(x)\,dx + \int_a^b p(x)r_{2n-1}(f;x)\,dx\\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k H_{2n-1}(x_k) + R_n(f)\\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f),\end{aligned}$$

gde je

$$R_n(f) = \int_a^b p(x) r_{2n-1}(f;x)dx = \int_a^b \frac{1}{(2n)!} p(x)\, \omega(x)^2 f^{(2n)}(\eta)dx.$$

S obzirom da je $\omega(x) = \dfrac{Q_n(x)}{a_n}$ i $f \in C^{2n}[a,b]$, ostatak $R_n(f)$ se može predstaviti u obliku

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!\,a_n^2} \int_a^b p(x) Q_n(x)^2 dx \qquad (a < \xi < b),$$

što je ekvivalentno sa (2.8.8).

<u>Primedba 2.8.2.</u> Kako je

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{i} \quad \gamma_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \left(\frac{\|Q_n\|}{\|Q_{n-1}\|}\right)^2,$$

imamo

$$\frac{\alpha_n}{\gamma_n} \|Q_n\|^2 = \alpha_{n-1} \|Q_{n-1}\|^2 = \frac{a_n}{a_{n-1}} \|Q_{n-1}\|^2$$

Formula (2.8.4) se tada svodi na

$$A_k = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{\|Q_{n-1}\|^2}{Q_{n-1}(x_k) Q_n'(x_k)} \qquad (k=1,\ldots,n). \tag{2.8.9}$$

<u>Primer 2.8.1.</u> Odredimo Gaussovu kvadraturnu formulu oblika

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2} f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R_3(f). \tag{2.8.10}$$

Polazeći od prirodnog bazisa $\{1, x, x^2, \ldots\}$ Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije dobijamo niz ortogonalnih polinoma na $(-1,1)$ sa težinskom funkcijom $x \mapsto p(x) = (1-x^2)^{3/2}$:

$$Q_0(x)=1, \quad Q_1(x)=x, \quad Q_2(x)=x^2-\frac{1}{6}, \quad Q_3(x)=x^3-\frac{3}{8}x,$$

$$Q_4(x)=x^4-\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{80}, \text{ itd.}$$

Na osnovu teoreme 2.8.1, interpolacioni čvorovi x_1, x_2, x_3 su nule polinoma Q_3. Dakle,

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{8}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Kako su koeficijenti uz najviše stepene u polinomima Q_2 i Q_3 jednaki jedinici, tj. $a_2=1$ i $a_3=1$, i kako je

$$\|Q_2\|^2 = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2}\left(x^2 - \frac{1}{6}\right)^2 dx = \frac{5\pi}{384},$$

na osnovu (2.8.9) imamo

$$A_k = \frac{5\pi}{384} \cdot \frac{1}{3\left(x_k^2 - \frac{1}{6}\right)\left(x_k^2 - \frac{1}{8}\right)} \qquad (k=1,2,3),$$

tj.

$$A_1 = A_3 = \frac{\pi}{12} \quad \text{i} \quad A_2 = \frac{5\pi}{24}.$$

Ako $f \in C^6[-1,1]$, na osnovu teoreme 2.8.3, imamo

$$R_3(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2}\left(x^3 - \frac{3}{8}x\right)^2 dx = \frac{3\pi f^{(6)}(\xi)}{2^{10}\, 6!},$$

gde $\xi \in (-1,1)$.

Primer 2.8.1. Primenom formule (2.8.10) odredićemo približno vrednost integrala

$$I = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2} \cos x \, dx.$$

Imamo

$$I \approx \frac{\pi}{12}\left(2\cos\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{5}{2}\right) \approx 1.082952.$$

Tačna vrednost integrala je, medjutim,

$$I \approx 3\pi J_2(1) \approx 1.082935,$$

gde je J_2 Besselova funkcija.

7.2.9. Gauss-Christoffelove formule za klasične težinske funkcije

U ovom odeljku dajemo pregled kvadraturnih formula sa težinskim funkcijama koje odgovaraju klasičnim ortogonalnim polinomima (odeljci 2.2.8 - 2.2.13). Detaljne tablice sa parametrima ovih formula mogu se naći u [82].

S obzirom da se klasični ortogonalni polinomi dele u tri podklase, posebno ćemo razmatrati ove slučajeve.

1. Gauss-Jacobieve formule imaju oblik

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k) + R_n(f).$$

Kako su a_n (koeficijent uz najviši stepen u polinomu Q_n) i $\|Q_n\|^2$ dati sa

$$a_n = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

i

$$\|Q_n\|^2 = 2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

na osnovu (2.8.9) nalazimo težinske koeficijente

$$A_k = \frac{2^{\alpha+\beta}(2n+\alpha+\beta)\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{n!(n+\alpha+\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x_k)\frac{d}{dx}(P_n^{(\alpha,\beta)}(x_k))},$$

gde su x_k $(k=1,\ldots,n)$ nule Jacobievog polinoma $P_n^{(\alpha,\beta)}$.

Ako $f\in C^{2n}[-1,1]$ za ostatak dobijamo

$$(2.9.1)\qquad R_n(f) = 2^{2n+\alpha+\beta+1}\frac{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{(2n)!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma^2(2n+\alpha+\beta+1)}f^{(2n)}(\xi),$$

gde $\xi\in(-1,1)$.

1.1. Posebno za $\alpha=\beta=0$, $p(x)=1$, dobijamo Gauss-Legendreovu formulu

$$\int_{-1}^{+1}f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k) + R_n(f),$$

pri čemu su

$$(2.9.2)\qquad A_k = \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{P_{n-1}(x_k)P_n'(x_k)}\qquad (k=1,\ldots,n)$$

i x_k $(k=1,\ldots,n)$ nule Legendreovog polinoma P_n.

Formula (2.9.1) se tada svodi na

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi) \qquad (-1<\xi<1).$$

Primedba 2.9.1. Za $n=2,4,6$ imamo

$$R_2(f) = 7.4\cdot 10^{-3} f^{(4)}(\xi_2), \quad R_4(f) = 3\cdot 10^{-7} f^{(8)}(\xi_4),$$

$$R_6(f) = 1.5\cdot 10^{-12} f^{(12)}(\xi_6), \quad (\xi_2,\xi_4,\xi_6\in(-1,1)).$$

Primedba 2.9.2. Kako je Legendreov polinom parna ili neparna funkcija u zavisnosti da li je n paran ili neparan broj, za težinske koeficijente $A_k(k=1,\ldots,n)$, koji su dati pomoću (2.9.2), važi

$$A_k = A_{n-k+1} \quad (k=1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]).$$

U sledećoj tabeli dajemo vrednosti za x_k i A_k $(k=1,\ldots,n)$ za Gauss-Legendreovu formulu kada je $n \leq 6$.

n	k	x_k	A_k
1	1	0.	2.
2	1,2	∓0.57735027	1.
3	1,3 2	∓0.77459667 0.	0.55555556 0.88888889
4	1,4 2,3	∓0.86113631 ∓0.33998104	0.34785488 0.65214516
5	1,5 2,4 3	∓0.90617985 ∓0.53846931 0.	0.23692688 0.47862868 0.56888889
6	1,6 2,5 3,4	∓0.93246951 ∓0.66120939 ∓0.23861919	0.17132450 0.36076158 0.46791394

Primedba 2.9.3. Na osnovu jednakosti za Legendreove polinome

$$(1-x^2)P_n'(x) + nxP_n(x) = nP_{n-1}(x),$$

formula (2.9.2) se može predstaviti u obliku

$$A_k = \frac{2(1-x_k^2)}{n^2 P_{n-1}(x_k)^2} = \frac{2}{(1-x_k^2)P_n'(x_k)^2} \quad (k=1,\dots,n).$$

Primer 2.9.1. Primenimo Gauss-Legendreove formule na izračunavanje integrala

$$\int_0^{\pi/2} \sin t \, dt.$$

Smenom $t = \frac{\pi}{4}(x+1)$, dati integral se svodi na $I = \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}(x+1) dx$.

Za n=1,2,3 redom imamo

$$I \simeq 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.11072,$$

$$I \simeq 1 \cdot \frac{\pi}{4}(0.325885 + 0.945409) = 0.99847,$$

$$I \simeq \frac{\pi}{4}(\frac{5}{9} \cdot 0.176108 + \frac{8}{9} \cdot 0.707107 + \frac{5}{9} \cdot 0.984371) = 1.00001,$$

pri čemu su rezultati zaokrugljeni na pet decimala. Primetimo da je tačna vrednost integrala I=1.

1.2. Za $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$, $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dobijamo Gauss-Čebiševljevu formulu

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f),$$

pri čemu su x_k nule Čebiševljevog polinoma T_n, koji je odredjen sa

$$T_n(x) = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{(-1/2,\,-1/2)}(x),$$

gde je

$$(s)_n = s(s+1)\dots(s+n-1) = \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)}.$$

Kako se polinom T_n može predstaviti i u obliku $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, imamo

$$x_k = \cos \frac{\pi}{2n}(2k-1) \quad (k=1,\dots,n).$$

Za težinske koeficijente A_k dobijamo

$$(2.9.3)\qquad A_k = \frac{2^{-1}(2n-1)\Gamma(n-\frac{1}{2})^2}{n!(n-1)\Gamma(n-1)} \cdot \frac{C_n\, C_{n-1}}{T_{n-1}(x_k)T_n'(x_k)},$$

gde je $C_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} = n!\, \dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}$.

Kako je $T_{n-1}(x_k)T_n'(x_k)=n$, (2.9.3) se svodi na $A_k = \frac{\pi}{n}$ $(k=1,\ldots,n)$.

Dakle, Gauss-Čebiševljeva kvadraturna formula je

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos \frac{\pi}{2n}(2k-1)\right) + R_n(f).$$

Stavljajući $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ u (2.9.1), dobijamo ostatak

$$R_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \qquad (-1<\xi<1).$$

U odeljku 7.2.14 biće razmatrane kvadraturne formule kod kojih su svi težinski koeficijenti medjusobno jednaki. To su tzv. kvadraturne formule Čebiševljevog tipa. Kao što vidimo, Gauss-Čebiševljeva kvadratura pripada pomenutoj klasi formula Čebiševljevog tipa.

Uvodjenjem smene $x=\cos\theta$, Gauss-Čebiševljeva kvadraturna formula se može predstaviti u obliku

$$\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) + R_n(f).$$

1.3. Za $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $p(x)=\sqrt{1-x^2}$ dobijamo Gauss-Čebiševljevu formulu druge vrste

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\, dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1}\, f\left(\cos \frac{k\pi}{n+1}\right) + R_n(f).$$

Korišćenjem prethodnih rezultata 1.2 i 1.3 i osobina ortogonalnih polinoma sa parnom težinskom funkcijom (odeljak 2.2.4) mogu se dobiti Gauss-Christoffelove kvadrature na (0,1) sa težinskim funkcijama $p_1(x)=1/\sqrt{x(1-x)}$, $p_2(x)=\sqrt{x/(1-x)}$, $p_3(x)=\sqrt{(1-x)/x}$, $p_4(x)=\sqrt{x(1-x)}$:

$$\int_0^1 p_1(x)f(x)dx = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) + R_{1,n}(f),$$

$$\int_0^1 p_2(x)f(x)dx = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} \cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)}\, f\left(\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)}\right) + R_{2,n}(f),$$

$$\int_0^1 p_3(x)f(x)dx = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\, f\left(\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}\right) + R_{3,n}(f),$$

$$\int_0^1 p_4(x)f(x)dx = \frac{\pi}{4(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{n+1}\, f\left(\cos^2\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) + R_{4,n}(f).$$

2. Gauss-Laguerreove formule imaju oblik

$$\int_0^{+\infty} x^s e^{-x} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f).$$

Kako je u ovom slučaju $a_n = (-1)^n$ i $\|L_n^s\|^2 = n!\,\Gamma(n+s+1)$, na osnovu (2.8.9) imamo

$$A_k = -\frac{(n-1)!\,\Gamma(n+s)}{L_{n-1}^s(x_k)\frac{d}{dx}L_n^s(x_k)} \qquad (k=1,\dots,n), \tag{2.9.4}$$

gde su x_k $(k=1,\dots,n)$ nule generalisanog Laguerreovog polinoma L_n^s.

