УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Маријана Авалић

Копуле и њихова примена у неживотном осигурању

– мастер рад –

Београд, 2017.

Садржај

1 Увод **1**

2 Дефиниција и особине копула **3**

2.1 Скларова теорема 4

2.2 Фреше-Хефдингове границе 5

2.3 Особине копула 7

3 Мере зависности **10**

3.1 Пирсонов коефицијент корелације 10

3.2 Спирманов коефицијент ρ 11

3.3 Кендалов коефицијент τ 11

3.4 Зависност екстремних догађаја 13

4 Фамилије копула **15**

4.1 Елиптичке копуле 15

4.1.1 Гаусова копула 16

4.1.2 Студентова копула 16

4.2 Архимедове копуле 17

4.2.1 Клејтонова копула 18

4.2.2 Френкова копула 18

4.2.3 Гумбелова копула 18

4.2.4 Емпиријске копуле 18

5 Примена копула у неживотном осигурању **20**

5.1 Подаци 21

5.2 Гаусова копула 24

5.3 Студентова t копула 25

6 Закључак **31**

Поглавље 1

Увод

Историја копула почиње 1940. године Хефдинговим ([16]) истраживањима вишедимензионих расподела. Прва идеја о повезаности вишедимензионих и одговарајућих маргиналних функција расподела појављује се 1951.године у раду Фрешеа ([11]). Склар ([31]) у својој докторској тези 1959. године даје одговор на постављена питања и дефинише најважнију теорему у овој области. Он уводи име копула, изведено од латинске речи *copulare* што значи спајање, повезивање. У граматици се овај израз користи за синтагму која повезује субјекат и предикат. Аналогно копуле у математици повезују вишедимензиону са маргиналним једнодимензионим расподелама.

У првим деценијама копуле се развијају у оквиру проучавања метричких простора код којих се растојање мери функцијом расподеле вероватноће. Интересовање статистичке заједнице се јавља 1947. године када је откривено да се копуле могу користити за конструисање непараметарских мера зависности и за моделирање вишедимензионих расподела. Копуле имају повољне особине: не зависе од избора маргиналних расподела, инваријантне су у односу на монотоне трансформације и доступан је велики број фамилија које се једноставно моделирају.

Класични концепт корелације је одговарајућа мера зависности само када су у питању елиптичке расподеле. Коефицијенти корелације рангова су инваријантни у односу на монотоне трансформације али и даље представљају скаларну меру која ништа не говори о зависности екстремних вредности која представља важан концепт у финансијској примени. Због тога се уводи појам копула које осликавају структуру зависности кроз целу расподелу.

Од 1990. године одржавају се научне конференције под називом *Probability distributions with given marginals* које су допринеле развоју ове области. Експанзија копула нагло расте крајем 90-их година услед примене у финансијама и актуарству. Статистички модели помажу у разумевању варијабилности величине штета, цена и флуктуација финансијских средстава. Нови производи у банкама и осигурању повећавају зависност у структури портфеља па погрешна процена може довести до значајне потцењености ризика. Највећу примену копуле имају у области управљања ризицима, у одређивању цена опција и моделирању екстремних догађаја.

Примењују се и у биологији, хидрологији, медицинским наукама, информационим технологијама и различитим гранама инжењерства. Ипак, примена у финансијским институцијама је довела до развоја метода и апликација за решавање практичних проблема у различитим областима.

Поред свих предности које поседују, често се бирају копуле које је најлакше моделирати без обзира на то колико одговарају постојећим подацима па може доћи до потцењености величина које се њима мере. Према томе, иако су широко распрострањене у различитим областима, треба преузети мере опреза када је у питању одабир копуле.

Дејвид Ли ([19]) у свом раду из 2000. године у оквиру модела кредитног ризика дефинише начин за одређивање цена финансијских инструмената који су познати као осигурање за поврат дуга[1]. Модел користи Гаусову копулу која потцењује ризик у екстремним ситуацијама. Сматра се да је ова формула индиректно изазвала финансијску кризу 2008. године. Широка примена довела је и до злоупотребе копула па се природно јављају и критике овог концепта, од којих је најпознатија Микошева ([22]) из 2006. године.

[1]Енг. *Collateralized Debt Obligation*

Поглавље 2

Дефиниција и особине копула

У овом поглављу увешћемо појам копула, навести њихову дефиницију, описати везу са вишедимензионим расподелама дату Скларовом теоремом и навести основне особине. Објаснићемо појам Фреше–Хефдингових граница као и њихово значење за одговарајуће расподеле.

Дефиниција 2.0.1 *Копула је вишедимензиона функција расподеле са маргиналним расподелама униформним на интервалу* $[0, 1]$.

Нека су $U_1, U_2, \dots, U_n$ случајне величине са униформном расподелом и $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), u_i \in [0, 1]$. Тада је копула C вектора $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ дефинисана са:

$$C(u) = C(u_1, u_2, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_n \leq u_n)$$

Дефиниција 2.0.2 *Функција* $C : [0, 1]^n \to [0, 1]$ *је копула ако важи:*

- $C(u_1, \dots, u_n) = 0$ *ако је бар једна компонента* $u_i, i \in \{1, \dots, n\}$ *једнака 0*
- $C(u_1, \dots, u_n) = u_i$ *ако је* $u = (1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1)$ *за неко* $i \in \{1, \dots, n\}$
- *За све* $(u_{11}, \dots, u_{n1}), (u_{12}, \dots, u_{n2}) \in [0, 1]^n$ *такве да је* $u_{i1} \leq u_{i2}$ *за* $i \in \{1, \dots, n\}$ *важи неједнакост:*

$$\textstyle\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0$$

Претходна неједнакост говори да уколико вектор $(U_1, \dots, U_n)$ има функцију расподеле C, важи:

$$P(u_{11} \leq U_1 \leq u_{12}, \dots, u_{n1} \leq U_n \leq u_{n2}) \geq 0.$$

2.1 Скларова теорема

У наставку ће бити наведена теорема која заузима централно место у теорији копула. Први пут је представљена 1959. године у раду Абе Склар-а ([32]).

Теорема 2.1 *Нека је $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случајни вектор са функцијом расподеле F и маргиналним расподелама $F_i, 1 \leq i \leq n$. Тада за свако $x_i \in [-\infty, +\infty], 1 \leq i \leq n$ постоји функција C за коју важи:*

$$(1)\ C(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n)) = F(x_1, x_2, ..., x_n),$$

коју називамо копулом вектора X.

Ако су функције $F_i, 1 \leq i \leq n$ непрекидне, копула C је јединствена; у супротном је јединствено одређена на $D(F_1)x \ldots xD(F_n)$, где $D(F_i)$ означава домен функције F_i.

Важи и обрнуто, ако је функција C n-димензиона копула и $F_1, \ldots, F_n$ функције расподеле, тада је функција F дефинисана у једнакости (1) n-димензиона функција расподеле са маргиналним расподелама $F_1, \ldots, F_n$.

Једнакост (1) представља основу за симулације које се базирају на задатој копули и маргиналним расподелама. Пре него што докажемо теорему биће дате леме чији се резултати користе у доказу.

Лема 2.1.1 *Нека је X случајна величина са непрекидном функцијом расподеле F. Тада случајна величина $F(X)$ има униформну расподелу на интервалу $[0, 1]$.*

Лема 2.1.2 *Нека је U случајна величина са униформном расподелом на интервалу $[0, 1]$ и F функција расподеле. За $0 < t < 1$ дефинишемо уопштену инверзну функцију*

$$F^{-1}(t) = inf\{x \in R, F_i(x) \geq t\}.$$

Тада случајна величина $X = F^{-1}(U)$ има функцију расподеле F.

Ова лема се користи за симулацију случајних величина са униформном функцијом расподеле.

Доказ 1 (теореме) *Ако су маргиналне расподеле $F_i, 1 \leq i \leq n$ непрекидне, према Леми 1 случајне величине $F_i(X_i)$ имају униформну расподелу на интервалу $[0, 1]$ па функцију C дефинишемо на следећи начин:*

$$
\begin{gathered}
C(u_1, \ldots, u_n) \\
= P(F_1(X_1) \leq u_1, \ldots, F_n(X_n) \leq u_n) \\
= P(X_1 \leq F_1{}^{-1}(u_1), \ldots, X_n \leq F_n{}^{-1}(u_n)) \\
= F(F_1{}^{-1}(u_1), \ldots, F_n{}^{-1}(u_n)),
\end{gathered}
$$

где је $F_i^{-1}(t)$ уопштена инверзна функција.