Primedba 2.9.4. Kako je, na osnovu jednakosti $xL_{n-1}^{s+1}(x) = (n+s)L_{n-1}^s(x) - L_n^s(x)$ i $\frac{d}{dx}L_n^s(x) = -nL_{n-1}^s(x)$,

$$\frac{d}{dx}L_n^s(x_k) = -\frac{n}{x_k}(n+s)L_{n-1}^s(x_k),$$

formula (2.9.4) se može predstaviti i u sledećim ekvivalentnim oblicima

$$A_k = \frac{(n-1)!\,\Gamma(n+s)x_k}{n(n+s)(L_{n-1}^s(x_k))^2} = \frac{n!\,\Gamma(n+s+1)}{x_k(\frac{d}{dx}L_n^s(x_k))^2} \qquad (k=1,\dots,n).$$

Ako $f\in C^{2n}[0,+\infty)$ za ostatak se dobija

$$R_n(f) = \frac{n!\,\Gamma(n+s+1)}{(2n)!}\, f^{(2n)}(\xi) \qquad (0<\xi<+\infty).$$

3. Gauss-Hermiteova formula ima oblik

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f).$$

Kako je

$$a_n = 2^n \quad \text{i} \quad \|H_n\|^2 = 2^n n!\sqrt{\pi},$$

imamo

(2.9.5) $$A_k = \frac{2^n (n-1)!\sqrt{\pi}}{H_{n-1}(x_k) H_n'(x_k)} \qquad (k=1,\ldots,n),$$

gde su x_k nule Hermiteovog polinoma H_n. S obzirom na jednakost $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$, jednakost (2.9.5) se može predstaviti i u obliku

$$A_k = \frac{2^{n+1} n!\sqrt{\pi}}{H_n'(x_k)^2} = \frac{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}{nH_{n-1}(x_k)^2} \qquad (k=1,\ldots,n).$$

Za ostatak se dobija

$$R_n(f) = \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi) \qquad (-\infty<\xi<+\infty).$$

Primedba 2.9.5. Kao i kod Gauss-Legendreove formule, i u ovom slučaju je $A_k=A_{n-k+1}$ $(k=1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right])$. Neke vrednosti za x_k i A_k date su u sledećoj tabeli.

n	k	x_k	A_k
1	1	0.	1.77245385
2	1,2	∓0.70710678	0.88622693
3	1,3	∓1.22474487	0.29540898
	2	0.	1.18163590
4	1,4	∓1.65068012	0.08131284
	2,3	∓0.52464762	0.80491409

7.2.10. Opšti metod konstrukcije Gauss–Christoffelovih formula

U ovom odeljku razmatraćemo opšti metod konstrukcije Gauss-Christoffelovih kvadraturnih formula oblika

$$(2.10.1)\qquad \int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f),$$

gde je $x\mapsto p(x)$ proizvoljna težinska funkcija. Bez ikakvih ograničenja metod se može primeniti i na konstrukciju kvadratura za integrale opštijeg oblika

$$I(f) = \int_R f(x)d\lambda(x),$$

gde je $d\lambda(x)$ nenegativna mera na realnoj pravoj R sa kompaktnim ili beskonačnim nosačem, za koju egzistiraju momenti

$$C_k = I(x^k) = \int_R x^k d\lambda(x) \qquad (k=0,1,\ldots,2n-1).$$

Na prvi pogled, konstrukcija kvadratura, tj. odredjivanje parametara x_k, A_k $(k=1,\ldots,n)$, može se izvesti rešavanjem sistema nelinearnih jednačina (2.2.4), tj.

$$(2.10.2)\qquad \sum_{k=1}^{n} A_k x_k^m = C_m \qquad (m=0,1,\ldots,2n-1).$$

Medjutim, odredjivanje parametara iz ovog sistema nije pogodno iz više razloga, od kojih je, svakako, najznačajniji slaba uslovljenost sistema (2.10.2). Može se pokazati da su parametri Gauss-Christoffelovih kvadratura u uskoj vezi sa problemom sopstvenih vrednosti za jednu simetričnu trodijagonalnu matricu, tzv. Jacobievu matricu. Ta činjenica omogućava stabilnu konstrukciju formula.

Neka je $\{Q_k\}_{k\in N_0}$ sistem moničnih polinoma ortogonalnih u odnosu na težinsku funkciju $x\mapsto p(x)$ na (a,b) (ili, uopšte, u odnosu na meru $d\lambda(x)$). Konstrukcija takvog sistema polinoma podrazumeva odredjivanje koeficijenata β_k i γ_k u tročlanoj rekurentnoj relaciji

$$(2.10.3)\qquad \begin{cases} Q_{k+1}(x) = (x-\beta_k)Q_k(x)-\gamma_k Q_{k-1}(x) & (k=0,1,\ldots), \\ Q_{-1}(x) = 0, \quad Q_0(x) = 1, \end{cases}$$

što se može ostvariti metodima izloženim u odeljcima 2.2.6 i 2.2.7 (I deo knjige). Koeficijenti γ_k su pozitivni.

Uzimajući za k redom $0,1,\ldots,n-1$, iz rekurentne relacije (2.10.3) dobijamo sistem linearnih jednačina koji se može predstaviti u matričnom obliku

$$x\begin{bmatrix} Q_0(x) \\ Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & & & O \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ O & & & \gamma_{n-1} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_0(x) \\ Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ Q_n(x) \end{bmatrix},$$

tj.

$$x\vec{q}(x) = T_n\vec{q}(\vec{x}) + Q_n(x)\vec{e}_n, \tag{2.10.4}$$

gde smo sa T_n označili dobijenu trodijagonalnu matricu i uveli vektore

$$\vec{q}(x) = [Q_0(x)\ Q_1(x)\ldots Q_{n-1}(x)]^T \quad \text{i} \quad \vec{e}_n = [0\ 0\ldots 1]^T.$$

Ako bismo rekurentnu relaciju napisali za ortonormirane polinome Q_k^* $\left(Q_k^*(x)=Q_k(x)/\|Q_k\|,\ \|Q_k\|=(\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_k)^{1/2}\right)$, odgovarajuća matrica u (2.10.4) bila bi simetrična. Dakle, relacija

$$\begin{cases} \sqrt{\gamma_{k+1}}Q_{k+1}^*(x)=(x-\beta_k)Q_k^*(x)-\sqrt{\gamma_k}Q_{k-1}^*(x) & (k=0,1,\ldots), \\ Q_{-1}^*(x)=0, \quad Q_0^*(x)=C_0^{-1/2} & \end{cases}$$

implicira sistem

$$x\vec{q}^*(x)=J_n\vec{q}^*(x) + \sqrt{\gamma_n}Q_n^*(x)\vec{e}_n, \tag{2.10.5}$$

gde su

$$\vec{q}^*(x) = [Q_0^*(x)Q_1^*(x)\ldots Q_{n-1}^*(x)]^T \tag{2.10.6}$$

i

$$J_n = \begin{bmatrix} \beta_0 & \sqrt{\gamma_1} & & & O \\ \sqrt{\gamma_1} & \beta_1 & \sqrt{\gamma_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \sqrt{\gamma_{n-1}} \\ O & & & \sqrt{\gamma_{n-1}} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.10.7}$$

Matrica J_n je poznata kao Jacobieva matrica. Matrice J_n i T_n su slične, jer egzistira dijagonalna matrica D takva da je $D^{-1}T_nD=J_n$.

Kao što znamo, čvorovi kvadratura x_k su nule polinoma $Q_n(x)$. Ako stavimo $x=x_k$, na osnovu (2.10.4), sleduje da je x_k sopstvena vrednost matrice T_n, a da je $\vec{q}(x_k)$ odgovarajući sopstveni vektor, jer je $T_n\vec{q}(x_k)=x_k\vec{q}(x_k)$.

Isto važi za Jacobievu matricu (2.10.7). Naime, iz (2.10.5) sleduje

$$J_n\vec{q}^*(x_k) = x_k\vec{q}^*(x_k),$$

što znači da je x_k sopstvena vrednost, a $\vec{q}^*(x_k)$ odgovarajući sopstveni vektor matrice J_n.

Prema tome odredjivanje čvorova Gauss-Christoffelove kvadrature se svodi na nalaženje sopstvenih vrednosti za Jacobievu matricu J_n. Pokazaćemo sada da se i Christoffelovi brojevi A_k mogu odrediti iz istog problema sopstvenih vrednosti.

Primetimo, najpre, da je

$$[\vec{q}^*(x_k)]^T[\vec{q}^*(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^*(x_k)^2 = \frac{1}{A_k}. \tag{2.10.8}$$

Poslednja jednakost je korišćena za dokaz pozitivnosti Christoffelovih brojeva u odeljku 7.2.8.

Obično se kod rešavanja problema sopstvenih vrednosti nalaze normalizovani sopstveni vektori, čija je euklidska norma jednaka jedinici. Naime, odredjuje se sopstvena vrednost x_k i sopstveni vektor $\vec{v}_k=[v_{k1}v_{k2}\ldots v_{kn}]^T$ tako da je

$$J_n\vec{v}_k = x_k\vec{v}_k, \quad \vec{v}_k^T\vec{v}_k = 1. \tag{2.10.9}$$

Naravno, vektor $\vec{v}_k$ je kolinearan sa $\vec{q}^*(x_k)$, tj. $\vec{v}_k=\alpha\vec{q}^*(x_k)$, gde se α može odrediti, na primer, uporedjivanjem prvih koordinata vektora. Tako, s obzirom na (2.10.6), imamo

$$v_{k1} = \alpha Q_0^*(x) = \alpha C_0^{-1/2}.$$

Najzad, korišćenjem (2.10.8) nalazimo

$$A_k = \alpha^2 = C_0v_{k1}^2. \tag{2.10.10}$$

Prema tome, odredjivanje parametara Gauss-Christoffelovih kvadratura se svodi na rešavanje problema sopstvenih vrednosti (2.10.9). S obzirom na (2.10.10) nije neophodno nalaziti sopstvene vektore $\vec{v}_k$, već je dovoljno naći samo prve koordinate ovih vektora.

Jedan od najprikladnijih algoritama za konstrukciju Gauss--Christoffelovih kvadratura, tj. rešavanja problema sopstvenih vrednosti za Jacobievu matricu J_n je QR (ili QL) algoritam (videti odeljak 4.4.8). U vezi sa konstrukcijom kvadratura može se naći u radovima Gobuba i Welscha [30], Gautschia [19], [22], [23], i dr.

Možemo zaključiti da je konstrukcija kvadratura usko povezana sa konstrukcijom ortogonalnih polinoma. Medjutim, tamo gde je eksplicitno poznata rekurentna relacija za ortogonalne polinome, kao što je slučaj kod klasičnih ortogonalnih polinoma, odredjivanje parametara x_k, A_k $(k=1,\dots,n)$ je skoro trivijalno. Naime, problem sopstvenih vrednosti (2.10.9) se veoma efikasno rešava prethodno pomenutim algoritmima. Glavne teškoće nastaju kod konstrukcije ortogonalnih polinoma za neklasične težinske funkcije, s obzirom na slabu uslovljenost preslikavanja vektora momenata u vektor koeficijenata rekurentne relacije, o čemu je bilo reči u odeljcima 2.2.6 i 2.2.7. Ovo može da dovede do toga da koeficijenti kvadratura budu apsolutno pogrešni, čak i u slučajevima kada se izračunavanje sprovode u aritmetici dvostruke tačnosti. Tako je S.Y. Lee u radu [41], razvijajući Gauss-Christoffelove kvadrature na $(0,+\infty)$ za težinu $p(x)=\exp(-x^3/3)$, dobio parametre x_k, A_k $(k=1,\dots,n)$ za $n \leq 15$. Kako je kasnije Gautschi ([26]) pokazao, dobijeni rezultati za $n=15$ su potpuno pogrešni (od 16 cifara ni jedna nije tačna). U istom radu Gautschi je dobio tačne parametre i dao nekoliko testova za proveru tačnosti dobijenih parametara.

Na osnovu prethodnog može se zaključiti da se konstrukciji Gauss-Christoffelovih kvadratura za neklasične težine mora posvetiti posebna pažnja.

U obimnom radu [23], W. Gautschi daje pregled formula Gaussovog tipa razradjenih do 1980. godine, sa iscrpnom bibliografijom. Navedimo samo neke od tih kvadratura: (1) $p(x)=\exp(-x^2)$ na $(0,+\infty)$ i $(0,b)$, $b>0$ (Steen, Byrne, Gelbard, 1969); (2) $p(x)=(1-x)^{\alpha}x^{\beta}\times\log(1/x)$ na $(0,1)$, $\alpha,\beta=-1/2,\ -1/3,\ -1/4,\ -1/5,\ 1/3,\ 1/2$ (Piessens i Branders, 1975); (3) $p(x)=E_1(x)$ (eksponencijalni integral) na

$(0,\infty)$ (Danloy, 1973); (4) $p(x)=\mathrm{erfc}(x)$ (komplementarna funkcija greške) na $(0,\infty)$ (Vigneron i Lambin, 1980); itd.

U novije vreme pojavile su se kvadrature sa $p(x)=1/\Gamma(x)$ (Γ gama funkcija) na $(0,+\infty)$ (Gautschi, 1982) i kvadrature sa Einsteinovom i Fermievom funkcijom, $p(x)=(x/(e^x-1))^r$ i $p(x)=(e^x+1)^{-r}$ $(r=1,2)$, na $(0,+\infty)$ (Gautschi i Milovanović, 1985). U poslednjem slučaju, rekurzioni koeficijenti β_k i γ_k su dobijeni korišćenjem diskretizovane Stieltjesove procedure (videti odeljak 2.2.7) sa Gauss-Laguerreovom kvadraturom. Na primer, za izračunavanje integrala u Stieltjesovoj proceduri korišćeno je Gauss-Laguerreovo pravilo

$$\int_0^\infty P(x)\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^r dx = \frac{1}{r}\int_0^\infty P(x/r)\left(\frac{x/r}{1-e^{-x/r}}\right)^r e^{-x}dx$$
$$\approx \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{N} A_k^L P(x_k^L/r)\left(\frac{x_k^L/r}{1-e^{-x_k^L/r}}\right)^r,$$

gde je $P(x)$ algebarski polinom. A_k^L i x_k^L su parametri Gauss-Laguerreove kvadrature. Da bi se postigla zadovoljavajuća tačnost, N treba uzeti dovoljno veliko. Na primer, za dobijanje prvih 12 rekurzivnih koeficijenata $(n=12)$ sa 12(25) korektnih decimala potrebno je uzeti $N=49$ $(N=127)$, pri $r=1$, i $N=41$ $(N=85)$, pri $r=2$. Prvih 40 koeficijenata $(n=40)$ mogu se dobiti sa 25 tačnih decimala ako se uzme $N=281$ za $r=1$ i $N=201$ za $r=2$. U radu [27], Gautschi i Milovanović su dobili kvadraturne formule za $n=5(5)40$, sa 25 tačnih decimala. Parametri formula su navedeni u prilogu pomenutog rada.

Gauss-Christoffelove kvadrature su uopštavane u raznim pravcima. Navešćemo samo neke od njih:

1° Konstrukcija formula sa višestrukim čvorovima (Turan (1950), Ossicini (1966), Ossicini i Rosati (1978), Stroud i Stancu (1965), Golub i Kautsky (1983), i drugi).

2° Konstrukcija kvadratura sa "težinskim" funkcijama koje menjaju znak u intervalu integracije, ili još opštije, konstrukcija kvadratura sa kompleksnim "težinskim" funkcijama, koje nalaze primenu kod numeričke inverzije Laplaceove transformacije.

3° Konstrukcija Gauss-Christoffelovih kvadratura na polukrugu oblika

$$\int_0^{\pi} f(e^{i\theta})d\sigma(\theta) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(\xi_k) + R_n(f),$$

gde je $d\sigma(\theta)$ data mera. Korišćenjem polinoma ortogonalnih na polukrugu (odeljak 2.2.16), Gautschi i Milovanović [28] su razvili kvadrature za $d\sigma(\theta)=d\theta$ (videti sledeći odeljak), kao i za neke opštije slučajeve.

4° Konstrukcija kvadratura Gaussovog tipa sa unapred fiksiranim čvorovima (videti odeljke 7.2.12 i 7.2.13).

Na kraju ovog odeljka navedimo jednu interesantnu primenu kvadratura sa Einsteinovom i Fermievom težinom za sumiranje sporokonvergentnih numeričkih redova u kojima se pojavljuje Laplaceova transformacija

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt, \qquad \operatorname{Re} p \geq 1,$$

ili njen izvod. Naime, ako stavimo $a_k=-F'(k)$, tada imamo

$$S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-kt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} f(t)dt,$$

što znači da se sumiranje reda S_1 svodi na izračunavanje integrala pomoću dobijene kvadrature za Einsteinovu težinsku funkciju. Slično, nalazimo

$$S_2 = -\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} F'(k) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t+1} f(t)dt$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} F(k) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1} f(t)dt,$$

što sugeriše primenu Gauss-Christoffelove kvadrature sa Fermievom težinom.

Ilustrujmo primenu na jednom primeru ([27]):

Neka je $F(p)=p^{-1}\exp(-1/p)$. Tada je $f(t)=J_0(2\sqrt{t})$, gde je J_0 Besselova funkcija prve vrste. Imajući u vidu da je $-F'(p)=$

$=(p-1)p^{-3}\exp(-1/p)$, posmatraćemo redove S_1, S_2, S_3 čije su sume sa 24 značajne cifre redom

$$S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)k^{-3}\exp(-1/k)=0.342918943844609780961838,$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}(k-1)k^{-3}\exp(-1/k)$$
$$=-0.0441559381340836052736928,$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}k^{-1}\exp(-1/k)=0.197107936397950656955672.$$

Direktno sumiranje prvih 10 000 članova kod ovih redova daje 3, 7 i 4 korektne cifre, respektivno. Primena dobijenih Gauss-Christoffelovih kvadratura za n=2(2)10 daje rezultate čije su relativne greške date u tabeli:

n	2	4	6	8	10
S_1	4.48(-2)	3.80(-6)	3.35(-11)	7.01(-17)	6.86(-23)
S_2	8.95(-1)	2.39(-4)	3.71(-9)	1.13(-14)	1.08(-20)
S_3	1.77(-2)	9.65(-7)	5.32(-12)	1.05(-17)	1.27(-23)

Brojevi u zagradama ukazuju na decimalni eksponent. Vidimo da se za n=10 dobijaju rezultati sa visokom tačnošću.

7.2.11. Gauss-Christoffelove kvadrature na polukrugu

Razradjujući teoriju polinoma ortogonalnih na polukrugu $\Gamma=\{z \mid z=e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$, Gautschi i Milovanović ([28]) su konstruisali Gauss-Christoffelove kvadrature oblika

$$(2.11.1)\qquad \int_0^{\pi} g(e^{i\theta})d\theta = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k f(\xi_k) + R_n(f),\quad R_n(\mathcal{P}_{2n-1}) = 0$$

za integrale na polukrugu. Čvorovi kvadratura ξ_k su nule kompleksnog polinoma $\pi_n(z)$, koji zadovoljava tročlanu rekurentnu relaciju (videti odeljak 2.2.16)

$$\begin{cases} \pi_{k+1}(z) = (z-i\alpha_k)\pi_k(z)-\beta_k\pi_{k-1}(z) & (k=0,1,\ldots), \\ \pi_{-1}(z) = 0, \quad \pi_0(z) = 1, \end{cases}$$

sa realnim koeficijentima α_k i β_k (>0), pri čemu je

$$\alpha_0=\theta_0,\quad \alpha_k=\theta_k-\theta_{k-1},\quad \beta_k=\theta_{k-1}^2 \qquad (k \geqq 1)$$

i θ_k dato pomoću

$$\theta_k = \frac{2}{2k+1}\left(\frac{\Gamma((k+2)/2)}{\Gamma((k+1)/2)}\right)^2 \qquad (k \geqq 0).$$

Odredjivanje parametara kvadrature (2.11.1) može se svesti na problem sopstvenih vrednosti, slično kao kod kvadratura na realnoj pravoj.

Neka su $\pi_k^*(z)=\pi_k(z)/\|\pi_k\|$ normirani ortogonalni polinomi. Definišimo vektor

$$\vec{\pi}(z) = [\pi_0^*(z)\,\pi_1^*(z)\ldots\pi_{n-1}^*(z)]^T.$$

Ako je ξ_k nula polinoma $\pi_n(z)$, lako je proveriti da je ξ_k sopstvena vrednost, a $\vec{\pi}(\xi_k)$ odgovarajući sopstveni vektor Jacobieve matrice

$$J_n = \begin{bmatrix} i\alpha_0 & \theta_0 & & & O \\ \theta_0 & i\alpha_1 & \theta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \theta_{n-2} \\ O & & & \theta_{n-2} & i\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

tj.

$$J_n\vec{\pi}(\xi_k) = \xi_k\vec{\pi}(\xi_k).$$

Transformacijom sličnosti pomoću dijagonalne matrice $D_n=\text{diag}(1,i,i^2,i^3,1,i,\ldots)$, matrica J_n se transformiše na realnu matricu

$$-iD_n^{-1}J_nD_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \theta_0 & & & O \\ -\theta_0 & \alpha_1 & \theta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \theta_{n-2} \\ O & & & -\theta_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.11.2}$$

Ako, takodje, definišemo vektor

$$(2.11.3) \qquad \vec{p}(z) = D_n^{-1}\vec{\pi}(z),$$

tada je

$$[-iD_n^{-1}J_nD_n]\vec{p}(\xi_k) = \eta_k\vec{p}(\xi_k),$$

tj. $\vec{p}(\xi_k)$ je sopstveni vektor realne matrice (2.11.2), koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\eta_k=-i\xi_k$. Sa V_n označimo matricu sopstvenih vektora matrice (2.11.2), pri čemu je svaki od njih normalizovan tako da je njegova prva koordinata jednaka jedinici. Tada imamo

$$V_n=[\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \dots\ \vec{v}_n], \qquad \vec{v}_k=\sqrt{\pi}\vec{p}(\xi_k).$$

Uzimajući za $g(z)$, u (2.11.1), svaku od koordinata vektora $\vec{p}(z)$, definisanog pomoću (2.11.3), dobijamo sistem jednačina

$$\sqrt{\pi}\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}V_n\vec{\sigma}, \qquad \vec{\sigma} = [\sigma_1\sigma_2\ \dots\ \sigma_n]^T,$$

gde je $\vec{e}_1=[1\ 0\ \dots\ 0]^T$ prvi koordinatni vektor. Tako za odredjivanje Christoffelovih brojeva σ_k treba rešiti sistem linearnih jednačina

$$(2.11.4) \qquad V_n\vec{\sigma} = \pi\vec{e}_1.$$

Korišćenjem odgovarajućih potprograma za odredjivanje matrice V_n i rešavanje sistema (2.11.4), uzetih iz poznatih visokokvalitetnih programskih paketa EISPACK i LINPACK, u radu [28] su odredjeni parametri kvadratura ξ_k i σ_k $(k=1,\dots,n)$. U tabeli 2.11.1 su navedeni parametri za n=5, 10, 20, sa osam značajnih cifara. Primetimo da su čvorovi ξ_k raspoređjeni simetrično u odnosu na imaginarnu osu i svi se nalaze u gornjem jediničnom polukrugu.