Да је овако дефинисана функција C копула вектора X следи на основу следећих једнакости:

$$
\begin{gathered}
F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) \\
= P(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \ldots, F_n(X_n) \leq F_n(x_n)) \\
= C(F_1(x_1), F_2(x_2),), \ldots, F_n(x_n))
\end{gathered}
$$

Обзиром да је оригинални доказ за случај када променљиве немају непрекидну расподелу компликован и са пуно техничких детаља, у литератури се могу пронаћи различити докази који користе теорију вероватноће, статистику али и топологију. Један од најелегантнијих и интуитивнијих доказа је дат у [28].

2.2 Фреше-Хефдингове границе

Хефдинг и Фреше су независно дошли до закључка да се копула увек налази између одређених граница. Разлог за то је постојање екстремних случајева зависности.

Посматрајмо униформно расподељене случајне величине U_1 и U_2. У случају када је $U_1 = U_2$ постоји савршена зависност између ових величина и копула је једнака

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) = \min\{u_1, u_2\}.$$

За случајне величине X и Y ова копула се постиже ако су X и Y комонотоне. Уколико постоји случајна велиина Z тако да је $X = u(Z)$ и $Y = v(Z)$ скоро сигурно, где су u и v неопадајуће функције, X и Y називамо комонотоним. Комонотоност представља савршену позитивну зависност случајних величина.

Ако су величине U_1 и U_2 независне одговарајућа копула ће имати облик

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1)P(U_2 \leq u_2) = u_1 u_2.$$

Супротно од комонотоности, случајне величине X и Y су контрамонотоне ако су X и $-Y$ комонотоне. Контрамонотоност представља савршену негативну зависност случајних величина. У случају униформних величина се постиже за $U_2 = 1 - U_1$. Ако је $1 - u_2 < u_1$ одговарајућа копула је једнака

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, 1 - U_1 \leq u_2) = P(1 - u_2 \leq U_1 \leq u_1) = u_1 + u_2 - 1.$$

У случају $1 - u_2 \geq u_1$ копула је једнака нули.

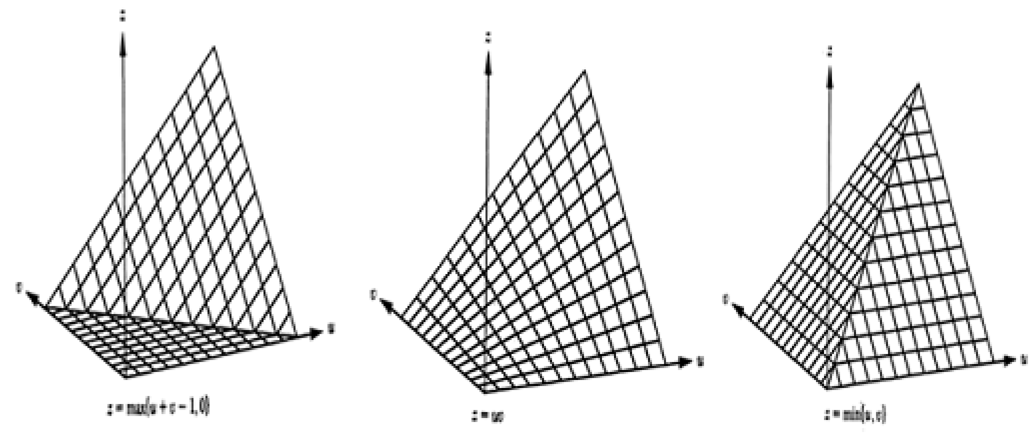
Ове особине се могу пренети на вишедимензиони слушај па важи следећа теорема:

Теорема 2.2 *За сваку копулу C и све $u_1, \ldots, u_n; u_i \in [0,1]$ важе следеће неједнакости:*

$$\max\{u_1 + \ldots + u_n - n + 1, 0\} \leq C(u_1, \ldots, u_n) \leq \min\{u_1, \ldots, u_n\}$$

Функције $W(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \max\{\sum_{i=1}^{n} u_i - n + 1, 0\}$ и $M(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \min\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ зову се доња и горња Фреше–Хефдингова граница.

Функција M је увек копула док за функцију W то важи само у дводимензионом случају.



Слика 2.1: Доња Фреше-Хефдингова граница, копула независности, горња Фреше-Хефдингова граница

Доказ 2 *(за дводимензиони слуај) Према дефиницији копуле важи*

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$$

за функције U_1 *и* U_2 *са униформном расподелом на интервалу* $[0, 1]$. *Важе следеће неједнакости:*

$$\begin{gathered}
C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \leq P(U_1 \leq u_1) = u_1 \\
C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \leq P(U_2 \leq u_2) = u_2 \\
\Rightarrow C(u_1, u_2) \leq \min\{u_1, u_2\} \\
1 \geq P(U_1 \leq \text{или } U_2 \leq u_2) \\
= P(U_1 \leq u_1) + P(U_2 \leq u_2) - P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \\
= u_1 + u_2 - C(u_1, u_2)
\end{gathered}$$

2.3 Особине копула

Теорема 2.3 *Нека је* $X = (X_1, \dots, X_n)$ *случајни вектор са непрекидном функцијом расподеле* F *и маргиналним расподелама* $F_1, F_2, \dots, F_n$. *Тада је копула вектора* X *једнака копули независности (тј. копули производа), са ознаком* Π, *ако и само ако су* $X_1, \dots, X_n$ *независне случајне величине.*

$$\Pi(u_1, \dots, u_n) = u_1 \dots u_n.$$

Теорема 2.4 *Нека је* $X = (X_1, \dots, X_n)$ *случајни вектор са непрекидном заједничом функцијом расподеле* F *и маргиналним расподелама* $F_1, F_2, \dots, F_n$. *Тада је копула вектора* X *једнака горњој Фреше-Хефдинговој граници*

$$M(u_1, \dots, u_n) = \min\{u_1, \dots, u_n\}$$

ако и само ако постоји савршена монотона зависност у смислу да случајни вектор $(X_1, \dots, X_n)$ *има исту расподелу као* $(T_1(Z), \dots, T_n(Z))$, *где је* Z *случајна величина и* $T_1, \dots, T_n$ *растуће функције.*

Теорема 2.5 *Нека је* $X = (X_1, X_2)$ *случајни вектор са непрекидном заједничком функцијом расподеле* F *и маргиналним расподелама* F_1 *и* F_2. *Тада је копула вектора* X *једнака доњој Фреше-Хефдинговој граници*

$$W(u_1, u_2) = max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$$

ако и само ако је $X_2 = T(X_1)$ *скоро сигурно за неку опадајућу функцију* T.
Ова особина се може проширити на димензије $d \geq 3$ *али у том случају функција* W *није копула.*

Посматрајмо случајне величине X_1, X_2 и X_3. Можемо изабрати X_1 и X_2 тако да буду контрамонотоне, као и X_1 и X_3 . Тада међутим постоје ограничења за X_2 и X_3 . Ако је на пример X_1 растућа, тада и X_2 и X_3 морају бити опадајуће функције па не могу бити контрамонотоне. Дакле, не постоји тродимензиона копула која задовољава услове из теореме.

Теорема 2.6 *Копуле су инваријантне у односу на растуће трансформације својих аргумената тј. копула C случајног вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ је у исто време и копула вектора $(T_1(X_1), \ldots, T_n(X_n))$, где су $T_1, \ldots, T_n : \Re \to \Re$ растуће функције.*

Доказ 3 *Нека су $X_1, \ldots, X_n$ непрекидне случајне величине са функцијама расподела $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и копулом C и $T_1(X_1), \ldots, T_n(X_n)$ случајне величине са функцијама расподела $G_1, \ldots, G_n$ и копулом C_T.*

$$\begin{gathered} C_T(G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n)) \\ = P(T_1(X_1) \leq x_1, \ldots, T_n(X_n) \leq x_n) \\ = P(X_1 \leq T_1{}^{-1}(x_1), \ldots, X_n \leq T_n{}^{-1}(x_n)) \\ (2) = C(F_1(T_1{}^{-1}(x_1)), \ldots, F_n(T_n{}^{-1}(x_n))) \end{gathered}$$

За свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ важи и следеће:

$$G_i(x_i) = P(T_i(X_i) \leq x_i) = P(X_i \leq T_i{}^{-1}(x_i)) = F_i(T_i{}^{-1}(x_i))$$

Заменом претходне једнакости у (2) добијамо да за све $x_1, \ldots, x_n \in \Re$ важи:

$$C_T(G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n)) = C(G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n)).$$

Теорема 2.7 *Дводимензиона копула C задовољава Липшицов услов: за све $u_1, v_1, u_2, v_2 \in [0,1]$ важи:*

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$$

Као последица, копула C је униформно непрекидна на свом домену.

Доказ 4 *Нека је C копула случајног вектора (X_1, X_2) са маргиналним расподелама F_1 и F_2. За $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$ важи:*

$$\begin{gathered} C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1) \\ = C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) \\ = P(X_1 \leq u_2, X_2 \leq v_2) - P(X_1 \leq u_2, X_2 \leq v_1) + P(X_1 \leq u_2, X_2 \leq \\ v_1) - P(X_1 \leq u_1, X_2 \leq v_1) \\ = P(X_1 \leq u_2, v_1 < X_2 \leq v_2) + P(u_1 < X_1 \leq u_2, X_2 \leq v_1) \\ \leq P(v_1 < X_2 \leq v_2) + P(u_1 < X_1 \leq u_2) \\ = F_2(v_2) - F_2(v_1) + F_1(u_2) - F_1(u_1) \end{gathered}$$

Како су F_1 и F_2 униформне расподеле на интервалу [0,1], следи:

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1) = v_2 - v_1 + u_2 - u_1.$$

Теорема 2.8 *Нека је C дводимензиона копула. За свако $v \in [0,1]$ парцијални извод $\frac{\partial C}{\partial u}(u,v)$ постоји за скоро свако $u \in [0,1]$ и важи:*

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial u}(u,v) \leq 1.$$

Аналогно $0 \leq \frac{\partial C}{\partial v}(u,v) \leq 1$. Функције $u \to \frac{\partial C}{\partial v}(u,v)$ и $v \to \frac{\partial C}{\partial u}(u,v)$ су добро дефинисане и неопадајуће скоро свуда на $[0,1]$.

Доказ 5 *Неједнакости следе на основу претходне теореме. Комплетан доказ се може наћи у* [4].

Поглавље 3

Мере зависности

Структура зависности случајних величина је у потпуности одређена њиховом заједничком функцијом расподеле. Оцене као што је линеарни коефицијент корелације обухватају само неке делове структуре зависности. Поред линеарног коефицијента, у овом поглављу биће приказани и коефицијенти корелације рангова као и њихова веза са копулама.

Обзиром да већина ризика у неживотном осигурању има расподеле са тешким реповима, не могу се адекватно представити нормалном расподелом. Веза између различитих ризика најчешће није линеарна. Због тога ослањање на Пирсонов коефицијент може довести до погрешних закључака. У том случају се користе непараметарски коефицијенти корелације Кендалово тау и Спирманово ро. Они не користе вредности података већњихове рангове. За разлику од линеарне зависности, ове мере указују на монотону зависност величина.

3.1 Пирсонов коефицијент корелације

Једна од најпознатијих мера статистичке зависности је Пирсонов (линеарни) коефицијент корелације.

Дефиниција 3.1.1 *За случајне величине X и Y са коначним дисперзијама Пирсонов коефицијент корелације је једнак*

$$(3)\ \rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

где је $cov(X,Y) = E[(X-\mu X)(Y-\mu Y)]$ коваријанса и σ стандардна девијација случајних величина.

Ова мера показује смер и јачину линеарне повезаности случајних величина али није инваријантна у односу на њихове нелинеарне трансформације. Коефицијент корелације зависи од маргиналних расподела случајних величина и у неким случајевима се не могу постићи све вредности из интервала $[-1, 1]$. Takoђе, корелација једнака нули не значи да су величине независне (ово је еквивалентно само у случају дводимензионе нормалне расподеле).

3.2 Спирманов коефицијент ρ

Дефиниција 3.2.1 *За случајне величине X и Y са функцијама расподела F_X и F_Y Спирманово ро је једнако*

$$\rho_S = \rho(F_X, F_Y)$$

где је ρ линеарни коефицијент дефинисан у (3).

Теорема 3.1 *Спирманов коефицијент корелације за вектор (X, Y) може се изразити помоћу копуле C која описује зависност између ових величина на следећи начин:*

$$\rho_S(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3$$

Доказ 6
$$\begin{aligned}\rho_S(X, Y) &= \rho(F_X, F_Y) \\ &= \frac{cov(F_X, F_Y)}{\sigma_{F_X}\sigma_{F_Y}} \\ &= \frac{E[(F_X - \frac{1}{2})(F_Y - \frac{1}{2})]}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{\frac{1}{12}}} \\ &= 12E(F_X F_Y - \frac{1}{4}) \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3\end{aligned}$$

3.3 Кендалов коефицијент τ

Кендалов коефицијент τ је непараметарска мера зависности заснована на броју слагања/неслагања у узорку парова. Нека су (x_1, y_1) и (x_2, y_2) две независне реализације случајног вектора (X, Y). Парове називамо сагласним ако се уз веће вредности једне компоненте реализују веће вредности друге компоненте тј. ако важи:

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$$

Дефиниција 3.3.1 *Нека су (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) независни случајни вектори непрекидних величина идентично расподељени као (X, Y). Кендалов коефицијент корелације рангова за случајне величине X и Y је тада једнак:*

$$\tau(X,Y) = P[(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) > 0] - P[(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) < 0].$$

Спирманов и Кендалов коефицијент корелације задовољавају следеће особине:

- Ако су X и Y независне величине, тада је $\tau(X,Y) = \rho_S(X,Y) = 0$.
- Ако су X и Y комонотоне величине, тада је $\tau(X,Y) = \rho_S(X,Y) = 1$.
- Ако су X и Y контрамонотоне, тада је $\tau(X,Y) = \rho_S(X,Y) = -1$.
- Инваријантни су у односу на монотоне трансформације случајних величина.
- Ако су t_1 и t_2 строго растуће (или строго опадајуће) функције на домену дефинисаности X и Y, важи следеће:

$$\rho_S(t_1(X), t_2(Y)) = \rho_S(X,Y)$$
$$\tau(t_1(X), t_2(Y)) = \tau(X,Y).$$

Следеће теореме показују да се Спирманов и Кендалов коефицијент корелације могу изразити помоћу копуле и према томе не зависе од маргиналних расподела:

Теорема 3.2 *Кендалов коефицијент корелације се може изразити помоћу копуле C која описује зависност између ових величина на следећи начин:*

$$\tau(X,Y) = 4\int_0^1\int_0^1 c(u,v)dC(u,v) - 1.$$

Доказ 7 *На основу особина непрекидних случајних величина важи:*

$$P\{(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) < 0\} = 1 - P\{(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) > 0\}$$
$$\textit{(4)} \Rightarrow \tau(X,Y) = 2P\{(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) > 0\} - 1$$
$$\textit{(5)}P\{(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) > 0\} = P(X_2 > X_1, Y_2 > Y_1) + P(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1).$$

Случајне величине X и X_1 односно Y и Y_1 су једнако расподељене па су вероватноће у збиру (5) *једнаке. Када претходно заменимо у једнакости* (4) *добијамо:*

$$\tau(X,Y) = 4P(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1) - 1.$$

Нека је H заједничка функција расподеле за (X_1, Y_1) тј. (X_2, Y_2) са маргиналним расподелама F за X_1 и X_2 односно G за Y_1 и Y_2. Нека је C копула вектора (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) тј. важи $H(x, y) = C(F(x), G(y))$.

Вероватноћа $P(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1)$ се може написати на следећи начин:

$$\begin{aligned} &P(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1) \\ &= \int_{\Re}\int_{\Re} P(X < x, Y < y) dH(x, y) \\ &= \int_{\Re}\int_{\Re} C(F(x), G(y)) dC(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Уводимо смене $F(x) = u$ и $G(y) = v$ и добијамо:

$$P(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1) = \int_0^1\int_0^1 C(u, v) dC(u, v).$$

Коначно важи:

$$\tau(X, Y) = 4\int_0^1\int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Интеграл у претходној формули је математичко очекивање функције $C(U, V)$, где су U и V униформне случајне величине са заједничком функцијом расподеле C. Кендалово тау се према томе може записати као

$$\tau(X, Y) = 4E[C(U, V)] - 1.$$

3.4 Зависност екстремних догађаја

Сви наведени коефицијенти су скаларне величине које мере јачину зависности. Међутим, њихов недостатак је то што не указују на то како зависност варира кроз расподелу.

Екстремне ситуације као што су на пример финансијска криза или земљотрес (представљају десни реп расподеле) доводе до истовремене реализације ризика за које се иначе сматра да су некорелисани или са слабом корелацијом (финансијски губици у различитим врстама осигурања: имовина, незгода, одговорност итд). Због тога је важно видети како се зависност понаша на репу расподеле.