U pomenutom radu [28] date su primene dobijenih kvadratura na numeričko diferenciranje analitičkih funkcija, korišćenjem reprezentacije za izvod analitičke funkcije

$$f'(a) = \frac{1}{\pi h}\int_0^{\pi} e^{-i\theta}\left(f(a+\frac{h}{2}e^{i\theta})-f(a-\frac{h}{2}e^{i\theta})\right)d\theta,$$

kao i primene na izračunavanje Cauchyeve glavne vrednosti nesvojstvenih integrala, imajući u vidu da je

Tabela 2.11.1

n	k	ξ_k	σ_k
5	1,2	$\pm 0.89052727 + 0.022495461i$	$0.0072402551 \pm 0.30663646i$
	3,4	$\pm 0.48026508 + 0.11792794i$	$0.50270345 \pm 0.92618932i$
		$0.22216141i$	1.99138066
10	1,2	$\pm 0.97146604 + 0.0028731070i$	$0.0078107581 \pm 0.074979250i$
	3,4	$\pm 0.85284258 + 0.015150376i$	$0.023571055 \pm 0.19000917i$
	5,6	$\pm 0.65232339 + 0.037578303i$	$0.063357456 \pm 0.35652707i$
	7,8	$\pm 0.39255204 + 0.72381390i$	$0.23196483 \pm 0.66539219i$
	9,10	$\pm 0.11928205 + 0.12236097i$	$1.24409223 \pm 0.83467375i$
20	1,2	$\pm 0.99279481 + 0.00036088122i$	$0.00093961488 \pm 0.018602063i$
	3,4	$\pm 0.96223284 + 0.0019015682i$	$0.0023283767 \pm 0.044211071i$
	5,6	$\pm 0.90804700 + 0.0046758976i$	$0.0041099345 \pm 0.072223615i$
	7,8	$\pm 0.83157445 + 0.0086981042i$	$0.0066940217 \pm 0.10457986i$
	9,10	$\pm 0.73472727 + 0.014013039i$	$0.010908872 \pm 0.14441960i$
	11,12	$\pm 0.61995356 + 0.020739446i$	$0.018712830 \pm 0.19743837i$
	13,14	$\pm 0.49022929 + 0.029167472i$	$0.035680664 \pm 0.27542598i$
	15,12	$\pm 0.34918044 + 0.040007722i$	$0.082367746 \pm 0.40649151i$
	17,18	$\pm 0.20200473 + 0.055045977i$	$0.26876888 \pm 0.65608704i$
	19,20	$\pm 0.061601584 + 0.075471956i$	$1.14028539 \pm 0.69192546i$

$$-\!\!\!\!\!\!\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t}\,dt = i\{\pi f(0) - \int_{0}^{\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta\}.$$

Ovde se pretpostavlja da je funkcija f analitička na zatvorenom gornjem jediničnom poludisku.

7.2.12. Modifikovane Gaussove formule

Od posebnog interesa je i konstrukcija kvadraturnih formula Gaussovog tipa sa nekim unapred fiksiranim čvorovima. Problem je ovde odrediti ostale čvorove i sve težinske koeficijente iz uslova maksimalne algebarske tačnosti. Još je Christoffel (1858) razmatrao ovakav problem za $p(x)=1$ i $(a,b)=(-1,1)$, dajući kompletno rešenje pod pretpostavkom da su svi fiksirani čvorovi izvan intervala $(-1,1)$.

Kvadraturne formule oblika

$$\int_{a}^{b} p(x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + \sum_{k=1}^{m} B_k f(y_k) + R_{n+m}(f), \tag{2.12.1}$$

sa algebarskim stepenom tačnosti $2n+m-1$, pri čemu su y_k unapred zadate apscise, nazivaju se modifikovane Gaussove formule. Dakle, nepoznate parametre A_k, x_k $(k=1,\dots,n)$ i $B_k (k=1,\dots,m)$ možemo odrediti iz uslova

$$R_{n+m}(x^i) = 0 \qquad (i=0,1,\dots,2n+m-1).$$

Primer 2.12.1. Izvedimo modifikovanu Gaussovu formulu oblika

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \simeq A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)+B_1 f(-1)+B_2 f(1). \tag{2.12.2}$$

Kako ova formula mora biti tačna za svako $f\in P_5$, na osnovu (2.12.2) uzimajući za $f(x)$ redom $1,x,\dots,x^5$ dobijamo sistem nelinearnih jednačina

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + B_1 + B_2 &= 2,\\
A_1x_1 + A_2x_2 - B_1 + B_2 &= 0,\\
A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + B_1 + B_2 &= \tfrac{2}{3},\\
A_1x_1^3 + A_2x_2^3 - B_1 + B_2 &= 0,\\
A_1x_1^4 + A_2x_2^4 + B_1 + B_2 &= \tfrac{2}{5},\\
A_1x_1^5 + A_2x_2^5 - B_1 + B_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.12.3}$$

Da bismo rešili ovaj sistem jednačina uvedimo pomoćnu funkciju ω pomoću

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x+1)(x-1)\\
&= x^4 + C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_o.
\end{aligned}$$

Sada, množenjem prvih pet jednačina sistema (2.12.3) sa C_o, C_1, C_2, C_3, 1 respektivno i njihovim sabiranjem dobijamo

$$A_1\omega(x_1)+A_2\omega(x_2)+B_1\omega(-1)+B_2\omega(1) = 2C_o + \tfrac{2}{3}C_2 + \tfrac{2}{5}.$$

Primenjujući isti postupak, iz poslednjih pet jednačina sistema (2.12.3) sleduje

$$A_1x_1\omega(x_1)+A_2x_2\omega(x_2)-B_1\omega(-1)+B_2\omega(1) = \tfrac{2}{3}C_1 + \tfrac{1}{5}C_3.$$

Kako je, s druge strane, $\omega(x_1)=\omega(x_2)=\omega(-1)=\omega(1)=0$, na osnovu prethodnog, dolazimo do sistema linearnih jednačina

$$C_o - C_1 + C_2 - C_3 = -1,$$

$$C_o + C_1 + C_2 + C_3 = -1,$$

$$2C_o + \frac{2}{3}C_2 = -\frac{2}{5},$$

$$\frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{5}C_3 = 0,$$

odakle je

$$C_o = \frac{1}{5}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{6}{5}, \quad C_3 = 0,$$

tj.

$$\omega(x) = x^4 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{5} = (x-1)(x+1)(x^2 - \frac{1}{5}).$$

Iz uslova $\omega(x)=0$, nalazimo $x_1 = -x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Najzad, zamenom vrednosti za x_1 i x_2 u (2.12.2) i rešavanjem dobijenog sistema linearnih jednačina po A_k, B_k $(k=1,2)$ dobijamo

$$A_1 = A_2 = \frac{5}{6} \quad \text{i} \quad B_1 = B_2 = \frac{1}{6},$$

tj.

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \frac{5}{6}(f(-\frac{\sqrt{5}}{5})+f(\frac{\sqrt{5}}{5})) + \frac{1}{6}(f(-1)+f(1)).$$

Za modifikovane Gaussove formule može se dokazati sledeća teorema.

Teorema 2.12.1. Kvadraturna formula (2.12.1) ima algebarski stepen tačnosti $2n+m-1$ ako i samo ako je

1) tačna za svako $f \in P_{n+m-1}$,

2) $\int_a^b p(x)\omega(x)f(x)dx = 0$ za svako $f \in P_{n-1}$,

gde je

$$\omega(x) = \prod_{k=1}^{n} (x-x_k) \prod_{k=1}^{m} (x-y_k).$$

Navešćemo sada dva interesantna slučaja modifikovanih Gaussovih formula.

Teorema 2.12.2 (Radau). Neka su x_k $(k=1,\ldots,n-1)$ nule polinoma $x \mapsto \frac{1}{x+1}(P_n(x)+P_{n-1}(x))$ i

$$A_k = \frac{1-x_k}{n^2 P_{n-1}(x_k)^2} \qquad (k=1,\ldots,n-1),$$

gde je P_n Legendreov polinom. Ako $f \in C^{2n-1}[-1,1]$ ostatak u kvadratnoj formuli

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n^2} f(-1) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k f(x_k) + R_n(f)$$

je dat pomoću

$$R_n(f) = 2^{2n-1} n! \left[\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\right]^3 f^{(2n-1)}(\xi) \qquad (-1 < \xi < 1).$$

Teorema 2.12.3(Lobatto). Neka su x_k $(k=1,\ldots,n-2)$ nule polinoma $x \mapsto P'_{n-1}(x)$ (P_n Legendreov polinom) i

$$A_k = \frac{2}{n(n-1)P_{n-1}(x_k)^2} \qquad (k=1,\ldots,n-2).$$

Ako $f \in C^{2n-2}[-1,1]$ važi formula

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{2}{n(n-1)}(f(-1)+f(1)) + \sum_{k=1}^{n-2} A_k f(x_k) + R_n(f),$$

gde je

$$R_n(f) = -\frac{2^{2n-1} n!(n-2)!}{(2n-1)!}\left[\frac{(n-1)!}{(2n-2)!}\right]^2 f^{(2n-2)}(\xi) \qquad (-1 < \xi < 1).$$

Radauove i Lobattoove kvadraturne formule razvijane su za različite težinske funkcije, uvodeći pritom i višestrukost fiksiranih čvorova. Pored klasičnih težinskih funkcija, dosta su razradjivane kvadrature na $(0,1)$ sa logaritamskim singularitetom, na primer, kada je $p(x)=\log(1/x)$. Za ovu težinsku funkciju u radu [51] su razvijene formule Lobattoovog tipa za $n=1(1)5$ sa 15 decimala. Najprostija formula, za $n=1$, ima oblik

$$\int_0^1 \log(1/x)f(x)dx = \frac{89}{252} f(0) + \frac{17}{468} f(1) + \frac{500}{819} f(7/20) + R_3(f),$$

gde ostatak ima oblik $R_3(f) = -\frac{79}{345600} f^{(4)}(\xi)$, $0 < \xi < 1$.

Znatno teži problem se javlja kada su fiksirani čvorovi unutar intervala (a,b). U narednom odeljku razmatraćemo formule ovog tipa.

7.2.13. Formule Kronrodovog tipa

Jedan interesantan i dosta važan slučaj, kada su fiksirani čvorovi unutar intervala integracije, razmatrao je A.S. Kronrod (1964). O optimalnom izboru broja fiksiranih čvorova pojavljuje se rad Pattersona (1968). Poslednjih godina (počev od 1976) ova problematika je opet postala vrlo aktuelna, tako da se pojavio veći broj radova (G. Monegato ([61] - [65]), P. Rabinowitz ([73]) i drugi). Ovde ćemo ukazati na neke od ovih rezultata.