Дефиниција 3.4.1 *Нека је (X, Y) вектор са маргиналним функцијама расподела F_X и F_Y. Дефинишемо десни коефицијент екстремалне зависности:*

$$\lambda_U(X,Y) = \lim_{u\to 1} P(Y > {F_Y}^{-1}(u) | X > {F_X}^{-1}(u)),$$

ако $\lambda_U \in [0,1]$ *постоји.*

Леви коефицијент екстремалне зависности:

$$\lambda_L(X,Y) = \lim_{u\to 0} P(Y < {F_Y}^{-1}(u) | X < {F_X}^{-1}(u)),$$

ако $\lambda_L \in [0,1]$ *постоји.*

Може се показати да у дводимензионом случају ако наведени лимеси постоје, важи

$$\lambda_U(X,Y) = \lim_{u\to 1} \tfrac{1-2u+C(u,u)}{1-u}$$
$$\lambda_L(X,Y) = \lim_{u\to 0} \tfrac{C(u,u)}{u}.$$

За разлику од претходних мера, зависност на репу расподеле посматра екстремне вредности случајних величина. Позитивна зависност десног репа расподеле интуитивно значи да се са великим вредностима једне случајне величине очекује реализација великих вредности друге променљиве. Аналогно, зависност левог репа расподеле означава велику вероватноћу да обе променљиве истовремено постижу мале вредности.

Поглавље 4

Фамилије копула

Копуле имају велики број фамилија са различитим карактеристикама што им даје предност при моделирању структура зависности. У овом поглављу су представљене најважније фамилије копула. Обзиром на то да се не разликују много по степену зависности који обезбеђују већпо томе у ком делу расподеле је зависност најјача, посебан осврт је на зависности екстремних догађаја.

4.1 Елиптичке копуле

Најчешће се користе Гаусова и студентова расподела. Вектор X има елиптичку расподелу ако се може приказати у облику

$$X = \mu + RAU$$

где је $\mu \in \Re^n$ вектор локације, $\Sigma = AA^T$ коваријациона матрица, U случајни вектор униформно расподељен на сфери $S^{n-1} = \{u \in \Re^n; {u_1}^2 + \ldots + {u_n}^2 = 1\}$ и $R \geq 0$ случајна величина независна од U.

Функција густине елиптичких расподела је за свако $x \in \Re^n$ једнака

$$f(x) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} f[(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)].$$

Елиптичке копуле су копуле елиптичких расподела: нека је F вишедимензиона елиптичка функција расподеле и $F_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ маргиналне расподеле са инверзима ${F_i}^{-1}$. Тада је елиптичка копула функција

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = F({F_1}^{-1}(u_1), {F_2}^{-1}(u_2), \ldots, {F_n}^{-1}(u_n)).$$

Моделирају се на основу одговарајућих вишедимензионих расподела применом Скларове теореме. Елиптичким копулама се не могу на адекватан начин приказати асиметрични подаци - у већини осигуравајућих друштава и финансијских институција већа је зависност између великих губитака него између великих добитака. Фамилије елиптичких расподела имају велику примену у статистици и моделирању финансијских података услед њихове једноставне имплементације.

4.1.1 Гаусова копула

Гаусова (нормална) копула је копула вишедимензионе нормалне расподеле. У случају n-димензионе Гаусове расподеле са корелационом матрицом Σ, копула има облик

$$C_\Sigma(u) = \phi_\Sigma(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_n)),$$

где је ϕ_Σ n-димензиона нормална расподела а ϕ^{-1} инверз стандардне нормалне функције расподеле.

Код Гаусове копуле екстремне вредности случајних величина су асимптотски независне (без обзира који коефицијент корелације се изабере не постоји зависност на репу) па није погодна за моделирање расподела са тешким реповима.

4.1.2 Студентова копула

Копула вишедимензионе Студентове расподеле је t-копула. Вектор X има n-димензиону Студентову расподелу са ν степени слободе ако има репрезентацију

$$X = \mu + \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{S}} Z,$$

где је $\mu \in \Re^n$ вектор очекивања, S случајна величина са ${\chi_\nu}^2$ расподелом независна од $Z \in N_n(0, \Sigma)$.

Тада Студентова копула са корелационом матрицом Σ има облик

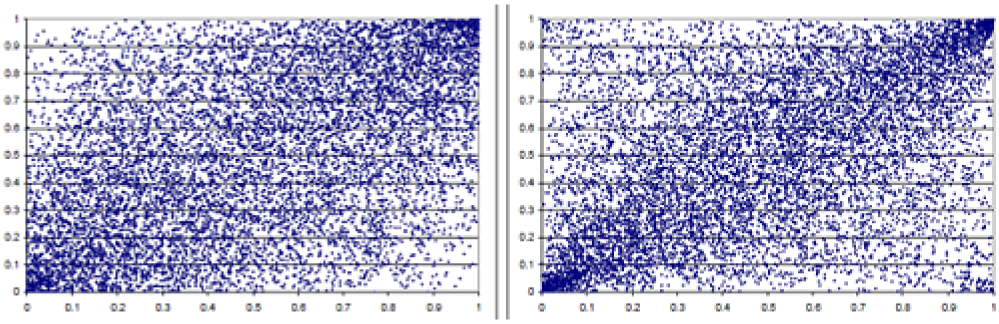
$$C_{\nu,\Sigma}(u) = t_{\nu,\Sigma}({t_\nu}^{-1}(u_1), \dots, {t_\nu}^{-1}(u_n)),$$

где је t_ν једнодимензиона и $t_{\nu,\Sigma}$ n-димензиона Студентова расподела са ν степени слободе.

За разлику од Гаусове копуле, t-копула има репну зависност. Обзиром да је расподела симетрична, коефицијенти су једнаки:

$$\lambda_U = \lambda_L = 2t_{\nu+1}(-\sqrt{\tfrac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}).$$

Степен асимптотске зависности је одређен бројем степени слободе. Што је број степени слободе мањи то је зависност на репу расподеле већа. Кад $\nu \to \infty$ ова копула је блиска Гаусовој. На следећој слици су приказане дводимензионе t-копуле са истим коефицијентом корелације и бројем степени слободе $\nu = 20$ односно $\nu = 2$.



Слика 4.1: Дводимензиона студентова t-копула са бројем степени слободе 20 и 2

4.2 Архимедове копуле

За разлику од копула које се добијају из вишедимензионе функције расподеле, примери из ове фамилије су најпопуларније копуле задате експлицитно. Архимедове копуле имају облик:

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \ldots + \varphi(u_n)),$$

где је φ непрекидна, опадајућа, конвексна функција $\varphi : [0, 1] \to [0, \infty]$, $\varphi(1) = 0$ која се назива генератор копуле.

Чињеница да су све информације о структури зависности садржане у генератору φ (није потребна корелациона матрица) их чини једноставним за моделирање па имају широку примену. Како се користи само један параметар, за димензије $n \geq 2$ то значи да су сви елементи корелационе матрице једнаки. За разлику од елиптичких, копуле из ове фамилије су асиметричне па омогућавају моделирање расподела код којих се зависност јавља на једном репу расподеле. Навешћемо неколико примера из ове фамилије копула:

4.2.1 Клејтонова копула

Функција која генерише копулу је једнака

$$\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1) \text{ за } \theta \in [-1, \infty)\backslash\{0\}.$$

Ове копуле имају зависност на левом репу расподеле, коефицијент је једнак $\lambda_L = 2^{-1/\theta}$. Кад $\theta \to 0$ једнаке су копули независности, кад $\theta \to \infty$ горњој Фреше-Хефдинговој граници, за $\theta = -1$ добија се доња граница.

4.2.2 Френкова копула

Генератор копуле је једнак

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\theta}log(1 - (1 - e^{-\theta})e^{-t}), \text{ где је } \theta \in \Re\backslash\{0\}.$$

Овим копулама се не може описати зависност на репу расподеле.

4.2.3 Гумбелова копула

Функција генератор копуле је једнака

$$\varphi(t) = (-logt)^{\theta}, \text{ где је } \theta \in [1, \infty).$$

За границу $\theta = 1$ једнака је копули производа, а када $\theta \to \infty$ горњој Фреше-Хефдинговој граници. Ове копуле имају изражену зависност у горњем репу расподеле, коефицијент је једнак $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$. На слици 4.2 су приказане дводимензионе Клејтонова, Френкова и Гумбелова копула са параметром $\theta = 2$.

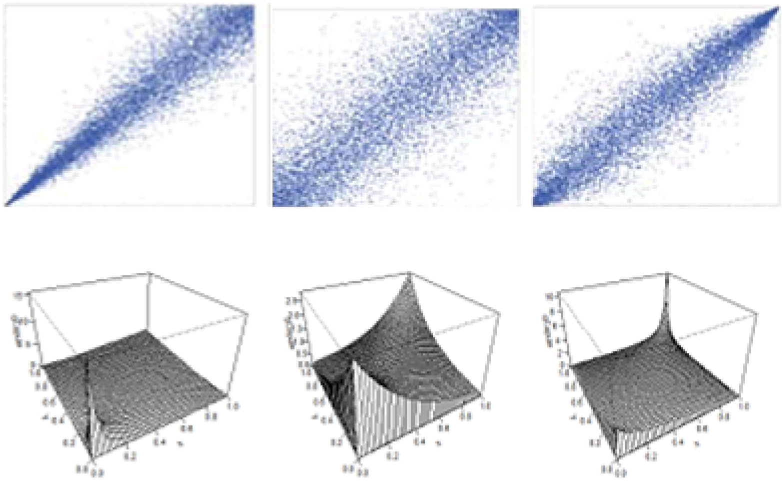
4.2.4 Емпиријске копуле

Дефиниција 4.2.1 *Нека је дат узорак $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ обима n неке дводимензионе непрекидне случајне величине. Емпиријска копула је функција C_n дата са*

$$C_n(\tfrac{i}{n}, \tfrac{j}{n}) = \frac{\textit{број парова } (x,y) \textit{ таквих да } x \leq x_{(i)}, y \leq y_{(j)}}{n}$$

где су $x_{(i)}$ и $y_{(j)}$ статистике поретка из узорка. Фреквенција емпиријске копуле је функција c_n дефинисана са

$$c_n(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \textit{ако је} (x_{(i)}, y_{(j)}) \textit{елемент из узорка} \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$



Слика 4.2: Клејтонова, Френкова и Гумбелова дводимензиона копула са параметром 2

Можемо да приметимо да су емпиријска копула C_n и њена фреквенција c_n повезане на следећи начин:

$$C_n(\tfrac{i}{n}, \tfrac{j}{n}) = \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=1}^{j} c_n(\tfrac{p}{n}, \tfrac{q}{n}).$$

Навешћемо теорему која говори о повезаности емпиријских копула и мера као што су Кендалово τ и Спирманово ρ.

Теорема 4.1 *Нека су дате емпиријска копула C_n и њена фреквенција c_n. Ако са ρ и τ обележимо узорачке вредности Спирмановог коефицијента ρ и Кендаловог коефицијента τ, тада је*

$$\rho = \tfrac{12}{n^2-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_n(\tfrac{i}{n}, \tfrac{j}{n}) - \tfrac{i}{n}\tfrac{j}{n}$$
$$\tau = \tfrac{2n}{n-1} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{q=1}^{j-1} [c_n(\tfrac{i}{n}, \tfrac{j}{n})c_n(\tfrac{p}{n}, \tfrac{q}{n}) - c_n(\tfrac{i}{n}, \tfrac{q}{n})c_n(\tfrac{p}{n}, \tfrac{j}{n})].$$

Поглавље 5

Примена копула у неживотном осигурању

Осигуравајућа друштва се суочавају са бројним ризицима који могу изазвати финансијске губитке: тржишни, кредитни, оперативни, ризици осигурања итд. У интерним моделима копуле се користе за одређивање зависности ризика и њихову агрегацију. Највећу примену имају у области управљања ризицима: у стрес тестовима, за алокацију капитала, моделирање екстремних вредности вишедимензионих расподела итд.

Капитални захтев представља процењену количину капитала коју компанија мора да поседује како би могла да дугорочно покрије поменуте ризике и измирује преузете обавезе. За одређивање износа неопходног капитала потребно је квантификовати ризике са којима се друштво суочава и одредити њихову зависност.

У неживотном осигурању најважнији је ризик осигурања који обухвата ризик довољности премије и ризик резервисања. Ризик премије говори о могућности да зарађена премија није довољна за надокнаду штета. Ризик потиче од одступања будућих штета од њихове очекиване вредности која је основни елемент за одређивање премије. Ризик резервисања представља неизвесност у погледу исплата за штете које су настале али још увек нису решене. Извор ризика су грешке у процени резерви за штете.

У овом поглављу је илустрована примена копула у неживотном осигурању за налажење расподеле која описује заједничко понашање ризика премије и ризика резервисања. Поступак се састоји у следећем:

1. Оцена маргиналних расподела на основу историјских података

2. Избор фамилије копула и оцена непознатог параметра

3. Обрачун капиталног захтева.

5.1 Подаци

У раду су коришћени подаци српског осигуравајућег друштва о штетама насталим на имовини од пожара, реализованим од 2008. до 2016. године. Сви износи штета су помножени константом ради анонимизације.

У пракси се за описивање износа штета користе гама и логнормална расподела.

Колмогоров-Смирнов тест је непараметарски тест који се у случају једног узорка користи за проверу да ли узорак припада одређеној теоријској расподели. Може се применити само на непрекидне расподеле. Тест статистика представља највеће растојање између емпиријске функције расподеле узорка $F_n(x)$ и теоријске функције расподеле $F(x)$:

$$D_n = \max |F_n(x) - F(x)|$$

Бира се расподела која даје најмању вредност тест статистике.

Од понуђених расподела одабрана је гама расподела која даје најмање Колмогоровљево растојање D_n од узорачких вредности штета. Вредности тест статистика су дате у следећој табели:

	Гама расподела	Логнормална раподела
К–С тест статистика	0.247	0.275

Табела 5.1: Вредности Колмогоров - Смирнов тест статистике за ризик премије

Гама расподела је непрекидна расподела чија функција густине има облик:

$$f(x) = \frac{1}{b\Gamma(\alpha)} \frac{x}{b}^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{b}}, x \geq 0$$

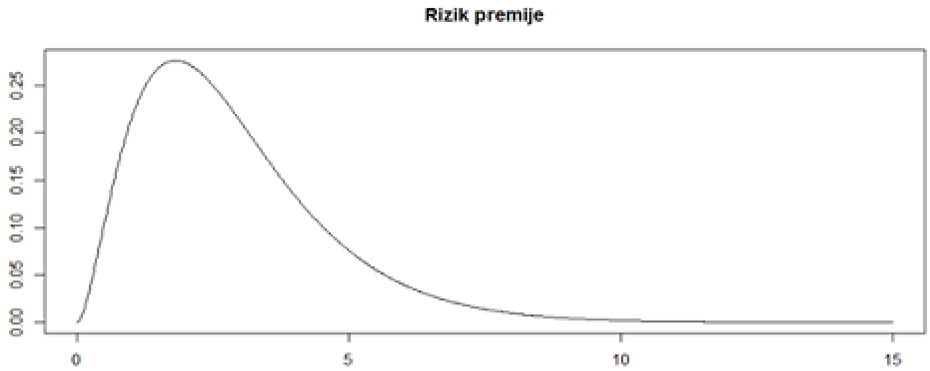
где је $\alpha > 0$ параметар облика и $b > 0$ параметар размере. Математичко очекивање је једнако αb, а стандардна девијација αb^2. За $\alpha = 1$ једнака је експоненцијалној расподели.

На основу историјских података методом момената су оцењени следећи параметри гама расподеле:

	Параметар облика	Параметар скалирања
Гама расподела	$\alpha = 2.72$	$b = 1.05$

Табела 5.2: Параметри гама расподеле оцењени методом момената

Густина гама расподеле са оцењеним параметрима је приказана на следећој слици:



Слика 5.1: Густина гама расподеле - ризик премије

Основна обележја одабране расподеле су дата у следећој табели:

Минимум	Максимум	Очекивање	Стандардно одступање
0.14	15.78	2.86	1.73

Табела 5.3: Обележја одабране гама расподеле

Општеприхваћено је да се ризик резервисања у индустрији осигурања описује логнормалном расподелом. Непознати параметри се оцењују актуарским методама. Логнормална расподела је непрекидна расподела чији логаритам има нормалну расподелу. Расподела узима позитивне реалне вредности, назива се и Галтонова расподела. Има примену у биологији и медицини, хидрологији, демографији и економији. Ако је Z случајна величина са стандардном нормалном расподелом, тада се случајна величина X са логнормалном расподелом може записати као $X = e^{\mu + \sigma Z}$, где су μ и σ очекивање и стандардна девијација природног логаритма ове променљиве. Густина расподеле има облик

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{lnx-\mu}{2\sigma^2}}, x > 0$$

где је $\mu \in \Re$ параметар облика и $\sigma > 0$ параметар скалирања.