Posmatrajmo Gauss-Christoffelovu kvadraturu

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{2.13.1}$$

koja ima algebarski stepen tačnosti $p=2n-1$. Ako želimo da povećamo stepen tačnosti, a da pritom iskoristimo sve vrednosti funkcije koje su korišćene u (2.13.1), možemo konstruisati kvadraturu oblika

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} B_k f(x_k) + \sum_{i=1}^{m} C_i f(y_i) + R_{n+m}(f), \tag{2.13.2}$$

koja ima m čvorova više od formule (2.12.1). Ovde treba odrediti m čvorova y_i $(i=1,\ldots,m)$ i $n+m$ težinskih koeficijenata B_k i C_i $(k=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,m)$ iz uslova da stepen tačnosti formule (2.13.2) bude maksimalan. Dakle, x_k su nule polinoma $Q_n(x)$, ortogonalnog u odnosu na težinsku funkciju $p(x)$ na (a,b), a y_i se biraju tako da je $R_{n+m}(f)=0$, kada $f \in \mathcal{P}_{n+2m-1}$. Naravno, ako želimo da poboljšamo Gaussovu kvadraturu (2.13.1), mora biti $n+2m-1>2n-1$, tj. $m \geqq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Stavimo $E_m(x)=E_{m,n}(x;p) = \prod_{i=1}^{m} (x-y_i)=x^m+\ldots$, gde m zadovoljava prethodni uslov. Neka je f proizvoljan polinom stepena ne višeg od n+2m-1, tj. $f\in\mathcal{P}_{n+2m-1}$, tada je moguća reprezentacija

$$f(x) = Q_n(x)E_m(x)u_{m-1}(x) + v_{n+m-1}(x), \tag{2.13.3}$$

gde su polinomi u i v takvi da $u\in\mathcal{P}_{m-1}$ i $v\in\mathcal{P}_{n+m-1}$. Kako je formula (2.13.2) interpolacionog tipa, tj. $R_{n+m}(f)=0$ za svako f iz $\mathcal{P}_{n+m-1}$, zamenom (2.13.3) u (2.13.2) možemo izvesti zaključak da će formula (2.13.2) imati algebarski stepen tačnosti p=n+2m-1 ako i samo ako su zadovoljeni uslovi ortogonalnosti

$$\int_a^b p(x)Q_n(x)E_m(x)x^k dx = 0 \qquad (k=0,1,\ldots,m-1).$$

Može se pokazati da ovaj sistem jednakosti može biti zadovoljen samo ako je $m \geq n+1$. Od interesa je slučaj m=n+1, tj. kvadratura oblika

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} B_k f(x_k) + \sum_{i=1}^{n+1} C_i f(y_i) + R_{2n+1}(f). \tag{2.13.4}$$

Glavni problem je konstrukcija polinoma $E_{n+1}(x)=E_{n+1,n}(x;p)$. Neki dosad poznati rezultati u vezi kvadrature (2.13.4) su:

(a) Slučaj (a,b)=(-1,1) i p(x)=1 rešio je 1964. A.S. Kronrod. Algebarski stepen tačnosti je p=n+2(n+1)-1=3n+1. Medjutim, ako je n neparan broj, algebarski stepen tačnosti se povećava za jedinicu, tj. iznosi p=3n+2. Interesantno je primetiti da je polinom $E_{n+1}(x)=E_{n+1,n}(x;1)$ još 1894. godine razmatrao Stieltjes, što možemo videti iz jednog njegovog pisma Hermiteu ([81]). Naime, Stieltjes je dokazao da je

$$\frac{1}{Q_n(x)} = E_{n+1}(x) + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots \qquad (n \geq 1),$$

gde je Q_n Legendreova funkcija druge vrste. Kasnije, Szegö ([84]) je proučavao ovaj sistem polinoma. Nedavno Monegato ([61] - [65]) je dao niz novih rezultata koji se odnose na Stieltjesove polinome $E_m(x)$. Monegato je dokazao da su koeficijenti B_k i C_i u (2.13.4) pozitivni.

(b) U slučaju (a,b)=(-1,1) i $p(x)=(1-x^2)^{-1/2}$, G.Monegato (1976) je dokazao da je stepen tačnosti p=4n-1, a u slučaju Čebiševljeve težine druge vrste $p(x)=(1-x^2)^{1/2}$ algebarski stepen tačnosti je $4n+1$. U poslednjem slučaju $E_{n+1,n}(x;\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$ i tada imamo

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{1/2} f(x)dx = \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{i=1}^{2n+1} (1-x_i^2) f(x_i) + R_{2n+1}(f),$$

gde su

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{2(n+1)} \qquad (i=1,\ldots,2n+1).$$

(c) Slučaj $(a,b)=(-1,1)$ i $p(x)=(1-x^2)^{\lambda-1/2}$ razmatrao je za $0<\lambda\leqq 2$, $\lambda\neq 1$ P. Rabinowitz (1980). Ovde su sve nule polinoma $E_{n+1,n}(x;p)$ realne, različite i leže u $[-1,1]$.

U vezi sa kvadraturama (2.13.4) koje su u literaturi poznate kao Kronrodove ekstenzije Gauss-Christoffelovih formula, ili kraće kao Kronrodove šeme, postoji veći broj otvorenih problema. Neki od nerešnih problema mogu se naći u radu [65].

7.2.14. Čebiševljeve kvadraturne formule

Kvadraturne formule oblika

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = A_n \sum_{k=1}^{n} f(x_k) + R_n(f), \tag{2.14.1}$$

sa algebarskim stepenom tačnosti n, nazivaju se Čebiševljeve formule. Nepoznate parametre A_n i x_k $(k=1,\ldots,n)$ možemo odrediti rešavanjem sistema jednačina

$$A_n(x_1^m+\ldots+x_n^m) = \int_a^b p(x)x^m dx \qquad (m=0,1,\ldots,n). \tag{2.14.2}$$

Iz prve jednačine ovog sistema odredjujemo

$$A_n = \frac{1}{n}\int_a^b p(x)dx. \tag{2.14.3}$$

Primetimo da je $A_n > 0$, s obzirom da je p težinska funkcija.

Uvedimo oznake

$$s_m = x_1^m+\ldots+x_n^m \qquad (m=1,2,\ldots),$$

$$\omega(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$$
$$= x^n + a_1x^{n-1}+\dots+ a_{n-1}x+a_n.$$

Na osnovu (2.14.2)-(2.14.3) možemo odrediti vrednosti s_m $(m=1,\dots,n)$ pomoću

$$s_m = \frac{1}{A_n}\int_a^b p(x)x^m dx = n\,\frac{\int_a^b p(x)x^m dx}{\int_a^b p(x)dx}.$$

Tada, stavljanjem $m=1,\dots,n$ u jednakosti (videti [59, str.74])

$$s_m+a_1s_{m-1}+a_2s_{m-2}+\dots+a_{m-1}s_1+ma_m = 0,$$

dolazimo do sistema linearnih jednačina

$$\text{(2.14.4)}\qquad \begin{array}{ll} 1\cdot a_1 & = -s_1,\\ s_1a_1 + 2a_2 & = -s_2,\\ s_2a_1 + s_1a_2 + 3a_3 & = -s_3,\\ & \vdots\\ s_{n-2}a_1+s_{n-3}a_2+s_{n-4}a_3+\dots+(n-1)a_{n-1} & = -s_{n-1},\\ s_{n-1}a_1+s_{n-2}a_2+s_{n-3}a_3+\dots+s_1a_{n-1}+na_n & = -s_n, \end{array}$$

čijim se rešavanjem nalaze nepoznati koeficijenti polinoma $x\mapsto\omega(x)$. Napomenimo da navedeni sistem linearnih jednačina ima jedinstveno rešenje s obzirom da njegova determinanta ima vrednost $n!$. Najzad, nalaženjem nula polinoma ω odredjujemo apscise x_k $(k=1,\dots,n)$.

Jasno je da se medju nulama polinoma ω mogu naći i kompleksne nule, kao i realne nule koje ne pripadaju segmentu $[a,b]$. Za integraciju realnih funkcija realnog argumenta, kakvu mi razmatramo, od interesa su samo slučajevi kada su sve nule $x_k(k=1,\dots,n)$ realne, proste i leže u $[a,b]$. Imajući u vidu ovu činjenicu može se postaviti sledeći problem (Čebiševljev kvadraturni problem):

Odrediti realno A_n i realne i različite apscise $x_1,\dots,x_n\in[a,b]$ tako da je formula (2.14.1) tačna za svako $f\in\mathcal{P}_n$ $(n=1,2,\dots)$.

U najprostijem slučaju kada je $p(x) \equiv 1$, Čebiševljev kvadraturni problem se ne može rešiti kada je $n=8$ i $n>9$.

Za slučaj $[a,b] = [-1,1]$, J.L.Ullman ([92]) je odredio jednoparametarsku familiju težinskih funkcija oblika

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1+2rx}{1+4rx+4r^2} \quad (|r| < \tfrac{1}{4}), \tag{2.14.5}$$

sa osobinom da odgovarajući Čebiševljev problem ima rešenje za svako $n \in \mathbb{N}$. Primetimo da se za $r=0$ (2.14.5) svodi na klasičnu Čebiševljevu težinsku funkciju i tada su Gauss-Čebiševljeva kvadraturna formula i odgovarajuća Čebiševljeva formula ekvivalentne.

Primer 2.14.1. Odredimo nepoznate parametre u Čebiševljevoj kvadraturnoj formuli

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq A_3(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)). \tag{2.14.6}$$

Uzimajući za $f(x)$ redom $1, x, x^2, x^3$, nalazimo

$$A_3 = \frac{2}{3}, \quad s_1 = x_1+x_2+x_3 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx = 0,$$

$$s_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = 1, \quad s_3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0.$$

Koeficijente polinoma

$$\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$$

odredjujemo iz sistema jednačina (2.14.4). Imamo

$$a_1 = -s_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}(-s_2-s_1a_1) = -\frac{1}{2},$$

$$a_3 = \frac{1}{3}(-s_3-s_2a_1-s_1a_2) = 0,$$

tj.

$$\omega(x) = x^3 - \frac{1}{2}x = x\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

odakle sleduje $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dakle, formula (2.14.6) postaje

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{3}(f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(0) + f(\frac{\sqrt{2}}{2})).$$

7.2.15. Konturna integracija analitičkih funkcija u kompleksnoj ravni

Neka je $z \mapsto f(z)$ funkcija kompleksne promenljive $z=x+iy$. Kompleksni integral po konturi C može se svesti na izračunavanje krivolinijskih realnih integrala, ako se izvrši razdvajanje realnog i imaginarnog dela. Naime, neka je $f(z)=u+iv$, gde su $u=u(x,y)$ i $v=v(x,y)$ realni i imaginarni deo funkcije f. Tada imamo

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_C (udx-vdy)+i\int_C (vdx+udy).$$

Ako je kontura C definisana parametarskim jednačinama

$$x=x(t), \quad y=y(t) \qquad (a \leq t \leq b),$$

tada se izračunavanje krivolinijskog integrala svodi na izračunavanje običnog integrala po promenljivoj t. Na primer,

$$\int_C udx-vdy = \int_a^b \{(u(x(t),y(t)) \frac{dx}{dt} - v(x(t),y(t)) \frac{dy}{dt}\}dt.$$

Ako je f regularna analitička funkcija u prosto povezanoj oblasti D, u kojoj leži otvorena kontura C, tada se, na osnovu Cauchyeve teoreme, kontura C može zameniti bilo kojom drugom konturom $C'(\subset D)$, koja sa konturom C ima istu početnu i krajnju tačku. Na ovaj način izračunavanje vrednosti integrala može se uprostiti. Najčešće se kao C' bira prava linija $\overline{AB}$, ili pak unija dve prave $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$, koje su paralelne realnoj, odnosno imaginarnoj osi (videti sl. 2.15.1).