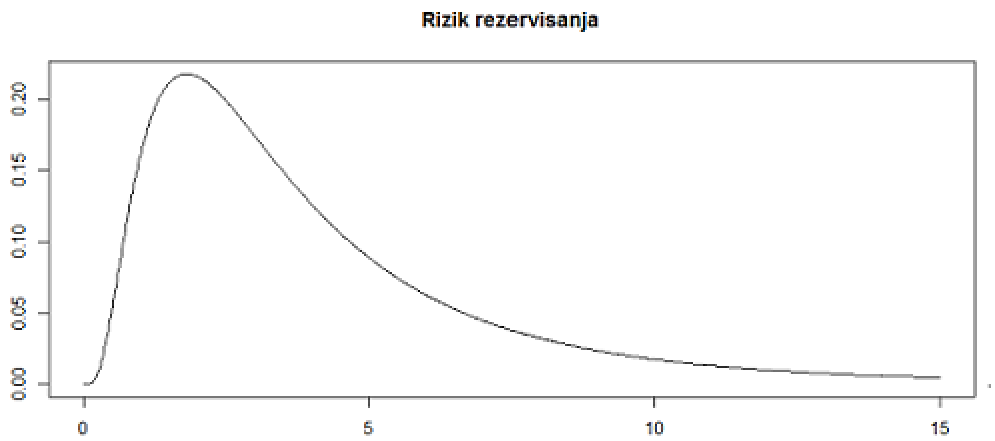
Математичко очекивање је једнако $e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$, а стандардна девијација $\sqrt{(e^{\sigma^2})e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}$.

У моделу ће бити коришћена расподела из следеће табеле:

	Параметар облика	Параметар скалирања
Логнормална расподела	$\mu = 1.17$	$\sigma = 0.76$

Табела 5.4: Оцењени параметри логнормалне расподеле ризик резервисања

На слици је приказана густина логнормалне расподеле којом описујемо ризик резервисања:



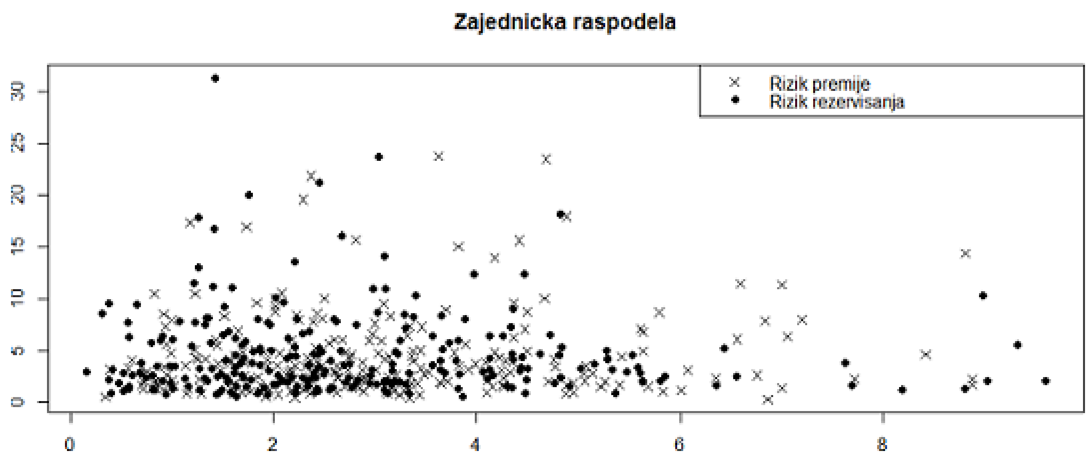
Слика 5.2: Густина логнормалне расподеле – ризик резервисања

Основне информације о одабраној расподели су дате у следећој табели:

Минимум	Максимум	Очекивање	Стандардно одступање
0.92	91.67	4.30	3.81

Табела 5.5: Обележја одабране логнормалне расподеле

Негативни догађаји у једној категорији ризика (недовољна премија за покриће штета) могу изазвати негативне догађаје у другој категорији (недовољна резервација за штете) па се не може претпоставити независност измеу различитих врста ризика. Међутим, претпоставка о потпуној зависности значајно повећава количину потребног капитала. Према томе важан задатак је адекватно одредити зависност између ризика премије и ризика резервисања. Претпоставља се да не постоје негативне корелације: ризик у једној категорији не може умањити ризик у другој. На следећој слици приказана је заједничка расподела за случајно генерисане узорке одабраних расподела:



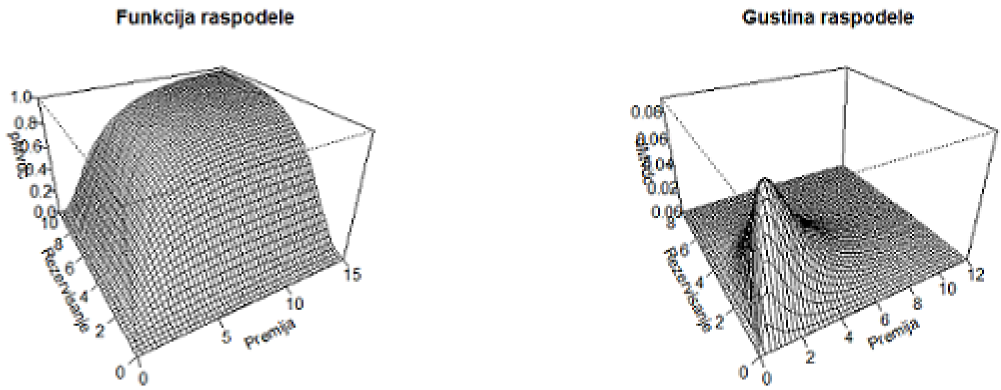
Слика 5.3: Заједничка расподела ризика премије и ризика резервисања

На основу реализованог узорка одређен је Спирманов коефицијент корелације рангова $0,46$.

5.2 Гаусова копула

У пракси се за описивање зависности ризика у осигурању користи Гаусова копула. Она је једноставна за конструкцију и не захтева процену додатних параметара. Као критика овог приступа избору копуле се најчешће наводи могућа потцењеност капиталног захтева, јер Гаусова копула указује на мању зависност екстремних вредности од на пример t-копуле. Један од приступа који се често користи у пракси за решење овог проблема је да се за моделирање копуле користе корелације веће од оних које су оцењене на основу емпиријских података. Међутим, иако овај приступ повећава капитални захтев, он не мења асимптотску зависност. Прикупљени подаци обухватају релативно кратак период па нема довољно штета за моделирање екстремних вредности. Због тога користимо други, адекватнији приступ: капитални захтев за катастрофалне штете које припадају десном репу расподеле се рачуна независно од осталих ризика, на основу тржишних вредности.

За конструкцију копула користимо пакет *Copula* из *R* софтвера. Функције из овог пакета су детаљно описане у [36]. На следећој слици су приказане дводимензиона функција расподеле и одговарајућа густина добијене Монте Карло симулацијама Гаусове копуле, са задатим маргиналним расподелама и Спирмановим коефицијентом корелације.

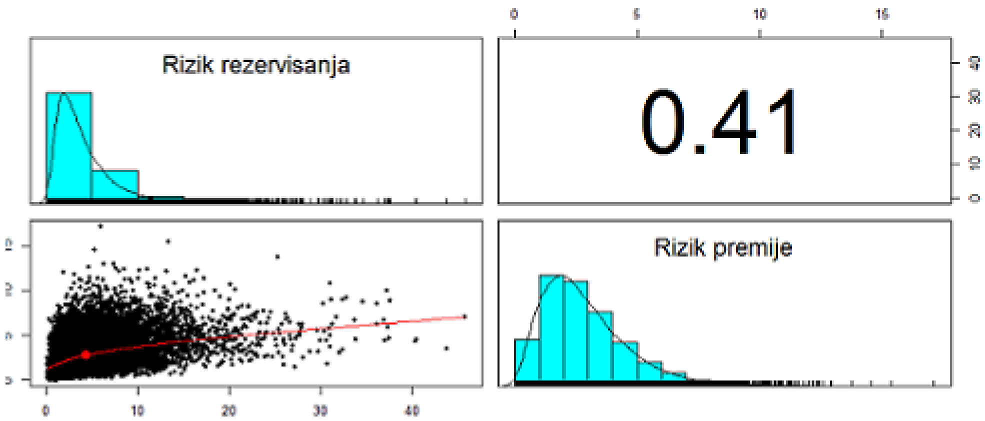


Слика 5.4: Функција расподеле и густина одабране Гаусове копуле

Расподеле ризика премије и ризика резервисања добијене као маргиналне расподеле из Гаусове копуле, као и њихова корелациија приказане су на слици 5.5:

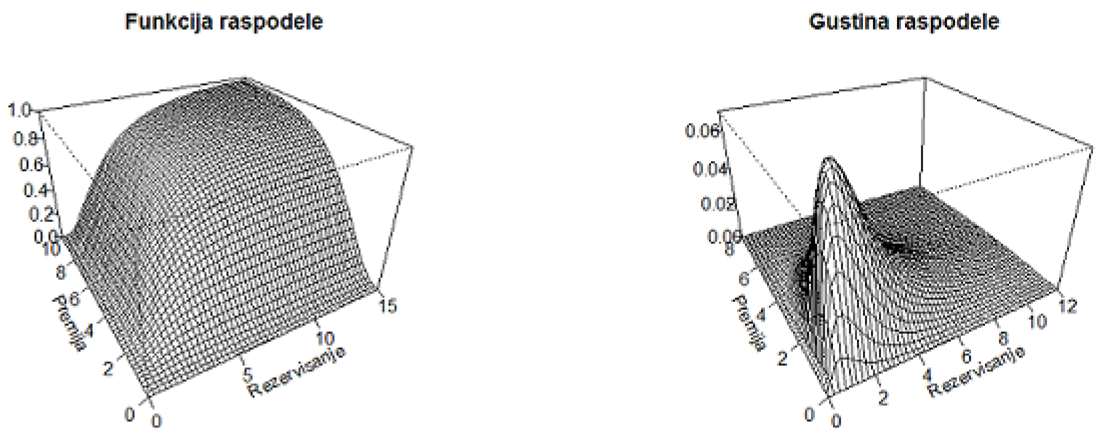
5.3 Студентова t копула

За тестирање адекватности модела се као алтернативни модел обично бира студентова t-копула. Међутим, она захтева додатни параметар (број степени слободе), чију вредност је тешко интуитивно проценити. Један од алгоритама за оцену је да се итеративно рачуна број степени слободе док се не добије копула код које је корелација једнака оцењеном



Слика 5.5: Гаусова копула - маргиналне расподеле и њихова корелација

Спирмановом коефицијенту. На следећој слици је приказана дводимензиона функција расподеле и густина за t-копулу са 10 степени слободе, задатим маргиналним расподелама и коефицијентом корелације.



Слика 5.6: Функција расподеле и густина t-копуле са 10 степени слободе

Тренутно најпопуларнија мера за одређивање ризика је максимални губитак у портфељу за задати ниво поверења. Назива се вредност под ризиком[1] и у смислу вероватноће једноставно представља одређени квантил расподеле. Најчешће се користи 99.5 квантил који указује да је вероватноћа да осигуравајуће друштво не може да измири обавезе мања

[1]Енг. *Value–at–Risk*

од 0.05%. У следећој табели је дат капитални захтев добијен моделирањем Гаусове и студентове t-копуле са различитим бројем степени слободе, као и капитални захтев у случају претпоставке да су ризик премије и ризик резервисања потпуно зависни.

	Гаусова копула	Т-копула			Потпуна зависност
		$df = 50$	$df = 10$	$df = 2$	
Вр. под ризиком	24.41	32.34	33.11	37.56	49.88

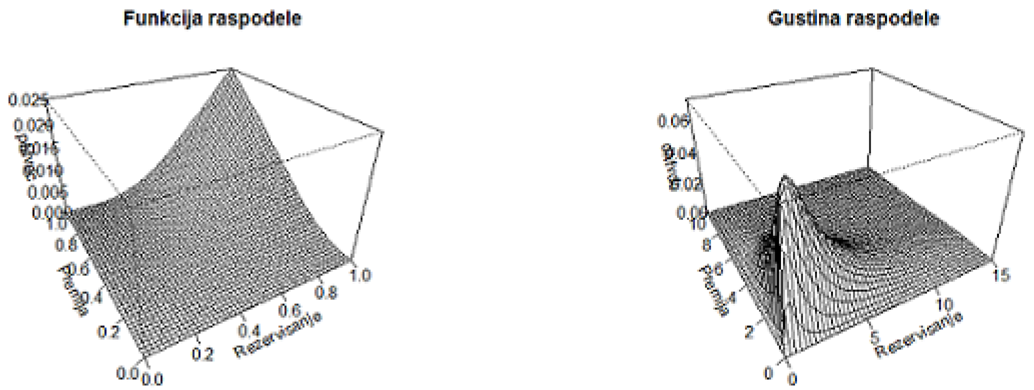
Табела 5.6: Капитални захтев добијен различитим методама

Као што је и очекивано, t-копула због дебљег репа расподеле даје значајно већи капитални захтев у односу на Гаусову копулу (и до 35%). Међутим, очигледно је и да резултат добијен помоу t-копуле у великој мери зависи од одабира слободног параметра. Ако је број степени слободе 2 моделирани ризик је веи 35% док се са повећањем степени слободе он приближава резултату из Гаусове копуле. У оба случаја, капитални захтев је значајно мањи него ако претпоставимо да су ризици потпуно зависни и као резултат узмемо њихов збир. Иако се претходне копуле најчешће примењују у индустрији осигурања, проверићемо која копула највише одговара подацима. Користимо функцију *BiCopSelect()* из пакета *VineCopula*. Функције из овог пакета су детаљно описане у [29].

Поменута функција оцењује непознате параметре за све доступне дводимензионе фамилије копула методом максималне веродостојности. Идеја овог метода је да се изабере вредност параметра при којој је вероватноћа реализације добијеног узорка највећа . Након што су оцењени параметри расподела, за сваку тако добијену копулу се рачуна вредност Акаикеовог информационог критеријума. Акаике информациони критеријум служи за одабир модела који најбоље одговара емпиријским подацима. Вредност критеријума је једнака

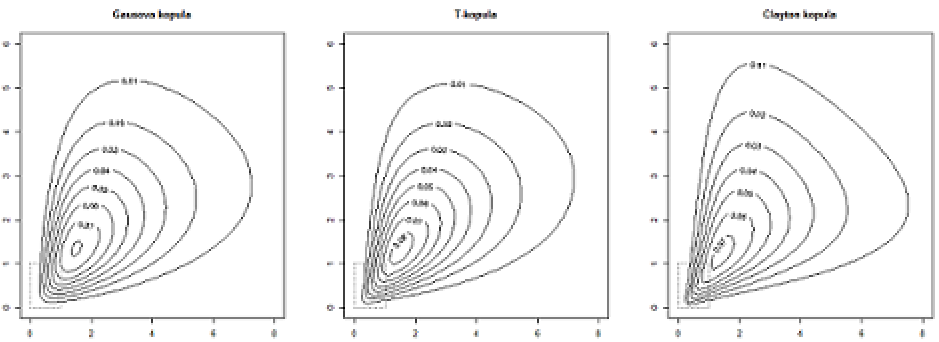
$$AIC = 2k - 2\sum_{i=1}^{N} ln[C(u_i, v_j|\theta)]$$

где су $u_i, v_i, i = 1, 2, \ldots, N$ елементи из узорка, C ознака одговарајуће копуле, k број непознатих параметара и $\hat{\theta}$ њихова оцена. Бира се копула који даје најмању вредност информационог критеријума. Квалитет статистичке оцене зависи од правилног избора маргиналних расподела. Када је задата фамилија копула, за оцену параметара се може користити и функција *fitCopula()* из пакета *Copula*. За гама и логнормалну копулу са оцењеним параметрима одабрана је Клејтонова копула кодирана бројем 3. Параметар θ је оцењен са -0.63. На следећој слици су приказане функција расподеле и одговарајућа густина.



Слика 5.7: Функција расподеле и густина Клејтонове копуле

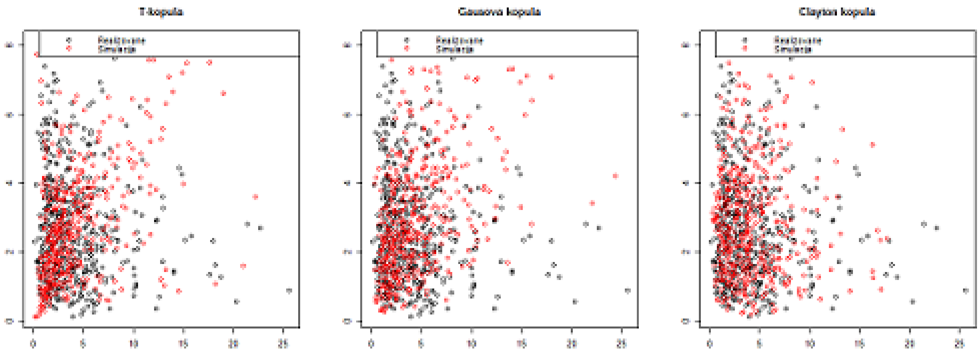
Вредност под ризиком одређена помоћу Клејтонове копуле износи 24.21 што је слично резултату добијеном из Гаусове копуле. На следећем графику може се уочити изражена асимптотска зависност на левом репу расподеле код оцењене Клејтонове копуле.



Слика 5.8: Поређење асимптотске зависности код оцењених копула

На следећој слици су приказане вредности симулиране из поменутих копула у поређењу са вредностима које су кориштене за њихов одабир.