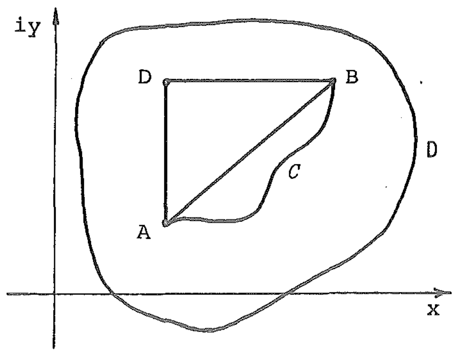
U ovom odeljku razmotrićemo problem integracije regularne analitičke funkcije po linijskom segmentu u kompleksnoj ravni od tačke z_0-h do tačke z_0+h. Pod pretpostavkom da je funkcija g regularna u kvadratu D čija su temena u tačkama $z_k=z_0+i^{k-1}h$ $(k=1,2,3,4)$, Birkhoff i Young ([8]) su izveli kvadraturnu formulu

$$(2.15.1) \quad \int_{z_0-h}^{z_0+h} g(z)dz = \frac{h}{15}\{24g(z_0)+4[g(z_0+h)+g(z_0-h)] - [g(z_0+ih)+g(z_0-ih)]\} + R,$$

koja, kao što vidimo, sadrži i čvorove koji ne pripadaju segmentu integracije. Greška se može oceniti pomoću ([14, str.136], [97])

$$|R| \leq \frac{1}{1890}|h|^7 \max_{z\in D}|g^{(6)}(z)|.$$

Algebarski stepen tačnosti ove formule je, dakle, $p=5$.



Sl. 2.15.1

Linearnom transformacijom $z=hw+z_0$, iz ravni $z=h+iy$ u ravan $w=u+iv$, formula (2.15.1) se transformiše na

$$(2.15.2) \quad \int_{-1}^{1} f(w)dw = \frac{8}{5}f(0) + \frac{4}{15}(f(1)+f(-1)) - \frac{1}{15}(f(i)+f(-i)) + R_5(f),$$

gde je $f(w)=g(hw+z_0)$ i $R_5(f)$ odgovarajući ostatak. Ovo znači da je moguće Birkhoff-Youngovu formulu (2.15.1) razmatrati u obliku (2.15.2).

U radu [43], F. Lether je dao jedan prost metod za konstrukciju kvadratura za numeričku integraciju analitičkih funkcija po linijskom segmentu u kompleksnoj ravni, ukazujući pritom da je trotačkasta Gauss-Legendreova formula, algebarskog stepena tačnosti $p=5$,

$$(2.15.3) \quad \int_{-1}^{1} f(z)dz = \frac{5}{9}f(\sqrt{0.6}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(-\sqrt{0.6}) + R_3(f),$$

analogna formuli (2.15.2) i da ima manju konstantu greške (koeficijent uz izvod u izrazu za grešku), tj. $R_3(f) = \frac{1}{15750}f^{(6)}(\xi)$ $(-1 < \xi < 1)$. Naime, Lether preporučuje korišćenje Gauss-Legendreovih kvadratura za izračunavanje integrala u (2.15.2).

Birkhoff-Youngova formula se može dobiti kao specijalan slučaj jedne opštije formule. Naime, ako je kontura C krug $|z|=1$, konturni integral oblika

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} f(re^{i\theta})d\theta ,$$

tj.

$$I = r\int_0^1 e^{2\pi it} f(re^{2\pi it})dt ,$$

se može efikasno izračunavati primenom uopštenog trapeznog pravila T_n. Zaista, zbog periodičnosti podintegralne funkcije sa periodom 1, može se jednostavno pokazati da je formula

$$(2.15.4) \qquad I \simeq T_n = \frac{r}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi ik/n} f(re^{2\pi ik/n})$$

tačna za svako $f \in \mathcal{P}_{n-1}$. Pretpostavimo sada da je funkcija f regularna u krugu $|z| \leq r$. Tada koeficijenti Taylorovog razvoja

$$(2.15.5) \qquad f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j ,$$

mogu biti izračunati trapeznim pravilom (2.15.4) (videti Lyness i Moler [47], Lyness i Delves [46])

$$a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z^{j+1}}dz = \frac{1}{r^j} \int_0^1 \frac{f(re^{2\pi it})}{e^{2\pi ijt}} dt$$

$$\simeq \frac{1}{r^j n} \sum_{k=1}^{n} e^{-2\pi ijk/n} f(re^{2\pi ik/n}) \equiv \tilde{a}_j .$$

Na osnovu prethodnog, ova aproksimacija izvoda je tačna za $j=0,1,\ldots,n-1$, ako $f \in \mathcal{P}_{n-1}$.

Integracijom stepenog reda (2.15.5) od $-r$ do r nalazimo da je

$$(2.15.6) \qquad \int_{-r}^{r} f(z)dz = 2r \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{r^{2m} a_{2m}}{2m+1} .$$

Zamenom a_{2m} sa $\tilde{a}_{2m}$ i "odsecanjem" razvoja, dobijamo kvadraturno pravilo

$$\int_{-r}^{r} f(z)dz \simeq Q_n(t) = 2r \sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{r^{2m}\tilde{a}_{2m}}{2m+1} ,$$

čiji je algebarski stepen tačnosti $p=n-1$, tj. formula je tačna za svako $f\in\mathcal{P}_{n-1}$. Jedna modifikacija ove kvadrature

$$Q_n^*(f) = Q_n(f) + \frac{2rn}{n+1}(f(0)-\tilde{a}_0) \tag{2.15.7}$$

ima, uz neznatno povećanje izračunavanja, algebarski stepen tačnosti $p=n+1$.

Uzimajući $n=4$ i $r=1$, (2.15.7) se svodi na Birkhoff-Youngovu formulu (2.15.2).

Startujući od (2.15.6), za $r=1$, i korišćenjem formula za drugi i četvrti izvod regularne funkcije (videti Tošić [86]):

$$f''(0) = \frac{1}{2k^2}(f(k) + f(-k) - f(ik) - f(-ik))$$

$$- 2\Big(\frac{k^4}{6!}f^{(6)}(0) + \frac{k^8}{10!}f^{(10)}(0) + \frac{k^{12}}{14!}f^{(14)}(0)+\dots\Big)$$

i

$$f^{(4)}(0) = \frac{6}{k^4}(f(k)+f(-k)+f(ik)+f(-ik)-4f(0))$$

$$-24\Big(\frac{k^4}{8!}f^{(8)}(0) + \frac{k^8}{12!}f^{(12)}(0)+\dots\Big),$$

gde su $k, -k, ik, -ik$ $(0<k\leq 1)$ temena kvadrata u kojima se računa vrednost funkcije za aproksimaciju izvoda, D.Dj. Tošić ([85]) je dobio kvadraturnu formulu

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz = 2\Big(1-\frac{1}{5k^4}\Big)f(0)+\Big(\frac{1}{6k^2}+\frac{1}{10k^4}\Big)(f(k)+f(-k)) \tag{2.15.8}$$

$$+\Big(-\frac{1}{6k^2}+\frac{1}{10k^4}\Big)(f(ik)+f(-ik))+R,$$

gde je

$$R = \Big(-\frac{2}{3\cdot 6!}k^4+\frac{2}{7!}\Big)f^{(6)}(0)+\Big(\frac{2}{9!}-\frac{2}{5\cdot 8!}k^4\Big)f^{(8)}(0)+\dots .$$

Za $k=1$ formula (2.15.8) se svodi na Birkhoff-Youngovu formulu (2.15.2), a za $k=\sqrt{0.6}$ na Gauss-Legendreovu formulu (2.15.3).

Anulirajući koeficijent uz šesti izvod u razvoju za R, tj. uzimajući $k = \sqrt[4]{3/7}$, Tošić je dobio formulu maksimalne tačnosti

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz = \frac{16}{15}f(0) + \frac{1}{6}\left(\frac{7}{5}+\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(f\left(\sqrt[4]{\frac{3}{7}}\right)+f\left(-\sqrt[4]{\frac{3}{7}}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{7}{5}-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(f\left(i\sqrt[4]{\frac{3}{7}}\right)+f\left(-\sqrt[4]{\frac{3}{7}}\right)\right) + R_M,$$

gde je

$$R_M = \frac{1}{793800} f^{(8)}(0) + \frac{1}{61122600} f^{(10)}(0) + \dots .$$

U više radova [50], [53], [54], [55], [88] ova formula je uopštavana u raznim pravcima. Na primer, u radu [53] Milovanović i Djordjević su dobili devetotačkastu formulu interpolacionog tipa oblika

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz = A\,f(0) + C_{11}(f(r_1)+f(-r_1)) + C_{12}(f(r_2)+f(-r_2))$$

$$+ C_{21}(f(ir_1)+f(-ir_1)) + C_{22}(f(ir_2)+f(-ir_2)) + R(f),$$

gde je $0 < r_2 < r_1 < 1$, čiji je algebarski stepen tačnosti $p=13$, ako se r_1 i r_2 izaberu tako da je

$$r_1^4 = \frac{63+4\sqrt{114}}{143} \quad \text{i} \quad r_2^4 = \frac{63-4\sqrt{114}}{143} .$$

Tada su parametri formule

$$r_1=0.927247386651532, \qquad r_2=0.613755686975668,$$

$$A = \frac{512}{675} = 0.758518518518 52,$$

$$C_{11} = 0.18671643342768, \qquad C_{12} = 0.44678904212713,$$

$$C_{21} = 0.64900035496038\cdot 10^{-3}, \qquad C_{22}=-0.13413735169030\cdot 10^{-1}.$$

Razvoj greške R(f) u Taylorov red u z=0 ima vodeći član

$$R_1 = \frac{R(z^{14})}{14!} f^{(14)}(0) \simeq 3.56\cdot 10^{-14} f^{(14)}(0).$$

Ovako dobijeno devetotačkasto pravilo je pogodno za primenu kada je funkcija f oblika $f(x)=g(x^4)$, jer se tada formula svodi na trotačkastu formulu

$$\int_0^1 f(x)dx \approx C_0 f(0) + C_1 f(r_1) + C_2 f(r_2),$$

gde su

$$C_0 = \frac{256}{675}, \quad C_{1,2} = \frac{15922 \pm 591\sqrt{114}}{51300}.$$

U poslednje vreme postoji više radova u kojima se tretira problem integracije analitičkih funkcija više promenljivih ([2], [3], [52]).

7.2.16. Integracija brzo oscilatornih funkcija

Ako podintegralna funkcija veliki broj puta menja znak u intervalu integracije, tada standardne kvadraturne formule postaju neefikasne. Ovakve brzo oscilatorne funkcije se često sreću u primenama, na primer, kod Fourierovih transformacija

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx, \qquad \int_a^b f(x)\sin nx\,dx,$$

i slično. U ovom odeljku izložićemo ukratko nekoliko pristupa koji omogućavaju integraciju brzo oscilatornih funkcija sa zadovoljavajućom tačnošću. U opštem slučaju, mogu se razmatrati integrali oblika

$$I(t) = \int_a^b f(x)K(x,t)dx \qquad (-\infty \leqq a < b \leqq +\infty),$$

gde je $K(x,t)$ tzv. oscilatorno jezgro, dok je $f(x)$ "neoscilatorni" deo.

a) Integracija izmedju nula. Neka su x_k $(k=1,2,\ldots,m)$ nule oscilatornog jezgra i neka su uredjene tako da je

$$a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqq b.$$

Jedan prost način za izračunavanje vrednosti brzo oscilatornih integrala sastoji se u odredjivanju nula jezgra, dekompoziciji integrala i primeni nekog pravila na svaki od "komponentnih" integrala, tj.

$$\int_a^b f(x)K(x,t)dx = \sum_{k=0}^{m} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)K(x,t)dx \approx \sum_{k=0}^{m} Q_k(g),$$

gde smo stavili $x_0=a$, $x_{m+1}=b$ i $g(x)=f(x)K(x,t)$. Sa $Q_k(g)$ smo označili neko kvadraturno pravilo za približno odredjivanje integrala funkcije g na segmentu $[x_k,x_{k+1}]$. Pri ovome su naročito pogodna pravila zatvorenog tipa, jer se dobija veća tačnost bez dodatnog izračunavanja. Na primer, formule Lobattoovog tipa su posebno interesantne. Tako Lobattoova formula sa n tačaka (2 na krajevima podsegmenta i $n-2$ u intervalu) zahteva $n-2$ izračunavanja na podsegmentu, jer je funkcija jednaka nuli na krajevima intervala.

b) Filonovo pravilo. Pretpostavimo da se funkcija $f:[a,b]\to R$ može dosta dobro aproksimirati pomoću

$$\phi(x) = a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+\ldots+a_n\phi_n(x)$$

i da se transformacije bazisnih funkcija ϕ_k mogu jednostavno eksplicitno odrediti

$$\psi_k(t) = \int_a^b \phi_k(x)K(x,t)dx \qquad (k=0,1,\ldots,n).$$

Tada imamo

$$I(t) = \int_a^b f(x)K(x,t)dx \approx \sum_{k=0}^{n} a_k\psi_k(t).$$

Filon je aproksimirao $f(x)$ pomoću paraboličkih lukova, tj. deo po deo parabolom drugog reda. Ilustrujmo ovaj metod na primeru Fourierovog integrala

$$I(k) = \int_a^b f(x)\cos kx\,dx. \tag{2.16.1}$$

Podelimo segment $[a,b]$ na $2n$ podsegmenata ekvidistantnim nizom tačaka. Na svakom od podsegmenata, dužine $h=(b-a)/2n$, funkciju f interpolirajmo polinomom drugog stepena (parabolom) u tačkama mreže: x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k} $(k=1,\ldots,n)$. Izračunavanjem Fourierovog integrala (2.16.1), kada se za $f(x)$ uzme "deo po deo" parabola, dobijamo

$$\int_a^b f(x)\cos kx\,dx \approx h\{\alpha[f(b)\sin kb - f(a)\sin ka] + \beta C_{2n} + \gamma C_{2n-1}\},$$

gde su

$$C_{2n} = \frac{1}{2}f(a)\cos ka + f(a+2h)\cos k(a+2h) + f(a+4h)\cos k(a+4h) + \\ + \dots + \frac{1}{2}f(b)\cos kb,$$

$$C_{2n-1} = f(a+h)\cos k(a+h) + f(a+3h)\cos k(a+3h) + \\ + \dots + f(b-h)\cos k(b-h),$$

$$\alpha = \alpha(\theta) = \frac{1}{\theta^3}(\theta^2 + \theta\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta),$$

$$\beta = \beta(\theta) = \frac{2}{\theta^3}(\theta(1+\cos^2\theta) - 2\sin\theta\cos\theta),$$

$$\gamma = \gamma(\theta) = \frac{4}{\theta^3}(\sin\theta - \theta\cos\theta), \quad \theta = kh = k(b-a)/2n.$$

Ako se na sličan način definišu sume S_{2n} i S_{2n-1}, može se odrediti "sinusni" integral

$$\int_a^b f(x)\sin kx\,dx \approx h\{-\alpha[f(b)\cos kb - f(a)\cos ka] + \beta S_{2n} + \gamma S_{2n-1}\}.$$

Pri praktičnom odredjivanju, za male vrednosti θ, treba koristiti razvoje za funkcije $\alpha(\theta)$, $\beta(\theta)$, $\gamma(\theta)$, tj.

$$\alpha(\theta) = \frac{2}{45}\theta^3 - \frac{2}{315}\theta^5 + \frac{2}{4725}\theta^7 + \dots,$$

$$\beta(\theta) = \frac{2}{3} + \frac{2}{15}\theta^2 - \frac{4}{105}\theta^4 + \frac{2}{567}\theta^6 + \dots,$$

$$\gamma(\theta) = \frac{4}{3} - \frac{2}{15}\theta^2 + \frac{1}{210}\theta^4 - \frac{1}{11340}\theta^6 + \dots .$$

c) Korišćenje formula Gauss-Christoffelovog tipa. Ako definišemo težinske funkcije

$$c_m(x) = \frac{1}{2}(1+\cos m\pi x), \quad s_m(x) = \frac{1}{2}(1+\sin m\pi x)$$

za $x \in [-1,1]$ i $m=0,1,\dots,$ tada je

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_{-1}^{1} c_m(x) f(\pi x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(\pi x)\,dx,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \int_{-1}^{1} s_m(x)f(\pi x)dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(\pi x)dx.$$

Drugi integrali na desnoj strani u ovim jednakostima se jednostavno odredjuju jer $f(\pi x)$ nije "oscilatorno". Za odredjivanje vrednosti Fourierovih koeficijenata sa visokom tačnošću treba, dakle, odrediti sa istom takvom tačnošću integrale sa težinama $c_m(x)$ i $s_m(x)$. Gauss-Christoffelove formule sa ovim težinama razvio je Gautschi [21].

Integracija brzo oscilatornih funkcija je veoma aktuelna oblast numeričke integracije, na kojoj se poslednjih godina dosta radi.

7.2.17. Konvergencija kvadraturnih procesa

U ovom odeljku ispitaćemo uslove za konvergenciju kvadraturnih procesa, tj. uslove pod kojima ostatak $R_n(f)\to 0$, kada $n\to +\infty$.

Neka je dat niz kvadraturnih formula

$$(2.17.1)\qquad I(f) = \int_a^b f(x)dx = K_n f + R_n(f)\qquad (n=1,2,\ldots),$$

gde su

$$(2.17.2)\qquad K_n f = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}),$$

$A_k^{(n)}$ težinski koeficijenti (konstantni za fiksirano n) i $x_k^{(n)}$ apscise koje zadovoljavaju uslov

$$a \leqq x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqq b\,.$$

Teorema 2.17.1. Potreban i dovoljan uslov da niz $\{K_n f\}_{n\in N}$ konvergira ka $I(f)$ za svako $f\in C[a,b]$ je da on konvergira za svaki algebarski polinom i da postoji pozitivna konstanta M takva da je

$$(2.17.3)\qquad \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \leqq M\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Dokaz. Posmatrajmo linearnu funkcionelu K_n, definisanu pomoću (2.17.2). Kako je za svako $f\in C[a,b]$

$$|K_n f| \leqq \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \cdot |f(x_k^{(n)})| \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}|\right) \|f\|,$$

gde je $\|f\| = \max\limits_{a \leqq x \leqq b} |f(x)|$, zaključujemo da je funkcionela K_n ograničena na $C[a,b]$.

Dakle,

$$|K_n f| \leqq \|K_n\| \cdot \|f\| \qquad (\forall f \in C[a,b]) \tag{2.17.4}$$

i

$$\|K_n\| \leqq \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}|. \tag{2.17.5}$$

Odredimo sada normu $\|K_n\|$. U prostoru $C[a,b]$ izaberimo funkciju $\bar{f}$, koja je odredjena sa

$$\bar{f}(x_k^{(n)}) = \operatorname{sgn} A_k^{(n)},$$

linearna na $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$ $(k=1,\ldots,n-1)$ i konstantna na $[a,x_1^{(n)}]$ i $[x_n^{(n)},b]$. Tada je $\|\bar{f}\|=1$ i

$$K_n\bar{f} = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} \operatorname{sgn} A_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}|,$$

pa iz (2.17.4), za $f=\bar{f}$, sleduje $\|K_n\| \geqq \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}|$, što zajedno sa (2.17.5) daje $\|K_n\| = \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}|$.

Prema tome, kako je

1° Niz $\{\|K_n\|\}_{n\in N}$ ograničen (na osnovu (2.17.3));

2° $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n f = I(f)$ za svaki algebarski polinom;

3° Skup polinoma svuda gust u $C[a,b]$,

na osnovu Banach-Steinhausove teoreme (videti odeljak 2.3.1) zaključujemo da važi tvrdjenje teoreme 2.17.1.

Teorema 2.17.2. Ako su koeficijenti $A_k^{(n)} \geqq 0$ $(k=1,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$ potreban i dovoljan uslov da niz $\{K_n f\}_{n\in N}$ konvergira ka $I(f)$ za svako $f\in C[a,b]$ je da on konvergira za svaki algebarski polinom.

Dokaz. Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n f=I(f)$, stavljajući $f(x)=1$ u

(2.17.1), dobijamo

$$b - a = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)},$$

što znači da je uslov (2.17.3) ispunjen sa M=b-a, čime je dokaz završen.

Iz teoreme 2.17.2 sleduje konvergencija Gauss-Christoffelovih kvadraturnih procesa, s obzirom da je $A_k^{(n)} \geq 0$.

Teorema 2.17.2 nije primenljiva na niz Newton-Cotesovih formula (videti (2.3.4)), jer su već pri n=8 neki od težinskih koeficijenata negativni. Napomenimo, da ovaj niz, zaista, ne konvergira za svako $f \in C[a,b]$ (videti [9] i [11]).

7.3. LITERATURA

1. M.Abramovitz & I.A.Stegun: Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Dover, New York, 1965.
2. B.P.Acharya & R.N.Das: *On numerical integration of analytic function of more than one variable*. J.Math.Phys.Sci. 15(1981), 399-408.
3. B.P.Acharya & R.N.Das: *Approximative evaluation of the multiple complex integrals of analytic functions*. Computing 30(1983),279-283.
4. D.G.Anderson: *Gaussian quadrature formulae for* $\int_0^1 -\ln(x)f(x)dx$. Math. Comp. 19(1965),477-481.
5. J.M.Ash & R.L.Jones: *Optimal numerical differentiation using three function evaluations*. Math. Comp. 37(1981), 159-167.
6. F.L.Bauer, H.Rutishauser, E.L.Stiefel: *New aspects in numerical quadrature*. In: Experimental Arithmetic, High Speed Computing and Mathematics. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963.
7. I.S.Berezin i N.P.Žitkov: Numerička analiza - numeričke metode. Naučna knjiga, Beograd, 1963.
8. G.Birkhoff & D.Young: *Numerical quadrature of analytic and harmonic functions*. J. Math. Phys. 29(1950), 217-221.
9. H.Brass: *Ein Gegenbeispiel zum Newton-Cotes-Verfahren*. Z. Angew. Math. Mech. 57(1977), 609.
10. E.B.Christoffel: *Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben*. J. Reine Angew. Math. 55(1858), 61-82 [Ges. Math. Abhandlungen I, 65-87].
11. L.Collatz: Functionalanalysis und Numerische Mathematik. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.
12. P.D.Crout: *The approximation of functions and integrals by a linear combination of functions*. J.Math.Phys.(M.I.T.)9(1929/30),278-314.

13. B.Danloy: *Numerical construction of Gaussian quadrature formulas for* $\int_0^1 (-\mathrm{Log}\, x)\, x^{\alpha} f(x)dx$ *and* $\int_0^{\infty} E_m(x)f(x)dx$. Math. Comp. 27(1973), 861-869.