На основу графика закључујемо да моделиране вредности на адекватан начин осликавају реализоване вредности ризика, мада екстремне вредности ризика премије могу бити благо потцењене.



Слика 5.9: Реализоване и моделиране вредности

У пракси се доста пажње посвећује одабиру маргиналних расподела и одговарајуће копуле, међутим ретко се проверава колико добро модел осликава реализоване податке. Функција *GofCopula()* из пакета *Copula()* користи Крамер-фон-Мизес тест за оцену расподеле. Дводимензиона расподела која одговара одабраној копули се пореди са емпиријском копулом. На основу п-вредности теста закључујемо да се ни за једну од посматраних копула не одбацује хипотеза о адекватности расподеле. Такође, све копуле дају сличне вредности тест статистика.

	Гаусова копула	Т-копула	Клејтонова копула
p-вредност	0.55	0.68	0.72
Тест статистика	0.0234	0.0205	0.02

Табела 5.7: Резултати Крамер - фон - Мизес теста

У случају да су катастрофалне штете које представљају десни реп расподеле укључене у узорак коришћен за анализу, резултати су значајно другачији. Гаусова копула у том случају потцењује вредност ризика јер не осликава на адекватан начин реп расподеле. Тада на основу p-вредности теста одбацујемо адекватност модела Гаусове копуле. И у овом случају ризик се најбоље описује Клејтововом дводимензионом копулом.

	Гаусова копула	Т-копула	Клејтонова копула
p-вредност	0.0257	0.129	0.247

Табела 5.8: Резултати Крамер - фон - Мизес теста

Поглавље 6

Закључак

У раду је дефинисан појам копула, наведене су њихове основне особине и веза са другим мерама зависности. Представљене су границе у оквиру којих копуле узимају вредности као и случајеве у којима се оне постижу. Дефинисана је Скларова теорема која повезује копуле са вишедимензионим функцијама расподеле и представља основу за њихово моделирање. Приказане су фамилије копула које имају најширу примену (елиптичке, Архимедове и емпиријске копуле) и њихово понашање на репу расподеле.

Други део рада се бави примером примене копула у области управљања ризика у неживотном осигурању. Одређене су маргиналне расподеле за ризик премије и ризик резервисања као и њихов коефицијент корелације. Заједничка расподела је описана уз помоћГаусове копуле која у индустрији представља стандард за моделирање ризика осигурања. Поред тога резултати су добијени и t-копулом која служи као алтернатива у стрес тестовима. Уочавамо да Гаусова копула даје значајно повољније вредности за компанију, што међутим може значити потцењеност ризика ако нису на адекватан начин обрађене екстремне вредности расподела. Са друге стране, резултати t-копуле у великој мери зависе од броја степени слободе, а овај параметар је тешко проценити.

Функције из софтвера *R* су коришћене за оцену копуле која у статистичком смислу најбоље одговара подацима из посматраног узорка. Одабрана је Клејтонова копула из Архимедове фамилије. Овако добијен капитални захтев је сличан резултатима из Гаусове копуле, осим што показује асимптотску зависност на левом репу расподеле.

Тестови сагласности показују да се све три поменуте копуле могу прихватити за описивање ризика. Закључујемо да уколико су екстремне вредности података независно обрађене, Гаусова копула је адекватна за одређивање капиталног захтева у неживотном осигурању.

Литература

[1] A. Chernih, M. Maj, S. Vanduffel,Beyond Correlations: The Use and Abuse of Copulas in Economic Capital Calculations (Vol. 7), Belgian Actuarial Bulletin, 2007.

[2] U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato, Copula Methods in Finace, Wiley Finance Series, 2004.

[3] G. DallAglio, S. Kotz, G. Salinetti, Advances in Probability Distributions with Given Marginals (Vol. 67), Mathematics and Its Applications, 1991.

[4] F. Durante, C. Sempi, Copula Theory: an Introduction, Copula Theory and its Applications, 2009.

[5] F. Durante, J. Fernndez-Snchez, R. Pappad, Copulas, diagonals and tail dependence (Vol. 264), Fuzzy Sets and Systems, 2015.

[6] D. Djoric, J. Malisic, J. Jevremovic, E. Nikolic, Atlas Raspodela, Gradjevinski fakultet, 2007.

[7] P. Embrechts, Copulas: A Personal View (Vol. 76), Journal of Risk and Insurance, 2009.

[8] P. Embrechts, A. McNeil, D. Straumann, Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls, Risk Management Value at Risk and Beyond, Cambridge University Press, 176–223, 2002.

[9] P. Embrechts, A. Hoing, A. Juri, Using copulae to bound the Value–at–Risk for functions of dependent risks, Finance and Statistics , 145-167, 2003.

[10] P. Embrechts, F. Lindskog, A. McNeil, Modelling dependence with copulas and applications to risk management, Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, 331-385, 2003.

[11] M.R. Frechet, Sur les tableaux de correlation dont les marges sont donnees, Univ. Lyon, 53-84, 1951.

[12] E.W. Frees, E.A. Valdez, Understanding Relationships Using Copulas (Vol. 2), North American Actuarial Journal, 1–25

[13] G. Frahm, M. Junker, A. Szimayer, Elliptical copulas: applicability and limitations, Stat. Probab. Lett, 275-286, 2003.

[14] C. Genest, A.C. Favre, Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask (Vol. 12), J. Hydrol. Eng, 347-368, 2007.

[15] C. Genest, J. MacKay, The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals, American Statistician, 280–283, 1986.

[16] W. Hoeffding, Mastabinvariante Korrelationstheorie, Schriften des Mathematischen Institutsund, Universitt Berlin 5(3), 179-233, 1940.

[17] H. Joe, Multivariate Models and Dependence Concepts (Vol. 73), Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, 1997.

[18] H. Joe, Parametric families of multivariate distributions with given margins, J.Multivar.Anal, 262-282, 1993.

[19] D. X. Li, On Default Correlation: A Copula Function Approach (Vol. 9), Journal of Fixed Income, 43–54, 2000.

[20] A. J. McNeil, Sampling Nested Archimedean Copulas (Vol. 78), Journal of Statistical Computation and Simulation, No. 6, 2007.

[21] A. J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts, Quantitative Risk Management Concepts, Techniques and Tools, Princeton Series in Finance, Princeton University Press, 2005.

[22] T. Mikosch, Copulas: tales and facts, Extremes 9(1), 320 , 2006.

[23] R. B. Nelsen, Copulas, Characterization, Correlation and Counterexamples (Vol. 68), Mathematics Magazine, 193–198, 1995.

[24] R. B. Nelsen, An Introduction to Copulas (Vol. 139), Lecture Notes in Statistics, Springer, 1999.

[25] D. B. Ntwiga, Copulas in Finance, African Institute for Mathematical Sciences, 2004.

[26] C. K. Rakotomalala, F. Maurer, Copulas in Finance Ten Years Later (Vol. 29), The Journal of Applied Business Research, 2013.

[27] L. Ruschendorf, Mathematical Risk Analysis: Dependence, Risk Bounds, Optimal Allocations and Portfolios, Springer Series In Operations Research And Financial Engineering, 2013.

[28] L. Ruschendorf, On the distributional transform, Sklar's Theorem, and the empirical copula process (Vol. 139), Journal of Statistical Planning and Inference, 3921–3927, 2009.

[29] U. Schepsmeir, E. C. Brechmann, Copulas: The R package CDVine (Vol. 52) , Journal of Statistical Software, 2013.

[30] B. Schweizer, E. F. Wolff, On nonparametric measures of dependence for random variables, Ann. Stat, 879-885, 1981.

[31] T. Schmidt, Coping with copulas: From Theory to Application in Finance, Risk Books, 2006.

[32] A. Sklar, Fonctions de repartition dimensions et leurs marges, Publ Inst Statist Univ Paris, 229–231, 1959.

[33] A. Sklar, Random Variables, Joint Distribution Functions and Copula (Vol. 9), Kybernetika, 1973.

[34] A. Tang, E. A. Valdez, Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas, Proceedings of the 28th International Congress of Actuaries, Paris, 2006.

[35] G. G. Venter, Tails of copulas, Proceedings ASTIN Washington, 68-113, 2001.

[36] J. Yan, Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula (Vol. 21), Journal of Statistical Software, 2007.

Биографија:

Маријана Авалић је рођена 30. октобра 1992. године у Новој Вароши. Гимназију Пиво Караматијевић у Новој Вароши је завршила 2011. године као вуковац. Школске 2011/12 године уписала је Математички факултет у Београду, смер Статистика, актуарска и финансијска математика на ком је дипломирала 2015. године. Након завршеног факултета је почела да ради у осигурању у области управљања ризицима.