14. P.J.Davis & P.Rabinowitz: Methods of numerical integration. Academic Press, New York, 1975.

15. B.P.Demidovich & I.A.Maron: Computational mathematics. Mir Publishers, Moscow, 1973.

16. J.J.Dongarra et al.: LINPACK User's Guide. SIAM, Philadelphia, 1979.

17. H.Engels: Numerical quadrature and cubature. Academic Press, London, 1980.

18. C.F.Gauss: *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi.* Commentationes Societatis Regiae Scientarium Göttingensis Recentiores 3(1814) [Werke III, 123-162].

19. W.Gautschi: *Construction of Gauss-Christoffel quadrature formulas.* Math. Comp. 22(1968), 251-270.

20. W.Gautschi: *On the construction of Gaussian quadrature rules from modified moments.* Math. Comp. 24(1970), 245-260.

21. W.Gautschi: *Tables of Gaussian quadrature rules for the calculation of Fourier coefficients.* Math. Comp. 24(1970),no. 110, loose microfiche suppl. A-D.

22. W.Gautschi: *On generating Gaussian quadrature rules.* In: Numerische Integration. ISNM 45 (Ed. by Hämmerlin, G.), 147-154, Birkhäuser, Basel, 1979.

23. W.Gautschi: *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae.* In: E. B.Christoffel - The influence of his work in mathematics and the physical sciences (P.L.Butzer & F.Fehér, eds.),72-147, Birkhäuser Verlag, Basel, 1981.

24. W.Gautschi: *On generating orthogonal polynomials.* SIAM J. Sci. Statist. Comput. 3(1982), 289-317.

25. W.Gautschi: *Polynomials orthogonal with respect to the reciprocal gamma function.* BIT 22(1982), 387-389.

26. W.Gautschi: *How and how not to check Gaussian quadrature formulae.* BIT 23(1983), 209-216.

27. W.Gautschi & G.V.Milovanović: *Gaussian quadrature involvig Einstein and Fermi functions with an application to summation of series.* Math. Comp. 44(1985), 177-190.

28. W.Gautschi & G.V.Milovanović: *Polynomials orthogonal on the semicircle.* J. Approx. Theory 46(1986),230-250.

29. G.H.Golub & J.Kautski: *Calculation of Gauss quadratures with multiple free and fixed knots.* Numer. Math. 41(1983), 147-163.

30. G.H.Golub & J.H.Welsch: *Calculation of Gauss quadrature rules.* Math. Comp. 23(1969), 221-230.

31. S.Haber: *Midpoint quadrature formulas.* Math. Comp. 21(1967), 719 - 221.

32. G.Hämmerlin: *Über ableitungsfreie Schranken für Quadraturfehler.* Numer. Math. 5(1963), 226-233.

33. G.Hämmerlin: *Über ableitungsfreie Schranken für Quadraturfehler II. Ergänzungen und Möglichkeiten zur Verbesserung.* Numer. Math. 7(1965), 232-237.

34. G.Hämmerlin: *Zur Abschätzung von Quadraturfehlern für analytische Funktionen.* Numer. Math. 8(1966), 334-344.

35. C.G.Harris & W.A.B.Evans: *Extension of numerical quadrature formulae to cater for end point singular behaviours over finite intervals.* Internat. J. Comput. Math. 6(1977/78), 219-227.

36. E.Heine: Anwendungen der Kugelfunctionen und der verwandten Functionen. Reimar, Berlin, 1881 [I. Theil: Mechanische Quadratur, 1-31].

37. K.H.Huebner: The finite element method for engineers. New York-Sydney-Toronto, 1975.

38. K.S.K.Iyengar: *Note on an inequality.* Math. Student 6(1938) 75-76.

39. C.G.J.Jacobi: *Über Gauss neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden.* J. Reine Angew. Math. 1(1826), 301-308.

40. V.I.Krylov: Approximate calculation of integrals (Russian). Izdat. Fiz.-Mat.Lit. Moscow, 1959.

41. Soo-Y.Lee: *The inhomogeneous Airy functions Gi(z) and Hi(z).* J. Chem. Phys. 72(1980), 332-336).

42. F.G.Lether: *Error bounds for fully symmetric quadrature rules.* SIAM J. Numer. Anal. 11(1974), 3-9.

43. F.Lether: *On Birkhoff-Young quadrature of analytical functions.* J. Comput. Appl. Math. 2(1976), 81-84.

44. F.G.Lether: *On the construction of Gauss-Legendre quadrature rules.* J. Comput. Appl. Math. 4(1978), 47-52.

45. J.N.Lyness: *Differentiation formulas for analytic functions.* Math. Comp. 22(1968), 352-362.

46. J.N.Lyness & L.M.Delves: *On numerical contour integration round a closed contour.* Math. Comp. 21(1967), 561-577.

47. J.N.Lyness & C.B.Moler: *Numerical differentiation of analytic functions.* SIAM J. Numer. Anal. 4(1967), 202-210.

48. F.G.Mehler: *Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen.* J. Reine Angew. Math. 63(1864), 152-157.

49. Š.E.Mikeladze: Čislennye metody matematičeskogo analiza. Gostehizdat, Moskva, 1953.

50. B.Milošević i G.V.Milovanović: *Nove kvadraturne formule za analitičke funkcije.* Zb. rad. Gradj. fak. u Nišu, N° 4(1983), 315-323.

51. G.V.Milovanović: *Konstrukcija kvadraturnih formula Lobatto-ovog tipa za integraciju funkcija sa logaritamskom težinom.* Zb. rad. PMF u Kragujevcu, 4(1983), 99-104.

52. G.V.Milovanović, B.P.Acharya, T.N.Pattnaik: *On numerical evaluation of double integrals of an analytic function of two complex variables.* BIT 26(1986), 521-526.

53. G.V.Milovanović & R.Ž.Djordjević: *On a generalization of modified Birkhoff-Young quadrature formula.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. N°735 - N°762(1982), 130-134.

54. G.V.Milovanović i B.Milošević: *Numerička integracija analitičkih funkcija.* Zb. rad. Gradj. fak. u Nišu, N°3(1982), 237-241.

55. G.V.Milovanović i I.Ž.Milovanović: *Jedna klasa formula za numeričku integraciju analitičkih funkcija.* Zb. rad. III znanstvenog skupa Numeričke metode u tehnici, Stubičke Toplice, 1981, 171-177.

56. G.V.Milovanović & J.E.Pečarić: *On generalization of the inequality of A.Ostrowski and some related applications.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. N°544 - N°576(1976), 155-158.

57. G.V.Milovanović & J.E.Pečarić: *Some considerations of Iyengar's inequality and some related applications.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. N°544 - N°576(1976),166-170.

58. G.V.Milovanović i S.Č.Stojanović: *Uopštene Gaussove kvadraturne formule za logaritamsku težinu.* Zb. rad. IV znanstvenog skupa PPPR, Stubičke Toplice, 1982, 457-462.

59. D.S.Mitrinović i D.Ž.Djoković: Polinomi i matrice. ICS, Beograd, 1975.

60. D.S.Mitrinović(with P.M.Vasić): Analytic inequalities. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

61. G.Monegato: *A note on extended Gaussian quadrature rules.* Math. Comp. 30(1976), 812-817.

62. G.Monegato: *Positivity of the weight of extended Gauss-Legendre quadrature rules.* Math. Comp. 32(1978), 243-245.

63. G.Monegato: *Some remarks on the construction of extended Gaussian quadrature rules.* Math. Comp. 32(1978), 247-252.

64. G.Monegato: *An overview of results and questions related to Kronrod shemes.* In: Numerische Integration. ISNM 45(Ed. by Hämmerlin, G.). 231-240, Birkhäuser, Basel, 1979.

65. G.Monegato: *Stieltjes polynomials and related quadrature rules.* SIAM Review 24(1982), 137-158.

66. A.C.R.Newbery: *Some extensions of Legendre quadrature.* Math. Comp. 23(1969), 173-176.

67. J.Nuttall: *Gaussian integration for complex weight functions.* J. Inst. Math. Applics. 21(1978), 165-170.

68. A.Ossicini: *Construzione di formule di quadratura di tipo Gaussiano.* Ann. Mat. Pura Appl. (4)72(1966), 213-237.

69. A.Ossicini, F.Rosati: *Funzioni caratteristiche nelle formule di quadratura gaussiane con nodi multipli.* Boll. Un. Mat. Ital. (4)11 (1975), 224-237.

70. D.F.Paget: Generalized product integration. Ph. Thesis. University of Tasmania, Hobart, 1976.

71. T.N.L.Patterson: *On optimum addition of points to quadrature formulae.* Math. Comp. 22(1967), 847-856.

72. R.Piessens & M.Branders: *Tables of Gaussian quadrature formulas*. Appl. Math. Prog. Div., University of Leuven, Leuven, 1975.

73. P.Rabinowitz: *The exact degree of precision of generalized Gauss-Kronrod integration rules*. Math. Comp. 35(1980), 1275-1283.

74. R.Radau: *Étude sur les formules d'approximation qui servent a calculer la valeur numérique d'une integrale définite*. J. Math. Pures Appl. (3)6(1880), 283-336.

75. W.Romberg: *Vereinfachte numerische Integration*. Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) 28(1955), 30-36.

76. R.A.Sack & A.F.Donovan: *An algorithm for Gaussian quadrature given modified moments*. Numer. Math. 18(1971/72), 465-478.

77. H.E.Salzer: *Optimal points for numerical differentiation*. Numer. Math. 2(1960), 214-227.

78. B.T.Smith et al.: Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide. Lect. Notes Comput. Sci. 6, Springer-Verlag, New York, 1974.

79. N,M.Steen, G.D,Byrne, E.M.Gelbard: *Gaussian quadratures for the integrals* $\int_0^\infty exp(-x^2)f(x)dx$ *and* $\int_0^b exp(-x^2)f(x)dx$. Math. Comp. 23(1969), 661-671.

80. T.J.Stiltjes: *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques*. Ann. Sci. Ecole Nor. Paris Sér. 3, 1(1884), 409-426 [Oeuvres I, 377-396].

81. T.J.Stieltjes: *Correspondence d'Hermite et de Stieltjes*. vol. II, Gauthier-Villars, Paris, 1905, 439-441.

82. A.H.Stroud & D.Secrest: Gaussian quadrature formulas. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966.

83. A.H.Stroud & D.D.Stancu: *Quadrature formulas with multiple Gaussian nodes*. J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. B Numer. Anal. 2 (1965), 129-143.

84. G.Szegö: *Über gewisse orthogonale Polynome, die zu einer oszillierenden Belegungsfunktion gehoren*. Math. Ann. 110(1934), 501-513.

85. D.Dj.Tošić: *A modification of the Birkhoff-Young quadrature formula for analytical functions*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. N$^{\underline{o}}$602 - N$^{\underline{o}}$633(1978), 73-77.

86. D.Dj.Tošić: *Numerical differentiation of analytic functions*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. N$^{\underline{o}}$678 -N$^{\underline{o}}$ 715(1980), 175-182.

87. D.Dj.Tošić & A.A.ElBahi: *Optimal numerical differentiation of real-valued analytic functions*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn Fak. Ser. Mat. Fiz. N$^{\underline{o}}$735 - N$^{\underline{o}}$762(1982), 122-126.

88. D.Dj.Tošić, D.Sotirovski, J.Draškić-Ostojić: *Some quadrature formulas for analytic functions*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. N$^{\underline{o}}$618 - N$^{\underline{o}}$715(1980), 170-172.

89. P.Turan: *On the theory of the mechanical quadrature*. Acta Sci. Math. (Szeged), 12(1950), 30-37.

90. A.H.Tureckiĭ: *On quadrature formulas exact for trigonometric polynomials*. Učen.Zap.Belorussk.Univ. no1(49)(1959),31-54 (Russian).